Лекции по векторному и тензорному анализу

М.В. Лосик

2007

Введение

Курс "Основы векторного и тензорного анализа"предназначен для студентов 2-го курса физических специальностей. Это пособие написано на основе многолетнего опыта чтения данного курса. Его первая часть – векторный анализ представляет собой изложение ряда понятий математического анализа с точки зрения пригодной для изучения физических процессов. В его основе лежит понятие независимости основных понятий, таких как скалярное и векторное поле, градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля и т. п., от выбора системы координат. Так как на втором курсе студенты знакомы только с понятием трехмерного евклидова пространства – модельного пространства для классической ньютоновой механики, то приходится ограничиться изложением векторного анализа в этом пространстве, считая заданной структуру этого пространства. Это позволяет использовать векторную алгебру, включая скалярное, векторное и смешанное произведения. Вторая часть курса включает в себя только элементы тензорной алгебры - определение тензоров произвольного типа в действительном линейном пространстве, примеры тензоров, основные операции над тензорами и понятие тензорного поля в трехмерном евклидовом пространстве. Фактическое применение этих понятий предполагается в будущих физических дисциплинах.

Предполагается, что читатель знаком с дифференциальным и интегральным исчислением в многомерном арифметическом пространстве, векторной алгеброй на плоскости и в пространстве и элементами линейной алгебры, в частности, с понятиями n-мерного линейного (векторного) пространства, его базиса, линейного оператора и матрицы линейного оператора. Доказательства проводятся на уровне строгости привычном для физиков, т.е. мы пренебрегаем некоторыми деталями, которые считаются обязательными в математике.

В дальнейшем для краткости мы называем пространством трехмерное евклидово пространство, а плоскостью - двумерную плоскость этого пространства. Множество действительных чисел обозначается через $\mathbf{R}$, а n-мерное арифметическое пространство - через $\mathbf{R}^n$. Чтобы отличить векторы от скаляров, мы будем ставить над ними стрелки, например $\vec{a}$, или записывать их жирным шрифтом: **grad** или **rot**.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ далее обозначается через $(\vec{a}, \vec{b})$, векторное произведение этих векторов – через $[\vec{a}, \vec{b}]$ и смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – через $(\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c})$.

Глава 1.

Векторные функции скалярных переменных

1.1. Векторная функция скалярной переменной и ее предел

Пусть U - некоторая область в $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Говорят, что в области U задана векторная функция скалярного переменного t (или просто векторная функция), если для каждого $t \in U$ задан вектор $\vec{a}(t)$.*

Под словом вектор мы понимаем (свободный) вектор плоскости или пространства. В дальнейшем обычно область U - либо открытый (замкнутый) интервал, либо окрестность точки $t_0 \in \mathbf{R}$, либо окрестность точки $t_0 \in \mathbf{R}$ с выброшенной точкой t_0. Векторные функции будут обозначаться следующим образом: $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $\vec{r}(t)$ и т. п.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $(\vec{i}, \vec{j})$– ортонормированный базис в линейном пространстве векторов пространства (плоскости). Тогда векторная функция $\vec{a}(t)$ может быть задана уравнением

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k} \quad \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}\ ), \tag{1.1}$$

где $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ ($a_x(t), a_y(t)$) – координаты вектора $\vec{a}(t)$ относительно базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ($\vec{i}, \vec{j}$). Таким образом, векторная функция скалярного переменного $\vec{a}(t)$ однозначно определяется своими координатами.

Определение 2. *Пусть векторная функция $\vec{a}(t)$ определена в окрестности точки t_0 за исключением быть может точки t_0.*

Вектор $\vec{a}$ называется пределом векторной функции $\vec{a}(t)$ в точке t_0, если $\lim_{t\to t_0} |\vec{a}(t) - \vec{a}|$ существует и равен 0. Обозначение предела $\vec{a}(t)$ обычное: $\vec{a} = \lim_{t\to t_0} \vec{a}(t)$.

Заметим, что $|\vec{a}(t)-\vec{a}|$ является скалярной функцией переменной t, для которой предел имеет обычный смысл. Следовательно, $\vec{a} = \lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\,)\,(\,\exists\delta>0\,)\,(\,\forall t\neq t_0 \text{ и } |t-t_0|<\delta)\,)(\,|\vec{a}(t)-\vec{a}|<\varepsilon\,). \tag{1.2}$$

Теорема 1. *Пусть $\vec{a}(t)(\,a_x(t),a_y(t),a_z(t)\,)$ – векторная функция, определенная в окрестности точки t_0 за исключением быть может точки t_0, и $\vec{a}(\,a_x,a_y,a_z\,)$ – вектор, заданные своими координатами относительно базиса $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ $\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)$ существует и равен $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim_{t\to t_0}a_x(t)$, $\lim_{t\to t_0}a_y(t)$ и $\lim_{t\to t_0}a_z(t)$, которые равны соответственно a_x, a_y и a_z.*

Доказательство. Расмотрим очевидное равенство

$$|\vec{a}(t)-\vec{a}| = \sqrt{(a_x(t)-a_x)^2+(a_y(t)-a_y)^2+(a_z(t)-a_z)^2}. \tag{1.3}$$

Следовательно, мы имеем

$$|a_x(t)-a_x|,\ |a_y(t)-a_y|,\ |a_z(t)-a_z| \le |\vec{a}(t)-\vec{a}|.$$

Тогда, если предел $\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)$ существует и равен $\vec{a}$, то из (1.2) и (1.3) следует $\lim_{t\to t_0}a_x(t)=a_x$, $\lim_{t\to t_0}a_y(t)=a_y$ и $\lim_{t\to t_0}a_z(t)=a_z$.

Обратно, если $\lim_{t\to t_0}a_x(t)=a_x$, $\lim_{t\to t_0}a_y(t)=a_y$ и $\lim_{t\to t_0}a_z(t)=a_z$, то ввиду(1.3) из определения 2 следует $\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{a}$. □

Мы оставляем читателю сформулировать и доказать соответствующую теорему для векторной функции $\vec{a}(t)$ со значениями в множестве векторов плоскости. Впрочем ее доказательство вытекает из доказательства теоремы 1, если положить $a_z(t)=a_z=0$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся формулировками и доказательствами теорем только для случая, когда векторная функция $\vec{a}(t)$ принимает значения в множестве векторов пространства.

Лемма 1. *Если $\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{a}$, то $\lim_{t\to t_0}|\vec{a}(t)|=|\vec{a}|$.*

Доказательство. Доказательство следует из неравенства

$$||\vec{a}(t)|-|\vec{a}|| \le |\vec{a}(t)-\vec{a}|,$$

вытекающего из определения разности векторов и свойства сторон треугольника, и определения 1. □

Теперь мы получим формальные свойства предела векторной функции. Прежде всего заметим, что если $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $\vec{c}(t)$ – векторные функции и $k(t)$ – скалярная функция, определенные в одной области U, то естественным образом можно рассматривать $\vec{a}(t)+\vec{b}(t)$, $k(t)\,\vec{a}(t)$ и $[\vec{a}(t),\,\vec{b}(t)]$ как векторные функции, а $(\,\vec{a}(t),\vec{b}(t)\,)$ и $(\,\vec{a}(t)\,,\vec{b}(t)\,,\vec{c}(t)\,)$ как скалярные функции, определенные в области U. Напомним, что $(\,\vec{a},\vec{b}\,)$ обозначает скалярное, $[\vec{a},\,\vec{b}]$ – векторное, а $(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})$ – смешанное произведение.

Теорема 2. *Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $\vec{c}(t)$ – векторные функции и $k(t)$ – скалярная функция, определенные в окрестности точки t_0 за исключением быть может точки t_0, имеющие пределы в этой точке. Тогда функции $\vec{a}(t)+\vec{b}(t)$, $k(t)\,\vec{a}(t)$, $[\vec{a}(t),\,\vec{b}(t)]$, $(\vec{a}(t)\,\vec{b}(t))$ и $(\vec{a}(t)\,,\vec{b}(t)\,,\vec{c}(t))$ имеют предел в точке t_0 и имеют место следующие равенства :*

1) $\lim_{t\to t_0}(\,\vec{a}(t)+\vec{b}(t)\,)=\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)+\lim_{t\to t_0}\vec{b}(t)$*;*

2) $\lim_{t\to t_0}(\,k(t)\,\vec{a}(t)\,)=\lim_{t\to t_0}k(t)\,\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)$*;*

3) $\lim_{t\to t_0}(\,\vec{a}(t),\,\vec{b}(t)\,)=(\,\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t),\,\lim_{t\to t_0}\vec{b}(t)\,)$*;*

4) $\lim_{t\to t_0}[\,\vec{a}(t),\,\vec{b}(t)\,]=[\,\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t),\,\lim_{t\to t_0}\vec{b}(t)\,]$*;*

5) $\lim_{t\to t_0}(\vec{a}(t),\vec{b}(t),\vec{c}(t))=(\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t),\lim_{t\to t_0}\vec{b}(t))\lim_{t\to t_0}\vec{c}(t))$.

Доказательство. Рассмотрим некоторый положительный ортонормированный базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ и зададим векторные функции $\vec{a}(t)$ и $\vec{b}(t)$ своими координатами относительно этого базиса : $\vec{a}(t)(\,a_x(t),\,a_y(t),\,a_z(t)\,)$ и $\vec{b}(t)(\,b_x(t),\,b_y(t),\,c_z(t)\,)$. Тогда доказательства нашей теоремы для случаев 1), 2), 3) и 4) следуют из теоремы 1 и следующих известных выражений функций $\vec{a}(t)+\vec{b}(t)$, $k(t)\,\vec{a}(t)$, $(\,\vec{a}(t),\vec{b}(t)\,)$ и $[\vec{a}(t),\,\vec{b}(t)]$ в координатах:

$$(\vec{a}(t)+\vec{b}(t))(\,a_x(t)+b_x(t),\,a_y(t)+b_y(t),\,a_z(t)+b_z(t)\,), \tag{1.4}$$

$$(k(t)\,\vec{a}(t))(\,k(t)\,a_x(t),\,k(t)\,a_y(t),\,k(t)a_z(t)\,), \tag{1.5}$$

$$(\,\vec{a}(t),\vec{b}(t)\,)=a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)+a_z(t)b_z(t), \tag{1.6}$$

$$[\vec{a}(t),\,\vec{b}(t)]\left(\begin{vmatrix}a_y(t) & a_z(t)\\ b_y(t) & b_z(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z(t) & a_x(t)\\ b_z(t) & b_x(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x(t) & a_y(t)\\ b_x(t) & b_y(t)\end{vmatrix}\right) \tag{1.7}$$

Доказательство 5) следует из свойств 3), 4) и определения смешанного произведения: $(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})=([\vec{a},\,\vec{b}],\,\vec{c})$. □

1.2. Непрерывность и дифференцируемость векторной функции скалярного переменного

Пусть векторная функция $\vec{a}(t)$ определена в окрестности точки t_0.

Определение 3. *Векторная функция $\vec{a}(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если $\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)$ существует и равен $\vec{a}(t_0)$.*

Разность $\Delta\vec{(}t_0) = \vec{a}(t_0+\Delta t) - \vec{a}(t_0)$, где $\Delta t = t - t_0$, называется приращением векторной функции $\vec{a}(t)$ в точке t_0. Согласно определению, $\vec{a}(t)$ является непрерывной в точке t_0 тогда и только тогда, когда $\lim_{t\to t_0}\Delta\vec{a}(t_0) = 0$.

Пусть векторная функция $\vec{a}(t)$ задана в координатах:

$$\vec{a}(t)(\,a_x(t),\, a_y(t),\, a_z(t)\,).$$

Тогда из теоремы 1 следует, что $\vec{a}(t)$ является непрерывной в точке t_0 тогда и только тогда, когда координаты $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ непрерывны в точке t_0.

Наиболее важную в дальнейшем роль будет играть понятие дифференцируемости векторной функции скалярного переменного.

Определение 4. *Пусть векторная функция $\vec{a}(t)$ определена в окрестности точки t_0. Если существует предел*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}(t_0)}{\Delta t}$$

он называется производной векторной функции $\vec{a}(t)$ в точке t_0 и обозначается $\vec{a}'(t_0)$ или $\frac{d\vec{a}}{dt}(t_0)$. Функция $\vec{a}(t)$, имеющая производную в точке t_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Пусть, как и выше, векторная функция $\vec{a}(t)$ задана в координатах. Тогда выражение, стоящее под знаком предела в определении производной, имеет следующие координаты

$$\left(\frac{\Delta a_x(t_0)}{\Delta t}, \frac{\Delta a_y(t_0)}{\Delta t}, \frac{\Delta a_z(t_0)}{\Delta t},\right).$$

Следовательно, согласно теореме 1, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Векторная функция $\vec{a}(t)$ дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда ее координаты $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ дифференцируемы в этой точке. В этом случае производная $\vec{a}'(t_0)$ имеет координаты $a'_x(t_0), a'_y(t_0), a'_z(t_0)$.*

Теперь мы получим формальные свойства производной векторной функции.

Теорема 4. *Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$, $\vec{c}(t)$ – векторные функции и $k(t)$ – скалярная функция, дифференцируемые в точке t_0. Тогда функции $\vec{a}(t)+\vec{b}(t)$, $k(t)\,\vec{a}(t)$, $[\vec{a}(t), \vec{b}(t)]$, $(\,\vec{a}(t), \vec{b}(t)\,)$ и $(\vec{a}(t)\,, \vec{b}(t)\,, \vec{c}(t))$ дифференцируемы в точке t_0 и имеют место следующие равенства :*

1) $\left(\frac{d}{dt}(\vec{a}(t)+\vec{b}(t))\right)(t_0)=\vec{a}'(t_0)+\vec{b}'(t_0)$;

2) $\left(\frac{d}{dt}(k(t)\vec{a}(t))\right)(t_0)=k'(t_0)\vec{a}(t_0)+k(t_0)\vec{a}'(t_0)$;

3) $\left(\frac{d}{dt}(\vec{a}(t),\vec{b}(t))\right)(t_0)=(\vec{a}'(t_0),\vec{b}(t_0))+(\vec{a}(t_0),\vec{b}'(t_0))$;

4) $\left(\frac{d}{dt}[\vec{a}(t),\vec{b}(t)]\right)(t_0)=[\vec{a}'(t_0),\vec{b}(t_0)]+[\vec{a}(t_0),\vec{b}'(t_0)]$;

5) $\left(\frac{d}{dt}(\vec{a}(t),\vec{b}(t),\vec{c}(t))\right)(t_0) = (\vec{a}'(t_0),\vec{b}(t_0),\vec{c}(t_0)) + (\vec{a}(t_0),\vec{b}'(t_0),\vec{c}(t_0)) + (\vec{a}(t_0),\vec{b}(t_0),\vec{c}'(t_0))$.

Доказательство. Доказательство 1), 2), 3) и 4) проводятся прямой проверкой согласно теореме 3 и формулам (1.4), (1.5), (1.6) и (1.7). Доказательство 5) следует из (1.6) и (1.7) и определения смешанного произведения. □

Наконец, докажем теорему о сложной функции.

Теорема 5. *Пусть $u(t)$ – скалярная функция, дифференцируемая в точке t_0, и $\vec{a}(u)$ – векторная функция, дифференцируемая в точке $u_0 = u(t_0)$. Тогда сложная функция $\vec{a}(u(t))$ дифференцируема в точке t_0 и имеет место следующая формула:*

$$\left(\frac{d}{dt}(\vec{a}(u(t))\right)(t_0)=\vec{a}'(u_0)u'(t_0).$$

Доказательство. Запишем сложную функцию $\vec{a}(u(t))$ в координатах: $\vec{a}(u(t))(a_x(u(t)),\ a_y(u(t)),\ a_z(u(t)))$, где $a_x(u)$, $a_y(u)$ и $a_z(u)$ – координаты векторной функции $\vec{a}(u)$. Тогда доказательство теоремы следует из теоремы 3 и известной теоремы о производной сложной функции из математического анализа. □

1.3. Геометрические свойства производной векторной функции

Пусть O – некоторая точка пространства и $\vec{r}(t)$ – векторная функция. Множество концов векторов $\vec{r}(t)$, отложенных от точки O, называется **годографом** векторной функции $\vec{r}(t)$. В дальнейшем для краткости, говоря точка $\vec{r}(t)$, мы будем иметь в виду точку с радиусом-вектором $\vec{r}(t)$. Обычно годограф $\vec{r}(t)$ – это кривая в пространстве, а $\vec{r}=\vec{r}(t)$ – векторное параметрическое уравнение этой кривой. Поэтому переменную t часто называют параметром на этой кривой. Хотя годограф не определяет однозначно векторную функцию $\vec{r}(t)$, некоторые свойства этой функции могут быть интерпретированы как геометрические свойства годографа. Заметим, что при замене начальной точки O на точку $0'$, весь годограф сдвигается на вектор $\overrightarrow{OO'}$, что не изменяет его геометрических свойств.

При изменении параметра t точка годографа перемещается по нему, направление перемещения по годографу, происходящее при возрастании параметра, называется положительным, а противоположное направление – отрицательным.

Теорема 6. *Пусть функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0. Если вектор $\vec{r}'(t_0)$ отличен от нуля, то он направлен по касательной к годографу в точке $\vec{r}(t_0)$ в положительном направлении.*

Доказательство. Очевидно, что вектор $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ направлен по секущей к годографу в точке $\vec{r}(t_0)$. Следовательно, вектор $\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ также направлен по этой секущей. Легко проверить, что как при $\Delta t > 0$, так и при $\Delta t < 0$, вектор $\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ направлен в положительном направлении. Тогда, согласно определению касательной как предельного положения секущей и определения 4, вектор $\vec{r}'(t_0)$ направлен по касательной к годографу в точке $\vec{r}(t_0)$ в положительном направлении. □

Рассмотрим годограф векторной функции $\vec{r}(t)$, заданной на некотором интервале, и предположим, что длина дуги годографа между любыми двумя точками годографа определена. Выберем на годографе некоторую начальную точку M_0 и введем на годографе специальный параметр s, который называется длиной дуги. Если точка M получается из точки M_0 перемещением в положительном направлении, то поставим в соответствие точке M число s равное длине дуги $\overset{\smile}{M_0M}$; если точка M получается из точки M_0 перемещением в отрицательном направлении, то поставим в соответствие точке M число s равное длине дуги $\overset{\smile}{M_0M}$ со знаком минус. Очевидно, что таким образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками годографа и некоторым интервалом изменения переменной s. Поэтому композиция отображений $t \to \vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t) \to s$ определяет функцию $s = s(t)$. Найдем эту функцию.

Напомним известный результат из математического анализа. Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \le t \le b) \tag{1.8}$$

– уравнения кривой в пространстве в декартовой системе координат. Предположим, что функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, b]$. Тогда длина дуги этой кривой задается следующей формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt. \tag{1.9}$$

Очевидно, что годограф векторной функции $\vec{r}(t)$, определенной на промежутке $[a, b]$, в декартовой системе координат, началом которой служит точка O, определяется уравнениями (1.8). Применяя известную из аналитической геометрии формулу для абсолютной величины вектора и учитывая, что, согласно теореме 3, координатами вектора $\vec{r}'(t)$ служат $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$, можно переписать формулу (1.9) в виде: $l = \int_a^b |r'(t)|\,dt$. Отсюда сразу следует, что искомая функция $s = s(t)$ задается формулой

$$s = \int_{t_0}^{t} |r'(t)|\,dt, \tag{1.10}$$

где t_0 определяется условием, что $\vec{r}(t_0)$ – радиус-вектор начальной точки M_0. Действительно, формула (1.10) определяет s как длину дуги от точки M_0 до точки $\vec{r}(t)$ со знаком $+$, если $t > t_0$, и со знаком -, если $t < t_0$.

Теорема 7. *Если параметр s на годографе векторной функции $\vec{r}(s)$ является длиной дуги, то вектор $\vec{r}'(s)$ в точке $\vec{r}(s)$ является единичным вектором, направленным по касательной в точке $\vec{r}(s)$ в положительном направлении.*

Доказательство. Ввиду теоремы 6 достаточно доказать, что вектор $\vec{r}'(s)$ является единичным. Пусть параметр s отсчитывается от начальной точки $\vec{r}(s_0)$. Тогда формула (1.10) превращается в тождество

$$s \equiv \int_{s_0}^{s} |r'(s)|\,ds.$$

Дифференцируя это тождество по s, мы получаем $|\vec{r}'(s)| = 1$. □

1.4. Векторные функции многих переменных

В этом разделе мы кратко рассмотрим векторные функции многих скалярных переменных.

Пусть U – некоторая область в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Определение 5. *Говорят, что в области U задана векторная функция переменных $t_1, \ldots, t_n$, если каждой упорядоченной системе чисел $(t_1, \ldots, t_n) \in U$, поставлен в соответствие вектор пространства (или плоскости) $\vec{r}(t_1, \ldots, t_n)$.*

Пусть векторная функция $\vec{r}(t_1, \ldots, t_n)$ определена в окрестности точки $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_n^0)$.

Определение 6. *Пусть $i = 1, \ldots, n$. Частной производной векторной функции $\vec{r}(t_1, \ldots, t_n)$ по переменной t_i в точке t^0 называется производная*

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_i}(t^0) = \left(\frac{d}{dt} \vec{r}(t_1^0, \ldots, t_{i-1}^0, t, t_{i+1}^0, \ldots, t_n^0) \right) (t_i^0),$$

если она существует.

По определению частная производная $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_i}(t^0)$ является производной векторной функции $\vec{a}(t) = \vec{r}(t_1^0, \ldots, t_{i-1}^0, t, t_{i+1}^0, \ldots, t_n^0)$ и, следовательно, обладает всеми свойствами этой производной. В частности, пусть векторная функция $\vec{r}(t_1, \ldots, t_n)$ задана в координатах следующим образом: $\vec{r}(t_1, \ldots, t_n)(x(t_1, \ldots, t_n),\ y(t_1, \ldots, t_n),\ z(t_1, \ldots, t_n))$. Тогда частная производная $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_i}(t^0)$ имеет своими координатами $\frac{\partial x}{\partial t_i}(t^0)$, $\frac{\partial y}{\partial t_i}(t^0)$ и $\frac{\partial z}{\partial t_i}(t^0)$.

В дальнейшем мы будем использовать понятия непрерывно дифференцируемой некоторое число раз или даже аналитической функции $\vec{a}(t)$. Это означает, что ее координаты являются такими функциями. Ввести эти понятия независимо от системы координат не представляет труда.

1.5. Векторные параметрические уравнения поверхности в пространстве

Рассмотрим векторную функцию $\vec{r}(u, v)$ двух переменных u и v, заданную в некоторой области U пространства $\mathbf{R}^2$. Пусть O – некоторая точка пространства. Обычно множество концов векторов $\vec{r}(u, v)$ для всех значений u и v образует некоторую поверхность в пространстве, а уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ называется **векторным параметрическим уравнением** этой поверхности. Переменные u и v называются криволинейными координатами на поверхности.

Однако, для того чтобы заданная таким образом поверхность обладала некоторыми естественными свойствами поверхностей, потребуем выполнения некоторых дополнительных условий. В частности, мы будем считать, что в области U определены частные производные $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, которые непрерывны в этой области, причем $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны во всех точках U.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и пусть M_0 с радиусом-вектором $\vec{r}(u_0, v_0)$ – некоторая точка поверхности. Плоскость, проходящая через точку M_0 называется **касательной плоскостью** к поверхности в этой точке, если она содержит касательные в точке M_0 ко всем кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0.

Теорема 8. *Если частные производные $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ непрерывны в окрестности точки $\vec{r}(u_0, v_0)$ и неколлинеарны в этой точке, то в данной* *точке существует касательная плоскость к поверхности* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, *причем векторы* $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ *и* $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ *образуют базис на этой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим кривую на поверхности, заданную в криволинейных координатах уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$ и проходящую через точку $\vec{r}(u_0, v_0)$. Другими словами, данная кривая является годографом векторной функции $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ и $\vec{r}(t_0) = \vec{r}(u_0, v_0)$ для некоторого $t = t_0$. Тогда, согласно теореме 6, вектор

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0) \tag{1.11}$$

направлен по касательной к нашей кривой в точке $\vec{r}(u_0, v_0)$. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку $\vec{r}(u_0, v_0)$ и параллельную двум неколлинеарным векторам $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0, v_0)$. Согласно формуле 1.11, касательная к нашей кривой лежит в этой плоскости. Так как мы брали произвольную кривую, лежащую на поверхности и проходящую через точку $\vec{r}(u_0, v_0)$, то данная плоскость является касательной к поверхности в точке $\vec{r}(u_0, v_0)$. □

Пусть поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Согласно теореме 8, она имеет касательную плоскость в любой своей точке. Ортогональный к касательной плоскости к поверхности в точке M_0 единичный вектор называется **вектором нормали** поверхности в данной точке. Если $\vec{n}$ – вектор нормали поверхности в точке M_0, то, очевидно, $-\vec{n}$ – также вектор нормали поверхности в точке M_0. Согласно определению векторного произведения, вектор

$$\vec{n}(u, v) = \frac{[\vec{r}_u,\, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u,\, \vec{r}_v]|}(u, v) \tag{1.12}$$

является одним из двух векторов нормали к поверхности в точке $\vec{r}(u, v)$, причем этот вектор нормали непрерывно зависит от криволинейных координат u v, т.е. образует непрерывное поле векторов нормали на поверхности.

Говорят, что поверхность **ориентирована**, если на ней задано непрерывное поле векторов нормали, а выбор такого поля называется **ориентацией** поверхности. Таким образом, если поверхность задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, то на ней имеются две ориентации: одна задана уравнением(1.12), а другая отличается от нее знаком.

Поверхность в пространстве называется **замкнутой**, если она является границей некоторой ограниченной области пространства. Замкнутая поверхность имеет каноническую ориентацию, образованную нормалями, направленными наружу, т.е. в часть пространства внешнюю относительно нашей области.

1.6. Криволинейные системы координат

В курсе аналитической геометрии использовались различные системы координат в пространстве: декартова, аффинная, цилиндрическая и сферическая. Поскольку в приложениях необходимы и другие системы координат, мы введем общее понятие криволинейной системы координат в пространстве. Заметим, что при решении различных конкретных задач система координат выбирается в зависимости от данных этой задачи, причем зачастую выбор удачной системы координат существенно упрощает выкладки и выражение окончательных результатов.

Определение 7. *Пусть U – некоторая область пространства, а Δ – некоторая область в пространстве $\mathbf{R}^3$. Криволинейной системой координат в области U называется биективное (т.е. взаимно однозначное) отображение k области D на область Δ.*

Обозначим через u, v, w координаты точек в пространстве $\mathbf{R}^3$. Пусть для некоторой точки $M \in U$ $k(M) = (u,\, v,\, w) \in \Delta$. Согласно определению 7, заданием упорядоченной тройки чисел $(u,\, v,\, w)$ положение точки M однозначно определяется, и эти числа u, v, w называются криволинейными координатами точки M.

Данное выше определение криволинейной системы координат является для нас слишком общим. Пусть O – некоторая точка пространства и, следовательно, положение любой точки M пространства однозначно определяется ее радиусом-вектором $\vec{r}$. Мы далее будем рассматривать только такие криволинейные системы координат, которые определяются уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$, где $\vec{r}(u, v, w)$ – некоторая векторная функция трех переменных u, v, w, заданная в области Δ. Другими словами, уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ определяет обратное для k отображение Δ на U. Предположим также, что функция $\vec{r}(u, v, w)$ непрерывно дифференцируема достаточное число раз (обычно бесконечно дифференцируема или даже является аналитической функцией) и во всех точках области Δ векторы частных производных $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ и $\vec{r}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ являются некомпланарными, т.е. линейно независимыми. Это означает, что для любой точки области U тройка векторов $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ и $\vec{r}_w$ образует базис .

Выясним аналитический смысл указанных условий. Возьмем декартову систему координат (x, y, z) с началом в точке O. Пусть $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ – координаты вектора $\vec{r}(u, v, w)$. Условие линейной независимости векторов $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ и $\vec{r}_w$ записывается в координатах следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Согласно теореме о неявных функциях из математического анализа, разрешая уравнения

$$x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$$

относительно u, v, w (что можно сделать согласно определению 7) мы получаем функции $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, которые столько же раз непрерывно дифференцируемы сколько и функции

$$x(u, v, w), \quad y(u, v, w), \quad z(u, v, w).$$

Это означает, что заменяя в любой функции переменных x, y, z эти переменные их выражениями через u, v, w, мы получаем функцию столько же раз непрерывно дифференцируемую, сколько и исходная функция.

Определение 8. *Криволинейная система координат $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ называется **ортогональной**, если в любой точке области Δ векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$ попарно ортогональны. Для ортогональной криволинейной системы координат функции $H_u = |\vec{r}_u|$, $H_v = |\vec{r}_v|$, $H_w = |\vec{r}_w|$ называются коэффициентами Ламе.*

Часто для криволинейной системы координат вместо базиса $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$ используется базис

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{H_u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v}{H_v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\vec{r}_w}{H_w},$$

который по построению является ортонормированным. В дальнейшем зачастую бывает существенным, когда этот базис является положительным. Вообще говоря, этот базис зависит от точки области, т.е. он образует поле базиса в области U.

Криволинейные системы координат на плоскости определяются аналогично, и мы оставляем формулировку определений читателю.

Примеры криволинейных систем координат

Декартова система координат

Декартова система координат с началом в точке O определяется уравнением $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – базис данной системы координат. Тогда мы имеем $\vec{r}_x = \vec{i}$, $\vec{r}_y = \vec{j}$, $\vec{r}_z = \vec{k}$. Очевидно, что эта система координат является ортогональной, $H_x = H_y = H_z = 1$ и $\vec{e}_x = \vec{i}$, $\vec{e}_y = \vec{j}$, $\vec{e}_z = \vec{k}$. Для декартовой системы координат область U совпадает со всем пространством, а область Δ – с пространством $\mathbf{R}^3$.

Цилиндрическая система координат

Напомним, что цилиндрические координаты в пространстве обозначаются через ρ, φ, z,

$$\rho > 0, \quad ,0 \le \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbf{R}. \tag{1.13}$$

Для цилиндрической системы координат область U совпадает со всем пространством, из которого выброшена ось Oz, а область Δ определяется условиями (1.13).

Если выбрана декартова система координат, то ее координаты выражаются через координаты соответствующей цилиндрической системы координат с помощью известных формул:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Следовательно, цилиндрическая система координат задается уравнением

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k}.$$

Отсюда мы получаем

$$\vec{r}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}, \quad \vec{r}_\varphi = -\rho\sin\varphi\vec{i} + \rho\cos\varphi\vec{j}, \quad \vec{r}_z = \vec{k}.$$

Вычисляя скалярные произведения базисных векторов $\vec{r}_\rho$, $\vec{r}_\varphi$, $\vec{r}_z$ легко проверить, что цилиндрическая система координат является ортогональной, а, вычисляя коэффициенты Ламе, мы получаем

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1.$$

Если базис исходной декартовой системы координат является положительным, то смешанное произведение $(\vec{r}_\rho\vec{r}_\varphi\vec{r}_z) = \rho > 0$ и, следовательно, базис $\vec{r}_\rho\vec{r}_\varphi\vec{r}_z$ также является положительным.

Сферическая система координат

Напомним, что сферические координаты в пространстве обозначаются через r, θ, φ, z,

$$r > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{1.14}$$

Для сферической системы координат область U совпадает со всем пространством, из которого выброшена ось Oz, а область Δ определяется условиями (1.14). Если выбрана декартова система координат, то ее координаты выражаются через координаты соответствующей сферической системы координат с помощью известных формул:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Следовательно, сферическая система координат задается уравнением

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}.$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned}
\vec{r}_r &= \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\cos\varphi\vec{k},\\
\vec{r}_\theta &= r\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + r\cos\theta\sin\varphi\vec{j} - r\sin\theta\vec{k},\\
\vec{r}_\varphi &= -r\sin\theta\sin\varphi\vec{i} + r\sin\theta\cos\varphi\vec{j}
\end{aligned}$$

Вычисляя скалярные произведения базисных векторов $\vec{r}_r$, $\vec{r}_\theta$, $\vec{r}_\varphi$ легко проверить, что сферическая система координат является ортогональной, а, вычисляя коэффициенты Ламе, мы получаем

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta.$$

Если базис исходной декартовой системы координат является положительным, то смешанное произведение $(\vec{r}_r\vec{r}_\theta\vec{r}_\varphi) = r^2\sin\theta > 0$ и, следовательно, базис $\vec{r}_r, \vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi$ также является положительным.

Глава 2.

Скалярное поле

В этой главе мы изложим основные факты о скалярном поле.

2.1. Определение скалярного поля, градиент

Определение 9. *Пусть U – некоторая область пространства или плоскости. Говорят, что в области U задано скалярное поле φ, если каждой точке $M \in U$ поставлено в соответствие число $\varphi(M)$.*

Обозначение скалярного поля: $\varphi(M)$, $\psi(M)$ и т.п., или просто φ, ψ и т.п.

Примеры скалярных полей

1. Поле температуры $T(M)$. В каждой точке M задана температура $T(M)$ в этой точке.

2. Поле давления $H(M)$. В каждой точке M задано давление $H(M)$ в этой точке.

Пусть в области U пространства задана криволинейные координаты u, $v\,w$. Тогда скалярное поле φ задается в этой области функцией $\varphi = \varphi(u, v, w)$. В частности, в декартовых координатах мы получаем $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Для скалярного поля на плоскости в декартовых координатах мы имеем $\varphi = \varphi(x, y)$.

Множество точек, в которых скалярное поле принимает одно и то же значение называется **поверхностью уровня** для скалярного поля, заданного в пространстве, или **линией уровня** для скалярного поля, заданного на плоскости. Действительно, уравнение $\varphi(M) = \mathrm{const}$ обычно определяет в пространстве поверхность и на плоскости – линию.

Определение 10. *Пусть скалярное поле φ определено в окрестности точки M_0. Говорят, что скалярное поле φ дифференцируемо в точке*

M_0, если его приращение $\Delta\varphi(M_0) = \varphi(M) - \varphi(M_0)$ в точке M_0 можно представить в виде

$$\Delta\varphi(M_0) = (\vec{g}, \overrightarrow{M_0M}) + \alpha(\overrightarrow{M_0M})|\overrightarrow{M_0M}|, \tag{2.1}$$

где $\vec{g}$ - вектор, не зависящий от $\overrightarrow{M_0M}$, и $\alpha(\vec{x})$ – скалярная функция векторного аргумента $\vec{x}$ такая, что $\lim_{M\to M_0}\alpha(\overrightarrow{M_0M}) = 0$. Скалярное поле φ называется дифференцируемым в области D, если оно дифференцируемо в любой точке этой области.

Заметим, что $\lim_{M\to M_0}\alpha(\overrightarrow{M_0M}) = 0$ означает, что

$$(\,\forall\varepsilon > 0\,)\,(\,\exists\delta > 0\,)\,(\,\forall M)(|\overrightarrow{M_0M})| < \delta \mapsto |\alpha(\overrightarrow{M_0M})| < \varepsilon\,).$$

Запишем определение дифференцируемости 10 в декартовых координатах для скалярного поля в пространстве. Выразим все данные в декартовых координатах: $M(x, y, z)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$, $\vec{g}(A, B, C)$, $\overrightarrow{M_0M}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$. Тогда условие (2.1) записывается в виде

$$\Delta\varphi(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \tag{2.2}$$

Так как A, B, C – постоянные числа, то условие (2.2) означает, что функция $\varphi(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0. Тогда из определения дифференцируемости функции многих переменных из математического анализа известно, что числа A, B, C определены однозначно, причем

$$A = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0), \quad B = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0), \quad C = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0). \tag{2.3}$$

Следовательно, вектор $\vec{g}$ из определения дифференцируемости 10 определен однозначно. Это дает возможность дать следующее определение.

Определение 11. *Вектор $\vec{g}$, однозначно определенный определением дифференцируемости 10 называется градиентом скалярного поля φ в точке M_0 и обозначается через* $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0)$.

Мы определили градиент скалярного поля довольно формально. Однако это определение обладает существенным преимуществом инвариантности (т.е. независимости) от выбора системы координат. Далее мы выясним физический смысл градиента, получив его геометрические свойства.

Из равенств (2.3) вытекает следующее выражение градиента в декартовых координатах.

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \tag{2.4}$$

Мы оставляем читателю получить соответствующую формулу для градиента скалярного поля на плоскости.

2.2. Производная скалярного поля по направлению и геометрические свойства градиента

Пусть скалярное поле φ задано в окрестности точки M_0 и $\vec{\tau}$ – некоторый единичный вектор. Проведем через точку M_0 кривую, для которой вектор $\vec{\tau}$ является касательным в точке M_0, и выберем на этой кривой параметр s (длину дуги) так, чтобы вектор $\vec{\tau}$ был направлен в положительном направлении. Мы можем записать уравнение этой кривой в виде $M = M(s)$ или $\vec{r} = \vec{r}(s)$. В последнем случае, согласно теореме 7, мы имеем $\vec{r}'(s_0) = \vec{\tau}$, где $\vec{r}(s_0)$ – радиус-вектор точки M_0. Определим производную скалярного поля φ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{\tau}$ следующим образом.

Определение 12. *Производной скалярного поля φ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{\tau}$ называется число*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0) = \left(\frac{d}{ds}\varphi(M(s))\right)(s_0).$$

Определенная таким образом производная $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0)$ не всегда существует, а если и существует, то, вообще говоря, зависит от выбора кривой $M = M(s)$.

Теорема 9. *Если скалярное поле φ дифференцируемо в точке M_0, то в этой точке существует производная по любому направлению $\vec{\tau}$, для которой имеет место формула*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0) = (\mathbf{grad}\,\varphi(M_0), \vec{\tau}).$$

Доказательство. Проведем вычисления согласно определениям 12 и 10.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0) = \lim_{s\to s_0}\frac{\varphi(M(s)) - \varphi(M_0)}{s - s_0} =$$
$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{(\mathbf{grad}\,\varphi(M_0), \Delta\vec{r}(s_0)) + \alpha(\overrightarrow{M_0M(s)})|\Delta\vec{r}(s_0)|}{\Delta s} =$$
$$\lim_{\Delta s\to 0}\left(\left(\mathbf{grad}\,\varphi(M_0), \frac{\Delta\vec{r}(s_0)}{\Delta s}\right) \pm \alpha(\overrightarrow{M_0M(s)})\left|\frac{\Delta\vec{r}(s_0)}{\Delta s}\right|\right),$$

где $\pm$ является знаком Δs. Применяя к последнему выражению формальные свойства предела векторной функции скалярного переменного и лемму 1, мы получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0) = (\mathbf{grad}\,\varphi(M_0), \vec{\tau}),$$

так как $\pm|\frac{\Delta\vec{r}(s_0)}{\Delta s}|$ является функцией, ограниченной в окрестности точки s_0, а $\alpha(\overrightarrow{M_0M(s)})$ стремится к нулю при $\Delta s \to 0$. $\square$

Теорема 9 показывает, что для дифференцируемого скалярного поля производная $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0)$ зависит только от точки M_0 и вектора $\vec{\tau}$.

Докажем следующую теорему о геометрических свойствах градиента.

Теорема 10. *Пусть скалярное поле φ дифференцируемо в области D, $M_0 \in U$ и $\mathbf{grad}\,(M_0) \neq \vec{0}$.*

1) *Скалярное поле φ точке M_0 направлено в сторону его наибольшего возрастания в этой точке.*

2) *Скалярное поле φ в точке M_0 направлено по нормали к поверхности или линии уровня, проходящей через эту точку.*

Доказательство. 1). Заметим, что, согласно определению 12, $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0)$ равна скорости изменения скалярного поля φ в точке M_0 вдоль кривой $M = M(s)$, причем, согласно теореме 9, эта скорость определяется только направлением вектора $\vec{\tau}$. Таким образом, нам нужно доказать, что эта скорость будет наибольшей в направлении $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0)$. Действительно, согласно теореме 9, так как $|\vec{\tau}| = 1$ мы имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0)\Big|_{\max} = (\vec{g},\vec{\tau})|_{\max} = |\vec{g}|\;|\cos(\widehat{\vec{g},\vec{\tau}})\Big|_{\max},$$

где $\vec{g} = \mathbf{grad}\,\varphi(M_0)$. Очевидно производная по направлению $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0)$ будет наибольшей, если $\cos(\widehat{\vec{g},\vec{\tau}}) = 1$. Но для этого нужно, чтобы векторы $\vec{\tau}$ и $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0)$ были коллинеарны и одинаково направлены.

2). Мы ограничимся доказательством в случае, когда D – область пространства. Воспользуемся некоторой декартовой системой координат. Тогда $\varphi = \varphi(x,y,z)$ и $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0)(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0)) \neq \vec{0}$. Согласно теореме о неявной функции из математического анализа, уравнение поверхности уровня $\varphi(x,y,z) = \mathrm{const}$ можно в окрестности точки M_0 разрешить относительно одной из переменных x, y или z. Пусть это будет переменная z. Следовательно, в окрестности точки M_0 поверхность уровня является графиком дифференцируемой функции $z = f(x,y)$. Выберем за криволинейные координаты на поверхности x и y. Тогда поверхность определяется уравнением $\vec{r} = \vec{r}(x,y,f(x,y))$. Предположим для простоты, что функция $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема. Тогда она удовлетворяет условиям теоремы 8 и имеет касательную плоскость в точке M_0.

Возьмем некоторый единичный вектор $\vec{\tau}$ касательной плоскости к поверхности в точке M_0 и проведем через точку M_0 кривую $M = M(s)$, для которой вектор $\vec{\tau}$ будет касательным вектором в точке $M_0 = M(s_0)$, направленным в положительном направлении. Тогда, согласно определению 12 и теореме 9, мы получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0) = (\mathbf{grad}\,\varphi(M_0), \vec{\tau}) = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0) \perp \vec{\tau}$. Так как $\vec{\tau}$ – произвольный единичный вектор касательной плоскости в точке M_0, то $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0)$ ортогонален к этой плоскости. $\square$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 11 (Формальные свойства градиента). *Пусть φ и ψ – дифференцируемые скалярные поля. Тогда имеют место следующие равенства:*

1) $\mathbf{grad}\,(\varphi + \psi) = \mathbf{grad}\,\varphi + \mathbf{grad}\,\psi$;

2) $\mathbf{grad}\,(\varphi\psi) = \psi\,\mathbf{grad}\,\varphi + \varphi\,\mathbf{grad}\,\psi$.

В частности, $\mathbf{grad}\,(c\varphi) = c\,\mathbf{grad}\,\varphi$, *где c – постоянная.*

Доказательство этой теоремы легко получается с помощью выражения градиента в декартовых координатах (2.4). В дальнейшем мы докажем эти свойства с помощью оператора Гамильтона.

Следующую теорему мы будем называть правилом нахождения градиента.

Теорема 12. *Пусть скалярное поле φ дифференцируемо в точке M_0. Если производная φ в точке M_0 по любому направлению выражается формулой*

$$\frac{\partial\varphi}{\vec{\tau}}(M_0) = (\vec{g}, \vec{\tau}),$$

где вектор $\vec{g}$ не зависит от направления, то $\mathbf{grad}\,\varphi = \vec{g}$.

Доказательство. Сравнивая выражение для $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}(M_0)$, данное в теореме, с выражением, имеющемся в теореме 9, мы получаем

$$(\vec{g}, \vec{\tau}) = (\mathbf{grad}\,\varphi(M_0), \vec{\tau})$$

откуда сразу следует $(\mathbf{grad}\,\varphi(M_0) - \vec{g}, \vec{\tau}) = 0$, $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0) - \vec{g} \perp \vec{\tau}$. Так как $\vec{g}$ не зависит от направления и $\vec{\tau}$ – произвольный единичный вектор, то $\mathbf{grad}\,\varphi(M_0) - \vec{g} = \vec{0}$. $\square$

С помощью правила нахождения градиента мы получим выражение градиента в ортогональных криволинейных координатах.

Пусть u, v, w – ортогональные криволинейные координаты в некоторой области D, $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$ – поле соответствующего ортонормированного базиса и H_u, H_v, H_w – коэффициенты Ламе. Пусть $\varphi = \varphi(u, v, w)$ – выражение скалярного поля φ в данных криволинейных координатах. Задача состоит в том, чтобы найти разложение $\mathbf{grad}\,\varphi$ по базису $\vec{e}_u\, \vec{e}_v$, $\vec{e}_w$ в любой точке области D, используя только функцию $\varphi(u, v, w)$ и коэффициенты Ламе.

Пусть $M_0 \in D$ и $\vec{\tau}$ – некоторый единичный вектор. Возьмем кривую $M = M(s)$, проходящую через точку M_0, параметр s которой является длиной дуги, и такую, что ее единичный касательный вектор в точке $M_0 = M(s_0)$ совпадает с вектором $\vec{\tau}$. Пусть $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$ – уравнения этой кривой в данных криволинейных координатах.

Выберем некоторую начальную точку пространства O и пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – векторное параметрическое уравнение данной кривой. Тогда, согласно определению криволинейной системы координат, теореме 7 и определению 12, $\vec{r}(s) = \vec{r}(u(s), v(s), w(s))$ и, следовательно,

$$\vec{\tau} = \vec{r}'(s_0) = \vec{r}_u(u(s_0), v(s_0, w(s_0))u'(s_0)$$
$$+\vec{r}_u(u(s_0), v(s_0, w(s_0))v'(s_0) + \vec{r}_w(u(s_0), v(s_0, w(s_0))w'(s_0).$$

Тогда мы имеем

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}\right)(M_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(M_0)u'(s_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(M_0)v'(s_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial w}(M_0)w'(s_0).$$

Используя эти равенства и ортонормированность базиса $\vec{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{H_u}, \vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v}{H_v}$, $\vec{e}_w = \frac{\vec{r}_w}{H_w}$, мы можем записать производную по направлению $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}\right)(M_0)$ следующим образом:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}\right)(M_0) = (\vec{g}, \vec{\tau}),$$

где

$$\vec{g} = \left(\frac{1}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\vec{e}_w\right)(M_0).$$

Так как M_0 – любая точка области D, то, используя правило нахождения градиента 12, мы получаем

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \frac{1}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\vec{e}_w. \qquad (2.5)$$

Используя общую формулу (2.5) и значения коэффициентов Ламе для цилиндрической и сферической системы координат, мы получаем для этих систем координат и скалярного поля F следующие формулы

$$\mathbf{grad}\, F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{e}_z,$$

$$\mathbf{grad}\, F = \frac{\partial F}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Глава 3.

Векторное поле

В этой главе мы определим векторное поле, его дивергенцию и ротор и изложим их основные свойства. Но сначала напомним основные факты о линейных операторах и их матрицах.

3.1. Линейный оператор и его матрица

Пусть L – n-мерное действительное линейное пространство. **Линейным оператором** в пространстве L называется отображение f пространства L в себя, обладающее следующим свойством линейности: для любых векторов $x, y \in L$ и действительных чисел α и β мы имеем $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис пространства L. Тогда для любого $j = 1, \dots, n$ мы имеем $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_j^i e_i$, где a_j^i – некоторые действительные числа. Квадратная матрица n-го порядка $M_f = (a_j^i)$, где i – номер строки и j – номер столбца, называется **матрицей линейного оператора** f относительно базиса $e_1, \dots, e_n$. Заметим, что j-ый столбец матрицы M_f образован координатами вектора $f(e_j)$ относительно базиса $e_1, \dots, e_n$. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты вектора x, а $y^1, \dots, y^n$ – координаты вектора $y = f(x)$ относительно базиса $e_1, \dots, e_n$. Известно, что для любого $i = 1, \dots, n$ мы имеем

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j. \tag{3.1}$$

Поэтому линейный оператор однозначно определяется своей матрицей.

Выясним, как преобразуется матрица линейного оператора при замене базиса. Сначала мы найдем выражения одного базиса через другой.

Нам будет в дальнейшем удобнее обозначать другой базис пространства L через $e_{1'}, \dots, e_{n'}$. Напишем разложения векторов старого базиса по новому базису и, обратно, векторов нового базиса по старому базису:

$e_j = \sum_{i'=1'}^{n'} A_j^{i'} e_{i'}$ и $e_{i'} = \sum_{k=1}^{n} B_{j'}^{k} e_k$. Подставляя векторы $e_{i'}$, заданные вторым равенством в первое, мы получаем

$$e_j = \sum_{i'=1}^{n'} A_j^{i'} \sum_{k=1}^{n} B_{i'}^{k} e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i'=1}^{n'} B_{i'}^{k} A_j^{i'} \right) e_k. \tag{3.2}$$

Величина

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ 1, & \text{если } i = j; \end{cases}$$

называется **символом Кронекера**. Ввиду однозначности разложения по базису из равенства (3.2) мы получаем

$$\sum_{i'=1}^{n'} B_{i'}^{k} A_j^{i'} = \delta_j^k. \tag{3.3}$$

Введя матрицы $A = (A_j^{i'})$ и $B = (B_{j'}^{i})$, мы можем записать равенство (3.3) в виде $BA = E$, где E – единичная матрица n–го порядка. Следовательно, $B = A^{-1}$. Мы будем писать $A_{j'}^{i}$ вместо $B_{j'}^{i}$, считая, что в матрице A замена незаштрихованных индексов на заштрихованные и наоборот приводит к замене матрицы A на обратную A^{-1}.

Применяя формулы (3.2), мы получаем

$$f(e_{j'}) = f(\sum_{j=1}^{n} A_{j'}^{j} e_j) = \sum_{j=1}^{n} A_{j'}^{j} f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} A_{j'}^{j} \sum_{i=1}^{n} a_j^i e_i =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{j'}^{j} a_j^i e_i = \sum_{i'=1}^{j'} \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{j'}^{j} a_j^i A_i^{i'} \right) e_{i'}. \tag{3.4}$$

Согласно определению, матрица линейного оператора f относительно базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ определяется уравнением $f(e_{j'}) = \sum_{i'=1'}^{n'} a_{j'}^{i'} e_{i'}$. Сравнивая это равенство с (3.4), мы получаем

$$a_{j'}^{i'} = \sum_{i,j=1}^{n} A_i^{i'} a_j^i A_{j'}^{j}. \tag{3.5}$$

Пользуясь определением произведения матриц, мы можем записать уравнение преобразования элементов матрицы линейного оператора в матричном виде

$$M_f' = A^{-1}\, M_f\, A, \tag{3.6}$$

где M_f' – матрица линейного оператора f относительно базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$.

Пусть $A = (a_j^i)$ – квадратная матрица n-го порядка. **Следом** матрицы A называется число, равное сумме элементов главной диагонали матрицы, которое обозначается через $\mathrm{tr}\ A$. По определению мы имеем $\mathrm{tr}\ A = \sum_{i=1}^{n} a_i^i$.

Теорема 13. *След матрицы M_f линейного оператора f не зависит от выбора базиса и называется следом линейного оператора f. След линейного оператора f обозначается через* $\mathrm{tr}\, f$.

Доказательство. Пусть $A = (a^i_j)$ $B = (b^i_j)$ – две квадратные матрицы n-го порядка. Согласно определению произведения матриц и следа матрицы, мы имеем

$$\mathrm{tr}\,(BA) = \sum_{i,j=1}^{n} b^i_j a^j_i = \sum_{i,j=1}^{n} a^i_j b^j_i = \mathrm{tr}\,(AB).$$

Следовательно, согласно формуле (3.6),

$$\mathrm{tr}\ M'_f = \mathrm{tr}\,(A^{-1}\, M_f\, A) = \mathrm{tr}\,(M_f\, A\, A^{-1}) = \mathrm{tr}\ M_f,$$

что и доказывает нашу теорему. □

3.2. Векторное поле. Дифференцируемость, производная по направлению и дивергенция векторного поля.

Определение 13. *Говорят, что в области U пространства (плоскости) задано векторное поле, если каждой точке M этой области поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(M)$ пространства (плоскости).*

Обозначение векторного поля: $\vec{a}(M)$, $\vec{b}(M)$ и т.п., или просто $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т.п.

Примеры векторных полей

1. Силовое поле $\vec{F}$. В каждой точке M области задан вектор силы $\vec{F}(M)$, приложенный к этой точке.

2. Напряженность электромагнитного поля $\vec{H}$. В каждой точке M электромагнитного поля задан вектор $\vec{H}(M)$ напряженности в этой точке.

Пусть в области U пространства задана ортогональные криволинейные координаты u, $v\,w$. Тогда векторное поле $\vec{a}(M)$ задается в этой области равенством

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(u,v,w) = a_u(u,v,w)\vec{e}_u + a_v(u,v,w)\vec{e}_v + a_w(u,v,w)\vec{e}_w.$$

Если криволинейные координаты не являются ортогональными, то вместо базиса $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v\,\vec{e}_w$ можно взять базис $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$.

В частности, в декартовых координатах мы получаем

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Мы оставляем читателю записать соответствующие формулы для векторного поля на плоскости.

Определение 14. *Векторное поле $\vec{a}(M)$ определенное в окрестности точки M_0 пространства, называется дифференцируемым в этой точке, если его приращение $\Delta\vec{a}(M_0) = \vec{a}(M) - \vec{a}(M_0)$ может быть представлено в виде*

$$\Delta\vec{a}(M_0) = P(\overrightarrow{M_0M}) + \vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0M})|\overrightarrow{M_0M}|, \tag{3.7}$$

где P – линейный оператор в пространстве векторов пространства и $\lim_{M\to M_0} \vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0M}) = \vec{0}$.

Заметим, что $\lim_{M\to M_0} \vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0M}) = \vec{0}$ означает, что

$$(\,\forall\varepsilon > 0\,)\,(\,\exists\delta > 0\,)\,(\,\forall M)\,(|\overrightarrow{M_0M})| < \delta \mapsto |\vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0M})| < \varepsilon\,).$$

Запишем условие дифференцируемости (3.7) в декартовых координатах для векторного поля в пространстве. Выразим все данные в координатах:

$$M(x, y, z), \quad M_0(x_0, y_0, z_0), \quad \vec{a}(M)(a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$$

и $(a^i_j)_{i,j=1,2,3}$ – матрица линейного оператора P относительно базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Тогда в координатах мы имеем

$$\Delta\vec{a}(M_0)(\Delta a_x(M_0),\, \Delta a_y(M_0),\, \Delta a_z(M_0)),$$
$$\vec{\alpha}(M)(\alpha_x(x, y, z), \alpha_y(x, y, z), \alpha_z(x, y, z)).$$

Согласно (3.1), равенство (3.7) эквивалентно следующей системе трех равенств

$$\Delta a_x(M_0) = a^1_1\Delta x + a^1_2\Delta y + a^1_3\Delta z + \alpha_x(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$
$$\Delta a_y(M_0) = a^2_1\Delta x + a^2_2\Delta y + a^2_3\Delta z + \alpha_y(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$
$$\Delta a_z(M_0) = a^3_1\Delta x + a^3_2\Delta y + a^3_3\Delta z + \alpha_x(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

которые означают, что функции $a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)$ дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причем мы имеем

$$a^1_1 = \frac{\partial a_x}{\partial x}(M_0),\ a^1_2 = \frac{\partial a_x}{\partial y}(M_0),\ a^1_3 = \frac{\partial a_x}{\partial z}(M_0),$$
$$a^2_1 = \frac{\partial a_y}{\partial x}(M_0),\ a^2_2 = \frac{\partial a_y}{\partial y}(M_0),\ a^2_3 = \frac{\partial a_y}{\partial z}(M_0),$$
$$a^3_1 = \frac{\partial a_z}{\partial x}(M_0),\ a^3_1 = \frac{\partial a_z}{\partial y}(M_0),\ a^3_3 = \frac{\partial a_z}{\partial z}(M_0).$$

Следовательно, матрица M_P линейного оператора P из условия дифференцируемости (3.7) относительно базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ записывается следующим образом:

$$M_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix} (M_0). \tag{3.8}$$

Таким образом, линейный оператор P из определения дифференцируемости векторного поля 14 определен однозначно. Этот оператор называется **производной векторного поля $\vec{a}$ в точке** M_0.

Итак, дифференцируемость векторного поля эквивалентна дифференцируемости его компонент относительно некоторой декартовой системы координат. Очевидно, что это условие не зависит от выбора этой системы координат. Далее мы часто будем предполагать, что векторное поле непрерывно дифференцируемо некоторое число раз, понимая под этим непрерывную дифференцируемость данное число раз его компонент. Можно проверить, что это условие не зависит от выбора декартовой системы координат.

Определим теперь производную векторного поля по направлению. Пусть векторное поле $\vec{a}$ задано в окрестности точки M_0 и $\vec{\tau}$ – некоторый единичный вектор. Проведем через точку M_0 кривую, для которой вектор $\vec{\tau}$ является касательным в точке M_0, и выберем на этой кривой параметр s (длину дуги) так, чтобы вектор $\vec{\tau}$ был направлен в положительном направлении. Мы можем записать уравнение этой кривой в виде $M = M(s)$ или $\vec{r} = \vec{r}(s)$. В последнем случае, согласно теореме 7, мы имеем $\vec{r}'(s_0) = \vec{\tau}$, где $\vec{r}(s_0)$ – радиус-вектор точки M_0. Определим производную векторного поля $\vec{a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{\tau}$ следующим образом.

Определение 15. *Производной векторного поля $\vec{a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{\tau}$ называется вектор*

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{\tau}}(M_0) = \left(\frac{d}{ds} \vec{a}(M(s)) \right) (s_0).$$

Определенная таким образом производная $\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{\tau}}(M_0)$ не всегда существует, а если и существует, то, вообще говоря, зависит от выбора кривой $M = M(s)$.

Теорема 14. *Если векторное поле $\vec{a}$ дифференцируемо в точке M_0, то в этой точке существует производная по любому направлению $\vec{\tau}$, для которой имеет место формула*

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{\tau}}(M_0) = P(\vec{\tau}),$$

где P – линейный оператор из определения дифференцируемости векторного поля 14.

Доказательство. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть f – линейный оператор в пространстве векторов пространства и $\vec{a}(t)$ – векторная функция такая, что $\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{a}$. Тогда предел $\lim_{t\to t_0} f(\vec{a}(t))$ существует и равен $f(\vec{a})$.*

Доказательство. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – ортонормированный базис,

$$\vec{a}(t)=a_x(t)\vec{i}+a_y(t)\vec{j}+a_z(t)\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

Тогда, применяя определение линейного оператора и теорему 2, мы получаем

$$\lim_{t\to t_0} f(\vec{a}(t))=\lim_{t\to t_0} f(a_x(t)\vec{i}+a_y(t)\vec{j}+a_z(t)\vec{k})=$$
$$\lim_{t\to t_0}(a_x(t)f(\vec{i})+a_y(t)f(\vec{j})+a_z(t)f(\vec{k}))=$$
$$a_xf(\vec{i})+a_yf(\vec{j})+a_zf(\vec{k}))=f(\vec{a}).$$

□

Теперь докажем теорему 14.

Проведем вычисления согласно определениям 15 и 14.

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{\tau}}(M_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{\vec{a}(M(s))-\vec{a}(M_0)}{s-s_0}=$$
$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P(\Delta\vec{r}(s_0))+\vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0M(s)})|\Delta\vec{r}(s_0)|}{\Delta s}=$$
$$\lim_{\Delta s\to 0}\left(P\left(\frac{\Delta\vec{r}(s_0)}{\Delta s}\right)\pm\vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0M(s)})\left|\frac{\Delta\vec{r}(s_0)}{\Delta s}\right|\right),$$

где $\pm$ является знаком Δs. Применяя к последнему выражению формальные свойства предела векторной функции скалярного переменного и леммы 1 и 2, мы получаем

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{\tau}}(M_0)=P(\vec{\tau}),$$

так как $\pm|\frac{\Delta\vec{r}(s_0)}{\Delta s}|$ является функцией, ограниченной в окрестности точки s_0, а $\vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0M(s)})$ стремится к нулю при $\Delta s\to 0$. □

Определение 16. *Пусть векторное поле $\vec{a}$ дифференцируемо в точке M_0. Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ в точке M_0 называется след $\mathrm{tr}\,P$ линейного оператора P, определенного определением дифференцируемости 14. Обозначение дивергенции: $\mathrm{div}\,\vec{a}$.*

Из определения дивергенции и выражения 3.8 матрицы линейного оператора P мы немедленно получаем следующее выражение дивергенции в декартовых координатах:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{3.9}$$

3.3. Поток векторного поля через поверхность и теорема Гаусса-Остроградского

Мы определили дивергенцию векторного поля довольно формально. Однако это определение обладает существенным преимуществом инвариантности (т.е. независимости) от выбора системы координат. Следовательно, оно должно иметь физический смысл, который мы сейчас и попытаемся выяснить. Для этого мы выберем специальное векторное поле $\vec{a}$ – поле скоростей движущегося в пространстве вещества, т.е. $\vec{a}(M)$ является скоростью частицы вещества, находящейся в точке M. Мы будем считать движение стационарным, т.е. скорость $\vec{a}(M)$ не меняется со временем.

Рассмотрим в области задания векторного поля $\vec{a}$ ориентированную поверхность σ, ориентация которой задана полем единичного вектора нормали $\vec{n}(M)$. Пусть точка $M \in \sigma$. Мы будем говорить, что вещество проходит в точке M через поверхность σ в положительном направлении, если вектор $\vec{a}(M)$ образует с вектором нормали $\vec{n}(M)$ острый угол, и проходит в точке M через поверхность σ в отрицательном направлении, если вектор $\vec{a}(M)$ образует с вектором нормали $\vec{n}(M)$ тупой угол. Чтобы не зависеть от плотности вещества, мы будем отождествлять его количество с объемом, им занимаемым. Такая гидродинамическая модель векторного поля оправдывает следующее название.

Определение 17. *Потоком векторного поля через ориентированную поверхность σ называется разность количества вещества, проходящего через эту поверхность в положительном направлении, и количества вещества, проходящего через эту поверхность в отрицательном направлении, за единицу времени.*

Найдем формулу для вычисления потока. Сначала предположим, что σ является плоской площадкой, т.е. $\vec{n}(M)$ – постоянный вектор, и векторное поле $\vec{a}$ постоянно, т.е. не зависит от точки M. Очевидно, что за единицу времени вещество, прошедшее через σ, заполнит цилиндр с основанием σ и образующей $\vec{a}$. Ясно, что скалярное произведение $(\vec{a},\, \vec{n}) = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{n}})$ по абсолютной величине совпадает с высотой цилиндра, и будет положительным, если вещество проходит через σ в положительном направлении, и будет отрицательным, если вещество проходит через σ в отрицательном направлении. Следовательно, мы получаем в этом случае следующую формулу для потока V_σ векторного поля $\vec{a}$ через σ:

$$V_\sigma = (\vec{a}, \vec{n})\, S, \tag{3.10}$$

где S – площадь σ.

Теперь рассмотрим общий случай, т.е. σ – произвольная ориентированная поверхность и $\vec{a}$ – произвольное векторное поле. Разобьем поверхность σ сетью кривых на произвольное число n частей: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и выберем в каждой части σ_i некоторую точку M_i. Согласно определению, $V_\sigma = \sum_{i=1}^n V_{\sigma_i}$. Будем вычислять поток V_{σ_i} приближенно, заменяя σ_i частью касательной плоскости в точке M_i той же площади ΔS_i и заменяя векторное поле $\vec{a}$ постоянным полем, равным $\vec{a}(M_i)$. Тогда, применяя формулу (3.10), мы получаем

$$V_\sigma \approxeq \sum_{i=1}^n (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i))\Delta S_i.$$

Легко видеть, что мы получили интегральную сумму некоторого поверхностного интеграла. Поэтому, обозначив через λ диаметр нашего разбиения поверхности σ, мы получаем следующую формулу для потока:

$$V_\sigma = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i))\Delta S_i = \iint_\sigma (\vec{a}, \vec{n})\, ds. \tag{3.11}$$

Интеграл в формуле (3.11) является поверхностным интегралом первого рода по поверхности σ. Мы будем далее считать, что векторное поле и поверхность выбраны таким образом, чтобы этот интеграл имел смысл.

Выбрав декартову систему координат, мы можем записать формулу (3.11) в координатах следующим образом:

$$V_\sigma = \iint_\sigma (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, ds = \iint_\sigma (a_x\, dy\, dz + a_y\, dz\, dx + a_z\, dx\, dy), \tag{3.12}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали, т.е. координаты вектора нормали $\vec{n}$, а второй интеграл является поверхностным интегралом второго рода по ориентированной поверхности σ.

Докажем теперь одну из основных теорем векторного анализа.

Теорема 15 (Теорема Гаусса-Остроградского). *Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от* *дивергенции этого поля по области, ограниченной этой поверхностью, т.е.*

$$\iint_\sigma (\vec{a}, \vec{n})\, ds = \iiint_D \operatorname{div} \vec{a}\, dv,$$

где σ – замкнутая поверхность, ориентированная стандартным образом, D – область, ограниченная поверхностью σ и $dv = dx\, dy\, dz$ – элемент объема.

Доказательство. Выберем декартову систему координат и возьмем в качестве области D параллелепипед $a_1 \le x \le b_1$, $a_2 \le y \le b_2$, $a_3 \le z \le b_3$. Его граница σ состоит из шести прямоугольников: σ_x^-, σ_x^+, σ_y^-, σ_y^+, σ_z^- и σ_z^+, которые лежат соответственно на плоскостях: $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$, $y = b_2$, $z = a_3$ и $z = b_3$. Очевидно, что нормалями к поверхностям σ_x^+, σ_y^+ и σ_z^+ служат соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, а нормалями к поверхностям σ_x^-, σ_y^- и σ_z^- – соответственно $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ и $-\vec{k}$. Тогда, используя выражения поверхностного интеграла через двойной интеграл, формулу последовательного интегрирования для тройного интеграла и формулу (3.11) мы получаем

$$\iint_\sigma (\vec{a}, \vec{n})\, ds = \iint_{\sigma_x^+} (\vec{a}, \vec{i})\, ds - \iint_{\sigma_x^-} (\vec{a}, \vec{i})\, ds + \iint_{\sigma_y^+} (\vec{a}, \vec{j})\, ds -$$

$$\iint_{\sigma_y^-} (\vec{a}, \vec{j})\, ds + \iint_{\sigma_z^+} (\vec{a}, \vec{k})\, ds - \iint_{\sigma_z^-} (\vec{a}, \vec{k})\, ds = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b^3} a_x(b_1, y, z)\, dz -$$

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b^3} a_x(a_1, y, z)\, dz + \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_3}^{b^3} a_y(x, b_2, z)\, dz -$$

$$\int_{a_2}^{b_2} dx \int_{a_3}^{b^3} a_y(x, a_2, z)\, dz + \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b^2} a_z(x, y, b_3)\, dy -$$

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b^2} a_z(x, y, a_3)\, dy = \iiint_D \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dv = \iiint_D \operatorname{div} \vec{a}\, dv$$

Таким образом, теорема 15 верна для параллелепипедов.

Рассмотрим теперь произвольную область D. Разобьем ее набором плоскостей параллельных координатным осям. Это разбиение состоит из параллелепипедов и частей области, прилегающих к границе. Рассмотрим объединение D' всех полученных параллелипипедов и их границу. Если область D кубируема, то когда диаметр разбиения стремится к нулю, область D' стремится к области D и ее объем стремится к объему области D. Мы примем без доказательства два факта: тройной интеграл от $\operatorname{div} \vec{a}$ по области D' стремится к интегралу по области D и интеграл от $(\vec{a}, \vec{n})$ по границе $\partial D'$ области D' стремится к интегралу по границе области D, т.е. σ. Эти утверждения выполняются, если граница σ

достаточно гладкая и $\operatorname{div}\vec{a}$ – непрерывная функция, в частности, если векторное поле $\vec{a}$ непрерывно дифференцируемо.

Заметим, что $\iiint_{D'} \operatorname{div}\vec{a}\,dv$ равен сумме интегралов по составляющим ее параллелепипедов. С другой стороны, применив теорему 15 данной сумме, мы получим сумму интегралов по границам этих параллелепипедов от $(\vec{a},\vec{n})$. Так как в этой сумме интегралы по внутренним перегородкам встречаются дважды с противоположными ориентациями, то эти интегралы сокращаются и, таким образом, эта сумма равна $\iint_{\partial D'}(\vec{a},\vec{n})\,ds$.

Итак мы доказали, что $\iiint_{D'} \operatorname{div}\vec{a}\,dv = \iint_{\partial D'}(\vec{a},\vec{n})\,ds$. Переходя в этом равенстве к пределу, когда диаметр разбиения стремится к нулю, мы получаем требуемое равенство $\iiint_{D} \operatorname{div}\vec{a}\,dv = \iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\,ds$. □

Далее мы будем считать, что векторное поле $\vec{a}$ является непрерывно дифференцируемым, а область и поверхность являются такими, что теорема Гаусса-Остроградского имеет смысл.

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского и понятия потока векторного поля мы выясним физический смысл дивергенции. Мы будем рассматривать далее области пространства, которые могут стягиваться к любой их внутренней точке.

Теорема 16. *Дивергенция векторного поля $\vec{a}$ в точке M_0 равна пределу отношения потока $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ, ограничивающую область D с внутренней точкой M_0, к объему V этой области, когда D стягивается к точке M_0, т.е.*

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{D\to M_0} \frac{\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\,ds}{V}.$$

Доказательство. Применяя теорему Гаусса-Остроградского и теорему о среднем для тройного интеграла, мы получаем

$$\lim_{D\to M_0} \frac{\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\,ds}{V} = \lim_{D\to M_0} \frac{\iiint_{D} \operatorname{div}\vec{a}\,dv}{V} =$$
$$\lim_{D\to M_0} \frac{\operatorname{div}\vec{a}(\tilde{M})V}{V} = \lim_{\tilde{M}\to M_0} \operatorname{div}\vec{a}(\tilde{M}),$$

где $\tilde{M}$ – некоторая точка области D. Так как по предположению $\operatorname{div}\vec{a}$ – непрерывная функция в области D, мы получаем

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{D\to M_0} \frac{\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})}{V}.$$

□

Определение 18. *Векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным в области D, если в этой области $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.*

Теперь мы получим следующий признак соленоидальности векторного поля.

Теорема 17. *Векторное поле $\vec{a}$ является соленоидальным в области D тогда и только тогда, когда его поток через любую замкнутую поверхность σ, лежашую в этой области и стягиваемую в D к любой внутренней точке области, ограниченной σ, равен нулю.*

Доказательство. Пусть векторное поле $\vec{a}$ является соленоидальным в области D. Тогда, согласно теореме Гаусса-Остроградского, мы имеем $\iint_\sigma (\vec{a}, \vec{n})\, ds = 0$.

Обратно, если выполнено условие теоремы, то, согласно теореме 16, в любой точке M_0 области D мы получаем $\operatorname{dif} \vec{a}(M_0) = 0$. □

Если в точке M_0 области D мы имеем $\operatorname{dif} \vec{a}(M_0) > 0$, то точка M_0 называется *источником*; если в точке M_0 области D мы имеем $\operatorname{dif} \vec{a}(M_0) < 0$, то точка M_0 называется *точкой стока.* Тогда теорема 16 означает, что $\operatorname{dif} \vec{a}(M_0)$ является (с учетом знака) мощностью этой точки как источника или стока.

3.4. Оператор Гамильтона ∇ и его свойства

Пусть задана некоторая декартова система координат. Рассмотрим в этой системе координат оператор

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

который называется оператором Гамильтона или, короче, набла. Этот оператор действует естественным образом (мы точно определим его действие далее) на скалярные или векторные поля, заданные в этой системе координат. Оказывается, что, хотя это действие и производится в некоторой декартовой системе координат, результат этого действия не зависит от выбора этой системы координат. Другими словами, этот оператор инвариантен относительно выбора системы координат. В рамках этого пособия мы не сможем дать формальное доказательство этого важного свойства, однако мы увидим, что оно выполняется во всех примерах, которые мы будем рассматривать.

Пусть $f(\vec{p}, \ldots, \vec{q}, u, \ldots, v)$ – некоторая функция векторных переменных $\vec{p}, \ldots, \vec{q}$ и скалярных переменных $u, \ldots, v$, которая принимает либо скалярные, либо векторные значения, причем под словом вектор мы понимаем вектор пространства. Тогда, если $\vec{a}, \ldots, \vec{b}$ – векторные и $\varphi, \ldots, \psi$ – скалярные поля, определенные в некоторой области, то $f(\vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi)$ – скалярное или векторное поле, определенное в той же области. Мы будем далее предполагать, что функция $f = f(\vec{p}, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi)$ линейна по первой переменной $\vec{p}$. Тогда мы определим $f(\nabla, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi)$ следующим равенством

$$f(\nabla, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi) = \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{i}, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi) + \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{j}, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi) + \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{k}, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi). \quad (3.13)$$

В дальнейшем мы будем придерживаться следующего основного правила оперирования с оператором ∇: оператор ∇ действует только на те величины, которые стоят после него. Если нам будет необходимо, чтобы ∇ не действовал на некоторую величину, стоящую после него, мы будем ставить у этой величины нижний индекс c; например, $\vec{a}_c$.

Основные свойства оператора ∇ определяются следующей теоремой.

Теорема 18. *1) Если $f_1(\vec{p}, \vec{q}, \ldots, \vec{r}, u, \ldots, v) = f_2(\vec{p}, \vec{q}, \ldots, \vec{r}, u, \ldots, v)$ – некоторое тождество, то*

$$f_1(\nabla, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi) = f_2(\nabla, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi)$$

для любых векторных полей $\vec{a}, \ldots, \vec{b}$ и скалярных полей $\varphi, \ldots, \psi$.

Это означает, что в векторных тождествах ∇ ведет себя как обычный вектор.

2) Пусть f_1 и f_2 – две функции векторных и скалярных переменных и $f = \vec{p} \times f_1 \times f_2$, где знаки "$\times$" стоят вместо одного из произведений скаляров и векторов, причем возможно различных. Тогда имеет место следующее равенство

$$\nabla \times f_1(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1) \times f_2(\vec{a}_2, \ldots, \vec{b}_2, \varphi_2, \ldots, \psi_2) = \nabla \times f_1(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_1, \varphi_1, \ldots, \psi_2) \times f_{2,c}(\vec{a}_2, \ldots, \vec{b}_2, \varphi_2, \ldots, \psi_2) + \nabla \times f_{1,c}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_1, \varphi_1, \ldots, \psi_2) \times f_2(\vec{a}_2, \ldots, \vec{b}_2, \varphi_2, \ldots, \psi_2),$$

где $\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{b}_2$ – векторные и $\varphi_1, \ldots, \psi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_2$ – скалярные поля.

Это означает, что ∇ действует на произведение, как оператор производной: сначала на первый сомножитель, а затем на второй.

Доказательство. 1). По определению, для $i = 1, 2$ мы имеем

$$f_i(\nabla, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi) = \frac{\partial}{\partial x} f_i(\vec{i}, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi) + \frac{\partial}{\partial y} f_i(\vec{j}, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi) + \frac{\partial}{\partial z} f_i(\vec{k}, \vec{a}, \ldots, \vec{b}, \varphi, \ldots, \psi).$$

Согласно данному условию, в обоих случаях правые части этих равенств совпадают. Поэтому совпадают и левые части этих равенств.

2). Доказательство вытекает из определения 3.13 и правила вычисления частных производных произведения. □

Теперь мы выразим градиент, производные скалярного и векторного поля по направлению через ∇ с помощью определения 3.13.

Положим $f(\vec{p}, u) = \vec{p}u$. Тогда, согласно определению 3.13 и формуле (2.4), мы получаем

$$\nabla\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial(\vec{i},\vec{a})}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial(\vec{j},\vec{a})}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial(\vec{k},\vec{a})}{\partial z} = \vec{i}\,\frac{\partial a_x}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial a_y}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial a_z}{\partial z} = \mathbf{grad}\,\varphi.$$

Отсюда с помощью теоремы 9 мы получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}} = (\mathbf{grad}\,\varphi, \tau) = (\tau, \nabla\varphi) = (\tau, \nabla)\varphi$$

Аналогично, выражая векторное поле в декартовых координатах, определение 15 и применяя полученную формуле для $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}$, мы получаем

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{\tau}} = \frac{\partial a_x}{\partial\vec{\tau}}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial\vec{\tau}}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial\vec{\tau}}\vec{k} = \vec{i}\,(\vec{\tau},\nabla)a_x + \vec{j}\,(\vec{\tau},\nabla)a_y + \vec{k}\,(\vec{\tau},\nabla)a_z = (\vec{\tau},\nabla)\vec{a}.$$

Положим $f(p, \vec{x}) = (\vec{p}, \vec{x})$. Тогда, согласно определению 3.13 и формуле (2.4), мы получаем

$$(\nabla,\vec{a}) = \frac{\partial(\vec{i},\vec{a})}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{j},\vec{a})}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{k},\vec{a})}{\partial z} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}.$$

Собирая полученные формулы, мы получаем

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \nabla\varphi, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}} = (\vec{\tau},\nabla)\varphi, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{\tau}} = (\vec{\tau},\nabla)\vec{a}, \tag{3.16}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = (\nabla,\vec{a}) \tag{3.17}$$

Теперь мы, используя эти формулы и свойства оператора ∇ дадим доказательство формальных свойств градиента и дивергенции. Сначала докажем свойства градиента, сформулированные в теореме 11:

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}(\varphi+\psi) &= \nabla(\varphi+\psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi = \mathbf{grad}\,\varphi + \mathbf{grad}\,\psi,\\ \mathbf{grad}(\varphi\psi) &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\mathbf{grad}\,\varphi + \varphi\mathbf{grad}\,\psi.\end{aligned}$$

Теорема 19 (Формальные свойства дивергенции). *Для векторных полей $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и скалярного поля φ имеют место следующие равенства*

1) $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$*;*

2) $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = (\mathbf{grad}\,\varphi, \vec{a}) + \varphi\operatorname{div}\vec{a}$*.*

В частности, $\operatorname{div}(c\vec{a}) = c\operatorname{div}\vec{c}$*, где* $c = \mathrm{const}$*.*

Доказательство. Используя формулы (3.14) и (3.17), получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \nabla(\vec{a}+\vec{b}) = \nabla\vec{a} + \nabla\vec{b} = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b},\\
&\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) =(\nabla, \varphi\vec{a}) = (\nabla, \varphi\vec{a}_c) + (\nabla, \varphi_c\vec{a}) =\\
&(\nabla\varphi, \vec{a}_c)+\varphi(\nabla, \vec{a}) = (\mathbf{grad}\,\varphi, \vec{a}) + \varphi\operatorname{div}\vec{a}.
\end{aligned}$$

Последнее утверждение получается, если в последней формуле положить $\psi = c$ и заметить, что, согласно формуле (2.4), $\mathbf{grad}\,c = \vec{0}$. □

3.5. p-линейные и билинейные кососимметрические формы

В этом разделе мы изложим необходимые для дальнейшего сведения из линейной алгебры.

Пусть L – n-мерное действительное линейное пространство.

Определение 19. *p – линейной формой на L называется отображение f, которое каждой упорядоченной системе $(x_1, \dots, x_p)$ p векторов из L ставит в соответствие действительное число $f(x_1, \dots, x_p)$, причем для любого $i = 1, \dots, p$ выполняется следующее условие*

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_1 x_{i,1} + \alpha_2 x_{i,2}, x_{i+1}, \dots, x_p) = \\
\alpha_1 f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i,1}, x_{i+1}, \dots, x_p) + \\
\alpha_2 f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i,2}, x_{i+1}, \dots, x_p)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

для любых векторов $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i+1}, \dots, x_p$ и любых действительных чисел α_1 и α_2.

Свойство (3.18) называется линейностью f по i-му переменному x_i. Легко видеть, что из выполнения этого свойства для линейной комбинации двух векторов вытекает его выполнение для линейной комбинации $\alpha_1\, x_{i,1} + \dots, \alpha_k\, x_{i,k}$ любого числа k векторов.

Теорема 20. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис L. p-линейная форма f на L однозначно определяется заданием своих всевозможных значений $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ $(i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n)$ на базисных векторах.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_p \in L$. Рассмотрим разложения этих векторов по базису

$$x_j = \sum_{i_j=1}^{n} x_j^{i_j} e_{i_j} \quad j = 1, \ldots, p.$$

Тогда, используя последовательно линейность f относительно своих переменных, мы получаем

$$f(x_1, \ldots, x_p) = f(\sum_{i_1=1}^{n} x_j^{i_1} e_{i_1}, x_2, \ldots, x_p) =$$
$$\sum_{i_1=1}^{n} x_j^{i_1} f(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} x_j^{i_2} e_{i_2}, \ldots, x_p) = \cdots = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} x_j^{i_1} \ldots x_j^{i_p} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}).$$

Последняя формула означает, что $f(x_1, \ldots, x_p)$ однозначно определяется координатами x_j^i векторов $x_1, \ldots, x_p$ и значениями $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ формы f на базисных векторах. Это доказывает утверждение теоремы. $\square$

Мы будем называть 2-линейную форму $f(x, y)$ билинейной формой.

Определение 20. *Билинейная форма $f(x, y)$ называется кососимметрической, если $f(y, x) = -f(x, y)$ для любых $x, y \in L$.*

Лемма 3. *Если $f(x, y)$ – билинейная кососимметрическая форма, то $f(x, y) = 0$ для любого $x \in L$.*

Доказательство. Полагая в определении 20 $x = y$, мы получаем $f(x, x) = -f(x, x)$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

Теперь мы докажем основную теорему о билинейной и кососимметрической форме на линейном пространстве векторов пространства.

Теорема 21. *Пусть $f(\vec{x}, \vec{y})$ – билинейная и кососимметрическая форма на линейном пространстве векторов пространства. Тогда существует и притом единственный вектор $\vec{p}$ такой, что $f(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{p}, [\vec{x}, \vec{y}]) = (\vec{p}, \vec{x}, \vec{y})$.*

Доказательство. Возьмем некоторый положительный ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$ и $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$.

Согласно теореме 19, форма f однозначно определяется своими значениями $f(\vec{i}, \vec{i})$, $f(\vec{i}, \vec{j})$, $f(\vec{i}, \vec{k})$, $f(\vec{j}, \vec{i})$, $f(\vec{j}, \vec{j})$, $f(\vec{j}, \vec{k})$, $f(\vec{k}, \vec{i})$, $f(\vec{k}, \vec{j})$ и $f(\vec{k}, \vec{k})$. Согласно определению 20 и лемме 3, мы имеем

$$f(\vec{i}, \vec{i}) = f(\vec{j}, \vec{j}) = f(\vec{k}, \vec{k}) = \vec{0},$$

$$f(\vec{j},\vec{i}) = -f(\vec{i},\vec{j}), \quad f(\vec{k},\vec{i}) = -f(\vec{i},\vec{k}), \quad f(\vec{k},\vec{j}) = -f(\vec{j},\vec{k}).$$

Следовательно, форма f однозначно определяется своими значениями $f(\vec{j},\vec{k})$, $f(\vec{k},\vec{i})$ и $f(\vec{i},\vec{j})$.

С другой стороны, легко проверить, что $f'(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{p},[\vec{x}\vec{y}])$ является билинейной кососимметрической формой. Пусть p_x, p_y, p_z – координаты вектора $\vec{p}$ относительно выбранного базиса. Тогда, также как и форма f, форма f' однозначно определяется своими значениями

$$\begin{aligned}
f'(\vec{j},\vec{k}) &= (\vec{p},[\vec{j},\vec{k}]) = (\vec{p},\vec{i}) = p_x,\\
f'(\vec{k},\vec{i}) &= (\vec{p},[\vec{k},\vec{i}]) = (\vec{p},\vec{j}) = p_y,\\
f'(\vec{i},\vec{j}) &= (\vec{p},[\vec{i},\vec{j}]) = (\vec{p},\vec{k}) = p_z.
\end{aligned}$$

Тогда, согласно теореме 19, форма f совпадает с формой f' тогда и только тогда, когда $f(\vec{j},\vec{k}) = p_x$, $f(\vec{k},\vec{i}) = p_y$ и $f(\vec{i},\vec{j}) = p_z$. Таким образом, существует единственный вектор $\vec{p}$, удовлетворяющий условию теоремы. □

Заметим для будущего использования, что, как было доказано выше, вектор $\vec{p}$ теоремы 21 имеет координаты $p_x = f(\vec{j},\vec{k})$, $p_y = f(\vec{k},\vec{i})$ и $p_z = f(\vec{i},\vec{j})$.

3.6. Ротор векторного поля и теорема Стокса

Пусть векторное поле $\vec{a}$ дифференцируемо в точке M_0. Рассмотрим производную векторного поля в точке M_0, т.е. линейный оператор P из определения 14 дифференцируемости векторного поля в точке M_0. Определим скалярную функцию $f = f(\vec{x},\vec{y})$ векторных переменных $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следующим образом:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (P(\vec{x}),\vec{y}) - (P(\vec{y}),\vec{x}).$$

Легко проверить, что $f(\vec{y},\vec{x}) = -f(\vec{x},\vec{y})$. Проверим, что функция $f(\vec{x},\vec{y})$ линейна по первому переменному. Действительно, для любых векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{y}$ и чисел α_1, α_2, используя свойства скалярного произведения и линейность оператора P, мы получаем

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2,\vec{y}) = (P(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2),\vec{y}) - (P(\vec{y}),\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2) =\\
&(\alpha_1P(\vec{x}_1)+\alpha_2P(\vec{x}_2),\vec{y}) - \alpha_1(P(\vec{y}),\vec{x}_1) - \alpha_2(P(\vec{y}),\vec{x}_2) = \alpha_1(P(\vec{x}_1),\vec{y})+\\
&\alpha_2(P(\vec{x}_2),\vec{y}) - \alpha_1(P(\vec{y}),\vec{x}_1) - \alpha_2(P(\vec{y}),\vec{x}_2) = \alpha_1\left((P(\vec{x}_1),\vec{y}) - (P(\vec{y}),\vec{x}_1)\right)+\\
&\alpha_2\left((P(\vec{x}_2),\vec{y}) - (P(\vec{y}),\vec{x}_2)\right) = \alpha_1 f(\vec{x}_1,\vec{y}) + \alpha_2 f(\vec{x}_2,\vec{y}).
\end{aligned}$$

Тогда из доказанной линейности f по первому переменному и равенства $f(\vec{y},\vec{x}) = -f(\vec{x},\vec{y})$ вытекает линейность f по второму переменному. Таким образом, мы доказали, что f – билинейная и кососимметрическая форма. Тогда, согласно теореме 21, существует такой единственный вектор $\vec{p}$, что

$$(P(\vec{x}),\vec{y}) - (P(\vec{y}),\vec{x}) = (\vec{p}\,,\vec{x}\,,\vec{y}). \tag{3.19}$$

Определение 21. *Вектор $\vec{p}$, однозначно определенный условием* (3.19)*, называется ротором векторного поля $\vec{a}$ в точке M_0 и обозначается через* $\mathbf{rot}\,\vec{a}(M_0)$.

Данное определение ротора векторного поля чисто формально. Однако оно обладает большим преимуществом – оно не зависит от выбора системы координат. Далее мы выясним физический смысл ротора.

Прежде всего мы найдем выражение ротора в декартовых координатах (мы будем далее предполагать, что базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – положительный). Для этого напомним, что, согласно уравнению (3.8) и смысла элементов матрицы линейного оператора, мы имеем следующие координаты векторов $P(\vec{i})$, $P(\vec{j})$ и $P(\vec{k})$ относительно базиса $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $P(\vec{i})(\frac{\partial a_x}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x},\frac{\partial a_z}{\partial x})$, $P(\vec{j})(\frac{\partial a_x}{\partial y},\frac{\partial a_y}{\partial y},\frac{\partial a_z}{\partial y})$ и $P(\vec{k})(\frac{\partial a_x}{\partial z},\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_z}{\partial z})$.

Тогда, ввиду замечания после доказательства теоремы 21, мы имеем для координат ротора следующие значения:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{rot}\,\vec{a})_x =& (P(\vec{j}),\vec{k}) - (P(\vec{k}),\vec{j}) = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\\
(\mathbf{rot}\,\vec{a})_y =& (P(\vec{k}),\vec{i}) - (P(\vec{i}),\vec{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\\
(\mathbf{rot}\,\vec{a})_z =& (P(\vec{i}),\vec{j}) - (P(\vec{j}),\vec{i}) = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем следующее выражение ротора в декартовых координатах.

$$\mathbf{rot}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{3.20}$$

Заметим, что правая часть равенства (3.20) инвариантна относительно одновременных циклических перестановок координат x, y, z и базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Теперь мы докажем формулу

$$\mathbf{rot}\,\vec{a} = [\nabla,\vec{a}], \tag{3.21}$$

выражающую ротор через оператор ∇. Действительно, применяя легко проверяемые равенства

$$[\vec{i},\vec{a}] = a_y\vec{k} - a_z\vec{j}, \quad [\vec{j},\vec{a}] = a_z\vec{i} - a_x\vec{k}, \quad [\vec{k},\vec{a}] = a_x\vec{j} - a_y\vec{i},$$

согласно (3.13), мы получаем

$$[\nabla, \vec{a}] = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}[\vec{i}, \vec{a}] + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}[\vec{j}, \vec{a}] + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}[\vec{k}, \vec{a}] = \\ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \mathbf{rot}\,\vec{a}.$$

Используя формулу (3.21) и известную формулу, выражающую векторное произведение в декартовых координатах, мы можем формально записать следующую формулу:

$$\mathbf{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

которая легко запоминается и которая позволяет, разлагая формально данный определитель по элементам первой строки, получить выражение ротора в декартовых координатах.

Теорема 22 (Формальные свойства ротора). *Для векторных полей $\vec{a}$, $\vec{b}$ и скалярного поля φ имеют место следующие равенства:*

1) $\mathbf{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{rot}\,\vec{a} + \mathbf{rot}\,\vec{b}$*;*

2) $\mathbf{rot}(\varphi\,\vec{a}) = [\mathbf{grad}\,\varphi, \vec{a}] + \varphi\,\mathbf{rot}\,\vec{a}$

В частности, $\mathbf{rot}(c\,\vec{a}) = c\,\mathbf{rot}\,\vec{a}$*, где* $c = const$*;*

3) $\mathbf{rotgrad}\,\varphi = \vec{0}$*.*

Доказательство. 1). Применяя формулу (3.21), мы получаем

$$\mathbf{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = [\nabla, (\vec{a} + \vec{b})] = [\nabla, \vec{a}] + [\nabla, (\vec{b}] = \mathbf{rot}\,\vec{a} + \mathbf{rot}\,\vec{b}.$$

2). Применяя формулы (3.21) и (3.14), мы получаем

$$\mathbf{rot}(\varphi\,\vec{a}) = [\nabla, (\varphi\,\vec{a})] = [\nabla, (\varphi\,\vec{a}_c)] + [\nabla, (\varphi_c\,\vec{a})] = \\ [(\nabla\varphi), \vec{a}_c] + \varphi[\nabla, \vec{a}] = [\mathbf{grad}\,\varphi, \vec{a}] + \varphi\,\mathbf{rot}\,\vec{a}.$$

В частности, если $\varphi = c$, то, так как $\mathbf{grad}\,c = \vec{0}$, мы имеем $\mathbf{rot}(c\,\vec{a}) = c\,\mathbf{rot}\,\vec{a}$.

3). Проводим вычисления, используя формулы (2.4) и (3.20),

$$\mathbf{rotgrad}\,\varphi = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\vec{i} + \\ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Приведем также нестрогое доказательство, использующее формулы (2.4) и (3.20),

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\varphi = [\nabla, \mathbf{grad}\,\varphi] = [\nabla, (\nabla\,\varphi)] = [\nabla, \nabla]\,\varphi = \vec{0}.$$

Здесь мы использовали векторное тождество $[\vec{p}, \vec{p}] = \vec{0}$ и подставили ∇ вместо $\vec{p}$. Однако, согласно определению ∇, это можно делать только для функций линейных относительно $\vec{p}$, что не имеет место в данном случае. □

3.7. Линейный интеграл векторного поля, циркуляция и теорема Стокса

Пусть $\vec{a}$ – векторное поле, γ – некоторая ориентированная кривая в области определения $\vec{a}$. Интеграл

$$\int_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r})$$

называется **линейным интегралом векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой** γ. Выражая этот интеграл в декартовых координатах, мы получаем

$$\int_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_\gamma a_x d\,x + a_y\,dy + a_z\,dz. \tag{3.22}$$

Таким образом, линейный интеграл векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой γ является криволинейным интегралом второго рода вдоль γ, записанным в векторной форме. В случае, когда γ является замкнутой кривой, линейный интеграл векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой γ называется **циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой** γ.

Выясним физический смысл линейного интеграла векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой γ в случае, когда векторное поле $\vec{a}$ является силовым полем.

Пусть $\gamma = \breve{BC}$, где B – начальная, а C – конечная точка кривой γ. Рассмотрим задачу вычисления работы, произведенной материальной точкой M при перемещении из точки B в точку B. Для этого разобьем кривую $\breve{BC}$ на n частей точками $B = M_0, M_1, \ldots, M_n = C$ и положим $\gamma_i = \breve{M_{i-1}M_i}$. Вычислим приближенно работу A_i точки M вдоль кривой γ_i, заменяя кривую γ_i направленным отрезком $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ и считая векторное поле на γ_i постоянным и равным $\vec{a}(N_i)$, где N_i – некоторая точка кривой γ_i. Тогда для работы A_i точки M вдоль кривой γ_i и для работы A точки M вдоль кривой γ мы получаем следующие приближенные формулы:

$$A_i \approxeq (\vec{a}(N_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i}),$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approxeq \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(N_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i}).$$

Будем считать, что точное значение работы A определяется формулой

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(N_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i}) =$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (a_x(N_i)\Delta x_i + a_y(N_i)\Delta y_i + a_z(N_i)\Delta z_i)$$

где λ – диаметр разбиения кривой γ точками M_i и $\Delta x_i,\ \Delta y_i,\ \Delta z_i$ – координаты вектора $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$. Однако, ввиду (3.22) и как известно из математического анализа, этот предел равен криволинейному интегралу $\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})$, т.е. линейному интегралу векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой γ.

Теорема 23 (Теорема Стокса). *Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром; т.е.*

$$\oint_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_\sigma (\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n}) ds,$$

где мы считаем, что поверхность σ ограничена контуром γ.

Заметим, что в этой теореме мы считаем, что все интегралы существуют, ориентации σ и γ согласованы, как указано в разделе 1.5. Предполагается также, что σ – ограниченная кусочно гладкая поверхность и векторное поле $\vec{a}$ дважды непрерывно дифференцируемо. Мы используем обозначение интеграла $\oint$, чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Доказательство. Мы будем доказывать теорему Стокса в случае, когда поверхность σ задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. В общем случае ее можно разбить поверхность на части такого вида и применить эту теорему к каждой из них. Тогда поток ротора через σ будет равен сумме потоков ротора через эти части, а сумма полученных криволинейных интегралов будет равна криволинейному интегралу по границе, так как интегралы по каждой внутренней перегородке встретятся в данной сумме дважды, причем с противоположными ориентациями и, следовательно, сократятся.

Согласно предположению, область D определения векторной функции $\vec{r}(u, v)$ – ограниченная область в плоскости u, v. Пусть граница λ области D определяется в координатах u, v уравнениями $u = u(t),\ v = v(t)$ $(t \in [a, b])$, где положительное направление обхода кривой λ происходит против часовой стрелки. Тогда контур γ является годографом векторной функции $\vec{r}(u(t),\, v(t))$, причем можно считать, что возрастанию параметра t соответствует указанный выше обход контура γ.

Пусть $x(u,\, v)$, $y(u,\, v)$, $z(u,\, v)$ – координаты вектора $\vec{r}(u\, v)$. Согласно вычислительной формуле для криволинейного интеграла в декартовых координатах, мы имеем

$$\oint_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_a^b \Bigg(a_x(u(t)\,v(t))\big(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\big) + a_y(u(t)\,v(t))\big(\frac{\partial y}{\partial u}u'(t) +$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}v'(t)\big) + a_z(u(t)\,v(t))\big(\frac{\partial z}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial z}{\partial v}v'(t)\big)\Bigg) d\,t = \oint_\lambda (\vec{a},\, \vec{r}_u)du + (\vec{a},\, \vec{r}_u)dv.$$

Применим теперь к полученному выражению для $\oint_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r})$ формулу Грина в плоскости u, v. Тогда мы получаем

$$\oint_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_D \left(\frac{\partial(\vec{a},\, \vec{r}_v)}{\partial u} - \frac{\partial(\vec{a},\, \vec{r}_u)}{\partial v} \right) =$$

$$\int_D \left(\left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial u},\, \vec{r}_v \right) - \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial v},\, \vec{r}_u \right) \right) du\, dv. \quad (3.23)$$

Пусть $\vec{\tau} = \vec{r}_u/|\vec{r}_u|$ и s – длина дуги как параметр на координатной линии $u = u$, $v = const$. Тогда $u = u(s)$ и, согласно теореме 14, мы имеем

$$P(\vec{\tau}) = \frac{d\,(\vec{a}(u(s), v)}{d\,s} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial u}u'(s).$$

Используя очевидное равенство

$$\frac{d\vec{r}(u(s), v)}{ds} = \vec{r}_u u'(s),$$

мы получаем $\frac{\partial \vec{a}}{\partial u} = P(\vec{r}_u)$ и, аналогично, $\frac{\partial \vec{a}}{\partial v} = P(\vec{r}_v)$.

Используя эти равенства в (3.23) и применяя определение ротора, мы приходим к следующему равенству:

$$\oint_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_D (\mathbf{rot}\vec{a}, [\vec{r}_u, \vec{r}_v])du\, dv. \quad (3.24)$$

Так как $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,\vec{n}$ и координаты A, B, C вектора $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ определяются формулами

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

мы можем переписать равенство (3.24) в виде

$$\oint_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_D (\mathbf{rot}\vec{a}, \vec{n})|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|du\, dv = \int_D (\mathbf{rot}\vec{a}, \vec{n})\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}du\, dv.$$

Окончательно, используя известную из математического анализа вычислительную формулу для поверхностного интеграла, мы получаем

$$\oint_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_\sigma (\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n}) ds.$$

□

Теорема Стокса позволяет выразить проекцию ротора $\mathbf{rot}\vec{a}$ на любое направление с помощью следующих рассуждений.

Пусть M_0 – некоторая точка и $\vec{n}$ – произвольный единичный вектор. Проведем через точку M_0 некоторую ориентированную поверхность σ, ограниченную контуром γ, для которой $\vec{n}$ является единичным вектором в точке M_0. Пусть контур γ, оставаясь на поверхности σ, стягивается к точке M_0. Тогда, применяя теорему о среднем для поверхностного интеграла первого рода и обозначая через S площадь части поверхности σ, ограниченной переменным контуром γ, мы получаем

$$\lim_{\gamma \to M_0} \frac{\oint_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})}{S} = \lim_{\gamma \to M_0} \frac{\int_\sigma (\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n}) ds}{S} = \lim_{M \to M_0} (\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n})(M),$$

где M – некоторая точка, лежащая на части поверхности σ, ограниченной переменным контуром γ. Мы здесь воспользовались тем, что точка M стремится к точке M_0, когда контур γ стягивается к точке M_0. Так как мы предполагаем, что функция $(\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n})$ на σ является непрерывной, то, вычисляя последний предел, мы получаем следующую формулу:

$$(\mathbf{rot}\vec{a}, \vec{n})(M_0) = \lim_{\gamma \to M_0} \frac{\oint_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})}{S}. \tag{3.25}$$

Так как $(\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n})(M_0)$ является численным значением ортогональной проекции ротора на направление единичного вектора $\vec{n}$, то формула (3.25) позволяет выразить это численное значение проекции для любой точки и любого направления через циркуляцию векторного поля. В частности, выбирая в качестве вектора $\vec{n}$ базисные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, мы получаем формулы для координат ротора $\mathbf{rot}\,\vec{a}$.

3.8. Необходимые и достаточные условия потенциальности и соленоидальности векторного поля

Определение 22. *Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным в области U, если в этой области существует такое скалярное поле φ, что в этой области $\vec{a} = \mathbf{grad}\,\varphi$. В этом случае скалярное поле φ называется потенциалом векторного поля $\vec{a}$.*

Так как градиент постоянного скалярного поля равен нулю, то потенциал определен с точностью до постоянного слагаемого, т.е., если φ - потенциал векторного поля $\vec{a}$, то $\varphi + \mathrm{const}$, также является потенциалом $\vec{a}$. Обычно, чтобы зафиксировать постоянную const, выбирают начальную точку, в которой φ равняется нулю.

Потенциальное векторное поле изучается проще, чем векторное поле общего вида, так как его все его свойства можно получить с помощью более простого объекта – его потенциала.

Все основные свойства потенциального векторного поля определяются следующей теоремой.

Теорема 24. *Следующие четыре условия эквивалентны:*

1) *Векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным в области U;*

2) $\mathbf{rot}\,\vec{a} = \vec{0}$ *в области U;*

3) *Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру, лежащему в области U, равна нулю.*

4) *Линейный интеграл векторного поля $\vec{a}$ вдоль пути, лежащему в области U, не зависит от пути, а зависит только от начальной и конечной точки этого пути.*

Заметим, что эта теорема означает, что каждое из условий 2), 3) и 4) является необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\vec{a}$.

Доказательство. Сначала докажем, что из условия 1) вытекает условие 2). Действительно, если векторное поле $\vec{a}$ потенциально, то $\vec{a} = \mathbf{grad}\,\varphi$. Тогда, согласно последнему свойству из теоремы 22,

$$\mathbf{rot}\,\vec{a} = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\varphi = \vec{0}.$$

То, что из условия 2) следует условие 3), сразу следует из теоремы Стокса: $\oint_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\int_\sigma (\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n})\,ds$.

Покажем, что из условия 3) следует условие 4). Пусть γ_1 и γ_2 две кривые, лежащая в области U и соединяющие точку A с точкой B. Обозначим через $-\gamma_2$ кривую, полученную из γ_2 заменой ориентации на противоположную, и через γ кривую, полученную соединением кривых γ_1 и $-\gamma_2$. Ясно, что γ – замкнутый контур. Тогда, согласно условию 3), мы имеем

$$\oint_\gamma (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_{\gamma_1} (\vec{a}, d\,\vec{r}) - \int_{\gamma_2} (\vec{a}, d\,\vec{r}) = 0,$$

откуда следует $\int_{\gamma_1} (\vec{a}, d\,\vec{r}) = \int_{\gamma_2} (\vec{a}, d\,\vec{r})$.

Наконец, осталось доказать, что из условия 4) следует условие 1). Фиксируем некоторую начальную точку O. Пусть M – некоторая точка области U и $\vec{\tau}$ – некоторый единичный вектор. Соединим точку O с точкой M некоторой гладкой кривой $\overset{\smile}{OM}$, касательный вектор к которой в точке M равен $\vec{\tau}$. Определим скалярное поле φ в точке M равенством

$$\varphi(M) = \int_{\overset{\smile}{OM}} (\vec{a}, d\,\vec{r}).$$

Согласно условию 4), значение $\varphi(M)$ не зависит от выбора кривой $\overset{\smile}{OM}$, а зависит только от точки M. Таким образом, скалярное поле φ в области U корректно определено. Мы опустим доказательство того, что φ дифференцируемо в области U, так как это делается в математическом анализе при изучении интегрируемости полного дифференциала.

Пусть кривая $\overset{\smile}{OM}$ является годографом векторной функции $\vec{r}(s)$, где параметр s является длиной дуги, измеряемой от точки O. Тогда, выражая криволинейный интеграл через определенный, мы получаем

$$\varphi(\vec{r}(s)) = \int_0^s (\vec{a}(r(s))\vec{r}'(s)d\,s.$$

Тогда, согласно определению производной скалярного поля по направлению 12, мы получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\tau}}\big(M\big) = \frac{d}{d\,s}\int_0^s (\vec{a}(r(s))\vec{r}'(s)d\,s\big(s_0\big) = (\vec{a}(M), \vec{\tau}),$$

где s_0 – значение параметра s_0 точки M. Согласно теореме 12, отсюда следует, что $\mathbf{grad}\,\varphi(M) = \vec{a}(M)$. □

Напомним, что векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным в области U, если в этой области $\operatorname{div}\,\vec{a} = 0$.

Теорема 25. *Векторное поле $\vec{a}$ является соленоидальным в области U тогда и только тогда, когда в этой области существует такое векторное поле $\vec{b}$, что $\vec{a} = \mathbf{rot}\,\vec{b}$.*

Векторное поле $\vec{b}$ из теоремы 25 иногда называют векторным потенциалом векторного поля $\vec{a}$.

Доказательство. Пусть векторное поле $\vec{a}$ соленоидально в области U. Мы должны найти такое векторное поле $\vec{b}$, что $\vec{a} = \mathbf{rot}\,\vec{b}$. Согласно формулам (3.9) и (3.20) в декартовых координатах, это означает выполнение следующих равенств:

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} = a_x, \quad \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} = a_y, \quad \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = a_z.$$

Мы будем искать векторное поле $\vec{b}$, для которого $b_z = 0$. Тогда данные уравнения запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial b_y}{\partial z} = -a_x, \quad \frac{\partial b_x}{\partial z} = a_y, \quad \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = a_z. \tag{3.26}$$

Выбрав начальное значение $z = z_0$ и проинтегрировав два первых уравнения от z_0 до z, мы получаем

$$b_x(x,y,z) = b_x(x,y,z_0) + \int_{z_0}^{z} a_y(x,y,z)\,dz,$$
$$b_y(x,y,z) = b_y(x,y,z_0) - \int_{z_0}^{z} a_x(x,y,z)\,dz,$$

где в качестве $b_x(x,y,z_0)$ и $b_y(x,y,z_0)$ можно взять произвольные функции переменных x и y. Подставив данные значения $b_x(x,y,z)$ и $b_y(x,y,z)$ в последнее из уравнений (3.26) и продифференцировав интегралы по x b y как параметрам , мы получаем

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial b_y(x,y,0)}{\partial x} - \frac{\partial b_x(x,y,0)}{\partial y} = a_z.$$

Так как векторное поле $\vec{a}$ соленоидально, согласно формуле (3.9), мы имеем

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = -\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Это позволяет переписать предыдущее уравнение в виде

$$a_z(x,y,0) + \frac{\partial b_y(x,y,0)}{\partial x} - \frac{\partial b_x(x,y,0)}{\partial y} = 0.$$

Покажем, что можно выбрать $b_x(x,y,z_0)$ и $b_y(x,y,z_0)$ таким образом, чтобы данное уравнение удовлетворялось. Действительно, оно удовлетворяется для следующего выбора $b_x(x,y,z_0)$ и $b_y(x,y,z_0)$

$$b_y(x,y,z_0) = 0 \quad \text{и} \quad b_(x,y,z_0) = \int a_z(x,y,0)\,dy.$$

Таким образом мы показали, что существуют функции b_x, b_y и b_z переменных x, y, z, которые удовлетворяют уравнениям (3.26), т.е. векторное поле $\vec{b}$ с координатами b_z, b_y, b_z, для которого выполняется равенство $\vec{a} = \mathbf{rot}\,\vec{b}$.

Пусть условие теоремы выполнено. Вычислим $\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\mathbf{rot}\,\vec{b}$ в координатах. Согласно формулам (3.9) и (3.20), мы получаем

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 b_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 b_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 b_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 b_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 b_x}{\partial z \partial y} = 0.$$

□

3.9. Дивергенция и ротор векторного произведения и градиент скалярного произведения векторных полей

Теперь мы выведем несколько полезных формул.

Теорема 26. *Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторные поля. Имеют место следующие формулы:*

1) $\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}] = (\vec{b},\mathbf{rot}\,\vec{a}) - (\vec{a},\mathbf{rot}\,\vec{b})$*;*

2) $\mathbf{rot}\,[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{b},\nabla)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b}$*;*

3) $\mathbf{grad}\,(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\mathbf{rot}\,\vec{b}) + (\vec{b},\mathbf{rot}\,\vec{a}) + (\vec{a},\nabla)\vec{b} + (\vec{b},\nabla)\vec{a}$*.*

Доказательство. 1) Пользуясь формулами (3.17), (3.21), правилами действия с ∇ и свойствами смешанного произведения, получаем

$$\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}] = (\nabla,[\vec{a},\vec{b}]) = (\nabla,\ \vec{a},\ \vec{b}) + (\nabla,\ \vec{a},\ \vec{b}_c) + (\nabla,\ \vec{a}_c,\ \vec{b}) = (\vec{b},\ \nabla,\ \vec{a}) - \\ (\vec{a},\ \nabla,\ \vec{b}) = (\vec{b},[\nabla,\ \vec{a}]) - (\vec{a},[\nabla,\ \vec{b}]) = (\vec{b},\mathbf{rot}\,\vec{a}) - (\vec{a},\mathbf{rot}\,\vec{b}).$$

2) Пользуясь формулами (3.17), (3.21), правилами действия с ∇ и свойствами двойного векторного произведения, получаем

$$\mathbf{rot}\,[\vec{a},\vec{b}] = [\nabla,[\vec{a},\vec{b}]] = [\nabla,[\vec{a},\vec{b}_c]] + [\nabla,[\vec{a},\vec{b}_c]] = (\vec{b},\nabla)\vec{a} - \vec{b}(\nabla,\vec{a}) + \\ \vec{a}(\nabla,\vec{b}) - (\vec{a},\nabla)\vec{b} = \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{b},\nabla)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b}.$$

3) Применяя формулу для двойного векторного произведения, получаем следующее тождество:

$$\vec{p}\,(\vec{a},\vec{b}) = [\vec{b},[\vec{p},\vec{a}]] + (\vec{b},\vec{p})\,\vec{a}. \tag{3.27}$$

Пользуясь формулами (3.14) и (3.21), правилами действия с ∇ и формулой (3.27), получаем

$$\mathbf{grad}\,(\vec{a},\vec{b}) = \nabla\,(\vec{a},\vec{b}) = \nabla\,(\vec{a},\vec{b}_c) + \nabla\,(\vec{a}_c,\vec{b}) = [\vec{b},[\nabla,\vec{a}]] + (\vec{b},\nabla)\,\vec{a} + \\ [\vec{a},[\nabla,\vec{b}]] + (\vec{a},\nabla)\,\vec{b} = (\vec{a},\mathbf{rot}\,\vec{b}) + (\vec{b},\mathbf{rot}\,\vec{a}) + (\vec{a},\nabla)\vec{b} + (\vec{b},\nabla)\vec{a}.$$

□

Теперь выясним смысл слагаемых вида $(\vec{a},\nabla)\vec{b}$ в теореме 26. Действительно, положив $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0$, где $\vec{a}^0$ - единичный вектор направления $\vec{a}$ и выражением производной векторного поля по направлению через ∇ , мы получаем

$$(\vec{a},\nabla)\vec{b} = |\vec{a}|(\vec{a}^0,\nabla)\vec{b} = |\vec{a}|\frac{\partial\vec{b}}{\partial\vec{a}^0}.$$

3.10. Дифференциальные операции второго порядка

Мы будем называть **дифференциальной операцией первого порядка** взятие градиента скалярного поля или взятие либо дивергенции, либо ротора векторного поля.

Дифференциальной операцией второго порядка называется последовательное применение двух дифференциальных операций первого порядка.

По определению у нас есть следующие дифференциальные операции второго порядка: $\operatorname{div} \mathbf{grad}\, \varphi$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, \varphi$, $\mathbf{grad}\, \operatorname{div} \tilde{a}$, $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \vec{a}$ и $\mathbf{rot}\, \mathbf{rot} \vec{a}$. Из них две операции тождественно равны нулю: $\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, \varphi = \vec{0}$ согласно теореме 22 и $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \vec{a} = 0$ согласно теореме 25.

Дифференциальная операция второго порядка $\operatorname{div} \mathbf{grad}\, \varphi$ называется оператором Лапласа (или лапласианом) и обозначается $\Delta\varphi$. Выразим оператор Лапласа в декартовых координатах и через оператор Гамильтона ∇. Применяя формулы (2.4) и (3.9), мы получаем

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Применяя формулы (3.14) и (3.17), мы получаем

$$\Delta\varphi = (\nabla, \nabla\varphi) = (\nabla, \nabla)\varphi = \nabla^2\varphi.$$

Выразим оставшиеся дифференциальные операции второго порядка через оператор ∇, используя формулы (3.17) и (3.21),

$$\mathbf{grad}\, \operatorname{div} \tilde{a} = \nabla(\nabla, \vec{a}),$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{rot} \vec{a} = [\nabla, [\nabla, \vec{a}]].$$

3.11. Выражение дивергенции и ротора векторного поля в ортогональных криволинейных координатах

Пусть задана ортогональная криволинейная система координат с координатами u, v, w. Напомним (см. раздел 1.6), что в этом случае в каждой точке области задания координат имеется ортонормированный базис $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ и коэффициенты Ламе H_u, H_v, H_w. Мы будем считать базис $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ положительным, тогда по определению векторного произведения

$$[\vec{e}_u, \vec{e}_v] = \vec{e}_w, \quad [\vec{e}_v, \vec{e}_w] = \vec{e}_u, \quad [\vec{e}_w, \vec{e}_u] = \vec{e}_v. \tag{3.28}$$

Заметим, что, взяв одно из этих равенств за начальное, мы получим остальные два циклическими перестановками индексов u, v, w.

Пусть векторное поле $\vec{a}$ задано в этой системе координат, т.е.

$$\vec{a} = a_u\vec{e}_u + a_v\vec{e}_v + a_w\vec{e}_w.$$

Используя теоремы 19 и 22, мы получаем

$$\operatorname{div}\,\vec{a} = (\mathbf{grad}\,a_u, \vec{e}_u) + a_u \operatorname{div}\,\vec{e}_u + (\mathbf{grad}\,a_v, \vec{e}_v) + a_v \operatorname{div}\,\vec{e}_v + \\ (\mathbf{grad}\,a_w, \vec{e}_w) + a_w \operatorname{div}\,\vec{e}_w, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{a} = [\mathbf{grad}\,a_u, \vec{e}_u] + a_u\mathbf{rot}\,\vec{e}_u + [\mathbf{grad}\,a_v, \vec{e}_v] + a_v\mathbf{rot}\,\vec{e}_v + \\ [\mathbf{grad}\,a_w, \vec{e}_w] + a_w\mathbf{rot}\,\vec{e}_w. \quad (3.30)$$

Так как слагаемые, содержащие градиенты компонент a_u, a_v, a_w,можно найти с помощью формулы (2.5), нам нужно найти дивергенции и роторы базисных векторных полей $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$. Начнем с отыскания роторов этих полей.

Возьмем, например, $\vec{e}_u$. Согласно формуле (2.5), мы имеем $\vec{e}_u = H_u\mathbf{grad}\,u$. Тогда, применяя теорему 22, мы получаем

$$\mathbf{rot}\,\vec{e}_u = \mathbf{rot}\,(H_u\mathbf{grad}\,u) = [\mathbf{grad}\,H_u, \mathbf{grad}\,u] + \\ H_u\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,u = [\mathbf{grad}\,H_u, \mathbf{grad}\,u].$$

Применяя снова формулу (2.5), мы окончательно получаем

$$\mathbf{rot}\,\vec{e}_u = \frac{1}{H_u}[\mathbf{grad}\,H_u, \vec{e}_u]. \quad (3.31)$$

Аналогично мы получаем следующие формулы:

$$\mathbf{rot}\,\vec{e}_v = \frac{1}{H_v}[\mathbf{grad}\,H_v, \vec{e}_v], \quad \mathbf{rot}\,\vec{e}_w = \frac{1}{H_w}[\mathbf{grad}\,H_w, \vec{e}_w]. \quad (3.32)$$

Согласно формуле (2.5), последней из формул (3.28) и формулам (3.31) и (3.32), мы получаем

$$\operatorname{div}\,\vec{e}_u = \operatorname{div}\,[\vec{e}_v, \vec{e}_w] = \vec{e}_w\mathbf{rot}\,e_v - \vec{e}_v\mathbf{rot}\,\vec{e}_w = \frac{1}{H_v}(\mathbf{grad}\,H_v\vec{e}_v\vec{e}_w) - \\ \frac{1}{H_w}(\mathbf{grad}\,H_v\vec{e}_w\vec{e}_v) = \frac{1}{H_vH_u}\frac{\partial H_v}{\partial u} + \frac{1}{H_wH_u}\frac{\partial H_w}{\partial u}.$$

Легко видеть, что полученную формулу можно записать в виде

$$\operatorname{div}\,\vec{e}_u = \frac{1}{H_uH_vH_w}\frac{\partial(H_vH_w)}{\partial u}.$$

Это равенство и формула (2.5) позволяет получить следующее равенство:

$$(\vec{e}_u, \mathbf{grad}\, a_u) + a_u \operatorname{div} \vec{e}_u = \frac{1}{H_u}\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{a_u}{H_u H_v H_w}\frac{\partial (H_v H_w)}{\partial u} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\frac{\partial (a_u H_v H_w)}{\partial u}. \quad (3.33)$$

Переставляя в последней формуле циклически индексы u, v и w, мы получаем следующие равенства

$$(\vec{e}_v, \mathbf{grad}\, a_v) + a_v \operatorname{div} \vec{e}_v = \frac{1}{H_u H_v H_w}\frac{\partial (a_v H_u H_w)}{\partial v}, \quad (3.34)$$

$$(\vec{e}_w, \mathbf{grad}\, a_w) + a_w \operatorname{div} \vec{e}_w = \frac{1}{H_u H_v H_w}\frac{\partial (a_w H_u H_v)}{\partial w}. \quad (3.35)$$

Заменяя с помощью формул (3.33), (3.34) и (3.35) пары слагаемых в формуле (3.29), мы, наконец, получаем выражение дивергенции векторного поля в ортогональных криволинейных координатах

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial (a_u H_v H_w)}{\partial u} + \frac{\partial (a_v H_u H_w)}{\partial v} + \frac{\partial (a_w H_u H_v)}{\partial w}\right). \quad (3.36)$$

Теперь рассмотрим следующую сумму:

$$[\mathbf{grad}\, a_u, \vec{e}_u] + a_u \mathbf{rot}\, \vec{e}_u.$$

Применяя формулу (3.31), мы получаем

$$[\mathbf{grad}\, a_u, \vec{e}_u] + a_u \mathbf{rot}\, \vec{e}_u = [\mathbf{grad}\, a_u, \vec{e}_u] + \frac{a_u}{H_u}[\mathbf{grad}\, H_u, \vec{e}_u] = [\mathbf{grad}\, a_u + \frac{a_u}{H_u}\vec{e}_u] = \frac{1}{H_u}[\mathbf{grad}\, (a_u H_u), \vec{e}_u]. \quad (3.37)$$

Циклически переставляя индексы u, v и w, получаем

$$[\mathbf{grad}\, a_v, \vec{e}_v] + a_v \mathbf{rot}\, \vec{e}_v = \frac{1}{H_v}[\mathbf{grad}\, (a_v H_u), \vec{e}_v], \quad (3.38)$$

$$[\mathbf{grad}\, a_w, \vec{e}_w] + a_w \mathbf{rot}\, \vec{e}_w = \frac{1}{H_w}[\mathbf{grad}\, (a_w H_w), \vec{e}_w]. \quad (3.39)$$

Заменяя с помощью формул (3.37), (3.38) и (3.39) пары слагаемых в формуле (3.30), мы получаем

$$\mathbf{rot}\, \vec{a} = \frac{1}{H_u}[\mathbf{grad}\, (a_u H_u), \vec{e}_u] + \frac{1}{H_v}[\mathbf{grad}\, (a_v H_u), \vec{e}_v] + \frac{1}{H_w}[\mathbf{grad}\, (a_w H_w), \vec{e}_w].$$

Учитывая (3.28) и ортонормированность базиса $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$, мы можем вычислить первую координату $(\mathbf{rot}\,\vec{a})_u$ векторного поля $\mathbf{rot}\,\vec{a}$ следующим образом:

$$\begin{gathered}(\mathbf{rot}\,\vec{a})_u = (\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{e}_u) = \frac{1}{H_v}(\mathbf{grad}\,(a_v H_u), \vec{e}_v, \vec{e}_u) + \\ \frac{1}{H_w}(\mathbf{grad}\,(a_w H_w), \vec{e}_w, \vec{e}_u) = -\frac{1}{H_v}(\vec{e}_w, \mathbf{grad}\,(a_v H_v)) + \\ \frac{1}{H_w}(\vec{e}_v, \mathbf{grad}\,(a_w H_w)) = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial(a_w H_w)}{\partial v} - \frac{\partial(a_v H_v)}{\partial w}\right).\end{gathered} \tag{3.40}$$

Циклически переставляя индексы u, v и w, получаем остальные координаты векторного поля $\mathbf{rot}\,\vec{a}$

$$(\mathbf{rot}\,\vec{a})_v = \frac{1}{H_w H_u}\left(\frac{\partial(a_u H_u)}{\partial w} - \frac{\partial(a_w H_w)}{\partial u}\right), \tag{3.41}$$

$$(\mathbf{rot}\,\vec{a})_w = \frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial(a_v H_v)}{\partial u} - \frac{\partial(a_u H_u)}{\partial v}\right), \tag{3.42}$$

Используя формулы (3.40), (3.41) и (3.42), окончательно получаем следующую формулу для ротора в криволинейных ортогональных координатах:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\vec{a} = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial(a_w H_w)}{\partial v} - \frac{\partial(a_v H_v)}{\partial w}\right)\vec{e}_u + \\ \frac{1}{H_w H_u}\left(\frac{\partial(a_u H_u)}{\partial w} - \frac{\partial(a_w H_w)}{\partial u}\right)\vec{e}_v + \\ \frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial(a_v H_v)}{\partial u} - \frac{\partial(a_u H_u)}{\partial v}\right)\vec{e}_w.\end{aligned} \tag{3.43}$$

В частности, напишем эти формулы для цилиндрических и сферических координат. Напомним (см. раздел 1.6), что для цилиндрических координат ρ, φ, z, $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho$ и $H_z = 1$, а для сферических координат r, θ, φ – $H_r = 1$, $H_\theta = r$ и $H_\varphi = r\sin\theta$. Поэтому формулы (3.36) и (3.43) в этом случае переписываются следующим образом:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial(a_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho a_z)}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r^2\sin\theta a_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial\varphi}\right),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\vec{a} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(a_z)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \\ \left(\frac{\partial(a_\rho)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial(a_\rho)}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z,\end{aligned}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(\rho a_\theta)}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \\ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(a_r)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\sin\theta a_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Глава 4.

Элементы тензорного анализа

Поскольку студенты второго курса знакомы только с ньютоновой моделью пространства, т.е. с трехмерным евклидовым пространством, наши возможности использования тензорного анализа весьма ограничены. Тем не менее главе мы определим тензоры в произвольном линейном пространстве, приведем их примеры и введем основные операции над тензорами. Поле тензора будет определено только в трехмерном евклидовом пространстве.

4.1. Определение тензора и примеры тензоров

Пусть L – n-мерное действительное линейное пространство. Мы далее воспользуемся обозначениями раздела 3.1. Рассмотрим два базиса (e_i) $(i = 1, \ldots, n)$ и $(e_{i'})$ $(i' = 1', \ldots, n')$ пространства L. Напишем разложения первого базиса по второму и второго базиса по первому:

$$e_i = \sum_{i'=1'}^{n'} A_i^{i'} e_{i'}, \quad e_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_{i'}^{i} e_i. \tag{4.1}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующее соглашение: если в некотором выражении имеются два одинаковых индекса, один из которых стоит вверху, а другой внизу, то по этим индексам производится суммирование по всем значениям этого индекса, даже если это суммирование и не указано специально. Поэтому, чтобы не было путаницы, в выражении не может быть более двух одинаковых индексов, а если их точно два, то они не могут стоять одновременно вверху или внизу. Поэтому равенства (4.1) могут быть записаны следующим образом

$$e_i = A_i^{i'} e_{i'}, \quad e_{i'} = A_{i'}^{i} e_i. \tag{4.2}$$

Напомним, что матрицы $(A^{i'}_i)$ и $(A^i_{i'})$ взаимно обратны, т.е. $A^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}$.

Обратим внимание на то, что объекты, которые были рассмотрены ранее, а именно, векторы, линейные операторы и p-линейные формы реально могут быть заданы некоторым набором чисел, зависящим от выбора базиса. Посмотрим, как преобразуются эти числа при замене базиса.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Вектор $x \in L$ задается набором своих компонент (x^i) относительно базиса (e_i), которые определяются равенством $x = x^i e_i$. Используя (4.2), найдем его компоненты $(x^{i'})$ относительно базиса $(e_{i'})$: $x = x^i e_i = x^i A^{i'}_i e_{i'}$. Отсюда следует, что

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i. \tag{4.3}$$

2. Согласно разделу 3.1, линейный оператор $f : L \to L$ определяется заданием своей матрицы (a^i_j) относительно базиса (e_i), которая определяется равенством $f(e_j) = a^i_j e_i$. Кроме того, при замене базиса элементы этой матрицы, согласно (3.5), преобразуются следующим образом:

$$a^{i'}_{j'} = A^{i'}_i A^j_{j'} a^i_j. \tag{4.4}$$

3. Согласно теореме 20, p-линейная форма $f(x_1, \ldots, x_p)$ однозначно определяется заданием набора чисел $f_{i_1 \ldots i_p} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$, зависящих от выбора базиса (e_i). Выясним, как эти числа преобразуются при замене базиса.

$$f_{i_{1'} \ldots i_{p'}} = f(e_{i'_1}, \ldots, e_{i'_p}) = f(A^{i_1}_{i'_1} e_{i_1}, \ldots, A^{i_p}_{i'_p} e_{i'_p}) = \\ A^{i_1}_{i'_1} \ldots A^{i_p}_{i'_p} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = A^{i_1}_{i'_1} \ldots A^{i_p}_{i'_p} f_{i_1 \ldots i_p},$$

где мы использовали последовательно линейность формы f по всем ее аргументам $x_1, \ldots, x_p$. Таким образом, набор чисел $f_{i_1 \ldots i_p}$ преобразуется по следующему закону:

$$f_{i_{1'} \ldots i_{p'}} = A^{i_1}_{i'_1} \ldots A^{i_p}_{i'_p} f_{i_1 \ldots i_p}. \tag{4.5}$$

Каждое действительное число c можно рассматривать как постоянную функцию на множестве базисов пространства L с законом преобразования: $c' = c$. Мы будем называть такую постоянную функцию **скаляром**.

Заметим, что все рассмотренные выше объекты являются функциями на множестве базисов пространства L, удовлетворяющими некоторому закону преобразования при замене базиса. Теперь мы дадим общее определение, которому удовлетворяют все рассмотренные выше объекты.

Определение 23. *Говорят, что задан тензор T типа (p, q) $(p, q \geq 0)$ на n-мерном линейном пространстве L, если каждому базису (e_i) пространства L поставлен в соответствие набор n^{p+q} чисел $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, заданных для любых $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n$, которые при замене базиса (e_i) базисом $(e_{i'})$ преобразуются следующим образом:*

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = A^{i'_1}_{i_1} \cdots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_q}_{j'_q} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}. \tag{4.6}$$

Индексированные числа $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ называются компонентами тензора T относительно базиса (e_i).

Заметим, что уравнения преобразования компонент тензора зависят от типа тензора.

Сравним это общее определение с приведенными выше примерами. Все уравнения преобразования (4.3), (4.4), (4.5) и уравнение преобразования скаляра являются частными случаями общего преобразования компонент тензора из определения 23 для различных выборов p и q. Пример 1 показывает, что вектор является тензором типа $(1, 0)$. Пример 2 показывает, что линейный оператор можно считать тензором типа $(1, 1)$. Пример 3 показывает, что p-линейная форма может рассматриваться как тензор типа $(0, p)$. Наконец, скаляр является тензором типа $(0, 0)$.

Введем теперь несколько операций, производимых над тензорами.

1. Сложение тензоров.

Пусть $P = (P^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q})$ и $Q = (Q^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q})$ – два тензора одного типа (p, q). Определим их сумму $P + Q$ равенством

$$(P + Q)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = P^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + Q^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q},$$

которое определяет компоненты $(P+Q)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ величины $P+Q$ относительно базиса (e_i). Покажем, что $P+Q$ является тензором типа (p, q), т.е. эти компоненты удовлетворяют уравнениям (4.6). Действительно, используя уравнения преобразования компонент тензоров P и Q, получаем

$$\begin{aligned}(P + Q)^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} &= P^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} + Q^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \\ &A^{i'_1}_{i_1} \cdots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_q}_{j'_q} P^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + A^{i'_1}_{i_1} \cdots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_q}_{j'_q} Q^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \\ &A^{i'_1}_{i_1} \cdots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_q}_{j'_q} \left(P^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + Q^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right) = \\ &A^{i'_1}_{i_1} \cdots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_q}_{j'_q} (P + Q)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.\end{aligned}$$

Отметим, что операция сложения тензоров содержит в качестве частных случаев операции сложения скаляров, векторов, линейных операторов и p-линейных форм.

2. Умножение тензоров.

Пусть $P = (P^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})$ – тензор типа (p,q) и $Q = (Q^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s})$ – тензор типа (r,s). Определим их произведение (тензорное произведение) $P\cdot Q$ равенством

$$(P\cdot Q)^{i_1\dots i_{p+r}}_{j_1\dots j_{q+s}} = P^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} Q^{i_{p+1}\dots i_{p+r}}_{j_{q+1}\dots j_{q+s}},$$

которое определяет компоненты $(P\cdot Q)^{i_1\dots i_{p_r}}_{j_1\dots j_{q+s}}$ величины $P\cdot Q$ относительно базиса (e_i). Покажем, что $P\cdot Q$ является тензором типа $(p+r, q+s)$, т.е. эти компоненты удовлетворяют уравнениям (4.6). Действительно, используя уравнения преобразования компонент тензоров P и Q, получаем

$$\begin{aligned}(P\cdot Q)^{i'_1\dots i'_{p+r}}_{j'_1\dots j'_{q+s}} &= P^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} Q^{i'_{p+1}\dots i'_{p+r}}_{j'_{q+1}\dots j'_{q+s}} = \\ &A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_q}_{j'_q} P^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} A^{i'_{p+1}}_{i_{p+1}}\cdots A^{i'_{p+r}}_{i_{p+r}} A^{j_{q+1}}_{j'_{q+1}}\cdots A^{j_{q+s}}_{j'_{q+s}} Q^{i_{p+1}\dots i_{p+r}}_{j_{q+1}\dots j_{q+s}} = \\ &A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_{p+r}}_{i_{p+r}} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_{q+s}}_{j'_{q+s}} P^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} Q^{i_{p+1}\dots i_{p+r}}_{j_{q+1}\dots j_{q+s}} = \\ &A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_{p+r}}_{i_{p+r}} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_{q+s}}_{j'_{q+s}} (P\cdot Q)^{i_1\dots i_{p+r}}_{j_1\dots j_{q+s}}.\end{aligned}$$

Отметим, что операция умножения тензоров содержит в качестве частных случаев операции умножения чисел, умножения числа на вектор, умножения числа на линейный оператор и умножения числа на p-форму.

3. Свертывание (свертка) тензора.

Пусть $P = (P^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})$ – тензор типа (p,q) и $p,q > 0$. Выберем целые числа r,s такие, что $1 \le r \le p$ и $1 \le s \le q$. Определим свертку $S^r_s P$ тензора P равенством

$$(S^r_s P)^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}} = P^{i_1\dots i_{r-1} k i_r \dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{s-1} k j_s \dots j_{q-1}}$$

которое определяет компоненты $(S^r_s P)^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}}$ величины $S^r_s P$ относительно базиса (e_i). Покажем, что $S^r_s P$ является тензором типа $(p-1, q-1)$. Для простоты обозначений мы рассмотрим частный случай когда $s = p$ и $r = q$. Используя уравнения преобразования компонент тензора P, получаем

$$(S^p_q P)^{i'_1\dots i'_{p-1}}_{j'_1\dots j'_{q-1}} = P^{i'_1\dots i'_{p-1} k'}_{j'_1\dots j'_{q-1} k'} = A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_{p-1}}_{i_{p-1}} A^{k'}_{k} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_{q-1}}_{j'_{q-1}} A^{l}_{k'} P^{i_1\dots i_{p-1} k}_{j_1\dots j_{q-1} l}.$$

Учитывая равенство $A^l_{k'} A^{k'}_k = \delta^l_k$ и суммируя по l, мы получаем

$$\begin{aligned}(S^p_q P)^{i'_1\dots i'_{p-1}}_{j'_1\dots j'_{q-1}} &= A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_{p-1}}_{i_{p-1}} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_{q-1}}_{j'_{q-1}} P^{i_1\dots i_{p-1} k}_{j_1\dots j_{q-1} k} = \\ &A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_{p-1}}_{i_{p-1}} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_{q-1}}_{j'_{q-1}} (S^p_q P)^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что, применяя операцию свертки к линейному оператору $f = (a^i_j)$, мы получаем след оператора f, который, являясь скаляром, не зависит от выбора базиса.

Теперь определим поле тензора в трехмерном евклидовом пространстве. В качестве линейного пространства L возьмем пространство векторов E_3 пространства.

Определение 24. *Говорят, что в некоторой области U пространства задано поле T тензора типа (p, q), если каждой точке M области U поставлен в соответствие тензор $T(M)$ типа (p, q) в пространстве E_3.*

Если в определении 24 положить $p = q = 0$ мы получим скалярное поле, если $p = 1$ и $q = 0$, мы получим векторное поле.

Для того, чтобы задать поле тензора типа (p, q) в области U, можно выбрать в U некоторую систему криволинейных координат u, v, w. Пусть эта система координат является ортогональной. Тогда в любой точке M области U определен ортонормированный базис $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$, и тензор $T(M)$ задается своими компонентами $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(M)$ относительно этого базиса. В частности, таким образом мы получаем задание скалярного и векторного поля в ортогональных криволинейных координатах, использованное ранее. Если система координат не является ортогональной, для задания $T(M)$ можно воспользоваться базисом $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_w$.

Литература

[1] А. Е. Либер, Н. Ф. Ржехина. *Основы векторного анализа.* – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1966.

[2] А. Е. Либер, Н. Ф. Ржехина. *Основы тензорного анализа.* – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1975.

[3] И. А. Гольдфайн. *Векторный анализ и теория поля.* – М.: ГИМФЛ, 1962.

[4] Б. Е. Победря. *Лекции по тензоному анализу.* – М.: Изд.-во Московского ун-та, 1979.

Оглавление