

П. А. Лукаш

# ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ



П. А. ЛУКАШ



ОСНОВЫ  
НЕЛИНЕЙНОЙ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ  
МЕХАНИКИ



МОСКВА  
СТРОИИЗДАТ  
1978

Основная задача строительной механики — создание таких методов расчета конструкций на прочность, устойчивость и жесткость, которые обеспечивали бы безопасность сооружений и их экономичность.

В рамках этой общей и неизменной (на протяжении всего времени развития строительной механики) формулировки представления о главных принципах решения основной задачи существенно изменялись.

Основатель строительной механики Галилей в 1638 г. сформулировал принцип предельного равновесия, из которого следовало, что основной задачей строительной механики является определение нагрузок, разрушающих конструкцию. Этот принцип мало способствовал созданию практически полезных методов расчета, и в первой четверти XIX в. Навье выдвинул более плодотворную идею расчета по рабочему состоянию.

С этого времени основная задача расчета конструкций формулируется как задача определения напряженного (деформированного) состояния, вызванного действием эксплуатационных нагрузок.

Одновременно с идеей расчета конструкций по рабочему состоянию Навье предложил принцип расчета по заданному (начальному) недеформированному состоянию (а не по неизвестному деформированному состоянию). Согласно этому принципу отождествляются форма и размеры конструкций до и после деформации. Предложенный Навье принцип, называемый также принципом малости перемещений, совместно с законом Гука позволил применить для решения основной задачи строительной механики методы линейной теории.

Благодаря этим двум принципам строительная механика превратилась в «основу инженерных наук». На их основе решено большое число задач по исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций всех типов: стержневых, двухмерных и массивных. Было создано также большое число хорошо обоснованных теоретически методов расчета, в частности была разработана методика расчета по допускаемым напряжениям, обеспечивающая безопасность сооружений.

Однако развитие на этой основе линейной строительной механики, а также стремление достигнуть наибольшей экономичности конструкций привело в начале XX в. к возрождению метода предельного равновесия на новом, качественно более высоком уровне. Новый метод предельного равновесия вобрал в себя необходимые для его развития достижения строительной механики, теории упругости, теории пластичности и других разделов механики твердого тела.

Синтез обоих методов предельного равновесия и расчета по рабочему состоянию позволил в наше время сформулировать основную задачу строительной механики в более широком плане: расчет конструкций должен дать исчерпывающее представление об их работе на всех этапах нагружения (включая и этап разрушения). Таким образом, к теории предъявляется требование — уметь предсказать и описать поведение конструкции при всевозможных условиях и в любой период ее существования. Иными словами, напряженно-деформированное состояние конструкции должно рассматриваться как физический процесс.

Очевидно, что в таком широком плане эта задача не может быть решена методами **линейной строительной механики**, так как положенные в ее основу два принципа (вместе с законом Гука) ограничивают ее возможности. Действительно, форма и размеры конструкции при определенных нагрузках существенно изменяются, и принцип малости перемещений становится неприемлемым. Далее, начиная с определенного уровня напряженного состояния закон Гука у всех материалов перестает соблюдаться и заменяется нелинейной зависимостью между напряжениями и деформациями. Отсюда следует, что для решения основной задачи расчета конструкций в широком плане нужно отказаться от простых предпосылок линейной теории и перейти к более широким и сложным обоснованиям нелинейной теории.

Прежде всего нужно отказаться от предпосылки расчета по недеформированному состоянию, который предполагает малость перемещений. При этом возникает нелинейность, называемая геометрической нелинейностью. В этом случае в теорию вводят нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями, которые позволяют учитывать влияние изменения формы и размеров конструкции на ее напряженно-деформированное

состояние. Таким образом, форма и размеры конструкции, находящейся в различных состояниях, не отождествляются.

Замена закона Гука нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями составляет сущность так называемой **физической нелинейности**.

Вследствие конструктивных особенностей в процессе деформирования может изменяться расчетная схема конструкции. Например, могут образовываться новые связи или, наоборот, разрушаться старые. В таких случаях систему можно назвать **конструктивно-нелинейной**. На рис. 1 приведен пример конструктивно-нелинейной системы. При небольшой нагрузке  $P < P_k$  существует зазор между концом балки и правой опорой, и балка статически определима. При  $P > P_k$  зазор исчезает и схема балки существенно изменяется — она становится статически неопределимой. Конструктивная нелинейность присуща конструкции, находящейся в процессе монтажа, когда создаются новые связи, при разрушении, когда связи выключаются из работы, а также очень часто при изменении режима нагружения. Изменение расчетной схемы бывает скачкообразным (рис. 1, а) или непрерывным (рис. 1, б). В процессе нагружения конструкции может изменяться направление нагрузки, как это, например, бывает в конструкциях, нагруженных гидростатическими нагрузками. Все это относится к конструктивной нелинейности.

Рассмотрение трех видов нелинейности — геометрической, физической и конструктивной — в высшей степени обогащает содержание нелинейной строительной механики (по сравнению с линейной) и одновременно существенно усложняет решения, получаемые на ее основе. К тому же энергия деформации нелинейной системы не является квадратичной формой, поэтому нельзя применять принцип суперпозиции и классические (основанные на этом принципе) теоремы строительной механики.

Для полного решения поставленной выше задачи расчета конструкций в широком плане следует рассматривать

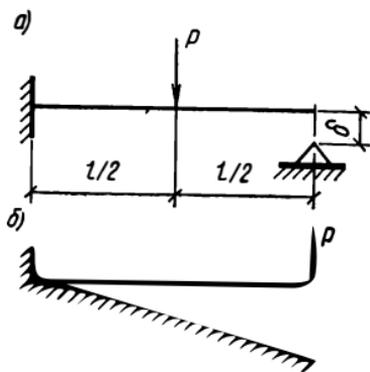


РИС. 1

все три вида нелинейностей, что, как правило, очень усложняет такое решение. Поэтому приходится рассматривать частные случаи общей задачи, в которых в зависимости от поставленных целей расчета и особенностей конструкции учитываются не все три вида нелинейностей сразу, а некоторые из них. Это послужило основанием для известной классификации задач нелинейной теории упругости, составленной В. В. Новожиловым [61], которая предусматривает четыре типа этих задач: 1) линейные физически и геометрически; 2) нелинейные физически, геометрически линейные; 3) линейные физически, нелинейные геометрически; 4) нелинейные физически и геометрически. Эта классификация может быть расширена с введением в нее понятия конструктивной нелинейности. Например, при расчете тонких гибких конструкций могут возникнуть большие перемещения при сравнительно небольших линейно-упругих деформациях. В этом случае можно рассматривать только геометрическую нелинейность, принимая в качестве зависимости между напряжениями и деформациями закон Гука. Этим будет определяться класс задач геометрически нелинейных и физически линейных.

В жестких конструкциях возможно возникновение больших деформаций (выходящих за пределы деформаций, описываемых законом Гука) при небольших перемещениях. В этих случаях можно не рассматривать геометрическую нелинейность, и мы приходим к классу задач физически нелинейных и геометрически линейных. Наконец, возможен класс задач физически и геометрически нелинейных. В каждом из этих классов задач может рассматриваться конструктивная нелинейность, что увеличивает разнообразие задач нелинейной строительной механики.

Для упрощения решения задач с физической нелинейностью широко используется гипотеза о нелинейно-упругом материале, согласно которой зависимости между напряжениями и деформациями при нагрузке и разгрузке тождественны (или, короче, закон разгрузки совпадает с законом нагрузки). Эта гипотеза основана на теореме, доказанной Л. М. Качановым [32]: при активной пластической деформации поведение упругопластического тела неотлично от поведения нелинейно-упругого тела с такой же зависимостью между напряжениями и деформациями.

Исторически задачи второго и третьего типов исследовали параллельно, но раздельно. Первые предложения, относящиеся к нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями, принадлежат Г. Б. Бюльфингеру (1729 г.), И. Ходкинсону (1824 г.) и Ф. И. Герстнеру (1831 г.). Сен-Венан в 1864 г. исследовал изгиб балки с различными физически нелинейными законами деформирования материала при растяжении и сжатии [84]. Нелинейный закон Бюльфингера был широко использован Г. Бахом (1897 г.) для расчета балок. В дальнейшем круг задач второго типа (физически нелинейных, геометрически линейных) был расширен за счет задач, относящихся к расчету не только стержневых, но и пространственных систем (пластин и оболочек).

Физическая нелинейность стала объектом исследования теории пластичности. Были установлены нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями (уравнения Генки), которые легли в основу теории пластичности малых деформаций А. А. Ильюшина [29]. Возникли два основных направления исследования: 1) процесс деформирования конструкции исследовали с начала ее загрузки до разрушения; 2) непосредственно определяли предельную нагрузку, не учитывая все предыдущие этапы деформирования. Соответственно первому направлению задачи решали путем интегрирования соответствующих уравнений теории пластичности или нелинейной теории упругости, а соответственно второму задачи решали методом сосредоточенных деформаций. Этот метод, обоснованный и развитый в трудах А. А. Гвоздева [18] и А. Р. Ржаницына [76, 77, 78, 79], представляет по своей идее метод предельного равновесия Галилея. В 1958 г. Г. Каудерер систематически изложил физически нелинейную теорию упругости и получил на ее основе решения многочисленных задач из области статики и колебаний конструкций [31]. Физически нелинейные задачи и относящиеся к ним вопросы рассмотрены в работах [3, 5, 8, 19, 21, 30, 47, 48, 81, 85, 90].

Задачи третьего типа, относящиеся к геометрически нелинейной теории упругости, были поставлены еще Эйлером применительно к тонким упругим стержням, но во второй половине прошлого столетия объектом исследования этой теории стали тонкие гибкие пластинки. Первые попытки создать теорию расчета этих пластинок

принадлежат Г. Р. Кирхгоффу (1877 г.), Л. Клебшу (1862 г.), Б. Сен-Венану (1881 г.), а также И. Г. Бубнову, который в ряде работ, начиная с 1902 г., обосновал эту теорию и применил ее к расчету тонкостенных пространственных конструкций корабля. Окончательно геометрически нелинейные уравнения пластинок были получены А. Фепплем и Т. Карманом (1910 г.). В трудах Х. М. Муштари [53—58], В. В. Новожилова [60—62], В. З. Власова [10, 11], В. И. Федосьева [86, 87], А. С. Вольмира [6, 12—15], К. З. Галимова [16, 17], М. В. Корнишина [38—41], М. В. Колтунова [35—37], П. М. Огибалова [63, 64] и других исследователей [1, 2, 9, 20, 25, 26, 34, 42, 44, 46, 65, 69, 70, 75, 80] геометрически нелинейная теория получила дальнейшее развитие при исследованиях напряженно-деформированного состояния и устойчивости пластинок и оболочек различных форм.

Исследование задач четвертого типа (геометрически и физически нелинейных) очень сложно, поэтому оно начало развиваться только в последние два десятилетия, что отчасти объясняется широким внедрением ЭЦВМ, существенно облегчившим трудные вычислительные процессы, необходимые при решении таких «дважды нелинейных» задач.

Здесь целесообразно использовать метод последовательных нагружений, предложенный В. З. Власовым и под названием «шаговый метод» — В. И. Феодосьевым, развиваемый В. В. Петровым [67, 68]. Напряженно-деформированное состояние «дважды нелинейных» пластин и оболочек рассмотрено в работах [28, 43, 45, 69, 70, 85].

Конструктивно-нелинейные системы, по-видимому, впервые были рассмотрены С. П. Тимошенко во второй части его книги «Сопrotивление материалов» [82], в которой предложено решение нескольких задач, относящихся к конструктивно-нелинейным балкам. Большой класс этих систем (системы с односторонними связями) исследовал И. М. Рабинович [71].

Трижды нелинейная сферическая оболочка рассмотрена в работе [7].

Параллельно с исследованием конкретных задач по изучению различных видов конструкций получила дальнейшее развитие нелинейная теория упругости. В наиболее современном виде эта теория и проблемы, которые

могут быть решены на ее основе, изложены в капитальных трудах И. И. Гольденблатта [22, 23] и А. И. Лурье [49], А. Грина и Дж. Адкинса [27].

Из этого краткого обзора следует, что нелинейная теория расчета конструкций интенсивно развивается. Это вызвано различными причинами, но главная из них — внедрение в практику строительства тонкостенных пространственных конструкций (мембран, пластинок, оболочек), а также конструкций (из высокопрочных и других материалов), имеющих нелинейную диаграмму деформирования. Литература в этой области обширна, однако отсутствуют монографии, в которых наряду с теоретическими вопросами излагались бы рекомендации к расчету конструкций с различными типами нелинейностей.

Настоящая книга является попыткой в некоторой степени заполнить этот пробел. В ней излагаются основы нелинейной строительной механики, ее методы, а также вопросы разнообразного их применения, причем строительная механика понимается здесь в широком смысле слова: как наука, включающая в себя сопротивление материалов и строительную механику стержневых и пространственных систем.

Автор приносит глубокую благодарность доктору технических наук, профессору Кореневу Борису Григорьевичу, оказавшему большую помощь в работе над книгой, рукопись которой он рецензировал и сделал по ней много ценных замечаний.

## 1. Определение деформаций

Отнесем нелинейно-упругое тело в состоянии до деформации к системе координат  $x, y, z$  (рис. 2) и отметим в нем некоторую точку  $A(x, y, z)$ , где  $x, y, z$  — ее координаты. После деформации тела точка  $A(x, y, z)$  переместится в положение  $A'$ ; вектор  $\vec{AA}'$  называется **перемещением** точки  $A$ . Обозначим проекции этого вектора на оси координат через  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  и  $w(x, y, z)$ , причем  $u \parallel x$ ;  $v \parallel y$ ;  $w \parallel z$ . Очевидно, что

$$u^2 + v^2 + w^2 = (\vec{AA}')^2,$$

а координаты точки  $A'(x', y', z')$  равны:

$$x' = x + u; \quad y' = y + v; \quad z' = z + w. \quad (1.1)$$

Величины  $u, v$  и  $w$  называются компонентами вектора перемещений, или просто **перемещениями**. Если известны перемещения всех точек тела, т. е. известны величины  $u, v$  и  $w$  как функции координат, то будут известны и все величины, относящиеся к деформации тела, т. е. все параметры, описывающие форму и размеры тела и любых его частей после деформации.

Отметим далее в состоянии до деформации в окрестностях точки  $A(x, y, z)$  бесконечно близкую к ней точку  $B(x+dx; y+dy; z+dz)$  (см. рис. 2). Отрезок  $AB$  можно рассматривать как диагональ бесконечно малого параллелепипеда со сторонами  $dx, dy, dz$ . Обозначим длину этой диагонали  $ds$ . Очевидно,

$$(AB)^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.2)$$

После деформации точка  $A(x, y, z)$  перейдет в положение, определяемое точкой  $A'(x', y', z')$ , а точка  $B$  — в положение  $B'(x'', y'', z'')$ . Элементарный параллелепипед деформируется, т. е. изменит свою форму и размеры, в частности изменится длина диагонали  $AB$ ; она станет равной  $A'B'$ . В дальнейшем будем ее обозначать через  $ds^*$ , так, что  $A'B' = ds^*$ .

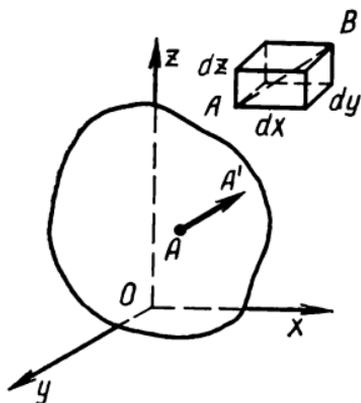


РИС. 2

Безразмерную величину

$$E_{AB} = \frac{A' B' - AB}{AB} = \frac{ds^* - ds}{ds} \quad (1.3)$$

назовем относительным удлинением отрезка  $AB$ , или относительным удлинением в точке  $A$  по направлению  $AB$ . Если известны относительные удлинения любой точки по любому направлению, то будет полностью известна деформация тела.

Из этих определений следует, что деформация не является ни скалярной, ни векторной величиной, т. е. не может быть в общем случае выражена только числом или только вектором. Действительно, в заданной точке  $A$  можно вектором изобразить относительное удлинение по произвольному направлению  $AB$ , но этот вектор дает представление только о деформации по одному направлению, а не по всем направлениям (т. е. не о всей деформации). Для того чтобы можно было целиком определить деформацию, необходимо задать значения удлинений по трем направлениям, т. е. задать три вектора, или девять проекций этих векторов на оси координат. Величины, определяемые таким образом, называются тензорами. Следовательно, деформация является тензором.

Координаты точки  $A'(x', y', z')$  определяются по формуле (1.1).

Координаты точки  $B'(x'', y'', z'')$  получим, если к функциям  $u, v$  и  $w$ , определяющим координаты точки  $A'$ , добавим приращения этих функций  $\Delta u, \Delta v$  и  $\Delta w$ :

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x + dx + u + \Delta u; \\ y'' &= y + dy + v + \Delta v; \\ z'' &= z + dz + w + \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Принимая во внимание формулы (1.1) и (1.4), вычислим длину отрезка  $A'B'$ :

$$\begin{aligned} (ds^*)^2 &= (A' B')^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = \\ &= (dx + \Delta u)^2 + (dy + \Delta v)^2 + (dz + \Delta w)^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величины приращений перемещений  $\Delta u, \Delta v$  и  $\Delta w$  определим, учитывая, что координаты точки  $B$  отличаются от координат точки  $A$  на бесконечно малые величины  $dx, dy, dz$  и, следовательно, при вычислении приращений

можно ограничиться членами, содержащими дифференциалы координат в первой степени, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz; \\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.5) и группируя члены, содержащие квадраты дифференциалов и их попарные произведения, получим:

$$(ds^*)^2 = (1 + 2\varepsilon_{xx}) dx^2 + (1 + 2\varepsilon_{yy}) dy^2 + (1 + 2\varepsilon_{zz}) dz^2 + 2\varepsilon_{xy} dx dy + 2\varepsilon_{xz} dx dz + 2\varepsilon_{yz} dy dz. \quad (1.7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Очевидно, если известны величины (1.8) (а их легко вычислить, зная перемещения), то будут известны также величины  $ds^*$  и  $E_{AB}$  в каждой точке тела, а следовательно, и его деформация.

Для определения относительного удлинения  $E_{AB}$  вычтем из (1.7) квадрат первоначальной длины элемента  $ds$ , определяемый выражением (1.2):

$$(ds^*)^2 - ds^2 = 2[\varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz]. \quad (1.9)$$

Из формулы (1.3) следует, что  $ds^* = (1 + E_{AB}) ds$ .

Подставив это значение в левую часть формулы (1.9) и сократив обе части формулы на два, получим:

$$E_{AB} \left( 1 + \frac{E_{AB}}{2} \right) ds^2 = \varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz. \quad (1.10)$$

Положение отрезка  $AB$  в системе координат  $x, y, z$  можно задать косинусами углов между его направлением и координатными осями. Обозначим эти косинусы соответственно:

$$l = \cos(AB, x); \quad m = \cos(AB, y); \quad n = \cos(AB, z).$$

Очевидно:

$$l = \frac{dx}{ds}; \quad m = \frac{dy}{ds}; \quad n = \frac{dz}{ds}. \quad (1.11)$$

Подставив (1.11) в (1.10), получим:

$$E_{AB} \left( 1 + \frac{E_{AB}}{2} \right) = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \varepsilon_{xy} lm + \varepsilon_{xz} ln + \varepsilon_{yz} mn. \quad (1.12)$$

Из этой формулы следует, что для определения относительного удлинения по любому направлению, определяемому косинусами  $l, m$  и  $n$ , необходимо знать шесть величин  $\varepsilon_{xx} \dots \varepsilon_{yz}$ . Следовательно, эти величины полностью определяют деформации тела, иными словами, полностью определяют тензор деформаций, и поэтому называются компонентами тензора деформации, или просто деформациями.

Если положить

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad (1.13)$$

то относительное удлинение по произвольному направлению можно определить из уравнения

$$E_{AB} \left( 1 + \frac{E_{AB}}{2} \right) = 0.$$

Отсюда получаем два значения для относительного удлинения:  $E_{AB} = 0$ ,  $E_{AB} = -2$ . Второй корень для обычных материалов не имеет физического значения и должен быть отброшен, так как наибольшее отрицательное значение деформации  $E_{AB} = -1$ . Первое значение корня показывает, что если величины (1.8) равны нулю, то относительные удлинения в любой точке равны нулю.

Иными словами, в этом случае деформация отсутствует. Отсюда, впрочем, не следует, что перемещения равны нулю. Действительно, если принять условия (1.13), то, учитывая формулы (1.8), получим для перемещений шесть дифференциальных уравнений, которые кроме нулевого решения имеют решения, соответствующие перемещениям абсолютно твердого тела (т.е. перемещениям без деформаций).

Для определения геометрического смысла величин  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  и  $\epsilon_{zz}$  направим отрезок  $AB$  параллельно одной из осей, например параллельно оси  $x$ . В этом случае при  $l=1$ ,  $m=n=0$  из формулы (1.12) получаем:

$$E_{xx} \left( 1 + \frac{E_{xx}}{2} \right) = \epsilon_{xx}. \quad (1.14)$$

Здесь  $E_{xx}$  обозначает удлинение элемента  $AB$ , параллельного оси  $x$  и имеющего первоначальную длину  $dx$ . Таким образом, деформация  $\epsilon_{xx}$  связана с относительным удлинением элемента, параллельного оси  $x$ . Аналогично такие же значения получим и для деформации  $\epsilon_{yy}$  и  $\epsilon_{zz}$ :

$$E_{yy} \left( 1 + \frac{E_{yy}}{2} \right) = \epsilon_{yy}; \quad E_{zz} \left( 1 + \frac{E_{zz}}{2} \right) = \epsilon_{zz}. \quad (1.15)$$

Из формул (1.14) и (1.15) получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_{xx} &= \sqrt{1 + 2\epsilon_{xx}} - 1; \\ E_{yy} &= \sqrt{1 + 2\epsilon_{yy}} - 1; \\ E_{zz} &= \sqrt{1 + 2\epsilon_{zz}} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Деформации, имеющие одинаковые индексы, называются продольными деформациями.

Для выяснения геометрического смысла деформаций  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{xz}$ ,  $\epsilon_{yz}$ , имеющих смешанные индексы, рассмотрим более подробно деформации ребер элементарного параллелепипеда  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 3). Разместим начало координат в вершине недеформированного параллелепипеда. После деформации эта вершина переместится в точку  $O'$  с координатами  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , вершина  $a$  перейдет в точку  $a'$  с координатами:

$$x_{a'} = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad y_{a'} = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx; \quad z_{a'} = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

(здесь значения координат определяются приращением перемещений по координате  $x$ , поскольку при переходе от точки  $O$  к точке  $a$  изменяется только координата  $x$  на величину  $dx$ , а остальные координаты остаются

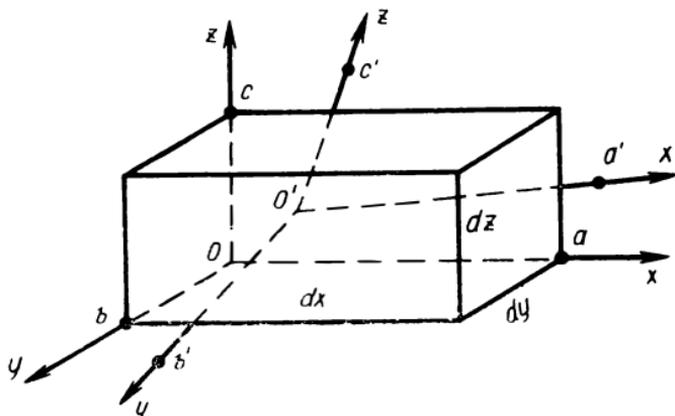


РИС. 3

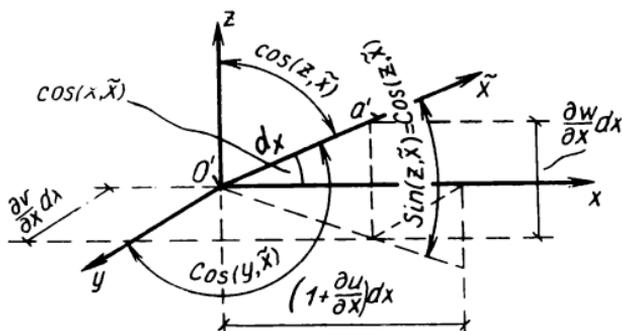


РИС. 4

без изменения). Соответственно точки  $b'$  и  $c'$  будут иметь координаты:

$$x_{b'} = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad y_{b'} = dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy; \quad z_{b'} = w + \frac{\partial w}{\partial y} dy;$$

$$x_{c'} = u + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \quad y_{c'} = v + \frac{\partial v}{\partial z} dz; \quad z_{c'} = dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

После деформации форма и размеры рассматриваемого объемного элемента изменятся. Длины ребер после деформации обозначим  $\tilde{d}x$ ,  $\tilde{d}y$ ,  $\tilde{d}z$ , а их направления — соответственно  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ . Проекции длин ребер на оси координат определим, вычитая из координат соответствующей точки ( $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ) координаты точки  $O'$ . Значения этих проекций приведены в табл. 1.

Ребро	Проекции на оси		
	$x$	$y$	$z$
$0'a' = d\tilde{x}$	$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$\frac{\partial v}{\partial x} dx$	$\frac{\partial w}{\partial x} dx$
$0'b' = d\tilde{y}$	$\frac{\partial u}{\partial y} dy$	$dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy$	$\frac{\partial w}{\partial y} dy$
$0'c' = d\tilde{z}$	$\frac{\partial u}{\partial z} dz$	$\frac{\partial v}{\partial z} dz$	$dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz$

Пользуясь этой таблицей, легко вычислить длины ребер после деформации. Например:

$$\left. \begin{aligned} (d\tilde{x})^2 &= \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dx^2; \\ (d\tilde{y})^2 &= \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dy^2; \\ (d\tilde{z})^2 &= \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right] dz^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Но, с другой стороны, очевидно,

$$d\tilde{x} = (1 + E_{xx}) dx; \quad d\tilde{y} = (1 + E_{yy}) dy; \quad d\tilde{z} = (1 + E_{zz}) dz. \quad (1.18)$$

Подставляя (1.18) в (1.17), после некоторых упрощений получим формулы (1.14) и (1.15), что лишний раз подтверждает заключение о геометрическом смысле деформаций с одинаковыми индексами.

Разделив выражения первой строчки табл. 1 на длину ребра  $d\tilde{x}$ , выражения второй—на  $d\tilde{y}$  и третьей—на  $d\tilde{z}$ , получим косинусы углов между направлениями  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  и осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (табл. 2). Рис. 4 поясняет порядок определения косинусов для направления  $\tilde{x}$ . На этом рисунке начало координат перенесено (параллельно) в точку  $0'$ , что не может отразиться на значениях косинусов.

Направления ребер после деформации	Косинусы углов между осями		
	$x$	$y$	$z$
$\tilde{x}$	$\frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + E_{xx}}$	$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + E_{xx}}$	$\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + E_{xx}}$
$\tilde{y}$	$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + E_{yy}}$	$1 + \frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{1 + E_{yy}}$
$\tilde{z}$	$\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + E_{zz}}$	$\frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{1 + E_{zz}}$	$1 + \frac{\partial w}{\partial z}$

При составлении этой таблицы были использованы формулы (1.18), что привело к сокращению дифференциалов.

Пользуясь табл. 2, вычислим угол между ребрами после деформации, например угол между  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Используя известную формулу для косинуса угла между двумя прямыми, получим:

$$\begin{aligned} \cos(\tilde{x}, \tilde{y}) = & \cos(\tilde{x}, x) \cos(\tilde{y}, x) + \cos(\tilde{x}, y) \cos(\tilde{y}, y) + \\ & + \cos(\tilde{x}, z) \cos(\tilde{y}, z). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Подставляя сюда значения косинусов из табл. 2, определим:

$$\begin{aligned} \cos(\tilde{x}, \tilde{y}) = & \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{yy})} = \\ = & \frac{E_{xy}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{yy})}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Обозначим разность между прямым углом и углом  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  через  $\varphi_{xy}$ . Эта величина показывает, насколько из-

менился прямой угол в процессе деформации. Очевидно,

$$\sin \varphi_{xy} = \cos (\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\varepsilon_{xy}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{yy})}. \quad (1.21)$$

Аналогично получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_{xz} &= \frac{\varepsilon_{xz}}{(1 + E_{xx})(1 + E_{zz})}; \\ \sin \varphi_{yz} &= \frac{\varepsilon_{yz}}{(1 + E_{yy})(1 + E_{zz})}. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Таким образом, деформации с разными индексами определяют изменение углов элементарного параллелепипеда. Они называются деформациями сдвига.

## 2. Изменение деформаций при преобразовании координат

Пусть в системе координат  $x, y, z$  заданы деформации  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$  и  $\varepsilon_{yz}$ . Рассмотрим (рис. 5) другую систему координат  $x', y', z'$ , которая имеет с первой системой общее начало  $O$ , но повернута относительно ее. Косинусы углов между старыми и новыми осями обозначим так, как это указано в табл. 3. Из этой таблицы видно, например, что  $\cos (x', x) = l_1$ ,  $\cos (z', x) = n_1$  и т. д. Вследствие того что обе системы координат прямоугольны, девять косинусов табл. 3 не являются независимыми. Между ними существуют соотношения двух типов. Соотношения первого типа могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1; & l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1; & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1; \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1; & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Эти формулы выражают теорему о том, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его сторон. Второй тип соотношений выражает условие ортогональности между двумя осями, для составления которого необходимо соответствующее значение косинуса угла между двумя прямыми, определяемое

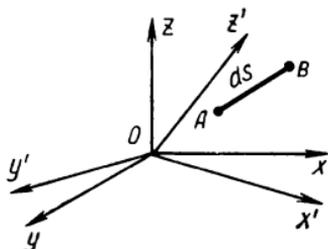


РИС. 5

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y'$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z'$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

формулой (1.19), приравняв нулю. Используя это условие и изменяя в формуле (1.19) обозначения осей, получим:

$$\left. \begin{aligned} l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0; & \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0; \\ l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 = 0; & \quad l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0; \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0; & \quad l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0. \end{aligned} \right\} (1.24)$$

Первая формула первого столбца выражает условие ортогональности между осями  $x$ ,  $y$ . Первая формула второго столбца — то же условие для осей  $x'$ ,  $y'$  и т. д. Если имеется бесконечно малый отрезок  $AB = ds$  (рис. 5), то его длину можно определить через его проекции в обеих системах координат, т. е. можно записать

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2. \quad (1.25)$$

Если принять, что  $AB \parallel dx$ , то  $ds = dx$ ;  $dy = dz = 0$ . Отсюда получим:

$$dx^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2.$$

Деля обе части этого равенства на  $dx$  и учитывая, что:

$$\frac{dx'}{dx} = l_1; \quad \frac{dy'}{dx} = l_2; \quad \frac{dz'}{dx} = l_3,$$

будем иметь:

$$dx = l_1 dx' + l_2 dy' + l_3 dz'. \quad (1.26)$$

Аналогично можно написать:

$$\left. \begin{aligned} dy &= m_1 dx' + m_2 dy' + m_3 dz'; \\ dz &= n_1 dx' + n_2 dy' + n_3 dz'. \end{aligned} \right\} (1.26a)$$

Для того чтобы выразить деформации, определенные в координатах  $x', y', z'$ , через деформации, определенные в координатах  $x, y, z$ , обратимся к формуле (1.10). Очевидно, что левая часть формулы не зависит от выбора системы координат. Подставив в правую часть вместо дифференциалов их выражения по формулам (1.26) и (1.26а), выразим относительное удлинение  $E_{AB}$  через деформации и дифференциалы, записанные в системе координат  $x', y', z'$ :

$$E_{AB} \left( 1 + \frac{E_{AB}}{2} \right) = \varepsilon_{x'x'} (dx')^2 + \varepsilon_{y'y'} (dy')^2 + \varepsilon_{z'z'} (dz')^2 + \varepsilon_{x'y'} dx' dy' + \varepsilon_{x'z'} dx' dz' + \varepsilon_{y'z'} dy' dz', \quad (1.27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{xx} l_1^2 + \varepsilon_{yy} m_1^2 + \varepsilon_{zz} n_1^2 + \varepsilon_{xy} l_1 m_1 + \varepsilon_{xz} l_1 n_1 + \\ &\quad + \varepsilon_{yz} m_1 n_1; \\ \varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{xx} l_2^2 + \varepsilon_{yy} m_2^2 + \varepsilon_{zz} n_2^2 + \varepsilon_{xy} l_2 m_2 + \varepsilon_{xz} l_2 n_2 + \\ &\quad + \varepsilon_{yz} m_2 n_2; \\ \varepsilon_{z'z'} &= \varepsilon_{xx} l_3^2 + \varepsilon_{yy} m_3^2 + \varepsilon_{zz} n_3^2 + \varepsilon_{xy} l_3 m_3 + \varepsilon_{xz} l_3 n_3 + \\ &\quad + \varepsilon_{yz} m_3 n_3; \\ \varepsilon_{x'y'} &= 2\varepsilon_{xx} l_1 l_2 + 2\varepsilon_{yy} m_1 m_2 + 2\varepsilon_{zz} n_1 n_2 + \\ &+ \varepsilon_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \varepsilon_{xz} (l_1 n_2 + l_2 n_1) + \varepsilon_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1); \\ \varepsilon_{x'z'} &= 2\varepsilon_{xx} l_1 l_3 + 2\varepsilon_{yy} m_1 m_3 + 2\varepsilon_{zz} n_1 n_3 + \\ &+ \varepsilon_{xy} (l_1 m_3 + l_3 m_1) + \varepsilon_{xz} (l_1 n_3 + l_3 n_1) + \varepsilon_{yz} (m_1 n_3 + m_3 n_1); \\ \varepsilon_{y'z'} &= 2\varepsilon_{xx} l_2 l_3 + 2\varepsilon_{yy} m_2 m_3 + 2\varepsilon_{zz} n_2 n_3 + \\ &+ \varepsilon_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \varepsilon_{xz} (l_2 n_3 + l_3 n_2) + \varepsilon_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Вторая и третья формулы получаются из первой путем замены индекса 1 соответственно на 2 и 3. Пятая получается из четвертой путем замены индекса 2 на 3, а шестая — из пятой путем замены индекса 1 на 3. Формулы (1.28) легко составить, если помнить, что координате  $x$  соответствует индекс 1, координате  $y$  — индекс 2, а координате  $z$  — индекс 3. Формула (1.27) имеет ту же структуру, что и формула (1.10), поэтому входящие в нее коэффициенты  $\varepsilon_{x'x'}, \dots, \varepsilon_{y'z'}$ , играют ту же роль (в системе координат  $x', y', z'$ ), что и коэффициенты  $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{yz}$  в системе координат  $x, y, z$ . Следовательно, величины  $\varepsilon_{x'x'}, \dots, \varepsilon_{y'z'}$  являются составляющими

тензора деформаций в системе координат  $x', y', z'$ , а формулы (1.28) выражают эти деформации через составляющие деформации в системе  $x, y, z$ .

### 3. Главные деформации

Из формул (1.28) следует, что значения деформаций зависят от направления системы координат, определяемого углами между системами осей  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ . Если штрихованную систему координат непрерывно вращать, начиная от положения, при котором она совпадает с системой  $x, y, z$ , то значения деформаций  $\epsilon_{x'x'}, \dots, \epsilon_{y'z'}$  будут также непрерывно изменяться и, когда поворот произойдет таким образом, что штрихованные оси опять совпадут с осями  $x, y, z$ , деформации  $\epsilon_{x'x'}, \dots, \epsilon_{y'z'}$  снова станут равны первоначальным значениям  $\epsilon_{xx}, \dots, \epsilon_{yz}$ . Но известно, что если непрерывная функция при изменении аргумента принимает несколько одинаковых значений, то она может иметь экстремальные точки.

Определим вначале экстремальные значения продольных деформаций  $\epsilon_{x'x'}, \epsilon_{y'y'}$  и  $\epsilon_{z'z'}$  причем подробно остановимся только на выкладках, относящихся к определению экстремальных значений деформации  $\epsilon_{x'x'}$ . Заметим прежде всего, что речь идет об определении условного экстремума, так как независимые переменные  $l_1, m_1$  и  $n_1$  связаны соотношением

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 - 1 = 0. \quad (1.29)$$

Прежде всего этот экстремум определим методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого составим функцию

$$F = \epsilon_{x'x'} - \epsilon (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 - 1), \quad (1.30)$$

здесь  $\epsilon$  — множитель Лагранжа, определяющий некоторую деформацию.

Далее составим уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial m_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial n_1} = 0. \quad (1.31)$$

Для получения этих уравнений в развернутом виде нужно в (1.30) подставить вместо  $\epsilon_{x'x'}$  его выражение, соответствующее первой формуле (1.28), и выполнить

соответствующие операции дифференцирования, после чего будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} 2\varepsilon_{xx}l_1 + \varepsilon_{xy}m_1 + \varepsilon_{xz}n_1 - 2\varepsilon l_1 &= 0; \\ \varepsilon_{xy}l_1 + 2\varepsilon_{yy}m_1 + \varepsilon_{yz}n_1 - 2\varepsilon m_1 &= 0; \\ \varepsilon_{xz}l_1 + \varepsilon_{yz}m_1 + 2\varepsilon_{zz}n_1 - 2\varepsilon n_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

ИЛИ

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon l_1 &= \varepsilon_{xx}l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz}n_1; \\ \varepsilon m_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}l_1 + \varepsilon_{yy}m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz}n_1; \\ \varepsilon n_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{xz}l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz}m_1 + \varepsilon_{zz}n_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Используя первую формулу (1.28), представим деформацию  $\varepsilon_{x'x'}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'x'} &= l_1 \left( \varepsilon_{xx} l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} n_1 \right) + m_1 \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} l_1 + \right. \\ &+ \left. \varepsilon_{yy} m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} n_1 \right) + n_1 \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} m_1 + \varepsilon_{zz} n_1 \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Заменяя выражения, стоящие в скобках, их значениями в соответствии с формулами (1.33), получим:

$$\varepsilon_{x'x'} = l_1^2 \varepsilon + m_1^2 \varepsilon + n_1^2 \varepsilon = \varepsilon.$$

Иначе, множитель Лангранжа  $\varepsilon$  представляет собой деформацию, причем в соответствии с формулами (1.31) он должен равняться экстремальным значениям деформации. Для их определения систему уравнений (1.33) представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon) l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} n_1 &= 0; \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} l_1 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon) m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} n_1 &= 0; \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} m_1 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon) n_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Эта система относительно трех неизвестных косинусов  $l_1, m_1, n_1$  однородна, поэтому для получения отлич-

ных от нуля решений следует определитель системы приравнять нулю, т. е. составить уравнение:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon); & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}; & (\varepsilon_{yy} - \varepsilon); & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz}; & (\varepsilon_{zz} - \varepsilon) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.36)$$

Раскрывая этот определитель, получим кубическое уравнение относительно множителя Лагранжа:

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0; \quad (1.37)$$

Здесь:

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz};$$

$$I_2 = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2);$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}; & \varepsilon_{yy}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz}; & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} =$$

$$\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}). \quad (1.38)$$

Решая уравнение (1.37), получим три экстремальных значения деформации, которые будем обозначать и располагать в следующем порядке:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3. \quad (1.39)$$

Эти деформации называются главными деформациями, а соответствующие им оси координат называются главными осями деформации. Чтобы найти косинусы углов, определяющих положение главных осей относительно произвольных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , подставим одно из полученных значений главных деформаций, например  $\varepsilon_1$ , в какие-либо два уравнения (1.35), допустим, в первое и второе, и добавим к ним уравнение (1.29). Получим сле-

дующую систему уравнений, на этот раз неоднородную, относительно неизвестных  $l_1, m_1, n_1$ :

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_1) l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} n_1 &= 0; \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} l_1 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_1) m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} n_1 &= 0; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Решая ее, получим в соответствии с табл. 3 значения косинусов, определяющих положение первой главной оси. Направления остальных осей определяем аналогичным образом или использовав соотношения (1.23) и (1.24). Находя таким же путем экстремальные значения  $\varepsilon_{y'y'}$  и  $\varepsilon_{z'z'}$ , мы придем к уравнению (1.36), т. е. получим те же самые значения главных деформаций.

Очевидно, что вид уравнения (1.37) не должен зависеть от выбора исходных осей  $x, y, z$  (поскольку это уравнение определяет значение главных деформаций). Отсюда следует, что коэффициенты  $I_1, I_2, I_3$  (1.38) также не должны зависеть от выбора координатной системы, т. е. они должны быть инвариантами. Если тензор деформаций записать в форме

$$T_D = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}; & \varepsilon_{yy}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz}; & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

то коэффициенты (1.38) будут инвариантами этого тензора деформаций.

Представим четвертое уравнение (1.28) в следующем виде:

$$\varepsilon_{x'y'} = 2l_1 \left( \varepsilon_{xx} l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} n_1 \right) + 2m_1 \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} l_1 + \varepsilon_{yy} m_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} n_1 \right) + 2n_1 \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} l_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} m_1 + \varepsilon_{zz} n_1 \right). \quad (1.42)$$

Вместо выражений в скобках подставим их значения в соответствии с формулой (1.33). Тогда, используя четвертую формулу (1.24), получим:

$$\varepsilon_{x'y'} = 2(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) \varepsilon = 0,$$

т. е. деформация  $\varepsilon_{x'y'}$  в главной системе координат равна нулю. Аналогичным путем это доказывается и для двух других деформаций сдвига. Учитывая это, можно написать выражения для инвариантов тензора деформаций в главных осях координат в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3; \\ I_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

#### 4. Объемная деформация

Если элементарный параллелепипед с ребрами, равными единице, расположить в системе главных осей деформации, то он будет деформироваться без изменения углов, т. е. останется после деформации прямоугольным параллелепипедом со сторонами  $1+E_1$ ;  $1+E_2$ ;  $1+E_3$ . Объем этого параллелепипеда изменится на величину  $\theta_u$ :

$$\theta_u = (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - 1. \quad (1.44)$$

Так как величина  $\theta_u$  есть изменение единицы объема, то она называется объемной деформацией. Формула (1.44) дает точное значение для объемной деформации. В этой формуле величины  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  есть главные удлинения, которые в соответствии с формулами (1.16) выражаются через главные деформации следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1; & E_2 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1; \\ E_3 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Подставив (1.45) в (1.44), получим:

$$\theta_u = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3)} - 1. \quad (1.46)$$

Если раскрыть скобки под квадратным корнем и подставить выражения из формулы (1.43), то получим еще одну формулу для объемной деформации:

$$\theta_u = \sqrt{1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3} - 1. \quad (1.47)$$

Все три выражения для истинной объемной деформации очень сложны, поэтому целесообразно рассмотреть возможные упрощения формул (1.44), (1.46), (1.47). Для этого первую из них, раскрыв скобки, преобразуем следующим образом:

$$\theta_u = E_1 + E_2 + E_3 + E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3 + E_1 E_2 E_3. \quad (1.48)$$

Рис. 6 поясняет геометрический смысл каждого члена, входящего в формулу (1.48). Если главные удлинения  $E_1, E_2, E_3$  не велики, то можно отбросить заштрихованную часть приращения объема и считать, что

$$\theta_u \approx E_1 + E_2 + E_3 + E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3. \quad (1.49)$$

В зависимости от соотношения между величинами  $E_1, E_2, E_3$  выражение для  $\theta_u$  можно еще упростить. Например, если  $E_3 \ll E_1, E_3 \ll E_2$ , то можно принять:

$$\theta_u \approx E_1 + E_2 + E_3 + E_1 E_2. \quad (1.50)$$

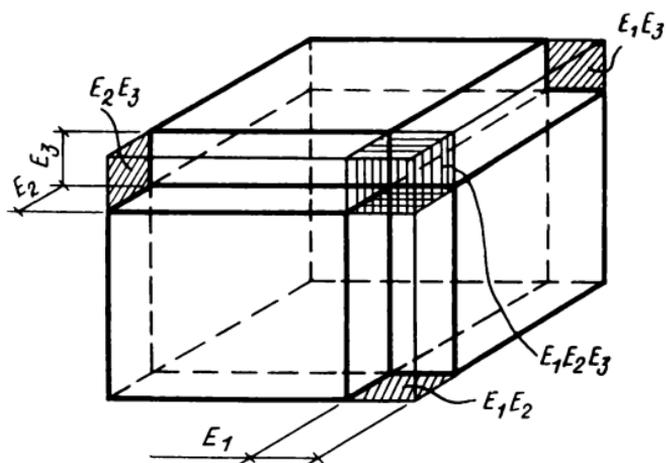


РИС. 6

И, наконец, при достаточно малых удлинениях можно считать

$$\theta_u \approx E_1 + E_2 + E_3. \quad (1.51)$$

Иногда объемную деформацию отождествляют с первым инвариантом тензора деформаций

$$\theta_u \approx I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (1.52)$$

При использовании приближенных формул (1.49), (1.50), (1.51) и (1.52) следует учитывать погрешности, к которым они могут привести. В различных практических приложениях часто применяют гипотезу, смысл которой состоит в том, что объемная деформация равняется нулю, причем под объемной деформацией понимают либо выражение (1.51), либо (1.52). Рассмотрим случай простой одноосной деформации (растяжение или сжатие) и выясним, к каким последствиям может привести применение при этом упомянутой гипотезы.

Если объемную деформацию выразить формулой (1.51), то в случае одноосной деформации ( $E_2 = E_3$ ) и при использовании гипотезы о равенстве нулю объемной деформации получим соотношение

$$E_1 + 2E_2 = 0, \quad (1.53)$$

откуда

$$E_2 = -0,5E_1. \quad (1.54)$$

Подставляя (1.54) в (1.44), получим для истинного изменения объема формулу

$$\theta_u = (1 + E_1)(1 - 0,5E_1)^2 = -0,25E_1^2(3 - E_1). \quad (1.55)$$

Из этой формулы следует, что изменение объема при относительных удлинениях  $E_1 < 3$  всегда отрицательно. Таким образом, гипотезой, выражаемой формулой (1.53), материалу приписываются необычные свойства: при растяжении (если  $E_1 < 3$ ) истинная объемная деформация всегда отрицательна, т.е. материал сжимается. Если эту же гипотезу сформулировать, используя для объемной деформации формулу (1.52), то в случае одноосной деформации ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ) будем иметь

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 0 \quad (1.56)$$

и

$$\varepsilon_2 = -0,5\varepsilon_1. \quad (1.57)$$

Отсюда получим формулу для точного изменения объема:

$$\theta_u = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1)(1 - \varepsilon_1)^2} - 1 = -\frac{E_1^2}{2}(3 + E_1), \quad (1.58)$$

из которой следует, что условие (1.56) приводит во всех случаях к отрицательной объемной деформации. Это означает, что гипотеза об отсутствии объемной деформации, использующая приближенные выражения (1.52) и (1.53), навязывает материалу нереальные свойства. При больших деформациях это может привести к существенным погрешностям.

## 5. Разложение деформации на составляющие. Возможные упрощения и переход к линейной теории

Формулы для деформаций (1.8) можно написать в виде, более удобном для анализа, если их выразить не

непосредственно через перемещения, а через следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & e_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; & e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; & 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \\ 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (1.59)$$

Согласно табл. 1 первая группа величин (1.59) представляет собой проекции удлинений ребер элементарного параллелепипеда. Рассмотрим, например, ребро  $dx$ . Так, по табл. 1 проекция этого ребра после деформации на ось  $x$  равна  $\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$ . Следовательно, относительное

удлинение этой проекции равно:  $\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}$ . Посколь-

ку эти величины составляют значительную часть от общих удлинений ребер, будем их в дальнейшем называть для краткости параметрами удлинений.

Используя данные табл. 2, аналогичным путем можно доказать, что вторая группа величин (1.59) связана с изменениями прямых углов проекций элементарного параллелепипеда на соответствующие координатные плоскости, что также видно из рис. 7, на котором изображено изменение угла в плоскости  $xOz$ . Если пренебречь удлинениями по сравнению с единицей и отождествить тангенс угла с самим углом, то изменение угла в точке  $A$  будет равно:

$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = e_{xz}$ . Отсюда следует, что эти величины представляют собой значительную часть общей деформации сдвига, и в дальнейшем будем их кратко называть параметрами сдвигов.

Из рис. 7 видно, что третья группа величин (1.59) связана с поворотами проекции грани элементарного параллелепипеда вокруг оси, ей перпендикулярной,

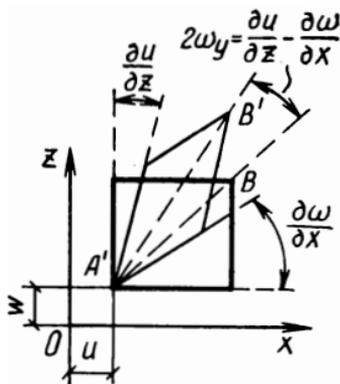


РИС. 7

и эти величины будут равны повороту этой грани, если сделать те же самые упрощения, что и при определении сдвигов. Можно также показать, что если

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0,$$

то элементарный параллелепипед поворачиваться не будет. Поэтому эти величины будем называть жестким поворотам.

Итак, если выбрать элементарный параллелепипед в окрестностях точки  $A$  в произвольной системе координат, то деформацию можно представить себе как состоящую из нескольких элементов.

Во-первых, параллелепипед получит поступательное перемещение и точка  $A$  перейдет в точку  $A'$ . Это перемещение задается проекциями на координатные оси, т. е. величинами  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Во-вторых, элементарный параллелепипед повернется на некоторый угол, определяемый величинами  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$ . Эту часть деформации называют жестким поворотом.

В-третьих, ребра изменят свою длину и получат удлинения  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$  и  $E_{zz}$ . Проекции этих удлинений на оси координат определяются параметрами  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$  и  $e_{zz}$ . Эта часть деформации называется удлинениями.

Наконец, в-четвертых, изменятся углы граней элементарного параллелепипеда на величины  $\phi_{xy}$ ,  $\phi_{xz}$ ,  $\phi_{yz}$ . Эта часть деформации называется сдвигом и с ней связаны параметры сдвига  $e_{xy}$ ,  $e_{xz}$ ,  $e_{yz}$ . В том случае если элементарный параллелепипед находится в главной системе координат, четвертая составляющая деформации будет отсутствовать. Собственно характеристиками деформации в точке тела являются удлинения и сдвиги. Перемещение и повороты относятся к величинам, характеризующим деформацию тела в целом.

Подставив величины (1.59) в формулы (1.8), получим:

$$\left. \begin{aligned} v_{xx} &= e_{xx} + \frac{1}{2} \left[ e_{xx}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right)^2 \right]; \\ v_{yy} &= e_{yy} + \frac{1}{2} \left[ e_{yy}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right)^2 \right]; \\ v_{zz} &= e_{zz} + \frac{1}{2} \left[ e_{zz}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right)^2 \right]; \\ v_{xy} &= e_{xy} + e_{xx} \left( \frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) + e_{yy} \left( \frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) + \end{aligned} \right\} (1.60)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \left( \frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \left( \frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right); \\
 \varepsilon_{xz} &= e_{xz} + e_{xx} \left( \frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) + e_{zz} \left( \frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \left( \frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right); \\
 \varepsilon_{yz} &= e_{yz} + e_{yy} \left( \frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) + e_{zz} \left( \frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \left( \frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right).
 \end{aligned} \right\} (1.60)$$

Эти формулы помогают обосновать систему упрощений основных уравнений теории нелинейных деформаций.

Первое упрощение, которое можно сделать, относится к случаю, когда деформации тела малы, но перемещение ничем не ограничено. Если удлинения малы по сравнению с единицей, то формулы (1.14) и (1.15) можно записать в более простом виде:

$$\varepsilon_{xx} \approx E_{xx}; \quad \varepsilon_{yy} \approx E_{yy}; \quad \varepsilon_{zz} \approx E_{zz}. \quad (1.61)$$

Если, кроме того, сдвиги настолько малы, что изменение угла можно отождествить с его синусом, то вместо (1.21) и (1.22) получим:

$$\varepsilon_{xy} \approx \Phi_{xy}; \quad \varepsilon_{xz} \approx \Phi_{xz}; \quad \varepsilon_{yz} \approx \Phi_{yz}. \quad (1.62)$$

Формула для объемной деформации принимает вид (1.51) или (1.52):

$$\theta_u \approx E_1 + E_2 + E_3 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (1.63)$$

Как уже отмечалось, в этом случае объемная деформация отождествляется с первым инвариантом тензора деформаций. При этих упрощениях формулы для деформаций (1.8) и (1.60) остаются без изменений.

Если предположить, что малы по сравнению с единицей не только удлинения и сдвиги, но и повороты  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$ , то получим упрощения формул (1.8) и (1.60). Анализ показывает [61], что в этом случае вместо формул (1.60) можно написать:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= e_{xx} + \frac{1}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2); & \varepsilon_{xy} &= e_{xy} - \omega_x \omega_y; \\
 \varepsilon_{yy} &= e_{yy} + \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_z^2); & \varepsilon_{xz} &= e_{xz} - \omega_x \omega_z; \\
 \varepsilon_{zz} &= e_{zz} + \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2); & \varepsilon_{yz} &= e_{yz} - \omega_y \omega_z.
 \end{aligned} \right\} (1.64)$$

Дальнейшее упрощение получим тогда, когда квадраты поворотов и их произведения будут малы по сравнению с параметрами удлинений и сдвигов. В этом случае из (1.64) получаем уравнения Коши линейной теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} \approx e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{xy} \approx e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_{yy} \approx e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{xz} \approx e_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \varepsilon_{zz} \approx e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \varepsilon_{yz} \approx e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

Из вышеизложенного следует, что использование уравнений линейной теории возможно в том случае, когда удлинения, сдвиги и углы поворота малы по сравнению с единицей и, кроме того, когда квадраты углов поворота и их произведения малы по сравнению с параметрами удлинений и сдвигов. Это может быть в случае деформации массивных тел, а также в некоторых случаях деформаций стержней и пластинок. Формулы нелинейной теории необходимо использовать преимущественно при изучении деформации гибких тел.

Этот анализ показывает также, что как линейная, так и нелинейная теория изучают деформации одного порядка малости, связанные с конечными перемещениями. Различие между этими теориями состоит в том, что нелинейная теория учитывает влияние поворотов на удлинения и сдвиги, а линейная этим пренебрегает. Таким образом, распространенное мнение о том, что нелинейная теория изучает конечные деформации и перемещения, а линейная — бесконечно малые, неосновательно.

## 6. Разложение тензора деформаций на шаровой тензор и девиатор

Остановимся на первом этапе упрощений, представленных формулами (1.61), (1.62) и (1.63). В этом случае (в случае малых, но нелинейных деформаций) удобно тензор деформаций разделить на две составляющие: объемную деформацию и деформацию изменения формы. Тензор, представляющий собой объемную де-

формацию, называется шаровым тензором. Он состоит из величин  $\varepsilon_{cp}$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad (1.66)$$

и записывается в следующем виде:

$$T_{III} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{cp}; & 0; & 0 \\ 0; & \varepsilon_{cp}; & 0 \\ 0; & 0; & \varepsilon_{cp} \end{vmatrix}, \quad (1.67)$$

Очевидно, первый инвариант шарового тензора деформаций

$$I_{III} = 3\varepsilon_{cp} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta_u \quad (1.68)$$

представляет собой объемную деформацию в таком виде, в каком она понимается в теории малых деформаций [формула (1.63)]. Название «шаровой» связано с тем, что объемную деформацию в чистом виде можно получить, подвергнув шар равномерно распределенному гидростатическому давлению.

Вычитая из тензора (1.41) шаровой тензор (1.67), получим тензор D, который описывает деформацию изменения формы:

$$D = T_D - T_{III} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{cp}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{yx}; & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{cp}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz}; & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz}; & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{cp} \end{vmatrix}. \quad (1.69)$$

Этот тензор называется девиатором деформаций. Его название должно напоминать, что изменение формы элементарного параллелепипеда связано с изменением углов.

Очевидно, что первый инвариант девиатора деформаций равен нулю. Второй инвариант девиатора равен:

$$I_{2D} = \left[ (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2} (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) \right]. \quad (1.70)$$

Этот инвариант девиатора является обобщенной характеристикой деформации изменения формы, и его можно использовать для построения других, более

удобных, обобщенных характеристик деформации. В частности, из (1.70) можно получить обобщенную характеристику деформации  $e_i$  [4]:

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{xx} - e_{zz})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2)} \quad (1.71)$$

(о величине  $\nu$  см. гл. 2), которая называется интенсивностью деформаций. Эта величина построена таким образом, что при одноосном напряженном состоянии, когда  $e_{xx} = \varepsilon$ ,

$$e_{yy} = e_{zz} = -\nu e_{xx}; \quad e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0,$$

получается  $e_i = \varepsilon$ .

В дальнейшем будут изложены вопросы приложения нелинейной теории к расчету систем, работающих в условиях малых деформаций. Анализ показывает, что соотношения теории малых нелинейных деформаций можно использовать с известной точностью и при деформациях, сравнимых с деформациями, соответствующими пределу прочности. Поэтому в дальнейшем в приложениях будем предполагать, что площадки, по которым действуют напряжения, в процессе деформации изменяются несущественно. Иными словами, напряжения будем относить к тем размерам площадок, которые были до их деформации. Это дает основания для использования линейной теории напряжений (будем предполагать, что она известна читателю). Ограничимся только некоторыми сведениями справочного характера, так как в дальнейшем мы будем их использовать.

Тензор напряжений будем обозначать:

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}; & \sigma_{xy}; & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy}; & \sigma_{yy}; & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz}; & \sigma_{yz}; & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

Напряжения с двумя одинаковыми индексами называются нормальными напряжениями, напряжения с разными индексами — касательными напряжениями, или напряжениями сдвига.

Запишем также уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X\rho &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y\rho &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z\rho &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

где  $X\rho$ ,  $Y\rho$  и  $Z\rho$  — массовые силы.

Из обобщенных характеристик напряженного состояния в дальнейшем будет использована величина  $\sigma_i$  [4]:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}, \quad (1.74)$$

называемая интенсивностью напряжений. Эта величина построена таким образом, что при одноосном напряженном состоянии (когда  $\sigma_{xx} = \sigma$ ;  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ) интенсивность  $\sigma_i = \sigma$ .

## ГЛАВА 2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

### 1. Зависимости между тензорами напряжений и деформаций. Удельная энергия деформаций

Удельная энергия деформации  $a$  может быть представлена или как функция шести компонентов тензора деформаций:

$$a = a(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}), \quad (2.1)$$

или как функция трех инвариантов тензора деформаций:

$$a = a(I_1, I_2, I_3); \quad (2.2)$$

Рассмотрим бесконечно малые приращения деформаций, которым будет соответствовать бесконечно малое приращение удельной энергии деформации  $da$ . Из формулы (2.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} da = \frac{\partial a}{\partial \epsilon_{xx}} d\epsilon_{xx} + \frac{\partial a}{\partial \epsilon_{yy}} d\epsilon_{yy} + \frac{\partial a}{\partial \epsilon_{zz}} d\epsilon_{zz} + \frac{\partial a}{\partial \epsilon_{xy}} d\epsilon_{xy} + \\ + \frac{\partial a}{\partial \epsilon_{xz}} d\epsilon_{xz} + \frac{\partial a}{\partial \epsilon_{yz}} d\epsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С другой стороны, очевидно:

$$da = \sigma_{xx} de_{xx} + \sigma_{yy} de_{yy} + \sigma_{zz} de_{zz} + \sigma_{xy} de_{xy} + \sigma_{xz} de_{xz} + \sigma_{yz} de_{yz}. \quad (2.4)$$

Справедливость этой формулы следует из принципа независимости действия сил, который в данном случае бесконечно малого изменения деформации вполне применим.

Сравнивая (2.4) с (2.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial a}{\partial e_{xx}}; & \sigma_{yy} &= \frac{\partial a}{\partial e_{yy}}; & \sigma_{zz} &= \frac{\partial a}{\partial e_{zz}}; \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial a}{\partial e_{xy}}; & \sigma_{xz} &= \frac{\partial a}{\partial e_{xz}}; & \sigma_{yz} &= \frac{\partial a}{\partial e_{yz}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Но из формулы (2.2) следует:

$$\frac{\partial a}{\partial e_{xx}} = \frac{\partial a}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial a}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial a}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial e_{xx}}. \quad (2.6)$$

Исходя из этого выражения и из аналогичных пяти выражений для остальных деформаций, а также принимая во внимание формулы (1.38), вместо (2.5) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (e_{yy} + e_{zz}) + \frac{\partial a}{\partial I_3} \left( e_{yy} e_{zz} - \frac{1}{4} e_{yz}^2 \right); \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (e_{xx} + e_{zz}) + \frac{\partial a}{\partial I_3} \left( e_{xx} e_{zz} - \frac{1}{4} e_{xz}^2 \right); \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (e_{xx} + e_{yy}) + \frac{\partial a}{\partial I_3} \left( e_{xx} e_{yy} - \frac{1}{4} e_{xy}^2 \right); \\ \sigma_{xy} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_2} e_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_3} \left( \frac{1}{2} e_{xz} e_{yz} - e_{zz} e_{xy} \right); \\ \sigma_{xz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_2} e_{xz} + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_3} \left( \frac{1}{2} e_{xy} e_{yz} - e_{yy} e_{xz} \right); \\ \sigma_{yz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_2} e_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_3} \left( \frac{1}{2} e_{xy} e_{xz} - e_{xx} e_{yz} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Эти формулы в наиболее общем виде выражают зависимость между напряжениями и деформациями в нелинейно упругом материале. Для реализации этой зависимости необходимо знать три функции:  $\frac{\partial a}{\partial I_1}$ ;  $\frac{\partial a}{\partial I_2}$ ;  $\frac{\partial a}{\partial I_3}$ , определяющие механические характеристики материала. Некоторое представление о характере этих функций

можно составить следующим образом. Перепишем формулы (2.7) для главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и главных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \frac{\partial a}{\partial I_3} \varepsilon_2 \varepsilon_3; \\ \sigma_2 &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \frac{\partial a}{\partial I_3} \varepsilon_1 \varepsilon_3; \\ \sigma_3 &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{\partial a}{\partial I_3} \varepsilon_1 \varepsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Рассматривая эти формулы как систему уравнений относительно неизвестных функций  $\frac{\partial a}{\partial I_1}$ ,  $\frac{\partial a}{\partial I_2}$ ,  $\frac{\partial a}{\partial I_3}$  и определяя эти неизвестные, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial I_1} &= \frac{\sigma_1 \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \sigma_2 \varepsilon_2^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \sigma_3 \varepsilon_3^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}; \\ \frac{\partial a}{\partial I_2} &= - \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \sigma_2 \varepsilon_2 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + \sigma_3 \varepsilon_3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}; \\ \frac{\partial a}{\partial I_3} &= \frac{\sigma_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \sigma_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \sigma_3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Из этих формул видно, что производные потенциальной энергии по инвариантам тензора деформаций отличаются друг от друга степенью деформаций, стоящих в числителях. Достаточно наглядной эта особенность становится при одноосном напряженном состоянии, т. е. при  $\sigma_1 = \sigma$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ;  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq 0$ ; тогда

$$\frac{\partial a}{\partial I_1} = \sigma \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon - \varepsilon_2)^2}; \quad \frac{\partial a}{\partial I_2} = -\sigma \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - \varepsilon_2)^2}; \quad \frac{\partial a}{\partial I_3} = \sigma \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_2)^2}. \quad (2.10)$$

Отсюда (в данном, частном, случае) следует:

$$\frac{\partial a}{\partial I_1} = - \frac{\partial a}{\partial I_2} \varepsilon = \frac{\partial a}{\partial I_3} \varepsilon^2. \quad (2.11)$$

Формулы (2.9), (2.10) и (2.11) можно использовать для экспериментального определения функций  $da/dI_1$ ;  $da/dI_2$ ;  $da/dI_3$ .

В некоторых практически важных случаях [4] можно принять

$$da/dI_3 = 0, \quad (2.12)$$

Это допущение позволяет существенно упростить уравнения (2.7), которые при этом принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}); & \sigma_{xy} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_2} \epsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}); & \sigma_{xz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_2} \epsilon_{xz}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial a}{\partial I_1} + \frac{\partial a}{\partial I_2} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}); & \sigma_{yz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial I_2} \epsilon_{yz}; \end{aligned} \right\} (2.13)$$

Складывая почленно размещенные слева три уравнения, получим:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3 \frac{\partial a}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial a}{\partial I_2} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}). \quad (2.14)$$

Отсюда, введя обозначения

$$\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \sigma_{\text{ср}}; \quad \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}}{3} = \epsilon_{\text{ср}}, \quad (2.15)$$

будем иметь:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\partial a}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial a}{\partial I_2} \epsilon_{\text{ср}}. \quad (2.16)$$

Далее вычислим интенсивность напряжений по формуле (1.74):

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)]. \quad (2.17)$$

После подстановки сюда значений напряжений по формуле (2.13) получим:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial I_2} \right)^2 \left[ (\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})^2 + (\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})^2 + (\epsilon_{zz} - \epsilon_{yy})^2 + \frac{3}{2} (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{yz}^2) \right]. \quad (2.18)$$

Сравнивая правую часть выражения (2.18) с формулой для интенсивности деформаций (1.71)

$$\epsilon_i^2 = \frac{1}{2(1+\nu)^2} \left[ (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + (\epsilon_{xx} - \epsilon_{zz})^2 + (\epsilon_{yy} - \epsilon_{zz})^2 + \frac{3}{2} (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{yz}^2) \right], \quad (2.19)$$

определим соотношения между интенсивностями напряжений и деформаций в следующем виде:

$$\sigma_i^2 = \left( \frac{\partial a}{\partial I_2} \right)^2 (1 + \nu)^2 e_i^2. \quad (2.20)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial a}{\partial I_2} = \pm \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i}. \quad (2.21)$$

Знак правой части нужно выбрать таким, чтобы в формулах (2.13) для касательных напряжений положительным напряжениям соответствовали положительные деформации. Исходя из этого требования получим:

$$\frac{\partial a}{\partial I_2} = - \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i}. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в (2.16), найдем:

$$\frac{\partial a}{\partial I_1} = \sigma_{cp} + \frac{2\sigma_i}{(1 + \nu) e_i} e_{cp}. \quad (2.23)$$

Заменив в формулах (2.13) значения производных удельной энергии деформации на их выражения (2.22) и (2.23), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} &= \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i} (e_{xx} - e_{cp}); & \sigma_{xy} &= \frac{\sigma_i}{2(1 + \nu) e_i} e_{xy}; \\ \sigma_{yy} - \sigma_{cp} &= \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i} (e_{yy} - e_{cp}); & \sigma_{xz} &= \frac{\sigma_i}{2(1 + \nu) e_i} e_{xz}; \\ \sigma_{zz} - \sigma_{cp} &= \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i} (e_{zz} - e_{cp}); & \sigma_{yz} &= \frac{\sigma_i}{2(1 + \nu) e_i} e_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

При  $\sigma_i = E e_i$ ;  $\nu = \nu_0$  (где  $E$  и  $\nu_0$  — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона при  $e_i = 0$ , т. е. начальные значения этих величин) уравнения (2.24) переходят в закон Гука:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} &= 2G (e_{xx} - e_{cp}); & \sigma_{xy} &= G e_{xy}; \\ \sigma_{yy} - \sigma_{cp} &= 2G (e_{yy} - e_{cp}); & \sigma_{xz} &= G e_{xz}; \\ \sigma_{zz} - \sigma_{cp} &= 2G (e_{zz} - e_{cp}); & \sigma_{yz} &= G e_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Здесь, как обычно,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu_0)};$$

При  $\nu=0,5$  уравнения (2.24) переходят в уравнения теории малых пластических деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{e_l} (e_{xx} - e_{cp}); & \sigma_{xy} &= \frac{\sigma_l}{3e_l} e_{xy}; \\ \sigma_{yy} - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{e_l} (e_{yy} - e_{cp}); & \sigma_{xz} &= \frac{\sigma_l}{3e_l} e_{xz}; \\ \sigma_{zz} - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{e_l} (e_{zz} - e_{cp}); & \sigma_{yz} &= \frac{\sigma_l}{3e_l} e_{yz}. \end{aligned} \right\} (2.26)$$

В формулах (2.24)  $\nu$  есть коэффициент поперечной деформации, который в данном случае является переменной величиной. Отношение  $\sigma_l/e_l$  можно назвать секущим модулем упругости  $E_c$  (рис. 8), так что

$$E_c = \sigma_l/e_l. \quad (2.27)$$

Величину

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} \quad (2.28)$$

можно соответственно назвать секущим модулем упругости при сдвиге.

Таким образом, если принять допущение (2.12), то нелинейно-упругий материал будет характеризоваться тремя переменными величинами  $E_c$ ,  $G_c$  и  $\nu$ , между которыми существует зависимость (2.28). Справедливость этой зависимости для нелинейно-упругого материала выводится точно так же, как и для линейно-упругого материала, если при выводе рассматривать бесконечно малые приращения деформаций (вместо конечных).

Используя уравнение (2.24), выразим деформации через напряжения. Для этого примем, что зависимость между  $\sigma_{cp}$  и  $e_{cp}$  определяется законом Гука для линейно-упругой объемной деформации (как известно, это предположение является одной из основных гипотез теории малых пластических деформаций), т. е.

$$\sigma_{cp} = \frac{E}{1 - 2\nu_0} e_{cp}. \quad (2.29)$$

Учитывая это, а также исходя из формулы (2.27), первое уравнение (2.24) перепишем в следующем виде:

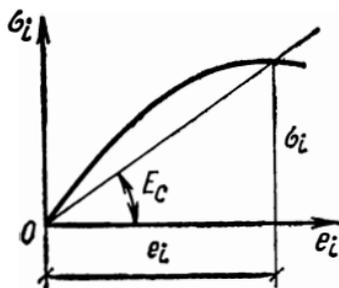


РИС. 8

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{ср}}{E_c} (1 + \nu) + \frac{1 - 2\nu_0}{E} \sigma_{ср}, \quad (2.30)$$

Используя первую формулу (2.15) вместо (2.30), можно написать:

$$\epsilon_{xx} = \left( \frac{2}{3} \frac{1 + \nu}{E_c} + \frac{1 - 2\nu_0}{3E} \right) \left[ \sigma_{xx} - \frac{\frac{1 + \nu}{3E_c} - \frac{1 - 2\nu_0}{3E}}{\frac{2}{3} \frac{1 + \nu}{E_c} + \frac{1 - 2\nu_0}{3E}} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right]; \quad (2.31)$$

Предположим, что

$$\frac{\frac{1 + \nu}{3E_c} - \frac{1 - 2\nu_0}{3E}}{\frac{2}{3} \frac{1 + \nu}{E_c} + \frac{1 - 2\nu_0}{3E}} = \nu, \quad (2.32)$$

тогда

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{E_c}{E} (1 - 2\nu_0). \quad (2.33)$$

Подставляя это значение  $\nu$  в выражение, стоящее перед квадратной скобкой формулы (2.31), получим:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E_c} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]. \quad (2.34)$$

Аналогичным путем преобразуем и другие уравнения. Окончательно будем иметь систему из шести уравнений, выражающих зависимости между деформациями и напряжениями:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E_c} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; & \epsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G_c}; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E_c} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]; & \epsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G_c}; \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E_c} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]; & \epsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G_c}. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Здесь  $G_c$  определяется по формуле (2.28). Подставив в нее значение  $\nu$  по формуле (2.33), получим:

$$G_c = \frac{E}{3 \frac{E}{E_c} - 1 + 2\nu_0} \quad (2.36)$$

Таким образом, мы выразили зависимости между напряжениями и деформациями формально в том же виде, в каком обычно записывается закон Гука, с замеченной констант  $E$ ,  $\nu_0$  и  $G$  на переменные  $E_c$ ,  $\nu$  и  $G_c$ , определяемые по формулам (2.27), (2.33) и (2.36). Напомним еще раз, что при этом были использованы только две гипотезы: 1) производная удельной энергии по третьему инварианту тензора деформаций равна нулю и 2) объемная деформация линейно упруга.

Складывая первые три уравнения (2.35), получим:

$$\Theta = \frac{E_c}{1 - 2\nu} \theta, \quad (2.37)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= 3\sigma_{cp} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \\ \theta &= 3\varepsilon_{cp} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Сравнивая формулы (2.29) и (2.37), можно получить формулу (2.33). Используя (2.37), можно записать зависимость между напряжениями и деформациями в виде, аналогичном соответствующей записи закона Гука через константы Ляме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda_c \theta + 2\mu_c \varepsilon_{xx}; & \sigma_{xy} &= \mu_c \varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \lambda_c \theta + 2\mu_c \varepsilon_{yy}; & \sigma_{xz} &= \mu_c \varepsilon_{xz}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda_c \theta + 2\mu_c \varepsilon_{zz}; & \sigma_{yz} &= \mu_c \varepsilon_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Здесь

$$\lambda_c = \frac{E_c \nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}; \quad \mu_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} = G_c - \quad (2.40)$$

переменные величины, аналогичные константам Ляме. Заметим, что при  $e_i = 0$  (т. е. в начальной точке диаграммы растяжения материала) переменные (2.40) переходят в константы Ляме, переменные секущие модули  $E_c$  и  $G_c$  — в начальные значения этих величин  $E$  и  $G$ , а величины  $\nu$  по формуле (2.33) переходят в начальные значения коэффициента Пуассона  $\nu_0$ . При  $e_i \rightarrow \infty$  величины  $E_c$  и  $G_c$  стремятся к нулю [так же, как и переменные (2.40)], а коэффициент поперечной деформации — к значению  $\nu = 0,5$ .

Определим при сделанных допущениях удельную энергию деформации  $a$ . Подставив в формулу (2.4) зна-

чения напряжений по формулам (2.24), после некоторой перегруппировки членов получим:

$$da = \sigma_{cp} (de_{xx} + de_{yy} + de_{zz}) + \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i} \left[ (e_{xx} - e_{cp}) de_{xx} + (e_{yy} - e_{cp}) de_{yy} + (e_{zz} - e_{cp}) de_{zz} + \frac{1}{2} (e_{xy} de_{xy} + e_{xz} de_{xz} + e_{yz} de_{yz}) \right]. \quad (2.41)$$

Сравним это выражение с формулой для дифференциала  $de_i$ :

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial e_{xx}} de_{xx} + \frac{\partial e_i}{\partial e_{yy}} de_{yy} + \frac{\partial e_i}{\partial e_{zz}} de_{zz} + \frac{\partial e_i}{\partial e_{xy}} de_{xy} + \frac{\partial e_i}{\partial e_{xz}} de_{xz} + \frac{\partial e_i}{\partial e_{yz}} de_{yz}. \quad (2.42)$$

Подставив сюда значения производных и используя выражение (2.19), получим:

$$de_i = \frac{3}{(1 + \nu)^2 2e_i} \left[ (e_{xx} - e_{cp}) de_{xx} + (e_{yy} - e_{cp}) de_{yy} + (e_{zz} - e_{cp}) de_{zz} + \frac{1}{2} (e_{xy} de_{xy} + e_{xz} de_{xz} + e_{yz} de_{yz}) \right]. \quad (2.43)$$

На основе сопоставления (2.41) и (2.43) имеем:

$$da = 3\sigma_{cp} de_{cp} + \frac{2}{3} (1 + \nu) \sigma_i de_i, \quad (2.44)$$

или, после интегрирования в соответствующих пределах,

$$a = \frac{3}{2} \sigma_{cp} e_{cp} + \frac{2}{3} \int_0^{e_i} (1 + \nu) \sigma_i de_i. \quad (2.45)$$

Используя выражения (2.29) и (2.33), получим:

$$a = \frac{3}{2} \frac{E}{1 - 2\nu_0} e_{cp}^2 + \int_0^{e_i} \sigma_i de_i - \frac{1 - 2\nu_0}{3E} \int_0^{e_i} \sigma_i^2 \frac{de_i}{e_i}, \quad (2.46)$$

Обычно (см., например, [29]) в этой формуле записывают только два первых члена, так как ее выводят из предположения, что  $\nu = 0,5$ . Третий член учитывает влияние изменения коэффициента поперечной деформации  $\nu$  (в зависимости от значения интенсивности деформации).

ций) на удельную энергию. Поправка, вносимая этим членом, может быть в некоторых случаях весьма существенной.

## 2. Зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций.

### Аппроксимация экспериментальных кривых

Для практического использования формул, полученных в §1 этой главы, необходимо экспериментальным путем установить зависимость между интенсивностями напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $e_i$ . Поскольку эти величины являются обобщенными характеристиками напряженно-деформированного состояния, то в принципе безразлично, какой вид напряженного состояния будет выбран при экспериментах. Однако с простыми видами напряженного состояния (растяжением, сжатием, сдвигом, изгибом, кручением) опыты проще. Формулы для деформаций (1.71) и интенсивностей напряжений (1.74) составлены таким образом, что зависимости, полученные из экспериментов с любым видом напряженного состояния, должны быть идентичными. Чаще всего получают диаграммы растяжения (или сжатия) материала, выражающие экспериментальные зависимости между условными напряжениями  $\sigma$  и условными деформациями  $\epsilon$ , причем:

$$\sigma = \frac{P}{F}; \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.47)$$

где  $P$  — нагрузка, приложенная к образцу, размеры которого до деформации обозначены так:  $F$  — площадь сечения;  $l$  — длина;  $\Delta l$  — абсолютное удлинение.

Полученные диаграммы растяжения-сжатия в соответствии с формулами (1.71) и (1.74) без всяких пересчетов изображают также зависимость между  $\sigma_i$  и  $e_i$ .

На рис. 9 изображены типичные экспериментальные диаграммы растяжения для различных марок сталей, алюминиевых сплавов, меди и оргстекла.

Поскольку величины (2.47) представляют собой отношения нагрузки и абсолютного удлинения к первоначальным размерам образца, все изображенные диаграммы имеют максимум, соответствующий пределу прочности материала, который будем обозначать  $\sigma_{\text{пп}}$ , а соответствующее этому максимуму значение деформации —

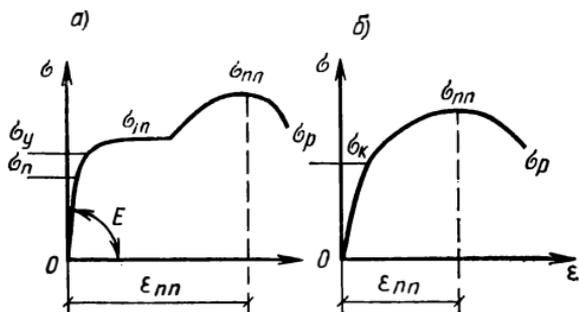


РИС. 9

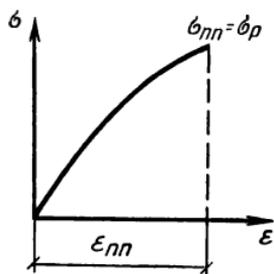


РИС. 10

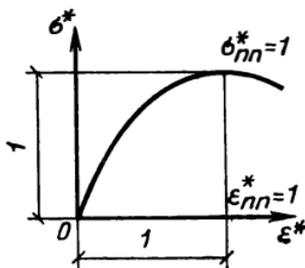


РИС. 11

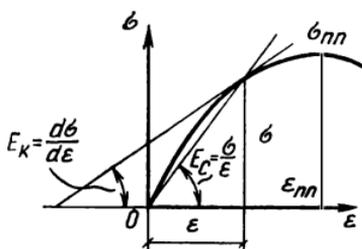


РИС. 12

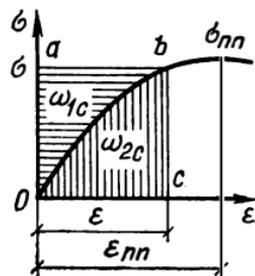


РИС. 13

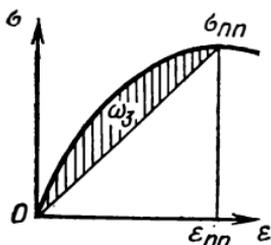


РИС. 14

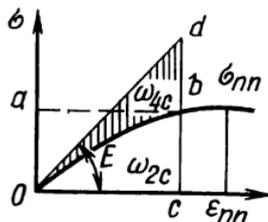


РИС. 15

$\epsilon_{\text{ш}}$ . Кроме того, все эти диаграммы после максимума имеют нисходящую ветвь вплоть до точки  $\sigma_p$ , которая определяет условные напряжения, соответствующие разрыву образца. Существование нисходящей ветви характерно для пластических материалов. У хрупких материалов, например бетона, чугуна (рис. 10), диаграммы не имеют нисходящей ветви и максимума. Это означает, что при  $\sigma = \sigma_{\text{ш}}$  производная напряжений по деформациям не равна нулю.

Полученные экспериментальные диаграммы имеют еще несколько характерных точек: предел пропорциональности  $\sigma_{\text{п}}$ , определяющий верхний предел напряже-

ний, при которых сохраняет свое значение закон Гука, предел упругости  $\sigma_y$ , определяющий верхний предел напряжений, при которых материал сохраняет упругие свойства. Участок между  $\sigma_{п}$  и  $\sigma_y$  обычно невелик, так что иногда эти две точки отождествляют. Далее следует отметить предел текучести  $\sigma_T$ , определяющий наибольшее значение напряжений, при которых еще существуют упругие деформации и начинаются чисто пластические. Затем идет так называемая площадка текучести, представляющая собой зону идеальной пластичности (см. рис. 9, а). За ней опять возникает участок смешанных упругих и пластических деформаций, называемый зоной упрочнения. Таким образом, на диаграмме в общем случае можно отметить следующие участки: 1) участок линейной упругости (от  $\sigma=0$  до  $\sigma=\sigma_{п}$ ); 2) участок нелинейной упругости (от  $\sigma=\sigma_{п}$  до  $\sigma=\sigma_y$ ); 3) участок смешанных упругопластических деформаций (от  $\sigma=\sigma_y$  до  $\sigma=\sigma_T$ ); 4) участок идеальной пластичности ( $\sigma=\sigma_T$ ); 5) участок упрочнения (от  $\sigma=\sigma_T$  до  $\sigma=\sigma_{пп}$ ); 6) участок разрушения (от  $\sigma=\sigma_{пп}$  до  $\sigma=\sigma_p$ ). Но многие материалы имеют диаграммы без четко выраженной площадки текучести (рис. 9, б). В этом случае участок нелинейной упругости незаметно переходит в участок упрочнения. У таких диаграмм отметим еще точку  $\sigma=\sigma_K$ , в которой кривизна максимальна. Напряжения  $\sigma_K$  в практических приложениях могут играть роль условного предела текучести.

Указанным напряжениям соответствуют деформации, которые будем обозначать буквой  $\epsilon$  с такими же индексами, как и у соответствующего напряжения. Например,  $\epsilon_{п}$  — деформация, соответствующая пределу пропорциональности,  $\epsilon_T$  — деформация, соответствующая пределу текучести, и т. д.

Перестроим все изображенные диаграммы в координатах:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^* &= \frac{\sigma}{\sigma_{пп}}; & \epsilon^* &= \frac{\epsilon}{\epsilon_{пп}}; \\ 0 &\leq \sigma^* \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Выбор такой системы координат позволяет изобразить любые диаграммы стандартным образом, причем основная часть диаграммы (без нисходящей ветви) уместается в координатном квадрате  $1 \times 1$  (рис. 11).

Построенные таким образом диаграммы удобно сравнивать друг с другом, даже если они относятся к различным материалам. Удобство такого изображения проявляется, в частности, при аппроксимации кривых аналитическими выражениями.

Всем отмеченным выше характерным точкам ( $\sigma_{п}$ ,  $\sigma_{у}$ ,  $\sigma_{т}$ ,  $\sigma_{к}$ ,  $\sigma_{р}$ ,  $\varepsilon_{п}$ ,  $\varepsilon_{у}$ ,  $\varepsilon_{т}$ ,  $\varepsilon_{к}$ ,  $\varepsilon_{р}$ ) кривых  $\sigma$ — $\varepsilon$  будут соответствовать точки кривых  $\sigma^*$ — $\varepsilon^*$ , причем координаты этих точек [и вообще все величины, выражаемые в системе координат (2.48)], будем отмечать звездочкой, например,  $\sigma_{п}^*$ ,  $\sigma_{у}^*$ ,  $\varepsilon_{п}^*$ ,  $\varepsilon_{у}^*$ , ... и т. д.]; очевидно:

$$\sigma_{п}^* = \frac{\sigma_{п}}{\sigma_{пп}}; \quad \sigma_{у}^* = \frac{\sigma_{у}}{\sigma_{пп}}; \quad \varepsilon_{п}^* = \frac{\varepsilon_{п}}{\varepsilon_{пп}}; \quad \varepsilon_{у}^* = \frac{\varepsilon_{у}}{\varepsilon_{пп}}. \quad (2.49)$$

и т. д.

Кроме этих механических характеристик, определяемых самой кривой, большое значение имеют характеристики, определяемые ее производной и секущей (рис. 12). Величины

$$E_{к} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}; \quad E_{с} = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad E^* = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*}; \quad E_{с}^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \quad (2.50)$$

называются соответственно касательными и секущими модулями. В начале координат при  $\varepsilon=0$  касательный модуль равняется секущему, так что

$$(E_{к})_{\varepsilon=0} = (E_{с})_{\varepsilon=0} = E. \quad (2.51)$$

Величина  $E$  называется начальным модулем упругости. В точке  $\sigma=\sigma_{пп}$  у пластических материалов

$$(E_{к})_{\varepsilon=\varepsilon_{пп}} = 0, \quad (2.52)$$

у хрупких эта величина не равняется нулю. На участке текучести  $E_{к}=0$  в точке, отделяющей площадку текучести от участка упрочнения,  $E_{к}<0$ . Но чаще всего встречаются диаграммы, у которых во всех точках  $E_{к}>0$ . Для них, очевидно,  $E_{с}>E_{к}$ . Материалы, имеющие диаграммы с  $E_{к}<0$ , встречаются значительно реже. У этих диаграмм  $E_{с}<E_{к}$ .

Зависимость между модулями, определяемыми в системе координат  $\sigma$ — $\varepsilon$ , и модулями, отмеченными звездочкой (в системе  $\sigma^*$ — $\varepsilon^*$ ), выражается формулами:

$$E_{к} = \frac{\sigma_{пп}}{\varepsilon_{пп}} E_{к}^*; \quad E_{с} = \frac{\sigma_{пп}}{\varepsilon_{пп}} E_{с}^*. \quad (2.53)$$

Составим некоторые интегральные характеристики кривых  $\sigma-\varepsilon$  и  $\sigma^*-\varepsilon^*$ , имеющие очень важное значение. Прежде всего отметим удельную энергию деформации, которая определяется площадью  $ObcO$  (рис. 13). Будем обозначать эту площадь  $\omega_2$  (или  $\omega_2^*$ , если эта площадь определяется по кривой  $\sigma^*-\varepsilon^*$ ) с дополнительным индексом, показывающим, через какую точку горизонтальной оси проходит прямая  $bc$ . Если точка  $c$  произвольна, то соответствующую площадь будем обозначать  $\omega_{2c}$  ( $\omega_{2c}^*$ ). Если точка  $c$  совпадает с  $\varepsilon_{п}$ , то будем писать  $\omega_{2п}$  ( $\omega_{2п}^*$ ) и т. д. Удельную энергию деформации, соответствующую пределу прочности, будем обозначать  $\omega_2$  без дополнительных индексов.

Отметим также дополнительную энергию  $\omega_1$  (или  $\omega_1^*$ ), которая изображается площадью  $OabO$ . Очевидно,

$$\omega_{1a} = \sigma\varepsilon - \omega_{2c}; \quad \omega_{1a}^* = \sigma^*\varepsilon^* - \omega_{2c}^* \quad (2.54)$$

Это равенство объясняет происхождение термина «дополнительная энергия». Так же, как и при обозначении  $\omega_2$ , при обозначении  $\omega_1$  будем ставить дополнительный индекс в зависимости от положения точки  $a$ . Заметим, что если точка  $a$  совпадает с пределом прочности, то

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= \sigma_{пп}\varepsilon_{пп}; \\ \omega_1^* + \omega_2^* &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Важную роль играет площадь  $\omega_3$ , равная, как это видно из рис. 14, следующему:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{3a} &= \omega_{2c} - \frac{\sigma\varepsilon}{2}; & \omega_{3a}^* &= \omega_{2c}^* - \frac{\sigma^*\varepsilon^*}{2}; \\ \omega_{3a} &= \frac{\sigma\varepsilon}{2} - \omega_{1c}; & \omega_{3a}^* &= \frac{\sigma^*\varepsilon^*}{2} - \omega_{1c}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Эта площадь в некоторой степени характеризует нелинейность диаграммы работы материала. Если точка  $b$  совпадает с пределом прочности  $\sigma_{пп}$ , то:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= \omega_2 - \frac{\sigma_{пп}\varepsilon_{пп}}{2}; & \omega_3^* &= \omega_2^* - \frac{1}{2}; \\ \omega_3 &= \frac{\sigma_{пп}\varepsilon_{пп}}{2} - \omega_1; & \omega_3^* &= \frac{1}{2} - \omega_1^* \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Проведем линию, касательную к кривой  $\sigma$ — $\epsilon$  (или  $\sigma^*$ — $\epsilon^*$ ) в начале координат до пересечения с прямой  $bc$  в точке  $d$ , и вычислим площадь  $\omega_{4c}$ , лежащую внутри контура  $Odb0$  (рис. 15):

$$\omega_{4c} = \frac{E\epsilon^2}{2} - \omega_{2c}; \quad \omega_{4c}^* = \frac{E^*(\epsilon^*)^2}{2} + \omega_{2c}^* \quad (2.58)$$

Площадь  $\omega_{4c}$  определяет разность между удельной энергией линейно упругого тела с модулем  $E$  ( $E^*$ ) и удельной энергией нелинейно упругого тела. Если точка  $b$  совпадает с пределом прочности  $\sigma_{пп}$ , то:

$$\omega_4 = \frac{E\epsilon_{пп}^2}{2} - \omega_2; \quad \omega_4^* = \frac{1}{2} E^* - \omega_2^* \quad (2.59)$$

Переход от площадей  $\omega$ , соответствующих кривой  $\sigma$ — $\epsilon$ , к площадям  $\omega^*$ , соответствующим кривой  $\sigma^*$ — $\epsilon^*$ , осуществляется по формуле

$$\omega = \sigma_{пп}\epsilon_{пп}\omega^* \quad (2.60)$$

Возведем  $\sigma$  (или  $\sigma^*$ ) в квадрат и построим диаграммы  $\sigma^2$ — $\epsilon$  [или  $(\sigma^*)^2$ — $\epsilon^*$ ] (рис. 16). На этих диаграммах отметим площади  $\Omega_{1c}$  и  $\Omega_{2c}$  (см. рис. 16, а) или  $\Omega_{1c}^*$  и  $\Omega_{2c}^*$  (см. рис. 16, б), в обозначениях которых будем также ставить дополнительные индексы в зависимости от положения точки  $c$ . Значение этих площадей, соответствующих деформации  $\epsilon_{пп}$ , обозначим  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ( $\Omega_1^*$ ,  $\Omega_2^*$ ). Из рис. 16 видно, что:

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \sigma_{пп}^2 \epsilon_{пп}; \quad \Omega_1^* + \Omega_2^* = 1 \quad (2.61)$$

Численные значения этих площадей используют при аппроксимации экспериментальных диаграмм.

Все вышесказанное относится как к диаграммам растяжения, так и к диаграммам сжатия. Если эти две диаграммы мы рассматриваем одновременно, то величины, относящиеся к кривым растяжения, будем обозначать знаком плюс, а величины, относящиеся к кривым сжатия, — знаком минус. Например,  $\omega^+$ ,  $\omega^-$  и т. д.

Изображение экспериментальных кривых  $\sigma$ — $\epsilon$

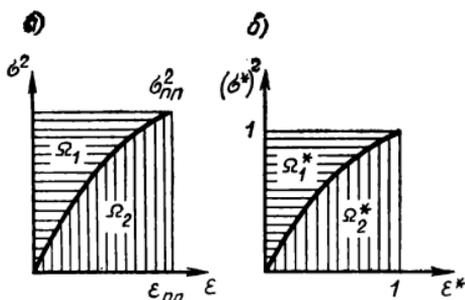


РИС. 16

(или  $\sigma^* - \varepsilon^*$ ) с помощью аналитических формул имеет большое значение, поэтому было предложено много различных выражений для аппроксимации экспериментальных диаграмм.

Рассмотрим наиболее важные из них.

### Степенной закон Бюльфингера

Эта первая (после закона Гука) форма связи между напряжениями и деформациями предложена в 1729 г. Г. Б. Бюльфингером (1693—1750 гг.), который начиная

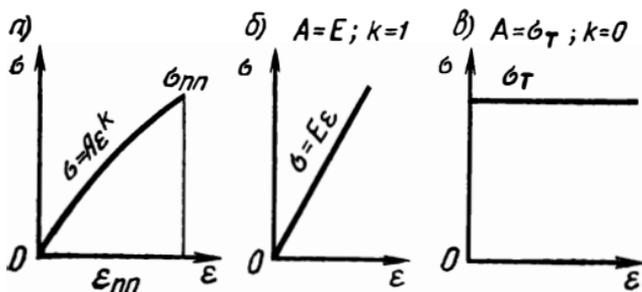


РИС. 17

с 1725 г. был членом Петербургской Академии наук и первым ее профессором физики.

Степенной закон при  $k \neq 1$  представляет собой нелинейную зависимость, которую мы запишем в следующем виде (рис. 17, а):

$$\sigma = A\varepsilon^k, \quad (2.62)$$

где  $A$  — константа, имеющая размерность напряжений;  $k$  — показатель степени (безразмерная величина).

Для одновременного описания этой формулой участков растяжения и сжатия следует, применяя правило знаков при возведении в степень, показатель  $k$  независимо от его значения считать нечетным числом, т. е. вычисления выполнять по правилу

$$(+\varepsilon)^k = +\varepsilon^k; (-\varepsilon)^k = -\varepsilon^k. \quad (2.63)$$

Зависимость (2.62) имеет следующие достоинства: она не сложная, что облегчает вычисления; при больших деформациях хорошо описывает опытные кривые; обладает достаточной универсальностью, так как при  $k=1$  и  $A=E$  из (2.62) получаем закон Гука (рис. 17, б), а при  $k=0$  и  $A=\sigma_T$  — закон для жесткопластического

тела (рис. 17, в). Это означает, что из решения, найденного для конструкции из материала с произвольным значением  $k$ , можно автоматически получить (сделав отмеченные подстановки) решение для линейно-упругой и жесткопластической конструкции. Кроме того, при этой зависимости направляющие тензоры напряжений и деформаций не зависят от параметра нагрузки, что обеспечивает относительную простоту решения по крайней мере при простом нагружении. Но зависимость (2.62) имеет также и существенные недостатки: она плохо аппроксимирует опытные кривые при малых деформациях (так как при  $\epsilon=0$  начальный модуль упругости равен бесконечности); в большинстве случаев показатель степени  $k$  оказывается числом дробным, и поэтому часто решение получается в виде системы нелинейных алгебраических уравнений с нецелыми показателями, которые могут быть решены лишь численными методами. Отметим также, что кривая (2.62) не имеет максимума при  $\sigma=\sigma_{пп}$ , в то время как экспериментальные (условные) диаграммы этот максимум имеют. При решении конкретных задач учитывают эти достоинства и недостатки и применяют зависимость (2.62) там, где проявляются ее достоинства, а недостатки становятся несущественными, как, например, когда конструкцию рассчитывают при больших деформациях. Эта зависимость широко применяется при решении задач устойчивости и ползучести.

Определить постоянные  $A$  и  $k$  по данным экспериментальной диаграммы можно различными способами, но наиболее простой состоит в том, что константы  $A$  и  $k$  подбирают исходя из двух условий:

1) пределы прочности, определяемые по экспериментальной диаграмме (рис. 17) и по аппроксимирующей ее зависимости (2.62), должны быть равны, т. е.

$$\sigma_{пп} = A\epsilon_{пп}^k \quad (2.64)$$

где  $\sigma_{пп}$  и  $\epsilon_{пп}$  — экспериментальные значения предела прочности и соответствующей ему деформации;

2) удельные энергии деформации, определяемые по экспериментальной диаграмме и аппроксимирующей ее зависимости, должны быть равны. Отсюда следует

$$\omega_2 = A \int_0^{\epsilon_{пп}} \epsilon^k d\epsilon = \frac{A}{k+1} \epsilon_{пп}^{k+1} \quad (2.65)$$

Решая совместно равенства (2.64) и (2.65), получим:

$$k = \omega_1 / \omega_2; \quad (2.66)$$

$$A = \sigma_{\text{пп}} / \epsilon_{\text{пп}}^k; \quad (2.67)$$

Если нужно аппроксимировать кривую  $\sigma$ — $\epsilon$  не на всем ее протяжении (вплоть до предела прочности), а на определенном участке, тогда в условия (2.64) и (2.65) вместо  $\sigma_{\text{пп}}$  и  $\epsilon_{\text{пп}}$  подставляют напряжения  $\sigma$  и  $\epsilon$ , соответствующие границам этого участка.

Из формулы (2.66) следует, что показатель степени  $k$  равен отношению дополнительной энергии к энергии деформации, т. е.  $k$  имеет вполне конкретное физическое значение.

В координатах  $\sigma^*$ — $\epsilon^*$  закон Бюльфингера имеет особенно простой вид:

$$\sigma^* = (\epsilon^*)^k; \quad (2.68)$$

причем

$$k = \omega_1^* / \omega_2^*. \quad (2.69)$$

На рис. 18, а изображена экспериментальная диаграмма при  $k=0,12517$  и аппроксимирующая ее кривая. Можно заметить хорошее совпадение обеих кривых при  $\sigma > \sigma_T$  и менее удовлетворительное совпадение при малых деформациях.

Из формулы (2.69) следует, что для большинства материалов  $0 \leq k \leq 1$ . Отсюда при  $k=0$  производная

$$E_{k\epsilon=0} \left( \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = k (A\epsilon^{k-1})_{\epsilon=0} = \infty,$$

т. е. что начальный модуль  $E$  равняется бесконечности. Это, как уже отмечалось, — недостаток степенной зависимости (2.62).

Величины  $A$  и  $k$  обычно определяют по нескольким экспериментальным диаграммам, и поэтому возникает вопрос об осреднении этих величин. Если испытывали  $n$  образцов, то, обрабатывая описанным выше образом результаты испытаний, мы получим  $n$  значений  $A$  ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) и  $n$  значений  $k$  ( $k_1, k_2, \dots, k_n$ ), а также  $n$  формул:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= A_1 \epsilon^{k_1}; \\ \sigma_2 &= A_2 \epsilon^{k_2}; \\ &\dots \dots \dots; \\ \sigma_n &= A_n \epsilon^{k_n}; \end{aligned} \right\}$$

Для осреднения величин  $A_i$  и  $k_i$  перемножим эти равенства и извлечем корень  $n$  степени:

$$\sigma = \sqrt[n]{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} = \sqrt[n]{A_1 A_2 \dots A_n e^{\frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n}}} = A_{\text{ср}} e^{k_{\text{ср}}}. \quad (2.70)$$

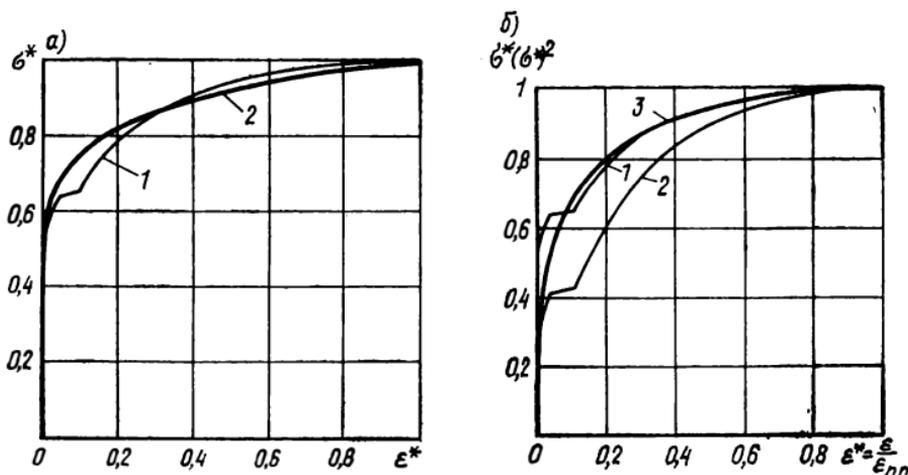


РИС. 18

Отсюда следует, что:

$$A_{\text{ср}} = \sqrt[n]{A_1 A_2 \dots A_n}; \quad k_{\text{ср}} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n}, \quad (2.71)$$

т. е.  $A_{\text{ср}}$  равняется среднему геометрическому из частных значений  $A_i$ , а  $k_{\text{ср}}$  — среднему арифметическому из частных значений  $k_i$ . Это один из вариантов осреднения, но возможны и другие способы.

### Параболическая зависимость Ф. И. Герстнера (1756—1832)

Зависимость была предложена этим исследователем в 1831 г.

Мы запишем ее в следующем виде:

$$\sigma = A_1 \varepsilon - A_2 \varepsilon^2. \quad (2.72)$$

Первую константу определяют из условия  $A_1 = E$ , т. е. таким образом, чтобы из (2.72) при малых деформациях получился закон Гука. Для определения второй константы можно составить несколько условий. Например, можно потребовать, чтобы пределы прочности эк-

спериментальной и аппроксимирующей кривых совпали, это приводит к уравнению

$$\sigma_{\text{пп}} = E\varepsilon_{\text{пп}} - A_2\varepsilon_{\text{пп}}^2 \quad (2.73)$$

Отсюда

$$A_2 = \frac{E\varepsilon_{\text{пп}} - \sigma_{\text{пп}}}{\varepsilon_{\text{пп}}^2} \quad (2.74)$$

При этом получается, что производная в точке, соответствующей пределу прочности

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{пп}}} = \frac{2\sigma_{\text{пп}}}{\varepsilon_{\text{пп}}} - E, \quad (2.75)$$

не равна нулю и даже получается отрицательной. Это является недостатком указанной аппроксимации. Другое возможное условие выражает равенство нулю производной в точке, соответствующей пределу прочности:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{пп}}} = E - 2A_2\varepsilon_{\text{пп}} = 0. \quad (2.76)$$

Отсюда:

$$A_2 = \frac{E}{2\varepsilon_{\text{пп}}}; \quad \varepsilon_{\text{пп}} = \frac{E}{2A_2} \quad (2.77)$$

Если подставить полученное значение  $\varepsilon_{\text{пп}}$  в уравнение (2.73) и решить составленное таким образом уравнение относительно  $A_2$ , то будем иметь еще одно выражение для  $A_2$ :

$$A_2 = \frac{E^2}{4\sigma_{\text{пп}}}, \quad (2.78)$$

что эквивалентно выражению (2.77). Это условие обеспечивает сразу два требования: равенство пределов прочности и равенство производных в точке максимума экспериментальной и аппроксимирующей кривых. Существенным недостатком зависимости (2.72) является то, что она несимметрична относительно растяжения-сжатия, так как  $(-\varepsilon)^2 = +\varepsilon^2$ . Поэтому если при деформации конструкции возникают напряжения разных знаков (как, например, при изгибе), то формальное применение закона (2.72) может привести к ошибкам. Тем не менее эта зависимость применяется при расчете бетонных конструкций и в других случаях, где возникают напряжения только одного знака.

Если кривую Герстнера записать в системе координат  $\sigma^* - \varepsilon^*$ , то получим:

$$\sigma^* = \alpha \left[ \varepsilon^* - \frac{(\varepsilon^*)^2}{2} \right], \quad (2.79)$$

где

$$\alpha_2^* = \frac{E \varepsilon_{\text{пп}}}{\sigma_{\text{пп}}} = \frac{E}{E_c} \quad (2.80)$$

есть отношение отрезка  $dc$  к отрезку  $bc$  (см. рис. 15) или отношение наибольшего касательного модуля  $E$  к наибольшему секущему модулю  $E_c$ .

### Зависимость Сен-Венана

Предложенную в 1864 г. Сен-Венаном (1797—1886) зависимость запишем в следующей форме:

$$\sigma = A \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{пп}}} \right)^n \right]. \quad (2.81)$$

Постоянную  $A$  выберем такой, чтобы при  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{пп}}$  напряжения равнялись пределу прочности  $\sigma_{\text{пп}}$ . Из этого условия следует, что  $A = \sigma_{\text{пп}}$ . Разделив обе части равенства (2.81) на это значение  $A$ , получим следующую зависимость в координатах  $\sigma^* - \varepsilon^*$ :

$$\sigma^* = 1 - (1 - \varepsilon^*)^n. \quad (2.82)$$

Константу  $n$  найдем из условия равенства удельных энергий экспериментальной и аппроксимирующей диаграмм:

$$\int_0^1 \sigma^* d\varepsilon^* = \int_0^1 [1 - (1 - \varepsilon^*)^n] d\varepsilon^* = \omega_2^*.$$

Отсюда

$$n = \frac{\omega_2^*}{\omega_1^*} = \frac{1}{k}. \quad (2.83)$$

Так как для большинства материалов  $\omega_2^* \gg \omega_1^*$ , то  $n \gg 1$ . Начальный модуль равен:

$$E = \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \frac{\sigma_{\text{пп}}}{\varepsilon_{\text{пп}}} n = nE_c, \quad (2.84)$$

где  $E_c$  — наибольшее значение секущего модуля.

Таким образом, начальный модуль равен конечному числу, а не бесконечности, как это было в случае зависимости (2.62). Это выгодно отличает зависимость (2.81) от степенного закона (2.62).

В общем случае вычисленный по формуле (2.84) начальный модуль  $E$  не будет равняться его экспериментальному значению. Если же вместо второго условия поставить требование, чтобы начальный модуль равнялся экспериментальному значению  $E_0$ , то из выражения (2.84) получим:

$$n = E_0/E_c. \quad (2.85)$$

### Кубическая парабола

Для того чтобы исправить основной недостаток зависимости Герстнера (2.72) (т. е. несимметричность диаграммы относительно растяжения-сжатия), необходимо во втором члене этой зависимости квадрат деформации заменить на куб:

$$\sigma = E\varepsilon - A_3\varepsilon^3. \quad (2.86)$$

Постоянную  $A_3$  определим из условия, чтобы касательный модуль при  $\varepsilon = \varepsilon_{пп}$  равнялся нулю. Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_{пп}} = E - 3A_3\varepsilon_{пп}^2 = 0; \\ E_{пп} = \sqrt{\frac{E}{3A_3}}; \quad A_3 = \frac{E}{3\varepsilon_{пп}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

Если полученное значение  $\varepsilon_{пп}$  подставить в (2.86) и потребовать, чтобы  $\sigma = \sigma_{пп}$  при  $\varepsilon = \varepsilon_{пп}$ , то будем иметь:

$$\sigma_{пп} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E}{3A_3}}. \quad (2.88)$$

Это выражение даст вторую формулу для определения  $A_3$ :

$$A_3 = \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_{пп}^2}. \quad (2.89)$$

Если воспользоваться последней формулой (2.87), то в координатах  $\sigma^* - \varepsilon^*$  зависимость (2.86) можно записать так:

$$\sigma^* = \alpha \left[ \varepsilon^* - \frac{(\varepsilon^*)^3}{3} \right], \quad (2.90)$$

где  $\alpha$  находим по формуле (2.80).

Формула (2.86) имеет ряд преимуществ. Она обеспечивает симметричность диаграммы относительно растяжения-сжатия; при  $\varepsilon \rightarrow 0$  она автоматически переходит в закон Гука. Важным преимуществом является также и то, что выражение удельной энергии, подсчитанное по этой формуле:

$$a = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} - \frac{A_3\varepsilon^4}{4}, \quad (2.91)$$

содержит значения деформаций в четных степенях, благодаря чему в случае сложного напряженного состояния можно получать решения в замкнутом виде. Недостаток формулы (2.86) состоит в том, что она не очень точно аппроксимирует экспериментальные диаграммы при больших деформациях. Зависимость (2.86) нашла большое применение в практических приложениях (см., например, работы В. Н. Пастушихина).

#### *Зависимость с четырьмя константами*

Представим зависимость между напряжениями и деформациями как сумму двух степенных зависимостей типа (2.62):

$$\sigma = A_1\varepsilon^{k_1} - A_3\varepsilon^{k_3}. \quad (2.92)$$

Для определения четырех констант составим четыре условия.

1. Условие равенства пределов прочности аппроксимирующей и экспериментальной кривых:

$$\sigma_{\text{пп}} = A_1\varepsilon_{\text{пп}}^{k_1} - A_3\varepsilon_{\text{пп}}^{k_3}; \quad (2.93)$$

2. Условие существования максимума в точке  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{мп}}$ :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{мп}}} = k_1 A_1 \varepsilon_{\text{мп}}^{k_1-1} - k_3 A_3 \varepsilon_{\text{мп}}^{k_3-1} = 0. \quad (2.94)$$

Решая совместно уравнения (2.93) и (2.94), получим:

$$A_1 = \frac{k_3 \sigma_{\text{пп}}}{(k_3 - k_1) \varepsilon_{\text{пп}}^{k_1}}; \quad A_3 = \frac{k_1 \sigma_{\text{пп}}}{(k_3 - k_1) \varepsilon_{\text{пп}}^{k_3}}. \quad (2.95)$$

Подставляя эти значения в (2.92) и переходя к координатам (2.48), будем иметь:

$$\sigma^* = \frac{1}{k_3 - k_1} [k_3 (\varepsilon^*)^{k_1} - k_1 (\varepsilon^*)^{k_3}]. \quad (2.96)$$

Для определения  $k_1$  и  $k_3$  составим еще два условия.  
 3. Условие равенства удельных энергий, подсчитанных по экспериментальной и аппроксимирующей кривым:

$$\int_0^1 \sigma^* d\varepsilon^* = \omega_2^*. \quad (2.97)$$

Подставляя в него выражение (2.96), после интегрирования получим:

$$\frac{k_1 + k_3 + 1}{(k_1 + 1)(k_3 + 1)} = \omega_2^*. \quad (2.98)$$

Принимая во внимание второе равенство (2.55), перепишем (2.98) в следующем виде:

$$\frac{k_1 k_3}{k_1 + k_3 + 1} = \frac{\omega_1^*}{\omega_2^*} = k. \quad (2.99)$$

4. Четвертое условие можно сформулировать так: среднее квадратичное отклонение между экспериментальной и аппроксимирующими кривыми должно быть равно нулю, т. е.

$$\int_0^1 (\sigma^* - \sigma_3^*)^2 d\varepsilon^* = 0. \quad (2.100)$$

где  $\sigma_3^*$  обозначает экспериментальные значения безразмерных напряжений.

Условие (2.100) эквивалентно равенству:

$$\int_0^1 (\sigma^*)^2 d\varepsilon^* = \int_0^1 (\sigma_3^*)^2 d\varepsilon_3^* = \Omega_2^*. \quad (2.101)$$

Здесь  $\varepsilon_3^*$  — экспериментальные значения деформаций, а площадь  $\Omega_2^*$  определяют согласно рис. 16 и пояснению к нему. Подставляя (2.96) в (2.101) и принимая во внимание второе выражение (2.61), после интегрирования получим:

$$\frac{2k_1 k_3 [2(k_1 + k_3) + 1]}{(k_1 + k_3 + 1) [2(k_1 + k_3) + 1] + 2k_1 k_3} = m. \quad (2.102)$$

Здесь

$$m = \Omega_1^* / \Omega_2^*. \quad (2.103)$$

Площади  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_2^*$  определяют согласно рис. 16.

Введем обозначения

$$\beta_1 = k_1 + k_3; \beta_2 = k_1 k_3 \quad (2.104)$$

и вставив их в (2.99) и (2.102), получим систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta_2}{\beta_1 + 1} &= k; \\ \frac{2\beta_2(2\beta_1 + 1)}{(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1) + 2\beta_2} &= m. \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Решая ее, найдем:

$$\beta_1 = \frac{km}{2k - m} - \frac{1}{2}; \beta_2 = k \left( \frac{km}{2k - m} + \frac{1}{2} \right) = k(\beta_1 + 1). \quad (2.106)$$

Из формул (2.104) следует, что показатели  $k_1$  и  $k_3$  есть корни квадратного уравнения

$$x^2 - x\beta_1 + \beta_2 = 0. \quad (2.107)$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = k_1 &= \frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - \beta_2} = \frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - k(\beta_1 + 1)}; \\ x_2 = k_3 &= \frac{\beta_1}{2} - \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - \beta_2} = \frac{\beta_1}{2} - \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - k(\beta_1 + 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

Из этих выкладок следует, что определение величин  $k_1$  и  $k_3$  — сравнительно простая операция: по экспериментальной диаграмме в координатах  $\sigma^* - \varepsilon^*$  и  $(\sigma^*)^2 - \varepsilon^*$  определяют величины  $k$  и  $m$ , затем по формулам (2.106) — величины  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и далее по формулам (2.108) — показатели  $k_1$  и  $k_3$ . Действия с этими показателями нужно выполнять, как сказано выше, по правилу (2.63).

На рис. 18, б показана аппроксимация экспериментальной диаграммы, изображенной в координатах  $\sigma^* - \varepsilon^*$  (кривая 1). Кривая 2 изображает  $(\sigma^*)^2$ . Параметры аппроксимирующей кривой 3 получились следующие:  $k=0,12517$ ,  $m=0,2366$ ,  $k_1=1,4216$ ,  $k_3=0,23382$ .

Обращает на себя внимание очень хорошее совпадение экспериментальной и аппроксимирующей диаграмм на участке упрочнения. Сравнивая рис. 18, а и 18, б, убеждаемся, что аппроксимация, изображенная на втором рисунке, точнее кривой, изображенной на первом.

Это объясняется тем, что зависимость (2.92) содержит четыре константы, определяемые из четырех условий, что, естественно, обеспечивает большую точность аппроксимации. Кривые рис. 18 относятся к стали, имеющей  $\epsilon_{\text{пр}} = 0,28$ .

При  $m = 2k$  величины  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (2.104) обращаются в бесконечность. Из формул (2.108) нетрудно увидеть, что показатели  $k_1$  и  $k_3$  при этом принимают значения

$$k_1 = \infty; k_3 = k$$

и зависимость (2.104) вырождается в закон Бюльфингера:

$$\sigma^* = (e^*)^k.$$

Несмотря на большую точность аппроксимации на значительном участке диаграммы, зависимость (2.92) имеет тот недостаток, что при  $\epsilon = 0$  начальный модуль равен бесконечности, так как один из показателей получается меньшим единицы. Это означает, что зависимость (2.92) не переходит автоматически в закон Гука при малых деформациях. Для устранения этого недостатка примем  $A_1 = E$  и  $k_1 = 1$ . Тогда

$$\sigma = E\epsilon - A_3\epsilon^{k_3}. \quad (2.109)$$

Составив уравнения, выражающие первое и второе условия, и решив их относительно  $A_3$  и  $k_3$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} k_3 &= \frac{E\epsilon_{\text{пр}}}{E\epsilon_{\text{пр}} - \sigma_{\text{пр}}}; \\ A_3 &= \frac{E\epsilon_{\text{пр}} - \sigma_{\text{пр}}}{\epsilon_{\text{пр}}^{k_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

Таким образом,  $k_3$  равняется отношению отрезка  $dc$  к отрезку  $db$  (см. рис. 15). Эта величина для многих материалов (металлов) немного больше единицы.

### *Общий вид аппроксимирующей кривой*

Делая дальнейшие обобщения, выражение для аппроксимирующей кривой можно написать в общем виде:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n A_i e^{k_i \epsilon} = A_1 e^{k_1 \epsilon} + A_2 e^{k_2 \epsilon} + A_3 e^{k_3 \epsilon} + \dots + A_n e^{k_n \epsilon}. \quad (2.111)$$

Для этой кривой, описывающей одновременно участки растяжения и сжатия, следует, применяя правила знаков при возведении в степень, некоторые показатели рассматривать как четные числа. Такие показатели про-

ще всего отмечать четными индексами, т. е. если  $i$ —четное число, то

$$(-\varepsilon)^{k_i} = +\varepsilon^{k_i}; \quad (+\varepsilon)^{k_i} = +\varepsilon^{k_i}. \quad (2.112)$$

Например,

$$(-\varepsilon)^{k_2} = +\varepsilon^{k_2}; \quad (-\varepsilon)^{k_4} = +\varepsilon^{k_4}$$

и т. д. Если же  $i$ —нечетное число, то необходимо применять правило знаков (2.63):

$$(-\varepsilon)^{k_1} = -\varepsilon^{k_1}; \quad (-\varepsilon)^{k_3} = -\varepsilon^{k_3}.$$

Одной из простейших зависимостей такого типа будет выражение

$$\sigma = E\varepsilon + A_2\varepsilon^2 - A_3\varepsilon^3, \quad (2.113)$$

здесь  $E$ —начальный модуль упругости; постоянные  $A_2$  и  $A_3$  можно определить из двух условий, первое из которых выражает равенство пределов прочности экспериментальной и аппроксимирующей диаграмм в растянутой зоне, а второе—равенство некоторых определенных значений напряжений обеих диаграмм в сжатой зоне (рис. 19). Эти равенства имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{пп} &= E\varepsilon_{пп} + A_2\varepsilon_{пп}^2 - A_3\varepsilon_{пп}^3; \\ \sigma_c &= E\varepsilon_c + A_2\varepsilon_c^2 - A_3\varepsilon_c^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

Можно также выбрать выражение и более сложного вида с нецелыми показателями степени.

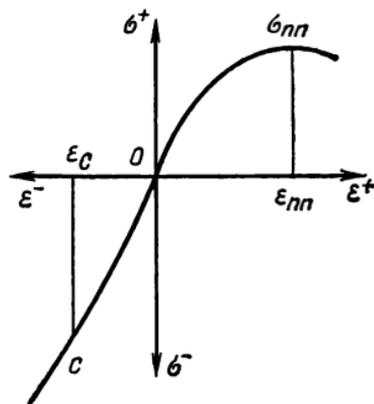


РИС. 19

*Диаграмма В. В. Соколовского*

В 1960 г. В. В. Соколовский предложил следующую зависимость:

$$\sigma = \frac{s\varepsilon}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^2}}, \quad (2.115)$$

где  $s$  и  $t$ —константы, определяемые по экспериментальной диаграмме.

Производная этой функции равняется:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{s}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^2\right]^{3/2}}; \quad (2.116)$$

При  $\varepsilon=0$  получаем:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = s = E, \quad (2.117)$$

т. е. что постоянная  $s$  должна равняться начальному модулю упругости  $E$ . Из (2.116) следует также, что производная обращается в нуль при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Таким образом, формула (2.115) описывает кривую (рис. 20), которая асимптотически приближается к горизонтальной прямой  $\sigma = \sigma_c$  (где  $\sigma_c$  — некоторое предельное напряжение). В теории пластичности  $\sigma_c = \sigma_T$ . В нелинейной теории упругости можно принять  $\sigma_c = \sigma_{\text{нп}}$ . Постоянную  $t$  определим из условия: при  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{нп}}$   $\sigma = \sigma_{\text{нп}}$ , т. е.

$$\sigma_{\text{нп}} = \frac{E\varepsilon_{\text{нп}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_{\text{нп}}}{t}\right)^2}}. \quad (2.118)$$

Отсюда

$$t = \frac{\sigma_{\text{нп}}}{E \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_{\text{нп}}}{E\varepsilon_{\text{нп}}}\right)^2}}. \quad (2.119)$$

Но в силу вышесказанного величина  $\sigma_{\text{нп}}$  достигается только при  $\varepsilon_{\text{нп}} = \infty$ . Это означает, что величина  $t$  стремится к пределу

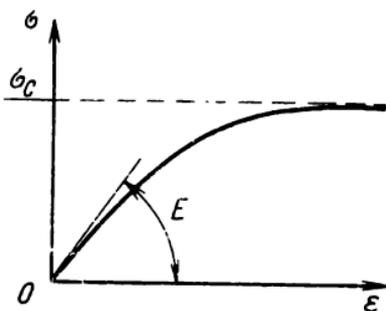


РИС. 20

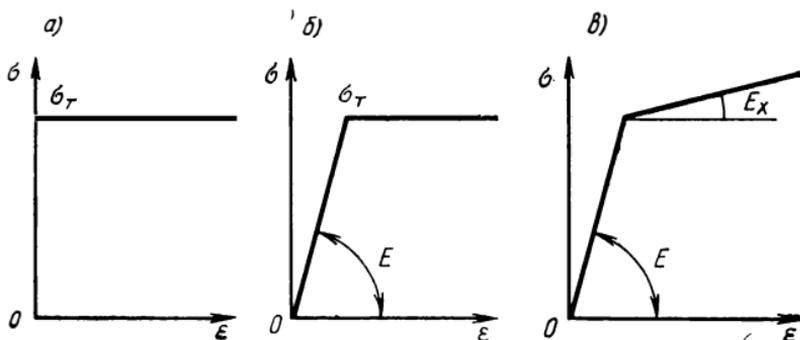


РИС. 21

$$t = \frac{\sigma_{\text{пн}}}{E} ; \quad (2.120)$$

Вставляя (2.117) и (2.120) в (2.115), получим частный случай зависимости В. В. Соколовского:

$$\sigma = \frac{E\varepsilon}{\sqrt{1 + \left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_{\text{пн}}}\right)^2}} ; \quad (2.121)$$

Постоянные  $s$  и  $t$  можно определять также из других условий аппроксимации.

Имеется предложение Г. А. Гениева [21] обрабатывать диаграмму  $\sigma$ — $\varepsilon$  с помощью гармонического анализа и получать выражение для  $\sigma$  в виде ряда Фурье.

Есть много предложений об аппроксимации диаграмм при помощи показательных, тригонометрических, гипербола-тригонометрических и других функций. Целесообразность их использования зависит от конкретных условий задачи.

Наиболее простыми видами аппроксимации диаграмм являются диаграммы жесткопластического тела (рис. 21, а), диаграммы Прандтля (рис. 21, б) и диаграммы с линейным упрочнением (рис. 21, в). Применение этих диаграмм позволяет существенно упростить расчет стержневых систем, а также метод сосредоточенных деформаций.

### ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В этой главе рассмотрено несколько задач нелинейной теории стержневых систем, допускающих элементарное решение. Эти примеры наглядно показывают принципиальную разницу между линейным и нелинейным решениями.

#### 1. Чистый изгиб балки

##### *А. Геометрическая нелинейность*

Рассмотрим консольную балку, изгибаемую моментом  $M$ , приложенным на конце (рис. 22). Будем считать, что балка сделана из линейно-упругого материала.

ла, т. е. рассмотрим (по классификации В. В. Новожилова) геометрически нелинейную и физически линейную задачу.

В случае чистого изгиба нелинейная теория деформации тонких стержней приводит к формулам линейной теории, основанной, как известно, на гипотезе плоских сечений. Таким образом, так же, как и в элементарной теории изгиба, имеем формулу

$$1/\rho = M/EI, \quad (3.1)$$

где  $EI$  — жесткость балки.

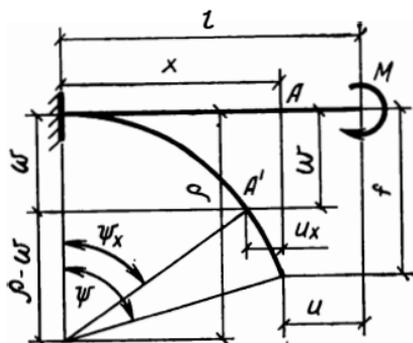


РИС. 22

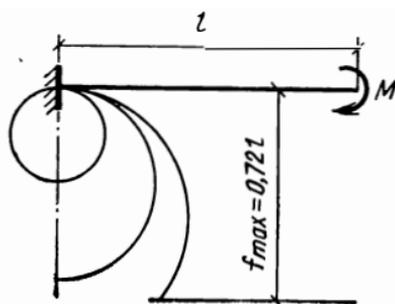


РИС. 23

Разница между линейной и геометрически нелинейной теорией заключается в степени точности определения кривизны  $1/\rho$  нейтрального слоя: в нелинейной теории эта кривизна определяется точно, а в линейной — приближенно (отождествляется со второй производной функции прогиба).

Так как нейтральный слой при чистом изгибе не растягивается, то

$$\psi_x = x/\rho, \quad (3.2)$$

где  $\psi_x$  — угол, образованный двумя радиусами кривизны, один из которых проходит через точку  $A'$ , отмечающую положение произвольной точки  $A$  после изгиба. Перемещения этой точки  $A$ , согласно рис. 22, будут равны:

$$u_x = x - \rho \sin \psi_x; \quad w = \rho - \rho \cos \psi_x. \quad (3.3)$$

Наибольшее значение  $u = u_l$  и  $w = f$  будет при  $x = l$ ;  $\psi_x = \psi$ .

$$u = l - \rho \sin \psi; \quad (3.4)$$

$$f = \rho (1 - \cos \psi) = 2\rho \sin^2 \frac{\psi}{2} = 2 \frac{l}{\psi} \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (3.5)$$

Здесь в соответствии с формулами (3.1) и (3.2)

$$\psi = l/\rho = Ml/EI. \quad (3.6)$$

Приближенное значение для  $f=f_{л}$ , полученное с помощью линейной теории, как известно, равняется:

$$f_{л} = \frac{Ml^2}{2EI} = \frac{\psi}{2} l. \quad (3.7)$$

Разделив (3.5) на (3.7) и учитывая (3.6), получим:

$$\frac{f}{f_{л}} = \frac{2\rho}{l} \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\psi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\psi}{2}\right)^2}. \quad (3.8)$$

Это означает, что отношение точного значения наибольшего прогиба к приближенному значению равняется квадрату отношения синуса к углу. Чем меньше аргумент  $\psi/2$ , т. е. чем меньше момент, тем меньше разница между точным (нелинейным) и приближенным (линейным) решениями. При больших значениях аргумента  $\psi/2$  эта разница становится существенной; нелинейное решение не только количественно, но и качественно начинает отличаться от линейного. Прежде всего формула (3.5) показывает, что прогиб  $f$  является периодической функцией аргумента  $\psi/2$ . Это означает, что при неограниченном увеличении  $\psi/2$  балка будет закручиваться вокруг некоторых точек, лежащих на вертикальной линии, проходящей через опору (рис. 23), причем прогиб  $f$  будет равняться нулю при

$$\frac{\psi}{2} = \pi, 2\pi, \dots \quad (3.9)$$

Дифференцируя вторую формулу (3.5) по  $\psi$  и приравняв производную нулю, получим уравнения для определения величины  $\psi_m$ , соответствующей экстремальному значению прогиба:

$$\psi_m - \operatorname{tg} \frac{\psi_m}{2} = 0. \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что наибольший прогиб принимает бесконечно большое число экстремальных значений, из которых наибольшее будет при  $\psi_m = 2,3311$  ( $f/l = 0,7246$ ).

Линейное решение (3.7) соответствует упрощенной картине деформации балки, которая, как это становит-

ся очевидным из рис. 23 и сопоставления формул (3.5) и (3.7), не соответствует действительной работе балки при достаточно больших моментах.

Выясним, какое практическое значение имеют вышеприведенные формулы, т. е. при каких условиях необходимо отказаться от линейного решения и перейти к нелинейному. Рассмотрим балку прямоугольного сечения  $b \times h$ . В этом случае формулу (3.6) можно представить в следующем виде:

$$\psi = \frac{2Ml}{EW^2h} = 2 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h}, \quad (3.11)$$

где  $W = 2I/h$  — момент сопротивления.

Поскольку рассматриваемое решение является физически линейным, то наибольшее значение отношения  $\sigma/E$  будет при напряжениях, равных пределу пропорциональности ( $\sigma = \sigma_{\text{п}}$ ). Для стали это отношение равняется  $10^{-3}$ .

Подставляя (3.11) в (3.8), получим:

$$\frac{f}{f_{\text{л}}} = \left( \frac{\sin \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h}}{\frac{\sigma}{E} \frac{l}{h}} \right)^2 = \left( \frac{\sin \epsilon_{\text{п}} \frac{l}{h}}{\epsilon_{\text{п}} \frac{l}{h}} \right)^2. \quad (3.12)$$

При фиксированном значении деформации  $\epsilon_{\text{п}} = \sigma_{\text{п}}/E$ , соответствующей пределу пропорциональности, отношение точного и приближенного значений прогиба является функцией  $l/h$ . Для стали разница между обоими решениями становится существенной при  $l/h > 400$ .

Для сечений, у которых нейтральный слой является осью симметрии, согласно гипотезе плоских сечений, будем иметь:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\epsilon_{\text{к.в}}}{h}, \quad (3.13)$$

где  $\epsilon_{\text{к.в}}$  — деформация крайнего волонка;  $h$  — высота сечения.

Подставляя (3.13) в первую часть формулы (3.6) и затем в (3.8), получим непосредственно формулу (3.12) (если в ней заменить  $\epsilon_{\text{п}}$  на  $\epsilon_{\text{к.в}}$ ).

### Б. Физическая нелинейность

Решим задачу о чистом изгибе балки, предполагая, что материал нелинейно-упругий, причем рассмотрим

несколько вариантов законов, изображающих нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями.

Если принять гипотезу плоских сечений и, кроме того, пренебречь изменением формы и размеров поперечного сечения, а также выбрать симметричный закон (относительно растяжения-сжатия) физической нелинейности, то решение получится достаточно простым. В дальнейшем будет показано, какое влияние оказывает изменение формы поперечного сечения.

Согласно гипотезе плоских сечений удлинение волокна, отстоящего на расстоянии  $z$  от нейтрального слоя, равно:

$$\varepsilon_z = z/\rho. \quad (3.14)$$

Положив в основу дальнейших исследований эту зависимость, составим формулы для определения напряжений и прогибов при различных законах физической нелинейности.

**1. Степенной закон Бюльфингера.** Вставляя (3.14) в (2.62), получим:

$$\sigma_z = A \left( \frac{z}{\rho} \right)^k. \quad (3.15)$$

Проектируя все внутренние силы на ось  $x$  (рис. 24), составим условие, определяющее положение нейтрального слоя:

$$\int_F \sigma_z dF = \frac{A}{\rho^k} \int_F z^k dF, \quad (3.16)$$

Величина

$$S_k = \int_F z^k dF \quad (3.17)$$

называется статическим моментом  $k$ -го порядка. Так как  $A$  и  $\rho$  не равны нулю, то из (3.17) следует, что

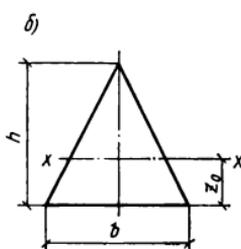
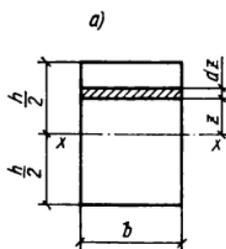


РИС. 24

$$S_k = \int_F z^k dF = 0. \quad (3.18)$$

Это условие для определения нейтрального слоя при  $k=1$  переходит в аналогичное условие для линейно-упругой балки, у

которой нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения. Для сечений, имеющих в качестве оси симметрии ось  $y$  (см. рис. 24, а), из условия (3.18) также будет следовать, что нейтральный слой проходит через центр тяжести. Для несимметричных сечений (рис. 24, б) нейтральный слой будет проходить между центром тяжести и линией, делящей площадь сечения пополам. Например, для треугольного сечения (см. рис. 24, б) условие (3.18) выражается уравнением

$$(h - z_0)^{k+2} - z_0^{k+1} [h(k+2) - z_0] = 0, \quad (3.19)$$

где  $z_0$  определяет положение нейтрального слоя относительно основания.

Решая это уравнение при  $k=1$  и  $k=0$ , получим:

$$(z_0)_{k=1} = \frac{h}{3}; \quad (z_0)_{k=0} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} h = 0,293 h. \quad (3.20)$$

Первое равенство определяет положение центра тяжести сечения, второе — положение линии, делящей сечение на равновеликие площади. Следовательно, для треугольника положение нейтрального слоя мало зависит от показателя  $k$  и изменяется в пределах

$$0,293 \leq \frac{z_0}{h} \leq 0,333. \quad (3.21)$$

Составим уравнение моментов всех сил относительно оси  $y$ , проходящей через нейтральный слой:

$$M = \int_F \sigma_z z dF = \frac{A}{\rho^k} \int_F z^{k+1} dF = \frac{A I_{k+1}}{\rho^k}. \quad (3.22)$$

Величина

$$I_{k+1} = \int_F z^{k+1} dF \quad (3.23)$$

называется моментом инерции  $(k+1)$ -го порядка. Составляя (3.15) и (3.22), получим формулу для определения напряжений:

$$\sigma_z = \frac{M}{I_{k+1}} z^k. \quad (3.24)$$

Отсюда следует, что эпюра напряжений в отличие от эпюры деформаций изменяется также по степенному

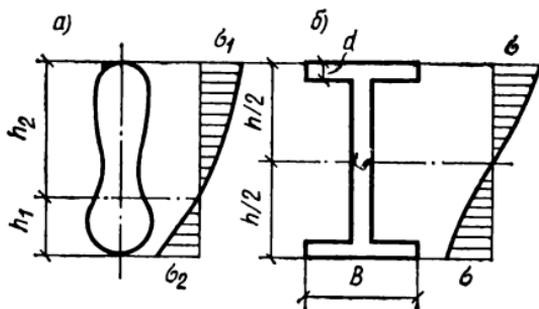


РИС. 25

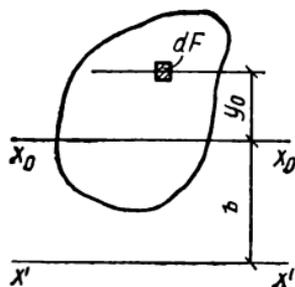


РИС. 26

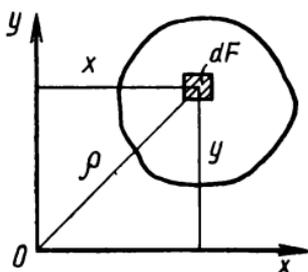


РИС. 27

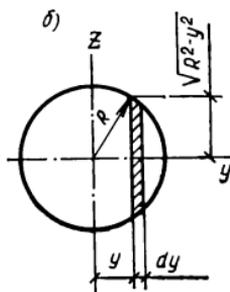
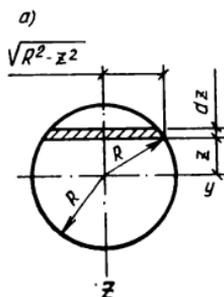


РИС. 28

закону. Наибольшие напряжения будут в крайних волокнах (рис. 25, а), их определяют по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M}{I_{k+1}} h_1^k = \frac{M}{\frac{I_{k+1}}{h_1^k}} = \frac{M}{W_{(k+1)1}} ; \\ \sigma_2 &= \frac{M}{I_{k+1}} h_2^k = \frac{M}{\frac{I_{k+1}}{h_2^k}} = \frac{M}{W_{(k+1)2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Здесь величины:

$$W_{(k+1)1} = \frac{I_{k+1}}{h_1^k} ; \quad W_{(k+1)2} = \frac{I_{k+1}}{h_2^k} \quad (3.26)$$

называются моментами сопротивления  $(k+1)$ -го порядка.

Для сечений, у которых ось  $y$  является осью симметрии (рис. 25, б),  $h_1 = h_2 = h/2$  и

$$W_{(k+1)1} = W_{(k+1)2} = \frac{I_{k+1}}{(h/2)^k} = W_{k+1}. \quad (3.26a)$$

Рассмотрим более подробно свойства геометрических характеристик  $I_{k+1}$  и  $W_{k+1}$  и вычислим их значения для некоторых сечений. Прежде всего отметим, что формулы перехода от одной системы осей к другой выражаются гораздо более сложно, чем в случае обычных моментов инерции. Действительно предположим, что нам известен момент инерции  $I_{(k+1)x_0}$  относительно оси  $x_0$  (рис. 26) и требуется вычислить момент инерции  $I_{(k+1)x'}$  относительно оси  $x'$ , параллельной оси  $x_0$  и отстоящей от нее на расстоянии  $b$ . Очевидно, что

$$I_{(k+1)x'} = \int_F (y_0 + b)^{(k+1)} dF. \quad (3.27)$$

Этот интеграл не может быть в общем случае представлен в виде конечной суммы слагаемых, как это можно сделать при  $k=1$  (для обычных моментов инерции). Очевидно,

$$I_{(k+1)x'} > I_{(k+1)x_0} + b^{k+1} F. \quad (3.28)$$

Те же самые замечания можно отнести и к формулам, определяющим изменение моментов инерции при вращении осей. Из рис. 27, на которых изображено сечение, отнесенное к осям  $x_0y_0$ , следует, что сумма осевых моментов инерции  $(k+1)$ -го порядка не равна полярному моменту инерции, так что

$$I_{(k+1)x} + I_{(k+1)y} < I_{(k+1)\rho}. \quad (3.29)$$

В замкнутом виде формулы для осевых моментов инерции можно представить только для сечений, имеющих ось  $y$  в качестве оси симметрии (и то не всегда). Для сечений несимметричных следует вначале определить, решая нелинейное алгебраическое уравнение вида (3.19), положение нейтрального слоя, а затем вычислить момент инерции. Эти операции лучше всего проделать в каждом конкретном случае численными методами.

Для прямоугольника (см. рис. 24, а) момент инерции и момент сопротивления равны:

$$I_{k+1} = b \int_{-h/2}^{+h/2} z^{k+1} dz = \frac{bh^{k+2}}{2^{k+1}(k+2)}; \quad (3.30)$$

$$W_{k+1} = \frac{2^k I_{k+1}}{h^k} = \frac{bh^3}{2(k+2)}; \quad (3.31)$$

При  $k=1$  формулы (3.30) и (3.31) примут вид обычных формул для момента инерции и момента сопротивления прямоугольника. При  $k=0$  обе формулы приведут к формуле для пластического момента сопротивления:

$$W_T = bh^2/4, \quad (3.32)$$

Для идеального двутавра (рис. 25, б), сечение которого состоит из двух пластинок, соединенных стенкой бесконечно малой толщины, получим:

$$\left. \begin{aligned} I_{k+1} &= 2B \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{h}{2} - d\right)^{k+2}}{k+2}; \\ W_{k+1} &= \frac{I_{k+1}}{(h/2)^k} = 2B \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{h}{2} - d\right)^{k+2}}{(k+2)(h/2)^k}. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Если  $d$  мало по сравнению с  $h$ , т. е. идеальный двутавр состоит из узких прямоугольников, то  $I_{k+1}$  можно приближенно определить по формуле

$$I_{k+1} = 2Bd \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} = 2F_{\Pi} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}, \quad (3.34)$$

где  $F_{\Pi}$  — площадь одной полки.

Для круглого сечения (рис. 28) момент инерции  $(k+1)$ -го порядка вычисляют по любой из следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} I_{k+1} &= 4 \int_0^R z^{k+1} \sqrt{R^2 - z^2} dz; \\ I_{k+1} &= \frac{4}{k+2} \int_0^R (R^2 - y^2)^{1 + \frac{k}{2}} dy. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Первая формула соответствует схеме вычисления  $I_{k+1}$ , изображенной на рис. 28, а, вторая соответствует схеме вычисления, изображенной на рис. 28, б. Во втором случае момент инерции бесконечно узкого прямоугольника определяют по формуле (3.30). При заданном  $k$  интегралы (3.35) можно легко вычислить численными методами,

Найдем полярный момент инерции  $I_{(k+1)\rho}$  для круга (рис. 29). Согласно рисунку:

$$\left. \begin{aligned} I_{(k+1)\rho} &= \int_0^R (2\pi\rho d\rho) \rho^{k+1} = \frac{2\pi R^{k+3}}{k+3}; \\ W_{(k+1)\rho} &= \frac{I_{k+1}\rho}{R^k} = \frac{2\pi R^3}{k+3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Выше мы рассматривали только задачи по определению напряжений. Перейдем к определению перемещений. В случае геометрически линейной балки (при малых перемещениях) кривизну балки отождествляем со второй производной функции прогиба:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2w}{dx^2} = -w''. \quad (3.37)$$

Подставляя (3.37) в (3.22), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$w'' = -\left(\frac{M}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}}. \quad (3.38)$$

При заданном  $M(x)$  уравнение интегрируется обычными методами.

Определим форму изогнутой оси и прогиб на конце консольных балок (рис. 30), имеющих одинаковые граничные условия: при  $x=l$   $w=0$ ;  $w'=0$ . Для балки, нагруженной отрицательным моментом  $-M$  (см. рис.

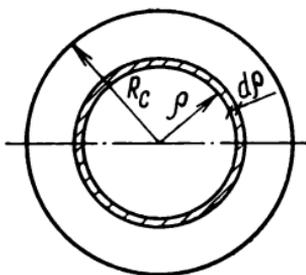


РИС. 29

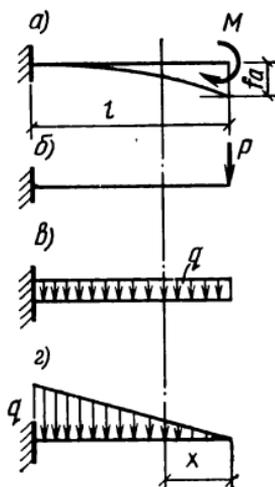


РИС. 30

30, а), последовательно интегрируя уравнения (3.38), находим:

$$\omega' + \left(\frac{M}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} x + c_1; \quad \omega = \left(\frac{M}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2. \quad (3.39)$$

Составим граничные условия и получим значения постоянных  $c_1$  и  $c_2$ :

при  $x=l$ ;  $\omega'=0$

$$c_1 = -\left(\frac{M}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} l;$$

при  $x=l$ ;  $\omega=0$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} l^2. \quad (3.40)$$

Прогиб на конце балки  $f_a$  при  $x=0$  будет, очевидно, равняться постоянной  $c_2$ :

$$f_a = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} l^2. \quad (3.41)$$

Для балки, показанной на рис. 30, б,

$$M = -px \quad (3.42)$$

и дифференциальное уравнение (3.38) принимает вид

$$\omega'' = \left(\frac{P}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} x^{\frac{1}{k}}. \quad (3.43)$$

Последовательно, интегрируя (3.43) и определяя постоянные из граничных условий, получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \left(\frac{P}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{x^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1} + c_1; \quad c_1 = -\left(\frac{P}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{l^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1}; \\ \omega &= \left(\frac{P}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{x^{\frac{1}{k}+2}}{\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)} + c_1 x + c_2; \quad c_2 = f_0 = \\ &= \frac{l^{\frac{1}{k}+2}}{\frac{1}{k}+2} \left(\frac{P}{AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Для балки, изображенной на рис. 30, в, в том же порядке имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 M &= -\frac{qx^2}{2}; \quad \omega'' = \left(\frac{q}{2AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} x^{\frac{2}{k}}; \\
 \omega' &= \left(\frac{q}{2AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{x^{\frac{2}{k}+1}}{\frac{2}{k}+1} + c_1; \\
 c_1 &= -\left(\frac{q}{2AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{l^{\frac{2}{k}+1}}{\frac{2}{k}+1}; \\
 \omega &= \left(\frac{q}{2AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{x^{\frac{2}{k}+2}}{\left(\frac{2}{k}+1\right)\left(\frac{2}{k}+2\right)} + \\
 &\quad + c_1x + c_2; \\
 c_2 = f_b &= \left(\frac{q}{2AI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{l^{\frac{2}{k}+2}}{\frac{2}{k}+2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Для балки с треугольной нагрузкой (рис. 30, г) последовательно получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 M &= -\frac{qx^3}{6l}; \quad \omega'' = \left(\frac{q}{6lAI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} x^{\frac{3}{k}}; \\
 \omega' &= \left(\frac{q}{6lAI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{x^{\frac{3}{k}+1}}{\frac{3}{k}+1} + c_1; \\
 c_1 &= -\left(\frac{q}{6lAI_{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{l^{\frac{3}{k}+1}}{\frac{3}{k}+1};
 \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

$$w = \left( \frac{q}{6lAIk+1} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{x^{\frac{3}{k}+2}}{\left( \left( \frac{3}{k} + 1 \right) \left( \frac{3}{k} + 2 \right) + c_1x + c_2 \right)} + \left. \begin{aligned} c_2 = f_r = \left( \frac{q}{6lAIk+1} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{l^{\frac{3}{k}+2}}{\frac{3}{k} + 2} \end{aligned} \right\}$$

Для балки, изображенной на рис. 31, прогиб можно определить из формулы (3.44), заменяя  $P$  на  $P/2$  и  $l$  на  $l/2$ :

$$f = \frac{P^{\frac{1}{k}} l^{\frac{1}{k}+2}}{2^{\frac{2}{k}} \left( \frac{1}{k} + 1 \right) \left( \frac{1}{k} + 2 \right) (AI_{k+1})^{\frac{1}{k}}} \quad (3.47)$$

При  $k=1$  все полученные формулы превращаются в обычные формулы для линейно-упругих балок. При  $k=0$  все функции прогибов и их первые и вторые производные обращаются в бесконечность.

Для более сложных схем балок задача может быть решена приближенными методами.

**2. Зависимость в виде кубической параболы.** Рассмотрим некоторые особенности изгиба балок при зависимости между напряжениями и деформациями, представленной формулой (2.86). Вставляя в нее значение деформаций, согласно формуле (3.41), получим:

$$\sigma_z = E \frac{z}{\rho} - A_3 \frac{z^3}{\rho^3} \quad (3.48)$$

Сумма проекций всех сил на ось  $x$  выражается уравнением

$$\int \sigma_z dF = 0; \quad \frac{E}{\rho} \int_F z dF - \frac{A_3}{\rho^3} \int_F z^3 dF = 0. \quad (3.49)$$

Примем

$$S_{1y} = \int_F z dF; \quad S_{3y} = \int_F z^3 dF \quad (3.50)$$

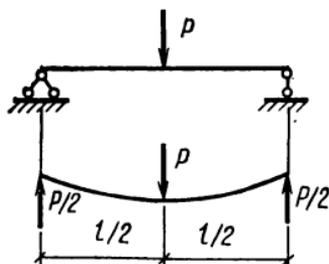


РИС. 31

и назовем эти величины статическими моментами соответственно первого и третьего порядков. Вставляя (3.50) в (3.49) и сокращая обе части равенства на  $\rho$ , получим:

$$ES_{1y} - \frac{A_3}{\rho^2} S_{3y} = 0. \quad (3.51)$$

Отсюда следует, что положение нейтрального слоя в общем случае зависит от радиуса кривизны оси балки. В частном случае для симметричных относительно оси  $y$  сечений нейтральный слой совпадает с центром тяжести сечения и, следовательно:

$$S_{1y} = 0; \quad S_{3y} = 0. \quad (3.52)$$

Составим уравнение моментов:

$$M = \int_F \sigma_z z dF = \frac{E}{\rho} \int_F z^2 dF - \frac{A_3}{\rho^3} \int_F z^4 dF. \quad (3.53)$$

Обозначим:

$$\int_F z^2 dF = I_2; \quad \int_F z^4 dF = I_4 \quad (3.54)$$

и назовем эти величины моментами инерции соответственно второго и четвертого порядков. Вставив (3.54) в (3.53), получим:

$$M = \frac{EI_2}{\rho} - \frac{A_3 I_4}{\rho^3}. \quad (3.55)$$

Задаваясь значением напряжений (например, значением допускаемых напряжений  $\sigma_1 = [\sigma]$ ), в каком-либо волокне с координатой  $z = z_1$ , например, в крайнем волокне  $z_1 = h_1$  (или для симметричных сечений  $z_1 = h/2$ ), из (3.48) получим:

$$\sigma_1 = \frac{E}{\rho} z_1 - \frac{A_3}{\rho^3} z_1^3. \quad (3.56)$$

Исключая из (3.55) и (3.56) величины  $\frac{E}{\rho}$  и  $\frac{A_3}{\rho^3}$ , получим:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{Mz_1^3 - \sigma_1 I_4}{z_1^3 I_2 - z_1 I_4}; \quad \frac{A_3}{\rho^3} = \frac{Mz_1 - \sigma_1 I_2}{z_1^3 I_2 - z_1 I_4}. \quad (3.57)$$

Сравнивая значения кривизны, найденные из этих двух формул (которые, очевидно, должны быть равны),

получим зависимость между моментом и напряжением  $\sigma_1$ :

$$Mz_1 - \sigma_1 I_2 = \frac{(Mz_1^3 - \sigma_1 I_4)^3}{[z_1(z_1^2 I_2 - I_4)]^2} \frac{A_3}{E^3}. \quad (3.58)$$

Эта зависимость является достаточно сложной. В нее входит отношение  $\frac{A_3}{E^3}$ . Согласно формуле (2.89),

$$\frac{A_3}{E^3} = \frac{4}{27\sigma_{\text{пп}}^2}. \quad (3.59)$$

Вспользуемся формулами (3.48) и (3.55) для определения предельного момента. При этом могут быть два случая.

В первом случае кривая  $\sigma$ — $\varepsilon$  (см. рис. 10) не имеет нисходящей ветви, и поэтому наибольший момент будет определяться из условия, что в крайнем волокне напряжение должно равняться предельному значению  $\sigma_{\text{пп}}$ . Рассмотрим случай сечения, симметричного относительно оси  $y$ , у которого расстояние от нейтрального слоя до крайнего волокна равняется  $h/2$ . Дифференцируя (3.48) по  $z$  и приравнивая производную нулю, получим уравнение для определения ординаты  $z_m$ , соответствующей максимальному значению  $\sigma_{\text{max}}$ :

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{E}{\rho} - \frac{3A_3}{\rho^3} z^2 = 0; \quad z_m = \rho \sqrt{\frac{E}{3A_3}}. \quad (3.60)$$

Полагая  $z_m = h/2$ , получим значение кривизны, соответствующее наибольшему значению изгибающего момента:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{E}{3A_3}}. \quad (3.61)$$

Подставляя (3.61) в (3.55), получим наибольшее значение момента (обозначим его  $M_1$ ):

$$M_1 = E \sqrt{\frac{E}{3A_3}} \frac{2I_2}{h} - \frac{E}{3} \sqrt{\frac{E}{3A_3}} \frac{8I_4}{h^3}. \quad (3.62)$$

Рассмотрим прямоугольное сечение балки, у которого

$$I_2 = \frac{bh^3}{12}; \quad I_4 = b \int_{-h/2}^{+h/2} z^4 dz = \frac{bh^5}{80}. \quad (3.63)$$

Подставив (3.63) в (3.62), получим:

$$M_1 = \frac{2}{15} bh^2 E \sqrt{\frac{E}{3A_3}}. \quad (3.64)$$

Если выразить  $A_3$  через  $E$  и предел прочности  $\sigma_{пп}$ , то согласно формуле (2.89), получим:

$$M_1 = \frac{bh^2}{5} \sigma_{пп}. \quad (3.65)$$

Второй случай предполагает, что кривая  $\sigma$ — $\epsilon$  (см. рис. 9) имеет нисходящую ветвь, и, следовательно, наибольший момент можно определить как максимум функции (3.55). Дифференцируя (3.55) по кривизне  $1/\rho$  и приравнявая производную нулю, получим выражение для максимального значения кривизны  $(1/\rho)_{\max}$ :

$$\frac{dM}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = EI_2 - 3 \frac{A_3}{\rho^2} I_4 = 0; \quad \left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{EI_2}{2A_3 I_4}}. \quad (3.66)$$

После подстановки этого значения в формулу (3.55) найдем максимальный момент:

$$M_{\max} = \frac{2}{3} EI_2 \sqrt{\frac{EI_2}{3A_3 I_4}}. \quad (3.67)$$

Для прямоугольного сечения, подставив геометрические характеристики  $I_2$  и  $I_4$ , согласно формулам (3.63), получим:

$$M_{\max} = \frac{bh^2}{27} E \sqrt{5 \frac{E}{A_3}}. \quad (3.68)$$

Если выразить  $A_3$  по формуле (2.89) через  $E$  и  $\sigma_{пп}$ , то из (3.68) будем иметь:

$$M_{\max} = \frac{bh^2}{6 \sqrt{\frac{3}{5}}} \sigma_{пп}. \quad (3.69)$$

Сравнивая (3.65) и (3.69), найдем, что максимальный момент больше наибольшего момента  $M_1$ , а их отношение равно:

$$\frac{M_{\max}}{M_1} = \frac{5 \sqrt{5}}{6 \sqrt{3}} = 1,076. \quad (3.70)$$

Подставив в формулу (3.66) значения моментов инерции (3.63) для прямоугольника и значение  $A_3$  по формуле (2.89), получим максимальную кривизну, соответствующую максимальному моменту:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} = \sqrt{15} \frac{\sigma_{\text{пп}}}{Eh} = 3,86 \frac{\sigma_{\text{пп}}}{Eh};$$

$$\rho_{\min} = \frac{Eh}{\sqrt{15} \sigma_{\text{пп}}} = 0,258 \frac{E}{\sigma_{\text{пп}}} h. \quad (3.71)$$

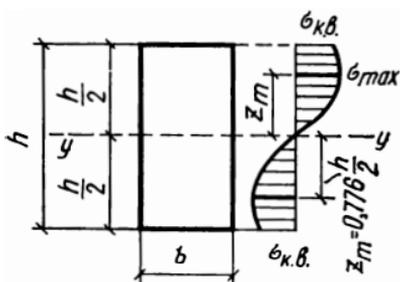


РИС. 32

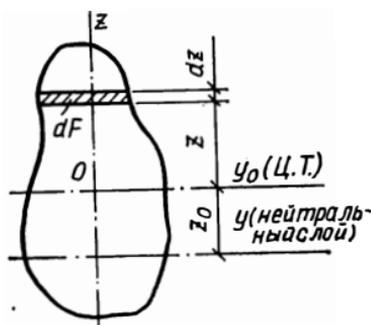


РИС. 33

Эпюра напряжений в прямоугольном сечении балки изображена на рис. 32. Максимум напряжений  $\sigma = \sigma_{\text{пп}}$  находится внутри сечения, а не в крайнем волокне. Для определения ординаты  $z_m$ , соответствующей точке с максимальным напряжением, подставим (3.71) в (3.60) и после упрощений получим:

$$z_m = \frac{3}{2\sqrt{15}} h = 0,348h = 0,776 \frac{h}{2}. \quad (3.72)$$

Напряжение в крайнем волокне  $\sigma_{\text{к.в}}$  найдем, вставив в формулу для напряжений (3.48) значения радиуса (3.71) и  $z = h/2$ :

$$\sigma_{\text{к.в}} = \frac{2}{9} \sqrt{15} \sigma_{\text{пп}}. \quad (3.73)$$

Разделив (3.69) на (3.73), вычислим момент сопротивления  $W$ , соответствующий максимальному моменту:

$$\frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{к.в}}} = \frac{bh^3}{4}. \quad (3.74)$$

Это соответствует выводу А. Р. Ржаницына [77] о том, что независимо от вида диаграммы  $\sigma$ — $\epsilon$ , т. е. при

любом законе физической нелинейности, момент сопротивления будет равняться значению, полученному согласно формуле (3.74) (если на балку действует  $M_{\max}$ ).

Для круга:

$$I_2 = \frac{\pi R^4}{4}; \quad I_4 = \frac{\pi R^6}{8}. \quad (3.75)$$

Подставив (3.75) в (3.67), получим максимальный изгибающий момент для балки круглого сечения:

$$M_{\max} = \frac{\pi R^3}{2\sqrt{2}} \sigma_{\text{пп}}. \quad (3.76)$$

Покажем, как определяется положение нейтрального слоя для несимметричного сечения, например, треугольника, изображенного на рис. 24, б. Определим положение нейтрального слоя в том случае, когда на балку действует максимальный момент. Подставив (3.66) в (3.51), получим следующее уравнение:

$$S_{1y} - S_{3y} \frac{I_2}{3I_4} = 0. \quad (3.77)$$

Отсюда следует, что при деформации, вызываемой действием максимального момента, положение нейтрального слоя не зависит от механических характеристик материала.

Выберем начало координат  $yOz$  в центре тяжести сечения (рис. 33) и предположим, что нейтральный слой находится на расстоянии  $z_0$  от оси  $y$ , т. е. от центральной оси. Тогда, очевидно:

$$\left. \begin{aligned} S_{1y} &= \int_F (z_0 + z) dF = z_0 F; \\ S_{3y} &= \int_F (z_0 + z)^3 dF = S_{30} + 3z_0 I_{20} + z_0^3 F; \\ I_2 &= I_{20} + z_0^2 F; \\ I_4 &= \int_F (z_0 + z)^4 dF = I_{40} + 4z_0 S_{30} + 6z_0^2 I_{20} + z_0^4 F. \end{aligned} \right\} (3.78)$$

Здесь  $F$  — площадь сечения;  $S_{30}$ ,  $I_{20}$  и  $I_{40}$  — соответствующие геометрические характеристики, определяемые относительно центральной оси:

$$S_{30} = \int_F z^3 dF; \quad I_{20} = \int_F z^2 dF; \quad I_{40} = \int_F z^4 dF. \quad (3.79)$$

Подставив (3.78) в (3.77), получим уравнение относительно  $z_0$ :

$$z_0^3 + \frac{3}{2} \frac{S_{30}}{I_{20}} z_0^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{I_{40}}{I_{20}} - 3 \frac{I_{20}}{F} \right) z_0 - \frac{S_{30}}{2F} = 0. \quad (3.80)$$

Коэффициенты этого уравнения составлены из геометрических характеристик, достаточно просто определяемых по формулам (3.79). Например, для треугольника (рис. 24, б) имеем:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{bh}{2}; \quad S_{30} = \frac{13}{2430} bh^4; \\ I_{20} &= \frac{bh^3}{36}; \quad I_{40} = \frac{57}{23870} bh^5. \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

После подстановки этих значений в (3.80) получим:

$$z_0^3 + \frac{13}{45} z_0^2 h - \frac{59}{1620} h^2 z_0 - \frac{13}{2430} h^3 = 0. \quad (3.82)$$

Корни этого уравнения равны:

$$z_{01} = 0,158h; \quad z_{02} = 0,1765h; \quad z_{03} = -0,6253h. \quad (3.83)$$

Из них следует выбрать  $z_0 = 0,1765h$ .

Из этого анализа следует, что нейтральный слой для балки треугольного сечения смещается в сторону основания треугольника.

**3. Рассмотрим изгиб балки в том случае, когда физическая нелинейность задается формулой (2.92).** Вставив (3.14) в (2.92), получим зависимость между напряжением, кривизной и ординатой

$$\sigma^* = \frac{1}{k_3 - k_1} \left[ \frac{k_3}{e_{\text{нп}}^{k_1}} \left( \frac{z}{\rho} \right)^{k_1} - \frac{k_1}{e_{\text{нп}}^{k_3}} \left( \frac{z}{\rho} \right)^{k_3} \right]. \quad (3.84)$$

Здесь в соответствии с формулой (2.48)  $\sigma^* = \sigma / \sigma_{\text{нп}}$ .

Для определения нейтрального слоя вычислим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось и приравняем ее нулю, получим условие

$$\int_F \sigma^* dF = 0. \quad (3.85)$$

Это условие совместно с (3.84) дает следующее уравнение для определения положения нейтрального слоя:

$$\frac{S_{k_1}}{S_{k_3}} = \frac{k_1}{k_3} e_{\text{нп}}^{k_1 - k_3} \rho^{k_1 - k_3}. \quad (3.86)$$

где

$$S_{k_1} = \int_F z^{k_1} dF; \quad S_{k_3} = \int_F z^{k_3} dF. \quad (3.87)$$

Причем  $z$  отсчитывается от нейтрального слоя.

Из этой формулы видно, что так же, как и во втором рассмотренном случае физической нелинейности положение нейтрального слоя зависит от  $\rho$  и, следовательно, от изгибающего момента. Если сечение симметрично относительно оси  $y$ , то положение нейтрального слоя будет совпадать с осью симметрии и в этом случае не будет зависеть от момента.

Составляя уравнение моментов, найдем:

$$M = \int_F \sigma z dF = \frac{\sigma_{\text{пп}}}{k_3 - k_1} \left[ \frac{k_3}{\epsilon_{\text{пп}}^{k_1} \rho^{k_1}} I_{k_1+1} - \frac{k_1}{\epsilon_{\text{пп}}^{k_3} \rho^{k_3}} I_{k_3+1} \right]. \quad (3.88)$$

Здесь

$$I_{k_1+1} = \int_F z^{k_1+1} dF; \quad I_{k_3+1} = \int_F z^{k_3+1} dF \quad (3.89)$$

есть геометрические характеристики сечения, подобные моментам инерции. Для прямоугольника в соответствии с формулой (3.30):

$$I_{k_1+1} = \frac{bh^{k_1+2}}{(k_1+2)2^{k_1+1}}; \quad I_{k_3+1} = \frac{bh^{k_3+2}}{(k_3+2)2^{k_3+1}}. \quad (3.90)$$

Пользуясь зависимостью (3.88), определим предельный момент в двух случаях. В первом из них предположим, что диаграмма работы материала не имеет нисходящей ветви (рис. 10). Это означает, что наибольшее (предельное) значение момента соответствует появлению в крайнем волокне напряжений, равных пределу прочности  $\sigma_{\text{пп}}$ , т. е.:

$$\sigma_{\text{кв}} = \sigma_{\text{пп}}; \quad \sigma_{\text{кв}}^* = 1; \quad \epsilon_{\text{кв}} = \epsilon_{\text{пп}}. \quad (3.91)$$

Отсюда для прямоугольного сечения на основании формулы (3.14) при  $z = \frac{h}{2}$  получим соответствующее наибольшее значение кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\epsilon_{\text{пп}}}{h}. \quad (3.92)$$

Подставляя (3.92) в (3.88), определим значение предельного момента  $M_1$ :

$$M_1 = \sigma_{\text{пп}} W_1, \quad (3.93)$$

где

$$W_1 = \frac{1}{k_3 - k_1} \left[ \frac{k_3 2^{k_1} I_{k_1+1}}{h^{k_1}} - \frac{k_1 2^{k_3} I_{k_3+1}}{h^{k_3}} \right]. \quad (3.94)$$

Для прямоугольного сечения, учитывая формулы (3.90), получим:

$$W_1 = \frac{bh^2}{2\alpha_1}; \quad \alpha_1 = \frac{(k_1 + 2)(k_3 + 2)}{k_1 + k_3 + 2}. \quad (3.95)$$

Во втором случае предполагаем существование нисходящей ветви у диаграммы работы материала, что позволит определить предельный момент как его максимальное значение. Приравнявая значение производной по кривизне нулю, найдем максимальное значение кривизны:

$$\left( \frac{1}{\rho} \right)_{\max} = \varepsilon_{\text{пп}} \left( \frac{I_{k_3+1}}{I_{k_1+1}} \right)^{\frac{1}{k_1 - k_3}}. \quad (3.96)$$

Вставив (3.96) в (3.88), получим максимальное значение изгибающего момента:

$$M_{\max} = \sigma_{\text{пп}} W_H. \quad (3.97)$$

Здесь  $W_H$  — нелинейный момент сопротивления, определяемый по формуле

$$W_H = I_{k_3+1}^{\frac{k_1}{k_3 - k_1}} / I_{k_1+1}^{\frac{k_3}{k_1 - k_3}}. \quad (3.98)$$

Для прямоугольника в соответствии с формулами (3.90):

$$W_H = \frac{bh^2}{2\alpha} ; \quad \alpha = \left[ \frac{(k_3 + 2)^{k_1}}{(k_1 + 2)^{k_3}} \right]^{\frac{1}{k_1 - k_3}}. \quad (3.99)$$

Найдем отношение предельного момента к  $M_1$  для прямоугольного сечения. Разделив (3.97) на (3.93), получим:

$$\frac{M_{\max}}{M_1} = \frac{W_H}{W_1} = \frac{(k_3 + 2)^{\frac{k_3}{k_3 - k_1}}}{(k_1 + 2)^{\frac{k_1}{k_3 - k_1}} (k_1 + k_3 + 2)}. \quad (3.100)$$

Это отношение мало отличается от единицы. Например, если взять параметры диаграммы, изображенной на рис. 18,  $k_1 = 0,23$ ;  $k_3 = 1,42$ , то это отношение будет рав-

но 1,015. При  $k_3=3$ ,  $k_1=1$  формула (3.100) переходит в формулу (3.70), по которой отношение моментов равно 1,076. Для идеального двутавра это отношение равно единице.

Введем обозначение

$$\beta = \frac{1}{\rho} / \left( \frac{1}{\rho} \right)_{\max}, \quad (3.101)$$

где  $\frac{1}{\rho}$  — кривизна, соответствующая моменту  $M$ , а  $\left( \frac{1}{\rho} \right)_{\max}$  — кривизна, соответствующая максимальному моменту. Вставив (3.100) в (3.88), после некоторых преобразований получим:

$$m = \frac{M}{M_{\max}} = \frac{1}{k_3 - k_1} (k_3 \beta^{k_1} - k_1 \beta^{k_3}). \quad (3.102)$$

Величина  $m$  выражает отношение изгибающего момента к предельному. Очевидно,  $0 \leq m \leq 1$ .

График зависимости (3.102) при  $k_1=0,23$ ,  $k_3=1,42$  изображен на рис. 34. В том случае когда диаграмма не имеет нисходящей ветви и обрывается при  $\sigma = \sigma_{\text{пп}}$ , эта кривая имеет вид *OAB*.

Выясним, при каких деформациях применимы выведенные выше формулы. Для этого установим, насколько геометрические параметры балки в предельном состоянии отличаются от геометрических параметров ее в исходном состоянии. Сделаем этот анализ для балки прямоугольного сечения, поскольку в этом случае получены конкретные формулы.

Подставив в (3.96) значения геометрических характеристик, согласно формулам (3.90); при

$$k_{11}=0,23; k_{33}=1,42, \epsilon_{\text{пп}}=0,23 \quad (3.103)$$

получаем

$$h/\rho_{\min} = 0,66. \quad (3.104)$$

Это значит, что искривление балки в предельном состоянии весьма значительно (радиус кривизны соизмерим с высотой сечения). Балка превращается в кривой брус. При построении эпюры напряжений это обстоятельство следует учитывать, внося соответствующие поправки. Однако эти поправки существенно не отражаются на перемещениях и значении предельного момента. На рис. 35 изображены совмещенные сечения прямо-

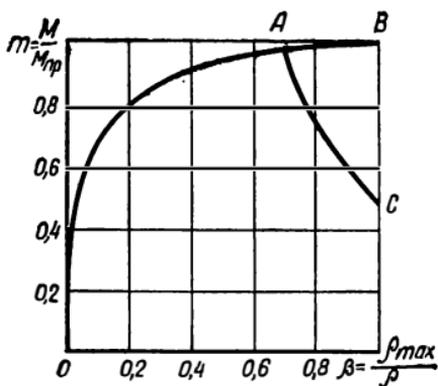


РИС. 34

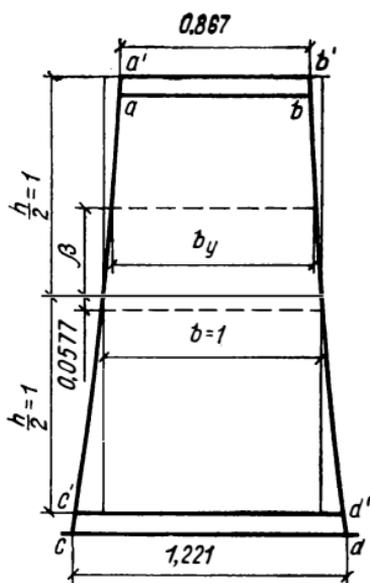


РИС. 35

угольной стальной балки с характеристиками материала  $\epsilon_{\text{пп}}=0,23$ ;  $k_1=0,2338$ ;  $k_3=1,4216$  до и после деформации, причем деформированное состояние соответствует максимальному моменту. В деформированном сечении центр тяжести сдвигается на  $0,0577 h$ , а его геометрические характеристики изменяются незначительно.

### В. Физическая и геометрическая нелинейность

Если в вышеприведенных формулах для кривизны нейтральной оси принять точное значение, то получим одновременно геометрически и физически нелинейные решения.

Определим отношение между точным и приближенным значением прогиба консольной нелинейно-упругой балки, нагруженной предельным моментом  $M_1$  (см. рис. 22) (Для случая, когда диаграмма работы материала не имеет нисходящей ветви). Для этого в формуле (3.12) в соответствии с примечанием к формуле (3.13) следует заменить деформацию  $\epsilon_{\text{п}}$ , соответствующую пределу упругости, на деформацию  $\epsilon_{\text{пп}}$ , соответствующую пределу прочности. Сделав это, получим:

$$\frac{f}{f_{\text{л}}} = \left[ \frac{\sin \left( \epsilon_{\text{пп}} \frac{l}{h} \right)}{\epsilon_{\text{пп}} \frac{l}{h}} \right]^2 \quad (3.105)$$

Здесь  $f$  — прогиб, определяемый из физически и геометрически нелинейных решений одновременно, а  $f_{л}$  — прогиб, определенный только из одного физически нелинейного решения для геометрически линейной балки.

Для определения подобного соотношения в случае действия максимального момента  $M_{\max}$  нужно в формулу (3.105) вместо  $h/2$  подставить ординату  $z_m$ , соответствующую максимальному значению напряжения  $\sigma_{\text{нп}}$ . Для этого, подставив в формулу (3.14) значение  $\rho_{\text{нп}}$ , определяемое по формуле (3.96), получим:

$$z_m = \left( \frac{I_{k_1+1}}{I_{k_3+1}} \right)^{\frac{1}{k_1-k_3}}, \quad (3.106)$$

или для прямоугольного сечения с учетом геометрических характеристик (3.99)

$$z_m = \frac{h}{2} \left( \frac{k_3 + 2}{k_1 + 2} \right)^{\frac{1}{k_1-k_3}}. \quad (3.107)$$

Подставив вместо  $h$  значение  $2z_m$  в формулу (3.105), получим:

$$\frac{f}{f_{л}} = \left\{ \frac{\sin \left[ \varepsilon_{\text{нп}} \frac{l}{h} \left( \frac{k_1 + 2}{k_3 + 2} \right)^{\frac{1}{k_1-k_3}} \right]}{\varepsilon_{\text{нп}} \frac{l}{h} \left( \frac{k_1 + 2}{k_3 + 2} \right)^{\frac{1}{k_1-k_3}}} \right\}^2. \quad (3.108)$$

## 2. Двухстержневая система

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние двухстержневой фермы. В этой задаче, допускающей простое решение, особенно наглядно выступает значение нелинейной теории.

Пусть двухстержневая симметричная система (рис. 36) растягивается силой  $P$  (тонкой линией показан вид до деформации, толстой — после деформации). Найдем связь между нагрузкой  $P$  и вертикальным перемещением в точке  $A$  при одновре-

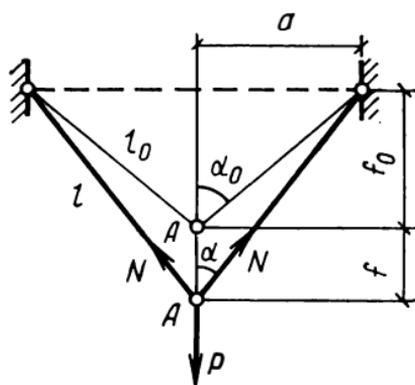


РИС. 36

менном учете физической и геометрической нелинейностей.

Обозначим усилие в стержне через  $N$ . Составляя условия равновесия, получим:

$$P = 2N \cos \alpha, \quad (3.109)$$

где  $\alpha$  (как видно из рис. 36) — половина угла между осями стержней после деформации.

Выразим  $N$  и  $\cos \alpha$  через перемещение  $f$ . Для этого найдем относительное удлинение  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\sqrt{a^2 + (f_0 + f)^2}}{l_0} - 1, \quad (3.110)$$

где  $l_0$  и  $l$  — длины стержня соответственно до и после деформации;  $f$  — перемещение узла  $A$ .

Вводя параметр безразмерного перемещения

$$\xi = \frac{f}{l_0} \quad (3.111)$$

в формулу (3.110), преобразуем ее следующим образом:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2} - 1. \quad (3.112)$$

Согласно рис. 36,

$$\cos \alpha = \frac{f_0 + f}{l} = \frac{f_0 + f}{\sqrt{a^2 + (f_0 + f)^2}} = \frac{\cos \alpha_0 + \xi}{\sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2}} = \frac{d\varepsilon}{d\xi}. \quad (3.113)$$

Обозначим через  $F$  площадь поперечного сечения одного стержня. Тогда, очевидно,

$$N = \sigma(\varepsilon) F. \quad (3.114)$$

Внося (3.114) и (3.113) в (3.109), получим:

$$P = 2F\sigma(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{d\xi}. \quad (3.115)$$

Формула (3.115) дает решение поставленной задачи в самом общем виде. Физическая нелинейность представлена здесь законом  $\sigma(\varepsilon)$ , в качестве которого может быть выбрана любая из аппроксимаций, рассмотренная в § 2 гл. 2. Геометрическая нелинейность выражена формулами (3.112) и (3.113). Для получения физически линейного решения следует принять

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon. \quad (3.116)$$

Для получения геометрически линейного решения в формуле (3.112) следует пренебречь величиной  $\xi^2$  по

сравнению с остальными величинами, кроме того, принять

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0} - 1 = \xi \cos \alpha_0. \quad (3.117)$$

Введем безразмерные параметры:

$$\rho^{**} = P/2EF. \quad (3.118)$$

$$\rho^* = P/2\sigma_{\text{пп}} F. \quad (3.119)$$

В качестве закона физической нелинейности  $\sigma(\varepsilon)$  в дальнейшем используем зависимость (2.92). На основе вышеперечисленных формул можно получить следующие решения задачи.

I. Физически и геометрически линейное:

$$\rho^{**} = P/2EF = \xi \cos^2 \alpha_0. \quad (3.120)$$

II. Геометрически линейное, физически нелинейное:

$$\rho^* = \frac{P}{2\sigma_{\text{пп}} F} = \frac{\cos \alpha_0}{k_3 - k_1} \left[ k_3 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{пп}}} \right)^{k_1} - k_1 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{пп}}} \right)^{k_2} \right]; \quad (3.121)$$

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha_0. \quad (3.122)$$

III. Физически линейное, геометрически нелинейное:

$$\rho^{**} = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2}} \right) (\cos \alpha_0 + \xi). \quad (3.123)$$

IV. Физически и геометрически нелинейное решение, представленное формулами (2.92), (3.112) и (3.115).

К этим четырем решениям добавим для сравнения еще два, в которых физическая нелинейность представляется диаграммой жестко пластического тела.

V. Геометрически нелинейное:

$$\rho^* = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{пп}}} \frac{\cos \alpha_0 + \xi}{\sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2}}, \quad (3.124)$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести.

VI. Геометрически линейное:

$$\rho^* = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{пп}}} \cos \alpha_0. \quad (3.125)$$

На рис. 37—45 изображены кривые (3.120)—(3.125) для всех шести решений при следующих механических характеристиках материала<sup>1</sup>:

$$k_1 = 1,24; \quad k_2 = 0,23; \quad \varepsilon_{\text{пп}} = 0,23; \quad \sigma_T = 0,65 \sigma_{\text{пп}}.$$

<sup>1</sup> На графиках опущены звездочки в обозначениях параметров нагрузки.

На рис. 37 показаны результаты физически линейного решения — кривые  $\rho_{II}^*$  и  $\rho_{III}^*$  при  $\alpha_0 = 60^\circ$ . Кривые убедительно показывают влияние геометрической нелинейности на нагрузки: при том же самом перемещении  $\xi$  нагрузка геометрически нелинейной системы значительно больше. Отношение нагрузок показано штрих-пунктирной кривой.

На рис. 38 показаны результаты физически нелинейного решения: кривые  $\rho_{II}^*$  и  $\rho_{IV}^*$ . Здесь также учет геометрической нелинейности значительно увеличивает нагрузку (см. штрих-пунктирную кривую  $\rho_{IV}^*/\rho_{II}^*$ ). Учет физической нелинейности позволяет определить максимальную нагрузку. Без учета геометрической нелинейности максимальная нагрузка  $\rho_{np}^* = 0,499$  достигается при  $\xi = 0,5$ . Геометрически нелинейная система имеет большую максимальную нагрузку:  $\rho_{np}^* = 0,739$ , при больших перемещениях  $\xi = 0,525$ . Обратим внимание на очень важное обстоятельство: кривая  $\rho_{II}^*$  достигает своего мак-

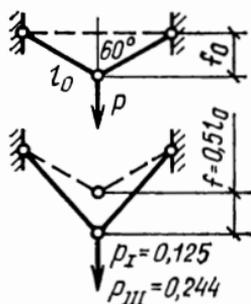
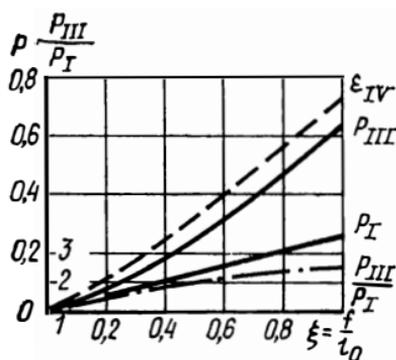


РИС. 37

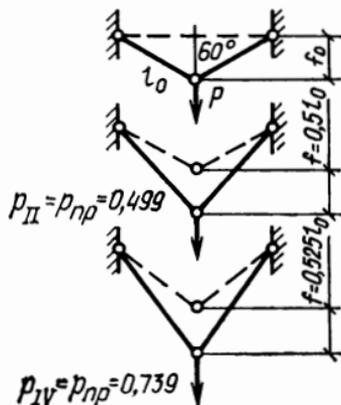
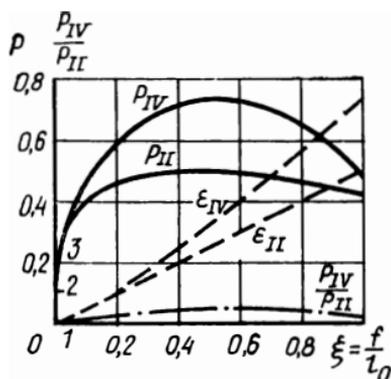


РИС. 38

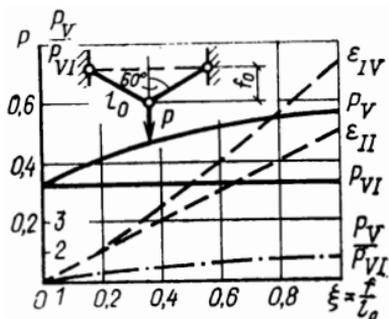


РИС. 39

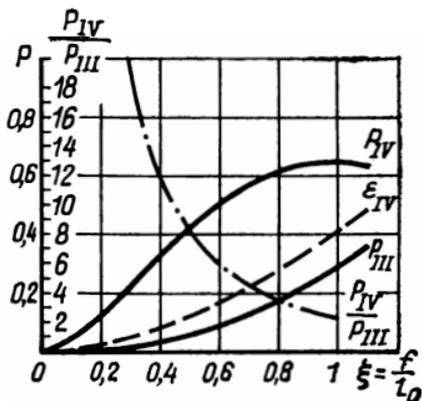


РИС. 40

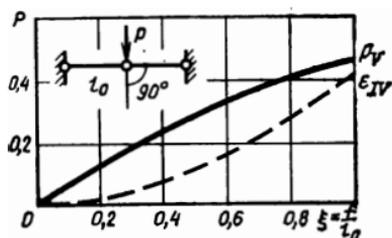


РИС. 41

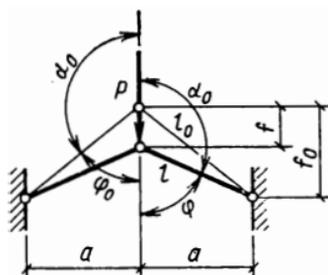


РИС. 42

сумма при деформациях (см. кривую  $\epsilon_{II}$ ), равных предельному значению  $\epsilon_{пр}^* = \epsilon_{III} = 0,23$ , но кривая  $\rho_{IV}$ , описывающая поведение геометрически нелинейной системы, достигает максимума при деформациях (см.

кривую  $\epsilon_{IV}$ )  $\epsilon_{пр} = 0,36$ , значительно превосходящих предельное значение деформации  $\xi_{III} = 0,23$ .

На рис. 39 изображены кривые  $\rho_V^*$  и  $\rho_{VI}^*$ , соответствующие жестко-пластическим решениям.

Из всех кривых истинное поведение конструкции наиболее полно описывает кривая  $\rho_{IV}^*$  (см. рис. 38). Все другие кривые характеризуют весьма приблизительное поведение конструкции, иногда далекое от истинного. Этот пример и приведенный ниже (рис. 40 и 41) еще раз убедительно свидетельствуют, что только с помощью нели-

нейной теории можно получить точное описание поведения конструкции.

На рис. 40 и 41 показаны кривые  $p_{III}^*$ ,  $p_{IV}^*$  и  $p_V^*$  при  $\alpha_0 = 90^\circ$ . В этом случае линейного решения вообще не существует — система мгновенно изменяема. На рис. 40 бросается в глаза очень большое различие между кривыми  $p_{III}^*$  и  $p_{IV}^*$ ; при малых перемещениях отношение между ними (см. кривую  $p_{IV}^*/p_{III}^*$ ) стремится к бесконечности. Для мгновенно изменяемых систем учет геометрической нелинейности имеет исключительно важное значение.

При  $\alpha_0 > 90^\circ$  растянутая система переходит в сжатую (рис. 42). Все ранее полученные формулы сохраняют свое значение. При изменении углов  $\alpha_0$  и  $\alpha$  до  $\varphi_0$  и  $\varphi$  следует в соответствующих формулах учитывать, что

$$\cos \varphi_0 = -\cos \alpha_0; \quad \cos \varphi = -\cos \alpha. \quad (3.126)$$

Например, при таком изменении формула (3.123) принимает вид

$$p^* = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \varphi_0 + \xi^2}} \right) (-\cos \varphi_0 + \xi), \quad (3.127)$$

или

$$p^* = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \varphi_0 + \xi^2}} - 1 \right) (\cos \varphi_0 - \xi). \quad (3.128)$$

При этом кривая  $p^* - \xi$  будет более сложного вида, чем в случае растянутой системы.

На рис. 43 изображен общий вид кривой состояния равновесия деформированной фермы, а также ее конфигурации, соответствующие характерным точкам кривой. В точках 0, 2 и 4 равновесие возможно только при  $p^* = 0$ . Касательная в начале координат соответствует линейному решению. Кривая имеет экстремальные точки (1, 3, 5). На участке 2—3—4 равновесие возможно при отрицательной нагрузке (направленной вверх). На участке 4—5 кривая состояния равновесия соответствует аналогичной кривой растянутой системы (при действии силы, направленной вниз). Слева от точки 0 кривая состояния равновесия также описывает растянутую систему, но при действии силы, направленной вверх. Эта часть кривой также может иметь экстремальную точку. Начи-

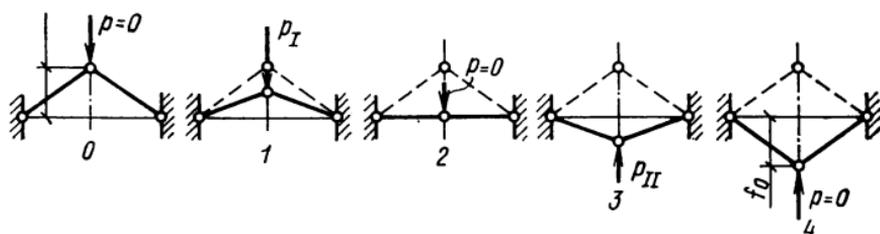
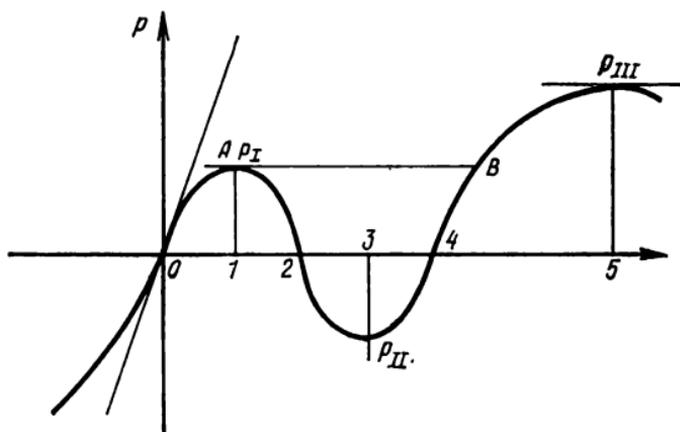


РИС. 43

$$p \frac{P_{III}}{P_I} \varphi_0 = 60^\circ \quad p = \frac{P}{2EF} \text{ (сжатие)}$$

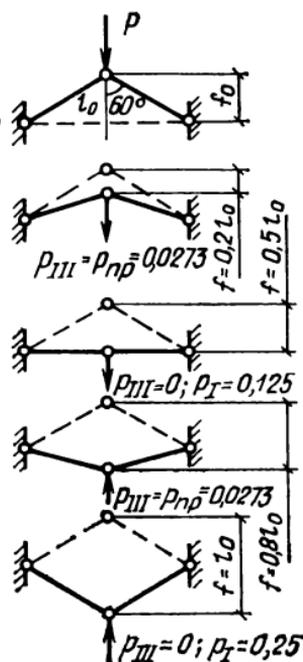
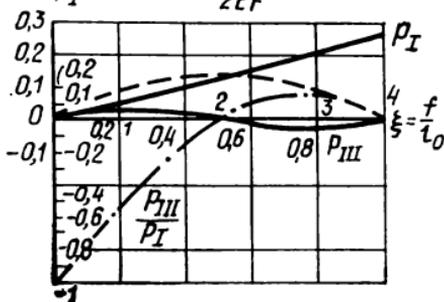


РИС. 44

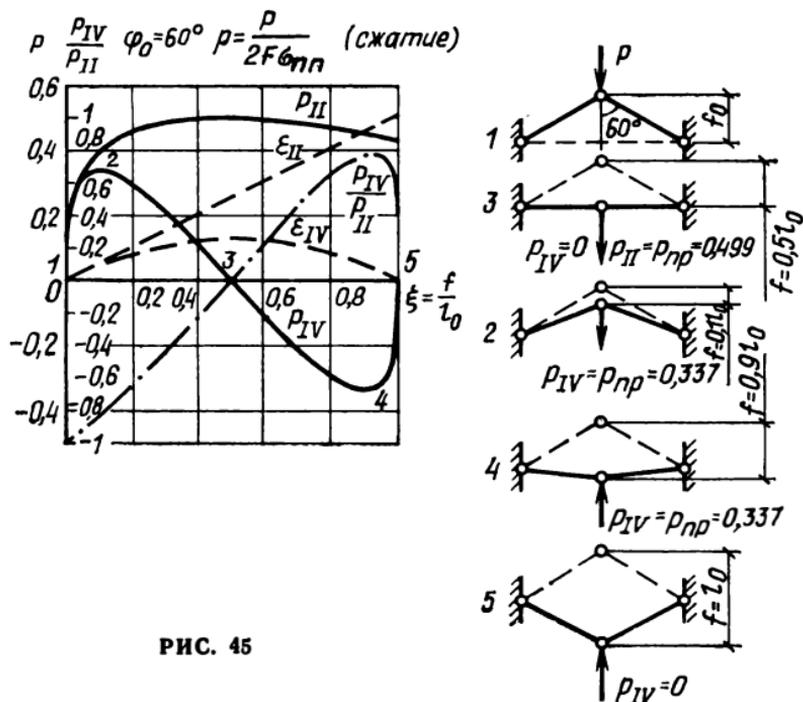


РИС. 45

ная с точки *A* кривая опускается вниз. В этом месте, на участке 1—2—3, кривая описывает неустойчивые состояния равновесия. Поэтому практически состояние системы, соответствующее кривой, расположенной ниже линии *AB*, не реализуется, и при возрастании перемещений происходит «перескок» или «хлопок» системы по линии *AB*. Отметим еще одно интересное свойство этой системы: при нагружении ее до состояния, соответствующего участку 4—5 и последующей разгрузке, система не возвратится в первоначальное состояние (конфигурация 0), а останется в состоянии соответствующем виду 4. Это свидетельствует о том, что существуют упругие системы, которые при полной разгрузке не принимают своей первоначальной формы.

На рис. 44 и 45 изображены конкретные кривые состояния равновесия для сжатой фермы (показан только участок 0—4) при  $\varphi_0 = 60$  ( $\alpha_0 = 120^\circ$ ), а также конфигурации деформированной системы (для точек 1, 2, 3, 4 кривой состояния равновесия) и параметры экстремальных точек: на рис. 44 — физически линейная, но геометрически нелинейная форма; на рис. 45 — физически и геометрически нелинейная форма. Характеристики материала приняты такими же, как и у растянутой системы. Эти рисунки показывают, что поведение нелинейной

сжатой системы не только количественно, но и качественно, и притом весьма существенно отличается от поведения линейной системы.

Выясним, как зависит максимальная нагрузка  $p_{\text{пр}}$  от геометрического параметра  $\alpha_0$ , т. е. от «подъема» конструкции. Для этого представим связь между напряжениями и деформациями в следующем виде:

$$\sigma(\epsilon) = \sigma_{\text{пр}} f(\epsilon). \quad (3.129)$$

Далее, вводя параметр нагрузки  $p^* = P/2\sigma_{\text{пр}}F$ , перепишем формулу (3.116) в виде

$$p^* = f(\epsilon) \frac{d\epsilon}{d\xi}. \quad (3.130)$$

Взяв производную по  $\xi$  и приравняв ее нулю, найдем:

$$\frac{dp^*}{d\xi} = f(\epsilon) \frac{d^2\epsilon}{d\xi^2} + \frac{d\epsilon}{d\xi} \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} = 0, \quad (3.131)$$

но

$$\frac{df(\epsilon)}{d\xi} = \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\xi}. \quad (3.132)$$

Вставив (3.132) в (3.131), получим:

$$f(\epsilon) \frac{d^2\epsilon}{d\xi^2} + \left(\frac{d\epsilon}{d\xi}\right)^2 \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} = 0. \quad (3.133)$$

Пользуясь формулой (3.115), вычислим:

$$\left(\frac{d\epsilon}{d\xi}\right)^2 = \frac{(\cos \alpha_0 + \xi)^2}{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2}; \quad (3.134)$$

$$\frac{d^2\epsilon}{d\xi^2} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{(1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (3.135)$$

и

Вставив (3.134) и (3.135) в (3.133), будем иметь:

$$\frac{f'(\epsilon)}{f(\epsilon)} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{(\cos \alpha_0 + \xi)^2 \sqrt{1 + 2\xi \cos \alpha_0 + \xi^2}} = 0. \quad (3.136)$$

Далее из (3.112), выразив  $\xi$  через  $\epsilon$  и введя обозначение

$$\frac{f'(\epsilon)}{f(\epsilon)} = a, \quad (3.137)$$

получим:

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{a\epsilon(1+\epsilon)(2+\epsilon)+1}{1-a(1+\epsilon)}. \quad (3.138)$$

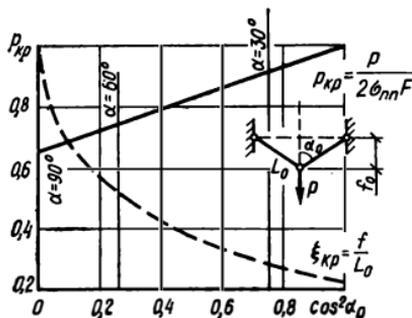


РИС. 46

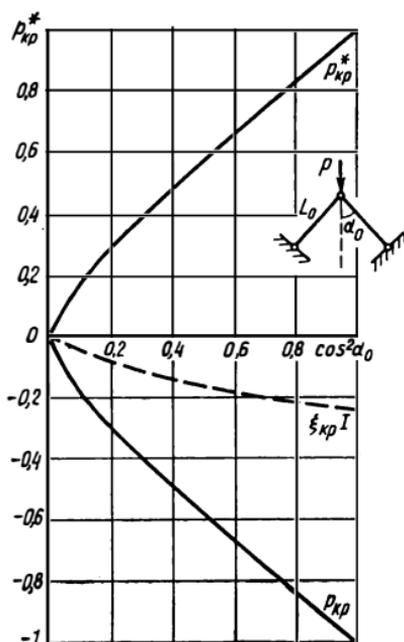


РИС. 47

Пользуясь формулой (3.112), найдем:

$$\cos \alpha_0 + \xi = \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 1 + \cos^2 \alpha_0} ; \quad (3.139)$$

Подставив (3.139) в (3.115), а полученное выражение в (3.130), получим:

$$P_{кр}^* = f(\varepsilon) \frac{\sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 1 + \cos^2 \alpha_0}}{1 + \varepsilon} ; \quad (3.140)$$

Критическое значение перемещения  $\xi$  найдем по формуле (3.139)

$$\xi_{кр} = -\cos \alpha_0 + \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 1 + \cos^2 \alpha_0} ; \quad (3.141)$$

Таким образом была вычислена связь между  $P_{кр}^*$  и  $\cos^2 \alpha_0$  при вышеуказанных механических характеристиках материала для растянутой системы. Функция  $f(\varepsilon)$  в соответствии с формулой (3.113) при вычислениях была взята в виде

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{k_3 - k_1} \left[ k_3 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{пп}} \right)^{k_1} - k_1 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{пп}} \right)^{k_3} \right] ; \quad (3.142)$$

Подставив (3.142) в (3.137), получим:

$$a = \frac{k_1 k_3}{\varepsilon} \frac{\left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{пп}} \right)^{k_3} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{пп}} \right)^{k_1}}{k_1 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{пп}} \right)^{k_3} - k_3 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{пп}} \right)^{k_1}} ;$$

Вычисленные значения  $\rho_{кр}^*$ , а также связь между  $\xi_{кр}$  и  $\cos^2 \alpha_0$  показаны на рис. 46. Интересно, что график  $\rho_{кр}$  представляет собой почти прямую линию.

Если в формулах (3.138); (3.139) и (3.140) взять  $\varepsilon$  со знаком минус, то получим связь между  $\rho_{кр}^*$  и  $\cos^2 \alpha_0$  для сжатой системы (рис. 47), причем положительная ветвь кривой  $\rho_{кр}$  отвечает максимальной (сжимающей) силе, направленной вниз, а отрицательная — минимальной силе, направленной вверх. На этом рисунке изображена кривая зависимости критического прогиба  $\xi_{кр}$  от  $\cos^2 \alpha_0$ . Это кривая вычерчена только для первой (максимальной) критической нагрузки ( $\varepsilon_{кр} = I$ ). Значение критического прогиба для минимальной нагрузки ( $\varepsilon_{кр} = II$ ) определяют из условия [оно вытекает из формулы (3.141)]:

$$\varepsilon_{крI} + \varepsilon_{крII} = -2 \cos \alpha_0.$$

Если в формуле (3.130) принять  $\rho^* = P/2EF$ ;  $f(\varepsilon) = \varepsilon$  и проделать все вышеперечисленные операции, то получим связь между  $\rho_{кр}^*$  и  $\cos^2 \alpha_0$  для физически линейной (гуковской системы). Эта связь выражается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{кр}^* &= \frac{P}{2EF} = \varepsilon_{кр} \frac{\cos \alpha_0 + \xi_{кр}}{\sqrt{1 + 2\xi_{кр} \cos \alpha_0 + \xi_{кр}^2}}; \\ \varepsilon_{кр} &= \sqrt{1 + 2\xi_{кр} \cos \alpha_0 + \xi_{кр}^2} - 1; \\ \xi_{кр} &= -\cos \alpha_0 \pm \sqrt{\sin^2 \alpha_0 \sqrt[3]{\sin \alpha_0} - \sin^2 \alpha_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.143)$$

которые получаются из (3.136) и (3.137) при замене  $f(\varepsilon)$  на  $\varepsilon$ .

На рис. 48 показан график  $\rho_{кр}^* - \cos^2 \alpha_0$ , вычисленный по формулам (3.143). Верхняя кривая соответствует максимальной предельной нагрузке, нижняя — минимальной (сравни с рис. 44). В рассматриваемом случае физически нелинейного материала предельная нагрузка существует только для сжатой системы.

Рассмотрим случай трехстержневой системы (рис. 49). Считая положительными направления усилий и силы, показанные на рисунке, и составляя условие равновесия (сумма проекций всех сил на вертикальную ось равна нулю), получим:

$$P = N_b - 2N_a \cos \varphi. \quad (3.144)$$

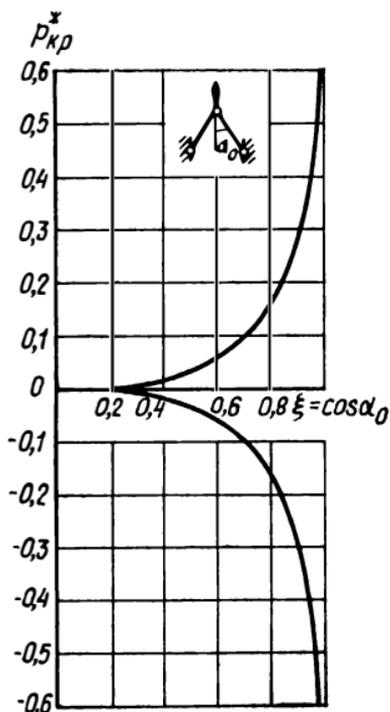


РИС. 48

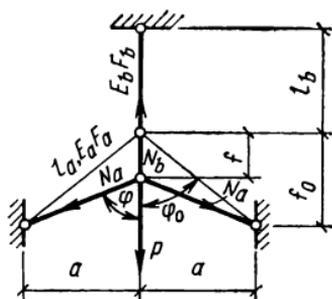


РИС. 49

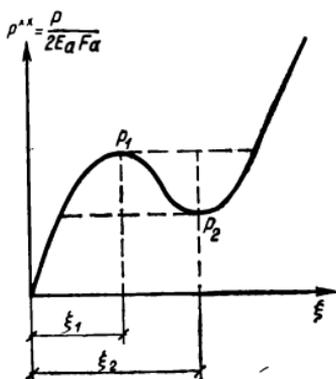


РИС. 50

Выразив  $N_b$  и  $N_a$  через удлинения и перемещения  $f$ , так же, как это было сделано в случае двухстержневой системы, получим зависимость между параметрами нагрузки и перемещениями угла  $A$  в общем случае физической и геометрической нелинейности. Ограничимся случаем физически линейной и геометрически нелинейной системы, для которой эта зависимость выражается формулой

$$p^{**} = \frac{P}{2E_a F_a} = \frac{\alpha}{2} \xi + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \varphi_0 + \xi^2}} - 1 \right) (\cos \varphi - \xi). \quad (3.145)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{l_0 E_b F_b}{l_b E_a F_a} = \frac{\frac{E_b F_b}{l_b}}{\frac{E_a F_a}{l_0}} = \frac{i_b}{i_a}$$

выражает отношение погонных жесткостей среднего и боковых стержней ( $E_b F_b$  и  $E_a F_a$  — жесткости соответ-

венно среднего и боковых стержней;  $l_b$  и  $l_a$  — длины стержней).

Общий вид кривой состояния равновесия сжатой системы изображен на рис. 50. В отличие от кривых состояния равновесия растянутых систем эта кривая может быть расположена целиком в положительной области, т. е. все ее экстремальные значения будут положительны, и она может не иметь нулевых точек (кроме начальной). Форма кривой состояния равновесия зависит от параметра  $\alpha$ . Из уравнения  $dp^{**}/d\xi = 0$  определим значения перемещений, соответствующие экстремальным точкам:

$$\xi_{1,2} = \cos \varphi_0 \pm \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \varphi_0}{1 + \frac{\alpha}{2}}\right)^{3/2} - \sin^2 \varphi_0}. \quad (3.146)$$

При  $\alpha = 0$  (когда система превращается в двухстержневую) эта формула переходит в формулу (3.143). Точку перегиба определим из условия, что подкоренное выражение равно нулю. Это условие приводит к соотношению

$$\cos^2 \varphi_0 = \alpha \frac{1 + \frac{\alpha}{4}}{1 + \frac{\alpha}{2}}.$$

Если параметр жесткости будет больше значения, определяемого этим соотношением, то кривая состояния равновесия не будет иметь экстремальных точек (нагрузка будет в основном передаваться на средний стержень).

Если в формуле (3.145) подкоренное выражение разложить по формуле бинома и ограничиться членами, содержащими выражение  $-2\xi \cos \varphi_0 + \xi^2$  в первой степени, то получим приближенную зависимость между нагрузкой и перемещением:

$$p^{**} = \frac{\alpha}{2} \xi + \xi \cos^2 \varphi_0 - \frac{3}{2} \xi^2 \cos \varphi_0 + \frac{\xi^3}{2}, \quad (3.147)$$

Этой формулой можно пользоваться при сравнительно небольших перемещениях  $\xi$ .

Анализ работы двух- и трехстержневой системы изложен в работе [66].

### 3. Растяжение кольца и сферы

Рассмотрим кольцо, растягиваемое внутренним давлением (рис. 51). Условие равновесия в этом случае имеет вид:

$$\sigma F = qR, \quad (3.148)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения кольца до деформации (см. рис. 51, а);  $R$  — радиус кольца после деформации (см. рис. 51, б), равный:

$$R = R_0 + \Delta R, \quad (3.149)$$

Подставив (3.149) в (3.148) и учтя, что в соответствии с формулой (2.48)

$$\sigma = \sigma_{\text{нп}} \sigma^*, \quad (3.150)$$

получим:

$$p = \frac{qR_0}{\sigma_{\text{нп}} F} = \frac{\sigma^*}{1 + \epsilon}, \quad (3.151)$$

где

$$\epsilon = \frac{\Delta R}{R}, \quad (3.152)$$

а  $\sigma^*$  можно определить по формуле (3.150).

Зависимость (3.151) между параметром давления  $p$  и относительной деформацией  $\epsilon$  показана на рис. 52 для кольца из стали с характеристиками  $k_1 = 0,23$ ;  $k_3 = 1,42$ ;

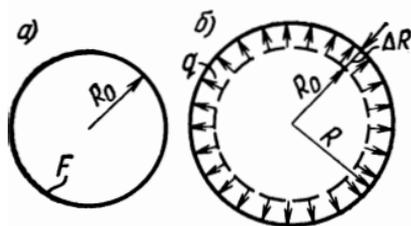


РИС. 51

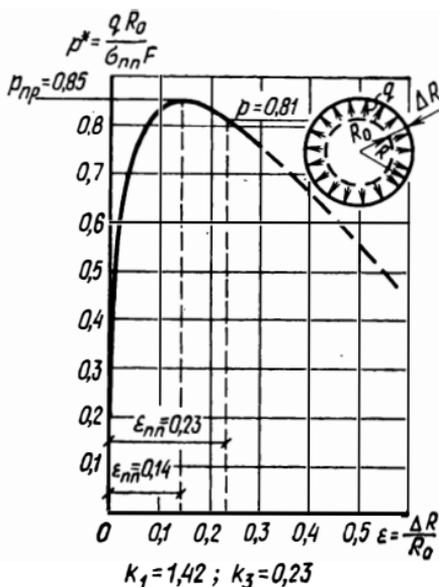


РИС. 52

$\epsilon_{\text{пр}} = 0,23$ . Кривая имеет максимум  $p_{\text{пр}} = 0,85$  при  $\epsilon = 0,14$ . Интересно отметить, что в предельном состоянии радиус кольца увеличивается на 14%, в то время как предельная деформация  $\epsilon_{\text{пр}}$  составляет 23%. Напряжение кольца в предельном состоянии определяется следующим образом:

$$p_{\text{пр}} = 0,85 = \frac{q_{\text{пр}} R_0}{\sigma_{\text{пр}} F} \quad (3.153)$$

Отсюда

$$q_{\text{пр}} = 0,85 \frac{\sigma_{\text{пр}} F}{R_0} \quad (3.154)$$

и

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{q_{\text{пр}} R}{F} = \frac{0,85 \sigma_{\text{пр}} R}{R_0} = 0,976 \sigma_{\text{пр}} \quad (3.155)$$

Это соответствует диаграмме (см. рис. 18), где при  $\epsilon^* = \frac{0,14}{0,23} = 0,61$  получаем  $\sigma^* = 0,97$ .

Очень важно при этом, что материал конструкции, испытывающей предельное состояние, не разрушается ни в одной точке. Из рис. 52 видно, что когда в материале появляются напряжения, равные пределу прочности, то нагрузка будет меньше предельной ( $p = 0,81 < 0,85$ ).

Кольцо является примером полностью растянутой конструкции, которая подобно сжатым конструкциям может перейти в предельное состояние раньше, чем в это состояние придет материал, из которого она выполнена. Это есть следствие геометрической нелинейности. С позиций линейной теории для растянутых систем такой вывод получить нельзя.

Предельное состояние кольца можно определить простым графическим построением, не прибегая к сложным вычислениям. Для этого приравняем нулю производную  $dp/d\epsilon$ :

$$\frac{dp}{d\epsilon} = \frac{(1 + \epsilon)' (\sigma^*)' - \sigma^*}{(1 + \epsilon)^2} = 0,$$

отсюда

$$\sigma^* = (1 + \epsilon_{\text{пр}}) (\sigma^*)' \quad (3.156)$$

Дифференцируя по  $\epsilon^*$  это выражение [см. (2.48)], получим:

$$\sigma^* = \left( \frac{1}{\epsilon_{\text{пр}}} + \epsilon_{\text{пр}}^* \right) (\sigma^*)' \quad (3.157)$$

Отложив на диаграмме  $\sigma^* - \varepsilon^*$  (рис. 53) влево отрезок  $1/\varepsilon_{nn}$ , получим точку  $A$ , через которую проведем касательную  $AB$  к кривой  $\sigma^* - \varepsilon^*$ . Координаты точки  $B$  дадут предельное значение деформаций и напряжений.

Рассмотрим сферическую оболочку под внутренним давлением  $q$ . Так же, как и в предыдущем примере, начальный радиус обозначим  $R_0$ , радиус после деформа-

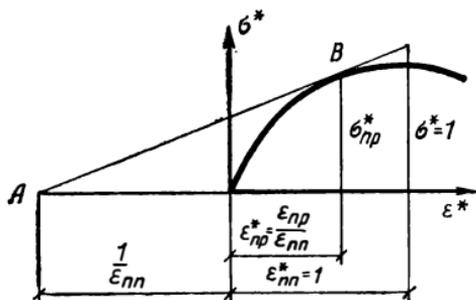


РИС. 53

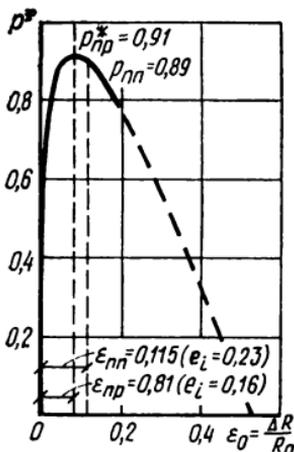


РИС. 54

ции —  $R$ , толщину оболочки —  $h$ . Составляя уравнение равновесия, получим:

$$2\sigma/R = q/h. \quad (3.158)$$

Деформации оболочки равны:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \Delta R/R_0 = \varepsilon. \quad (3.159)$$

Вычислим интенсивности деформаций и напряжений [см. формулу (1.71)] при  $\nu=0,5$ . Для любой точки получим:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2} = 2\varepsilon; \quad (3.160)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma.$$

После деформации

$$R = R_0 + \Delta R = R_0(1 + \varepsilon). \quad (3.161)$$

По формуле (2.48) будем иметь:

$$\sigma = \sigma_{nn}\sigma^*(e_i^*) : \quad (3.162)$$

Вставив (3.160) в (3.162), а затем вместе с (3.161) в (3.158), получим:

$$p^* = \frac{\sigma^*(2\varepsilon)}{1 + \varepsilon} \quad (3.163)$$

Здесь

$$p^* = \frac{qR_0}{2\sigma_{\text{пп}} h}; \quad (3.164)$$

$$\sigma^*(2\varepsilon) = \frac{1}{k_3 - k_1} \left[ k_1 \left( \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{\text{пп}}} \right)^{k_3} - k_3 \left( \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{\text{пп}}} \right)^{k_1} \right]. \quad (3.165)$$

График зависимости (3.163) для сферической оболочки из стали с характеристиками  $k_1 = 0,23$ ;  $k_3 = 1,42$ ;  $\varepsilon_{\text{пп}} = 0,23$  изображен на рис. 54. Максимальное значение  $p_{\text{пр}}^* = 0,91$  при  $\xi = 0,08$ . Напряжения, соответствующие  $p_{\text{пр}}^*$ , равны:

$$\sigma_{\text{пр}} = 0,91 \cdot 1,08 \sigma_{\text{пп}} = 0,981 \sigma_{\text{пп}}. \quad (3.166)$$

По диаграмме работы материала (см. рис. 18) при  $e_i = 0,16$  и  $e_i^* = \frac{0,16}{0,23} = 0,695$  получим  $\sigma^* = 0,975$ , что хорошо совпадает с формулой (3.166). Здесь мы также имеем случай конструкции, у которой предельное состояние наступает раньше, чем разрушится материал. Разрушению материала соответствует нагрузка меньше предельной ( $p^* = 0,89 < 0,91$ ).

#### 4. О свойствах кривых состояния равновесия

Предположим, что все нагрузки, приложенные к конструкции, зависят от одного параметра  $p$  (простое нагружение). Выберем некоторое характерное перемещение  $f$  и затем построим кривую  $p-f$ . Выберем параметры  $p$  и  $f$  так, чтобы

$$p df = dW \quad (3.167)$$

выражало элементарную работу внешних сил, т. е.  $p$  и  $f$  должны быть соответственно обобщенной силой и обобщенным перемещением. Например, при схеме нагружения, изображенной на рис. 55, а, за параметр  $p$  следует принять силу  $Q$ , а за параметр  $f$  — прогиб под силой  $Q$ . Построенную таким образом кривую будем называть кривой состояния равновесия конструкции. При нагружении по схеме 55, б за обобщенную силу  $p$  можно при-

нять интенсивность нагрузки  $q$ , тогда обобщенным перемещением будет площадь  $\Omega$ , ограниченная упругой кривой и первоначальным положением оси балки. Можно также принять за  $p$  всю нагрузку на балку, тогда обобщенным перемещением будет среднее значение прогиба:  $f = \frac{\Omega}{l}$ .

Некоторые типы кривых показаны на рис. 56. Несмотря на большое разнообразие этих кривых, они обладают некоторыми общими свойствами.

1. Эти кривые являются непрерывными. Разрыв кривых (точка  $\delta$ ) означает разрушение конструкции.

2. Интеграл (см. рис. 56, а)

$$W = \int_0^f p df, \quad (3.168)$$

выражающий работу внешних сил, является непрерывной функцией перемещения  $f$ : она может иметь разрыв только в случае разрушения конструкции. Взяв этот интеграл по частям, получим:

$$W = \int_0^f p df - \int f dp. \quad (3.169)$$

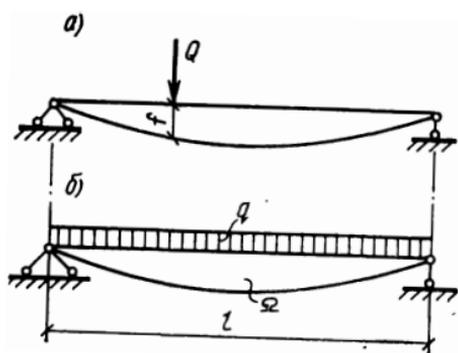


РИС. 55

Смысл этого выражения понятен из рис. 56, а. Таким образом, работа внешних сил есть разность двух работ:

$$W = W_p - W_q. \quad (3.170)$$

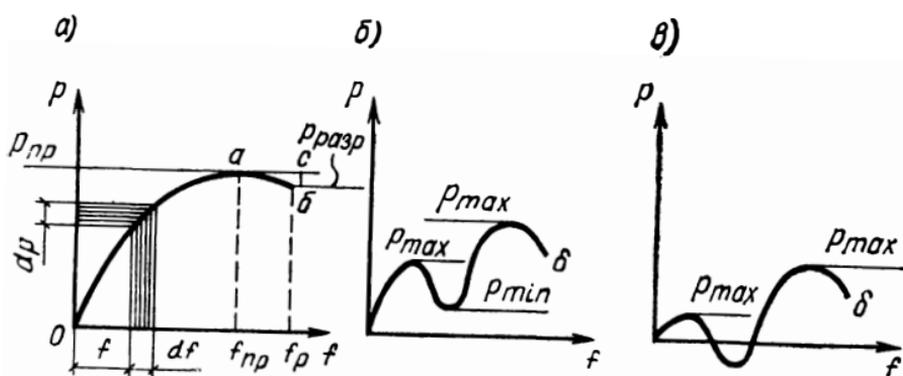


РИС. 56

Здесь

$$W_{\pi} = pf \quad (3.171)$$

есть так называемая полная работа. Внешние силы совершили бы эту работу, если бы конструкция в процессе всего нагружения до нагрузки  $p$  была бесконечно жесткой, а после достижения значения  $p$  стала идеально пластичной. На самом деле упругие свойства материала проявляются с начала нагружения, поэтому работа внешних сил будет меньше значения (3.171) на величину

$$W_q = \int_0^f f dp, \quad (3.172)$$

Этот интеграл называется дополнительной работой. Формула (3.168) соответствует теореме Лагранжа:

$$\frac{dW}{df} = p, \quad (3.173)$$

Формула (3.172) соответствует теореме Кастильяно:

$$\frac{dW_q}{dp} = f, \quad (3.174)$$

Разделив (3.174) на (3.173), получим:

$$\frac{dp}{df} = \frac{dW_q}{dW} \frac{p}{f}, \quad (3.175)$$

Если принять

$$\frac{dW_q}{dW} = k \quad (3.176)$$

(где  $k$  — постоянное число), то, проинтегрировав уравнение

$$\frac{dp}{df} = k \frac{p}{f},$$

получим для кривой  $p$ — $f$  степенной закон:

$$p = cf^k, \quad (3.177)$$

где  $c$  — некоторая постоянная.

Для линейно-упругого тела  $k=1$ ; для идеально пластического  $k=0$ , поэтому коэффициент  $k$ , равный отношению дополнительной энергии к энергии деформации, является характеристикой (мерой) пластичности упругопластического материала.

3. Первая производная  $\frac{dp}{df}$  не обязательно должна

быть повсюду непрерывной, но может иметь в нескольких точках скачки. Рассмотрим в качестве примера конструкцию (рис. 57), выполненную из материала, подчиняющегося диаграмме Прандтля (*a* — теоретическая зависимость  $p-f$ ; *b* — график производной  $dp/df$ ). Мы видим, что первая производная имеет два скачка. Эти скачки не обязательно должны быть связаны с теми или

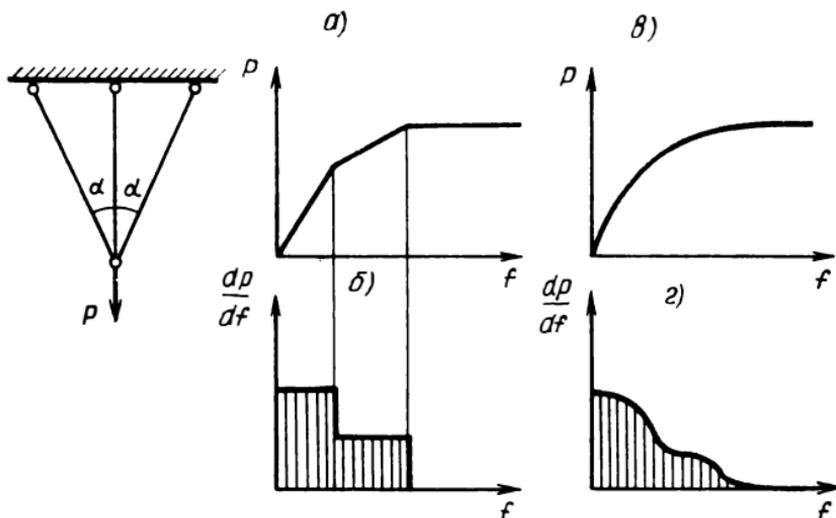


РИС. 57

иными свойствами диаграммы работы материала, иногда они отражают свойства конструкции. Рассмотрим, например, конструктивно-нелинейную систему, изображенную на рис. 1 и выполненную из линейно-упругого (гуковского) материала. При  $p < \frac{48EI}{5l^3} \delta$ , производная имеет значение  $\frac{24EI}{l^3}$ ; при  $p \geq \frac{48EI}{5l^3} \delta$  она делает скачок до величины  $\frac{576EI}{7l^3}$ . То же самое можно наблюдать в вантовых конструкциях в тех случаях, когда в каком-либо стержне возникает сжимающее усилие.

Если в некоторый момент нагружения первая производная кривой состояния делает скачок, то это значит, что в этот момент нарушается режим работы конструкции. Такое состояние конструкции будем называть критическим, или особым состоянием.

Таким образом, критическое состояние конструкций характеризуется тем, что первой производной  $dp/df$  в

нем не существует, а в пограничных точках она имеет два разных значения. Можно также сказать, что в критическом состоянии бесконечно малому приращению деформаций соответствует конечное приращение первой производной  $dp/df$  кривой состояния равновесия.

Предлагаемое определение критического состояния имеет тот же смысл, какой обычно вкладывают в него при описании физических процессов: критическим состоянием называется узловая точка, пройдя которую, система меняет свои качества. В рассматриваемом случае конструкция, пройдя критическую точку, изменяет свои параметры.

Может случиться так, что первая производная  $dp/df$  повсюду непрерывна, а скачки имеет только вторая производная; критические состояния, определяемые скачками второй производной, будем называть критическими состояниями второго порядка. Они встречаются значительно реже критических состояний первого порядка. Еще реже встречаются критические состояния третьего и более высоких порядков, которые определяются скачками третьей и более высоких производных.

Практически в реальных системах переход через критическое состояние происходит более или менее постепенно, поэтому производная в этом месте, строго говоря, не имеет скачка. Кривая, изображающая эту производную, в этом месте круто поднимается или опускается. На рис. 57, *в* и *г* изображены опытная кривая  $p-f$  и ее первая производная. На участках, соответствующих критическим состояниям, кривая  $dp/df$  круто опускается вниз, это значит, что в этих местах вторые производные имеют очень большие (в данном случае отрицательные) значения. Таким образом, критическое состояние реальной системы будет определяться теми участками кривой, на которых вторая производная принимает очень большие значения. Для критических состояний второго порядка надо таким же образом проанализировать третью производную и т. д. Нагрузку, соответствующую критическому состоянию, будем называть критической. Возвращаясь к рис. 56, мы видим, что на кривой состояния кроме критических точек могут быть точки, в которых

$$dp/df = 0. \quad (3.178)$$

Это экстремальные точки, или точки перегиба. Нагрузку, определяемую условием (3.178), будем называть

Состояние конструкции	Нагрузка	Математическое определение	Возможное число точек
Критическое $n$ -го порядка	Критическая $n$ -го порядка	$\frac{d^{n+1}p}{df^{n+1}} \approx \infty$	Несколько
Предельное	Предельная	$\frac{dp}{df} = 0$	»
Разрушение	Разрушающая	Разрыв кривой состояния равно-весия	Не больше одной

предельной. В случае максимума будем говорить о верхней предельной нагрузке, в случае минимума — о нижней предельной нагрузке. Случай перегиба кривой состояния равновесия можно (иногда) рассматривать как случай слияния верхней и нижней предельных нагрузок. Из рис. 56, б, в следует, что на кривой состояния может быть несколько точек, отвечающих условию (3.178).

Все сказанное выше о характерных точках кривой состояния отражено в табл. 4.

Рассмотрим еще несколько типичных случаев кривых состояния равновесия с их характерными точками.

1. Стальной стержень растягивается центральной силой (диаграмму растяжения см. на рис. 9). В момент когда напряжения достигают предела пропорциональности, на кривой состояния равновесия появляется первая критическая точка, причем, как нетрудно видеть, это будет критическая точка второго порядка. Действительно, первая производная  $dp/df$ , определяющая в данном случае модуль упругости материала, будет непрерывной функцией, а вторая производная  $d^2p/df^2$  делает (теоретически) в этом месте скачок (так как здесь находитесь стык между прямой и кривой). Фактически (для реального материала) скачка нет, переход будет постепенным, но третья производная примет в этом месте очень большие значения, что является определением

для критической точки второго порядка. Вторую критическую точку отметим при переходе через предел упругости материала, третью — при переходе к площадке текучести, четвертую (первого порядка) — при переходе от площадки текучести к зоне упрочнения. Предельному состоянию конструкции соответствует образование шейки, а разрушению — разрыв.

2. Рассмотрим сжатую двухстержневую систему (см. рис. 44), подробно проанализированную в § 2 гл. 3. После перехода в состояние, показанное на рис. 44, поз. 4, эта система превратится в двухстержневую растянутую систему, так же подробно описанную в § 2 гл. 3. Для получения полной кривой состояния равновесия совместим кривую состояния сжатой системы (кривая  $P_{IV}$  рис. 45) с кривой состояния растянутой системы (кривая  $P_{IV}$  рис. 38). В результате получим кривую, изображенную на рис. 56, в. Она имеет три предельных состояния: два — соответствующих максимуму и одно — соответствующее минимуму. Аналогичный вид имеют кривые состояния для пологих оболочек, сжатых и изгибаемых поперечной нагрузкой, как это будет показано ниже. Отметим еще раз, что первое предельное состояние может наступить при малых деформациях.

3. Изображенные на рис. 52, 54 кривые есть по существу кривые состояния для различных видов конструкций (растянутого кольца, пластинки, оболочки и т. д.).

Из всего сказанного следует, что критические и предельные состояния конструкции могут возникать в результате различных причин, из которых самые важные следующие:

1) изменение геометрической формы и размеров конструкции [как это наблюдается со сжатой двухстержневой системой или с растянутым кольцом (рис. 52)];

2) изменение физических свойств материала (см. рис. 17);

3) потеря устойчивости конструкции;

4) возникновение новых связей (см. рис. 1) или уничтожение старых;

5) изменение характера нагрузки.

Чрезвычайно важно то обстоятельство, что некоторые характеристики и свойства конструкции не изменяются или мало изменяются при переходе ее из одного состояния в другое — они являются как бы инварианта-

ми кривой состояния равновесия. Так, например, масса конструкции не изменяется, а объем материала изменяется очень мало. Для тонких балок закон плоских сечений применим при любых деформациях. То же относится к гипотезе Кирхгофа — Лява для пластинок и оболочек. Наличие этих (и других) инвариантных свойств облегчает исследование конструкции на различных этапах ее работы.

Важным свойством кривой состояния равновесия является также то, что энергия деформации при увеличении параметра перемещения непрерывно возрастает, достигая наибольшего значения к моменту разрушения. На малых (или, точнее, бесконечно малых) участках, расположенных около точек, соответствующих предельным состояниям, энергия становится линейной функцией параметра перемещения. Во многих случаях дважды (геометрически и физически) нелинейной системы ее энергия деформации может быть представлена (по крайней мере с достаточной точностью), как и в случае линейной системы, квадратичной формой. Эти свойства функции энергии могут быть положены в основу приближенных методов расчета нелинейных систем.

## ГЛАВА 4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИНОК И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

### 1. Основные гипотезы

В этой главе будут рассмотрены основные гипотезы и вытекающие из них уравнения нелинейной теории пластинок и пологих оболочек. Соотношения между толщинами и пролетами определяются пределами применимости гипотезы Кирхгофа — Лява, которая в нелинейной теории формулируется так же, как и в линейной теории пластинок (оболочек): нормали к срединной поверхности, прямые до деформации, остаются прямыми и после деформации. Однако в нелинейной теории эту гипотезу лучше интерпретировать в другом смысле, более правильно отражающем сущность принятых допущений. Отнесем плиту (оболочку) к прямоугольной системе координат  $x, y, z$  (рис. 58), причем ось  $z$  направим перпендикулярно срединной поверхности плиты (оболочки). Пе

перемещения любой точки  $A$  есть функции трех координат, их можно разложить в ряд Маклорена по координате  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z) = u_0(x, y, 0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0} z^2 + \dots; \\ v &= v(x, y, z) = v_0(x, y, 0) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_{z=0} z^2 + \dots; \\ w &= w(x, y, z) = w_0(x, y, 0) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_{z=0} z^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Сущность допущений Кирхгофа — Лява состоит в том, что в первых двух разложениях (4.1) для  $u$  и  $v$  удерживаются два члена, а в третьем (для  $w$ ) — один. Кроме того, в линейной теории принимают первые члены в первых двух разложениях равными нулю; в нелинейной теории этого сделать нельзя. Итак, первое допущение: допускаем, что

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z) = u_0(x, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} z; \\ v &= v(x, y, z) = v_0(x, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} z; \\ w &= w_0(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где производные  $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}$  и  $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0}$  зависят только от  $x$  и  $y$  и не зависят от  $z$ .

Второе допущение состоит в том, что в выражениях для деформаций (1.8) мы будем пренебрегать значениями квадратов производных перемещений  $u$  и  $v$  по сравнению с квадратами производной перемещения  $w$ . Поэтому вместо

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right]$$

будем писать

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2;$$

Для обоснования этого предположения рассмотрим рис. 22, на котором изображена консольная балка, изгибаемая на конце моментом  $M$ .

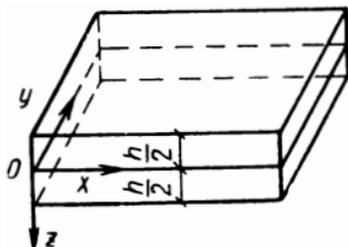


РИС. 58

Изогнутая ось балки в этом случае будет представлять дугу окружности с радиусом  $\rho$ . Из рисунка видно, что перемещения  $u(x)$  и  $w(x)$  в произвольной точке, расположенной на расстоянии  $x$  от левого конца, можно записать следующим образом, согласно формулам (3.3) и (3.4):

$$u = x - \rho \sin \frac{x}{\rho}; \quad (4.3)$$

$$w = \rho \left(1 - \cos \frac{x}{\rho}\right) = 2\rho \sin^2 \frac{x}{2\rho}.$$

При выводе этих формул мы предполагали, что ось стержня не растягивается.

Дифференцируя эти выражения по  $x$ , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \cos \frac{x}{\rho} = 2 \sin^2 \frac{x}{2\rho} = \frac{w}{\rho}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \sin \frac{x}{\rho}, \quad (4.4)$$

или

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial x}} = 2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2\rho}}{\sin \frac{x}{\rho}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2\rho}. \quad (4.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать деформации при которых кривизна изогнутой оси мала и  $\rho$  велика.

При этих условиях можно принять  $\sin \frac{x}{2\rho} \approx \frac{x}{2\rho}$  и  $\operatorname{tg} \frac{x}{2\rho} \approx$

$$\approx \frac{x}{2\rho}.$$

Принимая это во внимание, из второй формулы (4.3) получим:  $\rho \approx x^2/2w$ , или с учетом, что при  $x=l$   $w =$  (см. рис. 22),

$$\rho = l^2/2f. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.5) и заменяя тангенс углом получим:

$$\left( \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial x}} \right)_{x=l} \approx \frac{f}{l}. \quad (4.7)$$

Это означает, что для балки наибольшее значение отношения производных  $u$  и  $w$  имеет порядок отношения

наибольшего прогиба к пролету. Таким образом, если рассматривать малые прогибы (по отношению к пролету), то очевидно, что квадратами производных  $(du/dx)^2$  и  $(dv/dx)^2$  по сравнению с  $(dw/dx)^2$  можно пренебречь. Из формулы (4.7) следует, что при прогибах, сравниваемых с пролетом, этого делать нельзя. Но в дальнейшем мы будем рассматривать прогибы, сравнимые не с пролетом, а с толщиной пластины (оболочки) и во всяком случае меньшие, чем  $0,1 l$ . Этот вывод получен для балки. Для пластинок (или оболочек) соотношение сохранится.

В рассматриваемом случае консольной балки величину  $f$  определяем через момент  $M$  и напряжения  $\sigma$  по формуле

$$f = \frac{Ml^3}{2EI} = \frac{\sigma l^3}{Eh}; \quad l^2 = fh \frac{E}{\sigma},$$

где  $I = bh^3/12$  — момент инерции;  $E$  — модуль упругости.

Возведя (4.7) в квадрат и подставляя в него только что записанное выражение для  $l^2$ , получим:

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \frac{f}{h} \frac{\sigma}{E}; \quad (4.8)$$

Наибольшее значение  $\frac{\sigma}{E}$  для распространенных материалов составляет около  $0,001$  ( $10^{-3}$ ). Таким образом, если прогибы соизмеримы с толщиной пластины (оболочки), то квадраты производных продольных перемещений в 1000 раз (на три порядка!) меньше квадрата производной функции прогиба. Отсюда следует, что второе предположение допустимо для прогибов, сравниваемых с толщиной пластинки, и не может быть принято для прогибов, сравниваемых с пролетами пластинок.

Делая те же самые предположения для деформаций  $\epsilon_{yy}$  и  $\epsilon_{xy}$ , выразим второе допущение формулами:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Третье допущение состоит в следующем. Состави выражения для деформаций сдвига  $\epsilon_{xz}$  и  $\epsilon_{yz}$  [см. (1.8)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Последние члены в этих формулах равны нулю, потому что  $w$  не зависит от  $z$  и, следовательно,  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ . В

личины  $\frac{\partial u}{\partial z}$  и  $\frac{\partial v}{\partial z}$ , согласно формуле (4.2), будут равны

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (4.1)$$

Подставляя (4.11) в (4.10) и учитывая только что сделанное замечание о производных  $w$  по  $z$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}; \\ \epsilon_{yz} &= \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

В этих формулах согласно второму предположению третьи и четвертые члены будут малы по сравнению первыми и вторыми. Поэтому, оставаясь в пределах точности второго допущения и учитывая третью формулу (4.2), следует принять:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xz} &\approx \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{\partial w_0}{\partial x}; \\ \epsilon_{yz} &\approx \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Это означает, что значения сдвигов (4.13) по всей толщине пластинки (оболочки) принимают одинаковые и равными этим сдвигам в срединной поверхности.

Таким образом, третье допущение будет состоять в том, что сдвиги (4.13) принимаются незначительными по сравнению с  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  и  $\epsilon_{xy}$ , так что их можно считать равными нулю.

Это допущение в неявном виде связано с гипотезой Кирхгофа.

Из этого допущения следует, что

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = - \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = - \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (4.1)$$

Подставляя (4.14) в (4.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial x} z; \\ v &= v_0(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial y} z; \\ w &= w_0(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Далее, переходя от перемещений к деформациям по формулам (4.9) и опуская, в соответствии с третьей формулой (4.2) индекс 0 у перемещения  $w$ , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Согласно формулам (4.16), деформации нелинейно-упругой пластинки состоят из двух частей: из равномерно распределенных по толщине пластинки деформаций, которые обозначим соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \epsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \epsilon_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

и деформаций, изменяющихся по толщине пластинки по линейному закону:

$$\epsilon_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \quad \epsilon_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \quad \gamma_{xy} = - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \quad (4.18)$$

Таким образом, вместо (4.16) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^0 + \epsilon_x = \epsilon_{xx}^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{yy}^0 + \epsilon_y = \epsilon_{yy}^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{xy}^0 + \gamma_{xy} = \epsilon_{xy}^0 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Вторые члены в формулах (4.19), вычисляемые по формулам (4.18), относятся к линейной теории пластинки, они определяют ее изгиб; первые члены, вычисляемые по формулам (4.17), являются теми дополнительными деформациями, которые вносятся нелинейной теорией в теорию пластинок, они определяют растяжение и сдвиг (не связанные с изгибом пластинки).

**Четвертое допущение** касается зависимостей между напряжениями и деформациями. Как и в линейной теории, будем считать, что каждый слой пластинки (параллельный срединной поверхности) работает в условиях плоского обобщенного напряженного состояния. Это следует из предположения, что  $\sigma_{zz}=0$ ;  $\epsilon_{zz} \neq 0$  и приводит к следующим зависимостям.

1. Для пластинки из линейно-упругого материала:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu_0 \sigma_{yy}); & \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 - \nu_0^2} (\epsilon_{xx} + \nu_0 \epsilon_{yy}); \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu_0 \sigma_{xx}); & \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 - \nu_0^2} (\epsilon_{yy} + \nu_0 \epsilon_{xx}); \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \nu_0) \sigma_{xy}}{E}; & \sigma_{xy} &= G \epsilon_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu_0)} \epsilon_{xy}. \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Для  $\epsilon_{zz}$  на основании четвертой и пятой формул (4.20) получим выражение

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu_0}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu_0}{1 - \nu_0} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}); \quad (4.2)$$

В соответствии с этими формулами и формула (4.19) напряжения в пластинке можно разделить две части:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^0 + \sigma_x; & \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^0 + \sigma_y; \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^0 + \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Первые слагаемые этих формул представляют собой равномерно распределенные по толщине пластинки напряжения. Они связаны с нелинейными членами формул (4.17) и определяют независимое от изгиба растяжение и сдвиг пластинки. В соответствии с формулами (4.1) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= \frac{E}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_{xx}^0 + \nu_0 \varepsilon_{yy}^0); & \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx}^0 - \nu_0 \sigma_{yy}^0); \\ \sigma_{yy}^0 &= \frac{E}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_{yy}^0 + \nu_0 \varepsilon_{xx}^0); & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy}^0 - \nu_0 \sigma_{xx}^0); \\ \sigma_{xy}^0 &= \frac{E}{2(1+\nu_0)} \varepsilon_{xy}^0; & \varepsilon_{xy}^0 &= \frac{2(1+\nu_0)}{E} \sigma_{xy}^0. \end{aligned} \right\} (4.23)$$

Вторые слагаемые формул (4.22) определяют напряжения, изменяющиеся по толщине пластинки по линейному закону. Они определяют изгиб пластинки и описываются линейными членами теории пластинок:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_x + \nu_0 \varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_y + \nu_0 \varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu_0)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} (4.24)$$

Таким образом, в геометрически нелинейной пластинке, сделанной из линейно-упругого («гуковского») материала, напряженно-деформированное состояние пластинки можно разделить на две части: 1) напряжения и деформации растяжения и сдвига пластинки (нелинейные члены, их еще называют «цепными» напряжениями и деформациями) и 2) напряжения и деформации изгиба пластинки (линейные члены).

2. Для физически нелинейной пластинки в соответствии с формулами (2.26 и 2.35) получим аналогичные формулы с заменой  $E$  на  $E_c$  и  $\nu_0$  на  $\nu$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_c} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}); & \varepsilon_{zz} &= -\nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_c} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}); & \sigma_{xx} &= \frac{E_c}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}); \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E_c} \sigma_{xy}; & \sigma_{yy} &= \frac{E_c}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}); & \sigma_{xy} &= \frac{E_c}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}. \end{aligned} \right\} (4.25)$$

В формулах (4.25) в соответствии с (2.27)  $E_c = \sigma_i / \varepsilon_i$ . Учитывая формулы (1.71) для  $\varepsilon_i$  и последнюю формулу (4.25) для  $\varepsilon_{zz}$ , получим:

$$e_i = \frac{1}{1-\nu^2} \times$$

$$\times \sqrt{(1-\nu+\nu^2)(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + (4\nu-\nu^2-1)\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{3(1-\nu)^2}{4}\varepsilon_{xy}^2}. \quad (4.1)$$

Если обозначить:

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}{1-\nu^2}; \quad \mu_2 = \frac{4\nu-\nu^2-1}{1-\nu+\nu^2}; \quad \mu_3 = \frac{3}{4} \frac{(1-\nu)^2}{1-\nu+\nu^2}, \quad (4.2)$$

то вместо (4.26) можно написать

$$e_i = \mu_1 \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2} + \mu_2 \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \mu_3 \varepsilon_{xy}^2. \quad (4.3)$$

В табл. 5 приведены значения коэффициентов  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$  при некоторых значениях  $\nu$ .

Таблица 5

$\nu$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\nu$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
0	1	-1	0,75	0,27	0,96	0	0,
0,155	0,952	-0,44	0,616	0,33	0,99	0,286	0,
0,18	0,95	-0,365	0,59	0,5	1,152	1	0,
0,25	0,96	-0,072	0,52				

## 2. Дифференциальные уравнения геометрически нелинейных пластинок

Рассмотрим пластинку из линейно-упругого материала, для которого зависимости между напряжениями и деформациями выражаются законом Гука в форме (4.20), а зависимости между деформациями и перемещениями записываются уравнениями (4.16). Иными словами, рассмотрим физически линейную и геометрически нелинейную пластинку. Для определения компонент напряженно-деформированного состояния нужно решить систему дифференциальных уравнений. В наиболее простом виде эта система получается, если задача решается смешанным методом — частично в напряжениях, частично в перемещениях. В этом случае решение сводится к определению двух функций: функции напряжений (или усилий) и функции прогибов. Состав

в соответствии с этим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений.

Для составления первого уравнения продифференцируем каждое из выражений (4.16) следующим образом: первое — два раза по  $y$ , второе — два раза по  $x$  и третье — один раз по  $x$  и один раз по  $y$ . В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \left[ \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} z; \right] \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left[ \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^2 \partial x^2} z; \right] \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^2 \partial x} + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Умножим третье уравнение (4.29) на  $-1$  и, сложив все три уравнения, будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (4.30)$$

Обратим внимание на то, что во время этой операции **в результате которой мы получили уравнение (4.30) все линейные члены, содержащие  $z$ , сократились и поэтому уравнение (4.30) можно переписать, заменив общие деформации их нелинейными слагаемыми (4.17):**

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (4.30')$$

Отсюда следует, что составленное нами первое уравнение относится к растяжению и сдвигу и не связано с изгибом.

Далее, выражая деформации через напряжения по формулам (4.23), получим:

$$\frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^0}{\partial y^2} - \nu_0 \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^0}{\partial y^2} - \nu_0 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^0}{\partial x^2} - 2(1+\nu_0) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}^0}{\partial x \partial y} \right] = \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad (4.31)$$

Введем функцию напряжений с помощью следующих выражений:

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy}^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy}^0 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (4.32)$$

Подставив (4.32) в (4.31) и сократив члены, содержащие  $v_0$ , получим:

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Запишем это уравнение в сокращенной форме, удобно для запоминания и общего анализа. Во-первых введем бигармонический оператор:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (4)$$

Кроме того, введем оператор:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

В общем случае будем вставлять различные функции в первый и во второй столбец определителя  $\Delta$ . Например, если в первый столбец подставить некоторую функцию  $\Phi(x, y)$ , а во второй — функцию  $w$ , то получим:

$$\Delta(\Phi, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Заметим, что

$$\Delta(\Phi, w) \neq \Delta(w, \Phi),$$

так как

$$\Delta(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Вычитая из (4.36) выражение (4.37), получим:

$$\Delta(\Phi, w) - \Delta(w, \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Если в первый и во второй столбцы вставить одну и ту же функцию, например  $w$ , то запись примет вид:

$$\Delta(w, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Функция  $w$  описывает изогнутую поверхность пластинки после деформации. Эта поверхность достаточно пологая, поэтому значения ее кривизны можно отождествить со вторыми производными и принять:

$$\frac{1}{\rho_x} = \chi_x \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_y} = \chi_y \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4.40)$$

где  $\rho_x$  и  $\rho_y$  — радиусы кривизны изогнутой поверхности пластинки в плоскостях, перпендикулярных срединной поверхности пластинки до деформации и параллельных соответственно  $x$  и  $y$ ; величины  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  и  $\chi_{xy}$  представляют собой соответствующие значения кривизн и кручения.

После этих замечаний ясно, что величина

$$\Delta(w, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = \chi_x \chi_y - \chi_{xy}^2 \quad (4.41)$$

представляет собой гауссову кривизну поверхности пластинки после деформации.

Умножив обе части выражений (4.32) на  $h$ , будем иметь:

$$h\sigma_{xx}^0 = \frac{\partial^2(\varphi h)}{\partial y^2}; \quad h\sigma_{yy}^0 = \frac{\partial^2(\varphi h)}{\partial x^2}; \quad h\sigma_{xy}^0 = -\frac{\partial^2(\varphi h)}{\partial x \partial y}. \quad (4.42)$$

Очевидно, что в этих формулах величины, стоящие слева, представляют собой усилия в пластинке, которые мы обозначим следующим образом:

$$N_x = h\sigma_{xx}^0; \quad N_y = h\sigma_{yy}^0; \quad N_{xy} = h\sigma_{xy}^0. \quad (4.43)$$

Введем еще понятие о функции усилий:

$$\Phi = \varphi h. \quad (4.44)$$

Тогда из выражений (4.42), (4.43) и (4.44) получаются следующие формулы:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (4.45)$$

После подстановки (4.45), (4.35) и (4.34) в (4.30) получим первое уравнение нелинейной теории пластинок в следующем виде:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\Delta(w, w). \quad (4.46)$$

Это уравнение выражает условия неразрывности деформаций. Его можно прочитать следующим образом:

бигармонический оператор над функцией усилий, поделенный на жесткость растяжения пластинки или продольную жесткость, равняется изменению гауссовой кривизны. Если  $Eh = \infty$ , т. е. пластинка нерастяжима, то изгиб возможен, но без изменения гауссовой кривизны, значит в этом случае пластинку можно изогнуть по цилиндрической или конической поверхности. Если изгиб отсутствует, то уравнение (4.46) превращается в бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0; \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (4.47)$$

Для составления второго уравнения рассмотрим отдельно напряженно-деформированное состояние изгиба описываемое линейными частями напряжений и деформаций [формулы (4.18) и (4.24)], и растяжение и сдвиг пластинки, описываемые нелинейными членами [формулы (4.17) и (4.23)].

В случае изгиба пластинки имеем трехмерное напряженное состояние, определяемое напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , для которых (при отсутствии массовых сил) можно написать уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

В этих уравнениях мы предполагаем, что все напряжения отличны от нуля. На первый взгляд это противоречит четвертому допущению, согласно которому каждый слой пластинки работает в условиях плоского обобщенного напряженного состояния, когда  $\sigma_z = 0$  и  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Однако это противоречие устраняется, если сделать следующее уточнение: предполагаем, что  $\sigma_z$  мало по сравнению с  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и поэтому в формулах закона Гука оно опускается, отсюда получаются формулы (4.20) и (4.24). Но в уравнениях равновесия это сделать нельзя, иначе нарушилось бы равновесие бесконечно малого элемента пластинки, работающего в условиях трехмерного напряженного состояния. Те же замечания относятся к касательным напряжениям  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . Соответ-

ствующие деформации сдвига  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$  принимают равными нулю, так как их влияние на продольные деформации невелико [что вытекает (неявно) из гипотезы Кирхгофа]. Но, переходя с помощью закона Гука от деформаций к напряжениям, в уравнениях равновесия (4.48) нужно считать (для сохранения равновесия бесконечно малого элемента), что величины  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  отличны от нуля. Эти соображения аналогичны тем, на которых основывается применение гипотезы плоских сечений в теории изгиба балок.

Из первых двух уравнений (4.48) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Пользуясь формулами (4.18) и (4.24), выразим производные касательных напряжений (4.49) через прогиб  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{E}{1-\nu_0^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) z; \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \frac{E}{1-\nu_0^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) z. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Интегрируя по  $z$ , найдем:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{Ez^2}{2(1-\nu_0^2)} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + f_1(x, y); \\ \tau_{yz} &= \frac{Ez^2}{2(1-\nu_0^2)} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + f_2(x, y). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Произвольные функции  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  определим из условия, что при  $z = \pm \frac{h}{2}$  касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю, так как обе поверхности пластинки (верхняя и нижняя) считаются свободными от касательных нагрузок. Составив это условие, получим

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= -\frac{Eh^2}{8(1-\nu_0^2)} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ f_2(x, y) &= -\frac{Eh^2}{8(1-\nu_0^2)} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Вставляя (4.52) в (4.51), получим следующие формулы для касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1-\nu_0^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu_0^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \right\}$$

Согласно третьему уравнению (4.48),

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}.$$

Вставляя в него значения касательных напряжений будем иметь:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\nu_0^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right).$$

Вводя бигармонический оператор (4.34) и интегрируя (4.55) по  $z$ , получим:

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu_0^2)} \left( \frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^2 \nabla^2 w + f_3(x, y).$$

Пусть к верхней поверхности пластинки при  $z = h$  (рис. 59) приложена нагрузка  $q_n(x, y)$ , так что

$$(\sigma_z)_{z=h} = -q_n(x, y).$$

Используя это условие из уравнения (4.56), получим

$$-q_n(x, y) = -\frac{Eh^3}{24(1-\nu_0^2)} \nabla^2 \nabla^2 w + f_3(x, y)$$

или

$$f_3(x, y) = -q_n(x, y) + \frac{Eh^3}{24(1-\nu_0^2)} \nabla^2 \nabla^2 w.$$

Вставляя (4.58) в (4.56), определим  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu_0^2)} \left[ \frac{h^3}{12} + \frac{h^3}{4} z - \frac{z^3}{3} \right] \nabla^2 \nabla^2 w - q_n(x, y).$$

Предположим, что на нижней поверхности пластинки при  $z = +\frac{h}{2}$  нагрузка  $q_n = 0$ . Это условие приводит к уравнению

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu_0^2)} \nabla^2 \nabla^2 w - q_n(x, y) = 0. \quad (4.60)$$

Обозначим цилиндрическую жесткость пластинки

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_0^2)}. \quad (4.61)$$

И вместо (4.61) можем окончательно написать дифференциальное уравнение изгиба линейно-упругой пластинки:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q_n(x, y). \quad (4.62)$$

Выражение (4.62) называется уравнением Софи Жермен. Если бы для определения  $f_3(x, y)$  были использованы другие условия, т. е. если бы нагрузка на пластинке располагалась не на верхней ее поверхности (как принято в нашем выводе), а на любой другой (например, на нижней, на срединной и т. д.), то это не отразилось бы на форме уравнения (4.62).

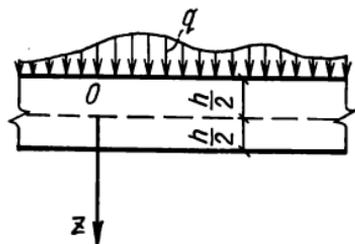


РИС. 59

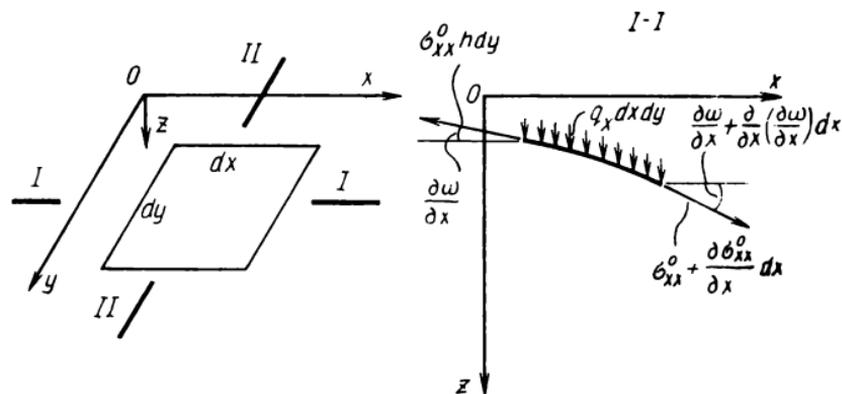


РИС. 60

Определим теперь нагрузку  $q_p$ , находящуюся в равновесии с напряжениями растяжения и сдвига, описываемыми формулами (4.23). Для этого, отбросив напряжения изгиба, рассмотрим равновесие бесконечно малый элемент, нагруженного напряжениями  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$  и  $\sigma_{xy}^0$  (рис. 60). На рисунке этот элемент изображен в положении до деформации. Рассечем его плоскостью, параллельной плоскости  $xOz$  (сечение  $I-I$ ), и изобразим в сечении форму элемента и силы, на него действующие после деформации.

Разложим нагрузку  $q_p$ , находящуюся в равновесии с напряжениями  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$  и  $\sigma_{xy}^0$ , на три составляющие:  $q_x$  и  $q_{xy}$ , так что

$$q_p = q_x + q_y + q_{xy}. \quad (4.24)$$

По смыслу этой формулы составляющая  $q_x$  уравновешивается напряжениями  $\sigma_{xx}^0$ , составляющая  $q_y$  — напряжениями  $\sigma_{yy}^0$  и составляющая  $q_{xy}$  — напряжениями  $\sigma_{xy}^0$ . В соответствии с этим на рис. 60 (сечение  $I-I$ ) изображена составляющая  $q_x$ .

Проектируя все силы на ось  $z$ , получим:

$$-\sigma_{xx} h dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) h dy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) + q_x dx dy = 0. \quad (4.25)$$

При составлении этого уравнения синусы углов между их малости приравнялись самим углам.

Раскрывая скобки, отбрасывая бесконечно малые величины, содержащие произведения трех дифференциалов, и сокращая остальные величины на  $dx dy$ , получим:

$$\left( \sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) h + q_x = 0. \quad (4.26)$$

Для выяснения относительного значения двух величин, стоящих в скобках, спроектируем все силы на  $x$ . После сокращения на  $h dy$  получим:

$$-\sigma_{xx}^0 \cos \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \sigma_{xx}^0 + \frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} dx \right) \cos \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) = 0. \quad (4.27)$$

Но, в соответствии со сделанными допущениями, следует принять:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) &= \cos \frac{\partial w}{\partial x} \cos \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \sin \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \sin \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \\ &= \cos \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Подставляя (4.67) в (4.66), отбрасывая члены, содержащие квадраты дифференциалов, и полагая  $\cos \frac{\partial w}{\partial x} = 1$ , получим:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} = \sigma_{xx}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.68)$$

Сопоставляя (4.68) и (4.65), очевидно, будем иметь:

$$h\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + q_x = 0. \quad (4.69)$$

Но в соответствии с нашей системой допущений мы должны принять, что квадрат первой производной функции прогиба значительно меньше единицы. Тогда вместо (4.64) будем иметь:

$$q_x = -h\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.70)$$

Если сделать разрез  $II-II$  (рис. 60<sup>a</sup>) и выполнить аналогичные выкладки, то получим:

$$q_y = -h\sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.71)$$

Для определения величины  $q_{xy}$  рассмотрим бесконечно малый элемент со сторонами  $dx$ ,  $dy$  и действующими на него сдвигающими силами (рис. 61). Проектируя все силы на ось  $z$ , получим:

$$\begin{aligned} & -\sigma_{yx}^0 h dy \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\sigma_{yx}^0 + \frac{\partial \sigma_{yx}^0}{\partial x} dx\right) h dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx\right) - \\ & -\sigma_{xy}^0 h dx \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\sigma_{xy}^0 + \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial y} dy\right) \times \\ & \times h dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy\right) + q_{xy} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Раскрываем скобки, отбрасываем члены, содержащие произведения трех дифференциалов, и сокращаем на  $dx dy$ :

$$h \left( \sigma_{yx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}^0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q_{xy} = 0. \quad (4.73)$$

Проектируя все силы на оси  $x$  и  $y$ , выражая производные касательных напряжений через напряжения и производные прогибов [аналогично формуле (4.68)] и

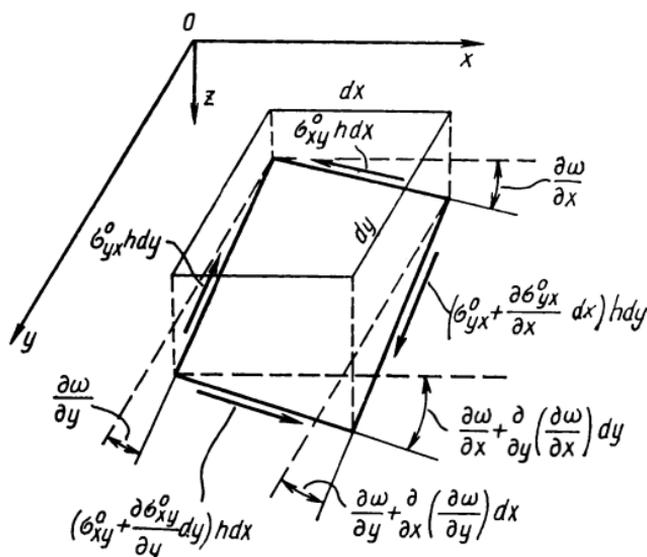


РИС. 61

полагая, что квадраты производных прогибов малы сравнению с единицей, после выкладок получим:

$$q_{xy} = -2h\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.74)$$

Подставляя (4.70), (4.71) и (4.74) в (4.63), определим нагрузку, которая уравнивается «цепными» напряжениями:

$$q_p = -h \left( \sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (4.75)$$

Используя формулы (4.40), выражение (4.75) можно переписать в следующем виде:

$$q_p = -h(\sigma_{xx}^0 \chi_x + \sigma_{yy}^0 \chi_y + 2\sigma_{xy}^0 \chi_{xy}),$$

т. е. нагрузка, уравновешиваемая усилиями, равняется сумме произведений этих усилий на кривизны деформации изгиба.

Складывая (4.75) и (4.62), получим:

$$D\nabla^2\nabla^2w - h\left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) = q_u + q_p = q. \quad (4.77)$$

Здесь

$$q = q_u + q_p \quad (4.78)$$

— общая нагрузка, действующая на плиту.

Используя формулы (4.43) и (4.45), перепишем уравнение (4.77) в следующем виде:

$$D\nabla^2\nabla^2w - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = q. \quad (4.79)$$

Наконец, на основании формул (4.36) и (4.37) получим это уравнение в сокращенном виде:

$$D\nabla^2\nabla^2w - \Delta(w, \Phi) - \Delta(\Phi, w) = q. \quad (4.80)$$

Уравнения (4.46) и (4.80) образуют полную систему дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой позволяет найти две функции: функцию усилий  $\Phi$  и функцию прогибов  $w$ . После определения этих функций вычисляются усилия в плите по формулам (4.45) и изгибающие моменты по формулам:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad M_{xy} = -D(1 - \nu_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \quad (4.81)$$

Положительные направления усилий  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  и моментов  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  показаны на рис. 62.

Формулы (4.81) получим, если, пользуясь выражениями (4.18) и (4.24), составим выражение для моментов относительно координатных осей, например:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_x dz) z = - \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{Ez^2}{1 - \nu_0^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz =$$

$$= - \frac{Eh^3}{12(1 + \nu_0^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

что совпадает с первой формулой (4.81). Аналогично выводим и другие две формулы.

После того как найдены усилия и моменты, определяем напряжения по формулам:

$$\sigma_{xx} = \sigma_x + \sigma_{xx}^0 = \frac{12M_x}{h^3} z + \frac{N_x}{h}; \quad \sigma_{yy} = \frac{N_y}{h} + \frac{12M_y}{h^3} z;$$

$$\sigma_{xy} = \frac{N_{xy}}{h} + \frac{12M_{xy}}{h^3} z. \quad (4.8)$$

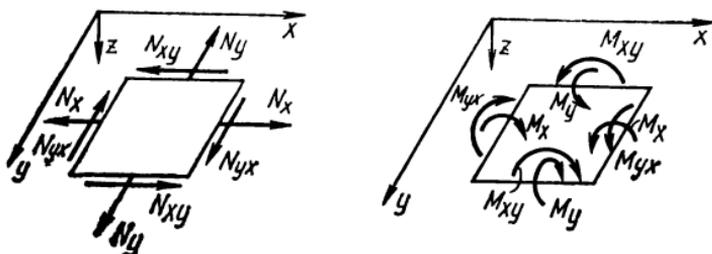


РИС. 62

### 3. Дифференциальные уравнения геометрически нелинейных пологих оболочек

Уравнения (4.46) и (4.80), выведенные в предыдущем параграфе, легко обобщить для случая пологих оболочек. Рассмотрим рис. 63, на котором изображена срединная поверхность пологих оболочек, построенная на прямоугольном плане со сторонами  $a$  и  $b$ . Уравнение срединной поверхности при начальном или нулевом нагружении будем записывать так:

$$F_0 = F_0(x, y). \quad (4)$$

В качестве функции  $F_0$  можно выбрать любую функцию двух координат так, чтобы оболочка была пологой. «Пологой» будем называть оболочку, если в любой точке срединной поверхности: 1) существуют вторые производные функции  $F_0$  и 2) если значения этих производных можно отождествить с кривизнами поверхности оболочки, т. е. если можно принять:

$$\frac{1}{R_x} = k_x \approx \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{R_y} = k_y \approx \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}; \quad k_{xy} \approx \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}. \quad (5)$$

Здесь  $R_x$  и  $R_y$  — радиусы кривизн линий пересечения срединной поверхности оболочки с плоскостями, параллельными координатным плоскостям соответствующих осей  $xOz$  и  $yOz$ ;  $k_x$ ,  $k_y$  — соответствующие кривизны;  $k_{xy}$  — кривизна скрутки.

кручение срединной поверхности. Из формулы (4.84) следует, что гауссова кривизна срединной поверхности может быть определена по формуле

$$\Gamma_i = k_x k_y - k_{xy}^2 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} - \left( \frac{d^2 F_0}{\partial x \partial y} \right) = \Delta(F_0, F_0). \quad (4.85)$$

В соответствии со знаком гауссовой кривизны различают оболочки (рис. 64) положительной (а), нулевой (б) и отрицательной кривизны (в).

Обозначим наибольший подъем срединной поверхности над опорным планом через  $f_0$  (см. рис. 63). Под действием поперечной нагрузки  $q(x, y)$  полая оболочка получит вертикальные перемещения  $w(x, y)$ , которые называются прогибами оболочки. Согласно обычным правилам, эти перемещения параллельны оси  $z$ . Но в тех случаях, когда это необходимо, величины  $w(x, y)$  будем направлять по нормали к срединной поверхности оболочки, учитывая, что косинус угла между вертикалью и нормалью незначительно отличается от единицы.

Функцию  $F(x, y)$ , описывающую срединную поверхность оболочки после приложения нагрузки  $q(x, y)$ , можно выразить через  $F_0(x, y)$  и функцию прогибов  $w(x, y)$  следующим образом:

$$F(x, y) = F_0(x, y) + w(x, y). \quad (4.86)$$

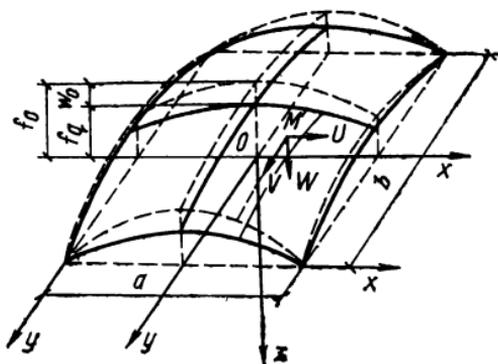


РИС. 63

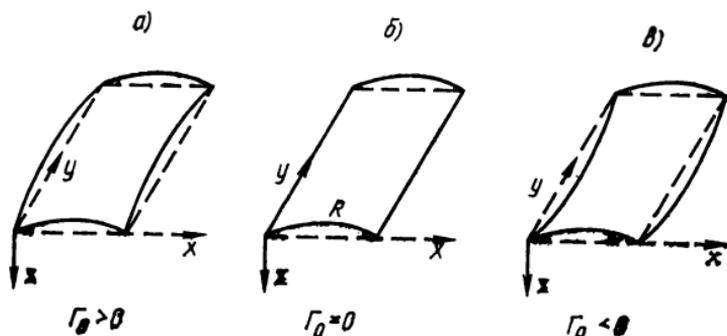


РИС. 64

Кривизны этой поверхности будем определять по формулам:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k_x + \chi_x; \\ K_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k_y + \chi_y; \\ K_{xy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = k_{xy} + \chi_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.87)$$

[При составлении этих формул использованы обозначения формул (4.40) и (4.84)].

Гауссова кривизна  $\Gamma$  деформированной срединной поверхности в соответствии с принятыми допущениями равна

$$\Gamma = K_x K_y - K_{xy}^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = \Delta(F, F). \quad (4.88)$$

Если в формулу (4.88) подставить (4.86) и использовать обозначения формул (4.35), (4.36) и (4.37), то получим:

$$\Delta(F, F) = \Delta(F_0, F_0) + \Delta(w, w) + \Delta(F_0, w) + \Delta(w, F_0). \quad (4.89)$$

При составлении разрешающих дифференциальных уравнений используем полученные ранее аналогичные уравнения для пластинки.

Деформации оболочки, так же как и деформации пластинки, можно разложить на деформации  $\epsilon_{xx}^0, \epsilon_{yy}^0, \epsilon_{xy}^0$ , равномерно распределенные по толщине оболочки, и на деформации изгиба  $\epsilon_x, \epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ , распределенные по толщине оболочки по линейному закону. Для определения первой группы деформаций используем формулу (4.17), но добавим к ним некоторые дополнительные члены, связанные с начальной кривизной оболочки. Рассмотрим в разрезе элемент срединной поверхности оболочки со сторонами  $dx, dy$  (рис. 65), причем разрез сделан в направлении оси  $x$ . До деформации длина элемента была  $dx$ , после деформации длина элемента изменится, во-первых, за счет растяжения, что учитывается формулами (4.17), и, во-вторых, за счет перемещения  $w$  по направлению радиуса. Это по-

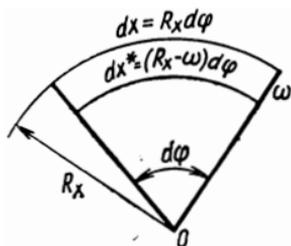


РИС. 65

следнее изменение длины приведет к появлению дополнительной деформации  $\epsilon_{xx}^*$ , которую нетрудно определить из рис. 65:

$$\epsilon_{xx}^* = \frac{dx^* - dx}{dx} = \frac{(R_x - w) d\varphi - R_x d\varphi}{R_x d\varphi} = -\frac{w}{R_x}; \quad (4.90)$$

Формулу (4.90) полезно сравнить с первой формулой (4.4): принимая во внимание обозначение (4.84) и добавляя слагаемое  $\epsilon_{xx}^*$  к правой части формулы (4.17), получим:

$$\epsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_x w. \quad (4.91)$$

По аналогии

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_y w; \\ \epsilon_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2k_{xy} w. \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

Что касается изгибных деформаций, то для пластинки их определяли по формулам (4.18), которые перепишем, используя обозначения (4.40), в таком виде:

$$\epsilon_x = \chi_x z; \quad \epsilon_y = -\chi_y z; \quad \gamma_{xy} = -2\chi_{xy} z. \quad (4.93)$$

Но, согласно рис. 65, кривизны также изменятся вследствие уменьшения радиуса кривизны оболочки, вызываемого перемещением  $w$ . Например, изменение  $\chi_x$ , как это следует из рис. 65, будет равно:

$$\Delta\chi_x = \frac{1}{R_x - w} - \frac{1}{R_x} = \frac{w}{R_x(R_x - w)}; \quad (4.94)$$

Для определения величины  $\chi_x$  после деформации, которую обозначим  $\chi_x^*$ , следует к первой формуле (4.40) добавить (4.94):

$$\chi_x^* = \chi_x + \Delta\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_x(R_x - w)}; \quad (4.95)$$

Учитывая, что, согласно принятым допущениям,

$$w \ll R_x, \quad (4.96)$$

вместо (4.95) можно написать

$$\chi_x^* \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_x^2}; \quad (4.97)$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}\chi_y^* &\approx \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\omega}{R_y^2}; \\ \chi_{xy}^* &\approx \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\omega}{R_x R_y}.\end{aligned}\quad (4.98)$$

Следовательно, в общем случае в соответствии с формулами (4.93), (4.97), (4.98) деформации изгиба следует определять по формулам:

$$\varepsilon_x = -\chi_x^* z; \quad \varepsilon_y = -\chi_y^* z; \quad \gamma_{xy} = -2\chi_{xy}^* z. \quad (4.99)$$

Однако для пологих оболочек при некоторых достаточно часто встречающихся условиях формулы (4.98) можно заменить формулами (4.93). Перепишем формулу (4.95) в следующем виде:

$$\chi_x^* = \frac{1}{\rho_x} + \frac{\omega}{R_x^2} = \frac{1}{\rho_x} \left( 1 + \frac{\omega}{R_x} \frac{\rho_x}{R_x} \right). \quad (4.99')$$

Согласно неравенству (4.96),  $\frac{\omega}{R_x} \ll 1$ . Что касается отношения  $\frac{\rho_x}{R_x}$ , то оно при некоторых состояниях деформации оболочки (например, при переходе из одного критического состояния в другое) может быть значительно больше единицы. Однако анализ показывает, что если исключить особые состояния некоторых видов оболочек (об этом подробнее будет сказано ниже), то второй член, стоящий в скобках правой части формулы (4.99'), будет мал по сравнению с единицей. Рассматривая прежде всего этот случай, будем в дальнейшем определять деформации изгиба по формулам (4.93), оставив формулы (4.97) и (4.98) для особого анализа.

При выводе первого уравнения неразрывности деформаций можно ограничиться, как это следует из ранее сделанного вывода этого уравнения для плиты, рассмотрением только деформаций первой группы. Дифференцируя уравнение (4.91) дважды по  $y$ , первое уравнение (4.92) дважды по  $x$  и второе уравнение (4.92) дважды по  $x$  и  $y$  и учитывая, что кривизны  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_{xy}$  могут быть переменными величинами, получим:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_{xx}^0}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \\
&- k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial k_x}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} - \frac{\partial k_x}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \\
&- k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial k_y}{\partial x} - w \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} - \frac{\partial k_y}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}; \\
\frac{\partial^2 e_{xy}^0}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
&- 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} - 2w \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

Умножая третье уравнение (4.100) на  $-1$ , заменяя кривизны их значениями по формулам (4.84) и складывая все три уравнения, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\
&- k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \quad (4.101)$$

Далее поступим так же, как и при выводе соответствующего уравнения для пластинки: по формулам (4.23) заменим деформации напряжениями, а по формулам (4.32), (4.43) и (4.45) напряжения выразим через функцию усилий  $\Phi$ . Используя, кроме того, обозначение для операторов (4.34) и (4.35), окончательно получим первое уравнение неразрывности деформаций в следующем виде:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\Delta(w, w). \quad (4.102)$$

Используя формулу (4.86) и (4.89), выразим прогиб  $w$  и начальные кривизны через функции  $F$  и  $F_0$ , после чего уравнение (4.102) переписется в виде

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \Delta(F_0, F_0) - \Delta(F, F). \quad (4.103)$$

В соответствии с формулами (4.85) и (4.88) правую часть этого уравнения можно рассматривать как разность между гауссовыми кривизнами оболочки до и после деформации. Таким образом, первое уравнение можно прочитать так: бигармонический оператор от функции усилий, поделенный на жесткость растяжения, равен изменению гауссовой кривизны оболочки. Отсюда следует, что нерастяжимая пологая оболочка ( $Eh = \infty$ ) деформируется без изменения гауссовой кривизны.

Для составления второго уравнения, аналогичного уравнению (4.79) для пластинки, поступим следующим образом. Рассмотрим более внимательно механический смысл уравнения (4.76). Из него вытекает, что нагрузка, которая уравнивается первой группой напряжений, равномерно распределенных по толщине оболочки, равна сумме произведений усилий на кривизны деформированной срединной поверхности пластинки. Но оболочка имеет, кроме того, начальные кривизны, поэтому, используя формулу (4.76) для определения  $q_p$ , вместо  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  и  $\chi_{xy}$  подставим значения кривизн деформированной срединной поверхности оболочки, т. е. кривизны  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{xy}$ , определяемые по формулам (4.87). Сделав это, получим:

$$q_p = -h \left[ \sigma_{xx}^0 (k_x + \chi_x) + \sigma_{yy}^0 (k_y + \chi_y) + 2\sigma_{xy}^0 (k_{xy} + \chi_{xy}) \right]. \quad (4.104)$$

Складывая (4.62) и (4.104) и вводя функцию усилий, согласно выражениям (4.45), получим дифференциальное уравнение равновесия в виде

$$D\nabla^2\nabla^2\omega - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \left( k_x + \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \left( k_y + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \left( k_{xy} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} \right) = q. \quad (4.105)$$

Если использовать обозначения (4.84) для кривизн  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_{xy}$ , а также формулу (4.35) для оператора, то, учитывая формулу (4.86), вместо (4.105) получим:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega = q + \Delta(\Phi, F) + \Delta(F, \Phi). \quad (4.106)$$

Если в уравнении (4.106) принять  $D=0$ , то получим уравнение равновесия для безмоментной оболочки:

$$q + \Delta(\Phi, F) + \Delta(F, \Phi) = 0, \quad (4.107)$$

или, переходя от функции усилий непосредственно к усилиям,

$$N_x k_x + N_y k_y + 2N_{xy} k_{xy} + q = 0. \quad (4.108)$$

При  $k_{xy}=0$  это уравнение превращается в уравнение Лапласа:

$$N_x k_x + N_y k_y + q = 0. \quad (4.109)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи разрешающей системы уравнений для полой оболочки, состоящей из уравнений (4.102) и (4.105). Если срединная поверхность очерчена по сфере с радиусом  $R$ , то

$$k_x = k_y = \frac{1}{R}; \quad k_{xy} = 0 \quad (4.110)$$

и соответственно вместо (4.102) и (4.105) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{1}{R} \nabla^2 w + \Delta(w, w) &= 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 \Phi - \Delta(w, \Phi) - \Delta(\Phi, w) &= q. \end{aligned} \quad (4.111)$$

В случае цилиндрической оболочки (см. рис. 64):

$$k_x = \frac{1}{R}; \quad k_y = 0; \quad k_{xy} = 0, \quad (4.112)$$

и соответственно система уравнений записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \Delta(w, w) &= 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \Delta(\Phi, w) - \Delta(w, \Phi) &= q. \end{aligned} \right\} \quad (4.113)$$

Если в уравнениях (4.102) и (4.105) отбросить нелинейные члены, то получим разрешающую систему линейной теории оболочек:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= q. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Аналогично системы уравнений (4.111) и (4.113) при отбрасывании нелинейных членов переходят в линейные уравнения для сферической и цилиндрической оболочек.

Можно высказать некоторые качественные соображения о работе геометрически нелинейной оболочки. Допустим, в первом приближении, что

$$\Phi = A(q) \omega, \quad (4.115)$$

где  $A(q)$  — функция только одной нагрузки  $q$ . Подставляя (4.115) в любое из вышеприведенных систем уравнений, например, в уравнение (4.111), получим:

$$\begin{aligned} \frac{A}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \omega + \frac{1}{R} \nabla^2 \omega + \Delta(\omega, \omega) &= 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{A}{R} \nabla^2 \omega - 2A \Delta(\omega, \omega) &= q, \end{aligned} \quad (4.116)$$

Исключив отсюда нелинейный член  $\Delta(\omega, \omega)$ , получим:

$$\left( \frac{A}{Eh} + \frac{D}{2A} \right) \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{1}{R} \nabla^2 \omega = q. \quad (4.117)$$

Примем обозначение:

$$\frac{A}{Eh} + \frac{D}{2A} = D^*(q). \quad (4.118)$$

Величина  $D^*$  составлена из жесткостей  $Eh$  и  $D$ . Ее можно поэтому назвать комбинированной жесткостью. Очевидно, что эта механическая характеристика зависит от нагрузки  $q$ .

Подставляя (4.118) в (4.117), получим:

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{1}{R} \nabla^2 \omega = q. \quad (4.119)$$

Для пластинки при  $R = \infty$  уравнение (4.119) принимает вид:

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 \omega = q. \quad (4.120)$$

Уравнения (4.119) и (4.120) линейны (относительно координат). Таким образом, геометрически нелинейную оболочку или пластинку можно рассматривать как линейную систему, у которой цилиндрическая жесткость и жесткость растяжения заменены переменной характеристикой жесткости (4.118), зависящей от нагрузки. Это соображение можно использовать для приближенных расчетов.

#### 4. Граничные условия

Интегрирование полученных систем нелинейных дифференциальных уравнений для пластинки и оболочек нужно выполнить так, чтобы были удовлетворены граничные условия. Поскольку в уравнения входят две неизвестные функции  $\Phi$  и  $w$ , для них следует поставить граничные условия. Последние могут быть заданы либо в усилиях (напряжениях) — статические условия, либо в перемещениях — геометрические условия.

При определении числа граничных условий в каждой точке контура пластинки (или оболочки) будем исходить из гипотезы прямых нормалей. Положение любой точки контура после деформации определяется тремя перемещениями  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Если известно значение этих функций в каждой точке контура срединной поверхности, то известно и положение, и форма контурной линии после деформации. Проведем плоскость, перпендикулярную контурной линии до деформации (нормальную плоскость), и построим в ней нормаль к линии контура и к срединной поверхности пластинки (или оболочки). После деформации эта плоскость переместится, а вместе с ней переместится и нормаль. Это перемещение определится функциями  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Но, кроме того, нормаль может повернуться на некоторый угол, оставаясь, согласно принятой гипотезе, перпендикулярной срединной поверхности после деформации. Таким образом, для каждой точки контура должны быть заданы четыре граничные условия. Это вполне соответствует математической структуре системы разрешающих уравнений, которые являются дифференциальными уравнениями четвертого порядка относительно каждой функции.

Геометрические граничные условия в простейших случаях задаются в виде связей, накладываемых на перемещения точки контура срединной поверхности и нормали к ней.

Схемы этих связей, лежащих в нормальной плоскости (в плоскости, перпендикулярной контуру до дефор-

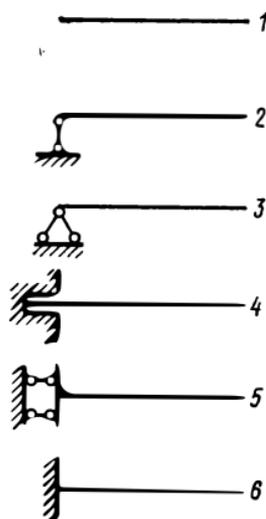


РИС. 66

мации), изображены на рис. 66: 1 — свободный конец — полное отсутствие связей; 2 — шарнирно-подвижная опора, запрещающая вертикальные перемещения; 3 — шарнирно-неподвижная опора, запрещающая вертикальные и горизонтальные перемещения; 4 — заделка, запрещающая вертикальные перемещения, и поворот, разрешающая горизонтальные перемещения; 5 — заделка, запрещающая поворот и горизонтальные перемещения, разрешающая вертикальные перемещения; 6 — жесткая заделка — все виды перемещений запрещены.

Поскольку пластинка (оболочка) является пространственной конструкцией, то на связи, лежащие в нормальной плоскости, нужно наложить связи, лежащие в плоскости, ей перпендикулярной, они могут быть тех же типов, что и показанные на рис. 66. Таким образом, в случае пространственной конструкции комбинаций простейших связей может быть значительное число.

Опорные связи могут существовать также в виде упругих связей, например в тех случаях, когда пластинка (оболочка) опирается на систему упругих балок или иную упругую конструкцию. Кроме того, могут быть заданы фиксированные значения взаимных смещений краев или же отдельных точек. Все это свидетельствует о большом разнообразии геометрических граничных условий.

Статические граничные условия задают значениями усилий (моментов, поперечных сил, продольных и сдвигающих усилий), действующих на контуре пластинки или оболочки.

Граничные условия обоих типов могут быть заданы не только на граничном контуре, но и по любой линии или в системе точек, расположенных в произвольном месте срединной поверхности. Граничные условия для функций прогибов  $w$  задают так же, как и в линейной теории пластинок или оболочек. Выпишем эти уравнения, относящиеся к сторонам  $x=0$ ;  $x=a$  (аналогично записываются граничные условия и по другим сторонам).

1. Край опирается на шарнирно-подвижную или шарнирно-неподвижную опору (см. поз. 2 и 3 рис. 66). В этом случае

$$w = 0; \quad M_x = 0. \quad (4.121)$$

Второе условие в соответствии с первой формулой (4.81) можно написать в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4.122)$$

2. Край свободный (см. поз. 1 рис. 66):

$$M_x = 0; \quad Q_x^* = 0. \quad (4.123)$$

Здесь  $Q_x^* = Q + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$  — так называемая обобщенная поперечная сила.

Условия (4.123) можно выразить в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu_0) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}. \quad (4.124)$$

3. Край полностью зашпелен или же частично зашпелен, так что возможны горизонтальные перемещения (см. поз. 6 и 4 рис. 66):

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (4.125)$$

4. Край зашпелен против поворота, так что возможны вертикальные перемещения (см. поз. 5 рис. 66):

$$Q_x^* = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (4.126)$$

Первое условие можно также записать в перемещениях [см. вторую формулу (4.124)].

5. Край оперт на упругую балку, жесткость которой в вертикальной плоскости равна  $EI$ . Перемещения балки будут вызваны силой  $Q_x^*$ , которая, таким образом, представляет собой нагрузку на балку. Отсюда следует

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2(1 - \nu_0) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]. \quad (4.127)$$

Теперь приведем несколько примеров записи граничных условий для функции усилий  $\Phi$ . Эти условия будем также записывать для краев  $x=0$ ,  $x=a$ , причем край предполагается незагруженным.

1. Край пластинки опирается на опору, допускающую горизонтальные смещения (см. поз. 1, 2, 4 рис. 66) по направлению оси  $x$ . В этом случае продольное усилие  $N_x$  должно быть равно нулю:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.128)$$

2. Опора допускает горизонтальные перемещения вдоль оси  $y$ , т. е. вдоль края. В этом случае должны быть равны нулю сдвигающие усилия:

$$N_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.129)$$

3. Опора не допускает горизонтальных перемещений по направлению оси  $x$  (см. поз. 3, 5, 6 рис. 66). В этом случае горизонтальное перемещение должно равняться нулю:

$$u_0 = 0. \quad (4.130)$$

Выразим геометрическое условие (4.130) в усилиях. Для этого, пользуясь законом Гука (4.23) и формулами (4.45) и (4.91), запишем:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{Eh} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + k_x w. \quad (4.131)$$

Интегрируя в пределах длины края  $a$ , вместо (4.130) получим:

$$u_0 = \int_0^a \left[ \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + k_x w \right] dx. \quad (4.132)$$

Если, кроме того, на краю отсутствуют вертикальные перемещения и поворот нормали (см. поз. 6 рис. 66), то  $w=0$ ;  $\partial w/\partial x=0$  и условие (4.132) можно записать в более простом виде:

$$\int_0^a \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) dx = 0. \quad (4.133)$$

Формулы (4.132) и (4.133) выражают также условие, которое можно сформулировать так: края  $x=0$ ,  $x=a$  закреплены так, что взаимное смещение их вдоль оси  $x$  невозможно, т. е.

$$u_{x=a} - u_{x=0} = 0. \quad (4.134)$$

Эти примеры, естественно, не исчерпывают всего разнообразия граничных условий, которые могут существовать в каждом конкретном случае. Но их достаточно для того, чтобы записать для каждого из краев четыре наиболее часто встречающихся граничных условия.

## 5. Энергия деформации геометрически нелинейных оболочек

Для реализации энергетических методов необходимо определить энергию деформации геометрически нелинейной оболочки или пластинки. Так как материал является линейно-упругим, то удельную энергию деформации, согласно (2.4), определяют по формуле

$$a = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}). \quad (4.135)$$

Используя формулы (4.20), можно выразить удельную энергию либо в напряжениях, либо в деформациях:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2E} [\sigma_{xx}^2 - 2\nu_0 \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 2(1 + \nu_0) \sigma_{xy}^2]; \\ a &= \frac{E}{2(1 - \nu_0^2)} \left( \varepsilon_{xx}^2 + 2\nu_0 \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}^2 + \frac{1 - \nu_0}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.136)$$

Преобразуем вторую из этих формул, подставив вместо деформаций их значения согласно выражениям (4.19). После некоторых выкладок получим:

$$\begin{aligned} a &= \frac{E}{2(1 - \nu_0^2)} \left\{ (\varepsilon_{xx}^0)^2 + (\varepsilon_{yy}^0)^2 + 2\nu_0 \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{yy}^0 + \frac{1 - \nu_0}{2} (\varepsilon_{xy}^0)^2 - \right. \\ &\quad - 2 \left[ \varepsilon_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_0 \left( \varepsilon_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \nu_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] z + \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu_0) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] z^2 \right\}. \quad (4.137) \end{aligned}$$

Вычислим энергию деформации  $a_{\Pi}$  единицы поверхности оболочки. Для этого, очевидно, необходимо (4.137) проинтегрировать по  $z$ :

$$\begin{aligned} a_{\Pi} &= \int_{-h/2}^{+h/2} a dz = \frac{Eh}{2(1 - \nu_0^2)} \left[ (\varepsilon_{xx}^0)^2 + (\varepsilon_{yy}^0)^2 + 2\nu_0 \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{yy}^0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \nu_0}{2} (\varepsilon_{xy}^0)^2 \right] + \frac{Eh^3}{24(1 + \nu_0^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu_0) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (4.138) \end{aligned}$$

После интегрирования по  $z$  и подстановки пределов интегрирования все члены, содержащие  $z$  в первой степени, сократились. Таким образом, энергия  $a_{\Pi}$  на единицу поверхности оболочки состоит из двух частей. Первая часть зависит от деформаций, равномерно распределенных по толщине оболочки (обозначим ее  $a_{\text{пс}}$ ), вторая — от деформаций изгиба (обозначим ее  $a_{\text{пн}}$ ):

$$a_{\Pi} = a_{\text{пс}} + a_{\text{пн}}, \quad (4.139)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{\text{пс}} &= \frac{Eh}{2(1-\nu_0^2)} \left[ (\epsilon_{xx}^0)^2 + (\epsilon_{yy}^0)^2 + 2\nu_0 \epsilon_{xx}^0 \epsilon_{yy}^0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu_0}{2} (\epsilon_{xy}^0)^2 \right]; \\ a_{\text{пн}} &= \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu_0) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.140)$$

Первую часть энергии  $a_{\text{пс}}$  принято называть энергией деформации, соответствующей деформации срединной поверхности, а вторую  $a_{\text{пн}}$  — энергией изгиба. Таким образом, общая энергия деформации раскладывается на сумму энергий деформаций двух видов. Но следует помнить, что это действительно только в том случае, если определяется энергия на единицу поверхности оболочки, а не удельная энергия.

Первую формулу (4.140) удобнее выразить в напряжениях. Это проще сделать, заменив в первой формуле (4.136) индексы общих напряжений на индексы напряжений срединной поверхности; тогда после интегрирования по  $z$  получим:

$$\begin{aligned} a_{\text{пс}} &= \frac{h}{2E} \left[ (\sigma_{xx}^0)^2 - 2\nu_0 \sigma_{xx}^0 \sigma_{yy}^0 + (\sigma_{yy}^0)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu_0) (\sigma_{xy}^0)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Заменяя напряжение усилиями и затем выражая усилия через функцию усилий по формулам (4.45), после некоторых преобразований получим:

$$a_{\text{пс}} = \frac{1}{2Eh} [(\nabla^2 \Phi)^2 - 2(1+\nu_0) \Delta(\Phi, \Phi)]. \quad (4.142)$$

Вторую формулу (4.140), используя обозначения для операторов  $\nabla^2$  и  $\Delta$ , также можно написать в сокращенном виде:

$$a_{\text{пл}} = \frac{D}{2} [(\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \nu_0) \Delta(w, w)]. \quad (4.143)$$

Интегрируя (4.143) по всей поверхности оболочки, получим значение полной энергии деформации оболочки (или пластинки), которое обозначим  $U$ :

$$U = \int_0^a \int_0^b a_{\text{пл}} dx dy = \int_0^a \int_0^b a_{\text{плс}} dx dy + \int_0^a \int_0^b a_{\text{плн}} dx dy = U_{\text{с}} + U_{\text{н}}, \quad (4.144)$$

где  $U_{\text{с}}$  и  $U_{\text{н}}$  — соответственно энергия деформации срединной поверхности и энергия деформации изгиба всей оболочки (или пластинки). Их значения определяют по формулам, полученным из (4.128) и (4.129):

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{с}} &= \frac{1}{2Eh} \int_0^a \int_0^b [(\nabla^2 \Phi)^2 - 2(1 + \nu_0) \Delta(\Phi, \Phi)] dx dy; \\ U_{\text{н}} &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b [(\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \nu_0) \Delta(w, w)] dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (4.145)$$

Формулы (4.145) после интегрирования по поверхности допускают в некоторых, весьма распространенных случаях дальнейшие существенные упрощения. Представим прогиб  $w$  в виде произведения двух функций  $w(x)$  и  $w(y)$ , каждая из которых зависит только от одной координаты

$$w = w(x) w(y), \quad (4.146)$$

и подставим его значение во вторую формулу (4.145). Отмечая дифференцирование по одной переменной штрихами, получим:

$$U_{\text{н}} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \{ [w''(x) w(y) + w''(y) w(x)]^2 - \\ - 2(1 - \nu_0) [w''(x) w(y) w''(y) w(x) - [w'(x) w'(y)]^2] \} dx dy. \quad (4.147)$$

Вычислим по частям входящий во второе слагаемое этой формулы интеграл по  $x$ :

$$\int_0^a \omega''(x) \omega(x) dx = \int_0^a \omega(x) d\omega'(x) = \left[ \omega(x) \omega'(x) - \int [\omega'(x)]^2 dx \right]. \quad (4.148)$$

Представим граничные условия таковыми, что при  $x=0$ ,  $x=a$ , или  $\omega(x)=0$ , или  $\omega'(x)=0$ . В этом случае

$$\int_0^a \omega''(x) \omega(x) dx = - \int_0^a [\omega'(x)]^2 dx. \quad (4.149)$$

Подставим полученное выражение интеграла по  $x$  и аналогичный результат интегрирования по координате  $y$  в формулу (4.147) и получим:

$$\int_0^a \int_0^b \Delta(\omega, \omega) dx dy = 0. \quad (4.150)$$

Следовательно, при определенных граничных условиях (когда  $\omega$  или  $\omega'$  на контуре равны нулю) и аналогичных граничных условиях для  $\Phi$  формулы (4.145) можно записать в более простом виде:

$$\left. \begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2Eh} \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 \Phi)^2 dx dy; \\ U_{II} &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 \omega)^2 dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (4.151)$$

Возводя подынтегральное выражение первой части формулы (4.147) в квадрат и вычисляя по частям интегралы функций от координаты  $x$ , получим:

$$\int_0^a [\omega''(x)]^2 dx = \left[ \omega''(x) \omega'(x) - \omega_x \omega'''(x) + \int \omega(x) \omega^{IV}(x) dx \right]. \quad (4.152)$$

Если граничные условия при  $x=0$ ,  $x=a$  имеют вид, соответствующий одному из написанных ниже вариантов:

$$\left. \begin{aligned} \omega'' = 0; \quad \omega = 0; \quad \omega' = 0; \quad \omega = 0; \\ \omega'' = 0; \quad \omega''' = 0; \quad \omega' = 0; \quad \omega''' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.153)$$

причем при  $x=0$  может быть одна комбинация граничных условий, а при  $x=a$  — другая, то, очевидно,

$$\int_0^a [w''(x)]^2 dx = \int_0^a w(x) w^{IV}(x) dx. \quad (4.154)$$

Эта формула в некоторых случаях облегчает вычисления интегралов (4.151).

## 6. Краткая характеристика расчетных методов

Уравнения нелинейной теории, как правило, приходится решать приближенными методами. Рассмотрим вкратце сущность и особенности некоторых этих методов на примерах решения систем уравнений (выведенных в этой главе) для пластинок и оболочек, а также на некоторых более простых примерах.

**Метод коллокации.** Это наиболее простой метод, его можно применять для решения любых дифференциальных уравнений. Название его происходит от французского термина «la collocation», которым обозначают операцию распределения кредиторов по срокам выплаты им долгов. С решением дифференциальных уравнений это имеет следующую связь. Предположим в качестве примера, что имеется дифференциальное уравнение

$$L(w) = 0, \quad (4.155)$$

где  $L$  — некоторый дифференциальный оператор;  $w$  — функция, которую необходимо определить.

Примем  $w$  в виде конечного ряда:

$$w = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \bar{w}_i, \quad (4.156)$$

где  $\bar{w}_i$  — некоторые подходящие функции (термин «подходящие» означает, что функции  $\bar{w}_i$  приблизительно (качественно) правильно описывают изучаемое явление);  $A_i$  — неизвестные коэффициенты.

Подставим (4.156) в (4.155) и потребуем, чтобы уравнение (4.155) удовлетворялось не по всей области, на которую распространяется действие оператора  $L$ , а только в нескольких точках (в данном случае в  $n$  точ-

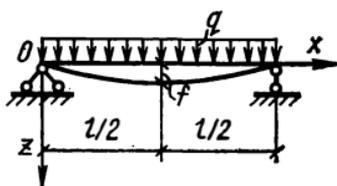


РИС. 67

ках), называемых точками коллокации. Это требование позволяет составить систему из  $n$  алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_i$ . Решив эту систему и подставив вычисленные значения  $A_i$  в (4.156), получим приближенное значение  $w$ . В качестве функций  $\bar{w}_i$  можно выбрать полиномы, тригонометрические функции и т. п. Если имеется возможность, то выбирают функции, которые удовлетворяют граничным условиям.

Для того чтобы показать возможности метода, решим задачу по определению стрелы прогиба балки пролетом  $l$ , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 67). Известно, что изогнутая ось балки описывается полиномом четвертого порядка, а точное значение стрелы прогиба

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \approx \frac{ql^4}{77EI}.$$

Определим изогнутую ось балки методом коллокации. Соответствующее дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид

$$EIw^{IV} = q. \quad (4.157)$$

Выберем значение  $w$  в виде

$$w = A_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (4.158)$$

т. е. с точностью до одного неизвестного коэффициента  $A_1$ . В данном случае выбранная функция  $\bar{w}_1 = \sin \frac{\pi x}{l}$  удовлетворяет граничным условиям.

Подставив (4.158) в (4.157), получим:

$$A_1 EI \cdot \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} = q. \quad (4.159)$$

Выберем точку коллокации в середине пролета и потребуем, чтобы в этой точке удовлетворялось уравнение (4.159). Подставив в это уравнение  $x=l/2$ , получим:

$$A_1 = \frac{ql^4}{\pi^4 EI} \approx \frac{ql^4}{97EI}. \quad (4.160)$$

Это отличается от точного значения на 26%. Но структуры коэффициентов  $f$  и  $A_1$  одинаковы. Для дальнейшего уточнения решения необходимо выбрать функцию с большим числом неизвестных коэффициентов.

Метод коллокации можно применять и для решения систем дифференциальных уравнений, когда неизвестных функций несколько. Он особенно удобен в тех случаях, когда нужно быстро получить оценку решения, хотя бы и достаточно грубую. Но его можно применять и для получения более точных решений. Применение метода коллокации допускает различные варианты.

**Метод последовательных приближений.** Покажем его применение на примере решения системы уравнений для пластинки. Перепишем уравнения (4.46) и (4.80) так, чтобы в левой части стояли линейные операторы, а в правой — нагрузка и все нелинейные члены:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= -\Delta(\omega, \omega); \\ D \nabla^2 \nabla^2 \omega &= q + \Delta(\omega, \Phi) + \Delta(\Phi, \omega). \end{aligned} \quad (4.161)$$

Зададимся значениями функций  $\Phi$  и  $\omega$  в нулевом приближении

$$\Phi_0 = 0; \quad \omega_0 = 0 \quad (4.162)$$

и подставим эти значения в правую часть уравнений (4.161). В результате получится система *линейных* уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_1 &= -\Delta(\omega_0, \omega_0) = 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 \omega_1 &= q + \Delta(\omega_0, \Phi_0) + \Delta(\Phi_0, \omega_0) = q. \end{aligned} \right\} \quad (4.163)$$

Решая ее совместно с граничными условиями, получим значения функций  $\Phi_1$  и  $\omega_1$  в первом приближении. Подставив эти функции в правую часть уравнений (4.161), получим систему *линейных* дифференциальных уравнений второго приближения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_2 &= -\Delta(\omega_1, \omega_1); \\ D \nabla^2 \nabla^2 \omega_2 &= q + \Delta(\omega_1, \Phi_1) + \Delta(\Phi_1, \omega_1). \end{aligned} \quad (4.164)$$

Решая ее, найдем значения  $\Phi_2$  и  $\omega_2$  во втором приближении. Далее эту же процедуру продолжаем до тех пор, пока разница между двумя последовательными приближениями будет находиться в пределах необходимой точности. Итак, этот метод сводит решение нелинейной системы уравнений к последовательному реше-

нию систем линейных уравнений, причем на каждом этапе получается новое, уточненное решение.

**Метод малого параметра или метод малых возмущений.** Будем искать решение системы уравнений (4.161) в виде рядов:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} f^i \bar{\Phi}_i; \quad \omega = \sum_{i=1}^{\infty} f^i \bar{\omega}_i. \quad (4.165)$$

Здесь  $\bar{\Phi}_i$  и  $\bar{\omega}_i$  — неизвестные функции, подлежащие определению;  $f$  — некоторый малый параметр, например отношение прогиба к толщине (или к пролету). Этот параметр должен быть меньше некоторого числа, определяемого из условий задачи, и во всяком случае меньше единицы. Кроме того, разложим нагрузку в ряд:

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} f^i \bar{q}_i(x, y). \quad (4.166)$$

Подставим (4.165) и (4.166) в (4.161) и сгруппируем члены, содержащие малый параметр в одной и той же степени. Каждая такая группа членов (независимо от другой) должна удовлетворять уравнениям (4.161). В результате заданная система уравнений распадается на ряд систем. Первая будет состоять из членов, содержащих параметр  $f$  в первой степени ( $i=1$ ). После сокращения на этот параметр получим:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_1 = 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 \omega_1 = q_1(x, y); \quad (4.167)$$

вторая система будет состоять из членов, содержащих параметр  $f$  во второй степени ( $i=2$ ). После сокращения этого параметра система примет вид

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_2 = -\Delta(\omega_1, \omega_1); \\ D \nabla^2 \nabla^2 \omega_2 = q_2 + \Delta(\Phi_1, \omega_1) + \Delta(\omega_1, \Phi_1). \quad (4.168)$$

Продолжая выписывать в том же порядке системы уравнений, заметим, что в правой части они содержат функции, которые можно определить из предыдущей системы уравнений. Решая первую (линейную) систему (4.167), получим функции  $\Phi_1$  и  $\omega_1$ .

Подставляя их во вторую систему (4.168), получим также линейную систему относительно функций  $\Phi_2$  и  $\omega_2$

и т. д. Члены  $q_i$ , а также значение параметра  $f$  определяют из дополнительных условий, которые легко составить в каждом конкретном случае. Этот метод так же, как и метод последовательных приближений, позволяет свести нелинейную задачу к последовательному решению систем линейных уравнений, причем на каждом этапе получаем уточненное (а не новое, более точное, как в методе последовательных приближений) решение.

**Метод Бубнова—Галеркина.** Решение имеет вид рядов

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\Phi}_i; \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{w}_i. \quad (4.169)$$

Здесь в отличие от метода малого параметра  $\bar{\Phi}_i$  и  $\bar{w}_i$  — известные функции, которые выбирают так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям, а величины  $A_i$  и  $B_i$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Вставив (4.169) во второе уравнение (4.161), получим выражение, которое описывает систему сил с точностью до неизвестных коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$ , причем в соответствии со статическим смыслом второго уравнения (4.161) эта система сил должна находиться в равновесии и, следовательно, к ней можно применить принцип Лагранжа.

Согласно этому принципу, сумма работ системы сил, находящихся в равновесии, на любом возможном перемещении должна равняться нулю. Выберем за возможное перемещение любую функцию из второго ряда (4.169), например  $\bar{w}_k$ , и умножим второе уравнение на  $\bar{w}_k$ . Для нахождения работы на этом возможном перемещении нужно вычислить определенные интегралы по всей площади пластинки. В результате получим:

$$\begin{aligned} D \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 \nabla^2 w) \bar{w}_k \, dx dy = \\ = \int_0^a \int_0^b [q + \Delta(\Phi, w) + \Delta(w, \Phi)] \bar{w}_k \, dx dy. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Проведем такую же операцию с первым уравнением (4.161), хотя формально эта операция (по отношению к первому уравнению) не будет иметь приведенной выше статической интерпретации, поскольку первое уравнение не есть уравнение равновесия. За возможное пе-

ремещение в данном случае выберем  $\bar{\Phi}_k$ . После подстановки (4.169) в первое уравнение (4.161), умножения обеих частей на  $\bar{\Phi}_k$  и интегрирования по всей площади пластинки получим:

$$\int_0^a \int_0^b \left[ \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \Delta(\omega, \omega) \right] \bar{\Phi}_k dx dy = 0. \quad (4.171)$$

Выполняя интегрирование (4.170) и (4.171) с различными индексами  $i$  и  $k$ , получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$ .

**Энергетические методы.** Сущностью вышеописанных методов является составление и решение системы дифференциальных уравнений (4.161). Для применения энергетических методов не нужно составлять дифференциальных уравнений. В основу их положены выражения для полной энергии системы  $\mathcal{E}$ , которая состоит из двух частей:

$$\mathcal{E} = U - V, \quad (4.172)$$

где  $U$  — энергия деформации, определяемая по формулам (4.144) для пластинок из линейно-упругих материалов или же по формуле (2.46) для нелинейно-упругих материалов;  $V$  — изменение потенциала внешней нагрузки:

$$V = \int_0^a \int_0^b (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy, \quad (4.173)$$

где  $q_x$ ,  $q_y$  и  $q_z$  — составляющие нагрузки  $q$ .

Далее возможны два варианта. Если энергию деформации определяем по формулам (4.144), то выбираем решение в виде функций (4.169). Подставляя (4.169) в (4.172), после вычисления определенных интегралов получим полную энергию системы как функцию неизвестных коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(A_i, B_i). \quad (4.174)$$

Коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  следует выбрать таким образом, чтобы величина  $\mathcal{E}$  была минимальной. Составляя условие минимума полной энергии, получим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B_i} = 0, \quad (4.175)$$

из которых определяем  $A_i$  и  $B_i$ .

Согласно второму варианту, энергию деформации для конструкций из нелинейно-упругих материалов определяем по формуле (2.46), и поэтому нужно решать задачу в перемещениях. Выберем перемещения в виде рядов:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \bar{u}_i \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \bar{v}_i; \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{w}_i. \quad (4.176)$$

Здесь  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$  и  $\bar{w}_i$  — заданные функции, выбранные таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям;  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$  — неизвестные коэффициенты.

Подставив (4.176) в (4.172), после вычисления определенных интегралов получим полную энергию системы как функцию неизвестных коэффициентов:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_i, b_i, c_i). \quad (4.177)$$

Эти коэффициенты определяем из системы уравнений, выражающей условие минимума полной энергии  $\mathcal{E}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_i} = 0. \quad (4.178)$$

Энергетический метод особенно удобен при решении задач с двойной нелинейностью, когда дифференциальные уравнения получаются очень сложными.

**Метод последовательных нагружений** [67] состоит в том, что нагрузка  $q$  представляется суммой нагрузок:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = q_1 + q_2 + \dots + q_n. \quad (4.179)$$

Ступени нагрузки  $q_i$  выбирают достаточно малыми, так чтобы они (каждая в отдельности) вызывали незначительные изменения напряженно-деформированного состояния (чтобы влияние нелинейных членов было несущественно). Конструкцию рассчитывают на нагрузку  $q_i$  с помощью линейных дифференциальных уравнений, причем определяют изменение всех геометрических параметров. Вторую ступень нагрузки прикладывают к конструкции, деформированной нагрузкой первой ступени, рассчитывают также методами линейной теории и снова определяют изменение геометрических параметров. Каждую новую ступень нагрузки прикладывают к системе, деформированной нагрузками всех предыдущих ступеней. Этот метод универсален, в частно-

сти он может с успехом быть применен при решении конструктивно-нелинейных систем.

Есть другие численные методы, приспособленные для расчетов на ЭЦВМ (метод конечных разностей, метод конечного элемента и др.). Их принципиальная основа содержит элементы вышеперечисленных методов.

## ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ К РАСЧЕТУ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

В этой главе рассматриваются некоторые примеры расчета пластинок и пологих оболочек. Прежде всего будут рассмотрены примеры расчета геометрически нелинейных конструкций, а затем и более сложные задачи с физической нелинейностью.

### 1. Пологая сферическая оболочка

Рассмотрим прямоугольную в плане пологую сферическую оболочку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 63). Решим геометрически нелинейную задачу (без физической нелинейности), т. е. используем для ее решения уравнения (4.11).

Искомые функции будем разыскивать в виде

$$\Phi(x, y) = A\bar{w}(x, y); \quad w(x, y) = B\bar{w}(x, y), \quad (5.1)$$

где

$$\bar{w}(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (5.2)$$

Выясним, каким граничным условиям удовлетворяют выбранные функции усилий и прогибов. Из (5.2) следует, что при  $x=0$ ;  $x=a$   $y=0$ ;  $y=b$ , т. е. на контуре оболочки  $w=0$ . Далее, очевидно, при  $x=0$ ,  $x=a$  удовлетворяется условие (4.122) и аналогичное условие при  $y=0$ ;  $y=b$ . Отсюда следует, что оболочка шарнирно оперта по контуру. Остается выяснить, является ли эта опора шарнирно-подвижной или шарнирно-неподвижной. Для этого вычислим усилия:

$$N_x = \frac{\partial w}{\partial y^2} = -A \frac{\pi^2}{b^2} \bar{w}(x, y); \quad N_y = \frac{\partial w}{\partial x^2} = -A \frac{\pi^2}{a^2} \bar{w}(x, y). \quad (5.3)$$

На контуре эти функции обращаются в нуль, следовательно, опоры являются шарнирно-подвижными, т. е. свободными от продольных усилий.

Вычислим сдвигающее усилие:

$$N_{xy} = \frac{\partial \omega}{\partial x \partial y} = A \frac{\pi^2}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (5.4)$$

На контуре при  $x=0$ ;  $x=a$   $y=0$ ;  $y=b$ , очевидно, сдвигающее усилие в общем случае не равно нулю.

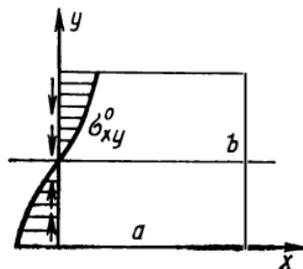


РИС. 68

Эпюра сдвигающих усилий на кромке  $x=0$  изображена на рис. 68; аналогичный вид будут иметь эпюры сдвигающих усилий и на других кромках. Если определить равнодействующую сдвигающих усилий на каждой кромке, например на кромке  $x=0$ , то получим:

$$S_{xy} = \int_0^b N_{xy} dy = A \frac{\pi^2}{ab} \int_0^b \cos \frac{\pi y}{b} dy = 0. \quad (5.5)$$

Таким образом, выбранные функции усилий и прогибов удовлетворяют граничным условиям оболочки, которая имеет шарнирно-подвижные опоры, свободные от продольных усилий, но нагруженные сдвигающими усилиями. Равнодействующая их равна нулю. Систему (4.111) будем решать методом Бубнова — Галеркина. Для этого подставим (5.1) в (4.111). После очевидных преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} + \frac{B}{R} \nabla^2 \bar{w} + B^2 \Delta \bar{w} &= 0; \\ -\frac{A}{R} \nabla^2 \bar{w} + DB \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} - 2AB \nabla \bar{w} - q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

В соответствии с процедурой метода Бубнова — Галеркина следует выбрать возможное перемещение. Но в данном случае возможное перемещение является

единственно возможным: оно описывается функцией (5.2). Умножая первое и второе уравнения (5.6) на  $\bar{w}$  и взяв двойные интегралы по всей площади пластинки, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{A}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} + \frac{B}{R} \nabla^2 \bar{w} + B^2 \Delta \bar{w} \right) \bar{w} dx dy &= 0; \\ \int_0^a \int_0^b \left( -\frac{A}{R} \nabla^2 \bar{w} + DB \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} - 2AB \Delta \bar{w} - q \right) \bar{w} dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Вычислим интегралы:

$$\left. \begin{aligned} I_I &= \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 \nabla^2 \bar{w}) \bar{w} dx dy = \frac{ab}{4} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2; \\ I_{II} &= \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 \bar{w}) \bar{w} dx dy = -\frac{ab}{4} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right); \\ I_{III} &= \int_0^a \int_0^b (\Delta \bar{w}) \bar{w} dx dy = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{ab}; \\ I_{IV} &= \int_0^a \int_0^b q \bar{w} dx dy = q \frac{4ab}{\pi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Подставляя эти интегралы в систему уравнений (5.7), получим следующие два алгебраических уравнения относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{A\pi^2}{Eh} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{B}{R} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right] \frac{ab}{4} + \frac{4B}{3ab} &= 0; \\ \left[ \frac{A\pi^2}{R} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + DB\pi^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right] \frac{ab}{4} - \\ - \frac{8}{3} \frac{\pi^2}{ab} AB - q \frac{4ab}{\pi^2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для квадратной в плане оболочки при  $a=b$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi^2}{Eha^2} A - \frac{B}{2R} + \frac{4}{3a^2} B^2 &= 0; \\ \frac{A}{2R} + DB \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{8}{3} \frac{AB}{a^2} - \frac{4qa^2}{\pi^4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Подставляя во второе уравнение (5.1)  $x=a/2$ , убедимся, что постоянная  $B$  представляет собой прогиб оболочки посередине, т. е.

$$B = f. \quad (5.11)$$

Учитывая это и исключая  $A$  из уравнений (5.10), получим кубическое уравнение относительно  $f$ :

$$q = \frac{D\pi^6}{4a^4} f + \frac{\pi^2 Eh}{16R^2} f + \frac{8}{9} \pi^2 \frac{Eh}{a^4} f^3 - \frac{\pi^2}{2} \frac{Eh}{Ra^2} f^3. \quad (5.12)$$

Первый член этой формулы представляет собой нагрузку  $q_{\text{п}}$ , соответствующую прогибу  $f$  для плиты, рассчитанной по линейной теории, т. е.

$$q_{\text{п}} = \frac{\pi^6 D}{4a^4} f. \quad (5.13)$$

Второй член соответствует дополнительной нагрузке, которую оболочка может нести за счет своей кривизны (подсчитанной также по линейной теории):

$$q_0 = \frac{\pi^2}{16} \frac{Eh}{R} f. \quad (5.14)$$

Третий член — дополнительная нагрузка, соответствующая нелинейным членам уравнений (4.111), относящимся к плите:

$$q_{\text{пн}} = \frac{8}{9} \pi^2 \frac{Eh}{a^4} f^3. \quad (5.15)$$

Наконец, четвертый член соответствует нагрузке, определяемой нелинейными членами уравнений (4.111), относящимся к оболочке:

$$q_{\text{он}} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{Eh}{Ra^2} f^3. \quad (5.16)$$

Этот член отрицательный, что и соответствует качественным соображениям о работе оболочки, которые заключаются в следующем. Как показано В. З. Власовым [10], полагая оболочка работает как плита, находящаяся на некотором фиктивном упругом основании, определяемом кривизной оболочки с коэффициентом упругости:

$$K = Eh/R^2.$$

По мере нагружения оболочки радиус кривизны увеличивается (оболочка выпрямляется), что приводит к уменьшению коэффициента упругости фиктивного ос-

нования, т. е. к уменьшению общей жесткости оболочки. Таким образом, нагрузку, действующую на оболочку, можно представить в виде суммы четырех нагрузок:

$$q = q_{\text{п}} + q_0 + q_{\text{нл}} + q_{\text{он}} \quad (5.17)$$

Соотношения между отдельными составляющими зависят от прогиба. Из формул (5.15) и (5.16) видно, что удельный вес нелинейных членов с увеличением прогиба будет быстро возрастать.

Влияние нелинейных членов на жесткость оболочки проще всего выяснить следующим образом: нужно подсчитать нагрузку, соответствующую прогибу по нелинейной теории, и найти ее отношение к нагрузке, соответствующей этому же прогибу  $f$ , но подсчитанную по линейной теории. Так найдем отношение

$$k = \frac{q_{\text{н}}(f)}{q_{\text{л}}(f)}, \quad (5.18)$$

где  $q_{\text{н}}(f)$  и  $q_{\text{л}}(f)$  — нагрузки, подсчитанные соответственно по нелинейной и линейной теории.

Функция  $k(f)$  покажет влияние нелинейных членов при различных прогибах.

Для нахождения  $k(f)$  несколько преобразуем выражение (5.12). Рассмотрим оболочку (рис. 69): при  $b = a$  следует, что

$$(R - f_0)^2 + \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = R^2,$$

откуда

$$R = a^2/4f_0 \quad (5.19)$$

(пренебрегаем  $f_0^2$  по сравнению с  $a^2$ ).

Учитывая это и вынося  $q_{\text{п}} = \frac{\pi^6 D}{4a^4} f$  за скобки, по-

лучим:

$$q_{\text{н}} = q_{\text{п}} \left( 1 + \frac{48}{\pi^4} \frac{f_0^2}{h^2} + \frac{128}{3\pi^4} \frac{f^2}{h^2} - \frac{96}{\pi^4} \frac{f_0}{h} \frac{f}{h} \right). \quad (5.20)$$

При составлении этого выражения было принято  $\nu_0 = 0$ .

Очевидно,

$$q_{\text{л}} = q_{\text{п}} \left( 1 + \frac{48}{\pi^4} \frac{f_0^2}{h^2} \right). \quad (5.21)$$

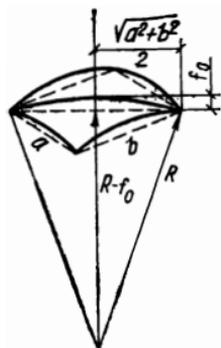


РИС. 69

Формула (5.20) может быть также преобразована в следующую:

$$q_{н} = q_{л} \left[ 1 + \frac{48}{9\pi^4} \left( 3 \frac{f_0}{h} - 2 \frac{f}{h} \right) \left( 3 \frac{f_0}{h} - 4 \frac{f}{h} \right) \right]. \quad (5.22)$$

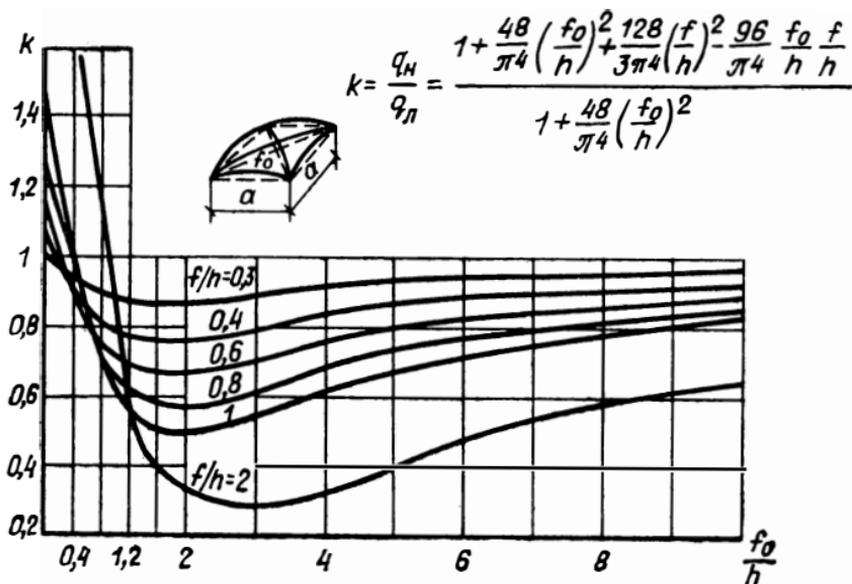


РИС. 70

График

$$k = q_{н}/q_{л} \quad (5.23)$$

при различных  $f_0/h$  для сферической оболочки изображен на рис. 70.

Из рисунка видно, что:

1) с увеличением прогиба  $k$  возрастает. При прогибе, равном удвоенной толщине, расхождение между решениями линейной и нелинейной теории достигает 75%;

2) наибольшее расхождение получается при очень пологих оболочках с подъемом  $f_0/h = 1,2-2$ ;

3) с увеличением подъема оболочки влияние нелинейных членов уменьшается;

4) для плиты нелинейная

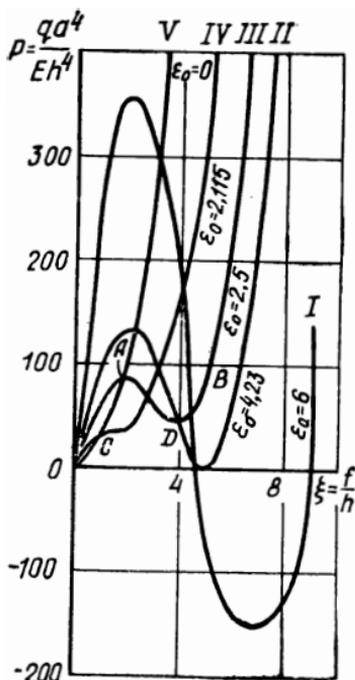


РИС. 71

теория дает большие значения нагрузки, чем линейная. Проведенный анализ подтверждает предварительные соображения о сравнительно большом значении нелинейных членов. Поскольку влияние этих членов в расчете пологих оболочек идет не в запас прочности, то их следует учитывать, особенно если оболочка очень полая.

Для дальнейшего анализа формулы (5.12) введем безразмерные параметры:

$$q^* = \frac{qa^4}{Eh^4}; \quad f_0^* = \frac{f_0}{h}; \quad f^* = \frac{f}{h}. \quad (5.24)$$

Подставив (5.24) в (5.12) и учтя (5.19), получим:

$$q^* = \frac{\pi^6}{48(1-\nu_0^2)} f^* + \pi^2 (f_0^*)^2 + \frac{8}{9} \pi^2 (f^*)^3 - 2\pi^2 f_0^* (f^*)^2. \quad (5.25)$$

Графики, выражающие эту зависимость, т. е. кривую состояния равновесия при различных  $f_0^*$  для сферической оболочки, шарнирно опертой по контуру, показаны на рис. 71. При  $f_0^* = 0$  получим кривую состояния равновесия для пластинки:

$$q_n^* = \frac{\pi^6}{48(1-\nu_0^2)} f^* + \frac{8}{9} \pi^2 (f^*)^3. \quad (5.26)$$

Кривая (5.25) в общем случае имеет экстремальные точки  $q_n^*$  и  $q_v^*$ , которые характеризуют соответственно верхние и нижние критические силы. Для их определения возьмем производную (5.25) по  $f^*$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{dq^*}{df^*} = \frac{\pi^6}{48(1-\nu_0^2)} + \pi^2 (f_0^*)^2 + \frac{8}{3} \pi^2 (f^*)^2 - 4\pi^2 f_0^* f^* = 0. \quad (5.27)$$

Отсюда определим значения  $q_n^*$  и  $q_v^*$ , соответствующие экстремальным точкам:

$$f_{1,2}^* = \frac{3}{4} f_0^* \pm \sqrt{\frac{3}{16} (f_0^*)^2 - \frac{\pi^4}{128(1-\nu_0^2)}}. \quad (5.28)$$

Очевидно, экстремальные точки сольются в одну точку перегиба в том случае, если выражение, стоящее под радикалом в формуле (5.28), будет равно нулю. Из этого условия определим относительный подъем  $f_{ок}^*$

оболочки, имеющей кривую состояния равновесия без экстремальных точек:

$$\frac{3}{16} (f_{\text{ок}}^*)^2 - \frac{\pi^4}{128 (1 - \nu_0^2)} = 0; \quad f_{\text{ок}}^* = \frac{\pi^2}{2 \sqrt{6 (1 - \nu_0^2)}}. \quad (5.29)$$

Из анализа кривых состояний равновесия можно сделать некоторые выводы о действительной работе оболочки под нагрузкой. Если оболочка имеет подъем  $f_0^* > f_{\text{ок}}^*$ , то в тот момент, когда нагрузка станет равна верхнему критическому значению  $q = q_{\text{в}}$ , оболочка делает «хлопок», который на кривой состояния равновесия изобразится прямой  $ab$ . Если же подъем оболочки  $f^* \leq f_{\text{ок}}^*$ , то «хлопка» не будет; после достижения нагрузки, соответствующей точке перегиба, произойдет «выворачивание» оболочки.

## 2. Пологие оболочки при различных граничных условиях

Рассмотрим пологую сферическую и цилиндрическую оболочки при более сложных граничных условиях. Рассчитывать оболочки будем по-прежнему на равномерно распределенную поперечную нагрузку.

Граничные условия зададим для довольно общего случая—упругая заделка по краям оболочки в отношении поворотов.

Частными (предельными) случаями упругой заделки являются шарнирное опирание (коэффициент упругости равен нулю) и жесткая заделка (в отношении поворотов) (коэффициент упругости равен бесконечности).

Наиболее подробно рассмотрим оболочки с шестью граничными условиями: 1) шарнирное опирание по всем четырем сторонам; 2) шарнирное опирание по трем сторонам, на четвертой—жесткая заделка; 3) две противоположные стороны защемлены, две другие—шарнирно опертые; 4) две соприкасающиеся стороны защемлены, две другие—шарнирно опертые; 5) три стороны защемлены, одна—шарнирно опертая; 6) все стороны защемлены.

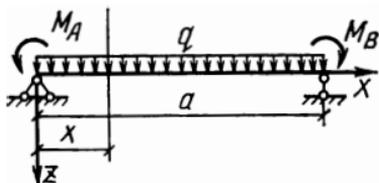


РИС. 72

Для решения используем уравнения (4.111) для сферической и (4.113) для цилиндрической оболочек. Разрешающие функции  $\Phi$  и  $\omega$  построим следующим образом.

Рассмотрим балку, свободно лежащую на двух опорах, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q$  и моментами  $M_A$  и  $M_B$  на опорах (рис. 72). Моменты будем считать положительными.

Составив выражение для изгибающего момента в сечении, расположенном на расстоянии  $x$  от левой опоры, и проинтегрировав его дважды, получим выражение для прогиба:

$$z = \frac{qa^4}{24EI} z, \quad (5.30)$$

где

$$\bar{z} = \left(1 - \frac{2m_0 + m_a}{3}\right) \frac{x}{a} + m_0 \frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{m_0 - m_a}{3}\right) \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}; \quad (5.31)$$

$$m_0 = \frac{12M_A}{qa^2}; \quad m_a = \frac{12M_B}{qa^2}. \quad (5.32)$$

Коэффициенты  $m_0$  и  $m_a$  представляют собой отношения опорных моментов рассматриваемой балки к опорным моментам жестко-зашемленной балки. Для балки, зашемленной в точке  $A$  и шарнирно опертой в точке  $B$ , изгибающий момент в заделке равен  $ql^2/8$ , поэтому  $m_0 = 3/2$ ,  $m_a = 0$ . Для балки, зашемленной с двух сторон, очевидно,  $m_0 = m_a = 1$ .

Искомые функции  $\Phi$  и  $\omega$  построим из функции  $\bar{z}$  (5.31):

$$\Phi = A\bar{z} = Az_x z_y; \quad \omega = B\bar{z} = Bz_x z_y, \quad (5.33)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} z_x &= \left(1 - \frac{2m_0^x + m_a}{3}\right) \frac{x}{a} + m_0^x \frac{x^2}{a^2} - \\ &\quad - \left(\frac{m_0^x - m_a}{3} + 2\right) \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}; \\ z_y &= \left(1 - \frac{2m_0^y + m_b}{3}\right) \frac{y}{b} + m_0^y \frac{y^2}{b^2} - \\ &\quad - \left(\frac{m_0^y - m_b}{3} + 2\right) \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4}; \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

$A$  и  $B$  — коэффициенты, которые нужно определить.

Функция  $z_z$  представляет собой (с точностью до постоянного коэффициента) упругую линию балки длиной  $a$  с коэффициентами  $m_0^x$  и  $m_a$ , соответствующими граничным условиям оболочки по сторонам, перпендикулярным оси  $y$  (стороны длиной  $b$  направлены по оси  $x$ ). Функция  $z_y$  описывает прогибы балки длиной  $b$  с коэффициентами  $m_0$  и  $m_b$ , соответствующими граничным условиям оболочки по сторонам, перпендикулярным оси  $x$  (стороны длиной  $b$  направлены по оси  $y$ ).

Очевидно, что построенная таким образом функция  $\psi$  автоматически удовлетворяет граничным условиям. Что же касается функции  $\Phi$ , то следует проверить, в какой степени она им удовлетворяет.

Граница шарнирно опертой оболочки свободна от нормальных и касательных напряжений. Обращаясь к формулам (4.45), получим:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = Az_x \frac{1}{b^2} \left[ 2m_0^y - 2(m_0^y - m_a + 6) \frac{y}{b} + 12 \frac{y^2}{b^2} \right]; \\ N_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = Az_y \frac{1}{a^2} \left[ 2m_0^x - 2(m_0^x - m_a + 6) \frac{x}{a} + 12 \frac{x^2}{a^2} \right]; \\ N_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -Az'_x z'_y. \end{aligned} \right\} (5.35)$$

В случае шарнирного опирания  $m_0 = m_a = 0$ . После непосредственной подстановки этих значений в (5.35) убеждаемся, что граничные условия в отношении нормальных сил удовлетворяются тождественно, т. е.  $N_x = N_y = 0$ . Что касается касательных напряжений, то, как видно из третьей формулы (5.35), они равны произведению первых производных от функции  $z$ . Поскольку функция  $z$  представляет собой упругую линию балки, то первая производная от нее есть угол наклона касательной к упругой линии. В случае шарнирного опирания этот угол на опорах, как известно, не равен нулю, поэтому и сдвигающие силы на границе не будут равны нулю.

В этом смысле (т. е. точно) граничные условия в отношении касательных напряжений не соблюдаются. Но, так как интеграл

$$A \int_0^a \int_0^b z'_x z'_y dx dy = 0, \quad (5.36)$$

то можно сказать, что сумма касательных напряжений равна нулю, т. е. граничные условия удовлетворяются в среднем (интегрально).

Для защемленной кромки, вследствие того что функция  $\Phi$  построена так же, как и функция  $w$ , действительны следующие граничные условия:

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0; \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (5.37)$$

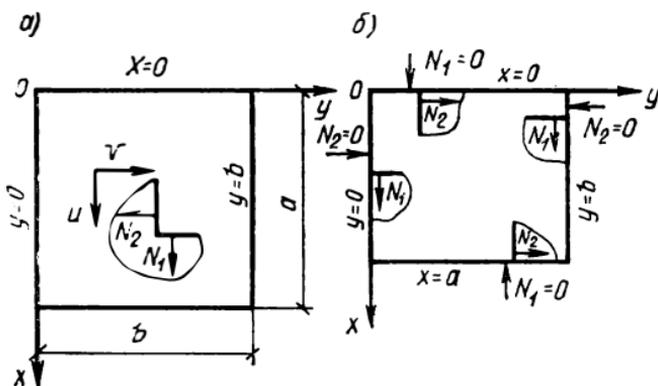


РИС. 73

Первые условия относятся к кромкам, перпендикулярным оси  $y$ , т. е. определяемым уравнениями  $y=0$ ;  $y=b$ ; вторые условия относятся к кромкам, перпендикулярным оси  $x$ , т. е. определяемым уравнениями  $x=0$ ,  $x=a$ . Граничные условия (5.37) статические. В нашей задаче эти условия для функции должны соблюдаться обязательно.

Проследим, каким кинематическим условиям на контуре соответствуют статические условия (5.37). Для этого обратимся к формулам, связывающим усилия с деформациями и деформации с перемещениями. На рис. 73, а дан план оболочки и показаны направления нормальных сил и перемещений. Деформации в соответствии с (4.91) и (4.92) будут выражены формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

В случае заземленной оболочки на контуре

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad w = 0, \quad (5.39)$$

поэтому уравнения (5.38) для деформаций на контуре можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Выразим теперь деформации через усилия. Согласно обобщенному закону Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu_0 N_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu_0 N_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu_0)}{Eh} N_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Из формул (4.45) и (5.33) в общем случае получим:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = Az_x z_y''; \\ N_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = Az_y z_x''; \\ N_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = Az_x' z_y'. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Так как на заземленной кромке  $z_x' = z_y' = 0$ , то

$$N_{xy} = 0. \quad (5.43)$$

Сопоставляя это с третьей формулой (5.41) и с третьей формулой (5.40), получим:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (5.44)$$

т. е. деформация сдвига на заземленной кромке равна нулю, что соответствует кинематическим условиям.

Так как при  $x=0$ ;  $x=a$   $z_x=0$ , то на кромках, определяемых уравнениями  $x=0$ ;  $x=a$ ,  $N_x=0$ .

Усилие же  $N_y$  не будет равняться нулю, так как на этой кромке  $z_x'' \neq 0$ . Это усилие обратится в нуль толь-

ко в крайних точках кромок ( $x=0$ ;  $x=a$ ), т. е. при  $y=0$   $y=b$ .

Таким образом, на защемленной кромке ( $x=0$ ;  $x=a$ ) будем иметь условия:

$$N_x = 0; \quad N_y = Az_y z''_{x=0}, \quad (5.45)$$

Для кромки  $y=0$ ;  $y=b$  аналогично будем иметь:

$$N_x = Az_x z''_{y=0}, \quad N_y = 0. \quad (5.46)$$

Эти усилия на контуре показаны на рис. 73,б.

Сопоставляя (5.45) с первыми двумя уравнениями (5.41) и (5.40), получим для края ( $x=0$ ;  $x=a$ ):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{Eh} (-v_0 N_y) = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{v}{Eh} Az_y z''_{x=0}; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{Eh} N_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{A}{Eh} z_y z''_{x=0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

Итак мы получили, что перемещения  $u$  и  $v$  на краю оболочки не равны нулю. Таким образом, построенной функции  $\Phi$  удовлетворяет край, свободный в отношении перемещений  $u$  и  $v$ . Иными словами, наша оболочка на контуре не может перемещаться в вертикальном направлении и поворачиваться, но может перемещаться горизонтально. Надо сказать, что фактические условия опирания оболочек больше соответствуют этой схеме, чем полному защемлению.

Для дальнейших вычислений нужны будут некоторые интегралы от функции  $z$  и ее производных. Эти интегралы вычислены для функции  $z$ , отвечающей следующим граничным условиям:

1) моменты  $M_A$  и  $M_B$  произвольны;  $m_0 \neq m_a \neq 0$ . Этот случай самый общий, он соответствует упругой заделке концов балки;

2) моменты  $M_A = M_B = qa^2/12$ ;  $m_0 = m_a = 1$  (что соответствует защемлению концов);

3)  $M_A = ql^2/8$ ;  $M_B = 0$ ;  $m_0 = 3/2$ ;  $m_a = 1$  — один конец защемлен, один шарнирно оперт;

4)  $M_A = 0$ ;  $B = 0$ ;  $m_0 = m_a = 0$  — оба конца шарнирно оперты.

Значения интегралов для этих четырех случаев приведены в табл. 6. В этой же таблице указаны значения функции  $z$  в середине пролета балки.

Интеграл  $S_{\Delta}$  непосредственно выражается через  $S_{IV}$ :

$$S_V = \int_0^a z'' z^2 dx = \int_0^a z^2 dz' = \left[ z' z^2 - 2 \int z(z') dx \right]. \quad (5.48)$$

При подстановке пределов  $z^1 z^2$  обратится в нуль, тогда

$$S_V = -2S_{IV},$$

как указано в табл. 6.

Основные интегралы от функции  $z = z_x$  показаны в табл. 6.

При составлении таблицы приняты обозначения:

$$z_x = \left( 1 - \frac{2m_0 + m_a}{3} \right) \frac{x}{a} + m_0 \frac{x^2}{a^2} - \left( \frac{m_0 - m_a}{3} + 2 \right) \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4};$$

$$z = \frac{qa^4}{24} z; \quad m_0 = \frac{12M_A}{qa^2}; \quad m_a = \frac{12M_B}{qa^2}.$$

**Сферическая оболочка.** Зависимость между нагрузкой и прогибом

Начинаем анализ со сферической оболочки, так как от нее легко перейти к цилиндрической оболочке и пластинке. Для решения задачи применим метод Бубнова — Галеркина, как в предыдущем параграфе. Интегралы, входящие в уравнение (5.7), при выбранной системе функций (5.33) вычислим с помощью табл. 6:

$$\left. \begin{aligned} I_I &= S_{II}^a S_I^b + S_{II}^b S_I^a; & I_{III} &= 3S_{IV}^a S_{IV}^b; \\ I_{II} &= S_{III}^a S_I^b + 2S_{III}^a S_{III}^b + S_{III}^b S_I^a; \\ I_{IV} &= q \frac{a^4 b^4}{24^2} S_{III}^a S_{III}^b. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

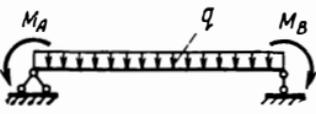
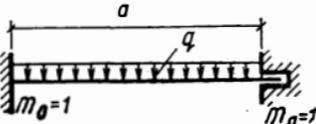
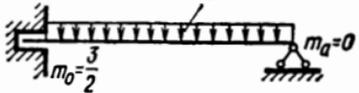
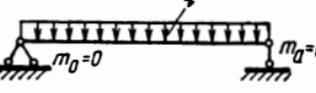
Индекс внизу интеграла  $S_i$  обозначает его номер в табл. 6; индекс наверху показывает, какую величину,  $a$  или  $b$ , нужно вставить в формулу, выражающую значение интеграла. Прделав все необходимые вычисления, окончательно получим зависимость между нагрузкой и прогибом:

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi_0 \xi^2 + \alpha_3 \xi_0^2 \xi + \alpha_4 \xi. \quad (5.50)$$

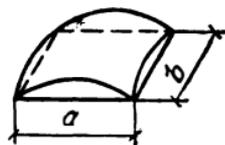
Здесь  $p$ ,  $\xi$  и  $\xi_0$  — безразмерные параметры;

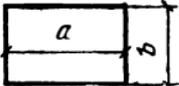
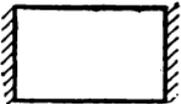
$$p = \frac{qa^4}{Eh^4}; \quad \xi_0 = \frac{f_0}{h}; \quad \xi = \frac{f}{h}; \quad (5.51)$$

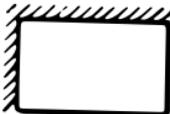
## Типы граничных условий

Интегралы				
$S_I = \int_0^a \times z^2 dx$	$a \left\{ \frac{1}{945} \left[ 8 (m_0^2 + m_a^2) + \frac{31}{2} m_0 m_a \right] - \frac{17}{420} (m_0 + m_a) + \frac{31}{630} \right\}$	$\frac{a}{630}$	$\frac{19}{2520} a$	$\frac{31}{630} a$
$S_{II} = \int_0^a \times z'' z dx$	$-\frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{45} \left[ 4 (m_0^2 + m_a^2) + 7 m_0 m_a \right] - \frac{2}{5} (m_0 + m_a) + \frac{17}{35} \right\}$	$-\frac{2}{105} \frac{1}{a}$	$-\frac{3}{35} \frac{1}{a}$	$-\frac{17}{35} \frac{1}{a}$
$S_{III} = \int_0^a z^{IV} z dx$	$\frac{24}{a^3} \left[ \frac{1}{5} - \frac{m_0 + m_a}{12} \right]$	$\frac{4}{5a^3}$	$\frac{9}{5a^3}$	$\frac{24}{5a^3}$

$S_{IV} = \int_0^a (z')^2 z dx$ $= \frac{1}{a} \left\{ -\frac{1}{216} [m_0^3 + m_a^3 + \right.$ $+ \frac{13}{5} (m_0^2 m_a + m_a m_0^2)] +$ $+ \left[ 113 m_0 m_a + \frac{121}{2} (m_0^2 + \right.$ $+ m_a^2) \frac{1}{1890} - \frac{97}{1260} \times$ $\left. \times [m_0 + m_a] + \frac{74}{1155} \right\}$		$\frac{2}{3465} \frac{1}{a}$	$\frac{123}{24\,640} \frac{1}{a}$	$\frac{74}{1155} \frac{1}{a}$
$S_V = \int_0^a z'' z^2 dz$	$-2S_{IV}$	$-\frac{4}{3465} \frac{1}{a}$	$-\frac{123}{12\,320} \frac{1}{a}$	$-\frac{148}{1155} \frac{1}{a}$
$S_{VI} = \int_0^a z dx$	$\frac{a^4}{24} I_{III} = a \left[ \frac{1}{5} - \right.$ $\left. - \frac{m_0 + m_a}{12} \right]$	$\frac{a}{30}$	$\frac{3}{40} a$	$\frac{a}{5}$
Значения z посере- дине бал- ки x = = a/2	$\frac{5}{16} - \frac{m_0 + m_a}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$



Граничные условия	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\tau_0^*$	$\tau_0^{**}$
I 	8,628	-19,62	+9,917	22,12	4,23	2,113
II 	9,9	-19,06	8,15	32,51	5,635	2,822
III 	7,568	-13,66	5,476	46,06	8,175	4,096

IV		12,45	-20,18	7,269	43,59	6,929	3,464
V		10,31	-15,64	5,272	56,99	9,311	4,652
VI		9,239	-13,1	4,128	68,89	11,56	5,778

Примечание. Значения  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  даны для соотношения  $b/a=1$  при  $\nu_0=0,3$ . При другом значении  $\nu_0, \alpha_4$  следует умножить на  $\frac{0,91}{1-\nu_0^2}$ , остальные коэффициенты не изменяются.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  — коэффициенты, зависящие от граничных условий и размеров оболочки (табл. 7). Они выражаются через интегралы (5.49) по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{18 \cdot 24^2}{C^3 b^4} \frac{I_{III}^2}{I_{II} I_{IV}}; & \alpha_2 &= \frac{72 \cdot 24^2}{(a^2 + b^2) b^4 C^2} \frac{I_I I_{III}}{I_{II} I_{IV}}; \\ \alpha_3 &= \frac{64 \cdot 24^2}{(b^2 + a^2)^2 b^4 C} \frac{I_I^2}{I_{II} I_{IV}}; & \alpha_4 &= \frac{D 24^2}{E h^3 b^4 C} \frac{I_{II}}{I_{IV}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Величина  $C$  связана со значением прогиба в центре плана оболочки:

$$C = z_{a/2} z_{b/2};$$

величины  $z_{a/2}$  и  $z_{b/2}$  определяют согласно последней строке табл. 6.

Повторив в отношении членов, составляющих формулу (5.50), сказанное выше о значении отдельных членов, входящих в формулу (5.12), придем к выводу, что, опуская из (5.50) те или иные члены, можно получить зависимости между нагрузкой и прогибом для следующих систем:

1) линейно-упругая плита (моментное состояние)

$$p = \alpha_4 \xi;$$

2) нелинейно-упругая мембрана (безмоментное состояние)

$$p \doteq \alpha_1 \xi^3;$$

3) нелинейно-упругая плита

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_4 \xi;$$

4) линейно-упругая оболочка (безмоментное состояние)

$$p = \alpha_3 \xi_0^2 \xi;$$

5) линейно-упругая оболочка (моментное состояние)

$$p = \alpha_3 \xi_0^2 \xi + \alpha_4 \xi;$$

6) нелинейно-упругая оболочка (безмоментное состояние)

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi_0 \xi^2 + \alpha_3 \xi_0^2 \xi;$$

7) нелинейно-упругая оболочка (моментное состояние)

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi_0 \xi^2 + \alpha_3 \xi_0^2 \xi + \alpha_4 \xi.$$

Сравним формулу (5.50) с четырехчленной формулой (3.147). Структура их одинакова. Это означает, что существует аналогия между процессами деформации полой оболочки и трехстержневой системы.

Разложим многочлен, стоящий в правой части уравнения (5.50), на множители:

$$\rho = \xi (\xi - \xi_1) (\xi - \xi_2), \quad (5.53)$$

где

$$\xi_{1,2} = -\frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \xi_0 \pm \sqrt{\xi_0^2 \left[ \left( \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \right)^2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right] - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}}. \quad (5.54)$$

Проследим, какой характер может иметь функция (5.53). Если корни  $\xi_1$  и  $\xi_2$  вещественны, то кривая будет трижды пересекать ось  $\xi$ : при  $\xi=0$ ;  $\xi=\xi_1$  и  $\xi=\xi_2$  (см. рис. 71). Это произойдет тогда, когда

$$\xi_0^2 \left( \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) > \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \quad (5.55)$$

(кривая I рис. 71).

Условие

$$\xi_0^2 \left( \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) = \frac{\alpha_4}{\alpha_1}$$

или

$$\xi_0 = \xi_0^* = \sqrt{\frac{4\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_2^2 - 4\alpha_1 \alpha_3}} \quad (5.56)$$

отвечает равенству корней ( $\xi_1 = \xi_2$ ). При этом кривая будет касаться оси  $\xi$  (кривая II рис. 71).

Если корни  $\xi_1$  и  $\xi_2$  комплексные, то кривая не будет касаться оси, но будет иметь две экстремальные точки (кривая III рис. 71). При некоторых значениях параметра  $\xi_0$  (они будут определены ниже) может оказаться, что на кривой III обе экстремальные точки сольются в одну точку перегиба (кривая IV рис. 71). И, наконец, может быть кривая без точек перегиба и экстремумов (кривая V).

Найдем экстремальные значения параметра  $\rho$  из уравнения

$$\frac{d\rho}{d\xi} = 3\alpha_1 \xi^2 + 2\alpha_2 \xi_0 \xi + \alpha_3 \xi_0^2 + \alpha_4 = 0,$$

откуда

$$\bar{\xi}_{1,2} = -\frac{1}{3} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \xi_0 \pm \sqrt{\xi_0^2 \frac{\alpha_2^2 - 3\alpha_3 \alpha_1}{9\alpha_1^2} - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}}. \quad (5.57)$$

Очевидно, что при

$$\xi_0^2 \frac{\alpha_2^2 - 3\alpha_3 \alpha_1}{9\alpha_1^2} - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = 0$$

экстремальные точки сольются в одну точку перегиба (кривая *IV*). Это произойдет при

$$\xi_0 = \xi_0^{**} = \sqrt{\frac{3\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_2^2 - 3\alpha_1 \alpha_3}}. \quad (5.58)$$

Таким образом, есть оболочки с параметрами  $\xi = \xi_0^*$  и  $\xi_0 = \xi_0^{**}$ , которые обладают некоторыми характерными особенностями. Значения величин  $\xi_0^*$  и  $\xi_0^{**}$  приведены в табл. 7.

Рассмотрим подробнее кривые состояния равновесия  $p$  ( $\xi$ ) шарнирно опертой и защемленной квадратных в плане оболочек. Взяв из табл. 7 соответствующие значения коэффициентов  $\alpha_i$ , получим зависимости между прогибом и нагрузкой:

для шарнирно опертой оболочки

$$p = 8,63\xi^3 - 19,62\xi_0 \xi^2 + 9,92\xi_0^2 \xi + 22,12\xi; \quad (5.59)$$

для защемленной оболочки

$$p = 9,24\xi^3 - 13,1\xi_0 \xi^2 + 4,13\xi_0^2 \xi + 68,89\xi. \quad (5.60)$$

Построены графики этих зависимостей для следующих значений  $\xi_0$ :

шарнирно опертая оболочка (см. рис. 71):  $\xi_0 = 0$  (кривая *V*);  $\xi_0 = \xi_0^{**} = 2,115$  (кривая *IV*);  $\xi_0 = 2,5$  (кривая *III*);  $\xi_0 = \xi_0^* = 4,23$  (кривая *II*);  $\xi_0 = 6$  (кривая *I*);

защемленная оболочка (рис. 74):  $\xi_0 = 0$  (кривая *V*);  $\xi_0 = 5,76$  (кривая *IV*);  $\xi_0 = \xi_0^{**} = 3,5$  (кривая *III*);  $\xi_0 = \xi_0^* = 11,55$  (кривая *II*);  $\xi_0 = 15$  (кривая *I*).

Кривая *V* на рис. 71 описывает прогибы плиты. Кривая *IV*, имеющая точку перегиба, — прогибы оболочки с подъемом  $\xi_0 = \xi_0^{**} = 2,115$ . Все оболочки с меньшим подъемом не обладают свойством прощелкивания, все

оболочки с большим подъемом обладают этим свойством.

Кривая III характерна для оболочек, у которых потеря устойчивости сопровождается резким прогибом вниз, причем деформации растут с уменьшением нагрузки. Теоретически оболочка будет вести себя так: прогнувшись до прогибов, значения которых определяются по-

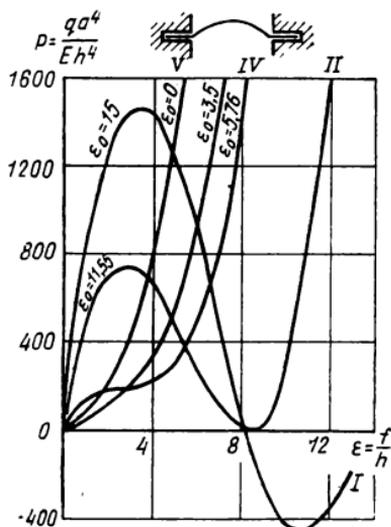


РИС. 74

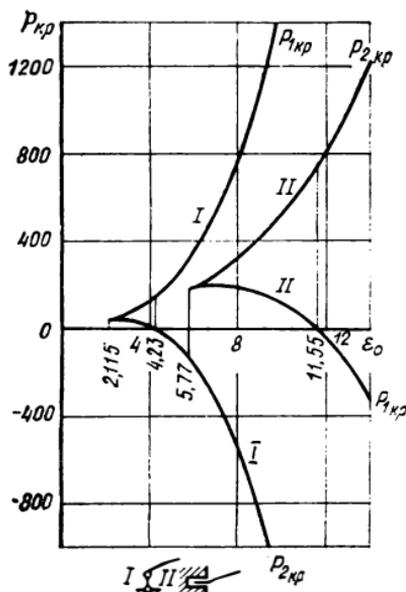


РИС. 75

ложением точки A, соответствующей значению  $p = p_B$  (см. рис. 71), оболочка совершит «хлопок» — перемещение по прямой AB, изменит знаки кривизны. После удаления нагрузки оболочка вернется в первоначальное положение, причем возвращение будет происходить по прямой CD, касательной к кривой  $p-\xi$  в точке минимума, соответствующей значению  $p = p_H$ .

В действительности «хлопок» оболочки происходит на участке между прямыми AB и CD, который поэтому называется зоной неустойчивости. Экспериментальное значение критической силы лежит между верхним  $p_B$  и нижним  $p_H$  значениями.

Кривая II (см. рис. 71) описывает прогибы оболочки с наибольшим подъемом, при котором после снятия нагрузки еще происходит возвращение к первоначальному положению. Все оболочки с большим подъемом (кри-

вая  $\Lambda$ ) в первоначальное положение не возвращаются: для того чтобы они в него вернулись, нужно приложить нагрузку снизу вверх, т. е. «отрицательную» нагрузку.

На рис. 74 соответствующие кривые изображены, как было сказано, для защемленной оболочки. Если выражение (5.57) подставить в (5.50), то получим функцию

$$p_{кр} = f(\xi_0), \quad (5.61)$$

которая определяет критическую силу для оболочки данного подъема  $\xi_0$ . Эта функция двухзначна. В развернутом виде она записывается так:

$$p_{\frac{H}{3}} = \left( \frac{2}{27} \frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{3\alpha_1} \right) \xi_0^2 \pm \left[ \left( \frac{2}{3} \alpha_3 - \frac{2}{9} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \right) \xi_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \alpha_4 \right] \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{9\alpha_1^2} \xi_0^2 - \frac{\alpha_3}{3\alpha_1} \xi_0^2 - \frac{\alpha_4}{3\alpha_1} - \frac{\alpha_2 \alpha_4}{3\alpha_1} \xi_0} \quad (5.62)$$

(здесь верхний знак относится к нижней критической силе, нижний — к верхней критической силе). Графики функции (5.62) изображены на рис. 75:

*I* — для шарнирно опертой оболочки;

*II* — для подвижной и защемленной оболочек.

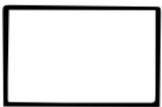
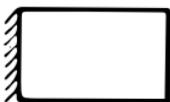
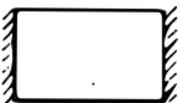
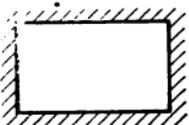
Из этого анализа можно сделать практический вывод: если оболочка имеет подъем, равный или меньший значения  $\xi_0^{**}$ , то она не будет терять устойчивости в обычном смысле слова. Под действием поперечной нагрузки такая оболочка будет «выворачиваться».

Из графика 75 видно, что при одном и том же подъеме шарнирно опертая оболочка имеет большую критическую силу, чем оболочка с подвижным защемлением. С другой стороны, при всех прочих равных условиях шарнирно опертая оболочка приобретает свойство выщелкивания при меньшем подъеме.

**Цилиндрическая оболочка.** Результаты аналогичных вычислений приведены в табл. 8 для двух случаев ориентировки цилиндрической оболочки относительно координатных осей (рис. 76).

Случай I\*:

$$p = \alpha_1^I \xi^3 + \alpha_2^I \xi_0 \xi + \alpha_3^I \xi_0^2 \xi + \alpha_4^I \xi$$

Граничные условия	$\alpha_1^I$	$\alpha_2^I$	$\alpha_3^I$	$\alpha_4^I$
	8,628	-19,62	9,917	22,12
	9,9	$\frac{-20,4}{17,71}$	$\frac{9,34}{7,042}$	32,51
	7,568	$\frac{-11,52}{-9,478}$	$\frac{5,069}{3,43}$	46,06
	12,45	-20,18	7,269	43,59
	10,31	$\frac{-15,22}{-16,06}$	$\frac{4,991}{5,561}$	56,99
	9,239	-13,1	4,128	68,89

\* Таблица действительна и для случая II, но значения  $\alpha_2^{II}$  и  $\alpha_3^{II}$  для граничных условий 2, 3, 5 помещены под чертой.

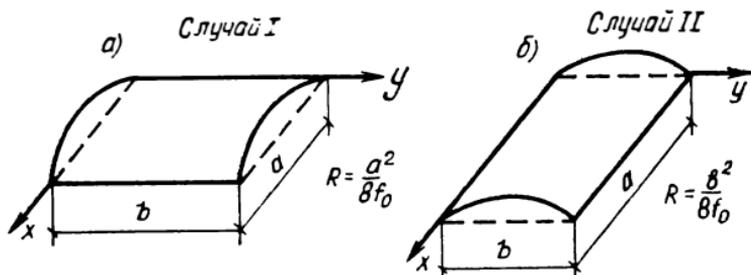


РИС. 76

### 3. Замкнутая цилиндрическая оболочка, сжатая продольными силами

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку, сжатую равномерно распределенными продольными силами  $p$ , заданными на единицу длины направляющей

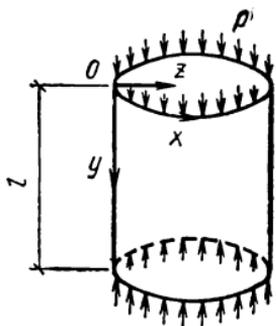


РИС. 77

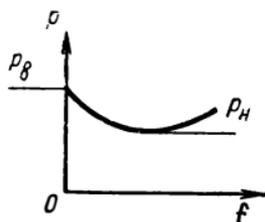


РИС. 78

срединной поверхности (рис. 77). В этом случае, несмотря на то что оболочка не является полой, можно пользоваться уравнениями (4.113), если координату  $x$  направить по направляющей так, как это показано на рисунке. Уравнения (4.113) будем решать методом Бубнова—Галеркина, выбрав разрешающие функции в виде

$$\omega = f \bar{\omega}; \quad \Phi = A \bar{\omega} + \frac{p x^2}{2}, \quad (5.63)$$

По формулам (4.45) определим

$$N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = A \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + p. \quad (5.64)$$

В отношении функции  $\bar{w}$  сделаем предположение, что при  $y=0$ ;  $y=l$

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right|_{y=0} = 0. \quad (5.65)$$

Тогда на торцах цилиндрической оболочки усилие  $N_y$  будет равняться  $p$ :

$$(N_y)_{y=0} = +p. \quad (5.66)$$

Подставив (5.63) в (4.113), получим:

$$\frac{A}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} + \frac{f}{R} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + f^2 \Delta(\bar{w}, \bar{w}) = 0;$$

$$Df \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} - \frac{A}{R} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - 2Af \Delta(\bar{w}, \bar{w}) - pf \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = 0. \quad (5.67)$$

Умножая обе части (5.67) на  $\bar{w}$  и интегрируя по всей площади цилиндрической оболочки, получим:

$$\frac{A}{Eh} I_1 + \frac{f}{R} I_2 + f^2 I_3 = 0;$$

$$Df I_1 - \frac{A}{R} I_2 - 2Af I_3 - pf I_2 = 0. \quad (5.68)$$

Здесь обозначены:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^l \int_0^{2\pi R} (\nabla^2 \nabla^2 \bar{w}) \bar{w} \, dx \, dy; \\ I_2 &= \int_0^l \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \bar{w} \, dx \, dy; \\ I_3 &= \int_0^l \int_0^{2\pi R} [\Delta(\bar{w}, \bar{w})] \bar{w} \, dx \, dy. \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Исключая из обоих уравнений величину  $A$ , получим:

$$p = D \frac{I_1}{I_2} + \frac{Eh}{R^2} \frac{I_2}{I_1} + 3 \frac{Eh}{R} \frac{I_3}{I_1} f + 2Eh \frac{I_3^2}{I_1 I_2} f^2. \quad (5.70)$$

При сжатии оболочки прогибы  $w$  будут равны нулю до тех пор, пока сила  $p$  не станет равной верхнему критическому значению  $p_B$ ; следовательно, кривая состоящая равновесия будет иметь вид, изображенный на рис. 78. Отсюда следует, что верхнюю критическую силу

можно определить из условия  $f=0$ . Вставив это значение  $f$  в (5.70), получим:

$$p_{в} = D \frac{I_1}{I_2} + \frac{Eh}{R^2} \frac{I_2}{I_1} ; \quad (5.71)$$

Отсюда следует, что верхняя критическая сила зависит от отношения интегралов:

$$I_1/I_2 = k, \quad (5.72)$$

которые в свою очередь согласно формулам (5.69) зависят от вида функции  $\bar{w}$ .

Опыты показывают, что в момент потери устойчивости поверхность оболочки покрывается волнами, причем характер волнообразования определяется функцией  $\bar{w}$ . Это значит, что и параметр  $k$  также определяет характер волнообразования. Выберем этот параметр так, чтобы верхняя критическая сила, определяемая формулой (5.71), была наименьшей. Подставив (5.72) в (5.71), получим:

$$p_{в} = Dk + \frac{Eh}{kR^2} ; \quad (5.73)$$

Взяв производную по параметру  $k$  и приравняв ее нулю, получим:

$$\frac{dp_{в}}{dk} = D - \frac{Eh}{k^2 R^2} = 0 ; \quad (5.74)$$

Отсюда

$$k = \sqrt{\frac{Eh}{DR^2}} ; \quad (5.75)$$

Подставив (5.75) в (5.73), вычислим наименьшее значение верхней критической силы:

$$p_{в \text{ min}} = 2 \sqrt{\frac{DEh}{R^2}} ; \quad (5.76)$$

Обозначив здесь цилиндрическую жесткость  $D$  согласно формуле (4.61) и разделив обе части уравнения на  $h$ , получим значение верхнего критического напряжения:

$$\sigma_{в} = \frac{p_{в \text{ min}}}{h} = \frac{Eh}{R \sqrt{3(1-\nu_0^2)}} ; \quad (5.77)$$

Для определения нижней критической силы  $p_H$  возьмем производную  $p$  (5.70) по  $f$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{dp}{df} = 3 \frac{Eh}{R} \frac{I_3}{I_1} + 4 \frac{EhI_3^2}{I_1 I_2} f = 0. \quad (5.78)$$

Отсюда определим значение  $f_H$ , соответствующее нижней критической силе:

$$f_H = -\frac{3}{4} \frac{I_2}{I_3 R}. \quad (5.79)$$

Подставив (5.79) в (5.70), вычислим нижнюю критическую силу:

$$p_H = D \frac{I_1}{I_2} - \frac{Eh}{8R^2} \frac{I_2}{I_1}. \quad (5.80)$$

Предположим (это весьма правдоподобно) о том, что характер волнообразования оболочки при переходе от верхней критической нагрузки к нижней не изменяется, т. е. что и в этом случае отношение интегралов  $I_1/I_2 = k$  определяется формулой (5.75). Подставим это значение  $k$  в (5.80):

$$p_H = \frac{7}{8} \frac{\sqrt{DEh}}{R}. \quad (5.81)$$

Разделив (5.81) на (5.76), вычислим, что нижняя критическая сила составляет  $\frac{7}{16}$  от верхней:

$$p_H = \frac{7}{16} p_B = 0,437 p_B. \quad (5.82)$$

Как показывают опыты, оболочка теряет устойчивость при напряжениях, составляющих 40% (и меньше) от верхних критических напряжений.

Полученный результат (5.28) соответствует в некоторой степени опытными данным.

Приведенный вывод интересен тем, что значения критических сил получены без вычисления интегралов (5.69), т. е. без конкретного выбора функции  $\omega$ . Единственное условие, накладываемое на функцию прогибов, выражается равенством (5.65).

#### 4. Физически нелинейная, геометрически линейная деформация пластинки

Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую пластинку при малых перемещениях, физически нелинейную с законом деформирования (2.62). Пластинка нагружена силой  $P$ , приложенной в ее центре. Решим задачу энергетическим методом, причем удельную энергию деформации  $a$  определим по формуле (2.46), пренебрегая в ней первым и третьим членами:

$$a = \int_0^{e_i} \sigma_i de_i. \quad (5.83)$$

Подставляя сюда степенной закон деформирования:

$$\sigma_i = Ae_i^k, \quad (5.84)$$

получим

$$a = A \frac{e_i^{k+1}}{k+1}, \quad (5.85)$$

Для  $e_i$  возьмем выражение (4.28), полагая в нем  $v_0=0,5$ :

$$e_i = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2}. \quad (5.86)$$

Отбрасывая в формуле (4.16) нелинейные члены и используя обозначения (4.40), получим:

$$\varepsilon_x = -\chi_x z; \quad \varepsilon_y = -\chi_y z; \quad \gamma_{xy} = -2\chi_{xy} z. \quad (5.87)$$

Чтобы определить энергию деформации всей пластинки, нужно вычислить интеграл по всему объему пластинки:

$$U = \frac{A}{k+1} \int_{-a}^a \int_{-b}^{b+h/2} \int_{-h/2}^{h/2} e_i^{k+1} dx dy dz. \quad (5.88)$$

Подставляя (5.87) в (5.86) и полученное выражение (5.85) и дальше в (5.88), после интегрирования по  $z$  получим:

$$U = \frac{Ah^{k+2}}{(k+1)(k+2)3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left( \chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_x \chi_y + \frac{1}{4} \chi_{xy}^2 \right)^{\frac{k+1}{2}} dx dy. \quad (5.89)$$

В данной задаче  $u=v=0$ . Функцию прогибов  $w(x, y)$  зададим в виде

$$w(x, y) = w_0 w_x w_y, \quad (5.90)$$

где  $w_0$  — прогиб посередине плиты;  $w_x$  и  $w_y$  — функции, определяемые по формулам:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[ \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+1}}{m+2} - 1 \right]; \\ w_y &= \frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left[ \frac{\left(1 - \frac{y}{b}\right)^{m+1}}{m+2} - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

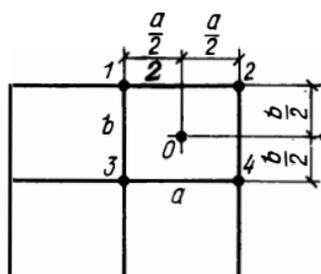
Эти выражения описывают изогнутую ось балки из нелинейно упругого материала с такими же граничными условиями, как и у пластинки, и составлены на основании формул (3.44) и (3.47). В них  $m = \frac{1}{k}$ . Подставим (5.90) в (5.89) и выразим кривизны через функцию прогибов по формулам (4.40):

$$U = \frac{A h^{k+2}}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+1}{2}}} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \chi_i^{k+1} dx dy, \quad (5.92)$$

где

$$\chi_i = \sqrt{(\overset{\circ}{w}_x w_y)^2 + (w_x \overset{\circ}{w}_y)^2 + \overset{\circ}{w}_x \overset{\circ}{w}_y w_x w_y + (\overset{\circ}{w}_x \overset{\circ}{w}_y)^2}. \quad (5.93)$$

Интегрирование по  $x$  и  $y$  выполним приближенно [51]. Для этого разобьем площадь прямоугольного плана пластинки на четыре части (рис. 79) и вычислим значения  $\chi_i$  в точках 0, 1, 2, 3, 4. Продифференцируем уравнения (5.91) первое по  $x$  и второе по  $y$ :



$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{w}_x &= \frac{m+2}{m+1} \frac{1}{a} \left[ 1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+1} \right]; \\ \overset{\circ}{w}_y &= \frac{m+2}{m+1} \frac{1}{b} \left[ 1 - \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{m+1} \right]; \\ \overset{\circ}{w}_x &= (m+2) \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^m; \\ \overset{\circ}{w}_y &= (m+2) \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^m. \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

РИС. 79

Подставив в (5.94) и в (5.91) координаты точек 0, 1, 2, 3, 4, получим величину  $\chi_i$  в этих точках (табл. 9).

Введем обозначения

$$\frac{a}{b} = \alpha; \quad b = \frac{a}{\alpha} \quad (5.95)$$

и вычислим подынтегральную функцию в (5.92), которую обозначим через  $F_i$  в точках  $i=0, 1, 2, 3, 4$ :

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= (\chi_i)_0^{k+1} = \frac{1}{a^{2(k+1)}} \left\{ \frac{(m+2)^4}{2^{2m}(m+1)^2} \left[ \frac{1}{2^{m+2}(m+2)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \right]^2 (1 + \alpha^2 + \alpha^4) + \left[ \frac{m+2}{m+1} \left( 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right) \right]^4 \alpha^2 \right\}^{\frac{k+1}{2}}; \\ F_1 &(\chi_i)_1^{k+1} = F_4 = (\chi_i)_4^{k+1} = 0; \\ F_2 &= (\chi_i)_2^{k+1} = \left( \frac{m+2}{m+1} \right)^{2(k+1)} \frac{\alpha^{k+1}}{a^{2(k+1)}}; \\ F_3 &= (\chi_i)_3^{k+1} = (m+2)^{k+1} (1 + \alpha^2 + \alpha^4)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{a^{2(k+1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

Подставив выражение (5.18) с соответствующими коэффициентами в формулу (5.92) и умножив область интегрирования на 4, получим окончательно выражение для работы внутренних сил:

$$U = \frac{Ah^{k+2} \omega_0^{k+1} c_k}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} \alpha a^{2k}}. \quad (5.97)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_k &= 8 \left\{ \frac{(m+2)^4}{2^{2m}(m+1)^2} \left[ \frac{1}{2^{m+2}(m+2)} - \frac{1}{2} \right]^2 (1 + \alpha^2 + \alpha^4) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{m+2}{m+1} \left( 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right) \right]^4 \alpha^2 \right\}^{\frac{k+1}{2}} + \left( \frac{m+2}{m+1} \right)^{2(k+1)} \alpha^{k+1} + \\ &\quad + (m+2)^{k+1} (1 + \alpha^2 + \alpha^4). \end{aligned} \quad (5.98)$$

Работа внешних сил

$$V = p\omega_0. \quad (5.99)$$

Полная энергия системы

$$\mathcal{E} = U - V = \frac{Ah^{k+2} \omega_0^{k+1} c_k}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} \alpha a^{2k}} - p\omega_0. \quad (5.100)$$

Таблица 9

Точки	Координаты точек		$w_x$	$w_y$	$w'_x$	$w'_y$	$w''_x$	$w''_y$
	$x$	$y$						
0	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{m+2}{m+1} \left[ \frac{1}{2^{m+2}(m+2)} - \frac{1}{2} \right]$		$\left( \frac{m+2}{m+1} \right) \frac{1}{a} \times$ $\times \left( 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right)$	$\frac{m+2}{m+1} \frac{1}{b} \times$ $\times \left( 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right)$	$(m+2) \frac{1}{a^{2k}} \frac{1}{2^m}$	$(m+2) \frac{1}{b^{2k}} \frac{1}{2^m}$
1	0	$b$	-1	0	0	$\frac{m+2}{m+1} \frac{1}{b}$	$\frac{m+2}{a^2}$	0
2	$a$	$b$	0	0	$\frac{m+2}{m+1} \frac{1}{a}$	$\frac{m+2}{m+1} \frac{1}{b}$	0	0
3	0	0	-1	-1	0	0	$\frac{m+2}{a^2}$	$\frac{m+2}{b^2}$
4	$a$	0	0	-1	$\frac{m+2}{m+1} \frac{1}{a}$	0	0	$\frac{m+2}{b^2}$

Дифференцируя (5.100) по  $\omega_0$  и приравняв производную нулю, получим следующую связь между нагрузкой и прогибом:

$$p = \frac{Ah^{k+2} c_k}{\frac{k+3}{(k+2)3^2} \alpha a^{2k}} \omega_0^k. \quad (5.101)$$

Отсюда определим  $\omega_0$ , затем функцию прогибов (5.90). Зная эту функцию, нетрудно обычными методами определить напряжения.

Из формулы (5.101) следует, что связь между нагрузкой и максимальным прогибом имеет тот же характер, что и связь между напряжениями и деформациями (2.62). Для любых геометрически линейных конструкций и при любом законе физической нелинейности характерно, что связь между перемещениями и нагрузкой выражается тем же законом, что и связь между напряжениями и деформациями.

При  $k=1$ ;  $A=E$  получим решение для упруго-линейной пластинки. Для квадратной пластинки оно имеет вид

$$\omega_0 = \frac{128}{291} \frac{Pa^2}{Eh^3} = 0,440 \frac{Pa^2}{Eh^3}, \quad (5.102)$$

Известное точное решение, полученное Б. Г. Галеркиным для этого случая, записывается при наших обозначениях формулой

$$\omega_0 = 0,416 \frac{Pa^2}{Eh^3}.$$

Найденное нами решение расходится с точным на 5,5%. Это объясняется неточностью интегрирования по  $x$  и  $y$ .

При  $k=0$ ;  $A=\sigma_T$  (жестко-пластическая пластинка) из формулы (5.101) нельзя найти прогиба: он остается неопределенным. Это вытекает из геометрически линейного характера задачи. Сила  $P$  имеет бесконечно большое значение, что физически легко объяснимо; для того чтобы в жестко-пластической пластинке напряжения всюду достигли предела текучести, нужно приложить бесконечно большую нагрузку.

Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую пластинку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q$ .

Примем тот же степенной закон физической нелинейности (2.62). Работа внутренних сил, так же как и в рассмотренном выше случае, выражается формулой (5.89), а функцию прогибов зададим в виде (5.90). За функции  $w_x$  и  $w_y$  примем функции прогибов нелинейно-упругой балки с тем же законом физической нелинейности, построенные с помощью формул (3.45). Но получить выражение для этих функций в случае равномерно распределенной нагрузки в общем виде (при любом  $k$ ) не представляется возможным. Поэтому ограничимся частным случаем, когда  $k=1/3$ . При этом значении  $k$  функция  $w(x)$  имеет вид:

$$w(x) = \frac{35 \cdot 2^{11}}{93l} \left[ \frac{1}{20} \left( \frac{x}{l} \right)^5 - \frac{1}{10} \left( \frac{x}{l} \right)^6 + \frac{1}{14} \left( \frac{x}{l} \right)^7 - \frac{1}{56} \left( \frac{x}{l} \right)^8 - \frac{1}{280} \frac{x}{l} \right]. \quad (5.103)$$

Приняв аналогичное выражение для функции  $w(y)$  и выполнив все необходимые вычисления по вышеприведенной схеме, получим зависимость между нагрузкой и прогибом:

$$q = \frac{Ah^{k+2}w_0^k c_k}{1,515(k+2)3^{\frac{k+3}{2}}\alpha^2 a^{2k+2}}. \quad (5.104)$$

Строго говоря, эта формула справедлива при  $k=1/3$ ; в этом случае (для квадратной пластинки):

$$q = 1,456 A \sqrt{\frac{h^7 w_0}{a^8}}; \\ w_0 = 0,323 \frac{q^3 a^8}{A^3 h^7}. \quad (5.105)$$

Учитывая особенности вариационного метода, в котором функции прогибов задаются приближенно, можно формулой (5.104) с известной точностью пользоваться при любом значении  $0 \leq k \leq 1$ . При  $k=1$  согласно (5.104)

$$w_0 = 0,653 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (5.106)$$

вместо точного (подсчитанного обычными методами линейной теории упругости при  $\nu_0=0,5$ )

$$w_0 = 0,584 \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Расхождение составляет 10%.

При  $k=0$  из формулы (5.04) получим значение предельной нагрузки

$$q_{\text{пр}} = 1,485 \frac{\sigma_T h^2}{a^2} \quad (5.107)$$

Интересно отметить, что по методу сосредоточенных деформаций [79] в этом случае:

$$q_{\text{пр}} = 1,5 \frac{\sigma_T h^2}{a^2},$$

что очень близко совпадает с 5.107).

### 5. Общее решение для пластины геометрически и физически нелинейной

В случае степенной зависимости напряжений от деформаций решение для пластинки можно получить из формулы для определения энергии деформации (5.88), подставив в нее значение интенсивности деформаций из выражений (4.28) и (5.86):

$$U = \frac{A}{k+1} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{k+1} \iint_{\nu} \left[ (e_x - z\chi_x)^2 + (e_y - z\chi_y)^2 + (e_x - z\chi_x)(e_y - z\chi_y) + \frac{1}{4} (e_{xy} - 2z\chi_{xy})^2 \right]^{\frac{k+1}{2}} dx dy. \quad (5.108)$$

Здесь  $e_x$ ,  $e_y$  и  $e_{xy}$  — члены, выражающие продольные деформации пластинки и деформации сдвига срединной поверхности:

$$e_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad e_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$e_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (5.109)$$

Вставив (5.109) в (5.108), получим энергию деформации пластинки, записанную через перемещения.

**Решение для мембраны.** Энергия мембраны вызвана только одним растяжением срединной поверхности, по-

этому в (5.108) надо положить  $\chi_x = \chi_y = \chi_{xy} = 0$ . Выполнив интегрирование по  $z$ , получим:

$$U = \frac{Ah}{(k+1)} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{k+1} \int_0^a \int_0^b [e_x^2 + e_y^2 + e_x e_y + e_{xy}^2]^{\frac{k+1}{2}} dx dy, \quad (5.110)$$

где  $k$  — толщина мембраны.

Энергию с помощью формул (5.109) через перемещения запишем так:

$$U = \frac{Ah}{k+1} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{k+1} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 \right\}^{\frac{k+1}{2}} dx dy. \quad (5.111)$$

Работу внешних сил при одной только вертикальной нагрузке  $q$  можно выразить формулой

$$V = q \int_0^a \int_0^b w dx dy. \quad (5.112)$$

Составим сначала решения, выразив  $u$ ,  $v$  и  $w$  с помощью тригонометрических функций. Рассмотрим в качестве примера квадратную в плане мембрану ( $a=b$ ). На контуре все перемещения должны равняться нулю. Этому условию удовлетворяют функции:

$$\left. \begin{aligned} u &= c \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2a}; \\ v &= c \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi x}{2a}; \\ w &= w_0 \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

Подставив эти функции в (5.111) и (5.112) и вычислив интегралы, получим выражения для работы внешних и внутренних сил как функции двух парамет-

ров  $c$  и  $\omega_0$ . В этом случае вариационные уравнения (4.178) дадут два выражения для определения  $c$  и  $\omega_0$ :

$$1) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c} = 0. \quad (5.114)$$

В это уравнение не входит работа внешних сил, так как при вариации по  $c$  эта работа равна нулю (нагрузка  $q$  перпендикулярна перемещениям  $u$  и  $v$ ):

$$2) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \omega_0} \delta \omega_0 = q \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \delta \omega_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a} dx dy. \quad (5.115)$$

Интегралы, входящие в уравнения (5.114) и (5.115), очень сложны, их можно вычислить только приближенно. Это сделано с помощью кубатурных формул [51]. После этих вычислений получим два алгебраических уравнения относительно  $c$  и  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} & \left[ 0,0625 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^4 \omega_0^4 - 0,177 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^3 c \omega_0^2 + 0,5 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 c^2 \right]^{\frac{k-1}{2}} \times \\ & \times \left[ -0,0884 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^3 \omega_0^2 + 0,5 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 c \right] + \frac{1}{4} \left\{ 3^{\frac{k+1}{2}} 2^k \left( \frac{\pi}{2a} \right)^{k+1} \times \right. \\ & \quad \left. \times c^k 2 \left( \frac{\pi}{2a} \right) \left[ -2 \frac{\pi}{2a} c + 0,5 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 - \omega_0^2 \right]^k \right\} = 0; \quad (5.116) \\ & \frac{1}{6} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{k+1} Ah \left\{ \left[ 0,0625 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^4 \omega_0^4 - 0,177 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^3 c \omega_0 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 0,5 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 c^2 \right]^2 \left[ 0,125 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^4 \omega_0^3 - 0,177 \left( \frac{\pi}{2a} \right)^3 c \omega_0 \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 \left[ -2c \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 \omega_0^k \right] \omega_0 \right\} = \frac{q}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Эти уравнения решены приближенно для трех значений параметра  $k$  ( $k=1$ ;  $k=0,137$ ;  $k=0$ ), причем получены следующие зависимости между прогибом и нагрузкой:

$$k=1; A=E; \xi=0,754 \sqrt[3]{q^*}; \quad (5.117)$$

$$k=0,137; A=A; \xi=0,4275 (\beta q^*)^{0,785}; \quad (5.118)$$

$$k=0; A=\sigma_T; \xi=0,333 \alpha q^*. \quad (5.119)$$

Здесь:

$$\xi = \frac{\omega_0}{a}; q^* = \frac{qa}{Eh}; \beta = \frac{E}{A}; \alpha = \frac{E}{\sigma_T}. \quad (5.120)$$

Для случаев  $k=1$  и  $k=0$ , что соответствует упругой и пластической постановке задачи, в литературе есть следующие решения:

$$k=1; \xi = 0,754 \sqrt[3]{q^*} \quad (5.121)$$

решение А. С. Вольмира (методом Бубнова — Галеркина) [12];

$$k=0; \xi = 0,2887 \alpha q^* \quad (5.122)$$

решение А. Р. Ржаницына (методом сосредоточенных деформаций) [76];

$$\xi = 0,287 \alpha q^* \quad (5.123)$$

решение А. С. Григорьевы [28].

На рис. 80 построены кривые по основным результатам этого решения, а для сравнения нанесены кривые, полученные на основе имеющихся решений. При построении кривых приняты физические постоянные:

$$k = 0,137; E = 1,84 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2 = 1804 \text{ Н/м}^2; \sigma_T = 2140 \text{ кгс/см}^2 = 2,097 \text{ Н/м}^2; A = 4207 \text{ кгс/см}^2 = 4,126 \text{ Н/м}^2.$$

Кривая 1 представляет упругую работу мембраны. Она построена по формулам (5.117) и (5.121), которые дают совершенно одинаковые решения. Это совпадение объясняется тем, что в рассматриваемом случае примененный энергетический метод приводит к тем же самым результатам, что и метод Бубнова — Галеркина. Кривая 2 построена по формуле (5.122). Она незначительно отличается от прямой 3, полученной согласно теории малых пластических деформаций (5.123). Предлагаемое решение дает прямую 4, лежащую несколько ниже прямых 2 и 3.

Кривая, соответствующая предлагаемому решению при  $k=0,137$  [формула (5.118)], при больших перемещениях лежит между кривыми, соответствующими крайним значениям параметра  $k=1$  и  $k=0$ , что физически совершенно естественно. Как и следовало ожидать, при больших прогибах

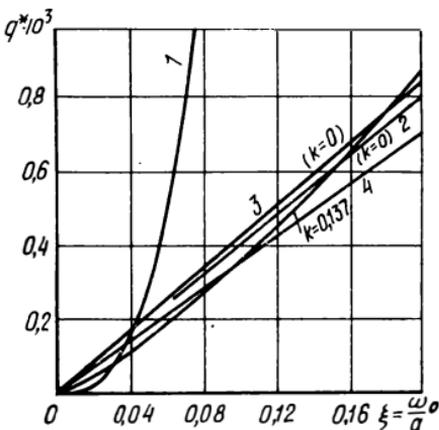


РИС. 80

она дает большее значение нагрузки, чем решение для жестко-пластической системы (5.119)<sup>1</sup>.

Для жестко-пластической мембраны решение можно получить более простым путем. Для пластинки можно с известной точностью принять

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (5.124)$$

Эта формула получается из (5.186) путем преобразования:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y},$$

Если выражение  $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$  вынесем за знак радикала, то получим:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y}{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2}}.$$

При поперечной нагрузке деформации  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  в каждой точке пластинки однозначны. Поэтому величина  $\frac{\frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y}{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2}$  невелика по сравнению с единицей и ее можно отбросить. Выполнив это, получим формулу (5.124). Значение интенсивности деформаций, определяемое по этой формуле, может отличаться от точного значения на 13%. Интересно отметить, что, несмотря на это, применяя формулу (5.124) для вычисления энергии упругой пластинки (при  $k=1$ ), мы получим точное значение энергии для тех случаев граничных условий, для которых выведены формулы (4.151).

Подставляя в формулу (5.124) значения деформаций по двум первым формулам (4.16), получим:

$$e \approx \frac{2}{\sqrt{3}} (e_x + \chi_x z + e_y + \chi_y z) = \frac{2}{\sqrt{3}} (e + \chi z). \quad (5.125)$$

Здесь:

$$e = e_x + e_y; \quad \chi = \chi_x + \chi_y. \quad (5.126)$$

<sup>1</sup> Предложенное решение разработано под руководством автора в диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук В. М. Проскуриной [69, 70].

После подстановки (5.124) в (5.188) и соответствующего интегрирования энергия деформации принимает вид:

$$U = \frac{2\sigma_T h}{\sqrt{3}} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} e_i dx dy. \quad (5.127)$$

Из формул (5.109):

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ e_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.128)$$

Примем:

$$u = c\bar{u}; \quad v = c_1\bar{v}; \quad w = w_0\bar{w}. \quad (5.129)$$

Подставив (5.129) в (5.127), найдем:

$$U = \frac{2\sigma_T h}{\sqrt{3}} \left[ cI_1 + c_1I_2 + \frac{w_0^2}{2} I_3 \right], \quad (5.130)$$

где

$$I_1 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{d\bar{u}}{dx} dx dy; \quad (5.131)$$

$$I_2 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dx dy; \quad (5.132)$$

$$I_3 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (5.133)$$

Изменение потенциала внешних сил

$$V = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q w_0 \bar{w} dx dy = q w_0 I_4. \quad (5.134)$$

Здесь

$$I_4 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \bar{w} dx dy. \quad (5.135)$$

Пределы интегрирования в этих интегралах представлены в соответствии с рис. 79.

Полная энергия деформации

$$\mathfrak{E} = U - V = \frac{2\sigma_c h}{\sqrt{3}} \left( cI_1 + c_1 I_2 + \frac{\omega_0^2}{2} I_3 \right) - q\omega_0 I_4. \quad (5.136)$$

Дифференцируя [5.136] по  $\omega_0$  и приравнявая производную нулю, найдем связь между напряжениями и деформациями

$$d = \frac{2\sigma_c h}{\sqrt{3}} \frac{I_3}{I_4} \omega_0. \quad (5.137)$$

Нагрузка зависит линейно от прогиба, что согласуется с опытом. Ее значение определяется из отношения интегралов  $I_3/I_4$ , в которые не входят функции продольных перемещений  $u$  и  $v$ . Это недостаток решения, связанный с применением приближенной формулы (5.124).

Отношение  $I_3/I_4$  зависит от выбранной функции прогибов. Зададим эту функцию в виде

$$\omega = \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y, \quad (5.138)$$

где  $\bar{\omega}_x$  и  $\bar{\omega}_y$  — функции только одного переменного.

Проследим, как изменяется отношение  $I_3/I_4$  в зависимости от характера выбранных функций  $\bar{u}_x$  и  $\bar{\omega}_y$ . Зададимся сначала функцией прогибов в весьма грубом виде так, как показано на рис. 81,  $\bar{a}$  — функция  $\omega_x$ ;  $\bar{b}$  — ее производная (81). Функция  $\bar{\omega}_y$  и ее производная имеют аналогичный вид, только  $a$  заменяется на  $b$ . Интегралы  $I_3$  и  $I_4$  в этом случае будут равны:

$$I_3 = \frac{4}{3} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right); \quad (5.139)$$

$$I_4 = ab. \quad (5.140)$$

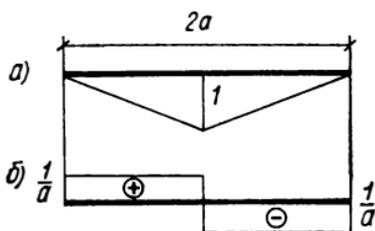


РИС. 81

Подставив (5.139) в (5.137), получим:

$$q = \frac{8\sigma_c h}{3\sqrt{3}} \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{ab} \omega_0. \quad (5.141)$$

Для квадратной пластинки ( $b=a$ ):

$$q = \frac{16\sigma_T h}{3a^2 \sqrt{3}} w_0; \quad (5.142)$$

$$w_0 = \frac{3 \sqrt{3}}{16} \frac{qa^2}{\sigma_T h} = 0,325 \frac{qa^2}{\sigma_T h}. \quad (5.143)$$

Если задаться функциями  $\bar{w}_x$  и  $\bar{w}_y$  в виде

$$\bar{w}_x = \sin \frac{\pi x}{2a}; \quad \bar{w}_y = \sin \frac{\pi y}{2b}, \quad (5.144)$$

то интегралы  $I_3$  и  $I_4$  получают другие значения:

$$I_3 = \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right); \quad (5.145)$$

$$I_4 = \frac{16ab}{\pi^2}. \quad (5.146)$$

Формула (5.137) примет вид:

$$q = \frac{\pi^4 \sigma_T h}{32 \sqrt{3}} \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{ab} w_0. \quad (5.147)$$

Для квадратной пластинки

$$q = \frac{\pi^4}{16 \sqrt{3}} \frac{\sigma_T h}{a^2} w_0, \quad (5.148)$$

$$w_0 = \frac{16 \sqrt{3}}{\pi^4} \frac{qa^2}{\sigma_T h} = 0,2845 \frac{qa^2}{\sigma_T h}. \quad (5.149)$$

Сравнивая формулы (5.142) и (5.147) или (5.143) и (5.149), приходим к выводу, что разница между ними не так уж велика, учитывая значительные расхождения между функциями прогибов. Полученное решение (5.149) незначительно отличается от (5.122) и (5.123).

## 6. Приближенный метод расчета физически и геометрически нелинейных пластинок и пологих оболочек

Приближенный метод расчета можно построить исходя из упрощенной формулы (5.124) для интенсивности деформаций, которая соответствует формулам (4.170). Нужно иметь в виду, что к расчету оболочек

эта формула применима не всегда, в частности, использование ее для оболочек с несмещающимися краями может привести к существенным погрешностям. Для оболочек со смещающимися кромками ее можно применять с известной точностью.

Подставив значение интенсивности деформаций по формуле (5.124) в (5.88), получим выражение для работы внутренних сил:

$$U = \frac{2^{k+1}}{(k+1) 3^{\frac{k+1}{2}}} \iiint_{-h/2}^{+h/2} (e + \chi z)^{k+1} dx dy dz. \quad (5.150)$$

После интегрирования по  $z$

$$U = \frac{2^{k+1} A}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+1}{2}}} \iint \frac{\left(e + \chi \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e - \chi \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{\chi} dx dy. \quad (5.151)$$

Здесь двойной интеграл берется по всей площади опорного плана оболочки. Не заботясь об особой точности, поставим себе задачу найти общий характер зависимости между нагрузкой и прогибом. Для этого при вычислениях по кубатурной формуле [51] ограничимся только одной нулевой точкой:

$$U = \frac{2^{k+4} A}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}}} \frac{\left(e_0 + \chi_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2} - \left(e_0 - \chi_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{\chi_0}. \quad (5.152)$$

В этой формуле  $e_0$  и  $\chi_0$  — значения величин (5.126) в точке  $c$  с координатами  $(a/2, b/2)$  (см. рис. 79). Далее, принимая во внимание формулы (5.126), будем иметь:

$$e_0 = (e + e_1) a_0 - (k_x + k_y) \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_0 - \frac{\omega_0^2}{2} b_0, \quad (5.153)$$

где  $a_0$ ,  $\bar{\omega}_0$  и  $b_0$  — некоторые неизвестные коэффициенты. Они выражают значения функций  $u$ ,  $v$  и  $w$  и их производных в точке  $c$  с координатами  $(a/2, b/2)$ . Через  $\omega_0$  обозначен прогиб в середине оболочки. При составлении формулы (5.153) приняты:

$$u = c \bar{u}; \quad v = c_1 \bar{v}; \quad w = \omega_0 \bar{\omega}_0.$$

Следующее допущение будет заключаться в том, что связь между коэффициентами  $c$ ,  $c_1$  и  $\omega_0$  принимаем в соответствии с линейной теорией. Для этого примем:

$$\left. \begin{aligned} c &= \omega_0 k_x a_1 - \frac{\omega_0^2}{2} a_2; \\ c_1 &= \omega_0 k_y b_1 - \frac{\omega_0^2}{2} b_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.154)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  — также некоторые коэффициенты, подлежащие определению.

Складываем равенства (5.154):

$$c + c_1 = \omega_0 (k_x + k_y) (a_1 + b_1) - \frac{\omega_0^2}{2} (a_2 + b_2). \quad (5.155)$$

Далее подставляя (5.155) в первое равенство (5.153), получим:

$$e_0 = \omega_0 (k_x + k_y) s + \frac{\omega_0^2}{2} m. \quad (5.156)$$

Здесь введены обозначения:

$$(a_1 + b_1) a_0 - \bar{\omega}_0 = s; \quad b_0 - (a_2 + b_2) a_0 = m. \quad (5.157)$$

Принимая во внимание формулу (5.88) для работы внешних сил, с учетом зависимости (5.157), найдем выражение для полной энергии системы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{2^{k+1} Aab}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}}} \frac{\left(e_0 + \chi_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2} \left(e_0 - \chi_0 \frac{h}{2}\right)^{k+2}}{\chi_0} - \\ & - q\omega_0 \frac{16ab}{\pi^2}. \end{aligned} \quad (5.158)$$

Взяв производную по  $\omega_0$ , получим зависимость между нагрузкой и прогибом, которая после подстановки значений (5.156) примет следующий вид (формула написана для цилиндрической квадратной в плане оболочки при  $k_y = 0$ ;  $b = a$ ):

$$q = \frac{2^k \pi^2 A}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}}} \frac{B^{k+1} [c\omega_0 (k+2) - B] - \bar{B}^{k+1} [\bar{c}\omega_0 (k+2) - \bar{B}]}{\omega_0^2 c_0}. \quad (5.159)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} B &= \omega_0 k_x s + \frac{\omega_0^2}{2} m + \frac{h}{2} c_0 \omega_0; \\ \bar{B} &= \omega_0 k_x s + \frac{\omega_0^2}{2} m - \frac{h}{2} c_0 \omega_0; \\ c &= \omega_0 b_0 - \omega k_x + \frac{h}{2} c_0; \\ \bar{c} &= \omega_0 b_0 - \omega k_x - \frac{h}{2} c_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.160)$$

(величины  $s$ ,  $m$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $\omega_0$  по-прежнему неизвестны).

Введем безразмерные параметры:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{q(2a)^4}{Eh^4}; \quad \frac{\omega_0}{h} = \xi; \quad \frac{f_0}{h} = \xi_0; \\ k_x &= \frac{1}{R} \approx \frac{2f_0}{a^2} = \frac{2\xi_0 h}{a^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.161)$$

где  $f_0$  — начальный подъем оболочки;  $a$  — половина стороны опорного квадратного плана оболочки.

Примем в соответствии с их размерностью:

$$m = \frac{\bar{m}}{a^2}; \quad b_0 = \frac{\bar{b}_0}{a^2}; \quad c_0 = \frac{\bar{c}_0}{a^2}, \quad (5.162)$$

Подставим (5.161) и (5.162) в (5.159):

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{h^2}{a^2} \left( 2s\xi_0 + \frac{m}{2} \xi + \frac{\bar{c}_0}{2} \right) = \frac{h^2}{a^2} b^* \xi; \\ \bar{B} &= \frac{h^2}{a^2} \left( 2s\xi_0 + \frac{m}{2} \xi - \frac{\bar{c}_0}{2} \right) = \frac{h^2}{a^2} \bar{b}^* \xi; \\ c &= \frac{h}{a^2} \left( \bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi_0 + \frac{\bar{c}_0}{2} \right) = \frac{h}{a^2} c^*; \\ \bar{c} &= \frac{h}{a^2} \left( \bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi - \frac{\bar{c}_0}{2} \right) = \frac{h}{a^2} \bar{c}^*. \end{aligned} \right\} \quad (5.163)$$

А после подстановки (5.161) и (5.163) в (5.159) получим:

$$\begin{aligned} \rho &= D_k \{ (b^*)^{k+1} [\bar{c}^* (k+2) - b^*] - \\ &\quad - (\bar{b}^*)^{k+1} [\bar{c}^* (k+2) - \bar{b}^*] \} \xi^k, \end{aligned} \quad (5.164)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b^* &= 2s\xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi + \frac{\bar{c}_0}{2}; \\ \bar{b}^* &= 2s\xi_0 + \frac{\bar{m}}{2} \xi - \frac{\bar{c}_0}{2}; \\ c^* &= \bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi_0 + \frac{\bar{c}_0}{2}; \\ \bar{c}^* &= \bar{b}_0 \xi - 2\bar{\omega}_0 \xi_0 - \frac{\bar{c}_0}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (5.165)$$

$$D_k = \frac{A}{E} \frac{2^{k+4} \pi^2}{(k+1)(k+2) 3^{\frac{k+3}{2}} \bar{c}_0} \left( \frac{a}{h} \right)^{2(1+k)} \quad (5.166)$$

Формула (5.164) выражает общую зависимость между безразмерными параметрами нагрузки  $p$  и прогибом  $\xi$  с точностью до неизвестных пока коэффициентов  $\bar{m}$ ,  $\bar{b}_0$ ,  $s$ ,  $\bar{\omega}_0$  и  $\bar{c}_0$ . Эти коэффициенты найдем из следующих условий:

1) при  $k=0$ ;  $A=\sigma_T$ ;  $\xi_0=0$  формула (5.164) должна приводить к полученному ранее решению для жесткопластической пластинки (5.170) с заменой  $\sigma_T$  на  $\sigma_{\text{пн}}$ :

$$q = \frac{\pi^4 \sigma_{\text{пн}} \omega_0 h}{16a^2 \sqrt{3}}; \quad (5.167)$$

2) при  $k=1$ ;  $A=E$  формула (5.164) должна давать решение (5.50) для упругой оболочки:

$$p = \alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 \xi_0 + \alpha_3 \xi \xi_0^2 + \alpha_4 \xi. \quad (5.168)$$

Составляя из (5.164) условия 1 и 2, получим две зависимости между прогибом и нагрузкой:

1)  $k=0$ ;  $A=\sigma_{\text{пн}}$ :

$$q = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{\bar{b}_0 \omega_0 h}{a^2} \sigma_{\text{пн}}; \quad (5.169)$$

2)  $k=1$ ;  $A=E$ :

$$\begin{aligned} p = & \frac{16\pi^2}{9} \bar{m} \bar{b}_0 \xi^3 + \frac{32}{9} \pi^2 (2s \bar{b}_0 - \bar{m} \bar{\omega}_0) \xi_0 \xi^2 - \\ & - \frac{128 \pi^2}{9} s \bar{\omega}_0 \xi_0^2 \xi + \frac{8\pi^2}{27} \bar{c}_0^2 \xi. \end{aligned} \quad (5.170)$$

Сравнивая (5.168) с (5.142) и (5.170) с (5.168), получим пять уравнений для определения пяти коэффициентов  $\bar{b}_0$ ,  $\bar{m}$ ,  $s$ ,  $\bar{\omega}_0$  и  $\bar{c}_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_0 &= \frac{3\pi^2}{16}; \quad \frac{16\pi^2}{9} \bar{b}_0 \bar{m} = \alpha_1; \\ \frac{32\pi^2}{9} (2s \bar{b}_0 - \bar{m} \bar{\omega}_0) &= \alpha_2; \\ -\frac{128\pi^2}{9} \bar{\omega}_0 s &= \alpha_3; \quad -\frac{8\pi^2}{27} \bar{c}_0^2 = \alpha_4. \end{aligned} \right\} \quad (5.171)$$

Решая эту систему, найдем коэффициенты  $\bar{b}_0$ ,  $\bar{m}$ ,  $s$ ,  $\bar{\omega}_0$  и  $\bar{c}_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_0 &= \frac{3\pi^2}{16}; \quad \bar{m} = \frac{3\alpha_1}{\pi^4}; \quad s = \frac{3\alpha_2}{8\pi^4} \beta_{1,2}; \\ \bar{\omega}_0 &= -\frac{3\pi^2}{16} \frac{\alpha_3}{\alpha_2 \beta_{1,2}} = \frac{3\pi^2}{64} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_{1,2}; \\ \bar{c}_0 &= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\alpha_4}}{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (5.172)$$

В этих формулах

$$\beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2^2}}. \quad (5.173)$$

Так как коэффициент  $\beta_{1,2}$  имеет два значения, то и зависимостей (5.173) будет также две. Из них за расчетную выбирают ту, которая при одинаковых прогибах дает наименьшее значение нагрузки.

Таким образом, все допущенные неточности и приближения в некоторой степени скомпенсированы условиями 1 и 2, т. е. требованием, чтобы полученная приближенная зависимость (5.164) точно удовлетворяла решениям при крайних значениях показателя  $k$ :  $k=0$  и  $k=1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки. М., «Наука», 1976.
2. Александровский С. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при больших прогибах. — В сб.: Расчет пространственных конструкций. М., Стройиздат, 1955, вып. 3.
3. Безухов Н. И. Основы теории сооружений, материал которых не следует закону Гука. — Труды Московского автодорожного ин-та. М., Гострансиздат, 1936, № 4.
4. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1961.
5. Бельский Г. Е. Устойчивость центрально сжатых стержней и рам в упругопластической стадии. — Труды ЦНИИСК. М., Госстройиздат, 1961, вып. 7.
6. Божинский А. Н., Вольмир А. С. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек за пределом упругости. ДАН СССР, 1962, т. 142, № 2.
7. Божкова Л. В. Расчет сферического резервуара, лежащего на жестком основании, при больших прогибах. — В сб.: Нелинейные задачи сопротивления материалов. М., 1967, вып. 54 (Труды МИСИ).
8. Бондарь Н. Г. Нелинейные автономные системы строительной механики. М., Стройиздат, 1972.
9. Броуде Б. М. Роль нелинейных задач в расчете конструкций. — В сб.: Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. Тарту, изд. Тартуского ун-та, 1966.
10. Власов В. З. Общая теория оболочек. М. — Л., ГИТТЛ, 1949.
11. Власов В. З. Некоторые задачи сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН, М., 1950, № 9.
12. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
13. Вольмир А. С. Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек за период с 1941 по 1957 г. — В сб.: Расчет пространственных конструкций. М., Госстройиздат, 1958, вып. 4.
14. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963.
15. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
16. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, изд. Казанского ун-та, 1975.
17. Галимов К. З. Нелинейная теория оболочек типа Тимошенко. — В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, изд. Казанского ун-та, 1975, вып. 11.
18. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М., Стройиздат, 1949.
19. Геммерлинг А. В. Расчет стержневых систем. М., Стройиздат, 1974.

20. **Гениев Г. А., Чаусов Н. С.** Некоторые вопросы нелинейной теории устойчивости пологих металллических оболочек. Научное со-общение ЦНИИПС. М., Госстройиздат, 1954, вып. 13.
21. **Гениев Г. А.** Некоторые задачи расчета стержней при общей нелинейной зависимости напряжений от деформаций.— В сб. статей ЦНИИПС. М., Госстройиздат, 1956.
22. **Гольденблатт И. И.** Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М., Гостехиздат, 1955.
23. **Гольденблатт И. И.** Нелинейные проблемы теории упругости. М., «Наука», 1969.
24. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехтеориздат, 1953.
25. **Григолюк Э. И.** Об учете сжимаемости материала при определении нижних критических нагрузок. Изв. АН СССР, ОТН, М., 1958, № 5, с. 104—105.
26. **Григолюк Э. И.** Устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации. Изв. АН СССР, ОТН. мех. и маш. М., 1960, № 6.
27. **Грин А., Адкинс Дж.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
28. **Григорьев А. С.** Большие прогибы прямоугольных мембран. Изв. АН СССР, ОТН. мех. и маш. М., 1959, № 3.
29. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.
30. **Ильюшин А. А.** О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред.— ПММ, т. XVIII, 1954.
31. **Каудерер Г.** Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.
32. **Качанов Л. М.** Упругопластическое состояние твердых тел.— ПММ, т. V, вып. 3. М., 1941.
33. **Келли А.** Высокопрочные материалы. М., «Мир», 1976.
34. **Клюшников В. П.** Изгиб прямоугольных пластинок с учетом больших прогибов.— Инж. сборник АН СССР, т. XXIV. М., 1956.
35. **Колтунов М. А.** Изгиб прямоугольных пластинок с учетом больших прогибов.— Инж. сборник АН СССР, т. XIII. М., 1952.
36. **Колтунов М. А.** О зависимости нагрузка-прогиб для гибких пологих оболочек.— Науч. докл. высш. школы, физ.-мат. науки. М., «Советская наука», 1959, № 3.
37. **Колтунов М. А.** Устойчивость прямоугольных в плане гибких пологих оболочек.— В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, изд. Казанского гос. ун-та, 1970, вып. VI—VII.
38. **Корнишин М. С.** Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М., «Наука», 1964.
39. **Корнишин М. С.** О выборе выражений для касательных, составляющих перемещения при решении задач теории оболочек вариационными методами. Изв. Казанского фил. АН СССР, сер. физ.-мат. наук, № 12, 1958.
40. **Корнишин М. С., Исамбаева Ф. С.** Гибкие пластины и панели. М., «Наука», 1964.
41. **Корнишин М. С., Муштары Х. М.** Об одном алгоритме решения нелинейных задач теории пологих оболочек.— ПММ, т. XXIII, вып. 1. М., 1959.

42. **Кутилин Д. И.** Теория конечных деформаций. М., Гостехиздат, 1947.
43. **Лепик Ю. Р.** Равновесие гибких упругопластических пластинок при большом прогибе. — Инж. сборник АН СССР, т. XXIV. М., 1956.
44. **Лукаш П. А.** Об устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек. Науч. докл. высшей школы. Серия: «Стр-во». — «Советская наука», 1958, № 2.
45. **Лукаш П. А.** Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности. — В сб.: Расчет конструкций, работающих в упругопластической стадии. Под ред. А. В. Геммерлинга. М., Госстройиздат, 1961 (ЦНИИСК).
46. **Лукаш П. А.** Расчет пологих оболочек по нелинейной теории при различных граничных условиях. — Труды МИСИ им. В. В. Куйбышева. М., 1963.
47. **Лукаш П. А.** О нелинейной строительной механике (Краткий обзор задач и методов). — В сб.: Исследования по теории сооружений. М., Стройиздат, 1974, вып. 20.
48. **Лукаш П. А.** О некоторых зависимостях между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости. — В сб.: Исследования по теории сооружений. М., Стройиздат, 1975, вып. 21.
49. **Лурье А. И.** Теория упругости. М., «Наука», 1970.
50. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М. — Л., ОНТИ, 1935.
51. **Микеладзе Ш. Е.** Численные методы математического анализа. М., ГИТТЛ, 1953.
52. **Милейковский И. Е.** Расчет оболочек и складок методом перемещений. М., Госстройиздат, 1960.
53. **Муштары Х. М., Галимов К. З.** Нелинейная теория упругости оболочек. Казань, изд. Физ.-техн. ин-та Казанского фил. АН СССР, 1957.
54. **Муштары Х. М.** Об обратных краевых задачах нелинейной теории пологих оболочек. М., изд. АН СССР, 1957, № 1.
55. **Муштары Х. М.** Некоторые обратные краевые задачи нелинейной теории пологих оболочек вращения. Казань, Изв. Казанского фил. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1958, № 12.
56. **Муштары Х. М.** Работы казанских ученых по нелинейной теории оболочек после Великой Октябрьской социалистической революции. Казань, Изв. Казанского фил. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук 1958, вып. 2.
57. **Муштары Х. М., Суркин Р. Г.** Средний изгиб полой сферической панели, квадратной в плане, при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением. — Журнал прикл. и техн. физики, 1960, № 2, с. 162—165.
58. **Муштары Х. М., Суркин Р. Г.** Поперечный изгиб опертой квадратной пластинки при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением. Казань, изд. Казанского фил. АН СССР, сер. физ.-мат. наук, 1961, вып. 14.
59. **Нелинейные задачи расчета оболочек покрытий.** М., Стройиздат, 1976. Авт.: И. М. Милейковский, В. Д. Райзер, С. Х. Достанова, Р. И. Кашаев.

60. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
61. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л. — М., Гостехиздат, 1948.
62. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде.— ПММ, т. 15, 1951, вып. 2.
63. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М., изд. МГУ, 1963.
64. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М., изд. МГУ, 1969.
65. Онишвили О. Д. Приближенное решение некоторых задач нелинейной теории сферических оболочек.— Труды Ин-та строит. дела АН ГрузССР, т. 5. Тбилиси, 1955.
66. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967.
67. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов, изд. Саратовского ун-та, 1975.
68. Петров В. В., Овчинников И. Г., Ярославский В. И. Расчет пластинок и оболочек из нелинейно-упругого материала. Саратов, изд. Саратовского ун-та, 1976.
69. Проскурина В. М. Некоторые задачи расчета пластинок при нелинейной зависимости напряжений от деформации. — Науч. докл. высшей школы. Серия «Стр-во», № 3. М., «Советская наука», 1958.
70. Проскурина В. М. Учет физической нелинейности в задачах об изгибе гибких пластинок — Науч. докл. высшей школы. Серия: «Стр-во», № 2. «Советская наука», 1958.
71. Рабинович И. М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. М., Стройиздат, 1975.
72. Рабинович И. М. Соотношения взаимности для нелинейно-упругих систем, вытекающие из условия консервативности. — В сб.: Исследования по теории сооружений. М., Стройиздат, 1974, т. 10.
73. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М., ГИФМЛ, 1962.
74. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
75. Работягов Д. Д. Механика материалов при больших деформациях. Кишинев, «Штиинца», 1975.
76. Ржаницын А. Р. Приближенные решения задач теории пластичности. — Сб. статей ЦНИПС. М., Госстройиздат, 1956.
77. Ржаницын А. Р. Изгиб и сложное сопротивление прямоугольного сечения стержня при произвольной диаграмме работы материала — В сб.: Расчет тонкостенных пространственных конструкций. М., Стройиздат, 1964 (ЦНИИСК).
78. Ржаницын А. Р. Пологие оболочки и волнистые настилы (некоторые вопросы теории и расчета). М., Госстройиздат, 1960.
79. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. Изд. 2-е. М., Госстройиздат, 1954.
80. Слезингер И. Н. К теории гибких упругих пластин. — «Прикладная механика» АН УССР, т. 8, вып. 7. Киев, 1972.

81. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
82. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. М., «Наука», 1965.
83. Тимошенко С. П. Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев, «Наукова думка», 1975.
84. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов. М., ГИТТЛ, 1957.
85. Толоконников А. А. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости.— ПММ, 1956, вып. 20, № 3.
86. Федосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М., Оборонгиз, 1949.
87. Федосьев В. И. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек.— Труды VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
88. Филин А. П. Элементы теории оболочек. Л., Стройиздат, 1975.
89. Цурков И. С. К вопросу об упругопластическом изгибе металлических панелей пологих оболочек при конечных прогибах.— Инженерный журнал АН СССР, т. 1. М., 1961, вып. 1.
90. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. Киев, «Техника», 1976.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Введение : : : : : . . . . .	3
<b>Глава 1. Нелинейная теория деформаций</b>	
1. Определение деформаций . . . . .	10
2. Изменение деформаций при преобразовании координат . . . . .	18
3. Главные деформации . . . . .	21
4. Объемная деформация . . . . .	25
5. Разложение деформации на составляющие. Возможные упрощения и переход к линейной теории . . . . .	27
6. Разложение тензора деформаций на шаровой тензор и девиатор . . . . .	31
<b>Глава 2. Зависимость между напряжениями и деформациями</b>	
1. Зависимости между тензорами напряжений и деформаций. Удельная энергия деформаций . . . . .	34
2. Зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций. Аппроксимация экспериментальных кривых . . . . .	43
<b>Глава 3. Элементарные задачи нелинейной теории стержневых систем</b>	
1. Чистый изгиб балки . . . . .	62
2. Двухстержневая система . . . . .	85
3. Растяжение кольца и сферы . . . . .	98
4. О свойствах кривых состояния равновесия . . . . .	101
<b>Глава 4. Нелинейная теория пластинок и пологих оболочек</b>	
1. Основные гипотезы . . . . .	108
2. Дифференциальные уравнения геометрически нелинейных пластинок . . . . .	116
3. Дифференциальные уравнения геометрически нелинейных пологих оболочек . . . . .	128
4. Граничные условия . . . . .	137
5. Энергия деформации геометрически нелинейных оболочек . . . . .	141
6. Краткая характеристика расчетных методов . . . . .	145
<b>Глава 5. Приложения нелинейной теории к расчету пластинок и оболочек</b>	
1. Пологая сферическая оболочка . . . . .	152
2. Пологие оболочки при различных граничных условиях . . . . .	159
3. Замкнутая цилиндрическая оболочка, сжатая продольными силами . . . . .	176
4. Физически нелинейная, геометрически линейная деформация пластинки . . . . .	180
5. Общее решение для пластинки геометрически и физически нелинейной . . . . .	186
6. Приближенный метод расчета физически и геометрически нелинейных пластин и пологих оболочек . . . . .	193
Список литературы . . . . .	199

Печатается по решению секции литературы по строительной физике и конструкциям редакционного совета Стройиздата.

**Лукаш П. А.** Основы нелинейной строительной механики. М., Стройиздат, 1978. 204 с.

Изложены основы нелинейной строительной механики. Рассмотрены современные методы расчета различных конструкций (стержней, пластин, оболочек), представляющих собой геометрически и физически нелинейные системы. Приведены примеры расчета конструкций. Особое внимание обращено на методы расчета дважды нелинейных конструкций.

Книга предназначена для проектировщиков, инженерно-технических работников и преподавателей вузов.

Табл. 9, рис. 81, список лит.: 90 назв.

Петр Андреевич Лукаш

## ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Редакция литературы по строительным материалам и конструкциям  
Зав. редакцией И. А. Рабинович

Редактор Л. С. Элькинд

Мл. редакторы Л. А. Козий, Л. А. Табачник

Внешнее оформление художника О. Г. Ротмистрова

Технические редакторы Г. В. Климушкина, Н. В. Высотина

Корректоры Г. Г. Морозовская, Л. С. Апасова

ИБ № 535

---

Сдано в набор 25.X.1977 г. Подписано в печать 15.2.1978 г. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Бумага типографская № 2. 10,92 усл.-печ. л. (9,92 уч.-изд. л.). Тираж 6000 экз.  
Изд. № AVI—5573. Заказ № 329. Цена 50 коп.

---

Стройиздат,

103006, Москва, Каляевская ул., д. 23а

Владимирская типография Союзполиграфпрома при Государственном комитете  
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли

600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

**ТАБЛИЦА СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ЕДИНИЦАМИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН,  
ПОДЛЕЖАЩИМИ ИЗЪЯТИЮ, И ЕДИНИЦАМИ СИ**

Наименование величины	Единица				Соотношение единиц
	подлежащая изъятию		СИ		
	наименование	обозначение	наименование	обозначение	
Сила; нагрузка; вес	килограмм — сила тонна — сила грамм — сила	кгс тс гс	} ньютон	Н	1 кгс ~ 9,8 Н ~ 10 Н 1 тс ~ 9,8 · 10 <sup>3</sup> Н ~ 10 кН 1 гс ~ 9,8 · 10 <sup>-3</sup> Н ~ 10 мН
Линейная нагрузка Поверхностная нагрузка	килограмм—сила на метр килограмм — сила на квадратный метр	кгс/м кгс/м <sup>2</sup>			ньютон на метр ньютон на квадратный метр
Давление	килограмм — сила на квадратный сантиметр миллиметр водяного столба миллиметр ртутного столба	кгс/см <sup>2</sup>  мм вод. ст. мм рт. ст.	} паскаль	Па	1 кгс/см <sup>2</sup> ~ 9,8 · 10 <sup>4</sup> Па ~ ~ 10 <sup>5</sup> Па ~ 0,1 МПа 1 мм вод. ст. ~ 9,8 Па ~ ~ 10 Па 1 мм рт. ст. ~ 133,3 Па
Механическое напряжение Модуль продольной упругости; модуль сдвига; модуль объемного сжатия	килограмм — сила на квадратный миллиметр килограмм — сила на квадратный сантиметр	кгс/мм <sup>2</sup>  кгс/см <sup>2</sup>			} паскаль

Наименование величины	Единица				Соотношение единиц
	подлежащая взятию		СИ		
	наименование	обозначение	наименование	обозначение	
Момент силы; момент пары сил	килограмм—сила—метр	кгс·м	ньютон—метр	Н·м	1 кгс·м ~ 9,8 Н·м ~ ~ 10 Н·м
Работа (энергия)	килограмм—сила—метр	кгс·м	джоуль	Дж	1 кгс·м ~ 9,8 Дж ~ ~ 10 Дж
Количество теплоты	калория килокалория	кал ккал	джоуль	Дж	1 кал ~ 4,2 Дж 1 ккал ~ 4,2 кДж
Мощность	килограмм—сила—метр в секунду лошадиная сила калория в секунду килокалория в час	кгс·м/с  л. с. кал/с ккал/ч	} ватт	Вт	1 кгс·м/с ~ 9,8 Вт ~ ~ 10 Вт 1 л. с. ~ 735,5 Вт 1 кал/с ~ 4,2 Вт 1 ккал/ч ~ 1,16 Вт

Наименование величины	Единица				Соотношение единиц
	подлежащая изъятию		СИ		
	наименование	обозначение	наименование	обозначение	
<b>Удельная теплоемкость</b>	калория на грамм — градус Цельсия килокалория на кило- грамм — градус Цельсия	кал/ /(г·°С) ккал/ /(кг·°С)	джоуль на кило- грамм—кельвин	Дж/(кг × × К)	1 кал/(г·°С) ~ ~ 4,2 кДж/(кг·К) 1 ккал/(кг·°С) ~ ~ 4,2 кДж/(кг·К)
<b>Теплопроводность</b>	калория в секунду на сантиметр — градус Цельсия килокалория в час на метр — градус Цельсия	кал/ /с·см·°С) ккал/ /(ч·м·°С)	} ватт на метр — кельвин	Вт/(м·К)	1 кал/(с·см·°С) ~ ~ 420 Вт/(м·К) 1 ккал/(ч·м·°С) ~ ~ 1,16 Вт/(м·К)
<b>Коэффициент теплообме- на (теплоотдачи); ко- эффициент теплопере- дачи</b>	калория в секунду на квадратный сантиметр — градус Цельсия килокалория в час на квадратный метр—градус Цельсия	кал/ /(с·см <sup>2</sup> × × °С) ккал/(ч × × м <sup>2</sup> ·°С)			} ватт на квадрат- ный метр — кельвин