А. А. Логунов

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

·НАУКА·

А. А. Логунов

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

МОСКВА ·НАУКА· 2002

УДК 501
ББК 22.31
Л 69

Логунов А.А.

Лекции по теории относительности.–М.: Наука, 2002.– 175 с.
ISBN 5-02-006236-7

В лекциях, следуя представлениям Пуанкаре и Минковского, показано, что суть и главное содержание теории относительности заключаются в том, что пространство и время образуют единый четырехмерный континуум событий с псевдоевклидовой геометрией.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики.

Logunov A.A.

Lectures on Relativity Theory.– M.: Nauka, 2002.– 175 p.
ISBN 5-02-006236-7

The lectures show that following Poincaré and Minkowski the eccence and the main content of the relativity theory are that space and time form a four-dimensional continuum of events with the pseudo-Euclidean geometry.

The book is designed for scientific workers, post-graduates and upper-year students majoring in theoretical physics.

ISBN 5-02-006236-7

© Логунов А.А., 2002
© Издательство "Наука", оформление, 2002

Содержание

Предисловие 4
§ 1. Геометрия Евклида 6
§ 2. Классическая механика Ньютона 8
§ 3. Электродинамика. Геометрия пространства-времени 23
§ 4. Относительность времени и сокращение длины . . . 53
§ 5. Сложение скоростей 61
§ 6. Элементы векторного и тензорного анализа в пространстве Минковского 62
§ 7. Группа Лоренца 66
§ 8. Инвариантность уравнений Максвелла-Лоренца . . 69
§ 9. Релятивистская механика Пуанкаре 83
§ 10. Пространство скоростей Лобачевского 98
§ 11. Принцип стационарного действия в электродинамике 116
§ 12. Движение пробного тела по инерции. Ковариантное дифференцирование 121
§ 13. Релятивистски равноускоренное движение. Парадокс часов 129
§ 14. О предельной скорости 141
§ 15. Прецессия Томаса 148
§ 16. Уравнения движения и законы сохранения в классической теории поля 153
Вопросы и задачи 167
Список литературы 170
Именной указатель 172

Предисловие

Основу книги составили лекции, которые читаются на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова в течение ряда лет. В 1987 г. лекции (в несколько другом виде) были опубликованы в издательстве "Наука".

Специальная теория относительности "**возникла в результате совместных усилий группы великих исследователей — Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского**" (**Макс Борн**). Г. Лоренц выполнил важнейшие подготовительные работы и "**весьма близко подошел к окончательному результату, но не сделал последнего решающего шага**" (**В. Паули**). Он, в частности, открыл преобразования, носящие его имя. А. Пуанкаре, опираясь на принцип относительности, который он сформулировал для всех физических явлений, и работу Лоренца, открыл и сформулировал все то, что составляет суть специальной теории относительности. А. Эйнштейн шел к теории относительности, исходя из постулатов постоянства скорости света и принципа относительности. Его подход имеет ограниченный характер. Г. Минковский, несколько позже, далее развил подход Пуанкаре. Поскольку подход Пуанкаре более общий и глубокий наше изложение, как и ранее, точно следует Пуанкаре.

Согласно Пуанкаре и Минковскому суть специальной теории относительности состоит в следующем: **специальная теория относительности – это псевдоевклидова геометрия пространства-времени. Именно в таком пространстве-времени протекают все физические процессы.**

Отсюда непосредственно следует неизменность физических уравнений во всех инерциальных системах отсчета, что и является необходимым и достаточным условием выполнения требования принципа относительности.

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору С.С. Герштейну, профессору В.А. Петрову, профессору Н.Е. Тюрину, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний, которые учтены в рукописи, а также Г.М. Александрову за большую работу по подготовке рукописи к печати.

А.А. Логунов
август 2002 г.

§ 1. Геометрия Евклида

В третьем веке до нашей эры, подведя итоги предшествующему развитию *древнегреческой математики, Евклид опубликовал трактат по математике* "Начала". Именно в этом труде была сформулирована геометрия нашего трехмерного пространства – евклидова геометрия.

Это было важнейшим шагом в развитии как математики, так и физики. Ведь геометрия родилась на основе наблюдательных данных и практического опыта, т.е. возникла путем изучения природы. Но поскольку все явления природы происходят в пространстве и во времени, то значение геометрии в физике трудно переоценить, более того, геометрия – часть физики.

На современном языке математики суть евклидовой геометрии определяется теоремой Пифагора. Расстояние какой-либо точки с декартовыми координатами x, y, z от начала координат согласно теореме Пифагора определяется формулой

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ или} \tag{1.1}$$

в дифференциальной форме, расстояние между бесконечно близкими точками равно

$$(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{1.2}$$

Здесь dx, dy, dz – дифференциалы декартовых координат. Обычно теорему Пифагора доказывают, исходя из аксиом Евклида, но оказывается, что ее можно принять как определение евклидовой геометрии. Трехмерное пространство, определяемое геометрией Евклида, обладает свойством однородности и изотропности. Это означает, что в геометрии

Евклида нет выделенных точек и выделенных направлений. Совершая преобразования координат от одной декартовой системы x, y, z к другой x', y', z', мы получим

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{1.3}$$

Это означает, что квадрат расстояния ℓ является инвариантом, тогда как проекции на оси координат таковыми не являются. Это очевидное обстоятельство мы специально отмечаем, поскольку в дальнейшем будет видно, что такая ситуация будет иметь место и для четырехмерного пространства-времени, а следовательно, в зависимости от выбора системы координат в пространстве-времени проекции их будут относительными. Отсюда и возникает относительность времени и длины. Но об этом позднее.

Геометрия Евклида, как составная часть, вошла в механику Ньютона. Представление о геометрии Евклида как о единственной и неизменной сохранялось около двух тысяч лет, несмотря на интенсивное развитие математики, механики и физики.

Только в начале 19 в. русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским осуществлен революционный шаг – построена новая геометрия – геометрия Лобачевского. Несколько позднее она открыта венгерским математиком Больяи.

Немецким математиком Риманом были построены римановы геометрии. Возникло множество геометрических конструкций. С возникновением новых геометрий возник вопрос о геометрии нашего пространства. Какова она? Евклидова или неевклидова?

§ 2. Классическая механика Ньютона

Все явления природы происходят в пространстве и времени. Именно поэтому Исаак Ньютон в 17 в. при формулировке законов механики прежде всего определил эти понятия:

> *"Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным".*

> *"Абсолютное, истинное и математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью".*

В качестве геометрии трехмерного пространства Ньютон фактически пользовался геометрией Евклида, а декартову систему координат выбрал таким образом, чтобы ее начало было совмещено с центром Солнца, а три оси были направлены на удаленные звезды. Именно такую систему координат Ньютон и принимал как "неподвижную". Введение абсолютного неподвижного пространства и абсолютного времени оказалось чрезвычайно плодотворным для того времени.

Первый закон механики, или закон инерции, Ньютон формулирует следующим образом.

> *"Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние".*

Закон инерции впервые открыл Галилей. Если в неподвижном пространстве выбрать декартову систему координат,

то согласно закону инерции уединенное тело будет двигаться по траектории, определяемой уравнениями

$$x = v_x t, \qquad y = v_y t, \qquad z = v_z t. \tag{2.1}$$

Здесь v_x, v_y, v_z постоянные проекции скорости, они могут иметь и нулевые значения.

А. Пуанкаре в книге "Наука и гипотеза" сформулировал общий принцип:

> *"Ускорение тела зависит только от положения этого тела и соседних тел и от их скоростей. Математик сказал бы, что движения всех материальных частиц Вселенной определяются дифференциальными уравнениями второго порядка.*
>
> *Чтобы уяснить, что здесь мы имеем дело с естественным обобщением закона инерции, я позволю себе привести один воображаемый случай. Выше я указывал, что закон инерции не присущ нам* à priori*; другие законы были бы столь же хорошо, как и он, совместимы с принципом достаточного основания. Когда на тело не действует никакая сила, то мы могли бы вообразить, что неизменным является не скорость его, а его положение или его ускорение.*
>
> *Итак, представим себе на минуту, что один из этих двух гипотетических законов есть закон природы и заступает место нашего закона инерции. Каково было бы его естественное обобщение? Поразмыслив минуту, мы это уясним.*
>
> *В первом случае пришлось бы допустить, что скорость тела зависит только от его положения и от положения соседних тел; во втором — что изменение ускорения тела за-*

висит только от положения этого тела и соседних тел, от их скоростей и от их ускорений.

Или, говоря математическим языком, дифференциальные уравнения движения были бы в первом случае первого порядка, во втором — третьего".

Второй закон механики Ньютон сформулировал так:

"Изменение количества движения пропорционально приложенной движущейся силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует".

И наконец, третий закон механики Ньютона:

"Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны".

На основании этих законов механики, в случае центральных сил, для системы двух частиц имеем уравнения в "неподвижной" системе координат:

$$M_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|},$$

$$M_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \tag{2.2}$$

Здесь M_1 и M_2 – массы первой и второй частиц, $\vec{r}_1$ – радиус-вектор первой частицы, $\vec{r}_2$ – радиус-вектор второй частицы. Функция F отражает характер действующих между телами сил.

В механике Ньютона в основном рассматриваются силы двух типов тяготения и упругости.

Для сил тяготения Ньютона

$$F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = -G\frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}, \tag{2.3}$$

G – гравитационная постоянная.

Для сил упругости закон Гука

$$F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = -k|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|, \tag{2.4}$$

k – коэффициент упругости.

Уравнения Ньютона записаны в векторной форме, а следовательно, они не зависят от выбора трехмерной системы координат. Как видно из уравнений (2.2), для замкнутой системы имеет место закон сохранения импульса.

Как было отмечено ранее, уравнения (2.2) справедливы, по замыслу Ньютона, только в неподвижной системе координат. Но если взять систему координат, движущуюся относительно неподвижной с постоянной скоростью $\vec{v}$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\,t, \tag{2.5}$$

то оказывается, что уравнения (2.2) не изменяются, т.е. **они остаются форминвариантными, а это означает, что никакими механическими явлениями нельзя установить, находимся ли мы в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. В этом заключается принцип относительности, впервые открытый Галилеем. Преобразования** (2.5) **получили название галилеевых**.

Поскольку скорость $\vec{v}$ в (2.5) произвольна, то существует бесконечное множество систем координат, в которых уравнения сохраняют свою форму. Это означает, что в каждой из них имеет место закон инерции. Если в какой-либо из этих систем координат тело находится в покое или в состоянии равномерного и прямолинейного движения, то в

любой другой системе координат, связанной с первой преобразованием (2.5), оно также будет находится либо в состоянии равномерного прямолинейного движения, либо в состоянии покоя.

Все такие системы координат получили название инерциальных. Принцип относительности — это сохранение формы уравнений механики в любой инерциальной системе отсчета.

Но как определить инерциальную систему? На этот вопрос механика Ньютона не давала ответа. Тем не менее практически в качестве такой инерциальной системы выбиралась система координат с началом в центре Солнца, а три оси направлялись на удаленные звезды.

В классической механике Ньютона время не зависит от выбора системы отсчета, иначе говоря, трехмерное пространство и время разделены, они не образуют единый четырехмерный континуум.

В 19 в. Эрнст Мах подверг критике взгляды Исаака Ньютона об абсолютном пространстве и абсолютном движении. Мах писал:

> *"Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто, лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое".*

И далее:

> *"Вместо того чтобы относить движущееся тело к пространству (к какой-нибудь координатной системе), будем рассматривать непосредственно его отношение к т е л а м мира, посредством которых только и можно о п р е д е л и т ь систему координат ...даже в простейшем случае, когда мы будто бы рассматриваем взаимодействие только*

двух масс, невозможно отвлечься от остального мира. ... Если тело вращается относительно неба неподвижных звезд, то возникают центробежные силы, а если оно вращается относительно другого тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то центробежных сил нет. Я ничего не имею против, чтобы первое вращение назвать абсолютным, если только не забывать, что это не означает ничего другого, кроме вращения относительно неба неподвижных звезд".

Поэтому Мах писал:

"... что нет необходимости связывать закон инерции с каким-то особым абсолютным пространством".

Все это правильно, поскольку Ньютон не определил связь инерциальной системы с распределением материи, да на том уровне развития это было невозможно сделать. Впрочем, и Маху не удалось это осуществить. Но критика его была полезна, она привлекла внимание ученых к анализу основных физических понятий.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с полевыми представлениями, то полезно остановиться на методах аналитической механики, которые были разработаны в течение 18 и 19 вв. Основная цель, которая тогда ставилась, состояла в том, чтобы найти для классической механики наиболее общую формулировку. Это направление исследований оказалось чрезвычайно важным и ценным, поскольку при этом возникли методы, которые позднее относительно легко были обобщены на системы с бесконечным числом степеней свободы. Именно так в классической механике был создан серьезный теоретический задел, который успешно был использован в 19 и 20 вв.

Жозеф Лагранж в "Аналитической механике", опубликованной в 1788 г., получил свои знаменитые уравнения. Ниже мы приведем их вывод. Для системы из N материальных точек, движущихся в потенциальном поле U, уравнения Ньютона в инерциальной системе отсчета имеют вид

$$m_\sigma \frac{d\vec{v}_\sigma}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.6}$$

В нашем случае сила $\vec{f}_\sigma$ равна

$$\vec{f}_\sigma = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\sigma}. \tag{2.7}$$

Для определения состояния механической системы в любой момент времени необходимо задать координаты всех материальных точек и их скорости в некоторый момент времени. Таким образом, состояние механической системы полностью определяется заданием координат и скоростей материальных точек. В декартовой системе координат эти уравнения принимают форму

$$m_\sigma \frac{dv_\sigma^1}{dt} = f_\sigma^1, \quad m_\sigma \frac{dv_\sigma^2}{dt} = f_\sigma^2, \quad m_\sigma \frac{dv_\sigma^3}{dt} = f_\sigma^3. \tag{2.8}$$

Если перейти к другой инерциальной системе и выбрать в ней не декартовы координаты, то легко убедиться, что вид уравнений, записанных в новых координатах, будет существенно отличаться от уравнений (2.8). Лагранж нашел для механики Ньютона ковариантную формулировку для уравнений движения, которые сохраняют свой вид при переходе к новым переменным.

Введем вместо координат $\vec{r}_\sigma$ новые **обобщенные координаты** q^λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, здесь $n = 3N$.

$$\vec{r}_\sigma = \vec{r}_\sigma^*(q_1, \ldots, q_n, t). \tag{2.9}$$

Умножим каждое уравнение (2.6) скалярно на вектор

$$\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} \tag{2.10}$$

и сложим

$$m_\sigma \frac{d\vec{v}_\sigma}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Здесь по одинаковым индексам σ идет суммирование. Левую часть уравнения (2.11) запишем в форме

$$\frac{d}{dt}\left[m_\sigma \vec{v}_\sigma \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda}\right] - m_\sigma \vec{v}_\sigma \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda}\right). \tag{2.12}$$

Поскольку

$$\vec{v}_\sigma = \frac{d\vec{r}_\sigma}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda + \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial t}. \tag{2.13}$$

Отсюда, дифференцируя (2.13) по $\dot{q}_\lambda$, получим равенство

$$\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial \vec{v}_\sigma}{\partial \dot{q}_\lambda}. \tag{2.14}$$

Дифференцируя (2.13) по q_ν, получим

$$\frac{\partial \vec{v}_\sigma}{\partial q_\nu} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu \partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda + \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial t \partial q_\nu}. \tag{2.15}$$

Но с другой стороны, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu \partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda + \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial t \partial q_\nu}. \tag{2.16}$$

Сравнивая (2.15) и (2.16), находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu}\right) = \frac{\partial \vec{v}_\sigma}{\partial q_\nu}. \tag{2.17}$$

В формулах (2.15) и (2.16) по одинаковым индексам λ идет суммирование.

Используя равенства (2.14) и (2.17), выражение (2.12) представим в форме

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\lambda}\left(\frac{m_\sigma v_\sigma^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_\nu}\left(\frac{m_\sigma v_\sigma^2}{2}\right). \tag{2.18}$$

Поскольку (2.18) является левой частью уравнений (2.11), получим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = -\frac{\partial U}{\partial q_\lambda}, \ \lambda = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.19}$$

Здесь T кинетическая энергия материальных точек

$$T = \frac{m_\sigma v_\sigma^2}{2}, \tag{2.20}$$

по одинаковым индексам σ идет суммирование. Если ввести функцию Лагранжа L, равную

$$L = T - U, \tag{2.21}$$

то уравнение Лагранжа принимает форму

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0, \ \lambda = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Состояние механической системы полностью определяется заданием обобщенных координат и скоростей. Форма уравнений Лагранжа (2.22) не зависит от выбора **обобщенных координат**. Хотя эти уравнения полностью эквивалентны системе уравнений (2.6), однако, такая форма уравнений классической механики оказалась чрезвычайно важной и плодотворной, поскольку она открыла возможность ее обобщения на явления, выходящие далеко за рамки классической механики.

Наиболее общая формулировка закона движения механической системы дается **принципом наименьшего действия** (или принципом стационарного действия). Действие составляется следующим образом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \tag{2.23}$$

Интеграл (функционал) (2.23) зависит от изменения функций q и $\dot{q}$ в указанных пределах. Таким образом, эти функции являются функциональными аргументами интеграла (2.23). Принцип наименьшего действия записывается в форме

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0. \tag{2.24}$$

Уравнения движения механики получаются из (2.24) путем вариаций подынтегрального выражения

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \tag{2.25}$$

Здесь δq и $\delta \dot{q}$ бесконечно малое изменение вида функций. Вариация коммутативна с дифференцированием, а поэтому

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q). \tag{2.26}$$

Проводя во втором члене (2.25) интегрирование по частям, получим

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \tag{2.27}$$

Поскольку вариации δq в точках t_1 и t_2 равны нулю, выражение (2.27) принимает вид

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \qquad (2.28)$$

Вариация δq внутри промежутка интегрирования произвольна, а поэтому в силу основной леммы вариационного исчисления отсюда следует **необходимое условие экстремума** в виде обращения в нуль вариационной производной

$$\frac{\delta L}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \qquad (2.29)$$

Такие уравнения при разработке вариационного исчисления были получены Леонардом Эйлером. При нашем выборе функции L в соответствии с (2.21) эти уравнения совпадают с уравнениями Лагранжа.

Из рассмотренного очевидно, что механическое движение, удовлетворяющее уравнениям Лагранжа, обеспечивает экстремальность интеграла (2.23), а следовательно действие имеет стационарное значение.

Введение функции Лагранжа для описания механической системы с конечным числом степеней свободы оказалось плодотворным и при описании физического поля, имеющего бесконечное число степеней свободы. В случае поля функции ψ_σ, его описывающие, зависят не только от времени, но и от пространственных координат. Это означает, что вместо переменных $q_\sigma, \dot{q}_\sigma$ механической системы необходимо ввести переменные $\psi_\sigma(x^\nu)$, $\dfrac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\lambda}$. Поле, таким образом, рассматривается как механическая система с бесконечным числом степеней свободы. Мы увидим далее (§ 11 и § 16), как используется принцип стационарного действия в электродинамике и классической теории поля.

Очень важное значение в теоретической физике получила формулировка классической механики в рамках гамиль-

тоновых уравнений. Введем в рассмотрение некоторую величину, определяемую в форме

$$H = p_\sigma \dot{q}_\sigma - L, \tag{2.30}$$

и называемую гамильтонианом. В (2.30) по одинаковым индексам σ идет суммирование. **Обобщенный импульс** определим следующим образом

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \tag{2.31}$$

Найдем дифференциал от выражения (2.30)

$$dH = p_\sigma d\dot{q}_\sigma + \dot{q}_\sigma dp_\sigma - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} dq_\sigma - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} d\dot{q}_\sigma - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{2.32}$$

Используя (2.31), получим

$$dH = \dot{q}_\sigma dp_\sigma - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} dq_\sigma - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{2.33}$$

С другой стороны, H является функцией независимых переменных q_σ, p_σ и t, а поэтому

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} dq_\sigma + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} dp_\sigma + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{2.34}$$

Сравнивая (2.33) и (2.34), получим

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.35}$$

Эти соотношения получены путем перехода от независимых переменных q_σ, $\dot{q}_\sigma$ и t к независимым переменным q_σ, p_σ и t.

Учтем теперь в соотношениях (2.35) уравнения Лагранжа (2.22) и получим уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}. \tag{2.36}$$

В том случае, когда гамильтониан H не зависит явно от времени

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{2.37}$$

имеем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma. \tag{2.38}$$

Учитывая в этом выражении уравнения (2.36), получим

$$\frac{dH}{dt} = 0, \tag{2.39}$$

это означает, что гамильтониан не изменяется в течение движения.

Уравнения Гамильтона (2.36) мы получили, используя уравнения Лагранжа. Но они могут быть найдены непосредственно и с помощью принципа наименьшего действия (2.24), если в качестве L возьмем, согласно (2.30), выражение

$$L = p_\sigma \dot{q}_\sigma - H,$$

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta p_\sigma \left(dq_\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} dt \right) -$$

$$- \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta q_\sigma \left(dp_\sigma + \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} dt \right) + p_\sigma \delta q_\sigma \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Поскольку вариации δq_σ в точках t_1 и t_2 равны нулю, а внутри промежутка интегрирования вариации δq_σ, δp_σ произвольны, то в силу основной леммы вариационного исчисления, получим уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}.$$

Если во время движения некоторая функция

$$f(q,p,t) = \text{пост.} \tag{2.40}$$

остается постоянной, то она является интегралом движения. Найдем для функции f уравнение движения.

Возьмем полную производную по времени от выражения (2.40)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma = 0. \tag{2.41}$$

Подставляя в (2.41) уравнения Гамильтона (2.36), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} = 0. \tag{2.42}$$

Выражение

$$(f,g) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial q_\sigma} & \dfrac{\partial f}{\partial p_\sigma} \\ \dfrac{\partial g}{\partial q_\sigma} & \dfrac{\partial g}{\partial p_\sigma} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\cdot\frac{\partial g}{\partial q_\sigma} \tag{2.43}$$

назвали скобкой Пуассона. В (2.43) по индексу σ идет суммирование.

На основании (2.43) уравнение (2.42) для функции f можно записать в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) = 0. \tag{2.44}$$

Скобки Пуассона удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &(f,g) = -(g,f), \\ &(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g), \\ &(f_1f_2,g) = f_1(f_2,g) + f_2(f_1,g), \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$(f,(g,h)) + (g,(h,f)) + (h,(f,g)) \equiv 0. \qquad (2.46)$$

Соотношение (2.46) называется **тождеством Якоби**. На основе (2.43)

$$(f, q_\sigma) = -\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}, \quad (f, p_\sigma) = \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}. \qquad (2.47)$$

Отсюда находим

$$(q_\lambda, q_\sigma) = 0, \quad (p_\lambda, p_\sigma) = 0, \quad (q_\lambda, p_\sigma) = \delta_{\lambda\sigma}. \qquad (2.48)$$

При построении квантовой механики, по аналогии с классическими скобками Пуассона (2.43), возникли квантовые скобки Пуассона, которые также удовлетворяют всем условиям (2.45), (2.46). Использование соотношений (2.48) для квантовых скобок Пуассона позволило установить коммутационные соотношения между координатой и импульсом.

Открытие лагранжева и гамильтонова методов в классической механике позволило, в свое время, обобщить и распространить их на другие физические явления. Поиск различных представлений физической теории всегда крайне важен, поскольку на основе их может появиться возможность обобщения для описания новых физических явлений. В недрах сложившейся теории могут находиться формальные ростки будущей. Опыт классической и квантовой механики свидетельствует об этом.

§ 3. Электродинамика. Геометрия пространства-времени

Следуя открытиям Фарадея по электромагнетизму, Максвелл объединил магнитные, электрические и оптические явления и тем самым завершил построение электродинамики, написав свои знаменитые уравнения.

А. Пуанкаре в книге "Ценность науки" об исследовании Максвелла пишет следующее:

> *"В то время, когда Максвелл начал свои труды, законы электродинамики, принятые до него, объяснили все известные явления. Он приступил к работе не потому, чтобы какой-либо новый опыт ограничил значение этих законов. Но рассматривая их под новым углом зрения, Максвелл увидел, что уравнения становятся более симметричными, если в них ввести некоторый член, хотя, с другой стороны, этот член был слишком мал, чтобы вызвать явления, которые могли бы быть оценены прежними методами.*
>
> *Известно, что априорные взгляды Максвелла ждали своего экспериментального подтверждения в течение двадцати лет; если вам больше нравится другое выражение, — Максвелл опередил опыт на двадцать лет. Как он достиг этого триумфа?*
>
> *Это произошло благодаря тому, что Максвелл был глубоко проникнут чувством математической симметрии ... "*

Согласно Максвеллу **нет иных токов, кроме замкнутых.** Этого он достиг введением малого члена – **тока**

смещения, благодаря которому из новых уравнений следует закон сохранения электрического заряда.

Когда Максвелл формулировал уравнения электродинамики, он использовал евклидову геометрию трехмерного пространства и абсолютное время, которое одинаково для всех точек этого пространства. Руководствуясь глубоким чувством симметрии, он дополнил уравнения электродинамики таким образом, чтобы они, объясняя имеющиеся опытные факты, в то же время вводили представления об электромагнитных волнах. Он, конечно, не подозревал, что в уравнениях скрыты представления о геометрии пространства-времени. Но его дополнение уравнений электродинамики оказалось настолько необходимым и точным, что оно однозначно привело А. Пуанкаре, опирающегося на работу Г. Лоренца, к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Ниже мы кратко опишем, как это происходило.

Изучение свойств уравнений электродинамики показало, что они не сохраняют своего вида при преобразованиях Галилея (2.5), т.е. они не форминвариантны относительно преобразований Галилея. Отсюда следует вывод, что принцип относительности Галилея нарушается, а следовательно, возникает экспериментальная возможность отличить одну инерциальную систему от другой с помощью электромагнитных или оптических явлений. Однако проведенные различные эксперименты, в особенности опыты Майкельсона, показали что и электромагнитными (оптическими) опытами не удается различить, с точностью до $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, находитесь ли вы в состоянии покоя или состоянии равномерного и прямолинейного движения. Г. Лоренц нашел объяснение этим опытам, как отмечал А. Пуанкаре, "**только путем нагромождения гипотез**".

В книге А. Пуанкаре "Наука и гипотеза", опубликованной в России в 1904 г., отмечалось:

"Теперь я позволю себе сделать отступление, чтобы объяснить, почему я, вопреки Лоренцу, не думаю, что когда-нибудь более точные наблюдения могут обнаружить что-либо иное, кроме относительных перемещений материальных тел. Были произведены опыты, которые должны были бы открыть члены первого порядка. Результат был отрицательный; могло ли это быть делом случая? Этого никто не мог допустить; стали искать общее объяснение, и Лоренц нашел его: он показал, что члены первого порядка взаимно уничтожаются. Это не имело места для членов второго порядка. Тогда были произведены более точные опыты, которые снова дали отрицательный результат. Это опять не могло произойти случайно, — требовалось объяснение, которое и было дано. За объяснением дело никогда не станет: гипотезы представляют собой фонд, не подлежащий истощению.

Это не все: кто не заметит, что здесь случайность играет еще значительную роль? Разве не случайным является то странное совпадение, благодаря которому известное обстоятельство явилось как раз вовремя, чтобы уничтожить члены первого порядка, а другое, совершенно различное, взяло на себя труд уничтожить члены второго порядка? Нет, следует найти одно и то же объяснение для обоих случаев, и тогда естественно явится мысль,

что то же будет иметь место равным образом и для членов высших порядков и что их взаимное уничтожение будет носить характер абсолютной точности".

На основании опытных фактов Анри Пуанкаре в 1904 г. обобщил принцип относительности Галилея на все явления природы. Он писал [1]:

"Принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определить, находимся ли мы в подобном движении или нет".

Принцип относительности в такой формулировке имеет общий характер, но касается только инерциальных систем отсчета. **Принцип относительности — это сохранение формы всех физических уравнений в любой инерциальной системе отсчета**. Объявляя этот принцип, Пуанкаре точно знал, что из него следует невозможность **абсолютного движения**, поскольку **все инерциальные системы отсчета равноправны**. Именно все это некоторые физики (не говоря уже о философах и историках физики), до сих пор не понимают.

В работе [3], применяя этот принцип относительности к электродинамическим явлениям, А. Пуанкаре писал:

"Эта невозможность показать опытным путем абсолютное движение Земли представляет, по-видимому, общий закон природы; мы

естественно приходим к тому, чтобы принять этот закон, который мы назовем **постулатом относительности**, *и принять без оговорок. Все равно, будет ли позднее этот постулат, до сих пор согласующийся с опытом, подтвержден или опровергнут более точными измерениями, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены".*

Г. Лоренц, после критических замечаний Пуанкаре, в 1904 г. сделал важнейший шаг, показав, что **волновое уравнение** остается **неизменным** (форминвариантным) при следующих преобразованиях координат и времени:

$$X' = \gamma(X - vT),\ T' = \gamma\left(T - \frac{v}{c^2}X\right), Y' = Y,\ Z' = Z\,, \quad (3.1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \quad (3.2)$$

А. Пуанкаре назвал эти преобразования – преобразованиями Лоренца. Преобразования Лоренца, как это очевидно из (3.1), относятся к двум инерциальным системам отсчета. Г. Лоренц не установил принципа относительности для электромагнитных явлений, поскольку ему не удалось установить форминвариантность, при этих преобразованиях, для всех уравнений Максвелла-Лоренца.

Из формул (3.1) следует, что независимость волнового уравнения от прямолинейного равномерного движения системы отсчета достигается только благодаря изменению времени. Отсюда естественно возникает вывод, что в каждой инерциальной системе отсчета необходимо ввести свое время.

Об этом А. Эйнштейн в 1907 г. писал:

«Однако неожиданно оказалось, что необходимо лишь достаточно точно сформулировать понятие времени, чтобы обойти только что изложенную трудность. Следовало лишь понять, что введенную Г.А. Лоренцем вспомогательную величину, названную им "местным временем", на самом деле следует определить как "время". С таким определением времени основные уравнения теории Лоренца будут удовлетворять принципу относительности ...»

Но Г. Лоренц этого не увидел, в 1914 г. он писал об этом:

"Я не подумал о прямом пути, ведущим к ним, ибо полагал, что между системами x, y, z, t и x', y', z', t' имеется существенная разница. В одной использованы — таков был ход моих рассуждений — оси координат, имеющие определенное положение в эфире, и то что можно было назвать **истинное время***; в другой системе, наоборот, мы имеем дело просто со вспомогательными величинами, введенными лишь с помощью математического ухищрения. В частности, переменную t' нельзя было бы назвать* **временем** *в том же смысле, как переменную t. При таком ходе идей я не думал описывать явления в системе x', y', z', t'* **точно таким же образом**, *как в системе x, y, z, t ... Позже я увидел из статьи Пуанкаре, что, действуя более систематически, я мог бы достигнуть еще большего упрощения. Не заме-*

тив этого, я не смог достигнуть полной инвариантности уравнений; мои формулы остались загроможденными лишними членами, которые должны были бы исчезнуть. Эти члены были слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на явления, и этим я мог объяснить обнаруженную наблюдениями независимость их от движения Земли, но я не установил принципа относительности как строгую и универсальную истину. Напротив, Пуанкаре получил полную инвариантность уравнений электродинамики и сформулировал постулат относительности *— термин, впервые введенный им ... Добавим, что, исправляя таким образом недостатки моей работы, он никогда в них меня не упрекнул".*

Теперь, следуя ранним работам А. Пуанкаре, остановимся на определении одновременности, синхронизации часов, находящихся в различных точках пространства, и выясним физический смысл **местного времени**, введенного Лоренцем. Пуанкаре в статье "Измерение времени", опубликованной в 1898 г. (см. сборник "Принцип относительности", составленный проф. А.А. Тяпкиным) подробно обсуждает вопрос об измерении времени. Эта статья особо отмечалась в книге Пуанкаре "Наука и гипотеза", а поэтому вполне была доступна любопытному читателю.

В ней, в частности, излагалось:

"Но перейдем к примерам менее искусственным; чтобы дать отчет в определении, которое неявно допускается учеными, посмотрим на их работу и поищем, на основании каких правил они определяют одновременность ...

Когда астроном говорит мне, что такое-то звездное явление, видимое в его телескопе в настоящий момент, произошло, однако, пятьдесят лет тому назад, я пытаюсь понять, что́ он хочет сказать, и прежде всего спрашиваю у него, откуда он это знает, т.е. как он измерил скорость света.

Он начал с того, что **принял** *скорость света постоянной и, в частности, одинаковой во всех направлениях. Это и есть постулат, без которого не могло бы быть произведено никакое измерение этой скорости. Этот постулат никогда нельзя будет проверить непосредственно на опыте; последний мог бы его опровергнуть, если бы результаты различных измерений не согласовывались между собой. Мы должны считать себя счастливыми тем, что этого противоречия нет и что те небольшие расхождения, которые могут возникнуть, легко объяснимы.*

Во всяком случае этот постулат, согласующийся с законом достаточного основания, был принят всеми; для меня важно то, **что он дает нам новое правило для отыскания одновременности** *(*выделено мной. *– А.Л.), совершенно отличное от того, которое мы изложили выше".*

Лоренц рассматривал уравнения Максвелла-Лоренца в "неподвижной" системе отсчета, связанной с эфиром. Он считал координаты X, Y, Z **абсолютными**, а время T – **истинным временем**.

В системе координат, движущейся в направлении оси X со скоростью v, относительно "неподвижной" системы

отсчета, координаты по отношению к осям, движущимися вместе с системой, имеют значения

$$x = X - vT, \quad y = Y, \quad z = Z, \tag{3.3}$$

а время в движущейся системе отсчета Лоренц назвал **местным временем** и определил его следующим образом

$$\tau = T - \frac{v}{c^2}X. \tag{3.4}$$

Он ввел это время, чтобы в соответствии с опытными данными исключить в теории влияние движения Земли на оптические явления с точностью $\frac{v}{c}$.

Это время, как отмечал он, "**введено с помощью математического ухищрения**". Физический смысл **местного времени** был раскрыт А. Пуанкаре.

В статье "Теория Лоренца и принцип равенства действия и противодействия", опубликованной в 1900 г. он писал о **местном времени** τ, определенным следующим образом.

> *"Я предполагаю, что наблюдатели, размещенные в различных точках, сверяют свои часы с помощью световых сигналов; что они поправляют эти сигналы на время передачи, но не зная относительного движения, в котором они находятся и, следовательно, считая, что сигналы распространяются одинаково быстро в обоих направлениях, они ограничиваются ведением наблюдений, отправляя сигналы из A в B и потом — из B в A.* Местное время *τ есть время, отмеченное таким образом регулируемыми часами. Тогда, если* **c** *– скорость света, а v – скорость перемещения Зем-*

ли, которую я полагаю параллельной оси положительных X, будем иметь:

$$\tau = T - \frac{v}{c^2}X\ ". \tag{3.5}$$

(Перевод В.А. Петрова).

Учитывая (3.3) в (3.5), получим

$$\tau = T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c^2}x. \tag{3.6}$$

Скорость света в "неподвижной" системе отсчета равна c. В движущейся системе отсчета в переменных x, T она будет равна в направлении, параллельному оси X

$$c - v \tag{3.7}$$

в положительном, и

$$-(c + v) \tag{3.8}$$

– в отрицательном направлении.

Следуя Пуанкаре, осуществим синхронизацию часов в движущейся системе отсчета с помощью **местного времени** Лоренца. Пусть из точки A с координатами $(0, 0, 0)$, световой сигнал вышел в момент времени τ_a:

$$\tau_a = T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{3.9}$$

Этот сигнал придет в точку B с координатами $(x, 0, 0)$ в момент времени τ_b

$$\tau_b = \left(T + \frac{x}{c - v}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c^2}x = \tau_a + \frac{x}{c}. \tag{3.10}$$

Мы здесь учли время передачи сигнала из A в B. Из точки B сигнал отразился и пришел в точку A в момент времени τ'_a

$$\tau'_a = \left(T + \frac{x}{c-v} + \frac{x}{c+v}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \tau_b + \frac{x}{c}. \qquad (3.11)$$

На основании (3.9), (3.11) и (3.10) имеем

$$\frac{\tau_a + \tau'_a}{2} = \tau_b. \qquad (3.12)$$

Так вводится определение одновременности, которое позднее использовал А. Эйнштейн для вывода преобразований Лоренца. Мы видим, что в движущейся системе отсчета вдоль оси X в **местном времени** τ световой сигнал имеет скорость $\boldsymbol{c}$ только вдоль любого направления, параллельного оси X. Преобразования, обратные к (3.3) и (3.4), будут

$$T = \frac{\tau + \frac{v}{c^2}x}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \; X = \frac{x + v\tau}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \; Y = y, \; Z = z. \qquad (3.13)$$

Так как скорость света в "неподвижной" системе отсчета равна $\boldsymbol{c}$, в новых переменных τ, x, y, z находим

$$\gamma^2\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \gamma^2 c^2. \qquad (3.14)$$

Для того, чтобы скорость света в движущейся системе отсчета также была бы равна $\boldsymbol{c}$, необходимо в преобразованиях (3.3) и (3.4) правые части для x и τ умножить на γ, а соответственно, в преобразованиях (3.13) правые части для T и X разделить на γ. Таким образом, отсюда также

возникали преобразования Лоренца, но только на световом конусе. Общие преобразования Лоренц получил в 1899 г., а Лармор в 1900 г. Именно постоянство скорости света в любой инерциальной системе отсчета и положил А. Эйнштейн в основу своего подхода к электродинамике движущихся тел. Но оно обеспечивается не преобразованиями (3.3) и (3.4), а преобразованиями Лоренца, но только на световом конусе.

В 1904 г. в статье "**Настоящее и будущее математической физики**" А. Пуанкаре формулирует принцип относительности для всех явлений природы и в той же статье он вновь возвращается к идее **местного времени** Лоренца. Он пишет:

> *"...Вообразим двух наблюдателей, которые желают выверить свои часы при помощи световых сигналов; они обмениваются сигналами, но, зная, что свет распространяется не мгновенно, дают их, так сказать, перекрестным способом. Когда наблюдатель в пункте B принимает сигнал из пункта A, его часы должны показывать не то время, которое показывали часы в пункте A в момент отправления сигнала, а время, увеличенное на некоторую постоянную, представляющую собой длительность передачи. Пусть, например, из пункта A посылается сигнал, когда часы в нем показывают время* 0, *а в пункте B сигнал принимается, когда часы в нем показывают время* t. *Часы выверены, если запаздывание, равное* t, *представляет собой длительность передачи сигнала; чтобы это проверить, из пункта B посылается сигнал, когда часы в нем показывают*

время 0*; в пункте A должны получить его, когда часы в нем показывают время* t*. Тогда показания часов согласованы. И действительно, они показывают одно и то же время в одно и то же физическое мгновение, но при условии, что оба пункта были неподвижны. В противном случае длительность передачи не будет одинакова в обоих направлениях: в случае, когда, например, пункт A движется навстречу оптическому возмущению, исходящему из B, и тогда, когда пункт B удаляется от возмущения, исходящего из A. Выверенные таким способом часы не будут показывать* **истинное время** *(*время в "неподвижной" системе отсчета – *А.Л.), они будут показывать так называемое местное время: одни часы будут отставать от других. Но это несущественно, поскольку у нас нет никакого средства заметить это. Все явления, происходящие, например, в A, будут запаздывать, но запаздывать одинаково, и наблюдатель не заметит этого, потому что его часы отстают; таким образом, как это следует из принципа относительности, у него не будет никакого средства узнать, находится ли он в покое или в абсолютном движении.*

Этого, к сожалению, недостаточно, необходимы дополнительные гипотезы; надо допустить, что движущиеся тела испытывают однородное сокращение в направлении движения ..."

Такова была ситуация до работы Лоренца, которая также появилась в 1904 г. В работе Лоренца 1904 г. вновь

появились преобразования, связывающие "неподвижную" систему отсчета с системой отсчета, движущейся со скоростью v относительно "неподвижной", которые Пуанкаре назвал преобразованиями Лоренца. В этой работе Лоренц вместо **местного времени** (3.4) ввел время T', равное

$$T' = \gamma\tau. \tag{3.15}$$

Именно такое время и будет в любой инерциальной системе отсчета в галилеевых координатах. Оно не нарушает условие синхронизации (3.12).

Ниже мы увидим, что волновое уравнение действительно не меняет своего вида при преобразованиях Лоренца (3.1). Проверим это. Волновое уравнение электродинамики имеет вид:

$$\Box\phi = \left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0. \tag{3.16}$$

Здесь ϕ – скалярная функция в четырехмерном пространстве, изменяющаяся при координатно-временных преобразованиях по следующему правилу $\phi'(x') = \phi(x)$, c – электродинамическая постоянная, имеющая размерность скорости.

Установим форминвариантность оператора $\Box$ относительно преобразований (3.1) Представим часть оператора $\Box$ в форме

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3.17}$$

Вычислим производные в новых координатах, используя формулы (3.1)

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} = -\gamma \left(\frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial x'} \right).$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial x'} \right), \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \right). \tag{3.19}$$

Подставляя эти выражения в (3.17) получим

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}. \tag{3.20}$$

Учитывая, что переменные Y и Z согласно (3.1) не изменяются, на основании (3.20) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Это означает, что **волновое уравнение** (3.16) **остается форминвариантным относительно преобразований Лоренца** (3.1). Иначе говоря, оно одинаково в обеих инерциальных системах отсчета.

Мы показали, что преобразования Лоренца оставляют оператор $\Box$ неизменным, т.е. они сохраняют форминвариантность волнового уравнения. С другой стороны этот расчет можно считать точным выводом преобразований Лоренца, исходя из форминвариантности оператора $\Box$.

В электродинамике волновое уравнение, вне источника, имеет место как для скалярного потенциала φ, так и для

векторного $\vec{A}$. В данном случае φ определена как скаляр относительно трехмерных координатных преобразований, а $\vec{A}$ как вектор, относительно тех же преобразований. Для форминвариантности волнового уравнения при преобразованиях Лоренца необходимо считать величины φ и $\vec{A}$ как компоненты четырехмерного вектора $A^\nu = (\varphi, \vec{A})$

$$\Box A^\nu = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

В 1905 г. Анри Пуанкаре [2, 3], опираясь на работу Г. Лоренца 1904 г., в которой были открыты преобразования Лоренца, и принцип относительности, который он сформулировал в том же году для всех явлений природы, впервые установил неизменность уравнений Максвелла-Лоренца, уравнения движения заряженных частиц под действием силы Лоренца относительно преобразований Лоренца (3.1). Все это будет детально показано в параграфах 8 и 9.

А. Пуанкаре открыл, что эти преобразования вместе с **пространственными вращениями образуют группу. Он впервые ввел представление о четырехмерности ряда физических величин**. Открытие этой группы в соединении с квантовыми представлениями создало основы современной теоретической физики.

Пуанкаре установил, что скалярный и векторный потенциал $(\varphi, \vec{A})$, плотность заряда и ток $(c\rho, \rho\vec{v})$, четырехскорость $(\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c})$, работа в единицу времени и сила отнесенная к единице объема $(\vec{f}\frac{\vec{v}}{c}, \vec{f})$, а также четырехсила преобразуются таким же образом как величины $(ct, \vec{x})$. Наличие группы Лоренца означает, что во всех инерциальных системах в галилеевых координатах уравнения Максвелла-Лоренца остаются форминвариантными, т.е. принцип от-

носительности выполняется. Отсюда непосредственно следует одинаковость описания явлений как в системе отсчета x, y, z, t, так и в системе x', y', z', t', а следовательно, время t, как и другие переменные x, y, z, относительно. Таким образом, относительность времени есть прямое следствие наличия группы, которая сама возникла как следствие требования принципа относительности для электромагнитных явлений. Наличие группы привело к открытию геометрии пространства-времени.

А. Пуанкаре открыл ряд инвариантов группы и среди них фундаментальный инвариант

$$J = c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2, \tag{3.22}$$

который может быть получен, используя преобразования Лоренца. **Он свидетельствует, что пространство и время образуют единый четырехмерный континуум событий, с метрическими свойствами, определяемыми инвариантом** (3.22).

В этом и состоит суть специальной теории относительности. Именно поэтому она имеет отношение ко всем физическим явлениям. Пространство-время, определяемое инвариантом (3.22), и обусловило существование в природе физически равноправных инерциальных систем отсчета. Однако как и ранее, в классической механике, осталось не ясным, как инерциальные системы отсчета связаны с распределением материи во Вселенной. Из выражения (3.22) следует, что в любой инерциальной системе отсчета в галилеевых (декартовых) координатах заданная величина J остается неизменной (форминвариантной), тогда как проекции на оси изменяются. Таким образом, в зависимости от выбора инерциальной системы отсчета проекции X, Y, Z, T **являются относительными величинами**, тогда как **величина J** для любых данных X, Y, Z, T при этих

преобразованиях **имеет абсолютное значение**. В дифференциальной форме согласно (3.22) имеем

$$(d\sigma)^2 = c^2(dT)^2 - (dX)^2 - (dY)^2 - (dZ)^2. \qquad (3.23)$$

Величину $d\sigma$ назвали **интервалом**.

Геометрию пространства-времени, т.е. пространство событий (пространство Минковского), **с мерой** (3.23) **назвали псевдоевклидовой геометрией**.

Согласно инварианту J, записанному в ортогональных (галилеевых) координатах, всегда можно ввести единое время T для всех точек трехмерного пространства. Это означает, что трехмерное пространство данной инерциальной системы отсчета ортогонально линиям времени. Поскольку, как мы увидим ниже, инвариант J в другой инерциальной системе отсчета принимает вид (3.27), то отсюда следует, что в этой системе отсчета единое время будет уже другим, оно определяется переменной T'. Таким образом, введение одновременности для всех точек трехмерного пространства, является прямым следствием псевдоевклидовой геометрии четырехмерного пространства событий.

Подводя итог всему вышесказанному мы видим, что Г. Лоренц нашел преобразования (3.1), которые сохраняют форму волнового уравнения (3.16). Анри Пуанкаре, основываясь на принципе относительности для всех физических явлений, который он сформулировал в 1904 г., и на преобразованиях Лоренца, установил форминвариантность уравнений Максвелла-Лоренца и открыл псевдоевклидову геометрию пространства-времени, определяемую инвариантом (3.22) или (3.23).

Краткое изложение детальной статьи [3] было дано А. Пуанкаре в докладах Французской академии наук [2] и опубликовано еще до того как была направлена в печать

работа Эйнштейна. Она содержала точное и строгое описание решения проблемы электродинамики движущихся тел и в то же время распространение преобразований Лоренца на все силы природы, какого бы происхождения они ни были. В этой работе он также ввел представление о **гравитационных волнах**, распространяющихся со скоростью света.

А. Пуанкаре открыл инвариант (3.22), на основании преобразований Лоренца (3.1). С другой стороны, используя инвариант (3.22) легко вывести сами преобразования Лоренца (3.1). Пусть в инерциальной системе в галилеевых координатах инвариант J имеет форму (3.22). Перейдем в другую инерциальную систему координат

$$x' = X - vT, \quad Y' = Y, \quad Z = Z', \tag{3.24}$$

тогда инвариант J примет форму

$$J = c^2\Big(1 - \frac{v}{c^2}\Big)T^2 - 2x'vT - x'^2 - Y'^2 - Z'^2. \tag{3.25}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} J = c^2 &\left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,T - \frac{x'v}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]^2 - \\ &-x'^2\left[1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2}\right] - Y'^2 - Z'^2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Выражение (3.26) можно записать в форме

$$J = c^2T'^2 - X'^2 - Y'^2 - Z'^2, \tag{3.27}$$

где

$$T' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,T - \frac{x'v}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T - \frac{v}{c^2}X}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.28}$$

$$X' = \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{X - vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.29}$$

Мы видим из выражения (3.27), что форминвариантность инварианта J обеспечивается преобразованиями Лоренца (3.28) и (3.29). При выводе преобразований Лоренца из выражения инварианта (3.22) мы воспользовались тем, что инвариант J может иметь произвольное вещественное значение. Именно это обстоятельство и позволило нам рассматривать величины T и X как независимые переменные, которые могут принимать любые вещественные значения. Если бы мы, следуя Эйнштейну, знали только одно значение J, равное нулю, то в принципе не смогли бы получить преобразования Лоренца общего вида, поскольку пространственные переменные были бы связаны с временнóй переменной. Именно это обстоятельство осталось не замеченным А. Эйнштейном в его работе 1905 г. при выводе преобразований Лоренца.

В. Паули в 1921 г. пишет (см. его книгу "Теория относительности". М.: Наука, 1983, с. 19):

> *"...Лоренц и Пуанкаре, как мы видели выше, положили в основу своего рассмотрения уравнения Максвелла. С другой стороны, абсолютно необходимо настаивать на том, что такое фундаментальное утверждение как принцип ковариантности должно выводиться по*

возможности из самых простых основных положений. Эйнштейн показал, и в этом его большая заслуга, что для этой цели достаточно принять только следующее электродинамическое положение: **скорость света не зависит от движения источника**".

И далее (с. 25), он пишет:

"*...Вследствие обоих принятых постулатов уравнение*

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (2)$$

влечет за собой уравнение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad (2')$$

Это возможно вследствие линейности преобразования, только если

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2) = \varepsilon(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2),$$

где ε – постоянная, зависящая от v ".

Последнее соотношение – это приравнивание двух выражений, равных нулю. Поэтому отсюда могут быть получены преобразования Лоренца, но только на световом конусе. Паули этого обстоятельства не замечает и фактически пользуется тем, что величина

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \qquad (\alpha)$$

является инвариантом относительно преобразований Лоренца. Но это было установлено в работе [3] Пуанкаре, а не Эйнштейном. Позднее эта "оригинальная" операция

приравнивания двух величин $d\sigma$ и $d\sigma'$, равных нулю, будет использована и в книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лившица "**Теория поля**", § 2 (М.: Наука, 2001) с целью установить, что выражение α одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Но таким путем этого доказать нельзя. Поэтому их вывод ошибочен.

К столетию теории относительности пора бы уже уяснить, что постоянство скорости света во всех инерциальных системах отсчета не является исходным положением теории относительности.

Принцип относительности для инерциальных систем, благодаря уравнениям Максвелла-Лоренца, привел Пуанкаре [3], а затем Минковского [4], к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Именно этим мы обязаны Пуанкаре и Минковскому. Выступая в 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне, Г. Минковский отмечал [4]:

> *"Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность".*

Поэтому суть специальной теории относительности состоит в следующем (**это постулат**): **все физические процессы протекают в четырехмерном пространстве-времени** $(ct, \vec{x})$, **геометрия которого псевдоевклидова и определяется интервалом** (3.23). Таким образом, изучение электромагнитных явлений в соединении с принципом относительности Пуанкаре привели к

объединению пространства и времени в единый четырехмерный континуум событий и позволили установить псевдоевклидову геометрию этого континуума. Такое четырехмерное пространство-время является однородным и изотропным.

Это обеспечивает выполнимость фундаментальных законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения для замкнутой физической системы. **Псевдоевклидова геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи, которые и делают ее универсальной**. Изучение различных форм материи, ее законов движения является в то же время и изучением пространства и времени. Хотя сама структура пространства-времени и открылась нам в результате изучения материи (электродинамики), иногда мы говорим о пространстве как об арене, на которой развиваются те или иные явления. При этом мы не совершим ошибку, если будем помнить, что эта арена не существует сама по себе без материи. Иногда говорят, что пространство-время (пространство Минковского) задано априорно, поскольку его структура не изменяется под действием материи. Такая неизменность пространства Минковского возникает вследствие его **универсальности** для всех физических полей, а поэтому и создается впечатление, что оно существует как бы независимо от материи. По-видимому, из-за неясности сути специальной теории относительности и пришел А. Эйнштейн к выводу, что

> *"в рамках специальной теории относительности нет места для удовлетворительной теории тяготения".*

В общей теории относительности Эйнштейна специальная теория относительности точно не выполняется, она рассматривается как предельный случай. А. Эйнштейн в 1955 г. писал:

«Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить "инерциальную систему" (или "инерциальные системы")».

Однако и в настоящее время нет ни одного экспериментального или наблюдательного факта, который свидетельствовал бы о нарушении специальной теории относительности. Именно поэтому ни в какой степени не оправдан отказ от ее точного соблюдения и при изучении гравитационных явлений. Тем более, что все известные гравитационные эффекты точно объясняются в рамках специальной теории относительности [5]. **Отказ от специальной теории относительности ведет к отказу от фундаментальных законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения.** Таким образом, приняв гипотезу, что все явления природы происходят в псевдоевклидовом пространстве-времени, мы автоматически соблюдаем все требования фундаментальных законов сохранения и подтверждаем **существование инерциальных систем отсчета.**

Пространственно-временной континуум, определяемый интервалом (3.23), можно записать и в произвольных координатах.

При переходе к произвольным координатам геометрия четырехмерного пространства-времени не изменяется. Однако в произвольных координатах трехмерное пространство уже не будет евклидовым. Для упрощения записи вместо переменных T, X, Y, Z введем переменные $X^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3, X^0 = cT$. Совершим теперь переход от переменных X^ν к произвольным переменным x^ν с помощью преобразований

$$X^\nu = f^\nu(x^\sigma). \tag{3.30}$$

Эти преобразования в общем случае приводят к неинерциальной системе координат. Вычисляя дифференциалы

$$dX^\nu = \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda, \tag{3.31}$$

здесь и далее по одинаковым индексам λ идет суммирование от 0 до 3, и подставляя их в (3.23), получим выражение в неинерциальной системе координат

$$(d\sigma)^2 = \gamma_{\mu\lambda}(x) dx^\mu dx^\lambda. \tag{3.32}$$

Здесь $\gamma_{\mu\lambda}(x)$ – метрический тензор четырехмерного пространства. Он равен

$$\gamma_{\mu\lambda}(x) = \sum_{\nu=0}^{3} \varepsilon^\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad \varepsilon^\nu = (1, -1, -1. - 1). \tag{3.33}$$

Выражение (3.32) инвариантно относительно произвольных преобразований координат. Выражение (3.33) дает общий вид псевдоевклидовой метрики.

Отличие метрики вида (3.23) от метрики (3.32) обычно, в соответствии с идеями Эйнштейна, относят за счет наличия гравитационного поля. Но это неправильно. Никакого гравитационного поля в метрике вида (3.32) нет. Представления об ускоренных системах отсчета в пространстве Минковского сыграли в творчестве Эйнштейна важную эвристическую роль. Они помогли ему прийти к идее описания гравитационного поля с помощью метрического тензора риманова пространства, именно поэтому Эйнштейн стремился сохранить их, хотя они и не имеют никакого отношения к гравитационному полю. Такие обстоятельства и помешали ему раскрыть суть специальной теории относительности. С формальной, математической точки зрения он высоко ценил исследование Минковского, но в глубокую физическую суть его работы он так и не проник.

Специальную теорию относительности Эйнштейн связывал только с интервалом вида (3.23), относя (3.32) к общей теории относительности. К сожалению, такая точка зрения до сих пор бытует в учебниках и монографиях, излагающих теорию относительности.

Пусть в некоторой неинерциальной системе координат метрический тензор пространства имеет вид $\gamma_{\mu\lambda}(x)$. Тогда не трудно показать, что существует бесконечное множество систем координат, в которых интервал (3.32), с помощью определенного класса нелинейных преобразований координат, принимает форму

$$(d\sigma)^2 = \gamma_{\mu\lambda}(x')dx'^{\mu}dx'^{\lambda}. \tag{3.34}$$

Частным случаем таких преобразований являются преобразования Лоренца, которые связывают одну инерциальную систему с другой. Мы видим, что преобразования координат, которые оставляют метрику форминвариантной, приводят к тому, что физические явления, происходящие в таких системах координат при одинаковых условиях, никогда не могут позволить отличить одну систему координат от другой. Отсюда можно дать более общую формулировку **принципа относительности**, который относится уже не только к **инерциальным системам** координат, но и к **неинерциальным** [6].

> *"Какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся".*

Следует отметить, что в (3.33) хотя метрический тензор $\gamma_{\mu\lambda}(x)$ зависит от координат, тем не менее пространство остается псевдоевклидовым. Хотя это и очевидно, но об этом необходимо сказать, поскольку А. Эйнштейн даже в 1933 г. писал совсем противоположное [7].

> *"В специальной теории относительности, как показал Г. Минковский, эта метрика была квазиевклидовой, т.е. квадрат «длины» ds линейного элемента представлял собой определенную квадратичную функцию дифференциалов координат. Если же вводятся другие координаты с помощью нелинейного преобразования, то ds^2 остается однородной функцией дифференциалов координат, но коэффициенты этой функции $(g_{\mu\nu})$ будут уже не постоянными, а некоторыми функциями координат. Математически это означает, что физическое (четырехмерное) пространство обладает римановой метрикой".*

Это, конечно, **неправильно**, поскольку преобразованиями координат (3.30) невозможно превратить псевдоевклидову геометрию в риманову. Такое высказывание А. Эйнштейна имело под собой глубокие физические корни. Эйнштейн был убежден, что псевдоевклидова метрика в произвольных координатах $\gamma_{\mu\lambda}(x)$ также описывает гравитационное поле. Эти представления, выдвинутые Эйнштейном, ограничили рамки специальной теории относительности и в таком же виде вошли в учебники и монографии, что и затруднило понимание сути теории относительности.

Так например, академик Л.И. Мандельштам в своих лекциях по теории относительности [8] особо отмечал:

"Что происходит в действительности, как идут ускоренно движущиеся часы и почему их ход изменяется, на это специальная теория относительности ответить не может, ибо она вообще не занимается вопросом об ускоренно движущихся системах отсчета".

Физические истоки такого ограниченного понимания специальной теории относительности идут от А. Эйнштейна. Приведем ряд его высказываний по поводу специальной теории относительности. В 1913 г. он писал [9]:

"В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования".

В следующей статье того же года он пишет [10]:

"В первоначальной теории относительности независимость физических уравнений от специального выбора системы отсчета основывается на постулировании фундаментального инварианта $ds^2 = \sum_i dx_i^2$, *а теперь речь идет о том, чтобы построить теорию, в которой роль фундаментального инварианта играет линейный элемент наиболее общего вида*

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k \text{ ".}$$

Позднее, в 1930 г. А. Эйнштейн писал [11]:

"В специальной теории относительности разрешаются только такие изменения координат (преобразования), что и в новых координатах величина ds^2 *(фундаментальный инвариант) имеет вид суммы квадратов дифференци-*

алов новых координат. Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца".

А. Эйнштейну трудно было увидеть, что за преобразованиями Лоренца и относительностью времени скрыт фундаментальный факт: пространство и время образуют единый четырехмерный континуум с псевдоевклидовой геометрией, определяемой интервалом

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \qquad \det(\gamma_{\mu\nu}) = \gamma < 0, \tag{3.35}$$

с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$, для которого тензор кривизны Римана равен нулю. Но именно существование четырехмерного пространства событий с псевдоевклидовой метрикой позволили установить, что ряд векторных величин евклидова трехмерного пространства в то же время являются компонентами четырехмерных величин вместе с некоторыми скалярами в евклидовом пространстве.

Это было осуществлено А. Пуанкаре и далее развито Г. Минковским. Очень часто, не понимая сути теории, пишут, что Минковский якобы дал геометрическую интерпретацию теории относительности. Это неверно. **А. Пуанкаре и Г. Минковский на основе группы, открытой Пуанкаре, открыли псевдоевклидову геометрию пространства-времени, что и составляет суть специальной теории относительности.**

Об этом в 1909 г. в статье "Пространство и время" Г. Минковский писал:

"Понятия пространства ни Эйнштейн, ни Лоренц не касались, может быть, потому, что при упомянутом выше специальном преобразовании, при котором плоскость x', t' совпадает с плоскостью x, t, возможно толкование, что ось x пространства сохраняет свое

*положение. Попытку перешагнуть через понятия пространства соответствующим образом в самом деле можно было бы расценить как некоторую дерзость математической мысли. Но после такого все-таки неизбежного шага для истинного понимания группы G_c (*речь идет о группе Лоренца. – *А.Л.) термин* «**постулат относительности**» *для требования инвариантности по отношению к группе G_c кажется мне слишком бледным. Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название* «**постулата абсолютного мира**» *или, коротко мировой постулат".*

Удивительно, но в работе Г. Минковского нет ссылки на статьи [2] и [3] А. Пуанкаре, хотя она только детализирует то, что уже ранее содержится в работах [2] и [3]. Однако яркостью изложения перед широкой аудиторией естествоиспытателей она привлекла к себе всеобщее внимание. В 1913 г. в Германии был издан сборник статей по теории относительности Г.А. Лоренца, А. Эйнштейна, Г. Минковского. Основополагающих работ [2] и [3] А. Пуанкаре там нет. В замечании А. Зоммерфельда к работе Минковского Пуанкаре упоминается только в связи с частными вопросами. Такое замалчивание основополагающих работ по теории относительности А. Пуанкаре объяснить непросто.

§ 4. Относительность времени и сокращение длины

Рассмотрим ход времени часов в двух инерциальных системах отсчета, из которых одну будем считать неподвижной, а другую движущейся относительно первой со скоростью v. Если часы покоятся в движущейся системе отсчета, то интервал их равен

$$d\sigma^2 = c^2 dt'^2, \tag{4.1}$$

t' – время, по часам в этой системе отсчета.

Поскольку часы относительно другой системы отсчета движутся со скоростью v, то тот же интервал, но уже в покоящейся системе отсчета будет равен

$$d\sigma^2 = c^2 dt^2 \Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big), \tag{4.2}$$

здесь t – время по часам, покоящимся в этой системе отсчета.

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{4.3}$$

Из соотношений (4.1) и (4.2) находим связь между ходом часов в этих инерциальных системах отсчета

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{4.4}$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$\triangle t' = \triangle t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{4.5}$$

Это выражение есть следствие наличия фундаментального инварианта (3.22). Как отмечал В. Паули "из преобразований Лоренца" оно "**было ясно выявлено Эйнштейном**".

Применим это равенство к элементарной частице со временем жизни в состоянии покоя равным τ_0. На основании (4.5), полагая $\triangle t' = \tau_0$ находим время жизни движущейся частицы

$$\triangle t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.6}$$

Именно благодаря этому эффекту и удается транспортировать в вакууме пучки частиц высокой энергии на достаточно большие расстояния от ускорителя к экспериментальным установкам, хотя их время жизни в покоящемся состоянии очень мало.

В рассмотренном выше случае мы имели дело с времениподобным интервалом $d\sigma^2 > 0$. Рассмотрим другой пример, когда интервал между событиями пространственноподобный $d\sigma^2 < 0$. Рассмотрим опять две такие же инерциальные системы отсчета. Пусть в движущейся системе отсчета измеряется длина стержня, покоящегося в другой системе отсчета. Дадим определение способа измерения длины движущегося стержня. Пусть концы этого стержня X_1' и X_2' наблюдатель, находящийся в движущейся системе отсчета, фиксирует в **один и тот же момент времени**

$$T_1' = T_2', \tag{4.7}$$

это позволяет свести интервал S_{12}^2 в движущейся системе отсчета только к пространственной части

$$S_{12}^2 = -\left(X_2' - X_1'\right)^2 = -\ell^2. \tag{4.8}$$

Таким образом, при нашем способе определения длины движущегося стержня, величину ℓ естественно считать длиной.

Тот же интервал в неподвижной системе отсчета, где находится стержень, в состоянии покоя равен

$$S_{12}^2 = c^2(T_2 - T_1)^2 - (X_2 - X_1)^2. \tag{4.9}$$

Но согласно преобразованиям Лоренца имеем

$$T_2' - T_1' = \gamma\Big[(T_2 - T_1) - \frac{v}{c^2}(X_2 - X_1)\Big], \tag{4.10}$$

откуда для нашего случая (4.7), находим

$$T_2 - T_1 = \frac{v}{c^2}(X_2 - X_1) = \frac{v}{c^2}\ell_0\,, \tag{4.11}$$

ℓ_0 – длина стержня в неподвижной системе отсчета. Подставляя это выражение в (4.9), получим

$$S_{12}^2 = -\ell_0^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big). \tag{4.12}$$

Сравнивая (4.8) и (4.12), находим

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{4.13}$$

Из соотношений (4.7) и (4.11) мы видим, что одновременные события в одной инерциальной системе отсчета не будут одновременными в другой инерциальной системе, поэтому понятие одновременности относительно. Сокращение (4.13) является следствием относительного характера одновременности, или более точно – **наличием фундаментального инварианта** (3.22).

Таким образом, мы установили, что согласно специальной теории относительности промежуток времени между событиями для локального объекта и длина стержня, при фиксированном способе измерения (4.7), относительны. Они зависят от выбора инерциальной системы. Абсолютный смысл имеет только интервал между событиями. Следует особо отметить, что сокращение длины стержня (4.13) определяется не только псевдоевклидовой структурой пространства-времени, но и нашим **способом измерения длины**, поэтому сокращение в отличие от замедления

времени (4.5) не имеет такого физического значения. Это объясняется тем, что замедление времени относится к локальному объекту, а такие объекты существуют в природе, они описываются времениподобным интервалом $d\sigma^2 > 0$; следовательно, здесь осуществляется причинная связь. Сокращение длины относится к разным пространственным точкам и поэтому описывается пространственноподобным интервалом $d\sigma^2 < 0$, когда причинная связь отсутствует.

Вернемся к вопросу о сокращении Лоренца, определяемом формулой (4.13). Мы видели, что в рассмотренном выше случае, когда стержень покоится в нештрихованной инерциальной системе отсчета и имеет длину ℓ_0, для всех наблюдателей, находящихся в других инерциальных системах отсчета, при принятом способе измерения длины (4.7), имеет место сокращение, и длина будет определяться формулой (4.13). Совершенно очевидно, что при этом со стержнем ничего не происходит. Некоторые авторы называют этот эффект сокращения кинематическим, поскольку никакой деформации стержень при этом не испытывает. И в этом они правы, и нет никаких оснований их критиковать. Однако надо отметить, что эта кинематика есть следствие псевдоевклидовой структуры пространства, которая отражает общие динамические свойства материи – законы сохранения.

Об этой ситуации А. Пуанкаре еще в 1905 г. в работе [3] писал:

> *"Если бы мы приняли принцип относительности, то в законе тяготения и в электромагнитных законах нашли бы общую постоянную – скорость света. Точно также мы встретили бы ее во всех других силах какого угодно происхождения, что можно объяснить только с двух точек зрения: или все, что существует в мире – электромагнитного происхождения, или же это свойство, являющееся, так сказать, общим для всех физических явлений, есть*

не что иное, как внешняя видимость, что-то связанное с методами наших измерений. Как же мы производим наши измерения? Прежде мы ответили бы: перенося тела, рассматриваемые как твердые и неизменные одно на место другого; но в современной теории, принимая во внимание сокращение Лоренца, это уже неверно. Согласно этой теории **двумя равными отрезками, по определению, будут такие два отрезка, которые свет проходит в одно и то же время**". (выделено мной. – *А.Л.*)

Совершенно иная ситуация возникает при ускоренном движении. Если, например, стержень, покоящийся в нештрихованной инерциальной системе отсчета и имеющий длину ℓ_0, начинает двигаться с ускорением вдоль его длины, причем так, что оба его конца начинают движение одновременно, то в системе отсчета, связанной со стержнем, его длина будет увеличиваться по закону

$$L = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2(t)}{c^2}}}, \quad \text{или,} \quad \text{если}$$

учесть формулу (13.3), можно выразить скорость $v(t)$, через ускорение a и получить выражение

$$L = \ell_0 \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}.$$

Увеличение длины стержня со временем непосредственно следует из одинаковости интервала событий в нештрихованной инерциальной системе отсчета и в движущейся системе с ускорением a, в которой стержень покоится. Это означает, что стержень испытывает разрывные напряжения.

Ранее мы нашли преобразования Лоренца для случая, когда движение одной системы координат относительно другой инерциальной системы происходило с постоянной скоростью вдоль оси X. Рассмотрим теперь общий случай, когда движение происходит со скоростью $\vec{v}$ в произвольном направлении

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{v}T. \tag{4.14}$$

Разложим векторы $\vec{R}, \vec{R}'$ в исходной галилеевой системе координат по направлению скорости $\vec{v}$ и по направлению, перпендикулярному к скорости $\vec{v}$.

$$\vec{R} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}R_{\parallel} + \vec{R}_{\perp}, \qquad \vec{R}' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}R'_{\parallel} + \vec{R}'_{\perp}. \tag{4.15}$$

На основании преобразований Лоренца (3.1) будут изменяться только продольные величины, поперечные остаются без изменений.

$$R'_{\parallel} = \gamma(R_{\parallel} - vT), \quad T' = \gamma\left(T - \frac{v}{c^2}R_{\parallel}\right), \quad \vec{R}'_{\perp} = \vec{R}_{\perp}. \tag{4.16}$$

Согласно (4.15) находим

$$R_{\parallel} = \frac{(\vec{v}\vec{R})}{v}, \quad \vec{R}_{\perp} = \vec{R} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{R})}{v^2}. \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) в (4.16), а затем в (4.15), получим

$$\vec{R}' = \vec{R} + (\gamma - 1)\frac{(\vec{v}\vec{R})}{v^2}\vec{v} - \gamma\vec{v}T, \tag{4.18}$$

$$T' = \gamma\left(T - \frac{(\vec{v}\vec{R})}{c^2}\right). \tag{4.19}$$

При получении формул (4.18) и (4.19) мы считали, что при общем преобразовании (4.14) изменяется, в соответствии

с преобразованиями Лоренца, только составляющая вектора $\vec{R}$ вдоль направления скорости $\vec{v}$, тогда как поперечная составляющая остается без изменения.

Установим правильность этого предположения. Для этой цели будем исходить из инварианта (3.22). Подставляя (4.14) в (3.22), получим

$$J = c^2T^2 - (\vec{r} + \vec{v}T)^2 = c^2T^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2(\vec{v}\,\vec{r})T - \vec{r}^{\,2}. \quad (4.20)$$

Выделим в инварианте J времениподобную часть

$$J = c^2\left[\frac{T}{\gamma} - \gamma\frac{(\vec{v}\,\vec{r})}{c^2}\right]^2 - \vec{r}^{\,2} - \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\,\vec{r})^2. \quad (4.21)$$

Наша цель – найти такие новые переменные T' и $\vec{R}'$, в которых это выражение можно записать в диагональной форме

$$J = c^2T'^{\,2} - \vec{R}'^{\,2}. \quad (4.22)$$

Из сравнения (4.21) и (4.22) находим время T' в движущейся системе отсчета

$$T' = \frac{T}{\gamma} - \frac{\gamma}{c^2}(\vec{v}\,\vec{r}). \quad (4.23)$$

Выражая правую часть в (4.23) через переменные T, $\vec{R}$, получим

$$T' = \gamma\left(T - \frac{\vec{v}\,\vec{R}}{c^2}\right). \quad (4.24)$$

Пространственноподобную часть инварианта J также выразим через переменные T, $\vec{R}$

$$\vec{r}^{\,2} + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\,\vec{r})^2 = \vec{R}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\,\vec{R})^2 - 2\gamma^2(\vec{v}\,\vec{R})T + \gamma^2v^2T^2. \quad (4.25)$$

Легко убедиться, что первые два члена (4.25) можно записать в форме

$$\vec{R}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\,\vec{R})^2 = \left[\vec{R} + (\gamma - 1)\frac{\vec{v}(\vec{v}\,\vec{R})}{v^2}\right]^2, \tag{4.26}$$

а следовательно, выражение (4.25) принимает вид

$$\begin{aligned}\vec{r}^{\,2} + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\,\vec{r})^2 = \left[\vec{R} + (\gamma - 1)\frac{\vec{v}(\vec{v}\,\vec{R})}{v^2}\right]^2 - \\ -2\gamma^2(\vec{v}\,\vec{R})T + v^2\gamma^2T^2.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Правую часть (4.27) можно записать в форме

$$\vec{r}^{\,2} + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\,\vec{r})^2 = \left[\vec{R} + (\gamma - 1)\frac{\vec{v}(\vec{v}\,\vec{R})}{v^2} - \gamma\vec{v}T\right]^2. \tag{4.28}$$

Таким образом, пространственноподобная часть инварианта J принимает диагональный вид

$$\vec{r}^{\,2} + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\,\vec{r})^2 = (\vec{R}')^2, \tag{4.29}$$

где

$$\vec{R}' = \vec{R} + (\gamma - 1)\frac{\vec{v}(\vec{v}\,\vec{R})}{v^2} - \gamma\vec{v}T. \tag{4.30}$$

Формулы (4.24) и (4.30) совпадают с формулами (4.18) и (4.19), это свидетельствует о том, что наше предположение, сделанное ранее при их выводе, правильно.

§ 5. Сложение скоростей

Дифференцируя преобразования Лоренца (3.1) по переменной T получим формулы сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}\,,\quad u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}\,,\quad u'_z = u_z \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}. \tag{5.1}$$

Здесь

$$u_x = \frac{dX}{dT},\quad u_y = \frac{dY}{dT},\quad u_z = \frac{dZ}{dT}, \tag{5.2}$$

$$u'_x = \frac{dX'}{dT'}\,,\quad u'_y = \frac{dY'}{dT'}\,,\quad u'_z = \frac{dZ'}{dT'}. \tag{5.3}$$

При выводе (5.1) мы использовали формулу

$$\frac{dT'}{dT} = \gamma\Big(1 - \frac{v}{c^2}\,u_x\Big). \tag{5.4}$$

Аналогично можно получить и общие формулы, если использовать выражения (4.18), (4.19).

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + (\gamma - 1)\dfrac{(\vec{v}\vec{u})}{c^2}\vec{v} - \gamma\vec{v}}{\gamma\left[1 - \dfrac{(\vec{v}\vec{u})}{c^2}\right]}\,,\qquad \frac{dT'}{dT} = \gamma\left[1 - \frac{(\vec{v}\vec{u})}{c^2}\right]. \tag{5.5}$$

Мы увидим далее (§ 10), что пространство скоростей есть пространство Лобачевского.

§ 6. Элементы векторного и тензорного анализа в пространстве Минковского

Все физические величины должны быть определены таким образом, чтобы их суть не зависела от выбора системы координат.

Пусть в четырехмерном пространстве Минковского задана некоторая система координат $x^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Вместо этой системы координат можно выбрать другую, определяемую выражением

$$x'^\nu = f^\nu(x^\sigma). \tag{6.1}$$

Функции f^ν будем считать непрерывными, имеющими производные.

Если якобиан преобразования в каждой точке

$$J = \det \left| \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\sigma} \right| \tag{6.2}$$

отличен от нуля, то при этом условии переменные x'^ν будут независимыми, а следовательно, первоначальные переменные x^ν можно однозначно выразить через новые x'^ν

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(x'^\sigma). \tag{6.3}$$

Физические величины не должны зависеть от выбора системы координат, а поэтому они должны выражаться через геометрические объекты. Простейшим геометрическим объектом является скаляр, который преобразуется при переходе к новым переменным следующим образом

$$\phi'(x') = \phi\Big[x(x')\Big]. \tag{6.4}$$

Градиент от скалярной функции $\phi(x)$ преобразуется по правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\sigma}} \cdot \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}, \tag{6.5}$$

здесь, как и далее, по одинаковым индексам σ идет суммирование от 0 до 3.

Система функций, преобразующаяся при координатном преобразовании по правилу (6.5), получила название **ковариантного вектора**

$$A'_{\nu}(x') = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} A_{\sigma}(x). \tag{6.6}$$

Соответственно величина $B_{\mu\nu}$, преобразующаяся по правилу

$$B'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \cdot \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} A_{\sigma\lambda}, \tag{6.7}$$

называется ковариантным тензором второго ранга, и т.д.

Перейдем к другой группе геометрических объектов. Рассмотрим преобразование дифференциалов координат

$$dx'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\sigma}. \tag{6.8}$$

Система функций, преобразующаяся при координатных преобразованиях по правилу (6.8), получила название **контравариантного вектора**

$$A'^{\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}(x). \tag{6.9}$$

Соответственно величина $B^{\mu\nu}$, преобразующаяся по правилу

$$B'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \cdot \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} B^{\sigma\lambda}(x), \tag{6.10}$$

получила название контравариантного тензора второго ранга, и т.д.

Из трансформационных свойств вектора или тензора следует, что если все его компоненты равны нулю в одной системе координат, то они равны нулю и в любой другой системе координат. Заметим, что **координаты x^ν не образуют вектора**, тогда как дифференциал dx^ν является вектором. Координаты x^ν образуют вектор только относительно линейных преобразований.

Вычислим величину $A'_\sigma(x')B'^\sigma(x')$

$$A'_\sigma(x')B'^\sigma(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \cdot \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} A_\mu(x)B^\lambda(x)\,, \tag{6.11}$$

но поскольку

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \cdot \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при } \mu \neq \lambda \\ 1, & \text{при } \mu = \lambda \end{cases}\,. \tag{6.12}$$

Символ δ^μ_λ является смешанным тензором второго ранга и носит название символа Кронекера.

Учитывая (6.12) в выражении (6.11) находим

$$A'_\sigma(x')B'^\sigma(x') = A_\lambda(x)B^\lambda(x)\,. \tag{6.13}$$

Отсюда очевидно, что эта **величина является скаляром, ее обычно называют инвариантом.**

При написании выражения (3.32) мы фактически имели дело с фундаментальным инвариантом

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\lambda}(x)dx^\mu dx^\lambda\,, \quad \det(\gamma_{\mu\nu}) = \gamma < 0. \tag{6.14}$$

Наличие метрического тензора пространства Минковского, имеющего общий вид (3.33), позволяет осуществить подъем и опускание индекса у векторных и тензорных величин, например:

$$A_\nu = \gamma_{\nu\lambda}(x)A^\lambda\,, \quad A^\lambda = \gamma^{\lambda\sigma}A_\sigma\,, \quad A_\nu A^\nu = \gamma_{\lambda\sigma}A^\lambda A^\sigma\,. \tag{6.15}$$

$$\gamma_{\mu\lambda}\gamma^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \tag{6.16}$$

Тензоры можно складывать и вычитать, например

$$C_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} = A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \pm B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}. \tag{6.17}$$

Их можно также перемножать независимо от их строения

$$C_{\mu\nu\sigma\rho}^{\alpha\beta\lambda} = A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \cdot B_{\rho}^{\lambda}. \tag{6.18}$$

При этом необходимо соблюдать как порядок множителей, так и порядок индексов.

Преобразования (6.9) образуют группу. Пусть

$$A'^{\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}(x), \quad A''^{\mu} = \frac{\partial x''^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} A'^{\lambda}(x'), \tag{6.19}$$

отсюда имеем

$$A''^{\mu}(x'') = \frac{\partial x''^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \cdot \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}(x) = \frac{\partial x''^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}(x). \tag{6.20}$$

Заметим, что тензорное исчисление не зависит от метрических свойств пространства. Оно сохраняется, например, и в римановой геометрии, где в общем случае отсутствует группа движения пространства-времени. Группа же общих координатных преобразований (6.19–6.20) полностью сохраняется, поскольку она не зависит от метрических свойств пространства. Но она не имеет какого-либо физического значения.

§ 7. Группа Лоренца

А. Пуанкаре открыл, что преобразования Лоренца вместе со всеми пространственными вращениями образуют группу. Например, пусть

$$x' = \gamma_1(x - v_1 t), \quad t' = \gamma_1 \left(t - \frac{v_1}{c^2} x\right), \tag{7.1}$$

$$x'' = \gamma_2(x' - v_2 t'), \quad t'' = \gamma_2 \left(t' - \frac{v_2}{c^2} x'\right). \tag{7.2}$$

Подставляя (7.1) в (7.2), получим

$$x'' = \gamma_1\gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) x - \gamma_1\gamma_2(v_1 + v_2)t, \tag{7.3}$$

$$t'' = \gamma_1\gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) t - \gamma_1\gamma_2 \left(\frac{v_1 + v_2}{c^2}\right) x, \tag{7.4}$$

Но поскольку

$$x'' = \gamma(x - vt), \quad t'' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right). \tag{7.5}$$

Из сравнения (7.3) и (7.4) с (7.5), получим

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right), \quad \gamma v = \gamma_1\gamma_2(v_1 + v_2). \tag{7.6}$$

Из соотношений (7.6) находим

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{7.7}$$

Легко убедиться, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma_1\gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right). \tag{7.8}$$

Таким образом мы установили, что переход от системы координат x^ν, к системе координат x'^ν, а затем к системе координат x''^ν, эквивалентен прямому переходу от системы координат x^ν к системе x''^ν. Именно в этом случае можно говорить, что преобразования Лоренца образуют группу. **Пуанкаре открыл [2] эту группу, назвав ее группой Лоренца. Он нашел генераторы группы и построил алгебру Ли группы Лоренца. А. Пуанкаре впервые установил, что для всеобщей инвариантности законов природы относительно преобразований Лоренца необходимо, чтобы физические поля и другие динамические и кинематические характеристики образовывали бы совокупность величин, преобразующихся при преобразованиях Лоренца по группе или, точнее говоря, по одному из представлений группы Лоренца.**

Несколько общих слов о группе. Группа – это совокупность элементов $A, B, C \ldots$, в которой определена операция умножения. Элементы могут быть любой природы. Умножение двух любых элементов группы есть элемент той же группы. Для группы умножение должно удовлетворять следующим свойствам.

1. Закону ассоциативности

$$(AB)C = A(BC)\,.$$

2. В группе содержится единичный элемент E

$$AE = A\,.$$

3. Каждый элемент группы имеет обратный элемент

$$AB = E\,, \quad B = A^{-1}\,.$$

Для группы Лоренца имеем матричное умножение

$$X' = AX\,,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}\,,\ X = \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix}\,,\ X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'_0 \end{pmatrix}\,,$$

$$x'_0 = ct'\,,\ x_0 = ct\,.$$

Легко проверить, что совокупность всех преобразований Лоренца удовлетворяет всем перечисленным требованиям группы.

§ 8. Инвариантность уравнений Максвелла-Лоренца

Уравнения Максвелла-Лоренца в инерциальной системе координат, называемой "неподвижной", имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,,\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\,,$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho\,,\quad \operatorname{div}\vec{H} = 0\,, \tag{8.1}$$

$$\vec{f} = \varrho\vec{E} + \frac{1}{c}\rho\left[\vec{v},\vec{H}\right]\,. \tag{8.2}$$

В первом уравнении (8.1) второй член справа и является тем малым членом – **током смещения**, который Максвелл ввел в уравнения электродинамики. Именно о нем говорилось в § 3. Поскольку дивергенция от ротора равна нулю, из первого и третьего уравнений (8.1) следует закон сохранения тока

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0\,,\quad \vec{j} = \rho\vec{v}\,. \tag{8.3}$$

Как мы видим из (8.3), ток смещения позволил привести в соответствие уравнения электродинамики с законом сохранения электрического заряда. Для того чтобы четвертое уравнение из (8.1) тождественно выполнялось, представим $\vec{H}$ в форме

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}\,. \tag{8.4}$$

Таким образом, мы ввели векторный потенциал $\vec{A}$. Подставляя выражение (8.4) во второе уравнение из (8.1), получим

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{8.5}$$

Чтобы уравнение (8.5) тождественно удовлетворялось, оно должно быть градиентом функции ϕ

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi \,. \tag{8.6}$$

Таким образом, мы ввели понятие скалярного потенциала ϕ. Для заданных значений $\vec{E}$ и $\vec{H}$ потенциалы ϕ и $\vec{A}$, как мы увидим ниже (§ 11), определяются неоднозначно, поэтому выбирая их таким образом, чтобы имело место условие Л. Лоренца

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0 \,, \tag{8.7}$$

из уравнений (8.1), учитывая формулы

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla^2 \phi, \ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A},$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

а также соотношение (8.7), находим уравнения для потенциалов ϕ и $\vec{A}$ в следующем виде

$$\Box \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \,, \quad \Box \phi = 4\pi \rho \,. \tag{8.8}$$

Для того чтобы уравнение сохранения заряда было форминвариантным относительно преобразований Лоренца, необходимо, чтобы плотность ρ и ток являлись компонентами контравариантного вектора S^ν

$$S^\nu = (c\rho, \vec{j}) = (S^0, \vec{S}) \,, \quad \vec{j} = \rho \vec{v} \,. \tag{8.9}$$

Контравариантный вектор S^ν преобразуется при преобразованиях Лоренца так же, как $(ct\,, \vec{x})$. Уравнения сохранения заряда (8.3) принимают вид

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \,, \tag{8.10}$$

по одинаковым индексам ν идет суммирование. Учитывая (8.9), уравнения (8.8) принимают вид

$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{S}, \quad \Box\phi = \frac{4\pi}{c}S^0. \tag{8.11}$$

Чтобы эти уравнения не изменяли своего вида, при преобразованиях Лоренца, необходимо, чтобы скалярный и векторный потенциалы являлись компонентами контравариантного вектора A^ν

$$A^\nu = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}). \tag{8.12}$$

Поскольку оператор $\Box$, как мы ранее показали, не меняет своего вида при преобразованиях Лоренца, уравнения (8.11) принимают форму

$$\Box A^\nu = \frac{4\pi}{c}S^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{8.13}$$

Впервые векторы S^ν и A^ν ввел Анри Пуанкаре [3].

Объединение ϕ и $\vec{A}$ в четырехвектор A^ν необходимо, поскольку правая часть (8.13) есть вектор S^ν, то и левая часть должна преобразовываться как вектор. Отсюда непосредственно следует, что если в некоторой инерциальной системе отсчета имеется только электрическое поле, то в любой другой системе отсчета из-за того, что A^ν преобразуется как вектор, наряду с электрическим полем будет и магнитное поле. Это непосредственное следствие выполнения требования принципа относительности для электромагнитных явлений.

Преобразования Лоренца для вектора S^ν имеют такой же вид, как и для преобразования $(ct, \vec{x})$

$$S'_x = \gamma\left(S_x - \frac{u}{c}S_0\right), \quad S'^0 = \gamma\left(S^0 - \frac{u}{c}S_x\right). \tag{8.14}$$

Учитывая компоненты вектора S^ν (8.9), находим

$$\rho' = \gamma\rho\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right), \quad \rho' v'_x = \gamma\rho(v_x - u). \tag{8.15}$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{8.16}$$

u – скорость системы отсчета.

Преобразования для компонент S_y, S_z имеют вид

$$\rho' v'_y = \rho v_y, \quad \rho' v'_z = \rho v_z. \tag{8.17}$$

Все эти формулы впервые были получены А. Пуанкаре [2]. Из них следуют формулы для сложения скоростей

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_y = v_y\frac{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_z = v_z\frac{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}. \tag{8.18}$$

Введем ковариантный вектор S_ν

$$S_\nu = \gamma_{\nu\lambda}S^\lambda, \tag{8.19}$$

учитывая, что $\gamma_{\nu\lambda} = (1, -1, -1, -1)$, из (8.19) получим

$$S_0 = S^0, \quad S_i = -S^i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8.20}$$

Составим инвариант

$$S_\nu S^\nu = c^2\rho^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2\rho_0^2, \tag{8.21}$$

здесь ρ_0 – плотность заряда в системе отсчета, где заряд покоится. Отсюда имеем

$$\rho_0 = \rho\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{8.22}$$

Г. Минковский ввел антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{8.23}$$

который автоматически удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{8.24}$$

Поскольку $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, то легко убедиться

$$\begin{aligned} &-H_x = F_{23}\,, \ -H_y = F_{31}\,, \ -H_z = F_{12}\,, \\ &-E_x = F_{10}\,, \ -E_y = F_{20}\,, \ -E_z = F_{30}\,. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Система уравнений (8.24) эквивалентна системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\,, \ \operatorname{div}\vec{H} = 0\,. \tag{8.26}$$

Систему уравнений (8.13) с помощью тензора $F^{\mu\nu}$ можно записать в форме

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}S^\nu\,. \tag{8.27}$$

Тензор $F^{\mu\nu}$ связан с компонентами полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ следующими соотношениями

$$\begin{aligned} &-H_x = F^{23}\,, \ -H_y = F^{31}\,, \ -H_z = F^{12}\,, \\ &E_x = F^{10}\,, \ E_y = F^{20}\,, \ E_z = F^{30}\,. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Отсюда видно, что величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются при преобразованиях Лоренца как отдельные компоненты тензора $F^{\mu\nu}$. Ни Лоренц, ни Эйнштейн это не установили, поэтому им не удалось показать инвариантность уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лоренца ни в пространстве без зарядов, ни в пространстве с зарядами.

Учитывая связь между компонентами тензора $F^{\mu\nu}$ и компонентами электрического и магнитного полей можно получить закон преобразования для компонент электрического поля

$$\begin{aligned} &E'_x = E_x,\ E'_y = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c}H_z\right), \\ &E'_z = \gamma\left(E_z + \frac{v}{c}H_y\right), \end{aligned} \tag{8.29}$$

и для компонент магнитного поля

$$\begin{aligned} &H'_x = H_x,\ H'_y = \gamma\left(H_y + \frac{v}{c}E_z\right), \\ &H'_z = \gamma\left(H_z - \frac{v}{c}E_y\right). \end{aligned} \tag{8.30}$$

Эти формулы впервые были открыты Лоренцем, однако ни он, ни позднее Эйнштейн не установили их группового характера. Это впервые сделал А. Пуанкаре, открыв законы преобразования для скалярного и векторного потенциалов [3].

Поскольку ϕ и $\vec{A}$ преобразуются так же, как $(ct, \vec{x})$, А. Пуанкаре с помощью формул (8.4) и (8.6) определил для любой инерциальной системы законы преобразования величин $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Из формул преобразования для электрического и магнитного полей следует, что если, например, в системе отсчета K' магнитное поле равно нулю, то в другой системе

отсчета оно уже отлично от нуля и равно

$$H_y = -\frac{v}{c}E_z,\ H_z = \frac{v}{c}E_y, \text{ или } \vec{H} = \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{E}\right]. \qquad (8.31)$$

Из компонент поля можно построить два инварианта, относительно преобразований Лоренца.

$$E^2 - H^2, \quad (\vec{E}\vec{H}). \qquad (8.32)$$

Эти инварианты электромагнитного поля впервые открыл А. Пуанкаре [3].

Инварианты (8.32) могут быть выражены через антисимметричный тензор электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$

$$E^2 - H^2 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\ \vec{E}\vec{H} = \frac{1}{4}\overset{*}{F}_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}, \qquad (8.33)$$

здесь

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}F_{\sigma\lambda}, \qquad (8.34)$$

$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}$ – тензор Леви-Чивита, $\varepsilon^{0123} = 1$, от перестановки любых двух индексов тензор Леви-Чивита меняет знак.

Согласно второму инварианту (8.33) поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, взаимноперпендикулярные в одной системе отсчета, остаются таковыми в любой другой системе отсчета. Если в системе K поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны, но не равны, то всегда можно найти такую систему отсчета, в которой поле будет чисто электрическим или чисто магнитным в зависимости от знака первого инварианта из (8.33).

Для выполнения принципа относительности для всех электромагнитных явлений, кроме требования неизменности уравнения Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лоренца, необходимо, чтобы при этих преобразованиях оставались также неизменными уравнения движения заряженных частиц под действием силы Лоренца.

Все это было осуществлено только в работах [2, 3] А. Пуанкаре. Неизменность физических уравнений во всех инерциальных системах и означает тождественность физических явлений в этих системах при одинаковых условиях. В этом и заключается принцип относительности. Именно так понимался принцип относительности и в классической механике. Поэтому приходиться удивляться тому, что написал академик В.Л. Гинзбург в 1975 г.:

> *"Добавлю, что, перечитав сейчас (через 70 лет после их опубликования!) работы Лоренца и Пуанкаре, я лишь с трудом и зная заранее результат (а это, как известно, чрезвычайно облегчает понимание) смог понять, почему доказанная в этих работах инвариантность уравнений электродинамики относительно преобразований Лоренца могла тогда рассматриваться в качестве свидетельства справедливости принципа относительности".*

Хотя А. Эйнштейн в 1948 г. писал:

> *"С помощью преобразования Лоренца специальный принцип относительности может быть сформулирован следующим образом: законы природы инвариантны относительно преобразования Лоренца (т.е. закон природы не должен измениться, если отнести его к новой инерциальной системе при помощи преобразования Лоренца для x, y, z, t)".*

Сравните теперь с тем, что писал А. Пуанкаре в 1905 г.:

> *"...Если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе без того, чтобы имели место какие-либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменятся*

в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть **преобразованиями Лоренца**; *две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют, таким образом, точное изображение одна другой".*

Мы видим, что и классические работы также требуют внимательного чтения, не говоря уже о размышлении.

Установим теперь закон преобразования силы Лоренца от одной инерциальной системы к другой. Уравнения движения будут установлены в девятом параграфе. Выражение для силы Лоренца, отнесенной к единице объема, в системе отсчета K имеет вид

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\frac{1}{c}\left[\vec{u}, \vec{H}\right] . \tag{8.35}$$

Тогда в системе отсчета K' мы должны иметь аналогичное выражение

$$\vec{f}' = \rho'\vec{E}' + \rho'\frac{1}{c}\left[\vec{u}', \vec{H}'\right] . \tag{8.36}$$

Заменяя все величины их значениями (8.15), (8.17), (8.29), (8.30) и (8.35), получим

$$f'_x = \gamma\left(f_x - \frac{v}{c}f\right), \quad f' = \gamma\left(f - \frac{v}{c}f_x\right), \tag{8.37}$$

$$f'_y = f_y, \quad f'_z = f_z, \tag{8.38}$$

здесь через f обозначено выражение

$$f = \frac{1}{c}\left(\vec{u}\vec{f}\right) . \tag{8.39}$$

Эти формулы впервые были найдены Пуанкаре.

Мы видим, что скаляр f и вектор $\vec{f}$ преобразуются так же, как компоненты $(x^0, \vec{x})$. Установим теперь закон преобразования силы, отнесенной к единице заряда

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{u}, \vec{H}\right], \quad \vec{F} = \frac{\vec{f}}{\rho}. \tag{8.40}$$

Используя (8.37), (8.38) и (8.39), найдем

$$F'_x = \gamma\frac{\rho}{\rho'}\left(F_x - \frac{v}{c}F\right), \; F' = \gamma\frac{\rho}{\rho'}\left(F - \frac{v}{c}F_x\right), \tag{8.41}$$

$$F'_y = \frac{\rho}{\rho'}F_y, \quad F'_z = \frac{\rho}{\rho'}F_z. \tag{8.42}$$

На основании (8.15) имеем

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}. \tag{8.43}$$

Для упрощения (8.43) выведем тождество. Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета K два тела имеют соответственно четырехскорости U_1^ν и U_2^ν (см. 9.1)

$$U_1^\nu = \left(\gamma_1, \frac{\vec{v}_1}{c}\gamma_1\right), \; U_2^\nu = \left(\gamma_2, \frac{\vec{v}_2}{c}\gamma_2\right), \tag{8.44}$$

тогда в системе K', в которой первое тело покоится, их четырехскорости будут равны

$$U_1^\nu = (1, 0), \quad U_1^\nu = \left(\gamma', \frac{\vec{v}'}{c}\gamma'\right). \tag{8.45}$$

Поскольку произведение четырехвекторов является инвариантом, получим

$$\gamma' = \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right). \tag{8.46}$$

Полагая в этом выражении $\vec{v}_2 = \vec{v}$, а $\vec{v}_1 = u$ (скорость вдоль оси x), находим

$$\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{(v')^2}{c^2}}. \tag{8.47}$$

На основании (8.43) и (8.47) имеем

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{(v')^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{8.48}$$

$\vec{v}'$ – скорость заряда в системе K'. Подставляя (8.48) в (8.41) и (8.42) получим четырехсилу R^ν, определяемую выражением

$$R^0 = \frac{F}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \ \vec{R} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{8.49}$$

которая преобразуется при преобразованиях Лоренца так же, как $(ct, \vec{x})$

$$\begin{gathered} R'_x = \gamma\left(R_x - \frac{v}{c}R\right), \ R' = \gamma\left(R - \frac{v}{c}R_x\right), \\ R'_y = R_y, \quad R'_z = R_z\,. \end{gathered} \tag{8.50}$$

Такой четырехвектор силы впервые ввел Пуанкаре [2, 3].

Силу Лоренца (8.35) с помощью формул (8.28) и (8.9) можно записать в форме

$$f^\nu = \frac{1}{c}F^{\nu\mu}S_\mu, \tag{8.51}$$

аналогично, для четырехвектора силы R^ν, имеем

$$R^\nu = \frac{1}{c} F^{\nu\mu} U_\mu. \tag{8.52}$$

Таким образом, вся система уравнений Максвелла-Лоренца записывается через векторы и тензоры четырехмерного пространства-времени. **Группа Лоренца, которая открыта на основе изучения электромагнитных явлений, была распространена А. Пуанкаре** [2, 3] **на все физические явления.**

В статье [3] он писал:

> *...Все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованиям Лоренца (и, следовательно, благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы".*

Позднее в книге "Последние мысли", в главе II "Пространство и время", А. Пуанкаре писал:

> *"Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объясню́сь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия. Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих преобразований или, выражаясь математическим*

языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т.е. группы движений твердых тел.

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной, и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и в первом. Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет.

Твердое тело — это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими прежним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка".

Если вдуматься в эти слова, то можно сразу почувствовать глубину проникновения А. Пуанкаре в суть физической относительности и связи геометрии и группы. Именно таким путем, исходя из неизменности уравне-

ний Максвелла-Лоренца, при преобразованиях из группы Лоренца, что обеспечивало выполнение принципа физической относительности, А. Пуанкаре открыл геометрию пространства-времени, определяемую инвариантом (3.22).

Такое пространство-время обладает свойствами однородности и изотропности. Оно отражает наличие в природе фундаментальных законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения для замкнутой системы. Таким образом,"новое условное соглашение" не является произвольным, оно опирается на фундаментальные законы Природы.

Выше мы убедились в том, что симметричная система уравнений (8.1), (8.2) электродинамики, инвариантная относительно координатных трехмерных ортогональных преобразований, в то же время оказалась инвариантной и относительно преобразований Лоренца в четырехмерном пространстве-времени. Такое стало возможным благодаря тому, что ряд векторных величин евклидова пространства вместе с некоторыми скалярными величинами того же пространства стали компонентами четырехмерных величин. В то же время некоторые векторные величины, например, как $\vec{E}, \vec{H}$, являются производными от компонент четырехмерных величин, что свидетельствует о том, что они являются компонентами тензора второго ранга в пространстве Минковского. Последнее привело к тому, что такие понятия, как электрическая и магнитная напряженность не являются абсолютными.

§ 9. Релятивистская механика Пуанкаре

В параграфе третьем мы убедились в том, что требование принципа относительности для электродинамики приводит к тому, что переход от одной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно первой вдоль оси x со скоростью v, осуществляется не преобразованиями Галилея (2.5), а преобразованиями Лоренца. Отсюда с необходимостью следует, что уравнения механики необходимо видоизменить так, чтобы они были форминвариантными относительно преобразований Лоренца. Поскольку пространство и время четырехмерно, физические величины, описываемые векторами, будут иметь четыре компоненты. Единственный четырехвектор, для точечного тела, имеет вид

$$U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \tag{9.1}$$

Здесь интервал $d\sigma$ в галилеевых координатах равен

$$(d\sigma)^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{9.2}$$

Подставляя выражение для $d\sigma$ в (9.1), получим

$$U^0 = \gamma, \quad U^i = \gamma \frac{v^i}{c}, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{9.3}$$

Этот четырехвектор впервые был введен Пуанкаре [3].

Введем теперь четырехвектор импульса

$$P^\nu = mcU^\nu. \tag{9.4}$$

Релятивистские уравнения механики интуитивно можно записать в форме

$$mc^2 \frac{dU^\nu}{d\sigma} = F^\nu, \tag{9.5}$$

здесь F^ν – четырехвектор силы, который нам еще предстоит выразить через обычную силу Ньютона $\vec{f}$. Легко убедиться, что четырехсила ортогональна четырехскорости, т.е.

$$F^\nu U_\nu = 0.$$

На основании (9.2) и (9.3) уравнение (9.5) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{9.6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F^0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9.7}$$

Поскольку из принципа соответствия при малых скоростях уравнение (9.6) должно совпадать с уравнением Ньютона, то естественно определить $\vec{F}$ следующим образом

$$\vec{F} = \frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9.8}$$

здесь $\vec{f}$ – обычная трехмерная сила.

Установим теперь, что уравнение (9.7) является следствием уравнения (9.6). Умножая уравнение (9.6) на скорость $\vec{v}$ и дифференцируя по времени, получим

$$\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\cdot\left(\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \vec{f}\,\vec{v}. \tag{9.9}$$

С другой стороны, после дифференцирования по времени,

уравнение (9.7) принимает вид

$$\frac{m}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\cdot\left(\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=cF^0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9.10}$$

Сравнивая (9.9) и (9.10), находим

$$F^0=\frac{\left(\dfrac{\vec{v}}{c}\vec{f}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.11}$$

На основании соотношений (9.8) и (9.11) уравнения релятивистской механики принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=\vec{f}, \tag{9.12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=\vec{f}\vec{v}. \tag{9.13}$$

Эти уравнения впервые получил А. Пуанкаре [3]. Уравнение (9.13) связывает изменение энергии частицы с совершенной работой в единицу времени.

Получив эти уравнения, Пуанкаре применил их для объяснения аномалии в движении Меркурия. В этой связи он писал:

"Таким образом, новая механика *стоит еще пока на зыбкой почве. Ей следует, поэтому,*

пожелать новых подтверждений. Посмотрим же, что дают нам в этом отношении астрономические наблюдения. Скорости планет без сомнения, относительно очень малы, но зато астрономические наблюдения обладают большой степенью точности и простираются на длинные промежутки времени. Небольшие действия могут, стало быть, склониться в такой степени, что приобретут значение величины, допускающей оценку. Единственное действие, относительно которого и можно было ожидать, что оно будет нам заметным, мы видим на самом деле; я имею в виду возмущения самой быстрой из всех планет – Меркурия. Она обнаруживает в действительности такие аномалии в своем движении, которые и по сию пору не могли быть объяснены небесной механикой. Движение ее перигелия гораздо значительнее вычисленных на основании классической теории. Немало трудов было затрачено с целью объяснить эти отклонения ... Новая механика несколько исправляет ошибку в теории движения Меркурия, доведя ее до 32″, но не дает полного соответствия между наблюдением и вычислением. Этот результат, таким образом, не говорит в пользу новой механики, *но отсюда, во всяком случае, еще не следует, что он говорит и против нее. Новое учение не находится в прямом противоречии с астрономическими наблюдениями".*

Отсюда видно, сколь осторожен А. Пуанкаре в оценке полученных результатов. Оно и понятно, поскольку шло становление теории, а поэтому и требовалась внимательная и многократная экспериментальная проверка ее выводов. Оказалось, что эти уравнения справедливы только при пренебрежении гравитацией. Позднее А. Эйнштейн

объяснил аномалию в движении Меркурия, опираясь на общую теорию относительности, в которой гравитация есть следствие наличия кривизны пространства-времени. Но для объяснения аномалии движения Меркурия Эйнштейну фактически пришлось отказаться от специальной теории относительности и, как следствие, от фундаментальных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

Из уравнений (9.12) следует, что уравнения классической механики справедливы только тогда, когда скорость v мала по сравнению со скоростью света. Именно из-за приближенного характера уравнений классической механики и возникли преобразования Галилея, которые оставляли неизменными уравнения механики во всех инерциальных системах отсчета.

В трехмерной форме импульс и энергия имеют вид

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad E = p^0 c = \gamma m c^2. \tag{9.14}$$

Из (9.12) и (9.13) следует, что для замкнутой системы энергия и импульс сохраняются. **Как видим из формулы (9.14), энергия E не является инвариантом. Она была и остается инвариантом только относительно трехмерных преобразований координат, являясь в то же время нулевой компонентой четырехмерного вектора импульса в пространстве Минковского.** Тот, кто почувствовал четырехмерность пространства-времени, сразу мог бы увидеть, что энергия и импульс объединены в четырехимпульс. Более того, он понял бы, что они подчиняются для замкнутой системы закону сохранения энергии и импульса.

Ковариантный вектор четырехскорости равен $U_\nu = U^\sigma \gamma_{\sigma\nu}$, но поскольку в галилеевых координатах $\gamma_{\sigma\nu} = (1, -1, -1, -1)$, получим

$$U_\nu = (U^0, -U^i). \tag{9.15}$$

На основании (9.1) и (9.15) можно составить инвариант

$$U_\nu U^\nu = (U^0)^2 - (\vec{U})^2 = 1, \tag{9.16}$$

который в силу определения четырехвектора U^ν будет равен единице. Это легко проверить, если подставить значения, определяемые формулами (9.3), в (9.16). Таким образом, имеем

$$p_\nu p^\nu = (mc)^2, \text{ или } E = c\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2c^2}. \tag{9.17}$$

В формуле (9.17) мы удержали для энергии только положительный знак, однако отрицательный знак энергии также имеет смысл. Он оказывается существенным при объединении теории относительности с квантовыми представлениями. Это привело Дирака к предсказанию частицы (позитрона) с массой электрона и положительным зарядом, равным по величине заряду электрона. Отсюда возникли представления о физическом вакууме и античастицах.

На основании (9.14) уравнение (9.12) принимает форму

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c^2}\vec{v}\right) = \vec{f}, \text{ или } \frac{E}{c^2}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{dE}{dt}. \tag{9.18}$$

Из (9.18) следует, что ускорение тела, определяемое выражением $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$, не совпадает с направлением действующей силы $\vec{f}$. Из уравнений релятивистской механики Пуанкаре на основании (9.17) для тела, находящегося в состоянии покоя, имеем

$$E_0 = mc^2,$$

здесь E_0 – энергия, m – масса покоящегося тела.

Из (9.17) очевидно, что масса m является инвариантом. Инертная масса M движущегося тела определяется его энергией и равна

$$M = \frac{E}{c^2}.$$

А. Эйнштейн в статье "**Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?**", опубликованной в 1905 г., интуитивно пришел к тому же выводу. Он писал:

> *"Масса тела есть мера содержащейся в нем энергии; если энергия изменяется на величину L, то масса меняется соответственно на величину $L/(9 \cdot 10^{20})$, причем здесь энергия измеряется в эргах, а масса – в граммах".*

Позднее Планк в 1907 г. и Ланжевен в 1913 г. раскрывают на этой основе роль внутренней энергии взаимодействия тела (энергии связи), которая и приводит к дефекту массы, создающему условия для возможного выделения энергии. Так удалось получить энергию деления и синтеза атомных ядер.

О преобразованиях силы

Согласно (9.8) и (9.11) четырехсила равна

$$F^{\nu} = \left(\gamma \frac{\vec{v}\vec{f}}{c}, \gamma \vec{f}\right), \tag{9.19}$$

$$F_{\nu} = \left(\gamma \frac{\vec{v}\vec{f}}{c}, -\gamma \vec{f}\right). \tag{9.20}$$

Как мы отмечали ранее, сила как четырехвектор преобразуется так же, как величины ct и x.

$$f'_x = \frac{\gamma}{\gamma'}\gamma_1 \left(f_x - \beta \frac{\vec{v}}{c}\vec{f}\right), (\vec{v}' f') = \frac{\gamma}{\gamma'}\gamma_1(\vec{v}\vec{f} - c\beta f_x), \tag{9.21}$$

$$f'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} f_y, \; f'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} f_z. \tag{9.22}$$

Здесь

$$\beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{9.23}$$

u – скорость вдоль оси x.

Пусть в нештрихованной инерциальной системе координат имеются две частицы с четырехскоростями

$$U_1^\nu = \left(\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c}\right), \; U_2^\nu = \left(\gamma_1, \gamma_1\frac{\vec{u}}{c}\right). \tag{9.24}$$

Тогда в инерциальной системе отсчета, где вторая частица покоится, мы будем иметь следующие выражения для соответствующих четырехвекторов

$$U_1'^\nu = \left(\gamma', \gamma'\frac{\vec{v}'}{c}\right), \; U_2'^\nu = (1, 0).$$

Отсюда, на основании инвариантности выражения $U_{1\sigma}U_2^\sigma$, имеем следующее равенство

$$\gamma' = \gamma\gamma_1\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right). \tag{9.25}$$

Таким образом, получим

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma_1\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}\right)}. \tag{9.26}$$

Для нашего случая, когда скорость $\vec{u}$ направлена вдоль оси x, имеем

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma_1\left(1 - \frac{v_x u}{c^2}\right)}. \tag{9.27}$$

Подставляя (9.27) в (9.21) и (9.22), получим

$$f'_x = \frac{f_x - \beta \dfrac{\vec{v}}{c} \vec{f}}{1 - \beta \dfrac{v_x}{c}}, \; f'_y = \frac{f_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta \dfrac{v_x}{c}}, \; f'_z = \frac{f_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta \dfrac{v_x}{c}}, \tag{9.28}$$

$$\vec{f}'\vec{v}' = \frac{(\vec{f}\,\vec{v}) - \beta c f_x}{1 - \beta \dfrac{v_x}{c}}. \tag{9.29}$$

Отсюда очевидно, что если сила $\vec{f}$ в некоторой инерциальной галилеевой системе координат равна нулю, то она равна нулю и в любой другой инерциальной системе координат. Это означает, что если принцип инерции имеет место в одной инерциальной системе, то он выполняется и в любой другой инерциальной системе. Более того, вывод о силе справедлив не только для инерциальной системы координат, но и для любой ускоренной (неинерциальной) системы координат. **Сила не может возникнуть с помощью координатных преобразований**. Если движение по инерции в инерциальной системе координат происходит по прямой линии, то в неинерциальной системе свободное движение будет идти по геодезической линии, которая в этих координатах уже не будет прямой линией.

В классической механике сила $\vec{f}$ одинакова во всех инерциальных системах отсчета, в релятивистской механике это уже не так, компоненты силы в этом случае изменяются согласно (9.28).

Остановимся на общем замечании относительно инерциальных систем отсчета. Равноправность инерциальных систем отсчета состоит в том, что если мы в каждой системе отсчета будем создавать одинаковые условия для эволюции материи, то естественно должны получить в каждой системе одно и то же описание явления, иначе говоря, мы не сможем выделить какую-либо из инерциальных систем

отсчета. Но если мы создали условия для движения материи в какой-нибудь одной инерциальной системе отсчета, то при описании того, что происходит в этой системе из любой другой инерциальной системы, мы получим уже другое описание, отличное от описания в исходной системе отсчета. Это не нарушает равноправности инерциальных систем, поскольку в этом случае исходная система выделена самой постановкой задач. **Именно такая ситуация возникает, когда мы рассматриваем Вселенную. В этом случае, во Вселенной существует одна физически выделенная инерциальная система отсчета, которая определяется по распределению материи. В этой системе отсчета время будет выделено по сравнению с другими инерциальными системами. Это время можно было бы назвать "истинным временем" Вселенной. В качестве примера выделенной системы отсчета можно было бы выбрать систему отсчета, в которой реликтовое электромагнитное излучение однородно и изотропно** (см. об этом [5]).

Из предыдущего изложения, особенно из параграфов 3, 5, 7, 8 и 9 очевидно, что Анри Пуанкаре открыл все основное, что составляет содержание специальной теории относительности. В этом может убедится каждый, окончивший университет по специальности теоретическая физика и внимательно прочитавший, по крайней мере, две его статьи "О динамике электрона". Имеется и другая точка зрения: *"Пуанкаре не сделал решающего шага"* (де Бройль), *"Пуанкаре был, по-видимому, довольно близок к созданию СТО, но до конца не дошел. Почему так произошло, можно только гадать"* (В.Л. Гинзбург). Но эти высказывания, характеризуют не уровень выдающихся достижений А. Пуанкаре по теории относительности, а их собственный уровень понимания проблемы. Удивляет, что авторы свое непонимание или трудность понимания, испытанную ими, превращают (без тени сомнения) в критерий оценки выдающегося исследования Пуанкаре. В науке не

нужно гадать, необходимо только внимательно прочитать работы Пуанкаре [2, 3] и подумать.

Профессор А. Пайс в книге "Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна", опубликованной в издательстве "Наука" в 1989 г., написал:

> *"...Ясно видно, что даже в 1909 г. Пуанкаре не знал,* что сокращение размеров стержней является следствием двух постулатов Эйнштейна. (выделено мной. – *А.Л.) Отсюда следует, что Пуанкаре не понял одного из фундаментальнейших положений СТО".*

Сразу отметим, подчеркнутое – неверно. Но об этом позднее.

Из всего того, что написал А. Пайс очевидно, что он сам **не понял** основ специальной теории относительности. Поясню. Пуанкаре показал неизменность уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лоренца, что соответствовало требованию принципа относительности, сформулированному Пуанкаре в 1904 г. для всех физических явлений природы. Как мы уже отмечали, А. Пуанкаре открыл фундаментальный инвариант (3.22)

$$J = c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2\,,$$

устанавливающий геометрию пространства-времени. Именно отсюда следует, что принцип постоянства скорости света есть частное следствие этого выражения, когда инвариант J равен нулю. Таким образом, из существования инварианта, который может принимать любые вещественные значения, следует принцип постоянства скорости света, но обратное неверно. Положение о постоянстве скорости света, которое А. Эйнштейн использовал как второй постулат, не дает возможности получить инвариант J, а следовательно, с его помощью нельзя установить и преобразования Лоренца для любых значений переменных T, X, Y, Z. Максимум, что можно получить – это преобразования Лоренца

только на световом конусе, когда $J = 0$. Профессору Пайсу необходимо было понять, что сокращение Лоренца связано с отрицательным J, т.е. пространственноподобным значением J, а не равным нулю. В свою очередь замедление времени связано с положительным J, т.е. времениподобным J, но отнюдь не нулевым. Таким образом, из предыдущего очевидно, **что сокращение размеров стержней не является следствием двух постулатов Эйнштейна**. Поэтому утверждение А. Пайса, *"что сокращение размеров стержней является следствием двух постулатов Эйнштейна"*, просто ошибочно. Вот к чему приводит поверхностное знание основ теории относительности.

Что касается сокращения Лоренца, то в статье [3] (§ 6 "Сокращение электронов") А. Пуанкаре подробно рассматривает этот вопрос, используя преобразования Лоренца. Все это отчетливо изложено в статье [3]. Именно объединение принципа относительности с электродинамикой Максвелла-Лоренца и позволили Пуанкаре в статьях [2] и [3] сформулировать основы специальной теории относительности. Что касается постулата о постоянстве скорости света, то он проявился как простой эвристический прием, а не как исходное положение теории. Он является следствием требования принципа относительности к электродинамическим явлениям, которые описываются уравнениями Максвелла-Лоренца в галилеевых координатах.

При оценке работ [2] и [3], а также ранних работ А. Пуанкаре по физике необходимо исходить только из их содержания, сравнивая с современными представлениями проблемы, а не руководствоваться высказываниями по этому поводу даже известных ученых, современников Пуанкаре, поскольку уровень многих из них был недостаточен, чтобы в полной мере осознать то, о чем писал Пуанкаре. В то время индивидуальность его личности особенно проявлялась в том, что для него физические проблемы и их адекватная математическая формулировка естественно объединялись и составляли единое целое. Именно по-

этому его творения точны и современны и через сто лет. А. Пуанкаре относился к редкому типу исследователей, для которого естествознание и математика были родной стихией. Для современной молодежи, подготовленной по теоретической физике, легко в этом убедиться, прочитав хотя бы его работы [2] и [3]. В случае с высказыванием профессора А. Пайса мы опять сталкиваемся с тем, что и ранее – явным стремлением свое непонимание перенести на автора.

Вот например, что писал Ричард Фейнман:

> *"Именно Пуанкаре предложил исследовать, что можно делать с уравнениями, не меняя при этом их вида. Именно ему принадлежит идея обратить внимание на свойство симметрии физических законов".*

В. Паули в 1955 г., в связи с 50-летием теории относительности писал:

> *"И Эйнштейн, и Пуанкаре опирались на подготовительные работы Г.А. Лоренца, весьма близко подошедшего к окончательному результату, но не сумевшего сделать последний решающий шаг. В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, я усматриваю глубокий смысл гармонии математического метода и анализа, проводимого с помощью мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность данных физического опыта".*

Статьи [2, 3] Анри Пуанкаре исключительно современны как по содержанию, так и по форме и точности изложения. Поистине, они являются жемчужинами теоретической физики.

Удивительна судьба, если можно так выразиться, работ Анри Пуанкаре "**О динамике электрона**", опубликованных в 1905-1906 гг. Порой оценки их сильно искажались, но постоянно замалчивались, при этом они всячески использовались. Ссылки на эти статьи, если и имелись, то всегда не по существу. В 1913 г. в Германии был издан сборник работ Лоренца, Эйнштейна, Минковского по специальной теории относительности. Но фундаментальные работы А. Пуанкаре в сборник не были включены. Как это можно объяснить?

В 1911 г. французский физик Поль Ланжевен опубликовал две статьи по теории относительности: "**Эволюция понятия пространства и времени**"; "**Время, пространство и причинность в современной физике**". Но в этих статьях А. Пуанкаре даже не упоминается, хотя там речь идет о принципе относительности, группе Лоренца, о пространстве и времени, определяемом интервалом. Как такое могло быть?

В 1920 г. в статье П. Ланжевена "**Историческое развитие принципа относительности**" А. Пуанкаре также не упоминается. Как все это можно объяснить?

В 1935 г. под редакцией профессоров В.К. Фредерикса и Д.Д. Иваненко впервые был издан сборник "**Принцип относительности**", в котором содержались работы по теории относительности Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского. Однако, первой работы А. Пуанкаре "**О динамике электрона**" в нем не оказалось.

И только в 1973 г. в сборнике "**Принцип относительности**" (со вступительной статьей профессора, члена-корреспондента АН СССР Д.И. Блохинцева; составитель сборника профессор А.А. Тяпкин) наиболее полно были представлены работы А. Пуанкаре по теории относитель-

ности, что позволило многим убедиться в решающем вкладе Пуанкаре в создание специальной теории относительности. Несколько позднее, я и академик В.А. Матвеев решили переписать формулы, содержащиеся в статьях А. Пуанкаре "**О динамике электрона**" в современных обозначениях, чтобы облегчить их изучение.

В 1984 г. к 130-летию со дня рождения А. Пуанкаре его статьи "**О динамике электрона**" с комментариями были изданы издательством Института ядерных исследований, а позднее, в 1987 г., они были с дополнениями изданы издательством Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Анри Пуанкаре — редчайшая личность во всей истории науки. Величайший математик, механик и физик-теоретик; его основополагающие труды оставили ярчайший след во многих областях современной науки. Он обладал, к тому же, редким даром глубокого видения науки в целом. В начале прошлого века (1902–1912 гг.) изданы книги Пуанкаре "**Наука и гипотеза**"; "**Ценность науки**"; "**Наука и метод**"; "**Последние мысли**". Некоторые из них были почти сразу переведены на русский язык. Эти книги изумительны как по содержанию, так и по свободной, очень яркой и образной манере изложения. Они не устарели до сих пор, и каждому, кто изучает математику, физику, механику, философию, познакомиться с ними было бы крайне полезно. К большому сожалению, они по разным причинам долго не переиздавались. И только благодаря настойчивым усилиям академика Л.С. Понтрягина они были переизданы и стали доступны читателю.

§ 10. Пространство скоростей Лобачевского

На основании (9.26) имеем

$$1-\frac{v'^2}{c^2}=\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\dfrac{\vec{v}\,\vec{u}}{c^2}\right)^2}. \tag{10.1}$$

Для дальнейшего, удобнее ввести следующие обозначения

$$v'=v_a,\ v=v_b,\ u=v_c, \tag{10.2}$$

$$\operatorname{ch} a=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_a^2}{c^2}}},\ \operatorname{sh} a=\frac{v_a}{c\sqrt{1-\dfrac{v_a^2}{c^2}}},\ \operatorname{th} a=\frac{v_a}{c}. \tag{10.3}$$

Подставляя (10.2) и (10.3) в (10.1), получим

$$\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c-\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c\cdot\cos A, \tag{10.4}$$

A – угол между скоростями $\vec{v}_b$ и $\vec{v}_c$. Но это не что иное, как **теорема косинусов для треугольника в геометрии Лобачевского**. Она выражает длину стороны треугольника через длину двух сторон и угол между ними. Находя отсюда $\cos A$, затем $\sin A$ и т.д., легко установить **теорему синусов геометрии Лобачевского**

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a}=\frac{\sin B}{\operatorname{sh} b}=\frac{\sin C}{\operatorname{sh} c}. \tag{10.5}$$

Ниже, следуя Лобачевскому, получим для треугольника **теорему косинусов** в виде

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\operatorname{ch} a. \tag{10.6}$$

Запишем (10.4) в форме

$$\operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A = 1 - \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}. \tag{10.7}$$

На основании теоремы синусов (10.5) имеем

$$\frac{1}{\operatorname{ch} c} = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\operatorname{th} c}{\operatorname{sh} a}. \tag{10.8}$$

Подставляя это выражение в (10.7), находим

$$\operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A = 1 - \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\operatorname{th} c}{\operatorname{ch} b \operatorname{th} a}. \tag{10.9}$$

Отсюда находим $\operatorname{th} c$

$$\operatorname{th} c = \frac{\operatorname{th} a \sin C}{\cos A \sin C \operatorname{th} a \operatorname{th} b + \dfrac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}. \tag{10.10}$$

Далее, Лобачевский с помощью **теорем косинусов** (10.4) установил тождество

$$(1 - \operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A)(1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos C) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 b}. \tag{10.11}$$

Используя (10.10), находим

$$1 - \operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}{\cos A \sin C \operatorname{th} a \operatorname{th} b + \dfrac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}. \tag{10.12}$$

Подставляя это выражение в тождество (10.11), получим

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b} = \frac{\sin A - \sin A \cos C \operatorname{th} a \operatorname{th} b}{\cos A \sin C \operatorname{th} a \operatorname{th} b + \dfrac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}. \tag{10.13}$$

Учитывая

$$1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 b} = \operatorname{th}^2 b, \tag{10.14}$$

равенство (10.13) принимает вид

$$\frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} a} - \cos C = \operatorname{ctg} A \frac{\sin C}{\operatorname{ch} b}. \tag{10.15}$$

Аналогично получается и соотношение

$$\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} b} - \cos C = \operatorname{ctg} B \frac{\sin C}{\operatorname{ch} a}. \tag{10.16}$$

На основании **теоремы синусов** имеем

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}. \tag{10.17}$$

Подставляя это выражение в (10.15), получим

$$1 - \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} b} \cos C = \frac{\cos A \sin C}{\operatorname{ch} a \sin B}. \tag{10.18}$$

Используя выражения (10.16) в (10.18), находим

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} a. \tag{10.19}$$

Аналогично получаются равенства

$$\begin{aligned} \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \operatorname{ch} b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \operatorname{ch} c. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Таким образом, пространство скоростей в псевдоевклидовой геометрии является пространством Лобачевского.

Для прямоугольного треугольника $C = \frac{\pi}{2}$, согласно (10.4), имеем

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b. \tag{10.21}$$

На основании теоремы синусов (10.5) и косинусов (10.4) получим

$$\sin A = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}, \ \cos A = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}. \tag{10.22}$$

Наряду с очевидным равенством

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \tag{10.23}$$

можно, используя выражения (10.22) и (10.21), получить соотношение

$$\sin^2 A \operatorname{ch}^2 b + \cos^2 A \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} = 1. \tag{10.24}$$

Рассмотрим в качестве примера [12] явление **аберрации света**, т.е. изменение направления луча света при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Таким образом, в двух движущихся одна относительно другой системах отсчета направление на один и тот же источник C будут различными. Пусть θ и θ' это углы, под которыми виден свет от источника в точке C из двух инерциальных систем отсчета A и B, движущихся одна относительно другой со скоростью v. В пространстве скоростей Лобачевского мы построим треугольник ACD (см. рис. 1), у которого угол C равен нулю, поскольку свет имеет предельную скорость.

Соединим точки A и B линией и опустим на эту линию из точки C перпендикуляр. Он пересечет ее в точке D. Расстояние от точки A до точки D обозначим через x, а расстояние от точки D до B через y. Применяя для данного треугольника ACD **теорему косинусов** (10.20), получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin \alpha}, \ \operatorname{sh} x = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{10.25}$$

отсюда

$$\operatorname{th} x = \cos \alpha = \cos(\pi - \theta') = -\cos \theta', \tag{10.26}$$

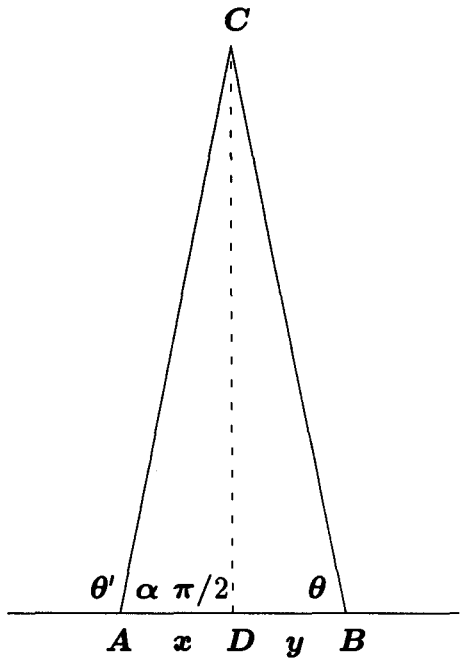

Рис. 1

аналогично

$$\operatorname{th} y = \cos\theta. \tag{10.27}$$

Согласно формуле (10.3), $\operatorname{th}(x+y)$ является относительной скоростью одной системы отсчета относительно другой, отнесенной к скорости света

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} = \frac{\cos\theta - \cos\theta'}{1 - \cos\theta \cdot \cos\theta'}. \tag{10.28}$$

Отсюда получаются известные формулы **аберрации**

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{v}{c}\cos\theta}, \tag{10.29}$$

$$\sin\theta' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{\sin\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}. \tag{10.30}$$

Используя формулы (10.29) и (10.30), получим

$$\cos(\theta-\theta') = \frac{\left(\cos\theta-\frac{v}{c}\right)\cos\theta+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sin^2\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}. \tag{10.31}$$

Определим квадрат расстояния между бесконечно близкими точками пространства Лобачевского. На основании (10.1) находим

$$\vec{v}'^2 = \frac{(\vec{u}-\vec{v})^2-\frac{1}{c^2}[\vec{u},\vec{v}]^2}{\left(1-\frac{\vec{u}\vec{v}}{c^2}\right)^2}, \tag{10.32}$$

v' – относительная скорость.

Полагая $\vec{u}=\vec{v}+d\vec{v}$, и подставляя в (10.32), находим

$$(d\ell_v)^2 = c^2\frac{(c^2-v^2)(d\vec{v})^2+(\vec{v}d\vec{v})^2}{(c^2-v^2)^2}. \tag{10.33}$$

Переходя к сферическим координатам в пространстве скоростей

$$v_x = v\sin\theta\cos\phi,\ v_y = v\sin\theta\sin\phi,\ v_2 = v\cos\theta, \tag{10.34}$$

получим

$$(d\ell_v)^2 = \\ = c^2\left[\frac{c^2(dv)^2}{(c^2-v^2)^2}+\frac{v^2}{(c^2-v^2)}(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right]. \tag{10.35}$$

Отсюда очевидно, что отношение длины окружности к радиусу равно

$$\frac{\ell}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{10.36}$$

и всегда больше 2π.

Введем новую переменную

$$r = \frac{cv}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \tag{10.37}$$

которая изменяется от нуля до бесконечности. В новых переменных, имеем

$$d\ell_v^2 = \frac{dr^2}{1 + \dfrac{r^2}{c^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{10.38}$$

если ввести переменную

$$r = c\,\mathrm{sh}\,Z, \tag{10.39}$$

то получим

$$d\ell_v^2 = c^2 dZ^2 + c^2\,\mathrm{sh}^2\,Z(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{10.40}$$

В такой форме обычно записывается пространственная метрика в космологии при рассмотрении открытой Вселенной.

В заключение параграфа остановимся описательно на некоторых фрагментах геометрии Лобачевского, следуя книге Н.В. Ефимова ("Высшая геометрия" М.: Наука, 1978) и лекциям Н.А. Черникова в Новосибирском государственном университете, опубликованным в виде препринта в 1965 г.

В геометрии Лобачевского через точку $\boldsymbol{A}$, не лежащую на прямой $\boldsymbol{a}$, проходит бесчисленное множество прямых,

не пересекающих прямую a. Но не все эти прямые считаются параллельными прямой a. Пусть a некоторая прямая на плоскости и A точка вне ее (см. рис. 2), b и c – граничные прямые не пересекающие прямую a. Любая прямая, проходящая через точку A в углу β также не будет пересекать прямую a, тогда как любая прямая, проходящая через точку A в углу, содержащем точку B обязательно будет пересекать прямую a. Прямую b называют правой граничной прямой, а c – левой. Оказывается, это свойство сохраняется для любой точки, лежащей на прямой b. Именно такая граничная прямая b и является параллельной a в правом направлении, а c – в левом. Таким образом, через

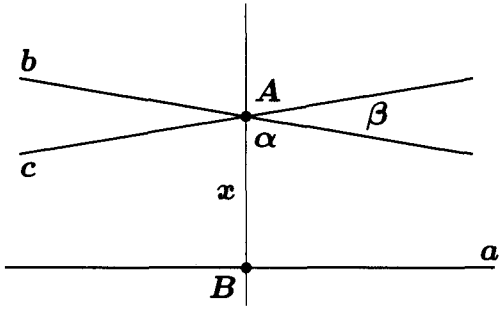

Рис. 2

одну любую точку можно провести две прямых, параллельных a, одну вправо, другую влево. В геометрии Лобачевского доказывается теорема взаимности: если одна из двух прямых параллельна другой в некотором направлении, то вторая параллельна первой в том же направлении. Аналогично также устанавливается, что две прямые, параллельные третьей в одном направлении, параллельны и между собой в том же направлении. Две прямые, перпендикулярные третьей, являются расходящимися. Две расходящиеся прямые всегда имеют один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они друг от друга неограниченно расходятся.

Параллельные прямые, неограниченно удаляясь друг от друга в одном направлении, асимптотически сближаются в другом. Угол $\boldsymbol{\alpha}$ называется углом параллельности при точке $\boldsymbol{A}$ по отношению к прямой $\boldsymbol{a}$.

На основании теоремы косинусов (10.6) находим

$$1 = \sin\alpha \operatorname{ch} x.$$

При получении этого выражения мы учли, что прямая $\boldsymbol{b}$ асимптотически приближается к прямой $\boldsymbol{a}$, а поэтому угол, образованный прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен нулю. Отсюда получим формулу Лобачевского

$$\alpha(x) = 2\operatorname{arctg} e^{-x},$$

здесь x – расстояние от точки $\boldsymbol{A}$ до прямой $\boldsymbol{a}$. Эта функция играет в геометрии Лобачевского фундаментальную роль. Именно на ее основе строится геометрия. В нашем изложении этого не видно, поскольку мы получили геометрию Лобачевского как геометрию пространства скоростей, исходя из псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Функция $\alpha(x)$ является монотонно убывающей. Площадь треугольника равна

$$S = d^2 \cdot (\pi - A - B - C), \tag{10.41}$$

здесь d – постоянная величина. Ниже мы дадим вывод этой формулы. Из этой формулы очевидно, что в геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников.

Следуя Лобачевскому, выразим функцию

$$\cos\triangle, \quad \text{где} \quad 2\triangle = A + B + C, \tag{10.42}$$

через стороны треугольника. Используя теорему косинусов (10.6), а также формулы

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}, \quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}, \tag{10.43}$$

находим

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-b)\cdot\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \tag{10.44}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sh} p\cdot\operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \tag{10.45}$$

здесь p — полупериметр треугольника

$$2p = a + b + c.$$

С помощью формул (10.44) и (10.45) получим

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-b)}{\operatorname{sh} c}\cos\frac{C}{2}, \tag{10.46}$$

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh} c}\cos\frac{C}{2}. \tag{10.47}$$

Отсюда имеем

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}. \tag{10.48}$$

Используя формулы

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sh} p}{\operatorname{sh} c}\sin\frac{C}{2}, \tag{10.49}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} c}\sin\frac{C}{2}, \tag{10.50}$$

находим

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}. \tag{10.51}$$

На основании (10.48) и (10.51) имеем

$$\cos\triangle = 2\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}. \tag{10.52}$$

Заменяя в (10.52) $\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ с помощью формул (10.44) и (10.45), находим

$$\cos\triangle = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}p\cdot\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}}{2\operatorname{ch}\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{c}{2}}. \tag{10.53}$$

На основании (10.41) имеем равенство

$$\sin\frac{S}{2d^2} = \cos\triangle. \tag{10.54}$$

Сравнивая (10.53) и (10.54), получим

$$\sin\frac{S}{2d^2} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}p\cdot\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}}{2\operatorname{ch}\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{c}{2}}. \tag{10.55}$$

В наших формулах стороны a, b, c являются безразмерными величинами по определению (10.3). Формула (10.55) является аналогом формулы Герона в евклидовой геометрии. На основании (10.52) выражение для площади треугольника можно записать и в таком виде

$$\sin\frac{S}{2d^2} = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\frac{c}{2}}\sin C. \tag{10.56}$$

Площадь S выражена в безразмерных единицах, так как стороны треугольника безразмерны. В нашем рассмотрении, на основании теоремы косинусов (10.4), постоянная d равна единице.

Из формулы (10.41) следует, что в геометрии Лобачевского площадь треугольника не может быть сколь угодно большой, она ограничена величиной $d^2\pi$. Таким образом, допущение существования треугольника сколь угодно большой площади эквивалентно аксиоме Евклида о параллельности. Площади многоугольников в геометрии Лобачевского могут быть сколь угодно большими.

Площадь сферического треугольника равна

$$S_\triangle = R^2(A + B + C - \pi), \tag{10.57}$$

здесь R – радиус сферы. Сравнивая это выражение с формулой (10.41) мы видим, что формула (10.41) может быть получена из формулы (10.57), если выбрать радиус сферы мнимый, равный величине $R = id$. Это обстоятельство было замечено еще Ламбертом.

Если ввести переменные

$$x = \frac{v_x}{c}, \quad y = \frac{v_y}{c}, \quad z = \frac{v_z}{c}, \tag{10.58}$$

то формула (10.33), для геометрии Лобачевского, на плоскости x, y принимает вид

$$\begin{aligned} &(d\ell_v)^2 = \\ &= c^2 \frac{(1-y^2)\cdot(dx)^2 + 2xydxdy + (1-x^2)\cdot(dy)^2}{(1-x^2-y^2)^2}, \end{aligned} \tag{10.59}$$

величины x, y в геометрии Лобачевского называются координатами Бельтрами.

Переходя к новым переменным ξ, η с помощью формул

$$x = \operatorname{th}\xi, \quad y = \frac{\operatorname{th}\eta}{\operatorname{ch}\xi}, \tag{10.60}$$

и вычисляя дифференциалы

$$dx = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi}, \quad dy = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta \operatorname{ch} \xi} d\eta - \frac{\operatorname{th} \eta}{\operatorname{ch}^2 \xi} \operatorname{sh} \xi d\xi,$$

после соответствующих вычислений, находим

$$(d\ell_v)^2 = c^2(ch^2 \eta d\xi^2 + d\eta^2). \tag{10.61}$$

Сеть координатных линий

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}, \tag{10.62}$$

ортогональна. Площадь треугольника в этих переменных равна

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \operatorname{ch} \eta d\xi d\eta. \tag{10.63}$$

Для вычисления площади треугольника по формуле (10.63) нам необходимо найти геодезическую (экстремальную) линию в геометрии Лобачевского в координатах ξ, η. Для этой цели воспользуемся принципом стационарного действия.

Длина равна

$$\begin{aligned} L &= \int ds = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta \cdot d\xi^2 + d\eta^2} = \\ &= \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta \cdot \xi'^2 + 1}. \end{aligned} \tag{10.64}$$

Отсюда экстремальная кривая находится согласно условию

$$\delta L = \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\xi' \cdot \operatorname{ch}^2 \eta \cdot \delta(\xi')}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta \cdot \xi'^2 + 1}} = 0, \quad \xi' = \frac{d\xi}{d\eta}. \tag{10.65}$$

Вариация δ коммутативна с дифференцированием, т.е.

$$\delta(\xi') = (\delta\xi)', \tag{10.66}$$

учитывая это и проводя в интеграле (10.65) интегрирование по частям, получим

$$\delta L = -\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \delta\xi \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\eta\cdot\xi'}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta\cdot\xi'^2+1}}\right) = 0. \tag{10.67}$$

Здесь учтено, что вариации $\delta\xi$ на конечных точках интегрирования равны нулю.

Из равенства (10.67), в силу произвольности вариации $\delta\xi$, следует

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\eta\cdot\xi'}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta\cdot\xi'^2+1}}\right) = 0. \tag{10.68}$$

Отсюда находим уравнение для геодезической линии

$$\frac{\operatorname{ch}^2\eta\cdot\xi'}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta\cdot\xi'^2+1}} = c, \tag{10.69}$$

геодезические линии, как кратчайшие в геометрии Лобачевского, являются в ней прямыми линиями.

Решая это уравнение, получим

$$\xi - \xi_0 = \pm c\int \frac{d\eta}{\operatorname{ch}\eta\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - c^2}}. \tag{10.70}$$

Проводя замену переменной интегрирования

$$u = \operatorname{th}\eta, \tag{10.71}$$

находим

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 &= \pm\int \frac{du}{\sqrt{(1-c^2)+c^2u^2}} = \\ &= \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \pm\operatorname{arcsh} v.\end{aligned} \tag{10.72}$$

Здесь

$$v = \frac{cu}{\sqrt{1-c^2}}. \tag{10.73}$$

Удобно обозначить постоянную c через угол δ следующим образом

$$c = \sin\delta. \tag{10.74}$$

Таким образом, уравнение геодезической линии имеет вид

$$\operatorname{sh}(\xi - \xi_0) = \pm \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{th}\eta. \tag{10.75}$$

Построим треугольник в плоскости ξ, η (рис. 3). Линии AB и AC геодезические, проходящие через точку $(\xi_0, 0)$. Углы A_1 и A_2 меньше угла параллельности α.

$$A = A_1 + A_2.$$

Из выражения (10.75) находим производную к геодезической линии AC в точке ξ_0

$$\xi' = -\operatorname{tg}\delta_2. \tag{10.76}$$

Отсюда и из ΔALP имеем

$$\delta_2 = \frac{\pi}{2} - A_2, \tag{10.77}$$

аналогично и для геодезической AB из ΔAKP находим

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - A_1. \tag{10.78}$$

Таким образом, постоянная **c** для каждой геодезической выражена через углы A_1, A_2. Геодезические линии AB и AC пересекают ось η в точках η_1^0, η_2^0.

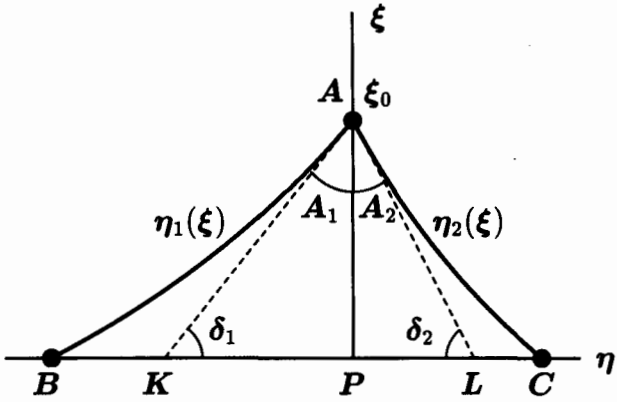

Рис. 3

Площадь треугольника ABC согласно (10.63) равна

$$S_\Delta = \int\limits_0^{\xi_0} d\xi \int\limits_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} \operatorname{ch}\eta \cdot d\eta = \int\limits_0^{\xi_0} \{\operatorname{sh}\eta_2(\xi) - \operatorname{sh}\eta_1(\xi)\} d\xi. \quad (10.79)$$

Используя выражение (10.75), находим

$$\operatorname{sh}\eta = \pm\frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{\cos^{-2}\delta - \operatorname{ch}^2(\xi - \xi_0)}}. \quad (10.80)$$

Отсюда получим

$$\operatorname{sh}\eta_2(\xi) = -\frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{\sin^{-2} A_2 - \operatorname{ch}^2(\xi - \xi_0)}}, \quad (10.81)$$

$$\operatorname{sh}\eta_1(\xi) = \frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{\sin^{-2} A_1 - \operatorname{ch}^2(\xi - \xi_0)}}. \quad (10.82)$$

Точки пересечения геодезических линий с прямой $\eta(\xi = 0)$ равны

$$\operatorname{sh}\eta_2^0 = \frac{\operatorname{sh}\xi_0}{\sqrt{\sin^{-2}A_2 - \operatorname{ch}^2\xi_0}}, \tag{10.83}$$

$$\operatorname{sh}\eta_1^0 = -\frac{\operatorname{sh}\xi_0}{\sqrt{\sin^{-2}A_1 - \operatorname{ch}^2\xi_0}}. \tag{10.84}$$

По теореме синусов (10.5) имеем

$$\sin B = \operatorname{sh}\xi_0 \cdot \frac{\sin A_1}{\operatorname{sh}|\eta_1^0|}. \tag{10.85}$$

Подставляя в это выражение значение η_1^0 (10.84), получим

$$\sin B = \sqrt{1 - \sin^2 A_1 \operatorname{ch}^2\xi_0}\,, \quad \cos B = \sin A_1 \operatorname{ch}\xi_0. \tag{10.86}$$

Аналогично

$$\cos C = \sin A_2 \operatorname{ch}\xi_0. \tag{10.87}$$

Вводя переменную

$$u = \operatorname{ch}(\xi - \xi_0) \tag{10.88}$$

в интеграле (10.79), получим

$$S_\Delta = \int\limits_0^{\xi_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sin^{-2}A_1 - u^2}} + \frac{1}{\sqrt{\sin^{-2}A_2 - u^2}} \right\} du. \tag{10.89}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} S_\Delta = {} & \arcsin(\sin A_1 \operatorname{ch}\xi_0) + \\ & + \arcsin(\sin A_2 \operatorname{ch}\xi_0) - (A_1 + A_2). \end{aligned} \tag{10.90}$$

Учитывая (10.86) и (10.87), получим

$$S_\Delta = \arcsin(\cos B) + \arcsin(\cos C) - A. \tag{10.91}$$

Окончательно имеем

$$S_\Delta = \pi - A - B - C. \tag{10.92}$$

Мы получили выражение для площади треугольника S_Δ в геометрии Лобачевского, которое ранее (10.41) использовали при нахождении формулы (10.55).

Из предыдущего мы видели, что геометрия Лобачевского, созданная им как "воображаемая геометрия", вошла составной частью в физику релятивистских движений как геометрия пространства скоростей.

Открытие Лобачевского оказало большое влияние на развитие различных разделов математики. Так например, французский математик Ж. Адамар в книге "**Неевклидова геометрия**" в теории автоморфных функций отмечал:

> *"Мы надеемся, что нам удалось показать, как открытие Лобачевского пронизывает насквозь все замечательное творение Пуанкаре, для которого оно, по мысли самого Пуанкаре, явилось фундаментом. Мы уверены, что открытие Лобачевского еще будет играть большую роль и на дальнейших этапах развития рассмотренной нами теории".*

Бельтрами поставил вопрос: *"Можно ли реализовать планиметрию Лобачевского в виде внутренней геометрии некоторой поверхности в евклидовом пространстве?"* Гильбертом показано, что в евклидовом пространстве нет поверхности, изометричной **всей** плоскости Лобачевского. Однако, часть плоскости геометрии Лобачевского может быть реализована в евклидовом пространстве.

§ 11. Принцип стационарного действия в электродинамике

Многие уравнения теоретической физики получают из условия экстремума функционала, который называют действием. Ранее (§ 2) принцип наименьшего действия был применен в механике и, таким образом, были получены уравнения Лагранжа. Нам необходимо и для электродинамики составить действие таким образом, чтобы его вариация по полям приводила к уравнениям Максвелла-Лоренца.

Действие строится с помощью скалярных функций поля и тока. Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \tag{11.1}$$

который в силу построения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{11.2}$$

которое эквивалентно уравнениям Максвелла-Лоренца (8.26). Для дальнейшего нам понадобятся лишь два простейших инварианта

$$A_\nu S^\nu, \; F_{\lambda\nu}F^{\lambda\nu}. \tag{11.3}$$

Здесь S^ν – четырехвектор тока (8.9).

Искомое действие будет иметь вид

$$S = \frac{1}{c}\int L d\Omega, \tag{11.4}$$

L – плотность функции Лагранжа, равная

$$L = -\frac{1}{c}A_\nu S^\nu - \frac{1}{16\pi}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}, \; d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{11.5}$$

При нахождении уравнений поля в функции действия мы будем варьировать лишь потенциалы поля, считая источники поля S^ν заданными.

Тогда

$$\delta S = -\frac{1}{c}\left[\frac{1}{c}S^{\nu}\delta A_{\nu} + \frac{1}{8\pi}F^{\lambda\sigma}\delta F_{\lambda\sigma}\right]d\Omega = 0. \qquad (11.6)$$

Поскольку вариации перестановочны с дифференцированием, получим

$$F^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\delta A_{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\delta A_{\lambda}\right) = -2F^{\sigma\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\delta A_{\sigma}. \qquad (11.7)$$

Подставляя (11.7) в (11.6), находим

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}S^{\nu}\delta A_{\nu} - \frac{1}{4\pi}F^{\sigma\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\delta A_{\sigma}\right] = 0. \qquad (11.8)$$

Интегрируя во втором члене по частям и учитывая, что вариации потенциалов в начальный и конечный моменты времени равны нулю, а поле на бесконечности исчезает, получим

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}S^{\sigma} + \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial F^{\sigma\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\right]\delta A_{\sigma}d\Omega = 0. \qquad (11.9)$$

Отсюда, в силу произвольности δA_{σ}, находим

$$\frac{\partial F^{\sigma\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = -\frac{4\pi}{c}S^{\sigma}. \qquad (11.10)$$

Итак, наш выбор плотности лагранжевой функции (11.5) оправдан, поскольку мы точно получили вторую пару уравнений Максвелла-Лоренца

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{S} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \qquad (11.11)$$

Необходимо иметь в виду, что выбор плотности функции Лагранжа в функции действия не является однозначным,

однако легко убедиться, что добавление к плотности функции Лагранжа дополнительного члена в виде четырехмерной дивергенции вектора не отражается на виде уравнений поля. Уравнения Максвелла-Лоренца (11.2), (11.10.) инвариантны при калибровочных преобразованиях потенциалов

$$A'_\sigma = A_\sigma + \frac{\partial f}{\partial x^\sigma}, \tag{11.12}$$

здесь f – произвольная функция.

С точки зрения классической электродинамики потенциал A^ν не имеет физического смысла, поскольку на заряд действует только сила Лоренца, а она выражается через напряженности поля $\vec{E}$, $\vec{H}$. Однако в квантовой механике это уже не так. Оказывается, что вектор-потенциал воздействует на электрон в определенной ситуации. Это эффект Ааронова-Бома. Он был наблюден в 1960 г. Опыт ставился следующим образом: брался длинный тонкий соленоид, магнитное поле вне соленоида равно нулю, тем не менее, на движение электронов вне соленоида оказывалось воздействие. Эффект объясняется тем, что длинный соленоид нарушил односвязность пространства-времени, а поэтому и возникло влияние потенциала A^ν, что и проявилось в калибровочной квантовой теории.

Построенная нами плотность лагранжиана (11.5) неинвариантна при преобразованиях (11.12). При этом преобразовании она на основании закона сохранения тока S^ν (8.10) изменяется только на дивергенцию

$$L' = L - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu}(f S^\nu), \tag{11.13}$$

что не сказывается на уравнениях поля.

Найдем теперь уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Для их получения необходимо составить действие, которое содержит часть, относящуюся к частицам, а также известную уже часть, содержащую

взаимодействие поля с частицами. Так как для частиц

$$\rho = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0),\ j^i = e\frac{dx^i}{dt}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{11.14}$$

то имеем

$$-\frac{1}{c^2}\int S^\nu A_\nu d\Omega = -\frac{e}{c}\int A_\nu dx^\nu. \tag{11.15}$$

Действие для частиц в электромагнитном поле будет равно

$$S = -mc\int d\sigma - \frac{e}{c}\int A_\nu dx^\nu. \tag{11.16}$$

Варьируя по координатам частицы, получим

$$\begin{aligned} &\delta S = \\ &= -\int\left(mcU_\nu d\delta x^\nu + \frac{e}{c}A_\nu d\delta x^\nu + \frac{e}{c}\delta A_\nu dx^\nu\right) = 0. \end{aligned} \tag{11.17}$$

Интегрируя в первых двух членах по частям и полагая вариации координат на концах равными нулю, получим

$$\delta S = \int\left(mcdU_\nu\delta x^\nu + \frac{e}{c}dA_\nu\delta x^\nu - \frac{e}{c}\delta A_\nu dx^\nu\right) = 0. \tag{11.18}$$

Учитывая очевидные соотношения

$$dA_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda}dx^\lambda,\ \delta A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda}\delta x^\lambda, \tag{11.19}$$

выражение (11.18) принимает вид

$$\delta S = \int\left[mc\frac{dU_\nu}{d\sigma} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda}\right)U^\lambda\right]d\sigma\delta x^\nu = 0, \tag{11.20}$$

отсюда, в силу произвола вариации δx^ν, следует

$$mc^2\frac{dU_\nu}{d\sigma} = eF_{\nu\lambda}U^\lambda, \tag{11.21}$$

или

$$mc^2 \frac{dU^\nu}{d\sigma} = eF^{\nu\lambda} U_\lambda. \tag{11.22}$$

В трехмерной записи (11.22) принимает вид

$$mc \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{c} (\vec{v}\, \vec{E}), \tag{11.23}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \right) = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]. \tag{11.24}$$

В уравнениях движения (11.22) во внешнем электромагнитном поле не учитывается реакция излучения. Поэтому эти уравнения справедливы только для движений заряженной частицы в слабых полях. Учет силы реакции был осуществлен Дираком в 1938 г. Он привел к уравнению

$$\begin{aligned} mc^2 \frac{dU^\nu}{d\sigma} &= eF^{\nu\lambda} U_\lambda + \\ &+ \frac{2}{3} e^2 \left[\frac{d^2 U^\nu}{d\sigma^2} + \left(\frac{dU_\mu}{d\sigma} \cdot \frac{dU^\mu}{d\sigma} \right) \right], \end{aligned} \tag{11.25}$$

которое называется уравнением Дирака-Лоренца.

§ 12. Движение пробного тела по инерции. Ковариантное дифференцирование

В произвольной системе координат интервал, как известно, имеет вид

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \ \det(\gamma_{\mu\nu}) = \gamma < 0. \tag{12.1}$$

Псевдоевклидова метрика $\gamma_{\mu\nu}$ определяется выражением (3.33). Именно для этой метрики тензор кривизны Римана равен нулю. Действие для точечного тела массы m имеет вид

$$S = -mc \int d\sigma. \tag{12.2}$$

В силу принципа стационарного действия, имеем

$$\delta S = -mc \int \delta(d\sigma) = 0. \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned} \delta(d\sigma^2) = 2d\sigma\delta(d\sigma) = \delta(\gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu) = \\ = \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\delta x^\lambda dx^\mu dx^\nu + 2\gamma_{\mu\nu}dx^\mu\delta(dx^\nu). \end{aligned} \tag{12.4}$$

Поскольку

$$\delta(dx^\nu) = d(\delta x^\nu), \tag{12.5}$$

из выражения (12.4) находим

$$\delta(d\sigma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} U^\mu dx^\nu \delta x^\lambda + \gamma_{\mu\nu} U^\mu d(\delta x^\nu), \tag{12.6}$$

здесь

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}. \tag{12.7}$$

Подставляя (12.6) в (12.3), получим

$$\delta S = -mc\int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}U^\mu U^\nu\delta x^\lambda + \gamma_{\mu\nu}U^\mu\frac{d(\delta x^\nu)}{d\sigma}\right]d\sigma = 0. \tag{12.8}$$

Так как

$$\gamma_{\mu\nu}U^\mu\frac{d(\delta x^\nu)}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}(\gamma_{\mu\nu}U^\mu\delta x^\nu) - \delta x^\nu\frac{d}{d\sigma}(\gamma_{\mu\nu}U^\mu), \tag{12.9}$$

то учитывая, что вариации на границе области равны нулю, находим

$$\delta S = -mc\int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}U^\mu U^\nu - \gamma_{\mu\lambda}\frac{dU^\mu}{d\sigma} - \right.$$
$$\left. -\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}U^\mu U^\alpha\right]d\sigma\delta x^\lambda = 0. \tag{12.10}$$

Представим последний член в (12.10) в форме

$$\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}U^\mu U^\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}\right)U^\mu U^\alpha. \tag{12.11}$$

Учитывая (12.11), выражение (12.10) приобретает вид

$$\int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)U^\mu U^\alpha + \right.$$
$$\left. +\gamma_{\mu\lambda}\frac{dU^\mu}{d\sigma}\right]d\sigma\delta x^\lambda = 0. \tag{12.12}$$

Поскольку множители δx^λ произвольны, находим

$$\gamma_{\mu\lambda}\frac{dU^\mu}{d\sigma} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)U^\mu U^\alpha = 0. \tag{12.13}$$

Умножая (12.13) на $\gamma^{\lambda\nu}$, получим

$$\frac{dU^\nu}{d\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} U^\mu U^\alpha = 0, \tag{12.14}$$

здесь $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}$ – символ Кристоффеля

$$\Gamma^\nu_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\lambda}(\partial_\alpha \gamma_{\mu\lambda} + \partial_\mu \gamma_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda \gamma_{\mu\alpha}). \tag{12.15}$$

Мы видим, что движение по инерции любого пробного тела, независимо от его массы, осуществляется по геодезической линии, определяемой из уравнения (12.14). Совершенно очевидно, что в произвольных координатах нельзя считать геодезические линии прямыми, это свидетельствует о нелинейной зависимости пространственных координат $x^i (i = 1, 2, 3)$ от временной переменной x^0. Движение по геодезической линии (12.14) в пространстве Минковского есть свободное движение. **Таким образом, силы инерции сами по себе не способны приводить к какой-либо деформации. Под их действием осуществляется свободное движение. Ситуация изменяется, когда имеются силы реакции, которые противодействуют силам инерции. В этом случае деформация неизбежна**. В невесомости в спутнике деформация отсутствует, поскольку в силу однородности гравитационного поля в каждом элементе объема тела происходит компенсация силы гравитации силами инерции. Силы гравитации и силы инерции – объемные силы.

Остановимся теперь на вопросе ковариантного дифференцирования. В декартовых координатах x^λ обычное дифференцирование, например, вектора A^ν, приводит к тензорной величине

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda} = B^\nu_\lambda \tag{12.16}$$

относительно линейных преобразований. В произвольных координатах y^λ это свойство не сохраняется, а поэтому величина $\dfrac{\partial A^\nu}{\partial y^\lambda}$ уже не будет тензором.

Поэтому необходимо ввести ковариантную производную, что позволит при дифференцировании тензора опять получить тензор. Это даст нам возможность легко сделать ковариантными любые физические уравнения. **Ковариантность – это не физическое, а математическое требование**.

Ранее (см. 6.13) мы видели, что из двух векторов A^ν, B_ν можно построить инвариант

$$A^\nu(x)B_\nu(x). \tag{12.17}$$

Мы рассмотрим инвариант частного вида

$$A_\lambda(x)U^\lambda(x), \tag{12.18}$$

где

$$U^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\sigma}. \tag{12.19}$$

Продифференцировав (12.18) по $d\sigma$, мы также получим инвариант (скаляр)

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\lambda U^\lambda) = \frac{dA_\lambda}{d\sigma}U^\lambda + A_\nu\frac{dU^\nu}{d\sigma}.$$

Подставляя в правую часть выражение (12.14), находим

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\lambda U^\lambda) = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha}U^\alpha U^\lambda - \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}U^\alpha U^\lambda A_\nu, \text{ т.е.}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\lambda U^\lambda) = \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}A_\nu\right)U^\alpha U^\lambda. \tag{12.20}$$

Поскольку (12.20) инвариант, U^λ – вектор, отсюда следует, что величина

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}A_\nu$$

является ковариантным тензором второго ранга $A_{\nu;\lambda}$

$$A_{\nu\lambda;\alpha} = \frac{DA_\lambda}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\lambda} A_\nu. \tag{12.21}$$

Здесь и далее точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование.

Таким образом мы определили ковариантную производную от ковариантного вектора A_ν. Определим теперь ковариантную производную от контравариантного вектора A^ν. Для этой цели запишем тот же инвариант в виде

$$\frac{d}{d\sigma}(A^\mu U^\nu \gamma_{\mu\nu}) = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} U^\nu U^\lambda \gamma_{\mu\nu} +$$

$$+ A^\mu \gamma_{\mu\nu} \frac{dU^\nu}{d\sigma} + A^\mu U^\nu U^\lambda \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}.$$

Подставляя в правую часть выражение (12.14), получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma}(A_\nu U^\nu) = \\ &= \left[\gamma_{\mu\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} - A^\mu \gamma_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} + A^\mu \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right] U^\nu U^\lambda. \end{aligned} \tag{12.22}$$

Учитывая определение (12.15), находим

$$A^\mu \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu} - A^\mu \gamma_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} A^\mu (\partial_\lambda \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \partial_\nu \gamma_{\mu\lambda}). \tag{12.23}$$

Подставляя это выражение в (12.22), а вместо U^ν используя выражение $U_\alpha \gamma^{\alpha\nu}$, получим

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\nu U^\nu) = \left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} A^\mu\right] U^\lambda U_\alpha. \tag{12.24}$$

Поскольку (12.24) инвариант (скаляр), а U^ν – вектор, из (12.24) следует, что первый множитель справа является тензором.

Отсюда следует, **что ковариантная производная от контравариантного тензора A^ν равна**

$$A^\alpha_{;\lambda} = \frac{DA^\alpha}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} A^\mu. \tag{12.25}$$

Используя формулы (12.21) и (12.25), можно получить ковариантные производные и от тензоров второго ранга.

$$A_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} A_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} A_{\mu\alpha}, \tag{12.26}$$

$$A^{\mu\nu}_{;\lambda} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} A^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\alpha} A^{\mu\alpha}, \tag{12.27}$$

$$A^\nu_{\rho;\sigma} = \frac{\partial A^\nu_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} A^\nu_\lambda + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} A^\lambda_\rho. \tag{12.28}$$

Мы видим, что правила установленные для (12.21) и (12.25), применяются независимо к каждому индексу тензора. Именно таким способом можно получить ковариантную производную от тензора любого ранга.

Используя выражение (12.26) легко показать, что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю

$$\gamma_{\mu\nu;\rho} \equiv 0. \tag{12.29}$$

Пользуясь аппаратом ковариантного дифференцирования, легко записать уравнения релятивистской механики и электродинамики в произвольных координатах пространства Минковского.

Так, заменяя обычную производную в (9.5) на ковариантную, найдем уравнение релятивистской механики в произвольных координатах

$$mc^2 \frac{DU^\nu}{d\sigma} = mc^2 \left(\frac{dU^\nu}{d\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} U^\mu U^\lambda \right) = F^\nu, \tag{12.30}$$

здесь

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\rho}(\partial_\mu\gamma_{\lambda\rho} + \partial_\lambda\gamma_{\mu\rho} - \partial_\rho\gamma_{\mu\lambda}). \tag{12.31}$$

Аналогично могут быть записаны и уравнения Максвелла-Лоренца в произвольных координатах. Для этой цели, в уравнениях (8.24) и (8.27), необходимо вместо обычных производных поставить ковариантные

$$D_\sigma F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\sigma} + D_\nu F_{\sigma\mu} = 0, \tag{12.32}$$

$$D_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} S^\mu. \tag{12.33}$$

Легко убедиться, что имеют место равенства

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{12.34}$$

$$D_\sigma F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\sigma} + D_\nu F_{\sigma\mu} = \partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu}. \tag{12.35}$$

На основании (12.31) находим

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\rho}\partial_\mu\gamma_{\nu\rho}. \tag{12.36}$$

Но поскольку имеют место равенства

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x^\mu} = \gamma^{\nu\rho}\partial_\mu\gamma_{\rho\nu}, \quad \frac{\partial\sqrt{-\gamma}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}, \tag{12.37}$$

[здесь $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}) < 0$], получим

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \ln\sqrt{-\gamma}\,. \tag{12.38}$$

Используя (12.27), находим

$$D_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}F^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}F^{\mu\alpha}. \tag{12.39}$$

Второй член в (12.39) равен нулю, в силу антисимметрии тензора $F^{\alpha\nu}$. На основании (12.38) выражение (12.39) можно записать в форме

$$D_\nu(\sqrt{-\gamma}\,F^{\mu\nu}) = \partial_\nu(\sqrt{-\gamma}\,F^{\mu\nu}). \tag{12.40}$$

Таким образом, уравнение (12.33) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\partial_\nu(\sqrt{-\gamma}\,F^{\mu\nu}) = -\frac{4\pi}{c}S^\mu. \tag{12.41}$$

Уравнения движения заряженных частиц могут быть получены путем замены обычных производных в (11.22) на ковариантные

$$mc^2\frac{DU^\nu}{d\sigma} = eF^{\nu\lambda}U_\lambda. \tag{12.42}$$

Таким образом, мы установили, что переход в пространстве Минковского от галилеевых координат инерциальной системы к произвольным координатам есть простая математическая операция, если введено ковариантное дифференцирование.

Свойство ковариантности уравнений не имеет никакого отношения к принципу относительности. Все это давно разъяснил В.А. Фок [13].

Поэтому никакого общего принципа относительности, как физического принципа, нет.

§ 13. Релятивистски равноускоренное движение. Парадокс часов

Релятивистски равноускоренное движение – это движение под действием постоянной по величине и направлению силы $\vec{f}$. Согласно (9.12) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{\vec{f}}{m}=\vec{a}. \tag{13.1}$$

Интегрируя уравнение (13.1) по времени, получим

$$\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\vec{a}t+\vec{v}_0. \tag{13.2}$$

Полагая постоянную $\vec{v}_0$ равным нулю, что соответствует нулевой начальной скорости, после возведения в квадрат находим

$$\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=1+\frac{a^2t^2}{c^2}. \tag{13.3}$$

Учитывая это выражение в (13.2), получим

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\vec{a}t}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}}. \tag{13.4}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\frac{\vec{a}c^2}{a^2}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right]. \tag{13.5}$$

Поскольку интервал ds равен

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{13.6}$$

то собственное время $d\tau$ для движущего пробного тела, равно

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{13.7}$$

Учитывая (13.3), из уравнения (13.7) находим полное собственное время τ

$$\tau = t_0 + \frac{c}{a}\ln\left[\frac{at}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}\right]. \tag{13.8}$$

Из этой формулы следует, что при росте времени t в инерциальной системе, время собственное для движущегося тела течет медленно, по логарифмическому закону. Выше мы рассмотрели движение тела с ускорением $\vec{a}$ относительно инерциальной системы отсчета в галилеевых координатах.

Рассмотрим теперь равноускоренную систему отсчета. Пусть инерциальная система и равноускоренная имеют одинаковую ориентацию осей координат, и одна из них движется относительно другой по оси x. Тогда если считать, что при $t = 0$ их начала координат совпадали, из выражения (13.5) получим закон движения начала координат релятивистски равноускоренной системы отсчета

$$x_0 = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right]. \tag{13.9}$$

Поэтому формулы преобразования координат при переходе от инерциальной системы отсчета (X, T) к релятивистски

равноускоренной системе (x, t) будут иметь вид

$$x = X - x_0 = X - \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \frac{a^2T^2}{c^2}} - 1\right]. \qquad (13.10)$$

Преобразование времени можно задать произвольно. Пусть оно остается одним и тем же в обеих системах отсчета

$$t = T. \qquad (13.11)$$

При преобразованиях (13.10) и (13.11) интервал $d\sigma$ принимает вид

$$d\sigma^2 = \frac{c^2dt^2}{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}} - \frac{2a\,t\,dtdx}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}}} - dx^2 - dY^2 - dZ^2. \qquad (13.12)$$

Перейдем к рассмотрению "парадокса часов".

Рассмотрим две системы отсчета. Если два наблюдателя, находящиеся в этих системах отсчета, сверили свои часы в момент $t = 0$, а затем разошлись и по прошествии некоторого промежутка времени вновь встретились в одной точке пространства, то что покажут их часы? Ответ на этот вопрос и является решением так называемого "парадокса часов". Однако два наблюдателя, находящиеся в различных инерциальных системах отсчета, сверив свои часы в одной и той же точке пространства, в дальнейшем уже не смогут встретиться в какой-либо другой точке пространства, так как для этого, по крайней мере, одному из них пришлось бы прервать свое инерциальное движение и перейти на какое-то время в неинерциальную систему отсчета. В научной литературе, да и в учебниках часто пишется, что ответ на этот вопрос не может быть дан в рамках специальной теории относительности.

Это конечно неправильно, он решается именно в рамках специальной теории относительности. Суть дела в том, что ускоренные системы в псевдоевклидовой геометрии, в противоположность точке зрения А. Эйнштейна, не имеют никакого отношения к гравитационному полю, а поэтому и не требуется использование общей теории относительности для объяснения "парадокса часов".

Проиллюстрируем это утверждение конкретным расчетом. Предположим, что у нас имеются двое идентичных (идеальных) часов, находящихся в одной и той же точке инерциальной системы отсчета. Их показания в начальный момент $T = 0$ будем считать совпадающими. Пусть одни из этих часов все время покоятся в первоначальной точке и тем самым являются инерциальными. Другие часы под действием приложенной силы начинают в момент $t = 0$ релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением a вдоль оси x и движутся так до момента времени $t = T_1$ по покоящимся часам. Далее, действие силы на вторые часы прекращается, и они в течение временного промежутка $T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$ движутся равномерно. После этого к ним прикладывается тормозящая сила, под действием которой они начинают релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением $-a$ и движутся так до момента времени $t = 2T_1 + T_2$, в результате чего их скорость относительно первых часов становится равной нулю. Затем весь цикл повторяется в обратном порядке, и вторые часы прибывают в ту же точку, в которой находятся первые часы.

Вычислим разность показаний этих часов в инерциальной системе отсчета, в которой покоятся первые часы. В силу симметрии задачи (четыре участка равноускоренного движения и два участка прямолинейного равномерного) показание покоящихся часов к моменту их встречи со вторыми будет равно

$$T = 4T_1 + 2T_2. \tag{13.13}$$

Для вторых часов

$$T' = 4T_1' + 2T_2'. \tag{13.14}$$

Здесь T_1' – величина промежутка времени от начала ускорения часов до его прекращения, измеренная движущимися часами. T_2' – величина промежутка собственного времени вторых часов, в течение которого они двигались равномерно между первым и вторым ускорениями.

В инерциальной системе отсчета интервал для движущегося тела равен

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \tag{13.15}$$

Поэтому

$$T_1' = \int\limits_0^{T_1} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt. \tag{13.16}$$

На основании (13.3) получим

$$T_1' = \int\limits_0^{T_1} \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}}. \tag{13.17}$$

Откуда находим

$$T_1' = \frac{c}{a} \ln\left(\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}\right). \tag{13.18}$$

Движение вторых часов в промежутке времени

$$T_1 \le t \le T_1 + T_2$$

на основании (13.3), происходит со скоростью

$$v = \frac{aT_1}{\sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}}, \tag{13.19}$$

а поэтому, согласно (13.15), получим

$$T_2' = \frac{T_2}{\sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}}. \tag{13.20}$$

Следовательно, к моменту встречи показание вторых часов будет равным

$$T' = \frac{4c}{a} \ln \left(\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}} \right) + \frac{2T_2}{\sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}}. \tag{13.21}$$

Вычитая (13.13) из (13.21), находим

$$\Delta T = T' - T = \frac{4c}{a} \ln \left(\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}} \right) - \\ -4T_1 + 2T_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}} - 1 \right]. \tag{13.22}$$

Можно убедиться, что при любых $a > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$ величина ΔT отрицательна. Это означает, что в момент встречи показание вторых часов будет меньше показания первых.

Рассмотрим теперь тот же процесс в системе отсчета, в которой вторые часы все время покоятся. Эта система отсчета не является инерциальной, так как вторые

часы часть времени движутся равноускоренно относительно инерциальной системы отсчета, связанной с первыми часами, а оставшуюся часть времени они движутся равномерно. На первом этапе движение вторых часов является равноускоренным, происходящим по закону

$$x_0 = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right].$$

Поэтому на данном отрезке пути интервал в неинерциальной системе отсчета, согласно (13.12), имеет вид

$$d\sigma^2 = \frac{c^2dt^2}{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}} - \frac{2a\,t\,dxdt}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} - dx^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (13.23)$$

В этой системе отсчета вторые часы покоятся в точке $x = 0$, а первые движутся по геодезической линии, определяемой из уравнения (12.14)

$$\frac{dU^\nu}{d\sigma} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta,\ \nu = 0,1,2,3. \quad (13.24)$$

Из этих четырех уравнений только три независимы, поскольку имеет место соотношение

$$\gamma_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1,\ U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \quad (13.25)$$

Из выражения (13.23) находим

$$\gamma_{00} = \frac{1}{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}},\quad \gamma_{01} = -\frac{at}{c\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}},\quad \gamma_{11} = -1. \quad (13.26)$$

Нам не нужно решать уравнение (13.24), мы воспользуемся только соотношением (13.25)

$$\gamma_{00}(U^0)^2 + 2\gamma_{01}U^0U^1 - (U^1)^2 = 1. \tag{13.27}$$

Принимая во внимание (13.26) из уравнения (13.27), найдем

$$U^1 = -U^0 \frac{at}{c\sqrt{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}}}. \tag{13.28}$$

Из выражения (13.28) следует

$$\frac{dx^1}{dt} = -\frac{at}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}}}. \tag{13.29}$$

Решая это уравнение с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, получим

$$x = \frac{c^2}{a}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}\right]. \tag{13.30}$$

Таким образом, мы имеем все необходимое для определения показаний обоих часов к моменту окончания первого этапа в их движении. Собственное время $d\tau$ первых часов на данном этапе движения, в силу (13.29), совпадает с временем dt инерциальной системы

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt, \tag{13.31}$$

поэтому к концу этого этапа пути показание первых часов τ_1 будет равно T_1.

$$\tau_1 = T_1. \tag{13.32}$$

Поскольку вторые часы покоятся относительно неинерциальной системы отсчета, то их собственное время можно определить из выражения

$$d\tau' = \sqrt{\gamma_{00}}\, dt. \tag{13.33}$$

Так как первый этап пути занимает промежуток $t \leq T_1$ инерциального времени, то в конце данного участка показание τ_1' вторых часов будет равно

$$\tau_1' = \int\limits_0^{T_1} \sqrt{\gamma_{00}}\, dt = \frac{c}{a} \ln \left[\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}} \right]. \tag{13.34}$$

В конце первого этапа пути по достижении скорости

$$v = \frac{aT_1}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2 T_1^2}{c^2}}}, \tag{13.35}$$

действие ускоряющей силы прекращается, это означает, что система отсчета, связанная со вторыми часами будет инерциальной. Интервал в этой системе отсчета, согласно (13.23) к моменту T_1 будет иметь вид

$$d\sigma^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 - 2v dx dt - dx^2 - dY^2 - dZ^2, \tag{13.36}$$

здесь

$$v = \frac{aT_1}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2 T_1^2}{c^2}}}. \tag{13.37}$$

Используя для метрики (13.36) выражения

$$\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1, \; U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}, \tag{13.38}$$

найдем

$$\frac{dx^1}{dt} = -v. \tag{13.39}$$

Учитывая (13.39) в (13.36), получим

$$d\tau = \frac{d\sigma}{c} = dt, \tag{13.40}$$

т.е. время, показываемое первыми часами на данном этапе, совпадает со временем T_2

$$\tau_2 = T_2. \tag{13.41}$$

Поскольку вторые часы покоятся, их собственное время, которое они показывают, равно

$$d\tau' = \sqrt{\gamma_{00}}\, dt. \tag{13.42}$$

Отсюда следует

$$d\tau_2' = \int\limits_{T_1}^{T_1+T_2} \sqrt{\gamma_{00}}\, dt = \frac{T_2}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2 T_1^2}{c^2}}}. \tag{13.43}$$

В силу симметрии задачи полученных сведений достаточно, чтобы определить показания часов в момент их встречи. Действительно, показание первых часов τ, определяемое в системе отсчета, связанной со вторыми часами, равно

$$\tau = 4\tau_1 + 2\tau_2, \tag{13.44}$$

что на основании (13.32) и (13.41) дает

$$\tau = 4T_1 + 2T_2. \tag{13.45}$$

Показание вторых часов τ', определяемое в той же системе отсчета, где вторые часы покоятся, равно

$$\tau' = 4\tau_1' + 2\tau_2', \tag{13.46}$$

что на основании (13.34) и (13.43), дает

$$\tau' = \frac{4c}{a}\ln\left[\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}\right] + \frac{2T_2}{\sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}}. \qquad (13.47)$$

Вычитая из (13.47) выражение (13.45), получим

$$\Delta\tau = \tau' - \tau = \frac{4c}{a}\ln\left[\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}\right] -$$

$$-4T_1 + 2T_2\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2T_1^2}{c^2}}} - 1\right]. \qquad (13.48)$$

Сравнивая (13.22) и (13.48) мы видим, что расчет, проведенный в инерциальной системе, где первые часы покоятся, дает тот же результат, что и расчет в неинерциальной системе, связанной со вторыми часами.

Таким образом,

$$\Delta\tau = \Delta T < 0. \qquad (13.49)$$

Отсюда следует, что никакого парадокса нет, поскольку система отсчета, связанная с первыми часами, является инерциальной, тогда как система отсчета, в которой вторые часы покоятся, будет неинерциальной.

Именно поэтому отставание хода вторых часов от хода первых является абсолютным эффектом и не зависит от выбора системы координат, в которой рассчитывается этот эффект.

Рассуждения об относительности движения, которыми ранее пользовались, в данном случае применять нельзя, поскольку системы отсчета неравноправны. Качественно отставание хода вторых часов от первых можно объяснить

следующим образом. Как известно, в произвольных координатах свободное движение пробного тела происходит по геодезической линии, т.е. экстремали, которая в псевдоевклидовом пространстве является максимальной между двумя точками, если на всей линии, соединяющей эти точки величина $d\sigma^2$ положительна. В том случае, когда мы выберем инерциальную систему в галилеевых координатах, связанную с первыми часами, это означает, что первые часы описывают геодезическую линию, тогда как вторые часы, благодаря действию силы, двигаются по линии, отличной от геодезической, а поэтому отстают. То же самое происходит и в том случае, когда система отсчета связана со вторыми часами. При переходе к этой системе отсчета интервал несколько изменяет свою форму. В этом случае первые часы в измененной метрике опять описывают геодезическую линию, тогда как вторые часы покоятся, а следовательно, не описывают геодезическую линию и поэтому отстают.

Мы рассмотрели действие ускоренного движения на ход часов и показали их замедление. Но этот эффект касается не только часов, но и всех физических, или, более общо, всех естественных явлений. На этой основе межзвездные полеты становятся фантастически увлекательными. Поль Ланжевен еще в 1911 г. в статье [14] рассмотрел путешествие человека с большими скоростями, близкими к скорости света, с последующим возвращением на Землю. С принципиальной точки зрения это возможно, но пока это только фантазия.

§ 14. О предельной скорости

Интервал для псевдоевклидовой геометрии, в произвольных координатах, имеет согласно (3.32) и (3.33) следующий общий вид

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \ \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}) < 0. \tag{14.1}$$

Метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ равен

$$\gamma_{\mu\lambda}(x) = \sum_{\nu=0}^{3} \varepsilon^\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad \varepsilon^\nu = (1, -1, -1. - 1). \tag{14.2}$$

Здесь f^ν четыре произвольные непрерывные функции с непрерывными производными, которые связывают галилеевы координаты с произвольными x^λ.

События в зависимости от знака $d\sigma^2$ подразделяются на времениподобные

$$d\sigma^2 > 0, \tag{14.3}$$

пространственноподобные

$$d\sigma^2 < 0, \tag{14.4}$$

изотропные

$$d\sigma^2 = 0, \tag{14.5}$$

Такое подразделение интервалов является абсолютным, оно не зависит от выбора системы координат.

Для времениподобного интервала $d\sigma^2 > 0$ всегда существует такая инерциальная система, в которой он определяется только временем

$$d\sigma^2 = c^2 dT^2.$$

Для пространственноподобного интервала $d\sigma^2 < 0$ всегда можно найти такую инерциальную систему отсчета, в которой он определяется расстоянием между бесконечно близкими пространственными точками

$$d\sigma^2 = -d\ell^2, \; d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Эти утверждения справедливы и для конечного интервала σ.

Любые два события, относящиеся к данному телу, описываются времениподобным интервалом. Изотропный интервал соответствует полю, которое не имеет массы покоя. Рассмотрим, к каким выводам приводит изотропный интервал

$$\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \gamma_{00}(dx^0)^2 + 2\gamma_{0i} dx^0 dx^i + \gamma_{ik} dx^i dx^k = 0. \quad (14.6)$$

Выделим в (14.6) времениподобную часть

$$c^2 \left[\sqrt{\gamma_{00}}\, dt + \frac{\gamma_{0i} dx^i}{c\sqrt{\gamma_{00}}} \right]^2 - \left[-\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}} \right] dx^i dx^k = 0. \quad (14.7)$$

Величину

$$d\tau = \sqrt{\gamma_{00}}\, dt + \frac{\gamma_{0i} dx^i}{c\sqrt{\gamma_{00}}} = \frac{1}{c} \left(\frac{\gamma_{0\lambda} dx^\lambda}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right) \quad (14.8)$$

следует рассматривать как физическое время, которое, как мы ниже убедимся, не зависит от выбора временно́й переменной. В общем случае (неинерциальные системы), величина $d\tau$ не является полным дифференциалом, поскольку не будут выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\gamma_{00}}) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma_{0i}}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\gamma_{0i}}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\gamma_{0k}}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right). \end{aligned} \quad (14.9)$$

Второй член в (14.7) есть не что иное, как квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками **трехмерного пространства**, которое не зависит от выбора координат в этом пространстве.

$$d\ell^2 = \chi_{ik} dx^i dx^k, \tag{14.10}$$

здесь метрический тензор трехмерного пространства χ_{ik} равен

$$\chi_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}. \tag{14.11}$$

Учитывая (14.8) и (14.10) из выражения (14.7), находим

$$\frac{d\ell}{d\tau} = c. \tag{14.12}$$

Величины $d\ell$ и $d\tau$ имеют локальный характер. В этом случае теряет **смысл понятие одновременности** для разноместных событий, так как нельзя осуществить **синхронизацию часов** с помощью светового сигнала, поскольку она зависит от пути синхронизации. На основании (14.12) следует, что поле в каждой точке пространства Минковского, согласно локальным характеристикам $d\ell$ и $d\tau$, имеет скорость, равную электродинамической постоянной c. Это предельная скорость, которая недостижима для частиц, имеющих массу покоя, так как для них $d\sigma^2 > 0$. Поскольку взаимодействие от одного объекта к другому можно передать только с помощью материальной субстанции, из предыдущего очевидно, что c является **предельной скоростью для передачи взаимодействия или информации**. Поскольку обычно принимается, что частицы, соответствующие электромагнитному полю – фотоны – не имеют массы покоя, величину $\mathbf{c}$ отождествляют со скоростью света. Существование предельной скорости есть прямое важное следствие псевдоевклидовой геометрии пространства-времени.

Если мы выберем функции f^ν в (14.2) следующим образом:

$$f^0(x^\lambda),\ f^i(x^k), \tag{14.13}$$

то благодаря такому преобразованию мы не выходим из инерциальной системы координат.

В этом случае метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$, согласно (14.2) и (14.13) принимает вид

$$\gamma_{00} = \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^0}\right)^2, \quad \gamma_{0i} = \frac{\partial f^0}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial x^i}, \tag{14.14}$$

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial f^0}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial x^k} - \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial f^\ell}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f^\ell}{\partial x^k}. \tag{14.15}$$

Подставляя значения (14.14) для метрических коэффициентов γ_{00}, γ_{0i} в (14.8), получим

$$d\tau = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial f^0}{\partial x^\nu} dx^\nu\right) = \frac{1}{c} df^0. \tag{14.16}$$

Мы видим, что собственное время в данном случае является полным дифференциалом, так как наша система инерциальна. Подставляя (14.14) и (14.15) в (14.11), получим

$$\chi_{ik} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial f^n}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f^n}{\partial x^k}. \tag{14.17}$$

Отсюда находим

$$d\ell^2 = \chi_{ik} dx^i dx^k = \sum_{n=1}^{3} (df^n)^2. \tag{14.18}$$

Величина $d\tau$ характеризует физическое время, которое не зависит от выбора координатного времени. Действительно, пусть например, мы введем новую переменную x'^0 по закону

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^i),\ x'^i = x^i. \tag{14.19}$$

Тогда, на основании тензорного преобразования

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu},$$

имеем в нашем случае

$$\gamma'_{00} = \gamma_{00}\left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\right)^2, \quad \gamma'_{0\lambda} = \gamma_{0\beta}\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}, \tag{14.20}$$

аналогично

$$dx'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}dx^\sigma. \tag{14.21}$$

Учитывая символ Кронекера

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\cdot\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = \delta^\beta_\sigma, \tag{14.22}$$

получим

$$cd\tau = \frac{\gamma'_{0\lambda}dx'^\lambda}{\sqrt{\gamma'_{00}}} = \frac{\gamma_{0\sigma}dx^\sigma}{\sqrt{\gamma_{00}}}. \tag{14.23}$$

Физическое время определяет ход времени физического процесса, однако величина $d\tau$ имеет локальный характер, поскольку в неинерциальной системе координат она не является полным дифференциалом, а поэтому не существует переменной τ.

В этом случае не существует единого физического времени, линии которого были бы ортогональными трехмерному пространству. В неинерциальной системе координат интервал $d\sigma$ выражается через физические величины $d\tau, d\ell$ следующим образом

$$d\sigma^2 = c^2d\tau^2 - d\ell^2.$$

В инерциальной системе в галилеевых координатах $d\tau$ совпадает с дифференциалом dt, а поэтому можно ввести в

пространстве Минковского единое время t. Оно и будет физическим. Введение одновременности для всех точек трехмерного пространства является следствием псевдоевклидовой геометрии четырехмерного пространства событий.

Только в **инерциальной системе в галилеевых координатах** и можно говорить о постоянной скорости света, одинаковой во всех направлениях и совпадающей по величине с электродинамической постоянной c. В инерциальной системе, в любых других допустимых координатах, скорость света будет такой же, если время определить согласно формуле (14.8), а расстояние по формуле (14.10). В неинерциальной системе координат электродинамическая постоянная c выражается только через локальные значения величин $d\tau, d\ell$.

Часто пишут, что в основе специальной теории относительности лежит принцип постоянства скорости света. Это неправильно. Никакого принципа постоянства скорости света как физического принципа не существует, поскольку скорость света постоянна только в галилеевых системах отсчета. Поэтому это положение ввиду его частного значения, как мы уже отмечали (см. § 9), не лежит в основе теории относительности. Точно также имеет ограниченный смысл и синхронизация часов в разных точках пространства, так как она возможна только в галилеевых системах отсчета.

Основываясь на принципе постоянства скорости света нельзя перейти к ускоренным системам координат, так как для них теряет смысл понятие одновременности, поскольку синхронизация часов в разных пространственных точках зависит от пути синхронизации.

Определим теперь координатную скорость света

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = v\ell^i, \tag{14.24}$$

здесь ℓ^i – единичный вектор, удовлетворяющий условию

$$\chi_{ik}\ell^i\ell^k = 1. \tag{14.25}$$

Выражение (14.12), на основании формул (14.8), (14.10) и (14.25) принимает вид

$$\frac{v}{\sqrt{\gamma_{00}} + \dfrac{v}{c}\cdot\dfrac{\gamma_{0i}\,\ell^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}} = c. \tag{14.26}$$

Откуда и находится координатная скорость

$$v = c\cdot\frac{\sqrt{\gamma_{00}}}{1 - \dfrac{\gamma_{0i}\,\ell^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}}. \tag{14.27}$$

В общем случае координатная скорость не одинакова как по величине, так и по направлению. По величине она может быть любой, удовлетворяющей условию

$$0 < v < \infty. \tag{14.28}$$

В галилеевых координатах инерциальной системы отсчета координатная скорость совпадает с физической.

В произвольной инерциальной системе отсчета, для описания физических процессов, всегда можно ввести многими способами во всем пространстве единое координатное время. В этом случае синхронизация часов в разных пространственных точках формально должна осуществляться с помощью координатной скорости. В литературе (особенно философской) этот вопрос часто обсуждается. С нашей точки зрения, этот подход не имеет физического смысла, поскольку он оперирует не с физическими, а с координатными величинами.

§ 15. Прецессия Томаса

Пусть частица имеет собственный момент (спин) S^ν. В системе покоя частицы четырехвектор момента (спина) имеет компоненты $(0, \vec{J})$. В любой произвольной инерциальной системе координат имеет место соотношение

$$S^\nu U_\nu = 0. \tag{15.1}$$

При действии на частицу силы $\vec{F}$ без крутящего момента будет справедливо равенство

$$\frac{dS^\nu}{d\tau} = ZU^\nu, \tag{15.2}$$

здесь τ – собственное время; U^ν – четырехвектор скорости.

$$d\tau = dt\frac{1}{\gamma}. \tag{15.3}$$

Если скорость U^i не равна нулю, то величину Z можно определить из соотношения

$$\frac{d}{d\tau}(S^\nu U_\nu) = \frac{dS^\nu}{d\tau}U_\nu + \frac{dU_\nu}{d\tau}S^\nu = 0. \tag{15.4}$$

Подставляя (15.2) в (15.4), получим

$$Z = -\left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}\right), \tag{15.5}$$

ковариантный вектор S_μ имеет компоненты

$$S_\mu = (S^0, -S^1, -S^2, -S^3). \tag{15.6}$$

С учетом (15.5) уравнение движения спина (15.2) принимает вид

$$\frac{dS^\nu}{d\tau} = -\left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}\right)U^\nu. \tag{15.7}$$

Нашей дальнейшей целью будет стремление детализировать эти уравнения, используя преобразования Лоренца. Пусть в лабораторной инерциальной системе отсчета частица со спином $\vec{J}$ движется со скоростью $\vec{v}$. В этом случае инерциальная лабораторная система отсчета относительно инерциальной системы отсчета, в которой частица покоится, будет двигаться со скоростью $-\vec{v}$. Используя преобразования Лоренца (4.18) и (4.19) и учитывая знак скорости, получим

$$S^0 = \gamma\frac{(\vec{v}\vec{J})}{c}, \quad \vec{S} = \vec{J} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{J}). \tag{15.8}$$

Четырехвекторы U^μ, $\dfrac{dU^\mu}{d\tau}$ имеют следующие компоненты

$$U^\mu = \left(\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c}\right), \quad \frac{dU^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{\gamma}{c}\cdot\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\vec{v}}{c}\cdot\frac{d\gamma}{d\tau}\right). \tag{15.9}$$

Используя (15.6), (15.8) и (15.9), получим

$$\begin{aligned}\left(S_\mu\frac{dU^\mu}{d\tau}\right) &= \gamma\frac{(\vec{v}\vec{J})}{c}\cdot\frac{d\gamma}{d\tau} - \\ &- \left(\frac{\gamma}{c}\cdot\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\vec{v}}{c}\cdot\frac{d\gamma}{d\tau}\right)\left(\vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{J})\right).\end{aligned} \tag{15.10}$$

При вычислении в правой части выражения (15.10) останутся только члены, полученные путем умножения первого члена в скобке на два члена во второй скобке, все остальные члены взаимно уничтожаются

$$\left(S_\mu\frac{dU^\mu}{d\tau}\right) = -\frac{\gamma}{c}\left\{\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{v}\vec{J})\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\}. \tag{15.11}$$

Используя (15.8) и (15.11), запишем уравнение (15.7) отдельно для нулевой компоненты четырехвектора спина S^ν

и для его векторной части

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma(\vec{v}\vec{J})\right\} = \gamma^2\left\{\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{v}\vec{J})\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\}, \quad (15.12)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\left\{\vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{J})\right\} = \\ &= \frac{\gamma^2}{c^2}\vec{v}\left\{\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{v}\vec{J})\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\}.\end{aligned} \quad (15.13)$$

Из уравнений (15.12) и (15.13) находим

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2}\vec{v}\,(\vec{v}\vec{J})\right\} - \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma\,(\vec{v}\vec{J})\right\} = 0. \quad (15.14)$$

Из уравнения(15.12) найдем

$$\gamma^2\frac{(\gamma-1)}{v^2}(\vec{v}\vec{J})\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left\{\gamma\,(\vec{v}\vec{J})\right\} - \gamma^2\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right). \quad (15.15)$$

Запишем первый член уравнения (15.14) в развернутой форме

$$\begin{aligned}&\frac{d\vec{J}}{d\tau} + \frac{\gamma^4}{c^4(1+\gamma)^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{J})\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \\ &+\frac{\gamma\vec{v}}{c^2(1+\gamma)}\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma(\vec{v}\vec{J})\right\} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec{v}\vec{J})\frac{d\vec{v}}{d\tau}.\end{aligned} \quad (15.16)$$

При вычислении были учтены равенства

$$\frac{\gamma-1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{\gamma^3}{c^2}\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right). \quad (15.17)$$

Второй член в (15.16) можно преобразовать, используя равенство (15.15), к виду

$$\frac{\gamma^4}{c^4(1+\gamma)^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{J})\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) = \\ = \frac{\vec{v}}{c^2(1+\gamma)}\left[\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma(\vec{v}\vec{J})\right\} - \gamma^2\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right]. \tag{15.18}$$

Используя (15.18), мы видим, что второй член вместе с третьим членом в (15.16) приводятся к виду

$$\frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma(\vec{v}\vec{J})\right\} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\vec{v}\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right). \tag{15.19}$$

С учетом (15.16) и (15.19) уравнение (15.14) приводится к следующей форме

$$\frac{d\vec{J}}{d\tau} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\left\{\frac{d\vec{v}}{d\tau}(\vec{v}\vec{J}) - \vec{v}\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\} = 0. \tag{15.20}$$

Используя формулу

$$\left[\vec{a}\,[\vec{b},\vec{c}]\right] = \vec{b}\,(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}), \tag{15.21}$$

и выбирая векторы

$$\vec{a} = \vec{J},\ \vec{b} = \frac{d\vec{v}}{d\tau},\ \vec{c} = \vec{v}, \tag{15.22}$$

уравнение (15.20) приводится к виду

$$\frac{d\vec{J}}{d\tau} = \left[\vec{\Omega}\vec{J}\right], \tag{15.23}$$

здесь

$$\vec{\Omega} = -\frac{\gamma-1}{v^2}\left[\vec{v},\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right]. \tag{15.24}$$

Вектор спина $\vec{J}$, при движении частицы по криволинейной траектории, прецессирует вокруг направления $\vec{\Omega}$ с угловой скоростью $|\vec{\Omega}|$. Этот эффект впервые открыт Томасом [15].

Уравнение релятивистской механики (9.12) можно записать в форме

$$m\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \vec{f} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}\vec{f}). \tag{15.25}$$

Учитывая это уравнение, выражение (15.24) принимает вид

$$\vec{\Omega} = -\frac{\gamma - 1}{mv^2}[\vec{v}, \vec{f}]. \tag{15.26}$$

Таким образом, сила без крутящего момента, в силу псевдоевклидовой структуры пространства-времени, вызывает прецессию спина, если ее действие приводит к криволинейному движению в данной инерциальной системе отсчета. В том случае, когда сила направлена в некоторой инерциальной системе отсчета по направлению скорости частицы, прецессия спина отсутствует. Но параллельность векторов силы $\vec{f}$ и скорости $\vec{v}$ нарушается уже при галилеевых преобразованиях при переходе от одной инерциальной системы к другой. Поэтому эффект прецессии, равный нулю для наблюдателя в одной инерциальной системе отсчета, будет отличен от нуля для наблюдателя, находящегося в некоторой другой инерциальной системе отсчета.

§ 16. Уравнения движения и законы сохранения в классической теории поля

Ранее мы видели, что с помощью лагранжева подхода можно построить все уравнения Максвелла-Лоренца. Этот подход имеет явный общековариантный характер. Он позволяет получить в общем виде уравнения движения поля и законы сохранения без явной конкретизации плотности функции Лагранжа. В этом подходе каждое физическое поле описывается одно- или многокомпонентной функцией координат и времени, называемой функцией поля (или полевой переменной). В качестве полевых переменных берутся величины, преобразующиеся по одному из представлений группы Лоренца, например, скалярное, спинорное, векторное и даже тензорное. Наряду с полевыми переменными важную роль играет и метрический тензор пространства-времени, который определяет геометрию для физического поля, а также выбор той или иной системы координат, в которой производится описание физических процессов. Выбор системы координат является в то же время и выбором системы отсчета. Конечно, не всякий выбор системы координат изменяет систему отсчета. Любые преобразования в данной системе отсчета вида

$$\begin{aligned} x'^0 &= f^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \\ x'^i &= f^i(x^1, x^2, x^3), \end{aligned} \tag{16.1}$$

всегда оставляют нас в этой системе отсчета. Всякий другой выбор системы координат обязательно приводит к изменению системы отсчета. Выбор системы координат производится из класса допустимых координат,

$$\gamma_{00} > 0, \ \gamma_{ik} dx^i dx^k < 0, \ \det|\gamma_{\mu\nu}| = \gamma < 0. \tag{16.2}$$

Исходным пунктом лагранжева формализма является построение функции действия. Обычно выражение, определяющее функцию действия, записывают в виде

$$S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} L(x^0, x^1, x^2, x^3)dx^0dx^1dx^2dx^3, \tag{16.3}$$

где интегрирование производится по некоторой произвольной четырехмерной области пространства-времени. Поскольку действие должно быть инвариантным, плотность функции Лагранжа является плотностью скаляра веса $+1$. Плотность скаляра веса $+1$ есть произведение скалярной функции на величину $\sqrt{-\gamma}$. Выбор плотности лагранжиана осуществляется из ряда требований. К их числу относится требование вещественности.

Таким образом, плотность лагранжиана может быть построена с помощью изучаемых полей φ, метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ и частных производных по координатам

$$L = L(\varphi_A, \partial_\mu\varphi_A, \ldots, \gamma_{\mu\nu}, \partial_\lambda\gamma_{\mu\nu}). \tag{16.4}$$

Для простоты предположим, что рассматриваемая нами система состоит из вещественного векторного поля. Будем считать, что лагранжиан поля не содержит производных выше первого порядка. Это ограничение приводит к тому, что все наши уравнения поля будут уравнениями второго порядка

$$L = L(A^\nu, \partial_\lambda A^\nu, \gamma_{\mu\nu}, \partial_\lambda\gamma_{\mu\nu}). \tag{16.5}$$

Заметим, **что если лагранжиан построен, то теория определена**. Уравнения поля найдем из принципа наименьшего действия

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\delta L = 0. \tag{16.6}$$

Вариация δL равна

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial A_\lambda}\delta A_\lambda + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}\delta(\partial_\nu A_\lambda), \text{ или} \tag{16.7}$$

$$\delta L = \frac{\delta L}{\delta A_\lambda}\delta A_\lambda + \partial_\nu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}\delta A_\lambda\right]. \tag{16.8}$$

Здесь мы обозначили вариационную производную Эйлера через

$$\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} - \partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}\right). \tag{16.9}$$

При получении выражения (16.8) мы учли, что

$$\delta(\partial_\nu A_\lambda) = \partial_\nu(\delta A_\lambda). \tag{16.10}$$

Подставляя (16.8) в (16.6) и применяя теорему Гаусса, получим

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_\Omega d\Omega d^4x\left(\frac{\delta L}{\delta A_\lambda}\delta A_\lambda\right) + \frac{1}{c}\int\limits_\Sigma ds_\nu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}\delta A_\lambda\right].$$

Поскольку вариация поля на границе Σ равняется нулю, имеем

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_\Omega d\Omega d^4x\left(\frac{\delta L}{\delta A_\lambda}\delta A_\lambda\right) = 0. \tag{16.11}$$

В силу произвольности вариаций δA_ν, с помощью основной леммы вариационного исчисления получим уравнение для поля

$$\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} - \partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}\right) = 0. \tag{16.12}$$

Мы видим, что если лагранжиан найден, то теория создана. Кроме уравнений поля метод Лагранжа дает возможность получить и дифференциальные законы сохранения. Принято различать два типа дифференциальных

законов сохранения: **сильные** и **слабые**. **Сильным законом сохранения** называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности действия при преобразовании координат. Слабые законы сохранения получаются из сильных, если учесть в них уравнение поля (16.12).

Следует особо подчеркнуть, что сильные дифференциальные законы сохранения в общем случае не утверждают сохранения чего-либо ни локально, ни глобально. Для нашего случая действие имеет вид

$$S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x L(A_\lambda, \partial_\nu A_\lambda, \gamma_{\mu\nu}, \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}). \tag{16.13}$$

Совершим бесконечно малое преобразование координат

$$x'^\nu = x^\nu + \delta x^\nu, \tag{16.14}$$

здесь δx^ν – бесконечно малый четырехвектор.

Так как действие является скаляром, то при этом преобразовании оно остается неизменным, а следовательно,

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega'} d^4x' L'(x') - \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x L(x) = 0, \tag{16.15}$$

где

$$L'(x') = L'\Big(A'_\lambda, \partial'_\nu A'_\lambda(x'), \gamma'_{\mu\nu}(x'), \partial'_\lambda \gamma'_{\mu\nu}(x')\Big).$$

Первый член в (16.15) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega'} d^4x' L'(x') = \int\limits_{\Omega} J d^4x L'(x'), \tag{16.16}$$

где якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det\left|\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}\right|. \tag{16.17}$$

При преобразовании (16.14) якобиан имеет вид

$$J = 1 + \partial_\lambda \delta x^\lambda. \tag{16.18}$$

Разлагая $L'(x')$ в ряд Тейлора, имеем

$$L'(x') = L'(x) + \delta x^\lambda \frac{\partial L}{\partial x^\lambda}. \tag{16.19}$$

Учитывая (16.16), (16.18) и (16.19), перепишем вариацию (16.15) в виде

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int\limits_\Omega d^4x \left[\delta_L L(x) + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Big(\delta x^\lambda L(x) \Big) \right] = 0, \tag{16.20}$$

здесь мы обозначили

$$\delta_L L(x) = L'(x) - L(x). \tag{16.21}$$

Эта вариация обычно называется вариацией Ли. Она перестановочна с частным дифференцированием

$$\delta_L \partial_\nu = \partial_\nu \delta_L. \tag{16.22}$$

Вариация Ли от плотности функции Лагранжа равна

$$\begin{aligned} \delta_L L(x) = \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} \delta_L A_\lambda + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)} \delta_L \partial_\nu A_\lambda + \\ + \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \delta_L \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \gamma_{\mu\nu})} \delta_L \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{16.23}$$

Совершая элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \delta_c S = \\ = \frac{1}{c} \int\limits_\Omega d^4x \left[\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} \delta_L A_\lambda + \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \delta_L \gamma_{\mu\nu} + D_\lambda J^\lambda \right] = 0, \end{aligned} \tag{16.24}$$

здесь

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \gamma_{\mu\nu})} \right).$$

$$J^\nu = L\delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)} \delta_L A_\lambda + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \gamma_{\lambda\mu})} \delta_L \gamma_{\lambda\mu}. \qquad (16.25)$$

Так как J^ν является плотностью вектора веса $+1$, то согласно (12.25) и (12.28) найдем

$$\partial_\nu J^\nu = D_\nu J^\nu, \qquad (16.26)$$

где D^ν – ковариантная производная в псевдоевклидовом пространстве-времени. Следует отметить, что вариации $\delta_L A_\lambda, \delta_L \gamma_{\mu\nu}$ порождены преобразованием координат (16.14), а поэтому их можно выразить через компоненты δx^λ.

Найдем вариацию Ли от полевых переменных, возникающую из-за преобразования координат. Согласно закону преобразования вектора A_λ

$$A'_\lambda(x') = A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda},$$

имеем

$$A'_\lambda(x + \delta x) = A_\lambda(x) - A_\nu(x) \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\lambda}. \qquad (16.27)$$

Разлагая в ряд Тейлора величину $A'_\lambda(x + \delta x)$, находим

$$A'_\lambda(x + \delta x) = A'_\lambda(x) + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} \delta x^\nu. \qquad (16.28)$$

Подставляя (16.28) в (16.27), получим

$$\delta_L A_\lambda(x) = -\delta x^\nu \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} - A_\nu(x) \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\lambda}, \qquad (16.29)$$

или в ковариантной форме

$$\delta_L A_\lambda(x) = -\delta x^\nu D_\nu A_\lambda - A_\nu D_\lambda \delta x^\nu. \tag{16.30}$$

Найдем теперь вариацию Ли от метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ из закона преобразования

$$\gamma'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \gamma_{\lambda\sigma}(x),$$

получим

$$\gamma'_{\mu\nu}(x + \delta x) = \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\sigma}\partial_\nu \delta x^\sigma - \gamma_{\nu\sigma}\partial_\mu \delta x^\sigma, \tag{16.31}$$

откуда находим

$$\delta_L \gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\sigma}\partial_\nu \delta x^\sigma - \gamma_{\nu\sigma}\partial_\mu \delta x^\sigma - \delta x^\sigma \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu}. \tag{16.32}$$

Учитывая равенство

$$\partial_\sigma \gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \gamma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \tag{16.33}$$

запишем выражение (16.32) в ковариантных производных

$$\delta_L \gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\sigma} D_\nu \delta x^\sigma - \gamma_{\nu\sigma} D_\mu \delta x^\sigma. \tag{16.34}$$

Подставляя выражения (16.30) и (16.34) в действие (16.24), получим

$$\begin{aligned} \delta_c S = \frac{1}{c} \int\limits_\Omega d^4x \Bigg[& -\delta x^\lambda \frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - \frac{\delta L}{\delta A_\lambda} A_\nu D_\lambda \delta x^\nu - \\ & -(\gamma_{\mu\sigma} D_\nu \delta x^\sigma + \gamma_{\nu\sigma} D_\mu \delta x^\sigma) \tfrac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + D_\nu J^\nu \Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{16.35}$$

Введем следующее обозначение:

$$T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}. \tag{16.36}$$

Мы увидим в дальнейшем, **что эта величина, впервые введенная Гильбертом, является плотностью тензора энергии-импульса поля**.

Интегрируя по частям в выражении (16.35), получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\Big\{-\delta x^\lambda\Big[\frac{\delta L}{\delta A_\nu}D_\lambda A_\nu - \\ -D_\nu\left(\tfrac{\delta L}{\delta A_\nu}A_\lambda\right)+D_\nu\left(T^{\mu\nu}\gamma_{\mu\lambda}\right)\Big]+ \\ +D_\nu\Big(J^\nu - \tfrac{\delta L}{\delta A_\nu}A_\lambda\delta x^\lambda + T^{\mu\nu}\gamma_{\mu\sigma}\delta x^\sigma\Big)\Big\} = 0. \tag{16.37}$$

Подставляя в выражение (16.25) для плотности вектора J^ν значения вариаций $\delta_L A_\lambda(x), \delta_L\gamma_{\mu\nu}(x)$ согласно формулам (16.30) и (16.34) и группируя члены при δx^ν и $D_\lambda\delta x^\nu$, получим

$$J^\nu - \frac{\delta L}{\delta A_\nu}A_\lambda\delta x^\lambda = -\tau^\nu_\sigma\delta x^\sigma - \sigma^{\nu\lambda}_\mu D_\lambda\delta x^\mu, \tag{16.38}$$

здесь мы обозначим

$$\tau^\nu_\sigma = -L\delta^\nu_\sigma + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}D_\sigma A_\lambda + \frac{\delta L}{\delta A_\nu}A_\sigma. \tag{16.39}$$

Эту величину обычно **называют плотностью канонического тензора энергии-импульса**, а величину

$$\sigma^{\nu\lambda}_\mu = 2\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\gamma_{\sigma\lambda})}\gamma_{\sigma\mu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}A_\mu \tag{16.40}$$

— плотностью тензора спина.

На основании (16.38) ковариантную дивергенцию в (16.37) представим в виде

$$D_\nu\left(J^\nu - \tfrac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \delta x^\lambda + T^\nu_\sigma \delta x^\sigma\right) =$$
$$= \delta x^\sigma \left[D_\nu T^\nu_\sigma - D_\nu \tau^\nu_\sigma\right] + D_\nu(\delta x^\lambda)\Big[T^\nu_\lambda - \tag{16.41}$$
$$-\tau^\nu_\lambda - D_\mu \sigma^{\mu\nu}_\lambda\Big] - \sigma^{\nu\lambda}_\mu D_\nu D_\lambda \delta x^\mu.$$

Используя это выражение, вариацию действия (16.37) можно записать в форме

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_\Omega d^4x \Big[-\delta x^\lambda \Big(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu -$$
$$-D_\nu\left(\tfrac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda\right) + D_\nu \tau^\nu_\lambda\Big) + D_\nu(\delta x^\lambda)\times \tag{16.42}$$
$$\times\left(T^\nu_\lambda - \tau^\nu_\lambda - D_\mu \sigma^{\mu\nu}_\lambda\right) - \sigma^{\nu\lambda}_\mu D_\nu D_\lambda \delta x^\mu\Big] = 0.$$

Так как объем интегрирования Ω произволен, то отсюда следует, что подынтегральная функция равна нулю.

$$-\delta x^\lambda\left(\tfrac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - D_\nu\left(\tfrac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda\right) + D_\nu \tau^\nu_\lambda\right) +$$
$$+\left(T^\nu_\lambda - \tau^\nu_\lambda - D_\mu \sigma^{\mu\nu}_\lambda\right) D_\nu \delta x^\lambda - \sigma^{\nu\lambda}_\mu D_\nu D_\lambda \delta x^\mu = 0. \tag{16.43}$$

Это выражение обращается в нуль для произвольных δx^λ, независимо от выбора системы координат. Именно это позволяет легко установить, что тензор $\sigma^{\nu\lambda}_\mu$ антисимметричен по ν, λ. В силу тензорного закона преобразования, если оно обращается в нуль в одной системе координат, то оно

равно нулю в любой другой системе координат. Отсюда следуют тождества

$$D_\nu \tau_\lambda^\nu + \frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - D_\nu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \right) = 0. \tag{16.44}$$

$$T_\lambda^\nu - \tau_\lambda^\nu - D_\mu \sigma_\lambda^{\mu\nu} = 0, \ \sigma_\mu^{\nu\lambda} = -\sigma_\mu^{\lambda\nu}. \tag{16.45}$$

Что касается последнего члена в (16.43), то он должен обращаться в нуль в силу антисимметрии величины $\sigma_\mu^{\nu\lambda}$ по верхним индексам. Из антисимметрии тензора спина следует

$$D_\nu T_\lambda^\nu = D_\nu \tau_\lambda^\nu. \tag{16.46}$$

Тождества (16.44) и (16.45) называются сильными законами сохранения, они выполняются в силу инвариантности действия при преобразовании координат. Используя соотношение (16.46), выражение (16.44) можно записать в форме

$$D_\nu T_\lambda^\nu + \frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - D_\nu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \right) = 0. \tag{16.47}$$

Если мы учтем уравнения поля (16.12), то получим

$$D_\nu T_\lambda^\nu = 0, \ T_\lambda^\nu - \tau_\lambda^\nu = D_\mu \sigma_\lambda^{\mu\nu}, \tag{16.48}$$

здесь величина τ_λ^ν равна

$$\tau_\lambda^\nu = -L\delta_\lambda^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} D_\lambda A_\mu. \tag{16.49}$$

Наличие слабого закона сохранения симметрического тензора энергии-импульса обеспечивает сохранение тензора момента импульса поля. Определяя тензор момента импульса в галилеевых координатах инерциальной системы

$$M^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\mu T^{\nu\lambda}, \tag{16.50}$$

легко установить с помощью (16.48), что

$$\partial_\lambda M^{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{16.51}$$

Полученные нами слабые законы сохранения для тензора энергии-импульса и тензора момента импульса еще не свидетельствуют о сохранении энергии-импульса или момента количества движения для замкнутой системы.

Существование интегральных законов сохранения для замкнутой системы связано со свойствами пространства-времени, а именно, с существованием группы движения пространства-времени. Наличие группы Пуанкаре (группа Лоренца совместно с группой трансляции) для псевдоевклидова пространства обеспечивает существование законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения для замкнутой системы. Группа движения пространства-времени сохраняет форминвариантность метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского.

Заметим, что законы сохранения автоматически выполняются для произвольной плотности скаляра (лагранжиан) вида $L(\psi_\lambda, \partial_\sigma \psi_\mu)$ в пространстве Минковского, обеспечивающего положительность энергии поля, если мы ограничиваемся только уравнениями второго порядка для полей. Я упоминаю здесь об этом специально, поскольку из дискуссии с некоторыми академиками, занимающимися теоретической физикой, я увидел, что даже им это неведомо.

Найдем теперь, в качестве примера, симметрический тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Согласно (11.15), плотность лагранжиана для этого поля равна

$$L_f = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-\gamma}\, F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{16.52}$$

Запишем ее через переменные $F_{\mu\nu}$ и метрические коэффициенты

$$L_f = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-\gamma}\, F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}. \tag{16.53}$$

Согласно (12.37) имеем

$$\frac{\partial\sqrt{-\gamma}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}. \tag{16.54}$$

С помощью (16.54) получим

$$\frac{\partial^* L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{32\pi}\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{16.55}$$

$*$ – указывает, что дифференцирование идет по $\gamma_{\mu\nu}$, входящей в выражение (16.53).

Аналогично

$$\begin{aligned}\frac{\partial^* L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-\gamma}\,F_{\alpha\beta}F_{\sigma\lambda}\times\\ &\times\left[\frac{\partial\gamma^{\alpha\sigma}}{\partial\gamma^{\mu\nu}}\cdot\gamma^{\beta\lambda}+\gamma^{\alpha\sigma}\cdot\frac{\partial\gamma^{\beta\lambda}}{\partial\gamma^{\mu\nu}}\right].\end{aligned} \tag{16.56}$$

Поскольку

$$\frac{\partial\gamma^{\alpha\sigma}}{\partial\gamma^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\mu\delta^\sigma_\nu + \delta^\alpha_\nu\delta^\sigma_\mu), \text{ то используя}$$

свойства антисимметрии тензора $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, получим

$$\frac{\partial^* L}{\partial\gamma^{\mu\nu}} = -\frac{1}{8\pi}\sqrt{-\gamma}\,F_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}\gamma^{\lambda\sigma}. \tag{16.57}$$

При получении (16.15) и (16.57) мы рассматривали величины $\gamma_{\mu\nu}, \gamma^{\lambda\sigma}$ как независимые.

Так как в плотность лагранжиана электромагнитного поля не входят производные от метрического тензора, то плотность симметрического тензора энергии-импульса будет равна

$$T^{\mu\nu} = -2\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -2\left[\frac{\partial^* L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial^* L}{\partial\gamma^{\alpha\beta}}\cdot\frac{\partial\gamma^{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}\right]. \tag{16.58}$$

Из соотношения

$$\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\nu} = \delta^{\alpha}_{\nu}, \tag{16.59}$$

находим

$$\frac{\partial\gamma^{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\gamma^{\beta\mu}). \tag{16.60}$$

Подставляя это выражение в (16.58), получим

$$T^{\mu\nu} = -2\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = -2\left[\frac{\partial^* L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial^* L}{\partial\gamma^{\alpha\beta}}\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}\right]. \tag{16.61}$$

Используя выражения (16.55) и (16.57), находим плотность тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{4\pi}\left[-F^{\mu\sigma}F^{\nu\lambda}\gamma_{\sigma\lambda} + \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right]. \tag{16.62}$$

Отсюда легко убедиться, что след тензора электромагнитного поля обращается в нуль, т.е.

$$T = \gamma_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0.$$

Построим теперь тензор энергии-импульса вещества. Плотность сохраняющейся массы или заряда равна

$$\mu = \sqrt{-\gamma}\,\mu_0 U^0,\ \partial_\nu(\sqrt{-\gamma}\,\mu_0 U^\nu) = 0, \tag{16.63}$$

μ_0 – плотность в системе покоя. Четырехмерная скорость U^ν определяется выражением

$$U^\nu = \frac{v^\nu}{\sqrt{\gamma_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}},\ v^\nu = \frac{dx^\nu}{dt},\ v^0 \equiv c. \tag{16.64}$$

Отсюда, очевидно,

$$U^\nu U^\lambda \gamma_{\nu\lambda} = 1.$$

Возьмем вариацию от выражения (16.63) по метрическому тензору. Величина μ не зависит от метрического тензора, поэтому

$$\delta\mu = U^0\delta(\sqrt{-\gamma}\,\mu_0) + \sqrt{-\gamma}\,\mu_0\delta U^0 = 0, \tag{16.65}$$

здесь

$$\delta U^0 = -\frac{c}{2}\frac{v^\alpha v^\beta \delta\gamma_{\alpha\beta}}{(\gamma_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta)^{3/2}}. \tag{16.66}$$

Из выражения (16.65) и (16.66) находим

$$\delta(\sqrt{-\gamma}\,\mu_0) = \sqrt{-\gamma}\,\mu_0\frac{1}{2}U^\alpha U^\beta\delta\gamma_{\alpha\beta}. \tag{16.67}$$

Поскольку плотность лагранжиана действия вещества имеет вид

$$L = -\sqrt{-\gamma}\,\mu_0 c^2, \tag{16.68}$$

то плотность тензора энергии-импульса вещества будет равна

$$t^{\mu\nu} = -2\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}}. \tag{16.69}$$

На основании (16.67) получим

$$t^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\mu_0 c^2 U^\mu U^\nu. \tag{16.70}$$

Как мы отмечали выше, добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции не изменяет уравнения поля. Можно также показать [6], что оно не изменяет и плотности тензора энергии-импульса Гильберта. Тогда как плотность канонического тензора (16.49) при этом изменяется. Но одновременно с ним изменяется и дивергенция от плотности тензора спина. Сумма плотности канонического тензора и дивергенции плотности спина остается неизменной.

Вопросы и задачи

§ 2

2.1. Электрический заряд находится в падающем лифте. Будет ли он излучать электромагнитные волны?
2.2. Заряд находится в невесомости в космическом корабле. Будет ли он излучать?

§ 3

3.1. Пусть в некоторой неинерциальной системе координат метрический тензор пространства Минковского имеет вид $\gamma_{\mu\nu}(x)$. Показать, что существует система координат x', в которой метрический тензор имеет тот же вид $\gamma_{\mu\nu}(x')$, и что нелинейные преобразования образуют группу.

§ 4

4.1. Верно ли утверждение: "В движущейся системе отсчета (с постоянной скоростью v) время идет медленнее, чем в неподвижной"?
4.2. Является ли лоренцово сокращение стержня (4.13) реальным или кажущимся?
4.3. Можно ли, используя эффект сокращения Лоренца, путем ускорения стержня достигнуть высокой плотности вещества?

§ 8

8.1. Электрический заряд тела не зависит от выбора системы отсчета. Исходя из этого положения найти закон преобразования плотности заряда при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

8.2. С помощью преобразований Лоренца найти поле равномерно движущегося заряда.

§ 9

9.1. Три маленьких космических ракеты A, B и C дрейфуют свободно в области пространства, удаленной от остального вещества, без вращения и без относительного движения, причем B и C равно удалены от A. По получении сигнала от A двигатели B и C запускаются и они начинают плавно ускоряться. Пусть ракеты B и C идентичны и имеют идентичные программы ускорения. Предположим, что с самого начала B и C связаны тонкой нитью. Что будет с нитью? Порвется она или нет?
(Задача Дж. Белла)

§ 10

10.1. Найти поверхность в геометрии Лобачевского, на которой реализуется планиметрия Евклида.
10.2. Объяснить прецессию Томаса с помощью геометрии Лобачевского.
10.3. Существует ли в геометрии Лобачевского треугольник, в котором все углы равны нулю?
10.4. Найти площадь треугольника на сфере радиуса R.

§ 11

11.1. Используя принцип стационарного действия получить для силы Лоренца формулу

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{\rho}{c}[\vec{v}, \vec{H}],$$

где ρ – плотность электрического заряда.

§ 12

12.1. Излучает ли заряд, движущийся в равномерно ускоренной системе отсчета по геодезической линии?
12.2. Излучает ли заряд, движущийся в произвольной неинерциальной системе отсчета по геодезической линии?
12.3. Излучает ли в неинерциальной системе отсчета неподвижный заряд?
12.4. Является ли лифт, у которого оборвался канат, инерциальной системой отсчета?

§ 13

13.1. В рамках специальной теории относительности объяснить "эффект Саньяка", как с точки зрения инерциальной системы отсчета, так и с точки зрения вращающейся системы. Для простоты в опыте Саньяка рассмотреть круговую траекторию лучей света, что соответствует случаю бесконечного числа зеркал.
13.2. Найти пространственную геометрию на диске, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω.
13.3. Пусть космонавт на космическом корабле движется с постоянным ускорением a, удаляясь от Земли. Сможет ли он в течение полета получать информацию от Центра полетов?

§ 15

15.1. Показать, что при движении тела с ускорением по криволинейной траектории величина момента J не зависит от времени.

Список литературы

1. *Пуанкаре А.* Настоящее и будущее математической физики. Доклад на Конгрессе искусства и науки в Сент-Луисе (сентябрь 1904 г.) // Bulletin des Sciences Mathematiques. – December 1904. – Vol. 28, Ser. 2. P. 302.
   См. также: The Monist.– January 1905. – Vol. XV, No. 1.
   См. также: Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 27.

2. *Poincaré H.* Sur la dynamique de l'électron // Comptes Rendues. 1905. Vol. 140. P. 1504.
   См. также: Принцип относительности. С. 90.
   См. также: *Логунов А.А.* К работам Анри Пуанкаре О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА. Издательство Московского университета. 1988.
   См. также: *Logunov A.A.* On the articles by Henri Poincaré ON THE DYNAMICS OF THE ELECTRON. Publishing Department of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna. 1995.

3. *Poincaré H.* Sur la dynamique de l'électron // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906. Vol. XXI. P. 129.
   См. также: Принцип относительности. С. 118.
   См. также: *Логунов А.А.* К работам Анри Пуанкаре О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА.

4. *Minkowski H.* Raum und Zeit // Phys. Zs. 1909. B. 10. S. 104.
   См. также: Принцип относительности. С. 167.

5. *Логунов А.А.* Теория гравитационного поля. М.: Наука. 2001.
   См. также: *Logunov A.A.* THE THEORY OF GRAVITY. Moscow. NAUKA. 2001.

6. *Логунов А.А.* Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. М.: Наука. 1987.

См. также: *Logunov A.A.* LECTURES IN RELATIVITY AND GRAVITATION. PERGAMON PRESS. 1990.

7. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука. Т. II. 1966. С. 405.
8. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука. 1972. С. 218.
9. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука. Т. I. 1965. С. 232.
10. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука. Т. I. 1965. С. 269.
11. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука. Т. II. 1966. С. 281.
12. *Смородинский Я.А.* Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна // Эйнштейновский сборник. М.: Наука. 1972. С. 290.
13. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат. 1961. С. 245.
14. *Langevin P.* // Scientia. 1911. **10**, 31.
15. *Thomas L.H.* // Nature. 1926. **117**, 514.

Именной указатель

Ааронов Якир (Aharonov Yakir), род. 1932 118
Адамар Жак (Hadamard Jacques), 1865–1963 115

Белл Джон Стюарт (Bell John Stewart), 1928–1990 168
Бельтрами Эудженио (Beltrami Eugenio), 1835–1900 109, 115
Блохинцев Дмитрий Иванович, 1908–1979 96
Больяи Янош (Bolyai János), 1802–1860 7
Бом Давид (Bohm David), 1917–1992 118
Борн Макс (Born Max), 1882–1970 4
Бройль Луи де (Broglie Lui de), 1892–1987 92

Галилей Галилео (Galilei Galileo), 1564–1642 8, 11, 24, 26, 83, 87
Гамильтон Уильям Роуан (Hamilton William Rowan), 1805–1861 20, 21
Гаусс Карл Фридрих (Gauss Carl Friedrich), 1777–1855 155
Герон Александрийский (Heron), I в.н.э. 108
Герштейн Семен Соломонович, род. 1929 5
Гильберт Давид (Hilbert David), 1862–1943 115, 160, 166
Гинзбург Виталий Лазаревич, род. 1916 76, 92
Гук Роберт (Hooke Robert), 1635–1703 11

Дирак Поль Адриен Морис (Dirac Paul Adrien Maurice), 1902–1984 88, 120

Евклид (Euclid), род. 325 до н.э. 6–8, 109, 168

Ефимов Николай Владимирович, 1910–1982 104

Зоммерфельд Арнольд Иоганн Вильгельм (Sommerfeld Arnold Johannes Wilhelm), 1868–1951 52

Иваненко Дмитрий Дмитриевич, 1904–1994 96

Кристоффель Эльвин Бруно (Christoffel Elwin Bruno), 1829–1900 123
Кронекер Леопольд (Kronecker Leopold), 1823–1891 64, 145

Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis), 1736–1813 14, 16, 18, 20, 116–118, 153–155, 157
Ламберт Иоганн Генрих (Lambert Johann Heinrich), 1728–1777 109
Ландау Лев Давидович, 1908–1968 44
Ланжевен Поль (Langevin Paul), 1872–1946 89, 96, 140
Лармор Джозеф (Larmor Joseph), 1857–1942 34
Леви-Чивита Туллио (Levi-Civita Tullio), 1873–1941 75
Ли Мариус Софус (Lie, Marius Sophus), 1842–1899 67, 157–159
Лившиц Евгений Михайлович, 1915–1985 44
Лобачевский Николай Иванович, 1793–1856 7, 61, 98–115, 168
Лоренц Гендрик Антон (Lorentz Hendrik Anton), 1853–1928 4, 24, 25, 27–44, 48, 51–53, 55–59, 61, 66–83, 93–96, 116–118, 120, 127, 149, 153, 163, 167, 168
Лоренц Людвиг Валентин (Lorenz Ludwig Valentin), 1829–1891 70

Майкельсон Альберт Абрахам (Michelson Albert Abraham), 1852–1931 24
Максвелл Джеймс Клерк (Maxwell James Clerk), 1831–1879 23, 24, 27, 30, 31, 38, 40,

42, 44, 69–82, 93, 94, 116–118, 127, 153
Мандельштам Леонид Исакович, 1879–1944 49
Матвеев Виктор Анатольевич, род. 1941 97
Мах Эрнст (Mach Ernst), 1838–1916 12, 13
Минковский Герман (Minkowski Hermann), 1864–1909 2, 4, 40, 44, 45, 47, 49, 51, 52, 62, 64, 73, 82, 87, 96, 123, 128, 143, 146, 163, 167

***Н**ьютон Исаак (Newton Isaac), 1643–1727* 7–22, 84

***П**айс Абрахам (Pais Abraham), 1918–2000* 93–95
Паули Вольфганг (Pauli Wolfgang), 1900–1958 4, 42, 43, 53, 95
Петров, род.1947 5, 32
Пифагор Самосский (Pythagóras), род. 570 до н.э. 6
Планк Макс Карл Эрнст Людвиг (Planck Max Karl Ernst Ludwig), 1858–1947 89
Понтрягин Лев Семенович, 1908–1988 97
Пуанкаре Анри (Poincaré Henri), 1854–1912 2, 4, 9, 23–29, 31, 32, 34, 36, 38–44, 51, 52, 56, 66, 67, 71, 72, 74–97, 115, 163
Пуассон Симеон Дени (Poisson Simeon Denis), 1781–1840 21, 22

***Р**иман Георг Фридрих Бернхард (Riemann Georg Friedrich Bernhard), 1826–1866* 7, 51, 121

***С**аньяк Жорж Марк Мари (Sagnac Georges Marc Marie), 1869–1928* 169
Смородинский Яков Абрамович, 1917–1992 101

***Т**ейлор Брук (Taylor Brook), 1685–1731* 157, 158
Томас Левелин Хиллет (Thomas Llewellyn Hilleth), 1903–1992 148–152, 168
Тюрин Николай Евгеньевич, род. 1945 5

Тяпкин Алексей Алексеевич, род. 1926 29, 96

Фарадей Майкл (Faraday Michael), 1791–1867 23

Фейнман Ричард Филлипс (Feynman Richard Phillips), 1918–1988 95

Фредерикс Всеволод Константинович, 1885–1944 96

Фок Владимир Александрович, 1898–1974 128

Черников Николай Андреевич, род. 1928 104

Эйлер Леонард (Euler Leonhard), 1707–1783 18, 155

Эйнштейн Альберт (Einstein Albert), 1879–1955 4, 28, 33, 34, 41–43, 45, 47–53, 74, 76, 86, 87, 89, 93–96, 132

Якоби Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob), 1804–1851 22

Научное издание

Логунов Анатолий Алексеевич

ЛЕКЦИИ
ПО ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*

Редактор *Л.С. Чибисенков*

Художник *Т.В. Болотина*

Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*

Набор и верстка выполнены
на компьютерной технике
в ГНЦ "Институт физики высоких энергий"
Г.М. Александровым

В оформлении переплета
использован фрагмент картины
Сальвадора Дали "Треугольный час"

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 01.10.2002
Формат 60 × 84 $^1/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 10,2. Усл.кр.-отт. 10,7. Уч.-изд.л. 9,5
Тираж 3000 экз. Тип. зак. 6914 Заказное

Издательство "Наука"
117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru

ППП "Типография "Наука"
121099, Москва, Шубинский пер., 6

А. А. Логунов

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

·НАУКА·

ISBN 5-02-006236-7

9 785020 062368