

В.М. ЛАВРОВ

Т
ЕОРИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО
ПОЛЯ И ОСНОВЫ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ
РАДИОВОЛН

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ОСНОВЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

Под редакцией И. Г. КЛЯЦКИНА

*Допущено
Министерством связи СССР
в качестве учебного пособия
для вузов связи*

Scanned by Et37na1



ИЗДАТЕЛЬСТВО „СВЯЗЬ“ МОСКВА 1964

Вукол Михайлович Лавров

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ОСНОВЫ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

Редактор *В. В. Визирова*

Техн. редактор *К. Г. Маркоч*

Корректор *Т. А. Васильева*

Сдано в набор 4/II 1964 г.

Подписано в печать 9/VII 1964 г.

Форм. бум. 60×90/16 23,0 печ. л.

Тем. план изд. № 7 21,64 уч.-изд. л.

T-07889 Тираж 12 000 экз.

Зак. изд. 10803

Цена 91 коп.

Издательство «Связь», Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2.

Типография издательства «Связь» Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати, Москва-центр, ул. Кирова, 40. Зак. тип. 63

*Книгу посвящаю моим ученикам —
студентам Московского электротех-
нического института связи.*

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя курс «Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн» составлен применительно к программам электротехнических институтов связи, а также электротехнических и энергетических вузов, имеющих радиоспециальности.

В курсе излагаются основы классической теории электромагнитного поля и приложения этой теории к основным задачам распространения и излучения радиоволн и передачи их в направляющих системах.

Принципиальным положением, основным фундаментом курса является утверждение о материальности электромагнитного поля, о том, что электромагнитное поле есть особая форма материи.

По мнению автора, для серьёзного усвоения такой трудной дисциплины, как теория электромагнитного поля и распространение радиоволн, недостаточно изучить фактический, физико-математический материал этой дисциплины и усвоить некоторые навыки расчёта; необходима серьёзная работа над вопросами исторического генезиса основных понятий электромагнетизма и их физико-философскими основами.

Во введении к курсу значительное место отводится истории возникновения и развития теории электромагнитного поля. Рассматривается, в частности, «кризис физики» начала XX столетия, и на основании исторических данных и ленинского анализа «кризиса физики» показываются развитие и утверждение идеи о материальности электромагнитного поля.

Более трёх четвертей курса посвящено вопросам переменного электромагнитного поля.

Материал о статических и стационарных электрических и магнитных полях значительно сокращён и изложен в одной сводной (первой) части. Здесь главное внимание уделено отчётливому определению основных векторов электрического и магнитного полей и формулировке законов стационарного поля в дифференциальном виде.

Во второй и третьей частях (квазистационарное и нестационарное электромагнитные поля) развита теория векторных и скалярных электродинамических потенциалов — основного расчётного аппарата электромагнитных процессов. Подробно рассматривается

явление тока смещения. Приведён ряд высказываний Максвелла о токе смещения, из которых видно, как зарождалось и выкристаллизовывалось в уме великого английского физика это центральное понятие электродинамики.

В четвёртой части, занимающей почти половину объёма, рассмотрены вопросы распространения, излучения и передачи монохроматических радиоволн в направляющих системах. Изложены также основные положения теории затухания радиоволн в поглощающих средах, принцип взаимности, двойственности и т. д.

Хочется отметить, что классическая теория электромагнитного поля, в том виде как её создали Максвелл и Герц, имеет большой познавательный интерес, и при отчётливом усвоении её основ в уме создаётся изумительная по своей стройности, цельности и содержательности картина электромагнитных явлений, доставляющая глубокое наслаждение.

Автор искренне благодарит редактора книги профессора Исаю Герцовича Кляцкина за ценные замечания в процессе подготовки материала к печати, много способствовавшие улучшению текста.

Все замечания, пожелания и отзывы по книге следует направлять в издательство «Связь» (Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2).

Автор

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Электромагнитное поле и его материальность

Электромагнитное поле, в соответствии с современными научными взглядами, материально, т. е. представляет собой особую форму материи¹⁾, характеризующуюся особыми, присущими только этой форме материи свойствами, которые отличают её от других форм материи, например, от вещества²⁾.

Так, в условиях макроскопического наблюдения электромагнитное поле проявляет себя обычно как непрерывно распространяющийся волновой процесс, вещество же — как дискретная структура. Скорость распространения электромагнитного поля (электромагнитных волн) в вакууме одна и та же и равна универсальной постоянной c ($c \cong 299\,796 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$), тогда как скорость перемещения частиц вещества может иметь любые значения, меньшие c .

Нужно отметить, что веществу, наряду с дискретной атомно-молекулярной структурой, присущи, как это показывает квантовая физика, волновые свойства, а электромагнитному полю — свойства дискретной структуры (фотоны).

Электромагнитное поле, как и любая другая форма материи, обладает энергией и пропорциональной ей массой и может превращаться в другие формы материи (в частности, в вещество), с сохранением энергии и массы. Пропорциональность энергии и массы и их взаимосвязь отражены в законе Эйнштейна:

$$W = mc^2, \quad (\text{В.1})$$

где W — энергия (выраженная, например, в джоулях),
 m — масса (кг),
 c — скорость света (м/сек).

¹⁾ Это определение соответствует принятому в нашей литературе. При современном состоянии науки следовало бы говорить, что электромагнитное поле (как и мезонное поле, поле тяготения и т. д.) является формой движения материи. Эта материя, не имеющая свойств вещества, заполняющая всю Вселенную, обычно называется «вакуумом». (Прим. редактора).

²⁾ Под понятием «материя» мы, согласно классическому определению В. И. Ленина, понимаем объективную реальность, которая существует независимо от человеческого сознания, различные формы и движения которой составляют многообразие окружающего мира.

Электромагнитное поле может свободно распространяться в пространстве (такое поле мы называем свободной электромагнитной волной) и может также взаимодействовать и быть связанным с веществом.

Свойство частиц вещества быть связанными и взаимодействовать с электромагнитным полем мы называем электрическим зарядом (или иногда «электричеством»). Таким образом, электрический заряд (или «электричество») — это свойство частиц вещества или тел, характеризующее их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем.

Количественно электрический заряд характеризуется силой взаимодействия собственного поля данного заряда с полем другого заряда, которая может быть рассчитана по законам электростатики.

Представление об электричестве (электрическом заряде) как о какой-то «субстанции» (т. е. какой-то особой форме материи, как её представляли в XVIII в., «электрической жидкости») было отвергнуто в середине XIX в. Мысль о том, что электричество есть некоторое свойство частиц вещества¹⁾, впервые отчётливо высказал Фридрих Энгельс в 1882 г. в статье «Электричество»²⁾.

Электромагнитное поле имеет две стороны своего проявления — электрическую и магнитную, которые называют электрическим и магнитным полями. Раздельные названия электрической и магнитной сторон электромагнитного поля являются наследием истории. Вплоть до начала XIX века (до открытия Эрстеда) учёные, исследовавшие электрические и магнитные явления, не находили связи между ними. Лишь немногие крупные учёные XVIII в. (Ломоносов, Эпинус и др.) предполагали возможность такой связи.

Представление об электромагнитном поле, как о некоторой сумме электрического и магнитного полей является существенно ошибочным. Электрическое и магнитное поля не существуют раздельно. О неразрывности их как сторон единого электромагнитного поля можно заключить на основании того общеизвестного факта, что ни при каких условиях опыта эти поля не наблюдаются изолированно одно от другого. Та или иная степень проявления этих сторон электромагнитного поля определяется рядом физических условий (например, состоянием относительного движения, наличием электрических зарядов, токов и т. д.). В зависимости от указанных физических условий и характер электрических и магнитных проявлений электромагнитного поля может быть различен.

В некоторых случаях особенно отчётливо будет проявляться электрическая сторона электромагнитного поля (неподвижный

¹⁾ Вероятнее всего, некоторая форма движения.

²⁾ Ф. Энгельс. Диалектика природы. ОГИЗ, 1948, стр. 85.

электрический заряд и электростатическое поле), в других — магнитная (поле постоянного магнита). Мерой проявления электрической и магнитной сторон электромагнитного поля может служить соотношение электрической и магнитной энергий, сумма которых составляет энергию электромагнитного поля. Так, например, в электромагнитной волне, распространяющейся в идеальной среде (среда, удельная проводимость которой $\sigma=0$), объёмная плотность электрической энергии равна магнитной, в случае же поглощающей среды ($\sigma \neq 0$) объёмная плотность магнитной энергии будет больше электрической.

Представления об электромагнитном поле и его свойствах сложились в результате длительной эволюции, огромной работы, проделанной исследователями, изучавшими электромагнитные явления на протяжении ряда веков.

Представляется интересным и важным для понимания природы и основных свойств электромагнитного поля кратко рассмотреть эволюцию знаний об электромагнитных явлениях и возникновение теории электромагнитного поля.

В.2. Краткая история развития учения об электромагнитном поле

Рассматривая учение об электрических и магнитных явлениях в историческом плане, можно наметить несколько периодов, каждый из которых будет характеризоваться качественно новой, более общей, более высшей точкой зрения на эти явления.

Обычно переход к такой новой точке зрения обусловливается непосредственно открытием, обнаруживающим новые связи между явлениями, казавшимися до этого несвязанными, не зависящими друг от друга, т. е. подтверждением одного из основных законов материалистической диалектики — закона о взаимной связи явлений.

Самые первые сведения об электрических явлениях идут от греческого философа Фалеса Милетского (V в. до н. э.), которому были известны электрические свойства натёртого янтаря.

К тому же времени, по свидетельству греческого философа Платона, относятся и первые сведения греков о магните.

Есть указания, что магнит («камень, указывающий направление») был известен в Китае за тысячу с лишним лет до н. э. От китайцев о магнитном «югоуказателе» узнали арабы, и в VIII в. н. э. компас становится известен в Европе.

Первая попытка осознать сущность действия магнита принадлежит римскому поэту-философу Лукрецию Кару (99—55 гг. до н. э.). Продолжая материалистическую линию, идущую от греческих философов Демокрита (460—370 гг. до н. э.) и Эпикура

(341—270 гг. до н. э.), Лукреций, в своей поэме «О природе вещей», объясняет действие магнита материальными истечениями из его пор.¹⁾

Объяснение магнитных и электрических явлений механическими истечениями особой «электрической» или «магнитной» материи из наэлектризованных или намагниченных тел было заимствовано у Лукреция деятелями эпохи Возрождения и держалось вплоть до XVIII в., до создания теории поля.

К IV в. н. э. античная культура приходит в упадок. В 415 г. христианские монахи-изуверы разрушают и уничтожают последний оплот культуры древнего мира — философскую школу в Александрии и убивают её руководительницу, философа и математика Гипатию. Наступает средневековье. На тысячу лет (с V по XV вв.) Европа погружается во мрак схоластики, озаряемый лишь злобещим светом костров инквизиции. За огромный период средневековья не было сделано ничего, что оказало бы влияние на общее состояние знаний об электричестве и магнетизме.

Конец средневековья можно считать и концом первого периода развития знаний об электрических и магнитных явлениях, периода самых первоначальных, во многом случайных сведений об этих явлениях и чисто умозрительных попыток их осознания.

Второй период начинается с XVI в., когда под напором возрастающих новых производительных сил, успехов торговли, промышленности и мореплавания, средневековье сменяется эпохой Возрождения. Бесплодная схоластика, может быть способствовавшая развитию формальной логики, была бессильна ответить на вопросы, возникающие из назревшей потребности изучать природу.

Учёные эпохи Возрождения, особенно англичанин Фрэнсис Бэкон (1561—1626 гг.) и итальянец Галилео Галилей (1564—1642 гг.), создают и пропагандируют экспериментальный метод и закладывают основы рациональной механики и гидравлики.

Продолжатель работ Галилея, великий английский учёный Исаак Ньютон (1643—1727 гг.) развивает механику и открывает закон тяготения. Главная работа Ньютона «Математические начала естествознания» выходит в свет в 1687 г.

В этой работе, оказавшей огромное влияние на развитие естествознания, Ньютон устанавливает основы нового физического миропонимания, даёт точные определения таких основных понятий естествознания, как пространство, время, сила, масса, тяготение. Определения Ньютона оставались незыблемы более двухсот лет и лишь в 1905 г. подверглись обобщению и дополнению в теории относительности Эйнштейна.

¹⁾ Лукреций. О природе вещей. Перевод Ф. А. Петровского, т. 1. Изд. АН СССР, 1946, стр. 425.

Теория тяготения Ньютона, на основе которой развивается небесная механика, способствует возникновению так называемой теории дальнего действия, т. е. теории, позволяющей рассчитывать взаимодействие тел, находящихся на расстоянии.

В области изучения явлений электричества и магнетизма в этот период положение было иным. Здесь ещё не создаётся новой, обобщающей теории, а происходит лишь накопление экспериментальных фактов. Так, придворный врач английской королевы Елизаветы Вильям Гильберт (1540—1603 гг.) в результате обширных экспериментальных исследований явлений электричества и магнетизма устанавливает существенное их различие. Магнетизм Гильберт считает приращённым свойством тел, аналогичным тяжести, электрические же явления объясняет в духе Лукреция — особыми истечениями из мельчайших пор. Американский учёный и общественный деятель Вениамин Франклин (1706—1790 гг.) полагает, что электричество — особый химический элемент, но столь «тонкий», что его частицы могут свободно проникать сквозь твёрдые тела.

Важнейшими достижениями того времени нужно считать открытие в 1729 г. английским учёным Стефаном Греем (1670—1736 гг.) проводников и непроводников электричества, детальное их изучение русским академиком Францем Эпинусом (1724—1802 гг.) в 1750—60 гг. и открытие явления электростатической индукции великим русским учёным Михаилом Васильевичем Ломоносовым (1711—1765 гг.) в 1753 г. и англичанином Джоном Кантоном (1718—1772 гг.) в 1753 г.

В дальнейшем экспериментальные исследования академика Эпинуса привели к новой точке зрения на явления электрических и магнитных взаимодействий. Эпинус и его сотрудник Вильке, изучая явление электростатической индукции, установили, что непроводники «непроницаемы для электрической жидкости». Чтобы объяснить явление электростатической индукции, Эпинус впервые вводит ньютонианскую идею «действия на расстоянии», порывая тем самым с попытками механистического (гидродинамического) истолкования этого явления в духе Лукреция.

В своей работе «Опыт электрической и магнитной теории», вышедшей в 1759 г., Эпинус говорит, что около наэлектризованного тела никакой особой атмосферы, кроме воздушной, нет, и вводит понятие о «сфере электрического влияния», что на современном научном языке может быть названо «электростатическим полем». Эта точка зрения отражает более высокую степень познания электрических и магнитных явлений, и середину XVIII в. можно считать началом третьего периода в истории развития учения об электричестве и магнетизме, — периода, когда механические представления об электрических и магнитных взаимодействиях сменялись теорией дальнего действия в духе воззрений ньютонианцев.

Дальнейшее развитие ньютонианской точки зрения на электрические и магнитные явления основывалось на работах французского учёного Шарля-Огюстена Кулона (1736—1806 гг.), установившего в 1785 и 1788 гг. законы взаимодействий электрических зарядов и магнитных полюсов. Обратная пропорциональность квадратам расстояний электрических и магнитных сил взаимодействий, определяемая законами Кулона, оказалась аналогичной закону тяготения Ньютона.

Естественно, что учёные той эпохи (конец XVIII — начало XIX вв., эпоха Великой французской революции) начали применять математические методы, разработанные для небесной механики, к анализу электрических и магнитных явлений.

Так, потенциальная (силовая) функция, найденная французским математиком Жозефом-Луи Лагранжем в 1773 г., и дифференциальное уравнение, решением которого она является (уравнение Лапласа, данное им в 1782 г., и Пуассона — в 1812 г.), были применены к расчётам электрического и магнитного полей английским физиком Георгом Грином (1793—1841 гг.) в 1828 г. в сочинении «Опыт приложения математического анализа к явлениям электричества и магнетизма». Чрезвычайно важными для дальнейшего развития общих вопросов расчёта электрического и магнитного полей явились интегральное преобразование, найденное русским математиком Михаилом Васильевичем Остроградским (1801—1862 гг.) в 1834 г., и ряд работ великого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777—1855 гг.).

Обширные приложения математического анализа к явлениям электричества и магнетизма накладывают некоторый оттенок формализма на представления об электрических и магнитных явлениях (теория дального действия); учёные той эпохи не задумываются над тем, как происходят электрические и магнитные взаимодействия, не ставят вопроса о том, каким образом передаются эти взаимодействия через пространство, разделяющее токи и магниты. Молчаливо полагали, что эти взаимодействия совершаются с бесконечно большой скоростью через пустое пространство.

Летом 1820 г. датский учёный Ханс Эрстед (1777—1851 гг.) открывает магнитное действие электрического тока. Опыт Эрстеда (отклонение магнитной стрелки при пропускании тока по проводу, расположенному вблизи стрелки) обнаружил единство электрических и магнитных процессов, и проблему их экспериментального и теоретического изучения можно было поставить по-новому.

Сообщение об опыте и открытии Эрстеда быстро распространилось в учёных кругах. Особенно заинтересовались этим открытием учёные Парижской Академии наук. В ту революционную эпоху Парижская Академия была центром наиболее прогрессивной научной мысли. В её стенах работали передовые учёные, создатели системы

метрических мер, творцы знаменитой «Энциклопедии», пропагандисты материализма в вопросах физики и философии.

Среди них было много крупных математиков и физиков (Пьер-Симон Лаплас (1749—1827 гг.), Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813), Симон-Дени Пуассон (1781—1840 гг.), Андре-Мари Ампер (1775—1836 гг.), Жан-Лерон Д'Аламбер (1717—1783 гг.), Франсуа-Доминик Араго (1786—1853 гг.) и др.

Особенно энергично занялся изучением нового физического явления Ампер. В течение осени и зимы 1820 г. Ампер в своих знаменитых докладах сообщает Академии о новых открытых им электромагнитных явлениях (о взаимодействии токов, об эквивалентности соленоида магниту и др.), формулирует закон взаимодействия токов и магнитов («закон Ампера»). В дальнейших работах, относящихся к 1826 г., Ампер развивает электрическую теорию магнетизма. Опыты молодых учёных Ж. Б. Био (1774—1862 гг.) и Ф. Савара (1791—1841 гг.) и теоретические исследования Лапласа приводят в 1820 г. к установлению первого закона электромагнитных взаимодействий, известного под названием «закона Био—Савара».

Таким образом, на основе обнаруженного нового физического факта (магнитного действия электрического тока) в предельно короткий срок (в несколько месяцев) закладываются экспериментальные и теоретические основы учения о взаимодействии электрических токов и магнитов — электродинамики, как назвал это учение Ампер.

Свои экспериментальные и теоретические исследования Ампер подытожил в знаменитом труде «Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта», вышедшем в 1826 г. Эта работа является первым трудом по электродинамике.¹⁾

Отметим, что Ампер, как и учёные Парижской Академии, работавшие одновременно с ним, придерживался ньютонианских взглядов на электромагнитные явления в духе дальнего действия.

Наряду с исследованием магнитных действий электрических токов возникает обратная задача: получить какой-либо электрический процесс с помощью магнитных явлений.

Эту задачу, после одиннадцатилетних экспериментальных исследований, решил великий английский физик Михаил Фарадей (1791—1867 гг.), открыв в 1831 г. явление электромагнитной индукции²⁾.

Впервые Фарадей наблюдал явление электромагнитной индукции в эксперименте с катушкой, имеющей две обмотки, изолированные друг от друга, причём одна из них была подключена к батарее, а другая — к гальванометру. При замыкании и размыкании

¹⁾ А. М. Ампер. Электродинамика. Изд. АН СССР, 1954.

²⁾ Подробнее об открытии Фарадея см. в § 30.

тока в первой обмотке, во второй возникали кратковременные толчки наведённого тока.

Фарадей объяснил это явление как электромагнитную индукцию, происходящую благодаря возникновению и исчезновению намагничивания вследствие включения и выключения тока в обмотке, присоединённой к батарее. В дальнейшем Фарадей, анализируя электромагнитные явления (в частности, явление электромагнитной индукции), устанавливает влияние среды на электрические и магнитные взаимодействия, создаёт понятие физического, материального поля и заключает, что электрические и магнитные взаимодействия передаются во всякой среде, а в случае отсутствия вещественной среды, в особой, упругой, всепроникающей среде — эфире, подобно тому, как передаются деформации в упругом теле.

Можно считать, что четвёртый период истории развития теории электромагнетизма, период становления теории физического, материального электромагнитного поля, начинается с открытий и идей Фарадея (1830 г.).

Фарадей переносит сущность электромагнитного процесса с электрического заряда или электрического тока в пространство, наполненное эфиром. Эта точка зрения оказалась чрезвычайно плодотворной. Она, естественно, привела Фарадея к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий, о чём он сообщает в специальном письме в 1832 г. По просьбе Фарадея это письмо хранилось запечатанным в архивах Лондонского Королевского общества¹⁾. Письмо было обнаружено и опубликовано лишь в 1938 г.

Фарадей пишет:

«Некоторые результаты исследований, описанные в двух статьях под заглавием «Экспериментальные работы с электричеством», недавно прочтенных в Королевском обществе, и вопросы, вытекающие из них в связи с другими взглядами и опытами, привели меня к заключению, что на распространение магнитного воздействия требуется время, т. е. при воздействии одного магнита на другой, отдаленный магнит или кусок железа влияющая причина (которую я позволю себе назвать магнетизмом) распространяется от магнитных тел постепенно и для своего распространения требует определенного времени, которое, очевидно, окажется весьма незначительным.

Я полагаю также, что электрическая индукция распространяется точно таким же образом. Я полагаю, что распространение магнитных сил от магнитного полюса похоже на колебания взволнованной водной поверхности или же на звуковые колебания частиц воздуха, т. е. я намерен приложить теорию колебаний к магнитным явлениям, как это сделано по отношению к звуку и является наиболее вероятным объяснением световых явлений.

По аналогии я считаю возможным применить теорию колебаний и к распространению электрической индукции. Эти воззрения я хочу проверить экспериментально.

¹⁾ Британской Академии наук.

В настоящее время, насколько мне известно, никто из учёных, кроме меня, не имеет подобных взглядов»¹⁾.

Связь между электромагнитными и световыми явлениями, о которой упомянуто в приведённом письме, Фарадей упорно искал, и лишь в 1843 г. он открыл эффект вращения плоскости поляризации поляризованного пучка света в продольном магнитном поле. Полное теоретическое объяснение этого эффекта оказалось возможным только в рамках современной квантовой физики.

С эпохи Фарадея в развитии теории электромагнитных явлений намечаются две линии. Одна — являющаяся продолжением исследований электромагнитных явлений в соответствии с идеями XVIII в. (теории дальнодействия), в духе работ Ампера [труды Вильгельма Вебера (1804—1890 гг.), Германа Гельмгольца (1821—1894 гг.), Густава Кирхгофа (1824—1887 гг.), Вильяма Томсона (1824—1907 гг.) и др.] Эта линия развития принесла ряд весьма важных частных результатов, но в конце концов оказалась несовместимой с учением о материальном поле.

Вторая, начатая Фарадеем и продолженная в работах Ленца, Максвелла, Герца и др., основывалась на принципе близкодействия и привела к созданию теории материального физического электромагнитного поля.

Различие этих направлений в изучении электромагнитных явлений ярко характеризуется Максвеллом в предисловии к его «Трактату об электричестве и магнетизме», где он говорит:

«... Приступив к изучению труда Фарадея²⁾, я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов. Я также нашел, что этот метод можно выразить в обычной математической форме и таким образом сравнить с методом профессиональных математиков.

Так, например, Фарадей видел силовые линии, пронизывающие все пространство, там, где математики видели центры сил, притягивающихся на расстоянии; Фарадей видел среду там, где они не видели ничего, кроме расстояния; Фарадей предполагал источник и причину явлений в реальных действиях, протекающих в среде, они же были удовлетворены тем, что нашли их в силе действия на расстоянии, приписанной электрическим флюидам.

Когда я переводил то, что я считал идеями Фарадея, в математическую форму, я нашел, что в большинстве случаев результаты обоих методов совпадали, так что ими объяснялись одни и те же явления и выводились одни и те же законы действия, но что методы Фарадея походили на те, при которых мы начинали с целого и приходили к частному путем анализа, в то время как обычные математические методы были основаны на принципе движения от частного и построения целого путем синтеза.

Я также нашел, что многие из открытых математиками плодотворных методов исследования могли быть значительно лучше выражены с помощью идей, вытекающих из работ Фарадея, чем в их оригинальной форме...»³⁾.

¹⁾ См.: «Электрические колебания и волны». Связьиздат, 1941, стр. 33.

²⁾ Речь идёт об «Экспериментальных исследованиях по электричеству и магнетизму» Фарадея (русский перевод, изд. АН СССР, т. 1, 1947 и т. 2, 1951).

³⁾ Д. К. Максвелл. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. ГТТИ, 1952, стр. 349—350.

Нужно отметить, что за сто лет до Фарадея мысль о связи световых и электрических явлений возникала у Ломоносова. В своих «Заметках к теории света и электричества» (1756 г.) Ломоносов ставит вопрос: «Будет ли луч иначе преломляться в наэлектризованной воде или наэлектризованном стекле». В «Химических и оптических записках» (1762—1763 гг.) Ломоносов пишет: «Отведати в фокусе зажигательного стекла или зеркала электрической силы»¹⁾.

Конечно, такие опыты, даже если бы они и были тогда осуществлены, не могли дать сколько-нибудь определённого ответа из-за несовершенства экспериментальной техники того времени, но интересно отметить глубину прозорливости Ломоносова.

Важным шагом в развитии теории электромагнетизма явились исследования русского академика Эмилия Христиановича Ленца (1804—1865 гг.). В результате этих исследований Ленц в 1833 г. показал, что явление электромагнитной индукции (закон Фарадея) и явление силового взаимодействия магнитного поля и тока (закон Ампера) взаимно связаны и представляют две формы проявления единого электромагнитного процесса.

Сформулировав своё «правило», Ленц вскрыл диалектику электромагнитного процесса. Правило Ленца в дальнейшем легло в основу принципа обратимости электрических машин²⁾.

Основную работу в построении теории электромагнитного поля проделал Джеймс Кларк Максвелл (1831—1879 гг.). Максвелл работал и перевёл на математический язык исследования Фарадея и, на основании теоретических соображений, открыл новое электромагнитное явление, так называемый ток смещения, представляющий собой изменяющееся электрическое поле. В работе «О физических силовых линиях»³⁾ Максвелл утверждает, что изменяющееся электрическое поле должно возбуждать в окружающем пространстве магнитное поле, точно такое же, какое возбуждается обыкновенным электрическим током, т. е. фактическим движением электрических зарядов, в то время как изменяющееся магнитное поле, согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, возбуждает вихревое электрическое поле. На основе этих соображений Максвелл составляет два знаменитых уравнения (см. § 38) и решая их, приходит к волновому уравнению, из которого следует, что электромагнитные возмущения должны распространяться с скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (\text{В.1})$$

¹⁾ Б. Н. Меншуткин. М. В. Ломоносов. Изд. АН СССР, 1947, стр. 169.

²⁾ Э. Х. Ленц. Избранные труды. Изд. АН СССР, 1950, стр. 148.

³⁾ Подробнее об этих работах см. в §§ 28, 29 и 30.

Эта скорость оказывается совпадающей со скоростью света. Отсюда, заключив, что свет — также электромагнитный процесс, Максвелл строит электромагнитную теорию света.

В своих начальных работах Максвелл пытается построить механическую модель электромагнитного процесса, однако в дальнейшем он от таких попыток отказывается.

Максвелл показал, что электромагнитное поле обладает объёмно распределённой энергией, и вычислил её объёмную плотность.

Дальнейшие исследования энергетической стороны электромагнитного процесса позволили Максвеллу предсказать и рассчитать давление электромагнитной волны, а следовательно и света, на вещество.

Важный вопрос о распространении энергии в пространстве решил в это время русский учёный, профессор Николай Алексеевич Умов (1846—1915 гг.). В своей классической работе «Уравнения движения энергии в телах», вышедшей в Одессе в 1874 г., Умов на основе принципа сохранения энергии разработал в самом общем виде метод подсчёта энергии, проходящей сквозь некоторую границу, и ввёл особый вектор — вектор Умова, определяющий плотность потока мощности.

Работы Умова ставили вопрос о распространении энергии в пространстве в самом общем виде и не касались специального случая распространения энергии электромагнитного поля. Эту задачу с помощью теории Максвелла решил в 1885 г. английский физик Джон Генри Пойнтинг (1852—1914 гг.).

Теория Максвелла была блестяще подтверждена опытами немецкого физика Генриха Рудольфа Герца (1857—1894 гг.), получившего в 1886—1888 гг. электромагнитные волны и изучившего их свойства, в том числе и скорость распространения. Герц экспериментально обнаружил ток смещения, предсказанный теоретически Максвеллом¹⁾.

К сожалению, создатель теории электромагнитного поля, Д. К. Максвелл не дожил до её экспериментального подтверждения и последовавшего затем всеобщего признания. В 1879 г. Максвелл умер от туберкулёза в возрасте 48 лет.

Как упоминалось выше, из теории Максвелла следовало, что при падении электромагнитной волны (в частности, света) на поверхность какого-нибудь тела в результате взаимодействия электромагнитного поля и вещества возникает давление, величину которого можно рассчитать теоретически.

Впервые световое давление было обнаружено и измерено в классических опытах русского физика Петра Николаевича Лебедева (1866—1912 гг.) в 1900 г.

¹⁾ Подробнее о работах Герца см. в § 37.

Работы Фарадея, Максвелла и Герца послужили теоретическим фундаментом для одного из важнейших технических изобретений — радиосвязи, которая впервые была осуществлена русским учёным, инженером-электриком Александром Степановичем Поповым (1859—1905 гг.) в 1895 г.

Радиосвязь основывается на явлении излучения и распространения электромагнитного поля в форме радиоволн. Известно, что передача электромагнитной энергии без проводов возможна не только в форме излучаемых радиоволн, но и при непосредственной электромагнитной или электростатической связи (например, в трансформаторе, в двух электрических цепях, связанных взаимной индуктивностью или, например, при наведении статического заряда). Однако при такой связи интенсивность электромагнитного поля очень быстро падает с увеличением расстояния между цепями (пропорционально $\frac{1}{R^2}$ и даже $\frac{1}{R^3}$, где R — расстояние между цепями или взаимодействующими зарядами), тогда как при распространении электромагнитного поля в форме радиоволн интенсивность его падает медленнее (пропорционально лишь $\frac{1}{R}$).

До работ А. С. Попова многие исследователи пытались осуществить беспроводную связь. Однако обычно использовалась непригодная для этой цели непосредственная индуктивная связь. Попов же воспользовался электромагнитной энергией свободной радиоволны и, как известно, достиг полного успеха.

Физические свойства электромагнитного поля, обнаруженные на протяжении XIX в., и теоретические их исследования постепенно убеждали учёных в материальности этого поля. Однако материальность электромагнитного поля понималась в то время в механистическом смысле. Под влиянием идей, идущих от Фарадея, сложилось представление, что «носителем» электромагнитных процессов является некая непрерывная упругая среда (так называемый «электромагнитный эфир»), заполняющая всё пространство и имеющая определённую «лапшеобразную» структуру, состоящую из упругих «магнитных трубок», способных сокращаться вдоль оси (электромагнитное «тяжение») и расширяться в поперечном сечении (электромагнитный «распор»). Электромагнитные же явления представлялись как различные деформации, колебания, вращения этого эфира.

Механистическая модель электромагнитного поля, будучи в своё время прогрессивной, позволила Фарадею, Максвеллу, Герцу и ряду других учёных создать стройную теорию электромагнитного поля. В настоящее же время единственно правильным в этой механистической модели остаётся мысль о материальности электромагнитного поля.

Как мы покажем дальше, описанная механистическая структура поля и представление об эфире постепенно пришли в противоречие с опытом и были отброшены.

В это же время во второй половине XIX в., наряду с утверждением и развитием теории электромагнитного поля, появляется чуждый понятию непрерывного поля объект — элементарная частица вещества, обладающая определённым элементарным электрическим зарядом — электрон. Электроны, а в дальнейшем и другие элементарные частицы, несущие как положительные, так и отрицательные заряды, были впервые обнаружены и исследованы в опытах с катодными и каналовыми лучами, возникающими при разрядах в сильно разреженных газах. Электрический заряд этих частиц оказывался всегда равен или кратен заряду электрона.

Мысль о дискретности электрических зарядов, как отметил позднее Гельмгольц в 1881 г. в речи, посвящённой памяти Фарадея, является очевидным следствием законов электролиза, открытых Фарадеем в 1833 г. Элементарный электрический заряд можно рассчитать из отношения числа Фарадея (заряд в кулонах, переносимый при электролизе одного киломоля одновалентного вещества) к числу Авогадро (числу молекул в киломоле):

$$e = \frac{9,65 \cdot 10^7}{6,02 \cdot 10^{26}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ к.} \quad (\text{В.3})$$

Точно такое же значение элементарного заряда получается при его непосредственном измерении (например, в опытах Милликена с мельчайшими заряженными капельками масла).

Естественно, что потребовалась единая теория, которая бы объединила электромагнитное поле и электрон.

Такую теорию (теорию электронов) создаёт к концу XIX в. голландский физик Гендрик Антоон Лоренц (1853—1928 гг.) Лоренц обобщает уравнения Максвелла, вводя особую электромагнитную силу (сила Лоренца). С помощью своей теории ему удаётся объяснить ряд оптических эффектов (например, эффект Зеемана и др.).

Однако теория электронов, созданная на основе механистической эфирной теории, оказалась в противоречии с некоторыми опытными данными и не была последовательной до конца.

Пятый период в развитии теории электромагнитного поля относится уже к XX в.; этот период характеризуется полным крушением механистических теорий электромагнитного поля и дальнейшим утверждением идеи о его материальности.

В 1881 г. американский физик Альберт Абрахам Майкельсон (1852—1931 гг.) поставил свой знаменитый опыт, результат которого нельзя было объяснить, исходя из механистической картины электромагнитного поля.

Согласно механистической, эфирной теории поля, электромагнитный эфир должен заполнять всё пространство. Следовательно, при движении тела в пространстве должен возникать своего рода эфирный ветер. Майкельсон решил это проверить. В опыте Майкельсона движущимся телом был земной шар. Майкельсон измерял скорость распространения света («колебаний эфира») по двум перпендикулярным направлениям, из которых одно совпадало с направлением движения земли. Если есть эфирный ветер, то должна быть обнаружена разность во времени распространения света в этих двух направлениях. Для обнаружения этой разности Майкельсон применил точнейший, интерференционный метод измерения. Однако и опыты Майкельсона и последовавшие за ними ещё более точные опыты (Майкельсона—Морлея в 1887 г., Дейтона—Мюллера в 1904 г. и др.) всегда давали отрицательный результат: «эфирного ветра» не обнаруживалось.

Ряд учёных (Фицджеральд, Лоренц) пытались объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона, исходя из теории электронов и предполагая, что всякое тело при движении сокращается вдоль направления движения. Однако такое объяснение, хотя оно и основывалось на теории электронов, всё же было объяснением, придуманным специально для данного случая, а не вытекающим из основных представлений теории.

В дальнейшем оказалось, что отрицательный результат опыта Майкельсона затрагивал гораздо более глубокие основы электродинамики и вообще физических представлений о пространстве, времени и материи.

Вопрос был разрешён в 1905 г. великим немецким физиком Альбертом Эйнштейном (1879—1955 гг.) в созданной им теории относительности. В небольшой статье двадцатипятилетнего Эйнштейна¹⁾ были подвергнуты критике укоренившиеся и считавшиеся само собой разумеющимися представления о пространстве и времени, развиты основы нового их понимания и сделаны приложения этих новых идей к вопросам механики и электродинамики.

Оказалось, что эти новые идеи согласуются с основными положениями теории электромагнитного поля в обобщённой формулировке, данной Лоренцем в теории электронов, а специальное преобразование движущихся координат, открытое Лоренцем («преобразование Лоренца»), автоматически получалось из основных положений теории относительности (из постулата о постоянстве скорости света).

Для теории электромагнитного поля было особенно важно одно из заключений, вытекающих из теории относительности, — за-

¹⁾ Эта статья была опубликована в немецком журнале «Annalen der Physik» (№ 17, 891, 1905) под названием «Zur Elektrodynamik bewegter Körper» («К электродинамике движущихся тел»).

включение о том, что электромагнитного или светового эфира, как его понимали в XIX в., — нет. Поэтому нет смысла ставить вопрос об «эфирном ветре», и, следовательно, отрицательный результат опыта Майкельсона — само собой разумеющееся следствие теории относительности.

Сейчас же возник вопрос: а что же такое свет, электромагнитное поле, что «колеблется» в электромагнитной волне?

Этот вопрос, а также ряд следствий из теории относительности и других открытий физики начала XX в. привели многих учёных к непоследовательным, а часто просто неправильным заключениям.

Так, например, факт изменения величины массы тел в зависимости от скорости их движения (следствие теории относительности) трактовался учёными, не различавшими понятия массы и материи, как возможность исчезновения материи или появления её из ничего, что материя должна быть сведена к энергии, что поскольку энергия есть движение, можно говорить о движении без того, что движется, что нарушается закон сохранения энергии и т. д. Подобные идеалистические суждения привели в физике к положению, которое В. И. Ленин охарактеризовал словами «кризис физики», и в своей классической работе «Материализм и эмпириокритицизм», написанной в 1908 г. и изданной в 1909 г., с полной отчётливостью выяснил причины «кризиса физики». В этой книге В. И. Ленин развил и изложил диалектико-материалистическое истолкование основных понятий и положений физики, дав своё знаменитое определение понятия «материя». В главе V «Материализма и эмпириокритицизма» («Новейшая революция в естествознании») в разделе 2 («Материя исчезла») Ленин пишет:

...«Материя исчезает» — это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идет глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. п.) и которые теперь обнаруживаются как относительные, присущие только некоторым состояниям материи. Ибо единственное «свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство быть объективной реальностью, существовать вне нашего сознания.

Ошибка махизма вообще и махистской новой физики¹⁾ состоит в том, что игнорируется эта основа философского материализма и различие материализма метафизического от материализма диалектического. Признание каких-либо неизменных элементов «неизменной сущности вещей» и т. п. не есть материализм, а есть метафизический, т. е. антидиалектический материализм²⁾.

Таким образом, как это следует из основных положений диалектического материализма, изменение массы тела с изменением его скорости вовсе не означает исчезновения (при уменьшении мас-

¹⁾ Эрнст Мах (1838—1916) — австрийский физик и философ-позитивист. Мах считал, что предметы окружающего мира лишь «комплексы ощущений» и не имеют самостоятельного существования.

²⁾ В. И. Ленин. Соч., изд. 4, т. 14, стр. 247—248.

сы) или появления (при увеличении массы) материи, так как масса (как и энергия) — это не материя, а лишь одно из неотъемлемых её свойств.

Далее Ленин продолжает:

«Чтобы поставить вопрос с единственно правильной, т. е. диалектически-материалистической точки зрения, надо спросить: существуют ли электроны, эфир, и так далее вне человеческого сознания, как объективная реальность или нет? На этот вопрос естествоиспытатели также без колебания должны будут ответить, и отвечают да... И этим решается вопрос в пользу материализма, ибо понятие материи, как мы уже говорили, не означает гносеологически ничего иного, кроме как: объективная реальность, существующая независимо от человеческого сознания и отображаемая им»¹⁾.

Заметим, что в полном соответствии с ленинскими словами, приведёнными выше, Эйнштейн, уничтоживший своей теорией относительности эфир в его механистическом понимании, не сомневается в материальности электромагнитного поля. В написанной Эйнштейном вместе с польским физиком Л. Инфельдом книге «Эволюция физики», вышедшей в 1938 г., говорится:

...«Для современного физика электромагнитное поле столь же реально, как стул, на котором он сидит»²⁾.

Ленин говорит дальше:

...«Разрушимость атома, неисчерпаемость его, изменчивость всех форм материи и ее движения всегда были опорой диалектического материализма. Все грани в природе условны, относительны, подвижны, выражают приближение нашего ума к познанию материи, — но это нисколько не доказывает, чтобы природа, материя сама была символом, условным знаком, т. е. продуктом нашего ума»³⁾.

Таким образом, все те новые электромагнитные явления и свойства, открытые в начале XX в. [например, вывод о том, что механистического эфира не существует, свойство изменчивости массы, установление единства непрерывного (электромагнитная волна) и дискретного (фотоны) в структуре электромагнитного поля, открытое в 1934 г. явление преобразования «частиц» вещества (например, электронов, позитронов) в «частицы» света (фотоны) и наоборот], рассматриваемые с позиции диалектического материализма, ни в коей мере не отрицают факта материальности электромагнитного поля.

Рассмотрение дальнейшей эволюции учения об электромагнитном поле (попытки Эйнштейна и других учёных объединить теорию электромагнитного и гравитационного полей в теорию единого поля, квантовая теория поля и т. д.) выходит за рамки нашего курса, посвящённого в основном теории поля Фарадея—Максвелла—Герца.

¹⁾ В. И. Ленин. Соч., изд. 4, т. 14, стр. 248.

²⁾ А. Эйнштейн и Л. Инфельд. Эволюция физики. Пер. с англ., 1948, стр. 144.

³⁾ В. И. Ленин. Соч., изд. 4, т. 14, стр. 268.

В заключение приведём определения некоторых основных понятий электромагнетизма, принятых Комитетом технической терминологии АН СССР¹⁾ в 1957 г.:

Электромагнитное поле. — Особая форма (вид) материи, отличающейся непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны) и обнаруживающей дискретность структуры (фотоны), характеризующейся способностью распространяться в вакууме (в отсутствие сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/сек, оказывающей на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости.

Электрический заряд. — Свойство частиц вещества или тел, характеризующее их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем; имеет два вида, известные как положительный заряд (заряд протона, позитрона и др.) и отрицательный заряд (заряд электрона и др.); количественно определяется по силовому взаимодействию тел, обладающих электрическими зарядами.

Электрическое поле. — Одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывающая силовое воздействие на заряженные частицы и тела и выявляемая по силовому воздействию на заряженные тела и частицы.

Магнитное поле. — Одна из двух сторон электромагнитного поля обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывающая силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы и выявляемая по силовому воздействию, направленному нормально к направлению движения этих частиц и пропорциональному их скорости.

Современная квантовая теория поля, исходя из факта аннигиляции элементарных частиц и античастиц²⁾, устанавливает наличие материальной среды, которая обуславливает процесс аннигиляции. Такая среда в квантовой механике и квантовой теории поля называется «вакуумом».

Так, например, факт возможности взаимодействия двух электрических зарядов обусловлен тем, что эти заряды находятся в «электромагнитном вакууме». Электрическое поле будет возбуждённым состоянием электромагнитного вакуума.

Определение электромагнитного поля, данное Комитетом технической терминологии АН СССР, является определением общего порядка, не исключающим и не противоречащим уточнениям, приведённым в предыдущих строках.

¹⁾ «Электричество», № 6, 1957, стр. 14.

²⁾ Например, при «столкновении» электрона и позитрона происходит процесс их аннигиляции, т. е. эти частицы перестают существовать как частицы вещества, а переходят в два гамма-кванта, в «порцию» электромагнитного излучения с точным сохранением массы и импульса.

СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава I

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 1. Поле различно распределённых зарядов в вакууме

Электромагнитное поле, как и любой электромагнитный процесс, является стационарным, если основные физические величины, характеризующие их, остаются неизменными во времени.

В стационарном электромагнитном поле электрическая его сторона (электрическое поле) оказывается непосредственно связанной лишь с электрическими зарядами, а магнитная (магнитное поле) — с электрическими токами. Поэтому можно рассматривать отдельно электрическое стационарное поле [и, в частности, электростатическое поле — электрическое поле неподвижных (в среднем!) заряженных частиц и тел, находящихся в диэлектрике] и магнитное стационарное поле — магнитное поле постоянных токов (и, в частности, магнитостатическое поле — магнитное поле постоянных магнитов).

Электрическое поле оказывает силовое воздействие на внесённое в него пробное заряженное тело (пробный заряд).

Величина этого воздействия определяется вектором напряжённости электрического поля E :

$$E = \frac{F}{q}, \quad (1.1)$$

т. е. отношением силы F , действующей на пробный заряд q , к этому заряду¹⁾.

¹⁾ В дальнейшем под термином «заряд» мы будем понимать также «заряженную частицу» или «заряженное тело».

Для измерения рассматриваемых величин примем Международную систему СИ¹⁾.

Напряжённость поля точечного заряда Q на расстоянии R от него рассчитывается по закону Кулона и в вакууме равна

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}^\circ, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{R}^\circ$ — единичный вектор.

Размерность напряжённости поля

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{H}{K} = \frac{\frac{dJ}{M \cdot K}}{M \cdot K} = \frac{V \cdot K}{M \cdot K} = \frac{V}{M}.$$

В ф-ле (1.2) коэффициент ϵ_0 появляется как коэффициент пропорциональности, имеющий определённое числовое значение, если все величины, входящие в формулу, измерять определёнными единицами. В системе СИ для ϵ_0 получим значение

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ с}^2} \approx 8,86 \cdot 10^{-12},$$

размерность ϵ_0 определится из этой же формулы:

$$[\epsilon_0] = \frac{[q][Q]}{[F][R^2]} = \frac{K^2}{\frac{dJ}{M} \cdot M^2} = \frac{K^2}{V \cdot K \cdot M} = \frac{\Phi}{M}.$$

Коэффициент ϵ_0 называется «электрической постоянной».

Для системы точечных зарядов Q_i напряжённость поля (как векторная величина) определяется геометрической суммой

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i \mathbf{R}_i^\circ}{R_i^2}, \quad (1.3)$$

где $i=1, 2, 3 \dots$ — номер заряда.

Если заряды пространственно распределены на линиях, поверхностях или в объёме, то напряжённость поля рассчитывают, разделяя распределённые заряды на отдельные элементарные заряды, которые можно принять за точечные, и геометрически суммируя напряжённости от этих элементарных зарядов по соответствующим распределениям.

Для линейного заряда, распределённого с линейной плотностью $\rho_{\text{лин}}$, элементарный заряд $dQ = \rho_{\text{лин}} dl$ и напряжённость будет

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_{\text{лин}} d\mathbf{l} \mathbf{R}^\circ}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (1.4)$$

¹⁾ См. ГОСТ 9867—61, а также Приложение II.

Для поверхностного заряда, распределённого с поверхностной плотностью $\rho_{\text{пов}}$, элементарный заряд, $dQ = \rho_{\text{пов}} dS$ и напряжённость получается

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\rho_{\text{пов}} dS \mathbf{R}^0}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (1.5)$$

Для объёмного заряда элементарный заряд $dQ = \rho dV$, где ρ — объёмная плотность заряда. Напряжённость получится

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho dV \mathbf{R}^0}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (1.6)$$

Отметим, что при интегрировании конец вектора $\mathbf{R}$ (точка с координатами x, y, z) остаётся фиксированным, а перемещается начало вектора вместе с соответствующим элементом (dl, dS или dV), т. е. в выражении R

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

(где ξ, η, ζ — координаты начала вектора) при интегрировании переменными являются ξ, η, ζ . В функции этих величин (и их приращений) должны быть выражены элементы dl, dS и dV . Интегрирование выполняется по всей длине заряженной линии l , по всей заряженной поверхности S и по всему объёму V среды, занятому объёмным зарядом ρ (рис. 1.1).

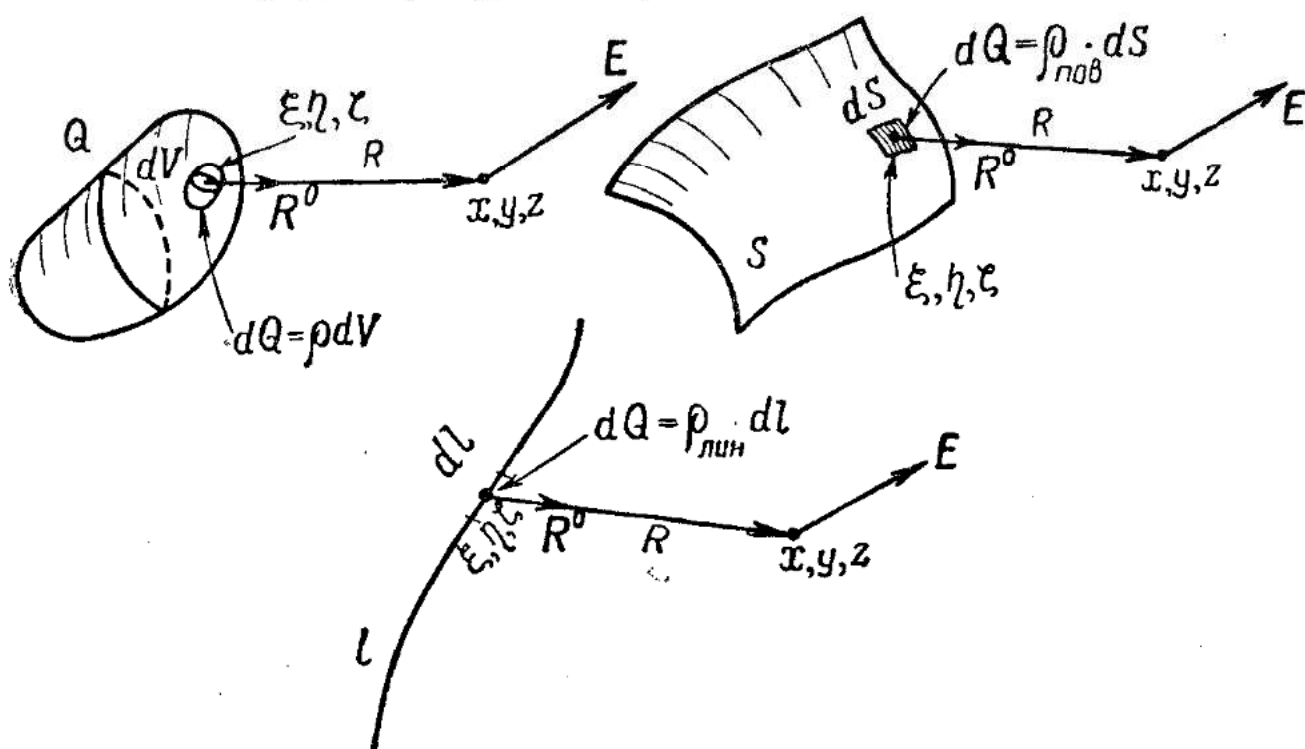


Рис. 1.1

Величины dl, dS и dV выбираются бесконечно малыми, т. е. линейные размеры этих величин должны быть значительно меньше расстояний, рассматриваемых в данной задаче (величин R, l , ли-

нейших размеров заряженной поверхности S и объёма V), и, с другой стороны, значительно больше размеров молекул и межмолекулярных промежутков, чтобы величины $\rho_{\text{лин}}$, ρ и $\rho_{\text{пов}}$ можно было считать непрерывными функциями координат $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$. Тогда элементарные заряды $\rho_{\text{лин}} dl$, $\rho_{\text{пов}} dS$ и ρdV можно считать точечными.

Эти замечания надо иметь в виду в дальнейшем.

При математическом исследовании векторного поля применяют-ся как основные две операции векторного анализа:

1. Интегрирование вектора по поверхности — вычисление «потока» вектора.

2. Интегрирование вектора по замкнутому контуру — вычисление «циркуляции» («работы») вектора (см. Приложение I).

Расчёт потока вектора напряжённости сквозь замкнутую поверхность составляет содержание теоремы Гаусса.

§ 2. Теорема Гаусса. Основные дифференциальные уравнения электростатического поля

Рассмотрим поле точечного заряда Q . Поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь поверхность S будет равен

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}^\circ \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{R}^\circ \cdot d\mathbf{S}}{R^2}.$$

Здесь $d\mathbf{S} = \mathbf{n}^\circ dS$, $\mathbf{R}^\circ \cdot d\mathbf{S} = dS \cos \alpha = dS'$, где dS' — проекция площадки dS на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору $\mathbf{R}$ (рис. 2.1).

Таким образом,

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS'}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{Q\Omega}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.1)$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым видна из точки Q площадка dS' , а следовательно, и dS и Ω — телесный угол, под которым видна вся поверхность S .

В данном случае поток Φ положителен, следовательно, и телесный угол Ω положителен. Положительной стороной поверхности считается та сторона, к которой проведена положительная нормаль. Мы условливаемся всегда в случае замкнутой поверхности наружную её сторону считать положительной и, следовательно, проводить положительную нормаль всегда наружу.

Рассматривая рис. 2.1, мы видим, что телесный угол будет положительным, если под этим углом видна отрицательная (внутренняя) сторона поверхности.

В случае замкнутой поверхности Ω может равняться либо 4π , либо нулю. Пусть наша поверхность непрерывно деформируется, так что контур, её ограничивающий, стягивается. Если заряд остаётся вне поверхности, то при стягивании этого контура телесный угол Ω стремится к нулю. Если же поверхность, деформируясь, «натягивается» на заряд и охватывает его, то телесный угол стремится к 4π .

Таким образом, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$, если заряд Q находится внутри замкнутой поверхности, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$, если заряд Q остаётся вне поверхности.

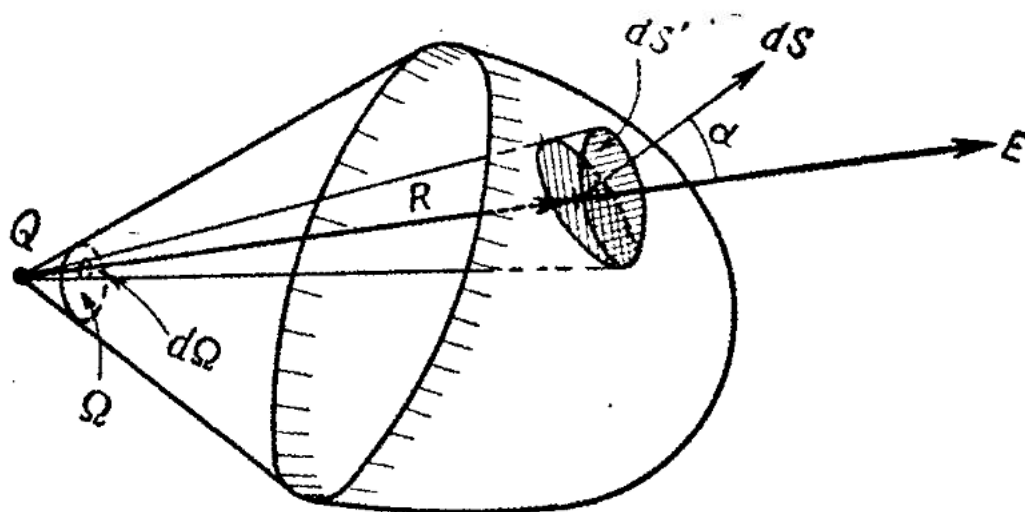


Рис. 2.1

Если поле возбуждается несколькими зарядами $Q_1, Q_2, \dots$, тогда вектор $\mathbf{E}$ в любой точке поля равен

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum_i \mathbf{E}_i, \quad (2.2)$$

где $i=1, 2, \dots$ — номер заряда, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ — векторы напряжённости от каждого из зарядов $Q_1, Q_2, \dots$.

Применим выведенные выше выражения для потока вектора $\mathbf{E}_i$ сквозь замкнутую поверхность S .

Получим $\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_i$, если заряд находится внутри поверхности S ; если же заряд Q_i находится вне поверхности S , то поток $\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}$ равен нулю.

Просуммировав это выражение по всем зарядам, получим

$$\sum_i \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k Q_k,$$

где k — номер зарядов внутри поверхности S .

Так как поверхность интегрирования S одна и та же для всех интегралов, то

$$\sum_i \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \oint \left(\sum_i \mathbf{E}_i \right) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Отсюда

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k Q_k, \quad (2.3)$$

причём под знак суммы попадают только те заряды, которые находятся внутри поверхности интегрирования.

Отметим, что вектор $\mathbf{E}$ в любой точке поля (следовательно, в любой точке на замкнутой поверхности, которая может быть проведена как угодно) определяется всеми зарядами, возбуждающими поле и расположенными как внутри, так и вне этой поверхности, тогда как поток этого вектора сквозь замкнутую поверхность, как показано выше, равен алгебраической сумме зарядов, находящихся только внутри поверхности.

Выведенное соотношение (2.3) является теоремой Гаусса. С помощью теоремы Гаусса нетрудно рассчитать поле в случаях симметричного распределения зарядов:

— для бесконечной плоскости, заряженной поверхностной плотностью $\rho_{\text{пов}}$,

$$E = \frac{\rho_{\text{пов}}}{2\epsilon_0}; \quad (2.4)$$

— для бесконечного цилиндра, заряженного линейной плотностью $\rho_{\text{лин}}$,

$$E = \frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_0 R}; \quad (2.5)$$

— для сферы, заряженной зарядом Q ,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (2.6)$$

Теорему Гаусса нетрудно распространить на любой вид распределения зарядов. Так, например, для зарядов, распределённых с объёмной плотностью ρ , получим

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (2.7)$$

где интегрирование по объёму надо распространить лишь на объём, который заключён внутри поверхности S и в котором объёмная плотность ρ отлична от нуля. Однако можно интегрировать и по всему объёму V , ограниченному поверхностью S .

С помощью теоремы Остроградского [см. Приложение I, (П. 14)] можно написать $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV$. Следовательно,

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

Равенство этих определённых интегралов (пределы их интегрирования — поверхность, ограничивающая объём интегрирования) не зависит от их пределов, т. е. это равенство справедливо для любой формы и величины поверхности, ограничивающей объём интегрирования. При этих условиях будут равны подынтегральные функции, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) в прямоугольной системе координат будет иметь вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.9)$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных связывает значение объёмной плотности заряда $\rho(x, y, z)$ в какой-либо точке (x, y, z) со значением производных от компонент вектора $\mathbf{E}$ в этой же точке (x, y, z) и в её окрестности. Если в точке (x, y, z) объёмная плотность ρ равна 0, то уравнение становится однородным:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (2.10)$$

В уравнение входят три неизвестные величины: $E_x = f_1(x, y, z)$, $E_y = f_2(x, y, z)$ и $E_z = f_3(x, y, z)$.

Для решения этого уравнения необходимо три неизвестные величины свести к одной, что и делается в § 4 введением потенциальной функции — потенциала электростатического поля.

§ 3. Электростатическое поле в диэлектрике

Электрическое поле, действуя на вещество, вызывает, во-первых, смещение связанных заряженных частиц, входящих в состав молекул и атомов вещества, и, во-вторых, ориентированное движение свободных заряженных частиц в структуре вещества.

Воздействие поля на диэлектрик, т. е. на вещество, в котором количество свободных заряженных частиц ничтожно, сводится к смещению связанных заряженных частиц вещества в пределах молекулы. Этот процесс называется электрической поляризацией вещества. Процесс поляризации протекает различным образом, в зависимости как от структуры вещества диэлектрика, так и от струк-

туры его молекул. У нейтральных диэлектриков электрическая поляризация сводится к квазиупругой¹⁾ деформации молекул (деформационная или электронная поляризация), у дипольных диэлектриков — к ориентации молекулярных диполей, у ионных диэлектриков — к деформации кристаллической ионной решётки. Существуют и ещё более сложные виды поляризации (например, поляризация сегнетодиэлектриков). Все эти виды поляризации формально, для упрощения расчёта, можно свести к эквивалентной картине возникновения, при воздействии поля, молекулярных электрических диполей, электрические моменты которых при не очень больших значениях E пропорциональны, как показывает опыт, напряжённости поля:

$$p_z = q l = \varepsilon_0 \alpha_z E, \quad (3.1)$$

где α_z — поляризуемость молекулы; q и l — соответственно заряд и плечо диполя. Отметим, что при воздействии поля электрический момент p_z может изменяться за счёт изменения l при неизменном q .

В процессе поляризации могут возникать на границах диэлектрика, а при неоднородном диэлектрике и в его объёме, избыточные заряды, которые, в свою очередь, будут влиять на величину напряжённости поля в диэлектрике. Это «обратное» действие поляризованного диэлектрика уменьшает напряжённость электрического поля в его объёме. Действие поляризованного диэлектрика на величину напряжённости можно учесть, выбросив этот диэлектрик и оставив (в том же пространственном распределении) образовавшиеся избыточные поверхностные и объёмные связанные заряды.

Тогда теорема Гаусса будет иметь следующий вид:

$$\oint E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q_{\text{своб}} + Q_{\text{связн}}). \quad (3.2)$$

Состояние поляризованного диэлектрика характеризуется вектором поляризации P :

$$P = \frac{\sum_i p_{zi}}{\Delta V}, \quad (3.3)$$

где $\sum_i p_{zi}$ — геометрическая сумма электрических моментов поляризованного диэлектрика в объёме ΔV . В среднем вектор P равен электрическому моменту единицы объёма диэлектрика. Размерность в единицах СИ:

$$[P] = \frac{[q][l]}{[\Delta V]} = \frac{\kappa \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\kappa}{\text{м}^2}.$$

¹⁾ Квазиупругая — похожая на упругую.

Вектор $\mathbf{P}$ нетрудно выразить в функции избыточных связанных зарядов. Рассчитаем поток вектора $\mathbf{P}$ сквозь замкнутую поверхность S , проведённую в объёме поляризованного диэлектрика (рис. 3.1 а). Эта поверхность «рассечёт» некоторые молекулярные диполи, и избыточный связанный заряд внутри поверхности S будет

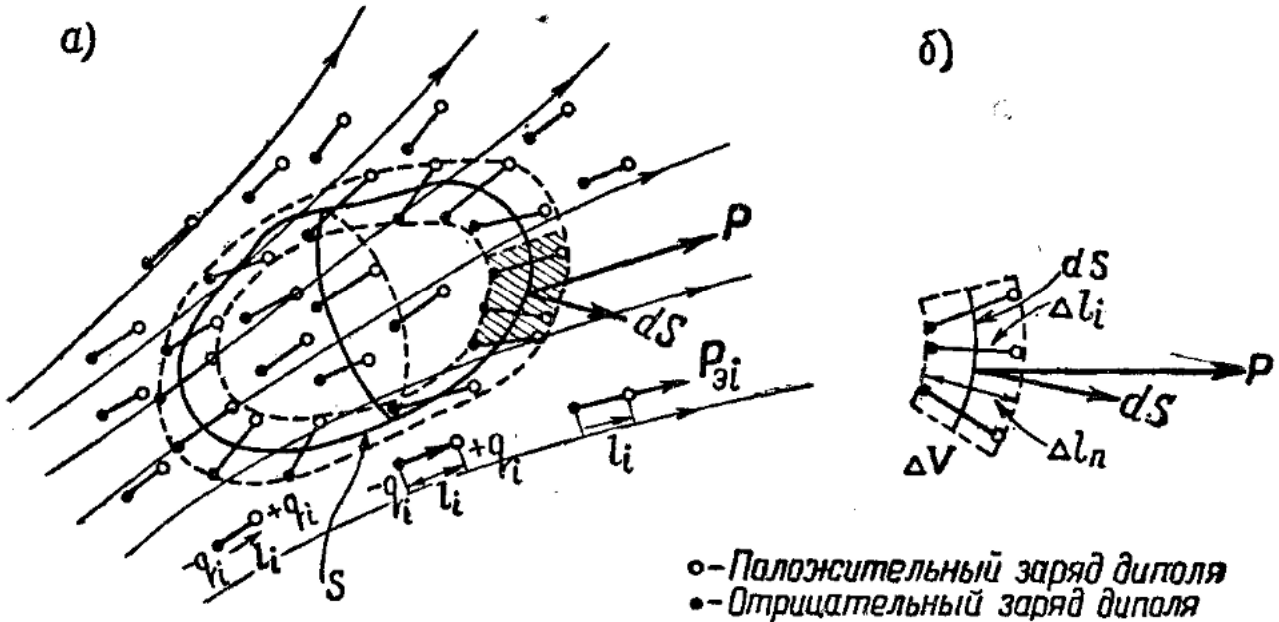


Рис. 3.1

равен алгебраической сумме зарядов «рассечённых» диполей, которые окажутся внутри поверхности:

$$Q_{\text{связн}} = \sum_V q_{i \text{ связн}}.$$

Алгебраическая сумма зарядов диполей, находящихся внутри поверхности (не «рассечённых» поверхностью), равна, очевидно, нулю.

Рассмотрим элементарный объём ΔV , выбрав его таким, чтобы в нём оказались «рассечённые» диполи (рис. 3.1б).

Рассчитаем величину $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$:

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_i p_{zi}}{\Delta V} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_i q_i \Delta l_i \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}.$$

Скалярное произведение $\Delta l_i \cdot d\mathbf{S}$ равно $(\Delta l_i)_n dS$. Значение $\{(\Delta l_i)_n\}_{\text{средн}} = \Delta l_n$ — это средняя толщина слоя, в котором находятся «рассечённые» диполи. Элементарный объём ΔV равен $\Delta l_n dS$ и, следовательно,

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_i q_i \Delta l_n dS}{\Delta V} = \sum_{\Delta V} q_{i \text{ связн}}.$$

Вектор $\mathbf{P}$ направлен так же, как и векторы электрических моментов диполей, и при положительном значении $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ (вектор $\mathbf{P}$ направлен наружу относительно поверхности S) снаружи окажутся положительные заряды «рассечённых» диполей, отрицательные же q_i окажутся внутри поверхности. Таким образом,

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_{\Delta V} q_{i \text{ связн. внутр.}} \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_V q_{i \text{ связн. внутр.}} = - Q_{\text{связн. внутр.}} \quad (3.5)$$

Подставив выражение (3.5) в формулу Гаусса, получим

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \left\{ Q_{\text{своб. внутр.}} - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \right\} \frac{1}{\epsilon_0},$$

или

$$\oint \{\mathbf{E} \cdot \epsilon_0 + \mathbf{P}\} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{своб. внутр.}} \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) не зависит от диэлектрических свойств среды, а определяется лишь свободными электрическими зарядами.

Вектор $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ характеризует электрическое поле (в однородной среде) и определяется также свободными зарядами, являющимися источниками поля. Этот вектор называют вектором электрического смещения $\mathbf{D}$ ¹⁾:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (3.7)$$

Размерность $[D]$ очевидно такая же, что и $[P]$, т. е. к/м^2 . У большей части диэлектриков вектор поляризации пропорционален напряжённости $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{P} = k_s \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.8)$$

где k_s — диэлектрическая восприимчивость. Из последних двух формул получим

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + k_s) \mathbf{E} \quad (3.9)$$

и обозначим

$$1 + k_s = \epsilon, \quad (3.10)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость. Обозначив далее

$$\epsilon_0 \epsilon = \epsilon_a, \quad (3.11)$$

¹⁾ В старой терминологии вектор смещения $\mathbf{D}$ иногда назывался вектором электрической индукции.

где ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость¹⁾, получим

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}. \quad (3.12)$$

Диэлектрическая восприимчивость k_ϵ , как это следует из (3.8) и (3.10), — величина безразмерная, а размерность абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ_a будет

$$[\epsilon_a] = \frac{|D|}{|E|} = \frac{\text{к} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{в}} = \frac{\phi}{\text{м}}.$$

Теорема Гаусса для вектора напряжённости в среде с одинаковым значением ϵ_a имеет вид

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_a} Q_{\text{своб. внутр}} \quad (3.13)$$

и для вектора смещения в среде с любым значением ϵ_a ,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{своб. внутр}}. \quad (3.14)$$

Аналогично в соответствии с ф-лами (2.3) и (2.8) основные дифференциальные уравнения запишутся в виде

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{своб.}}}{\epsilon_a}; \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{своб.}}; \quad \text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{связн.}} \quad (3.15)$$

Итак, электрическое поле определяется тремя векторами:

- 1) напряжённостью электрического поля $\mathbf{E}$, которая характеризует силовое действие поля на электрический заряд;
- 2) вектором поляризации $\mathbf{P}$, который характеризует электрическое состояние поляризованного диэлектрика;
- 3) вектором $\mathbf{D}$ — вектором смещения, связанным со свободными электрическими зарядами, возбуждающими поле.

§ 4. Потенциал электростатического поля

Для того чтобы найти соотношение между компонентами векторов электростатического поля (например, E_x , E_y , E_z) рассмотрим работу сил поля по перемещению пробного заряженного тела с зарядом q в поле из точки 1 в точку 2 (рис. 4.1) по некоторому пути

$$A_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{эл}} \cdot d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.1)$$

¹⁾ В старой терминологии диэлектрическая проницаемость ϵ называлась относительной диэлектрической проницаемостью и обозначалась ϵ_r , а абсолютная диэлектрическая проницаемость ϵ_a называлась диэлектрической проницаемостью и обозначалась ϵ .

Работа есть процесс преобразования энергии одного вида в другой; в данном случае энергия электрического поля (электрическая энергия) преобразуется в кинетическую энергию движущегося (разгоняемого полем) заряженного тела. Таким образом, энергия поля изменится на величину

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2, \quad (4.2)$$

где W_1 и W_2 — энергия поля, когда заряд q находится соответственно в точках 1 и 2. Знак минус при ΔW стоит потому, что положительной работе поля (F_{ex} и $d\mathbf{l}$ образуют острый угол) соот-

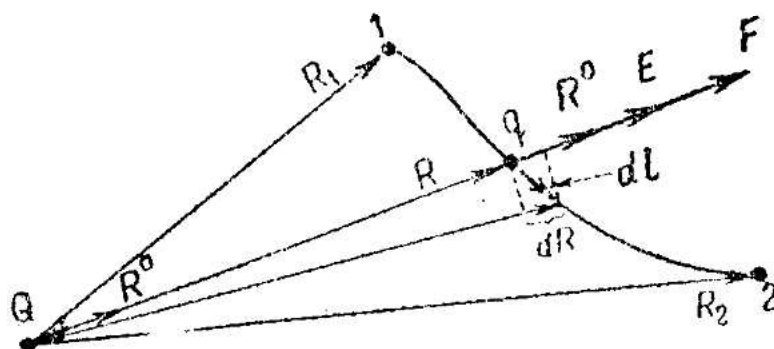


Рис. 4.1

ветствует уменьшение энергии, т. е. отрицательное ΔW , и наоборот.

Эти соображения ещё раз подтверждают материальность электромагнитного поля: ведь обязательным признаком (атрибутом) материи и любой её формы является связанная с ней энергия.

Рассчитаем работу сил поля точечного заряда Q . Подставим в формулу (4.1) выражение напряжённости поля точечного заряда по формуле (1.2). Получим

$$A_{1-2} = q \int_1^2 \frac{Q \mathbf{R}^0 \cdot d\mathbf{l}}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Так как $\mathbf{R}^0 \cdot d\mathbf{l} = dR$ — приращение величины радиуса-вектора (рис. 4.1), то под знаком интеграла окажется

$$A_{1-2} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_a} \int_1^2 \frac{dR}{R^2} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_a} \int_1^2 d\left(-\frac{1}{R}\right),$$

т. е. полный дифференциал. Назовём величину φ в выражении

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} = \varphi + K \quad (4.3)$$

(где K — произвольная постоянная) электрическим потенциалом поля точечного заряда. Тогда

$$d\varphi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_a} d\left(\frac{1}{R}\right)$$

и

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (-d\varphi); \quad \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\varphi, \quad (4.4)$$

т. е. величина $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ также будет полным дифференциалом, и следовательно,

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4.5)$$

не зависит от формы пути интегрирования. Циркуляция вектора $\mathbf{E}$ (т. е. интеграл по замкнутому контуру) будет, очевидно, равна нулю:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (4.6)$$

С помощью теоремы Стокса (см. Приложение I, П.23) преобразуем ф-лу (4.6) к дифференциальному виду:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (4.6')$$

Свойства, сформулированные в виде выражений (4.5), (4.6) и (4.6'), характеризуют электростатическое поле как потенциальное (см. Приложение I).

Выводы сделаны для поля точечного заряда. Так как любой заряд можно разбить на элементарные заряды, которые, в свою очередь, можно считать точечными (см. § 1), то, следовательно, поле любого заряда можно рассматривать как наложение полей точечных зарядов. Поэтому выведенные выше свойства относятся к любому электростатическому полю.

Сравнивая ф-лы (4.2) и (4.5) и удалив точку 2 в бесконечности получим

$$\varphi_2 = \varphi_\infty = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{A_{1-\infty}}{q} = \varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R_1}, \quad (4.$$

т. е. потенциал некоторой точки электростатического поля равен отношению работы сил поля по переносу заряда q из этой точки в бесконечность к этому заряду. Размерность потенциала будет

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}}{q} = \text{в.}$$

Для расчёта компонент вектора напряжённости поля заметим, что из соотношения (4.4) следует

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \quad (4.8)$$

Если за направление l взять оси координат, то

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4.9)$$

и, следовательно [см. Приложение I, (П.15) и (П.16)],

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (4.10)$$

Таким образом, для расчёта компонент вектора напряжённости достаточно знать одну скалярную величину φ .

Производные её по координатам (с обратным знаком) дадут значение компонент вектора $\mathbf{E}$.

§ 5. Потенциал поля различно распределённых зарядов

Как показано на рис. 5.1, можно заряд, распределённый на линии, разбить на элементарные заряды $dQ = \rho_{\text{лин}} dl$, заряд, распределённый на поверхности, — на $dQ = \rho_{\text{пов}} dS$ и объёмный заряд — на $dQ = \rho dV$, где $\rho_{\text{лин}}$, $\rho_{\text{пов}}$ и ρ — соответственно линейная, поверхностная и объёмная плотности заряда. Затем по ф-ле (4.3) следует написать выражение потенциала от каждого из таких элементарных зарядов и проинтегрировать или просуммировать по соответствующему распределению.

Таким образом, получим:

— потенциал точечного заряда

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + K, \quad (5.1)$$

— потенциал системы точечных зарядов

$$= \sum \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_a R_i} + K, \quad (5.2)$$

— потенциалы линейно, поверхностно и пространственно распределённых зарядов

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\text{лин}} &= \int_l \frac{\rho_{\text{лин}} dl}{4\pi\epsilon_a R} + K \\ \varphi_{\text{пов}} &= \int_S \frac{\rho_{\text{пов}} dS}{4\pi\epsilon_a R} + K \\ \varphi_{\text{об}} &= \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a R} + K \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

В приведённых формулах K следует понимать как произвольную постоянную, с точностью до которой определяется потенциал данной точки.

Процесс интегрирования в этих формулах выполняется так же, как указано для ф-л (1.4), (1.5) и (1.6).

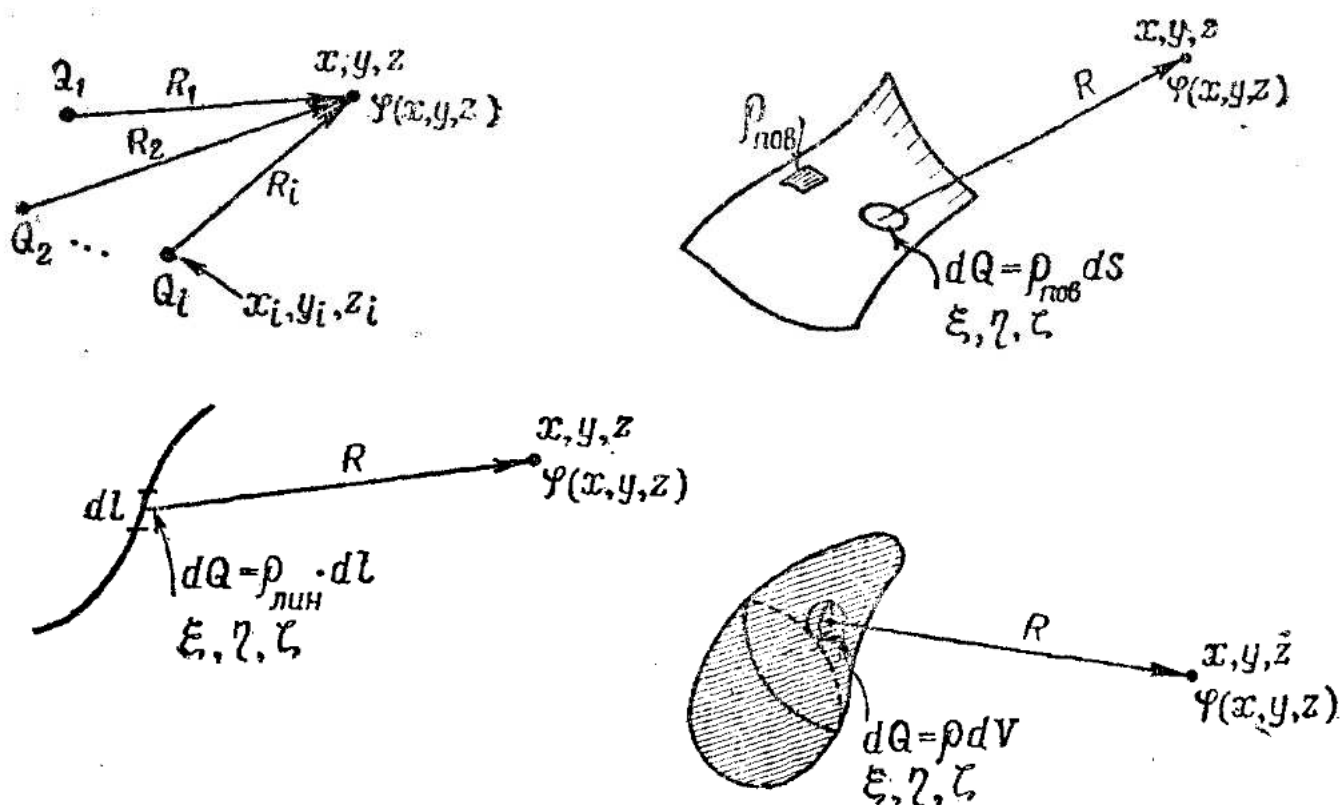


Рис. 5.1

Условие $K=0$ можно принять всегда в физических задачах. Однако в идеализированных задачах (например, в случае поля бесконечной заряженной линии, поля бесконечной плоскости и т. п.), когда величина заряда бесконечна, условие $K=0$ применять не следует.

В таких случаях задают значение потенциала равным нулю в какой-либо точке на конечном расстоянии. Например, напряжённость поля бесконечной заряженной оси равна

$$E = \frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a R},$$

а потенциал равен

$$\varphi = -\frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a} \ln R + K. \quad (5.4)$$

Пусть на некотором определённом расстоянии от оси, равном R_0 , потенциал будет

$$\varphi_0 = -\frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a} \ln R_0 + K, \quad (5.5)$$

тогда

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_0}{R}; \quad (5.6)$$

и, если положить $\varphi_0 = 0$, то $\varphi = \frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_0}{R}$, и, например, на поверхности провода ($R=a$):

$$\varphi_a = \frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_0}{a}. \quad (5.6')$$

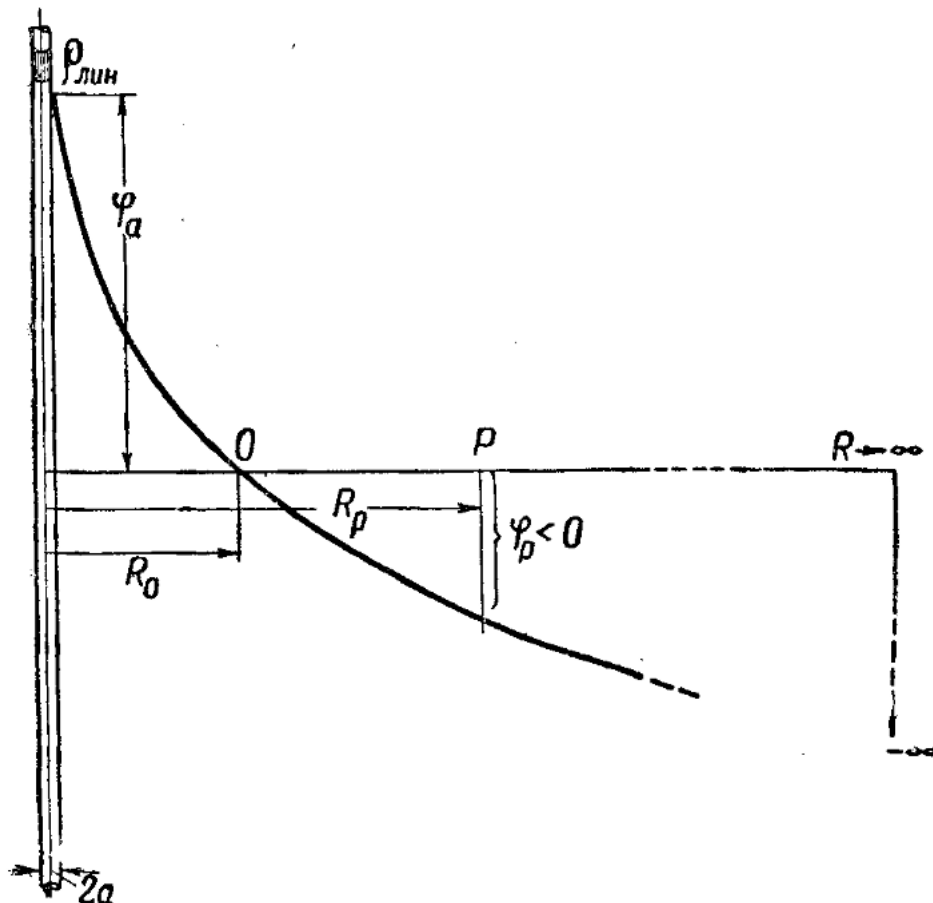


Рис. 5.2

Рассчитаем потенциал поля диполя.

Расположим сферическую систему координат, как это показано на рис. 5.3. Потенциал диполя будет равен сумме потенциалов зарядов $+q$ и $-q$:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_a R_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{R_- - R_+}{R_- R_+} \right).$$

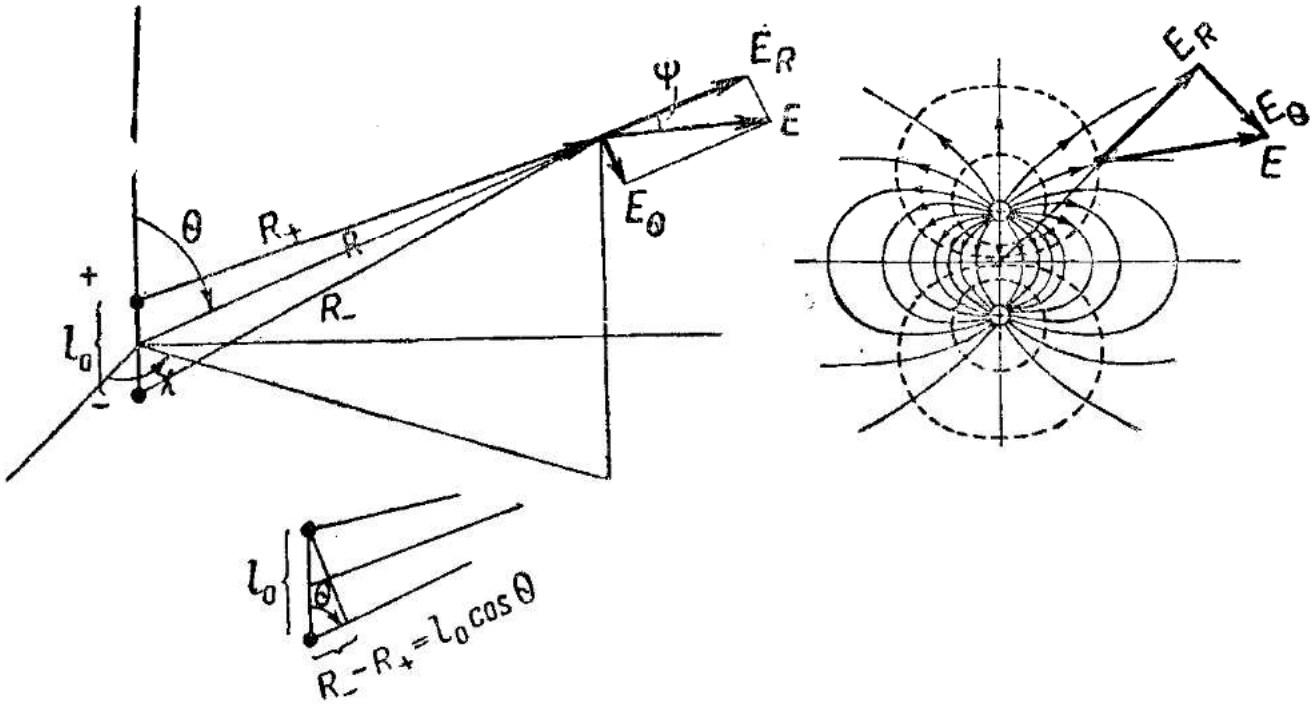


Рис. 5.3

Если $l_0 \ll R$, то можно положить $R_- - R_+ = l_0 \cos \theta$ и $R_- R_+ = R^2$.

Тогда

$$\varphi = \frac{ql_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^2} = \frac{p_\theta \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (5.7)$$

Так как θ — угол между направлениями векторов $\mathbf{p}_\theta$ и $\mathbf{R}^\circ$, то, следовательно,

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{R}^\circ}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (5.8)$$

Напряжённость поля диполя лежит, очевидно, в плоскости $R-I$, и поле не зависит от координаты χ (условие симметрии). Разложим напряжённость на компоненты по оси $\mathbf{R}^\circ$ и θ°

$$\mathbf{E} = E_R \mathbf{R}^\circ + E_\theta \theta^\circ. \quad (5.9)$$

и на основании ф-л (4.8) и (4.9) запишем:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{2p_\theta \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^3}, \quad (5.10)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = \frac{p_\theta \sin \theta}{4\pi\epsilon_a R^3} \quad (5.11)$$

Величина вектора напряжённости E будет равна

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = \frac{\rho_\theta}{4\pi\epsilon_a R^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}, \quad (5.12)$$

и угол ψ между направлением E и радиусом-вектором R определяется равенством

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_\theta}{E_R} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta.$$

Рассчитаем потенциал поля двухпроводной линии.

Рассмотрим двухпроводную линию, расстояние между проводами которой l значительно меньше расстояния до точек R , в которых определяется потенциал. Пусть провода этой линии заряжены линейными зарядами с плотностью $+\rho_{\text{лин}}$ и $-\rho_{\text{лин}}$. Напишем для каждой из линий выражение потенциала по ф-ле (5.4) и, сложив эти выражения, получим¹⁾

$$\varphi = \frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_-}{R_+}. \quad (5.13)$$

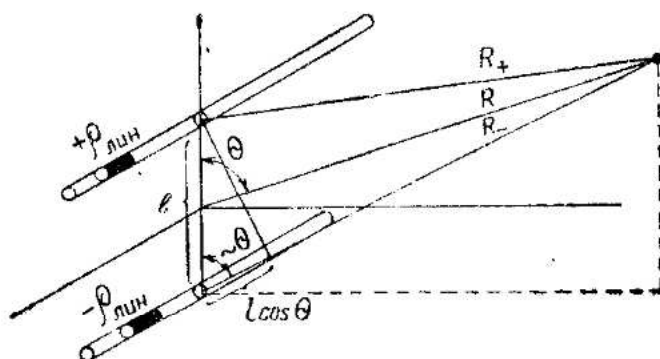


Рис. 5.4

Из рис. (5.4) видно, что при

$$R_+ = R - \frac{l}{2} \cos \theta; \quad R_- = R + \frac{l}{2} \cos \theta;$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{R_-}{R_+} &= \ln \frac{R + \frac{l}{2} \cos \theta}{R - \frac{l}{2} \cos \theta} = \ln \left(1 + \frac{l}{2R} \cos \theta \right) - \\ &\quad - \ln \left(1 - \frac{l}{2R} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Постоянная $2K$ обратится в нуль, если мы примем $\varphi=0$ при $R_+ = R_-$.

Разлагая эти выражения по формуле Маклорена, получим

$$\ln \frac{R_-}{R_+} = \frac{l}{2R} \cos \theta + \left(\frac{l}{2R} \cos \theta \right)^2 \frac{1}{2} \dots - \\ - \left[-\frac{l}{2R} \cos \theta - \left(\frac{l}{2R} \cos \theta \right)^2 \frac{1}{2} \right] \dots \approx \frac{l}{R} \cos \theta,$$

следовательно,

$$\varphi = \frac{\rho_{лин} l}{2\pi \epsilon_a R} \cos \theta. \quad (5.14)$$

§ 6. Электростатическое поле в присутствии проводников. Понятие о методе зеркальных изображений

Если в электростатическое поле внести проводник, то в первый момент силы поля, действующие на свободные заряды проводника (электроны проводимости), вызовут мгновенный электрический ток — зарядный ток, благодаря которому поверхность проводника будет заряжаться (явление электростатической индукции).

Молекулярная кристаллическая решётка проводника под действием поля поляризуется, однако эта поляризация исчезает вместе с исчезновением зарядного тока, так как возникающие поверхностные заряды экранируют объём проводника от внешнего поля (поле поверхностных зарядов противоположно внешнему полю). Напряжённость поля внутри проводника обращается в нуль. Поляризация исчезнет, когда прекратится зарядный ток, т. е. когда поле станет статическим. Поэтому, учитывая проводимость проводника σ , можно его диэлектрическую проницаемость принять равной единице:

$$\epsilon_{пров} = 1. \quad (6.1)$$

Можно подойти к этому вопросу по-другому. Будем рассматривать формально перераспределение свободных зарядов в проводнике как процесс поляризации (а не проводимости) проводника в целом, а весь проводник в электростатическом поле — как систему диполей с дипольным плечом, равным линейному размеру проводника в направлении поля (рис. 6.1). Тогда проводник следует рассматривать как диэлектрик ($\sigma=0$) с необычайно большой диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_{пров} = \infty. \quad (6.2)$$

Этот второй подход удобен для случая перехода от формул, выведенных для диэлектрика в электростатическом поле, к проводнику.

Так как напряжённость поля внутри проводника везде равна нулю и потенциал постоянен, то поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью и векторы поля на этой поверхности направлены к ней перпендикулярно ($\mathbf{E} = E\mathbf{n}^\circ$; $\mathbf{D} = D\mathbf{n}^\circ$).

Поверхностная плотность заряда на поверхности проводника, очевидно, неодинакова. Зависит она как от ориентировки внешнего поля, так и от кривизны поверхности, увеличиваясь на выпуклых её частях. Особенно большой концентрации электрические заряды достигают на остриях.

Металлическая оболочка полностью экранирует электростатическое поле (эффект Фарадея). Если электрические заряды находятся внутри оболочки, то, применяя теорему Гаусса и представив замкнутую поверхность интегрирования целиком лежащей в толще стенок оболочки, получим нуль, так как электростатическое поле в проводнике равно нулю. Следовательно, сумма зарядов внутри поверхности равна нулю, т. е. заряд Q' , наведённый на внутренней поверхности оболочки, равен по величине сумме зарядов, находящихся в полости (см. рис. 6.2а):

$$Q + Q' = 0; \quad Q' = -Q. \quad (6.3)$$

Очевидно, на наружной поверхности оболочки заряд Q'' будет равен заряду Q :

$$Q'' = Q. \quad (6.4)$$

Пусть металлическая оболочка будет очень тонкой и совпадающей с эквипотенциальной поверхностью поля заряда Q (рис. 6.2б). Поле в этом случае не изменится. Перенесём заряд Q на оболочку. Он нейтрализует равный ему («соответственный») отрицательный заряд Q' , и поле внутри оболочки исчезнет.

Снаружи оболочки поле останется совпадающим с полем первоначального заряда.

Значит, можно заряд Q , возбуждающий поле, переносить на любую эквипотенциальную поверхность, полагая, что эта поверхность заменена тонкой металлической оболочкой. Эти соображения лежат в основе элементарного метода расчёта электростатических полей в присутствии проводящих плоскостей — метода зеркальных изображений.

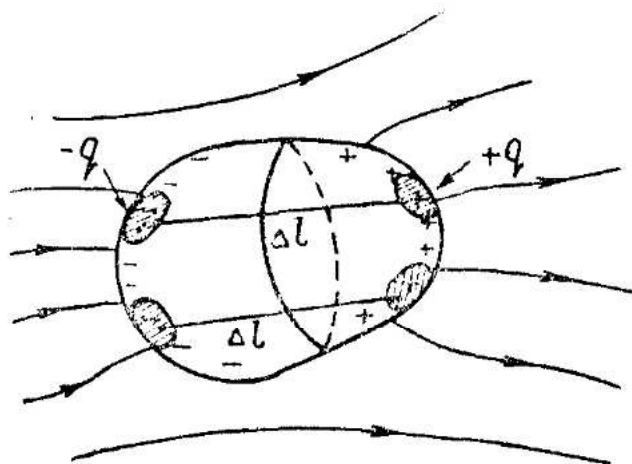


Рис. 6.1

Рассмотрим основные приёмы расчёта поля методом зеркальных изображений.

В электростатике поверхность земли можно считать проводящей, так что метод зеркальных изображений применим к практически важным случаям расчёта поля заряженных тел, расположенных у поверхности земли.

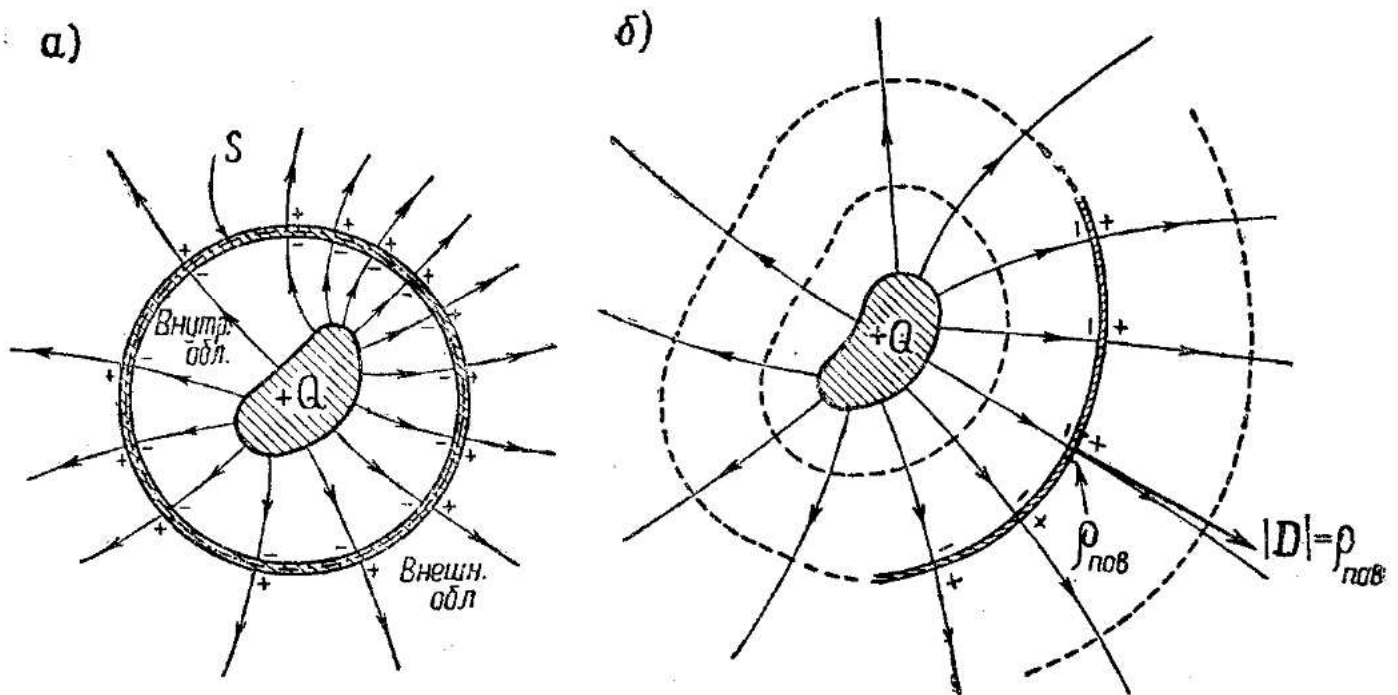


Рис. 6.2

Рассчитаем поле точечного тела с зарядом Q , которое находится на расстоянии h от плоской проводящей поверхности (например, на высоте h от земли). По условиям проводимости эта поверхность должна быть эквипотенциальной.

Расположим точечное тело с равным и противоположным по знаку зарядом $-Q$ на таком же расстоянии h за плоскостью («зеркальное изображение» Q). В поле зарядов этих двух тел (без проводящей плоскости) плоскость, перпендикулярная к линии, соединяющей их, и проходящая через её середину, будет эквипотенциальной поверхностью, и, следовательно, если вместо этой плоскости вообразить проводящую (например, металлическую) плоскую поверхность, то поле не исказится.

Таким образом, поле между зарядом и проводящей плоскостью совпадает с полем двух противоположных по знаку зарядов, из которых второй представляет собой «зеркальное изображение» первого в проводящей плоскости (рис. 6.3 а, б, в, г).

Потенциал такого поля (см. обозначения на рис. 6.3 а) будет равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (6.5)$$

Методом зеркальных изображений можно рассчитать также поле провода, параллельного проводящей поверхности (например, линии передачи и поверхности земли). Это поле будет совпадать с полем данного провода и его зеркального изображения, заряженного зарядом противоположного знака (на рис. 6.3 а изображение зарядов следует принять за сечения проводов).

Если h — расстояние от провода до плоскости (например, высота подвеса провода над землёй), то по ф-ле (5.13) потенциал провода относительно плоскости будет

$$\varphi = \frac{\rho_{\text{лин}}}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h}{a}, \quad (6.6)$$

где a — радиус сечения провода.

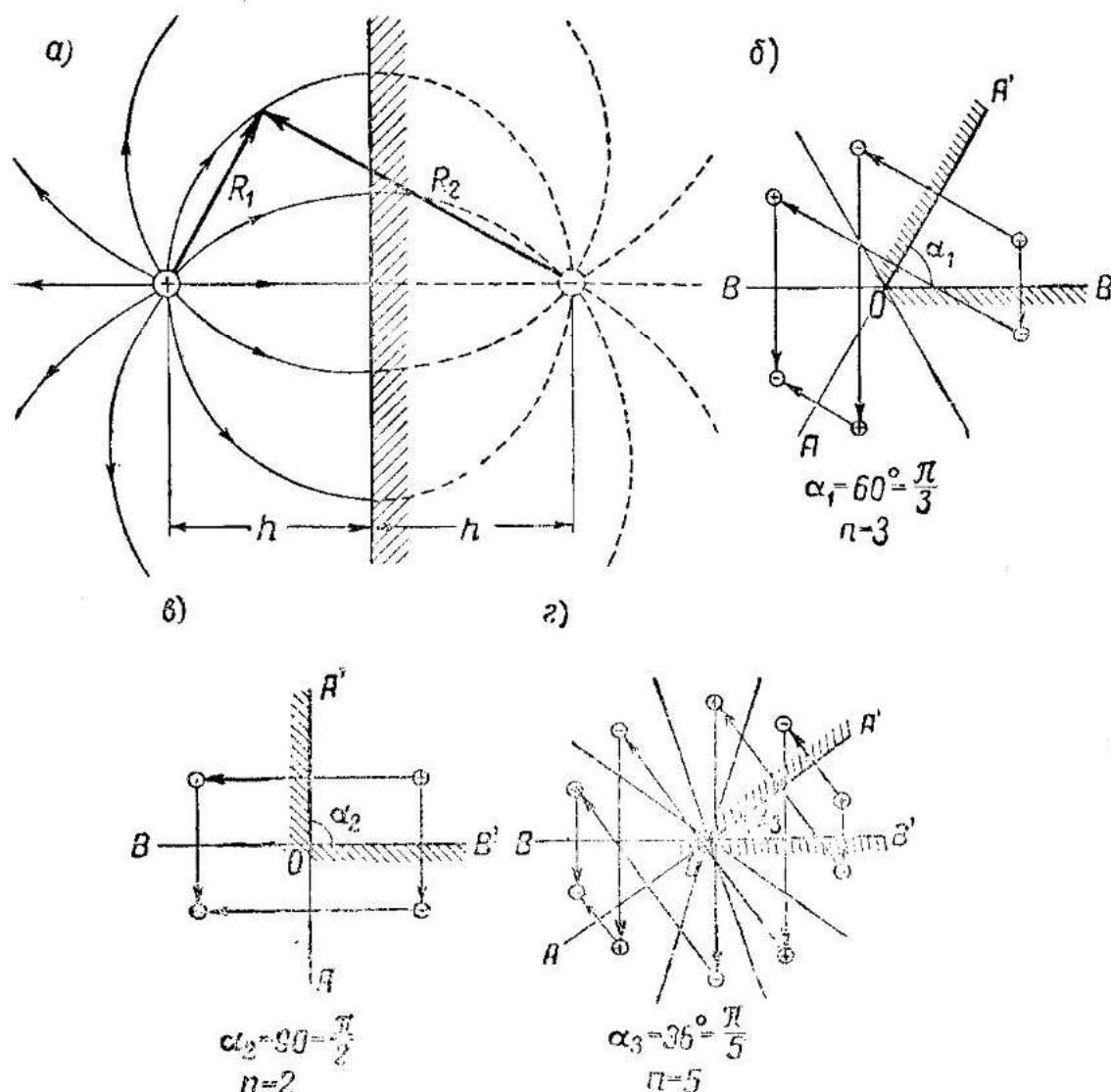


Рис. 6.3

Пусть заряд расположен между двумя пересекающимися проводящими плоскостями. Задача расчёта поля методом зеркальных изображений может быть разрешена в этом случае лишь при условии равенства угла между плоскостями целой части от 2π .

Если, например, этот угол равен $\frac{2\pi}{n}$, то, проведя пересекающиеся плоскости под этими углами и найдя зеркальные изображения зарядов в этих плоскостях, мы получим построения, представленные на рис. 6.3 б ($n=3$), 6.3 в ($n=2$) и 6.3 г ($n=5$).

Вообразим зеркальные изображения заряженными, как это указано на рисунках. Очевидно, плоскости AA' и BB' являются плоскостями симметрии нашей системы действительных и фиктивных зарядов.

Если теперь отбросить проводящие плоскости OA' и OB' и вообразить на месте зеркальных изображений действительные заряды (с указанными на рисунках знаками), то плоскости AA' и BB' будут эквипотенциальными поверхностями и, следовательно, поле такой системы зарядов в углу $A'OB'$ совпадёт с полем заряда при наличии проводящих плоскостей OA' и OB' .

§ 7. Уравнение Лапласа—Пуассона. Граничные условия

Уравнение Лапласа—Пуассона непосредственно связывает потенциал электрического поля с зарядами, его возбуждающими.

Так как $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$, то в среде с постоянным ε_a имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \varepsilon_a \mathbf{E} = \varepsilon_a \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Подставляя соотношение (4.10) в первое уравнение (3.15) (исключая $\mathbf{E}$), получим уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = - \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (7.1)$$

В тех областях поля, где ρ равно нулю, получим уравнение Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (7.2)$$

Воспользовавшись оператором Лапласа [см. Приложение I (П.24)], можно уравнение Пуассона и Лапласа записать в форме

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

или

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad \Delta \varphi = 0,$$

где $\nabla^2 \equiv \Delta$ — оператор Лапласа.

В прямоугольных, прямолинейных координатах имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Следовательно, уравнение Пуассона будет иметь вид

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (7.3)$$

В цилиндрической системе координат составляющие вектора можно вычислить как производные от потенциала по направлениям $R^\circ \chi^\circ z^\circ$:

$$E_R = - \frac{\partial \varphi}{\partial R}; \quad E_\chi = - \frac{\partial \varphi}{R \partial \chi}; \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (7.4)$$

Подставляя эти значения в выражение дивергенции по ф-ле (П.36), получим уравнение Лапласа—Пуассона в цилиндрической системе координат [см. (П.38)]

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (7.5)$$

В сферической системе координат для получения составляющих вектора $\mathbf{E}$ нужно дифференцировать потенциал по направлениям $R^\circ, \theta^\circ, \chi^\circ$ с приращениями $dR, R d\theta, R \sin \theta d\chi$.

Выполнив такое дифференцирование, получим

$$E_R = - \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \quad E_\theta = - \frac{\partial \varphi}{R \partial \theta}, \quad E_\chi = - \frac{\partial \varphi}{R \sin \theta \partial \chi}, \quad (7.6)$$

и уравнение Лапласа—Пуассона в сферической системе координат будет иметь вид [см. (П.38)]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Таким образом, потенциал электростатического поля может быть определён либо из дифференциального уравнения Лапласа—Пуассона, либо путём вычисления интеграла

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a R}, \quad (7.8)$$

полученного в § 5.

Математически оба способа определения потенциала эквивалентны.

В дифференциальном уравнении Лапласа—Пуассона значение объёмной плотности заряда в точке (x, y, z)

$$\rho(x, y, z)$$

связано со значением потенциала в этой же точке и её малой окрестности:

$$\varphi(x, y, z)$$

В интегральном выражении потенциала значение потенциала в некоторой точке (x, y, z)

$$\varphi(x, y, z)$$

связывается непосредственно со значением объёмных зарядов, вообще говоря, в другой точке (ξ, η, ζ) :

$$\rho(\xi, \eta, \zeta),$$

причём R — расстояние между этими точками — равно

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Уравнение Лапласа—Пуассона — типичная формула близкодействия. Интегральная же формула — пример формулы теории дальнего действия. Правда, в интегральной формуле наличие коэффициента ϵ_a в знаменателе подынтегрального выражения указывает на участие среды в передаче действия поля, но в своё время (начало XIX в.) на это обстоятельство не обращалось внимания.

Д. К. Максвелл во введении к «Трактату об электричестве и магнетизме»¹⁾ так характеризует различие этих выражений:

... «Я также нашел, что многие из открытых математиками плодотворных методов исследования могли быть значительно лучше выражены с помощью идей, вытекающих из работ Фарадея, чем в их оригинальной форме. Так, например, вся теория потенциала, рассматриваемого в качестве величины, удовлетворяющей определенному дифференциальному уравнению в частных производных, существенным образом принадлежит тому методу, который я назвал методом Фарадея. Согласно другому методу потенциал, если его вообще следует рассматривать, должен быть представлен как результат суммирования величин зарядов элементарно заряженных частиц, деленных каждый на его расстояние от данной точки. Благодаря этому, многие из математических открытий Лапласа, Пуассона, Грина и Гаусса находят в настоящем трактате свое надлежащее место и соответствующие выражения с помощью концепции Фарадея»...

Интегральное выражение потенциала (7.8) не всегда удобно для решения практических задач, так как расчёт интеграла (7.8) для конкретных условий распределения зарядов, поверхностей раздела диэлектриков и т. д. весьма затруднителен, и поэтому для решения таких задач удобнее исходить непосредственно из уравнения Лапласа—Пуассона и определять его частное решение, удовлетворяющее условиям поставленной задачи.

Для решения конкретной задачи расчёта электростатического поля необходимо прежде всего полное количество данных.

В электростатике весьма важными являются два типа задач.

1. Задача Дирихле. Задаются: а) расположение и форма заряженных проводящих тел и б) потенциалы их поверхности.

2. Задача Неймана. Задаются: а) расположение и форма заряженных тел и б) заряды на их поверхностях, что эквивалентно заданию производной потенциала по нормали к поверхности²⁾.

¹⁾ Продолжение цитаты, приведённой на стр. 15.

²⁾ Поверхностная плотность заряда равна: $\rho_{\text{нов}} = D_n = \epsilon_a E_n = -\epsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, где n — нормаль к заряженной поверхности.

Задача может быть комбинированной: на некоторых телах задаются заряды, на других — потенциалы.

Решение сводится к подбору функции, которая должна, во-первых, удовлетворять уравнению Лапласа (для областей, где $\rho=0$) и Пуассона (где $\rho \neq 0$) и, во-вторых, удовлетворять граничным условиям.

Уравнение Лапласа—Пуассона, как всякое дифференциальное уравнение в частных производных, удовлетворяется множеством различных функций, представляющих частные решения. В состав этих функций могут входить неопределённые постоянные, определяемые из граничных условий. Не всегда удаётся одним частным решением удовлетворить уравнению Лапласа—Пуассона и граничным условиям. Решение в таких случаях отыскивают в виде суммы, т. е. в виде линейной комбинации (или интеграла по вспомогательным переменным) частных решений, удовлетворяющих граничным условиям. Граничными условиями являются соотношения между значением потенциалов и производных потенциала на границах раздела двух сред. Сводятся они к следующему:

1. При переходе через поверхность раздела двух сред потенциал остаётся непрерывным:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (7.9)$$

В точке, где потенциал менялся бы скачком, его производная по направлению была бы бесконечна. Это невозможно, так как производная потенциала по направлению — физическая величина, компонента напряжённости¹⁾.

2. На границе раздела диэлектриков можно установить следующие граничные условия:

а) нормальная составляющая вектора смещения непрерывна: $D_{1n} = D_{2n}$ и отсюда

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \quad (7.10)$$

б) тангенциальная составляющая вектора напряжённости непрерывна: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ и отсюда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}. \quad (7.11)$$

3. На границе раздела диэлектрика и проводника граничные условия будут:

¹⁾ Случай скачкообразного изменения потенциала при наличии двойных слоёв и их теория в курсе не рассматриваются.

а) нормальная компонента вектора смещения равна поверхностной плотности заряда на проводнике $D_{1n} = \rho_{\text{пов}}$ и отсюда:

$$\epsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\rho_{\text{пов}}, \quad (7.12)$$

б) тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ равна нулю:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0; \quad (7.13)$$

в) потенциал поверхности постоянен:

$$\varphi_1 = \text{const.} \quad (7.14)$$

Вывод этих соотношений производится с помощью теоремы Гаусса для компонент вектора $\mathbf{D}$, нормальных к поверхности раздела, и условия потенциальности $(\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0)$ для тангенциальных компонент вектора $\mathbf{E}$. Для нормальных компонент вектора $\mathbf{E}$ и тангенциальных вектора $\mathbf{D}$ можно воспользоваться соотношением $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$.

Подробно эти выводы проделаны для переменного электромагнитного поля (см. § 38). Формулы граничных условий, приведённые выше, можно получить из формул граничных условий переменного поля, если положить все величины не зависящими от времени.

Существенный вопрос, с которого обычно начинается решение, — это выбор системы координат. Система координат выбирается таким образом, чтобы (если это возможно) какая-либо координатная поверхность совпадала с поверхностью уровня потенциала, в частности, с поверхностью заряженного проводника, что облегчает применение граничных условий. Система координат также часто предопределяет выбор функции, удовлетворяющий уравнению Лапласа—Пуассона.

§ 8. Существование и единственность решения уравнения Лапласа—Пуассона

Метод решения уравнения Лапласа—Пуассона сводится обычно к угадыванию, подбору решения и последующей подгонке решения к граничным условиям путём выбора постоянных интегрирования.

Очень важным обстоятельством является линейность уравнения Лапласа—Пуассона. Это обстоятельство даёт возможность рассматривать общее решение задачи (формулу потенциала) как состоящую из суммы решений, из которых каждое удовлетворяет части всей задачи. Однако эти отдельные решения не всегда независимы друг от друга — в этом состоит одна из наибольших трудностей задач теории поля.

Следует также задать вопрос о том, всегда ли существует решение уравнения Лапласа—Пуассона при данных условиях, и противоположный вопрос: не существует ли иного решения уравнения Лапласа—Пуассона кроме того, которое найдено, может быть, совершенно случайно, из различных частных соображений.

Оказывается (это можно строго доказать), решение электростатической задачи, сформулированной в начале этого параграфа, всегда существует и является единственным.

Следовательно, каким бы способом ни было найдено это решение, если только оно удовлетворяет уравнению Лапласа—Пуассона и граничным условиям, то оно будет единственным.

Физически эти положения вполне очевидны. В самом деле, пусть у нас есть система заряженных тел, определённым образом расположенная в изолирующей среде. При этом всегда возникает электростатическое поле — следовательно, решение электростатической задачи (определённое значение потенциала) всегда существует. Затем, это поле однозначно определено расположением, формой, зарядами тел и диэлектрическими свойствами среды, т. е. если мы где-либо (в другом месте и в другое время) опять в точности воспроизведём такое же расположение таких же тел, в такой же изолирующей среде и сообщим этим телам такие же заряды, то возбудится точно такое же электростатическое поле. Это рассуждение и является физическим доказательством единственности решения электростатической задачи.

Система ур-ний (3.15), (4.6), (4.10):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi;$$

соотношение $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$ с граничными условиями (7.10) — (7.14) являются полной системой уравнений электростатики. Это значит: если известно поле, т. е. вектор $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{D}$) в функции координат, то однозначно находится распределение зарядов, возбуждающих поле, что очевидно. Расчётным уравнением служит обычно выведенное из предыдущей системы уравнение Лапласа—Пуассона. Если, наоборот, задано пространственное распределение зарядов, то, принимая во внимание существование и единственность решения уравнения Лапласа—Пуассона, можно однозначно, с точностью до постоянной, рассчитать потенциал и затем найти векторы поля ($\mathbf{E}$ или $\mathbf{D}$).

§ 9. Ёмкость и конденсатор

Статической электрической ёмкостью проводника называется его свойство накапливать и удерживать на своей поверхности электрический заряд при определённом потенциале.

Величина сконцентрированного таким образом заряда будет, как показывает опыт, пропорциональна потенциалу проводника. Отношение этого заряда к потенциалу называется тем же термином (статическая ёмкость):

$$C = \frac{Q}{\varphi} \quad (9.1)$$

и является мерой указанного выше свойства.

При данном заряде на проводнике потенциал проводника (а следовательно, и его ёмкость) зависит:

- от размеров и формы проводника;
- от диэлектрических свойств среды (от ϵ), в которой проводник находится;
- от наличия других проводников.

Влияние других проводников на ёмкость данного становится понятным, если вспомнить, что при внесении этих проводников в электростатическое поле на них вследствие явления электростатической индукции наводятся заряды, которые, в свою очередь, искажают поле.

Искажение же поля вызывает изменение потенциалов, в частности, изменяется потенциал, а следовательно, и ёмкость данного проводника.

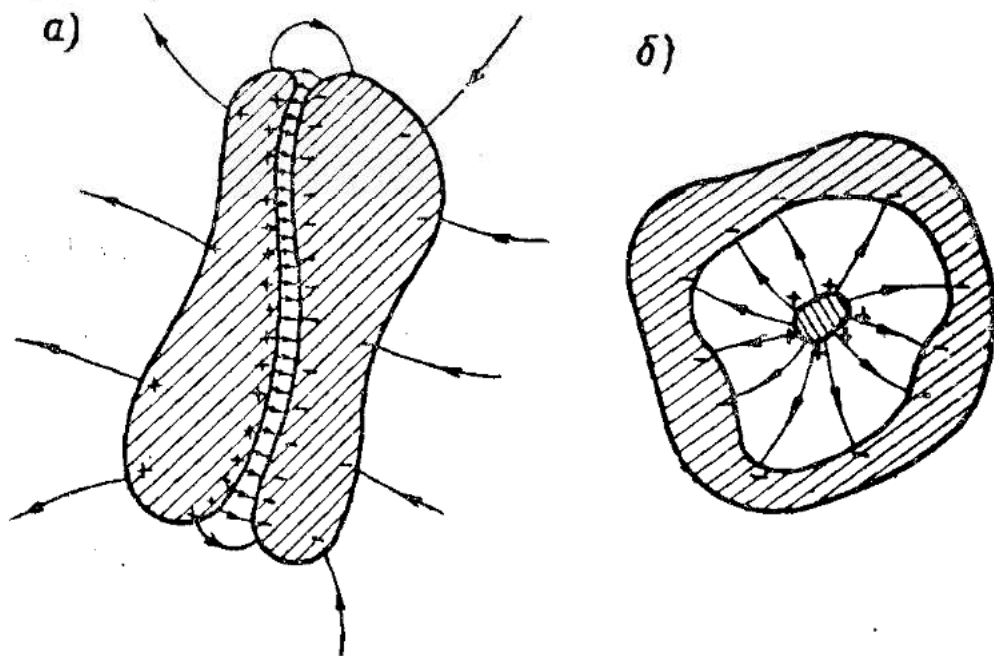


Рис. 9.1

Пусть в поле находится несколько заряженных или незаряженных проводников (рис. 9.1). Рассмотрим два из них. Разности потенциалов между ними будет зависеть не только от взаимного расположения зарядов, которыми они заряжены, но и от влияния других проводящих тел, находящихся поблизости.

Однако можно выбрать такую форму и расположение этих двух проводников, что влияние соседних проводников на разность потенциалов между рассматриваемыми двумя будет ничтожна или даже будет совсем отсутствовать.

Очевидно, нужно, чтобы рассматриваемые два проводника находились возможно ближе друг к другу и зазор между ними был достаточно мал (рис. 9.1а).

Влияние соседних тел также будет полностью отсутствовать, если один проводник охватывает другой со всех сторон (рис. 9.1б). Этот случай (так называемая «клетка Фарадея») обсуждался нами в § 6.

Заряжая такие два проводника равными и противоположными зарядами, мы должны получить все силовые (векторные) линии сосредоточенными между этими проводниками, на их поверхностях, обращённых друг к другу. Тогда на внешней стороне этих проводников зарядов не будет. Во внешнем пространстве поле будет равно нулю (рис. 9.1б) или окажется сильно ослабленным (рис. 9.1а).

Такая система двух проводников, на электрическое поле между которыми не влияет или ничтожно мало влияет наличие других, находящихся поблизости проводников, называется конденсатором, и оба эти проводника — его обкладками.

Величиной ёмкости конденсатора, по определению, будет отношение величины заряда на одной из обкладок к разности потенциалов между ними:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} . \quad (9.2)$$

Для расчёта ёмкости конденсатора разность потенциалов, стоящую в знаменателе формулы ёмкости (9.2), выразим в функции электрического смещения, пропорционального заряду. Воспользуемся соотношениями (4.5)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\epsilon_a} \int_1^2 \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} .$$

Будем интегрировать вдоль векторной линии, соединяющей две точки, расположенные на обкладках конденсатора; угол между $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{D}$ равен нулю, следовательно, $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = D dl$. Формула ёмкости получит вид

$$C = \frac{Q \epsilon_a}{\int_1^2 D dl} . \quad (9.3)$$

Таким образом, для того, чтобы рассчитать ёмкость конденсатора, нужно знать поле между его обкладками.

§ 10. Ёмкости, заряды и потенциалы системы изолированных проводящих тел

В этом практически важном случае вводятся так называемые частичные ёмкости данного тела относительно любого другого.

Рассмотрим систему из n изолированных друг от друга и от земли проводящих тел (рис. 10.1а, б).

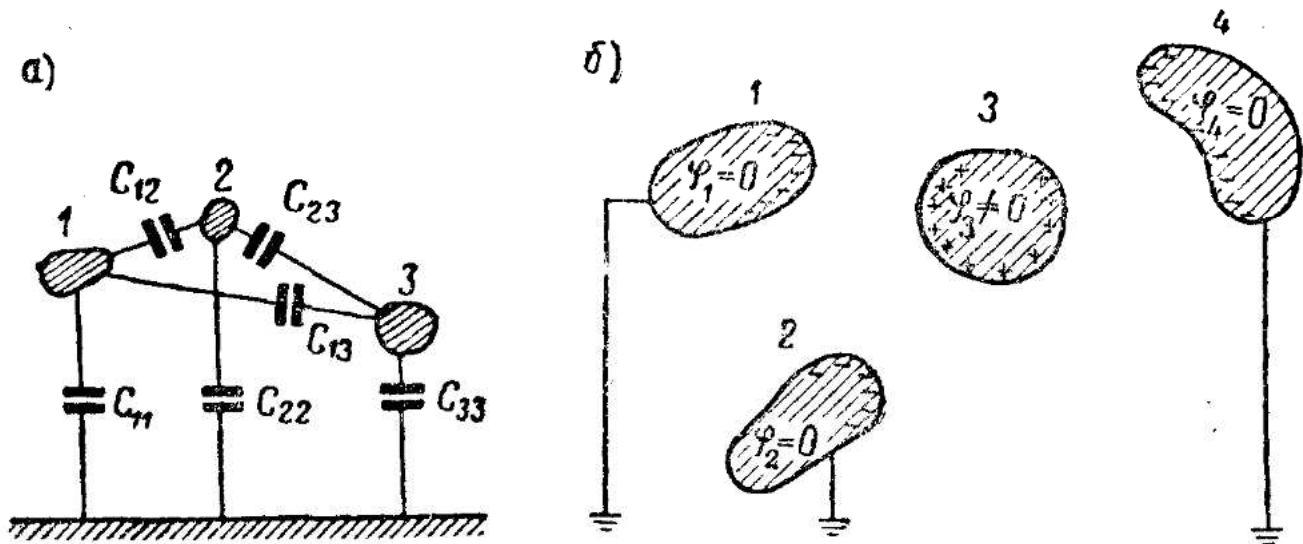


Рис. 10.1

Включим мысленно между каждой парой проводников нашей системы и между каждым проводником и землёй конденсаторы такой ёмкости, чтобы заряд каждого проводника равнялся сумме зарядов обкладок конденсаторов, присоединённых к этому проводнику (рис. 10.1 а), и будем полагать заряд проводника перенесённым на эти присоединённые к нему обкладки.

Величины ёмкости таких конденсаторов должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_{11}(\varphi_1 - 0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots + C_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n) \\ Q_2 &= C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - 0) + \dots + C_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n) \\ &\dots \dots \dots \\ Q_k &= C_{k1}(\varphi_k - \varphi_1) + \dots + C_{kk}(\varphi_k - 0) + \dots + C_{kn}(\varphi_k - \varphi_n) \\ &\dots \dots \dots \\ Q_n &= C_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) + \dots + C_{nn}(\varphi_n - 0) \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

где Q_k — заряд k -го проводника, φ_k — его потенциал.

Ёмкости конденсаторов C_{kr} в этих уравнениях называются частичными ёмкостями между проводниками с номерами k и r . Ёмкости C_{rr} ¹⁾ можно назвать собственной ёмкостью тела r в рассматриваемой системе тел. Для расчёта частичных ёмкостей преобразуем приведённые уравнения, введя так называемые

¹⁾ Ёмкость C_{rr} в присутствии земли включает ёмкость относительно земли

индукционные коэффициенты q_{kr} . Собрав в ур-ниях (10.1) коэффициенты при одинаковых потенциалах, получим:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \varphi_1 (C_{11} + C_{12} + \dots + C_{1n}) - \varphi_2 C_{12} - \varphi_3 C_{13} - \dots - \varphi_n C_{1n}, \\ Q_2 &= -\varphi_1 C_{21} + \varphi_2 (C_{21} + C_{22} + \dots + C_{2n}) - \varphi_3 C_{23} - \dots - \varphi_n C_{2n}, \\ &\dots \dots \dots \\ Q_n &= -\varphi_1 C_{n1} - \varphi_2 C_{n2} - \dots - \varphi_{n-1} C_{n, n-1} + \varphi_n (C_{1n} + C_{2n} + \dots + C_{nn}). \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= C_{11} + C_{12} + \dots + C_{1n} \\ -q_{12} &= C_{12} \\ &\dots \\ -q_{1n} &= C_{1n} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_{11} &= q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1n} \\ C_{12} &= -q_{12} \\ &\dots \\ C_{1n} &= -q_{1n} \end{aligned} \quad (10.2)$$

аналогично:

$$\left. \begin{aligned} -q_{21} &= C_{21} \\ q_{22} &= C_{21} + C_{22} + \dots + C_{2n} \\ &\dots \\ -q_{2n} &= C_{2n} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_{21} &= -q_{21} \\ C_{22} &= q_{21} + q_{22} + \dots + q_{2n} \\ &\dots \\ C_{2n} &= -q_{2n} \end{aligned} \quad (10.3)$$

или, в общем виде,

$$\left. \begin{aligned} q_{ir} &= -C_{ir} \quad \text{при } i \neq r; & q_{rr} &= \sum_{v=1}^n C_{rv} \\ C_{ir} &= -q_{ir} \quad \text{при } i \neq r; & C_{rr} &= \sum_{v=1}^n q_{rv} \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= q_{11} \varphi_1 + q_{12} \varphi_2 + \dots + q_{1n} \varphi_n \\ Q_2 &= q_{21} \varphi_1 + q_{22} \varphi_2 + \dots + q_{2n} \varphi_n \\ &\dots \\ Q_n &= q_{n1} \varphi_1 + \dots + q_{nn} \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Введённые индукционные коэффициенты q_{ir} имеют, очевидно, размерность ёмкости. Индукционные коэффициенты с одинаковыми индексами (q_{ii}) численно равны величине заряда, который находится на i -м проводящем теле, если это тело изолировано и имеет потенциал $\varphi_i=1$, а остальные тела заземлены ($\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{i-1} = \varphi_{i+1} = \dots = \varphi_n = 0$).

Осуществим эти условия и из системы ур-ний (10.4) получим

$$Q_i = q_{ii} 1 \text{ в.}$$

Коэффициенты q_{ii} — положительные величины, потому что если проводящее тело имеет положительный потенциал (в данном случае $\varphi_i=1$ в), то и заряд на нём будет положительный (рис. 10.1 б, где $n=4$ и $i=3$).

Индукционные коэффициенты q_{ir} (при $i \neq r$) равны наведённому на i -м проводящем теле заряду, если изолированным и заряженным до потенциала, рав-

Процесс зарядки может осуществляться различными способами: можно, например, заряжать проводящие тела или один за другим, или одновременно. Энергия поля образующейся системы зарядов, очевидно, равная работе, затраченной для переноса зарядов из бесконечности на проводники, не зависит от способа и порядка зарядки этих проводников. В противном случае всегда можно было бы выбрать процессы зарядки проводников и уменьшения на них зарядов различными, так чтобы энергия, потраченная внешними силами на процессе зарядки, была меньше возвращённой энергии при разряде, что привело бы прямо к нарушению закона сохранения энергии.

Рассмотрим подробнее процесс зарядки проводящих тел нашей системы. Элементарная работа, затрачиваемая внешними силами при увеличении заряда Q_k^* , который в данный момент уже находится на k -м проводящем теле (рис. 11.1), на величину dQ_k^* , равна

$$dA = \int_{\infty}^M d\mathbf{F}_{\text{внешн}} \cdot d\mathbf{l} = -dQ_k^* \int_{\infty}^M \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = dQ_k^* \int_M^{\infty} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = dQ_k^* \varphi_k^*. \quad (11.1)$$

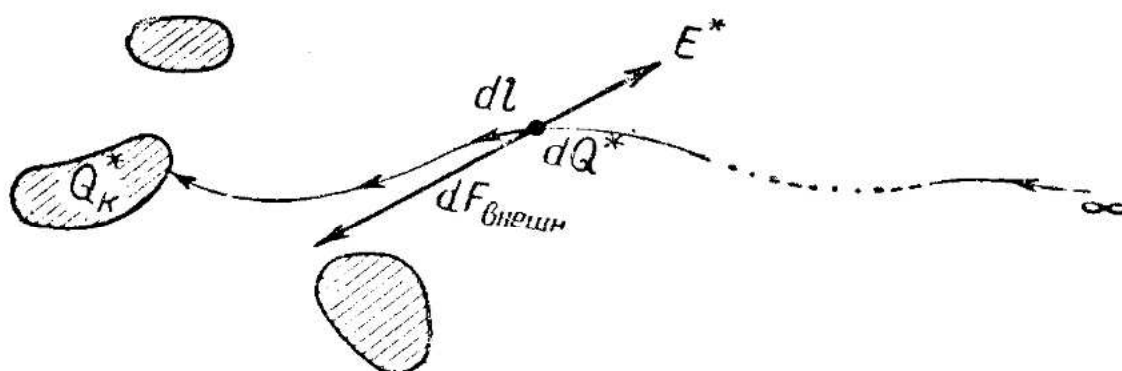


Рис. 11.1

Преобразование в этой формуле сделано на основе соотношения $d\mathbf{F}_{\text{внешн}} = -dQ_k^* \cdot \mathbf{E}^*$, причём $\mathbf{E}^*$ — это значение напряжённости поля в момент, когда заряд на k -м проводящем теле увеличился до величины Q_k^* ; φ_k^* есть потенциал k -го проводящего тела в этот же момент.

Если мы заряжали проводящее тело от 0 до Q_k , то работа, потраченная на этот процесс, будет равна

$$A_k = \int dA = \int_0^{Q_k} \varphi_k^* dQ_k^*.$$

При зарядке же всей системы проводящих тел полная работа будет равна

$$A = \sum_1^n A_k = \sum_{k=1}^n \int_0^{Q_k} \varphi_k^* dQ_k^*. \quad (11.2)$$

На основании сказанного выше мы заключаем, что энергия возникшего электрического поля равна рассчитанной работе:

$$W_{эл} = A.$$

Дальнейшей задачей будет являться выполнение интегрирования в формуле энергии.

Так как порядок и последовательность процесса зарядки проводящих тел безразличны, то для того, чтобы выполнить это интегрирование, положим, что заряды на всех телах возрастают пропорционально друг другу.

Если к некоторому моменту времени на проводящих телах будут заряды

$$Q_k^*, Q_2^*, \dots, Q_n^*,$$

то тогда можно положить

$$Q_1^* = \gamma Q_1; Q_2^* = \gamma Q_2; \dots; Q_n^* = \gamma Q_n,$$

где $Q_1, Q_2, \dots$ — окончательные значения зарядов на проводящих телах. Потенциал в этот момент, например, на k -м проводящем теле равен [см. ф-лу (10.5)]

$$\begin{aligned} \varphi_k^* &= p_{k1}Q_1^* + p_{k2}Q_2^* + \dots + p_{kn}Q_n^* = \\ &= (p_{k1}Q_1 + p_{k2}Q_2 + \dots + p_{kn}Q_n)\gamma = \gamma\varphi_k. \end{aligned}$$

Очевидно, потенциалы на всех проводящих телах будут возрастать также пропорционально друг другу.

В процессе зарядки при изменении Q_k^* от 0 до Q_k коэффициент γ должен меняться от 0 до 1. Приращение заряда окажется

$$dQ_k^* = Q_k d\gamma.$$

Подставляя выражения φ_k^* и dQ_k^* в формулу энергии, получим

$$\begin{aligned} W_{эл} &= \sum_1^n \int_0^1 \varphi_k Q_k \gamma d\gamma = \sum_1^n \varphi_k Q_k \int_0^1 \gamma d\gamma = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k Q_k. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Если имеются объёмно распределённые заряды, то энергия их поля вычислится аналогично. Полагаем: $dQ_k^* = \rho^* dV$. Тогда, приняв во внимание, что $\rho^* = \gamma \rho$ и $Q_k = \int_{V_k} \rho dV$, получим

$$W_{э.л} = \sum_1^n \int_{V_k} \frac{\rho_k \varphi_k}{2} dV. \quad (11.4)$$

Этот интеграл можно распространить на весь объём поля, так как, строго говоря, всякий электрический заряд является объёмным и, кроме того, в областях, где $\rho = 0$, подынтегральное выражение будет также обращаться в нуль. Следовательно, энергия поля будет равна

$$W_{э.л} = \int_V \frac{\rho \varphi}{2} dV. \quad (11.5)$$

Рассматривая предыдущие формулы электрической энергии, мы не можем сделать никакого заключения об её объёмном распределении. Формулы указывают, что энергия связана непосредственно с зарядами и там, где нет зарядов, нет и энергии.

Однако нетрудно преобразовать ф-лу (11.5) так, чтобы стало очевидным пространственное распределение энергии в объёме всего поля и чтобы можно было вычислить её объёмную плотность, т. е. количество энергии в единице объёма поля.

Воспользуемся известным векторным тождеством [см. Приложение I, (П.26)], подставив в него вектор $\mathbf{D}$ и скаляр φ

$$\operatorname{div}(\mathbf{D} \varphi) = \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} + (\mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \varphi), \quad (11.6)$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ и $\operatorname{grad} \varphi = -\mathbf{E}$, то

$$\operatorname{div}(\mathbf{D} \varphi) = \varphi \rho - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

Отсюда

$$\varphi \rho = \operatorname{div}(\mathbf{D} \varphi) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

Выражение (11.5) преобразуется к виду

$$W_{э.л} = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int \operatorname{div}(\mathbf{D} \varphi) dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (11.7)$$

Первый интеграл преобразуем с помощью теоремы Остроградского. Получим

$$W_{э.л} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{D} \varphi) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (11.8)$$

Для того чтобы вычислить всю энергию поля, нам надо объём интегрирования увеличивать до бесконечности. Замкнутая поверхность, по которой мы будем вычислять первый интеграл ф-лы (11.8), охватывает объём интегрирования второго интеграла. Эта поверхность будет расти пропорционально R^2 . Однако $\mathbf{D}$ на этой поверхности будет уменьшаться, по крайней мере, как $\frac{1}{R^2}$, и φ , как $\frac{1}{R}$. Следовательно, при бесконечном увеличении поверхности первый интеграл будет уменьшаться пропорционально $\frac{1}{R}$ и при $R \rightarrow \infty$ обратится в нуль. Итак, для полного поля

$$W_{эл} = \int \frac{\rho\varphi}{2} dV = \int \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dV. \quad (11.9)$$

С математической стороны левая и правая части этого равенства вполне эквивалентны, однако следует подчеркнуть (с этим обстоятельством мы будем неоднократно встречаться и в дальнейшем), что часто математические преобразования физической формулы открывают возможность совершенно новой физической интерпретации соотношений, выражаемых этой формулой.

Формула (11.9)

$$W_{эл} = \int \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dV = \int \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV$$

выражает энергию электрического поля как предел суммы физически бесконечно малых слагаемых вида

$$dW_{эл} = \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dV,$$

выражающих энергию, приходящуюся на элементарные объёмы dV электростатического поля. Таким образом, энергия оказывается распределённой с объёмной плотностью

$$W_0 = \frac{dW_{эл}}{dV} = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} = \frac{\epsilon_a E^2}{2}. \quad (11.10)$$

В электростатике обе формулы выражения энергии эквивалентны, однако, как мы увидим в дальнейшем, во всех случаях физический смысл имеет именно выражение (11.10), в чём мы убедимся при изучении энергии распространяющихся электромагнитных волн.

§ 12. Электростатические силы

Ограничим нашу задачу расчётом сил, действующих на заряженные проводящие тела в электростатическом поле.

Будем вычислять эти силы с помощью известного метода аналитической механики, метода возможной работы.

Идея метода заключается в исследовании тех изменений системы (например, системы заряженных проводящих тел), при которых совершается работа, но не нарушаются связи между отдельными элементами системы.

Таковыми, так называемыми возможными, изменениями системы могут быть перемещения отдельных её элементов, поворот их, изменение их формы, например объёмная деформация, и, наконец, изменение их состояния, например изменение заряда, температуры, концентрации и т. д.

Эти изменения характеризуются некоторым числом так называемых обобщённых координат — величин, заданием которых определяется положение, форма и состояние как отдельных элементов системы, так и всей системы в целом.

Таким образом, возможное изменение системы будет определяться возможным изменением обобщённых координат, а возможная работа при этом будет равна произведению приращений обобщённых координат на составляющие так называемых обобщённых сил, действующих на соответствующие элементы системы.

Если, например, обобщённой координатой будет линейное перемещение, то соответствующей обобщённой силой будет механическое усилие.

Если, далее, за обобщённые координаты принять угол поворота, объём, поверхность, то обобщёнными силами будут соответственно крутящий момент, давление, поверхностное натяжение. Заряду как обобщённой координате, характеризующей состояние тела, соответствует в качестве обобщённой силы потенциал этого тела.

Обобщённые координаты (обозначим их через q_k) связываются с соответствующими им составляющими обобщённых сил (введём для последних обозначение ϑ_k) так, что произведение возможного изменения обобщённой координаты (так называемая вариация обобщённой координаты δq_k) на составляющую обобщённой силы равно возможной работе:

$$\delta A_k = \vartheta_k \delta q_k. \quad (12.1)$$

Из этого соотношения можно определить и составляющую обобщённой силы, соответствующую данной обобщённой координате:

$$\vartheta_k = \frac{\delta A_k}{\delta q_k}. \quad (12.2)$$

Это выражение обычно совпадает с частной производной от возможной работы по обобщённой координате¹⁾:

$$\vartheta_k = \frac{\partial A_k}{\partial q_k}. \quad (12.3)$$

Перейдём к электростатической задаче. Рассмотрим систему заряженных проводящих тел, и пусть только одно проводящее тело из всей системы может перемещаться в направлении оси l (на рис. 12.1 таким проводящим телом будет тело Q_2).

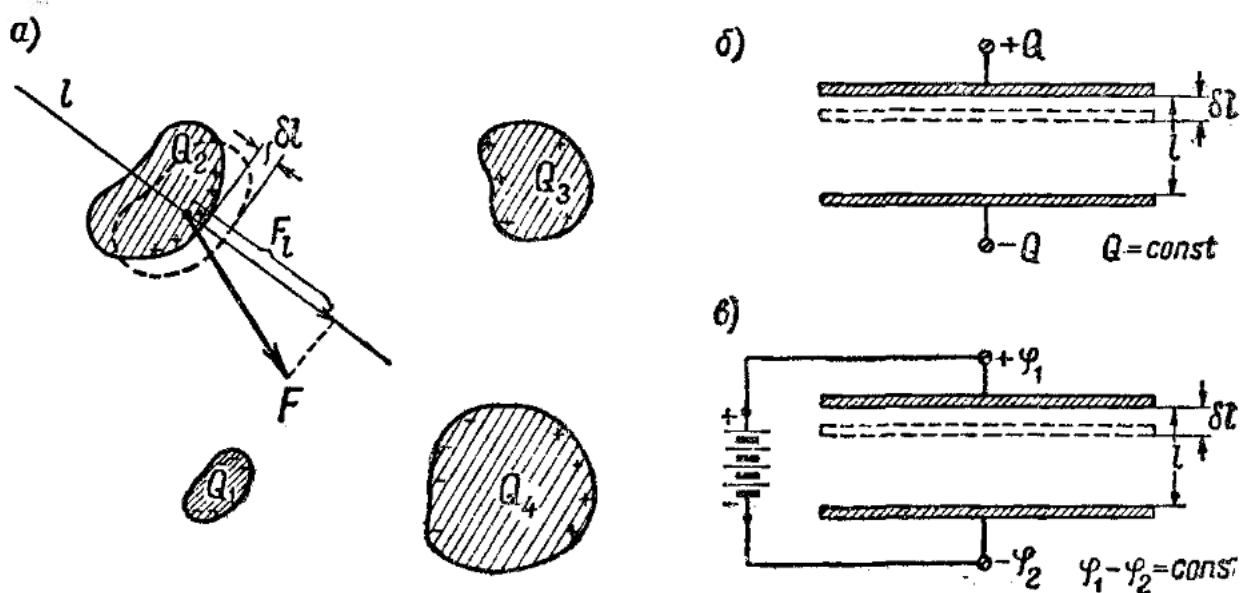


Рис. 12.1

Это направление и будет направлением возможного перемещения данного проводящего тела. Остальные заряженные проводящие тела пусть будут закреплены неподвижно.

Обобщёнными координатами нашей системы при таких условиях будут координата l (отсчитываемая от какой-либо точки, взятой на оси l) и заряды на проводящих телах.

Дадим возможность проводящему телу 2 сместиться под влиянием действующей на него силы поля $\mathbf{F}$ на расстояние δl , не нарушающее связей системы (т. е. в направлении возможного перемещения l).

При этом сила поля $\mathbf{F}$ совершит работу

$$\delta A_1 = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{l}_1 = F_l \delta l. \quad (12.4)$$

¹⁾ В том случае, если мы характеризуем положение и состояние системы независимыми обобщёнными координатами, число которых должно совпадать с числом степеней свободы нашей системы.

Работа δA_1 , очевидно, совершится за счёт изменения энергии поля, причём: если остальные обобщённые координаты (заряды Q_k) остаются неизменными, то работа δA_1 будет равна уменьшению энергии поля¹⁾

$$\delta A_1 = -\delta W_1. \quad (12.5)$$

Энергия поля может измениться также при изменении других обобщённых координат — зарядов Q_k . Для того чтобы осуществить это изменение, нужно, чтобы внешние источники электрических зарядов (например, гальванические элементы) произвели бы работу по переносу зарядов на поверхности проводящих тел: дозарядили бы их, сообщили бы им некоторые возможные приращения зарядов δQ_k . Если потенциалы проводящих тел будут соответственно φ_k , то работа, которую совершат источники электрических зарядов, будет равна [см. вывод ф-лы (11.1)]

$$\delta A_2 = \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k. \quad (12.6)$$

Энергия поля при этом увеличится на величину $\delta W_2 = \delta A_2$. Таким образом, полное возможное изменение энергии поля будет

$$\delta W_{\text{эл}} = \delta W_2 + \delta W_1 = \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k - F_l \delta l.$$

Интересны два предельных случая.

В первом случае все проводящие тела системы изолированы и заряды на них остаются неизменными; тогда $\delta Q_k = 0$ и

$$F_l = -\frac{\delta W_1}{\delta l} = -\frac{\partial W_1}{\partial l}. \quad (12.7)$$

Во втором случае все проводящие тела системы присоединены к источникам электрических зарядов, поддерживающих на них постоянные потенциалы. Тогда

$$F_l \delta l = \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k - \delta W_{\text{эл}} = \delta A_2 - \delta W_{\text{эл}}, \quad (12.8)$$

т. е. работа поля по перемещению заряженного тела на δl будет происходить как за счёт работы внешних источников, поддержи-

¹⁾ Процесс перемещения заряженного тела предполагается происходящим равновесно, т. е. бесконечно медленно, без необратимых потерь на джоулево тепло и излучение.

вающих постоянные потенциалы на проводящих телах системы, так и за счёт уменьшения энергии поля.

В этом втором случае можно установить любопытное соотношение между работой δA_2 , совершаемой внешними источниками, поддерживающими постоянные потенциалы на проводящих телах, и работой δA_1 , совершённой полем по перемещению заряженного тела.

Как следует из ф-лы (11.3), энергия поля нашей системы равна

$$W_{эл} = \frac{1}{2} \sum_1^n \varphi_k Q_k.$$

Уменьшение этой полной энергии поля при постоянстве φ_k может произойти только за счёт изменения зарядов Q_k :

$$-\delta W_{эл} = -\frac{1}{2} \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k. \quad (12.9)$$

Сравнивая это выражение с работой внешних источников по поддержанию постоянного потенциала на проводящих телах

$$\delta A_2 = \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k,$$

мы можем определить работу по перемещению заряженного тела:

$$\begin{aligned} \delta A_1 = F_l \delta l &= \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k - \frac{1}{2} \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k = \\ &= +\frac{1}{2} \sum_1^n \varphi_k \delta Q_k. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Таким образом, работа внешних источников разделяется на две части: половина работы превратится в механическую работу по перемещению заряженного тела, а вторая половина пойдёт на увеличение энергии поля.

Значит, в рассматриваемом втором случае энергия поля при перемещении заряженного тела увеличится на столько же, на сколько она уменьшится в первом случае.

Выражение силы во втором случае определится следующим образом:

$$F_l = \frac{\delta W_{эл}}{\delta l} = \frac{\partial W_{эл}}{\partial l}. \quad (12.11)$$

Глава II

СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 13. Закон сохранения электрического заряда

В проводящей среде под влиянием электрического поля возникает электрический ток проводимости, являющийся ориентированным движением свободных заряженных частиц.

В металлических проводниках перемещаются электроны проводимости и, как показывает опыт, вектор плотности тока проводимости $\delta_{пр}$ связан с напряжённостью электрического поля в проводящей среде законом Ома:

$$\delta_{пр} = \sigma E, \quad (13.1)$$

где σ — удельная проводимость среды.

Обозначим через $\rho_{эв}$ объёмную плотность зарядов электронов, участвующих в ориентированном движении, и v — их скорость. Тогда плотность тока проводимости можно выразить в следующем виде:

$$\delta_{пр} = \rho_{эв} v. \quad (13.2)$$

Поясним ф-лу (13.2). Рассмотрим единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению ориентированного движения электронов. За единицу времени сквозь площадку пройдут электроны, которые займут объём прямой призмы с основанием единица и высотой v . Заряд, прошедший сквозь площадку, будет равен $Q = 1^2 \rho_{эв} v$ и будет по величине равен плотности тока δ .

Удельная проводимость σ для большинства проводящих сред (металлы и их сплавы, электролиты и т. д.) оказывается практически не зависящей от величины плотности тока и напряжённости поля.

Независимость удельной проводимости металлов σ от E объясняется тем, что приращение кинетической энергии электронов проводимости (составляющих ток), обусловленное ускоряющим действием электрического поля, целиком теряется (переходят в тепловую) при соударении электрона проводимости и ионной ре-

шётки. Электрон после такого соударения становится «вполне хаотичным», направление его движения теряет свою ориентированность.

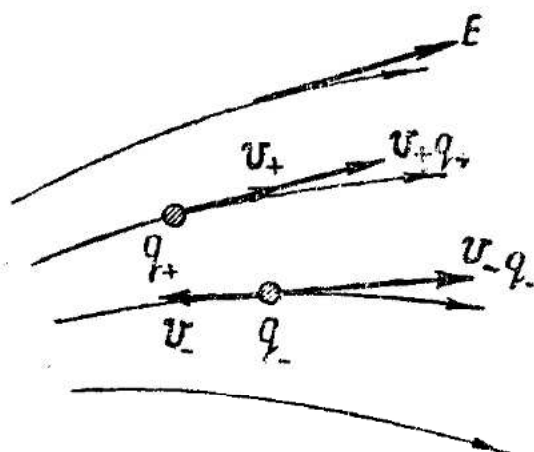


Рис. 13.1

Поэтому электроны в металле при неизменном E движутся с постоянной средней скоростью.

В условиях, когда свободные заряженные частицы могут под влиянием поля ускоряться (электронные и ионные приборы в режимах, далёких от насыщения), плотность тока оказывается зависящей от напряжённости в степени большей, чем единица.

В полупроводниках и электролитах носителями тока являются как положительно, так и отрицательно заряженные частицы (электроны, положительные и отрицательные ионы и так называемые «дырки»), и плотность тока будет равна

$$\delta = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-, \quad (13.2)$$

где ρ_+ и ρ_- — объёмные плотности положительных и отрицательных движущихся зарядов. Отметим, что обе компоненты скорости в выражении δ имеют противоположные направления движения, однако векторы $\rho_+ \mathbf{v}_+$ и $\rho_- \mathbf{v}_-$ направлены одинаково в сторону $\mathbf{v}_+$ и складываются арифметически (рис. 13.1), так как $\rho_+ > 0$, а $\rho_- < 0$.

Рассмотрим замкнутую поверхность и определим электрический ток I сквозь неё. Электрический ток сквозь некоторую поверхность S равен потоку вектора δ сквозь эту поверхность, т. е.

$$I = \int_S \delta \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.3)$$

Замкнутую поверхность можно разбить на две части (рис. 13.2): одну, для элементов которой $\delta \cdot d\mathbf{S}$ отрицательно (S_1 на рис. 13.2), и другую, для которой это произведение положительно (S_2)¹⁾.

Ток сквозь поверхность S_1 будет, очевидно, отрицателен (ток «втекающий»), а сквозь S_2 — положителен (ток «вытекающий»).

Следовательно,

$$I = I_{\text{вытек}} + I_{\text{втек}}.$$

Если $|I_{\text{вытек}}| = |I_{\text{втек}}|$, то полный ток сквозь замкнутую поверхность равен нулю ($I=0$).

¹⁾ Полагаем поверхность выпуклой.

Очевидно, в этом случае линии тока идут сквозь поверхность, не прерываясь. Если же $|I_{\text{вытек}}| \neq |I_{\text{втек}}|$, то электрический заряд, который выходит из поверхности за некоторый промежуток времени dt , будет, очевидно, отличаться от электрического заряда, входящего внутрь поверхности за тот же промежуток времени.

При этом электрический заряд внутри поверхности (обозначим его Q) должен изменяться (условие неуничтожаемости электрического заряда).

Пусть за время dt заряд Q изменится на dQ . Очевидно, величина dQ будет равна алгебраической сумме зарядов, втекающих и вытекающих из данной поверхности за тот же промежуток времени dt , так как заряд ни появиться, ни исчезнуть не может, т. е.

$$|dQ| = |I_{\text{вытек}}dt + I_{\text{втек}}dt| = |Idt|.$$

Следовательно,

$$|I| = \left| \frac{dQ}{dt} \right|.$$

Нетрудно сообразить, что

$$I = - \frac{dQ}{dt}.$$

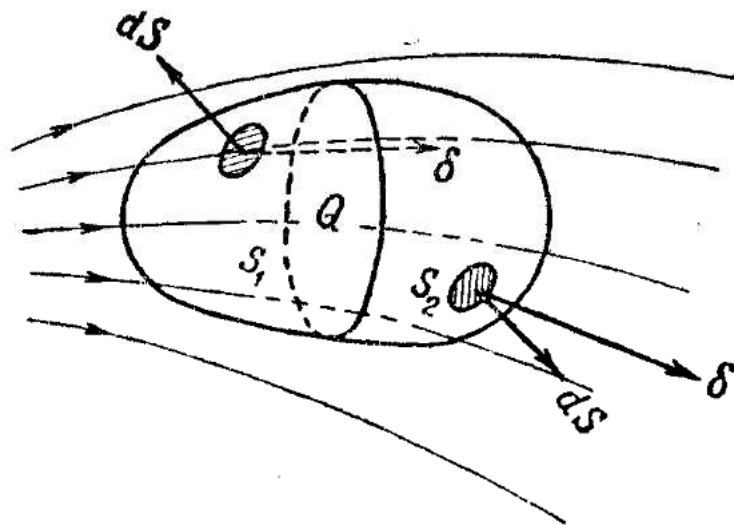


Рис. 13.2

Мы должны поставить знак минус перед производной Q , потому, что если, например, ток $I > 0$, то $|I_{\text{вытек}}| > |I_{\text{втек}}|$, значит, заряд Q убывает и его изменение dQ отрицательно.

Наоборот, если ток $I < 0$, то $|I_{\text{вытек}}| < |I_{\text{втек}}|$; следовательно, заряд Q накапливается и dQ — положительно.

Итак,

$$\oint \delta \cdot dS = - \frac{dQ}{dt}.$$

Полагая, что заряды распределены с объёмной плотностью ρ , получим

$$\oint \delta \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int \rho dV. \quad (13.4)$$

Так как поверхность S , ограничивающая объём интегрирования, остаётся неизменной во времени, то можно продифференцировать объёмную плотность ρ по времени под знаком определённого интеграла, тогда

$$\oint \delta \cdot d\mathbf{S} = \int \left(- \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV.$$

Преобразуем поверхностный интеграл по теореме Остроградского [см. (П.14)].

Получим

$$\int \operatorname{div} \delta dV = \int \left(- \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV.$$

Это соотношение остаётся справедливым независимо от величины и формы поверхности S , являющейся пределом объёмных интегралов. Взяв в качестве такой поверхности элементарную поверхность, ограничивающую элемент объёма dV , мы получим (сократив на dV)

$$\operatorname{div} \delta = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (13.5)$$

Это соотношение характеризует вектор δ и представляет дифференциальную форму закона сохранения электрических зарядов.

§ 14. Закон Джоуля—Ленца

В поле токов проводимости происходит постоянное преобразование электромагнитной¹⁾ энергии, что является существенным отличием этого поля от поля электростатического. Электромагнитная энергия в проводящей среде всё время переходит в тепловую.

Произведём расчёт тепловых потерь. Рассмотрим элементарный заряд $dQ = \rho dV$, перемещающийся под действием силы $d\mathbf{F} = \mathbf{E} dQ$.

Работа силы $d\mathbf{F}$ при перемещении заряда dQ на расстояние $d\mathbf{l}$ будет определяться равенством

$$dA = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} dQ \cdot d\mathbf{l}. \quad (14.1)$$

¹⁾ Обычно электромагнитную энергию в поле электрических токов называют сокращённо «электрическая энергия».

Эта электромагнитная работа переходит в тепло. Мощность тепловых потерь будет равна

$$dP = \frac{dA}{dt} = \mathbf{E} dQ \cdot \frac{dl}{dt} = \mathbf{E} \cdot \rho dV \cdot \mathbf{v}_{эл}.$$

Подставляя сюда выражение $\rho \mathbf{v}_{эл} = \delta$, получим

$$dP = \mathbf{E} \cdot \delta \cdot dV.$$

Тепловые потери происходят при столкновении электронов проводимости с ионной решёткой проводящей среды, при превращении кинетической энергии упорядоченного движения электронов в кинетическую энергию неупорядоченного (теплого) их движения.

Таким образом, можно считать, что переход электромагнитной энергии в тепловую происходит в каждом элементе dV объёма проводящей среды, в котором в данный момент окажется перемещающийся заряд dQ .

Удельная величина тепловых потерь будет

$$P_0 = \frac{dP}{dV} = \mathbf{E} \cdot \delta = \sigma E^2 = \frac{\delta^2}{\sigma}. \quad (14.2)$$

Соотношение это является законом Джоуля—Ленца в дифференциальной форме и соответствует известной интегральной форме этого закона $P = I^2 r$.

§ 15. Стационарное электрическое поле

Условие стационарности — неизменность электрических величин во времени. Постоянным должен быть, например, вектор плотности тока δ , поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{const} = K_1.$$

Отсюда

$$\rho = K_1 t + K_2. \quad (15.1)$$

Постоянная K_1 должна равняться нулю, иначе ρ не будет постоянно.

Таким образом,

$$K_2 = \rho = \text{const}.$$

Подставляя это значение ρ в ф-лу (13.5), получим условие стационарности:

$$\text{div } \delta = 0 \text{ или } \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} = 0. \quad (15.2)$$

Если среда однородна и проводимость σ во всех её точках постоянна, то очевидно:

$$\operatorname{div} \delta = \operatorname{div} (\sigma E) = \sigma \operatorname{div} E = 0, \quad (15.3)$$

следовательно, $\operatorname{div} E = 0$, т. е. получается, что полная объёмная плотность заряда также равна нулю:

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = \epsilon_a \operatorname{div} E = 0. \quad (15.4)$$

Для металлических проводников ρ_+ определяется неподвижными ионами кристаллической решётки. Следовательно,

$$\delta = \rho_{\text{дв-}} v_-; \text{ но } \rho = \rho_+ + \rho_- = 0. \quad (15.5)$$

Если в среде движутся как положительно, так и отрицательно заряженные частицы со скоростями, имеющими противоположное направление, и, как указывалось выше,

$$\delta = \rho_+ v_+ + \rho_- v_-.$$

то опять

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0. \quad (15.6)$$

Из уравнения стационарности [ф-ла (15.2)] следует важное заключение, что линии постоянного тока замкнуты.

§ 16. Время релаксации

Под влиянием электростатического поля в проводящей среде возникают токи проводимости, которые постепенно уменьшаются.

Рассчитаем закон изменения этих токов. Принимая во внимание основное уравнение токов проводимости $\left(\operatorname{div} \delta = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$ и электрического поля $(\operatorname{div} \epsilon_a E = \rho)$ и полагая, что проводящая среда однородна ($\sigma = \text{const}$), мы с помощью дифференциальной формы закона Ома ($\delta = \sigma E$) получим

$$\frac{\rho}{\epsilon_a} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (16.1)$$

или, разделяя переменные и интегрируя:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\epsilon_a} dt; \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_a} t}, \quad (16.2)$$

где ρ_0 — значение объёмной плотности заряда в момент $t=0$.

Мы видим, что объёмная плотность заряда в любой точке внутри проводника убывает до нуля. Промежуток времени t_0 , в течение которого плотность заряда убывает в $e=2,72...$ раза, определится из уравнения $1 = \frac{t_0 \sigma}{\epsilon_a}$:

$$t_0 = \frac{\epsilon_a}{\sigma}, \quad (16.3)$$

и называется временем релаксации¹⁾. Для металлов время релаксации имеет величину порядка 10^{-17} сек²⁾.

Продифференцировав выражение (16.2) плотности заряда по времени, мы убеждаемся, что и плотность тока будет убывать по тому же закону и в результате превратится в нуль.

§ 17. Сторонние силы, эдс. Закон Ома

Электростатическое поле, как это следует из предыдущего параграфа, не может поддерживать постоянных токов; для поддержания их требуются особые явления, так называемые «сторонние силы», имеющие неэлектрическую природу.

Сторонние силы возникают в областях химической или физической неоднородности, например, в слое, где происходит соприкосновение двух веществ, химически воздействующих друг на друга (гальваническая эдс), на поверхности контакта двух различных металлов (контактные эдс), при наличии разности температур (термоэдс) и т. д.

Погрузим, например, цинк в слабый раствор серной кислоты. Цинк будет заряжаться отрицательно, а кислота — положительно. Простейшее объяснение этого явления таково: цинковая пластина, растворяясь в серной кислоте, отдаёт в раствор положительно заряженные ионы, электроны же остаются в пластинке и заряжают её отрицательно.

Ионы цинка, попадая в раствор, не удаляются от цинковой пластинки, а окружают её, удерживаясь силами притяжения её отрицательного заряда.

Точно так же контактную стороннюю силу можно объяснить тем, что в различных металлах электронный газ имеет разное осмотическое давление и разные условия выхода из металла: в местах контакта происходит диффузия электронов, скорость которой в одном и другом направлениях может быть различной; тот металл, в который попадает избыток электронов, заряжается отрицательно, другой же получает положительный заряд.

В этом случае возникающее разделение зарядов происходит за счёт явления неэлектрической природы (диффузии электронов).

Неравномерная диффузия электронов, возникающая при нагревании контакта двух металлов, представляет собой термоэлектродвижущую силу (термоэдс).

Перемещение статических электрических зарядов в электростатическом генераторе происходит под влиянием механической силы, вызывающей движение отдельных заряженных деталей машины. Движущая механическая сила в данном случае будет являться «сторонней».

¹⁾ Релаксация — расслабление.

²⁾ В этом случае $\epsilon_m = \epsilon_0 \approx 10^{-11} \frac{\phi}{m}$, $\sigma \approx 10^7 \text{ (ом}\cdot\text{м)}^{-1}$.

Таким образом, в общем случае на свободный заряд будет действовать, наряду с напряжённостью электрического поля, также «сторонняя напряжённость» и дифференциальная формула закона Ома (13.1) примет вид

$$\delta = \sigma (E + E^{стор}), \quad (17.1)$$

где $E^{стор}$ — «сторонняя напряжённость» — определяется как отношение сторонней силы, возникающей вследствие одной из упомянутых выше причин неэлектрической природы и действующей на заряд, к заряду:

$$E^{стор} = \frac{F^{стор}}{q}. \quad (17.2)$$

Можно говорить о стороннем поле, понимая под этим термином пространственное явление, характеризующееся наличием сторонних сил в той области, где это явление существует.

Отметим, что стороннее поле проявляется обычно в тонком слое, разграничивающем области с различными физическими характеристиками.

В результате действия сторонних сил происходит перемещение зарядов, и уже эти переместившиеся заряды возбуждают в окружающем пространстве собственное электрическое поле.

Стационарное электрическое поле может поддерживаться сторонними силами. В самом деле, из условия стационарности ($\operatorname{div} \delta = 0$) и из ур-ния (17.1) следует

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta &= \operatorname{div} \sigma (E + E^{стор}) = 0, \\ \operatorname{div} \sigma E &= -\operatorname{div} \sigma E^{стор}, \end{aligned} \quad (17.3)$$

значит, если $E^{стор}$ постоянно, то постоянным будет и E и мы получим стационарное электрическое поле.

Физически это условие [ф-ла (17.3)] показывает, что постоянное значение плотности движущихся зарядов ($\rho = \operatorname{div} \epsilon_a E$) поддерживается действием «сторонней напряжённости» $E^{стор}$; заряды растекаются в проводящей среде под влиянием электрического поля E , а сторонние силы ($E^{стор}$), перемещая заряды противоположно направлению действия E , поддерживают их плотность постоянной.

На рис. 17.1 представлено сечение проводящей среды, в которой между границами A и B действует стороннее поле, характеризующееся «сторонней напряжённостью» $E^{стор}$, направленной от B к A . Благодаря действию $E^{стор}$ на границу A попадают положительные заряды, а на границу B — отрицательные. Эти заряды создают электрическое поле как вне границ AB , так и между ними.

Вне границ AB вектор δ плотности тока определяется соотношением

$$\delta = \sigma E,$$

между границами AB — соотношением

$$\delta = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{стоп}). \quad (17.4)$$

Мы получили обобщение дифференциальной формы закона Ома.

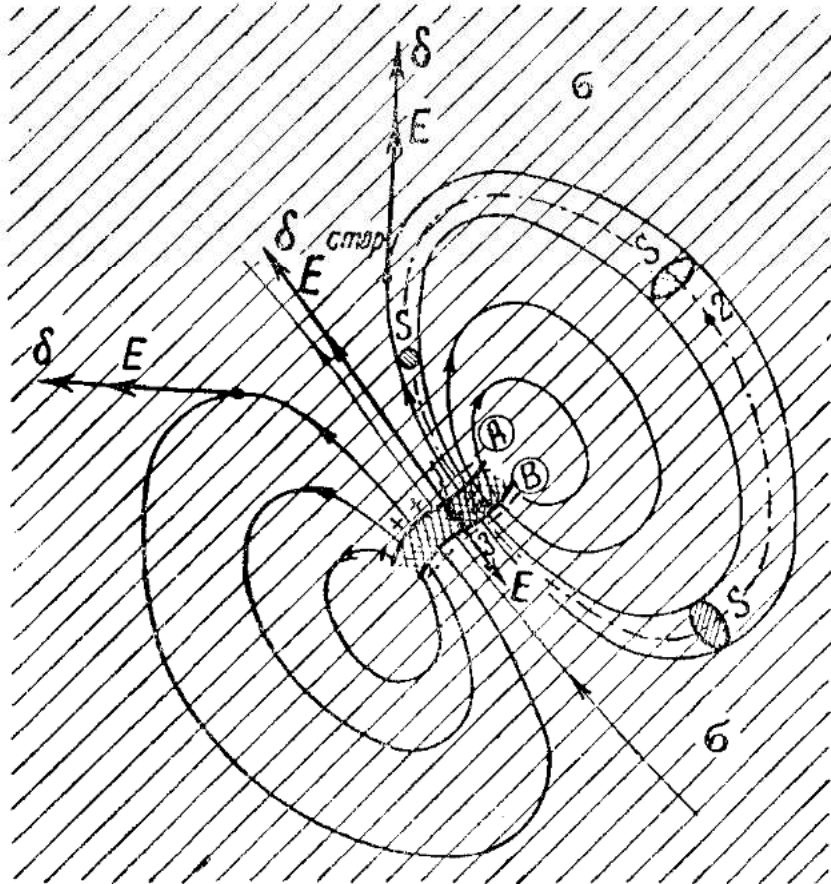


Рис. 17.1

§ 18. Интегральная форма закона Ома. Моделирование электростатического поля

Чтобы перейти к известной интегральной форме, рассмотрим трубку тока (1—2—3—1) сечением S , переменным по длине трубки (см. рис. 17.1). Левую часть выражения (17.4) умножим и разделим на S . Умножим скалярно обе части (17.4) на dl (элемент оси трубки), разделим на σ и проинтегрируем вдоль этой оси. Получим:

$$\oint \delta S \cdot \frac{dl}{\sigma S} = \oint \delta S \frac{dl}{\sigma S} = \int_{1-2-3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{3-1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{1-2-3} \mathbf{E}^{стоп} \cdot d\mathbf{l} + \int_{3-1} \mathbf{E}^{стоп} \cdot d\mathbf{l}. \quad (18.1)$$

В интеграле левой части $\delta S = I$ — ток в сечении трубки, одинаковый на всём её протяжении; $\oint \frac{dl}{\sigma S}$ — электрическое сопротивление r трубки. Первый интеграл правой части равен $\varphi_1 - \varphi_3$ — разности потенциалов границ A и B , второй интег-

рал, очевидно, $\varphi_3 - \varphi_1$, третий интеграл равен нулю (на участке 1—2—3 сторонних сил нет) и четвёртый — равен эдс, действующей между границами A и B . В итоге:

$$I r = (\varphi_1 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_1) + \mathcal{E}_{3-1}; \quad (18.2)$$

$$I r = \mathcal{E}_{3-1}.$$

Мы получили известную форму закона Ома для замкнутой цепи (в данном случае — замкнутой трубки тока I).

Вернёмся к дифференциальным соотношениям.

Так как по условию стационарности $\text{div } \delta = 0$, то для областей, в которых нет сторонних сил (вне границ AB), получится

$$\text{div } E = 0. \quad (18.3)$$

Полученное уравнение совпадает с основным уравнением электростатического поля для области, где нет объёмных зарядов. Таким образом, стационарное электрическое поле в областях, не содержащих сторонних сил, геометрически подобно электростатическому полю в областях, не содержащих зарядов.

Этим обстоятельством часто пользуются для моделирования электростатического поля. Например, если нужно исследовать электростатическое поле между двумя электродами заданной формы, то конструируют из проводящего материала модели этих электродов, наполняют промежуток между ними проводящей средой (например, влажным песком, чистой водой) и, прикладывая к электродам постоянную разность потенциалов, исследуют возникающее поле токов. Линии вектора плотности тока будут совпадать с линиями вектора напряжённости в диэлектрике¹⁾.

Следствием геометрического подобия электростатического стационарного поля является аналогия в выражениях проводимости и ёмкости. Например, проводимость между плоскими электродами площадью S , находящимися на расстоянии l друг от друга, определяется как

$$g = \frac{\sigma S}{l}. \quad (18.4)$$

Ёмкость же плоского конденсатора равна, как известно,

$$C = \frac{\epsilon_a S}{l}. \quad (18.5)$$

Аналогичное соотношение будет иметь место и во всех других случаях. Таким образом, зная ёмкость конденсатора с обкладками любой конфигурации, мы заменой ϵ_a на σ сразу получим проводимость между этими обкладками.

Полезно отметить, что если по проводнику течёт ток, то благодаря наличию электрического поля, поддерживающего этот ток, поверхность проводника оказывается заряженной поверхностной плотностью $\rho_{\text{нов}}$ и поэтому скачок нормальной составляющей вектора через поверхность проводника будет

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_{\text{нов}}, \quad (18.6)$$

где индекс 1 указывает область внутри проводника, а индекс 2 — вне этого проводника. Так как $D_{1n} = \epsilon_{a1} E_{1n} = 0$, то на наружной поверхности проводника с током напряжённость имеет нормальную составляющую, равную

$$E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\epsilon_{a2}} = \frac{\rho_{\text{нов}}}{\epsilon_{a2}}, \quad (18.7)$$

где ϵ_{a2} — абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, примыкающего к проводнику.

¹⁾ Конечно, предполагается, что в этом опыте, явление гальванической поляризации отсутствует.

Глава III

СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 19. Силовое действие магнитного поля. Законы Лоренца, Ампера и Био—Савара

Любой вид электрического тока сопровождается магнитным полем. Магнитное поле, в свою очередь, оказывает силовое действие на движущиеся заряженные частицы, которое определяется законом Лоренца:

$$\mathbf{F}_{\text{Лор}} = q[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (19.1)$$

где q — заряд движущейся частицы,

$\mathbf{v}$ — её скорость,

$\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, величина, характеризующая силовое действие магнитного поля (см. рис. 19.1а).

Применим закон Лоренца к электрическому току i в отрезке провода длиной dl и сечением S , который находится в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$. Если N_0 — концентрация заряженных частиц, движущихся в проводе, то $N_0 S dl$ — количество таких частиц, составляющих ток i в отрезке провода dl . Пусть q — заряд каждой частицы. Тогда сила, действующая на ток в отрезке dl , будет

$$d\mathbf{F} = N_0 S dl q [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (19.2)$$

и так как направление dl и $\mathbf{v}$ можно считать одинаковым, то единичный вектор вектора $\mathbf{v}$ можно отнести к dl :

$$d\mathbf{F} = S N_0 q v [d\mathbf{l}\mathbf{B}],$$

а так как $N_0 q = \rho_{\text{об}}$, то $N_0 q v = \delta_{\text{пр}}$ и $S \delta_{\text{пр}} = i$.

Подставляя эти величины в формулу, определяющую $d\mathbf{F}$, получим закон Ампера:

$$d\mathbf{F} = i [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}]; \quad dF = idlB \sin(\angle d\mathbf{l}, \mathbf{B}), \quad (19.3)$$

где $d\mathbf{F}$ — сила, действующая на элемент тока idl (рис. 19.1б). Эта сила становится наибольшей, если направления векторов $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$ перпендикулярны друг другу:

$$dF_{\text{наиб}} = idlB.$$

Отсюда

$$B = \frac{dF_{\text{наиб}}}{idl} \quad (19.4)$$

Таким образом можно определить величину вектора B . Направление вектора B находим следующим образом: тройка векторов $dF_{\text{наиб}}$, dl и B образует правовинтовую систему и при заданных

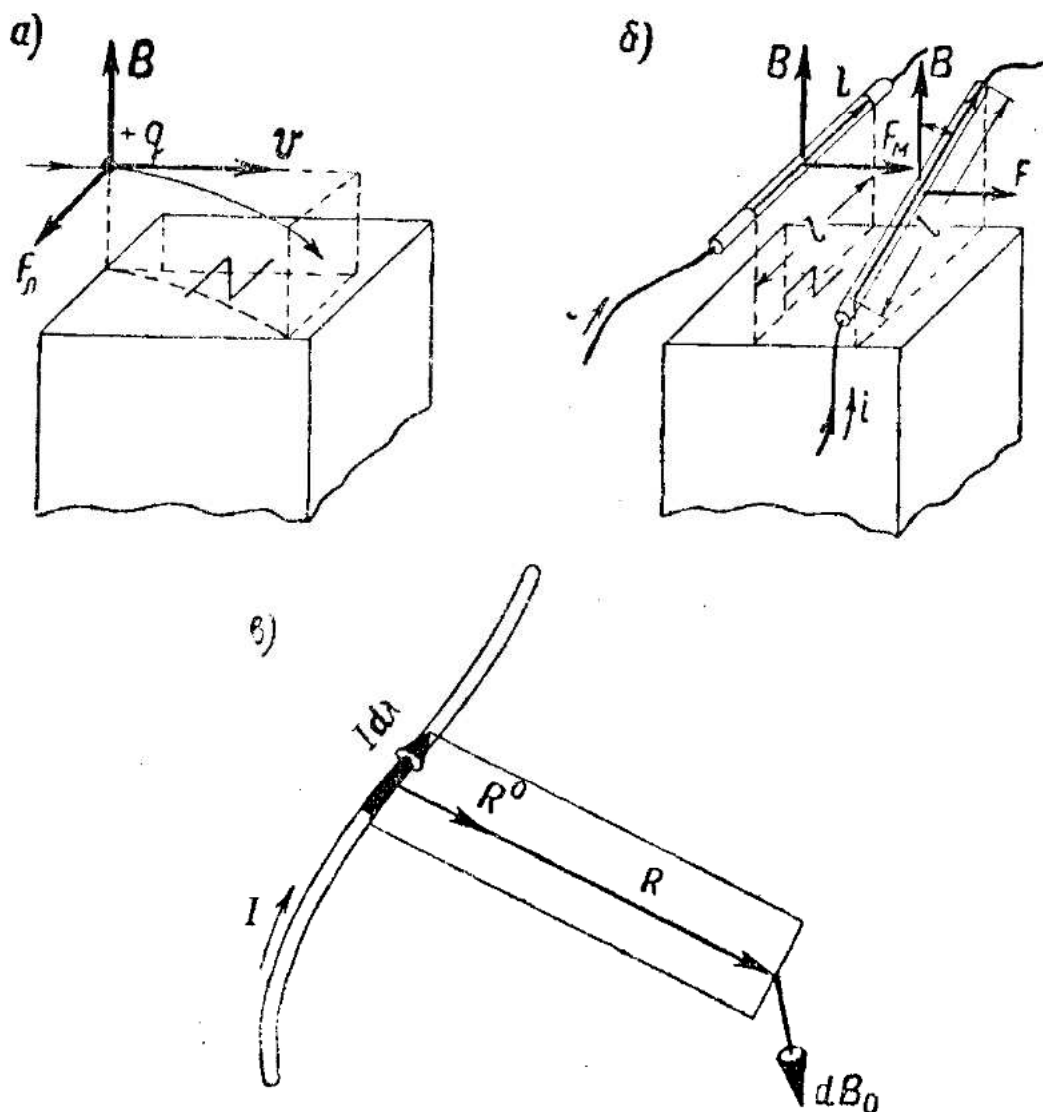


Рис. 19.1

направлениях двух векторов, взятых в указанной последовательности, третий находится по известному правилу левой руки, или штопора (см. рис. 19.1б).

Размерность вектора B будет:

$$[B] = \frac{\text{н}}{\text{а} \cdot \text{м}} = \frac{\text{дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{а}} = \frac{\text{в} \cdot \text{к} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2 \cdot \text{к}} = \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} = \frac{\text{вб}}{\text{м}^2} = \text{тл}.$$

Вектор $\mathbf{B}$ связан с возбуждающим его током законом Био—Савара. В вакууме элемент тока $I d\mathbf{l}$ возбуждает магнитное поле с индукцией

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{R}^\circ]}{R^2}, \quad (19.5)$$

где R — расстояние от элемента тока $I d\mathbf{l}$ до точки наблюдения и $\mathbf{R}^\circ$ — единичный вектор, направленный к точке наблюдения (рис. 19.1в).

Здесь μ_0 — магнитная постоянная, равная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{ЗН}}{\text{м}}. \quad (19.6)$$

Приведём формулу взаимодействия двух произвольно расположенных элементов тока, данную Ампером. Подставив в ф-лу (19.3) закона Ампера значение $\mathbf{B}$ для поля элемента тока $I d\mathbf{l}$ по ф-ле (19.5) и заменив в этих формулах $d\mathbf{l}$ на $d\mathbf{l}_1$, $d\mathbf{l}$ на $d\mathbf{l}_2$, i на I_1 и I на I_2 , получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{1-2} &= I_2 [d\mathbf{l}_2 \mathbf{B}] = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} [(I_2 d\mathbf{l}_2) [(I_1 d\mathbf{l}_1) \mathbf{R}^\circ]] = \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R^2} [d\mathbf{l}_2 [d\mathbf{l}_1 \mathbf{R}^\circ]]. \end{aligned} \quad (19.7)$$

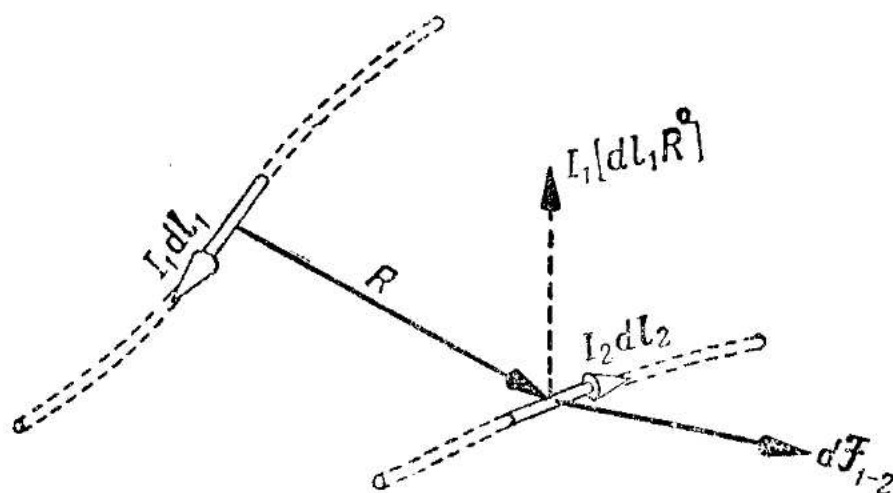


Рис. 19.2

Соотношение направлений векторов силы $d\mathbf{F}_{12}$, с которой элемент $I_1 d\mathbf{l}_1$ действует на элемент $I_2 d\mathbf{l}_2$, элементов $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ и вектора $\mathbf{R}^\circ$, представлено на рис. 19.2. Ампер вывел эту формулу в результате пятилетних экспериментальных и теоретических исканий.

Формула Ампера о взаимодействии элементов тока типична для теории дальнего действия. Как мы видим, в эту формулу входят

лишь взаимодействующие токи, связанные сложной функцией расстояния. Правда, применяя эту формулу для расчёта сил взаимодействия в однородной намагничивающейся среде, мы должны были бы внести множитель, зависящий от магнитных свойств среды (магнитную проницаемость μ , см. § 21), но Ампер этого обстоятельства не учитывал.

Максвелл назвал Ампера за его работы по электродинамике, и в частности, за вывод этой формулы Ньютоном электричества. Отношение Максвелла к подобным методам расчёта электромагнитных процессов видно из его слов, приведённых в § 7 на стр. 48.

§ 20. Закон полного тока

Непосредственный расчёт вектора индукции по формуле закона Био — Савара приводит к необходимости вычислять интеграл по контуру λ тока, возбуждающего поле

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\lambda} \frac{I [d\lambda \cdot \mathbf{R}^0]}{R^3} \quad (20.1)$$

Интегрирование практически выполнимо лишь для небольшого числа простых конфигураций λ :

— для бесконечного прямолинейного тока

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (20.2)$$

где a — расстояние от оси тока до точки наблюдения;

— на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \beta, \quad (20.3)$$

где a — радиус контура тока и β — угол между осью кругового тока и направлением на элемент тока;

— на оси соленоида круглого сечения с равномерно распределённой обмоткой

$$B = \mu_0 \frac{I\omega}{l} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2), \quad (20.4)$$

где $\frac{I\omega}{l}$ — ампервитки на единицу длины соленоида, β_1 и β_2 — углы, образованные осью и направлениями из точки наблюдения на края соленоида.

Формулой, удобной для практических расчётов поля и дальнейшего его исследования, является закон полного тока.

Рассмотрим магнитное поле тока I , текущего в проводе, который образует замкнутый контур. Пусть размер сечения провода значительно меньше линейных размеров контура.

Вычислим интеграл

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

где контур интегрирования l может быть либо сцеплен, либо не сцеплен с контуром тока I (рис. 20.1). Подынтегральное выражение преобразуем с помощью закона Био — Савара:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\lambda} \frac{[d\lambda \cdot \mathbf{R}^0] \cdot d\mathbf{l}}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\lambda} \frac{[d\mathbf{l} \cdot d\lambda] \cdot \mathbf{R}^0}{R^2}. \quad (20.5)$$

Перемещение точки наблюдения M на $d\mathbf{l}$ при неподвижном контуре тока эквивалентно перемещению контура тока на $-d\mathbf{l}$ при неподвижной точке наблюдения. Подставим в предыдущую формулу вместо $d\mathbf{l}$ вектор $-d\mathbf{l}$:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\lambda} \frac{[-d\mathbf{l} d\lambda]}{R^2} \cdot \mathbf{R}^0.$$

Как очевидно из рис. 20.1, векторное произведение $[-d\mathbf{l} d\lambda] = d\mathbf{S}$ есть площадка, которую очерчивает элемент $Id\lambda$ при перемещении на $-d\mathbf{l}$.

Из точки наблюдения M эта площадка видна под телесным углом $d\omega$, равным

$$d\omega = \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^0}{R^2} = \frac{d\mathbf{S}'}{R^2} = d\mathbf{S}'',$$

где $d\mathbf{S}''$ — проекция площадки $d\mathbf{S}$ (и $d\mathbf{S}'$) на поверхность единичной сферы с центром в точке M . Следовательно,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\lambda} d\omega. \quad (20.6)$$

Интеграл $\oint_{\lambda} d\omega$ представляет собой телесный угол $d\Omega$, под которым видна элементарная кольцеобразная поверхность, очерченная всем замкнутым контуром при его перемещении на $-d\mathbf{l}$. Проекция этой поверхности на единичную сферу, численно равная $d\Omega$, показана на рис. 20.1. Геометрически ясно, что элемен-

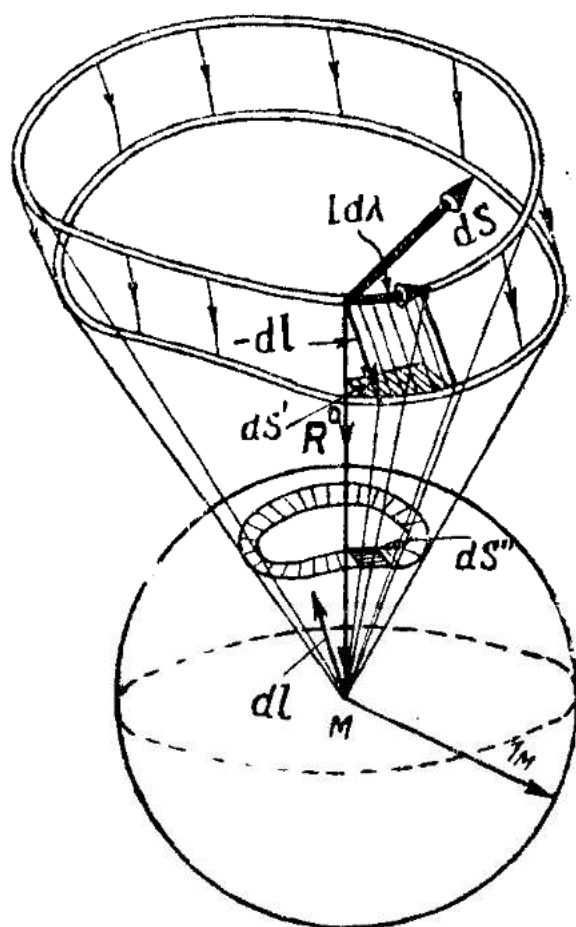


Рис. 20.1

тарный угол $d\Omega$ является изменением телесного угла Ω , под которым контур λ виден из точки M при перемещении контура на $-dl$. Итак,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega; \quad B_l = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\Omega}{dl}. \quad (20.7)$$

Выполним интегрирование по замкнутому контуру l . Если контур l не сцеплен с контуром тока, то при перемещении точки M по контуру l угол Ω будет меняться от некоторого первоначального значения и возвратится к этому же значению, когда весь контур l будет обойдён. В этом случае

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\Omega = 0. \quad (20.8)$$

Пусть контур интегрирования сцеплен с контуром тока λ (рис. 20.2). Телесный угол положителен, если положительное направление обхода вдоль контура, который виден под этим углом,

окажется против часовой стрелки, т. е. если контур затянуть поверхностью, то видна будет отрицательная её сторона (см. § 2). Поэтому телесные углы, показанные на рис. 20.2,—отрицательны.

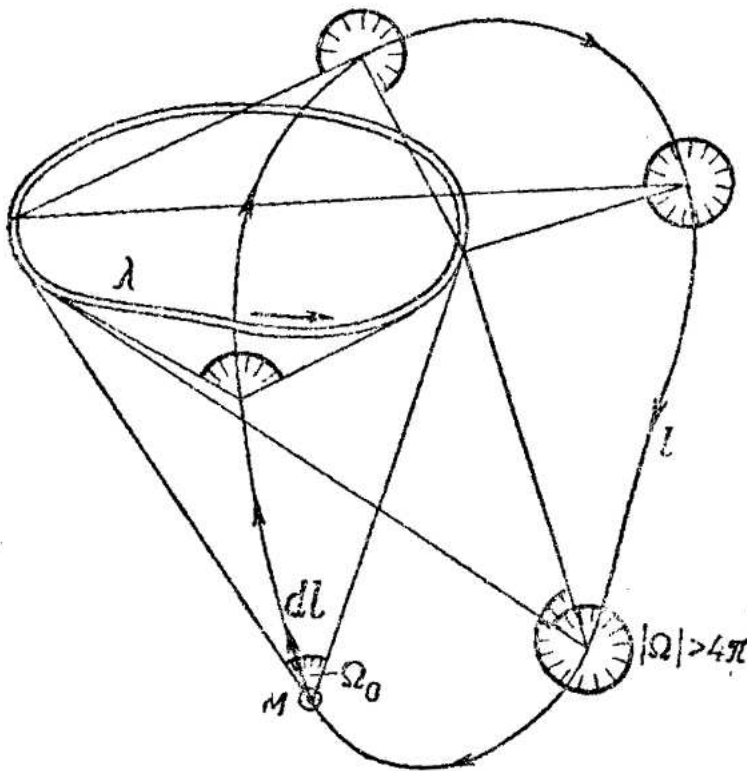


Рис. 20.2

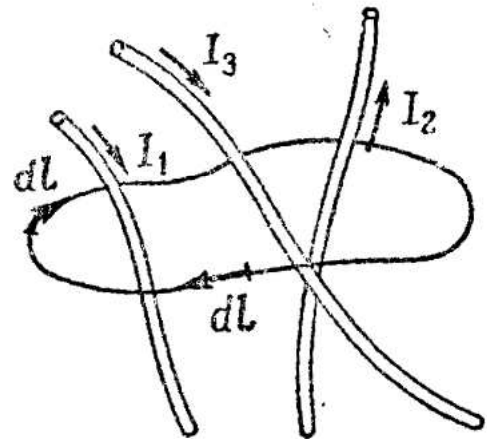


Рис. 20.3

Проследим, как изменяется угол Ω при перемещении точки M вдоль контура l (см. рис. 20.2).

От своего начального значения в точке M $\Omega_{нач} = -|\Omega_0|$ возрастает по абсолютной величине и, возвращаясь в точку M , принимает значение, равное $\Omega_{кон} = -(4\pi + |\Omega_0|)$. Следовательно,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{I \mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_H}^{\Omega_K} d\Omega = -\frac{I \mu_0}{4\pi} (\Omega_K - \Omega_H) = \mu_0 I. \quad (20.9)$$

Таким образом, если путь интегрирования, сцепленный с контуром тока, образует с положительным направлением тока правовинтовую систему, то ток I входит в ф-лу (20.9) со знаком плюс.

Полученная формула

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (20.9')$$

и есть закон полного тока. Если контур интегрирования сцеплен с несколькими токами, то эти токи входят в правую сторону ф-лы (20.9) со знаками, определяемыми положительными направлениями токов и направлением обхода по контуру. Для случая, приведенного на рис. 20.3, получим

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3) = \mu_0 \sum I. \quad (20.10)$$

Интегрируя по силовой линии вектора $\mathbf{B}$, для которой

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl,$$

мы всегда получим положительное значение интеграла (20.10).

Если замкнутых силовых линий нет, то, интегрируя вдоль замкнутого контура, мы в итоге получим нуль, так как если на одной части контура значение интеграла будет положительно (вектор поля образует с элементом контура $d\mathbf{l}$ острый угол), то на остальной части контура интеграл будет отрицателен (между вектором поля и элементами контура — тупой угол) и в сумме получится нуль.

Эти соображения, а также заключение (20.8) указывают, что силовые линии вектора $\mathbf{B}$ всегда замкнуты и сцеплены с токами, возбуждающими поле.

§ 21. Стационарное магнитное поле в магнетиках

Атомы любого вещества обладают магнитными свойствами. Любое вещество является магнетиком. Важнейшие магнитные свойства магнетика определяются:

1) орбитальными электронами атома, представляющими замкнутые атомные токи, которые можно с магнитной стороны характеризовать моментом атомного тока

$$\mathbf{p}_i = i_{\text{мол}} \Delta \mathbf{S}_{\text{мол}}, \quad (21.1)$$

где $i_{\text{мол}}$ — величина эквивалентного атомного (молекулярного) тока и $\Delta \mathbf{S}_{\text{мол}}$ — площадка, контур которой обтекается током;

2) спинами орбитальных электронов атома.

Магнитное поле, действуя на вещество, вызывает:

1) ориентировку орбит электронов. Возникающее собственное результирующее магнитное поле атомов прибавляется к возбуждающему полю. Этот эффект называется парамагнетизмом;

2) силовое воздействие возбуждающего магнитного поля на орбиты электронов, вызывающее их прецессию, и, как оказывается, собственное магнитное поле прецессирующего орбитального электрона всегда направлено против внешнего, возбуждающего его поля (явление диамагнетизма);

3) при определённой кристаллической структуре вещества и определённой структуре электронных оболочек атомов этого вещества (например, наличие некомпенсированных спинов) в веществе возникают так называемые домены — микроскопические области, в которых за счёт атомных (так называемых обменных) сил магнитные спиновые моменты атомов спонтанно¹⁾ ориентируются в одинаковых направлениях (ферромагнетики и их сплавы). Воздействие внешнего поля в этом случае ориентирует магнитные моменты доменов по полю, отчего увеличивается интенсивность поля.

Отметим, что каждый атом обладает пара- и диамагнитными свойствами, которые почти полностью компенсируют друг друга. Преобладание того или иного свойства определяет название: парамагнетик или диамагнетик. Увеличение или уменьшение возбуждающего поля за счёт парамагнетизма или диамагнетизма, как правило, незначительно. Что касается ферромагнитного эффекта, то в этом случае собственное магнитное поле может во много раз (в десятки и даже сотни тысяч раз) превосходить возбуждающее поле.

Все виды намагничивания формально, в целях расчёта, можно свести к эквивалентной картине возникновения (или ориентировки) моментов тока молекул магнетика, величина которых пропорциональна вектору индукции возбуждающего поля:

$$\mathbf{p}_i = i_{\text{мол}} \Delta S_{\text{мол}} = \frac{1}{\mu_0} \alpha_{\text{м}} \mathbf{B}, \quad (21.2)$$

где $\alpha_{\text{м}}$ — намагничиваемость молекулы, $i_{\text{мол}}$ и $\Delta S_{\text{мол}}$ — эквивалентный замкнутый молекулярный ток и площадка, обтекаемая этим током; $\mathbf{p}_i$ будем называть моментом тока.

Следует отметить, что приведённая простая зависимость не соответствует явлению намагничивания ферромагнетиков, так как при их намагничивании связь между собственным полем и полем возбуждающим — нелинейна (кривая намагничивания).

¹⁾ Спонтанно — самопроизвольно.

В нашем курсе мы не будем рассматривать среды с нелинейным характером намагничивания.

Чтобы произвести расчёт магнитного поля в магнетике, рассмотрим сердечник, который помещён в катушку с током и намагничивается полем этого тока (рис. 21.1).

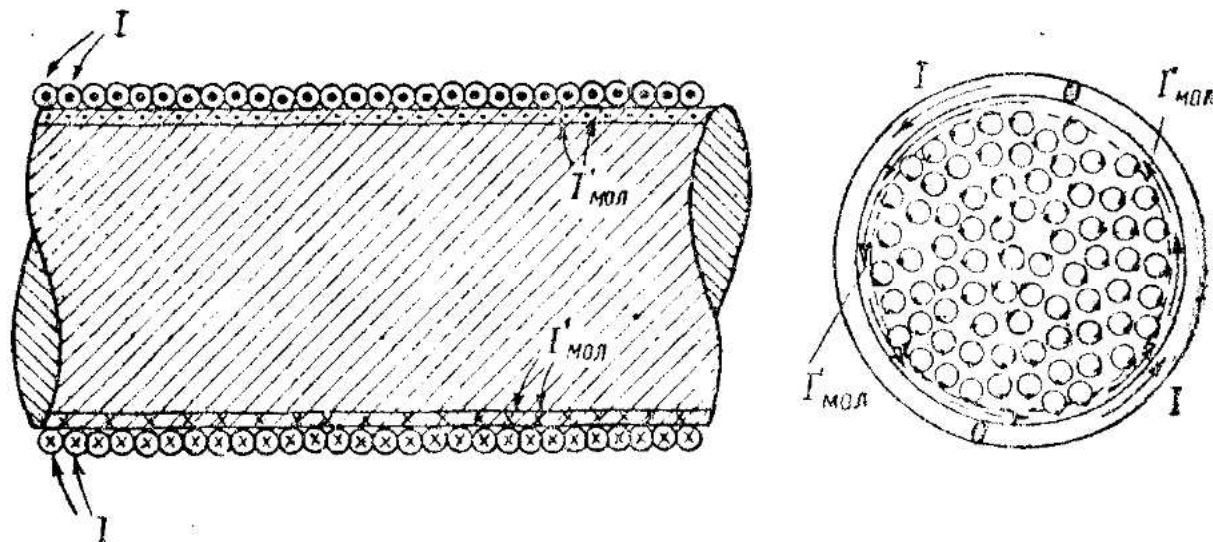


Рис. 21.1

Ориентированные по полю элементарные молекулярные токи в смежных участках, как видно из рисунка, направлены противоположно друг другу, и, очевидно, их магнитное действие компенсируется. Некомпенсированными останутся элементарные токи у боковой поверхности намагниченного сердечника.

Магнитное действие этих граничных молекулярных токов можно заменить некоторым эквивалентным током $I_{\text{мол}}$, текущим в граничном слое боковой поверхности сердечника — слое, толщиной не более размеров атома ($\sim 10^{-10}$ м).

Магнитное действие намагниченного тела можно учесть, вводя указанный эквивалентный поверхностный ток $I_{\text{мол}}$ и выбрасывая само намагниченное тело. Тогда закон полного тока в намагничивающей среде будет иметь вид

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\sum I + I_{\text{мол. поврхн.}} \right). \quad (21.3)$$

Магнитное состояние магнетика характеризуется вектором намагниченности $\mathbf{J}$, который равен по определению

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad (21.4)$$

где $\sum \mathbf{p}_i$ — геометрическая сумма моментов тока молекул магнетика в объёме ΔV .

В среднем вектор $\mathbf{J}$ есть момент единицы объёма магнетика (рис. 21.2а).

Выразим вектор $\mathbf{J}$ в функции эквивалентного поверхностного тока. Рассмотрим некоторую замкнутую трубку сечением ΔS . Пусть эта трубка частично (или целиком) находится в намагниченной среде (рис. 21.2 б, в).

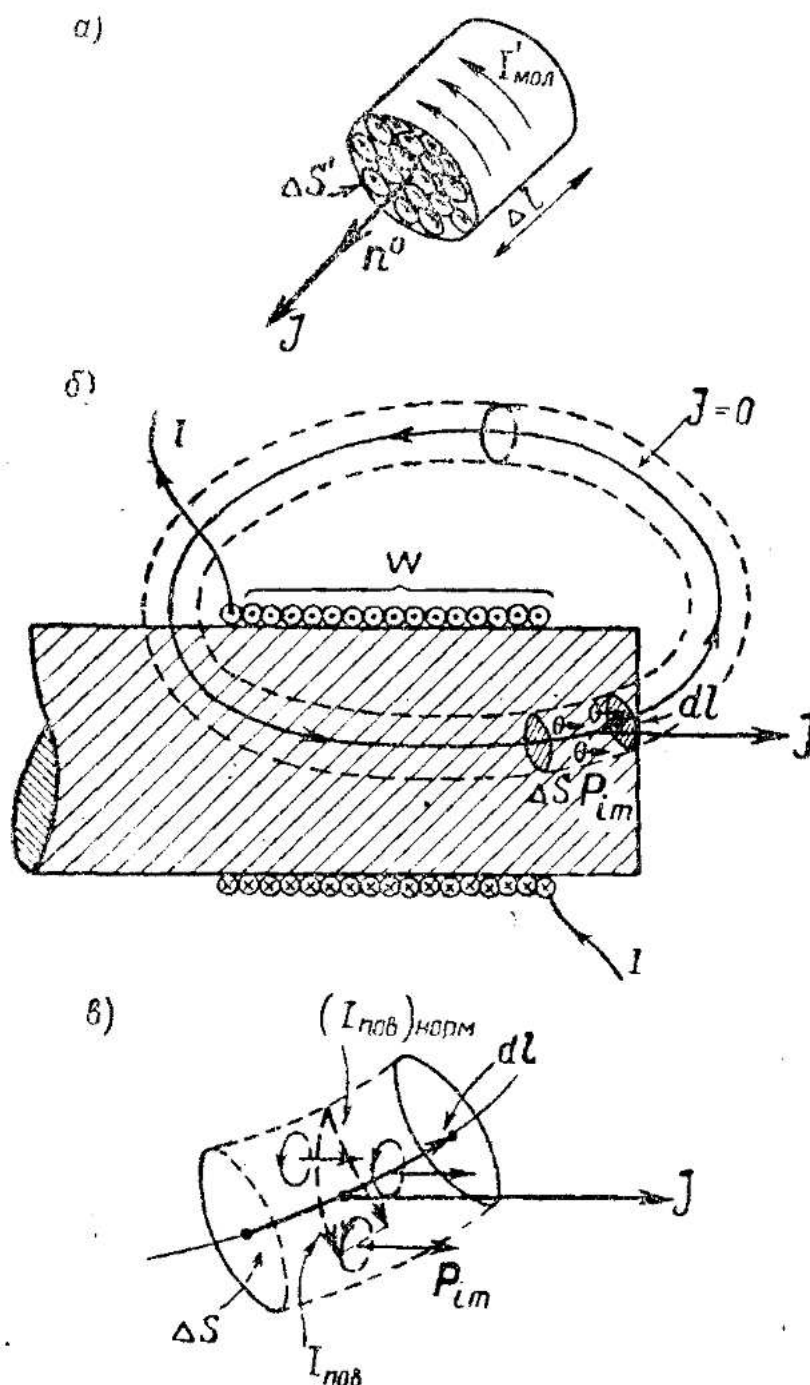


Рис. 21.2

Ось трубки является, очевидно, замкнутым контуром, целиком лежащим в её объёме.

Рассмотрим элемент объёма трубки

$$\Delta V = \Delta S \cdot dl,$$

находящийся в толще намагниченной среды.

Вектор намагниченности $\mathbf{J}$ на элементе длины $d\mathbf{l}$ в этом объёме будет равен

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V},$$

где $\Delta V = \Delta S dl$. Вектор $\mathbf{J}$, вообще говоря, может не совпадать с направлением $d\mathbf{l}$.

Найдём величину

$$\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \sum \frac{\mathbf{p}_i \cdot d\mathbf{l}}{\Delta V} = \sum \frac{(\mathbf{p}_i)_\tau dl}{\Delta V}, \quad (21.5)$$

где $(\mathbf{p}_i)_\tau$ — компонента момента молекулярного тока на направление $d\mathbf{l}$ (рис. 21.2, в).

Магнитное действие молекулярных моментов в элементарном объёме ΔV можно заменить, как мы показали выше, магнитным действием эквивалентного поверхностного тока по боковой поверхности объёма ΔV .

В данном случае эквивалентной замене подлежат не сами моменты, а их компоненты вдоль $d\mathbf{l}$; поэтому на поверхности элементарного объёма следует взять нормальную (к направлению $d\mathbf{l}$) компоненту поверхностного эквивалентного тока. Итак,

$$\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \frac{(I_{\text{мол. пов}})_n \Delta S dl}{\Delta V} = (I_{\text{мол. пов}})_n = (\partial_{\text{мол. пов}})_n dl.$$

Проинтегрируем это выражение по всей оси трубки и получим

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\partial_{\text{пов. мол}})_n dl = \int_A^B (\partial_{\text{пов. мол}})_n dl = (I_{\text{пов. мол}})_n, \quad (21.6)$$

где A и B — начало и конец оси трубки в намагниченной среде и $(I_{\text{пов. мол}})_n$ — нормальная компонента эквивалентного поверхностного тока по всей поверхности трубки, находящейся в намагниченной среде¹⁾.

Вернёмся к формуле закона полного тока в намагничивающейся среде [ф-ла (21.3)]. С рассмотренным выше замкнутым контуром будет сцеплена именно нормальная (к оси) составляющая эквивалентного поверхностного тока. Подставив её значение в формулу закона полного тока, получим

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\sum I + \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \right),$$

¹⁾ Если материал намагничивающегося сердечника однороден и поле в сечении сердечника также однородно (что будет при длине сердечника, значительно превышающей его диаметр), то ΔS можно взять как сечение сердечника (т. е. рассматриваемой трубкой будет весь сердечник).

или

$$\oint \left\{ \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right\} \cdot d\mathbf{l} = \sum I. \quad (21.7)$$

Это выражение не зависит от магнитных свойств среды и определяется лишь макроскопическими токами I в обмотке возбуждения, сцепленными с контуром интегрирования l .

Вектор $\left| \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right|$ будет характеризовать (в случае однородной среды) магнитное поле лишь в зависимости от токов возбуждения. Этот вектор — напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad (21.8)$$

и, следовательно, в намагниченной среде:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}), \quad (21.9)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I, \quad (21.10)$$

Это выражение, отличающееся от (20.9') лишь отсутствием постоянного множителя μ_0 , также является формулой закона полного тока.

Если вектор намагниченности $\mathbf{J}$ пропорционален вектору напряжённости $\mathbf{H}$, то

$$\mathbf{J} = k_m \mathbf{H}, \quad (21.11)$$

где k_m — магнитная восприимчивость среды.

Тогда

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + k_m) \mathbf{H}.$$

Размерность векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ определяется из предыдущих формул:

$$[H][dl] = I; [H] = \frac{a}{m}.$$

Размерность магнитной постоянной μ_0 будет

$$[\mu_0] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{мл \cdot м}{a} = \frac{в \cdot сек \cdot м}{м^2 \cdot a} = \frac{гн}{м},$$

магнитная восприимчивость k_m — очевидно, безразмерная величина.

Обозначим

$$1 + k_m = \mu, \quad (21.12)$$

μ — магнитная проницаемость. Тогда

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_a \mathbf{H}, \quad (21.13)$$

где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость среды¹⁾.

Следует отметить, что в неоднородной намагничивающейся среде вектор $\mathbf{H}$ зависит не только от возбуждающих токов в обмотке, но и от распределения магнитной проницаемости, и лишь интегральная функция $\mathbf{H}$ [см. ф-лу (21.10)] зависит только от токов возбуждения.

Таким образом, магнитное поле характеризуется тремя векторами:

— вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$, определяющим силовое действие поля;

— вектором намагниченности $\mathbf{J}$, характеризующим магнитное состояние магнетика;

— вектором напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}$, связанным с возбуждающими поле макроскопическими токами.

Сравнивая соотношение между векторами магнитного и электрического полей, отметим существенную разницу в действии поляризованного диэлектрика и намагниченного магнетика на внешнее, возбуждающее поле.

Поляризованный диэлектрик ослабляет действие внешнего поля в своём объёме

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \mathbf{P}, \quad (21.14)$$

тогда как намагниченный магнетик (пара- и ферромагнетик) усиливает его:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}). \quad (21.15)$$

§ 22. Непрерывность магнитного потока. Граничные условия

Важнейшим свойством вектора $\mathbf{B}$ является непрерывность его нормальной составляющей при переходе через границы раздела намагниченных сред. Это свойство можно установить экспериментально, если измерить поток вектора $\mathbf{B}$

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (22.1)$$

¹⁾ В прежней терминологии магнитная проницаемость μ называлась относительной магнитной проницаемостью и обозначалась μ_r , абсолютная магнитная проницаемость μ_a называлась просто магнитной проницаемостью и обозначалась μ .

с обеих сторон границы раздела. Например, рассмотрим намагниченный сердечник (рис. 22.1).

Применяя баллистический метод измерения потока и поместив измерительную катушку один раз на сердечник и второй раз перед сердечником, можно измерить магнитный поток в сердечнике (у поверхности раздела S) и перед этой поверхностью.

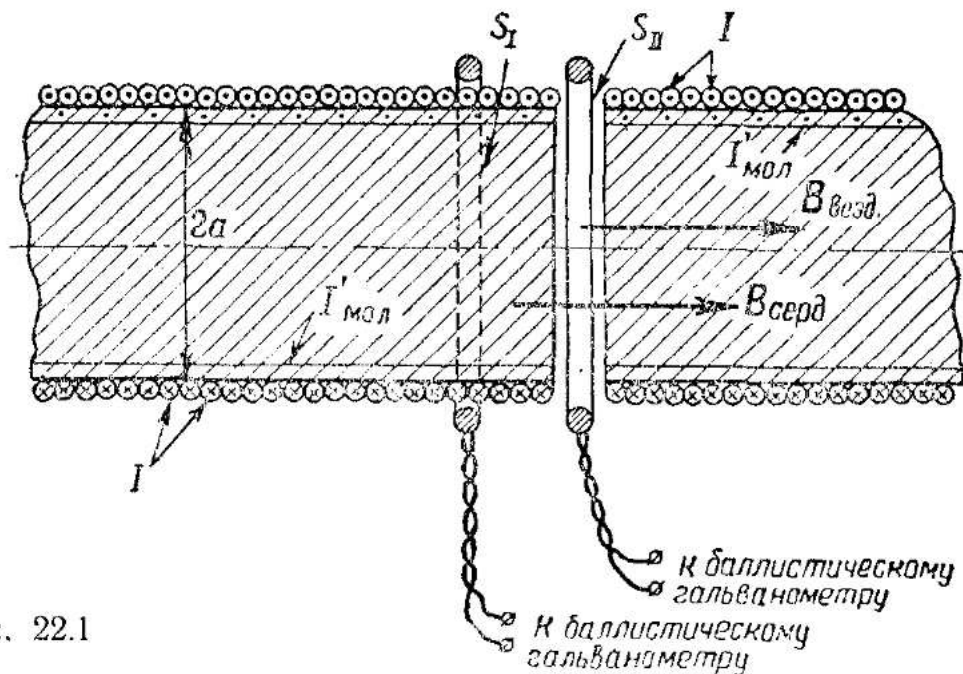


Рис. 22.1

При достаточном приближении измерительных катушек к поверхности раздела мы получим одно и то же значение потока:

$$\int_{S_I} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{II}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (22.2)$$

Векторные линии обычно проводят так, чтобы на единицу площади, перпендикулярной линиям, их число равнялось бы значению вектора в этом месте:

$$\Delta N = B \Delta S$$

(ΔN — число линий сквозь площадку ΔS). Если площадка не ортогональна линиям, то, очевидно,

$$\Delta N = \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{S} \quad (22.3)$$

и, следовательно, полное число линий сквозь некоторую поверхность равно

$$N = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi^1)$$

— потоку вектора сквозь эту поверхность.

¹⁾ Размерность магнитного потока в системе СИ будет: $[\Phi] = [B] \text{ м}^2 = \text{тл} \cdot \text{м}^2 = \text{вб}$.

В данном случае мы убедились, что число векторных линий вектора $\mathbf{B}$ по обе стороны поверхности раздела одинаково, следовательно,

$$B_{In} = B_{II n} . \quad (22.4)$$

Заменяв намагниченную среду эквивалентным поверхностным током (см. § 21), можно непосредственно убедиться в непрерывности линий вектора $\mathbf{B}$ (см. рис. 22.2а, б), так как, произведя указанную замену, мы можем выкинуть сердечник и тем самым уничтожить границу S (рис. 22.2б). Поток вектора $\mathbf{B}$ сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (22.5)$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (22.6)$$

Это уравнение — одно из основных уравнений магнитного поля.

Нормальная компонента напряжённости $\mathbf{H}$ на границе раздела может меняться скачком:

$$\mu_{aI} H_{In} = \mu_{aII} H_{II n}$$

и, сокращая на μ_0 , получим

$$\frac{H_{In}}{H_{II n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (22.7)$$

Тангенциальные компоненты вектора $\mathbf{H}$ на границе удовлетворяют условию

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \delta_{n \text{ поверхн}}, \quad (22.8)$$

где $\delta_{n \text{ поверхн}}$ — нормальная (к направлению $H_{1\tau}$ и $H_{2\tau}$) компонента линейной плотности поверхностного тока.

Если поверхностного тока нет, то тангенциальная составляющая $\mathbf{H}$ на границе непрерывна:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (22.9)$$

Вывод этих граничных условий для нормальных и тангенциальных компонент векторов магнитного поля дан подробно в § 38.

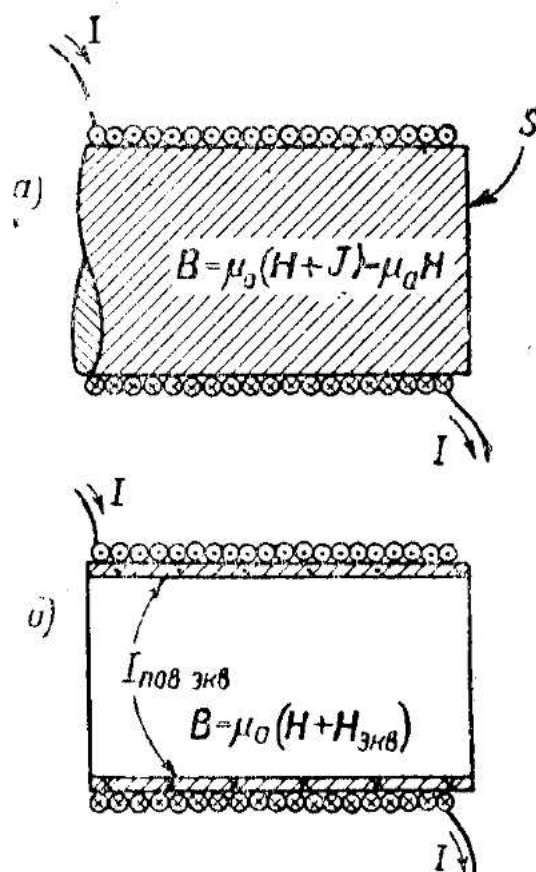


Рис. 22.2

Линии вектора $\mathbf{B}$, как было показано выше, — замкнуты. Магнитное поле не имеет источников, на которых прерывались бы векторные линии, и является типичным примером вихревого поля (см. §§ 20 и 21).

§ 23. Скалярный потенциал магнитного поля

Чтобы рассчитать магнитное поле в общем случае, попытаемся поступить так, как это было сделано при расчёте электростатического поля (см. §§ 4 и 5), т. е. определим такую скалярную функцию, производные от которой по направлению давали бы значения составляющих какого-либо вектора магнитного поля.

Эта задача уже решена для вектора $\mathbf{B}$ в § 20. Из ф-лы (20.7), учитывая, что в вакууме $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$, следует

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{I}{4\pi} d\Omega; H_l = -\frac{Id\Omega}{4\pi dl} = -\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{I\Omega}{4\pi} \right). \quad (23.1)$$

Таким образом, функция $\frac{I\Omega}{4\pi}$ будет искомым скалярным потенциалом магнитного поля:

$$\frac{I\Omega}{4\pi} = \varphi_m. \quad (23.2)$$

Составляющие вектора $\mathbf{H}$ определяются так:

$$H_l = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{I\Omega}{4\pi} \right). \quad (23.3)$$

Однако из того же вывода (см. § 20) следует, что функция $\varphi_m = \frac{I\Omega}{4\pi}$ при обходе по замкнутому контуру, сцепленному с контуром тока I , изменяет своё значение на величину I , т. е. оказывается многозначной.

Чтобы избежать этой многозначности, применяют следующий приём: контур тока мысленно затягивают произвольной сплошной поверхностью и улавливаются при проведении расчёта не пересекать этой поверхности контуром интегрирования. Если это условие не нарушается, то со скалярным потенциалом магнитного поля можно обращаться как с однозначной функцией, и $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ для всех допустимых путей интегрирования. Скалярный потенциал φ_m в этом случае применяется так же, как и потенциал электростатического поля.

Рассматривая точку в области, в которой плотность тока отлична от нуля (например, в объёме провода с током), мы обна-

руживаем, что скалярного потенциала магнитного поля в такой точке не существует, так как для неё не существует телесного угла Ω , под которым виден контур тока.

В общем виде соотношение между скалярным потенциалом магнитного поля и его напряжённостью можно записать как

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (23.4)$$

В областях магнитного поля, где магнитная проницаемость μ неизменна, векторные линии $\mathbf{H}$ идут не прерываясь и, следовательно,

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (23.5)$$

Линии $\mathbf{H}$ могут прерываться на границах раздела намагниченных сред, где μ меняется скачком [см. ф-лу (22.7)].

Из последних двух уравнений следует

$$\text{div grad } \varphi_m = 0 \text{ или } \nabla^2 \varphi_m = 0, \quad (23.6)$$

т. е. скалярный потенциал магнитного поля так же, как и потенциал электрического поля, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Таким образом, присоединяя к ур-нию (23.6) граничные условия (22.4) и (22.7), мы сводим задачу расчёта магнитного поля к известным уже методам расчёта электростатического поля.

Существенным ограничением является невозможность с помощью скалярного магнитного потенциала рассчитать поле в областях, по которым текут объёмные токи, так как в таких областях скалярного магнитного потенциала не существует. Кроме того, следует помнить о возможной многозначности φ_m .

§ 24. Дифференциальная форма закона полного тока. Векторный потенциал.

Закон полного тока может быть применён для фактического расчёта поля лишь в тех случаях, когда поле и распределение токов, возбуждающих поле, обладают определённой симметрией, т. е. когда можно фактически вычислить контурный интеграл $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$. Для более общих задач мы с помощью формул вихревого поля [см. Приложение I, (П.23)] преобразуем закон полного тока к дифференциальной форме.

Запишем закон полного тока в виде

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I = \int_S \delta \cdot dS. \quad (24.1)$$

Поверхностный интеграл в правой части распространён на поверхность, ограниченную замкнутым контуром l . Поверхность интегрирования пересекает все токи, сцепленные с контуром интегрирования l . Так как δ — плотность тока в каждой точке поверхности S , то интеграл $\int \delta \cdot dS$ и будет полным током сквозь контур l .

Применим к контурному интегралу $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ теорему Стокса

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}.$$

Сравнивая это равенство с ф-лой (24.1), получим

$$\int \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int \delta \cdot d\mathbf{S},$$

или

$$\int \text{rot}_n \mathbf{H} dS = \int \delta_n dS.$$

Так как интегрирование в обеих частях равенства производится по одной и той же поверхности и равенство справедливо для любой величины и формы этой поверхности, то

$$\text{rot}_n \mathbf{H} = \delta_n.$$

Площадка $d\mathbf{S}$ и, следовательно, нормаль $\mathbf{n}^\circ$ также могут иметь любую ориентировку, а если составляющие двух векторов на любые направления равны, то, значит, равны и сами векторы. Итак,

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta. \quad (24.2)$$

Это уравнение является дифференциальной формой закона полного тока. В дальнейшем мы обобщим его на случай любого переменного электромагнитного поля (см. § 29).

Как всякое векторное равенство, ур-ние (24.2) можно разложить на три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \delta_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \delta_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \delta_z \end{aligned} \right\}. \quad (24.3)$$

Чтобы разделить неизвестные в этих уравнениях и, зная компоненты $\delta = \delta(x, y, z)$, найти $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ как функции координат, вво-

дят вспомогательный вектор $\mathbf{A}$ (так называемый векторный потенциал).

Векторный потенциал определяется соотношением

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (24.4)$$

где $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции.

Ротор векторного потенциала приравняется к вектору магнитной индукции $\mathbf{B}$, что вполне допустимо, так как и ротор $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{B}$ — оба вихревые векторы [$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ см. (П.30)], а также уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$].

Одним только ур-нием (24.4) вектор $\mathbf{A}$ не будет определён. Действительно, рассмотрим вектор $\mathbf{A}'$, равный

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi, \quad (24.5)$$

где ψ — некоторая функция координат, тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} (\mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (24.6)$$

так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0$ [см. (П.30)]. Поэтому доопределим вектор $\mathbf{A}$ вторым условием; пусть

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (24.7)$$

Эти два условия (24.4) и (24.7) определяют вектор $\mathbf{A}$ с точностью до постоянного слагаемого так же, как соответствующие уравнения (см. §§ 4 и 5) определяют потенциал электрического поля.

Перейдём к решению ур-ния (24.2). Ограничимся рассмотрением поля в магнитнолинейной среде ($\mu = \text{const}$).

Проведем операцию ротора над обеими частями ур-ния (24.4). Получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_a \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (24.8)$$

Подставляя в эту формулу значение ротора $\mathbf{H}$ из уравнения (24.2), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_a \delta. \quad (24.9)$$

Из ф-л (П. 28), учитывая условие (24.7), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}, \quad (24.10)$$

Следовательно,

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_a \delta; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = -\mu_a \delta. \quad (24.11)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трём скалярным:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} &= -\mu_a \delta_x \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} &= -\mu_a \delta_y \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\mu_a \delta_z \end{aligned} \right\}. \quad (24.12)$$

В отличие от системы уравнений (24.3) в системе (24.12) неизвестные разделились. Каждое из уравнений системы (24.12) содержит лишь одну неизвестную A_x , A_y , A_z и представляет собой уравнение Пуассона. В тех точках поля, где какая-либо из составляющих δ равна нулю, соответствующее уравнение (24.12) переходит в уравнение Лапласа.

Общий интеграл уравнения Лапласа—Пуассона нам известен [см. ф-лу (7.8)]. Применяя его, получим:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \int \frac{\mu_a \delta_x}{4\pi R} dV \\ A_y &= \int \frac{\mu_a \delta_y}{4\pi R} dV \\ A_z &= \int \frac{\mu_a \delta_z}{4\pi R} dV \end{aligned} \right\}. \quad (24.13)$$

Умножая эти равенства соответственно на x° , y° , z° (единичные векторы осей x , y , z) и складывая, получим

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_a \delta}{4\pi R} dV. \quad (24.14)$$

Интегрирование распространяется на те области поля, где плотность тока δ отлична от нуля.

Существенно отметить следующее. Величина $\nabla^2 \mathbf{A}$ в ортогональной прямолинейной системе координат x , y , z равна

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= \nabla^2 (x^\circ A_x + y^\circ A_y + z^\circ A_z) = \\ &= x^\circ \nabla^2 A_x + y^\circ \nabla^2 A_y + z^\circ \nabla^2 A_z. \end{aligned} \quad (24.15)$$

В этом преобразовании единичные векторы прямолинейной системы координат x , y , z можно вынести из под знака ∇^2 , представляющего двойное дифференцирование по координатам, так как очевидно, что ни x° , ни y° , ни z° , не зависят от переменных x , y , z ни по величине, ни по направлению. Переменные A_x , A_y , A_z при этом разделяются по отдельным проекциям.

Однако, если приходится разлагать вектор на ортогональные, но не прямолинейные (например, цилиндрические, сфериче-

ские и т. д.) системы координат с единичными векторами $(\xi^\circ, \eta^\circ, \zeta^\circ)$, то эти векторы в выражении

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (\xi^\circ A_\xi + \eta^\circ A_\eta + \zeta^\circ A_\zeta) \quad (24.16)$$

выносить из под знака ∇^2 нельзя, так как они хотя и неизменны по величине (единица!), но при изменении координат могут менять направление, т. е. изменяться векторно. Например, в цилиндрической системе координат единичный вектор χ° зависит от координаты χ (рис. 24.1) и при изменении χ на $d\chi$ изменяется на вектор $d\chi^\circ$, величина которого

$$|d\chi^\circ| = |\chi^\circ| d\chi = 1 d\chi$$

и который направлен к центру

$$d\chi^\circ = -R^\circ d\chi, \quad (24.17)$$

что непосредственно видно из рис. 24.1.

Таким образом, при расчёте $\nabla^2 \mathbf{A}$ приходится дважды дифференцировать по координатам произведения $\xi^\circ A_\xi$; $\eta^\circ A_\eta$; $\zeta^\circ A_\zeta$.

В общих случаях (когда ни одна из компонент ни на одну из осей не обращается в нуль) компоненты A_ξ , A_η , A_ζ не разделяются по отдельным проекциям, что может значительно осложнить задачу.

Практически вычисляют обычно величину $\nabla^2 \mathbf{A}$ как

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (24.18)$$

Для цилиндрической системы координат соответствующие формулы приведены в Приложении I (П. 39).

Полную систему уравнений стационарного магнитного поля составят уравнения (22.6), (24.2), (24.4), (24.7):

$$\text{div } \mathbf{B} = 0; \text{ rot } \mathbf{H} = \delta; \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}; \text{ div } \mathbf{A} = 0$$

вместе с соотношением $\mathbf{B} = \mu_n \mathbf{H}$ и граничными условиями (22.4), (22.8), (22.9). Расчётным уравнением является уравнение (24.11), сводящееся к системе уравнений Лапласа — Пуассона (24.12).

Таким образом, как и в электростатике (см. § 8), если задаётся поле (т. е. вектор $\mathbf{B}$ или $\mathbf{H}$ в функции координат), то сейчас же находится пространственное распределение токов. Если же задаётся пространственное распределение токов $[\delta = \delta(x, y, z)]$ то, интегрируя систему (24.12), находят векторный потенциал $\mathbf{A}$ и рассчитывают векторы поля.

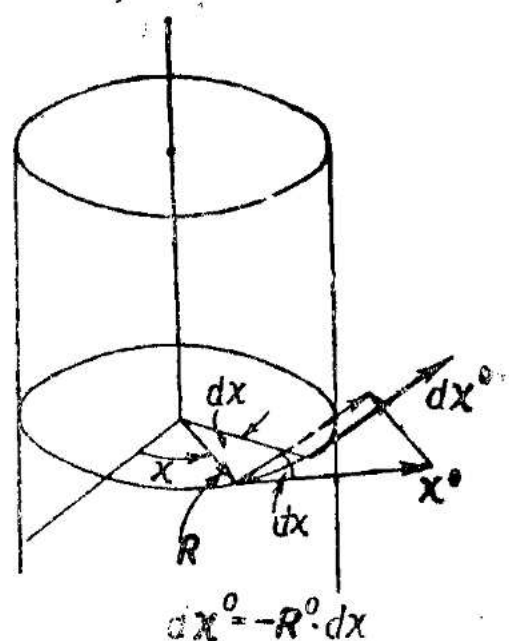


Рис. 24.1

§ 25. Индуктивность и взаимоиנדуктивность

Индуктивностью электрической цепи мы называем свойство цепи образовывать магнитное потокоцепление Ψ , когда в цепи течёт электрический ток.

Если контур электрической цепи образует w витков, то потокоцеплением Ψ называют сумму

$$\Psi = \sum_{k=1}^w \Phi_k, \quad (25.1)$$

где Φ_k — магнитный поток, пронизывающий виток k .

Если все w витков электрической цепи пронизаны одним и тем же потоком Φ , то

$$\Psi = \Phi w. \quad (25.2)$$

Величина индуктивности (статическая индуктивность) определяется соотношением

$$L = \frac{\Psi}{I}. \quad (25.3)$$

Размерность индуктивности в системе СИ будет

$$[L] = \frac{[\Psi]}{[I]} = \frac{вб}{а} = \frac{в \cdot сек}{а} = ом \cdot сек = гн.$$

Нужно отметить, что существуют и иные способы определения величины индуктивности. Эти способы связаны с явлением электромагнитной индукции и энергией магнитного поля, о чём мы подробнее будем говорить ниже.

Так, например, величина динамической индуктивности определяется на основе закона электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt},$$

откуда

$$L = \frac{d\Psi}{di}.$$

Для цепи, элементы которой имеют неизменную магнитную проницаемость, все эти способы дают совпадающие значения индуктивности.

Индуктивность электрической цепи зависит от её геометрической формы, от магнитной проницаемости среды, в которой находится цепь, и магнитной проницаемости материала, из которого сделаны элементы этой цепи.

Свойство цепи (например, цепи 1) образовывать магнитное потокоцепление с какой-либо другой цепью (цепью 2), когда в цепи 1 течёт ток, называется взаимоиנדуктивностью. Величина взаимоиנדуктивности определяется отношением потокоцеплений цепи 2 к току цепи 1. Назовём собственный магнитный поток цепи 1 (магнитный поток, возбуждаемый током I_1 цепи 1) — Φ_{11} , взаимный магнитный поток цепей 1—2 (магнитный поток, возбуждаемый током в цепи 1 и образующий потокоцепление с витками цепи 2) — Φ_{12} .

Тогда величина индуктивности цепи 1 будет

$$L_1 = \frac{\Phi_{11} \omega_1}{I_1} \quad (25.4)$$

и величина взаимоиנדуктивности цепи 1 с цепью 2 (статическая взаимоиנדуктивность) выразится как

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12} \omega_2}{I_1} \quad (25.5)$$

Очевидно, взаимоиנדуктивность будет зависеть от геометрической формы цепей 1 и 2, от их взаимного расположения и от магнитной проницаемости окружающей среды и материала элементов самих цепей.

Аналогично динамической индуктивности определяется и динамическая взаимоиנדуктивность.

Величины индуктивности и взаимоиנדуктивности можно рассчитать с помощью векторного потенциала.

Приведём расчёт взаимоиנדуктивности. Выберем положительные направления обхода по контурам цепи 1 и 2 (см. рис. 25.1). Положительное направление обхода по контуру цепи 1, возбуждающей поле, естественно взять совпадающим с положительным направлением тока в этой цепи. Положительное направление обхода по контуру второй цепи, если в ней нет тока, может быть выбрано произвольно.

От выбора положительных направлений обхода, как будет показано ниже, зависит знак взаимной индуктивности.

Направление элементов dS поверхностей, ограниченных контурами, определится в зависимости от направлений обхода, по правилу правого винта. Поток Φ_{12} , возбуждённый током I_1 цепи 1, сцепленный с цепью 2, будет равен:

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} \text{rot } \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}_2, \quad (25.6)$$

где $\mathbf{B}_1$ — индукция магнитного поля тока I_1 ,

dS_2 — элемент поверхности S_2 , ограниченной контуром 2 (рис. 25.1).

Применяя теорему Стокса, получим

$$\Phi_{12} = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2. \quad (25.7)$$

Подставим сюда значение векторного потенциала A_1 по ф-ле (24.14), преобразованной для условий тока в тонком проводе¹⁾. Тогда

$$\Phi_{12} = \oint_{l_2} \left\{ \frac{I_1 \mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{dl_1}{R} \right\} \cdot dl_2 = \frac{I_1 \mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R}. \quad (25.8)$$

Если каждый из контуров имеет несколько витков, то интегрирование надо провести по всем виткам, беря скалярное произведение элемента dl_1 контура первой цепи на элемент dl_2 контура второй, делённое на расстояние R между ними. В результате получим потокосцепление потока, возбуждённого током I_1 цепи 1 со всеми витками цепи 2. Взаимоиндукция цепи 1 с цепью 2 будет равна

$$M_{12} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R}. \quad (25.9)$$

Так как от перестановки сомножителей скалярное произведение не меняет ни своей величины, ни знака, то

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad (25.10)$$

т. е. величина взаимоиנדуктивности цепи 1 с цепью 2 или цепи 2 с цепью 1 одна

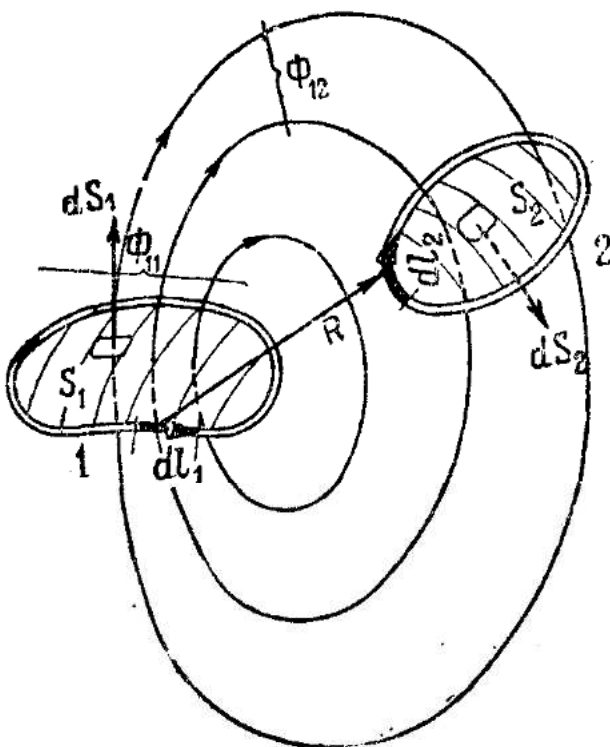


Рис. 25.1

и та же. При изменении направления dl_2 на противоположное величина взаимоиנדуктивности M изменит свой знак на обратный. Взаимоиндуктивность M будет положительна, если положительные направления обхода по контурам, определяемые векторами dl_1 и dl_2 , составляют правовинтовую систему с направлением векторной линии магнитного потока, сцеплённого с обоими контурами. Физически это утверждение означает, что M будет положительна, если dl_1 и dl_2 берутся в таком направлении, в каком токи I_1 и I_2 в первом и втором контурах возбуждали бы магнитные потоки, усиливающие друг друга (контур «подмагничивали бы» друг друга).

Перейдём к расчёту индуктивности цепи. Нетрудно видеть, что собственное потокосцепление

$$\Psi_{11} = \omega_1 \Phi_{11} \quad (25.11)$$

можно разбить на два слагаемых: потокосцепление от потока «внешнего»,

пронизывающего пространство, охватываемое цепью, и потокосцепление от потока «внутреннего», существующего в объёме провода.

«Внутреннее потокосцепление» определим следующим образом: разобьём ток, текущий по проводу, на элементарные трубки тока и образуем произведения тока в каждой элементарной трубке и потока, проходящего внутри объёма провода

¹⁾ Преобразуем так: положим

$$\delta_1 dV = \delta_1 \Delta S_{\text{пров}} \cdot dl_1 = I_1 dl_1,$$

где I_1 — ток в первом контуре, и получим:

$$A_1 = \frac{I_1 \mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{dl_1}{R}.$$

и охватывающего соответствующую трубку тока. Так как провод с током мы считаем за один виток, то каждая элементарная трубка тока будет долей витка, равная отношению тока в элементарной трубке к току в проводе.

Поэтому произведения элементарных токов и охватывающих их внутренних потоков надо умножить каждое в отдельности на указанное выше отношение и полученные произведения просуммировать. Так определим «внутреннее потоко-сцепление».

Следовательно,

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{\Psi_{11 \text{ внутр}}}{I_1} + \frac{\Psi_{11 \text{ внешн}}}{I_1} = L_{1 \text{ внутр}} + L_{1 \text{ внешн}}. \quad (25.12)$$

Ограничимся вычислением с помощью векторного потенциала внешней индуктивности ($L_{\text{внешн}}$).

Рассмотрим электрическую цепь, представляющую собой виток из провода конечного сечения (см. рис. 25.2), по которому течёт ток I . Линии тока суть вихревые оси магнитного поля, возбуждаемого этим током: поверхность провода является вихревой трубкой магнитного поля. Рассмотрим вихревую ось магнитного поля (линию тока), с которой сцеплены все векторные линии поля (см. рис. 25.2), и примем её за контур интегрирования l_1 с элементом dl_1 . Если линейные размеры сечения провода малы сравнительно с его длиной и форма провода близка к окружности, то таким контуром l_1 можно, с достаточным приближением, считать геометрическое место центров перпендикулярных сечений провода.

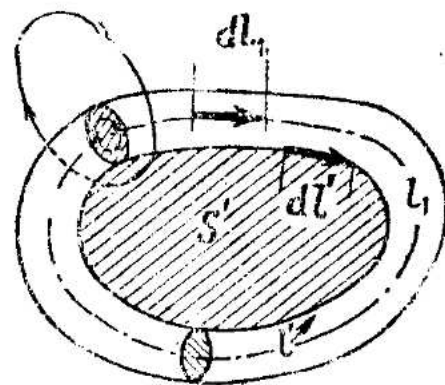


Рис. 25.2

Проведём также контур l' с элементом dl' по внутреннему периметру провода.

Рассчитаем поток $\Phi_{11 \text{ внешн}}$. Для этого проинтегрируем индукцию B_1 по поверхности S' , ограниченной контуром l' ,

$$\Phi_{11 \text{ внешн}} = \int_{S'} B_1 \cdot dS', \quad (25.13)$$

и, выполнив преобразование аналогично преобразованию в ф-лах (25.6) и (25.7), получим

$$\begin{aligned} \Phi_{11 \text{ внешн}} &= \int_{S'} B_1 \cdot dS' = \int_{S'} \text{rot } A_1 \cdot dS' = \oint_{l'} A_1 \cdot dl' = \\ &= \frac{I_1 \mu_a}{4} \oint_{l'} \oint_{l_1} \frac{dl_1 \cdot dl'}{R}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

«Внешняя» индуктивность будет равна

$$L_{1 \text{ внешн}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l'} \frac{dl_1 \cdot dl'}{R}. \quad (25.15)$$

Это выражение, строго говоря, представляет взаимоиндуктивность контура l' (контур, образованный пересечением поверхности S' и поверхности провода) с осью провода l_1 .

При высокой частоте, благодаря явлению поверхностного эффекта, ток отесняется к поверхности провода; «внутреннее» потокоцепление будет практически равно нулю. В этом случае полная индуктивность будет практически совпадать с индуктивностью «внешней».

Для подсчёта «внутреннего» потокоцепления ($\Psi_{11 \text{ внутр}}$) надо принять во внимание, что формула векторного потенциала тока в тонком проводе¹⁾ внутри провода с током уже неприменима; нужно пользоваться общей формулой векторного потенциала [ф-ла (24.14)²⁾], что значительно осложняет расчёт.

Выражения индуктивности и взаимной индуктивности, полученные с помощью векторного потенциала, вскрывают геометрическую сущность этих величин, однако практически выполнять интегрирование в двойных интегралах этих формул представляет большие трудности даже для относительно простых контуров. Поэтому существуют иные методы расчёта индуктивности и взаимной индуктивности, например метод непосредственного подсчёта потокоцеплений, метод определения этих величин из выражения энергии магнитного поля, которые иногда оказываются проще, чем подсчёт по общим ф-лам (25.9) и (25.15).

§ 26. Магнитная масса. Эквивалентность магнитного листка и замкнутого тока

Учение о магнитном поле исторически возникло в результате исследований взаимодействия постоянных магнитов, явлений намагничивания и явлений земного магнетизма. Теория магнитных явлений, как было отмечено во введении, до XIX в. развивалась независимо от теории электрических явлений³⁾.

В XVIII в. сложились по аналогии с электрическими зарядами представления о «магнитных зарядах» или «магнитных массах». Этими терминами называли предполагаемое активное магнитное начало, сосредоточенное в полюсах магнита.

Уже в XVI в. было известно, что получить магнит с одним полюсом нельзя; при разламывании магнита на концах обломков оказывались опять полюсы противоположных знаков. Об этом подробно говорит английский физик Вильям Гильберт в сочинении «О магните, магнитных телах и большом магните — земле», опубликованном в 1600 г.

Таким образом, «магнитные массы», будучи, как и электрические заряды, двух родов — «северные» и «южные», — и взаимодействуя как электрические заряды (одноимённые отталкиваются, разноимённые притягиваются), не могли быть отделены друг от друга и этим существенно отличались от электрических зарядов.

¹⁾ См. примечание на стр. 98.

²⁾ При выводе индуктивности взять полный поток Φ_{11} нельзя, так как при этом пришлось бы в ф-ле (25.15) заменить dl' на dl_1 . Если же мы будем брать два элемента (dl' и dl_1) на одной линии (оси l_1), то расстояние между ними может быть равно нулю (когда элементы совпадают) и тогда интеграл (25.15) становится расходящимся. Физически это значит, что, рассматривая магнитное поле внутри тока, нельзя этот, распределённый по сечению ток заменить током, сконцентрированным на оси.

³⁾ См. введение, стр. 12.

Закон взаимодействия Кулона, определяющий силу взаимодействия электрических заряженных частиц, оказался применимым также к расчёту взаимодействия полюсов магнитов:

$$F = \frac{m_{m1} m_{m2}}{4\pi \mu_a R^2} R^0, \quad (26.1)$$

где m_{m1} , m_{m2} — «магнитные массы» взаимодействующих полюсов.

Аналогично учению об электричестве, из закона Кулона для взаимодействия полюсов магнитов можно определить силовую характеристику магнитного поля, возбуждённого «магнитной массой» m_{m1} как отношение силы, с которой это поле действует на другую массу m_{m2} , к массе m_{m1} .

Определённая таким образом характеристика оказывается ничем иным, как напряжённостью магнитного поля:

$$H = \frac{F}{m_{m2}} = \frac{m_{m1}}{4\pi \mu_a R^2} R^0. \quad (26.2)$$

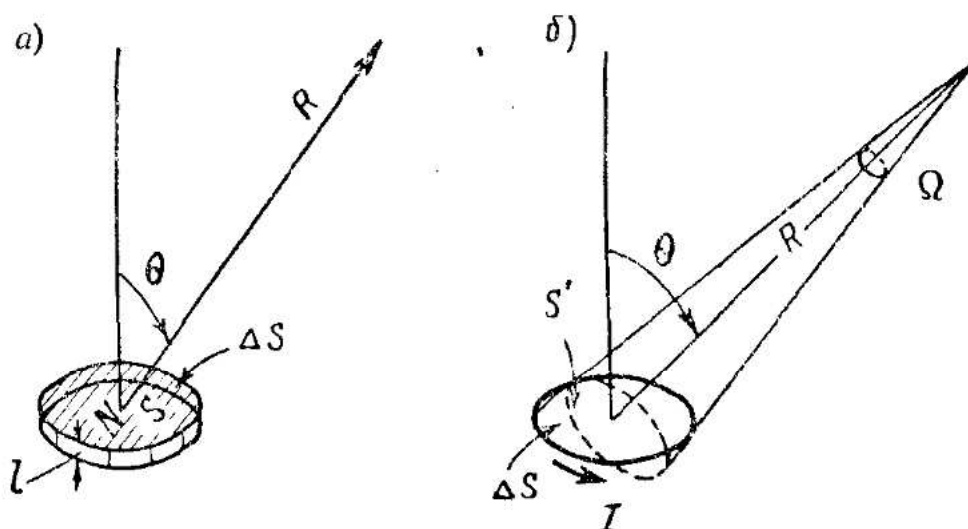


Рис. 26.1

Магнитным листком называется короткий, плоский магнит (рис. 26.1а, б), длина которого l значительно меньше поперечных размеров. Пусть «поверхностная плотность магнитной массы» на полюсах магнитного листка будет $\rho_{м. пов}$. «Магнитный заряд» полюса будет равен

$$m_m = \rho_{м. пов} \Delta S, \quad (26.3)$$

где ΔS — площадь полюса.

Магнитный момент магнитного листка можно определить по аналогии с моментом электрического диполя

$$p_m = m_m l = \rho_{м. пов} \Delta S l. \quad (26.4)$$

Направление вектора магнитного момента (как и электрического) берётся от отрицательной (северной) магнитной массы к положительной (южной).

Рассмотрим замкнутый ток I , текущий по контуру площадки ΔS , равной площади полюса магнитного листка (см. рис. 26.1б). Определим магнитный момент замкнутого тока как:

$$\mathbf{p}_m = \mu_a \mathbf{p}_l = \mu_a I \Delta \mathbf{S}^1), \quad (26.5)$$

где $\mathbf{p}_l$ — момент замкнутого тока.

Оказывается (впервые это было доказано Ампером в 1821 г.), что замкнутый ток и магнитный листок, имеющие одинаковые магнитные моменты и одинаковые площади ΔS , возбуждают во внешнем пространстве одинаковые магнитные поля.

Это нетрудно показать. Магнитный листок на расстояниях, достаточно больших, сравнительно с его линейными размерами, эквивалентен диполю с «магнитными зарядами» $+m_m = +\rho_{m, \text{пов}} \Delta S$ и $-m_m = -\rho_{m, \text{пов}} \Delta S$. По аналогии с формулой потенциала электрического диполя [см. ф-лу (5.8)] мы определим потенциал магнитного поля, возбуждённого листком, выражением (см. рис. 26.1а, б)

$$\varphi_m = \frac{m_m l \cos \theta}{4\pi\mu_a R^2} = \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}^0}{4\pi\mu_a R^2}. \quad (26.6)$$

Скалярный потенциал магнитного поля витка с током равен [см. ф-лу (23.2)]

$$\varphi_m = \frac{I \Omega}{4\pi}. \quad (26.7)$$

Если расстояние до точки, где определяется магнитный потенциал витка с током, также достаточно велико сравнительно с размерами витка, то телесный угол в предыдущей формуле можно представить как:

$$\Omega = \frac{\Delta S'}{R^2} = \frac{\Delta S \cos \theta}{R^2} \quad (26.8)$$

и, следовательно,

$$\varphi_m = \frac{I \Delta S \cos \theta}{4\pi R^2} = \frac{\mathbf{p}_l \cdot \mathbf{R}^0}{4\pi R^2} = \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}^0}{4\pi\mu_a R^2}. \quad (26.9)$$

¹⁾ В дальнейшем (см. § 44) магнитный момент тока определим как

$$\mathbf{p}_m = -\mu_a \mathbf{p}_l \quad (26.5')$$

для правильного применения принципа двойственности.

Сравнивая ф-лы (26.6) и (26.9), находим, что если равны магнитные моменты магнитного листка и витка с током

$$P_{\text{м листка}} = P_{\text{м тока}} \quad (26.10)$$

то и возбуждённые ими магнитные поля одинаковы.

В 1779 г. Кулон высказал гипотезу, что молекулы намагниченной среды являются элементарными магнитами.

Ампер, применив к этой гипотезе Кулона положение об эквивалентности тока и магнитного листка, сформулировал новую теорию магнетизма (1821 г.), согласно которой молекулы обтекаются элементарными замкнутыми («амперовыми») токами, которые и представляют собой единственные причины магнитных явлений.

Таким образом, «теорема эквивалентности» понималась Ампером отнюдь не как утверждение, что магнитное поле может возбуждаться как «магнитными массами», так и электрическим током, но как указание о том, что никаких магнитных масс нет, а действие магнита обусловлено лишь элементарными замкнутыми молекулярными токами.

Теория магнетизма Ампера была гипотезой вплоть до наших дней, до создания планетарной модели атома Резерфорда — Бора и квантовой механики, согласно которым электроны в атоме ведут себя как замкнутые электрические токи, т. е. представляют собой физически реальные амперовы токи.

Несмотря на нереальность понятия «магнитная масса», в расчётной практике это понятие часто применяют. Заменяв формально в выражении потенциала электрического диполя величину

$$\frac{p_{\text{э}}}{\epsilon_a} \longleftrightarrow \frac{p_{\text{м}}}{\mu_a} = i \Delta S = p_l, \quad (26.11)$$

мы совершаем переход от электрического поля

$$\varphi_{\text{э}}; \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

к магнитному

$$\varphi_{\text{м}}; \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_{\text{м}},$$

которое формально рассчитывается точно так же, как и электрическое.



КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава IV

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 27. Обобщение понятия электрического тока

Любой вид ориентированного движения электрически заряженных частиц мы называем электрическим током. Поток заряженных частиц в вакууме, механическое их перемещение, например перенос зарядов на диске электростатической машины, также будет электрическим током, так называемым конвекционным током, т. е. током переноса. В широком смысле слова конвекционным током будет и ток проводимости, однако обычно конвекционным током называют явление переноса электрически заряженных частиц с помощью механических сил или движение их по инерции.

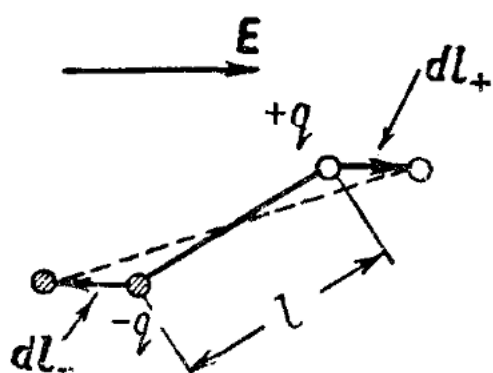


Рис. 27.1

При воздействии переменного электрического поля на диэлектрик, кроме тока проводимости (обычно ничтожной величины), возникает поляризация диэлектрика, представляющая собой деформацию или ориентировку молекул, составляющих вещество диэлектрика. Процесс установления, исчезновения или вообще изменения поляризации связан со смещением заряженных частиц, составляющих молекулы ди-

электрика. Это смещение, правда, ограничивается размером молекулы, но также является током. Такой ток называется током поляризации. Он существует, пока происходит изменение электрического поля в диэлектрике.

Рассчитаем вектор плотности тока поляризации. Рассмотрим диполь, эквивалентный поляризованной молекуле в поле напряжённости E (см. рис. 27.1). За время dt при возрастании поля на dE связанные заряды диполя сместятся на расстояния dl_+ и dl_- . Приращение вектора момента диполя будет

$$d\mathbf{p}_s = q_+ dl_+ + q_- dl_- \quad (27.1)$$

или, вводя скорости смещения связанных зарядов $\mathbf{v}_+ = \frac{dl_+}{dt}$ и $\mathbf{v}_- = \frac{dl_-}{dt}$, получим $d\mathbf{p}_s = (q_+ \mathbf{v}_+ + q_- \mathbf{v}_-) dt$.

Геометрическая сумма изменений моментов диполей на единицу объёма будет

$$\frac{\sum d\mathbf{p}_s}{\Delta V} = d \frac{\sum \mathbf{p}_s}{\Delta V} = \left(\mathbf{v}_+ \frac{\sum q_+}{\Delta V} + \mathbf{v}_- \frac{\sum q_-}{\Delta V} \right) dt,$$

где $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ — средние скорости смещения связанных положительных и отрицательных зарядов диполей q_+ , q_- в элементарном объёме ΔV . Множители при $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ в последнем выражении есть, очевидно, объёмные плотности связанных смещающихся положительных и отрицательных зарядов. В итоге

$$\frac{d}{dt} \frac{\sum \mathbf{p}_s}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{v}_+ \rho_{+связн} + \mathbf{v}_- \rho_{-связн} = \mathbf{j}_{поляриз}. \quad (27.2)$$

Ток поляризации (как и ток проводимости) сопровождается магнитным полем.

§ 28. Ток смещения

Максвелл впервые показал, что существует электрическое явление, в котором движущиеся заряженные частицы не принимают непосредственного участия и которое, тем не менее, сопровождается магнитным полем.

Рассмотрим процесс разряда конденсатора (см. рис. 28.1a). Ток в проводе равен

$$I_{np} = - \frac{dQ}{dt} = - \frac{d}{dt} (\rho_{нов} S). \quad (28.1)$$

В плоском конденсаторе (если пренебречь краевым эффектом) поверхностная плотность заряда на обкладке ($\rho_{нов}$) равна величине вектора смещения $|\mathbf{D}|$, следовательно,

$$I_{np} = - \frac{dQ}{dt} = - S \frac{dD}{dt}. \quad (28.2)$$

Из ф-лы (28.1) следует, что ток I_{np} равен скорости изменения заряда на обкладке. Формула же (28.2) связывает ток I_{np} с вели-

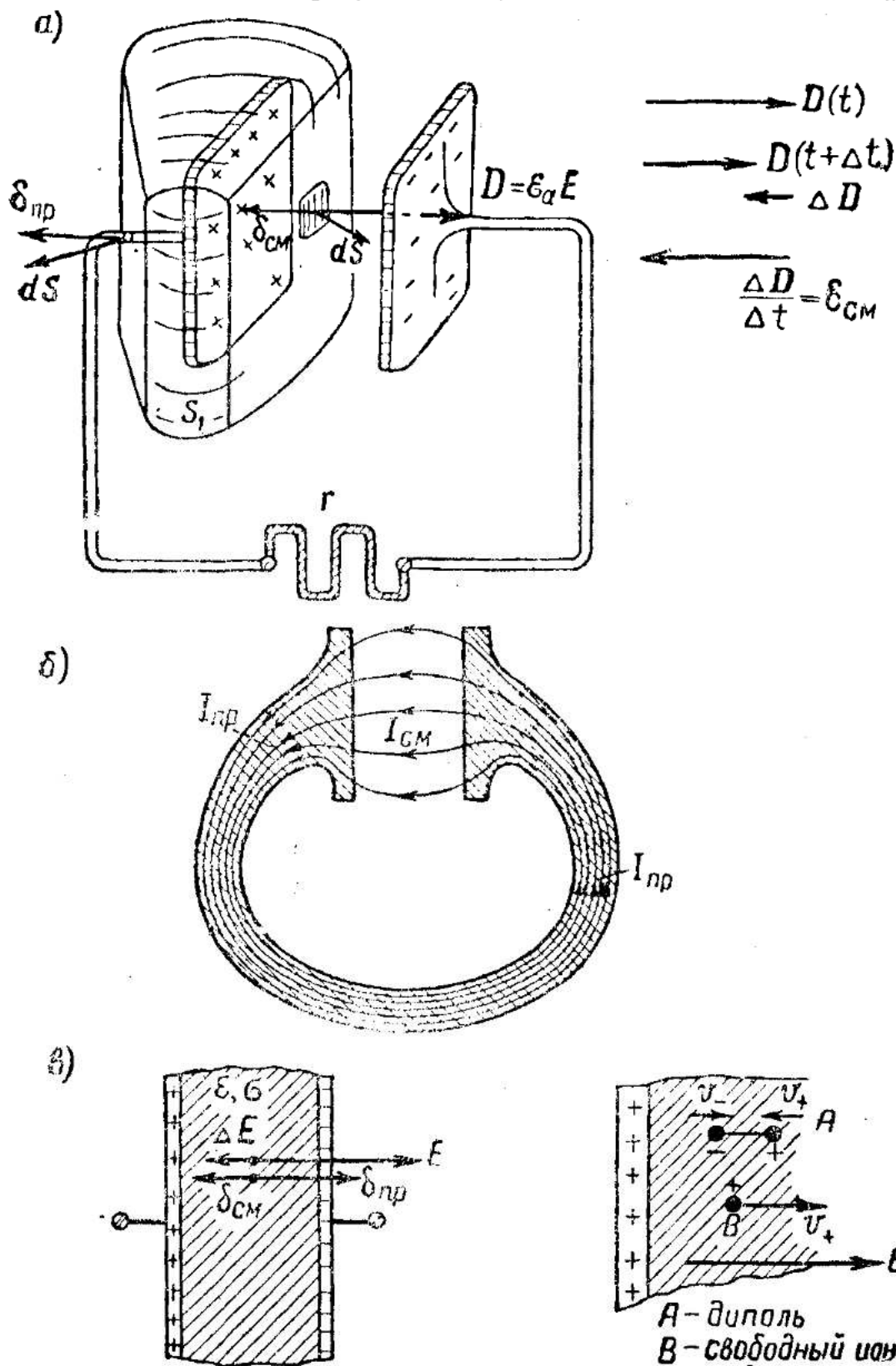


Рис. 28.1

чиной $\frac{dD}{dt}$. Так как D — характеристика электрического поля в диэлектрике между обкладками, то $\frac{dD}{dt}$ характеризует некоторый

процесс в этом диэлектрике. Из ур-ния (28.2) видно, что величина $\frac{dD}{dt}$ имеет размерность плотности тока, т. е. $\left[\frac{I}{S}\right] = \frac{a}{m^2}$.

Так как $D = \epsilon_0 E + P$, то

$$\frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt}. \quad (28.3)$$

Второй член этого выражения, как показано в § 27, есть плотность тока поляризации, первый же член $\left(\epsilon_0 \frac{dE}{dt}\right)$ не является какой-либо формой движения заряженных частиц, хотя имеет размерность плотности тока. Если предположить, что конденсатор вакуумный, то так как в вакууме $P=0$, мы получим

$$\frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}, \quad (28.4)$$

т. е. процесс, происходящий при полном отсутствии всяких заряженных частиц между обкладками.

Является ли величина $\epsilon_0 \frac{dE}{dt}$ «плотностью тока» особой природы, сопровождающегося, как и ток проводимости, магнитным полем, или преобразование, выполненное в ф-ле (28.2), не имеет физического смысла? Максвелл поставил перед собой этот вопрос впервые в 1861—1862 гг. и на основании теоретических соображений пришёл к утвердительному ответу.

Представление о токе смещения Максвелл разработал в классическом труде «Трактат по электричеству и магнетизму» (1873 г.). Он пишет:

«Одна из главных особенностей этого трактата состоит в принятии концепции, согласно которой истинный электрический ток δ^1), тот, от которого зависят электромагнитные явления, нельзя отождествить с током проводимости, но что должно быть принято во внимание при исчислении общего движения электричества, изменение во времени электрического смещения D , так что мы должны написать $\delta = \delta_{np} + \frac{dD}{dt}$ — уравнение истинных токов²⁾».

В соответствии с определениями Максвелла назовём

$$\delta_{см} = \frac{dD}{dt} \quad (28.5)$$

плотностью тока смещения,

$$\delta_{0 см} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \quad (28.6)$$

¹⁾ Точнее плотность тока.

²⁾ Д. К. Максвелл. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. ГТТИ, 1952, стр. 484.

плотностью тока смещения в вакууме и

$$\delta = \delta_{np} + \frac{dD}{dt} \quad (28.7)$$

плотностью полного тока.

Таким образом, плотность тока смещения распадается на два члена: один $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ — плотность тока поляризации, — соответствующий фактическому движению (смещению) связанных заряженных частиц, и второй $\left(\epsilon_0 \frac{dE}{dt}\right)$ — плотность тока смещения в вакууме, — не имеющий наглядной интерпретации и представляющий процесс изменения электрического поля.

Формальное преобразование физического соотношения (28.1), привело к обнаружению нового физического явления, именно, тока смещения «в вакууме», плотность которого равна $\epsilon_0 \frac{dE}{dt}$ и который так же, как и любой вид обычного тока, сопровождается магнитным полем.

Нужно отметить, что очень часто математическое преобразование физического уравнения позволяет обнаружить новые свойства и стороны явления, описываемого данным уравнением, а иногда (как, например, в данном случае) и догадаться о наличии нового явления, о котором ничего не говорило уравнение в непреобразованном виде. Конечно, окончательное суждение о правильности следствий, полученных подобным образом, может дать только опыт.

Такой опыт, подтверждающий реальность тока смещения в вакууме, был впервые осуществлён в 1886 г. Генрихом Герцем¹⁾.

Величина

$$S \frac{dD}{dt} = I_{см} \quad (28.8)$$

будет током смещения и, как следует из ур-ния (28.2), в опыте, схема которого представлена на рис. 28.1, $I_{rp} = -I_{см}$.

Рассматривая рис. 28.1, нетрудно установить направление вектора плотности тока смещения. Вектор D направлен всегда от положительно заряженной обкладки к обкладке, заряженной отрицательно. Так как, в данном случае D уменьшается (разряд конденсатора), то векторное приращение ΔD направлено против D ; туда же будет направлен и вектор плотности тока смещения.

Заклучим положительную обкладку конденсатора в мысленно проведённую замкнутую поверхность S_1 . Ток смещения будет равен

$$I_{см} = \int \delta_{см} \cdot dS = -\delta_{см} S_1 \quad (28.9)$$

¹⁾ См. введение, стр. 17 и § 37.

и окажется отрицательным. Ток же проводимости

$$I_{np} = \int \delta_{np} \cdot d\mathbf{S} = \delta_{np} \Delta S \quad (28.10)$$

(где ΔS — сечение провода) будет положительным. При зарядке конденсатора, наоборот, ток смещения сквозь поверхность S_1 будет положителен, а ток проводимости — отрицателен.

Таким образом, линии вектора плотности тока смещения будут замыкать линии тока проводимости, обрывающиеся на обкладках (см. рис. 28.1б).

Рассмотрим разряд конденсатора с диэлектриком, имеющим некоторую проводимость. Конденсатор заряжен и отключён от источника напряжения (рис. 28.1в).

В диэлектрике конденсатора существует электрическое поле с напряжённостью $\mathbf{E}$, которое убывает со скоростью $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$.

Плотность полного тока в какой-либо точке диэлектрика будет

$$\delta = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \sigma \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \delta_{np} + \delta_{полпр} + \delta_{см. вакуум}. \quad (28.11)$$

Направление вектора δ_{np} в данном случае (напряжённость $\mathbf{E}$ уменьшается!) противоположно направлению векторов $\delta_{полпр}$ и $\delta_{смещ. вакуум}$. Рассматривая деталь чертежа в нижней части рис. 28.1в, мы видим, что ток проводимости (δ_{np}) является движением свободных, положительно заряженных частиц (ионов) в направлении вектора $\mathbf{E}$ (и отрицательно заряженных — противоположно направлению $\mathbf{E}$).

Ток же поляризации определится смещением положительно заряженных частиц поляризованных диполей в направлении, противоположном $\mathbf{E}$, и отрицательно заряженных — в направлении $\mathbf{E}$, так как при уменьшении поля электрические моменты поляризованных молекул будут уменьшаться, следовательно, положительные и отрицательные их части будут сближаться.

При рассмотрении процесса зарядки и разряда конденсатора мы обнаружили, что линии тока проводимости замыкаются линиями тока смещения, т. е. что линии полного тока идут не прерываясь. Покажем это свойство полного тока в общем случае. Подставляя в уравнение закона сохранения электрического заряда, $\text{div } \delta_{np} = -\frac{d\rho}{dt}$, выражение ρ из основного уравнения электростатического поля, $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, нетрудно получить равенство

$$\text{div } \delta_{np} = -\frac{d}{dt} (\text{div } \mathbf{D}). \quad (28.12)$$

В правой части этого равенства операцию дифференцирования по времени можно выполнить под знаком дивергенции, так как мы рассматриваем неподвижную систему координат, т. е. координат, не зависящих от времени, дифференциалы которых по времени равны нулю, а операция дивергенции является дифференцированием лишь по координатам.

Мы получим

$$\operatorname{div} \delta_{np} = - \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (28.13)$$

следовательно,

$$\operatorname{div} \left(\delta_{np} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

но так как $\delta_{np} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \delta_{np} + \delta_{смещ} = \delta_{полн}$, то, следовательно,

$$\operatorname{div} \delta_{полн} = 0, \quad (28.14)$$

т. е. вектор $\delta_{полн}$ соленоиден — его линии непрерывны. Именно из этого уравнения Максвелл заключил о существовании тока смещения.

В своём «Трактате» Максвелл пишет:

«Мы не располагаем прямыми экспериментальными доказательствами, относящимися к непосредственному электромагнитному действию токов, обусловленных изменением электрического смещения в диэлектриках, но чрезвычайная трудность согласования законов электромагнетизма с существованием незамкнутых электрических токов, является одним из многих оснований, почему мы допускаем наличие мгновенных токов, возникающих в результате изменения смещения»¹⁾.

Предположение Максвелла о магнитном действии тока смещения было в то время гипотезой. Впервые магнитное поле токов смещения обнаружил в своих опытах Генрих Герц (1886—1888 гг.).

§ 29. Первое уравнение Максвелла

Добавив в правой части закона полного тока в дифференциальной форме [ф-ла (24.2)] плотность тока смещения к плотности тока проводимости, мы получим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta_{np} + \delta_{см} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (29.1)$$

— первое уравнение Максвелла.

¹⁾ Д. К. Максвелл. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. Гостехиздат, 1952, стр. 482.

Для непроводящей среды ($\sigma=0$) уравнение Максвелла примет следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (29.2)$$

Для поля в вакууме (практически для поля во многих газообразных средах)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (29.3)$$

Рассмотрим гармонически меняющееся электрическое поле $\mathbf{E}$ и рассчитаем соотношение величин плотности токов проводимости и смещения. Пусть

$$E(t) = \mathcal{E} \sin(\omega t + \psi), \quad (29.4)$$

где $\mathcal{E} = E_{\text{макс}}$.

Для удобства расчёта воспользуемся комплексным методом.

Комплексное изображение величины вектора ($\mathbf{E}$) определим формулой

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \mathcal{E} e^{i(\omega t + \psi)} = \mathcal{E} e^{i\psi} e^{i\omega t}. \quad (29.5)$$

Можно ввести и комплексное изображение вектора $\mathbf{E}$:

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{n}^\circ \dot{E}(t), \quad (29.6)$$

где $\mathbf{n}^\circ$ — единичный вектор, совпадающий с направлением $\mathbf{E}$ в пространстве.

Будем считать (здесь и в дальнейшем, если не будет специально оговорено), что направление единичного вектора $\mathbf{n}^\circ$ не изменяется и остаётся постоянным, т. е. будем рассматривать в основном линейно поляризованные векторы.

Более общее представление вектора комплексом дано в приложении [см. (П.40)].

Величина (комплексная)

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E} e^{i\psi} \quad (29.7)$$

называется комплексной амплитудой и может зависеть только от координат x, y, z :

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{E}}(x, y, z). \quad (29.8)$$

Подставим комплексное изображение $\dot{\mathcal{E}}(t)$ в ф-лу (28.11) полной плотности тока и получим

$$\begin{aligned}\sigma \dot{\mathcal{E}} e^{i\omega t} + \varepsilon_a i \omega \dot{\mathcal{E}} e^{i\omega t} &= \dot{\delta} e^{i\omega t} = \\ &= i \omega \left(\varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\mathcal{E}} e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (29.9)$$

Комплексная величина

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}, \quad (29.10)$$

где $|\tilde{\varepsilon}| = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)^2}$ называется комплексной диэлектрической проницаемостью, а комплексная величина

$$\tilde{\varepsilon}_a = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 = \varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2} e^{-i \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}} \quad (29.11)$$

(где $\sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2} = |\tilde{\varepsilon}_a|$) будет комплексной абсолютной диэлектрической проницаемостью.

Очевидно, комплексные амплитуды плотностей тока проводимости и смещения будут:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_{пр} &= \sigma \dot{\mathcal{E}}, \\ \dot{\delta}_{см} &= i \omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}}.\end{aligned}\quad (29.12)$$

Модуль отношения комплексных амплитуд в данном случае равен отношению амплитуд, следовательно,

$$\frac{\delta_{\text{макс. смещ}}}{\delta_{\text{макс. пров}}} = \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma}. \quad (29.13)$$

Мы видим, что при повышении частоты диэлектрические свойства среды будут проявляться всё более отчётливо.

Рассчитаем частоты, при которых в различных средах (табл. 29.1) будут равны амплитуды плотностей тока смещения и проводимости, т. е.

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma}{\omega}; \quad f = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_a}; \quad \lambda = \frac{c}{f}. \quad (29.14)$$

Таблица 29.1

Среда	Проводимость σ , $(\text{ом} \cdot \text{м})^{-1}$	Диэлектрическая проницае- мость $\varepsilon_a = \varepsilon \varepsilon_0$	Частота f , гц	Длина волны λ , м
Морская вода	4,0	$80 \varepsilon_0$	$9 \cdot 10^8$	0,33
Влажная почва (глина)	$5 \cdot 10^{-3}$	$9 \varepsilon_0$	10^7	30,0
Сухая почва (песок)	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \varepsilon_0$	$3 \cdot 10^5$	1000,0
Пресная вода	10^{-3}	$80 \varepsilon_0$	$2,25 \cdot 10^5$	1333

При частотах более высоких (сравнительно с рассчитанными) в соответствующей среде преобладает ток смещения и среда ведёт себя как диэлектрик, при более низких — как проводник.

§ 30. Закон электромагнитной индукции

В 1820 г. датский физик Эрстед обнаружил действие электрического тока на магнитную стрелку. Тем самым был установлен факт связи электрических и магнитных явлений. «Из электричества образуется магнетизм» — так был сформулирован тогда смысл открытия Эрстеда.

Учёные той эпохи, естественно, поставили и обратный вопрос: «об образовании электричества из магнетизма», т. е. о нахождении магнитного процесса, в результате которого возникли бы электрические явления.

Из истории электромагнетизма эпохи 1820—1830 гг. мы знаем целый ряд попыток обнаружить электрические явления от действия магнита, но обычно учёные, констатировав отрицательный результат, отказывались от дальнейших опытов. Фарадей же, начав опыты в этом направлении с 1820—1821 гг., с необыкновенной настойчивостью, обнаруживавшей его внутреннюю убеждённость в положительном их результате, продолжал работать в течение одиннадцати лет. Опыты Фарадея, как известно, завершились открытием (в 1831 г.) явления электромагнитной индукции и формулировкой (в 1832 г.) закона электромагнитной индукции.

Основная трудность при попытках обнаружить явление электромагнитной индукции заключалась в том, что это явление возникает при относительном движении магнита и провода или при изменении интенсивности магнитного поля.

Фарадей применил созданное им представление о магнитных силовых линиях и объяснил явление электромагнитной индукции. В современных терминах сущность открытия Фарадея можно сформулировать так: пересечение магнитных силовых линий вызывает в замкнутом проводниковом контуре движение электрических зарядов, причём величина переместившегося заряда (q) прямо пропорциональна числу пересечённых магнитных линий (ΔN) и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению контура (r):

$$q = \frac{\Delta N}{r}. \quad (30.1)$$

Если назвать число силовых линий магнитным потоком ($\Delta N = \Phi$), умножить обе части в формуле закона Фарадея на r и разделить на время, в течение которого происходит процесс пересечения силовых линий, мы получим

$$\frac{q}{t} r = i \cdot r = \frac{\Phi}{t}.$$

Максвелл констатировал, что в контуре возникает наведённая эдс ($\mathcal{E}_{\text{инд}} = ir$), пропорциональная изменению магнитного потока, сцепленного с контуром ($-d\Phi$), и равная

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (30.2)$$

Наведённая в замкнутом контуре эдс может быть представлена как

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint \mathbf{E}_{\text{инд}} \cdot d\mathbf{l}, \quad (30.3)$$

где $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ — напряжённость наведённого (вихревого) электрического поля. Она возникает и существует и при отсутствии проводящего контура, например, в вакууме.

Производная по времени от магнитного потока Φ , пронизывающего замкнутую цепь, должна пониматься как полная производная.

Если со временем изменяется вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ и деформируется замкнутая цепь, то тогда (рис. 30.1), принимая во внимание, что $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{l_0} \mathbf{B} \cdot \frac{[d\lambda \cdot d\mathbf{l}]}{dt}, \quad (30.4)$$

где $[d\lambda \cdot d\mathbf{l}] = dS_0$ (рис. 30.1) и интегрирование ведётся по l_0 .

Второй интеграл в этом выражении появился потому, что, как мы и предположили, граница интегрирования (контур цепи l_0) может в течение времени изменяться (на рисунке контур l_0 за время dt обращается в контур l').

По правилу дифференцирования под знаком определённого интеграла с переменными пределами к интегралу от производной подынтегральной функции [первый интеграл правой части ф-лы (30.4)] прибавляются значения подынтегральной функции ($\mathbf{B}$), взятой на всех элементах границы интегрирования и умноженной на производную от этой границы [второй интеграл ф-лы (30.4)].

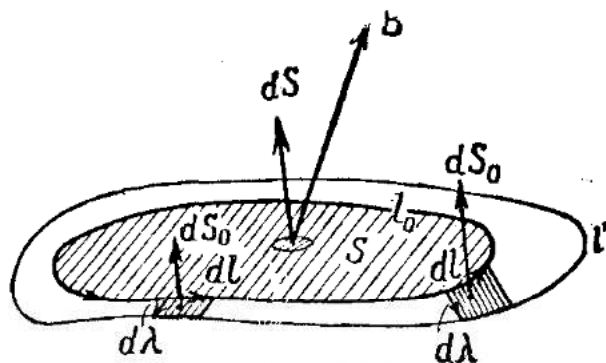


Рис. 30.1

Прсобразуем второй член ф-лы (30.4) в соответствии с рис. 30.1

$$\oint_{l_0} \mathbf{B} \cdot \frac{[d\lambda dl]}{dt} = \oint_{l_0} \mathbf{B} \cdot \left[\frac{d\lambda}{dt} d\mathbf{l} \right] = \oint_{l_0} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{v} d\mathbf{l}] = \oint_{l_0} [\mathbf{B}\mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l}. \quad (30.5)$$

Здесь $d\mathbf{l}$ не дифференцируется, так как может считаться не изменяющимся, а $\frac{d\lambda}{dt} = \mathbf{v}$ равно скорости перемещения элементов контура цепи в магнитном поле. Закон электромагнитной индукции получит следующий вид:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{l_0} [\mathbf{B}\mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint_{l_0} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l}. \quad (30.6)$$

§ 31. Вихревое (индуцированное) электрическое поле

Мысль Максвелла о том, что вихревое электрическое поле возбуждается магнитным потоком и в вакууме, что проводниковый контур в явлении электромагнитной индукции не играет принципиальной роли (см. конец § 30), можно пояснить следующим рассуждением.

Рассмотрим замкнутую проводящую цепь, сквозь которую проходит переменный магнитный поток (см. рис. 31.1a).

Сопротивление цепи равно

$$r = \oint \frac{dl}{\sigma S}. \quad (31.1)$$

Подставляя это выражение в формулу закона электромагнитной индукции, получим

$$-\frac{d\Phi}{dt} = i \oint \frac{dl}{\sigma S} = \oint \frac{idl}{\sigma S} = \oint \frac{\delta dl}{\sigma}. \quad (31.2)$$

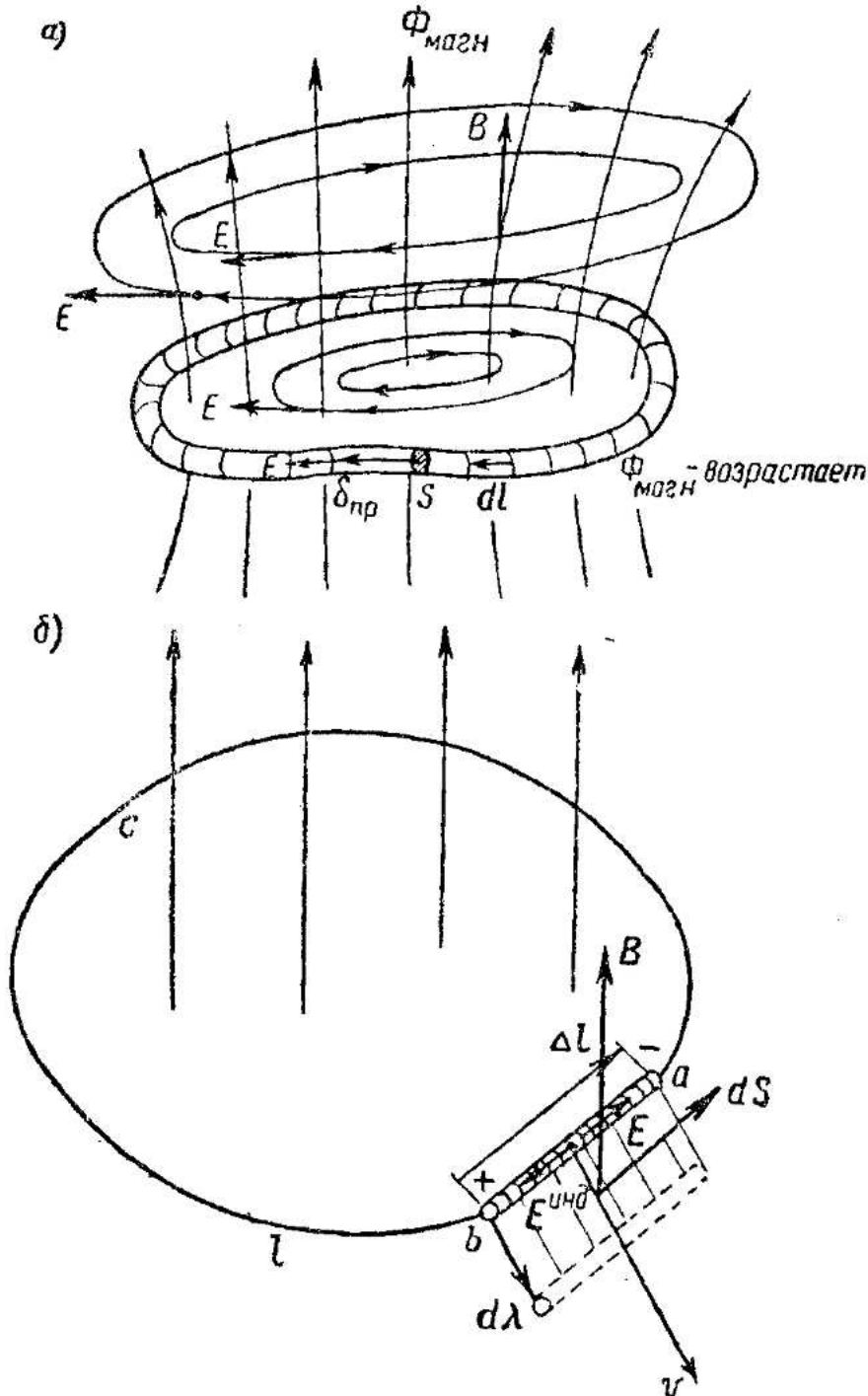


Рис. 31.1

Применив дифференциальную форму закона Ома [см. ф-лу (13.1)], получим

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint E_{инд} dl,$$

и если направление $d\mathbf{l}$ не совпадает с $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, то в предыдущей формуле вместо $E_{\text{инд}}$ следует взять составляющую $E_{\text{инд}}$ вдоль $d\mathbf{l}$, т. е. вместо $E_{\text{инд}}d\mathbf{l}$ надо взять $E_{\text{инд}}d\mathbf{l} = E_{\text{инд}} \cdot d\mathbf{l}$, тогда

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{l_0} [\mathbf{vB}] \cdot d\mathbf{l} = \oint E_{\text{инд}} \cdot d\mathbf{l}. \quad (31.3)$$

Мы видим, что сопротивление и сечение провода выпали из формулы, что и соответствует утверждению Максвелла. Формула приобрела новый смысл: переменный магнитный поток возбуждает вихревое электрическое поле.

Если в этом поле находится замкнутая электрическая цепь, то в ней возбуждается ток. Таким образом, проводящая цепь и возбуждаемый в ней ток не имеют принципиального значения в явлении электромагнитной индукции.

Конечно, заключение, которое мы получили в результате формальных преобразований (31.1)—(31.3), должно быть проверено экспериментально (см. § 28). Опыт подтверждает наше заключение: при изменении магнитного потока в пространстве возбуждается электрическое поле.

В законе электромагнитной индукции мы получили ещё один вид «сторонней» силы — электродвижущей силы индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint E_{\text{инд}} \cdot d\mathbf{l}. \quad (31.4)$$

Электродвижущую силу индукции и вихревое электрическое поле, возбуждённые переменным магнитным потоком, обычно называют «сторонними», а сохраняют названия: «эдс индукции» (если переменный магнитный поток возбуждается внешним источником) и «эдс самоиндукции» (если поток возбуждается током, текущим в этом же контуре). Для вихревого электрического поля применяют термин «индуцированное электрическое поле».

Явление электромагнитной индукции имеет место в постоянном магнитном поле, при движении в нём тела. Рассмотрим такой опыт: пусть элементарный отрезок провода $\Delta\mathbf{l}$ движется со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ (скорость $\mathbf{v}$ и индукция $\mathbf{B}$ могут быть и постоянными). Проведём мысленно контур l , в который отрезок провода $\Delta\mathbf{l}$ входит как элемент (см. рис. 31.16). Пусть за время dt отрезок провода $\Delta\mathbf{l}$ сместился на расстояние $d\lambda$ со скоростью $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} = \frac{d\lambda}{dt}$). Тогда поток Φ , пронизывающий контур l , изменится на величину

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = [d\lambda \Delta\mathbf{l}] \cdot \mathbf{B}, \quad (31.5)$$

как это видно на рис. 31.1б. На основании ур-ния (31.4) в элементарном участке Δl должна возникнуть эдс индукции

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{инд} &= - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{[d\lambda \Delta l] \cdot \mathbf{B}}{dt} = - \left[\frac{d\lambda}{dt} \Delta l \right] \cdot \mathbf{B} = \\ &= - [\mathbf{v} \Delta l] \cdot \mathbf{B} = - [\mathbf{Bv}] \cdot \Delta l = [\mathbf{vB}] \cdot \Delta l.\end{aligned}\quad (31.6)$$

Нетрудно установить связь выведенного выражения эдс индукции с силой Лоренца [см. ф-лу (19.1)]. Пусть контур, замыкающий элемент Δl ($a-b-c$), — проводящий. Тогда при перемещении элемента Δl в замкнутом контуре ($a-b-c-a$) возникнет ток i (закон Ома!):

$$\mathcal{E}_{инд} = ir.$$

Работа внешних сил по перемещению элемента Δl на расстояние $d l$ за время dt

$$dA = - \mathcal{E}_{инд} i dt = i^2 r dt$$

будет расходоваться на нагревание провода. Исследуем выражение dA :

$$dA = - \mathcal{E}_{инд} i dt = \left[\frac{d\lambda}{dt} \mathbf{B} \right] \cdot d l i dt = [\mathbf{B} d\lambda] \cdot d l i.$$

Так как $i = \delta S = \rho_{\partial s} v_{\partial s} S$ [см. ф-лу (13.2)] и направление $\mathbf{v}_{\partial s}$ — скорости движения зарядов в проводе совпадает с Δl , то $\Delta l v_{\partial s} = \mathbf{v}_{\partial s} \Delta l$ и $i \Delta l = \mathbf{v}_{\partial s} \rho_{\partial s} \Delta l S = \mathbf{v}_{\partial s} \rho_{\partial s} \Delta V = \mathbf{v}_{\partial s} \Delta Q$, где ΔQ — перемещающийся заряд в объёме ΔV отрезка провода Δl .

В итоге

$$dA = [\mathbf{B} d\lambda] \cdot \mathbf{v}_{\partial s} \Delta Q = \{\Delta Q [\mathbf{v}_{\partial s} \mathbf{B}]\} \cdot d\lambda.$$

Здесь член, стоящий в фигурных скобках, есть сила Лоренца. Таким образом, в процессе электромагнитной индукции возникает сила Лоренца (как «сторонняя» сила), вызывающая перемещение электрических зарядов. Эдс индукции

$$\mathcal{E}_{инд} = \int_a^b \mathbf{E}_{инд} \cdot d\mathbf{l} \quad (31.7)$$

будет действовать (рис. 31.1б) вдоль Δl от a к b .

На концах отрезка Δl (проводящего контура нет!) сконцентрируются заряды $+Q$ и $-Q$, которые возбуждают электрическое поле

(потенциальное) как внутри, в объёме Δl , так и во внешнем пространстве, причём в соответствии с законом Ома для электрической цепи имеем

$$\int_a^b \mathbf{E}_{инд} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_b - \varphi_a, \quad (31.8)$$

где φ_b и φ_a — потенциалы электрического поля.

Напряжение вдоль Δl равно нулю, так как (при равномерном движении отрезка Δl) электрическое поле ($\mathbf{E}$) перераспределившихся зарядов уравнивает вихревое поле ($\mathbf{E}_{инд}$). Заряды при этом в отрезке Δl будут неподвижны относительно отрезка. Таким образом, напряжение:

$$V_{ab} = \int_a^b (\mathbf{E}_{инд} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (31.9)$$

Напряжение вдоль мысленно проведённого контура l ($b \rightarrow c \rightarrow a$) для случая постоянного магнитного поля будет равно

$$V_{bca} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_b - \varphi_a = \mathcal{E}_{инд}. \quad (31.10)$$

В случае переменного магнитного поля к потенциальной части V_{bca} прибавится вихревая, равная $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, где Φ — поток сквозь контур l . В этом втором случае напряжение V_{bca} , очевидно, зависит от формы и размеров контура l .

§ 32. Второе уравнение Максвелла. Квазистационарные процессы

Закон электромагнитной индукции на основании ф-лы (31.3) можно записать так:

$$\oint \left\{ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} \cdot d\mathbf{S} = \oint \{ \mathbf{E}_{инд} - [\mathbf{vB}] \} \cdot d\mathbf{l}. \quad (32.1)$$

Здесь левый (поверхностный) интеграл берётся по поверхности, ограниченной замкнутым контуром, по которому берётся правый интеграл. Преобразуем правый интеграл по теореме Стокса

$$\oint \{ \mathbf{E}_{инд} - [\mathbf{vB}] \} \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot} \{ \mathbf{E}_{инд} - [\mathbf{vB}] \} \cdot d\mathbf{S}. \quad (32.2)$$

Получим

$$\int_S \left\{ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot} \{ \mathbf{E} - [\mathbf{v}\mathbf{B}] \} \cdot d\mathbf{S}. \quad (32.3)$$

Так как оба интеграла берутся по поверхности, во-первых, произвольной формы и, во-вторых, ограниченной контуром также произвольной формы и любого размера, то из равенства (32.3) следует

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} \{ \mathbf{E} - [\mathbf{v}\mathbf{B}] \}; \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (32.4)$$

Это соотношение и есть второе уравнение Максвелла.

Для случая неподвижного контура ($\mathbf{v}=0$) частная производная по времени будет совпадать с полной производной, и второе уравнение Максвелла примет вид

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (32.5)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном электромагнитные процессы при неподвижных контурах и телах и пользоваться вторым уравнением Максвелла в форме (32.5).

В цепи постоянного тока связь между током и возбуждённым им магнитным полем устанавливается первым уравнением Максвелла, в котором отсутствует вектор плотности тока смещения.

Электромагнитный процесс, требующий для своего описания только первого уравнения Максвелла (без тока смещения), мы называли стационарным.

В цепи переменного тока могут находиться конденсаторы, и, следовательно, переменное магнитное поле, возникающее в окружающем цепь пространстве, будет возбуждаться как токами проводимости, так и токами смещения, т. е. описываться полной формой первого уравнения Максвелла. Это переменное магнитное поле возбудит, в свою очередь, вторичное переменное электрическое поле (в соответствии со вторым уравнением Максвелла). Вторичное переменное электрическое поле (вторичный ток смещения) возбудит вторичное магнитное поле, т. е. будет происходить распространение электромагнитной энергии.

В этом общем случае изменение электромагнитного процесса в одном каком-нибудь участке цепи передаётся в другой участок с запаздыванием, так, например, величина тока в последовательных участках цепи принимает определённое мгновенное значение не одновременно.

Однако, если изменение электромагнитного процесса в цепи (токов, зарядов на конденсаторах и т. д.) будет происходить столь медленно, что время распространения такого «медленного» возмущения можно считать ничтожно малым сравнительно с продолжительностью самого возмущения (т. е. пренебречь запаздыванием), то, например, изменение мгновенных значений токов в последовательных участках цепи можно считать одновременным и, следовательно, мгновенные значения токов во всех (последовательных) участках цепи будут для данного момента одинаковы, как это считается в теории электрических цепей.

При этих условиях для расчёта цепи можно для мгновенных значений токов и напряжений непосредственно применять законы Ома и Кирхгофа. Электромагнитный процесс в этом случае называется «квазистационарным», т. е. «как бы стационарным», так как расчёт может выполняться теми же методами, что и расчёт цепи стационарного (постоянного) тока.

Если рассматривать цепь периодического тока, то условие квазистационарности можно выразить через соотношение длины волны периодического электромагнитного процесса и линейных размеров цепи. Пусть время распространения (t) электромагнитного процесса вдоль цепи ничтожно мало сравнительно с его периодом (T):

$$t \ll T; \quad (32.6)$$

так как $ct = l$ есть линейный размер цепи и $cT = \lambda$ есть длина волны электромагнитного процесса, то, очевидно,

$$l \ll \lambda. \quad (32.7)$$

Поэтому, например, во всех сечениях последовательно соединённых участков цепи мгновенные значения тока для данного момента будут практически одинаковы, что и соответствует квазистационарному режиму. Соотношение (32.7) является формулировкой условия квазистационарности.



Глава V.

ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 33. Преобразование энергии в магнитно-связанных цепях

На провод с током в магнитном поле действует сила (сила Ампера) (см. § 19). Если провод под влиянием этой силы будет перемещаться, то магнитное поле совершит работу, т. е. энергия магнитного поля будет преобразовываться в какую-то другую форму энергии.

Рассматривая процесс работы, можно рассчитать энергию магнитного поля. Однако для расчёта этой энергии необходимо учесть работу не только механических сил поля, но и работу электродвижущих сил, индукции, возникающих при изменении токов в цепях, при деформации цепей и при перемещении их относительно друг друга.

Рассмотрим энергетический баланс системы двух магнитно-связанных цепей, в которых действуют сторонние электродвижущие силы и текут токи и которые могут перемещаться относительно друг друга и деформироваться как под воздействием электромагнитных

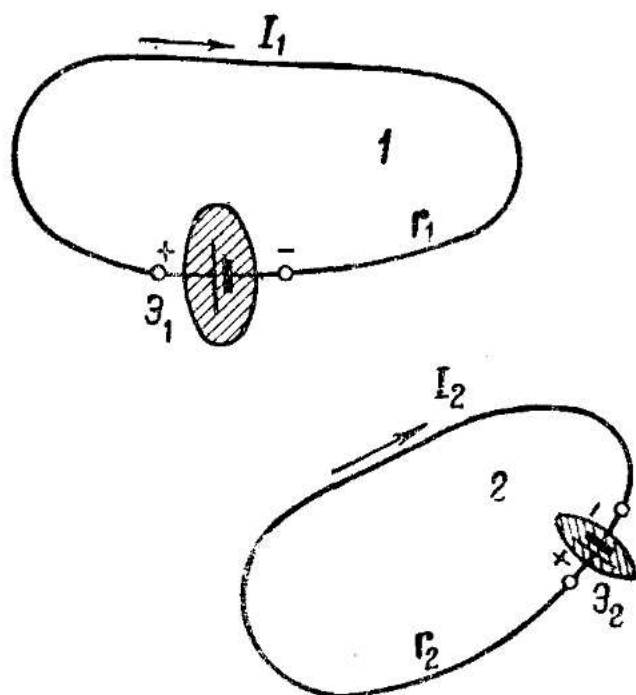


Рис. 33.1

сил [см. ф-лы (19.1), (19.3)], так и сторонних механических сил. По закону Ома токи в этих цепях будут равны:

$$i_1 = \frac{E_1 + \mathcal{E}_1^{\text{инд}}}{r_1}; \quad i_2 = \frac{E_2 + \mathcal{E}_2^{\text{инд}}}{r_2}. \quad (33.1)$$

Здесь в соответствии с рис. 33.1 $E_{1,2}$ — эдс источников энергии, питающих цепи (в данном случае — гальванические элементы), $\mathcal{E}_{1,2}^{\text{инд}}$ — эдс индукции и $r_{1,2}$ — сопротивления цепей.

Составим уравнение энергетического баланса

$$(\mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2) dt + (\mathcal{E}_1^{инд} i_1 + \mathcal{E}_2^{инд} i_2) dt = (i_1^2 r_1 + i_2^2 r_2) dt + dA_{мех}. \quad (33.2)$$

Первый член левой части (33.2)

$$(\mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2) dt = P dt \quad (33.3)$$

— это энергия источников, поступающая в цепь за время dt .

Второй член

$$(\mathcal{E}_1^{инд} i_1 + \mathcal{E}_2^{инд} i_2) dt = dW_{инд} = -dW_{маг} \quad (33.4)$$

— энергия источников, преобразующаяся в магнитное поле системы ($-dW_{маг}$). Если источники отдают энергию, то энергия возникающего магнитного поля возрастает. Поэтому $dW_{инд} = -dW_{маг}$.

Первый член правой части (33.2)

$$(i_1^2 r_1 + i_2^2 r_2) dt = P_{джс} dt \quad (33.5)$$

— это энергия, идущая на джоулево тепло за тот же промежуток времени dt , и, наконец, второй член правой части (33.2)

$$dA_{мех} = dA_{мех}^{эл.м} + dA_{мех}^{статр} \quad (33.6)$$

представляет собой механическую работу за время dt как электромагнитных сил системы (см. § 19), так и сторонних механических сил.

Рассмотрим $dW_{маг}$ — изменение энергии магнитного поля:

$$dW_{маг} = -(\mathcal{E}_1^{инд} i_1 + \mathcal{E}_2^{инд} i_2) dt, \quad (33.7)$$

где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — эдс индукции, равные

$$\mathcal{E}_1^{инд} = -\frac{d\Psi_1}{dt}; \quad \mathcal{E}_2^{инд} = -\frac{d\Psi_2}{dt}, \quad (33.8)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — полные потокосцепления (как индуктивности, так и взаимоиנדуктивности) рассматриваемых цепей.

Подставляя выражения (33.8) в формулу $dW_{маг}$, получим

$$dW_{маг} = -(\mathcal{E}_1^{инд} i_1 + \mathcal{E}_2^{инд} i_2) dt = i_1 d\Psi_1 + i_2 d\Psi_2. \quad (33.7')$$

Выразим потокосцепления Ψ_1 и Ψ_2 в функции индуктивностей и взаимоиנדуктивностей:

$$\Psi_1 = i_1 L_{11}^* + i_2 L_{12}^*; \quad \Psi_2 = i_2 L_{22}^* + i_1 L_{21}^*,$$

где L_{11}^* , L_{22}^* — индуктивности цепей и $L_{12}^* = L_{21}^* = M^*$ — взаимоиנדуктивность.

Полное изменение потокосцеплений при изменении токов в цепях, их перемещении и деформации будет равно

$$\left. \begin{aligned} d\Psi_1 &= \{L_{11}^* di_1 + L_{12}^* di_2\} + \{i_1 dL_{11}^* + i_2 dL_{12}^*\} \\ d\Psi_2 &= \{L_{22}^* di_2 + L_{21}^* di_1\} + \{i_2 dL_{22}^* + i_1 dL_{21}^*\} \end{aligned} \right\}. \quad (33.9)$$

Здесь первые члены — изменение потокосцеплений при неподвижных и недеформирующихся цепях:

$$\left. \begin{aligned} \partial\Psi_1 &= \{L_{11}^* di_1 + L_{12}^* di_2\}_{L,M-\text{const}} \\ \partial\Psi_2 &= \{L_{22}^* di_2 + L_{21}^* di_1\}_{L,M-\text{const}} \end{aligned} \right\}, \quad (33.10)$$

вторые члены — изменение потокосцеплений при возможных перемещениях и деформациях цепей и при неизменных токах:

$$\left. \begin{aligned} \delta\Psi_1 &= \{i_1 dL_{11}^* + i_2 dL_{12}^*\}_{i-\text{const}} \\ \delta\Psi_2 &= \{i_2 dL_{22}^* + i_1 dL_{21}^*\}_{i-\text{const}} \end{aligned} \right\}. \quad (33.11)$$

Пусть токи (i_1 и i_2) в цепях возрастают от нуля до некоторой величины I_1 и I_2 . В процессе изменения токов может произойти под влиянием электромагнитных (также и сторонних, внешних) сил как перемещение цепей относительно друг друга, так и их деформация. Для расчёта энергии возникающего магнитного поля и совершающейся механической работы можно весь процесс разложить на два этапа: первый, в течение которого меняются только токи, а расположение и форма цепей остаются первоначальными (при этом L_{11}^* , L_{22}^* , L_{12}^* , L_{21}^* неизменны), и второй, в течение которого при неизменном значении токов происходит изменение расположения и деформация цепей (L_{11}^* , L_{22}^* , M^* изменяются до значений L_{11} , L_{22} , M).

Рассмотрим первый этап процесса. Подставив $\partial\Psi$ из ф-лы (33.10) в выражение dW_m [ф-ла (33.7')] и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} W_m^* &= \int_0^t [(-\mathcal{E}_1^{und}) i_1 + (-\mathcal{E}_2^{und}) i_2] dt = \int_0^{\Psi_1^*, \Psi_2^*} (i_1 d\Psi_1 + i_2 d\Psi_2) = \\ &= \int_0^{I_1, I_2} (i_1 L_{11}^* di_1 + i_1 L_{12}^* di_2 + i_2 L_{22}^* di_2 + i_2 L_{21}^* di_1) = \\ &= \frac{L_{11}^* I_1^2}{2} + \frac{L_{22}^* I_2^2}{2} + \int_0^{I_1, I_2} M (i_1 di_2 + i_2 di_1) = \\ &= \frac{L_{11}^* I_1^2}{2} + \frac{L_{22}^* I_2^2}{2} + M^* \int_0^{I_1, I_2} d(i_1 i_2) = \frac{L_{11}^* I_1^2}{2} + \frac{L_{22}^* I_2^2}{2} + M^* I_1 I_2, \end{aligned} \quad (33.12)$$

где W_m^* — энергия магнитного поля, возникшая при возрастании токов от 0 до I_1 и I_2 и при постоянстве L^* и M^* .

Приступим ко второму этапу процесса. Токи I_1 и I_2 остаются по условию неизменными, а цепи могут перемещаться относительно друг друга и деформироваться.

Для конкретизации рассуждений выберем определённые положительные направления токов.

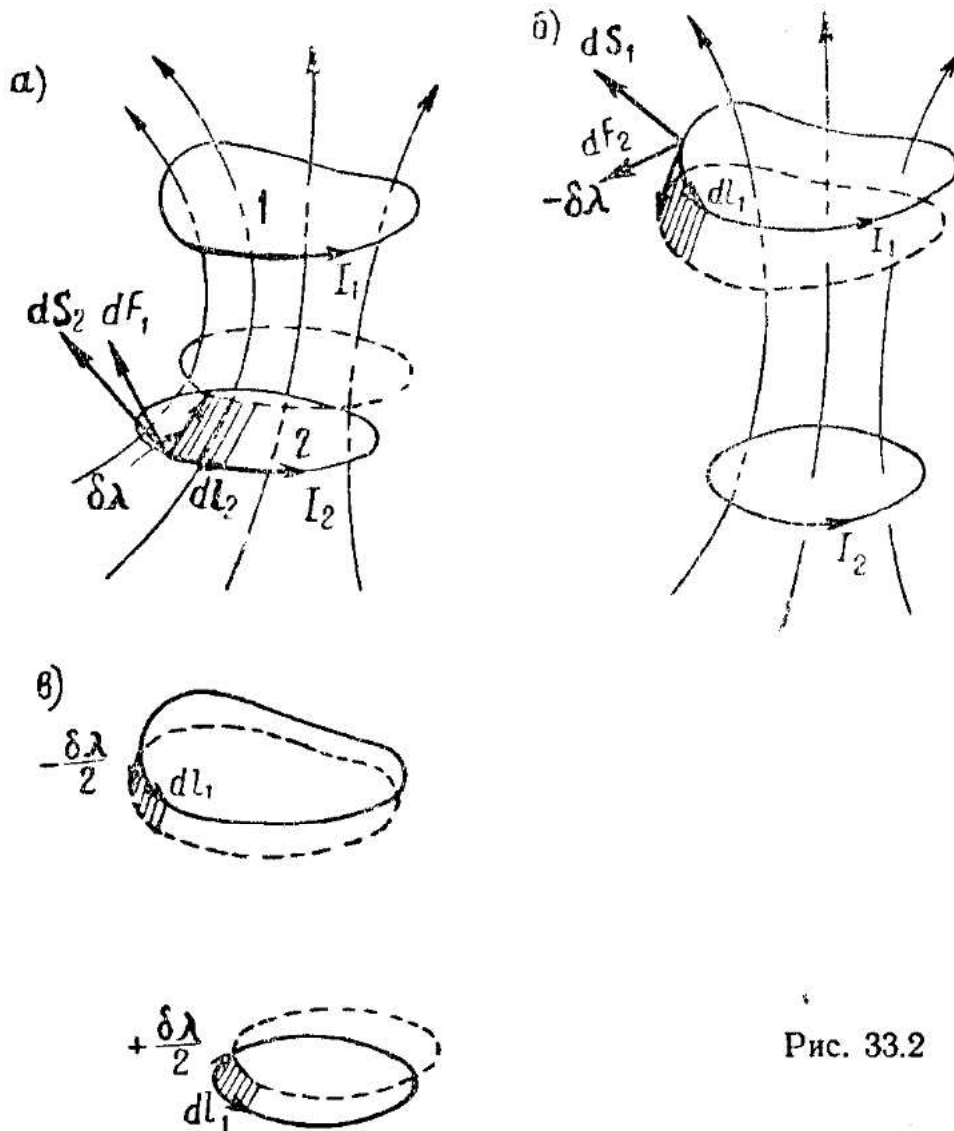


Рис. 33.2

Закрепим цепь 1 и дадим возможность цепи 2 под влиянием сил, действующих на неё, совершить небольшое возможное¹⁾ перемещение $\delta\lambda$ (рис. 33.2a). Сила, действующая на элемент цепи dl_2 , равна

$$dF_2 = I_2 [dl_2 B]. \quad (33.13)$$

¹⁾ См. § 12.

Возможная работа при перемещении всей цепи 2 на расстояние $\delta\lambda$ будет

$$\begin{aligned}\delta A_2 &= \oint_{l_2} I_2 [d\mathbf{l}_2 \mathbf{B}] \cdot d\lambda = \oint_{l_2} I_2 [\hat{e}\lambda d\mathbf{l}_2] \cdot \mathbf{B} = \\ &= I_2 \oint_{l_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2 = I_2 \delta\Psi_2.\end{aligned}\quad (33.14)$$

Здесь $\delta\Psi_2$ — изменение потокосцепления Ψ_2 цепи 2 при её перемещении и при условии постоянства токов I_1 и I_2 .

Если закрепить вторую цепь и дать первой возможность сместиться на равное и противоположное расстояние $(-\delta\lambda)$ (см. рис. 33.2б), то, рассуждая аналогичным образом, получим

$$dA_1 = I_1 \delta\Psi_1. \quad (33.15)$$

Величина возможных работ δA_1 и δA_2 определяется изменением положения цепей 1 и 2 относительно друг друга за время, в течение которого эти работы совершаются. Так как изменение положения цепей в обоих рассмотренных случаях одинаково [относительное положение цепей 1 и 2 в конце процесса смещения будет одно и то же (см. рис. 33.2а и б)], то величины этих возможных работ будут равны

$$\delta A_1 = \delta A_2. \quad (33.16)$$

Пусть обе цепи сместятся навстречу друг другу на расстояние $\frac{\delta\lambda}{2}$ и $-\frac{\delta\lambda}{2}$ (рис. 33.2в); относительное положение их окажется таким же, как и в двух предыдущих случаях, следовательно, и механическая работа системы будет та же:

$$\frac{\delta A_1}{2} + \frac{\delta A_2}{2} = \delta A_1 = \delta A_2 = \frac{1}{2} (I_1 \delta\Psi_1 + I_2 \delta\Psi_2). \quad (33.17)$$

Отметим следующее существенное и весьма любопытное обстоятельство: при перемещении одной цепи относительно другой потокосцепления будут изменяться как в одной, так и в другой цепи. Например, во всех трёх только что рассмотренных взаимных перемещениях цепей потокосцепления первой и второй цепей будут изменяться на $\delta\Psi_1$ и $\delta\Psi_2$. Вследствие изменений потокосцеплений в цепях возникают эдс индукции $\mathcal{E}_1^{инд}$ и $\mathcal{E}_2^{инд}$. Так как по условию токи должны остаться неизменными, то наведённые эдс индукции будут уравновешены некоторыми дополнитель-

ными составляющими эдс источников энергии, равными $(-\mathcal{E}_1^{*und})$ и $(-\mathcal{E}_2^{*und})$. Работа этих составляющих по ур-нию (33.7) равна

$$\begin{aligned} dW' &= [(-\mathcal{E}_1^{*und}) I_1 + (-\mathcal{E}_2^{*und}) I_2] dt = \\ &= I_1 \delta\Psi_1 + I_2 \delta\Psi_2 = 2\delta A_{мех}. \end{aligned} \quad (33.18)$$

Эта работа будет в два раза больше механической работы.

Следовательно, только половина работы уравнивающих сторонних эдс

$$\frac{dW'}{2} = \frac{1}{2} (I_1 \delta\Psi_1 + I_2 \delta\Psi_2) \quad (33.19)$$

преобразуется в механическую работу; вторая же половина пойдёт на увеличение энергии магнитного поля.

Выразим работу уравнивающих эдс в функции индуктивностей и взаимоиנדуктивностей. Подставим в формулу dW' [ф-лу (33.18)] выражения $\delta\Psi$ из ур-ний (33.11), полагая, что токи уже приняли окончательные значения I_1 и I_2 . Получим

$$\begin{aligned} dW' &= I_1 \delta\Psi_1 + I_2 \delta\Psi_2 = I_1 (I_1 dL_{11}^* + I_2 dL_{12}^*) + \\ &+ I_2 (I_2 dL_{22}^* + I_1 dL_{21}^*). \end{aligned} \quad (33.20)$$

Интегрируя это выражение по переменным значениям индуктивностей и взаимоиנדуктивности в пределах от $(L_{11}^*, L_{22}^*, M^*)$ до некоторого их значения (L_{11}, L_{22}, M) , получим

$$\begin{aligned} W' &= \int_{L_{11}^*, L_{22}^*, M^*}^{L_{11}, L_{22}, M} (I_1^2 dL_{11}^* + I_1 I_2 dL_{12}^* + I_2^2 dL_{22}^* + I_2 I_1 dL_{21}^*) = \\ &= (L_{11} - L_{11}^*) I_1^2 + (L_{22} - L_{22}^*) I_2^2 + 2(M - M^*) I_1 I_2. \end{aligned} \quad (33.21)$$

Таким образом, полная энергия магнитного поля системы двух взаимосвязанных контуров будет равна

$$\begin{aligned} W_{маг} &= W_{маг}^* + \frac{W'}{2} = \frac{I_1^2 L_{11}^*}{2} + \frac{I_2^2 L_{22}^*}{2} + M^* I_1 I_2 + \\ &+ \frac{(L_{11} - L_{11}^*)}{2} I_1^2 + \frac{(L_{22} - L_{22}^*)}{2} I_2^2 + (M - M^*) I_1 I_2 = \\ &= \frac{I_1^2 L_{11}}{2} + \frac{I_2^2 L_{22}}{2} + M I_1 I_2, \end{aligned} \quad (33.22)$$

а механическая работа выразится в виде

$$A_{\text{мех}} = \frac{W'}{2} = \frac{\Delta L_{11} I_1^2}{2} + \frac{\Delta L_{22} I_2^2}{2} + \Delta M I_1 I_2,$$

где

$$\Delta L_{11} = L_{11} - L_{11}^*; \quad \Delta L_{22} = L_{22} - L_{22}^*; \quad \Delta M = M - M^*. \quad (33.23)$$

§ 34. Энергия системы магнитно-связанных цепей и объёмно распределённых токов

Найденные выражения нетрудно обобщить на любое число n магнитно-связанных электрических цепей. Так, например, ф-ла (33.7') для n магнитно-связанных цепей будет иметь вид

$$dW_{\text{маг}} = \sum_{k=1}^n I_k d\Psi_k, \quad (34.1)$$

где изменение потокосцепления k -й цепи равно

$$d\Psi_k = \sum_{p=1}^n (I_p dL_{pk} + L_{pk} dI_p). \quad (34.2)$$

В этой формуле L_{kk} — индуктивность k -й цепи и L_{pk} — взаимная индуктивность p -й и k -й цепей.

Тогда изменение магнитной энергии всей системы цепей можно выразить как

$$dW_{\text{маг}} = \sum_{k=1}^n I_k \sum_{p=1}^n (I_p dL_{pk} + L_{pk} dI_p). \quad (34.3)$$

Мы заключаем, что энергия источников сторонних эдс за вычетом джоулевых потерь обращается в механическую и магнитную энергию, причём физическим процессом, за счёт которого совершается это преобразование энергий, является работа составляющих сторонних эдс ($-\mathcal{E}$), уравнивающих эдс индукции ($\mathcal{E}_{\text{инд}}$).

Работа сторонних эдс складывается из двух частей: во-первых, из работы составляющих сторонних эдс, уравнивающих эдс индукции, наведённых за счёт перемещений цепей относительно друг друга и их деформаций [ф-ла (33.21)], и, во-вторых, из работы составляющих, уравнивающих эдс индукции, наведённых за счёт изменения токов в цепях [ф-ла (33.12)].

Первая часть работы сторонних эдс делится пополам: одна половина переходит в механическую работу, а другая — превращается в магнитную энергию.

Вторая же часть целиком переходит в магнитную энергию.

Направление преобразования энергии может быть и обратным. Например, если над системой совершается механическая работа, т. е. если к какому-либо контуру цепи прикладываются внешние механические силы, которые вызовут её перемещение против магнитных сил, то величина δA станет отрицательной. Механическая энергия, подводимая к системе, будет преобразовываться в магнитную энергию, тратиться на джоулево тепло и даже пополнять химическую энергию системы (если в цепях включены, например, как источник энергии, аккумуляторы).

Рассмотрим вкратце расчёт магнитной энергии объёмно распределённых токов.

Преобразуем выражение (33.22) магнитной энергии системы двух магнитно-связанных цепей:

$$W_{\text{м}} = \frac{I_1^2 L_{11}}{2} + \frac{I_2^2 L_{22}}{2} + M I_1 I_2 = \frac{I_1 (L_{11} I_1 + M I_2)}{2} + \frac{I_2 (L_{22} I_2 + M I_1)}{2}. \quad (34.4)$$

Подставляя сюда величину полных потокоцеплений, получим

$$W_{\text{м}} = \frac{I_1 \Psi_1}{2} + \frac{I_2 \Psi_2}{2}. \quad (34.5)$$

Формула без труда обобщается на систему n связанных цепей:

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k. \quad (34.6)$$

Ток I_k в сечении S'_k провода k -й цепи равен:

$$I_k = \int_{S_k} \delta_k \cdot dS'. \quad (34.7)$$

Потокоцепления Ψ_k сквозь поверхность S_k , опирающуюся на контур оси цепи k (см. рис. 34.1), можно представить в следующем виде:

$$\Psi_k = \int_{S_k} \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_k} \text{rot } \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{S} = \oint_{l_k} \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{l}. \quad (34.8)$$

Здесь $\mathbf{B}_k$ — вектор магнитной индукции от всех токов на поверхности S и $\mathbf{A}_k$ — векторный потенциал также всех токов на контуре оси k -й цепи.

Половина произведения подынтегральных величин в выражениях (34.7) и (34.8) равна магнитной энергии в элементарном объёме провода цепи k ($dV = dS' \cdot dl$):

$$dW_m = (\delta_k \cdot dS') (A_k \cdot dl) = (\delta_k \cdot dA_k) (dS' \cdot dl) = \delta_k A_k dV. \quad (34.9)$$

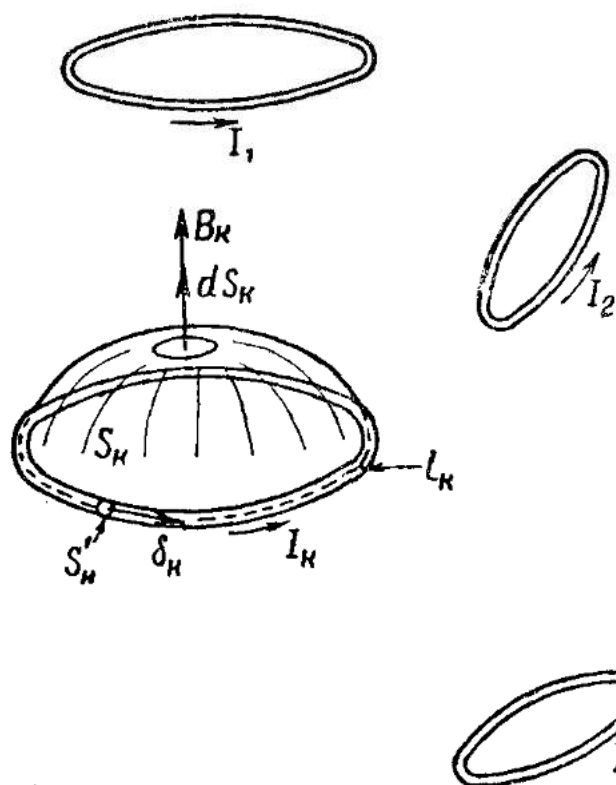


Рис. 34.1

Здесь преобразование произведено на том основании, что векторы δ и dl можно считать параллельными и, следовательно, поменять их места в скалярных произведениях, отмеченных в (34.9) скобками.

Интегрируя (34.9) по объёму провода цепи k , затем суммируя по всем n цепям, получим выражение

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int \delta_k \cdot A_k dV. \quad (34.10)$$

Это выражение можно записать в таком виде:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \delta \cdot A dV, \quad (34.11)$$

оговорив, что интегрирование производится по всем объёмам, в которых текут токи.

§ 35. Пространственное распределение магнитной энергии и её объёмная плотность

Рассматривая ф-лы (34.6) и (34.11), можно сделать вывод, что магнитная энергия сосредоточена в тех объёмах пространства, где протекает ток. Однако такое заключение будет неточно; нетрудно показать, что магнитная энергия распределена не только в объёмах, обтекаемых током, но и в окружающем ток пространстве, т. е. является энергией магнитного поля.

Для простоты рассмотрим одну электрическую цепь с током. По ур-нию (34.6) магнитная энергия этой цепи будет равна

$$W_m = \frac{1}{2} I \Psi. \quad (35.1)$$

Преобразуем выражение (35.1) с помощью закона полного тока (21.10) и формулы потокосцепления (34.8) аналогично преобразованию (34.9) к виду

$$dW_m = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) (d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{S}). \quad (35.2)$$

Соотношение геометрических элементов $d\mathbf{l}$ и $d\mathbf{S}$ показано на рис. 35.1.

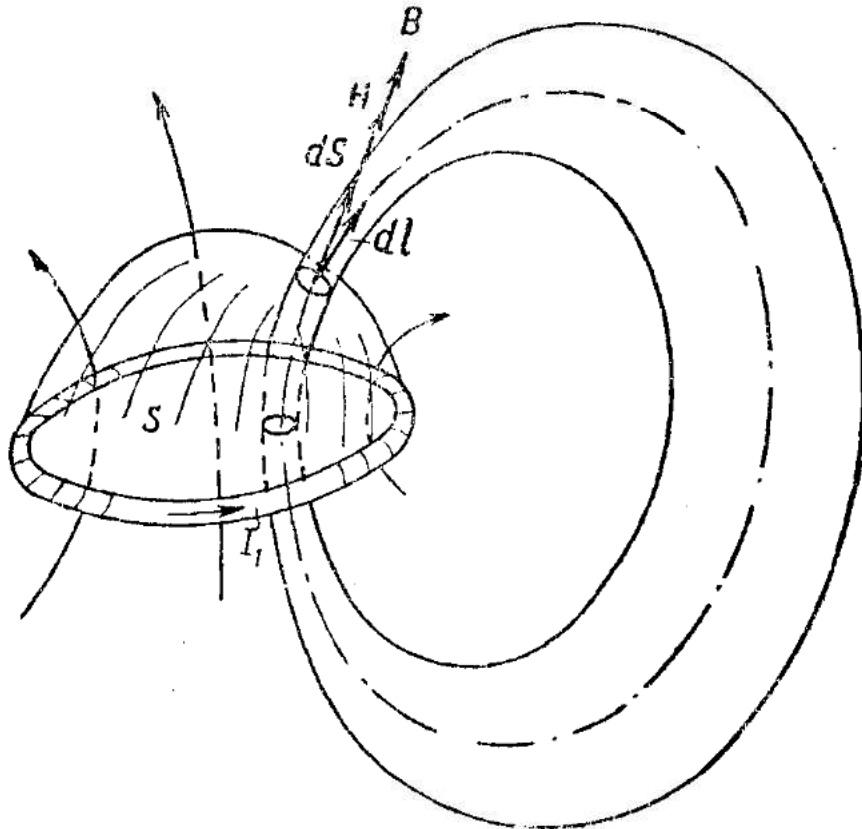


Рис. 35.1

В данном случае $d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = dV$, где dV — не только элемент объёма тока, но и вообще элемент объёма магнитного поля (где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ не равны нулю). Интегрируя, как в случае (34.11), получим

$$W_m = \int_V \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} dV \quad (35.3)$$

— выражение магнитной энергии тока, как энергии магнитного поля. Подынтегральная величина

$$W_{0m} = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m^3} \right] \quad (35.4)$$

равна среднему значению энергии в единице объёма или, точнее говоря, представляет собой объёмную плотность энергии магнитного поля.

Формула (34.3) выражает, очевидно, и энергию магнитного поля системы связанных электрических цепей; $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ в таком случае будут результирующими векторами магнитного поля, возбуждённого токами всех цепей.

Формулы магнитной энергии (34.9) (34.11) и (35.3) математически эквивалентны друг другу, но только из ф-лы (35.3) можно сделать, как и в электростатике, заключение о локализации магнитной энергии в пространстве. Однако убедиться в этом можно, лишь рассматривая высокочастотное электромагнитное поле и свободную электромагнитную волну, которая распространяется не будучи связанной с излучающими или воспринимающими системами (следовательно, с токами проводимости). Магнитная энергия свободной электромагнитной волны может быть рассчитана только по ф-ле (35.3).

§ 36. Силы магнитного поля. Расчёт потокоцеплений и индуктивностей

Расчёт сил магнитного поля выполним с помощью метода возможных перемещений (возможной работы), как это мы делали при расчёте сил электростатического поля (см. § 12).

Рассмотрим систему из n магнитно-связанных цепей. Пусть положения цепей определяются некоторым числом обобщённых координат q_i (см. § 12), где $i=1, 2, \dots, m$ в общем случае не равно n .

Возможная работа системы определится произведением вариации обобщённой координаты на обобщённую силу

$$\delta A = \vartheta_i \delta q_i. \quad (36.1)$$

Воспользовавшись выражением возможной работы [см. § 34] при $I_k = \text{const}$, определим обобщённую силу:

$$\vartheta_i = \frac{\delta A}{\delta q_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \frac{\delta \Psi_k}{\delta q_i} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p=1 \\ k=1}}^n I_k I_p \frac{\delta \tau_{pk}}{\delta q_i}. \quad (36.2)$$

Очевидно, для вычисления обобщённой силы можно воспользоваться величиной энергии магнитного поля и находить её вариацию в предположении, что токи остаются постоянными.

Если обобщённые координаты, характеризующие положение элементов системы, являются независимыми, то, как это мы выяс-

нили в § 12, варьирование по этим координатам совпадает с вычислением частных производных.

Полагая, что обобщённые координаты независимы, получим

$$\frac{\delta W_M}{\delta q_i(I=\text{const})} = \frac{\partial W_M}{\partial q_i(I=\text{const})} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} = \frac{\delta A}{\delta q_i} = \vartheta_i. \quad (36.3)$$

Если вычислить частную производную магнитной энергии системы токов по току I_k , то получим величину полных потокоцеплений с контуром k

$$\frac{\partial W_M}{\partial I_k} = \Psi_k. \quad (36.4)$$

Магнитная энергия системы связанных цепей выражается квадратичной формой, от токов ¹⁾ [см., например, ф-лы (33.22), (34.3)], коэффициентами которой являются индуктивности и взаимоиנדуктивности.

Для определения этих коэффициентов нужно, очевидно, брать вторую производную от выражения энергии по токам. Например:

$$L_k = \frac{\partial^2 W_M}{\partial I_k^2}, \quad M_{p,k} = \frac{\partial^2 W_M}{\partial I_p \partial I_k}. \quad (36.5)$$

Это ещё один способ вычисления индуктивностей и взаимоиנדуктивностей, который часто применяют при практических расчётах.



¹⁾ В магнитно-линейных цепях ($\mu = \text{const}$).

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава VI ЯВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

§ 37. Открытие явлений излучения и распространения радиоволн. Опыты Герца, Лебедева. Осуществление радиопередачи Поповым

Одним из основных положений теории электромагнитного поля, разработанной Максвеллом в 1860—1873 гг., было утверждение о том, что электромагнитное поле может существовать в пространстве, где нет электрически заряженных частиц и тел. Картина электромагнитного процесса в этом случае представляет собой последовательную связь во времени и пространстве изменения электрического поля, т. е. электрического тока смещения и изменения магнитного поля; ток смещения возбуждает магнитное поле, а изменение магнитного поля, в свою очередь, возбуждает электрическое поле, изменение которого представляет, опять-таки, ток смещения.

Однако описанная картина электромагнитного процесса, созданная гениальной интуицией Максвелла, долгое время была гипотезой и не имела экспериментального подтверждения, о чём неоднократно говорил и сам Максвелл.

Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн последовало лишь в 1888 г. В этом году немецкий физик Генрих Рудольф Герц (1857—1894 гг.) с помощью созданной им оригинальной методики возбудил электромагнитные волны достаточной мощности и исследовал их свойства.

Исторически дело обстояло так. В 1879 г. (в год смерти Максвелла) Берлинская Академия наук объявила премию за экспери-

ментальное доказательство существования токов смещения и их магнитного поля.

Известный немецкий физик, широко образованный учёный Герман Фердинанд Гельмгольц (1821—1894 гг.) указал на эту проблему Генриху Герцу, который и занялся ею. Основной трудностью было получение высокочастотного электрического поля, так как величина плотности тока смещения $\delta_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}$ зависит от скорости изменения поля и, следовательно, при гармонически меняющемся поле амплитуда тока смещения пропорциональна частоте (см., например, § 29).

Для того чтобы амплитуда плотности тока смещения была порядка амплитуды плотности тока проводимости $\left(\frac{\delta_{см}}{\delta_{пр}} \sim 1\right)$, нужны частоты порядка мегагерц даже в плохо проводящих средах [см. § 29, ф-лы (29.12), (29.13) и табл. 29.1]. Ещё более высокие частоты (порядка тысяч мегагерц) нужны, чтобы плотность тока смещения в пространстве оказалась соизмеримой с плотностью тока проводимости в хорошо проводящей среде (например, в проводе).

Такие частоты Герц получил, воспользовавшись простым колебательным контуром (см. рис. 37.1 а). По формуле Томсона для колебательного контура имеем

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

и, например, для индуктивностей порядка микрогенри и ёмкостей порядка нанофарад получим

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{10^{-6} \cdot 10^{-9}}} \approx 5 \text{ Мгц.}$$

Герц добивается ещё более высоких частот, уменьшая размер проводников контура, раздвигая обкладки конденсатора (см. рис. 31.1 б, в) и переходя, таким образом, к открытому колебательному контуру.

Этот переход — от замкнутого к открытому колебательному контуру — существеннейшая часть работы Герца; именно такое устройство колебательной системы особенно пригодно для излучения электромагнитных волн.

Устройство Герца, впоследствии названное диполем, или вибратором Герца, представляет собой два небольших (10—50 см) прямолинейных проводника, к концам которых присоединены металлические шарики или пластинки. Между проводниками оставляется небольшое расстояние — искровой промежуток. К концам

проводников, разделённых искровым промежутком, присоединяется источник напряжения (рис. 37.1).

Источником напряжения в опыте Герца служил индуктор Румкорфа, разряжавшийся на искровой промежуток диполя. С помощью этого устройства Герц экспериментально доказал «индуктивное действие незамкнутых токов», т. е. токов смещения, заключающееся в возбуждении эдс индукции (и, следовательно, тока) в

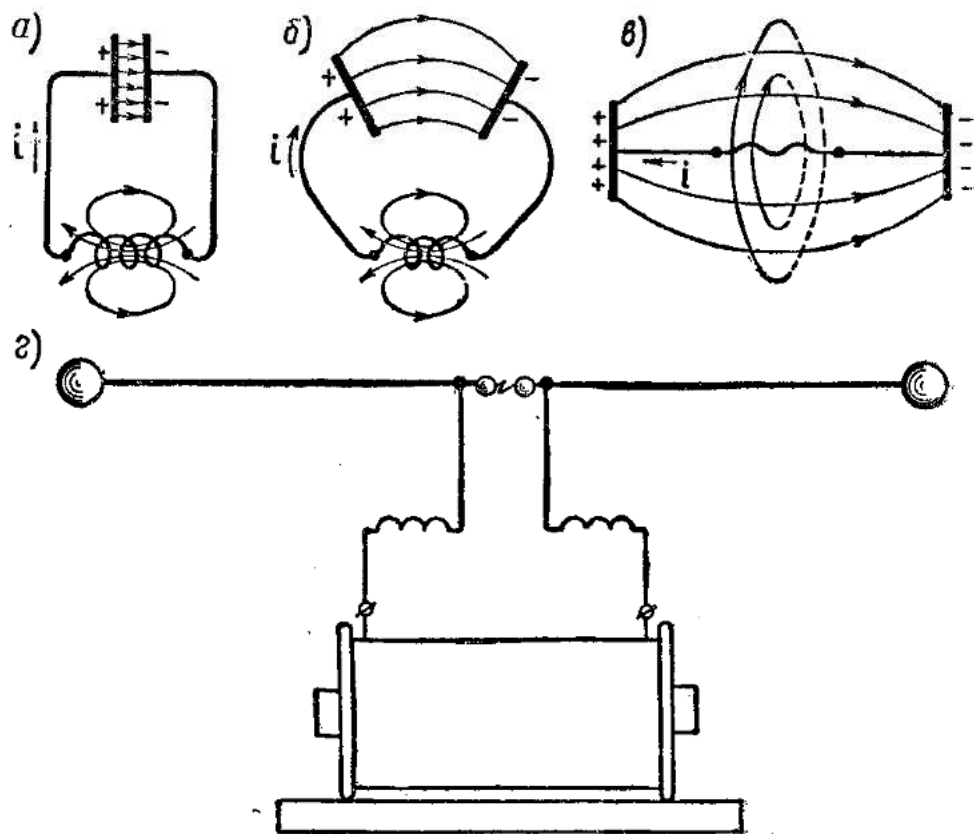


Рис. 37.1

другом, замкнутом контуре, когда открытый колебательный контур возбуждался высокочастотным разрядом. В дальнейшем Герц открыл и исследовал возбуждаемые и излучаемые диполем электромагнитные волны.

Герц рассчитал ёмкость и индуктивность диполя, вычислил период колебания и, измерив длину стоячих волн, возникших в результате отражения излучения диполя от стен помещения, в котором производились опыты, вычислил скорость распространения. Она оказалась равной $200\,000\text{ км/сек}$, т. е. примерно в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости света. Однако Герц не усомнился в правильности теории Максвелла и отметил, что расхождение должно быть обусловлено какой-то ошибкой.

Ошибка эта была впоследствии обнаружена знаменитым французским математиком и физиком Анри Пуанкаре (1857—1912 гг.). Оказалось, что Герц неправильно определил ёмкость диполя, взяв

её значение в два раза больше действительного. Внесённая поправка привела к совпадению теоретических расчётов и данных эксперимента.

Герц экспериментально осуществил отражение и преломление возбуждённых электромагнитных волн и показал, что все эти явления происходят в точном соответствии с теорией Максвелла.

На основе теоретических расчётов Герц построил широко известную теперь картину поля излучающего диполя (см. § 57, рис. 57.4). Первые результаты своих опытов и разработанной теории Герц изложил в статье «Об электрических колебаниях высокой частоты», датированной 5 ноября 1887 г. и тогда же отосланной Гельмгольцу.

Гельмгольц ответил весьма выразительной открыткой: «Манускрипт получен, браво, в четверг пошлю в печать!».

В дальнейших статьях Герц изложил опыты с открытыми им электромагнитными волнами и их исследование.

Опыты Герца, сразу же после выхода в свет его статей повторенные в физических лабораториях всего мира, принесли ему мировую славу.

Устройство Герца не могло служить для передачи сигналов на сколько-нибудь значительные расстояния, так как мощность, которую излучал его диполь, была ничтожна, точно так же, как ничтожна была и чувствительность рамки, с помощью которой Герц обнаружил электромагнитные волны.

Однако Герц вопреки распространённому мнению никогда не отрицал возможности связи на радиочастотах (в диапазоне меггерц). В известном своём ответе инженеру Губеру (1889 г.), который спрашивал Герца, могут ли открытые электромагнитные волны быть применены для беспроволочного телефона, Герц говорит о том, что для излучения электромагнитных волн звуковых частот (один-два килогерца) потребовались бы излучающие системы колоссальных размеров («зеркало размером с материк», как пишет Губеру Герц), и добавляет, что с излучающими системами небольших размеров (при звуковых частотах) не обнаружится никакого действия.

Эти утверждения Герца абсолютно правильны. Он, конечно, не подозревал о возможности передачи звуковых частот путём модуляции радиочастоты, как это осуществляется в современной радиосвязи.

Опыты Герца показали существование тока смещения и электромагнитных волн, полностью аналогичных световым. Тем самым была подтверждена теория Максвелла со всеми её следствиями. Оставался неясным один существенный вопрос: из теории Максвелла следовало, что электромагнитные волны, падая на поверхность металла или диэлектрика, оказывают на эту поверхность давление, величину которого можно было вычислить.

Впервые это электромагнитное давление было обнаружено и с помощью глубоко продуманных, виртуозно поставленных опытов измерено в 1900 г. крупным русским физиком Петром Николаевичем Лебедевым (1866—1912 гг.). Лебедев обнаружил и измерил давление света не только на твёрдые тела, но и на газы, и величина светового давления оказалась совпадающей с рассчитанной по теории Максвелла.

Лебедеву удалось получить наиболее короткие в то время (1895 г.) электромагнитные волны ($\lambda \approx 6$ мм), с помощью которых он показал, что такое сложное явление, как двойное лучепреломление, подчиняется как для электромагнитных волн, так и для света одним и тем же законам.

Важным вопросом в доказательстве тождества световых и электромагнитных волн оставалось сближение на частотной шкале наиболее длинных световых (инфракрасных, тепловых) волн и волн, возбуждаемых вибратором Герца.

К 1920 г. были найдены инфракрасные волны длиной до 400 мкм (Ласки в 1922 г.) и возбуждены вибратором наиболее короткие волны длиной 1,8 мм = 1800 мкм (Никольс и Трир в 1923 г.). Ещё более короткие волны с помощью вибратора были получены Никольсом и Триром в 1925 г. и М. А. Левитской в 1926 г. Остающийся пробел в электромагнитном спектре был заполнен советским физиком А. А. Глаголевой-Аркадьевой (1884—1945 гг.), которая в 1922 г. с помощью специального устройства, названного «массовым излучателем», получила электромагнитные волны от 82 мкм до десятков миллиметров.

Опыты Герца и Лебедева подтвердили теорию Максвелла полностью. В конце XIX в. над развитием и усовершенствованием опытов Герца работали многие учёные. Отметим исследования французского физика Эдуарда Бранли (1859—1927 гг.), который открыл в 1891 г. свойство металлических порошков резко менять свою проводимость под влиянием электрических разрядов.

Этим свойством металлических порошков воспользовался английский физик Оливер Лодж (1851—1939 гг.), построивший (в 1894 г.) чувствительный прибор, так называемый когерер, для обнаружения электромагнитных волн.

Подробно исследовались резонансные свойства контуров, колебательный характер искр электрического разряда и т. д.

Мысль о том, что всё необходимое для осуществления связи без проводов уже создано, приходила в голову многим крупным физикам 90-х годов (О. Лодж, В. Крукс, Н. Тесла и др.).

Однако нужен был учёный, который бы сочетал в себе глубокое знание физики и талант экспериментатора и смог собрать воедино накопившиеся к тому времени сведения об электромагнитных процессах и конструкциях электромагнитных устройств, подчинив их

одной идее, и сделать решающий шаг: воплотить в жизнь устройства, которые бы осуществляли радиопередачу и радиоприём.

Таким учёным оказался русский физик, инженер-электрик Александр Степанович Попов (1859—1905 г.). В 1894—1895 гг. он построил первое радиоприёмное устройство («грозоотметчик»), в котором были объединены усовершенствованный им когерер, электрический звонок, встряхивавший когерер и тем самым приводивший его в состояние, готовое для регистрации нового электромагнитного импульса, и, может быть, важнейший элемент устройства — антенна — вертикальный провод, действие которого резко увеличило дальность приёма.

Антенна принимала энергию свободной электромагнитной волны — это существеннейшая сторона изобретения А. С. Попова.

Кроме того, когерер, обнаруживавший приходящие электромагнитные импульсы, в приёмнике Попова играл роль реле, включавшего и выключающего местный источник энергии (батарею любой мощности), который приводил в действие соответствующие приборы (телеграфный аппарат и т. д.).

Все современные радиоприёмные устройства осуществляются на таком же принципе и без него немыслимы.

О своём открытии А. С. Попов впервые сообщил на заседании физического отделения Русского Физико-Химического Общества 25 апреля 1895 г. в докладе «Об отношении металлических порошков к электрическим колебаниям». В январе 1896 г. А. С. Попов опубликовал в «Журнале Русского Физико-Химического Общества» статью «Прибор для обнаружения и регистрирования электрических колебаний». Статья эта заканчивается словами: «В заключение могу выразить надежду, что мой прибор при дальнейшем усовершенствовании его может быть применён для передачи сигналов на расстояние при помощи быстрых электрических колебаний, как только будет найден источник таких колебаний, обладающий достаточной энергией».

§ 38. Полная система уравнений Максвелла. Граничные условия

Основой теории электромагнитного поля является система уравнений Максвелла. В эту систему входят:

— два основных уравнения, являющихся дифференциальной формой закона полного тока и закона электромагнитной индукции:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \delta_{np} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ 2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\}; \quad (38.1)$$

— два уравнения, характеризующих векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$; одно из них, определяющее соленоидальный характер вектора $\mathbf{B}$, и другое, в которое входит объёмная плотность заряда как источника потенциальной компоненты электрического поля:

$$\left. \begin{array}{l} 3) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ 4) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \end{array} \right\}; \quad (38.2)$$

— три уравнения, характеризующие явления проводимости, поляризации и намагничивания при воздействии электромагнитного поля на вещество:

$$\left. \begin{array}{l} 5) \quad \delta_{np} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmop}) \\ 6) \quad \mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E} \\ 7) \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} \end{array} \right\}. \quad (38.3)$$

К этим уравнениям полезно присоединить ещё одно уравнение, связанное с первым и четвёртым и представляющее закон неуничтожаемости электрических зарядов (см. § 13).

Возьмём дивергенцию от обеих частей первого уравнения (38.1). Так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$, то

$$\operatorname{div} \delta_{np} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Подставляя сюда значение $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ из четвёртого уравнения (38.2), получим

$$\operatorname{div} \delta_{np} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (38.4)$$

— закон неуничтожаемости электрических зарядов.

Приведённая система уравнений будет полной (т. е. электромагнитное поле во всех точках пространства будет однозначно определено) только в том случае, если задано начальное значение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (для момента $t=0$), положено, что во-первых, все тела, находящиеся в поле, неподвижны, во-вторых, величины σ , ϵ_a и μ_a , характеризующие свойства среды, остаются постоянными в каждой точке поля (т. е. не меняются в зависимости от величин напряжённостей электрического и магнитного полей и электрических токов — среда «линейна») и, в-третьих, если σ , ϵ_a и μ_a в зависимости от пространственных координат будут непрерывными и конечными функциями (в частном случае неизменными во всех точках среды).

Однако в области соприкосновения двух сред при переходе от одной среды к другой характеристики среды резко меняются (переходя от значений характеристик одной среды к значениям другой).

Идеализируя этот переход, полагаем, что он происходит скачкообразно, через некоторую граничную поверхность.

Векторы поля на таких поверхностях могут испытать разрыв непрерывности (скачок) хотя бы на основании пятого, шестого и седьмого уравнений (38.3), в которые входят величины σ , ϵ_a , μ_a , и меняющиеся при переходе через поверхность раздела скачкообразно.

Чтобы система уравнений Максвелла оставалась полной и при наличии поверхности раздела, её необходимо дополнить граничными условиями, представляющими предельные случаи интегральных форм первых четырёх уравнений Максвелла.

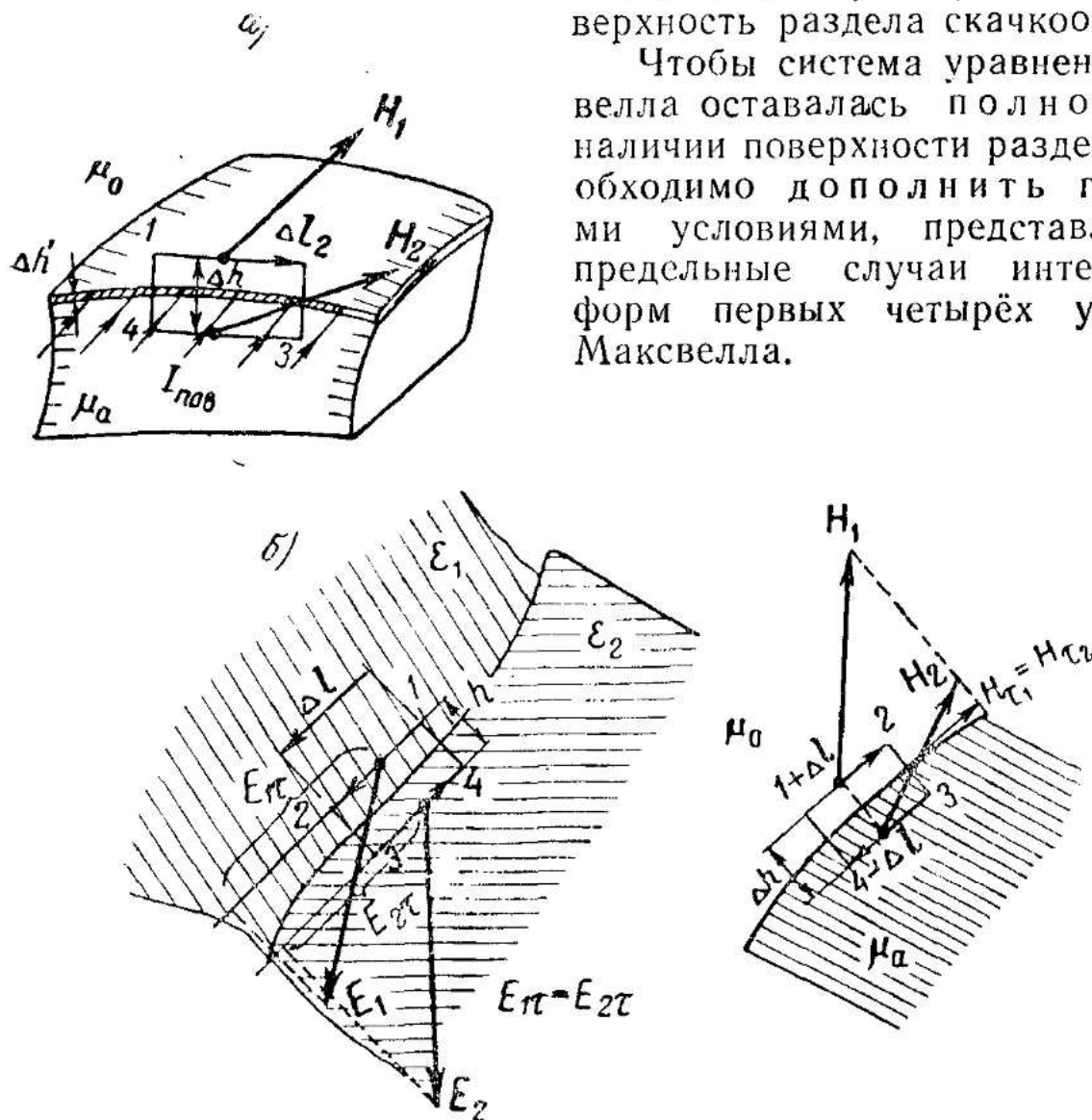


Рис. 38.1

Интегральной формой первого уравнения Максвелла (38.1) является закон полного тока

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{пр}} + I_{\text{смещ}}, \quad (38.5)$$

а второго — закон электромагнитной индукции

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (38.6)$$

Рассмотрим границу двух сред (см. рис. 38.1 а, б).

Граница может быть заряжена поверхностной плотностью свободных зарядов $\rho_{\text{нов}}$, и по ней могут протекать поверхностные токи проводимости с поверхностной плотностью $\delta_{\text{пров.нов}}$.

Вообразим контур $1-2-3-4-1$ замкнутым так, что половина его (участок $1-2$) находится в среде (ϵ_1, μ_1) , а вторая половина (участок $3-4$) — в среде (ϵ_2, μ_2) . Рассчитаем для этого контура интеграл

$$\oint_{1-2-3-4-1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 \cdot \Delta l + H_2 \cdot (-\Delta l) + \int_{2-3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{4-1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{пров}} + I_{\text{см}}. \quad (38.7)$$

Перейдём к пределу, когда Δh стремится к нулю, так чтобы участок $1-2$ оставался в среде (ϵ_1, μ_1) и участок $3-4$ — в среде (ϵ_2, μ_2) . При этом толщину слоя поверхностного тока ($\Delta h'$) будем считать бесконечно малой сравнительно с Δh . Предыдущее соотношение переходит в

$$H_{1\tau} \Delta l - H_{2\tau} \cdot \Delta l = I_{\text{пров.нов}},$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{I_{\text{пров.нов}}}{\Delta l} = (\delta_{\text{пров.нов}})_n. \quad (38.8)$$

Минус перед $H_{2\tau}$ появился потому, что $\mathbf{H}_2$ проектируется на $-\Delta l$ в соответствии с обходом $3-4$ (см. рис. 38.1а).

Скачок тангенциальной составляющей напряжённости магнитного поля на границе раздела равен нормальной составляющей (к направлению Δl) плотности поверхностного тока проводимости.

Такой случай возможен, если одна из сред — металлический проводник и если мы имеем дело с явлением сильного поверхностного эффекта, возникающего при высокой частоте.

Предыдущее соотношение можно написать в векторной форме. Пусть на границе раздела, в некоторой точке вектор плотности поверхностного тока равен $\delta_{\text{нов}}$ (см. рис. 38.1). Плоскость векторов $\mathbf{H}$ в окрестности этой точки перпендикулярна $\delta_{\text{нов}}$. Возьмём контур $1-2-3-4$ в плоскости векторов $\mathbf{H}$ и направление обхода, составляющее с $\delta_{\text{нов}}$ правую систему. Тогда $[\mathbf{H}_1 \mathbf{n}^\circ] = H_1 \sin \theta = H_{1\tau}$ и $[\mathbf{H}_2 \mathbf{n}^\circ] = H_2 \sin \theta_2 = -H_{2\tau}$; $H_{1\tau}$ считаем положительным и $H_{2\tau}$ — отрицательным, так как при обходе по замкнутому контуру $1-2-3-4-1$ $H_{1\tau}$ — проекция на $(+\Delta l)$, а $H_{2\tau}$ — на $(-\Delta l)$. Направление обоих векторных произведений совпадает с $\delta_{\text{нов}}$. По закону полного тока после предельного перехода (см. выше) получим

$$[\mathbf{H}_1 \mathbf{n}^\circ] - [\mathbf{H}_2 \mathbf{n}^\circ] = [(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \mathbf{n}^\circ] = \delta_{\text{нов.пров}}. \quad (38.9)$$

При отсутствии поверхностного тока проводимости тангенциальная составляющая напряжённости магнитного поля остаётся, очевидно, непрерывной:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0. \quad (38.10)$$

Если вместо $\mathbf{H}$ рассмотреть вектор напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и проделать аналогичные преобразования над соотношением (38.6), то получим (см. рис. 38.1б)

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0. \quad (38.11)$$

Справа оказался нуль, так как магнитный поток сквозь контур $1-2-3-4-1$ и его производная во времени обращаются в нуль при $\Delta h \rightarrow 0$.

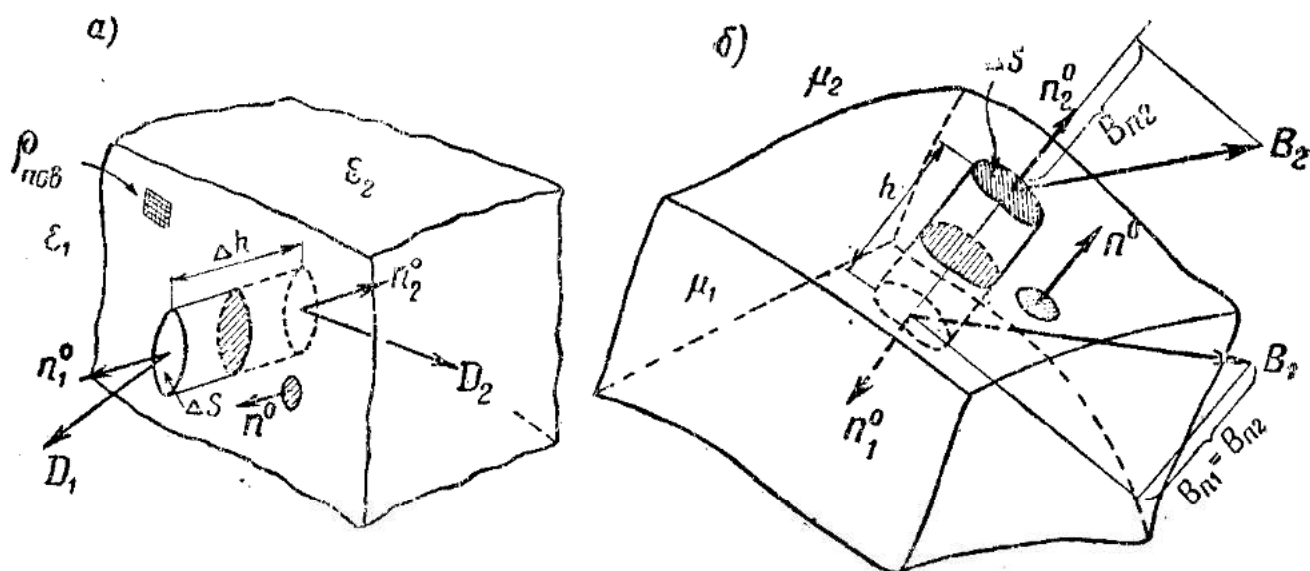


Рис. 38.2

Интегральная форма третьего уравнения Максвелла (38.2) — условие соленоидальности вектора $\mathbf{B}$:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (38.12)$$

а четвёртого — теорема Гаусса:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (38.13)$$

Рассмотрим элементарную замкнутую цилиндрическую поверхность, «врезанную» наполовину в поверхность раздела (см. рис. 38.2).

Вычислим поток вектора $\mathbf{D}$ сквозь эту поверхность

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta S \mathbf{n}_1^\circ + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta S \mathbf{n}_2^\circ + \int_{\text{бок}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_{\text{нов}} \Delta S \quad (38.14)$$

и перейдём к пределу, когда Δh стремится к нулю, так, чтобы площадки обоих оснований не пересекали граничной поверхности. Тогда, очевидно, положительные нормали к основаниям цилиндра $(\mathbf{n}_1^\circ, \mathbf{n}_2^\circ)$ будут связаны с положительной нормалью к граничной поверхности соотношением

$$\mathbf{n}_1^\circ = -\mathbf{n}_2^\circ = \mathbf{n}^\circ, \quad (38.15)$$

и мы получим

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{\text{нов}}. \quad (38.16)$$

Если поверхность не заряжена, то, очевидно,

$$D_{1n} - D_{2n} = 0. \quad (38.17)$$

Проделявая такие же преобразования над третьим ур-нием (38.2), получим

$$B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad (38.18)$$

Из выведенных соотношений с помощью ур-ний (38.3) нетрудно получить граничные условия для нормальных компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и тангенциальных компонент векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$.

Так, из седьмого соотношения (38.3) следует

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}} = (\delta_{\text{нов}})_n, \quad (38.19)$$

из шестого соотношения (38.3)

$$E_{1n} \epsilon_{a1} - E_{2n} \epsilon_{a2} = \rho_{\text{нов}}, \quad (38.20)$$

и т. д.

Для статического и стационарного полей граничные условия остаются точно те же, только выводы упрощаются. В электростатике вектор $\mathbf{E}$ потенциален

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

и в стационарном магнитном поле нет тока смещения, поэтому

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{пров}}.$$

§ 39. Физическое содержание уравнений Максвелла. Правило Ленца

Основное значение в системе уравнений Максвелла играют первые два уравнения, определяющие взаимосвязь изменений электрического и магнитного полей (электрической и магнитной сторон электромагнитного поля). Из первого уравнения следует, что любой вид электрического тока сопровождается магнитным полем, причём с количественной стороны вектор плотности полного тока есть ротор вектора напряжённости магнитного поля. Отметим, что если в некоторой точке пространства (рис. 39.1) задан вектор плотности тока, то тем самым определяется ротор напряжённости магнитного поля в этой же точке и магнитное поле в её окрестности. Характер связи электромагнитного состояния в данной точке (ток) и в её окрестности (магнитное поле), как это следует из уравнения, пространственно-временной.

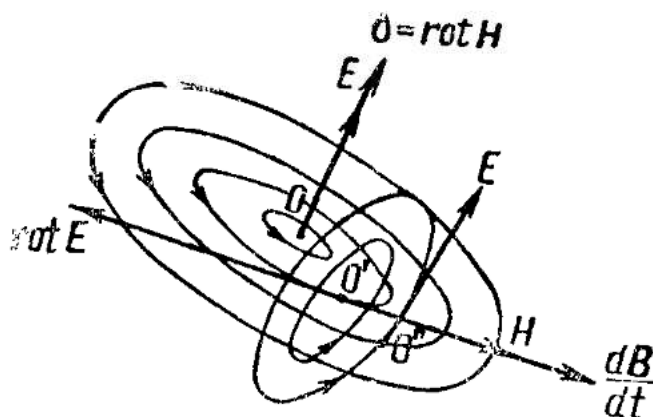


Рис. 39.1

Второе уравнение продолжает описание электромагнитного процесса. Оно гласит, что изменяющееся магнитное поле сопровождается электрическим. И так же, как и в первом уравнении, состояние изменения магнитного поля в некоторой точке, характеризуемое вектором $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (например, O'), связывается вторым уравнением с наведённым электрическим полем в смежных точках (например, O'').

Дальнейшее пространственно-временное течение электромагнитного процесса описывается опять первым уравнением, и мы убеждаемся, что оба эти уравнения описывают сложную, пространственно-временную взаимосвязь обеих сторон единого электромагнитного процесса.

Пространственно-временное течение электромагнитного процесса представляет собой распространение электромагнитных волн с определённой скоростью, как это будет показано при интегрировании уравнений Максвелла.

Существенной подробностью является отрицательный знак во втором уравнении Максвелла, связанный с преобразованием энергии электромагнитного поля и с законом сохранения энергии, которому эти преобразования подчиняются. Так, если векторы $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

и $\mathbf{H}$ связаны в первом уравнении правилом правого винта, то во втором уравнении векторы $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ и $\mathbf{E}$ связаны правилом левого винта. Если направление правого вращения мы принимаем положительным, то левого должны принять отрицательным.

Если принять обратное условие, тогда в правой части первого уравнения (как и в законе полного тока) появится минус, а в правой части второго (и в законе электромагнитной индукции) — плюс.

Кроме того, разные знаки правых частей в обоих уравнениях характеризуют своеобразную диалектику электромагнитного процесса.

Впервые энергетическая сторона электромагнитного процесса была обнаружена в исследованиях известного русского физика академика Эмилия Христиановича Ленца (1804—1865 гг.).

Занимаясь в 1833 г. изучением явления электромагнитной индукции, только что открытого (в 1831—1832 гг.) Фарадеем, Ленц дал в форме знаменитого «правила Ленца» глубокую формулировку закона электромагнитной индукции, объединив явление электромагнитной индукции с явлением силового воздействия магнитного поля на ток (закон Ампера) и показав тем самым их взаимосвязь как законов единого электромагнитного процесса. Ленц предвосхитил данный позже Гельмгольцем в классической работе «О сохранении силы» (1847 г.) вывод закона электромагнитной индукции из закона Ампера и закона сохранения энергии.

Свое «правило» Ленц сформулировал в следующих словах: «если металлический проводник движется поблизости от гальванического тока или магнита (см. поясняющий рис. 39.2 а), то в этом проводнике возбуждается гальванический ток такого направления, что он мог бы обусловить в случае неподвижности данного проводника его перемещение в противоположном (относительно возбуждающего тока или магнита) направлении (см. поясняющий рис. 39.2 б), причём предполагается, что такое перемещение может происходить только в направлении движения (или прямо противоположном)».

Из этой формулировки непосредственно следует принцип обратимости электрической машины; первая часть правила, пояснённая рис. 39.2 а, определяет действие генератора, вторая (рис. 39.2 б) — действие мотора.

Если, исходя из правила Ленца, рассмотреть соотношение первичного магнитного поля (магнитного поля магнита, см. рис. 39.2 в) и вторичного (поля, возбуждённого наведённым током), то это правило можно перефразировать так: если при перемещении провода в магнитном поле магнитный поток сквозь контур, составленный этим проводом и подключённый к проводу цепи, изменится на

$\Delta\Phi$, то в проводе наведётся электродвижущая сила индукции ($\mathcal{E}_{\text{инд}}$), причём

$$-\Delta\Phi_{\text{перв}} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{инд}}. \quad (39.1)$$

Ток, возникающий в контуре, возбуждает магнитное поле, которое направлено всегда противоположно изменению первичного поля

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{r} \rightarrow \Phi_{\text{втор}}. \quad (39.2)$$

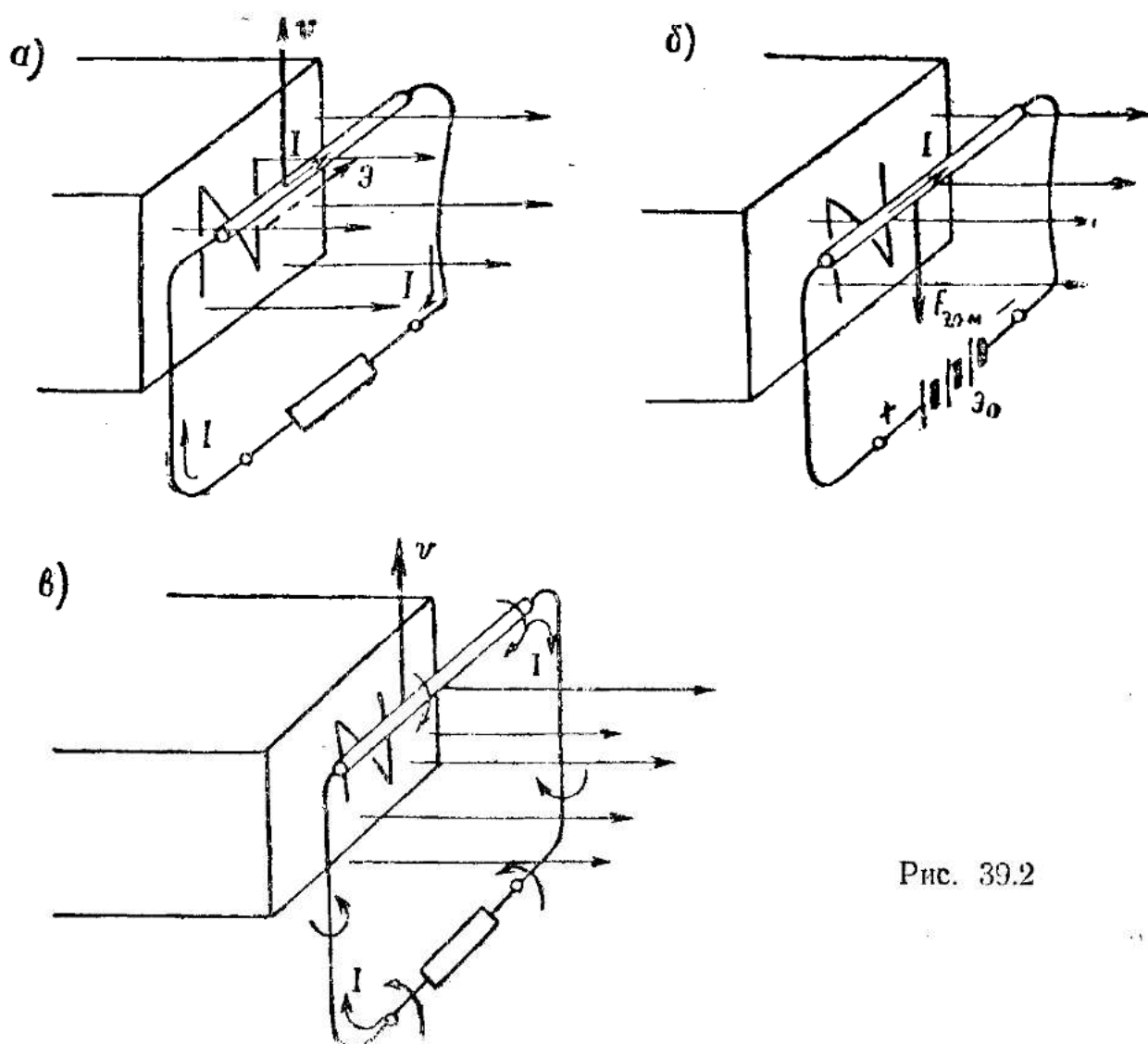


Рис. 39.2

В соответствии с «правилом» Ленца в последнем примере (рис. 39.2 в) на возбуждённый в проводе ток будет действовать электромагнитная сила, тормозящая движение. Чтобы поддержать движение (т. е. чтобы явление электромагнитной индукции продолжало существовать), необходимо приложить внешнюю механическую силу, которая бы уравновесила электромагнитную силу, тор-

мозящую движение. Эта механическая сила в процессе движения будет совершать работу, которая в данном случае преобразуется в электромагнитную энергию и перейдет в джоулево тепло в проводах в соответствии с законом сохранения энергии.

Рассуждая наоборот, т. е. исходя из факта нагрева провода и пользуясь законом Ампера и законом сохранения энергии, можно, как это сделал Гельмгольц в упомянутой выше работе, прийти к закону электромагнитной индукции.

С другой стороны, электромагнитный процесс, описанный правилом Ленца и поясненный приведенным выше примером, можно рассматривать как единство противодействующих изменений первичного [$-\Delta\Phi_{\text{перв}}$, см. ф-лы (39.1) и (39.2)] и вторичного [$\Phi_{\text{втор}}$] магнитных полей.

Положение диалектического материализма о том, что явлениям природы свойственны внутренние противоречия, представляет собой одно из основных свойств процесса существования и изменения любого предмета и явления. В. И. Ленин говорит:

«В собственном смысле диалектика есть изучение противоречия в самой сущности предметов»¹⁾.

Таким образом, в формулировке Ленца отчетливо выясняется «внутренняя диалектика» электромагнитного процесса. Ту же диалектику нетрудно обнаружить и в первых двух уравнениях Максвелла.

Физически первое уравнение для среды без проводимости ($\sigma=0$) можно представить в следующем виде:

$$\Delta E_t \rightarrow H. \quad (39.3)$$

Эта запись означает, что изменяющееся электрическое поле (ток смещения) сопровождается магнитным полем. Содержание второго уравнения может быть представлено такой записью:

$$\Delta H_t \rightarrow -E_{\text{втор}}, \quad (39.4)$$

т. е. изменение магнитного поля сопровождается вторичным полем, которое в точке, где мы задавали первичное электрическое поле (39.3), направлено всегда противоположно направлению изменения первичного электрического поля (первичного тока смещения).

На рис. 39.3 а начало процесса мы наблюдаем в точке О; первичное электрическое поле E изменяется на ΔE_t .

В соответствии с первым уравнением в окрестности точки О возбуждается магнитное поле H , векторные линии которого образуют правовинтовую систему с ΔE_t .

¹⁾ В. И. Ленин. «Философские тетради», ОГИЗ, 1947, стр. 237.

Пусть в некоторой точке O' величина изменения магнитного поля будет ΔH_t . В соответствии со вторым уравнением в окрестности этой точки возбуждается вторичное электрическое поле $E_{\text{втор}}$, векторные линии которого образуют с направлением ΔH левовинтовую систему.

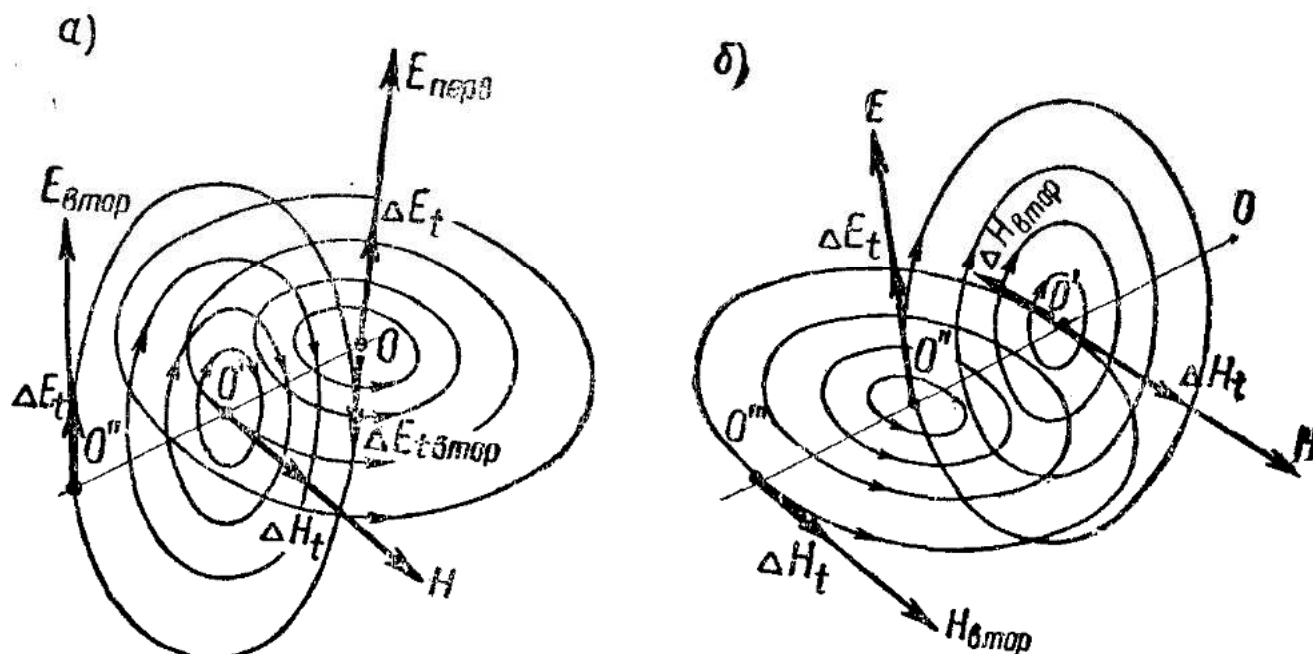


Рис. 39.3

Как видно из рис. 39.3 а, приращение $\Delta E_{\text{втор}}$ в точке O противоположно изменению первичного поля ΔE_t .

Точно так же, если мы начнём рассматривать электромагнитный процесс со второго уравнения

$$\Delta H_t \rightarrow -E, \quad (39.5)$$

а затем перейдём к первому

$$-\Delta E_t \rightarrow -\Delta H_{\text{втор}}, \quad (39.6)$$

то, рассматривая теперь точку O' как начальную (рис. 39.3 б), найдём в её окрестности в соответствии со вторым уравнением электрическое поле E . Если в точке O'' электрическое поле изменится на ΔE_t , то в окрестности точки O'' (к которой принадлежат, например, точки O''' и O') возникает магнитное поле $H_{\text{втор}}$, причём в точке O' изменение вторичного поля $-\Delta H_{\text{втор}}$ окажется противоположно изменению первичного.

Таким образом, из соотношений (39.3) — (39.6) видно, что электромагнитный процесс представляется как единство противодействующих ΔE_t и $\Delta E_{\text{втор}}$ или ΔH_t и $\Delta H_{\text{втор}}$.

Третьим уравнением определяется вихревой характер вектора E . Из четвёртого уравнения следует, что вектор E напряжённости

электрического поля, кроме вихревой компоненты, может иметь и компоненту потенциальную, компоненту, которая характеризует поле, возбуждённое электрическими зарядами. Если

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{nom} + \mathbf{E}^{вихр}, \quad (39.7)$$

то

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{E}^{nom} = \frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (39.8)$$

так как

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^{вихр} \equiv 0.$$

Из пятого уравнения следует, что ток проводимости может вызываться не только $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{nom} + \mathbf{E}^{вихр}$, но и сторонним электрическим полем $\mathbf{E}^{стор}$, о котором мы говорили в § 17.

В условиях практики источником электромагнитного процесса (токов, зарядов, излучения) обычно является $\mathbf{E}^{стор}$ (эдс возбуждителей тока).

Физический смысл шестого и седьмого уравнений был выяснен в части первой курса (§§ 3 и 21).



Глава VII

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.
ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

§ 40. Волновые уравнения. Определение электродинамических потенциалов

Приступим теперь к решению уравнений Максвелла, т. е. к отысканию $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ как функций пространственных координат (x, y, z) и времени (t) , удовлетворяющих этим уравнениям.

Простейшие условия для рассмотрения электромагнитного процесса — это однородная непроводящая среда ($\sigma=0$) без свободных объёмных зарядов ($\rho=0$). В этих условиях уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{H}, \\ \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{40.1}$$

Возьмём ротор от обеих частей первого уравнения и, меняя последовательность операций ротора и дифференцирования по времени, получим

$$\epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{H}.$$

Подставим сюда значение $\text{rot } \mathbf{E}$ из второго уравнения Максвелла, помня¹⁾, что

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H},\tag{40.2}$$

¹⁾ См. Приложение I, ф-ла (П.28).

получим

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (40.3)$$

Проделявая операцию ротора над вторым уравнением и подставляя $\text{rot } \mathbf{H}$ из первого уравнения, получим аналогичное уравнение для вектора $\mathbf{E}$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (40.4)$$

Два векторных уравнения эквивалентны шести скалярным уравнениям для составляющих $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$.

Такие уравнения

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (40.5)$$

носят название однородных волновых уравнений.

Если среда обладает проводимостью, то, положив $\delta_{np} = \sigma \mathbf{E}$ и проделявая аналогичные преобразования, мы найдём, что каждая из шести компонент наших векторов будет удовлетворять уравнению вида

$$\nabla^2 \Psi = \nu_a \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (40.6)$$

Это уравнение называется «пространственным телеграфным уравнением».

Следует отметить, что непосредственный расчёт компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ может быть практически выполнен лишь в простейших случаях.

В сложных задачах, особенно, когда надо учитывать источник излучения (излучающий диполь, излучающую рамку, антенну и т. д.) и когда непосредственное определение векторов поля из уравнений Максвелла приводит к сложным уравнениям, вводят некоторые вспомогательные величины, имеющие общее название «электродинамические потенциалы», через которые выражаются векторы поля ($\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$). Рассчитывают электродинамические потенциалы и затем по формулам перехода определяют векторы поля.

В электростатическом и стационарном магнитном полях мы для расчёта векторов поля ввели скалярный и векторный потенциалы, которые, являясь функциями только координат, удовлетворяли уравнению Лапласа или Пуассона.

Оба потенциала определялись независимо один от другого, потому что электростатическое поле вполне определялось вектором $\mathbf{E}$, следовательно, одним скалярным потенциалом, магнитное же стационарное поле — вектором $\mathbf{B}$, т. е. одним векторным потенциалом.

Аналогично при расчёте электромагнитного поля могут быть введены скалярный и векторный потенциалы, но так как в этом случае связь электрического и магнитного полей как двух сторон электромагнитного поля оказывается явной, то и потенциалы будут определяться в зависимости друг от друга.

Электродинамический векторный потенциал $\mathbf{A}$ определим также, как и в случае стационарного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (40.7)$$

но только $\mathbf{A}$, как и $\mathbf{B}$, будут функциями времени.

Подставляя $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ во второе уравнение Максвелла, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = - \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

или

$$\operatorname{rot} \left\{ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} = 0. \quad (40.8)$$

Но если ротор вектора равен нулю, то вектор либо равен нулю, либо является вектором потенциальным, т. е. градиентом некоторой скалярной функции потенциала. Отсюда

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = - \operatorname{grad} \varphi; \quad \mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (40.9)$$

Знак минус в выражении градиента взят затем, чтобы для электростатического поля $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \right)$ потенциал φ , введённый здесь, совпадал бы с электростатическим потенциалом (см. ф-лу 4.10).

Вектор $\mathbf{E}$ определяется функциями двух потенциалов, так как он может иметь как вихревую, так и потенциальную составляющие.

Зная потенциалы $\mathbf{A}$ и φ , мы уже без труда вычислим векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ элементарным дифференцированием по координатам x , y , z и t при помощи формул перехода (40.7) и (40.9).

§ 41. Электродинамические потенциалы. Уравнение Даламбера

Рассмотрим случай расчёта электромагнитного поля, когда необходимо не только рассчитывать электромагнитные волны, распространяющиеся в пространстве, но и связать их с источниками излучения. Источниками излучения электромагнитных волн являются обычно высокочастотные токи проводимости и заряды в антенных системах (в простейшем случае — диполь Герца).

Плотность тока проводимости, входящая в первое уравнение Максвелла (38.1), состоит в общем случае из двух членов [см. пятое соотношение (38.3)]

$$\delta_{np} = \sigma(E + E^{стор}) = \sigma E + \delta^{стор}. \quad (41.1)$$

Пусть, например, второй член этого выражения ($\delta^{стор}$) представляет собой плотность тока в антенне, возбуждающей и излучающей электромагнитные волны.

Точно так же пусть объёмная плотность заряда ρ , входящая в третье уравнение Максвелла (38.2), характеризует заряд антенны ($\rho = \rho^{стор}$) и определяется, как и $\delta^{стор}$, стороной напряжённостью $E^{стор}$, т. е. эдс., действующей в антенне. Эдс антенны возбуждается внешними источниками (генератором высокой частоты, питающим антенну) и является заданной функцией времени. Заданными функциями времени будут $\delta^{стор}$ и $\rho^{стор}$.

Выведем уравнения, определяющие E и H в этом случае. Запишем первые два уравнения Максвелла (38.1) в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= \sigma E + \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} + \delta^{стор}, \\ \text{rot } E &= -\mu_a \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (41.2)$$

Выполняя над системой (41.2) преобразования, аналогичные выводу (40.2) и (40.4) и делая подстановки из системы (38.2), получим в итоге:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 H - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} &= -\text{rot } \delta^{стор} \\ \nabla^2 E - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial E}{\partial t} &= \mu_a \frac{\partial \delta^{стор}}{\partial t} + \frac{\text{grad } \rho^{стор}}{\epsilon_a} \end{aligned} \right\}. \quad (41.3)$$

Уравнения оказались достаточно сложны. В непроводящей среде ($\sigma=0$) из этих уравнений выпадет третий член левой части и получится:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= -\text{rot } \delta^{cmop} \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_a \frac{\partial \delta^{cmop}}{\partial t} + \frac{\text{grad } \rho^{cmop}}{\varepsilon_a} \end{aligned} \right\}. \quad (41.4)$$

Решение этих неоднородных волновых уравнений (так называемых уравнений Даламбера) относительно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ затруднительно, так как, хотя ρ^{cmop} и δ^{cmop} — заданные функции времени, но входят они в правую часть уравнений (41.3) и (41.4) в сложной форме.

Поэтому определим электродинамические потенциалы $\mathbf{A}$ и φ , а уже из них по ф-лам (40.7) и (40.9) найдём векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Введём скалярный и векторный потенциалы в первое и третье уравнения Максвелла. Полагая, что ε и μ во всех точках поля одинаковы и постоянны, получим из первого уравнения

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \delta_{np}^{cmop} - \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

и, преобразуя, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_a} (\text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}) + \text{grad } \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \delta_{np}^{cmop}, \\ \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_a \delta_{np}^{cmop}. \end{aligned} \quad (41.5)$$

Из третьего уравнения

$$\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \varepsilon_a \mathbf{E} = \varepsilon_a \text{div} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho^{cmop},$$

и, преобразуя, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \varphi = \frac{\rho^{cmop}}{\varepsilon_a}. \quad (41.6)$$

Как было выяснено в § 24, одним уравнением $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, вектор $\mathbf{A}$ отнюдь не определяется однозначно. В § 24 мы на вектор $\mathbf{A}$ наложили дополнительное условие ($\text{div } \mathbf{A} = 0$). Воспользуемся этой неопределённостью вектора $\mathbf{A}$ и наложим на него теперь такое дополнительное условие, чтобы $\mathbf{A}$ и φ в уравнениях (41.5) и (41.6) разделились бы.

Пусть

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a v_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (41.7)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = - \varepsilon_a v_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

и уравнения (41.5) и (41.6) примут вид

$$\Delta^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a v_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - v_a \delta_{пр.ов}^{стор} \quad (41.8)$$

и

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a v_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\rho^{стор}}{\varepsilon_a}. \quad (41.9)$$

Уравнение (41.8) эквивалентно трём скалярным уравнениям, определяющим три компоненты вектора $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x - \varepsilon_a v_a \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= - v_a \delta_{пр.х}^{стор}, \\ \nabla^2 A_y - \varepsilon_a v_a \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= - v_a \delta_{пр.у}^{стор}, \\ \nabla^2 A_z - \varepsilon_a v_a \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= - v_a \delta_{пр.з}^{стор}. \end{aligned} \quad (41.10)$$

Как было принято выше, в трёх уравнениях (41.10) и в уравнении (41.9) величины $\delta_x^{стор}$, $\delta_y^{стор}$, $\delta_z^{стор}$ и $\rho^{стор}$ надо считать заданными функциями координат и времени.

Обозначив каждую из искомых функций

$$A_x, A_y, A_z \text{ и } \varphi \text{ как } \Psi, \quad (41.11)$$

а каждую из заданных величин

$$v_a \delta_x^{стор}, v_a \delta_y^{стор}, v_a \delta_z^{стор}, \frac{\rho^{стор}}{\varepsilon_a} \text{ как } \eta, \quad (41.12)$$

мы получим уравнение

$$\nabla^2 \Psi - \varepsilon_a v_a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = - \eta. \quad (41.13)$$

Уравнения Даламбера, определяющие $\mathbf{A}$ и φ , оказались значительно проще уравнений (41.4).

Рассмотрим важный для практики случай, когда источники поля, переменные токи и заряды (например, возбуждаемый диполь Герца) сосредоточены на небольшом участке пространства, где ус-

ловимся поместить начало координат, причём будем полагать, что в окружающем пространстве нет ни токов проводимости, ни заряженных частиц и тел.

Тогда в точках с координатами $x, y, z \neq 0$ функция Ψ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \Psi = \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (41.14)$$

Это, уже знакомое нам, волновое, точнее, однородное волновое уравнение, мы и будем решать в первую очередь.

§ 42. Решение волновых уравнений. Запаздывающие потенциалы

Волновое уравнение, как всякое дифференциальное уравнение в частных производных, допускает различные решения.

Рассмотрим центрально-симметричное решение, т. е. случай, когда в начале координат находятся источники электромагнитного поля с равномерным излучением во все стороны. Введём сферические координаты и отметим, что функция Ψ будет зависеть только от R и t . Развернём оператор Лапласа в сферических координатах по ф-ле (7.7)

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (42.1)$$

Умножая левую и правую часть этого уравнения на R и пользуясь тождествами

$$\begin{aligned} R \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial R} &\equiv \frac{\partial^2 (R \Psi)}{\partial R^2}, \\ R \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (R \Psi)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (42.2)$$

получим

$$\frac{\partial^2 (R \Psi)}{\partial R^2} = \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 (R \Psi)}{\partial t^2}. \quad (42.3)$$

Наконец, положив

$$R \Psi = Y, \quad (42.4)$$

приведём наше уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial R^2} = \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}. \quad (42.5)$$

Это уравнение может быть названо одномерным волновым уравнением.

Общий интеграл этого уравнения (решение Даламбера) имеет вид

$$Y = R\Psi = f_1\left(t - \frac{R}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{v}\right). \quad (42.6)$$

Первый член ф-лы (42.6) представляет сферическую волну постоянной амплитуды, распространяющуюся от начала координат в бесконечность, второй член — волну, идущую из бесконечности к началу координат.

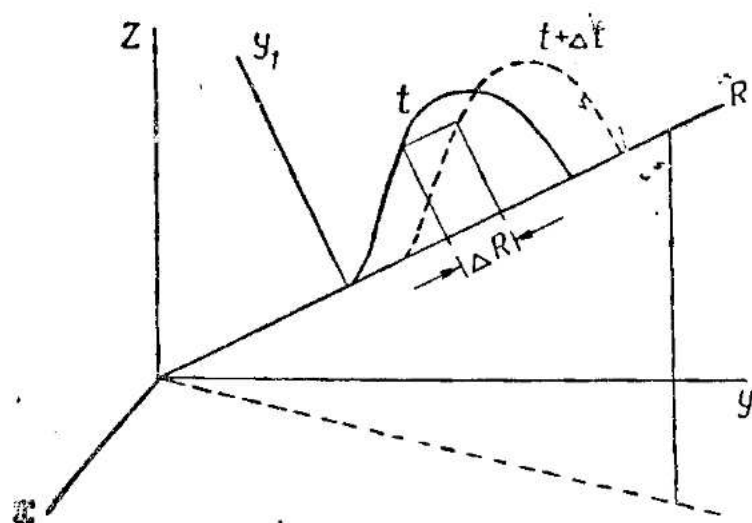


Рис. 42.1

В самом деле, рассмотрев произвольное направление R (см. рис. 42.1) и приняв это направление за абсциссу, будем по ординатам откладывать значение

$$Y_1 = f_1\left(t - \frac{R}{v}\right), \quad (42.7)$$

полагая t постоянным параметром. В результате мы построим некоторую кривую. Пусть это будет кривая, показанная на рис. 42.1 сплошным штрихом.

Если ф-ла (42.7) является формулой волны (т. е. процесса, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью), то построенная кривая должна за небольшой промежуток времени Δt сместиться на расстояние ΔR того же порядка малости, что и Δt . Если, кроме того, эта волна незатухающая, то каждая сместившаяся ордината должна остаться неизменной по своей величине.

На рис. 42.1 пунктиром показана волна для момента $t + \Delta t$. Каждая ордината волны для момента t , как мы видим, сместилась на расстояние ΔR .

Если эти сместившиеся ординаты остались неизменны, то

$$f_1\left(t - \frac{R}{v}\right) = f_1\left(t + \Delta t - \frac{R + \Delta R}{v}\right). \quad (42.8)$$

Функция f_1 произвольна, поэтому из равенства (42.8) мы должны заключить, по крайней мере, о равенстве аргументов, т. е.

$$t - \frac{R}{v} = t + \Delta t - \frac{R + \Delta R}{v}. \quad (42.9)$$

Приводя подобные члены, получим

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = v, \quad (42.10)$$

иными словами, если v представляет собой величину, не зависящую от R , то любая ордината кривой f_1 будет перемещаться с одной и той же скоростью v , следовательно, и вся кривая, не меняя своего вида, будет перемещаться с этой скоростью.

Таким образом, действительно, ф-ла (42.7) будет формулой незатухающей волны, распространяющейся в направлении возрастания R со скоростью v .

Нетрудно убедиться, что выражение

$$Y_2 = f_2\left(t + \frac{R}{v}\right) \quad (42.11)$$

представляет собой формулу незатухающей волны, распространяющейся со скоростью v в сторону убывания R , т. е. к началу координат.

Возвращаясь к ф-ле (42.6), получим для Ψ :

$$\Psi = \frac{1}{R} f_1\left(t - \frac{R}{v}\right) + \frac{1}{R} f_2\left(t - \frac{R}{v}\right).$$

Так как направление R произвольно, то и распространение происходит симметрично во все стороны, следовательно, это сферическая волна.

Покажем теперь, что Y есть решение волнового ур-ния (42.5). Обозначим

$$Y = f\left(t \pm \frac{R}{v}\right) = f(t'), \quad (42.12)$$

где

$$t' = t \mp \frac{R}{v}. \quad (42.13)$$

Дважды дифференцируя Y по t и по R , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial R} &= \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial R} = \frac{\partial f}{\partial t'} \left(\mp \frac{1}{v} \right); & \frac{\partial^2 Y}{\partial R^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2}; \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'}; & \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2}. \end{aligned}$$

Подстановка этих производных в волновое уравнение (42.5) даёт после сокращения на $\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2}$ соотношение, определяющее скорость электромагнитной волны,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (42.14)$$

Как уже упоминалось, это соотношение было найдено Максвеллом.

Для вакуума скорость электромагнитной волны равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ с}^2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{ф} \cdot \text{гн}}{\text{м}^2}}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \quad (42.15)$$

где c — скорость света. Это обстоятельство и позволило Максвеллу впервые выступить с утверждением, что свет есть электромагнитный процесс.

В неоднократно цитированной нами работе «Динамическая теория электромагнитного поля» (1864 г.) Максвелл пишет:

«Совпадение результатов¹⁾, по-видимому, показывает, что свет и магнетизм являются проявлениями свойств одной и той же субстанции и что свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся через поле, в соответствии с законами электромагнетизма²⁾».

В диэлектрической среде скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} < c. \quad (42.16)$$

¹⁾ Речь идёт о совпадении величин скорости электромагнитной волны [вычисленной по ф-ле (42.14)] и скорости света, найденном из опытов Физо и Фуко и астрономических наблюдений, в которых эта скорость определялась непосредственно.

²⁾ Д. К. Максвелл. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. ГТТИ; 1952, стр. 321.

Вернёмся опять к решению Даламбера и рассмотрим функцию Ψ

$$\Psi = \frac{Y}{R} = \frac{1}{R} f_1 \left(t - \frac{R}{v} \right) + \frac{1}{R} f_2 \left(t + \frac{R}{v} \right). \quad (42.17)$$

Первый член этого выражения представляет собой сферическую волну, распространяющуюся от начала координат и затухающую обратно пропорционально первой степени расстояния. Второй член представляет собой волну, приходящую к началу координат из бесконечности и при этом возрастающую по амплитуде. Этот второй член мы отбрасываем как не имеющий в данном случае физического смысла.

Волна, идущая к началу координат, возможна при наличии отражения, чего в данном случае нет.

Решение, выраженное первым членом ф-лы (42.17), в начале координат обращается в бесконечность. Это происходит потому, что в начале координат находятся источники поля; функция Ψ там должна удовлетворять уравнению Даламбера, а не однородному волновому уравнению.

Решение уравнения Даламбера построим по аналогии с решением уравнения Пуассона для электростатического поля.

Уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_a} \quad (42.18)$$

определяет значение потенциала в точках, где $\rho \neq 0$.

Центрально-симметричное решение уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = 0 \quad (42.19)$$

мы получим, если сферически-симметричный заряд Q расположим в начале координат. Тогда

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q(0, 0, 0)}{4\pi\epsilon_a R}, \quad (42.20)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если заряд Q расположим в точке с координатами x', y', z' , то выражение потенциала в точке (x, y, z) , остаётся то же, но только (см. § 5)

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (42.21)$$

Если в некоторой области находится распределённый заряд, то, разбивая его на элементарные заряды $dQ = \rho dV$, находя потенциал

от каждого такого заряда, суммируя все эти потенциалы и переходя к пределу (см. также §§ 5 и 7), мы получим

$$\varphi(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z') dV}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (42.22)$$

где $dV = dx' \cdot dy' \cdot dz'$ и R определяется ф-лой (42.21).

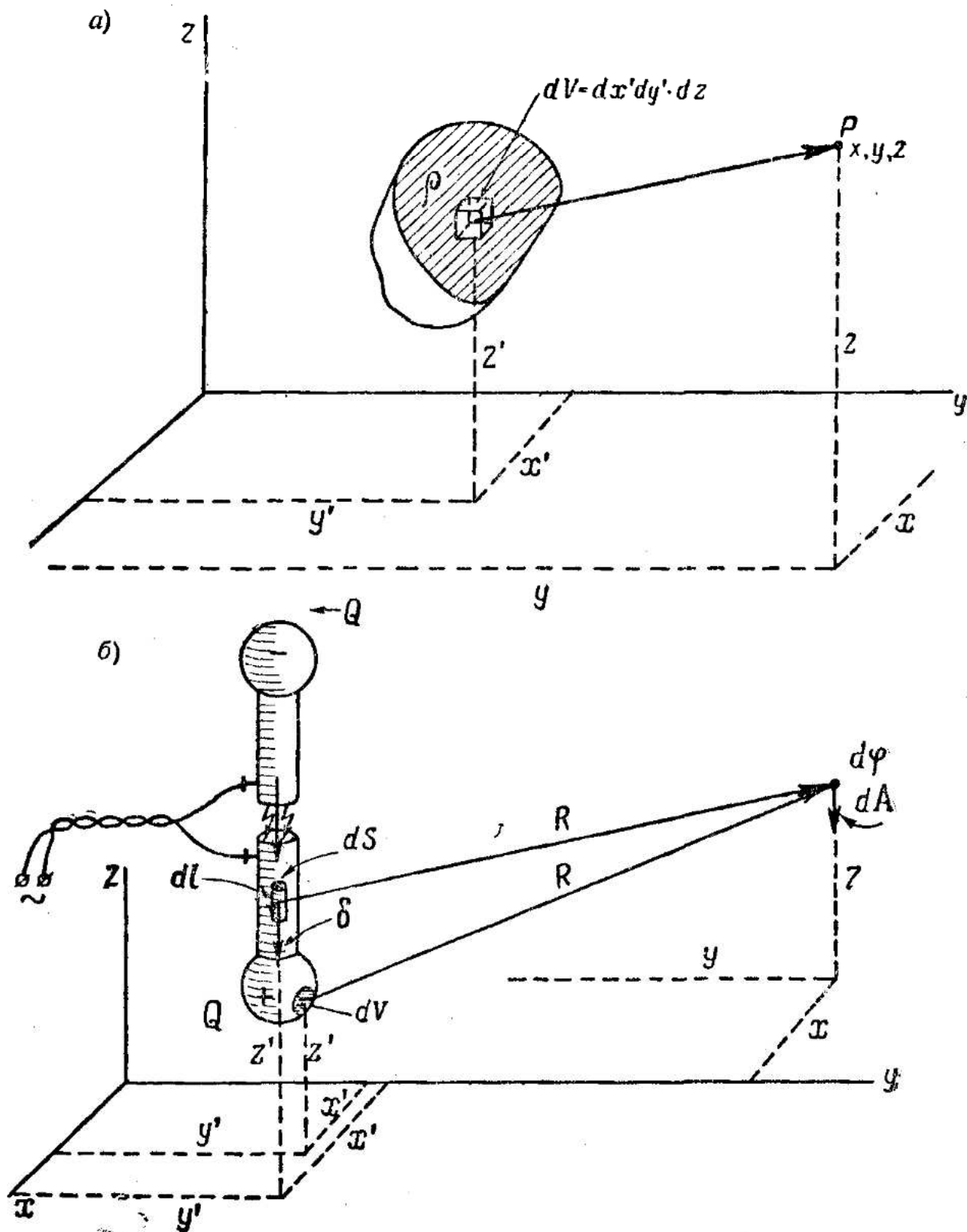


Рис. 42.2

Координаты x' , y' , z' являются текущими, и по ним выполняется интегрирование.

Обратимся к уравнению Даламбера [см. ф-лу (41.13)]

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \square \Psi = -\eta,$$

где

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t); \quad \eta = \eta(x, y, z, t) \quad (42.23)$$

и значком $\square$ обозначен оператор Даламбера

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial (vt)^2}. \quad (42.23')$$

Центрально-симметричное решение при наличии сферически-симметричного источника, расположенного в начале координат, мы получили [см. ф-лу (42.17)]. Это решение, удовлетворяющее решению волнового уравнения (41.14), можно записать в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{f\left(0, 0, 0, t - \frac{R}{v}\right)}{R}. \quad (42.24)$$

Оно аналогично решению уравнения Лапласа (42.20).

К общему решению уравнения Даламбера можно прийти от общих решений уравнений Лапласа и Пуассона [ф-лы (42.20) и (42.22)], если применить эти уравнения не к статическому, а к квазистационарному (медленно меняющемуся) электрическому полю. Такое применение законов стационарного и статического поля к полю квазистационарному, как это показано в § 32, допустимо. Форма решения уравнений Лапласа и Пуассона сохранится, только наряду с координатами x , y , z и x' , y' , z' появится переменная t — время.

Таким образом,

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{Q(0, 0, 0, t)}{4\pi\epsilon_a R}, \quad (42.20')$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(x', y', z', t) dV}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (42.22')$$

Время t одинаково как в точке наблюдения (x, y, z, t) , так и у источников $[Q(0, 0, 0, t) \text{ и } \rho(x', y', z', t)]$. Ещё раз подчёркиваем, что по условиям квазистационарности мы не учитываем запаздывания.

Вернёмся к решению волнового уравнения (42.24) и обозначим

$$t - \frac{R}{v} = t'.$$

Тогда это решение запишется как

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{f_1(0, 0, 0, t')}{R}, \quad (42.25)$$

что (с точностью до постоянного множителя $\frac{1}{4\pi\epsilon_a}$) совпадёт с решением уравнения Лапласа (42.20'), если t заменить на t' .

Аналогичной заменой t на t' в формуле решения уравнения Пуассона (42.22'), мы получим общее решение уравнения Даламбера:

$$\Psi(x, y, z, t) = \int \frac{\eta(x', y', z', t') dV}{4\pi R}. \quad (42.26)$$

Очевидно, векторный и скалярный потенциалы будут равны:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\delta}(x', y', z', t') dV}{R}, \quad (42.27)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\rho(x', y', z', t') dV}{R}. \quad (42.28)$$

Таким образом, векторный электродинамический потенциал складывается из элементарных векторов

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\delta} \cdot dV}{R}, \quad (42.29)$$

определяющих собой электромагнитный эффект в точке с координатами (x, y, z) в момент t .

Физически эти элементарные векторы являются элементами нитей тока (см. рис. 42.2 б) [введённых ещё Ампером (см. § 19)]

$$\boldsymbol{\delta} \cdot dV = \boldsymbol{\delta} dS dl = (\boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S}) d\mathbf{l} = d\mathbf{l} dl, \quad (42.30)$$

делёнными на расстояние до точки наблюдения.

Элементы нитей тока $d\mathbf{l}$ в точке с текущими координатами x', y', z' берутся в момент времени $t' = t - \frac{R}{v}$.

Аналогично и скалярный электродинамический потенциал складывается из скалярных элементарных слагаемых

$$d\varphi = \frac{\rho \cdot dV}{4\pi\epsilon_a R}, \quad (42.31)$$

отличающихся от слагаемых, составляющих потенциал электростатического поля [ф-ла (42.22)] тем, что объёмная плотность ρ может быть не только функцией координат (x', y', z') , но и времени $t' = t - \frac{R}{v}$.

Следовательно,

$$dQ = \rho \cdot dV \quad (42.32)$$

есть изменяющийся (обычно пульсирующий) элементарный заряд.

В этом смысле векторный и скалярный электродинамические потенциалы могут быть названы потенциалами «токовым» и «зарядным».

Подстановкой выражения Ψ [ф-ла (42.26)] в уравнение Даламбера можно показать, что, действительно, это выражение будет решением уравнения¹⁾.

Весьма существенное отличие электродинамических потенциалов от потенциалов электрического и стационарного полей заключается в том, что значение электродинамических потенциалов в некоторой точке (x, y, z) в момент t определяется состоянием «возбудителей» поля (токов и зарядов), находящихся в точке x', y', z' не в момент t , а в момент $t' = t - \frac{R}{v}$, предшествующий моменту t

на промежуток времени $\Delta t = \frac{R}{v}$, нужный для того, чтобы электромагнитное возмущение (электромагнитная волна) распространилось от точки (x', y', z') — «точки истока» до точки (x, y, z) — «точки наблюдения».

Поэтому электродинамические потенциалы называют также «запаздывающими» потенциалами.

§ 43. «Электрический» вектор Герца

Интегрирование уравнений Максвелла можно провести с помощью одной векторной функции, введённой впервые Герцем, так называемого «вектора Герца». Эта функция особенно удобна для решения конкретных задач радиотехники по излучению и распространению радиоволн.

Обозначим «электрический» вектор Герца — Γ и определим его соотношением

$$\mathbf{A} = \epsilon_a \nu_a \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (43.1)$$

при помощи ур-ния (40.7) получим выражение вектора $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \epsilon_a \nu_a \operatorname{rot} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (43.2)$$

¹⁾ См., например, И. Г. Тамм. «Основы теории электричества». ОГИЗ, издание третье, § 95 и следующие.

и отсюда по формуле $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_a}$

$$\mathbf{H} = \varepsilon_a \operatorname{rot} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \quad (43.3)$$

Подставляя значение $\mathbf{A}$ в ф-лу (41.7), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \Gamma + \varphi) = 0, \quad \operatorname{div} \Gamma + \varphi = K.$$

Постоянную K примем равной нулю ($K=0$) и

$$\varphi = -\operatorname{div} \Gamma. \quad (43.4)$$

Подставив значение φ и $\mathbf{A}$ в ф-лу (40.9), найдём для вектора $\mathbf{E}$ выражение

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \Gamma - \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}, \quad (43.5)$$

и по формуле $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$ получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \left(\operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \Gamma - \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right). \quad (43.6)$$

Таким образом, оба электродинамических потенциала и все электромагнитные векторы выражены в функции единственного вектора Γ .

Найдём уравнение, которому должен удовлетворять вектор Γ и решая которое мы могли бы определить этот вектор как функцию координат и времени.

Ограничимся случаем однородной, непроводящей среды, в которой нет свободных зарядов ($\rho=0$, $\sigma=0$), и, следовательно, $\delta_{np}=0$.

Подставляя в первое уравнение Максвелла значение $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ в функции Γ , получим

$$\operatorname{rot} \left(\varepsilon_a \operatorname{rot} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right) = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \Gamma - \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right). \quad (43.7)$$

Сокращая на ε_a и преобразуя, приведём это выражение к форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \Gamma - \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) = 0.$$

На том же основании, что и при выводе ур-ния (43.4), заключим, что

$$\nabla^2 \Gamma - \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = 0. \quad (43.8)$$

Мы видим, что вектор Γ удовлетворяет волновому уравнению и, следовательно, допускает решение, аналогичное (42.17) (бегущая волна).

Так как для любого вектора G

$$\text{rot rot } G = \text{grad} \cdot \text{div } G - \nabla^2 G, \quad (43.9)$$

то из ур-ния (43.8) для вектора Γ получим

$$\text{rot rot } \Gamma = \text{grad} \cdot \text{div } \Gamma - \epsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}$$

и тогда напряжённость электрического поля можно выразить

$$E = \text{rot rot } \Gamma, \quad (43.10)$$

как это видно из ур-ния (43.5)

Чтобы выяснить физический смысл вектора Γ , необходимо найти его «источники». Для этого надо составить неоднородное волновое уравнение (уравнение Даламбера) для Γ , из которого может быть получено и ур-ние (43.6).

Выразим вектор смещения D через вектор напряжённости E и вектор электрической поляризации P (см. § 3)

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (43.11)$$

Первое уравнение Максвелла примет тогда вид

$$\text{rot } H - \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (43.12)$$

В выражениях векторов H и E через вектор Герца [ф-лы (43.3) и (43.5)] заменим ϵ_a на ϵ_0 и подставим эти выражения в ур-ние (43.12).

Проделав преобразования, получим

$$\nabla^2 \Gamma - \epsilon_0 \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = - \frac{P}{\epsilon_0}. \quad (43.13)$$

Таким образом, источником «электрического» вектора Герца может быть электрическая поляризация диэлектрика. Вектор Герца поэтому может быть назван «поляризационным» потенциалом.

Решение неоднородного уравнения мы напомним аналогично решению ур-ния (41.8) для векторного потенциала A :

$$\Gamma(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P(x', y', z', t') dV}{R}. \quad (43.14)$$

Наряду с электрической поляризацией диэлектрика $\mathbf{P} = k, \epsilon_0 \mathbf{E}$, возбуждаемой электрическим полем $\mathbf{E}$, источниками электрического вектора Герца могут быть и сторонние токи проводимости. Сам вектор поляризации, как это излагалось в § 3, равен среднему электрическому моменту единицы объёма

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_{эл}}{\Delta V}. \quad (43.15)$$

Так как в данном случае речь идёт о переменном поле, то и вектор $\mathbf{P}$ определится геометрической суммой переменных электрических моментов молекулярных диполей, приходящихся на единицу объёма

$$\sum \mathbf{p}_{эл} = \sum (q_0 \Delta l). \quad (43.16)$$

Электрические диполи с переменными моментами часто называют вибраторами (или осцилляторами). Аналогичную роль будут играть и диполи с током проводимости, например, диполь Герца.

В практическом применении теории обычно выделяют ту часть поляризации $\mathbf{P}$, которая не зависит от электрического поля $\mathbf{E}$, а представляет собой удельный электрический момент вибраторов, возбуждаемых внешними («сторонними») источниками энергии, вибраторов (или даже одного вибратора, как это было в опытах Герца), которые сами являются возбудителями поля $\mathbf{E}$. Эту часть поляризации назовём $\mathbf{P}^{стор}$. Антенну, излучающую радиоволны, можно разбить на систему таких вибраторов, нагретое или светящееся тело также можно рассматривать как систему молекулярных вибраторов.

Поляризацию же, наведённую в диэлектрике действием напряжённости $\mathbf{E}$, обычно рассматривают совместно с вектором $\mathbf{E}$, учитывая её диэлектрической проницаемостью ϵ_a :

$$\epsilon_a \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (43.17)$$

Это выражение равно вектору смещения, как он определён в § 3 [ф-ла (3.7)].

Можно ввести обобщённый вектор $\mathbf{D}$, в выражении которого суммируются как поле с наведённой поляризацией ($\epsilon_a \mathbf{E}$), так и независимая от этого поля «сторонняя» поляризация ($\mathbf{P}^{стор}$)

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E} + \mathbf{P}^{стор}. \quad (43.18)$$

Выражение векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ теперь возьмём опять в виде (43.3) и (43.5), а уравнение Даламбера для вектора $\mathbf{\Gamma}$ примет вид

$$\nabla^2 \mathbf{\Gamma} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial t^2} = - \frac{\mathbf{P}^{стор}}{\epsilon_a}, \quad (43.19)$$

и его решение будет

$$\Gamma(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\mathbf{P}^{стор}(x', y', z', t') dV}{R}. \quad (43.20)$$

Выражение $\mathbf{P}^{стор} dV$, стоящее под интегралом, представляет собой геометрическую сумму электрических вибраторов, находящихся в объёме dV .

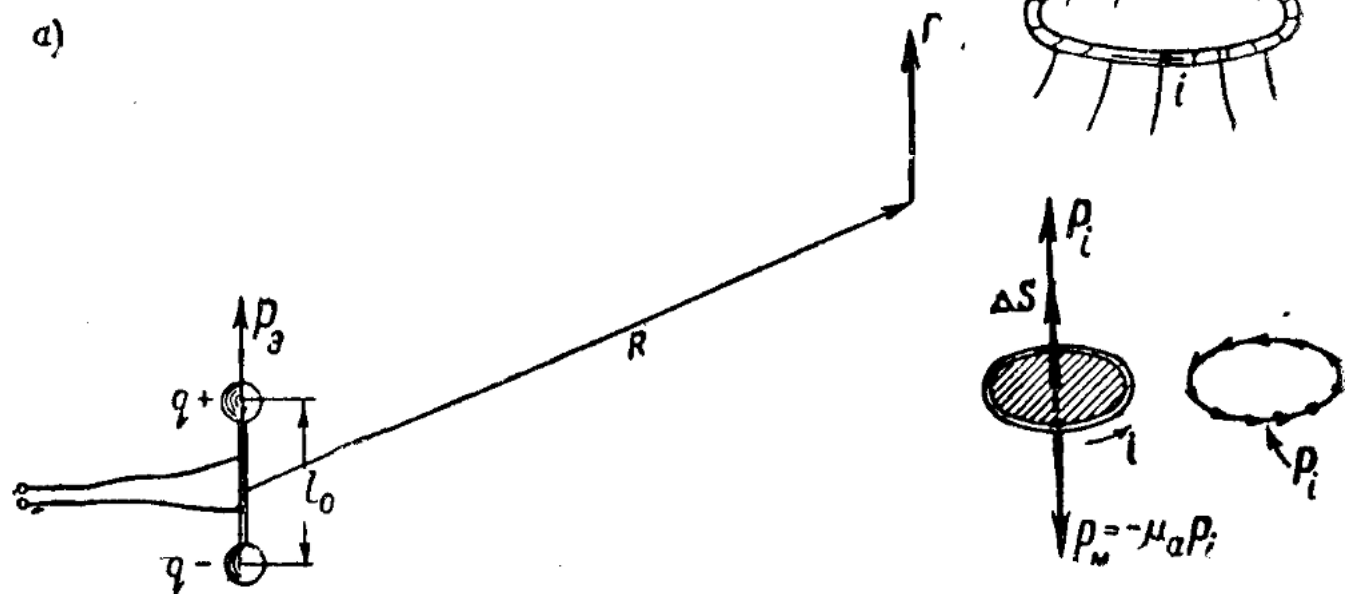


Рис. 43.1

Пусть поле возбуждается вибратором Герца, и мы ищем вектор Герца на расстоянии, значительно большем, чем линейные размеры вибратора. Тогда объём вибратора можно принять за dV и подынтегральное выражение сведётся к

$$\mathbf{P}^{стор} \Delta V = \mathbf{p}_{эл} = q l_0, \quad (43.21)$$

где $\mathbf{p}_{эл}$ — электрический момент вибратора, равный произведению величины одного из зарядов (переменного) его конца на длину вибратора (l_0). Вектор Герца будет равен (см. рис. 43.1 а)

$$\Gamma(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{p}_{эл}(x', y', z', t')}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (43.22)$$

Сразу бросается в глаза простота и практичность этой формулы. Размерность «электрического» вектора Герца

$$[\Gamma] = \frac{[\mathbf{p}_{эл}]}{[\epsilon_a] [R]} = \frac{\kappa \cdot \text{м}}{\frac{\phi}{\text{м}} \cdot \text{м}} = \text{в} \cdot \text{м}. \quad (43.23)$$

Если же мы хотим рассчитать поле поблизости от вибратора, то придется разбивать вибратор на элементарные вибраторы и вычислять вектор Герца по ф-ле (43.20).

§ 44. «Магнитный» вектор Герца. Принцип двойственности

Электромагнитное поле можно возбудить также магнитным вибратором, представляющим собой виток, по которому циркулирует высокочастотный ток (см. рис. 43.1 б).

Момент такого тока равен (см. § 26)

$$\mathbf{p}_i = i \Delta \mathbf{S}. \quad (44.1)$$

Конечно, такой замкнутый ток можно разложить на систему электрических диполей (см. рис. 43.1 б), например, следующим образом: пусть ток в витке равен i , тогда

$$dq = idt; \quad d\mathbf{p}_e = dq d\mathbf{l} = idt d\mathbf{l}. \quad (44.2)$$

«Электрический» вектор Герца мы вычислим, интегрируя по контуру витка отношение момента $d\mathbf{p}_{e,l}$ к $4\pi\epsilon_a R$

$$\Gamma(x, y, z, t) = \oint \frac{d\mathbf{p}_{e,l}(x', y', z', t')}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (44.3)$$

Однако для расчёта поля в этом случае удобнее непосредственно воспользоваться магнитным моментом тока.

Для такого расчёта приходится вводить особый — «магнитный» вектор Герца.

Магнитный вектор Герца определим с помощью принципа двойственности.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла для среды без проводимости и без свободных зарядов:

$$\left. \begin{array}{ll} 1) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & 3) \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ 2) \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial (-\mathbf{B})}{\partial t}, & 4) \operatorname{div} (-\mathbf{B}) = 0 \end{array} \right\}. \quad (44.4)$$

Сразу же бросается в глаза симметрия уравнений 1), 3) и 2), 4).

Переставляя в системе (44.4) векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ и векторы $\mathbf{D}$ и $(-\mathbf{B})$, получим ту же самую систему уравнений, только записанную в другом порядке.

Если предыдущую систему уравнений записать в виде

$$\begin{array}{ll} 1) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & 3) \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ 2) \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & 4) \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{array}$$

то следует переставить $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$ и $\epsilon_a \leftrightarrow -\mu_a$.

Система от такой перестановки не изменяется.

Очевидно, если в решение системы (44.4), определяющее векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ [ф-лы (43.2) и (43.5)], подставить также вместо вектора $\mathbf{B}$ вектор $(-\mathbf{D})$ и вместо вектора $\mathbf{E}$ вектор $\mathbf{H}$, то получим другое решение системы (44.4).

На основании этих соображений определим «магнитный» вектор Герца (Γ^*) соотношениями:

$$\mathbf{D} = -\mu_a \epsilon_a \operatorname{rot} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial t}, \quad (44.5)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \Gamma^* - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial t^2} \quad (44.6)$$

и по формулам $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_a}$ и $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ найдём:

$$\mathbf{E} = -\mu_a \operatorname{rot} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial t}, \quad (44.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu_a \left(\operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \Gamma^* - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial t^2} \right). \quad (44.8)$$

Вектор Γ^* тождественно удовлетворяет первому и третьему уравнениям Максвелла. Подставляя выражения $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ во второе уравнение Максвелла, получим

$$\nabla^2 \Gamma^* - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial t^2} = 0. \quad (44.9)$$

Следовательно, «магнитный» вектор Герца так же, как и электрический, может быть выражен ф-лой, подобной (42.17).

Такой приём нахождения решения в данном случае новой электромагнитной задачи (предполагаются другие исходные условия) и называется принципом двойственности.

В применении к источникам поля (переменным электрическим и магнитным диполям) принцип двойственности удовлетворяется, если, определив, как обычно, направление вектора момента электрического диполя от $+Q$ к $-Q$ (см. рис. 44.1а)

$$\mathbf{p}_e = +Q \Delta \mathbf{l},$$

мы направление вектора магнитного момента $\mathbf{p}_m$ возьмём противоположным направлению вектора момента тока $\mathbf{p}_l$

$$\mathbf{p}_m = -\mu_a \mathbf{p}_l.$$

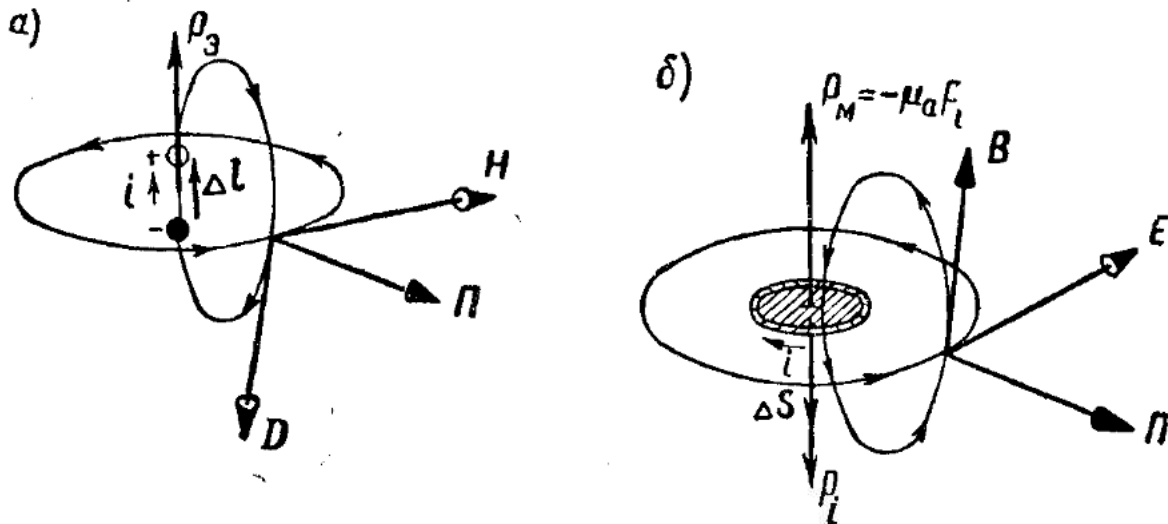


Рис. 44.1

Направление p_i определяется положительным направлением вектора площадки ΔS (см. рис. 44.1б)

$$p_i = i' \Delta S; \quad p_m = -\mu_a i' \Delta S.$$

Только такой выбор знаков позволит при замене электрического диполя p_e магнитным p_m получить одинаково ориентированные магнитное поле электрического диполя и электрическое поле магнитного. Поясним это утверждение.

Выберем положительную ориентировку зарядов диполя и положительное направление тока в диполе, как это показано на рис. 44.1 а, тогда

$$\frac{d p_e}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta l = i \Delta l;$$

ток i возбуждает (в соответствии с законом полного тока) магнитное поле с указанным на рисунке положительным направлением вектора H .

Чтобы получить такое же направление вектора E наведённого электрического поля от переменного магнитного диполя (т. е. переменного замкнутого тока i'), надо выбрать положительное направление тока i' так, чтобы оно образовывало левовинтовую систему с вектором p_m (см. рис. 44.1 б).

Тогда

$$\frac{d p_m}{dt} = \mu_a \Delta S \left(- \frac{di'}{dt} \right).$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции наводимая в контуре эдс

$$\mathcal{E} = - L \frac{di}{dt}.$$

Возникающее вихревое поле $\mathbf{E}$ будет (при положительном токе i' и положительном di') иметь ориентировку, совпадающую с ориентировкой поля $\mathbf{H}$ в предыдущем случае (см. рис. 44.1 б). Тем самым оправдан знак минус в выражении момента магнитного диполя.

Можно привести и такое обоснование.

По закону Кулона для электрического заряда

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi R^2} \mathbf{R}^0$$

и для магнитной массы (с изменённым знаком)

$$(-\mathbf{B}) = \frac{-m}{4\pi R^2} \mathbf{R}^0.$$

Применяя принцип двойственности, заменяем: $\mathbf{D} \rightarrow -\mathbf{B}$, следовательно, надо заменять $q \rightarrow -m$. Тогда электрическому диполю с моментом $\mathbf{p}_e = q\Delta/\mathbf{n}^0$ будет соответствовать магнитный диполь с магнитным моментом $\mathbf{p}_m = -m\Delta/\mathbf{n}^0$.

Принцип двойственности введён в практику расчётов антенных устройств специальных типов советским учёным А. А. Пистолькорсом.

Для выяснения физического смысла «магнитного» вектора поступим аналогично предыдущему [см. ф-лу (43.18)]. Выделим в выражении вектора индукции магнитного поля магнитную поляризацию, характеризующуюся вектором намагниченности $\mathbf{J}$ по формулам § 21

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (44.10)$$

Пусть, кроме наведённой намагниченности $\mathbf{J}$, представляющей собой результат воздействия магнитного поля на среду, имеется «сторонняя» намагниченность $\mathbf{J}^{стор}$, например, система магнитных диполей (замкнутых токов), возбуждённых какими-то посторонними источниками. Такая намагниченность сама будет являться возбудителем магнитного поля, и ф-ла (44.10) переписется в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0 \{(\mathbf{H} + \mathbf{J}^{стор} + \mathbf{J}), \quad (44.11)$$

причём $\mathbf{J}$ будет зависеть уже не только от $\mathbf{H}$, но и от суммы $\mathbf{H} + \mathbf{J}^{стор}$

$$\mathbf{J} = k_m (\mathbf{H} + \mathbf{J}^{стор}). \quad (44.12)$$

Вспомним (см. § 21), что $1 + k_m = \mu$ и $\mu_0 \mu = \mu_a$, и тогда

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} + \mu_a \mathbf{J}^{стоп}. \quad (44.13)$$

Вектор $\mathbf{B}$ в ф-лах (44.11) и (44.13) надо понимать как обобщённый вектор индукции, аналогично обобщённому вектору смещения, определённого в ф-ле (43.18).

Второе уравнение Максвелла теперь примет вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^{стоп}}{\partial t}. \quad (44.14)$$

Подставляя $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ как функции Γ^* в это уравнение и производя преобразования, аналогичные преобразованиям в предыдущем параграфе, получим

$$\nabla^2 \Gamma^* - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial t^2} = - \mathbf{J}^{стоп} \quad (44.15)$$

и решение

$$\Gamma^*(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}^{стоп}(x', y', z', t') dV}{R}. \quad (44.16)$$

Если поле возбуждается одним магнитным вибратором, то аналогично изложенному в предыдущем параграфе [см. ф-лу (43.22)] для Γ^* найдём

$$\Gamma^*(x, y, z, t) = \frac{p_i(x', y', z', t')}{4\pi R} = \frac{p_m \left(x', y', z', t - \frac{R}{v} \right)}{4\pi \mu_a R}. \quad (44.17)$$

Здесь $p_i = \frac{p_m}{\mu_a}$ появилось как результат замены p , по принципу двойственности

Размерность «магнитного» вектора Герца будет

$$[\Gamma^*] = \frac{[I] [\Delta S]}{[R]} = a \cdot m. \quad (44.18)$$

Оба типа векторов Герца, как упоминалось выше, находят широкое применение в практике электромагнитных расчётов.

В каких задачах удобно применять тот или иной вид электродинамических потенциалов, подсказывает опытность, своеобразное чутьё, которое можно приобрести только практикой электромагнитных расчётов. Надо отметить, что часто неправильный выбор вида потенциала значительно затрудняет задачу, а иногда делает её решение практически невозможным.

Глава VIII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ
ЭНЕРГИИ§ 45. Развитие учения о сохранении, преобразовании и потоке
энергии. Теорема Умова

Впервые мысль о сохранении механической энергии была высказана в 1740 г. М. В. Ломоносовым. В своём «Рассуждении о твёрдости и жидкости тел» Ломоносов, формулируя закон сохранения материи (вещества) заканчивает определение следующей мыслью: «Сей всеобщий естественный закон¹⁾ простирается и на самые правила движения, ибо тело, движущее своей силой другое, столько же оной у себя теряет, сколько создает другому, которое от него движение получает».

Во времена Ломоносова физического понятия энергии ещё не существовало и термин «сила» в его формулировке соответствует «кинетической энергии».

Только через 100 лет знаменитый немецкий естествоиспытатель, врач по профессии, Роберт Майер (1814—1878 гг.) публикует в 1841 г. классическую работу, в которой развивает идеи о сохранении и преобразовании «сил», т. е. различных форм энергии.

Р. Майер установил, во-первых, факт количественной неизменности и неуничтожаемости энергии и, во-вторых, принцип эквивалентного преобразования энергии одной формы в другую. Эту вторую сторону работы Майера особенно отметил, в «Диалектике природы» Ф. Энгельс²⁾.

В 1847 г. Г. Гельмгольц в уже цитированной работе «О сохранении силы», облёк идеи Р. Майера в математическую форму, подробно разработав вопросы о количественной стороне закона сохранения энергии.

В течение 19-го столетия складывалось представление об энергии как мере движения, как необходимом и неотделимом от материи свойстве, неуничтожаемой и не возникающей из ничего и способной в процессе работы преобразовываться из одной формы в другую.

Дальнейшая эволюция учения об энергии привела к представлению о её пространственном распределении, и в 1874 г. извест-

¹⁾ Закон сохранения материи.

²⁾ Ф. Энгельс. Диалектика природы. ОГИЗ, 1948, стр. 227.

ный русский физик, профессор Одесского университета Николай Алексеевич Умов (1864—1915 гг.) впервые поставил вопрос о перемещении энергии в среде.

В классической работе «Уравнения движения энергии в телах», изданной в Одессе в 1874 г., Умов, рассматривая в общем виде изменение энергии ¹⁾ в элементе объёма тела, отмечает, что в таком случае на основании закона сохранения энергия должна уходить из этого элемента объёма или входить в него. Умов вводит новые, чрезвычайно важные понятия: поток мощности — количество энергии, протекающей сквозь данную поверхность за единицу времени и вектор плотности потока мощности — вектор, по величине равный количеству энергии, проходящей сквозь единицу поверхности за единицу времени, и направленный в направлении движения энергии.

В современных обозначениях вывод Умова сводится к следующему: обозначая через W_0 объёмную плотность энергии в данной точке и через $\mathbf{v}$ скорость её перемещения, Умов вводит вектор $(W_0\mathbf{v})$, который равен количеству энергии, проходящей сквозь единицу поверхности за единицу времени, и является вектором плотности потока мощности. Далее, рассматривая поток энергии сквозь поверхность некоторого объёма V за единицу времени, Умов на основании закона сохранения энергии приходит к выводу, что этот поток должен равняться уменьшению энергии в объёме V за тот же промежуток времени, т. е.

$$-\frac{\partial W_0}{\partial t} = \operatorname{div}(W_0\mathbf{v}). \quad (45.1)$$

Соотношение (45.1) следует назвать теоремой Умова.

Интегрируя это основное соотношение по конечному объёму и преобразуя правую сторону по теореме Остроградского, Умов находит соотношение

$$\frac{d}{dt} \int W_0 dV = - \oint (W_0\mathbf{v}) d\mathbf{S}, \quad (45.2)$$

из которого следует, что полное изменение энергии за единицу времени в некотором объёме V равно потоку мощности сквозь поверхность, ограничивающую этот объём.

Знак минус в правой части показывает, что если, например, левая часть положительна, т. е. если запас энергии в рассматриваемом объёме возрастает $\left(\frac{\partial W}{\partial t} > 0\right)$, и, следовательно поток энергии устремлён внутрь объёма, то интеграл в правой части должен быть отрицателен, тогда отрицательным будет и скалярное произведение

¹⁾ Умов исследовал вопрос о перемещении механической энергии, однако предложенный им метод оказался совершенно общим, приложимым к исследованию перемещения любой формы энергии.

$(W_0 \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$. Угол между вектором $(W_0 \mathbf{v})$ и $d\mathbf{S}$ окажется тупым. Так как вектор $d\mathbf{S}$ мы условились всегда считать направленным наружу из объёма, то вектор $(W_0 \mathbf{v})$ будет в этом случае направлен внутрь объёма, как раз по направлению движения энергии. Противоположное предположение $\left(\frac{\partial W}{\partial t} < 0\right)$, соответствующее убыванию энергии в объёме, т. е. вытеканию энергии из объёма, обусловит направление вектора $(W_0 \mathbf{v})$ наружу.

Энергия есть неотъемлемое свойство материи, характеризующее определённую форму движения (может быть весьма сложной природы), присущего рассматриваемой форме материи.

Измеряется энергия в процессе работы, представляющей собой процесс перехода энергии одной формы в другую.

Таким образом, процесс распространения энергии есть процесс, связанный с передачей определённой формы движения, и может совершаться лишь с определёнными формами материи либо при непосредственном переносе материальных тел, которым эта энергия присуща, либо волновым путём, когда энергия, характеризующая соответствующую форму движения (колебания, смещения и т. д.), передаётся в материальной среде (например, волны в упругом теле, процесс теплопередачи путём теплопроводности и т. д.). Процесс распространения электромагнитной энергии следует рассматривать как процесс распространения электромагнитного поля (электромагнитной волны), обнаружить которое мы можем по той электромагнитной энергии, которой оно обладает.

В конце XIX века в результате «кризиса физики», о котором мы говорили во введении, возникла как одна из разновидностей идеалистического подхода к физическим явлениям теория «энергетизма», видным представителем которой был крупный немецкий химик Вильгельм Оствальд (1853—1932 гг.). Оствальд отрицал существование материи как физической реальности и полагал, что реально существует энергия как таковая.

Эта идеалистическая точка зрения была подвергнута критике В. И. Лениным в «Материализме и эмпириокритицизме». Ленин пишет: «Энергетическая физика есть источник новых попыток мыслить движение без материи — по случаю разложения считавшихся дотоле неразложимых частиц материи и открытия дотоле невиданных форм материального движения¹⁾».

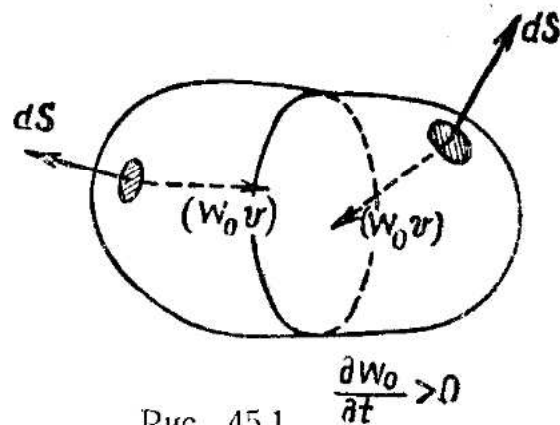


Рис. 45.1

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} > 0$$

¹⁾ В. И. Ленин. Материализм и эмпириокритицизм. Изд. 3, т. 13, стр. 224.

§ 46. Поток мощности распространяющегося электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Дальнейшее развитие идей Умова²⁾, связанное с вопросом о распространении электромагнитной энергии, было продолжено английским учёным Джоном Генри Пойнтингом (1852—1914 гг.), которому в 1884 г. удалось получить удачное выражение для плотности потока электромагнитной мощности — так называемый «вектор Пойнтинга», имеющее большое значение для практических расчётов.

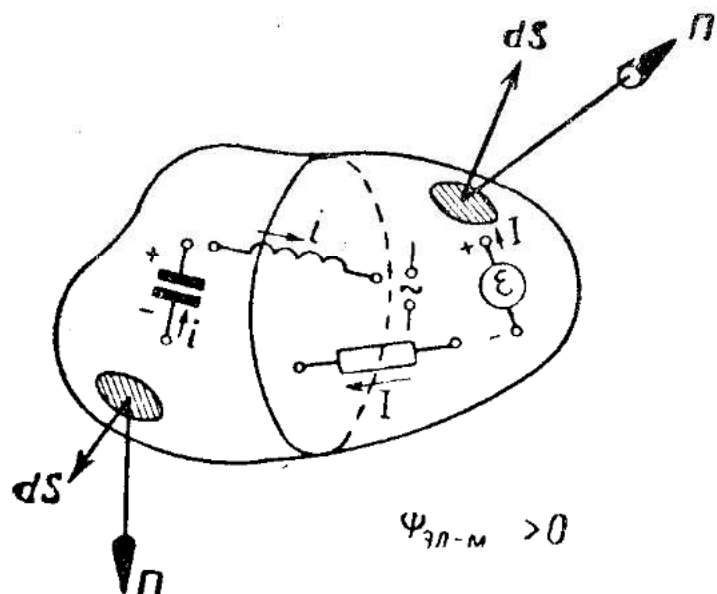


Рис. 46.1

Рассмотрим некоторую неподвижную в пространстве замкнутую поверхность (рис. 46.1). Пусть в объёме, ограниченном этой поверхностью, находится запас электромагнитной энергии $W_{\text{эл.-м.}}$.

$$W_{\text{эл.-м.}} = \int \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) dV = \int \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (46.1)$$

Приведённая формула электромагнитной энергии представляет обобщение на электромагнитное поле уравнений электростатического и стационарного магнитного полей и будет подтверждена в дальнейшем.

Пусть в рассматриваемом объёме находятся также источники электромагнитной энергии, преобразующие неэлектромагнитные формы энергии в электромагнитную (сторонние силы), и её поглотители (например, сопротивления, в которых электромагнитная энергия переходит в тепловую).

Электромагнитная энергия может быть сосредоточена в конденсаторах (электрическая энергия), в индуктивностях, по которым течёт ток (магнитная энергия), или в форме электромагнитных волн, находящихся в данный момент внутри замкнутой поверхности.

Вычислим изменение запаса электромагнитной энергии за единицу времени.

²⁾ Работа Умова была в 1874 г. опубликована также в широко распространённом немецком журнале *Zeitschrift für Mathematische Physik* (1874, № 19, стр. 419) и, несомненно, стала достоянием широкого круга учёных.

Дифференцируя предыдущее выражение по времени, мы получим

$$\frac{dW_{\text{эл.-м}}}{dt} = \int \left\{ \epsilon_a \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_a \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\} dV. \quad (46.2)$$

Изменение электромагнитной энергии в рассматриваемом объёме может происходить либо за счёт её вытекания (или втекания) сквозь поверхность, ограничивающую этот объём, либо за счёт действия сторонних сил, преобразующих неэлектромагнитные формы энергии в электромагнитные, либо, наконец, за счёт перехода электромагнитной энергии в другие формы энергии (например, в тепловую, механическую, химическую и т. д.) внутри поверхности. При этом надо отметить, что переходить в другие виды энергии может не только электромагнитная энергия, содержащаяся в данном объёме ($W_{\text{эл.-м}}$), но, конечно, и электромагнитная энергия, втекающая в объём извне. Во всяком случае, в соответствии с законом сохранения энергии поток электромагнитной мощности, выходящий из замкнутой поверхности ($\Psi_{\text{эл.-м}}$), плюс изменение запаса электромагнитной энергии в рассматриваемом объёме в единицу времени ($\frac{dW_{\text{эл.-м}}}{dt}$), плюс электромагнитная мощность, преобразующаяся в другие формы, которые все сведём к мощности эквивалентных джоулевых потерь ($\sum P_{\text{дж}}$), будут равны электромагнитной мощности, преобразующейся из других форм энергии за счёт сторонних сил в объёме, ограниченном этой поверхностью $\sum P_{\text{стор}}$. Получится баланс:

$$\Psi_{\text{эл.-м}} + \frac{dW_{\text{эл.-м}}}{dt} + \sum P_{\text{дж}} = \sum P_{\text{стор}}. \quad (46.3)$$

Существенным вкладом Пойнтинга для вывода приведённого баланса является подстановка в соотношение (46.2) значений $\epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ и $\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ из уравнений Максвелла, именно

$$\epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \delta; \quad \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}. \quad (46.4)$$

Подставив эти значения, получим

$$\frac{dW_{\text{эл.-м}}}{dt} = \int \{ \mathbf{E} \cdot (\text{rot } \mathbf{H} - \delta) + \mathbf{H} \cdot (-\text{rot } \mathbf{E}) \} dV. \quad (46.5)$$

Полученное выражение преобразуем по формуле

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}].$$

В результате

$$\frac{dW_{\text{эл.-м}}}{dt} = - \int \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV - \int \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (46.6)$$

Первый интеграл правой части преобразуем по теореме Остроградского. Во втором интеграле, исходя из уравнения (38.3)—5 сделаем замену

$$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\delta}}{\sigma} - \mathbf{E}_{\text{стор.}} \quad (46.7)$$

В итоге получим

$$\frac{dW_{\text{эл.-м}}}{dt} = - \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] \cdot d\mathbf{S} - \int_V \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{\sigma} dV + \int_V \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{E}_{\text{стор.}} dV. \quad (46.8)$$

Сравним это уравнение с (46.3). Здесь первый интеграл правой части с обратным знаком равен потоку электромагнитной мощности

$$\Psi_{\text{эл.-м}} = \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] \cdot d\mathbf{S}. \quad (46.9)$$

Этот поток положителен, если вектор $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ направлен из объёма (т. е. образует с нормалью $d\mathbf{S}$ — острый угол).

Вектор

$$[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{П} \quad (46.10)$$

представляет, очевидно, плотность потока электромагнитной мощности (электромагнитная энергия, проходящая сквозь единицу поверхности за единицу времени) и называется вектором Пойнтинга.

Второй интеграл — мощность потерь электромагнитной энергии в рассматриваемом объёме ($\Sigma P^{\text{эл.}}$), и третий — электромагнитная мощность, получаемая за счёт действия сторонних сил ($\Sigma P^{\text{стор.}}$). Итак,

$$\int_V \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{E}_{\text{стор.}} dV = \oint_S \mathbf{П} \cdot d\mathbf{S} + \frac{dW_{\text{эл.-м}}}{dt} + \int_V \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{\sigma} dV, \quad (46.11)$$

что совпадает с записью баланса мощности (46.3).

§ 47. Анализ картин распространения электромагнитной энергии

Двухпроводная линия.

Рассмотрим передачу электромагнитной энергии по двухпроводной линии постоянного тока. Провода передачи играют, как известно из курса электротехники, двойную роль. Во-первых, по проводам течёт ток, который возбуждает магнитное поле. Во-вторых, провода, будучи присоединены к источнику напряжения,

заряжены разноимёнными зарядами, возбуждающими электрическое поле. Напряжённость магнитного поля не имеет продольной (вдоль оси проводов) составляющей. Векторные линии магнитного поля в этом случае представляют собой окружности, неконцентричные с осями проводов, плоскость которых перпендикулярна этим осям.

Если провода линии не имеют потерь, то напряжённость электрического поля, как и напряжённость магнитного, не имеют продольной составляющей. Векторные линии электрического поля будут лежать в плоскости магнитных. Вектор Пойнтинга окажется направлен параллельно осям проводов от генератора к нагрузке. В реальной двухпроводной линии с потерями напряжённость электрического поля имеет не только поперечную составляющую, которая определяется разностью потенциалов между проводами, но также и продольную за счёт падения потенциала вдоль проводов. Эта продольная составляющая обычно значительно меньше поперечной.

Форма векторных линий электрического поля в данном случае отличается от векторных линий электрического поля двухпроводной системы без потерь или заряженной только статическими зарядами, так как в данном случае векторные линии электрического поля будут кривыми двойкой кривизны (рис. 47.1а), ортогональными линиями $\mathbf{H}$.

Можно считать, что внутри провода магнитные линии представляют окружности, концентричные с осью провода. Вектор электрического поля $\mathbf{E}$ внутри провода имеет только продольную составляющую, так как в проводе

$$\sigma \mathbf{E} = \delta_{np}, \quad (47.1)$$

а линии плотности тока проводимости при постоянном сечении провода параллельны его оси.

При переходе через поверхность провода тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ остаётся неизменной

$$E_{\text{внутр}} = E_{\tau \text{ внутр}} = E_{\tau \text{ внеш}}, \quad (47.2)$$

в то время как нормальная составляющая испытывает скачок от нуля ($E_{n \text{ внутр}} = 0$) до величины

$$E_{n \text{ внеш}} = \frac{\rho_{\text{пов}}}{\epsilon_a} \quad (47.3)$$

благодаря поверхностному заряду на проводе, что мы отметили выше.

Эти заряды экранируют внутреннюю область провода от поперечного поля (см. рис. 47.1б).

Если мы построим векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ в точке O' (внутри провода на рис. 47.1б), то убедимся, что вектор $\mathbf{P}$ направлен к оси провода, т. е. что течения энергии вдоль провода сквозь его поперечные сечения нет.

Таким образом, электромагнитная энергия втекает в провод сквозь его боковую поверхность, но по проводу не передаётся. Во что же она обращается? Чтобы ответить на этот вопрос, произведём расчёт энергии, втекающей в провод сквозь его боковую поверхность.

На поверхности провода

$$E = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S}, \quad (47.4)$$

и, применяя закон полного тока к контуру сечения провода, получим

$$H 2\pi a = I; \quad H = \frac{I}{2\pi a}. \quad (47.5)$$

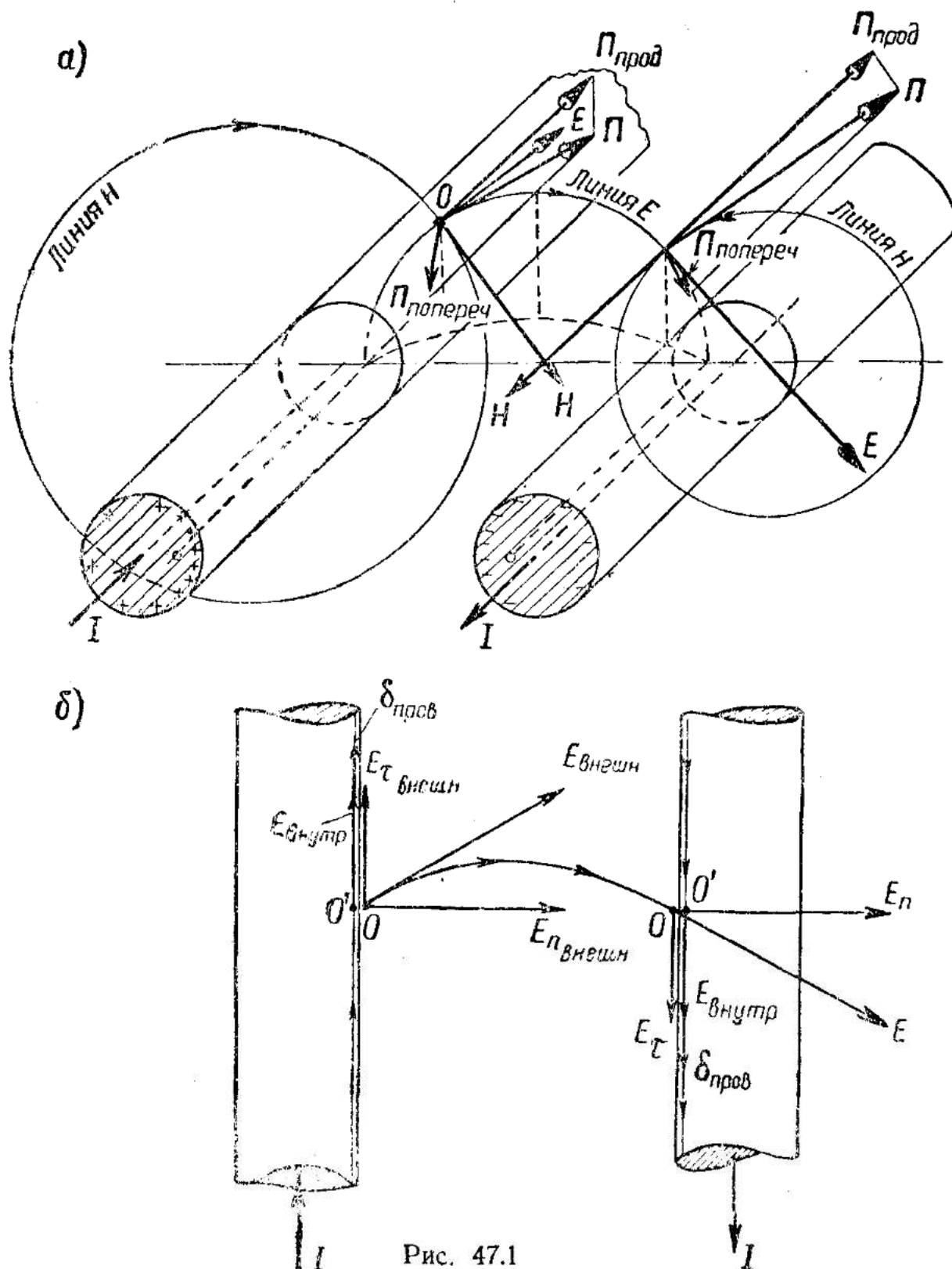


Рис. 47.1

Так как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — перпендикулярны, то

$$|\mathbf{P}| = EH = \frac{I^2}{2\pi a \sigma S}. \quad (47.6)$$

Поток векторов $\mathbf{P}$ сквозь боковую поверхность на длине провода l будет равен

$$-\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I^2}{2\pi a \sigma S} 2\pi al = I^2 \frac{l}{\sigma S}, \quad (47.7)$$

т. е. джоулевым потерям в этом участке провода.

Если поместить точку O в пространство между проводами (см. рис. 47.1 а,б), то за счёт большой поперечной составляющей E вектор Π будет иметь большую продольную составляющую и небольшую поперечную, направленную к проводу.

Таким образом, поток электромагнитной мощности течёт сквозь диэлектрик между проводами от генератора к нагрузке, и в некоторой мере «всасывается» проводами, переходя в них в джоулево тепло.

Передача энергии переменным током.

Рассмотрим передачу энергии переменным током при наличии сдвига фаз между током и напряжением.

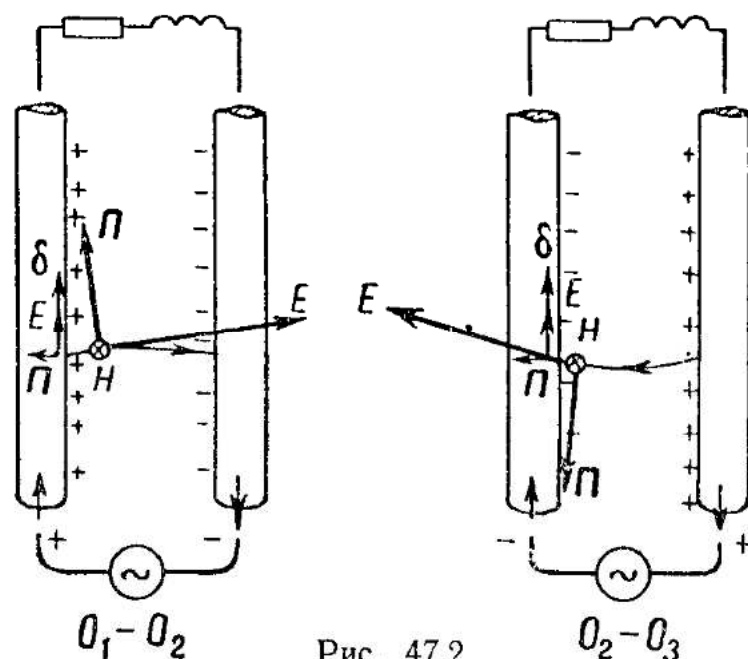
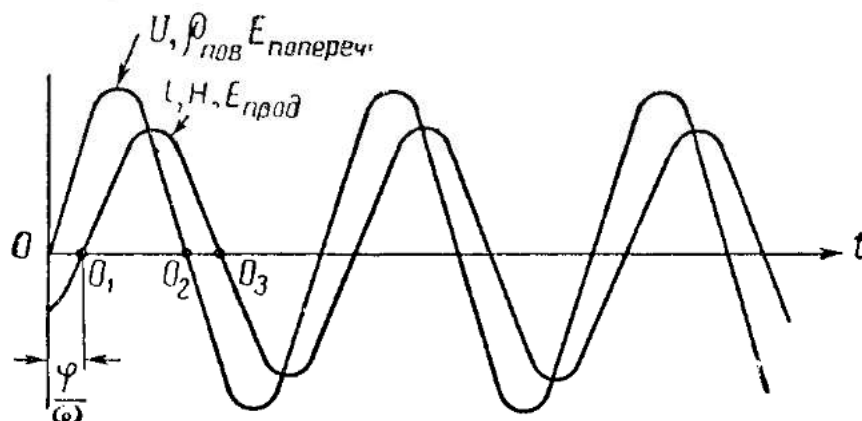


Рис. 47.2

Пусть ток отстаёт от напряжения на угол φ (случай индуктивной нагрузки). В промежутке времени $O_1—O_2$ картина векторов E , H и Π (рис. 47.2) аналогична рассмотренной выше. В промежутке же времени $O_2—O_3$ ток ещё остаётся положительным, а напряжение изменяет свой знак. Следовательно, изменяют свой знак и заряды на поверхности проводов и направление поперечного поля (рис. 47.2). Продольная составляющая вектора Пойнтинга также изменит своё направление на противоположное. В этот промежуток времени ($O_2—O_3$) нагрузка ведёт себя как генератор. Поперечная составляющая вектора Пойнтинга опять-таки направлена к проводу — джоулевы потери в проводах, очевидно, не зависят от направления потока мощности. Таким образом, провода в электропередаче играют роль «направляющих» потока энергии.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ИЗЛУЧЕНИЕ И ПЕРЕДАЧА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Глава IX

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТ- НЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

§ 48. Распространение однородной плоской волны в идеаль- ной среде

Займёмся более детальным изучением распространения электромагнитных волн.

Естественно было бы начать эту, четвёртую, часть книги с анализа излучения электромагнитных волн. Однако вопрос об излучении как более сложный и требующий знания структуры и законов распространения волн будет рассмотрен в следующей главе.

Пусть электромагнитная волна распространяется в положительном направлении оси z . Волну мы называем плоской, если её фазовая поверхность есть плоскость.

Фазовая поверхность — это поверхность, во всех точках которой основные векторы поля, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, имеют одну и ту же фазу. Так как в каждой фиксированной точке пространства векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ меняются со временем и меняется их фаза, то такая поверхность должна перемещаться; скорость её перемещения называется фазовой скоростью волны (рис. 48.1).¹⁾

На рис. 48.1 показано распространение плоского импульса.

На рис. 48.1а дано положение некоторой фазовой плоскости в момент t .

¹⁾ В этом параграфе понятия фазовой поверхности и фазовой скорости, относящиеся, строго говоря, к гармоническим волнам, обобщены на волну с произвольным законом изменения. Так как в данном случае отсутствует дисперсия, то такое обобщение не приведёт к затруднениям.

Эта плоскость будет фазовой поверхностью импульса, так как значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, соответствующие определённой фазе поля, взятые для двух произвольных точек этой плоскости, одинаковы.

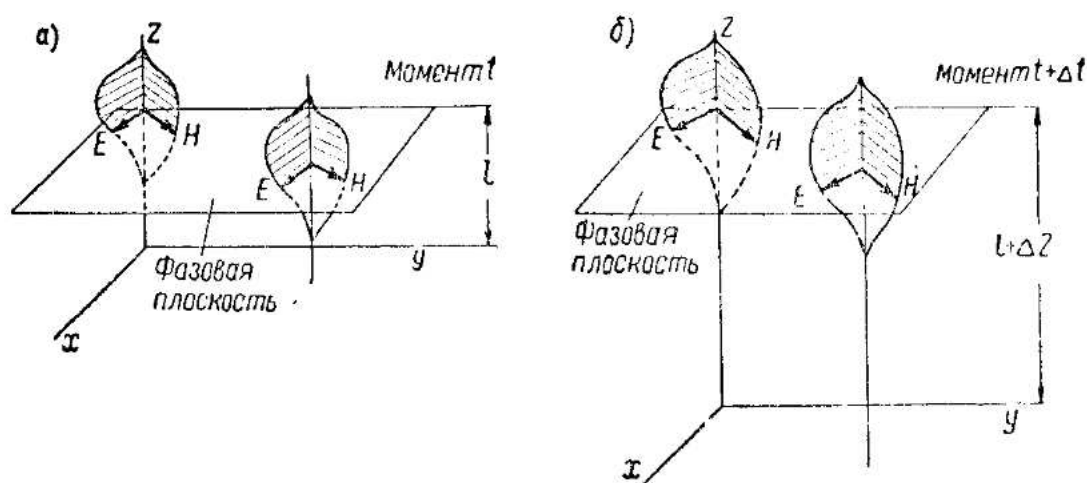


Рис. 48.1

На рис. 48.1б представлено положение фазовой плоскости в момент $t + \Delta t$; мы видим, что фазовая плоскость сместилась вместе с распространяющимся импульсом на расстояние Δz , и фазовая скорость, очевидно, равна

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (48.1)$$

Если, кроме того, величина и направление вектора $\mathbf{E}$ (как и вектора $\mathbf{H}$) во всех точках фазовой поверхности одинаковы, то волна называется однородной. На рис. 48.1 представлена как раз однородная плоская волна.

Будем рассматривать однородную плоскую волну. Её фазовая поверхность — плоскость, параллельная плоскости $x-y$. Уравнение этой плоскости

$$z = l, \quad (48.2)$$

где l — расстояние от координатной поверхности xy .

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, оставаясь неизменными (однородная волна) в любой точке фазовой плоскости, очевидно, не будут зависеть от x и y и, следовательно,

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = f(z, t). \quad (48.3)$$

Рассмотрим распространение плоской однородной волны в идеальной среде, в которой проводимость $\sigma = 0$ и нет свободных зарядов ($\rho = 0$).

Уравнения Максвелла в этом случае будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & 2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ 3) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & 4) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (48.4)$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} 1 \quad & \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) &= \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right) &= \varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}, \end{aligned} \right. & 2 \quad & \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) &= -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) &= -\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{aligned} \right. & (48.5) \\ 3 \quad & \left\{ \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \right. & 4 \quad & \left\{ \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \right. \end{aligned}$$

В этой системе уравнений все производные по x и y (показаны в скобках) обращаются в нуль. Для составляющих E_z и H_z получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (48.6)$$

Из этих уравнений видно, что E_z и H_z остаются одинаковы и постоянны во всех точках пространства. Такие E_z и H_z могут быть только составляющими какого-то однородного электростатического и магнитостатического поля. Так как таких статических полей в неограниченном пространстве физически не существует, то

$$E_z = 0, \quad H_z = 0 \quad (48.7)$$

и

$$\mathbf{E} = x^\circ E_x + y^\circ E_y; \quad \mathbf{H} = x^\circ H_x + y^\circ H_y, \quad (48.8)$$

т. е. плоская однородная электромагнитная волна является волной поперечной — колебания электрического и магнитного полей происходят в направлении перпендикулярном направлению распространения. Электромагнитная волна, у которой колебания электрического и магнитного полей происходят только поперёк направления распространения и у которой нет

компонент поля вдоль направления распространения, называется ТЕМ-волной¹⁾).

Рассмотренная выше плоская однородная волна будет примером ТЕМ-волны.

В дальнейшем нам встретятся электромагнитные волны, у которых кроме поперечных (относительно направления распространения) компонент векторов **E** и **H**, будут и продольные. Электромагнитная волна, у которой вектор **E** имеет все три компоненты, т. е. две поперечные и одну продольную, а вектор **H** только две поперечные, называется «электрической волной» или «поперечно-магнитной» и обозначается

$$\mathbf{E} \equiv \text{TM}.$$

Волна же, у которой магнитное поле имеет все три компоненты, а электрическое — только две поперечные — это «магнитная волна» или «поперечно-электрическая»

$$\mathbf{H} \equiv \text{TE}.$$

Заключение о поперечности плоской однородной электромагнитной волны можно было бы сделать, вспомнив, что электромагнитная волна переносит энергию, а из условий симметрии (распространение только в направлении оси z) следует, что и поток энергии должен иметь направление распространения по оси z . Так как плотность потока мощности равна

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E} \mathbf{H}], \quad (48.9)$$

т. е. вектор Пойнтинга направлен перпендикулярно плоскости **E**, **H**, и так как в данном случае вектор **P** направлен по оси z ($\mathbf{P} = z^\circ P_z$), то, очевидно, векторы **E** и **H** лежат в плоскости, параллельной плоскости x, y .

Группируя оставшиеся четыре уравнения, мы замечаем, что они разбиваются на две независимые системы; в первую входят составляющие $H_1 = H_y$ и $E_1 = E_x$, а во вторую составляющие $E_2 = E_y$ и $H_2 = H_x$.

Таким образом,

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \text{II} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t} \end{array} \right. \quad (48.10)$$

¹⁾ ТЕМ — начальные буквы английского термина «transversal electromagnetic wave» — «поперечная электромагнитная волна».

Факт распадаения совместной системы уравнений на две независимые соответствует физической возможности разделить рассматриваемую плоскую электромагнитную волну на две волны: одну, у которой колебания электрического поля параллельны плоскости $x-z$, и другую, у которой электрические колебания параллельны плоскости $y-z$.

§ 49. Плоско-поляризованные волны

Поперечные волны, в которых колебания происходят параллельно какому-либо определённом направлению, называются волнами плоско-поляризованными.

Плоскость, параллельная направлению колебания и направлению распространения волны, называется плоскостью колебания волны.

Так как в свободно распространяющейся электромагнитной волне векторы напряжённости электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны, то и плоскости колебания их также будут перпендикулярны.

В радиотехнике плоскость колебания вектора $\mathbf{E}$ плоско-поляризованной электромагнитной волны называют плоскостью поляризации¹⁾ этой волны.

Таким образом, первая волна из рассмотренных выше будет плоско-поляризованной, с плоскостью поляризации $x-z$. Плоскостью поляризации второй волны будет плоскость $y-z$.

Каким же образом из неполяризованного луча выделить луч поляризованный?

Рассмотрим поперечные механические колебания. Пусть пучку верёвок, закреплённых в точке A сообщаются поперечные колебания в произвольных направлениях. Возникает сложная картина бегущих и отражённых волн, направления колебаний которых могут быть ориентированы самым различным образом (см. рис. 49.1а).

Пропустим эти колебания через поляризатор. Поляризатором в данном случае может служить щель, пропиленная в доске (или системе досок, как показано на рис. 49.1б).

Теперь колебания могут происходить только в плоскости, параллельной прорезам поляризатора. Мы получили плоско-поляризованную волну. Расположим другой поляризатор (анализатор) перпендикулярно первому (рис. 49.1в). Очевидно, в таких условиях, поперечных колебаний происходить не может. Сквозь скрещенные поляризаторы могли бы пройти только продольные колебания.

¹⁾ Отметим, что в оптике плоскостью поляризации называют плоскость, перпендикулярную плоскости колебания вектора $\mathbf{E}$, т. е. плоскость колебаний вектора $\mathbf{H}$.

световой луч. Этот опыт экспериментально подтверждает теоретические соображения о поперечности однородной плоской электромагнитной волны, вытекающие из уравнений Максвелла.

Найдём соотношение векторов электрического и магнитного полей в рассмотренной плоской, однородной электромагнитной волне. Как было показано в § 40, каждая из шести составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в среде без затухания удовлетворяет волновому уравнению.

Это можно показать и непосредственно. Продифференцируем одно из уравнений первой или второй группы (48.10) по t , а другое — по z и исключим из полученных соотношений сложную производную по z и t . Для каждой из двух составляющих $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ мы получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (49.1)$$

аналогичное уравнению (42.5).

Решение этого уравнения, с учётом только прямой волны [см. ф-лы (42.6) и (42.7)], будет

$$\begin{aligned} E_x, E_y &= f\left(t - \frac{z}{v}\right), \\ H_x, H_y &= \Phi\left(t - \frac{z}{v}\right), \end{aligned} \quad (49.2)$$

где f и Φ — пока произвольные функции.

Найдём соотношение между составляющими $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

Обозначив

$$t - \frac{z}{v} = t' \quad (49.3)$$

и подставив значения составляющих $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в I и II группы, найдём для волны I: для волны II:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \left(-\frac{1}{v}\right) &= -\epsilon_a \frac{df}{dt'}; & \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \left(-\frac{1}{v}\right) &= \epsilon_a \frac{df}{dt'} \\ \frac{df}{dt'} \left(-\frac{1}{v}\right) &= -\mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t'}; & \frac{df}{dt'} \left(-\frac{1}{v}\right) &= \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \end{aligned} \right\}. \quad (49.4)$$

Взяв в каждой группе произведение входящих в эту группу равенств, получим уже известную нам формулу Максвелла [см. ф-лу (B.2)]

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (49.5)$$

Проинтегрируем равенства (49.4) по переменной t' и, полагая постоянную интегрирования равной нулю¹⁾, получим
 для волны I: для волны II:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} f, \quad \Phi = - \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} f, \quad (49.6)$$

т. е. соотношение для векторов **E** и **H** волны I будет

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}, \quad (49.7)$$

и для волны II

$$\frac{E_y}{H_x} = - \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (49.8)$$

Результирующие векторы электрического и магнитного поля будут равны

$$\mathbf{E} = x^\circ E_x + y^\circ E_y; \quad \mathbf{H} = x^\circ H_x + y^\circ H_y. \quad (49.9)$$

Подставим в формулу **H** значение составляющих **H**, выраженных через составляющие **E**, и получим

$$\mathbf{H} = (-x^\circ E_y + y^\circ E_x) \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (49.10)$$

Выражение, стоящее в скобках, можно представить в виде

$$\begin{aligned} y^\circ E_x - x^\circ E_y &= [z^\circ x^\circ] E_x + [z^\circ y^\circ] E_y = \\ &= [z^\circ (x^\circ E_x + y^\circ E_y)] = [z^\circ \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (49.11)$$

Следовательно,

$$\mathbf{H} = [z^\circ \mathbf{E}] \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (49.12)$$

Так как вектор $[z^\circ \mathbf{E}]$ перпендикулярен вектору **E**, то мы приходим к важному заключению: в плоской электромагнитной волне векторы **E** и **H** всегда ортогональны и отношение их величин равно

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (49.13)$$

В вакууме это отношение будет

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2H}{M}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\phi}{M}}} = 120\pi \text{ (ом)} \approx 377 \text{ ом}. \quad (49.14)$$

¹⁾ Постоянная интегрирования, не равная нулю, соответствовала бы наличию однородных статических электрических и магнитных полей,

Размерность этого соотношения показывает, что с некоторой точки зрения величину $\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ можно рассматривать как характеристическое сопротивление идеальной среды и принять аналогию между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, с одной стороны, и напряжением и током в электрической цепи без потерь, с другой.

Такая аналогия будет нами в дальнейшем¹⁾ развита более подробно, и она окажется весьма полезной в различных практических расчётах электромагнитного поля.

Характеристическое сопротивление идеальной среды обозначим

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (49.15)$$

Тогда характеристическое сопротивление вакуума

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ ом}. \quad (49.16)$$

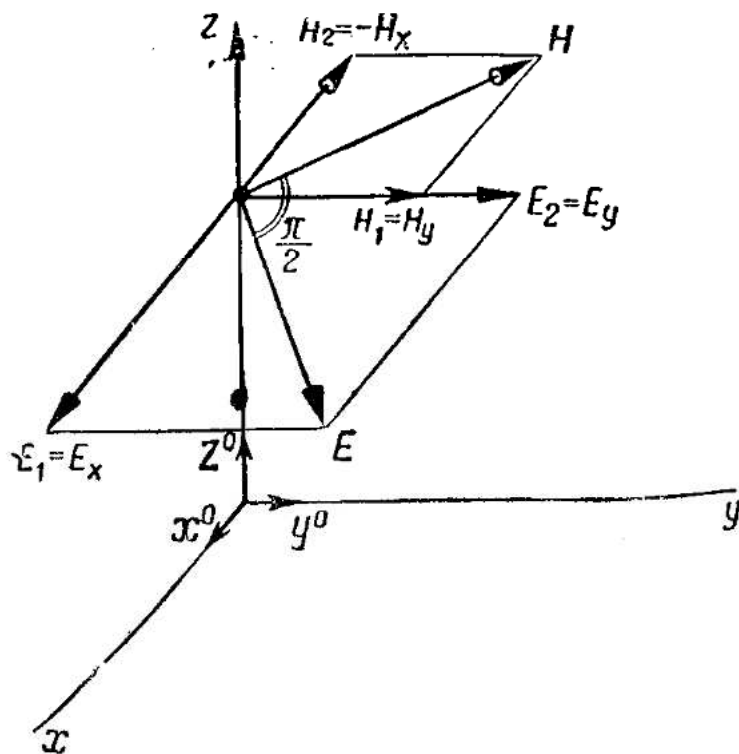


Рис. 49.2

Построим векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ для каждой из волн I и II (рис. 49.2). Нетрудно убедиться, что вектор Пойнтинга для каждой из этих волн направлен вдоль положительной оси z .

Возведя соотношение (49.13) в квадрат, нетрудно получить

$$\frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{\mu_a H^2}{2}, \quad (49.17)$$

т. е. равенство объёмной плотности магнитной и электрической энергий. Отметим, что такое равенство справедливо только в случае среды без поглощения, т. е. при условии $\sigma=0$.

§ 50. Гармонические плоские волны

В предыдущих параграфах мы не задавались определённым законом изменения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (видом функций f и Φ).

Известно, что очень широкий класс функций f и Φ , характеризующих закон изменения векторов поля, можно свести к сумме гармонических функций.

¹⁾ См. §§ 52, 63.

Если функции f и Φ периодические, то их можно выразить в виде ряда Фурье, т. е. в виде суммы гармоник, частоты которых меняются в порядке арифметической прогрессии.

$$f(t, z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_{\kappa}(z) \sin(\kappa \omega t - \beta_{\kappa} z + \xi_{\kappa}). \quad (50.1)$$

Если же f и Φ непериодические (например, рассматривается импульс), то такую функцию можно разложить в интеграл Фурье

$$f(t, z) = \int_0^{\infty} A(\omega, z) \sin[\omega t - \beta(\omega) z + \xi(\omega)] d\omega, \quad (50.2)$$

т. е. представить как предел суммы гармоник с непрерывно меняющейся частотой.

Ограничим нашу задачу рассмотрением гармонически меняющейся во времени плоской однородной волны

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - \beta z + \xi), \\ H &= \mathcal{H}_0 \sin(\omega_1 t - \beta_1 z + \xi_1), \end{aligned} \quad (50.3)$$

причём

$$\mathcal{E}_0 = n_1^{\circ} \mathcal{E}_0; \quad \mathcal{H}_0 = n_2^{\circ} \mathcal{H}_0. \quad (50.4)$$

Здесь ω — круговая частота и

β — коэффициент фазы (волновое число).

Единичные векторы n_1° и n_2° , как мы установили в предыдущем параграфе, ортогональны

$$n_1^{\circ} \cdot n_2^{\circ} = 0. \quad (50.5)$$

Так как уравнения Максвелла и вытекающее из них волновое уравнение линейны, то, задавая частное решение этих уравнений в виде гармонических функций, мы можем быть уверены, что и сумма [ф-ла (50.1)] или интеграл [ф-ла (50.2)] от таких частных решений, взятые по какой-либо вспомогательной переменной (например, по ω или β — только не по t или z !), также будут решением этих уравнений (см. также § 42).

Для удобства расчётов введём, как это мы сделали в § 29, комплексные изображения величин электромагнитных векторов (комплексные мгновенные значения).

Пусть

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - \beta z + \xi)} = \dot{\mathcal{E}} e^{i\omega t}, \\ \dot{H}(t) &= \mathcal{H}_0 e^{i(\omega_1 t - \beta_1 z + \xi_1)} = \dot{\mathcal{H}}_0 e^{i\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (50.6)$$

Умножив комплексное изображение величины вектора на единичный вектор, мы получим комплексное изображение вектора, например:

$$\dot{E}(t) \mathbf{n}^\circ = \dot{\mathbf{E}}(t) = \dot{\mathcal{E}} e^{i\omega t}. \quad (50.7)$$

Преобразуем систему уравнений Максвелла (48.5) для комплексных амплитуд.

Комплексные амплитуды компонент электрического и магнитного полей возьмём из выражений:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} e^{i\omega t} &= (x^\circ \dot{\mathcal{E}}_x + y^\circ \dot{\mathcal{E}}_y + z^\circ \dot{\mathcal{E}}_z) e^{i\omega t}, \\ \dot{\mathcal{H}} e^{i\omega_1 t} &= (x^\circ \dot{\mathcal{H}}_x + y^\circ \dot{\mathcal{H}}_y + z^\circ \dot{\mathcal{H}}_z) e^{i\omega_1 t} \end{aligned}$$

и подставим их в ф-лу (48.5). В правых и левых частях уравнений (48.5)—1 и (48.5)—2 появятся общие множители $e^{i\omega t}$ и $e^{i\omega_1 t}$. Так как все уравнения должны удовлетворяться для любого значения t , т. е. быть относительно t тождественны, то показательные функции: $e^{i\omega t} = e^{i\omega_1 t}$ будут равны и, следовательно,

$$\omega_1 = \omega,$$

т. е. в гармонической электромагнитной волне частоты электрического и магнитного полей, одинаковы.

Сокращая уравнения на общий множитель $e^{i\omega t}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_y}{\partial z} &= i\omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}}_x; & 5) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_y}{\partial z} &= -i\omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_x; \\ 2) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} &= i\omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}}_y; & 6) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} &= -i\omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_y; \\ 3) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_x}{\partial y} &= i\omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}}_z; & 7) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_x}{\partial y} &= -i\omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_z; \\ 4) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_y}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial z} &= 0; & 8) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50.8)$$

Ещё раз отметим, что мы рассматриваем в основном линейно-поляризованные векторы, т. е. направление единичных векторов $\mathbf{n}^\circ$ сохраняется постоянным, не изменяющимся во времени. Если направление единичных векторов изменяется во времени, то применение комплексного метода значительно усложняется.

Подставляя выражение (50.6) в какое-либо из уравнений (48.10), например в первое уравнение I группы (уравнение волны, поляризованной в плоскости xz), мы получим

$$\mathcal{H}_{0y}(-i\beta_1) e^{i(\omega t - \beta_1 z + \xi_1)} = \mathcal{E}_{0x} \varepsilon_a i\omega e^{i(\omega t - \beta_1 z + \xi)}. \quad (50.9)$$

Так как это равенство должно иметь место не только для любого момента времени, но и в любой точке z , т. е. быть тождественно также и относительно z , то необходимо, чтобы

$$\beta_1 = \beta, \quad \xi_1 = \xi,$$

т. е. не только частота, но и длина волны для электрического и магнитного полей оказались одинаковы, — можно, следовательно, говорить о частоте и длине волны гармонического электромагнитного поля. Начальные фазы ($\xi_1 = \xi$) оказались также равны. В других условиях (например, распространение в среде с поглощением), может появиться сдвиг фаз между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Сократив теперь на показательную функцию и на $(-i)$, получим

$$\frac{\mathcal{E}_{0x}}{\mathcal{H}_{0y}} = \frac{1}{\omega \epsilon_a}.$$

Так как это отношение должно равняться $\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ в соответствии с ф-лой (49.13), то, очевидно,

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = v, \quad (50.10)$$

т. е. оно равно фазовой скорости электромагнитной волны.

Полученное соотношение нетрудно вывести также из рассмотрения аргумента $\omega t - \beta z$. Сравнивая этот аргумент с аргументом волновой функции $\left(t - \frac{z}{v}\right)$, мы получим тождество

$$t - \frac{z}{\frac{\omega}{\beta}} \equiv t - \frac{z}{v},$$

из которого следует соотношение (50.10).

Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период колебания, то, очевидно,

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (50.11)$$

где λ — длина волны. Коэффициент β называется волновым числом или фазовым коэффициентом.

Таким образом, мы констатируем, что электрический и магнитный векторы в непоглощающей и неограниченной среде имеют одинаковую частоту, длину волны и находятся в фазе (рис. 50.1).

Чтобы найти мгновенные значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ гармонической волны и определить их пространственное расположение для

заданного момента времени и координаты z , воспользуемся временной векторной диаграммой.

Из ф-лы (50.8), сокращая её на $e^{i\omega t}$, получим

$$\dot{\mathcal{E}}_x = \mathcal{E}_{0x} e^{i(-\beta z + \xi)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \mathcal{H}_{0y} e^{i(-\beta z + \xi)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{\mathcal{H}}_y. \quad (50.12)$$

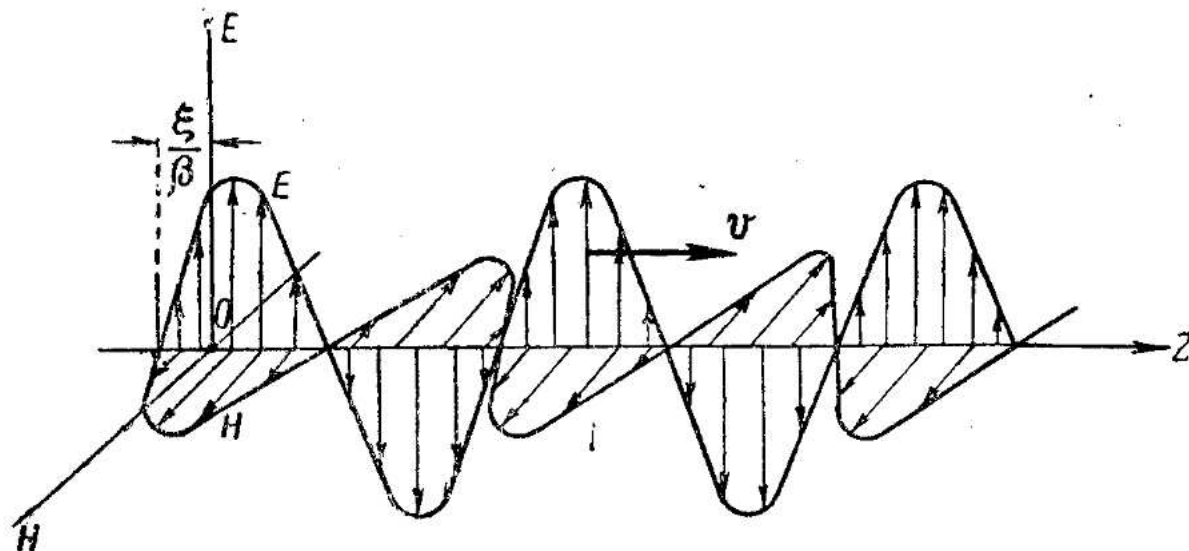


Рис. 50.1

Рассмотрим волну $(\mathcal{E}_y \mathcal{H}_x)$, поляризованную в плоскости yz , перпендикулярной плоскости поляризации волны $(\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y)$, рассмотренной выше. Такой волной является, например, волна II [см. ф-лу (48.10)].

Для этой волны, как следует из (48.10), найдём:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_y &= \mathcal{E}_{0y} e^{i(-\beta z + \xi)} = - \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \mathcal{H}_{0x} e^{i(-\beta z + \xi)} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{\mathcal{H}}_x e^{i\pi}. \end{aligned} \quad (50.13)$$

Строим временные векторные диаграммы (рис. 50.2).

В пространственных координатах для момента времени t и координаты z можно построить физическую картину векторов поля, показанную на рис. 49.2.

Угловая частота (ω) , волновое число β и фаза ξ волны $(\mathcal{E}_y \mathcal{H}_x)$ могут, конечно, отличаться от аналогичных параметров волны $(\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y)$.

Положим, что ω и β у обеих волн одинаковы, а начальные фазы различны (ξ и $\xi + \theta$).

Если эти две волны распространяются в одном направлении, то в результирующей волне направление электрического вектора (как и магнитного) в разных точках оси z не будет находиться в одной плоскости.

Пусть, например,

$$\begin{aligned} E_x &= \mathcal{E}_{0x} \sin(\omega t - \beta z + \xi), \\ E_y &= \mathcal{E}_{0y} \sin(\omega t - \beta z + \xi + \theta). \end{aligned} \quad (50.14)$$

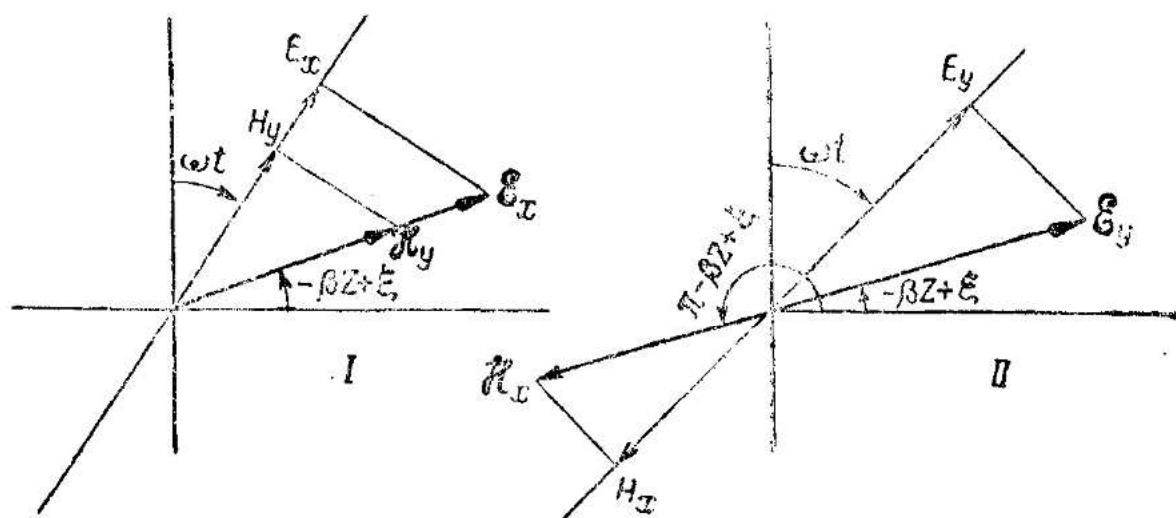


Рис. 50.2

Чтобы найти вид кривой, которую очерчивает результирующий вектор

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad (50.15)$$

обозначим $\omega t - \beta z + \xi = s$ и исключим это s из ф-л (50.14), которые запишем в виде

$$\frac{E_x}{\mathcal{E}_{0x}} = \sin s; \quad \frac{E_y}{\mathcal{E}_{0y}} = \sin(s + \theta). \quad (50.16)$$

Для этого возведём выражения (50.16) в квадрат и найдём их произведение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_x}{\mathcal{E}_{0x}}\right)^2 &= \sin^2 s; \quad \left(\frac{E_y}{\mathcal{E}_{0y}}\right)^2 = \sin^2 s \cos^2 \theta + \\ &+ \cos^2 s \sin^2 \theta + 2(\sin s \cos s \sin \theta) \cos \theta; \\ \frac{E_x E_y}{\mathcal{E}_{0x} \mathcal{E}_{0y}} &= \sin^2 s \cos \theta + (\sin s \cos s \sin \theta). \end{aligned}$$

После подстановки и приведения получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{E_x}{\mathcal{E}_{0x}}\right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{\mathcal{E}_{0x} \mathcal{E}_{0y}} \cos \theta + \left(\frac{E_y}{\mathcal{E}_{0y}}\right)^2 = \sin^2 \theta, \quad (50.17)$$

большая ось которого составляет с осью координат угол η (рис. 50.3a)

$$\operatorname{tg} 2\eta = \frac{2\mathcal{E}_{0x}\mathcal{E}_{0y}}{\mathcal{E}_{0x}^2 - \mathcal{E}_{0y}^2} \cos \theta. \quad (50.18)$$

Для заданного z конец вектора E с течением времени скользит по этому эллипсу. Для заданного момента времени t картина векторов E по z представляется эллиптической спиралью (рис. 50.3б).

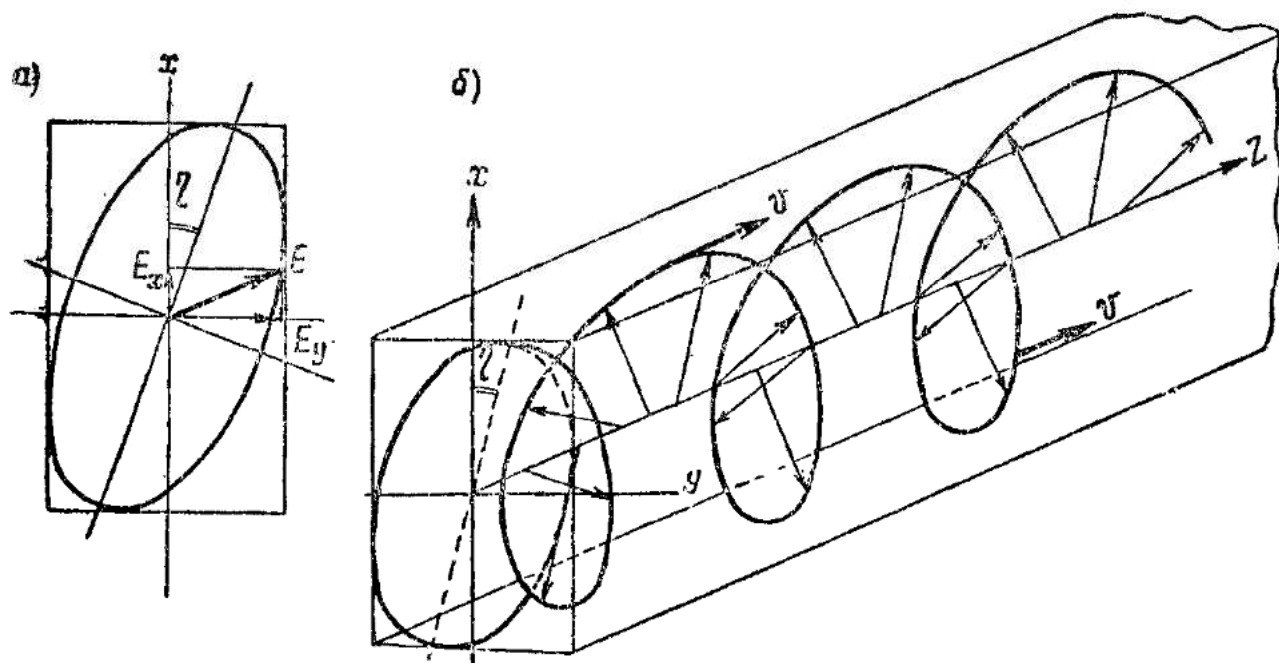


Рис. 50.3

С течением времени эта спираль движется в направлении возрастания z .

Такая гармоническая волна, у которой конец вектора описывает в пространстве эллиптическую спираль, называется волной эллиптически поляризованной. В частном случае, когда $\mathcal{E}_{0x} = \mathcal{E}_{0y}$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$, мы получаем круговую спираль — волну, поляризованную по кругу. Если вращение вектора при перемещении вдоль оси от начала координат будет происходить по часовой стрелке, мы говорим о правополяризованном луче, в противоположном случае — в левополяризованном (рис. 50.4).

По таким же спиральям, только повернутым на $\frac{\pi}{2}$ относительно спирали вектора E , будет скользить конец вектора H .

Если $\theta = 0$, т. е. обе волны ($\mathcal{E}_y \mathcal{H}_x$ и $\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y$) имеют одинаковые фазы, то из ф-лы (50.17) получим

$$\left(\frac{E_x}{\mathcal{E}_{0x}} - \frac{E_y}{\mathcal{E}_{0y}} \right)^2 = 0, \quad E_y = \frac{\mathcal{E}_{0y}}{\mathcal{E}_{0x}} E_x \quad (50.19)$$

— уравнение плоскости, проходящей через ось z и наклонной к плоскости xz под углом $\arctg \left(\frac{\mathcal{E}_{0y}}{\mathcal{E}_{0x}} \right)$.

Результирующая волна будет плоской с плоскостью поляризации (и колебания), определяемой ф-лой (50.19).

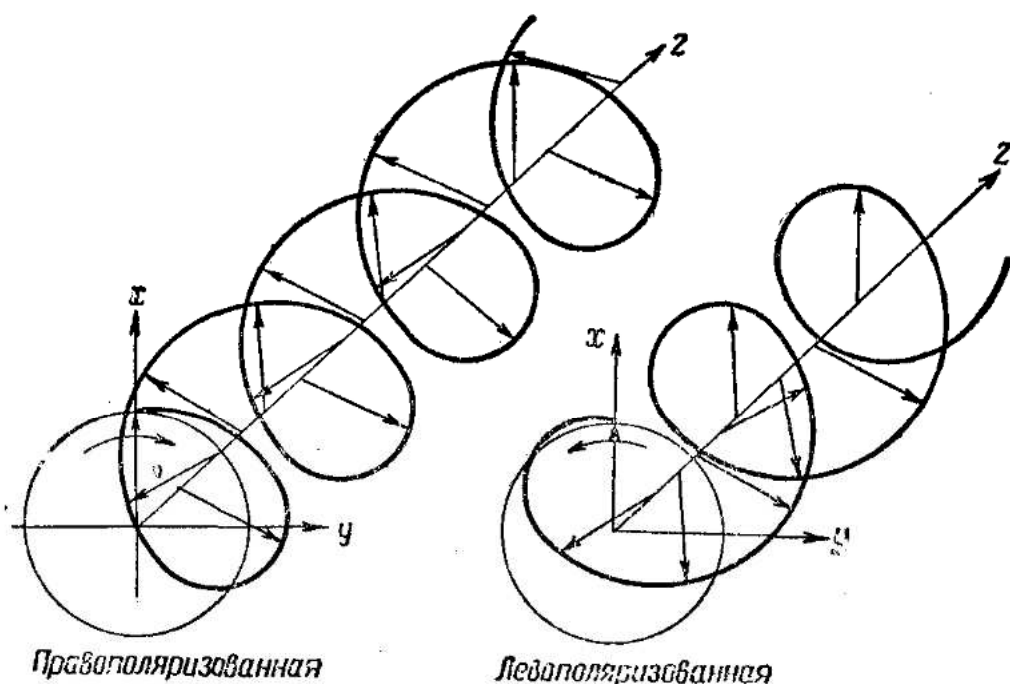


Рис. 50.4

§ 51. Плоская гармоническая волна в поглощающей среде. Дисперсия

Рассмотрим распространение плоской однородной волны в однородной среде с поглощением ($\sigma \neq 0$). В этом случае векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ будут определяться уравнениями Максвелла в форме

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (51.1)$$

Составляющие векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны удовлетворять телеграфному уравнению, как это показано в § 40 [см. ф-лу (40.6)]

$$\nabla^2 \Psi = \mu_a \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (51.2)$$

Ограничимся рассмотрением гармонической плоской волны, распространяющейся вдоль оси z .

При таких условиях, очевидно,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (51.3)$$

Найдём закон распространения этой волны.

Применим метод комплексных амплитуд и предположим, что величина Ψ (которой мы обозначим, как и раньше, любую компоненту $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) определена выражением

$$\dot{\Psi}(z, t) = \dot{\Psi} e^{i\omega t} = (\Psi_0 e^{-\gamma z + i\xi}) \cdot e^{i\omega t} = \Psi_0 e^{i\omega t - \gamma z + i\xi}, \quad (51.4)$$

где $\dot{\Psi}$ — комплексная амплитуда. Зависимость комплексной амплитуды $\dot{\Psi}$ от расстояния будет выражаться показательной функцией

$$\dot{\Psi} = \Psi_0 e^{-\gamma z + i\xi}. \quad (51.5)$$

Если выражение (51.4) представляет собой решение уравнения (51.2), то γ , которую назовём коэффициентом распространения, должна оказаться постоянной, может быть, комплексным числом. В частном случае распространения в непоглощающей среде γ становится чисто мнимой величиной ($i\beta$).

Подставив значение $\dot{\Psi}(z, t)$ в телеграфное уравнение, мы обнаруживаем, что само $\dot{\Psi}(z, t)$ сокращается

$$\gamma^2 = \rho_a \sigma (i\omega) + \rho_a \varepsilon_a (i\omega)^2. \quad (51.6)$$

Следовательно, $\dot{\Psi}(z, t)$ является, во-первых, решением уравнения, а, во-вторых, выпадение из уравнения Ψ_0 показывает нам, что амплитуды $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (как и в предыдущих случаях распространения в непоглощающей среде) из этого уравнения не определяются.

Их можно рассчитать, только обратившись к условиям излучения волны, т. е. исходя из данных источника — генератора этих волн.

Преобразуя (51.6), получим

$$\gamma^2 = i\omega\rho_a(\sigma + i\omega\varepsilon_a) = -\omega^2\rho_a\left(\varepsilon_a - i\frac{\sigma}{\omega}\right) = -\omega^2\rho_a\tilde{\varepsilon}_a, \quad (51.7)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - i\frac{\sigma}{\omega} \quad (51.8)$$

— есть комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость [см. ф-лу (29.10)].

Очевидно, коэффициент распространения $\tilde{\gamma}$ — комплексное число. Положим

$$\tilde{\gamma} = \alpha + i\beta. \quad (51.9)$$

Здесь α (так называемый коэффициент затухания) характеризует уменьшение амплитуды волны в зависимости от z . В комплексной амплитуде $\dot{\Psi}(z)$ α появляется в показателе

$$e^{-\alpha z}. \quad (51.10)$$

На расстоянии

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (51.11)$$

амплитуда волны уменьшится до

$$e^{-\alpha z_0} = e^{-1} = 0,368 \dots$$

— своего первоначального значения (в точке $z=0$).

Подставляя значение коэффициента распространения в уравнение (51.7) и разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \\ 2\alpha\beta &= \xi \mu_a \sigma \omega \end{aligned} \right\} \quad (51.12)$$

Модуль квадрата $\tilde{\gamma}$, очевидно, равен

$$|\tilde{\gamma}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu_a \sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2} = \omega^2 \mu_a |\tilde{\varepsilon}_a|. \quad (51.13)$$

Здесь $|\tilde{\varepsilon}_a| = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}$ есть модуль комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости.

Из этих выражений найдём:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \mu_a}{2} \left\{ |\tilde{\varepsilon}_a| + \varepsilon_a \right\}, \quad (51.14)$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \mu_a}{2} \left\{ |\tilde{\varepsilon}_a| - \varepsilon_a \right\}. \quad (51.15)$$

Скорость распространения будет равна

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\mu_a \left(\frac{|\tilde{\varepsilon}_a| + \varepsilon_a}{2} \right)}. \quad (51.16)$$

Скорость оказывается зависящей от $\left[|\tilde{\varepsilon}_a| = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2} = f(\omega) \right]$ т. е. от частоты; при повышении частоты она возрастает.

Поглощение волны, определяемое множителем α , также зависит от частоты и также возрастает при её увеличении.

Явление зависимости скорости распространения и поглощения волны от частоты называется дисперсией¹⁾, а среда, в которой это явление наблюдается, называется дисперсной средой.

¹⁾ От латинского слова *dispersus* — рассеянный.

Таким образом, сигнал, передаваемый в дисперсной среде, будет искажаться, так как отдельные гармоники, на которые этот сигнал можно разложить, будут распространяться с различной скоростью и поглощаться по-разному. Импульс, распространяющийся в такой среде, «расплывается», теряет свои первоначальные очертания.

Влияние частоты и проводимости на распространение гармонических волн удобнее всего рассмотреть в предельных случаях в зависимости от относительной величины обоих членов подкоренного выражения в ф-лах (51.14) — (51.16).

Комплексная амплитуда полной плотности тока в среде с проводимостью определяется введенной в § 29 комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\dot{\delta}_{\text{полн}} = \dot{\delta}_{\text{пр}} + \dot{\delta}_{\text{см}} = i \omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}. \quad (51.17)$$

Соотношение амплитуд плотности тока смещения и проводимости равно соотношению ε_a и $\frac{\sigma}{\omega}$ [см. ф-лу (29.13)].

Рассмотрим случай, когда ток проводимости мал сравнительно с током смещения, например, распространение в сухой почве при радиочастотах, в морской воде при ультравысоких частотах.

В этих случаях

$$\omega \varepsilon_a \gg \sigma. \quad (51.18)$$

Разлагая $|\tilde{\varepsilon}_a| = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}$ по формуле бинома, с учётом соотношения (51.18) получим

$$|\tilde{\varepsilon}_a| = \left\{ \varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon_a + \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_a} \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2 + \dots, \quad (51.19)$$

следовательно,

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{2\omega \varepsilon_a}\right)^2} \approx \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}, \quad (51.20)$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}, \quad (51.21)$$

т. е. β совпадает со своим значением в непоглощающей среде, а α достигает некоторого минимума, уже не зависящего от частоты. В этом случае, очевидно, распространение сигнала происходит с затуханием, но без заметного искажения.

Другой предельный случай — когда ток проводимости значительно превышает ток смещения:

$$\varepsilon_a \ll \frac{\sigma}{\omega}. \quad (51.22)$$

Подобное условие всегда имеет место в металлах. Удельная проводимость металлов $\sigma = 10^7 \div 10^8 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$, диэлектрический же коэффициент металла можно принять равным единице

$$\varepsilon_{\text{металл}} = 1, \quad (51.23)$$

так как явление проводимости в металле в обычных условиях полностью компенсирует явление электрической поляризации¹⁾. Следовательно, для металлов $\varepsilon_a \approx \varepsilon_0 \approx 10^{-11} \frac{\phi}{\text{м}}$.

Члены неравенства (51.22) становятся соизмеримы только при частотах $f \approx 10^{17} \div 10^{18} \text{ гц}$. А это уже частоты, соответствующие собственным частотам колебаний молекул, при которых уравнения Максвелла в своём обычном виде неприменимы. (В этом случае задача решается применением уравнений Максвелла—Лоренца).

Для α и β при условии (51.22) находим

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu_a \omega \sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu_a \sigma}. \quad (51.24)$$

Коэффициенты поглощения и фазы оказываются одинаковыми. Фазовая скорость будет равна

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}}. \quad (51.25)$$

Следовательно, и в этом случае с повышением частоты скорость распространения и поглощение увеличиваются.

Займёмся расчётом соотношений между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Из первого уравнения Максвелла (51.1), разлагая его по осям x и y , получим

$$-x^\circ \frac{\partial H_y}{\partial z} = x^\circ \left\{ \sigma E_x + \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} \right\}; \quad (51.26)$$

$$y^\circ \frac{\partial H_x}{\partial z} = y^\circ \left(\sigma E_y + \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t} \right).$$

¹⁾ См. § 3.

Сложив эти выражения, найдём

$$\frac{\partial}{\partial z} (y^\circ H_x - x^\circ H_y) = \left\{ \sigma (x^\circ E_x + y^\circ E_y) + \right. \\ \left. + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (x^\circ E_x + y^\circ E_y) \right\} \quad (51.27)$$

или при помощи преобразования, проведённого в § 49 [ф-ла (49.11)], получим

$$\frac{\partial}{\partial z} [z^\circ \mathbf{H}] = \left\{ \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\} = \text{rot } \mathbf{H}. \quad (51.28)$$

Развёртывая второе уравнение (51.1) на эти же оси, получим

$$-x^\circ \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\nu_a x^\circ \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad y^\circ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\nu_a y^\circ \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (51.29)$$

и аналогично предыдущему

$$\frac{\partial}{\partial z} [z^\circ \mathbf{E}] = -\nu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}. \quad (51.30)$$

Отметим, что в волне, распространяющейся по оси z , вектор $[\mathbf{H}z^\circ]$ параллелен вектору $\mathbf{E}$ и вектор $[z^\circ \mathbf{E}]$ параллелен вектору $\mathbf{H}$ (рис. 51.1).

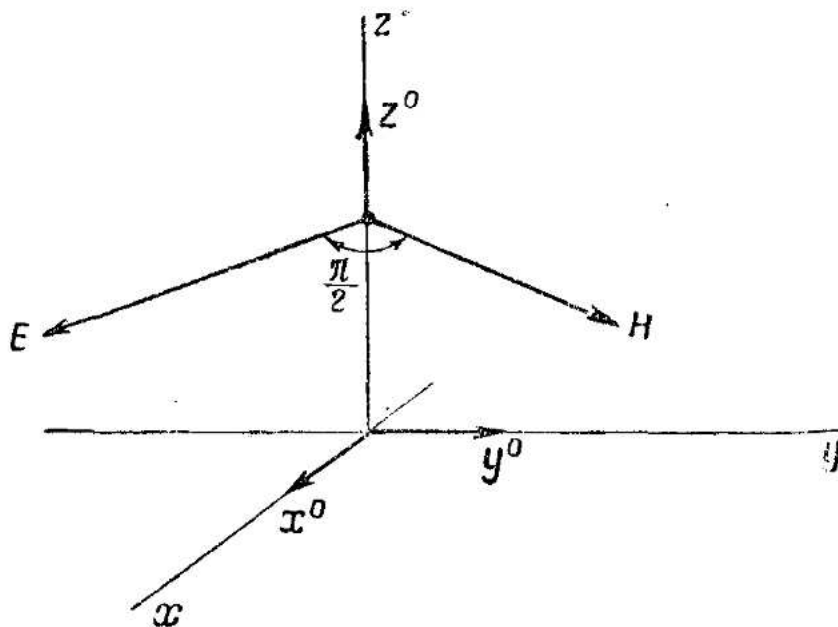


Рис. 51.1

Вводя комплексные изображения [см. ф-лы (51.4) и (51.5)] и замечая, что

$$|[z^\circ \mathbf{E}]| = E(t) \text{ и } |[z^\circ \mathbf{H}]| = H(t), \quad (51.31)$$

получим, после сокращения на $e^{i\omega t}$,

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}}{\partial z} = -i\omega\mu_a \dot{\mathcal{H}}, \quad (51.32)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}}{\partial z} = -(\sigma + i\omega\varepsilon_a) \dot{\mathcal{E}} = -i\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathcal{E}}. \quad (51.33)$$

Дифференцируя комплексные амплитуды по z , найдём:

$$\tilde{\gamma} \dot{\mathcal{E}} = i\omega\mu_a \dot{\mathcal{H}}, \quad (51.34)$$

$$\tilde{\gamma} \dot{\mathcal{H}} = i\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathcal{E}}. \quad (51.35)$$

Извлекая корень из отношения этих выражений, получим

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}}{\dot{\mathcal{H}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\varepsilon}_a}} = \zeta. \quad (51.36)$$

Характеристическое сопротивление среды в данном случае оказалось комплексным

$$\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\varepsilon}_a}} = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu_a^2}{-\omega^2\mu_a\varepsilon_a}} = \\ &= \frac{i\omega\mu_a}{\tilde{\gamma}} = \frac{\omega\mu_a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}}} e^{i\varphi}, \end{aligned} \quad (51.37)$$

где

$$|\zeta| = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} = \frac{\omega\mu_a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{|\varepsilon_a|}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}}} \quad (51.38)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}. \quad (51.39)$$

Тогда

$$\dot{\mathcal{H}} = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{|\zeta|} e^{-i\varphi}. \quad (51.40)$$

Комплексные амплитуды $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$ будут равны:

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(-\beta z + \xi)} = \mathcal{E} e^{i(-\beta z + \xi)}, \quad (51.41)$$

$$\dot{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 e^{-\alpha z} e^{i(-\beta z + \xi - \varphi)} = \mathcal{H} e^{i(-\beta z + \xi - \varphi)}. \quad (51.42)$$

Начальная фаза (при $z=0$) $\mathbf{H}$ отличается от начальной фазы $\mathbf{E}$ на угол φ .

Напомним, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\alpha z}$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 e^{-\alpha z}$ есть амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей в точке с координатой z , а $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{H}_0$ — амплитуды в начале координат ($z=0$).

Для нахождения мгновенных значений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ построим временную векторную диаграмму (рис. 51.2а).

Мы видим, что для некоторого момента, соответствующего положению линий времени вне пределов заштрихованного угла, мгновенные значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют одинаковые знаки. Пусть наша волна — плоско-поляризованная. Пусть направления векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ характеризуются взаимно-перпендикулярными единичными векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ (очевидно, $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{z} \times \mathbf{n}_1]$).

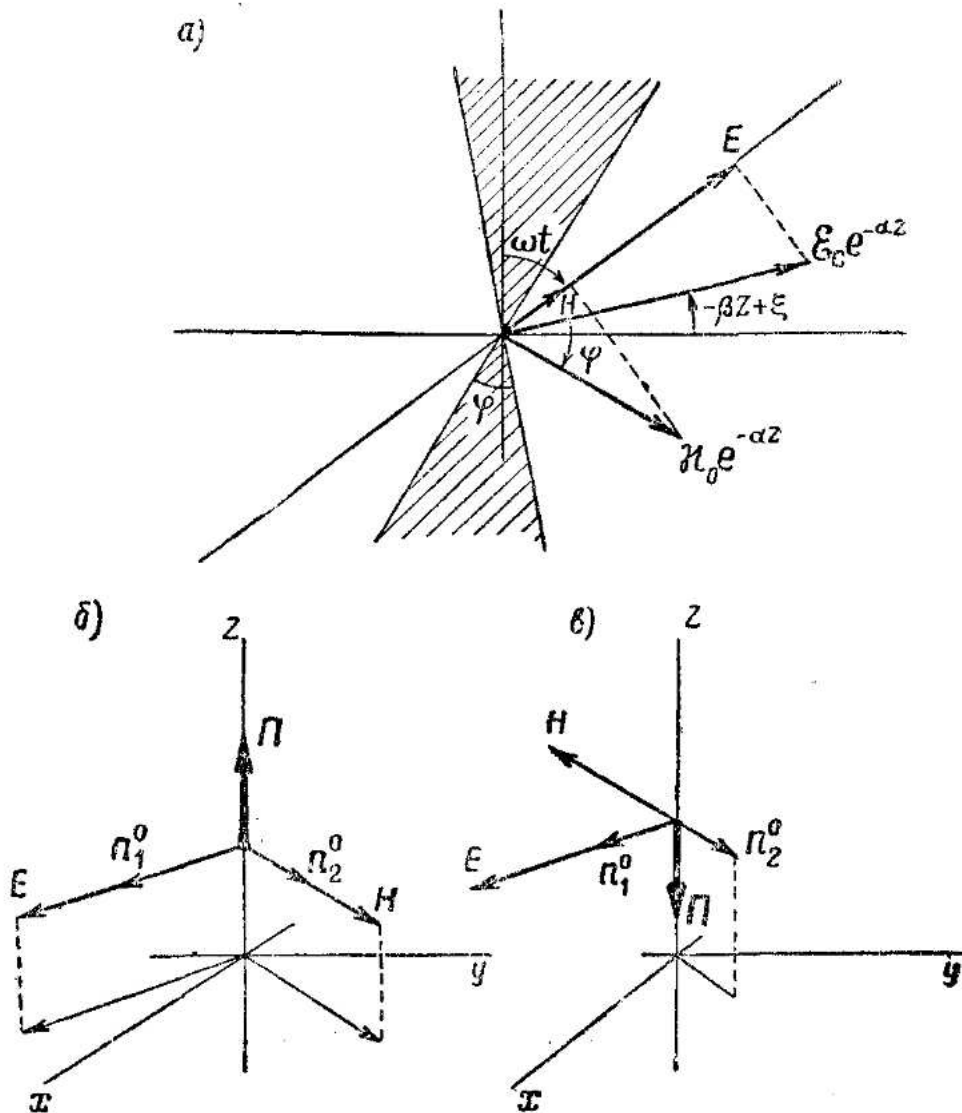


Рис. 51.2

Построив $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ для моментов, когда они одинакового знака, мы находим направление вектора Пойнтинга вверх по направлению движения волны (рис. 51.2б).

Для моментов же, соответствующих положению линии времени внутри заштрихованного угла (рис. 51.2в), вектор Пойнтинга окажется направленным вниз, против направления распространения волны.

Картина волны в пространстве для некоторого фиксированного момента представлена на рис. 51.3.

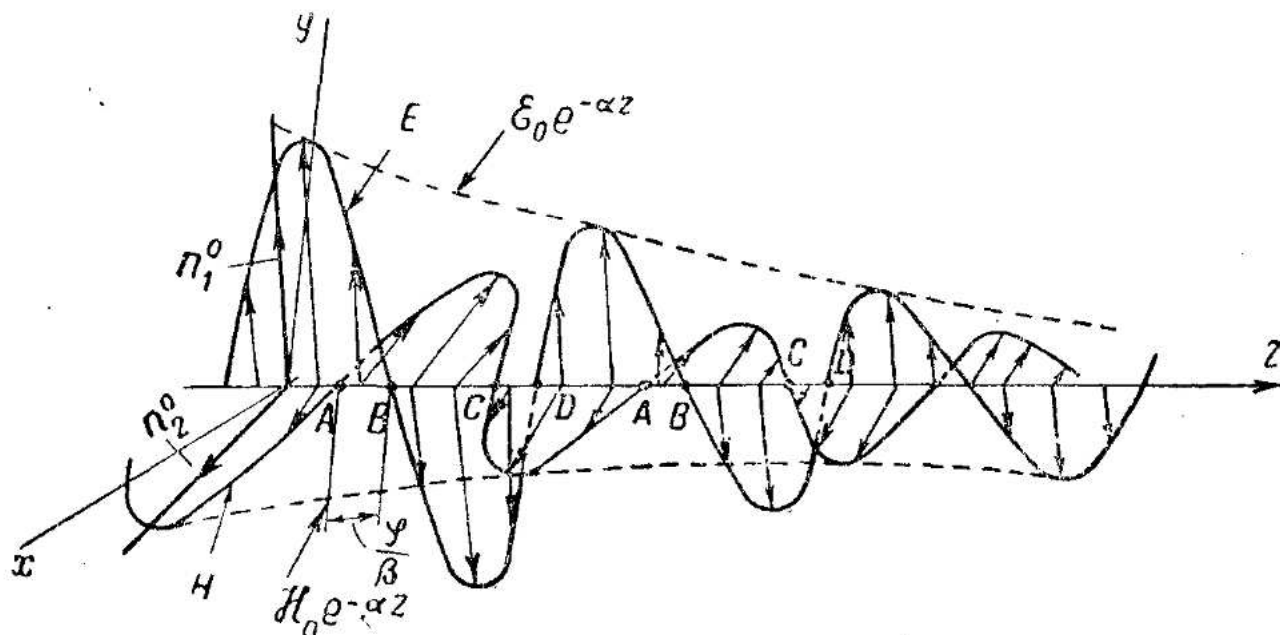


Рис. 51.3

Промежутки $B-C$, $D-A$, соответствуют E и H одинаковых знаков. Разные знаки E и H имеют на участках $A-B$, $C-D$ и т. д. Волна H , как видим, отстаёт в пространстве от волны E на промежуток $A-B = \frac{\varphi}{\beta}$.

С течением времени волна перемещается, вписываясь в показательную кривую, нанесённую на рис. 51.3 пунктиром.

Явление обратного направления потока энергии мы наблюдаем при работе генератора синусоидального тока, нагруженного цепью с ёмкостью или индуктивностью; в продолжение части периода энергия от генератора поступает в такую цепь, остальную, меньшую, часть периода энергия из цепи возвращается обратно в генератор.

В цепи с большей проводимостью, удовлетворяющей условию (51.24), в которой $\alpha = \beta$, угол φ временного сдвига фаз на комплексной плоскости равен, очевидно, 45° .

Из ф-лы (51.38) нетрудно найти соотношение максимальных значений плотности энергий электрического и магнитного полей.

Так как

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} = \sqrt{\frac{\nu_a}{|\tilde{\epsilon}_a|}} = \sqrt{\frac{\nu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{|\tilde{\epsilon}_a|}}, \quad (51.43)$$

то

$$\frac{\varepsilon_a \mathcal{E}^2}{2} : \frac{\mu_a \mathcal{H}^2}{2} = \frac{\varepsilon_a}{|\varepsilon_a|} = \frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}} < 1. \quad (51.44)$$

Плотность энергии электрического поля оказывается в этом случае меньше, чем плотность энергии магнитного поля.

§ 52. Аналогия явлений распространения электромагнитных волн в пространстве и в длинной линии

Рассмотрим однородную бесконечно длинную линию, приключённую к генератору синусоидального напряжения. Как известно из теории длинных линий, комплексные амплитуды тока и напряжения на расстоянии z от начала связаны уравнениями:

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial z} = -(r + i\omega L) \dot{I} = -Z \dot{I}, \quad (52.1)$$

$$\frac{\partial \dot{I}}{\partial z} = -(G + i\omega C) \dot{U} = -Y \dot{U}, \quad (52.2)$$

где r , L — сопротивление и индуктивность единицы длины линии, а

G и C — активная проводимость изоляции и ёмкость между проводами на единицу длины.

Частное решение, определяющее комплексные амплитуды тока и напряжения прямой волны, будет:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 e^{-\tilde{\gamma} z}, \quad (52.3)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{Z_c} e^{-\tilde{\gamma} z} = \frac{\dot{U}}{Z_c}, \quad (52.4)$$

где

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{ZY} = \alpha + i\beta \quad (52.5)$$

— коэффициент распространения линии, и

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}}, \quad (52.6)$$

— её волновое сопротивление.

Волновое сопротивление линии Z_c (вообще говоря, комплексная величина) равно отношению комплексных амплитуд тока и напряжения бегущей волны.

Для линии без потерь ($r=0$, $G=0$) волновое сопротивление становится действительным числом

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (52.7)$$

а коэффициент распространения — чисто мнимым

$$\gamma = i\omega \sqrt{LC} = i\beta. \quad (52.8)$$

Обращаясь к уравнениям электромагнитной волны (51.32) и (51.33), можно провести полезную аналогию между напряжённостями электрического и магнитного полей плоской волны в пространстве и напряжением и током в длинной линии. Сравнивая указанные формулы с ф-лами (52.1) и (52.2), находим, что

$$i \omega \mu_a \sim Z = i \omega L, \quad (52.9)$$

$$\sigma + i \omega \varepsilon_a \sim Y = G + i \omega C. \quad (52.10)$$

Отсюда

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{ZY} \sim \tilde{\gamma} = \sqrt{i \omega \mu_a (\sigma + i \omega \varepsilon_a)} \quad (52.11)$$

[см. ф-лу (52.5)].

Величина ζ (характеристическое сопротивление среды), определённая ф-лой (51.37), оказывается эквивалентна волновому сопротивлению линии

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{i \omega \mu_a}{\sigma + i \omega \varepsilon_a}} \sim Z_c = \sqrt{\frac{r + i \omega L}{G + i \omega C}}. \quad (52.12)$$

Аналогию распространения волны в пространстве и в длинной линии мы будем развивать и в дальнейшем.

Конечно, можно рассчитать электромагнитный процесс, пользуясь физически более наглядными величинами $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma, E, H$, однако введение волнового сопротивления среды ζ , величины $Z \sim i \omega \mu_a$ и $Y \sim \sigma + i \omega \varepsilon_a$, так же, как и комплексных амплитуд $\tilde{E}$ и $\tilde{H}$, хотя и формализует процесс расчёта, зато даёт значительное его упрощение и широко применяется в практических расчётах (см. ниже § 63).

§ 53. Поток мощности электромагнитной волны. Комплексный вектор Пойнтинга

Мгновенное значение вектора Пойнтинга для плоской электромагнитной волны, распространяющейся по оси z , равно

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = z^o EH. \quad (53.1)$$

Подставляя мгновенные значения величин векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$H = \mathcal{H}_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \xi - \varphi), \quad (53.2)$$

$$E = \mathcal{E}_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \xi), \quad (53.3)$$

получим мгновенное значение вектора Пойнтинга

$$P_{\text{мгн}} = EH = \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{H}_0}{2} e^{-2\alpha z} \{\cos \varphi - \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\xi - \varphi)\}. \quad (53.4)$$

Как видим, мгновенное значение величины вектора Пойнтинга пульсирует с двойной частотой, что всегда имеет место для мощности при гармонических колебаниях.

Из ф-лы (53.4) получим среднее значение вектора Пойнтинга

$$P_{\text{ср}} = \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{H}_0}{2} e^{-2\alpha z} \cos \varphi = \frac{\mathcal{E} \mathcal{H}}{2} \cos \varphi. \quad (53.5)$$

Среднее значение величины вектора Пойнтинга можно найти, исходя прямо из выражения комплексных амплитуд $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$.

Так называемый комплексный вектор Пойнтинга будет равен половине векторного произведения комплексной амплитуды одного из векторов поля на сопряжённое значение комплексной амплитуды другого

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathcal{E}} \dot{\mathcal{H}}^*]. \quad (53.6)$$

Если векторы поля перпендикулярны друг другу, то

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{1}{2} \dot{\mathcal{E}} \dot{\mathcal{H}}^* = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{i(-\beta z + \xi)} \mathcal{H}_0 e^{-i(-\beta z + \xi - \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \mathcal{H}_0 e^{i\varphi} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \mathcal{H}_0 \cos \varphi + i \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \mathcal{H}_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (53.7)$$

В этом выражении действительная часть равна среднему значению вектора Пойнтинга, т. е. среднему значению электромагнитной энергии, проходящей сквозь единицу поверхности за единицу времени.

Проинтегрировав комплексный вектор Пойнтинга по некоторой поверхности S и взяв действительную часть интеграла, мы получим среднее значение энергии, проходящей сквозь эту поверхность за единицу времени, т. е. средний поток электромагнитной мощности сквозь S

$$P_{cp} = \operatorname{Re} \left\{ \int_S \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_S [\dot{\mathcal{E}} \dot{\mathcal{H}}^*] \cdot d\mathbf{S} \right\} \quad (53.8)$$

Рассчитаем входящий поток комплексного вектора Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность

$$\begin{aligned} \Phi &= - \oint \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} = - \oint \frac{1}{2} [\dot{\mathcal{E}} \dot{\mathcal{H}}^*] \cdot d\mathbf{S} = - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} [\dot{\mathcal{E}} \dot{\mathcal{H}}^*] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \{ \dot{\mathcal{E}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathcal{H}}^* - \dot{\mathcal{H}}^* \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathcal{E}} \} dV. \end{aligned} \quad (53.9)$$

Выполнив подстановку из уравнений Максвелла для комплексных амплитуд

$$\operatorname{rot} \dot{\mathcal{H}}^* = \dot{\mathbf{d}} - i \omega \epsilon_a \dot{\mathcal{E}}^*; \quad \operatorname{rot} \dot{\mathcal{E}} = -i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}},$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} \cdot \operatorname{rot} \mathcal{H}^* - \mathcal{H}^* \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathcal{E}} &= \dot{\mathcal{E}} \cdot \dot{\delta} - i \omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}} \cdot \mathcal{H}^* + i \omega \mu_a \mathcal{H} \cdot \dot{\mathcal{E}}^* = \\ &= \frac{\delta_m^2}{\sigma} + 2i \omega \left(\frac{\mu_a \mathcal{H}^2}{2} - \frac{\varepsilon_a \mathcal{E}^2}{2} \right), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} - \oint \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} &= \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta_m^2}{\sigma} \right\} dV + i \omega \int \left(\frac{\mu_a \mathcal{H}^2}{2} - \frac{\varepsilon_a \mathcal{E}^2}{2} \right) dV = \\ &= \int \frac{1}{2} \frac{\delta_m^2}{\sigma} dV + 2i \omega \int \left(\frac{\mu_a \mathcal{H}^2}{4} - \frac{\varepsilon_a \mathcal{E}^2}{4} \right) dV. \end{aligned} \quad (53.10)$$

Первый член полученного выражения — это потери на джоулево тепло (полагаем, что в данном случае в объёме нет сторонних сил), второй член — разность средних значений магнитной и электрической энергии в объёме V , умноженных на $2i\omega$.

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \left\{ - \oint \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} \right\} = \int \frac{\delta_m^2}{2\sigma} dV = P_{дж}, \quad (53.11)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ - \oint \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} \right\} = 2\omega \int \left(\frac{\mu_a \mathcal{H}^2}{4} - \frac{\varepsilon_a \mathcal{E}^2}{4} \right) dV = 2\omega (W_m - W_{эл}). \quad (53.12)$$

Очевидно, что

$$-\operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}} = \frac{\delta_m^2}{2\sigma} + 2i \omega \left\{ \frac{\mu_a \mathcal{H}^2}{4} - \frac{\varepsilon_a \mathcal{E}^2}{4} \right\}. \quad (53.13)$$

Здесь действительная часть — удельные потери на джоулево тепло, а мнимая часть — разность средних объёмных плотностей магнитной и электрической энергий. Выражения комплексного вектора Пойнтинга, его потока и дивергенции весьма удобны при различных энергетических расчётах поля и совершенно аналогичны формуле полной комплексной мощности в цепях переменного тока

$$\tilde{S} = P + iQ = \frac{I_m^2 r}{2} + 2i \omega \left(\frac{L I_m^2}{4} - \frac{C U_{cm}^2}{4} \right). \quad (53.14)$$

§ 54. Скорость распространения в дисперсной среде

В радиотехнической практике одной из важных задач, характеризующих радиопередачу, является скорость распространения радиосигнала. Будем в данном случае под термином «сигнал»

понимать некоторый электромагнитный процесс, несущий и передающий определённую информацию.

Какой же электромагнитный процесс может быть сигналом?

Очевидно, что непрерывно продолжающаяся синусоидальная волна не может служить для передачи сигнала.

Такая волна, возбуждая приёмное устройство, может вызвать, например, однотонный непрерывный звук, который, конечно, никакой информации не передаёт.

Для передачи информации мы должны непрерывную синусоидальную волну либо обрывать (манипуляция при передаче телеграфных, радиолокационных импульсов и т. д.), либо модулировать (при передаче речи, телевидения и т. п.).

Сигналом, следовательно, может быть только электромагнитная волна с несинусоидальным законом изменения, которую, как мы указали в § 50, можно разложить в спектр бесконечных синусоидальных составляющих с различными частотами.

В § 51 мы показали, что фазовая скорость $v = \frac{\omega}{\beta}$ в дисперсной среде зависит от частоты $f = \frac{\omega}{2\pi}$, следовательно, гармонические составляющие, на которые мы можем разложить синусоидальную волну, будут распространяться с различными скоростями.

Что же считать скоростью сигнала? Скоростью сигнала следует считать скорость перемещения той области электромагнитной волны, которая, достигая приёмного устройства, сообщает ему энергию, достаточную для изменения режима его работы, например, вызывает внезапное притяжение якоря электромагнита, усиление или изменение тона звука репродуктора и т. д.

Скорость сигнала — это, следовательно, скорость распространения такой области электромагнитной волны, в которой сконцентрирован некоторый «сгусток» электромагнитной энергии, вызывающий указанное выше изменение режима работы приёмного устройства.

Поэтому скорость сигнала никогда не может превысить физическую скорость перемещения электромагнитной энергии, т. е. скорость света.

Упомянутый «сгусток» электромагнитной энергии, очевидно, будет сосредоточен там, где благодаря интерференции отдельных гармонических составляющих амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют наибольшую величину, т. е. там, где амплитуды гармоник складываются арифметически.

Рассмотрим простейший случай, когда рассматриваемая несинусоидальная волна состоит всего из двух синусоид с мало отличающимися частотами и одинаковыми амплитудами (рис. 54.1)

$$a_1 = A_0 \sin(\omega t - \beta z); \quad a_2 = A_0 \sin[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)z]. \quad (54.1)$$

Суммарная кривая представляет собой известный вид «биений»

$$a = a_1 + a_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right) \sin\left\{\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta + \frac{\Delta\beta}{2}\right)z\right\}$$

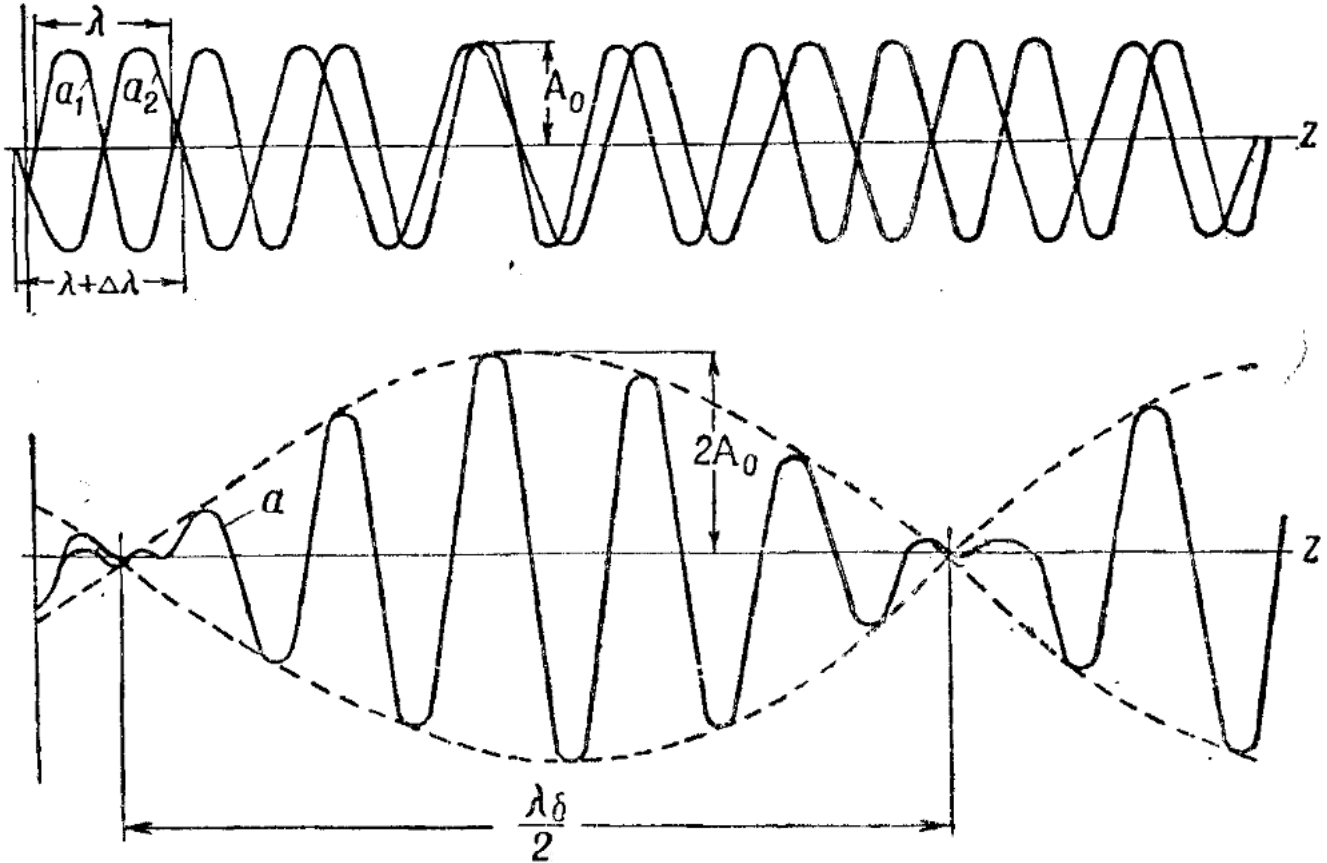


Рис. 54.1

или, если $\Delta\omega \ll \omega$ и $\Delta\beta \ll \beta$,
то

$$a = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right) \sin(\omega t - \beta z). \quad (54.2)$$

Это выражение можно рассматривать как синусоиду с «несущей» высокой частотой $f = \frac{\omega}{2\pi}$, амплитуда которой

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right) \quad (54.3)$$

медленно меняется с низкой частотой «биений» (частота модуляции), равной

$$f' = \frac{\Delta\omega}{4\pi} \ll f. \quad (54.4)$$

Точка, в которой A остаётся неизменно, например, равно своему максимальному значению

$$A_{\text{макс}} = 2A_0, \quad (54.5)$$

перемещается со скоростью, определяемой из условия [см. ф-лу (42.9)] $A = \text{const}$, следовательно,

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} z = \text{const}. \quad (54.6)$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$\frac{dz}{dt} = \lim \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \right|_{\Delta\beta \rightarrow 0} = \frac{d\omega}{d\beta} = u. \quad (54.7)$$

Найденная скорость u и есть скорость перемещения области с наибольшей интенсивностью поля, т. е. скорость «сгустка» электромагнитной энергии, скорость сигнала. Эта скорость называется «групповой» скоростью.

Если ω пропорциональна β (недисперсная среда), тогда

$$d\omega = v d\beta, \quad v = u, \quad (54.8)$$

т. е. фазовая скорость совпадает с групповой.

Выражению (54.7) групповой скорости можно придать и другой вид. Так как всегда $\omega = v\beta$, то

$$u = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(v\beta)}{d\beta} = v + \beta \frac{dv}{d\beta}. \quad (54.9)$$

Подставляя в это выражение $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, получим формулу Рэлея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (54.10)$$

Из последней формулы нетрудно заключить, что если при увеличении длины волны λ фазовая скорость v возрастает, то $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ и групповая скорость окажется меньше фазовой.

Дисперсия, при которой групповая скорость меньше фазовой, называется дисперсией нормальной.

Рассматривая ф-лы (51.16) и (51.25), нетрудно заключить, что дисперсия, обусловленная проводимостью среды, будет аномальной дисперсией.

Групповая скорость u — это скорость распространения сигнала в установившемся режиме.

Так, например, групповой скоростью будет скорость, с которой передаётся низкая, звуковая частота в системе с высокой «несущей» частотой. С такой скоростью распространяется речь, сигналы телевидения и т. д.

Наряду с фазовой и групповой скоростями, характеризующими распространение волны в установившемся режиме, дадим понятие об относительно сложной, но важной величине: скорости фронта волны.

Скоростью фронта волны называется скорость, с которой до приёмного устройства первый импульс возбуждённой где-то электромагнитной волны.

Для определения этой скорости приходится анализировать явление неустановившегося режима, что не может быть выполнено элементарными средствами.

Физически дело сводится к следующему: электромагнитная волна, распространяясь в среде (например, в воздухе), проходит как между молекулами, так и сквозь них. Если среда не была возбуждена, то первая порция энергии волны, проходящей сквозь молекулы, тратится на их возбуждение. Между молекулами электромагнитная волна просачивается со скоростью света, молекулы же, возбуждаясь, посылают свою добавочную волну, частоты и фазы которой могут, конечно, отличаться от частот волны генератора. Интенсивность этого добавочного поля зависит от отношения частот гармоник проходящей волны и собственных частот молекул, и от свойств молекул среды.

Процесс становится особенно сложным, если амплитуды гармоник проходящей волны, имеющих частоту, близкую к собственной частоте молекул, относительно велики.

Возникающие в таких условиях резонансные явления могут вызвать даже отрицательную групповую скорость, скорость же фронта волны может достичь скорости света. Среда сразу возбуждается, однако сигнал сквозь неё не проходит, а отражается назад.

В обычных условиях электромагнитная волна, просачивающаяся между молекулами, даёт так называемый первый предвестник, слабое высокочастотное колебание, проходящее со скоростью света, амплитуда и частота которого к его концу несколько возрастают.

Затем распространяется второй предвестник — излучение возбуждающихся молекул среды. Его частота и амплитуда также возрастают.

Наконец, наступает резкое возрастание амплитуды — доходит электромагнитная энергия основной волны, обуславливающая уже вынужденные колебания молекул среды (рис. 54.2).

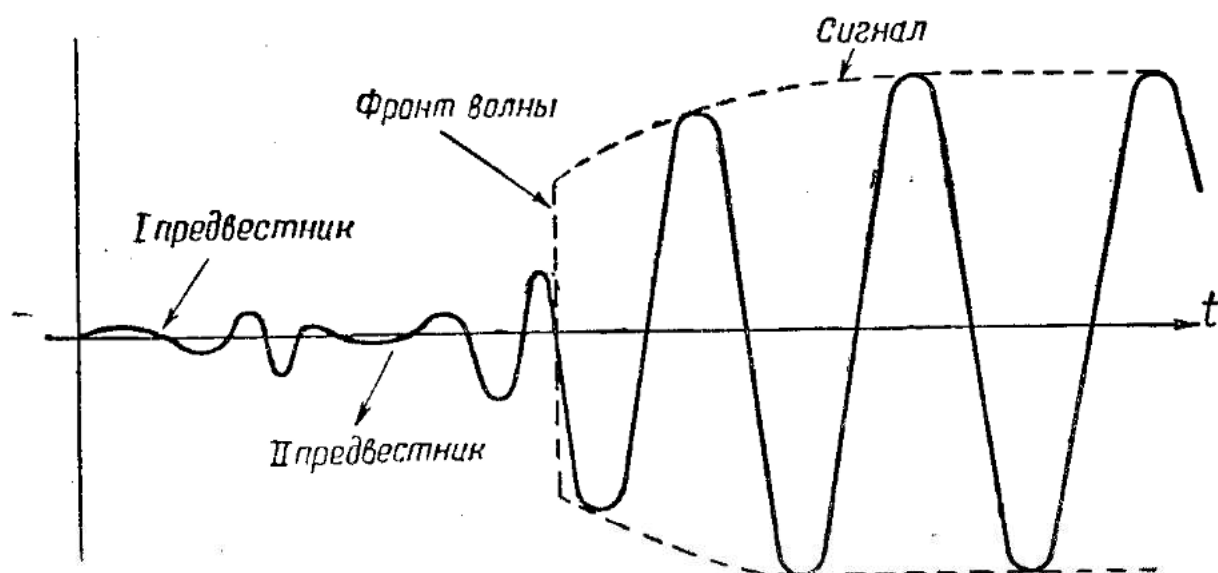


Рис. 54.2

Нужно отметить, что в областях с незначительной дисперсией скорость фронта волны практически совпадает с групповой скоростью.

§ 55. Поверхностный эффект. Случай плоского проводника

Ток высокой частоты, проходя по проводнику, сосредотачивается главным образом у его поверхности. Это явление носит название поверхностного эффекта или скин-эффекта¹⁾.

Причину поверхностного эффекта при не очень высоких частотах нетрудно объяснить с помощью закона электромагнитной индукции и правила Ленца. Пусть по цилиндрическому проводу (рис. 55.1) постоянного сечения течёт ток высокой частоты.

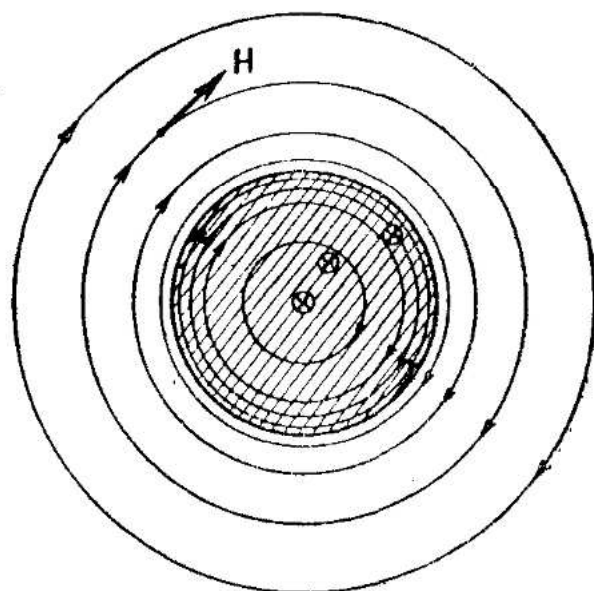


Рис. 55.1

Рассматривая провод, по которому течёт переменный ток, как совокупность элементарных, нитеобразных проводов, параллельных оси провода, мы видим (см. рис. 55.1), что чем ближе такая элементарная нить к оси провода, тем с большим числом линий магнитного поля она сцеплена.

При переменном токе переменное магнитное поле наводит в нитях эдс индукции, которая (в соответствии с правилом Ленца) препятствует изменению тока и, если ток периодический, уменьшает его амплитуду. Наводимая эдс тем больше, чем больше потокосцепление. Таким образом, амплитуды плотности тока полу-

¹⁾ Skin по-английски значит «кожа».

чаются неодинаковые по сечению провода: у оси провода они меньше, чем на периферии, а это и есть поверхностный эффект.

При высоких частотах правильное представление о поверхностном эффекте мы получим, рассматривая электромагнитное поле в проводе и ток как электромагнитную волну, проникающую в проводник и поглощающуюся по мере своего углубления.

Эта точка зрения даёт даже более отчётливое объяснение явления; рассуждая так, легко убедиться, что концентрация тока будет наибольшая на той стороне проводника, с которой в него проникает электромагнитная волна. Так, в коаксиальном кабеле ток при высокой частоте будет концентрироваться у поверхности внутреннего провода и у внутренней поверхности коаксиальной трубы; в параллельных шинах — на поверхностях, обращённых друг к другу, и т. д.

Решим задачу о расчёте поверхностного эффекта в плоском проводнике. Рассмотрим поверхностный эффект в одной из двух шин.

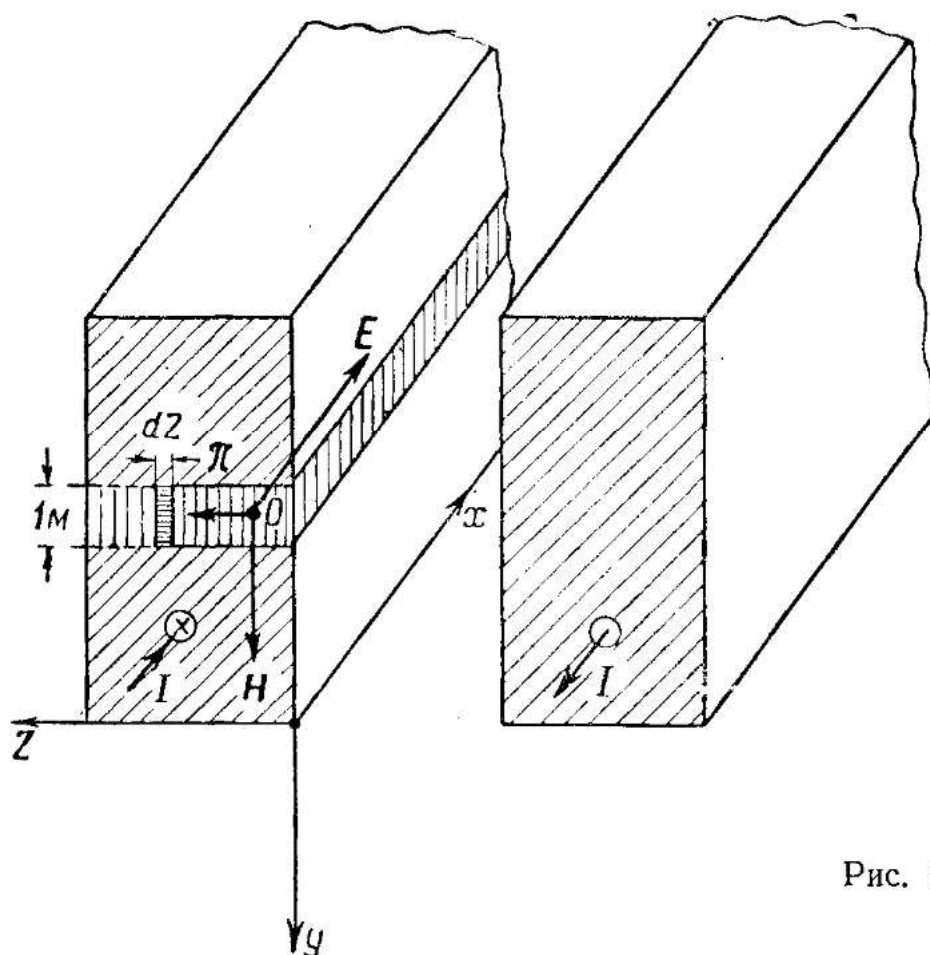


Рис. 55.2

Пусть ширина и толщина шин достаточно велики и больше, чем расстояние между ними. Тогда в точках около середины шины, у её внутренней поверхности поле можно считать плоским. Выбрав оси координат, как показано на рис. 55.2, получим для точки 0

$$E = E_x, \quad H = H_y. \quad (55.1)$$

Комплексные амплитуды напряжённостей поля [см. ф-лу (51.34)] будут равны

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{E}}_x = \mathcal{E}_0 e^{-\tilde{\gamma} z}; \quad \dot{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{H}}_y = \dot{\mathcal{E}} \frac{\tilde{\gamma}}{i \mu_a \omega}. \quad (55.2)$$

На основании ф-лы (51.24)

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu_a \sigma \omega}{2}} (1 + i) = \sqrt{\mu_a \sigma \omega} e^{i \frac{\pi}{4}}. \quad (55.3)$$

Получим

$$\dot{\mathcal{H}}_y = \dot{\mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}} e^{i \frac{\pi}{4}}} = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{z_0}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{z_0} = \sqrt{\frac{\mu_a \sigma \omega}{2}}. \quad (55.4)$$

Смысл этого обозначения выяснится ниже. Определим комплексную амплитуду плотности тока. Так как

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{z_0} (1 + i) \text{ и } \delta = \sigma E. \quad (55.5)$$

то, обозначив напряжённость поля у поверхности ($z=0$) E_0 , мы получим

$$\dot{\delta} = \sigma \dot{\mathcal{E}} = \sigma \mathcal{E}_0 e^{-\tilde{\gamma} z} = \sigma \mathcal{E}_0 e^{-\frac{z}{z_0}} e^{-i \frac{z}{z_0}}. \quad (55.6)$$

Амплитуда плотности тока на поверхности (при $z=0$) будет

$$\delta_0 = \sigma \mathcal{E}_0,$$

следовательно,

$$\dot{\delta} = \delta_0 e^{-\frac{z}{z_0}} e^{-i \frac{z}{z_0}}. \quad (55.7)$$

Плотность тока при увеличении z уменьшается по показательному закону и изменяет свою фазу.

Найдём комплексную амплитуду тока (I), приходящегося на полосу, взятую вдоль шины, шириной единица и произвольной толщины (сечение этой полосы на рис. 55.2 заштриховано вертикальным штрихом).

Тогда

$$I = \int_0^\infty \dot{\delta} \cdot dz \cdot 1 = \int_0^\infty \delta_0 e^{-(1+i) \frac{z}{z_0}} dz = \frac{\delta_0 z_0}{1+i}. \quad (55.8)$$

Бесконечный верхний предел не нарушит правильности расчёта и при шине конечной толщины, так как плотность тока, как будет показано ниже, даже при относительно небольших частотах быстро убывает с глубиной, и (практически) весь ток оказывается сосредоточенным в поверхностном слое толщиной $(3 \div 5) z_0$.

Падение напряжения на единицу длины этой полосы на её поверхности (например, от $x=0$ до $x=1$) равно напряжённости $\mathcal{E}_0$. Так как $\mathcal{E}_0 = \frac{\delta_0}{\sigma}$, то комплексное внутреннее сопротивление единицы длины полосы будет

$$Z_{\text{внутр}} = r_{\sim} + i \omega L_{\text{внутр}} = \frac{\mathcal{E}_0}{I} = \frac{1+i}{z_0 \sigma} = (1+i) \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}}, \quad (55.9)$$

следовательно,

$$r_{\sim} = \omega L_{\text{внутр}} = \frac{1}{z_0 \sigma} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}}. \quad (55.10)$$

Комплексное сопротивление $Z_{\text{внутр}}$ мы называли внутренним потому, что его можно вычислить, исходя из значения $\mathcal{E}_0$ на поверхности шины.

Чтобы получить полное сопротивление провода, надо к $Z_{\text{внутр}}$ прибавить индуктивное сопротивление от внешнего магнитного потока ($i\omega L_{\text{внешн}}$).

Угол сдвига фаз между комплексными амплитудами тока I и напряжения $\mathcal{E}_0$ на поверхности будет в данном случае равен 45° [см. ф-лу (55.3)].

Выясним теперь физический смысл величины $z_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \sigma}}$. При равномерном распределении тока по сечению провода (постоянный ток) его сопротивление определяется формулой

$$r_{\sim} = \frac{l}{\sigma S}. \quad (55.11)$$

Сравнивая это выражение с $r_{\sim}$, мы заключаем, что $r_{\sim}$ есть сопротивление единицы длины полосы, у которой ширина — единица, толщина — z_0 и сечение $S = z_0 \cdot 1$.

Следовательно, активное сопротивление полосы единичной ширины и бесконечной толщины в режиме поверхностного эффекта равно сопротивлению такой же полосы, толщины z_0 при постоянном токе, с плотностью тока, равной δ_0 , где δ_0 — значение плотности тока у поверхности провода в режиме поверхностного эффекта.

Расстояние z_0 на этом основании называется эквивалентной глубиной проникновения.

Подсчитаем эквивалентную глубину проникновения для различных частот в медном проводе.

Подставляя в ф-лу (55.4) значения $\sigma_{\text{медь}} = 5,8 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$; $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{гн}}{\text{м}}$, найдём

$$z_0 = \frac{0,0662}{\sqrt{f}}; r_{\sim} = 2,61 \cdot 10^{-7} \sqrt{f}. \quad (55.12)$$

Результат подсчёта сведём в табл. 55.1

Таблица 55.1

f , гц	z_0 , мм	$r_{\sim}$, мком
50	9,34	1,84
1000	1,90	8,25
$3 \cdot 10^6$ ($\lambda = 100$ м)	0,0382	452,0
10^{10} ($\lambda = 3$ см)	0,00066	16100,0

Таким образом, при радиочастотах, эквивалентная глубина проникновения для меди оказывается порядка от сотых до десятитысячных долей миллиметра. Плотность тока на такой глубине при поверхностном эффекте составляет 36,8% от плотности тока у поверхности [ф-ла (51.11)].

На глубине $3z_0$ плотность тока будет составлять всего только

$$e^{-3} \approx 0,05 = 5\% \quad (55.13)$$

своего поверхностного значения. Можно считать, что весь переменный ток сосредоточен в слое толщиной $3z_0$.

§ 56. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе

Практически важный случай поверхностного эффекта — это поверхностный эффект в цилиндрических проводах. Рассмотрим цилиндрический провод с переменным током (рис. 56.1). Введя цилиндрические координаты R , χ , z , мы на основании условий симметрии заключим, что

$$\left. \begin{aligned} E &= E_z = f(R) \\ H &= H_\chi = \Phi(R) \\ \delta &= \delta_z = \sigma E = \sigma f(R) \end{aligned} \right\}. \quad (56.1)$$

Уравнение, определяющее E , а следовательно, и δ , мы получим из ур-ния (40.6), отбросив вторую производную по t , что соответствует пренебрежению током смещения

$$\nabla^2 \delta = \mu_a \sigma \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (56.2)$$

Такое уравнение, в котором связывается сумма вторых производных от искомой функции по координатам с первой производной этой функции по времени, носит название уравнения теплопроводности или уравнения Фурье.

Выражение ∇^2 (оператор Лапласа) в цилиндрической системе координат для функции, зависящей только от R , имеет вид (см. часть первую курса, § 7)

$$\nabla_R^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right), \quad (56.3)$$

следовательно,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \delta}{\partial R} \right) = \mu_a \sigma \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

Введём комплексное изображение

$$\dot{\delta}(R, t) = \dot{\delta}(R) e^{i\omega t} = \dot{\delta} e^{i\omega t}. \quad (56.4)$$

Подставив комплексное изображение в ур-ние (56.2) и выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^2 \dot{\delta}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial R} + (-i\mu_a \sigma \omega) \dot{\delta} = 0,$$

где $\dot{\delta}$ — комплексная амплитуда.

Полагая

$$-i\mu_a \sigma \omega = \dot{\gamma}^2, \quad \dot{\gamma} = i^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\mu_a \sigma \omega}, \quad (56.5)$$

где $\dot{\gamma}$, сопряжённое значение $\tilde{\gamma}$ [см. ф-лу (55.3)], можно записать

$$\frac{\partial^2 \dot{\delta}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial R} + \dot{\gamma}^2 \dot{\delta} = 0.$$

Введём новую независимую переменную

$$y = \dot{\gamma}^* R. \quad (56.6)$$

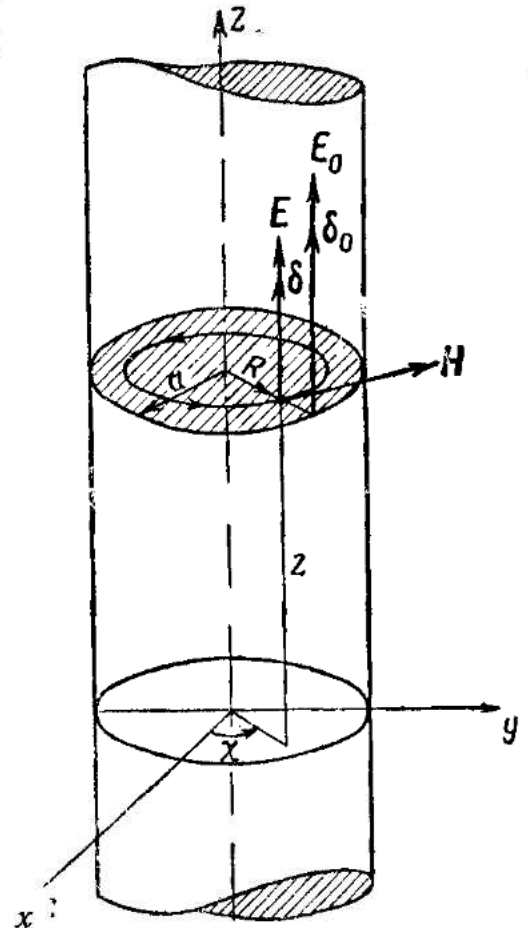


Рис. 56.1

Подставляя её в предыдущее уравнение и сокращая на y^* , получим уравнение, называемое уравнением Бесселя нулевого порядка

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \delta}{\partial y} + \delta = 0. \quad (56.7)$$

Общий вид уравнения Бесселя порядка p будет

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{df}{dy} + \left(1 - \frac{p^2}{y^2}\right) f = 0. \quad (56.8)$$

Уравнение Бесселя является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Согласно общей теории дифференциальных уравнений общий интеграл линейного уравнения второго порядка можно представить как сумму двух частных, линейно независимых его интегралов:

$$f = Af_1 + Bf_2. \quad (56.9)$$

Один из этих частных интегралов, обращающийся в нуль при $y=0$, называется функцией Бесселя первого рода¹⁾ порядка p

$$f_1(y) = J_p(y). \quad (56.10)$$

Другой частный интеграл, обращающийся при $y=0$ в бесконечность, называется функцией Неймана порядка p или функцией Бесселя второго рода порядка p и обозначается²⁾

$$f_2(y) = N_p(y). \quad (56.11)$$

Эти функции могут быть представлены сходящимися рядами. При действительном аргументе они представляют собой осциллирующие функции с уменьшающейся амплитудой и изменяющимся расстоянием между нулевыми точками (рис. 56.2 а, б).

Если аргумент мнимый ($y=ix$), то функции Бесселя и Неймана становятся аperiодичны, причём функции чётного порядка остаются действительными, а нечётного становятся чисто мнимыми (рис. 56.3а, б).

Решение ур-ния (56.7) выражается через функции нулевого порядка

$$\delta = AJ_0(y) + BN_0(y). \quad (56.12)$$

¹⁾ За исключением только функции Бесселя нулевого порядка, которая при $y=0$ обращается в 1 [$J_0(0)=1$].

²⁾ При p — целом. Если p — не целое, то функция Бесселя первого рода, $J_{-p}(y)$ будет линейно независима от $J_p(y)$ и может служить вторым частным интегралом в общем решении.

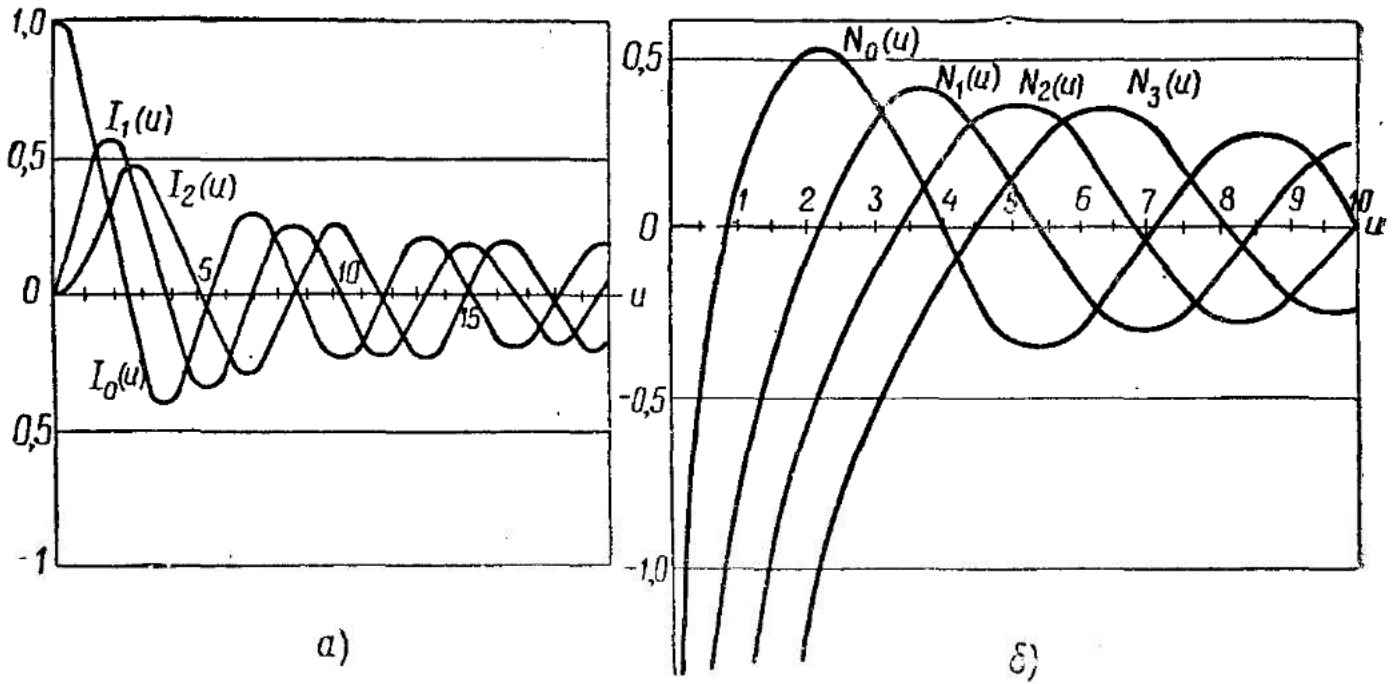


Рис. 56.2

Так как при $y=0$ функции Неймана обращаются в бесконечность, а плотность тока во всех точках сечения провода конечна, то, очевидно, $B=0$, и

$$\dot{\delta} = A J_0(y) = A J_0(\gamma^* R). \quad (56.13)$$

На поверхности провода

$$\delta_0 = A J_0(\gamma^* a), \quad (56.14)$$

следовательно,

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 \frac{J_0(\gamma^* R)}{J_0(\gamma^* a)}. \quad (56.15)$$

В нашем случае γ^* — величина комплексная

$$\gamma^* = i^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\mu \omega \sigma} = \frac{i^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2}}{z_0} = \frac{1-i}{z_0}. \quad (56.16)$$

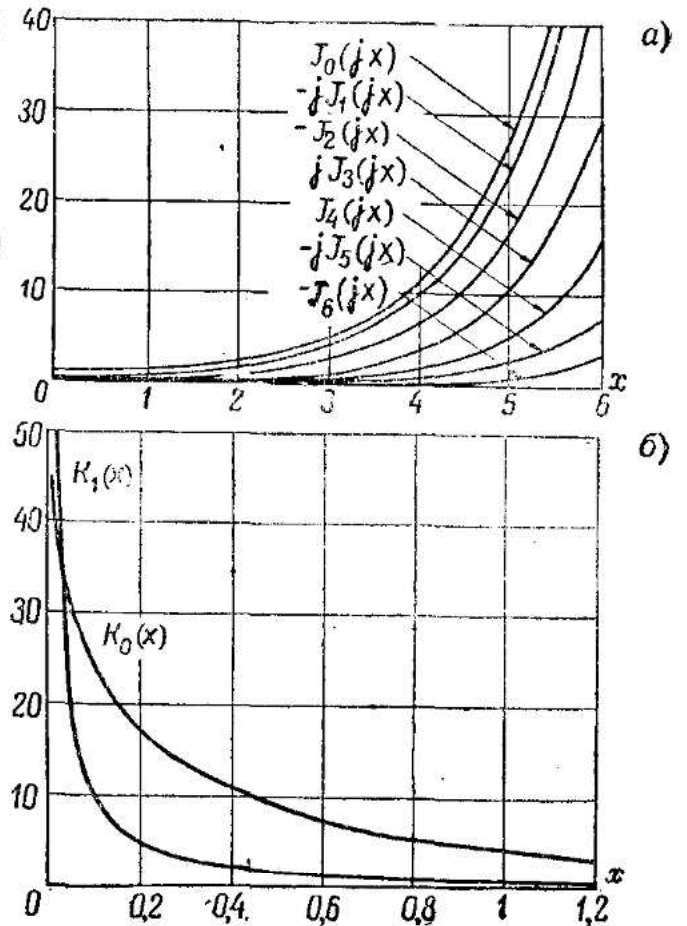


Рис. 56.3

Рассчитаем внутреннее сопротивление провода в режиме поверхностного эффекта. Вычислим комплексную амплитуду тока (рис. 56.4)

$$I = \int_0^a \dot{\delta} 2\pi R dR = \int_0^a A J_0(\gamma^* R) 2\pi R dR. \quad (56.17)$$

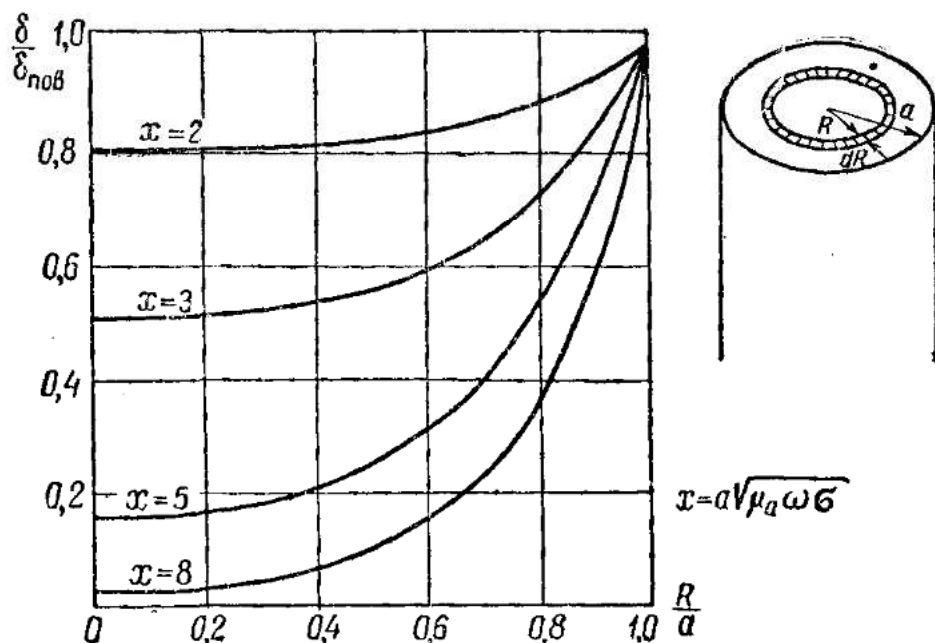


Рис. 56.4

Из теории функций Бесселя известно, что

$$\frac{d}{dy} J_0(y) = -J_1(y); \quad \int y J_0(y) dy = y J_1(y). \quad (56.18)$$

Умножим числитель и знаменатель уравнения (56.17) на γ^{*2} и, применяя предыдущую формулу, получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi A}{\gamma^{*2}} \int_0^a (\gamma^* R) J_0(\gamma^* R) d(\gamma^* R) = \frac{2\pi A}{\gamma^{*2}} [\gamma^* R J_1(\gamma^* R)]_0^a = \\ &= A \frac{2\pi a}{\gamma^*} J_1(\gamma^* a); \end{aligned} \quad (56.19)$$

отсюда

$$A = \frac{I \gamma^*}{2\pi a J_1(\gamma^* a)}, \quad (56.20)$$

следовательно,

$$\dot{\delta} = \frac{I \gamma^*}{2\pi a} \frac{J_0(\gamma^* R)}{J_1(\gamma^* a)}, \quad \dot{\mathcal{E}} = \frac{\dot{\delta}}{\sigma} = \frac{I \gamma^*}{2\pi a \sigma} \frac{J_0(\gamma^* R)}{J_1(\gamma^* a)}. \quad (56.21)$$

Комплексное «внутреннее» сопротивление единицы длины провода, как и в предыдущем параграфе, будет равно отношению комплексных амплитуд напряжённости поля на поверхности провода и тока:

$$Z_{\text{внутр}} = \frac{\dot{\mathcal{E}}_0}{\dot{I}} = \frac{\dot{\gamma}^*}{2\pi a \sigma} \frac{J_0(\dot{\gamma}^* a)}{J_1(\dot{\gamma}^* a)} = r_{\sim} + i \omega L_{\text{внутр}}. \quad (56.22)$$

Дальнейший расчёт $r_{\sim}$ и $\omega L_{\text{внутр}}$ для числовых данных выполняется с помощью таблиц функций Бесселя комплексного аргумента.

Для расчётов с функциями Бесселя существуют подробно разработанные таблицы, например таблицы функций Янке и Эмде, из которых взяты приведённые в этом параграфе кривые.

Рассчитаем внутреннее сопротивление для высоких частот. В этом случае эквивалентная глубина проникновения $\left(z_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu_a \omega \sigma}}\right)$ должна быть значительно меньше радиуса провода a

$$\frac{a}{z_0} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_a \omega \sigma} \gg 1. \quad (56.23)$$

Очевидно, модуль аргумента функции Бесселя в выражении $Z_{\text{внутр}}$, равный

$$|\dot{\gamma}^* a| = \left| i^{-\frac{1}{2}} a \sqrt{\mu_a \omega \sigma} \right| = a \sqrt{\mu_a \omega \sigma} \gg 1, \quad (56.24)$$

будет также значительно больше единицы.

В теории функций Бесселя есть соотношение: при $y \gg 1$

$$J_0\left(i^{-\frac{1}{2}} y\right) \approx i J_1\left(i^{-\frac{1}{2}} y\right). \quad (56.25)$$

Воспользовавшись этим соотношением, получим для высоких частот

$$Z_{\text{внутр}} = \frac{i^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\mu_a \omega \sigma}}{2\pi a \sigma} i = \frac{i^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mu_a \omega \sigma}}{2\pi a \sigma} = \frac{1+i}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}}, \quad (56.26)$$

откуда

$$r_{\sim} = \omega L_{\text{внутр}} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}}. \quad (56.27)$$

Сопротивление рассматриваемого отрезка провода единичной длины постоянному току равно

$$r_{\sim} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}, \quad (56.28)$$

откуда

$$\frac{r_{\sim}}{r_{\sim}} = \frac{\omega L_{\text{внутр}}}{r_{\sim}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \sqrt{\mu_a \omega \sigma}. \quad (56.29)$$

На рис. 56.4 приведены кривые распределения плотности тока в цилиндрическом проводе при различных значениях параметра $x = a \sqrt{\mu_a \omega \sigma}$.

Комплексное сопротивление единицы поверхности цилиндрического провода будет равно

$$Z_{\text{пов. внутр}} = Z_{\text{внутр}} 2\pi a = (1 + i) \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} \quad (56.30)$$

и совпадает с соответствующим выражением сопротивления плоского проводника [см. ф-лу (55.9)].

Таким образом, если удовлетворяется неравенство (56.23), то вместо формул поверхностного эффекта в цилиндрическом проводнике можно применить простые формулы поверхностного эффекта в плоском проводнике.

Практически такая замена допустима, если

$$\frac{a}{z_0} \gg 3. \quad (56.31)$$



Глава X

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 57. Расчёт поля элементарных излучателей—электрического и магнитного диполей Герца

Элементарным излучателем называется диполь с переменным во времени моментом. Диполь может быть электрическим или магнитным. Такие излучатели называются электрическим диполем Герца и магнитным диполем Герца.

Момент электрического диполя

$$\mathbf{p}_e(t) = Q(t) \mathbf{l}_0, \quad (57.1)$$

где $Q(t)$ — заряд диполя и $\mathbf{l}_0 = l_0 \mathbf{l}^0$ — его плечо;

$\mathbf{l}^0$ — единичный вектор в направлении от $-Q$ к $+Q$.

Производная по времени от электрического момента равна

$$\frac{d\mathbf{p}_e}{dt} = \frac{dQ}{dt} \mathbf{l}_0 = i(t) \mathbf{l}_0. \quad (57.2)$$

Момент магнитного диполя [см. ф-лу (26.5')] равен

$$\mathbf{p}_m(t) = -\mu_a i(t) \mathbf{S}, \quad (57.3)$$

где $i(t)$ — ток, текущий в рамке площадью $\mathbf{S}$. Направление $\mathbf{S}$ образует с током i правовинтовую систему.

Производная по времени от магнитного момента равна

$$\frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = -\mu_a \frac{di}{dt} \mathbf{S}. \quad (57.4)$$

Электрический диполь Герца

Выполним расчёт поля электрического диполя Герца. Расположим сферическую систему координат, как указано на рис. 57.1.

Поле, очевидно, не зависит от координаты χ .

Пусть диполь возбуждён синусоидальным током

$$i = I_m \cos \omega t = I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (57.5)$$

Момент диполя (если считать положительное направление тока в диполе от $-Q$ к $+Q$) будет равен

$$p_z = l_0 \int i dt = \frac{l_m}{\omega} \sin \omega t \cdot l_0. \quad (57.6)$$

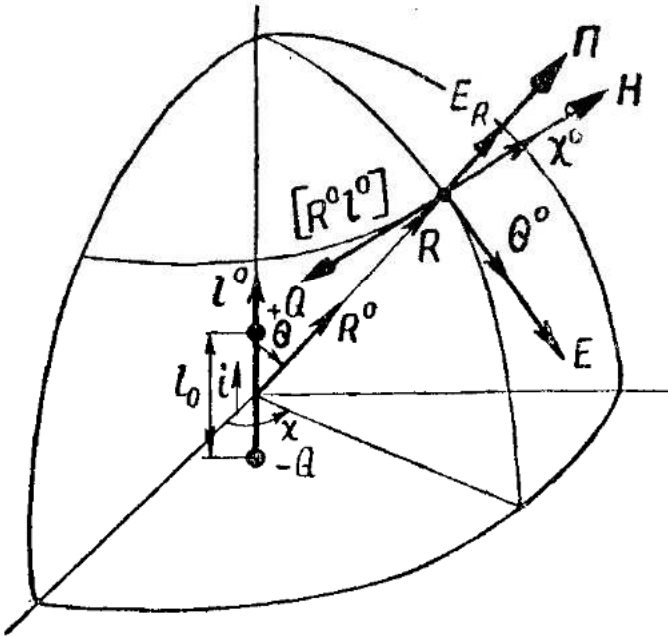


Рис. 57.1

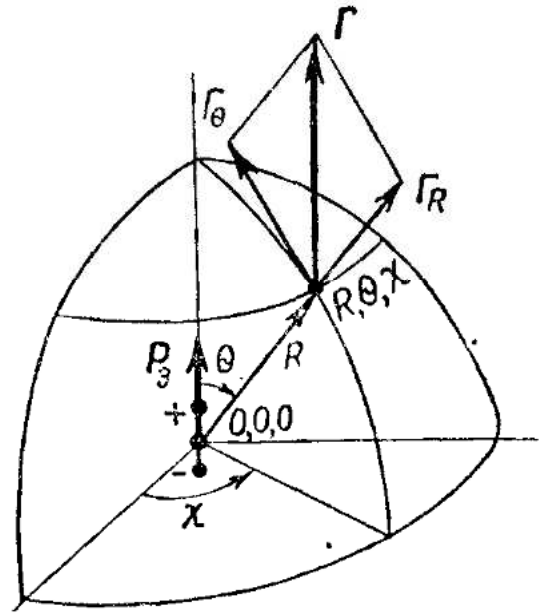


Рис. 57.2

Комплексные изображения и комплексные амплитуды этих величин получатся:

$$I_m(t) = i I_m e^{i\omega t}; \quad \dot{I}_m = i I_m, \quad (57.7)$$

$$\dot{p}_z(t) = \frac{l_m}{\omega} e^{i\omega t} l_0; \quad \dot{p}_z = \frac{l_m}{\omega} l_0. \quad (57.8)$$

Будем рассматривать поле на расстояниях

$$R \gg l_0. \quad (57.9)$$

Для расчётов поля в этих условиях можно воспользоваться электрическим вектором Герца в его простейшем виде [см. ф-лу (43.22)]

$$\Gamma(R, \theta, t) = \frac{p_{эл} \left(0, t - \frac{R}{v} \right)}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (57.10)$$

Для гармонически меняющегося тока получим

$$\begin{aligned} p_{эл} \left(0, t - \frac{R}{v} \right) &= l_0 l^0 \frac{l_m}{\omega} \sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right] = \\ &= l_0 l^0 \frac{l_m}{\omega} \sin (\omega t - \beta R). \end{aligned}$$

Комплексные изображения и амплитуды равны

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{I_m}{\omega} e^{i(\omega t - \beta R)} \mathbf{l}_0, \quad \dot{\mathbf{p}}_s = \frac{I_m}{\omega} e^{-i\beta R} \mathbf{l}_0. \quad (57.11)$$

Момент диполя и, следовательно, вектор Герца будут иметь лишь одну компоненту по оси $\mathbf{l}^0$ (рис. 57.2)

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{l}^0 = \frac{I_m l_0}{\omega} \frac{\sin(\omega t - \beta R)}{4\pi\epsilon_a R} \mathbf{l}^0. \quad (57.12)$$

Составляющие вектора Герца в сферической системе координат, как это видно из рис. 57.2, равны

$$\Gamma_0 = -\Gamma \sin \theta, \quad \Gamma_R = \Gamma \cos \theta, \quad \Gamma_\chi = 0. \quad (57.13)$$

Комплексное изображение вектора Герца в точке с координатами R, θ, χ будет

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Gamma}}(R, \theta, t) &= \dot{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{l}^0 = \frac{I_m l_0}{4\pi\epsilon_a \omega} \frac{e^{i(\omega t - \beta R)}}{R} \mathbf{l}^0 = \\ &= \frac{I_m l_0}{4\pi\epsilon_a \omega} \frac{e^{-i\beta R}}{R} \mathbf{l}^0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (57.14)$$

Комплексные изображения искомых векторов поля имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(R, \theta, t) &= \dot{\mathcal{E}}(R, \theta) e^{i\omega t} \\ \dot{\mathbf{H}}(R, \theta, t) &= \dot{\mathcal{H}}(R, \theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\}. \quad (57.15)$$

Расчёт выполняется по ф-лам (43.10) и (43.3):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(t) &= \text{rot rot } \dot{\mathbf{\Gamma}}(R, \theta, t) \\ \dot{\mathbf{H}}(t) &= \epsilon_a \text{rot } \frac{\partial \dot{\mathbf{\Gamma}}(R, \theta, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (57.16)$$

Выполняя дифференцирование по времени и сокращая на множитель $e^{i\omega t}$, получим выражения комплексных амплитуд поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \text{rot rot } \dot{\mathbf{\Gamma}}(R, \theta) \\ \dot{\mathcal{H}} &= i\omega\epsilon_a \text{rot } \dot{\mathbf{\Gamma}}(R, \theta) \end{aligned} \right\}, \quad (57.17)$$

где

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}(R, \theta) = \frac{I_m l_0}{4\pi\epsilon_a \omega} \frac{e^{-i\beta R}}{R} \mathbf{l}^0 = \frac{I_m l_0}{4\pi\epsilon_a \omega} f(R) \mathbf{l}^0. \quad (57.18)$$

Здесь для сокращения записи положено

$$f = f(R) = \frac{e^{-1\beta R}}{R}. \quad (57.19)$$

Остаётся выполнить вычисление по ф-лам (57.17).

Рассчитаем $\text{rot } \dot{\Gamma}$. Компоненты комплексной амплитуды $\dot{\Gamma}$ равны [см. ф-лу (57.13)]

$$\dot{\Gamma}_R = \frac{I_m l_0}{4\pi\epsilon_a\omega} f \cos \theta; \quad \dot{\Gamma}_\theta = -\frac{I_m l_0}{4\pi\epsilon_a\omega} f \sin \theta; \quad \dot{\Gamma}_\chi = 0. \quad (57.20)$$

Развёртывая ротор в сферической системе координат [см. приложение I, ф-ла (П.37)], получим:

$$\begin{aligned} \text{rot}_R \dot{\Gamma} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{\Gamma}_\chi) - \frac{\partial \dot{\Gamma}_\theta}{\partial \chi} \right\} = 0; \quad \mathcal{H}_R = 0, \\ \text{rot}_\theta \dot{\Gamma} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \dot{\Gamma}_R}{\partial \chi} - \frac{\partial (R \dot{\Gamma}_\chi)}{R \partial R} = 0; \quad \mathcal{H}_\theta = 0, \\ \text{rot}_\chi \dot{\Gamma} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{\Gamma}_\theta) - \frac{\partial \dot{\Gamma}_R}{R \partial \theta} \neq 0; \quad \mathcal{H}_\chi \neq 0. \end{aligned} \quad (57.21)$$

Первые две компоненты равны нулю, так как комплексная амплитуда вектора $\dot{\Gamma}$ не зависит от координаты χ и $\dot{\Gamma}_\chi = 0$.

Подставим в выражение третьей компоненты ротора значения $\dot{\Gamma}_R$ и $\dot{\Gamma}_\theta$ по ф-ле (57.20) и, проделав преобразование, получим

$$\text{rot}_\chi \dot{\Gamma} = -\frac{I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial R} \quad (57.22)$$

и по ф-ле (57.17)

$$\dot{\mathcal{H}}_\chi = -i \frac{I_m l_0}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial R}. \quad (57.23)$$

Для расчёта компонент $\mathcal{E}$ вычислим $\text{rot rot } \dot{\Gamma}$.

Подставляя в ф-лы (57.21) вместо компонент комплексной амплитуды $\dot{\Gamma}$ единственную, отличную от нуля компоненту $\text{rot } \dot{\Gamma}$ [см. ф-лу (57.22)], получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \text{rot}_\chi \dot{\Gamma}), \\ \dot{\mathcal{E}}_\theta &= -\frac{\partial (R \text{rot}_\chi \dot{\Gamma})}{R \partial R}, \\ \dot{\mathcal{E}}_\chi &= 0 \end{aligned} \quad (57.24)$$

и, выполнив вычисление, получим:

$$\dot{\mathcal{E}}_R = -\frac{2I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a R} \frac{\partial f}{\partial R} \cos \theta, \quad (57.25)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_\theta = \frac{I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) \sin \theta. \quad (57.26)$$

Вычислив производные $\frac{\partial f}{\partial R}$ и $\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right)$ и подставив их значения в формулы комплексных амплитуд компонент векторов поля, получим:

$$\dot{\mathcal{H}}_\chi = i \frac{I_m l_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{i\beta}{R} \right\} e^{-i\beta R} \sin \theta, \quad (57.27)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_R = \frac{2I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a} \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{i\beta}{R^2} \right\} e^{-i\beta R} \cos \theta, \quad (57.28)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_\theta = \frac{I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a} \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{i\beta}{R^2} - \frac{\beta^2}{R} \right\} e^{-i\beta R} \sin \theta. \quad (57.29)$$

Исследуем найденное решение. Подставим в формулы комплексных амплитуд $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \beta v = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$.

Получим:

$$\dot{\mathcal{H}}_\chi = \frac{I_m l_0}{4\pi} \left\{ \frac{i}{R^2} - \frac{2\pi}{R\lambda} \right\} \sin \theta e^{-i\beta R}, \quad (57.30)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_R = 2 \frac{I_m l_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_a}} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi R^3} + \frac{i}{R^2} \right\} \cos \theta e^{-i\beta R}, \quad (57.31)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_\theta = \frac{I_m l_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_a}} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi R^3} + \frac{i}{R^2} - \frac{2\pi}{R\lambda} \right\} \sin \theta e^{-i\beta R}. \quad (57.32)$$

Ближняя зона (зона индукции)

Рассмотрим поле в области

$$l_0 \ll R \ll \lambda, \quad (57.33)$$

тогда

$$e^{-i\beta R} \approx 1, \quad (57.34)$$

так как

$$\beta R = \frac{2\pi R}{\lambda} \ll 1,$$

В выражениях комплексных амплитуд поля для ближней зоны будут, очевидно, преобладать первые члены и можно положить:

$$\dot{\mathcal{H}}_{\chi} = i \frac{I_m l_0}{4\pi R^2} \sin \theta, \quad (57.35)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_R = \frac{2I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a R^3} \cos \theta = \frac{2\rho_a}{4\pi\epsilon_a R^3} \cos \theta, \quad (57.36)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_0 = \frac{I_m l_0}{4\pi\epsilon_a \omega R^3} \sin \theta = \frac{\rho_a}{4\pi\epsilon_a R^3} \sin \theta. \quad (57.37)$$

Величина iI_m [см. ф-лу (57.7)] есть комплексная амплитуда тока в диполе. В ф-ле (57.35) нетрудно узнать закон Био—Савара (см. § 19).

Выражения комплексных амплитуд электрического поля (57.36) и (57.37) совпадают с выражением компонент поля статического диполя [см. ф-лы (5.10) и (5.11)] с учётом изменяющегося во времени заряда.

Интересно отметить, что формулы поля ближней зоны остаются без изменения при постоянном токе в диполе (случай $\beta=0$, $\lambda=\infty$, мыслимый лишь теоретически) и при постоянных зарядах на его концах.

Возвращаясь к переменному полю, видим, что между магнитным и электрическим полями в ближней зоне существует сдвиг фаз в 90° , т. е. электрическое и магнитное поля в этой зоне, определяемые первыми членами общих выражений (57.30, 57.31, 57.32), представляют стоячую волну (см. § 60).

Чтобы убедиться, что распространения электромагнитных волн, определяемых компонентами поля ближней зоны [см. ф-лы (57.35, 57.36, 57.37)] происходить не будет, следует рассчитать среднее значение радиальной компоненты вектора Пойнтинга.

Составим комплексную амплитуду радиальной составляющей вектора Пойнтинга. По ф-ле (53.7)

$$\begin{aligned} \tilde{P}_R &= \frac{1}{2} \dot{\mathcal{H}}_{\chi}^* \dot{\mathcal{E}}_0 = \frac{1}{2} \left(-i \frac{I_m l_0 \sin \theta}{4\pi R^2} e^{+i\beta R} \right) \left(\frac{I_m l_0 \lambda \sin \theta}{4\pi^2 R^3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{-i\beta R} \right) = \\ &= i \frac{I_m^2 l_0^2 \lambda \sin^2 \theta}{32\pi^3 R^5} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \end{aligned} \quad (57.38)$$

Среднее значение вектора Пойнтинга равно в данном случае (см. § 53)

$$P_{cp} = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{P}_R \right\} = 0. \quad (57.39)$$

Таким образом, электромагнитная энергия, определяемая компонентами поля ближней зоны, колеблется около диполя и не излучается в пространстве.

В ближней зоне компоненты поля ближней зоны убывают обратно пропорционально второй и третьей степеням расстояния, т. е. очень быстро, и на достаточных удалениях от диполя начинают преобладать последние (так называемые «волновые») члены выражений (57.30, 57.31, 57.32), убывающие лишь обратно пропорционально первой степени расстояния.

Разумеется, компоненты поля, убывающие обратно пропорционально первой степени расстояния (так называемые компоненты дальней зоны), существуют и в области ближней зоны, и за счёт этих компонент, как это будет показано ниже, сквозь ближнюю зону происходит излучение электромагнитной энергии. Однако из-за относительной их малости сравнительно с компонентами ближней зоны они оказывают малое влияние на характер и структуру поля ближней зоны.

Перейдём к рассмотрению поля дальней зоны, поля в областях, удалённых от диполя на расстояния R , большие длины волны λ .

Дальняя зона (волновая зона)

$$R \gg \lambda. \quad (57.40)$$

В этой зоне поле определяется последними членами выражений (57.30, 57.31, 57.32), уменьшающимися обратно пропорционально первой степени расстояния.

Представим выражения в фигурных скобках этих формул, определяющие зависимость величин компонент поля от расстояния, как:

$$(57.30) \quad \dots \frac{1}{\lambda^2} \left\{ i \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 - 2\pi \frac{\lambda}{R} \right\},$$

$$(57.31) \quad \dots \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^3 + i \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \right\},$$

$$(57.32) \quad \dots \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^3 + i \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 - 2\pi \frac{\lambda}{R} \right\},$$

если $\frac{\lambda}{R} \ll 1$, то, очевидно,

$$\left(\frac{\lambda}{R} \right)^3 \ll \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \ll \frac{\lambda}{R},$$

и поэтому члены, содержащие $\frac{\lambda}{R}$ во второй и третьей степенях, могут быть отброшены.

В выражении компонент электрического поля на том же основании можно положить $\dot{\mathcal{E}}_R \ll \dot{\mathcal{E}}_0$ и, сравнительно с $\dot{\mathcal{E}}_0$, принять $\dot{\mathcal{E}}_R = 0$; тогда:

$$\dot{\mathcal{H}}_\chi = -\frac{I_m l_0}{2\lambda R} \sin \theta e^{-i\beta R}, \quad (57.41)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_R = 0, \quad (57.42)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_0 = -\frac{I_m l_0}{2\lambda R} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin \theta e^{-i\beta R}. \quad (57.43)$$

Отметим прежде всего, что комплексные амплитуды $\dot{\mathcal{E}}_0$ и $\dot{\mathcal{H}}_\chi$ находятся в фазе, как, например, в бегущей плоской волне. Отношение их будет равно

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}_0}{\dot{\mathcal{H}}_\chi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \zeta, \quad (57.44)$$

т. е. характеристическому сопротивлению среды, определённого нами при изучении плоских волн (см. § 50).

Взаимное расположение векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{\Pi}$ показано на рис. 57.3. Картина векторных линий электрического и магнитного

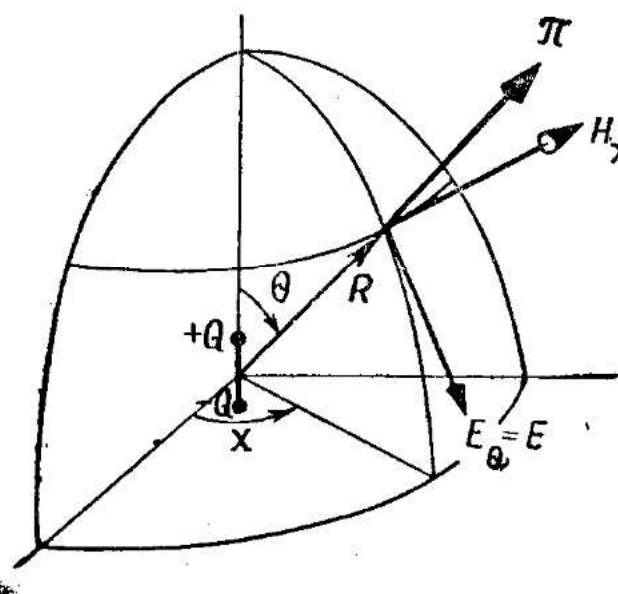


Рис. 57.3

полей волновой зоны диполя впервые рассчитана и построена Герцем в классической работе «Об электрических колебаниях высокой частоты» (эту работу мы упоминали в § 37) и приведена на рис. 57.4 (сплошные линии). Векторные линии электрического поля имеют своеобразную, полулунную форму и лежат в плоскостях, проходящих через ось диполя. Векторные линии магнитного поля—это концентричные диполю окружности, плоскости которых перпендикулярны его оси. В нижней части рис. 57.4 показана картина

векторов электрического и магнитного полей в их перспективном расположении. Чтобы наглядно представить, как протекает электромагнитный процесс в волновой зоне, обратимся к первым двум уравнениям Максвелла (38.1) и построим пунктирным штрихом картину плотности токов смещения $\left(\epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$ и изменения магнитного поля $\left(\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)$.

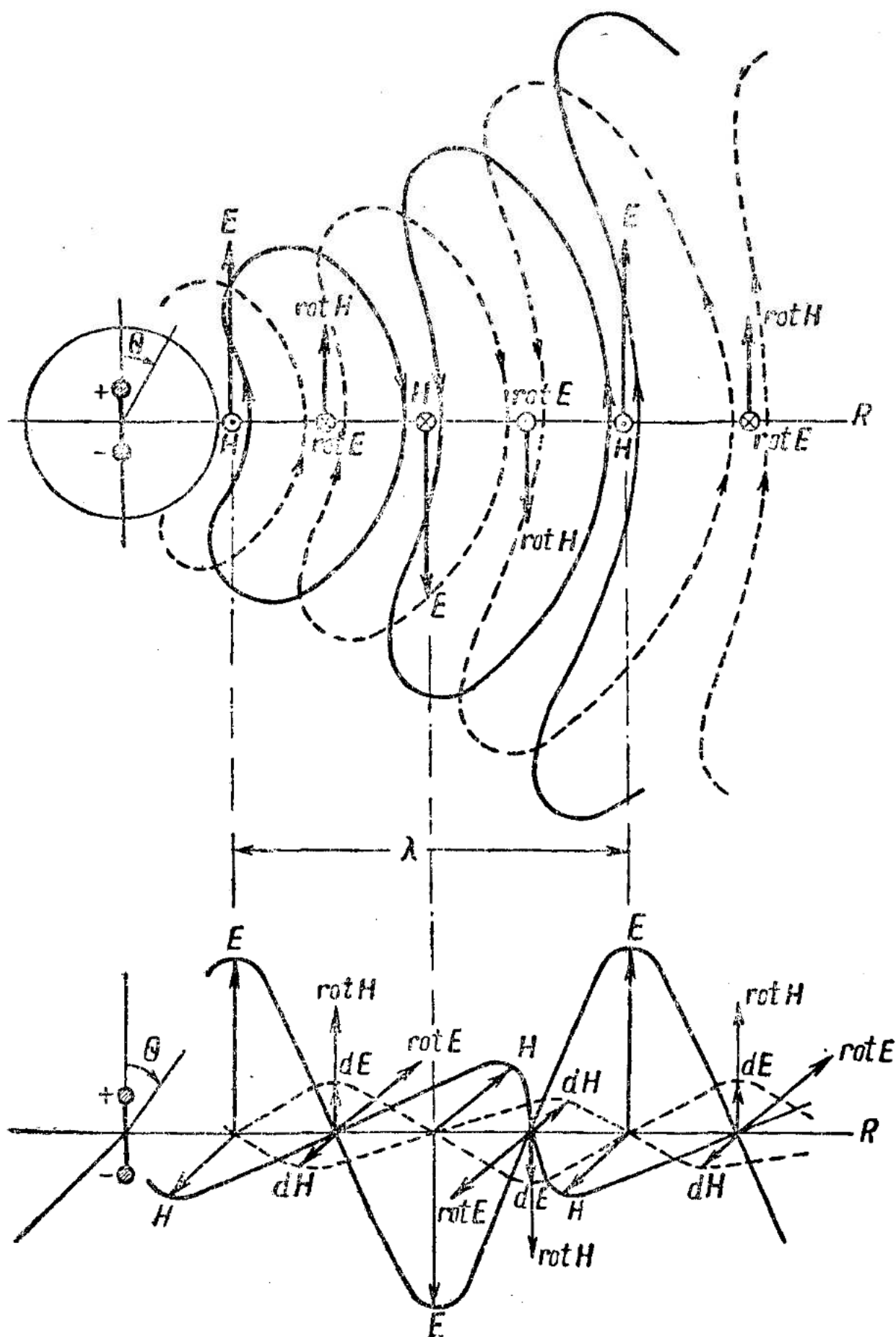


Рис. 57.4

Направление векторов $d\mathbf{E}$ и $d\mathbf{H}$ нетрудно установить, если мысленно сместить картину поля (на рис. 57.4) вправо, в сторону распространения (рис. 57.5). Построив на основании уравнения Максвелла векторы $\text{rot } \mathbf{E}$ и $\text{rot } \mathbf{H}$, видим (рис. 57.4), как векторные линии поля $\mathbf{E}$ охватывают линию $\text{rot } \mathbf{E}$ и векторные линии поля $\mathbf{H}$ охватывают линию $\text{rot } \mathbf{H}$, образуя правовинтовую систему.

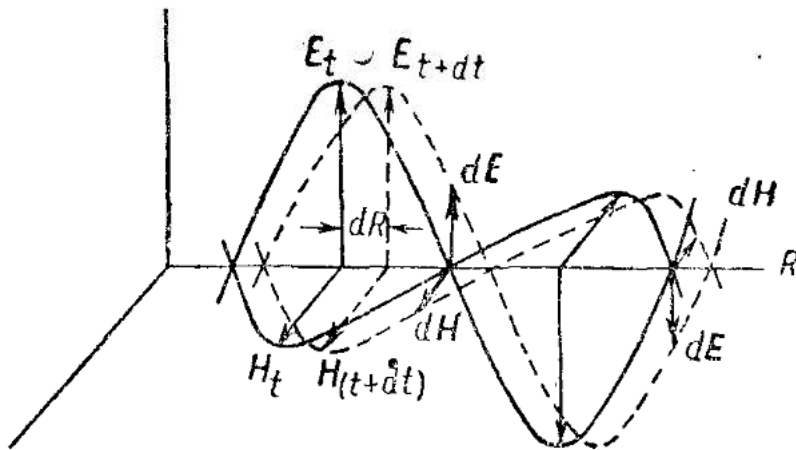


Рис. 57.5

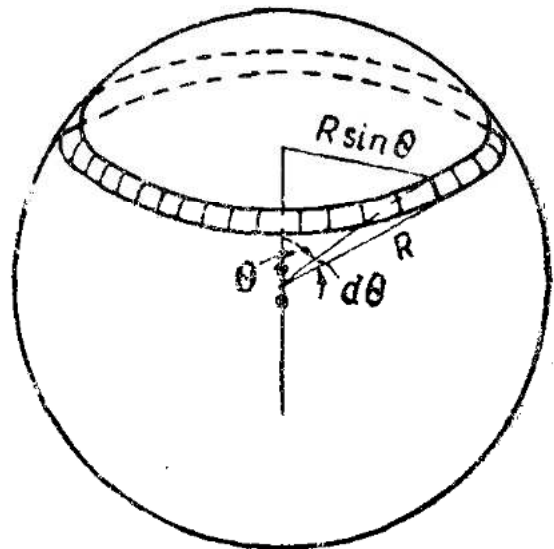


Рис. 57.6

Для расчёта электромагнитной мощности, излучаемой диполем, вычислим комплексный вектор Пойнтинга

$$\tilde{\Pi}_R = \frac{1}{2} \dot{\mathcal{E}}_0 \mathcal{H}_\chi^* = \frac{I_m^2 l_0^2}{8\lambda^2 R^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin^2 \theta = (\Pi_R)_{cp}. \quad (57.45)$$

Комплексный вектор Пойнтинга оказался действительной величиной. Эта величина и будет его средним значением.

Таким образом, волновая компонента поля характеризует излучающуюся и распространяющуюся электромагнитную волну с соответствующей энергией.

Подсчитаем полный поток электромагнитной энергии (за единицу времени), электромагнитную мощность, излучаемую диполем. Для этого проинтегрируем полученное среднее значение вектора Пойнтинга по поверхности сферы радиуса R

$$P_{эл-м} = \oint (\Pi_R)_{cp} \cdot d\mathbf{S} = \oint (\Pi_R)_{cp} dS. \quad (57.46)$$

Элемент поверхности сферы возьмём, как показано на рис. 57.6, в виде кругового пояса шириной $Rd\theta$

$$dS = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta,$$

и интеграл будем вычислять в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$

$$P_{\text{эл-м}} = \int_0^\pi \Pi_R 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{I_m^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left(\frac{l_0}{\lambda}\right)^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \quad (57.47)$$

Вычислим интеграл в последнем выражении

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{+1} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{эл-м}} &= \frac{\pi}{3} I_m^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left(\frac{l_0}{\lambda}\right)^2, \\ P_{\text{эл-м}} &= 40 \cdot \pi^2 I_m^2 \left(\frac{l_0}{\lambda}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (57.48)$$

для вакуума

Мы видим, что мощность излучения диполя резко растёт с уменьшением длины волны — отсюда и следует необходимость пользоваться для получения сколько-нибудь значительной излучаемой мощности высокочастотными электромагнитными колебаниями.

На основе принципа сохранения энергии нетрудно показать, что в волновой зоне векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны убывать обратно пропорционально первой степени расстояния.

Рассмотрим сферический слой объёма электромагнитной волны, излучаемой диполем, толщиной, например, λ , на расстоянии от диполя, значительно большем λ ($R_{\text{сл}} \gg \lambda$, где $R_{\text{сл}}$ — средний радиус слоя). Пусть $R_{\text{сл}}$ растёт со скоростью распространения электромагнитной волны. В таких условиях сквозь внутреннюю и внешнюю поверхности слоя электромагнитная энергия проходить не будет и количество электромагнитной энергии в слое будет неизменно. Объём слоя, равный $4\pi R^2 \lambda$, растёт пропорционально R^2 , следовательно, объёмная плотность электромагнитной энергии в объёме слоя будет уменьшаться обратно пропорционально квадрату R . Так как объёмная плотность электромагнитной энергии пропорциональна квадратам E и H

$$W_{0 \text{ эл-м}} = \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}, \quad (57.49)$$

то, очевидно, E и H будут уменьшаться обратно пропорционально первой степени R ¹⁾.

¹⁾ Это рассуждение принадлежит известному советскому физiku Леониду Исааковичу Мандельштаму (1879—1944).

Важной величиной при расчёте излучающих систем является так называемое сопротивление излучения. Подобно определению активного сопротивления проводника как свойства проводника преобразовывать электромагнитную энергию в тепловую, которое с количественной стороны оценивается соотношением

$$r_{\text{акт}} = \frac{P_{\text{дж}}}{I^2}, \quad (57.50)$$

где $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ — действующее значение тока, можно определить сопротивление излучения r_{Σ} как свойство излучающей системы излучать в окружающее пространство электромагнитную энергию, оцениваемое с количественной стороны соотношением

$$r_{\Sigma} = \frac{P_{\text{изл}}}{I^2}. \quad (57.51)$$

Рассчитаем сопротивление излучения диполя. Подставляя в предыдущую формулу значение $P_{\text{изл}}$ и $I^2 = \frac{I_m^2}{2}$ [см. ф-лу (57.48)], получим

$$r_{\Sigma} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_a}} \left(\frac{l_0}{\lambda} \right)^2. \quad (57.52)$$

В вакууме (и в атмосфере)

$$r_{\Sigma} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l_0}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l_0}{\lambda} \right)^2 = 790 \left(\frac{l_0}{\lambda} \right)^2.$$

В заключение рассчитаем величину $|\mathcal{E}_\theta|$ в волновой зоне в функции средней мощности, излучаемой диполем. Выразим из ф-лы (57.48) величину $\frac{I_m l_0}{\lambda}$:

$$\frac{I_m l_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{3P}{\pi \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_a}}}}$$

и подставим эту величину в выражение $(|\mathcal{E}_\theta|)$. Получим

$$|\mathcal{E}_\theta| = \frac{I_m l_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a} \frac{\sin \theta}{2R}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_a}} \frac{\sqrt{P} \sin \theta}{R}. \quad (57.53)$$

Эта формула называется формулой «идеальной радиопередачи». Для атмосферы

$$|\mathcal{E}_\theta| \approx 9,48 \sqrt{P} \frac{\sin \theta}{R}. \quad (57.54)$$

Магнитный диполь Герца

Расчёт поля элементарного магнитного излучателя можно выполнить так же, как и электрического, если вместо электрического вектора Герца взять магнитный [см. ф-лы (44.17)]

$$\Gamma^*(R, \theta, t) = \frac{\mathbf{p}_m \left(0, t - \frac{R}{v}\right)}{4\pi\mu_a R}. \quad (57.55)$$

Повторять эти преобразования мы не будем, а воспользуемся принципом двойственности, изложенным в § 44 (см. также § 26).

В соответствии с этим принципом заменим электрический момент

$$\mathbf{p}_e(t) = Q(t) \mathbf{l}_0 = \int i dt \mathbf{l}_0^1) \quad (57.56)$$

с комплексной амплитудой

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{I_m}{\omega} e^{-i\beta R} \mathbf{l}_0 \quad (57.56')$$

магнитным

$$\dot{\mathbf{p}}_m(t) = -\mu_a i(t) \mathbf{S} \quad (57.57)$$

с комплексной амплитудой

$$\dot{\mathbf{p}}_m = -\mu_a i I_m e^{-i\beta R} \mathbf{S}; \quad (57.57')$$

выполним затем замену:

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H} \text{ и } \epsilon_a \rightleftharpoons -\mu_a,$$

тогда формулы поля электрического диполя перейдут в формулы поля магнитного.

Решение, таким образом, будет получено сразу.

Решение для электрического диполя [ф-лы (57.27, 57.28, 57.29)] дано в форме комплексных амплитуд.

Для перехода к полю магнитного диполя заменим, как указано выше в этих формулах:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_e = \frac{I_m}{\omega} \mathbf{l}_0 \rightarrow \dot{\mathbf{p}}_m = -i\mu_a I_m \mathbf{S}, \\ \mathcal{E} \rightleftharpoons \mathcal{H}, \quad \epsilon_a \rightleftharpoons -\mu_a. \end{aligned} \quad (57.58)$$

¹⁾ Мгновенное значение тока в витке магнитного диполя примем такое же, как и в электрическом, т. е. $i = I_m \cos \omega t$.

В итоге получим:

$$\text{в ф-ле (27)} \quad \frac{I_m l_0}{4\pi} \rightarrow -i \frac{\mu_a \omega I_m S}{4\pi},$$

$$\text{в ф-ле (28)} \quad 2 \frac{I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a} \rightarrow -2i \frac{\mu_a I_m S}{4\pi(-\mu_a)}$$

$$\text{и в ф-ле (29)} \quad \frac{I_m l_0}{4\pi\omega\epsilon_a} \rightarrow -i \frac{\mu_a I_m S}{4\pi(-\mu_a)}.$$

Воспользуемся соотношением

$$\omega\mu_a = \mu_a \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda};$$

и в результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_\chi &= -i \frac{I_m}{2} \left(\frac{S}{\lambda} \right) \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left\{ \frac{i}{R^2} - \frac{2\pi}{R\lambda} \right\} \sin \theta e^{-i\beta R} \\ \dot{\mathcal{H}}_R &= 2i \frac{I_m}{2} \left(\frac{S}{\lambda} \right) \left\{ \frac{\lambda}{2\pi R^3} + \frac{i}{R^2} \right\} \cos \theta e^{-i\beta R} \\ \dot{\mathcal{H}}_0 &= i \frac{I_m}{2} \left(\frac{S}{\lambda} \right) \left\{ \frac{\lambda}{2\pi R^3} + \frac{i}{R^2} - \frac{2\pi}{R\lambda} \right\} \sin \theta e^{-i\beta R} \end{aligned} \right\}. \quad (57.59)$$

Остальные компоненты поля равны нулю:

$$\dot{\mathcal{E}}_R = 0, \quad \dot{\mathcal{E}}_0 = 0, \quad \dot{\mathcal{H}}_\chi = 0.$$

Сравнивая эти выражения с формулами поля электрического диполя, отметим, что здесь, в волновой зоне,

$$\dot{\mathcal{E}}_\chi = - \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{\mathcal{H}}, \quad (57.60)$$

т. е. положительной составляющей $\dot{\mathcal{E}}_\chi$ соответствует отрицательное $\dot{\mathcal{H}}_0$ и наоборот. Картина расположения векторов в этом случае показана на рис. 57.7.

Векторы опять в фазе (точнее, в противофазе), что обеспечивает правильное направление вектора Пойнтинга (излучения). Формулы, характеризующие энергетические величины поля, получают, заменяя в соответствующих формулах поля электрического диполя¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{\omega} &\rightarrow \mu_a S, \\ \epsilon_a &\rightleftharpoons \mu_a. \end{aligned} \quad (57.61)$$

¹⁾ Здесь при замене можно не учитывать знака минус у μ_a , так как энергетические величины положительны и действительны.

Рассчитаем сопротивление излучения магнитного диполя. Выполняя соответствующую замену в ф-ле (57.52), получим

$$r_{\Sigma}^* = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \left(\frac{\mu_a \omega S}{\lambda} \right)^2 = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left(\frac{S \beta}{\lambda} \right)^2. \quad (57.62)$$

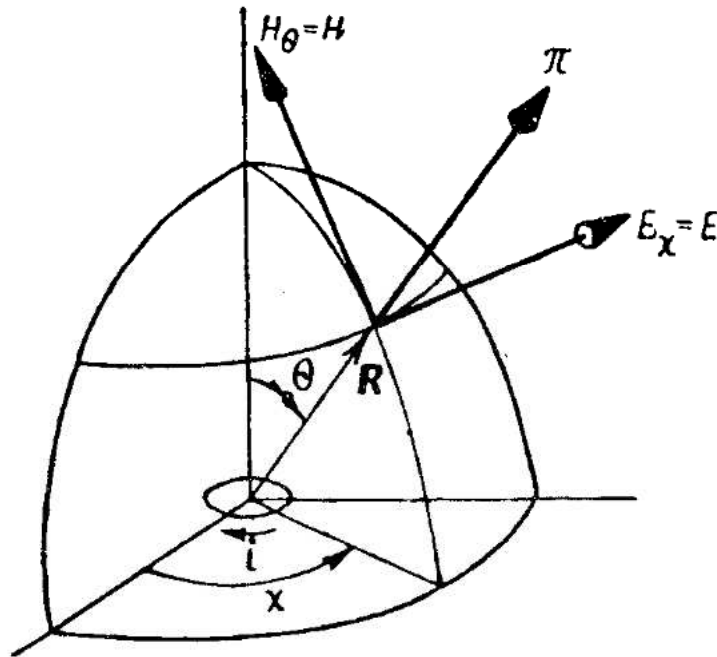


Рис. 57.7

Таким образом, для того, чтобы излучающая способность рамки была бы та же, что и диполя длиной l_0 (при одинаковых токах в диполе в рамке), надо, чтобы площадь рамки равнялась

$$S = \frac{l_0}{\beta} = \frac{l_0 \lambda}{2\pi}. \quad (57.63)$$

§ 58. Принцип взаимности. Лемма Лоренца. Теорема единственности

Наряду с принципом двойственности большое значение в электродинамике имеет принцип взаимности, являющийся следствием соотношения, известного под названием «леммы Лоренца».

Лемма Лоренца

Пусть в однородной и изотропной среде с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_a и проводимостью σ расположены два проводящих тела (1 и 2) объёмами ΔV_1 и соответственно ΔV_2 (рис. 58.1а), и пусть в каждом из этих тел за счёт действия сторонних сил возбуждены сторонние токи с плотностью $\delta_1^{\text{стор}}$ и соответственно $\delta_2^{\text{стор}}$. Эти токи возбуждают в среде электромагнитное поле, которое может рассматриваться как сумма полей, возбуждаемых каждым током в отдельности. Если токи гармонические, то

комплексные выражения векторов наведённых полей будут связаны уравнениями Максвелла, которые запишем так:

$\text{rot } \dot{\mathcal{E}}_1 = -i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_1$	$\dot{\mathcal{H}}_2$	
$\text{rot } \dot{\mathcal{E}}_2 = -i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_2$		$\dot{\mathcal{H}}_1$
$\text{rot } \dot{\mathcal{H}}_1 = \dot{\delta}_1^{cmop} + i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathcal{E}}_1$		$\dot{\mathcal{H}}_2$
$\text{rot } \dot{\mathcal{H}}_2 = \dot{\delta}_2^{cmop} + i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathcal{E}}_2$	$\dot{\mathcal{E}}_1$	

где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega}$ — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Выполним скалярное умножение и вычитание, как показано на схеме:

$$\dot{\mathcal{H}}_2 \cdot \text{rot } \dot{\mathcal{E}}_1 - \dot{\mathcal{E}}_1 \cdot \text{rot } \dot{\mathcal{H}}_2 = - \{ i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_1 \cdot \dot{\mathcal{H}}_2 + \dot{\delta}_2^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_1 + \\ + i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathcal{E}}_2 \cdot \dot{\mathcal{E}}_1 \},$$

$$\dot{\mathcal{H}}_1 \cdot \text{rot } \dot{\mathcal{E}}_2 - \dot{\mathcal{E}}_2 \cdot \text{rot } \dot{\mathcal{H}}_1 = - \{ i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_2 \cdot \dot{\mathcal{H}}_1 + \\ + \dot{\delta}_1^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_2 + i \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathcal{E}}_1 \cdot \dot{\mathcal{E}}_2 \}.$$

Левые части этих уравнений преобразуем по ф-ле (П.27)

$$\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b} = \text{div } [\mathbf{a} \mathbf{b}]$$

и вычтем один результат из другого. Получим:

$$\text{div } [\dot{\mathcal{E}}_1 \dot{\mathcal{H}}_2] - \text{div } [\dot{\mathcal{E}}_2 \dot{\mathcal{H}}_1] = \dot{\delta}_1^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_2 - \dot{\delta}_2^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_1. \quad (58.1)$$

Проинтегрируем левую и правую часть по объёму, включающему оба тела 1 и 2:

$$\int_V \{ \text{div } [\dot{\mathcal{E}}_1 \dot{\mathcal{H}}_2] - \text{div } [\dot{\mathcal{E}}_2 \dot{\mathcal{H}}_1] \} dV = \int_V \{ \dot{\delta}_1^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_2 - \dot{\delta}_2^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_1 \} dV = \\ = \int_{\Delta V_1} \dot{\delta}_2^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_2 dV - \int_{\Delta V_2} \dot{\delta}_1^{cmop} \cdot \dot{\mathcal{E}}_1 dV.$$

Правый интеграл распался на два интеграла по объёмам проводящих тел, так как вне этих тел подынтегральная функция равна нулю.

Интеграл в левой части равенства преобразуем по теореме Остроградского

$$\int_V \{ \operatorname{div} [\dot{\mathcal{E}}_1 \mathcal{H}_2] - \operatorname{div} [\dot{\mathcal{E}}_2 \mathcal{H}_1] \} dV = \oint ([\dot{\mathcal{E}}_1 \mathcal{H}_2] - [\dot{\mathcal{E}}_2 \mathcal{H}_1]) \cdot dS.$$

Таким образом,

$$\oint ([\dot{\mathcal{E}}_1 \mathcal{H}_2] - [\dot{\mathcal{E}}_2 \mathcal{H}_1]) \cdot dS = \int_{\Delta V_1} \delta_1^{\text{стор}} \dot{\mathcal{E}}_2 dV - \int_{\Delta V_2} \delta_2^{\text{стор}} \dot{\mathcal{E}}_1 dV \quad (58.2)$$

— это и будет лемма Лоренца.

Увеличивая поверхность интегрирования S до бесконечности, покажем, что поверхностный интеграл обратится в нуль. Любой источник поля, заключённый в конечный объём (в нашем случае в объёмы ΔV_1 и ΔV_2) на достаточном расстоянии может рассматриваться как диполь.

В таком случае при расчёте потока сквозь поверхность S нужно принимать во внимание лишь волновые члены, касательные к поверхности сферы сколь угодно большого радиуса, в окрестности центра которой расположены источники $\delta_1^{\text{стор}}$ и $\delta_2^{\text{стор}}$ (рис. 58.1а, б).

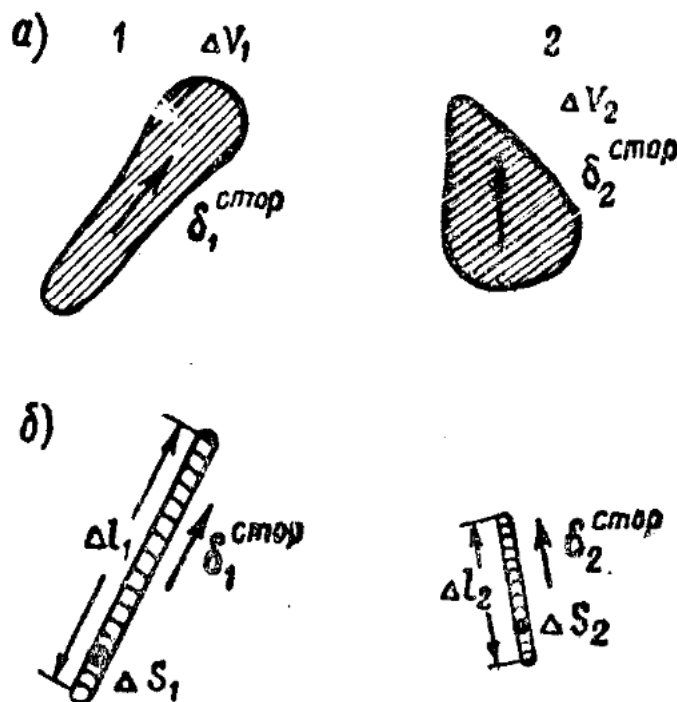


Рис. 58.1

В скалярном произведении $[\dot{\mathcal{E}} \mathcal{H}] dS$ участвует лишь нормальная к площадке dS составляющая вектора $[\dot{\mathcal{E}} \mathcal{H}]$, которую можно определить как векторное произведение касательных составляющих $\dot{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{H}$:

$$|[\dot{\mathcal{E}} \mathcal{H}]| n^\circ = [\dot{\mathcal{E}}_\tau \mathcal{H}_\tau].$$

Тогда, очевидно,

$$\oint \{ [\dot{\mathcal{E}}_1 \dot{\mathcal{H}}_2] - [\dot{\mathcal{E}}_2 \dot{\mathcal{H}}_1] \} \cdot d\mathbf{S} = \oint \{ [\dot{\mathcal{E}}_{1\tau} \dot{\mathcal{H}}_{2\tau}] - [\dot{\mathcal{E}}_{2\tau} \dot{\mathcal{H}}_{1\tau}] \} \cdot d\mathbf{S},$$

где $\dot{\mathcal{E}}_{1\tau}$, $\dot{\mathcal{H}}_{1\tau}$, $\dot{\mathcal{E}}_{2\tau}$, $\dot{\mathcal{H}}_{2\tau}$ будут представлять собой волновые компоненты поля излучения источников $\dot{\delta}_1^{смор}$ и $\dot{\delta}_2^{смор}$. Отметим, что эти компоненты образуют с положительной внешней нормалью $\mathbf{n}^\circ$ к поверхности сферы S правовинтовую систему и что для них [см., например, ф-лы (57.44)]

$$\dot{\mathcal{E}}_\tau = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} [\dot{\mathcal{H}}_\tau \mathbf{n}^\circ].$$

Тогда, положив $d\mathbf{S} = \mathbf{n}^\circ dS$, можно записать:

$$\begin{aligned} \oint \{ [\dot{\mathcal{E}}_{1\tau} \dot{\mathcal{H}}_{2\tau}] - [\dot{\mathcal{E}}_{2\tau} \dot{\mathcal{H}}_{1\tau}] \} \cdot d\mathbf{S} &= \oint \{ [\dot{\mathcal{E}}_{1\tau} \dot{\mathcal{H}}_{2\tau}] \cdot \mathbf{n}^\circ - [\dot{\mathcal{E}}_{2\tau} \dot{\mathcal{H}}_{1\tau}] \cdot \mathbf{n}^\circ \} dS = \\ &= \oint \{ \dot{\mathcal{E}}_{1\tau} \cdot [\dot{\mathcal{H}}_{2\tau} \mathbf{n}^\circ] - \dot{\mathcal{E}}_{2\tau} \cdot [\dot{\mathcal{H}}_{1\tau} \mathbf{n}^\circ] \} dS = \oint \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \{ \dot{\mathcal{E}}_{1\tau} \cdot \dot{\mathcal{E}}_{2\tau} - \dot{\mathcal{E}}_{2\tau} \cdot \dot{\mathcal{E}}_{1\tau} \} dS = 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int_{\Delta V_1} \dot{\delta}_1^{смор} \dot{\mathcal{E}}_2 dV = \int_{\Delta V_2} \dot{\delta}_2^{смор} \dot{\mathcal{E}}_1 dV. \quad (58.3)$$

Это соотношение и будет общей формулировкой принципа взаимности.

Применим теорему взаимности к процессу радиопередачи между двумя антеннами. Пусть тела 1 и 2 будут две антенны, т. е. два прямолинейных проводника (см. рис. 58.16):

$$\Delta V_1 = \Delta S_1 \Delta l_1; \quad \Delta V_2 = \Delta S_2 \Delta l_2.$$

В этих проводниках за счёт некоторых сторонних эдс возбуждены плотности сторонних токов $\dot{\delta}_1^{смор}$ и $\dot{\delta}_2^{смор}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_1} \dot{\delta}_1^{смор} \dot{\mathcal{E}}_2 dV &= \int_{\Delta S_1} \dot{\delta}_1^{смор} dS_1 \int_{\Delta l_1} \dot{\mathcal{E}}_2 dl = \dot{I}_1^{смор} \dot{\mathcal{E}}_{21}, \\ \int_{\Delta V_2} \dot{\delta}_2^{смор} \dot{\mathcal{E}}_1 dV &= \int_{\Delta S_2} \dot{\delta}_2^{смор} dS_2 \int_{\Delta l_2} \dot{\mathcal{E}}_1 dl = \dot{I}_2^{смор} \dot{\mathcal{E}}_{12}^1), \end{aligned}$$

где $\dot{\mathcal{E}}_{21}$ — эдс, наведённая в антенне 1 полем тока $\dot{I}_2^{смор}$ и $\dot{\mathcal{E}}_{12}$ — эдс, наведённая в антенне 2 током $\dot{I}_1^{смор}$. В соответствии с теоремой взаимности:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1^{смор} \dot{\mathcal{E}}_{21} &= \dot{I}_2^{смор} \dot{\mathcal{E}}_{12}, \\ \frac{\dot{I}_1^{смор}}{\dot{\mathcal{E}}_{12}} &= \frac{\dot{I}_2^{смор}}{\dot{\mathcal{E}}_{21}}. \end{aligned} \quad (58.4)$$

¹⁾ Приведённый вывод соответствует действительности, если $\dot{\delta}$ не зависит от Δl ни по величине, ни по фазе.

Если, например,

$$I_1^{стоп} = I_2^{стоп}, \text{ то } \dot{\mathcal{E}}_{12} = \dot{\mathcal{E}}_{21}, \quad (58.5)$$

т. е. если в передающей антенне течёт некоторый ток $I^{стоп}$ и возникающее поле наводит в приёмной антенне эдс $\dot{\mathcal{E}}$, то, возбуждив в приёмной антенне тот же ток I , мы в передающей антенне получим ту же эдс $\dot{\mathcal{E}}$, каковы бы ни были сами антенны.

Теорема единственности.

Уравнения Максвелла как дифференциальные уравнения в частных производных имеют бесконечное множество различных частных решений.

Установим необходимые условия, при которых решение уравнений Максвелла будет единственным.

Практически возможность установить единственность решения существенна. Когда решается какая-нибудь конкретная задача, то приходится из ряда частных решений отобрать требуемое. Если известны указанные выше условия и окажется, что выбранное решение им удовлетворяет, то можно быть уверенным, что никакого другого решения данной задачи не существует.

Когда мы сформулировали систему уравнений Максвелла (§ 38), то, говоря о её полноте (см. стр. 140), мы отметили, что при наличии указанных в тексте данных электромагнитное поле будет однозначно определено во всех точках пространства. Последнее выражение неточно. Дело в том, что пространство бесконечно, и практически не представляет никакого интереса знать, что происходит в его бесконечно удалённых областях, если мы интересуемся электромагнитным полем, излучаемым конкретными источниками. Поэтому будем доказывать теорему единственности для области, ограниченной пусть огромной, но всё же конечной замкнутой поверхностью S (так называемая «внутренняя задача»).

Докажем, что система уравнений Максвелла имеет единственное решение, если:

1) известны значения тангенциальных составляющих какого-либо из векторов поля (E_τ или H_τ) на граничной поверхности S или значения тангенциальной составляющей одного из векторов на одной части поверхности и тангенциальной составляющей другого на остальной;

2) предположим, что среда реальна, т. е. потери в ней отличны от нуля ($\sigma \neq 0$), хотя и могут быть ничтожны.

В рассматриваемой области пространства могут находиться источники электромагнитных волн с определённым (заданным) значением $E^{стоп}$.

Нашу задачу ограничим рассмотрением гармонического (мономатического) поля. Это последнее условие не является существенным ограничением, как было показано в § 50.

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что существуют два различных решения электромагнитной задачи (E_1, H_1 и E_2, H_2), удовлетворяющих уравнениям Максвелла и сформулированным выше условиям.

Ввиду линейности уравнений Максвелла им будет удовлетворять и разность этих решений, т. е. электромагнитное поле, векторы которого равны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_2 \\ \Delta H &= H_1 - H_2 \end{aligned} \right\}. \quad (58.6)$$

Это разностное поле не имеет источников, так как из уравнения (38.3)—5 для первого поля $\delta_1 = \sigma(E_1 + E^{стор})$ и для второго $\delta_2 = \sigma(E_2 + E^{стор})$.

Для разностного же поля

$$\Delta \delta = \delta_1 - \delta_2 = \sigma(E_1 - E_2) = \sigma \Delta E, \quad (58.7)$$

$E^{стор}$, как заданная величина, очевидно, одинакова как для поля E_1, H_1 , так и для E_2, H_2 .

На граничной поверхности, по тем же соображениям (условие 1) тангенциальная составляющая разностного поля ΔE (или ΔH) равна нулю.

Рассмотрим поток комплексного вектора Пойнтинга разностного поля сквозь поверхность S [см. ф-лу (53.10)]

$$-\oint \tilde{\Pi} \cdot dS = \int \frac{1}{2} \sigma (\Delta \mathcal{E})^2 dV + 2i\omega \int \left(\frac{\mu_a (\Delta \mathcal{H})^2}{4} - \frac{\epsilon_a (\Delta \mathcal{E})^2}{4} \right) dV.$$

Поток этот в данном случае равен нулю, так как нормальная составляющая вектора Пойнтинга $(\tilde{\Pi} \cdot dS = \tilde{\Pi}_n dS)$ определяется тангенциальными составляющими комплексных амплитуд векторов $\Delta \mathcal{E}$ и $\Delta \mathcal{H}$, которые равны нулю¹⁾:

$$\oint \tilde{\Pi} \cdot dS = 0.$$

Будут равны нулю действительный и мнимый члены правой части уравнения (58.6), т. е.

$$\int \frac{\sigma (\Delta \mathcal{E})^2}{2} dV = 0, \quad (58.8)$$

$$\int \left[\frac{\mu_a (\Delta \mathcal{H})^2}{2} - \frac{\epsilon_a (\Delta \mathcal{E})^2}{2} \right] dV = 0. \quad (58.9)$$

¹⁾ Так как $\tilde{\Pi} \cdot dS = [\Delta \dot{\mathcal{E}} \Delta \dot{\mathcal{H}}] \cdot dS = [\Delta \dot{\mathcal{E}} \Delta \dot{\mathcal{H}}] \cdot n^\circ dS = \Delta \cdot \mathcal{E} [\Delta \dot{\mathcal{H}} n^\circ] dS = \Delta \dot{\mathcal{E}} \Delta \dot{\mathcal{H}}_\tau dS = \Delta \dot{\mathcal{E}}_\tau \Delta \dot{\mathcal{H}} dS = \Delta \dot{\mathcal{E}}_\tau \cdot \Delta \dot{\mathcal{H}}_\tau dS$.

Так как по условию 2 проводимость во всех точках рассматриваемой области отлична от нуля, то из ф-лы (58.8) следует, что $\Delta \mathcal{E} = 0$, а из (58.9), что и $\Delta \mathcal{H} = 0$.

Следовательно,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \text{ и } \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2, \quad (58.10)$$

т. е. решение одно. Теорема доказана.

Из этого вывода можно сделать важное заключение. Электромагнитное поле в области, ограниченной поверхностью S , возбуждается как источниками, находящимися внутри S , так и источниками, находящимися вне этой поверхности. Для расчёта поля во внутренней области можно не знать распределения и данных источников во внешнем пространстве, а предположить, что на поверхности S распределены некоторые фиктивные источники, создающие заданное значение тангенциальных составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на этой поверхности, и при расчёте учитывать лишь источники, распределённые во внутренней области.



Глава XI

ОТРАЖЕНИЕ, ПРОХОЖДЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ
ПЛОСКИХ ВОЛН

§ 59. Явления отражения, прохождения и дифракции

Если электромагнитная волна падает на поверхность раздела двух сред, то обычно только часть её энергии проходит сквозь эту поверхность; другая часть отражается.

Если, кроме того, длина волны соизмерима или больше размеров поверхности раздела, то явление прохождения сквозь такую поверхность и отражения от неё осложняются явлением дифракции, т. е. явлением огибания волной границ поверхности, на которую эта волна падает.

Ограничим нашу задачу изучением явлений отражения и прохождения плоских однородных электромагнитных волн при наличии плоской, бесконечно простирающейся границы раздела двух сред — исключая тем самым из рассмотрения явление дифракции.

На границе раздела мы должны рассмотреть три электромагнитные волны: падающую, отражённую и проходящую. В общем случае направления распространения этих трёх волн, их скорости и прочие параметры различны.

Соотношения между этими параметрами находятся из граничных условий, которые сформулированы в § 38 при составлении полной системы уравнений Максвелла.

Из граничных условий следует непрерывность тангенциальных составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности раздела:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (59.1)$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (59.2)$$

и нормальных составляющих векторов

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (59.3)$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (59.4)$$

причём, как мы отметили в § 38, условия, соответствующие (59.1) и (59.3), выполняются при всех обстоятельствах; условия же, соот-

ветствующие (59.2) и (59.4), — при наличии на поверхности раздела поверхностных зарядов ($\rho_{\text{пов}}$) или токов ($\delta_{\text{пов}}$) переходят в условия скачка:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \delta_{\text{пов}}, \quad (59.5)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{\text{пов}}. \quad (59.6)$$

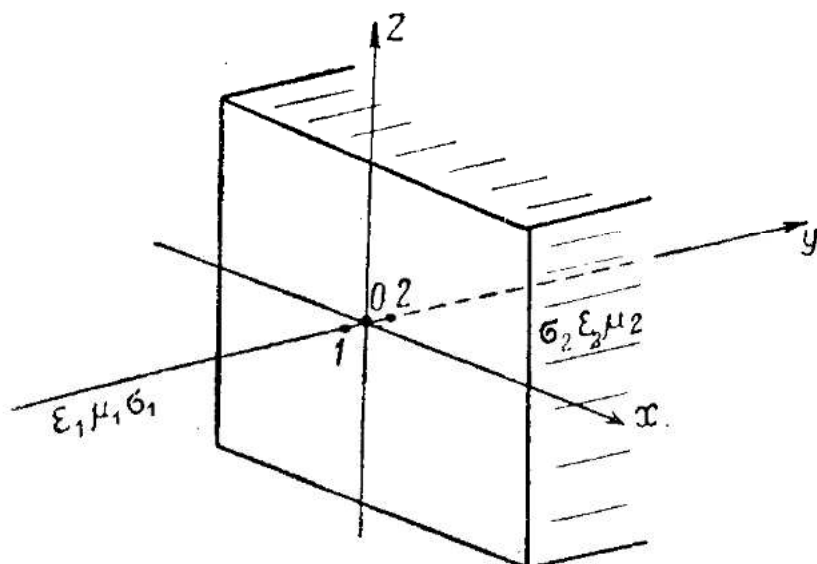


Рис. 59.1

Для определённости условимся точку 1 считать расположенной у поверхности раздела, в среде, в которой распространяется падающая и отражённая волны; точку 2 — с другой стороны поверхности раздела, в среде, где распространяется проходящая волна. Начало координат пусть совпадает с этими точками, а ось y направим внутрь второй среды нормально к поверхности раздела (рис. 59.1).

§ 60. Отражение плоской волны от поверхности плоского идеального проводника при нормальном падении

Рассмотрим отражение плоской волны, падающей на поверхность идеального проводника ($\sigma_2 = \infty$).

Результатом решения такой задачи мы в дальнейшем воспользуемся при изучении распространения радиоволн в волноводах.

Что дают в этом случае граничные условия? Напряжённость электрического (переменного) поля (E_2) в идеальном проводнике равна нулю, иначе ток ($\delta_2 = \sigma_2 E_2$) был бы бесконечно велик.

Из условия (59.1) следует, что тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля в точке 1 также будет равна нулю

$$E_{1\tau} = 0. \quad (60.1)$$

Нормальная составляющая напряжённости E в точке I на основании (59.6) будет равна

$$E_{1n} = \frac{\rho_{поп}}{\epsilon_{a1}}. \quad (60.2)$$

Так как в любой точке внутри идеального проводника $E = E_2 = 0$, то и $\text{rot } E_2 = 0$. Следовательно, по второму уравнению Максвелла

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = 0; H_2 = \text{const}, \quad (60.3)$$

т. е. магнитное поле внутри идеального проводника может быть только постоянно. Так как до прохождения электромагнитной волны магнитное поле было равно нулю, то оно и останется нулём:

$$H_2 = 0. \quad (60.4)$$

Магнитное поле, как и электрическое, не проникает в идеальный проводник.

Об этом факте можно заключить из ф-лы (55.4), определяющей глубину проникновения тока при поверхностном эффекте. В данном случае ($\sigma_2 = \infty$)

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \sigma_2}} = 0. \quad (60.5)$$

Следовательно, весь ток становится поверхностным. В точке I на основании условий (59.3) получим:

$$B_{1n} = 0; H_{1n} = 0. \quad (60.6)$$

Из условия же (59.6) следует

$$H_{1\tau} = \delta_n \text{ пов.} \quad (60.7)$$

Таким образом, у поверхности идеального проводника вектор E может быть направлен только по нормали, а вектор H может быть только касательным.

Отметим, что идеальный проводник не поглощает электромагнитную энергию. Действительно, вектор Пойнтинга внутри идеального проводника равен нулю, так как и E и H равны нулю.

Следовательно, энергия электромагнитной волны полностью отражается от поверхности идеального проводника — проходящей волны не будет.

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в направлении оси y . Выберем оси координат в соответствии с рис. 60.1. Положим $\sigma_2 = \infty$; $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$; $\epsilon_{a1} = \epsilon_0 \epsilon$; $\epsilon_{a2} = \epsilon_0$ [см. ф-лу (6.1)].

Координатная плоскость zx будет граничной плоскостью между идеальным проводником (справа) и идеальным диэлектриком (слева).

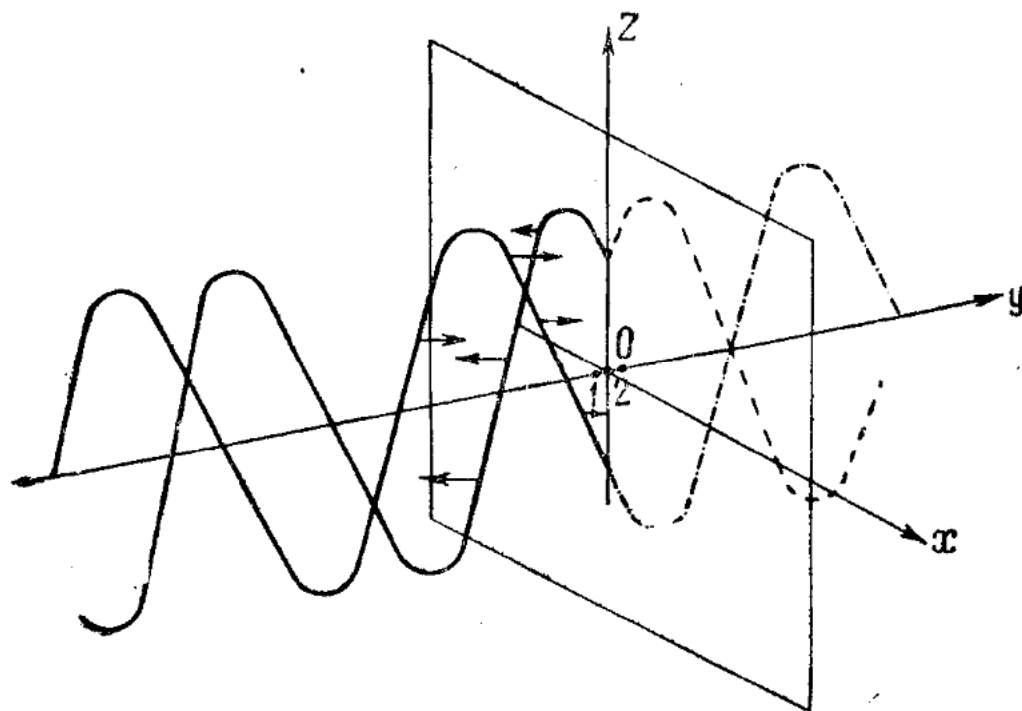


Рис. 60.1

Результирующее электрическое поле представится полным решением волнового уравнения (42.6), т. е. как сумма падающей и отражённой волн:

$$E = f\left(t - \frac{y}{v}\right) + \Phi\left(t + \frac{y}{v}\right). \quad (60.8)$$

Так как однородная плоская электромагнитная волна поперечна, то $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не будут иметь составляющих, направленных нормально к поверхности раздела и, на основании граничного условия (60.1) мы для любого t при $y=0$ получим

$$f(t) + \Phi(t) = 0. \quad (60.9)$$

Отсюда заключаем, что

$$E = f\left(t - \frac{y}{v}\right) - f\left(t + \frac{y}{v}\right). \quad (60.10)$$

Таким образом, напряжённость электрического поля отражённой волны на поверхности раздела равна и противоположна напряжённости падающей волны.

Физически это можно пояснить следующим образом: электрическое поле падающей волны вызывает на поверхности проводника ток, т. е. перемещение зарядов. Перераспределившиеся на по-

верхности заряды возбуждают своё, вторичное поле (отражённую волну), электрическая напряжённость которого у этой поверхности равна и противоположна первичному полю (полю падающей волны). Явление это аналогично короткому замыканию длинной линии.

Рассмотрим гармонически меняющееся поле. Комплексное изображение напряжённости электрического поля будет

$$\dot{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - \beta y)} - \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \beta y)}. \quad (60.11)$$

Так как при нормальном падении на поверхности раздела все направления на этой поверхности равноправны, то, не ограничивая общность рассмотрения, положим, что падающая волна плоско поляризована в плоскости zy

$$\dot{E}(t)_{nad} = \dot{E}_z = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - \beta y)}, \quad (60.12)$$

тогда

$$\dot{E}(t)_{omp} = -\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \beta y)}. \quad (60.13)$$

Для построения отражённой волны следует продолжить падающую волну за плоскость раздела (см. пунктир с точкой на рис. 60.1), построить сначала волну противоположного знака (пунктир), а затем зеркальное изображение этой волны в плоскости раздела (рис. 60.2а, б).

Векторы напряжённости магнитного поля падающей и отражённой волн оказываются в точке $y=0$ в фазе, в чём легко убедиться, построив для обеих волн векторы $\mathbf{E}$ и векторы Пойнтинга и определив направление $\mathbf{H}_{nad}$ и $\mathbf{H}_{omp}$ (рис. 60.2в).

Падающая и отражённая волны магнитного поля имеют вид, представленный на рис. 60.2в.

Из ф-л (49.7) и (49.8) возьмём выражение соотношения векторов электрического и магнитного полей в идеальном диэлектрике:

$$H(t)_{nad} = H(t)_x = E(t)_{nad} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} = E(t)_z \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}}, \quad (60.14)$$

$$H(t)_{omp} = H(t)_x = -E(t)_{omp} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} = -E(t)_z \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}}. \quad (60.15)$$

В (60.15) знак минус появляется на том же основании, что и при выводе (49.7) и (49.8).

Выводя выражение характеристического сопротивления среды $\zeta = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$, напомним

$$\left(\frac{\dot{E}(t)}{\dot{H}(t)} \right)_{nad} = \zeta, \quad \left(\frac{\dot{E}(t)}{\dot{H}(t)} \right)_{omp} = -\zeta. \quad (60.16)$$

Следовательно,

$$\dot{H}(t) = \dot{H}_{nad}(t) + \dot{H}_{otpr}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\zeta} (e^{i(\omega t - \beta y)} + e^{i(\omega t + \beta y)}) . \quad (60.17)$$

При помощи известных формул

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad (60.18)$$

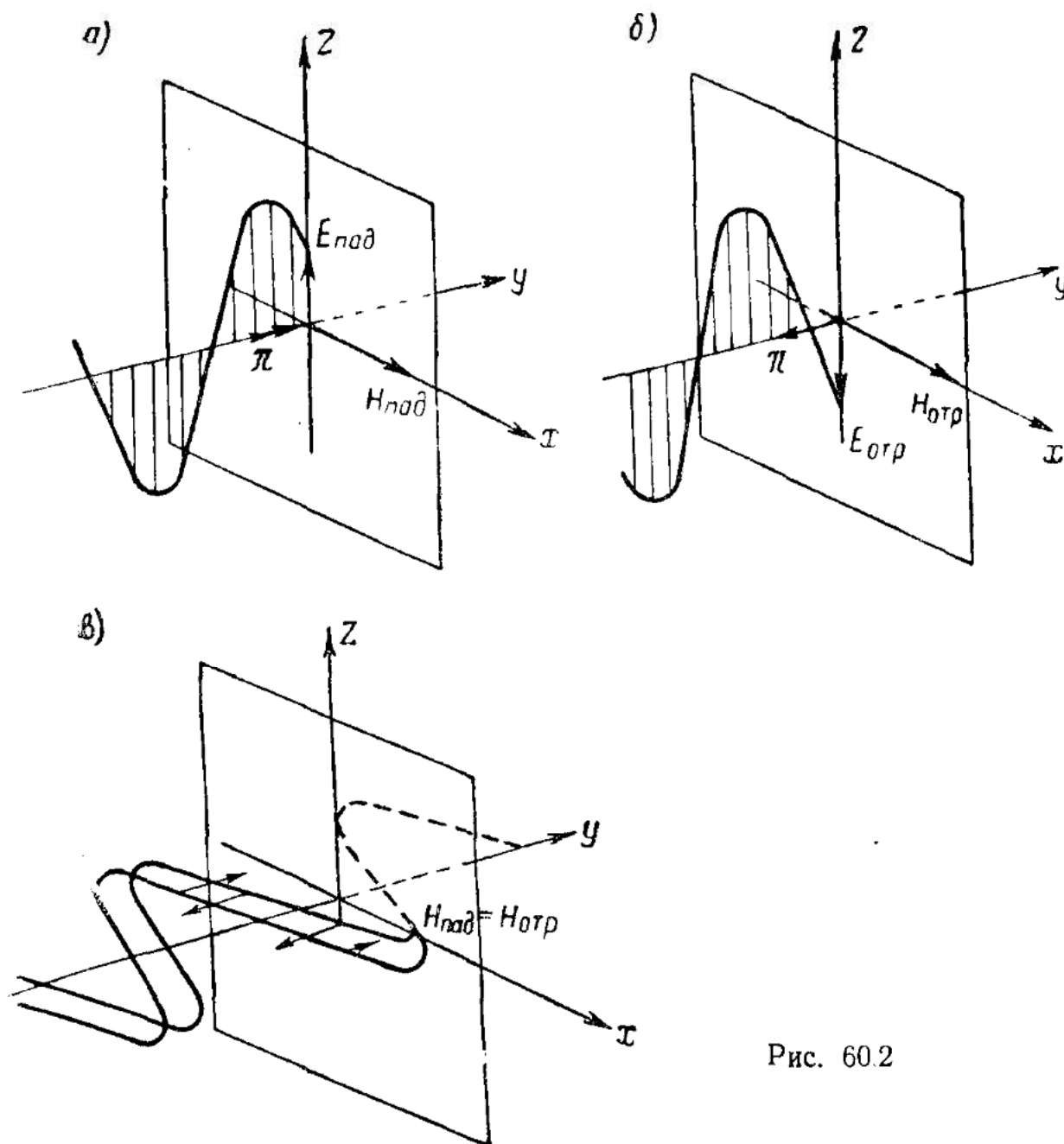


Рис. 60.2

выполним сложение в выражениях (60.12), (60.13) и (60.17)

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} (e^{-\beta y} - e^{i\beta y}) = -2i \mathcal{E}_0 \sin \beta y e^{+i\omega t} = \\ &= -2\mathcal{E}_0 \sin \beta y e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (60.19)$$

$$\dot{H}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\zeta} e^{i\omega t} (e^{-i\beta y} + e^{i\beta y}) = 2 \frac{\mathcal{E}_0}{\zeta} \cos \beta y e^{i\omega t}. \quad (60.20)$$

Мы получили картину стоячих электромагнитных волн.

Пучности (как и узлы) электрического и магнитного полей оказываются смещёнными в пространстве относительно друг друга на четверть длины волны. В точках $y=0, -\frac{\lambda}{2}, -\lambda, -\frac{3\lambda}{2} \dots$ расположены узлы электрического поля. Узлы магнитного поля находятся в точках $y = -\frac{\lambda}{4}, -\frac{3\lambda}{4}, -\frac{5\lambda}{4} \dots$ и т. д.

Точно так же и во времени электрическое и магнитное поля имеют сдвиг фаз в $1/4$ периода.

Мгновенные значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получим из формул комплексных изображений обычным методом (см. § 54):

$$\left. \begin{aligned} E &= -2\mathcal{E}_0 \sin \beta y \cos \omega t \\ H &= 2 \frac{\mathcal{E}_0}{\zeta} \cos \beta y \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (60.21)$$

Картина стоячих волн электрического и магнитного полей для некоторого момента t' , соответствующего рис. 60.1 и 60.2, приведена на рис. 60.3, где для отчётливости электрические и магнитные волны изображены отдельно. Построена эта картина путём суммирования падающей и отражённой волн.

Нетрудно видеть, что до момента $\frac{T}{4}$ электрическое поле убывает, а магнитное возрастает, затем $\left(\text{от } \frac{T}{4} \text{ до } \frac{T}{2}\right)$, наоборот, электрическое поле будет возрастать, а магнитное убывать и т. д.

Условие (60.7) позволит нам определить плотность поверхностного тока. В данном случае

$$\delta_{нов} = H. \quad (60.22)$$

Это равенство можно пояснить и более наглядно, обратившись к закону полного тока. Возьмём контур $a-b-c-d$ (см. рис. 60.4), две стороны которого ($a-b$ и $c-d$), каждая длиной по единице, параллельны поверхности раздела и проходят сквозь точки 1 и 2. Тогда

$$\oint_{a-b-c-d} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (60.23)$$

Ток, проходящий сквозь этот контур, очевидно, равен поверхностной плотности тока $\delta_{нов}$. Учитывая, что внутри идеального проводника поле равно нулю, приходим опять к соотношению (60.22).

Из ф-лы (60.21) получим

$$\delta_{нов} = \frac{2\mathcal{E}_0}{\zeta} \sin \omega t. \quad (60.24)$$

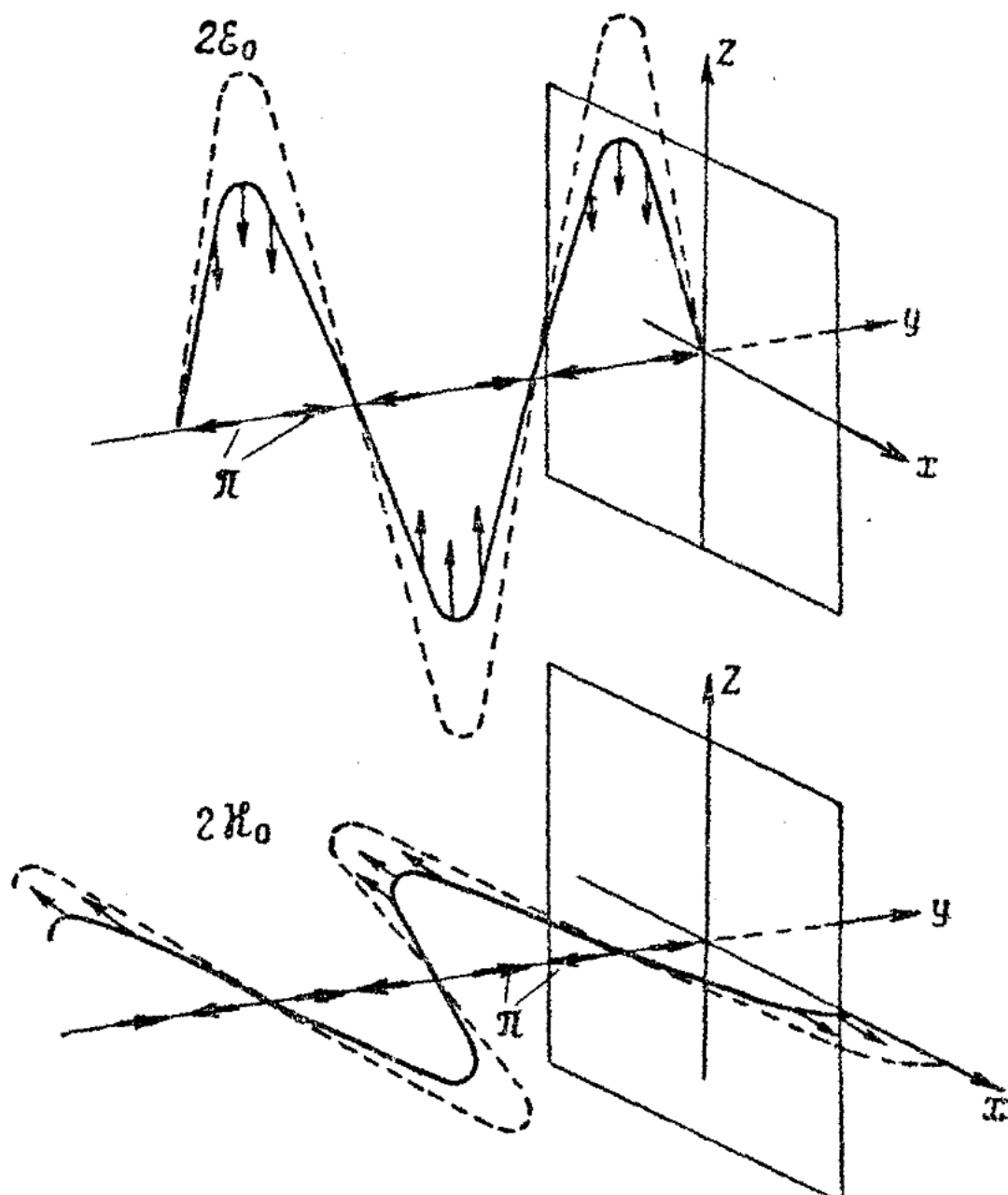


Рис. 60.3

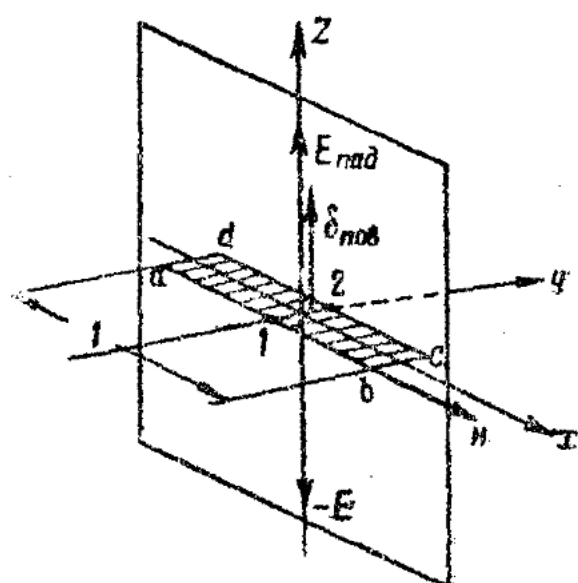


Рис. 60.4

В моменты $t=0, \frac{T}{2}$ и т. д. результирующее магнитное поле равно нулю во всех точках пространства, вся энергия волны представляется электрической. При $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}$ и т. д., наоборот, результирующее электрическое поле равно нулю и вся энергия представляется магнитной. В эти моменты нет перемещения энергии в пространстве. В моменты же промежуточные, как видно на рис. 60.3, векторы Пойнтинга результирующего поля на каждом четвертьволновом промежутке имеют разные направления. Векторы эти направлены к точкам, где находятся пучности возрастающего поля, они показывают переход энергии от поля убывающего к полю возрастающему. На рис. 60.3 результирующее магнитное поле возрастает и векторы Пойнтинга направлены к пучностям магнитного поля.

Среднее значение потока энергии в стоячей волне равно нулю.

§ 61. Отражение и прохождение плоской волны при нормальном падении на идеальный диэлектрик

Пусть плоскость xz (см. рис. 61.1) является границей раздела двух идеальных диэлектриков, у которых: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\epsilon_{a1} = \epsilon_0 \epsilon_1$, $\epsilon_{a2} = \epsilon_0 \epsilon_2$ и $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$.

Электромагнитная волна, падающая на поверхность раздела, делится в этом случае на две: проходящую и отражённую.

Соотношение тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей падающей волны ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$), отражённой ($\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$) и проходящей ($\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$) найдём из граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} E_{1\tau} + E'_{1\tau} &= E_{2\tau} \\ H_{1\tau} + H'_{1\tau} &= H_{2\tau} \end{aligned} \right|_{y=0}. \quad (61.1)$$

Отметим, что в данном случае на границе нет поверхностных токов проводимости.

Рассмотрим однородную плоскую волну, распространяющуюся в направлении y . Нормальных составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ к плоскости раздела не будет и условия (61.1) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} E_1 + E'_1 &= E_2 \\ H_1 + H'_1 &= H_2 \end{aligned} \right|_{y=0}. \quad (61.2)$$

Если волна гармоническая, то комплексные изображения векторов поля [например $\dot{E}_1(t) = \mathcal{E}_{01} e^{i(\omega t - \beta_1 y)}$, $\dot{E}'_1(t) = \mathcal{E}'_{01} e^{i(\omega t - \beta_1 y)}$, $\dot{E}_2(t) = \mathcal{E}_{02} e^{i(\omega t - \beta_2 y)}$ и т. д.] при $y=0$ будут:

$$\dot{E}_1(t) = \mathcal{E}_{01} e^{i\omega t}; \quad H_1(t) = \mathcal{H}_{01} e^{i\omega t},$$

$$\dot{E}_1'(t) = \mathcal{E}'_{01} e^{i\omega t}; \quad \dot{H}_1'(t) = \mathcal{H}'_{01} e^{i\omega t}, \quad (61.3)$$

$$\dot{E}_2(t) = \mathcal{E}_{02} e^{i\omega t}; \quad \dot{H}_2(t) = \mathcal{H}_{02} e^{i\omega t}.$$

Подставляя эти выражения в ф-лы (61.2) и сокращая на временной множитель $e^{i\omega t}$, получим соотношение между амплитудами на границе:

$$\mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}'_{01} = \mathcal{E}_{02}, \quad (61.4)$$

$$\mathcal{H}_{01} + \mathcal{H}'_{01} = \mathcal{H}_{02}. \quad (61.5)$$

Кроме того, из соотношений (60.16) следует

$$\frac{\mathcal{E}_{01}}{\mathcal{H}_{01}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{a1}}} = \zeta_1;$$

$$\frac{\mathcal{E}'_{01}}{\mathcal{H}'_{01}} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{a1}}} = -\zeta_1;$$

$$\frac{\mathcal{E}_{02}}{\mathcal{H}_{02}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{a2}}} = \zeta_2. \quad (61.6)$$

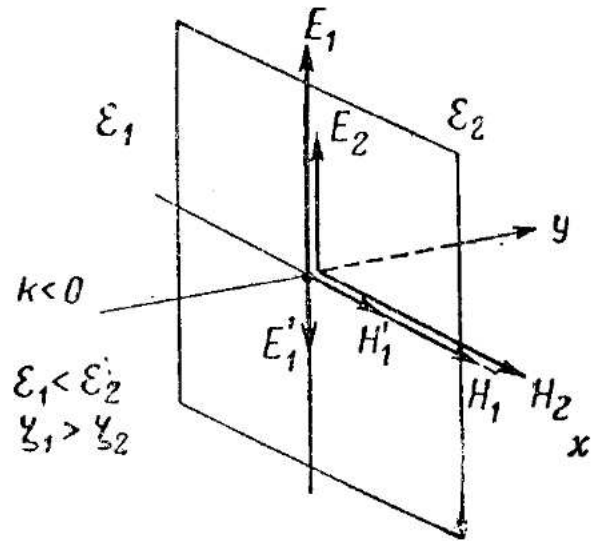
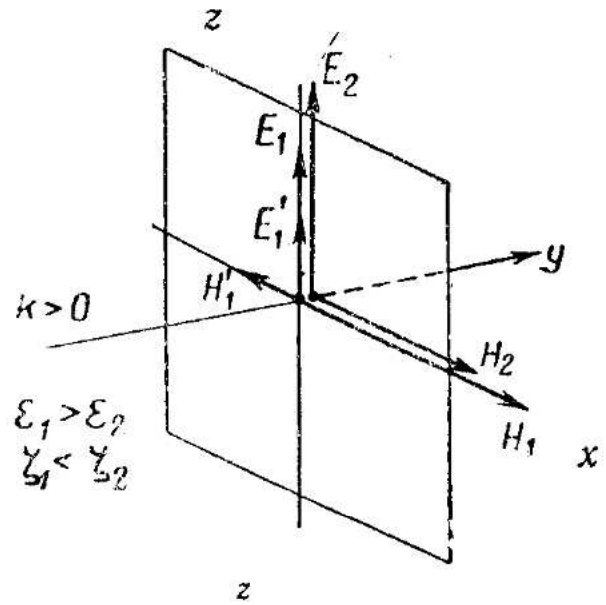


Рис. 61.1

Подставляя в ур-ние (61.5) значения $\mathcal{H}_0$, выраженные через $\mathcal{E}_0$ (61.6), найдём

$$\mathcal{E}_{01} - \mathcal{E}'_{01} = \mathcal{E}_{02} \frac{\zeta_1}{\zeta_2}. \quad (61.7)$$

Решая это уравнение совместно с ур-нием (61.4), получим

$$\frac{\mathcal{E}'_{01}}{\mathcal{E}_{01}} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} = k, \quad (61.8)$$

$$\frac{\mathcal{E}_{02}}{\mathcal{E}_{01}} = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} = p. \quad (61.9)$$

Величины, обозначенные буквами k и p , называются коэффициентами отражения и прохождения.

С помощью ур-ний (61.6) найдём соотношения для амплитуд магнитного поля:

$$\frac{\mathcal{H}'_{01}}{\mathcal{H}_{01}} = -\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = -k, \quad (61.10)$$

$$\frac{\mathcal{H}_{02}}{\mathcal{H}_{01}} = \frac{2\zeta_1}{\zeta_1 + \zeta_2} = p \frac{\zeta_1}{\zeta_2}. \quad (61.11)$$

Из ф-л (61.8) и (61.10) следует, что если коэффициент отражения k — величина положительная, т. е. $\epsilon_2 < \epsilon_1$ или, следовательно, $\zeta_1 < \zeta_2$, то вектор напряжённости магнитного поля при отражении меняет фазу на обратную, вектор же электрического поля свою фазу сохраняет. В случае отрицательного коэффициента отражения $k < 0$, $\epsilon_1 < \epsilon_2$, $\zeta_2 < \zeta_1$) $\mathbf{E}$ при отражении меняет свою фазу, а $\mathbf{H}$ её сохраняет.

Изменение фазы $\mathbf{E}$ при $k < 0$ можно объяснить так же, как это сделано в предыдущем параграфе, только в данном случае мы будем говорить о больших токах смещения, возникающих в среде с бóльшим ϵ и их «закорачивающем» действии (см. § 60).

Правда, закорачивающее действие токов смещения не превращает $\mathbf{E}$ в нуль: остаётся $\mathbf{E}_2$, т. е. часть волны проходит сквозь границу.

Соотношение потоков энергий волн падающей, отражённой и проходящей можно оценить при помощи введённых выше коэффициентов отражения и прохождения.

Среднее значение плотности потока мощности гармонической электромагнитной волны (вектор Пойнтинга) в идеальном диэлектрике получим, положив в ф-ле (53.5) $\alpha = 0$ и, следовательно, $\cos \varphi = 1$:

$$P_{cp} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2\zeta}. \quad (61.12)$$

Отсюда соотношение потоков энергии отражённой и падающей волн будет

$$\frac{P_{отр}}{P_{пад}} = \frac{\mathcal{E}_{01}'^2}{2\zeta_1} \frac{2\zeta_1}{\mathcal{E}_{01}^2} = \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} \right)^2 = k^2. \quad (61.13)$$

Для волн проходящей и падающей получим

$$\frac{P_{прох}}{P_{пад}} = \frac{\mathcal{E}_{02}^2}{\zeta_2} \frac{\zeta_1}{\mathcal{E}_{01}^2} = \frac{4\zeta_2}{(\zeta_1 + \zeta_2)^2} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{4\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_1 + \zeta_2)^2} = p^2 \frac{\zeta_1}{\zeta_2}. \quad (61.14)$$

Закон сохранения энергии требует, чтобы

$$k^2 + \rho^2 \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = 1, \quad (61.15)$$

в чём нетрудно убедиться¹⁾.

Запишем выражения комплексных амплитуд: в первой среде

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{E}}_1 + \dot{\mathcal{E}}'_1 = \mathcal{E}_{01} e^{-i\beta_1 y} + \mathcal{E}'_{01} e^{i\beta_1 y} = \mathcal{E}_{01} \{ e^{-i\beta_1 y} + k e^{i\beta_1 y} \}, \quad (61.16)$$

$$\dot{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{H}}_1 + \dot{\mathcal{H}}'_1 = \mathcal{H}_{01} e^{-i\beta_1 y} + \mathcal{H}'_{01} e^{i\beta_1 y} = \mathcal{H}_{01} \{ e^{-i\beta_1 y} - k e^{i\beta_1 y} \}; \quad (61.17)$$

во второй среде

$$\dot{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_{02} e^{-i\beta_2 y} = \rho \mathcal{E}_{01} e^{-i\beta_2 y}, \quad (61.18)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_2 = \mathcal{H}_{02} e^{-i\beta_2 y} = \rho \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \mathcal{H}_{01} e^{-i\beta_2 y}. \quad (61.19)$$

Амплитуды электрического и магнитного полей в среде, где распространяются падающая и отражённая волны (первая среда) изменяются в зависимости от y .

Чтобы составить отчётливое представление об этом изменении, построим временную векторную диаграмму результирующего поля в первой среде. Комплексная амплитуда этого поля в точке $y = -l$ будет

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{01} (e^{i\beta l} + k e^{-i\beta l}) = \mathcal{E}_0 e^{i\theta}. \quad (61.20)$$

Построив геометрическую сумму комплексных величин $\mathcal{E}_{01} e^{i\beta l}$ и $\mathcal{E}_{01} k e^{-i\beta l}$, получим комплексную амплитуду (см. рис. 61.2). Какую кривую будет описывать конец вектора $\dot{\mathcal{E}}$ при изменении l ?

Разложим показательные функции в (61.20) по формулам Эйлера и, сгруппировав действительные и мнимые члены, получим

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{01} \{ (1 + k) \cos \beta l + i (1 - k) \sin \beta l \}. \quad (61.21)$$

Проекция комплекса $\dot{\mathcal{E}}$ на действительную и мнимую оси (обозначим их соответственно X и Y) будут

$$X = \mathcal{E}_{01} (1 + k) \cos \beta l, \quad Y = \mathcal{E}_{01} (1 - k) \sin \beta l, \quad (61.22)$$

¹⁾ Некоторые авторы (Тамм, Стреттон), исходя из приведённых энергетических соотношений, коэффициентом отражения называют величину $\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} \right)^2 = k^2$ и

коэффициентом прохождения $-\frac{4\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_1 + \zeta_2)^2} = \rho^2 \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$.

В нашем изложении определение коэффициента отражения по ф-ле (61.8) выбрано в соответствии с теорией длинных линий (коэффициент отражения по напряжению).

и отсюда

$$\frac{X^2}{\mathcal{E}_{01}^2 (1+k)^2} + \frac{Y^2}{\mathcal{E}_{01}^2 (1-k)^2} = 1. \quad (61.23)$$

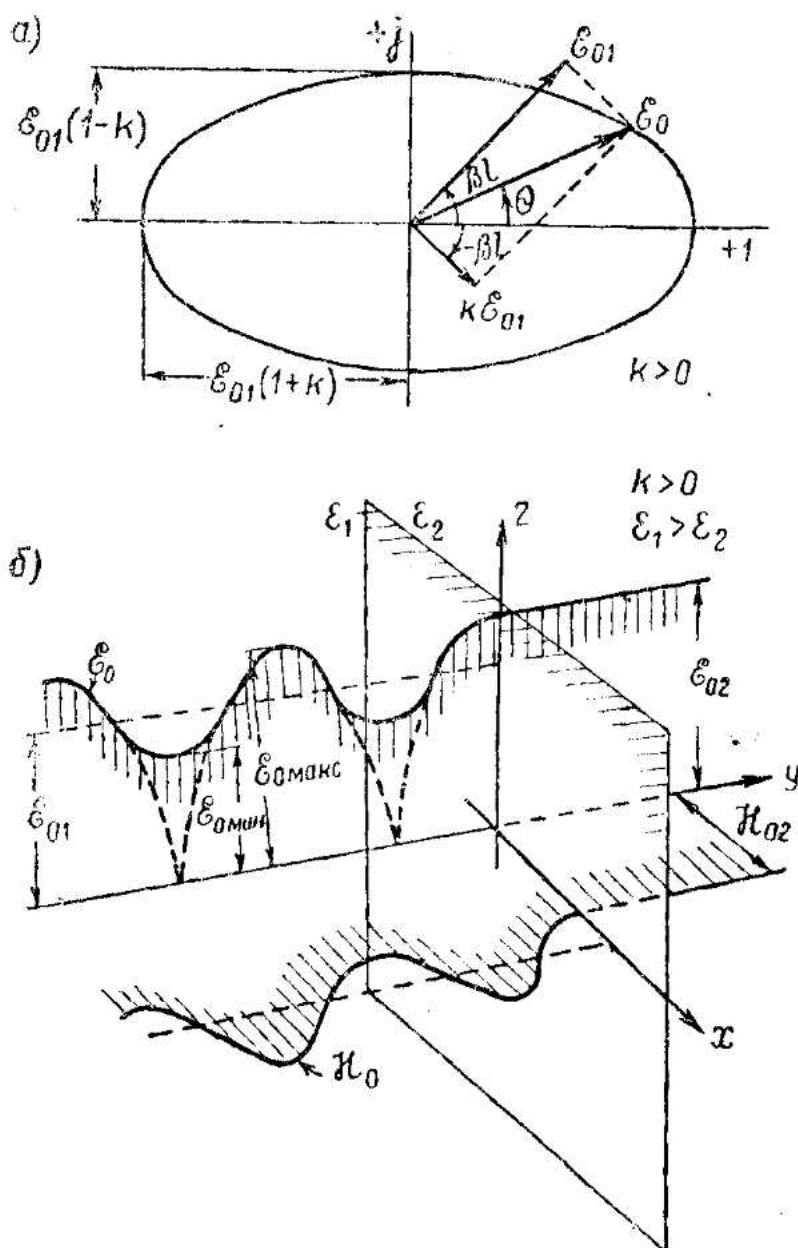


Рис. 61.2

Получим уравнение эллипса с полуосями $\mathcal{E}_{01}(1+k)$ и $\mathcal{E}_{01}(1-k)$. Этот эллипс и будет полярной диаграммой комплексной амплитуды $\mathcal{E}_0 e^{i\theta}$.

На рис. 61.2а выполнено построение эллипса для случая $k > 0$ (отражение с сохранением фазы вектора $\mathbf{E}$). При этом условии

$$1-k = 1-|k| < 1, \quad 1+k = 1+|k| > 1. \quad (61.24)$$

Модуль комплексной амплитуды $\mathcal{E}_0 e^{i\theta}$, очевидно, равен

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{X^2 + Y^2} = \mathcal{E}_{01} \sqrt{1+k^2 - 2k \cos 2\beta l}, \quad (61.25)$$

и её аргумент (начальная фаза)

$$\theta = \arctg \left(\frac{1-k}{1+k} \operatorname{tg} \beta l \right) = \arctg \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \operatorname{tg} \beta l \right). \quad (61.26)$$

Для нахождения мгновенного значения E на некотором расстоянии $y = -l$ от границы раздела, проектируем, как обычно, комплексную амплитуду $\dot{\mathcal{E}}_0$ на ось времени, взятую для заданного момента t (см. рис. 61.2). Мгновенное значение будет

$$E = \mathcal{E}_{01} \{ \sin(\omega t - \beta y) - k \sin(\omega t + \beta y) \}. \quad (61.27)$$

При $-y = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2} \dots \frac{n\lambda}{2} \dots$ комплексные амплитуды $\dot{\mathcal{E}}_1$ и $-k\dot{\mathcal{E}}_1$ направлены противоположно друг другу и амплитуда поля в этих точках будет наименьшей

$$\mathcal{E}_{0\min} = (1 - k) \mathcal{E}_{01}. \quad (61.28)$$

При $-y = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\lambda}{4} \dots$ комплексные амплитуды $\dot{\mathcal{E}}_1$ и $-k\dot{\mathcal{E}}_1$ совпадают по направлению, и мы получим

$$\mathcal{E}_{0\max} = (1 + k) \mathcal{E}_{01}. \quad (61.29)$$

Кривые изменения амплитуды электрического поля получим, если значение модуля комплексной амплитуды $\dot{\mathcal{E}}$ с полярной диаграммы перенесём на пространственную. В данном случае для $k > 0$ картина изменения амплитуд приведена на рис. 61.2б.

Для $k < 0$ у нас, очевидно,

$$1 - k = 1 + |k| > 1, \quad 1 + k = 1 - |k| < 1, \quad (61.30)$$

и полярная диаграмма примет вид, приведённый на рис. 61.3а.

Пространственная картина распределения амплитуд показана на рис. 61.3б.

Преобразовав ур-ние (61.17), можно комплексную амплитуду магнитного поля представить в виде

$$\dot{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{H}}_1 + \dot{\mathcal{H}}_1' = \mathcal{H}_{01} (e^{i\beta l} - k e^{i\beta l}) = \mathcal{H}_{01} \{ (1-k) \cos \beta l + i(1+k) \sin \beta l \}. \quad (61.31)$$

Картина пространственного распределения амплитуд магнитного поля для случая $k < 0$ будет, очевидно, подобна картине распределения электрических амплитуд для $k > 0$ и наоборот.

Если коэффициент отражения k стремится к -1 (случай отражения от идеального проводника), то эллипс на рис. 61.3 становится всё более и более вытянутым и при $k = -1$ сливается с осью i ; в

пространстве мы получим стоячие волны. Картина амплитудного (и магнитного) поля представится пунктированием кривых изменения $\mathcal{E}_0$ (см. рис. 61.3б).

Если k стремится к нулю (т. е. если нет отражения), то амплитуды сглаживаются и сливаются с прямой $\mathcal{E}_{01}$, показанной на рис. 61.2б и 61.3б пунктиром. Эллипс на полярных диаграммах

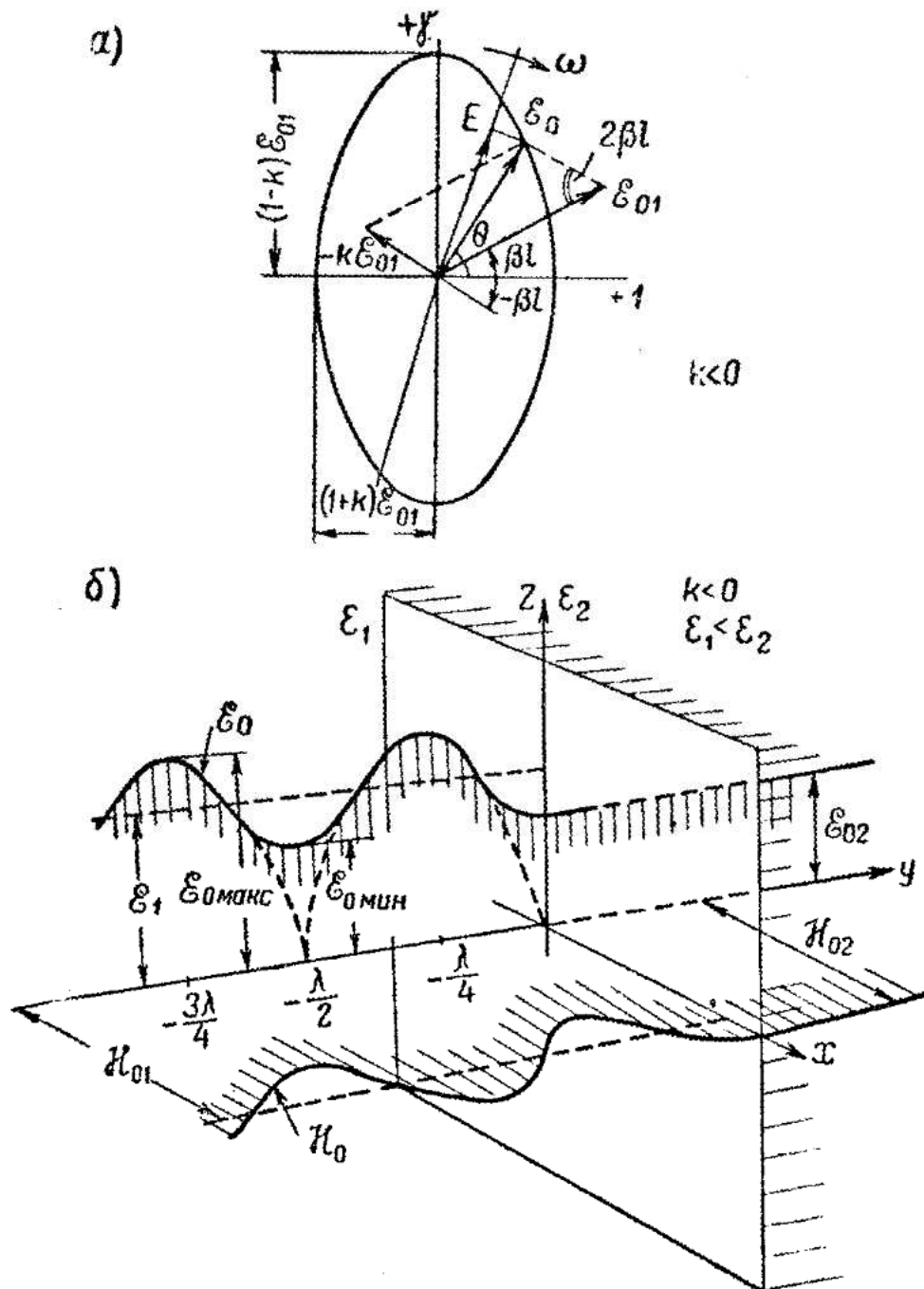


Рис. 61.3

рашается в окружность, т. е. временная диаграмма принимает обычный вид.

Наконец, если k стремится к +1, т. е. если $\zeta_1 \ll \zeta_2$ ($\epsilon_1 \gg \epsilon_2$), то картина распределения амплитуд будет приближаться к стоячей волне, показанной на рис. 61.2б пунктиром.

В начале координат при этом будет пучность электрического поля и узел магнитного. Однако k не может точно равняться $+1$, это соответствовало бы $\varepsilon_2=0$. Реальных же сред с $\varepsilon=0$ не существует. Поэтому чистых стоячих волн с пучностью электрического поля на границе двух диэлектриков мы получить не можем.

Поле при k , не равном $+1$ или -1 , можно формально разложить на бегущую и стоячую волны, причём, если $k < 0$, то стоячая волна электрического поля будет иметь на границе раздела узел, если же $k > 0$, то пучность.

Разложение на стоячую и бегущую волны осуществим, исходя из формул комплексных амплитуд [см. ф-лы (61.16) и (61.17)].

Перейдём в этих формулах к комплексным амплитудам и, преобразуя, получим

для $k < 0$, учитывая, что в этом случае $\begin{cases} 1 - k = 1 + |k| \\ 1 + k = 1 - |k| \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_{01} (e^{-i\beta_1 y} + |k| e^{i\beta_1 y}) = \mathcal{E}_{01} (e^{-i\beta_1 y} - |k| e^{i\beta_1 y}) = E_{01} \{ (1 - |k|) e^{-i\beta_1 y} - \\ &\quad - 2i |k| \frac{e^{i\beta_1 y} - e^{-i\beta_1 y}}{2i} \} = \mathcal{E}_{01} \{ (1 - |k|) e^{-i\beta_1 y} - 2i |k| \sin \beta_1 y \}; \end{aligned} \quad (61.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} &= \mathcal{H}_{01} (e^{-i\beta_1 y} - k e^{i\beta_1 y}) = \mathcal{H}_{01} (e^{-i\beta_1 y} + |k| e^{i\beta_1 y}) = \mathcal{H}_{01} \{ (1 - |k|) e^{-i\beta_1 y} + \\ &\quad + 2|k| \frac{e^{i\beta_1 y} + e^{-i\beta_1 y}}{2} \} = \mathcal{H}_{01} \{ (1 - |k|) e^{-i\beta_1 y} + 2|k| \cos \beta_1 y \}; \end{aligned} \quad (61.33)$$

для $k > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_{01} \left\{ (1 - k) e^{-i\beta_1 y} + 2k \frac{e^{i\beta_1 y} + e^{-i\beta_1 y}}{2} \right\} = \\ &= \mathcal{E}_{01} \{ (1 - k) e^{-i\beta_1 y} + 2k \cos \beta_1 y \}; \end{aligned} \quad (61.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} &= \mathcal{H}_{01} \left\{ (1 - k) e^{-i\beta_1 y} - 2i k \frac{e^{i\beta_1 y} - e^{-i\beta_1 y}}{2i} \right\} = \\ &= \mathcal{H}_{01} \{ (1 - k) e^{-i\beta_1 y} - 2i k \sin \beta_1 y \}. \end{aligned} \quad (61.35)$$

Мгновенные значения найдём, умножив комплексные амплитуды на $e^{i\omega t}$ и взяв коэффициент при мнимой части. Например, E при $k < 0$

$$E = \mathcal{E}_{01} \{ (1 - |k|) \sin(\omega t - \beta_1 y) - 2|k| \sin \beta_1 y \cos \omega t \}. \quad (61.36)$$

Отметим, что поток энергии, переносимый этой, искусственно отделённой бегущей волной, надо вычислять как разность потоков энергии падающей и отражённой волн, т. е.

$$P_{\text{бег}} = \frac{\mathcal{E}_{01}^2}{\zeta_1} - \frac{(k\mathcal{E}_{01})^2}{\zeta_1} = \frac{1-k^2}{\zeta_1} \mathcal{E}_{01}^2 = \frac{\rho^2}{\zeta_2} \mathcal{E}_{01}^2 = \frac{\mathcal{E}_{02}^2}{\zeta_2}, \quad (61.37)$$

и этот поток, как у нас и получилось, равен потоку энергии волны проходящей.

Коэффициентом, широко применяемым в практических расчётах, является введённый советскими учёными А. А. Пистолькорсом и В. В. Татариновым коэффициент бегущей волны, определяемый отношением наименьшей амплитуды поля к наибольшей:

$$k_{\text{б}} = \frac{\mathcal{E}_{0\text{мин}}}{\mathcal{E}_{0\text{макс}}} = \frac{1-|k|}{1+|k|}. \quad (61.38)$$

Если $k > 1$, то

$$k_{\text{б}} = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}. \quad (61.39)$$

Если же $k < 1$, то

$$k_{\text{б}} = \frac{1+|k|}{1-|k|} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}. \quad (61.40)$$

Обратная величина коэффициента бегущей волны ($k_{\text{б}}$) называется коэффициентом стоячей волны ($k_{\text{с}}$)

$$k_{\text{с}} = \frac{1}{k_{\text{б}}}. \quad (61.41)$$

Очевидно,

$$k_{\text{б}} < 1, \quad k_{\text{с}} > 1.$$

§ 62. Отражение от диэлектрика с проводимостью

Явление отражения от диэлектрика с проводимостью ($\sigma_2 \neq 0$) при нормальном падении плоской электромагнитной волны на поверхность раздела формально мало отличается от рассмотренного выше случая.

Соотношения, характеризующие электромагнитное поле падающей и отражённой волн в первой среде, в которой по-прежнему $\sigma_1 = 0$, могут быть выражены теми же формулами, что и при отражении от идеального диэлектрика, если в этих формулах абсолютную диэлектрическую проницаемость (ϵ_{a2}) среды с проводимостью

заменить в соответствии с ф-лой (29.10) комплексной абсолютной диэлектрической проницаемостью

$$\tilde{\epsilon}_{a2} = \epsilon_{a2} - i \frac{\sigma_2}{\omega}. \quad (62.1)$$

Тогда коэффициент фазы $i\beta_2$ заменится коэффициентом распространения $\tilde{\gamma}_2$

$$\tilde{\gamma}_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad (62.2)$$

где α_2 и β_2 определяются по ф-лам (51.14) и (51.15).

Волновое сопротивление второй среды станет комплексным

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\epsilon_{a2} \omega - i \sigma_2}} = \frac{\mu_a \omega}{\beta_2 - i \alpha_2} = \frac{\mu_a \omega}{\sqrt{\beta_2^2 + \alpha_2^2}} e^{i\varphi_2}, \quad (62.3)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Комплексными станут коэффициенты отражения и прохождения. Между векторами поля падающей, отражённой и проходящей волн в точках $y=0$ появится расхождение в фазе. Напряжённость электрического поля отражённой волны будет сдвинута относительно

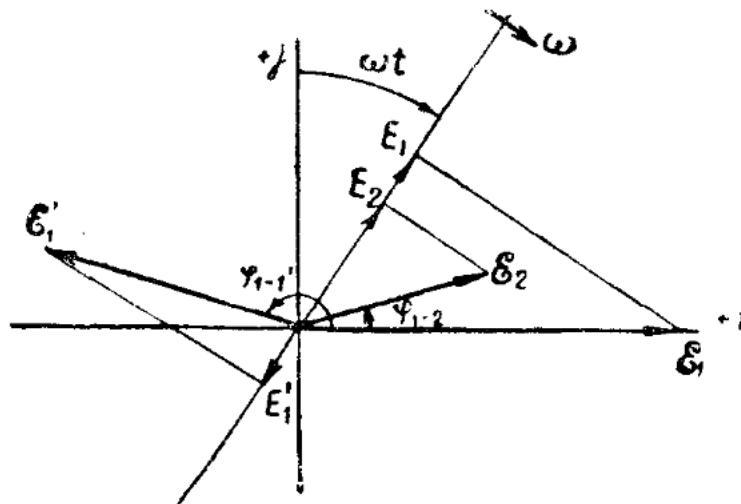


Рис. 62.1

но напряжённости электрического поля падающей волны в этой точке на угол, равный

$$\arg(\tilde{k}) = \arg\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}\right) = \varphi_{1-1'}. \quad (62.4)$$

Угол сдвига фаз электрических векторов волн падающей и проходящей будет равен

$$\arg(\tilde{\rho}) = \arg\left(\frac{2\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}\right) = \varphi_{1-2}. \quad (62.5)$$

Векторная диаграмма в точке $y=0$ для случая отражения от диэлектрика с $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ показана на рис. 62.1.

Распространение проходящей волны в среде с затуханием подробно рассмотрено в § 51. В случае среды с очень большой проводимостью ($\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2$) процесс проникновения электромагнитной волны в такую среду (проводник) рассмотрен в § 55.

§ 63. Аналогия явления отражения и прохождения плоской волны сквозь границу раздела двух диэлектриков с распространением вдоль линии, нагруженной на конце

Аналогию явления распространения плоской электромагнитной волны и распространения тока и напряжения вдоль длинной линии, развитую в § 52, мы разовьём и для явлений отражения и прохождения электромагнитной волны сквозь поверхность раздела.

Случаю отражения от идеального проводника, граничащего с идеальным диэлектриком, соответствует распространение вдоль линии без потерь, замкнутой накоротко.

Как известно из теории длинных линий, при таком режиме работы в длинной линии без потерь возникают стоячие волны тока и напряжения.

Рассмотрим линию без потерь, нагруженную сопротивлением Z_2 и, взяв начало координат в конце линии (рис. 63.1а), напомним выражение напряжения и тока для координаты $y = -l$

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos \beta y - i I_2 Z_c \sin \beta y, \quad (63.1)$$

$$\dot{I}(y) = I_2 \cos \beta y - i \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta y. \quad (63.2)$$

Если линия короткозамкнута, то $U_2=0$ и в точке $y=-l$:

$$\dot{U}(-l) = i I_2 Z_c \sin \beta l, \quad (63.3)$$

$$\dot{I}(-l) = I_2 \cos \beta l. \quad (63.4)$$

В этом случае в линии возникают стоячие волны напряжения и тока, представляющие собой наложение падающих и отражённых волн одинаковой амплитуды. Пусть амплитуда падающей волны напряжения равна U_0 . Так как амплитуда стоячей волны в пучности равна сумме амплитуд падающей и отражённой волн, то

$$I_2 Z_c = 2U_0. \quad (63.5)$$

¹⁾ В отличие от обозначений § 52 направим ось y вдоль линии.

Тогда

$$\dot{U}(-l) = i 2U_0 \sin \beta l, \quad (63.6)$$

$$\dot{I}(-l) = \frac{2U_0}{Z_c} \cos \beta l. \quad (63.7)$$

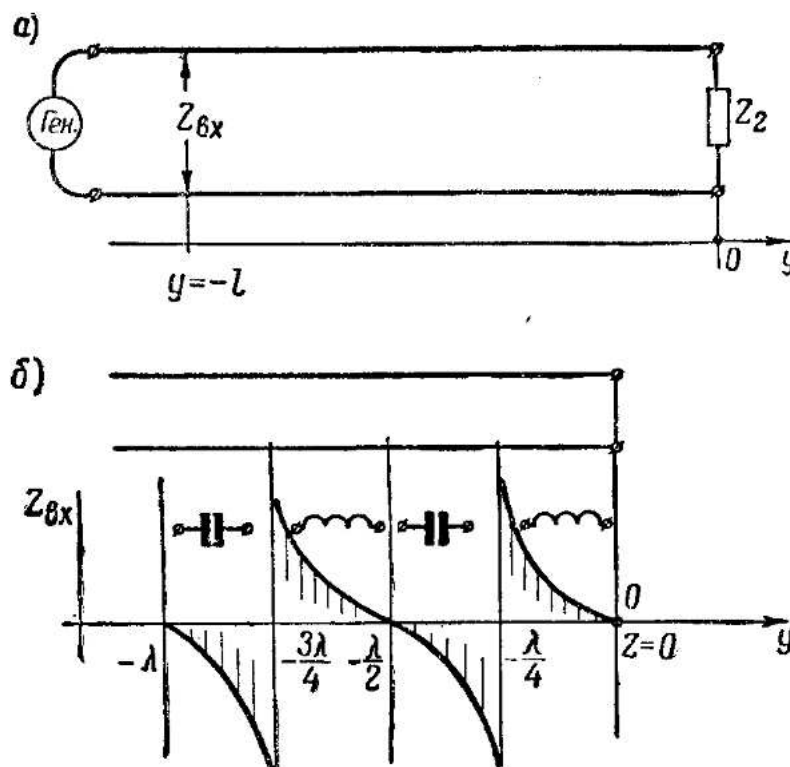


Рис. 63.1

Комплексные изображения тока и напряжения получим, умножив комплексные амплитуды на $e^{i\omega t}$

$$\dot{U}(t, -l) = \dot{U}(-l) e^{i\omega t} = 2i U_0 \sin \beta l e^{i\omega t}, \quad (63.8)$$

$$\dot{I}(t, -l) = \dot{I}(-l) e^{i\omega t} = 2 \frac{U_0}{Z_c} \cos \beta l e^{i\omega t}. \quad (63.9)$$

Сравнивая эти формулы с ф-лами (60.19) и (60.20), мы видим (при $y = -l$) полную аналогию картины распределения тока и напряжения в закороченной длинной линии с распределением напряжённостей магнитного и электрического полей при отражении от идеального проводника.

Входное сопротивление длинной линии в этом случае

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}(-l)}{\dot{I}(-l)} = i Z_c \operatorname{tg} \beta l. \quad (63.10)$$

В пределах l от $\frac{1}{4} \lambda$ до короткозамкнутого конца входное сопротивление носит индуктивный характер: для l от $\frac{\lambda}{2}$ до $\frac{3}{4} \lambda$ характер $Z_{вх}$ — ёмкостный и т. д. (см. рис. 63.16).

Переходя к явлению отражения, введём понятие входного сопротивления среды относительно плоскости, параллельной поверхности раздела и отстоящей от этой поверхности на расстоянии $y = -l$. Обозначив это сопротивление ζ_{ax} , из соотношений (60.19) и (60.20), получим его выражение

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} = \zeta_{ax} = i \zeta \operatorname{tg} \beta l, \quad (63.11)$$

аналогичное ф-ле (63.10).

Таким образом, на расстоянии $y = -\frac{\lambda}{4}$ от поверхности раздела находится плоскость нулевого входного сопротивления

$$\zeta_{ax} = 0, \quad \left(-\frac{\lambda}{4}\right) \quad (63.12)$$

на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$ расположится плоскость бесконечно большого сопротивления

$$\zeta_{ax} = \infty \quad \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \quad (63.13)$$

в соответствии с рис. 63.16.

Прохождение сквозь поверхность раздела двух диэлектриков и отражение от этой поверхности также аналогично распространению вдоль линии без потерь, нагруженной на конце.

Действительно, входное сопротивление линии в точке $y = -l$ будет

$$Z_{ax} = \frac{U(-l)}{I(-l)} = \frac{U_2 \cos \beta l + i I_2 Z_c \sin \beta l}{I_2 \cos \beta l + i \frac{U_2}{Z_c} \sin \beta l} = Z_c \frac{Z_2 \cos \beta l + i Z_c \sin \beta l}{Z_c \cos \beta l + i Z_2 \sin \beta l}. \quad (63.14)$$

Из ф-л (61.21) и (61.31) получим входное сопротивление среды равным

$$\zeta_{ax} = \frac{\mathcal{E}(-l)}{\mathcal{H}(-l)} = \frac{\mathcal{E}_{01}}{\mathcal{H}_{01}} \frac{(1+k) \cos \beta l + i(1-k) \sin \beta l}{(1-k) \cos \beta l + i(1+k) \sin \beta l} = \zeta_1 \frac{\zeta_2 \cos \beta l + i \zeta_1 \sin \beta l}{\cos \beta l + i \zeta_2 \sin \beta l}, \quad (63.15)$$

т. е. выражение, полностью аналогичное ф-ле (63.14) для случая линии с волновым сопротивлением Z_c , приключённой к нагрузке Z_2 .

Весьма важной является задача согласования передающей линии с нагрузкой или двух линий между собой, т. е. создание такого промежуточного устройства, включая которое между линией и нагрузкой, мы устранили бы отражение.

Как известно из теории длинных линий, такая задача может быть решена точно для случая согласования линий без потерь. Если волновые сопротивления линий будут равны Z_{1c} и Z_{2c} , то, включая между ними участок линии с волновым сопротивлением

$$Z_c^0 = \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} \quad (63.16)$$

длиной в четверть волны, мы устраним отражение (рис. 63.2a).

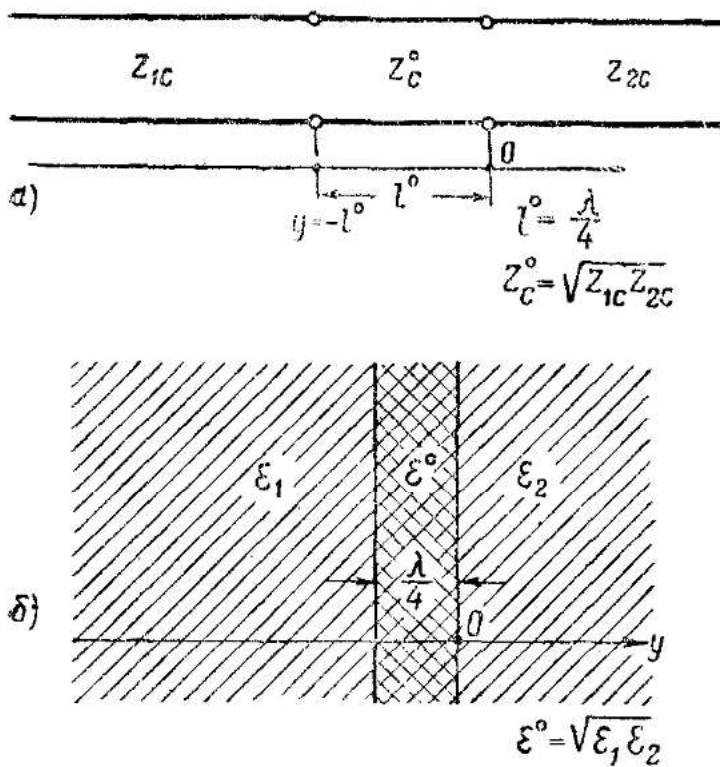


Рис. 63.2

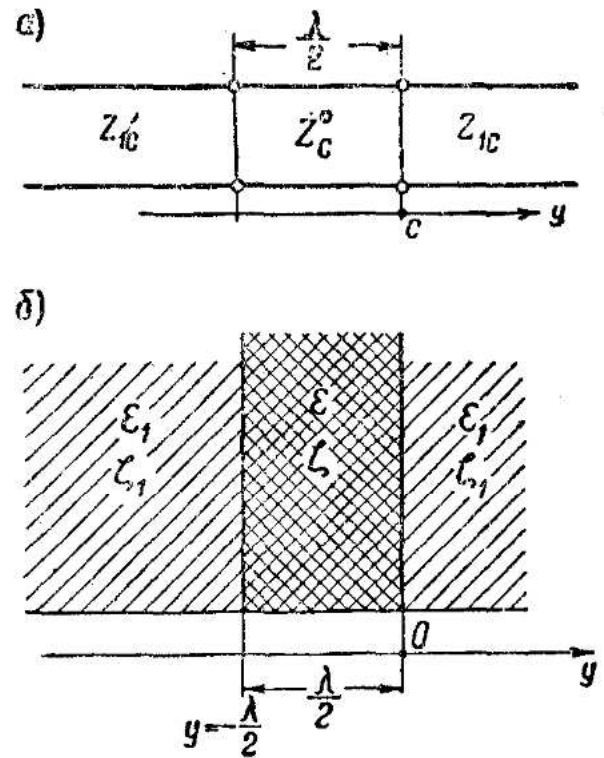


Рис. 63.3

Из теории длинных линий известно также, что включение в рассечку линии без потерь участка линии без потерь полуволновой длины, с волновым сопротивлением любой произвольной величины не изменяет режима работы линии (рис. 63.3а).

Аналогично можно решить задачу создания слоёв диэлектрика, уничтожающих отражение электромагнитной волны от поверхности раздела двух диэлектриков.

Поместим между данными диэлектриками слой диэлектрика, толщиной l_0 , с волновым сопротивлением ζ° (см. рис. 63.2б). Тогда входное сопротивление среды в плоскости $y = -l_0$ по ф-ле (63.15) будет равно

$$\zeta_{вх} = \zeta^\circ \frac{\zeta_2 \cos \beta^\circ l^\circ + i \zeta^\circ \sin \beta^\circ l^\circ}{\zeta^\circ \cos \beta^\circ l^\circ + i \zeta_2 \sin \beta^\circ l^\circ}, \quad (63.17)$$

где β° — коэффициент фазы в промежуточном диэлектрике. Отражения не будет, если, как было показано выше,

$$\zeta_{вх} = \zeta_1. \quad (63.18)$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_1 (\zeta^\circ \cos \beta^\circ l^\circ + i \zeta_2 \sin \beta^\circ l^\circ) = \zeta^\circ (\zeta_2 \cos \beta^\circ l^\circ + i \zeta^\circ \sin \beta^\circ l^\circ).$$

Отделив действительные члены от мнимых, получим:

$$\begin{aligned} (\zeta_1 - \zeta_2) \zeta^\circ \cos \beta^\circ l^\circ &= 0, \\ (\zeta_1 \zeta_2 - \zeta^{\circ 2}) \sin \beta^\circ l^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Этой паре соотношений можно удовлетворить, если $\beta^\circ l^\circ = \frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\begin{aligned} l^\circ &= \frac{\lambda^\circ}{4}, \\ \zeta_1 \zeta_2 &= \zeta^{\circ 2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\zeta_0 = \sqrt{\zeta_1 \zeta_2} \quad (63.19)$$

или

$$\alpha^\circ l^\circ = \pi,$$

следовательно,

$$l^\circ = \frac{\lambda^\circ}{2} \quad (63.20)$$

$$\zeta_1 = \zeta_2$$

при произвольном ζ° , где λ° — длина волны в промежуточном диэлектрике.

Таким образом, для устранения отражения от границы раздела диэлектриков между ними следует поместить слой диэлектрика толщиной в четверть волны, с волновым сопротивлением $\zeta^\circ = \sqrt{\zeta_1 \zeta_2}$, т. е. с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon^\circ = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (63.21)$$

(см. рис. 63.2).

Точно так же непоглощающая плёнка толщиной в половину длины волны с любой диэлектрической проницаемостью, помещённая в однородную среду, пропускает нормально к ней направленную электромагнитную волну без отражения (см. рис. 63.3).

Четвертьволновая плёнка с диэлектрической проницаемостью, определяемой ф-лой (63.21), применяется для изготовления «просветлённой» оптики. Оптическое стекло (например, объектив фотоаппарата) покрывается такой плёнкой, и тем самым устраняется отражение, следовательно, увеличивается световой поток, проходящий сквозь стекло.

Свойствами полуволновой плёнки объясняется известный эффект, обнаруженный впервые Ньютоном: при раздувании мыльного пузыря, когда его стенки станут достаточно тонки, кажется, что в отдельных местах на них появляются дыры — участки, от которых не отражается свет — это как раз те участки, где толщина стенки становится равна половине (средней) длины волны света.

§ 64. Обобщение понятия «направление распространения волны». Неоднородные плоские волны

Переходя к исследованию отражения электромагнитной волны, направленной под произвольным углом к поверхности раздела, полезно ввести некоторый аналитический приём, при помощи которого можно, выбрав некоторое произвольное направление y (рис. 64.1), рассматривать плоскую волну, распространяющуюся в направлении y' , как распространяющуюся в выбранном направлении y , но с другой фазовой скоростью.

На рис. 64.1а ось x , по которой откладывается величина волновой функции Ψ , надо вообразить направленной на читателя. Выбор такой ориентировки координат обеспечивает изометрию в плоскости yz , являющейся плоскостью чертежа. На этом рисунке показана плоская однородная волна длиной λ , распространяющаяся в направлении оси y' . Ниже на рис. 64.1б та же картина показана в плане.

Волновая функция Ψ геометрически представлена расстоянием от плоскости zy до волновой поверхности; волновая функция в фазовой плоскости, например, плоскости AB , перпендикулярной на-

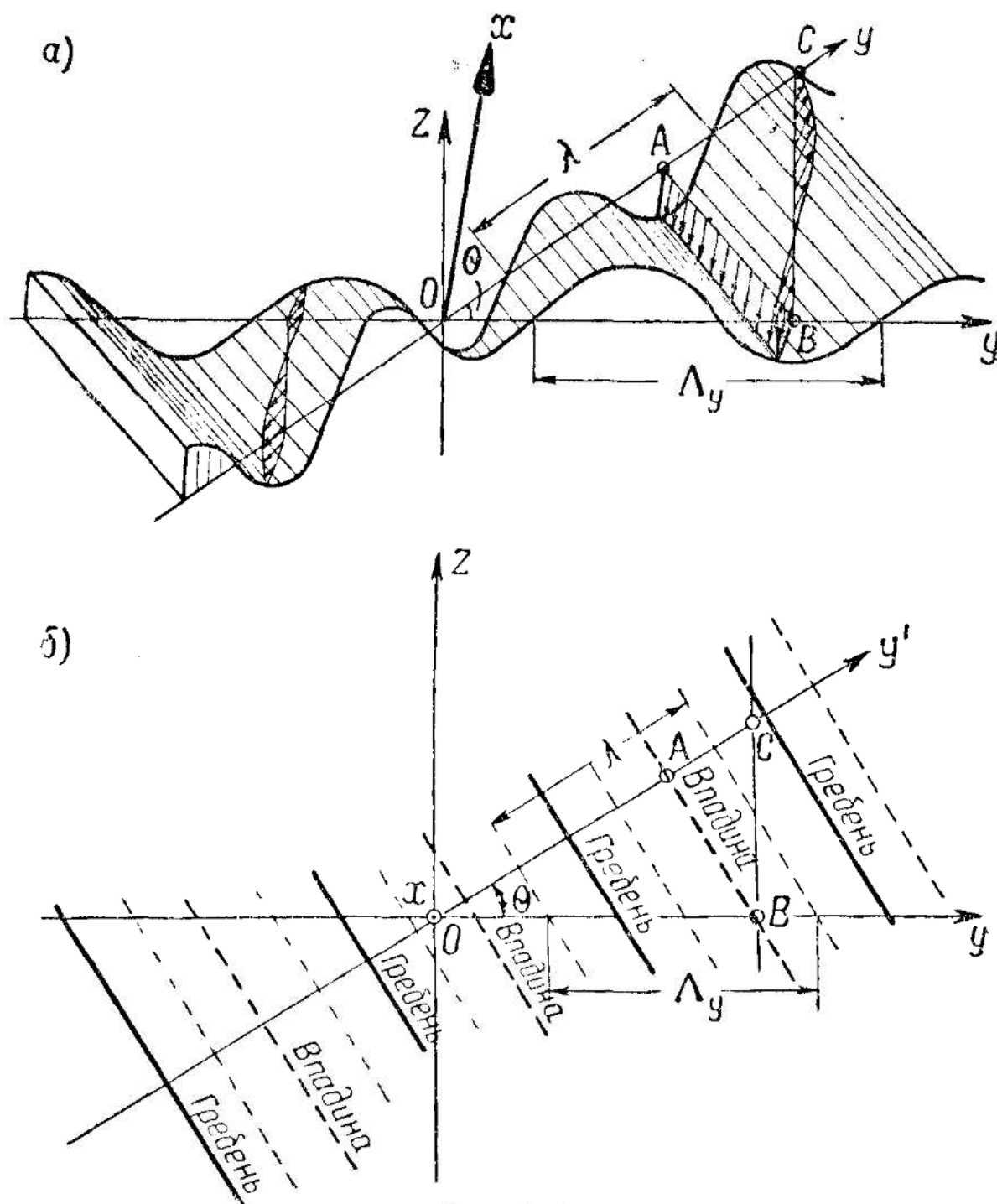


Рис. 64.1

правлению распространения y' , имеет, как видно из рис. 64.1, одинаковые значения, — такую волну мы определили в § 48 как плоскую и однородную.

Эта же самая волна может рассматриваться как распространяющаяся в направлении оси y , но, как ясно из рис. 64.1, длина её в направлении y будет

$$\Lambda_y = \frac{\lambda}{\cos \theta} > \lambda, \quad (64.1)$$

и, следовательно, фазовая скорость в этом направлении больше, чем в направлении y' .

Проведём плоскость перпендикулярно оси y (плоскость CB). Мы обнаружим, что мгновенные значения волновой функции в этой плоскости не одинаковы, т. е. волновая функция будет в разных точках этой плоскости иметь различные фазы. Однако, если плоскость CB будет перемещаться вместе с волной в направлении оси y со скоростью волны, то картина распределения волновой функции на такой перемещающейся плоскости останется неизменной, т. е. эта плоскость будет фазовой поверхностью.

Таким образом, принимая направление распространения волны вдоль оси y , видим, что волна представляется плоской (её фазовая поверхность — плоскость), но оказывается неоднородной.

Придадим этому рассуждению аналитическую форму. Пусть среда, в которой распространяется гармоническая плоская однородная волна, идеальный диэлектрик. Комплексная амплитуда волновой функции будет равна

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i\beta y'}, \quad (64.2)$$

где $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ есть волновое число.

Уравнение фазовой плоскости (например AB) будет

$$y' = \text{const.} \quad (64.3)$$

Выразим координату y' через координаты y и z , полагая угол между y и y' , равным θ . Как видно из рис. 64.2а,

$$y' = y \cos \theta + z \sin \theta. \quad (64.4)$$

Комплексная амплитуда примет вид

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i\beta(y \cos \theta + z \sin \theta)} = \{\Psi_0 e^{-i\beta z \sin \theta}\} e^{-i\beta y \cos \theta}. \quad (64.5)$$

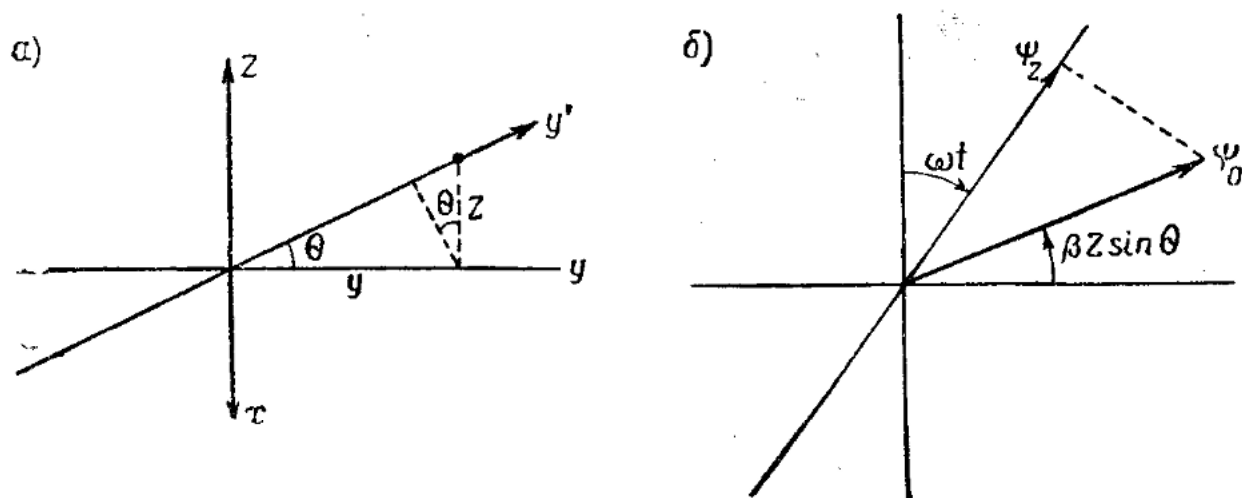


Рис. 64.2

Выражение

$$\Psi_0 e^{-i\beta z \sin \theta} = \Psi(z) \quad (64.6)$$

есть закон распределения комплексной амплитуды волновой функции в фазовой плоскости CB неоднородной волны. Мгновенное значение Ψ в этой плоскости можно найти из векторной диаграммы $\Psi(z)$ (см. рис. 64.26).

Придавая различные значения z , получим комплексные амплитуды для различных точек фазовой плоскости CB . Проектируя их на линию времени, взятую для одного и того же момента времени, получим мгновенные значения волновой функции Ψ на этой фазовой плоскости.

Множитель $e^{-i\beta_y y \cos \theta}$ указывает на распространение волны в направлении y с коэффициентом фазы

$$\beta_y = \beta \cos \theta. \quad (64.7)$$

Так как $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$\beta_y = \beta \cos \theta = \frac{2\pi \cos \theta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\Lambda_y}, \quad (64.8)$$

где Λ_y — длина волны в направлении распространения y , равная

$$\Lambda_y = \frac{\lambda}{\cos \theta}, \quad (64.9)$$

в согласии с ф-лой (64.1), выведенной геометрически.

Фазовая скорость в направлении оси y' будет равна

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T}, \quad (64.10)$$

в направлении же оси y

$$v_y = \frac{\omega}{\beta_y} = \frac{\lambda}{\cos \theta T} = \frac{\Lambda_y}{T} = \frac{v}{\cos \theta} \quad (64.11)$$

оказывается больше, чем в направлении оси y' .

Мгновенное значение волновой функции, если за направление распространения взята ось y , будет равно

$$\Psi = \Psi_0 \sin [\omega t + \beta_y y - \xi(z)], \quad (64.12)$$

где фаза

$$\xi(z) = \beta z \sin \theta.$$

Формула мгновенного значения, как и формула комплексной амплитуды, симметрична относительно y и z , следовательно, с тем же успехом мы могли бы ось z взять за направление распространения волны с фазовым коэффициентом, длиной и скоростью, равными:

$$\begin{aligned}\beta_z &= \beta \sin \theta, \\ \Lambda_z &= \frac{\lambda}{\sin \theta}, \\ v_z &= \frac{v}{\sin \theta}.\end{aligned}\tag{64.13}$$

§ 65. Отражение плоской волны, падающей на поверхность идеального проводника под произвольным углом

Пусть плоская электромагнитная волна падает на поверхность идеального проводника в направлении y' под произвольным углом θ (θ — угол падения).

Вектор электрического поля $\mathbf{E}$, как и ортогональный к нему вектор $\mathbf{H}$, в общем случае ориентированы произвольно относительно плоскости падения (плоскости, определяемой нормалью к отражающей поверхности и направлением луча y').

В § 49 было показано, что плоскую электромагнитную волну можно разложить на две плоско-поляризованные волны, со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации.

Выполним это разложение для рассматриваемой волны, взяв плоскость поляризации (плоскость колебания вектора $\mathbf{E}$) одной составляющей (волна I) параллельно плоскости падения ($y'z$) и другой (волна II) перпендикулярно этой плоскости ($y'x$).

Таким образом, комплексные амплитуды векторов напряжённостей электрического и магнитного полей разложатся на

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}} &= \dot{\mathcal{E}}_{\parallel} + \dot{\mathcal{E}}_{\perp}, \\ \dot{\mathcal{H}} &= \dot{\mathcal{H}}_{\parallel} + \dot{\mathcal{H}}_{\perp},\end{aligned}\tag{65.1}$$

и $(\dot{\mathcal{E}}_{\perp}, \dot{\mathcal{H}}_{\perp})$ составят волну I , а $(\dot{\mathcal{E}}_{\parallel}, \dot{\mathcal{H}}_{\parallel})$ волну II .

Картина электрического ($\mathbf{E}_{\parallel}$) и магнитного ($\mathbf{H}_{\perp}$) полей волны I представлена на рис. 65.1 а и б. Электрическое поле ($\mathbf{E}_{\perp}$) и магнитное ($\mathbf{H}_{\parallel}$) волны II изображены на рис. 65.2а, б.

Эти плоские однородные волны, как было показано выше, можно рассматривать распространяющимися в направлении y с изменёнными фазовой скоростью и коэффициентом распространения.

Как видно из рис. 65.1 и 65.2 в волне I в направлении y будет содержаться продольная компонента E_y . Такую волну обычно называют «электрической» волной (E) или «поперечной магнитной» волной (TM), т. е. волной, имеющей только поперечную магнитную составляющую.

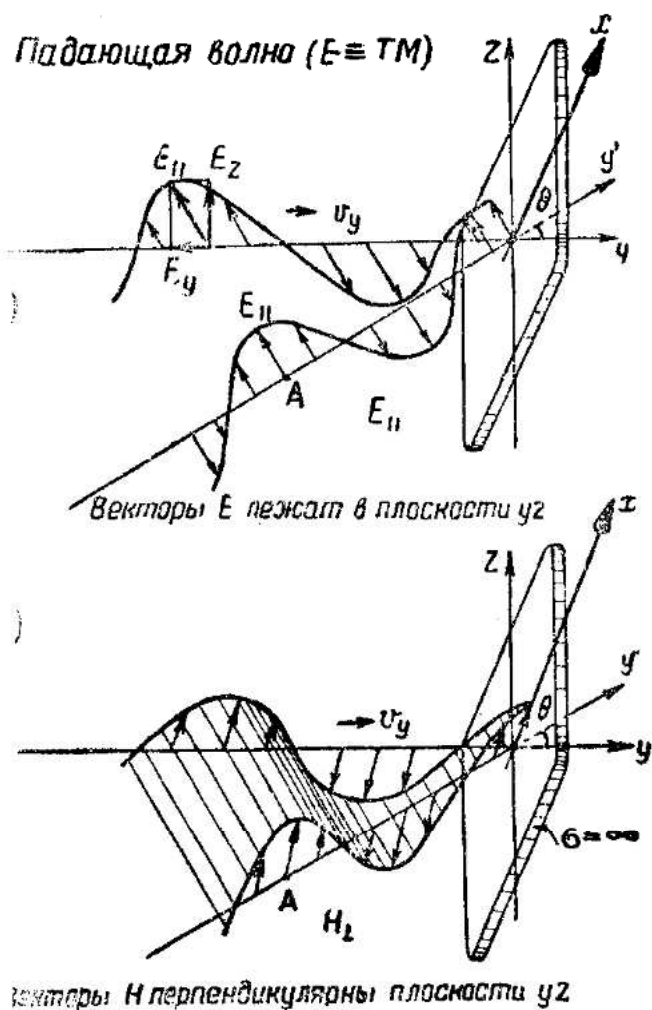


Рис. 65.1

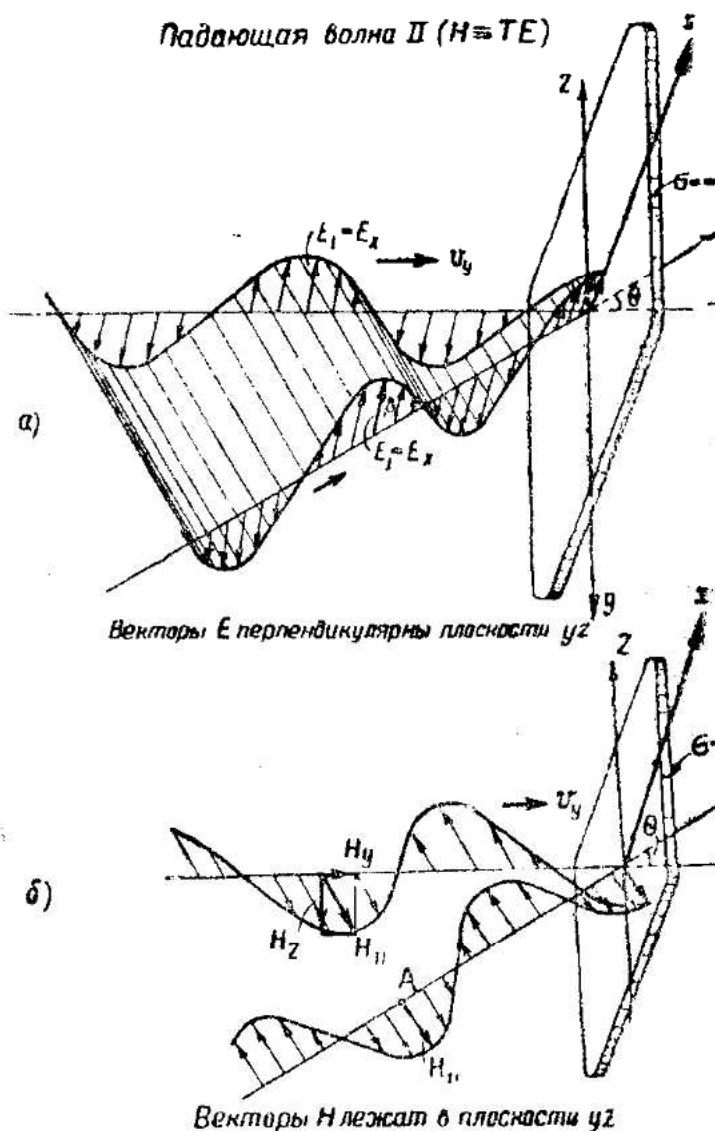


Рис. 65.2

Аналогичную волну II , как имеющую продольную компоненту H_y , принято называть «магнитной» волной H или «поперечной электрической» (TE) (см. также § 48).

Однородная волна, распространяющаяся в направлении y' , в соответствии с этой терминологией должна быть названа (относительно направления y') «поперечной электромагнитной волной» (TEM), как об этом говорилось в § 48.

Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля будут для волны $TEM I$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_y + \vec{E}_z = \vec{E}_{01} e^{-i\beta y'}, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_x = \vec{H}_{01} e^{-i\beta y'}, \quad (65.3)$$

для волны ТЕМ II

$$\dot{\mathcal{E}}_{\perp} = \dot{\mathcal{E}}_x = \dot{\mathcal{E}}_{0\perp} e^{-i\beta y'}, \quad \dot{\mathcal{H}}_{\parallel} = \dot{\mathcal{H}}_y + \dot{\mathcal{H}}_z = \dot{\mathcal{H}}_{0\parallel} e^{-i\beta y'}. \quad (65.4)$$

Условимся брать комплексные амплитуды $\dot{\mathcal{H}}_{\parallel}$ и $\dot{\mathcal{E}}_{\parallel}$ со знаком плюс, если векторы $\mathbf{E}_{\parallel}$ и $\mathbf{H}_{\parallel}$ направлены влево от положительного направления оси y' , т. е. в направлении, которое при $\theta=0$ совпадёт с положительным направлением оси z .

Направление $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ относительно друг друга установим, ориентируясь на вектор Пойнтинга. Знак комплексных амплитуд компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на оси координат будем определять в зависимости от направления этих компонент относительно осей.

Построим на основании этих соображений векторы $\dot{\mathcal{E}}_{\parallel}$ и $\dot{\mathcal{E}}_{\perp}$ $\dot{\mathcal{H}}_{\parallel}$ и $\dot{\mathcal{H}}_{\perp}$ в точке A на рис. 65.1, 65.2 и также 65.3. На рис. 65.3 знак $\odot$ — обозначает, как обычно, вектор, направленный на читателя, знак $\otimes$ — от читателя.

Найдём (§ 49 и 50) соотношение комплексных амплитуд электрического и магнитного полей, учитывая, что при выбранной ориентировке $\dot{\mathcal{E}}_{\parallel}$, $\dot{\mathcal{E}}_{\perp}$, $\dot{\mathcal{H}}_{\perp}$ — положительны и $\dot{\mathcal{H}}_{\parallel}$ — отрицательна: для волны I получим

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}_{\parallel}}{\dot{\mathcal{H}}_{\perp}} = \zeta_1; \quad (65.5)$$

для волны II

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}_{\perp}}{\dot{\mathcal{H}}_{\parallel}} = -\zeta_1. \quad (65.6)$$

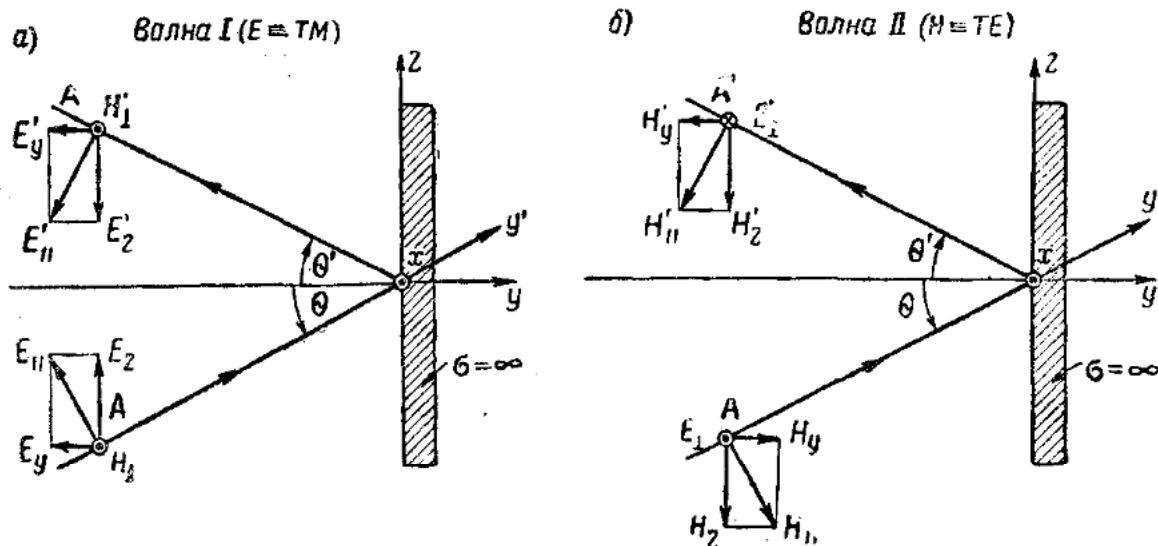


Рис. 65.3

Кроме того, из рис. 65.3а, б, очевидно,

$$\dot{\mathcal{E}}_y = -\dot{\mathcal{E}}_{\parallel} \sin \theta, \quad \dot{\mathcal{E}}_z = \dot{\mathcal{E}}_{\parallel} \cos \theta, \quad (65.7)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_y = -\dot{\mathcal{H}}_{\parallel} \sin \theta, \quad \dot{\mathcal{H}}_z = \dot{\mathcal{H}}_{\parallel} \cos \theta. \quad (65.8)$$

Перпендикулярные же компоненты ($\dot{\mathcal{E}}_{\perp}$ и $\dot{\mathcal{H}}_{\perp}$) равны соответствующим компонентам на оси x .

Для того чтобы рассматривать волны I и II как распространяющиеся по оси y , преобразуем функцию распространения по формулам предыдущего параграфа к новым координатам

$$e^{-i\beta y'} = e^{-i\beta(y \cos \theta + z \sin \theta)} = e^{-i\beta_z z} e^{-i\beta_y y}. \quad (65.9)$$

Вычислим в итоге комплексные амплитуды компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по осям x, y, z для обеих волн:

волна I

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_y &= -\dot{\mathcal{E}}_{\parallel} \sin \theta = -\mathcal{E}_{0\parallel} \sin \theta e^{-i\beta_z z} e^{-i\beta_y y} \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \dot{\mathcal{E}}_{\parallel} \cos \theta = \mathcal{E}_{0\parallel} \cos \theta e^{-i\beta_z z} e^{-i\beta_y y} \\ \dot{\mathcal{H}}_x &= \dot{\mathcal{H}}_{\perp} = \mathcal{H}_{0\perp} e^{-i\beta_z z} e^{-i\beta_y y} \end{aligned} \right\}; \quad (65.10)$$

волна II

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_x &= \dot{\mathcal{E}}_{\perp} = \mathcal{E}_{0\perp} e^{-i\beta_z z} e^{-i\beta_y y} \\ \dot{\mathcal{H}}_y &= -\dot{\mathcal{H}}_{\parallel} \sin \theta = \mathcal{H}_{0\parallel} \sin \theta e^{-i\beta_z z} e^{-i\beta_y y} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= \dot{\mathcal{H}}_{\parallel} \cos \theta = -\mathcal{H}_{0\parallel} \cos \theta e^{-i\beta_z z} e^{-i\beta_y y} \end{aligned} \right\}, \quad (65.11)$$

где $\beta_y = \beta \cos \theta$ — волновое число, характеризующее распространение вдоль оси y и $\beta_z = \beta \sin \theta$ — волновое число, характеризующее распределение поля в фазовой поверхности $y = \text{const}$ (см. предыдущий параграф).

Нашей задачей будет определение результирующего поля как суммы падающей и отражённой волн.

Займёмся определением комплексных амплитуд отражённых волн. Пусть они, как волны ТЕМ, распространяются в направлении θ' (см. рис. 65.3 точка A' , где θ' — угол отражения).

Функция распространения отражённых волн для направления $-y$ определится из ф-лы (65.9) заменой y на $-y$ и θ на θ' будет иметь вид

$$e^{-i\beta(-y \cos \theta' + z \sin \theta')}. \quad (65.12)$$

Начать рассмотрение отражения удобнее с волны II (TE). В точке $y=0$ её электрическое поле должно удовлетворять условию

$$E_z + E'_z = 0,$$

следовательно,

$$E_x + E'_x = 0, \quad (65.13)$$

где штрихом отмечены компоненты векторов отражённой волны.

Подставляя комплексные амплитуды, найдём для поверхности раздела $y=0$

$$\dot{\mathcal{E}}_x + \dot{\mathcal{E}}'_x = 0$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}_{01} e^{-i\beta_z z} = -\mathcal{E}'_{01} e^{-i\beta'_z z}. \quad (65.14)$$

Так как это соотношение должно удовлетворяться для любого z , то должно быть

$$\mathcal{E}'_{01} = -\mathcal{E}_{01}, \quad \beta_z = \beta', \quad (65.15)$$

и из соотношений (65.9) и (65.12) на основании (65.15) заключаем, что

$$\sin \theta = \sin \theta'$$

и, следовательно,

$$\theta = \theta', \quad (65.16)$$

что представляет собой закон отражения.

Таким образом, комплексная амплитуда электрического поля отражённой волны II будет равна

$$\dot{\mathcal{E}}'_1 = \dot{\mathcal{E}}'_x = -\mathcal{E}_{01} e^{-i\beta_y y}. \quad (65.17)$$

В этой волне отношение комплексных амплитуд электрического и магнитного полей равно (см. рис. 65.3, точка A')

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}'_1}{\dot{\mathcal{H}}'_1} = \zeta_1 \quad (65.18)$$

и также

$$\dot{\mathcal{H}}'_z = \dot{\mathcal{H}}'_1 \cos \theta, \quad \dot{\mathcal{H}}'_y = \dot{\mathcal{H}}'_1 \sin \theta. \quad (65.19)$$

В итоге комплексные амплитуды отражённой волны II будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}'_x = \dot{\mathcal{E}}'_1 &= -\mathcal{E}_{01} e^{-i\beta_z z} e^{i\beta_y y} \\ \dot{\mathcal{H}}'_y = \dot{\mathcal{H}}'_1 \sin \theta &= -\mathcal{H}_{01} \sin \theta e^{-i\beta_z z} e^{i\beta_y y} \\ \dot{\mathcal{H}}'_z = \dot{\mathcal{H}}'_1 \cos \theta &= -\mathcal{H}_{01} \cos \theta e^{-i\beta_z z} e^{i\beta_y y} \end{aligned} \right\}. \quad (65.20)$$

Рассуждая подобным же образом, найдём комплексные амплитуды поля волны I (ТМ).

В этом случае воспользуемся граничными условиями для составляющей E_z .

При $y=0$ получим

$$\dot{\mathcal{E}}_z + \dot{\mathcal{E}}'_z = 0. \quad (65.21)$$

Отсюда для поверхности раздела $y=0$

$$\dot{\mathcal{E}}'_z = -\dot{\mathcal{E}}_z = -\dot{\mathcal{E}}_1 \cos \theta. \quad (65.22)$$

Так как (см. рис. 65.3а) для любого y

$$\dot{\mathcal{E}}'_z = \dot{\mathcal{E}}'_1 \cos \theta \text{ и } \dot{\mathcal{E}}'_y = \dot{\mathcal{E}}'_1 \sin \theta, \quad (65.23)$$

то на поверхности $y=0$

$$\dot{\mathcal{E}}'_z = \mathcal{E}'_{0z} e^{-i\beta_z z} = \mathcal{E}'_{01} \cos \theta e^{-i\beta_z z} = -\mathcal{E}_{01} \cos \theta e^{-i\beta_z z} \quad (65.24)$$

и отсюда

$$\mathcal{E}'_{01} = -\mathcal{E}_{01}. \quad (65.25)$$

Комплексная амплитуда магнитного поля в этой волне удовлетворяет соотношению

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}'_1}{\dot{\mathcal{H}}'_1} = -\zeta_1. \quad (65.26)$$

Комплексные амплитуды отражённой волны I будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}'_y = \dot{\mathcal{E}}'_1 \sin \theta &= -\mathcal{E}_{01} \sin \theta e^{-i\beta_z z} e^{+i\beta_y y}, \\ \dot{\mathcal{E}}'_z = \dot{\mathcal{E}}'_1 \cos \theta &= -\mathcal{E}_{01} \cos \theta e^{-i\beta_z z} e^{+i\beta_y y}, \\ \dot{\mathcal{H}}'_x = \dot{\mathcal{H}}'_1 &= \mathcal{H}_{01} e^{-i\beta_z z} e^{+i\beta_y y} \end{aligned} \right\} \quad (65.27)$$

Очевидно, пользуясь соотношениями (65.5) и (65.6), можно все амплитуды выразить в функции амплитуд только электрического или только магнитного поля.

Рассчитаем результирующее поле падающей и отражённой волн ТМ и ТЕ. Пользуясь системами уравнений (65.10), (65.27) (65.11) и (65.20), получим:

из уравнения волны I (ТМ)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_{y \text{ полн}} &= \dot{\mathcal{E}}_y + \dot{\mathcal{E}}'_y = -\mathcal{E}_{0\parallel} \sin \theta e^{-i\beta_z z} (e^{-i\beta_y y} + e^{i\beta_y y}) = \\ &= -2\mathcal{E}_{0\parallel} \sin \theta \cos(\beta_y y) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_{z \text{ полн}} &= \dot{\mathcal{E}}_z + \dot{\mathcal{E}}'_z = \mathcal{E}_{0\parallel} \cos \theta e^{-i\beta_z z} (e^{-i\beta_y y} - e^{i\beta_y y}) = \\ &= -2i \mathcal{E}_{0\parallel} \cos \theta \sin(\beta_y y) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_{x \text{ полн}} &= \dot{\mathcal{H}}_x + \dot{\mathcal{H}}'_x = 2\mathcal{H}_{0\perp} \cos(\beta_y y) e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}, \quad (65.28)$$

из уравнения волны II (ТЕ)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_{x \text{ полн}} &= -2i \mathcal{E}_{0\perp} \sin(\beta_y y) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_{y \text{ полн}} &= -2i \mathcal{H}_{0\parallel} \sin \theta \sin(\beta_y y) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_{z \text{ полн}} &= -2\mathcal{H}_{0\perp} \cos \theta \cos(\beta_y y) e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}. \quad (65.29)$$

В направлении y оба типа волн представляют собой стоячие волны.

На расстоянии, определяемом условием

$$\sin(\beta_y y_0) = \sin(\beta y_0 \cos \theta) = 0 \quad (65.30)$$

(откуда $\beta y_0 \cos \theta = n\pi$), получим, что

$$y_0 = \frac{n\pi}{\beta \cos \theta} = \frac{n\lambda}{2\cos \theta} = n \frac{\Lambda_y}{2}, \quad (65.31)$$

где Λ_y — длина волны в направлении y .

В плоскости $y=y_0$ находятся узлы $E_{z \text{ полн}}$, $E_{x \text{ полн}}$, $H_{y \text{ полн}}$.

Этими заключениями мы воспользуемся в следующих параграфах, когда будем рассматривать распространение электромагнитных волн вдоль направляющих систем (см. гл. XII).

Так как в плоскости $y=y_0$

$$\cos \beta_y y_0 = \cos(\beta y_0 \cos \theta) = 1, \quad (65.32)$$

то в ней, очевидно, расположены пучности $E_{y \text{ полн}}$, $H_{x \text{ полн}}$, $H_{z \text{ полн}}$.

Как ведёт себя найденное результирующее поле вдоль оси z в направлениях, параллельных отражающей поверхности?

Нетрудно видеть, что в системах (65.28) и (65.29) величина $e^{-i\beta_z z}$ представляет не только функцию распределения комплексных амплитуд в фазовой плоскости $y=\text{const}$, но также и функцию

распространения (см. конец предыдущего параграфа) вдоль оси z , т. е. результирующее поле является бегущей волной в направлении z .

Действительно, найдём мгновенное значение какой-либо из шести компонент поля, например E_y .

Комплексное изображение $\dot{E}_y$ будет

$$\dot{E}_y(t) = -2\mathcal{E}_{0\parallel} \sin \theta \cos(\beta_y y) e^{i(\omega t - \beta_z z)}, \quad (65.33)$$

мгновенное значение

$$E_y = -2\mathcal{E}_{0\parallel} \sin \theta \cos(\beta_y y) \sin(\omega t - \beta_z z). \quad (65.34)$$

Мы получили бегущую волну в направлении z с длиной волны в этом направлении, равной

$$\Lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \quad (65.35)$$

и фазовой скоростью

$$v_z = \frac{v}{\sin \theta}. \quad (65.36)$$

В отражающей металлической поверхности наведутся переменные поверхностные заряды $\rho_{нов}$ и будут течь переменные поверхностные токи проводимости $\delta_{нов}$.

Из граничных условий (см. § 38) известно, что

$$\rho_{нов} = (\varepsilon_a E_n)_{y=0}. \quad (65.37)$$

В данном случае

$$E_n = -E_{y\text{ полн}}^1). \quad (65.38)$$

Подставляя $E_{y\text{ полн}}$ из ф-лы (65.34), получим

$$\rho_{нов} = 2\varepsilon_a \mathcal{E}_{0\parallel} \sin \theta \sin(\omega t - \beta_z z). \quad (65.39)$$

Как видим, картина распределения поверхностной плотности заряда перемещается вдоль оси z вместе с полем.

Поверхностный ток проводимости определим из условия

$$\left. \begin{aligned} \delta_{нов} &= [H_\tau]_{y=0} \\ \text{что можно записать и в векторном виде} \\ \delta_{нов} &= [n_0 \mathbf{H}]_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (65.40)$$

где $\mathbf{n}^\circ$ — нормаль к границе раздела.

¹⁾ Знак минус в этой формуле стоит потому, что мы ось y направили к отражающей поверхности.

В данном случае

$$\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_{x \text{ полн}} + \mathbf{H}_{z \text{ полн}} \text{ и } \dot{\mathcal{H}}_\tau = \dot{\mathcal{H}}_{x \text{ полн}} + \dot{\mathcal{H}}_{z \text{ полн}}. \quad (65.41)$$

При сложении комплексных амплитуд компонент вектора $\mathbf{H}$ следует помнить, что в пространстве эти компоненты направлены перпендикулярно друг другу. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_\tau &= 2\sqrt{\mathcal{H}_{x \text{ полн}}^2 + \mathcal{H}_{z \text{ полн}}^2} = 2\sqrt{\mathcal{H}_{0\perp}^2 + \mathcal{H}_{0\parallel}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \beta_y y} \\ \text{и} \\ \dot{\mathcal{H}}_\tau &= \mathcal{H}_\tau e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}. \quad (65.42)$$

Отсюда

$$\delta_{\text{нов}} = 2\sqrt{\mathcal{H}_{0\perp}^2 + \mathcal{H}_{0\parallel}^2 \cos^2 \theta} \sin(\omega t - \beta_z z). \quad (65.43)$$

Направление линий тока $\delta_{\text{нов}}$, очевидно, нормально направлению вектора $\mathbf{H}$ и составляет с осью x угол ξ , равный

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\mathcal{H}_{0\perp}}{\mathcal{H}_{0\parallel} \cos \theta}. \quad (65.44)$$

§ 66. Отражение и преломление плоской волны, падающей на поверхность раздела двух идеальных диэлектриков под произвольным углом

Пусть на границу раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 падает под углом θ плоская электромагнитная волна.

Разложим эту волну, как это было сделано в предыдущем параграфе, на две плоско-поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях волны: волну *I* с плоскостью поляризации, параллельной плоскости падения ($\mathbf{E}_\parallel$, $\mathbf{H}_\perp$), и волну *II* с плоскостью поляризации, перпендикулярной плоскости падения ($\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{H}_\parallel$) (см. рис. 66.1а, б).

Пусть отражённая волна распространяется под углом θ' и преломлённая — под углом θ'' , как это показано на рисунке. Если направление распространения падающей волны лежит в плоскости угла θ (плоскость падения), то из условий симметрии возможных направлений распространения отражённой и преломлённой волн (как первой, так и второй) относительно плоскости падения сле-

дует, что фактическое направление их распространения будет также лежать в этой плоскости.

Для определения компонент поля отражённой и преломлённой волн воспользуемся граничными условиями на поверхности раздела $y=0$.

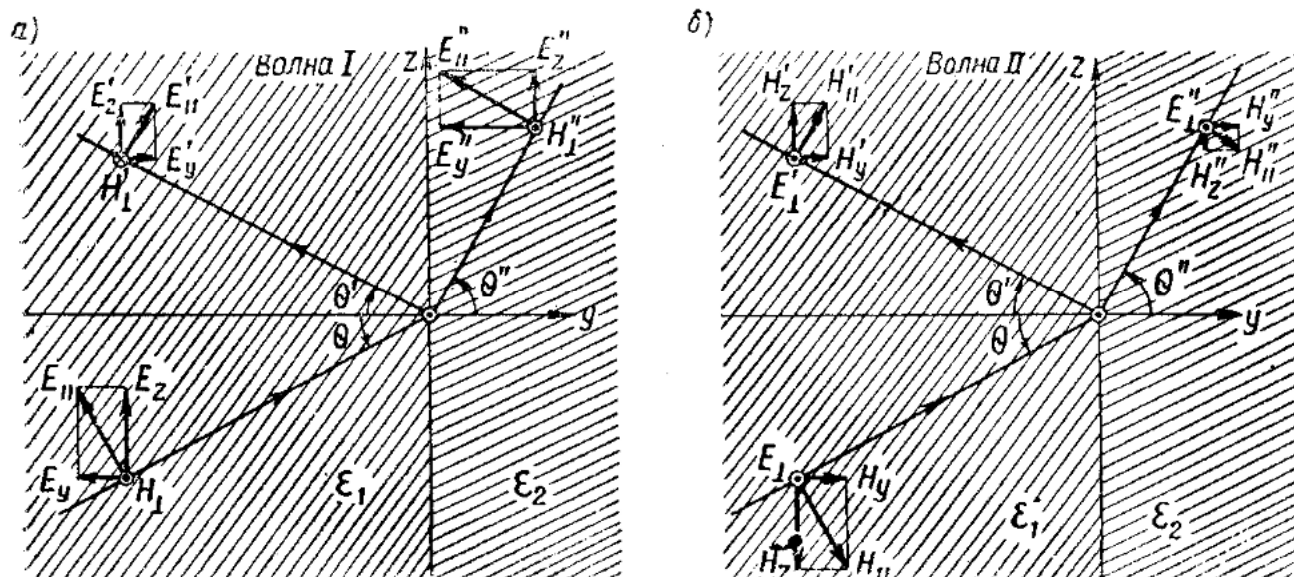


Рис. 66.1

Будем обозначать индексом ' параметры отражённой, и индексом " — преломлённой волн.

Так как в идеальном диэлектрике нет токов проводимости и свободных зарядов, то для решения задачи достаточно воспользоваться граничными условиями для тангенциальных составляющих **Е** и **Н**.

Результирующее поле в первом диэлектрике (ϵ_1) определяется суммой полей падающей и отражённой волн, во втором (ϵ_2) — преломлённой волной. Условия равенства тангенциальных составляющих векторов **Е** и **Н** у границы раздела $y=0$ будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для волны I} \quad H_{\tau} + H'_{\tau} = H''_{\tau} \\ \text{для волны II} \quad E_{\tau} + E'_{\tau} = E''_{\tau} \end{array} \right\}. \quad (66.1)$$

Рассмотрим случай, имеющий значение в практике диэлектрических волноводов, когда $\epsilon_1 > \epsilon_2$. В этом случае коэффициент отражения от второго диэлектрика в первый будет величиной положительной [см. ф-лу (61.8)], и, следовательно, напряжённость электрического поля при отражении не изменит фазы, в то время как напряжённость магнитного поля отразится с изменением фазы (см. рис. 61.1).

Этому случаю соответствует рис. (66.1а, б). Формулы же будут годны, разумеется, для любого соотношения диэлектрических проницаемостей ϵ_1 и ϵ_2 .

Перейдём в граничных условиях к комплексным изображениям компонент векторов поля.

Функции распространения падающей и отражённой волн будут, очевидно, те же, что и в предыдущем параграфе [см. ф-лы (65.9) и (65.12)].

Для преломлённой волны эта функция будет равна

$$e^{-i\beta''(y\cos\theta'' + z\sin\theta'')} = e^{-i(\beta_y''y + \beta_z''z)}, \quad (66.2)$$

где $\beta_y'' = \beta'' \cos \theta''$ — коэффициент распространения в направлении оси y и $\beta_z'' = \beta'' \sin \theta''$ — коэффициент распределения амплитуд в фазовой плоскости $y = \text{const}$.

Подставляя значения комплексных амплитуд в граничные условия (66.1), получим при $y=0$:
для волны I

$$\mathcal{H}_{01} e^{-i\beta_z z} - \mathcal{H}'_{01} e^{-i\beta'_z z} = \mathcal{H}''_{01} e^{-i\beta''_z z}, \quad (66.3)$$

для волны II

$$\mathcal{E}_{01} e^{-i\beta_z z} + \mathcal{E}'_{01} e^{-i\beta'_z z} = \mathcal{E}''_{01} e^{-i\beta''_z z}. \quad (66.4)$$

Эти равенства будут тождественны относительно z , т. е. будут удовлетворяться при любом значении z лишь в случае, если

$$\beta_z = \beta'_z = \beta''_z, \quad (66.5)$$

а отсюда следует:

1) частота колебаний отражённой и преломлённой волн остаётся та же, что и падающей (новые гармоники не появляются — свойство «линейной» среды);

2) так как

$$\left. \begin{aligned} \beta_z &= \beta \sin \theta = 2\pi \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{a1}} \sin \theta \\ \beta'_z &= \beta \sin \theta' = 2\pi \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{a1}} \sin \theta' \\ \beta''_z &= \beta \sin \theta'' = 2\pi \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{a2}} \sin \theta'' \end{aligned} \right\}, \quad (66.6)$$

то, очевидно, во-первых,

$$\theta = \theta' \quad (66.7)$$

— закон отражения, который и в данном случае сохраняет ту же форму, что и при отражении от металла, и, во-вторых,

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = n \quad (66.8)$$

— закон преломления (закон Снеллиуса),

где n — коэффициент преломления,

ζ_1, ζ_2 — характеристические сопротивления для волны ТЕМ в первом и втором диэлектриках;

3) соотношение амплитуд компонент электрического и магнитного полей:

волна I

$$\mathcal{H}_{0\perp} - \mathcal{H}'_{0\perp} = \mathcal{H}''_{0\perp}, \quad (66.9)$$

волна II

$$\mathcal{E}_{0\perp} + \mathcal{E}'_{0\perp} = \mathcal{E}''_{0\perp}. \quad (66.10)$$

§ 67. Формулы Френеля

Исходя из ур-ний (66.8), рассчитаем соотношения амплитуд падающей, отражённой и преломлённой волн для волн I и II . Если фазовые соотношения (66.4), (66.7) и (66.8) для волн I и II одинаковы, то соотношение амплитуд совпадать не будет.

Рассмотрим волну I , поляризованную в плоскости падения $(\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{H}_{\perp})$.

К соотношению (66.9)

$$H_{0\perp} - H'_{0\perp} = H''_{0\perp} \quad (67.1)$$

можно прибавить граничные условия для тангенциальных компонент вектора $\mathbf{E}$ этой волны

$$\mathcal{E}_{0z} + \mathcal{E}'_{0z} = \mathcal{E}''_{0z}. \quad (67.2)$$

При помощи соотношений:

$$\mathcal{E}_{0\parallel} = \mathcal{H}_{0\perp} \zeta_1, \quad \mathcal{E}'_{0\parallel} = -\mathcal{H}'_{0\perp} \zeta_1, \quad \mathcal{E}''_{0\parallel} = \mathcal{H}''_{0\perp} \zeta_2, \quad (67.3)$$

$$\mathcal{E}_{0z} = \mathcal{E}_{0\parallel} \cos \theta, \quad \mathcal{E}'_{0z} = \mathcal{E}'_{0\parallel} \cos \theta', \quad \mathcal{E}''_{0z} = \mathcal{E}''_{0\parallel} \cos \theta'', \quad (67.4)$$

нетрудно получить из (67.1), (67.2), (67.3) и (67.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{0\parallel} - \mathcal{E}'_{0\parallel} &= \mathcal{E}''_{0\parallel} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \mathcal{E}''_{0\parallel} n = \mathcal{E}''_{0\parallel} \frac{\sin \theta}{\sin \theta''}, \\ \mathcal{E}_{0\parallel} + \mathcal{E}'_{0\parallel} &= \mathcal{E}''_{0\parallel} \frac{\cos \theta''}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (67.5)$$

Решая эту систему относительно $\mathcal{E}'_{0\parallel}$ и $\mathcal{E}''_{0\parallel}$, мы получим:

$$\mathcal{E}'_{0\parallel} = \mathcal{E}_{0\parallel} \frac{\cos \theta'' - n \cos \theta}{\cos \theta'' + n \cos \theta} = \mathcal{E}_{0\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\theta'' - \theta)}{\operatorname{tg}(\theta'' + \theta)}, \quad (67.6)$$

$$\mathcal{E}''_{0\parallel} = \mathcal{E}_{0\parallel} \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta'' + n \cos \theta} = \mathcal{E}_{0\parallel} \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta'' + \theta) \cos(\theta'' - \theta)}. \quad (67.7)$$

Для волны II , поляризованной в плоскости, перпендикулярной плоскости падения ($\mathcal{E}_\perp$, $\mathcal{H}_\parallel$), к соотношению (66.10)

$$\mathcal{E}_{0\perp} + \mathcal{E}'_{0\perp} = \mathcal{E}''_{0\perp} \quad (67.8)$$

можем присоединить граничные условия для тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{H}$ этой волны

$$-\mathcal{H}_{0z} + \mathcal{H}'_{0z} = -\mathcal{H}''_{0z} \quad (67.9)$$

и при помощи соотношений, аналогичных (67.3) и (67.4), написать:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{0\perp} + \mathcal{E}'_{0\perp} &= \mathcal{E}''_{0\perp}, \\ -\mathcal{E}_{0\perp} + \mathcal{E}'_{0\perp} &= -\mathcal{E}''_{0\perp} \frac{\cos \theta''}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = -\mathcal{E}''_{0\perp} n \frac{\cos \theta''}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (67.10)$$

Решив эту систему, найдём:

$$\mathcal{E}'_{0\perp} = \mathcal{E}_{0\perp} \frac{\cos \theta - n \cos \theta''}{\cos \theta + n \cos \theta''} = \mathcal{E}_{0\perp} \frac{\sin (\theta'' - \theta)}{\sin (\theta'' + \theta)}, \quad (67.11)$$

$$\mathcal{E}''_{0\perp} = \mathcal{E}_{0\perp} \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + n \cos \theta''} = \mathcal{E}_{0\perp} \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin (\theta'' + \theta)}. \quad (67.12)$$

Формулы (67.6), (67.7), (67.11), (67.12), определяющие соотношения компонент поля падающей, отражённой и преломлённой волн, называются формулами Френеля. Они были выведены известным французским физиком Огюстом Жаном Френелем (1788—1827 гг.) в 1823 г. задолго до создания электромагнитной теории света.

§ 68. Угол полной поляризации. Закон Брюстера. Явление полного отражения

Увеличивая угол падения, можно добиться того, чтобы

$$\theta^\circ + \theta'' = \frac{\pi}{2}. \quad (68.1)$$

Тогда отражённого луча у волны I , поляризованной в плоскости падения, не будет, так как при этом условии $\operatorname{tg} (\theta^\circ + \theta'') = \infty$, и отсюда

$$\mathcal{E}'_{0\parallel} = \mathcal{E}_{0\parallel} \frac{\operatorname{tg} (\theta'' - \theta^\circ)}{\operatorname{tg} (\theta'' + \theta^\circ)} = 0. \quad (68.2)$$

В этом случае отражённый луч будет состоять лишь из луча волны II

$$\mathcal{E}'_{0\perp} = \mathcal{E}_{0\perp} \sin (\theta'' - \theta^\circ) \quad (68.3)$$

и будет, очевидно, полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения.

Так как показатель преломления

$$n = \frac{\sin \theta^{\circ}}{\sin \theta''} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}, \quad (68.4)$$

то при условии (68.1) $\theta'' = \frac{\pi}{2} - \theta^{\circ}$ и, следовательно, $\sin \theta'' = \cos \theta^{\circ}$, получим

$$n = \frac{\sin \theta^{\circ}}{\cos \theta^{\circ}} = \operatorname{tg} \theta^{\circ} \quad (68.5)$$

— соотношение, называемое «законом Брюстера». Угол θ° , при котором отражённый луч полностью поляризован, называется «углом полной поляризации».

Увеличивая угол падения ещё больше, мы при условии $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (условие, в соответствие с которым построен рис. 66.1а, б), можем получить угол преломления

$$\theta'' = \frac{\pi}{2}. \quad (68.6)$$

Преломлённый луч пойдёт в этом случае по границе раздела (поверхностная волна, см. § 72), захватывая лишь тонкий слой во второй среде (в среде с меньшей диэлектрической проницаемостью) и не распространяясь в её глубину. Практически весь падающий луч отражается — такое явление называется «полным отражением».

Условие полного отражения мы получим, подставив в выражение коэффициенты преломления $\sin \theta'' = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Тогда

$$\sin \theta = \sin \theta^* = n, \quad (68.7)$$

где θ^* — называется «углом полного отражения».

§ 69. Преломление плоской волны при наклонном падении на поверхность поглощающей среды

Пусть плоская гармоническая волна распространяется в идеальном диэлектрике 1 (ϵ_{a1} , $\sigma_1 = 0$) и падает под произвольным углом θ на поверхность поглощающей среды 2 $\left(\tilde{\epsilon}_{a2} = \epsilon_{a2} - i \frac{\sigma}{\omega} \right)$.

Рассмотрим распространение преломлённой волны (рис. 69.1),

Функция её распространения будет [см., например, ф-лу (66.2)]

$$f''(y, z) = e^{-i\beta''(y\cos\theta'' + z\sin\theta'')}.$$

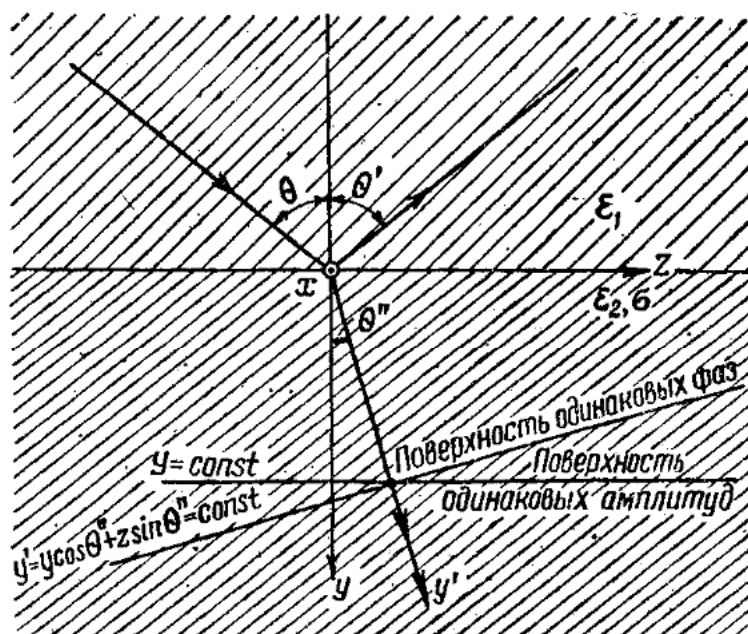


Рис. 69.1

В данном случае $\beta'' = 2\pi \sqrt{\epsilon_{a2} u_a}$ — комплексная величина и представляет собой комплексный коэффициент распространения в среде 2. Заменяем обозначение β'' обычным обозначением комплексного коэффициента распространения γ'' .

По закону Снеллиуса [ф-ла (66.8)]

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\gamma''}{\beta},$$

откуда

$$\beta \sin \theta = \gamma'' \sin \theta'' = \beta_z = \beta_z^*. \quad (69.1)$$

Коэффициенты фазы (если рассматривать распространение вдоль оси z) в обеих средах получились величинами действительными. Очевидно, $\sin \theta''$ — комплексная величина, сопряжённая с γ'' . Угол θ'' — комплексный. Комплексный угол не имеет геометрического смысла. Положим

$$\tilde{\theta}'' = \tilde{\vartheta}. \quad (69.2)$$

Коэффициент фазы в направлении оси y , $\gamma'' \cos \tilde{\vartheta}$, будет комплексным числом, так как

$$\gamma'' \cos \tilde{\vartheta} = \gamma'' \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{\vartheta}} = \gamma'' \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\gamma''}\right)^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{(\gamma'')^2 - \beta^2 \sin^2 \theta},$$

очевидно, комплексное число.

Положим

$$\gamma'' \cos \tilde{\vartheta} = \beta_y'' - i \alpha_y'';$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_y'' &= \operatorname{Re} \sqrt{(\gamma'')^2 - \beta^2 \sin^2 \theta} \\ \alpha_y'' &= \operatorname{Im} \sqrt{(\gamma'')^2 - \beta^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \right\}. \quad (69.3)$$

Функция распространения примет вид

$$f''(y, z) = e^{-1 \{ (\beta_y'' - i \alpha_y'') y + \beta_z'' z \}} = e^{-\alpha_y'' y} e^{-1 (\beta_y'' y + \beta_z'' z)}. \quad (69.4)$$

Мы видим из этой функции, что волна затухает лишь в направлении y . Поверхности одинаковых амплитуд будут плоскостями:

$$y = \text{const}. \quad (69.5)$$

Поверхности одинаковых фаз определяются уравнением

$$\beta_y'' y + \beta_z'' z = \text{const} \quad (69.6)$$

и не совпадают с поверхностями одинаковых амплитуд.

Уравнение поверхности одинаковых фаз нетрудно написать, исходя из геометрических соображений (см. рис. 69.1):

$$y \cos \Theta'' + z \sin \Theta'' = y' = \text{const}. \quad (69.7)$$

Здесь Θ'' — уже фактический угол преломления. Очевидно,

$$\frac{\beta_z''}{\beta_y''} = \frac{\sin \Theta''}{\cos \Theta''}. \quad (69.8)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \Theta'' = \frac{\beta_z''}{\beta_y''} = \frac{\beta \sin \theta}{\operatorname{Re} \{ \sqrt{\gamma''^2 - \beta^2 \sin^2 \theta} \}}. \quad (69.9)$$

§ 70. Преломление в оптически «плотной» или сильно поглощающей среде. Приближённые граничные условия Леонтовича

Если $\varepsilon_{a2} \gg \varepsilon_{a1}$ (среда 2 оптически более «плотная») или $\alpha'' \gg \beta$ (среда с большим поглощением), то

$$\beta \sin \theta \ll \operatorname{Re} \sqrt{\gamma''^2 - \beta^2 \sin^2 \theta}, \quad (70.1)$$

$$\operatorname{tg} \Theta'' \cong 0, \quad \Theta'' \cong 0. \quad (70.2)$$

Следовательно, с достаточным приближением можно считать, что преломлённая волна распространяется в направлении нормальном к поверхности раздела, и поверхности равных фаз и амплитуд совпадают.

Такое заключение остаётся в силе, если волна и поверхность раздела не плоские, так как, взяв достаточно малый участок фронта волны в момент его соприкосновения с поверхностью раздела и такой же малый участок поверхности раздела, можно в пределах этих участков считать их плоскими.

При нормальном к поверхности раздела распространении на поверхности раздела вектор $\mathbf{H}_2$ будет равен своей тангенциальной составляющей

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2\tau}, \quad (70.3)$$

а из условия непрерывности $\mathbf{H}$ получим на границе

$$\mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{2\tau} = \mathbf{H}_2. \quad (70.4)$$

Таким образом, для расчёта поля волны, распространяющейся в оптически «плотной» или поглощающей среде, можно не рассчитывать поля в этой среде, а найти тангенциальную компоненту $\mathbf{H}_{1\tau}$ поля падающей волны. Тогда (с приближением) полное поле в «плотной» среде у границы раздела определится соотношением (рис. 70.1)

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2\tau} = \mathbf{H}_{1\tau}. \quad (70.5)$$

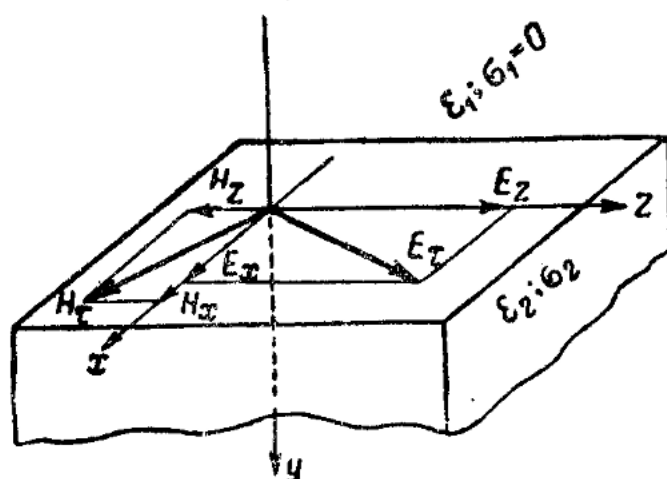


Рис. 70.1

Комплексные амплитуды рассчитаем по формуле

$$\dot{\mathcal{E}}_{2\tau} = \zeta_2 [\dot{\mathcal{H}}_{2\tau} \mathbf{n}^0], \quad (70.6)$$

где ζ_2 — характеристическое сопротивление среды 2.

Вводя местную систему координат в соответствии с рис. 70.1, напомним

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}}_x &= -\zeta_2 \dot{\mathcal{H}}_z, \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \zeta_2 \dot{\mathcal{H}}_x.\end{aligned}\quad (70.7)$$

Поле в первой среде рассчитывают обычно, полагая вторую среду идеальным проводником ($\sigma_2 = \infty$), т. е. считая тангенциальные компоненты вектора $\mathbf{E}$ на границе равными нулю, так как при отражении от идеального проводника компонента отражённого поля на границе равна и противоположна компоненте падающего, а результирующее поле равно их сумме ($\mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{отр}} = \mathbf{E}_{\text{т}} = 0$). Магнитное же поле отражается с сохранением фазы ($\mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{отр}} = 2\mathbf{H}_{\text{пад}} = \mathbf{H}_{\text{т}}$), как это показано в § 60. Поэтому рассчитать электрическое поле во второй среде при принятой идеализации можно, исходя именно из магнитного, как это и сделано выше.

Зная $\dot{\mathcal{E}}_2$, находим ток в поверхностном слое (например, по формулам § 55) и, если нужно, потери.

Изложенная методика расчёта поля в оптически «плотной» или поглощающей среде называется «приближёнными граничными условиями Леонтовича» [ф-лы (70.5) и (70.6)].

Рассмотрим случай существенно важный для практики — проникновение волны в металл при сильном поверхностном эффекте.

При этом

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega \sigma}{2}} (1 + i); \quad |\gamma| = \sqrt{\frac{\mu_a \omega \sigma}{2}} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{z_0},$$

где z_0 — эквивалентная глубина проникновения в металл (см. § 55).

Для меди [например, при частотах 10^{10} гц ($\lambda = 3$ см)], $z_0 = 6,6 \cdot 10^{-7}$ м; $|\gamma| = 1,5 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{м}}$, в то время как $\epsilon_{\text{мед}} = \epsilon_0 \simeq 10^{-11} \frac{\phi}{\text{м}}$, т. е. условия (70.1) и (70.2) выполнены.

Приближённые граничные условия Леонтовича применяются, например, при расчёте потерь в стенках волноводов и объёмных резонаторов.



Глава XII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН ВДОЛЬ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ§ 71. Ленточная линия. Основная волна. Волны высших
порядков. Критические условия. Дисперсия

Простейшей направляющей системой для электромагнитных волн является ленточная линия.

Представим себе две бесконечно длинные, параллельно расположенные ленты из идеального проводника шириной в 1 м, находящиеся на расстоянии также в 1 м. Ленты эти присоединены к генератору высокой частоты. На рис. 71.1б с боков каждой ленты показаны охранные плоскости, также из идеального проводника, присоединённые к тому же генератору. Охранные плоскости позволяют уничтожить краевой эффект на ленточной линии и добиться однородного поля между лентами. Конечно, у реальной ленточной линии никаких охранных плоскостей нет, мы просто пренебрегаем краевым эффектом.

На рис. 71.1а и на следующих мы эти охранные плоскости изображать не будем, но всегда будем подразумевать их наличие.

Выбрав оси координат, как показано на рис. 71.1а, заключим, что электрическое поле (благодаря охранным плоскостям) будет иметь только компоненту E_y , а магнитное — H_x ; в линии возникнет бегущая волна ТЕМ, распространяющаяся по направлению z и аналогичная плоско-поляризованной волне в свободном пространстве, подробно разобранный в § 49 (волна II).

Граничные условия, именно: равенство нулю на поверхности лент $\left(y = \pm \frac{1}{2}\right)$ тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной — магнитного, — очевидно, удовлетворяются.

На внутренней поверхности лент наводятся заряды разных знаков, поверхностная плотность которых равна

$$\rho_{\text{пов}} = \epsilon_a E_y. \quad (71.1)$$

Картина распределения этих поверхностных зарядов показана на рис. 71.1а. Такое распределение зарядов перемещается по

линии со скоростью волны в направлении оси z . Нужно отметить, что со скоростью волны ($v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{at}\mu_0}}$) перемещается именно картина распределения зарядов, сами же заряды (в толще металла) движутся с иной, вообще говоря, очень малой скоростью.

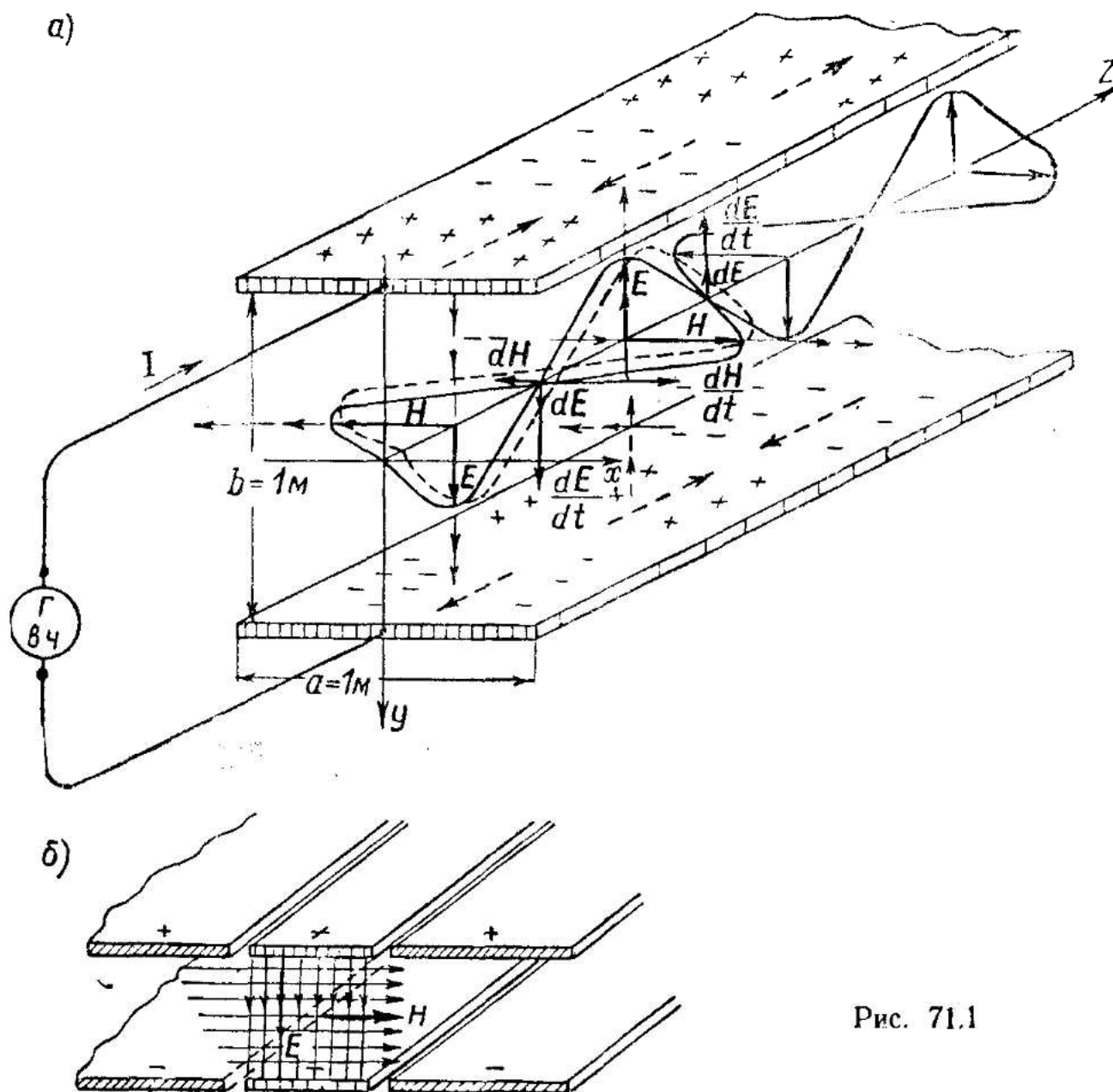


Рис. 71.1

Перемещение положительных зарядов эквивалентно току, направление которого совпадает с направлением перемещения этих зарядов, перемещение же отрицательных — току противоположного направления (см. пунктирные стрелки на рис. 71.1а).

Как видно из этого рисунка, амплитуда плотности поверхностного тока совпадает с амплитудой поверхностной плотности зарядов.

Так как по ф-ле (60.7)

$$\delta_{zos} = -H_x^1,$$

то мы ещё раз убеждаемся, что волна магнитного поля совпадает по фазе с волной электрического, что соответствует структуре бегущей волны.

Пунктирными синусоидами на рисунке показаны векторные изменения векторов **E** и **H**, непосредственно определяющие плотность тока смещения $\epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ и, следовательно, $\text{rot} \mathbf{H}$ и $-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, т. е. $\text{rot} \mathbf{E}$ (см. также § 57, рис. 57.4 и 57.5). На рис. 71.1а отчётливо видно, что векторные линии **H** охватывают $\text{rot} \mathbf{H}$ и векторные линии **E** ($\text{rot} \mathbf{E}$), образуя правовинтовые системы.

Ленточные проводники, как мы условились, имеют ширину 1 м и удалены друг от друга также на расстояние 1 м. Очевидно, заряд на элемент длины dz ленты будет равен

$$dQ = \rho_{nos} dz \quad (71.2)$$

и ток в линии

$$I = \delta_z. \quad (71.3)$$

Ёмкость отрезка dz линии (при условии однородного поля) будет

$$dC = C_0 dz = \frac{dQ}{U} = \frac{\rho_{nos} dz}{E_y} = \epsilon_a dz. \quad (71.4)$$

Отсюда в условии однородного поля по длине линии ёмкость на один погонный метр будет

$$C_0 = \frac{dC}{dz} = \epsilon_a \quad (71.5)$$

и для линии с воздушной изоляцией практически равна

$$C_0 = \epsilon_0 \approx 8,86 \frac{n\phi}{м}. \quad (71.6)$$

Аналогично, индуктивность на элемент dz длины линии будет

$$dL = L_0 dz = \frac{d\Phi}{I} = \frac{\mu_0 H_x \cdot dz}{I} = \mu_0 dz; \quad (71.7)$$

здесь $d\Phi = \mu_0 H_x dx$ — магнитный поток между лентами на dz погонных метров.

¹⁾ Знак минус в этой формуле появился потому, что положительному току в ленте соответствует **H**, направленное по отрицательной оси x .

Таким образом, индуктивность (в условиях стационарного тока) на единицу длины будет

$$L_0 = \mu_0 \approx 1,256 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}. \quad (71.8)$$

Формулы (71.5) и (71.8) дают любопытное «физическое» представление о величинах ϵ_0 и μ_0 как погонных ёмкости и индуктивности такой ленточной линии.

Волновое сопротивление линии [см. ф-лу (52.7)] равно

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad (71.9)$$

в данном случае оно будет

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \zeta_0 \quad (71.10)$$

и равно характеристическому сопротивлению вакуума для однородной волны.

Линия обладает направляющим действием, как это было показано в конце § 65. Это ясно и непосредственно; ведь распространяющаяся электромагнитная волна тесно связана с токами и зарядами, возникающими в линии. Напряжённость электрического поля связана с поверхностным зарядом и нормальна к поверхности лент, напряжённость магнитного — связана с поверхностным током и касательна к той же поверхности. Если линия делает изгиб, радиус кривизны которого больше длины волны, то токи проводимости текут, следуя этому изгибу, и «увлекают» за собой электромагнитную волну.

Комплексные амплитуды векторов $\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{E}}_y$, $\dot{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{H}}_x$ и соотношение между ними можно определить, например, по ф-ле (50.9).

Весьма важным является факт независимости условий распространения рассмотренной волны от частоты ω и фазового коэффициента β , т. е. от длины волны λ . Поэтому вдоль двухпроводной линии могут распространяться волны любой длины и частоты, включая, конечно, и постоянный ток (частоту, равную нулю).

Правда, при распространении вдоль двухпроводной линии волн очень высокой частоты, когда длина волны соизмерима с расстоянием между проводами линии, начинает сказываться излучение электромагнитной энергии в стороны. Поэтому для волн ультракороткого и сверхвысокочастотного диапазона применяют коаксиальные кабели и волноводы.

Рассмотренная нами поперечная электромагнитная волна (ТЕМ), распространяющаяся вдоль двухпроводной линии, называется «основной волной».

Фазовая скорость основной волны будет равна

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{V \epsilon_a \mu_0} = \frac{c}{V \epsilon} \quad (71.11)$$

и будет совпадать со скоростью распространения в однородной, неограниченной среде.

Кроме основной волны, вдоль ленточной линии могут распространяться так называемые волны «высших порядков».

Пусть однородная плоская электромагнитная волна, направление распространения которой OA лежит в плоскости yz (рис. 71.2), падает на поверхность ленты под углом падения θ .

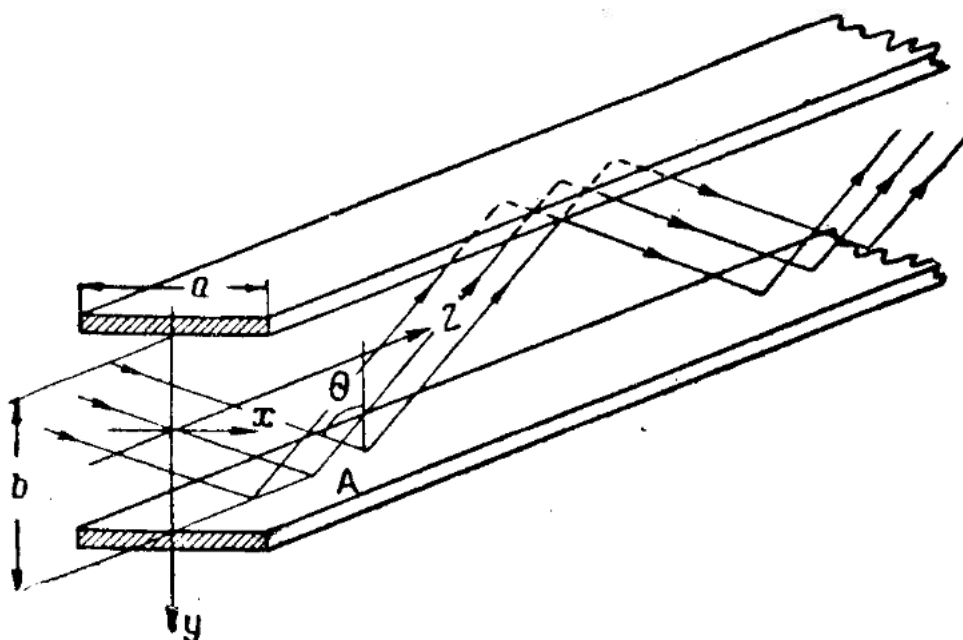


Рис. 71.2

При соблюдении некоторых соотношений между углом падения θ , расстоянием между лентами b и длиной волны λ происходит многократное отражение от нижней и верхней лент и волна распространяется вдоль линии. Наложение падающих и отражённых волн и будет одной из волн высшего порядка.

Рассмотрим элементарным путём условия, при которых происходит указанное выше многократное отражение. Эти условия — те же граничные условия, которые мы неоднократно применяли.

На рис. 71.3а, б показана электромагнитная волна, плоскость падения которой — плоскость yz . Плоскость поляризации этой волны (плоскость колебания вектора E), как видно из рис. 71.3а, параллельна плоскости падения. Одна такая волна распространяться в ленточной линии не может, так как на поверхности лент касательная составляющая E не равна нулю.

Рис. 71.3б изображает картину отражённой волны. Результирующая волна представляется наложением этих однородных волн.

Если результирующая картина поля окажется такой, что на

границе при сложении поля падающей волны с полем отражённой тангенциальные составляющие электрического поля исчезнут, то напряжённость E будет иметь лишь нормальные составляющие ($E_{\text{гран}} = E_n$) и граничные условия будут удовлетворены. Наложив мысленно рис. 71.3а на 71.3б так, чтобы точки А и В на этих рисунках совпали, мы получим картину результирующего электрического поля. Схематически вид силовых линий результирующего электрического поля и величина нормальных (E_y) (поперечных) и осевых (E_z) составляющих вектора E даны на рис. 71.5а, б.

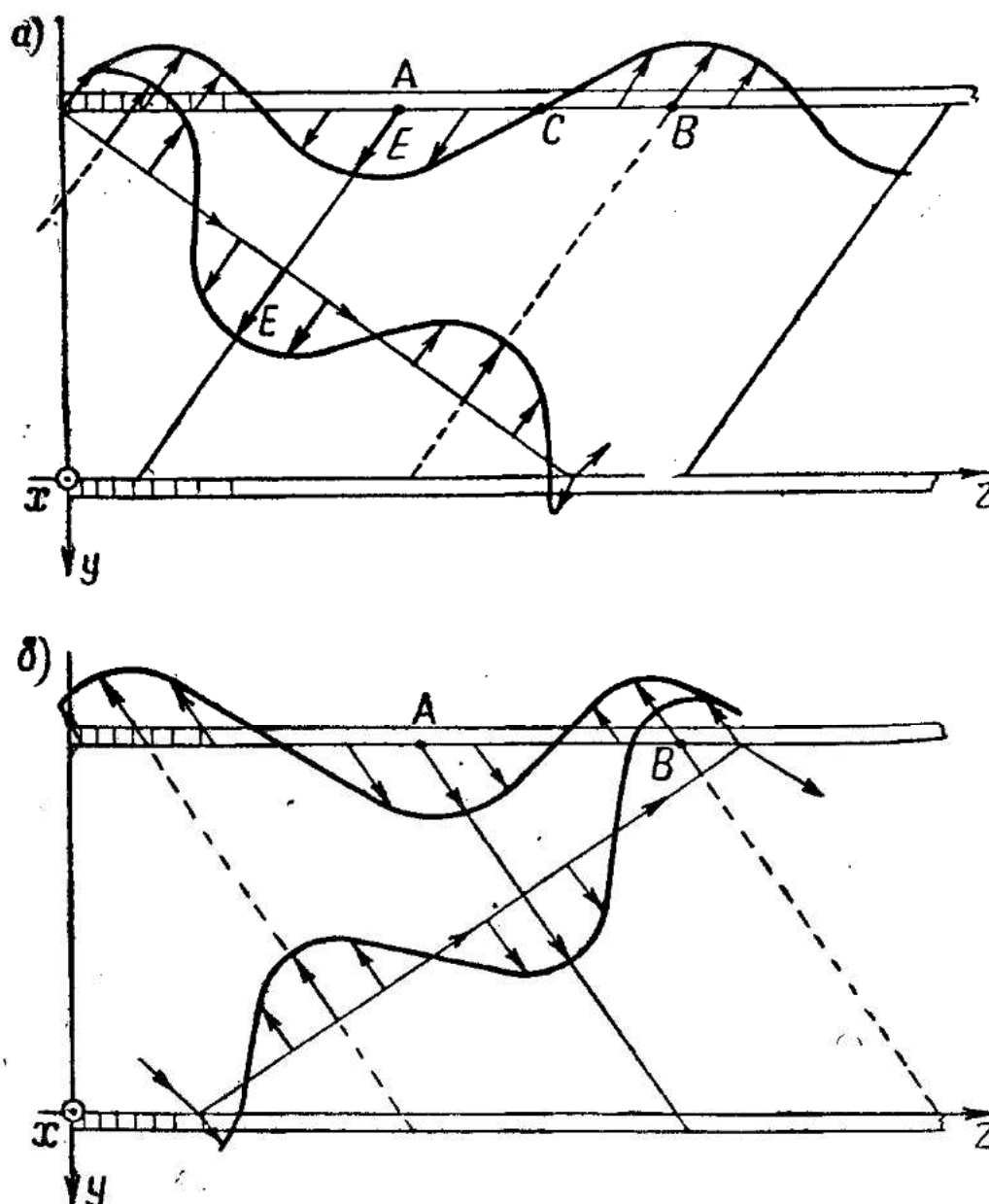


Рис. 71.3

Составляющие магнитного поля падающей и отражённой волн перпендикулярны плоскости падения (параллельны оси x ; $H = H_x$). Картина магнитного поля падающей и отражённой волн приведена на рис. 71.4а, б.

Накладывая рис. 71.4а на 71.4б так, чтобы совпали отметки

А и В, мы убеждаемся, что магнитное поле имеет одну составляющую, параллельную оси x . В данном случае магнитное поле — поперечное, вдоль оси z составляющих не имеет ($H_z = 0$). Так как H_x касательно к поверхности лент, то граничные условия для H также соблюдены. Картина результирующего поля H (рельеф) показана на рис. 71.5в. В рассмотренной электромагнитной волне электрическое поле имеет как продольную, так и поперечную

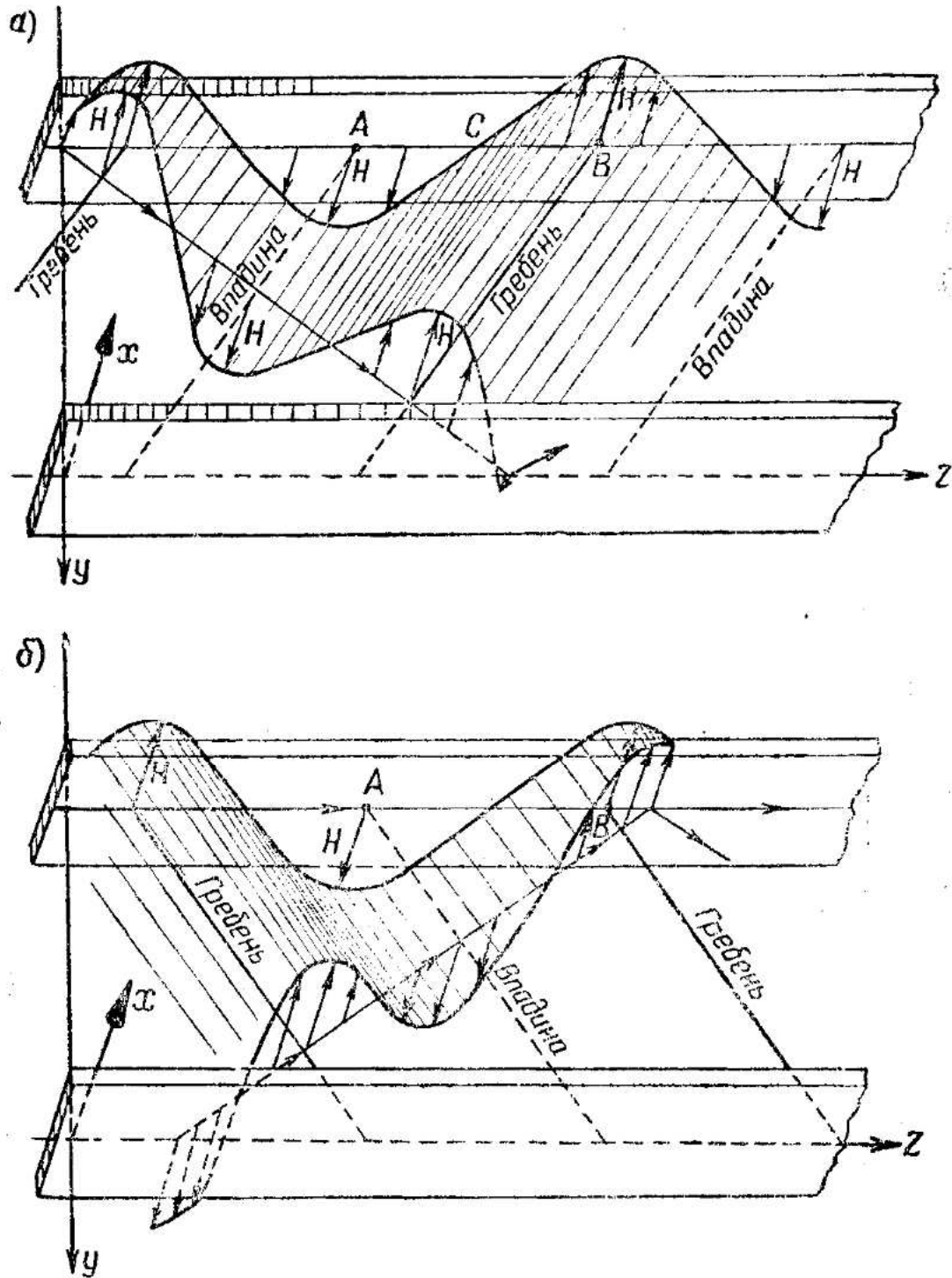


Рис. 71.4

составляющие ($E = y^\circ E_y + z^\circ E_z$), магнитное же — только поперечную ($H = x^\circ H_x$). Такая волна называется «электрической» или «поперечно-магнитной» волной ($E \equiv TM$).

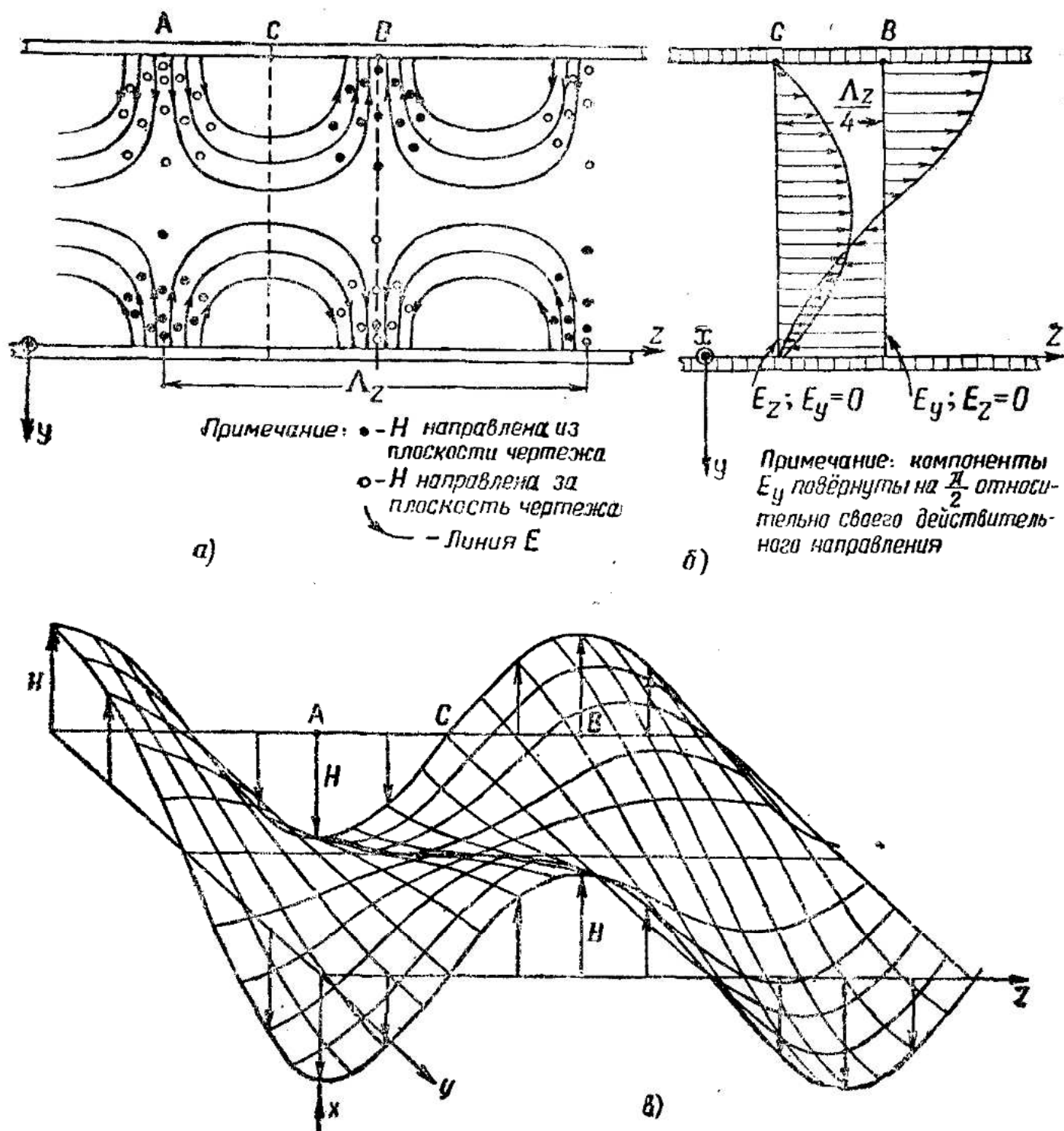


Рис. 71.5

Нетрудно теперь геометрически вывести соотношения между длиной однородной волны λ , углом падения θ и расстоянием между лентами b , при которых возможно распространение. На рис. 71.6 мы видим, что

$$\lambda = 2b \cos \theta. \quad (71.12)$$

Длина волны вдоль направления распространения z , как ясно из рис. 71.6, будет равна

$$\Lambda_z = \frac{\lambda}{\sin \theta} = 2b \operatorname{ctg} \theta. \quad (71.13)$$

Следовательно, чтобы распространение было возможно, необходимо, чтобы длина волны не превышала некоторой, как говорят «критической», величины (λ^*), соответствующей $\theta = 0$,

$$\lambda < \lambda_{\text{макс}} = \lambda^* = 2b \cos \theta = 2b. \quad (71.14)$$

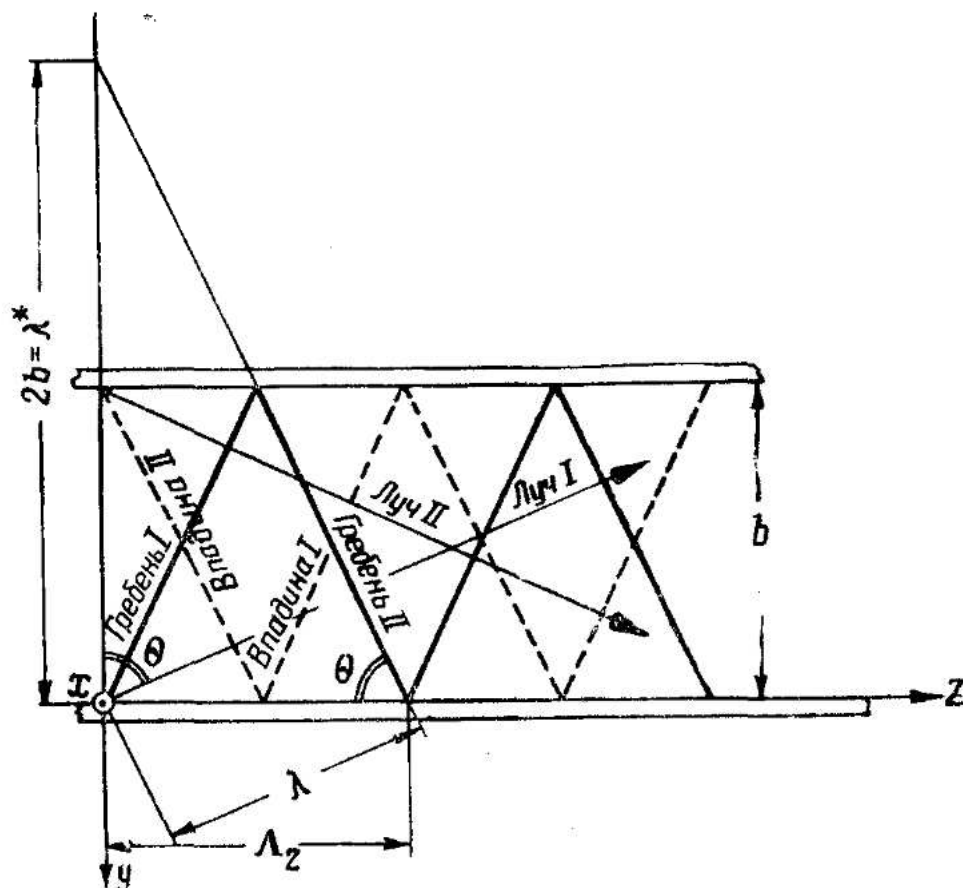


Рис. 71.6

Если $\lambda > \lambda^* = 2b$, то $\cos \theta$ окажется больше единицы и угол θ будет мнимой величиной. Это значит, что распространение электромагнитных волн невозможно. Условие (71.14) называется «критическим условием».

Частота колебаний, очевидно, должна быть не менее критической частоты f^* :

$$f > f^* = \frac{c}{\lambda^*}. \quad (71.15)$$

Если волна имеет длину $\lambda = \lambda^*$, то распространения вдоль оси z не происходит, так как направление распространения однородной волны оказывается перпендикулярно z .

В линию в направлении оси z в этих условиях проникает лишь резко убывающее (по показательному закону от величины z) электромагнитное поле, своего рода «отсвет».

Нетрудно связать длину волны Λ_z в направлении оси z с критической длиной волны λ^* . Так как

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{\lambda^*}, \quad (71.16)$$

то

$$\Lambda_z = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2}}. \quad (71.17)$$

Подставляя $\frac{\lambda}{\lambda^*} = \frac{f^*}{f}$, мы получим также

$$\Lambda_z = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f^*}{f}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - (f^*)^2}}, \quad (71.18)$$

т. е. выражение Λ_z — длины волны высшего порядка в направлении распространения z в зависимости от частоты f . Фазовая скорость волны высшего порядка будет равна [см. ф-лу (64.11) и (64.13)]

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{2\pi f}{2\pi/\Lambda_z} = \Lambda_z \cdot f = \frac{cf}{\sqrt{f^2 - (f^*)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f^*}{f}\right)^2}} > c \quad (71.19)$$

и, следовательно, будет зависеть от частоты f , причём при увеличении частоты v_z уменьшается, приближаясь к c . В соответствии с терминологией, введённой в §§ 51 и 54 (стр. 214), мы заключим, что в ленточной линии для волн высших порядков имеет место нормальная дисперсия.

Вычислим групповую скорость волны высшего порядка. По формуле Рэлея [см. ф-лу (54.9)] получим

$$u_z = \frac{d\omega}{d\beta_z} = \frac{d(2\pi f)}{d\frac{2\pi}{\Lambda_z}} = \frac{df}{d\left(\frac{\sqrt{f^2 - f^{*2}}}{c}\right)} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f^*}{f}\right)^2} < c. \quad (71.20)$$

Отметим, что

$$v_z \cdot u_z = c^2. \quad (71.21)$$

Фазовая скорость v_z оказалась больше скорости света. Как известно из теории относительности, скорости перемещения материальных тел могут иметь значения, только меньшие скорости света. Скорость v_z не является скоростью распространения электромагнитного поля (материального объекта) — это скорость

перемещения фазы электромагнитной волны. Скорость распространения электромагнитного поля определяется как скорость распространения электромагнитной энергии и совпадает (в стационарном режиме) с групповой скоростью u_z , которая меньше скорости света.

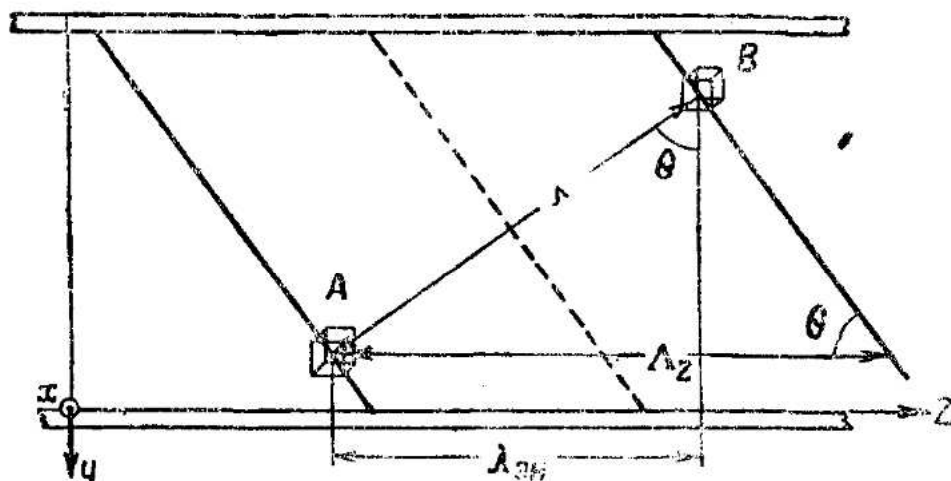


Рис. 71.7

То, что групповая скорость есть скорость распространения энергии, можно весьма наглядно показать следующим образом. Рассмотрим однородную волну в ленточной линии, распространяющуюся под углом θ (см. рис. 71.7). Длина этой волны в свободном пространстве — λ . Длина её (как неоднородной) в ленточной линии — Λ_z . Элемент объёма, показанный на рисунке в положении A, включает некоторое количество электромагнитной энергии. Эта энергия за один период перемещается в положение B на расстояние $\lambda_{гн}$ вдоль ленточной линии (по оси z).

Из рисунка очевидно

$$\Lambda_z = \frac{\lambda}{\sin \theta}; \quad \lambda_{гн} = \lambda \sin \theta; \quad \Lambda_z \lambda_{гн} = \lambda^2.$$

Разделив это соотношение на T^2 (квадрат периода), получим

$$\frac{\Lambda_z}{T} \frac{\lambda_{гн}}{T} = \left(\frac{\lambda}{T} \right)^2,$$

где

- 1) $\frac{\Lambda_z}{T} = v_z$ — скорость перемещения фазы (формы волны),
- 2) $\frac{\lambda_{гн}}{T} = v_{гн}$ — скорость перемещения энергии,
- 3) $\frac{\lambda}{T} = c$ — скорость электромагнитной волны в свободном пространстве.

Таким образом,

$$v_z v_{гн} = c^2,$$

сравнивая это выражение с (71.21), найдём

$$v_{\text{эп}} = u_z.$$

Объяснить распространение волн высшего порядка вдоль ленточной линии можно также, обратившись к анализу явлений отражения от идеальной проводящей поверхности, исследованной нами в § 65.

Рассмотрим рис. 65.1а, б. На этом рисунке представлены электрические и магнитные компоненты волны $E \equiv \text{ТМ}$, падающей на отражающую металлическую поверхность под некоторым углом (θ) .

В ленточной линии этой волне точно соответствует волна, электрические и магнитные компоненты которой показаны на рис. 71.3б и 71.4б.

Расположим параллельно отражающей поверхности, представленной на рис. 65.1, на расстоянии y_0 от неё, вторую отражающую поверхность y , и пусть генератор, возбуждающий поле, находится между этими поверхностями. Величину y_0 возьмём по ф-ле (65.31), положив $n=1$:

$$y_0 = \frac{\pi}{\beta \cos \theta} = \frac{\lambda}{2 \cos \theta} = \frac{\Lambda_y}{2}.$$

На второй отражающей поверхности расположатся узлы стоячих волн для составляющих

$$E_z, E_x \text{ и } H_y$$

[см. следствие из ф-лы (65.31)], и на этой поверхности как тангенциальная составляющая электрического поля, так и нормальная составляющая магнитного обратятся в нуль:

$$E_\tau = x^\circ E_x + z^\circ E_z = 0,$$

$$H_n = y^\circ H_y = 0.$$

А это значит, что и на второй отражающей поверхности граничные условия окажутся выполненными и в направлении оси z между отражающими плоскостями будет происходить распространение электромагнитных волн.

Комплексные амплитуды этих волн определяются ф-лами (65.28) — волна $E = \text{ТМ}$ (волна I) и (65.29) — волна $H = \text{ТЕ}$ (волна II)

Длина их в направлении z даётся ф-лой (65.35)

$$\Lambda_z = \frac{\lambda}{\sin \theta},$$

совпадающей с ф-лой (71.13) теории ленточной линии.

Формулу их фазовой скорости (65.36)

$$v_z = \frac{v}{\sin \theta}$$

нетрудно преобразовать, подставив выражения

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{и} \quad \beta_z = \beta \sin \theta.$$

Тогда

$$v_z = \frac{v}{\sin \theta} = \frac{\omega}{\beta \sin \theta} = \frac{\omega}{\beta_z},$$

что совпадает с ф-лой (71.19) теории ленточной линии.

Аналогичные выражения комплексных амплитуд электромагнитной волны, которую мы в данном параграфе исследовали элементарным геометрическим путём как волну $E=TM$ в ленточной линии, даются системой (65.28).

§ 72. Распространение электромагнитных волн в плоском диэлектрическом слое. Поверхностные волны. Критические условия

Возможность передачи высокочастотной электромагнитной энергии в направляющей системе из диэлектриков основана на явлении полного отражения, изученного в §§ 66 и 68.

Рассмотрим плоский слой (толщиной b , из идеального диэлектрика, с диэлектрической проницаемостью ϵ_1), который с обеих сторон граничит с идеальной диэлектрической средой с проницаемостью ϵ_2 . Расположим прямоугольные оси координат, как показано на рис. 72.1, и пусть в слое находится источник, возбуждающий высокочастотные электромагнитные колебания.

Возникающая система падающих и отражённых волн может распространяться в этом слое без излучения потока энергии в окружающую диэлектрическую среду лишь в условиях полного отражения от границ слоя.

Явление полного отражения происходит, если $\epsilon_1 > \epsilon_2$ и при этом

$$\theta = \theta' \geq \theta^*, \quad (72.1)$$

где θ и θ' — равные друг другу углы падения и отражения и θ^* — угол полного отражения, равный [см. ф-лу (68.7)]

$$\theta^* = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin n. \quad (72.2)$$

Угол преломления при $\theta = \theta' = \theta^*$ окажется равен

$$\theta'' = \frac{\pi}{2}, \text{ так как } \sin \theta'' = \frac{\sin \theta^*}{n} = 1. \quad (72.3)$$

Преломлённый луч будет распространяться вдоль границы слоя в направлении оси z (см. рис. 72.1) и, как будет показано ниже, при этом не происходит излучения в объём окружающей диэлектрической среды.

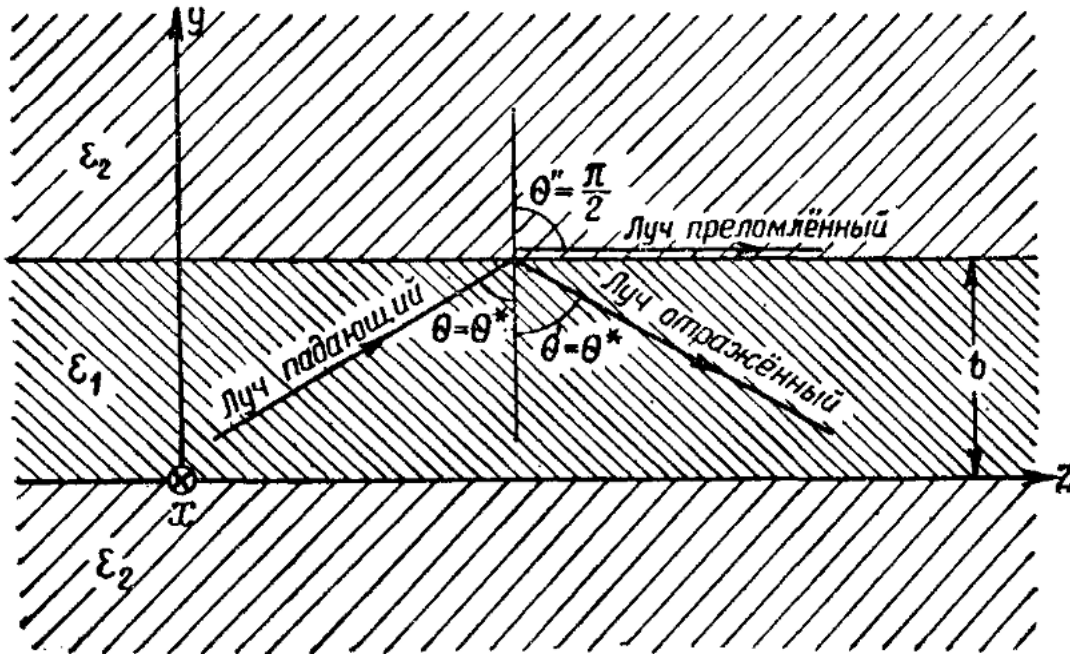


Рис. 72.1

Рассмотрим по формулам §§ 65 и 66 функции распространения, определяющие комплексные амплитуды компонент векторов **E** и **H** для падающих и отражённых волн в слое и для преломлённой волны, уходящей в окружающую диэлектрическую среду:

$$\text{слой } \begin{cases} \text{падающая волна: } f = e^{-i\beta(y \cos \theta + z \sin \theta)} \end{cases} \quad (72.4)$$

$$\epsilon_1 \begin{cases} \text{отражённая волна: } f' = e^{-i\beta(-y \cos \theta' + z \sin \theta')} \end{cases} \quad (72.5)$$

$$\begin{array}{l} \text{окружающая} \\ \text{диэлектричес-} \\ \text{кая среда} \\ \epsilon_2 \end{array} \begin{cases} \text{преломлённая} \\ \text{волна:} \end{cases} f'' = e^{-i\beta''(y \cos \theta'' + z \sin \theta'')}. \quad (72.6)$$

В условиях полного отражения, при $\theta = \theta^*$ и $\theta'' = \frac{\pi}{2}$, для преломлённой волны получим

$$f'' = e^{-i\beta'' z}. \quad (72.7)$$

Поле во внешней среде не зависит от координаты y . Это поле хотя и будет проникать в окружающую диэлектрическую среду (ϵ_2), однако, как будет видно из дальнейшего, излучения в направлении y не будет, т. е. среднее значение потока электромагнитной энергии в этом направлении будет равно нулю.

При $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$ поле окажется почти полностью «вытесненным» в наружную диэлектрическую среду.

Это наружное поле будет распространяться в направлении оси z с фазовой скоростью

$$v_z = \frac{\omega}{\beta''} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}, \quad (72.8)$$

так как $\beta'' = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{a2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2}$.

Скорость распространения в направлении оси z в диэлектрическом слое будет равна

$$\frac{\omega}{\beta \sin \theta''} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{a1}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}} = v_z,$$

т. е. той же величине, что и (72.8).

Рассмотрим, как будет распространяться преломлённая волна в направлениях y и z при условии полного отражения, но при

$$\theta > \theta^* \quad (72.9)$$

и, следовательно, при

$$\sin \theta'' = \frac{\sin \theta}{n} > 1. \quad (72.10)$$

Угол θ'' (как и в § 69, 70) будет комплексной величиной, а $\cos \theta''$ окажется чисто мнимой

$$\cos \theta'' = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta''} = \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} = \pm \frac{i}{n} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}. \quad (72.11)$$

Для нашей задачи из двух возможных знаков корня, исходя из физических соображений (см. примечание ниже), следует выбрать отрицательный.

Функция распределения преломлённой волны будет равна

$$f'' = e^{-1 \frac{\beta''}{n} (-iy \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} + z \sin \theta)} \quad (72.12)$$

Из ф-лы (72.8) получим

$$\frac{\beta''}{n} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{a2}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{a1}} = \beta,$$

где β — коэффициент фазы однородной волны (падающей или отражённой) в направлении её собственного распространения.

Таким образом,

$$f'' = e^{-\beta \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} y} e^{-i \beta \sin \theta \cdot z}. \quad (72.13)$$

Из полученной формулы следует, что в направлении y распространения нет (нет электромагнитной волны); в этом направлении существует затухающее поле, убывающее по показательному закону с коэффициентом затухания, равным

$$\beta \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}. \quad (72.14)$$

Отметим, что это затухание не связано с потерей энергии, а просто характеризует структуру поля в направлении y . При высоких частотах (λ малó) глубина проникновения поля в направлении оси y в окружающую диэлектрическую среду оказывается ничтожной.

Как видно из той же ф-лы (72.13), в направлении z происходит распространение с фазовой скоростью

$$v_z = \frac{\omega}{\beta \sin \theta}. \quad (72.15)$$

Фазовая скорость в случае $\theta > \theta^*$ будет, очевидно, меньше фазовой скорости при $\theta = \theta^{*1}$.

Рассмотренная нами волна, распространяющаяся в тонком граничном слое, называется поверхностной волной.

Рассмотрим поле в слое при $\theta = \theta^*$. Подставив значения $\sin \theta''$ и $\cos \theta''$ по ф-лам (72.10) и (72.11) в формулы Френеля (67.6) и (67.12), мы после небольших преобразований получим

$$\dot{\epsilon}'_{01} = -\epsilon_{01} \frac{n^2 \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}, \quad (72.16)$$

$$\dot{\epsilon}'_{0\perp} = \epsilon_{0\perp} \frac{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}. \quad (72.17)$$

¹⁾ Если бы в ф-ле (72.11) выбрать знак +, то в направлении y было бы экспоненциально возрастающее поле, что не соответствует физике явления.

В этих выражениях числители и знаменатели — комплексные сопряжённые числа. Так как модули комплексных сопряжённых чисел равны, то

$$|\mathcal{E}'_{0\parallel}| = |\mathcal{E}_{0\parallel}| \quad \text{и} \quad |\mathcal{E}'_{0\perp}| = |\mathcal{E}_{0\perp}|, \quad (72.18)$$

т. е. амплитуды напряжённостей электрического (и магнитного) поля в падающей и отражённой волнах равны.

Однако фазы этих волн не будут равны (аргументы комплексов $\mathcal{E}'_{0\parallel}$ и $\mathcal{E}'_{0\perp}$, как очевидно из предыдущих формул, различны). Поэтому отражённая волна, являющаяся суммой $\mathbf{E}_{\parallel}$ и $\mathbf{E}_{\perp}$, получается, вообще говоря, эллиптически поляризованной (см. § 50).

Очевидно также, что среднее значение потока электромагнитной энергии падающей волны в направлении оси y равно и противоположно среднему значению потока энергии в этом же направлении для волны отражённой, т. е. среднее значение потока электромагнитной энергии сквозь границу равно нулю. Так как поверхностная волна несёт электромагнитную энергию в направлении z и получает эту энергию из слоя, то более подробное исследование показывает, что мгновенное значение потока электромагнитной энергии сквозь границу слоя не равно нулю. Электромагнитная энергия пульсирует сквозь границу слоя, выходя в некоторых участках границы слоя наружу и входя в него в других участках границы, причём эти участки перемещаются вдоль слоя вместе с распространяющейся волной.

Подробное исследование описанных явлений впервые было выполнено крупным русским физиком Александром Александровичем Эйхенвальдом (1863—1944 гг.) в 1908 г. в работе «О движении энергии при полном внутреннем отражении света»¹⁾.

Определим толщину слоя b и критическую длину волны λ^* , при которых возможно распространение рассмотренных неоднородных электромагнитных волн. Так как на границах слоя при $\theta = \theta^*$ амплитуды падающей и отражённой волн равны, то на границах должны совпадать гребни падающих и отражённых волн. Картина расположения гребней падающих и отражённых волн электрического (и магнитного) полей должна иметь вид, изображённый на рис. 72.2а, где показана волна, поляризованная в плоскости, перпендикулярной плоскости падения ($\mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{H}_{\parallel}$). Для волны, поляризованной в плоскости, параллельной плоскости падения, картина будет аналогичной.

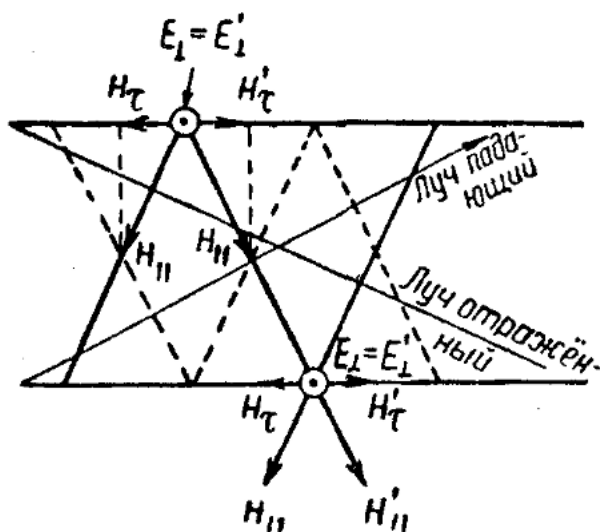
¹⁾ А. А. Эйхенвальд. Избранные работы. ГТТИ, 1956, стр. 121.

На рис. 72.26 показано построение для вывода критических условий. Непосредственно видно, что

$$\lambda^* = 2b \cos \theta^* \quad \text{и} \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\sin \theta}. \quad (72.19)$$

Отметим, что в данном случае отражение происходит с сохранением фазы электрической компоненты и изменением на 180° фазы магнитной компоненты (см. § 66).

а)



б)

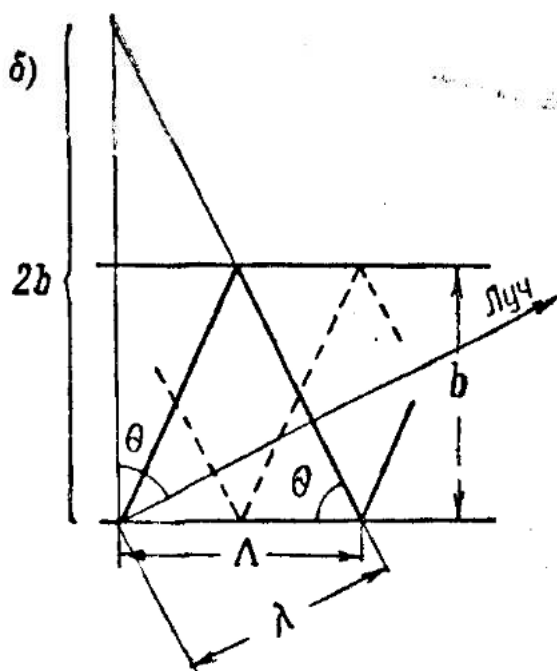


Рис. 72.2

Таким образом, распространение в слое без излучения в окружающую среду возможно, если

$$\lambda \leq \lambda^* = 2b \cos \theta^*, \quad (72.20)$$

отсюда

$$\lambda^* = 2b \sqrt{1 - \sin^2 \theta^*} = 2b \sqrt{1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (72.21)$$

и, следовательно,

$$b = \frac{\lambda^*}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} > \frac{\lambda^*}{2}. \quad (72.22)$$

В отличие от ленточной линии толщина диэлектрического слоя должна быть больше половины критической длины волны и распространение без излучения в диэлектрическом слое возможно как для критической волны, так и для волн, короче критической.

Из формулы

$$\Lambda^* = \frac{\lambda^*}{\sin \theta^*} = 2b \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1} \quad (72.23)$$

видно, что при критических условиях длина волны Λ^* вдоль оси z также остаётся конечной.

Явления распространения радиоволн в ленточной линии и диэлектрическом слое и теория распространения, изложенные в §§ 71 и 72, лежат в основе теории радиоволноводов, представляющих собой металлические трубы прямоугольного, круглого или более сложного (крестообразного, двухтаврового и т. д.) сечения и диэлектрических волноводов, выполняемых обычно в форме цилиндрических стержней из диэлектрика. Диэлектрические волноводы находят применение в современной технике высоких частот, например, в антенной технике сантиметровых волн, как диэлектрические антенны. Широко применяются в высокочастотной технике радиоволноводы для передачи электромагнитной энергии сантиметрового диапазона, в различных измерительных устройствах и т. д.

§ 73. Прямоугольные волноводы

Волны высших порядков, рассмотренные в предыдущих параграфах, в отличие от основной волны, могут распространяться в металлических трубах — радиоволноводах или просто волноводах.

Покажем элементарным путём, что основная волна в волноводе распространяться не может — для её передачи необходимо два изолированных друг от друга металлических провода.

В основной волне $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют только поперечные составляющие. Вектор $\mathbf{H}$ должен удовлетворять закону полного тока:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I,$$

где I — полный ток через поверхность, ограниченную контуром интегрирования, ток, который может иметь составляющие как тока проводимости, так и тока смещения.

Рассмотрим ленточную линию без охранных плоскостей (см. рис. 71.1а). Мы убедимся, что контур интегрирования может охватывать только токи проводимости, текущие в лентах, так как вектор плотности тока смещения

$$\delta_{см} = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

как и вектор $\mathbf{E}$, будет иметь только поперечные составляющие (см. рис. 73.1а). В данном случае из закона полного тока следует неоднократно упоминавшееся соотношение

$$H_x = \delta_{z_{\text{пов}}}.$$

Превратим нашу ленту в трубу, замыкая её с боков парой лент (см. рис. 73.1б).

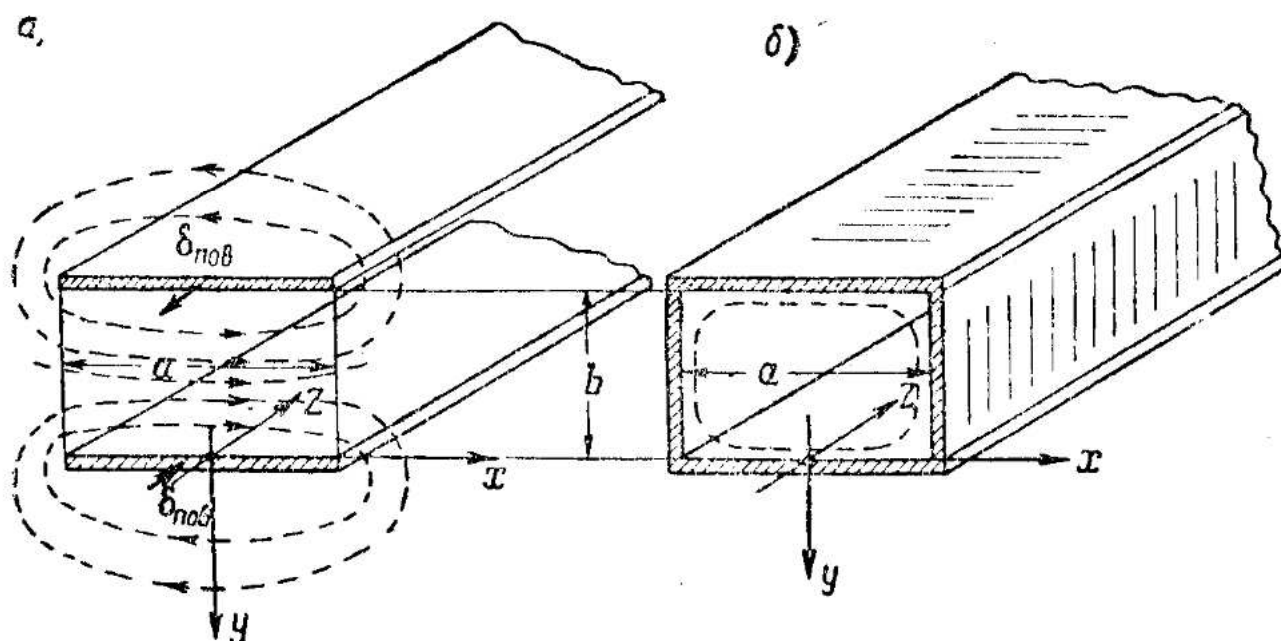


Рис. 73.1

Так как в основной волне ТЕМ, распространяющейся в направлении оси z , магнитные линии лежат в плоскости xy , то магнитное поле должно иметь нормальные составляющие к боковым стенкам, что невозможно, так как противоречит граничным условиям (на поверхности идеального проводника $H_n = 0$). Следовательно, магнитные силовые линии должны замыкаться в полости трубы (например, иметь вид, показанный пунктиром на рис. 73.1б); но такие линии не будут охватывать ни линий тока проводимости, ни линий тока смещения, так как вектор плотности тока смещения в волне ТЕМ не имеет компонент по оси z . Поэтому

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (73.1)$$

Контурный интеграл мы можем взять по любой линии, лежащей в плоскости xy , и всегда он будет равен нулю, поэтому в любой точке сечения $\mathbf{H} = 0$, следовательно, и $\mathbf{E}$ также будет равен нулю, т. е. основная волна в таких условиях существовать не может.

Что же касается волн высших порядков, то, вообразив себе излучатель помещённым в полости трубы и излучающим высоко-

частотные колебания в различных направлениях, можно показать, что система волн, отражённых от стенок, может быть такой, что граничные условия для E и H на всех четырёх стенках будут выполнены и, следовательно, результирующая волна будет распространяться вдоль трубы.

Для «геометрического» вывода условий распространения приходится рассматривать не менее четырёх однородных волн, распространяющихся в трубе и отражающихся от её стенок. Геометрическая картина теряет свою наглядность. Поэтому мы перейдём к анализу условий распространения в волноводе, прибегнув к общим методам, подробно развитым в третьей части курса.

§ 74. Расчёт поля в прямоугольном волноводе. Граничные условия. Возбуждение волноводов

Задачу сформулируем следующим образом: в бесконечно длинном прямоугольном волноводе (рис. 74.1) выберем оси координат, как указано на рисунке, и пусть в полости волновода находится генератор, излучающий электромагнитные волны определённой частоты.

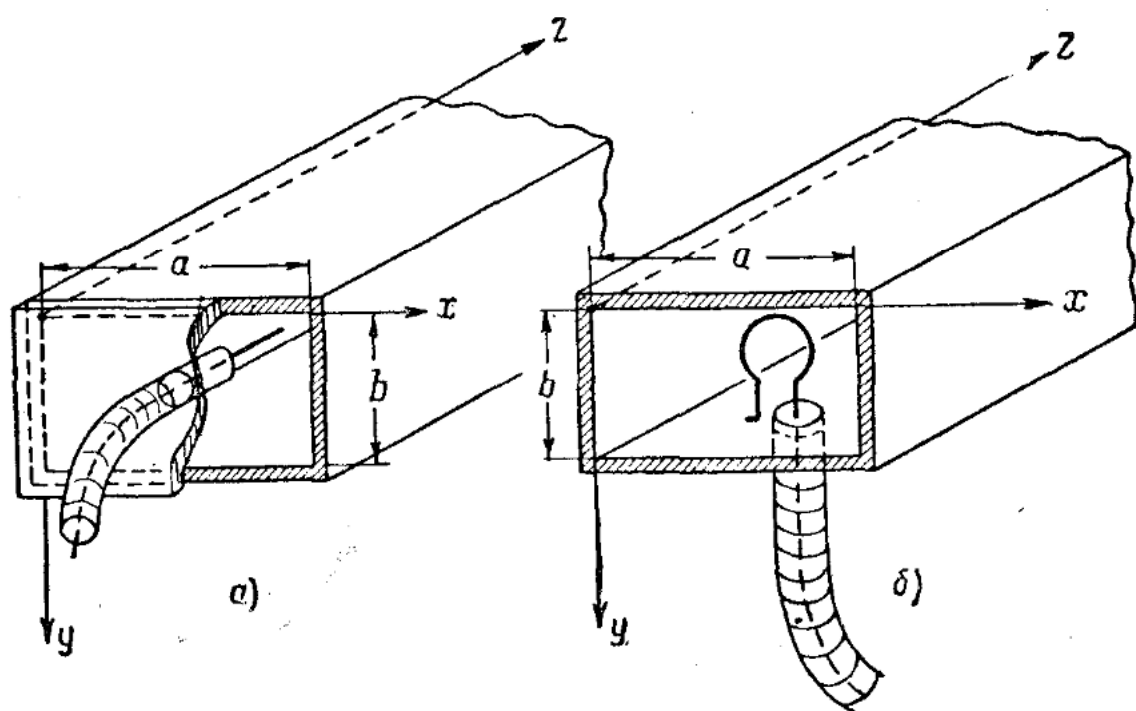


Рис. 74.1

Ограничим нашу задачу, положив, что проводимость стенок волновода $\sigma_1 = \infty$ и что диэлектрик, заполняющий волновод, не имеет потерь ($\sigma = 0$) и не содержит свободных зарядов ($\rho = 0$).

Так как в стенках волновода будут возникать токи высокой частоты и практически весь ток будет сосредоточен в тончайшем

поверхностном слое металла, то указанное условие ($\sigma_1 = \infty$) для волноводов не очень большой длины (именно, волноводов, обычно применяемых в современной практике), выполненных из хорошо проводящего металла (например, посеребренная с внутренней поверхности медь), даёт результаты, почти не отличающиеся от экспериментальных. Точно так же и второе предположение ($\sigma = 0$) для «пустых» волноводов вполне реально.

Наше решение должно удовлетворять, во-первых, основным уравнениям Максвелла и, во-вторых, граничным условиям.

В § 40 было установлено, что все составляющие E и H при указанных выше условиях должны удовлетворять однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \Psi = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (74.1)$$

Так как мы рассматриваем гармонические волны, то, введя комплексное изображение

$$\dot{\Psi}(x, y, z, t) = \dot{\Psi}(x, y, z) e^{i\omega t} = \dot{\Psi} e^{i\omega t} \quad (74.2)$$

и подставив его в ур-ние (74.1), мы, сократив на $e^{i\omega t}$, получим уравнение для комплексных амплитуд

$$\nabla^2 \dot{\Psi} = \frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial z^2} = (i\omega)^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{\Psi}. \quad (74.3)$$

Введём, как это делалось раньше, обозначение

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad (74.4)$$

где β — волновое число, которое в идеальной неограниченной среде совпадёт с величиной коэффициента распространения однородной волны [см., например, ф-лу (51.9) при $\alpha = 0$].

Уравнение (74.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{\Psi} = 0. \quad (74.5)$$

Будем решать это уравнение по методу Фурье—Бернулли. Пусть

$$\dot{\Psi}(x, y, z) = \dot{X}(x) \dot{Y}(y) \dot{Z}(z), \quad (74.6)$$

где каждый из множителей зависит только от одной из координат.

Подставим это выражение в ур-ние (74.5), выполним дифференцирование и, разделив результат на $\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$, получим

$$\frac{1}{\dot{X}} \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial x^2} + \frac{1}{\dot{Y}} \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial y^2} + \frac{1}{\dot{Z}} \frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2} = -\beta^2. \quad (74.7)$$

В этом уравнении первый член левой части зависит, очевидно, только от x , второй — от y и третий — только от z . Если изменяется x , то первый член, вообще говоря, может изменяться, но он не будет меняться, так как второй и третий члены при измене-

нии x , как не зависящие от x , останутся постоянны и справа в уравнении стоит также постоянная величина. Следовательно, первый член будет равен некоторой постоянной величине, которую обозначим $-k_1^2$.

Также установим, что постоянны второй и третий члены, и приравняем их соответственно постоянным $-k_2^2$ и $-\beta_z^2$.

Мы получим систему уже обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_1^2; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + k_1^2 X = 0 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_2^2; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2^2 Y = 0 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= -\beta_z^2; \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta_z^2 Z = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (74.8)$$

Введённые постоянные будут, очевидно, связаны соотношением:

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 + \beta_z^2 &= \beta^2 \\ \beta_z &= \sqrt{\beta^2 - (k_1^2 + k_2^2)} \end{aligned} \right\}. \quad (74.9)$$

Обозначим

$$k_1^2 + k_2^2 = k^2,$$

тогда

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - k^2}.$$

Таким образом, для определения функций X, Y, Z мы получили три обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка.

Решение этих уравнений мы можем взять в различном виде. Так как в направлении осей x и y у нас должны быть стоячие волны (нет распространения), то возьмём решение для X и Y в виде

$$X = A \sin(k_1 x + \varphi), \quad (74.10)$$

$$Y = B \sin(k_2 y + \psi). \quad (74.11)$$

В направлении z мы предполагаем распространение, поэтому для функции Z решение должно иметь вид

$$\dot{Z} = C_1 e^{-i\beta_z z} + C_2 e^{i\beta_z z}. \quad (74.12)$$

И в итоге комплексная амплитуда Ψ будет равна:

$$\Psi = \Psi_0 \sin(k_1 x + \varphi) \sin(k_2 y + \psi) \left(e^{-i\beta_z z} + \frac{C_2}{C_1} e^{i\beta_z z} \right), \quad (74.13)$$

где $\Psi_0 = ABC_1$.

Мы видим, что в этой формуле постоянная β_z является коэффициентом распространения в направлении z .

Будем рассматривать только бегущую волну, распространяющуюся в направлении $+z$. Тогда коэффициент C_2 должен быть нулём, и мы получим окончательно

$$\dot{\Psi} = \Psi_0 \sin(k_1 x + \varphi) \sin(k_2 y + \psi) e^{-i\beta_z z}. \quad (74.14)$$

Для перехода к мгновенным значениям можно либо воспользоваться линией времени (см. § 50), либо умножить $\dot{\Psi}$ на $e^{i\omega t}$ и от полученного комплексного изображения взять коэффициент при мнимой части.

Комплексное изображение $\dot{\Psi}$ будет равно:

$$\dot{\Psi}(x, y, z, t) = \Psi_0 \sin(k_1 x + \varphi) \sin(k_2 y + \psi) e^{i(\omega t - \beta_z z)}, \quad (74.15)$$

мгновенное значение

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi_0 \sin(k_1 x + \varphi) \sin(k_2 y + \psi) \sin[\omega t - \beta_z z]. \quad (74.16)$$

Множитель $e^{i(\omega t - \beta_z z)}$ в ф-ле (74.15) характеризует бегущую волну в направлении оси z [запись ф-лы (74.16)] и будет одинаковым для всех компонент поля [см. следствие из ф-л (50.8) и (50.9)].

При расчёте компонент поля в волноводе обычно выражают амплитуды поперечных компонент (E_{0x} , E_{0y} , H_{0x} , H_{0y}) через амплитуды продольных (E_{0z} , H_{0z}).

Запишем по ф-ле (74.14) комплексные амплитуды продольного поля:

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \dot{\mathcal{E}}_{0z} \sin(k_{1E} x + \varphi_{1E}) \sin(k_{2E} y + \psi_E) e^{-i\beta_z z}, \quad (74.17)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \dot{\mathcal{H}}_{0z} \sin(k_{1H} x + \varphi_{1H}) \sin(k_{2H} y + \psi_H) e^{-i\beta_z z}. \quad (74.18)$$

Постоянные, входящие в выражения компонент поля, определяются подстановкой в систему уравнений Максвелла и из граничных условий.

Возьмём систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд (50.8), записанную для условий ($\sigma=0$, $\rho=0$), соответствующих нашей задаче. Дифференцирование любой из компонент по z эквивалентно умножению на $(-i\beta_z)$, так как

$$\frac{\partial}{\partial z} (e^{-i\beta_z z}) = (-i\beta_z) e^{-i\beta_z z}.$$

Имея это в виду, выполним дифференцирование по z в системе (50.8) и получим

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} + i \beta_z \dot{\mathcal{H}}_y &= i \omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}}_x \\
 2) \quad -i \beta_z \dot{\mathcal{H}}_x - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} &= i \omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}}_y \\
 3) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_x}{\partial y} &= i \omega \varepsilon_a \dot{\mathcal{E}}_z \\
 4) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_y}{\partial y} - i \beta_z \dot{\mathcal{H}}_z &= 0 \\
 5) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} + i \beta_z \dot{\mathcal{E}}_y &= -i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_x \\
 6) \quad -i \beta_z \dot{\mathcal{E}}_x - \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} &= -i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_y \\
 7) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_x}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_y}{\partial x} &= -i \omega \mu_a \dot{\mathcal{H}}_z \\
 8) \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_y}{\partial y} - i \beta_z \dot{\mathcal{E}}_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (74.19)$$

Выразим из этой системы уравнений значения поперечных компонент через продольные. Преобразования можно проделать следующим образом: выразим $\dot{\mathcal{H}}_y$ из 1) и подставим в 6), определим $\dot{\mathcal{E}}_x$ из 6); выразим $\dot{\mathcal{H}}_x$ из 2) и подставим в 5), определим $\dot{\mathcal{E}}_y$ из 5). Далее, из 5) выразим $\dot{\mathcal{E}}_y$ и подставим в 2), из 2) определим $\dot{\mathcal{H}}_x$ и, наконец, из 6) определим $\dot{\mathcal{E}}_x$ и, подставив в 1), определим $\dot{\mathcal{H}}_y$. В итоге получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\mathcal{E}}_x &= \frac{-i}{k^2} \left[\beta_z \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} + \omega \mu_a \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} \right] \\
 \dot{\mathcal{E}}_y &= \frac{-i}{k^2} \left[\beta_z \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} - \omega \mu_a \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} \right] \\
 \dot{\mathcal{H}}_x &= \frac{i}{k^2} \left[\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} - \beta_z \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} \right] \\
 \dot{\mathcal{H}}_y &= \frac{-i}{k^2} \left[\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} + \beta_z \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (74.20)$$

В этих формулах в соответствии с (74.9) произведена замена $\beta^2 - \beta_z^2 = k^2$.

Обратимся к граничным условиям.

На границах, т. е. при $x=y=0$, $x=a$, $y=b$ и произвольном z у нас должно быть

$$\text{при } \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases} \begin{cases} E_y=0 \\ E_z=0 \end{cases} \quad H_x=0, \quad (74.21)$$

$$\text{при } \begin{cases} y=0 \\ y=b \end{cases} \begin{cases} E_x=0 \\ E_z=0 \end{cases} \quad H_y=0. \quad (74.22)$$

Воспользуемся выражением (74.17) комплексной амплитуды $\mathcal{E}_z$.

1. $x=0$; $\mathcal{E}_z=0$. Из ф-лы (74.17) следует, что множитель $\sin(k_{1E} x + \varphi_E)|_{x=0} = 0$ и отсюда

$$\varphi_E = 0.$$

2. $x=a$; $\mathcal{E}_z=0$, следовательно, $\sin(k_{1E} a) = 0$ и отсюда $k_{1E} a = m\pi$, где $m=1, 2, \dots$ — любое целое число, следовательно,

$$k_{1E} = \frac{m\pi}{a} = k_m, \quad (74.23)$$

3. $y=0$; $\mathcal{E}_z=0$, следовательно, $\sin(k_{2E} y + \psi_E) = 0$, отсюда

$$\psi_E = 0.$$

4. $y=b$; $\mathcal{E}_z=0$, отсюда $\sin(k_{2E} \cdot b) = 0$ и $k_{2E} \cdot b = n\pi$, где $n=1, 2, \dots$ — также любое целое число, не зависящее от m . Следовательно

$$k_{2E} = \frac{n\pi}{b} = k_n. \quad (74.24)$$

Определяется и величина k :

$$k^2 = k_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (74.25)$$

и величина коэффициента распространения вдоль оси z :

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - k_{mn}^2} = \sqrt{\beta^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}. \quad (74.26)$$

Дальнейшее определение постоянных удобнее производить отдельно для электрической ($E \equiv TM$) и магнитной ($H \equiv TE$) волн.

Если волна содержит и электрическую и магнитную продольные компоненты ($E_z \neq 0$ и $H_z \neq 0$), то такую волну представляют обычно как сумму двух волн (TE и TM), рассчитанных отдельно. Возникновение того и другого типов волн зависит от условий возбуждения волновода.

Существует много различных способов возбуждения электромагнитного поля в волноводе. Применяют, например, элементарные электрические и магнитные излучатели. Электрический излучатель можно осуществить, введя в полость волновода через изолирующую втулку в его стенке оголённую центральную жилу коаксиального кабеля, присоединённого к генератору высокой ча-

стоты. Если такой излучатель ввести через торцевую стенку волновода (см. рис. 74.1а) и расположить его параллельно оси z , то векторные линии магнитного поля, возбуждаемые излучателем, будут параллельны плоскостям xy , т. е. компонента H_z будет равна нулю; вектор же E может, очевидно, иметь все три составляющие — в волноводе, возбуждятся в этом случае «электрические» волны ($E \equiv TM$).

Магнитным излучателем может служить магнитный диполь (петля), который вводится в полость волновода аналогично электрическому (см. рис. 74.1б). Если эта петля расположена, как показано на рис. 74.1б, то ось её магнитного момента будет параллельна оси z . В этом случае электрическое поле не будет иметь продольной составляющей ($E_z = 0$), и в волноводе возникает волна $H \equiv TE$ — «магнитная».

Можно, разумеется, волны H возбуждать с помощью электрического вибратора, располагая его поперёк волновода, и волны E — с помощью магнитного.

Упомянем также о так называемых дифракционных излучателях, осуществляемых в виде отверстий или щелей в стенках волновода, которые соединяют волновод с возбуждённым объёмным резонатором (см. § 82) или другим возбуждённым волноводом.

Рассмотрим, во-первых, расчёт «электрических» волн $E \equiv TM$.

§ 75. «Электрические» волны в прямоугольном волноводе ($E \equiv TM$)

В этом случае

$$\mathcal{H}_z = 0. \quad (75.1)$$

Принимая во внимание выводы в § 74, получим следующее выражение для комплексной амплитуды $\mathcal{E}_z$:

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \sin k_m x \sin k_n y e^{-i\beta_z z}. \quad (75.2)$$

Поперечные компоненты поля мы подсчитаем по ф-лам (74.20), полагая $\mathcal{H}_z$ (и его производные) равными нулю. Подставляя значение $\mathcal{E}_z$ и выполняя дифференцирование, получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= - \frac{\beta_z \cdot k_m}{k_{mn}^2} \mathcal{E}_{0z} \cos k_m x \sin k_n y e^{-i\beta_z z} \\ \mathcal{E}_y &= - i \frac{\beta_z \cdot k_n}{k_{mn}^2} \mathcal{E}_{0z} \sin k_m x \cos k_n y e^{-i\beta_z z} \\ \mathcal{H}_x &= i \frac{\omega \varepsilon_a k_n}{k_{mn}^2} \mathcal{E}_{0z} \sin k_m x \cos k_n y e^{-i\beta_z z} \\ \mathcal{H}_y &= - i \frac{\omega \varepsilon_a k_m}{k_{mn}^2} \mathcal{E}_{0z} \cos k_m x \sin k_n y e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}. \quad (75.3)$$

Прежде всего отметим, что мы получили бесконечное количество волн, соответствующих одной частоте ω . Каждой целочисленной паре m и n (так называемым «собственными значениям» параметров задачи) соответствует определённая волна $E_{mn} \equiv TM_{mn}$ (так называемая «собственная функция» задачи), имеющая собственную величину амплитуды $(\mathcal{E}_{0z}) = (\mathcal{E}_{0z})_{mn}$.

В волноводе могут распространяться не только отдельные волны E_{mn} , но и любая их сумма.

Решение (75.3) является частным решением задачи. Общее решение получим, просуммировав частные решения по m и n от 1 и до ∞ [см. замечание в § 50 и ф-лу (50.1)].

Амплитуда $(\mathcal{E}_{0z})_{mn}$, характеризующая все амплитуды составляющих поля для данных m и n , может быть определена, если мы обратимся к условиям возбуждения поля. В нашем изложении эта величина остаётся неопределённой.

Вычислим отношение

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}_x}{\mathcal{H}_y} = -\frac{\dot{\mathcal{E}}_y}{\mathcal{H}_x} = \frac{\beta_z}{\omega \varepsilon_0} = \zeta_z^{(2)} = \frac{\lambda}{\Lambda_z} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\lambda}{\Lambda_z} \zeta_0 < \zeta_0. \quad (75.4)$$

Величина $\zeta_z^{(2)}$, если $\beta_z > k_{mn}$, действительна и не зависит от переменных x, y, z . Величину эту можно назвать «поперечным волновым сопротивлением волновода» для «электрической» волны ($E = TM$). Почему у отношения $\frac{\dot{\mathcal{E}}_y}{\mathcal{H}_x}$ обратный знак, можно выяснить, вспомнив ф-лы (49.7) и (49.8).

Какова волновая картина рассчитанного электромагнитного поля?

Возьмём мгновенное значение какой-нибудь компоненты, например, E_z [см. ф-лу (75.2)]:

$$E_z = \text{Im}(\dot{\mathcal{E}}_z e^{i\omega t}) = \mathcal{E}_0 \sin k_m x \sin k_n y \sin(\omega t - \beta_z z). \quad (75.5)$$

В направлении осей x и y у нас возникли стоячие волны длиной:

$$\Lambda_x = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2a}{m}, \quad (75.6)$$

$$\Lambda_y = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2b}{n}. \quad (75.7)$$

В направлении же оси z электромагнитная волна будет распространяться, если коэффициент распространения β_z окажется величиной вещественной, т. е. если

$$\beta_z^2 = \beta^2 - k_{mn}^2 = \beta^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] > 0. \quad (75.8)$$

Так как $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны в свободном пространстве, то условие распространения можно сформулировать как

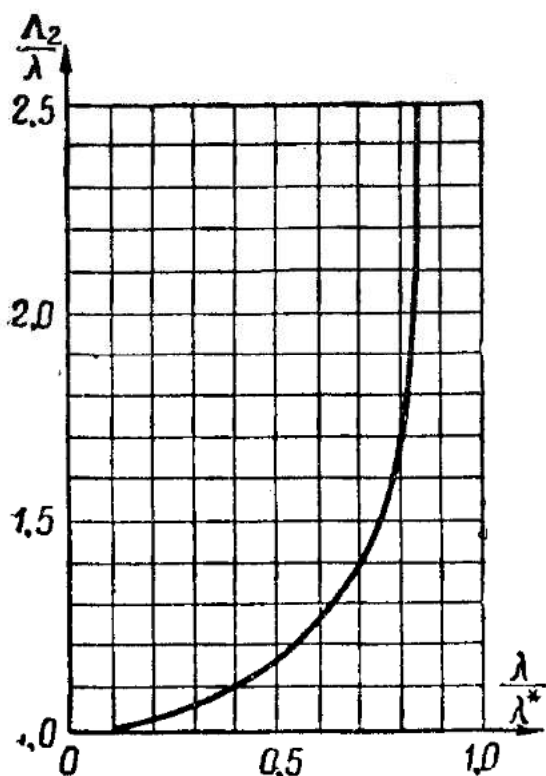


Рис. 75.1

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} > \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right],$$

$$\lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{k_m^2 + k_n^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}} = \lambda^*, \quad (75.9)$$

и так как $f = \frac{c}{\lambda}$, то, очевидно,

$$f > c \frac{\sqrt{k_m^2 + k_n^2}}{2\pi} =$$

$$= \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} = f^*, \quad (75.10)$$

где λ^* и f^* — критические длины волн и критические частоты для каждого типа волн.

Волновод является фильтром низких частот с исключительно резкой границей пропускания, определяемой его критической частотой. Кроме того, рассматривая зависимость Λ_z от λ [ф-лу (75.11) и рис. 75.1, на котором показана зависимость отношения $\frac{\Lambda_z}{\lambda}$ от $\frac{\lambda}{\lambda^*}$], видим, что при значениях λ , близких к критическому $\left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \rightarrow 1 \right)$, ничтожное изменение λ вызывает резкое изменение Λ_z (отношение $\frac{\Lambda_z}{\lambda} \rightarrow \infty$) — длины волны в волноводе. Это свойство лежит в основе применения волноводов в измерительной технике.

Длина волны в направлении оси z будет

$$\Lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - k_{mn}^2}}.$$

Выразив β и k_{mn} в функции λ и λ^* , получим

$$\Lambda_z = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - (f^*)^2}} \quad (75.11)$$

— формулы, совпадающие с формулами критических условий, выведенных геометрическим путём в § 71.

При $\lambda \rightarrow \lambda^*$ длина волны $\Lambda_z \rightarrow \infty$ (см. рис. 75.1); к бесконечности стремится и фазовая скорость, групповая же скорость u_z будет стремиться к нулю [см. ф-лу (71.21)].

Если $\lambda > \lambda^*$ (соответственно $f < f^*$), то β_z окажется величиной мнимой:

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - k_{mn}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda^*}\right)^2} = -i\alpha_z, \quad (75.12)$$

и показатель функции распространения $e^{-i\beta_z z}$ станет действительным:

$$e^{-i\beta_z z} = e^{-\alpha_z z}.$$

Вместо распространения мы получим вдоль z затухание по показательному закону. Поперечное волновое сопротивление в этих условиях становится реактивным.

Если характеристические числа m и n рассматриваемой волны E_{mn} обращаются в нуль ($m=0, n=0$), то, очевидно, $k_m = 0$ и $k_n = 0$, и, как следует из ф-л (75.2) и (75.3), все компоненты поля обращаются также в нуль. Волна E_{00} распространяться в волноводе не может. Этой волне соответствуют

$$\beta_z = \beta \quad \text{и} \quad \Lambda_z = \lambda$$

— параметры электромагнитной волны в свободном пространстве, т. е. однородной волны ТЕМ, которую мы в теории ленточной линии (см. § 71) называли основной.

В волноводе основная волна распространяться не может, что ещё раз подтверждается.

Поле исчезает не только при $m=n=0$, но и при $m=0, n \neq 0$ или $m \neq 0, n=0$, что опять-таки видно из ур-ний (75.2) и (75.3). Таким образом, не существует «электрических» волн E_{m0} и E_{0n} .

Наименьшие значения m и n для «электрической» волны — единицы ($m=1$ и $n=1$). У такой волны ($E_{11} \equiv TM_{11}$) наибольшая критическая длина.

Из ф-лы (75.9) получим

$$\lambda_{11}^* = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

и для волновода с квадратным сечением ($a=b$)

$$\lambda_{11}^* = \sqrt{2}a. \quad (75.13)$$

§ 76. «Магнитные» волны в прямоугольном волноводе ($H \equiv TE$)

Пусть поле в волноводе возбуждается магнитным диполем, расположенным параллельно оси z [петля, плоскость которой параллельна плоскости xy (см. рис. 74.2 б)]. В этом случае электрическое поле не имеет продольной компоненты:

$$E_z = 0, \quad (76.1)$$

и в волноводе возбуждаются магнитные волны $H \equiv TE$.

Расчёт компонент поля может быть произведён аналогично предыдущему: достаточно в ф-лах (74.20) принять $\mathcal{E}_z$ с её производными, равными нулю, и воспользоваться ф-лой (74.18) комплексной амплитуды продольной составляющей магнитного поля. Мы же выполним этот расчёт с помощью вектора Герца, подробно рассмотренного в §§ 43 и 44¹⁾.

Применим «магнитный» вектор Герца. Как видно из ф-лы (44.17), для данного случая «магнитный» вектор Герца будет иметь одну компоненту

$$\Gamma^* = \Gamma_z^* z^0. \quad (76.2)$$

Так как вектор Герца должен удовлетворять волновому уравнению [например, (44.9)], а при гармоническом законе изменения комплексная амплитуда его удовлетворяет ур-нию (74.5), то выражение этой комплексной амплитуды может быть взято по ф-ле (74.14):

$$\Gamma_z^* = \Gamma_0^* \sin(k_1 x + \varphi) \sin(k_2 y + \psi) e^{-1\beta z^z}. \quad (76.3)$$

Из ф-л (44.6) и (44.7) возьмём выражение комплексных амплитуд поля через составляющие вектора Γ^* :

$$\mathbf{E} = -\nu_a \operatorname{rot} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \Gamma^* - \varepsilon_a \nu_a \frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial t^2}. \quad (76.4)$$

Комплексное изображение вектора $\dot{\Gamma}_z^*(t)$ будет, очевидно, $\dot{\Gamma}_z^* e^{i\omega t}$. Подставим это комплексное изображение в ф-лы (76.4) и, сократив временной множитель, найдём

$$\dot{\mathcal{E}} = -i\omega \nu_a \operatorname{rot} \dot{\Gamma}^*; \quad \dot{\mathcal{H}} = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \dot{\Gamma}^* + \varepsilon_a \nu_a \omega^2 \dot{\Gamma}^*. \quad (76.5)$$

Развернём эти выражения по осям координат.

¹⁾ Этот расчёт может быть выполнен также с применением принципа двойственности.

Получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\mathcal{E}}_x &= -i \omega \mu_a \left(\frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\Gamma}_y^*}{\partial z} \right) \\
 \dot{\mathcal{E}}_y &= -i \omega \mu_a \left(\frac{\partial \dot{\Gamma}_x^*}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial x} \right) \\
 \dot{\mathcal{E}}_z &= -i \omega \mu_a \left(\frac{\partial \dot{\Gamma}_y^*}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\Gamma}_x^*}{\partial y} \right) \\
 \dot{\mathcal{H}}_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{\Gamma}_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\Gamma}_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial z} \right) + \beta^2 \dot{\Gamma}_x^* \\
 \dot{\mathcal{H}}_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{\Gamma}_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\Gamma}_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial z} \right) + \beta^2 \dot{\Gamma}_y^* \\
 \dot{\mathcal{H}}_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \dot{\Gamma}_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\Gamma}_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial z} \right) + \beta^2 \dot{\Gamma}_z^*
 \end{aligned} \right\} \quad (76.6)$$

Так как у нас

$$\dot{\Gamma}_x^* = \dot{\Gamma}_y^* = 0, \quad (76.7)$$

то уравнения значительно упростятся:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\mathcal{E}}_x &= -i \omega \mu_a \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial y} \\
 \dot{\mathcal{E}}_y &= i \omega \mu_a \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial x} \\
 \dot{\mathcal{E}}_z &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (76.8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\mathcal{H}}_x &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}_z^*}{\partial x \partial z} \\
 \dot{\mathcal{H}}_y &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}_z^*}{\partial y \partial z} \\
 \dot{\mathcal{H}}_z &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}_z^*}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{\Gamma}_z^*
 \end{aligned} \right\}. \quad (76.9)$$

Как видим, условие $E_z = 0$ автоматически удовлетворяется при соответствующем возбуждении волновода.

Из граничных условий (74.21) и (74.22), получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}_z^*}{\partial x \partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} x = 0, a \quad (76.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}_z^*}{\partial y \partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} y = 0, b. \quad (76.11)$$

Так как соотношения (76.10) и (76.11) сохраняются при любом значении z , т. е. от z независимы, то они эквивалентны соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial x} &= 0, \quad x = 0, a \\ \frac{\partial \dot{\Gamma}_z^*}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, a \end{aligned} \right\}. \quad (76.12)$$

Подставляя значение $\dot{\Gamma}_z^*$ в эти формулы, находим

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \psi = \frac{\pi}{2}; \quad k_1 = \frac{m\pi}{a} = k_m;$$

$$k_2 = \frac{n\pi}{b} = k_n,$$

итак

$$\dot{\Gamma}_z^* = \Gamma_0^* \cos k_m x \cdot \cos k_n y e^{-i\beta_z z}. \quad (76.13)$$

Теперь, по ф-лам (76.8) и (76.9), без труда находим все комплексные амплитуды поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_x &= i\omega\mu_a k_n \Gamma_0^* \cos k_m x \cdot \sin k_n y e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_y &= -i\omega\mu_a k_m \Gamma_0^* \sin k_m x \cos k_n y e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_x &= i k_m \beta_z \Gamma_0^* \sin k_m x \cos k_n y e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_y &= i k_n \beta_z \Gamma_0^* \cos k_m x \sin k_n y e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= k_{mn}^2 \Gamma_0^* \cos k_m x \cdot \cos k_n y e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}. \quad (76.14)$$

Поперечное волновое сопротивление волновода для «магнитной» волны будет равно

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}_x}{\dot{\mathcal{H}}_y} = -\frac{\dot{\mathcal{E}}_y}{\dot{\mathcal{H}}_x} = \frac{\mu_a \omega}{\beta_z} = \zeta_z^* = \frac{\Lambda_z}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\Lambda_z}{\lambda} \zeta_0 > \zeta_0 \quad (76.15)$$

и, как видим, отличается от поперечного волнового сопротивления волновода для «электрической» волны [сравнивая ф-лу (75.19) с ф-лой (76.15)], можно записать $\zeta_z^* \text{магн} > \zeta_0 > \zeta_z^* \text{эл}$.

Критические условия для волны $H=TE$ остаются те же, что и для «электрической» ($E=TM$), однако нетрудно видеть, что «магнитная» волна с одним нулевым индексом (H_{0n} и H_{m0}) может существовать. Рассмотрим, например, волну H_{10} . Полагая в системе (76.14) $m=1$ и $n=0$, найдём

$$k_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_1^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \\ \beta_z = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}. \quad (76.16)$$

Комплексные амплитуды будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_y &= -i\omega\mu_a \frac{\pi}{a} \Gamma_0^* \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_x &= 0 \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_y &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_x &= i\frac{\pi}{a} \beta_z \Gamma_0^* \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Gamma_0^* \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}. \quad (76.17)$$

Для дальнейших расчётов выразим компоненты поля волны H_{10} в функции амплитуды $\mathcal{E}_{0y}$. Очевидно,

$$\mathcal{E}_{0y} = \omega\mu_a \frac{\pi}{a} \Gamma_0^*. \quad (76.18)$$

Подставляя отсюда значение Γ_0^* в остальные компоненты, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_y &= -i\mathcal{E}_{0y} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_x &= 0 \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_y &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_x &= i\frac{\mathcal{E}_{0y}}{\zeta_z^*} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= \frac{\pi}{a\omega\mu_a} \mathcal{E}_{0y} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}. \quad (76.19)$$

Критическая длина волны H_{10} определяется по ф-ле (75.9):

$$\lambda_{10}^* = 2a, \quad (76.20)$$

и, очевидно, не будет зависеть от размера b .

Необходимо заметить, что на практике для передачи энергии по волноводу прямоугольного сечения применяют именно волну H_{10} , так как по сравнению, например, с «электрической» волной E_{11} [см. ф-лу (75.13)] «магнитная» волна H_{10} имеет бóльшую критическую длину и, следовательно, при данной критической длине для своего распространения требует волновода меньших размеров.

Размер b для волны H_{10} может быть (теоретически!) выбран любой величины. Однако, если этот размер взять значительно меньше размера a , то резко возрастает напряжённость электрического поля в волноводе, что приводит к возрастанию потерь как в стенках, так и в диэлектрике, заполняющем объём волновода, вплоть до пробоя (или короны).

Практически размер b берут порядка размера a

$$b = (0,7 \div 0,5) a.$$

§ 77. Картины поля в прямоугольном волноводе

Картину поля в волноводе можно наглядно иллюстрировать расположением и формой векторных линий электрического и магнитного полей. Дифференциальные уравнения векторных линий поля в волноводе получим, раскрывая векторное условие касания вектора $\mathbf{E}$ и элемента векторной линии ($d\mathbf{l}$) вектора $\mathbf{E}$

$$[\mathbf{E} d\mathbf{l}] = 0, \quad (77.1)$$

отсюда

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (77.2)$$

Аналогично и для векторной линии вектора $\mathbf{H}$

$$\frac{dx'}{H_x} = \frac{dy'}{H_y} = \frac{dz'}{H_z},$$

где dx' , dy' , dz' определяют элемент $d\mathbf{l}'$ векторной линии $\mathbf{H}$.

Эти общие дифференциальные уравнения векторных линий мы применим для построения картин поля в волноводе при произвольных значениях параметров m и n .

Картину поля важнейшей для практики волны H_{10} можно представить из непосредственного рассмотрения формул мгновенных

значений компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Напишем, на основании формул комплексных амплитуд (76.19) мгновенные значения:

$$\left. \begin{aligned} E_y &= -\mathcal{E}_{0y} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta_z z) \\ H_x &= \frac{\mathcal{E}_{0y}}{\zeta_z^*} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta_z z) \\ H_z &= \frac{\pi}{a \omega \mu_a} \mathcal{E}_{0y} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta_z z) \end{aligned} \right\} \quad (77.3)$$

Как видим из этих уравнений, компоненты поля не зависят от координаты y . Электрическое поле имеет только компоненту E_y , одинаковую вдоль оси y ; линии электрического поля будут прямыми, параллельными оси y . Их густота в направлении оси x определяется функцией $\sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$. Линии магнитного поля представляются плоскими кривыми, лежащими в плоскостях yz ; форма их в направлении оси y одинакова.

В направлении оси x электрическое поле образует половину стоячей волны — от узла до узла, магнитное — то же самое, но от пучности до пучности.

Вдоль оси z распространяется бегущая волна
[функция $\left. \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \right\}(\omega t - \beta_z z)]$.

Картины поля построены на рис. 77.1.

Рассмотрим картину поля магнитной волны H_{mn} при m и n , не равных нулю. Так как $E_z = 0$, то электрические линии будут лежать в плоскости xy , и их уравнение запишется в виде

$$\dot{\mathcal{E}}_x dy - \dot{\mathcal{E}}_y dx = 0.$$

Подставим значения $\dot{\mathcal{E}}_x$ и $\dot{\mathcal{E}}_y$ по ф-лам (76.14). Получим

$$k_n \cos k_m x \sin k_n y dy + k_m \sin k_m x \cos k_n y dx = 0.$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} k_n y \cdot d(k_n y) + \operatorname{tg} k_m x \cdot d(k_m x) &= -d(\ln \cos k_n y) - d(\ln \cos k_m x) = \\ &= d\{\ln(\cos k_n y \cdot \cos k_m x)\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\ln\{\cos k_n y \cdot \cos k_m x\} = \text{const}$$

и уравнение векторных линий электрического поля будет иметь вид

$$\cos k_n y \cdot \cos k_m x = \text{const}. \quad (77.4)$$

Так как магнитное поле в данном случае имеет все три компоненты, то его векторные линии будут, очевидно, кривыми двоякой

кривизны. Найдём и построим проекции этих линий на плоскости поперечного и продольного сечений (например, xu и yz). Формулы для поперечной и продольной проекции магнитных линий выводятся аналогично предыдущей. Дифференциальное уравнение поперечной проекции будет

$$\mathcal{H}_x dy - \mathcal{H}_y dx = 0, \quad (77.5)$$

и с помощью системы (76.14) получим его решение

$$\frac{[\sin k_n y] \left(\frac{k_m}{k_n} \right)^2}{\sin k_m x} = \text{const.} \quad (77.6)$$

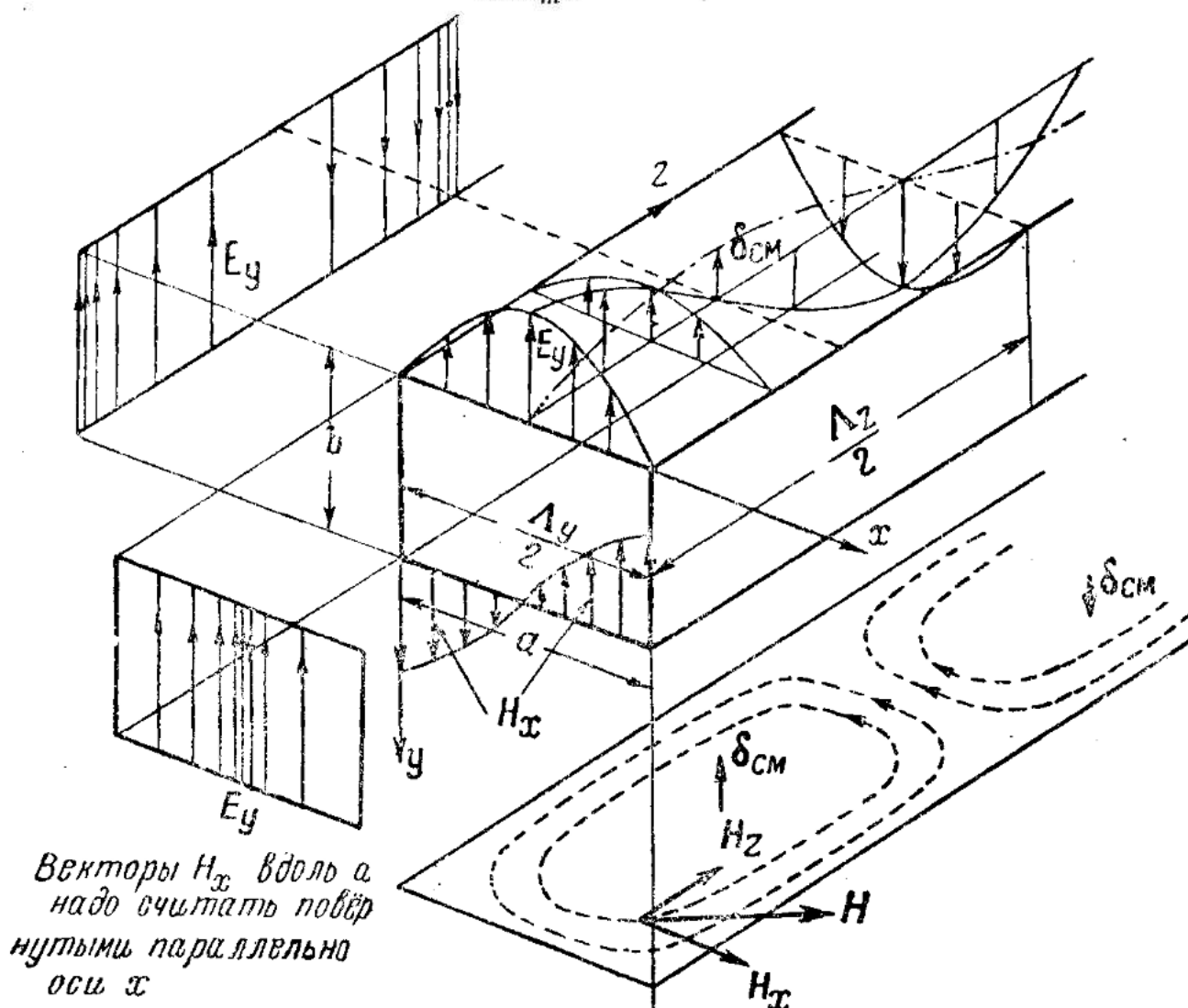


Рис. 77.1

Для продольной проекции получим

$$\mathcal{H}_y dz - \mathcal{H}_z dy = 0. \quad (77.7)$$

При выполнении преобразований надо помнить, что время t следует считать постоянным и, например,

$$dz = -\frac{1}{\beta_z} d(\omega t - \beta_z z).$$

В итоге получим уравнение для продольной проекции

$$[\sin k_n y] \left(\frac{k_{mn}}{k_n} \right)^2 \cdot \sin(\omega t - \beta_z z) = \text{const.} \quad (77.8)$$

Аналогично выводятся уравнения векторных линий для «электрической» волны E_{mn} .

Картины поля для некоторых типов «электрических» и «магнитных» волн показаны в табл. 77.2 и 77.3, где приведены также значения критических параметров этих волн и даны способы их возбуждения.

Векторные линии плотности тока проводимости в стенках волновода можно было бы определить по касательной составляющей вектора напряжённости электрического поля в стенках волновода

$$\delta_{\text{пов}} = \sigma_{\text{пов}} E_{\tau},$$

но в рассматриваемых идеализированных условиях, когда предполагается бесконечно большая проводимость стенок ($\sigma = \infty$), касательная составляющая E равна нулю

$$E_{\tau} = 0.$$

Поэтому линии плотности тока в стенках определяются, как это сделано в § 65 [см. ф-лы (65.40—44)], по касательной составляющей магнитного поля

$$\delta_{\text{пов}} = [n^{\circ} \cdot H_{\tau}], \quad (77.9)$$

где n° — единичный вектор нормали к поверхности стенки, направленный внутрь волновода.

Картина линий вектора плотности тока смещения ($\delta_{\text{см}}$) для гармонической бегущей волны повторяет картину линий напряжённости её электрического поля, но оказывается сдвинутой по расстоянию на четверть длины волны, так как, если

$$E = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - \beta z),$$

то

$$\delta_{\text{см}} = \varepsilon_a \frac{dE}{dt} = \varepsilon_a \mathcal{E}_0 \omega \cos(\omega t - \beta z).$$

В выражение мгновенных значений компонент векторов E и H входит множитель $\sin(\omega t - \beta_z z)$ [см. например, ф-лу (77.3)], представляющий бегущую волну. Если в этом множителе мы фиксируем z , то в поперечном сечении с данным значением z составляющие магнитного поля будут изменяться по закону синуса. Так как густота векторных линий пропорциональна величине вектора, поле

которого они представляют, то при изменении $\sin(\omega t - \text{const})$ от 1 до 0 количество линий также должно обращаться в нуль; линии стягиваются к центру и исчезают; когда $\sin(\omega t - \text{const})$ станет отрицательным, то линии будут появляться из центра, но уже противоположного направления. Если мы фиксируем t , а z в множителе бегущей волны будем рассматривать переменным, то для данного момента времени по длине волновода мы получим чередование областей сгущения и разрежения векторных линий (см. табл. 77.2 и 77.3, где магнитные линии показаны их следами на плоскости чертежа).

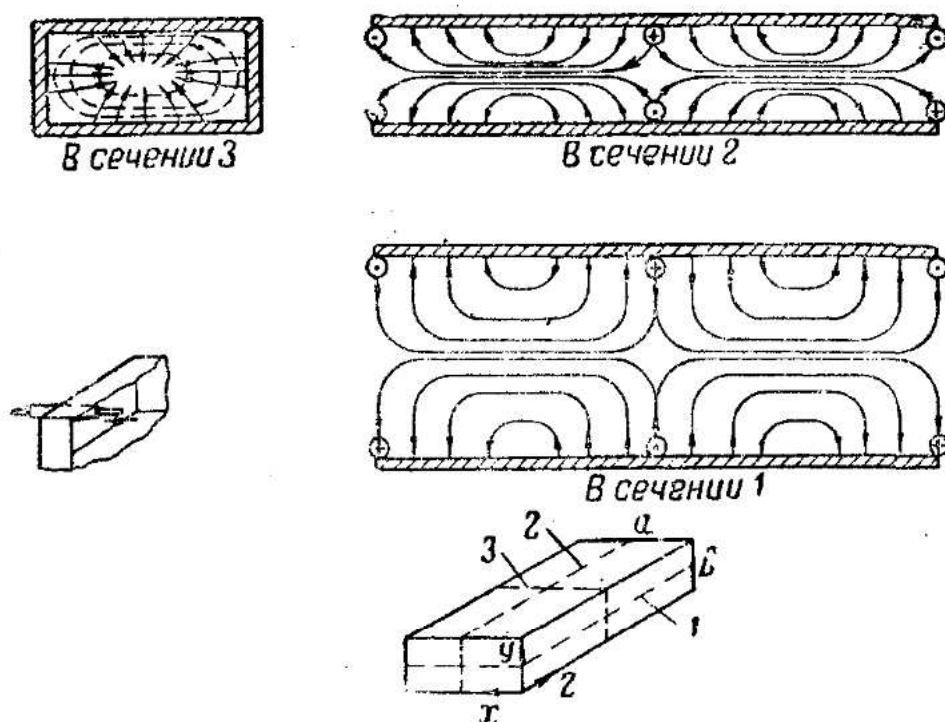
Картина векторных линий будет, очевидно, перемещаться по волноводу с фазовой скоростью, превышающей скорость света.

Картина векторных линий отнюдь не отражает истинной структуры поля; эта картина, как мы неоднократно указывали, — условный, достаточно удобный образ, дающий наглядное представление о величине и направлении векторов поля в пространстве.

Энергия электромагнитного поля, как это было показано в § 51, распространяется по волноводу с групповой скоростью, которая всегда меньше скорости света. Соотношения скорости света, фазовой и групповой скоростей, выведенные нами в теории ленточной линии [см. ф-лу (71.21) и пояснения к ней], полностью применимы к волноводам.

Таблица 77.2

Электрические волны в волноводах прямоугольного сечения



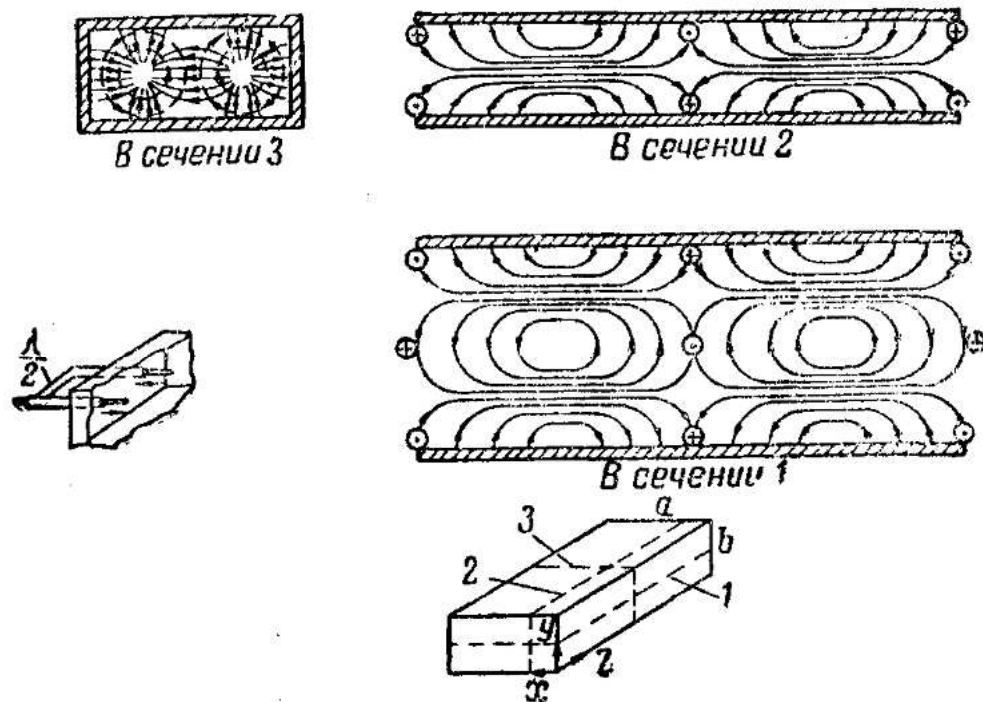
Волна $E_{11} \equiv TM_{11}$

$$\lambda_{11}^* = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Компоненты поля

$E_x, E_y, E_z,$

H_x, H_y

Волна $E_{21} \equiv TM_{21}$

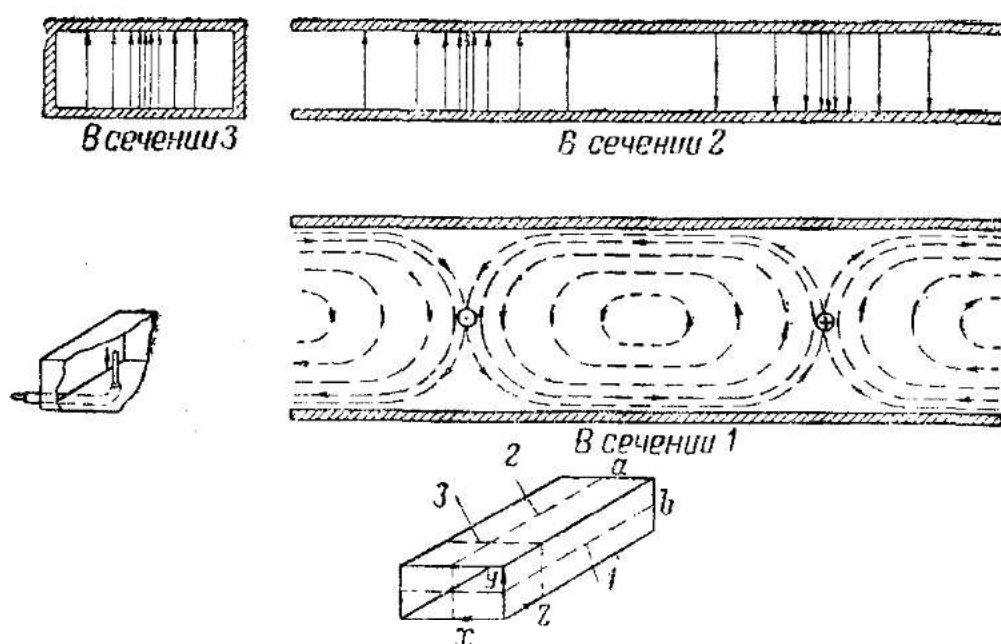
$$\lambda_{21}^* = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2 + a^2}}$$

Компоненты поля

$$E_x, E_y, E_z, \\ H_x, H_y$$

Таблица 77.3

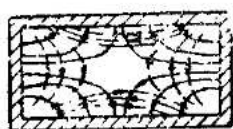
Магнитные волны в волноводах прямоугольного сечения

Волна $H_{10} \equiv TE_{10}$

$$\lambda_{10}^* = 2a$$

Компоненты поля

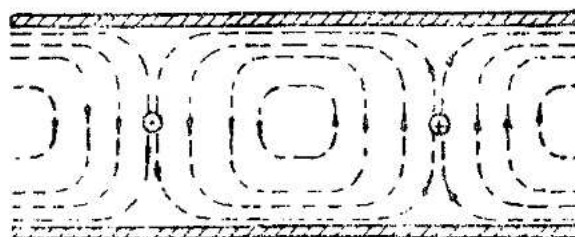
$$E_y, H_x, H_z$$



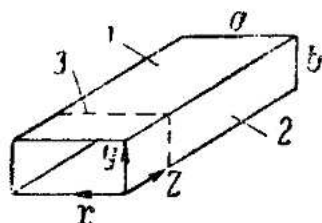
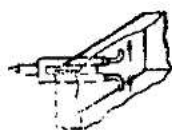
В сечении 3



В сечении 2



В сечении 1

Волна $H_{11} \equiv TE_{11}$

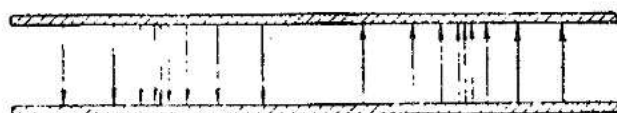
$$\lambda_{11}^* = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Компоненты поля

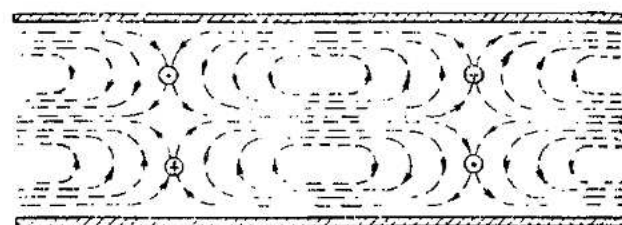
$$E_x, E_y, \\ H_x, H_y, H_z$$



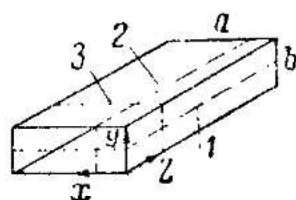
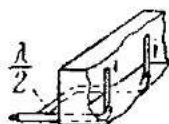
В сечении 3



В сечении 2



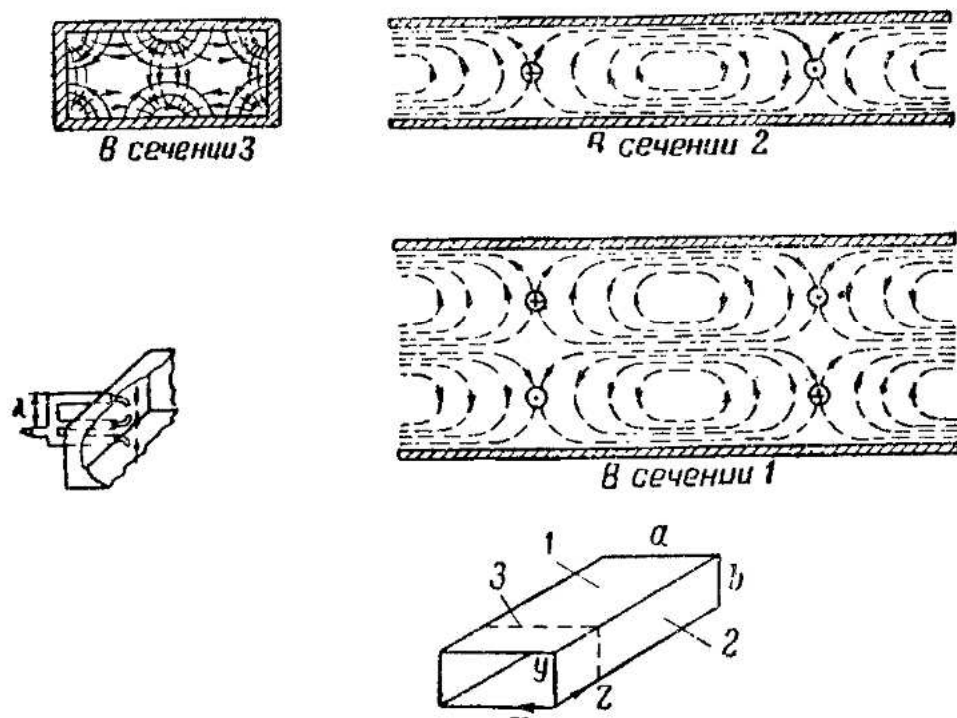
В сечении 1

Волна $H_{20} \equiv TE_{20}$

$$\lambda_{20}^* = a$$

Компоненты поля

$$E_y, \\ H_x, H_z$$

Волна $H_{21} = TE_{21}$

$$\lambda_{21}^* = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2 + a^2}}$$

Компоненты поля

 $E_x, E_y,$ H_x, H_y, H_z

§ 78. Цилиндрические волноводы. «Электрическая» волна «Е»

В цилиндрических волноводах, так же как и в прямоугольных, можно возбуждать и «электрические» ($E \equiv TM$) и «магнитные» ($H \equiv TE$) волны.

Возбудим «электрическую» волну, помещая электрический вибратор в направлении оси цилиндрической трубы с идеально проводящими стенками ($\sigma = \infty$), и сделаем расчёт поля. Воспользуемся для расчёта «электрическим» вектором Герца.

В указанных условиях возбуждения вектор Герца будет иметь только одну компоненту по оси z [см. ф-лу (43.22)]:

$$\Gamma = \Gamma_z. \quad (78.1)$$

Комплексная амплитуда вектора Герца должна удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla^2 \Gamma_z + \beta^2 \Gamma_z = 0, \quad (78.2)$$

где, как и в предыдущем параграфе, $\beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$.

Запишем ур-ние (78.2) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} + \beta^2 \Gamma = 0. \quad (78.3)$$

Проинтегрируем это уравнение, применяя метод Фурье—Бернулли. Положим

$$\Gamma = \dot{U}\dot{V}\dot{W}, \quad (78.4)$$

где

$$\dot{U} = f_1(R); \quad \dot{V} = f_2(\chi); \quad \dot{W} = f_3(z). \quad (78.5)$$

Подставляя выражение (78.4) в уравнение и разделив результат на произведение $\dot{U}\dot{V}\dot{W}$, получим

$$\frac{1}{\dot{U}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial R^2} + \frac{1}{R\dot{U}} \cdot \frac{\partial \dot{U}}{\partial R} + \frac{1}{R^2\dot{V}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\dot{W}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial z^2} + \beta^2 = 0. \quad (78.6)$$

По соображениям, развитым в § 74, можно положить

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{U}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial R^2} + \frac{1}{R\dot{U}} \cdot \frac{\partial \dot{U}}{\partial R} + \frac{1}{R^2\dot{V}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \chi^2} = \\ = - \left(\frac{1}{\dot{W}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial z^2} + \beta^2 \right) = -p^2; \end{aligned} \quad (78.7)$$

отсюда следует, во-первых,

$$\frac{1}{\dot{W}} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial z^2} = -(\beta^2 - p^2) = -\beta_z^2 \quad (78.8)$$

и, во-вторых,

$$\frac{R^2}{\dot{U}} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial R^2} + \frac{R}{\dot{U}} \frac{\partial \dot{U}}{\partial R} + \frac{1}{\dot{V}} \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \chi^2} + p^2 R = 0. \quad (78.9)$$

Далее, на основании тех же соображений,

$$\frac{R^2}{\dot{U}} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial R^2} + \frac{R}{\dot{U}} \frac{\partial \dot{U}}{\partial R} + p^2 R = -\frac{1}{\dot{V}} \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \chi^2} = n^2. \quad (78.10)$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \dot{W}}{dz^2} + \beta_z^2 \dot{W} &= 0, \\ \frac{d^2 \dot{V}}{d\chi^2} + n^2 \dot{V} &= 0, \\ \frac{d^2 \dot{U}}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\dot{U}}{dR} + \left(p^2 - \frac{n^2}{R^2} \right) \dot{U} &= 0. \end{aligned} \quad (78.11)$$

Функция $\dot{W}$ будет характеризовать распространение вдоль волновода.

Выражение функции $\dot{W}$ возьмём в виде

$$\dot{W} = A_1 e^{-i\beta_z z} + A_2 e^{i\beta_z z}, \quad (78.12)$$

где

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - p^2} \quad (78.13)$$

будет являться коэффициентом распространения вдоль оси z .

В поперечных направлениях возникают стоячие волны. Поэтому решение второго уравнения выберем в виде

$$V = B \cos(n\chi). \quad (78.14)$$

Отметим здесь следующее: пусть значение функции V при некотором $\chi = \chi_0$ равно V_0 . Если мы изменим χ на 2π ($\chi_1 = \chi_0 + 2\pi$), то вернёмся в ту же точку на окружности трубы — функция V должна, очевидно, принять своё первоначальное значение: V_0 ; ($V_1 = V_0$). Функция V должна быть по окружности трубы однозначна, следовательно,

$$\cos(n\chi) = \cos[n(\chi + 2\pi)]. \quad (78.15)$$

Отсюда следует, что n должно быть целым числом.

Функция $\dot{U}$ определяется из третьего уравнения (78.11)

$$\frac{d^2\dot{U}}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\dot{U}}{\partial R} + \dot{U} \left(p^2 - \frac{n^2}{R^2} \right) = 0. \quad (78.16)$$

Подставив в это уравнение новую переменную $y = pR$, мы получим уравнение

$$\frac{d^2\dot{U}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\dot{U}}{dy} + \left(1 - \frac{n^2}{y^2} \right) \dot{U} = 0, \quad (78.17)$$

представляющее собой уравнение Бесселя порядка n (см. § 56).

Решение его напомним в виде

$$\dot{U} = C_1 J_n(y) + C_2 N_n(y) = C_1 J_n(pR) + C_2 N_n(pR), \quad (78.18)$$

где J_n и N_n — функции Бесселя и Неймана порядка n .

Таким образом, решение задачи будет иметь вид

$$\dot{\Gamma} = (A_2 e^{i\beta z^2} + A_1 e^{-i\beta z^2}) B \cdot \cos(n\chi) [C_1 J_n(pR) + C_2 N_n(pR)]. \quad (78.19)$$

Функция Неймана (N_n) при $R=0$ обращается в ∞ (см. § 56, рис. 56.2 б). Так как у нас на оси трубы вектор Герца обращаться в ∞ не может, то, следовательно,

$$C_2 = 0. \quad (78.20)$$

Точно так же, ограничиваясь рассмотрением только прямой волны (распространение без отражения), мы положим

$$A_2 = 0. \quad (78.21)$$

Далее, при $n=0$, $R=0$ и $z=0$, получим

$$\dot{\Gamma} = A_1 \cdot B \cdot C_1 = \Gamma_0. \quad (78.22)$$

Окончательный вид комплексной амплитуды вектора Герца будет

$$\dot{\Gamma} = \Gamma_0 J_n(pR) \cos n\chi \cdot e^{-i\beta z^2}. \quad (78.23)$$

Перейдём к расчёту компонент поля. Комплексные амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ равны [см. § 43, ф-лы (43.3) и (43.5)]

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \dot{\Gamma} + \beta^2 \dot{\Gamma}; \quad \mathbf{H} = i\omega\epsilon_a \text{ rot } \dot{\Gamma}. \quad (78.24)$$

Разложим эти выражения на составляющие в цилиндрической системе координат (см. Приложение 1, ф-лы (П.36), (П.37):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{r}_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{r}_\chi}{\partial \chi} + \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial z}; \\ \operatorname{grad}_R \operatorname{div} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial (\operatorname{div} \dot{\mathbf{r}})}{\partial R}; \quad \operatorname{rot}_R \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial \chi} - \frac{\partial \dot{r}_\chi}{\partial z}; \\ \operatorname{grad}_\chi \operatorname{div} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{R} \frac{\partial (\operatorname{div} \dot{\mathbf{r}})}{\partial \chi}; \quad \operatorname{rot}_\chi \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \dot{r}_R}{\partial z} - \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial R}; \\ \operatorname{grad}_z \operatorname{div} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial (\operatorname{div} \dot{\mathbf{r}})}{\partial z}; \quad \operatorname{rot}_z \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{r}_\chi) - \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{r}_R}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} \quad (78.25)$$

Так как у нас $\dot{r}_R = \dot{r}_\chi = 0$, то выражение комплексных амплитуд компонент поля упростятся. Разложив $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$ из (78.24) на компоненты, получим с помощью (78.25):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial z \partial R} & \dot{\mathcal{H}}_R &= i \omega \varepsilon_a \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \chi} \\ \dot{\mathcal{E}}_\chi &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial z \partial \chi} & \dot{\mathcal{H}}_\chi &= -i \omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{r}}{\partial R} \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{r} & \dot{\mathcal{H}}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (78.26)$$

Постоянную p в выражении комплексной амплитуды $\dot{r}$ определим из граничных условий. На поверхности трубы при $R=a$: $E_r = 0$; $H_n = 0$, следовательно, для $R=a$:

$$E_z = E_\chi = 0; \quad H_R = 0. \quad (78.27)$$

Так как E_z , E_χ и H_R получаются из выражения $\dot{r}$ дифференцированием по z и χ (не по R !), то условия (78.27) будут удовлетворены, если при $R=a$

Таблица 78.1
КОРНИ УРАВНЕНИЯ $J_n(x) = 0$

$n \backslash i$	1	2	3	4
0	2,405	5,220	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,137	13,323
2	5,135	8,417	11,620	14,796
3	6,379	11,620	13,017	16,224

$$\dot{r} = 0. \quad (78.28)$$

Отсюда следует трансцендентное уравнение

$$J_n(pa) = 0. \quad (78.29)$$

Это уравнение имеет корни, если p — действительное.

Обозначим v_{ni} — i -й корень функции Бесселя n -го порядка.

Тогда решением ур-ния (78.29) будет $(pa)_{nl} = \gamma_{nl}$ и, следовательно,

$$p = \frac{\gamma_{nl}}{a}. \quad (78.30)$$

Таким образом, выражение вектора Герца примет вид

$$\vec{r} = \Gamma_0 J_n \left(\frac{\gamma_{nl}}{a} R \right) \cos n \chi e^{-\beta_z z}. \quad (78.31)$$

В табл. 78.1 приведены значения первых корней уравнения $J_n(x) = 0$.

Теперь нетрудно определить и комплексные амплитуды компонент поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= -i \Gamma_0 \beta_z \frac{\gamma_{nl}}{a} J'_n \left(\frac{\gamma_{nl}}{a} R \right) \cos n \chi e^{-\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_\chi &= i \Gamma_0 \beta_z \frac{n}{R} J_n \left(\frac{\gamma_{nl}}{a} R \right) \sin n \chi e^{-\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \left(\frac{\gamma_{nl}}{a} \right)^2 \Gamma_0 J_n \left(\frac{\gamma_{nl}}{a} R \right) \cos n \chi e^{-\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_R &= -i \Gamma_0 \frac{\omega \varepsilon_r n}{R} J_n \left(\frac{\gamma_{nl}}{a} R \right) \sin n \chi e^{-\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_\chi &= -i \Gamma_0 \frac{\omega \varepsilon_r \gamma_{nl}}{a} J'_n \left(\frac{\gamma_{nl}}{a} R \right) \cos n \chi e^{-\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (78.32)$$

Здесь $J'_n(x)$ обозначает производную функцию Бесселя по полному аргументу $\left(x = \frac{\gamma_{nl}}{a} R\right)$.

Картина составляющих векторов поля приведена на рис. 78.2.

Поперечное волновое сопротивление цилиндрического волновода для данного случая «электрической» волны равно

$$\zeta_z = \frac{\dot{\mathcal{E}}_R}{\dot{\mathcal{H}}_\chi} = - \frac{\dot{\mathcal{E}}_\chi}{\dot{\mathcal{H}}_R} = \frac{\beta_z}{\omega \varepsilon_a} = \frac{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\gamma_{nl}}{a}\right)^2}}{\omega \varepsilon_r} \quad (78.33)$$

и оказывается совпадающим по форме с «поперечным электрическим» волновым сопротивлением прямоугольного волновода [см. ф-лу (75.4)]. Волна будет распространяться, если β_z окажется действительным числом, т. е. если

$$\beta > \frac{\gamma_{nl}}{a}. \quad (78.34)$$

Как и при выводе критических условий для прямоугольных волноводов [см. ф-лы (75.8—10)], мы получим в данном случае длину критической волны

$$\lambda^* = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi a}{\nu_{ni}}, \quad (78.35)$$

длина же волны в волноводе будет равна

$$\Lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - p^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)^2}}. \quad (78.36)$$

Эти выражения аналогичны выведенным в § 75.

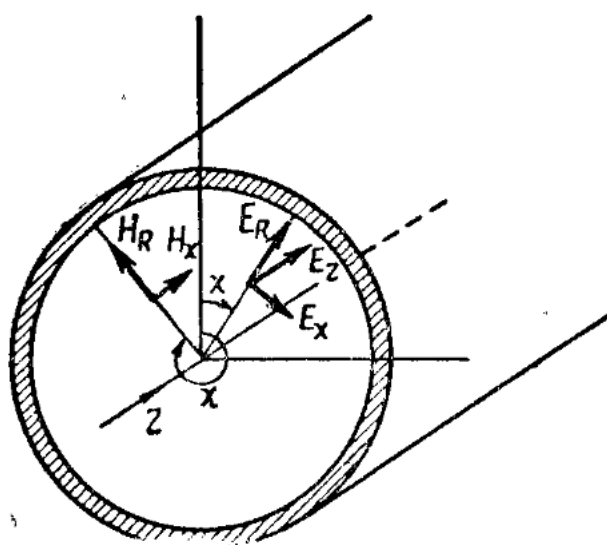


Рис. 78.1

Данный тип волны, как и волну в прямоугольном волноводе, можно обозначить двумя индексами (в нашем случае, E_{ni}), где первый индекс указывает порядок функции Бесселя и тригонометрической гармоник, а второй — номер корня функции Бесселя.

Так как на практике почти всегда пользуются волной, соответствующей первому корню ($i=1$), то часто второй индекс опускают и пишут $E_{ni} \equiv E_n$.

Наибольшая длина критической

волны будет у волны нулевого порядка $E_{0,1} \equiv E_0$.

Для $n=0$ и $i=1$ и, приняв во внимание, что

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad (78.37)$$

мы получим из системы (78.32):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= i \Gamma_0 \frac{\beta_z}{\omega \epsilon_a} \frac{\nu_{01}}{a} J_1\left(\frac{\nu_{01}}{a} R\right) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_\chi &= 0 \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \Gamma_0 \left(\frac{\nu_{01}}{a}\right)^2 J_0\left(\frac{\nu_{01}}{a} R\right) e^{-i\beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_R &= \dot{\mathcal{H}}_z = 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_\chi &= i \Gamma_0 \frac{\omega \epsilon_a \nu_{01}}{a} J_1\left(\frac{\nu_{01}}{a} R\right) e^{-i\beta_z z} \end{aligned} \right\}. \quad (78.38)$$

Подставляя в формулу критической волны (78.35) значение корня ν_{01} из таблицы (см. стр. 336), получим

$$\lambda_{0,1}^* = \frac{2\pi a}{\nu_{01}} = \frac{2\pi}{2,405} a = 2,615 a. \quad (78.39)$$

Для волны E_{02}

$$\lambda_{02}^* = \frac{2\pi}{\nu_{02}} a = \frac{2\pi}{5,520} a = 1,14 a. \quad (78.40)$$

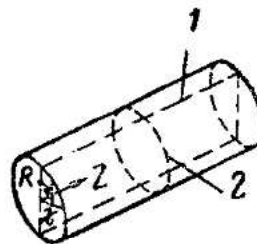
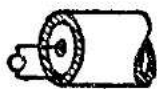
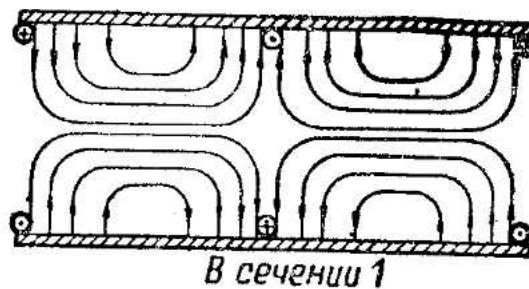
Для волны E_{11} :

$$\lambda_{11}^* = \frac{2\pi}{\nu_{11}} a = \frac{2\pi}{3,832} a = 1,64 a. \quad (78.41)$$

Картины поля этих волн приведены в табл. 78.2. В этой таблице приведены также критические значения и показаны способы возбуждения волн.

Т а б л и ц а 78.2

„Электрические“ волны в волноводах круглого сечения

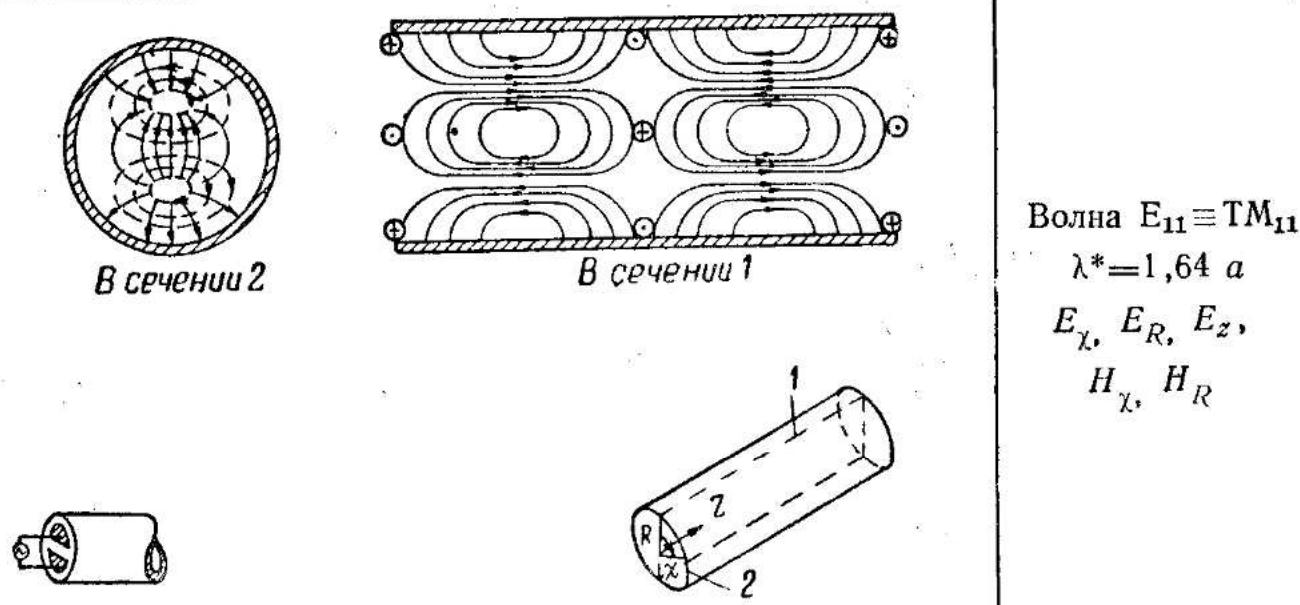


Волна $F_{01} = TM_{01}$
 $\lambda^* = 2,61 a$

Компоненты поля

$E_R, E_z,$

H_χ



§ 79. «Магнитная» волна « H_{nl} »

Возбуждая волновод магнитным диполем (петлёй), мы получаем магнитную волну $H \equiv TE$.

Для расчёта компонент поля магнитной волны воспользуемся, как и в § 76, «магнитным» вектором Герца. На основании выводов предыдущего параграфа и § 76 напомним

$$\dot{\Gamma}_z^* = \dot{\Gamma}^* = \dot{\Gamma}_0^* J_n(p^* R) \cos n \chi e^{-i\beta_z z}. \quad (79.1)$$

Комплексные амплитуды составляющих электрического и магнитного полей определим через $\dot{\Gamma}^*$ по ф-ле (76.5). Затем воспользуемся разложением (78.25) и получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= -i \omega \mu_a \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{\Gamma}^*}{\partial \chi} \\ \dot{\mathcal{E}}_\chi &= -i \omega \mu_a \frac{\partial \dot{\Gamma}^*}{\partial R} \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_R &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^*}{\partial z \partial R} \\ \dot{\mathcal{H}}_\chi &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^*}{\partial z \partial \chi} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}^*}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{\Gamma}^* \end{aligned} \right\} \quad (79.2)$$

Граничные условия (78.27) в данном случае удовлетворяются, если при $R=a$

$$\frac{\partial \dot{\Gamma}^*}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Gamma^*}{\partial R \partial z} = 0. \quad (79.3)$$

Оба этих условия будут удовлетворены, если при $R=a$

$$\frac{\partial \dot{\Gamma}^*}{\partial R} = 0, \quad (79.4)$$

Подставляя сюда значение Γ^* из ф-лы (79.1), приходим к трансцендентному уравнению

$$J'_n(p^*a) = 0 \quad (79.5)$$

и, обозначив v_{ni}^* корни этого уравнения, получим

$$p^* = \frac{v_{ni}^*}{a}. \quad (79.6)$$

Ниже приведена таблица первых корней уравнения $J'_n(x) = 0$.

Обратим внимание на то, что самым малым корнем оказывается не корень v_{01}^*

$$J'_0(x_1) = -J_1(x) = 0, \quad (79.7)$$

а корень v_{11}^* функции

$$J'_1(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x) = 0, \quad (79.8)$$

что иллюстрирует рис. 79.1.

Таблица 79.1
КОРНИ УРАВНЕНИЯ $J'_n(x) = 0$

$n \backslash i$	1	2	3
0	3,832	7,016	0,174
1	1,841	5,332	8,536
2	3,054	6,705	9,965
3	4,201	8,015	11,344

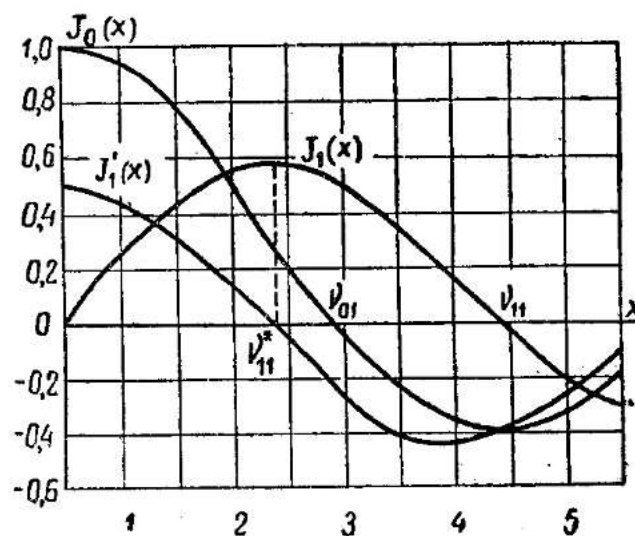


Рис. 79.1

Величины комплексных амплитуд поля «магнитной» волны получим, проделав расчёты по ф-лам (79.2). В итоге

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= i \Gamma_0^* \frac{\omega \mu_a n}{R} J_n \left(\frac{\gamma_{ni}^*}{a} R \right) \sin n \chi e^{-i \beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_\chi &= i \Gamma_0^* \frac{\omega \mu_a \gamma_{ni}^*}{a} J_n' \left(\frac{\gamma_{ni}^*}{a} R \right) \cos n \chi e^{-i \beta_z z} \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_R &= -i \Gamma_0^* \frac{\beta_z \gamma_{ni}^*}{a} J_n' \left(\frac{\gamma_{ni}^*}{a} R \right) \cos n \chi e^{-i \beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_\chi &= i \Gamma_0^* \frac{\beta_z n}{R} J_n \left(\frac{\gamma_{ni}^*}{a} R \right) \sin n \chi e^{-i \beta_z z} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= \Gamma_0^* \left(\frac{\gamma_{ni}^*}{a} \right)^2 J_n \left(\frac{\gamma_{ni}^*}{a} R \right) \cos n \chi e^{-i \beta_z z} \end{aligned} \right\} \quad (79.9)$$

Это же решение можно сразу написать, применив принцип двойственности к решению для «электрической» волны. Достаточно в формулах, определяющих поле «электрической» волны [см. ф-лы (78.32)], заменить «электрический» вектор Герца «магнитным»:

$$\Gamma \rightarrow \Gamma^*$$

и также заменить $\varepsilon_a \rightarrow \mu_a$, тогда из системы (78.32) сразу получится система (79.9).

Поперечное волновое сопротивление волновода для магнитной волны будет равно

$$\zeta_z^* = \frac{\dot{\mathcal{E}}_R}{\dot{\mathcal{H}}_\chi} = - \frac{\dot{\mathcal{E}}_\chi}{\dot{\mathcal{H}}_R} = \frac{\omega \mu_a}{\beta_z} \quad (79.10)$$

Это поперечное волновое сопротивление совпадает по своему виду с поперечным волновым сопротивлением для «магнитной» волны в прямоугольных волноводах [см. ф-лу (76.15)].

Длина критической волны будет равна

$$\lambda_{ni}^* = \frac{2\pi a}{\gamma_{ni}^*}, \quad (79.11)$$

и так как наименьшим корнем будет корень $\gamma_{11}^* = 1,841$, то наибольшей длиной критической волны будет обладать не волна H_{01} , а волна H_{11} :

$$\lambda_{11}^* = \frac{2\pi a}{\gamma_{11}^*} \approx 3,42 a. \quad (79.12)$$

Для волны H_{01} критическая длина будет

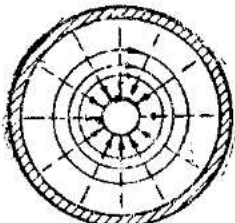
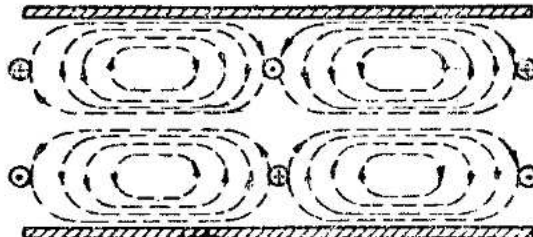
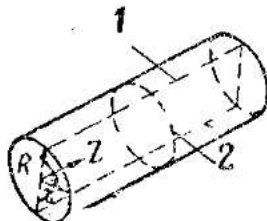
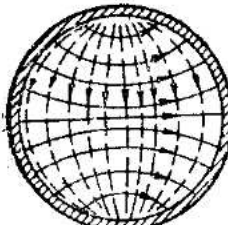
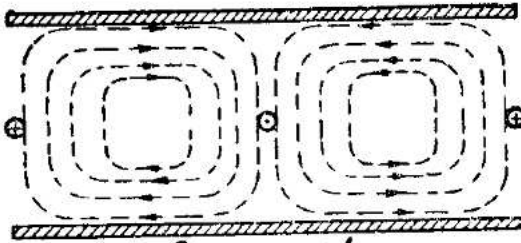
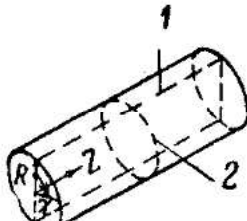
$$\lambda_{01}^* = \frac{2\pi a}{\gamma_{01}^*} = \frac{2\pi}{3,832} a = 1,64 a. \quad (79.13)$$

Волна H_{01} имеет особенное значение для практики. Дело в том, что при повышении частоты все типы волн в волноводе дают увеличивающиеся потери. Потери же от волны H_{01} и вообще от волн типа H_{0n} при повышении частоты уменьшаются.

Картина поля магнитных волн, их критические данные и способы возбуждения приведены в табл. 79.2.

Таблица 79.2

„Магнитные“ волны в волноводах круглого сечения

		Волна $H_{01} \equiv TE_{01}$ $\lambda^* = 1,64 a$ Компоненты поля $E_\chi,$ H_R, H_z
В сечении 2	В сечении 1	
		Волна $H_{11} \equiv TE_{11}$ $\lambda^* = 3,42 a$ Компоненты поля $E_R, E_\chi,$ H_R, H_χ, H_z
		
В сечении 2	В сечении 1	
		

§ 80. Коаксиальный кабель

Одной из важнейших направляющих систем в современной высокочастотной технике является коаксиальный кабель (см. рис. 80.1). Проблемы многоканальной телефонной связи передачи телевизионных сигналов, сигналов в радиолокаторных устройствах и т. д. разрешаются с помощью коаксиального кабеля.

Коаксиальный кабель состоит из центральной цилиндрической жилы, служащей одним проводом, и изолированной от неё коаксиальной оболочки, являющейся вторым проводом.

Центральная жила изолируется от коаксиального провода в современном высокочастотном кабеле обычно специальным резиноподобным компаундом (смесью), составленным из высокочастотных изоляционных материалов (например, из полистирола, полиэтилена, полиизобутилена и др.), которые применяются как в виде сплошной массы, так и в виде шайб, спиралей и т. д. Эти высокочастотные материалы должны иметь ничтожные диэлектрические потери на высоких частотах [$\operatorname{tg} \delta \approx 0,001—0,0001$; $\sigma \approx 10^{-18} (\text{ом} \cdot \text{м})^{-1}$].

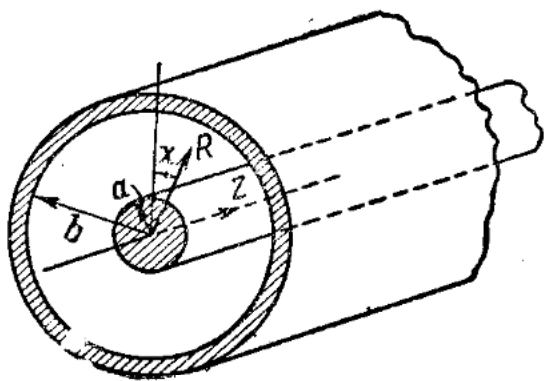


Рис. 80.1

В коаксиальном кабеле, как в направляющей системе из двух проводов, главное значение для целей передачи имеет основная волна, но, конечно, могут возбуждаться и волны высших порядков.

Выполним расчёт поля в коаксиальном кабеле, воспользовавшись решением, приведённым в двух предыдущих параграфах.

Выбрав оси координат в соответствии с рис. 80.1, мы для вектора Герца, определяющего поле в кабеле, воспользуемся выражением (78.19)

$$\begin{aligned} \vec{r}_z = \vec{r} = (B_2 e^{-i\beta_z z} + B_1 e^{i\beta_z z}) \times \\ \times \cos(n\chi) [C'_1 J_n(pR) + C'_2 N_n(pR)]. \end{aligned} \quad (80.1)$$

На тех же основаниях, что и в § 78, примем $B_1 = 0$, но так как теперь у нас поле определяется в пределах

$$a \leq R \leq b, \quad (80.2)$$

где a и b — радиусы внешней поверхности центральной жилы и внутренней поверхности коаксиальной трубы, то в выражении (80.1) мы должны сохранить оба частных решения $[J_n(pR)$ и $N_n(pR)]$, потому что оба они остаются конечными и регулярными в указанных пределах.

Выражение для комплексной амплитуды вектора Герца будет иметь вид

$$\dot{G} = [C_1 J_n(pR) + C_2 N_n(pR)] \cos n\chi e^{-i\beta_z z}, \quad (80.3)$$

где постоянные C_1 и C_2 могут быть определены из условий возбуждения, а p — из уравнения граничных условий.

Если $\dot{G}$ — «электрический» вектор Герца, то граничные условия для определения постоянной p будут [см. ф-лу (78.27)]

$$\dot{G} = 0 \Big|_{\substack{R=a \\ R=b}} \quad (80.4)$$

Отсюда для определения p получается трансцендентное уравнение

$$C_1 J_n(pa) + C_2 N_n(pa) = 0, \quad (80.5)$$

$$C_1 J_n(pb) + C_2 N_n(pb) = 0 \quad (80.6)$$

или

$$J_n(pa) N_n(pb) - J_n(pb) N_n(pa) = 0.$$

Если вектор $\dot{G}^*$ «магнитный», то граничные условия для него дадут [см. ф-лу (79.4)]

$$\frac{\partial \dot{G}^*}{\partial R} = 0 \Big|_{\substack{R=a \\ R=b}}, \quad (80.7)$$

что приведёт к уравнению

$$J'_n(pa) N'_n(pb) - J'_n(pb) N'_n(pa) = 0. \quad (80.8)$$

Критические условия для волн высшего порядка определяются корнями этих уравнений. Длина критической волны оказывается близка к расстоянию между внутренним и коаксиальным проводниками ($b-a$).

Основная волна не имеет критических условий и может распространяться с любой частотой.

Не углубляясь в дальнейшее исследование решения для волн высших порядков, займёмся нахождением основной волны.

Формулу для основной волны получим, если примем оба параметра (n и p) равными нулю. Равенство n нулю указывает на независимость поля от угла χ ; равенство p нулю указывает на независимость основной волны от размеров a и b , следовательно, на отсутствие критических условий для основной волны, как это было показано в § 71.

Формулу вектора Герца для основной волны можно найти предельным переходом, полагая $n \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$ в выражении (80.3), однако интереснее и проще решить уравнение, определяющее функ-

цию $U=U(R)$ при $n=p=0$ в системе (78.11). При этих условиях третье уравнение системы примет вид

$$\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} = 0, \quad (80.9)$$

и его решением будет

$$U = C_1 \ln R + C_2. \quad (80.10)$$

Полагая в ф-ле (80.10) постоянную C_2 равной нулю, мы для комплексной амплитуды вектора Герца получим выражение

$$\vec{r} = C_1 \ln R \cdot e^{-i\beta z}, \quad (80.11)$$

где $\beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ как коэффициент распространения основной волны.

Вектор Герца на поверхности $R=a$ и $R=b$ в нуль не обращается, однако граничные условия ($E_r=0$ и $H_n=0$) удовлетворяются, потому что вектор Герца не зависит от χ , следовательно, производные от вектора Герца по χ , определяющие E_χ , H_R равны тождественно нулю. Также при $R=a$, $R=b$ обращается в нуль E_z .

Комплексные амплитуды компонент поля вычислим по ф-лам (78.25). Получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= -i\beta C_1 \frac{e^{-i\beta z}}{R}, \\ \dot{\mathcal{E}}_\chi &= 0, \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_R &= 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_\chi &= -i\omega\epsilon_a C_1 \frac{e^{-i\beta z}}{R} \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= 0 \end{aligned} \quad (80.12)$$

Постоянную C_1 нетрудно определить, задавшись комплексной амплитудой тока в кабеле. Пусть

$$\dot{I}(z) = I(0) e^{-i\beta z}. \quad (80.13)$$

По закону полного тока

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \quad (80.14)$$

В нашем случае контуром интегрирования может служить окружность с радиусом R , заключённая между a и b , тогда

$$\begin{aligned} \oint \mathcal{H}_\chi \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} \dot{\mathcal{H}}_\chi R d\chi = \int_0^{2\pi} -i\omega\epsilon_a C_1 \frac{e^{-i\beta z}}{R} R d\chi = \\ &= -i\omega\epsilon_a C_1 2\pi e^{-i\beta z} = \dot{I} e^{-i\beta z} \end{aligned} \quad (80.15)$$

и отсюда

$$C_1 = - \frac{\dot{I}}{2\pi i \omega \epsilon_a}. \quad (80.16)$$

Следовательно, комплексные амплитуды компонент поля будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_R &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} j \frac{e^{-i\beta z}}{2\pi R} \\ \dot{\mathcal{H}}_\chi &= j \frac{e^{-i\beta z}}{2\pi R} \end{aligned} \right\}. \quad (80.17)$$

Картина поля основной волны приведена на рис. 80.2 и напоминает поле волны E_{01} в цилиндрическом волноводе (см. табл. 78.2). Ток смещения, текущий по оси трубы в волне E_{01} , в данном случае соответствует току проводимости в центральной жиле кабеля.

Волновое сопротивление кабеля (без потерь!) для основной волны

$$\zeta_z = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{\dot{\mathcal{H}}_\chi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \quad (80.18)$$

и совпадает с характеристическим сопротивлением вакуума (см. § 49).

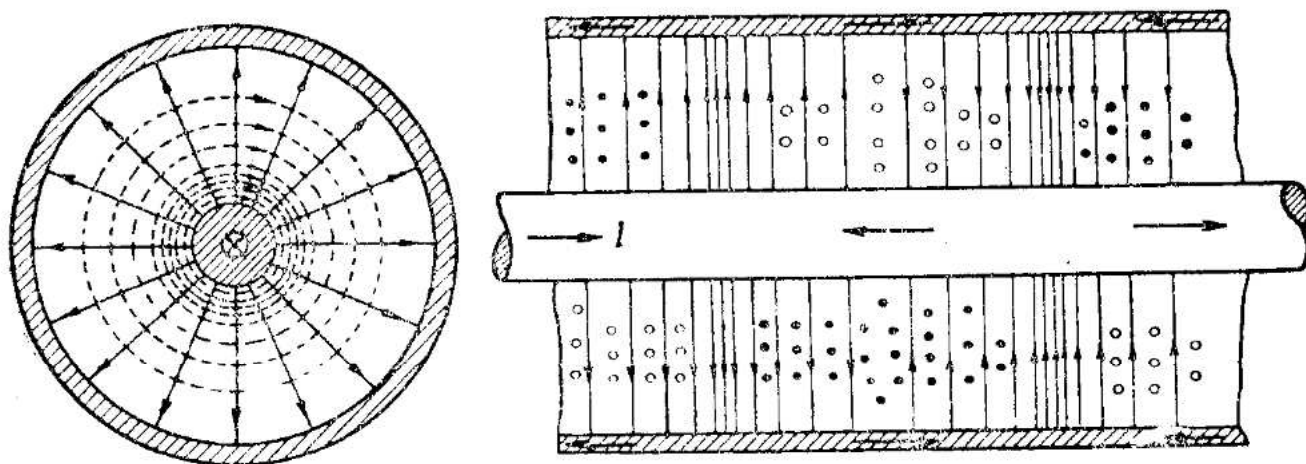


Рис. 80.2

Передача энергии по коаксиальному кабелю осуществляется обычно основной волной. В этом и заключается главное преимущество кабеля, сравнительно с волноводом.

Для того чтобы передача не «засорялась» волнами высших порядков, приходится размер $b-a$ (толщину диэлектрика) уменьшать до величины ниже критической длины этих волн. Эти волны будут отсечены, и в кабеле сможет распространяться только основная волна. Однако при очень короткой длине рабочей волны (например, $\lambda \approx 1$ см) толщину изоляции приходится делать слишком малой.

Уменьшение толщины изоляции ведёт к резкому возрастанию напряжённости электрического поля у поверхности внутреннего провода, что при передаче значительных мощностей может привести к возникновению короны и к электрическому пробое.

§ 81. Распространение электромагнитной энергии в волноводах

Среднее значение электромагнитной энергии гармонической волны, проходящее сквозь поперечное сечение волновода в единицу времени, можно вычислить с помощью ф-лы (53.8)

$$P_S^{cp} = \operatorname{Re} \left\{ \int_S \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} \right\}.$$

В данном случае $d\mathbf{S} \approx \mathbf{z}^0 dS$ — интегрировать следует лишь осевую компоненту комплексного вектора Пойнтинга

$$\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{z}^0 = \tilde{P}_z = \frac{1}{2} \dot{\mathcal{E}}_T \dot{\mathcal{H}}_T^* \sin(\mathbf{E}_T \wedge \mathbf{H}_T),$$

где (для прямоугольного волновода) $E_T = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ и $H_T = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$ — поперечные составляющие вектора поля.

В прямоугольном волноводе

$$\frac{E_x}{E_y} = -\frac{H_y}{H_x}, \quad (81.1)$$

и отсюда (на основании, например, вывода в § 49) заключаем, что $\mathbf{E}_T$ и $\mathbf{H}_T$ взаимно перпендикулярны и $\sin(\mathbf{E}_T \mathbf{H}_T) = 1$.

Таким образом,

$$P_S^{cp} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_S \dot{\mathcal{E}}_T \dot{\mathcal{H}}_T^* dS \right\}. \quad (81.2)$$

Так как

$$\dot{\mathcal{E}}_T = \zeta^T \dot{\mathcal{H}}_T, \quad (81.3)$$

где ζ^T для электрических (ТМ) и магнитных (ТЕ) волн определено ф-лами (75.4) и (76.15), то в итоге получим

$$P_S^{cp} = \frac{\zeta^T}{2} \int_S \dot{\mathcal{H}}_T^2 dS = \frac{1}{2\zeta^T} \int_S \dot{\mathcal{E}}_T^2 dS \quad (81.4)$$

— расчётные формулы, удобные для определения потока электромагнитной мощности.

Рассчитаем для примера поток электромагнитной мощности в прямоугольном волноводе для волн $H_{10} = TE_{10}$.

Из системы уравнений поля этой волны [ф-лы (76.17)] подставим в интеграл

откуда
$$|\dot{\mathcal{E}}_T| = |\dot{\mathcal{E}}_y| = \nu_a \omega \frac{\pi}{a} \Gamma_0^* \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right),$$

$$P_{ab}^{cp} = \frac{1}{2\zeta^{TE}} \int_0^b \int_0^a \left(\nu_a \omega \frac{\pi}{a} \Gamma_0^* \sin \frac{\pi}{a} x \right)^2 dx dy =$$

$$= \frac{\omega^2 \mu_a^2 \pi^2 \Gamma_0^{*2} b}{2 \zeta^{TE} a^2} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{\omega^2 \mu_a^2 \pi^2 \Gamma_0^{*2} b}{2 \zeta^{TE} a^2} \frac{a}{2}.$$

Так как $\zeta^{TE} = \frac{\mu_a \omega}{\beta_z}$, то

$$P_{cp(ab)} = \Gamma_0^{*2} \frac{\pi \omega \mu_a \beta_z}{4} \frac{b}{a}. \quad (81.5)$$

§ 82. Объёмные резонаторы

На очень высоких частотах, при длинах волн порядка сантиметров и даже дециметров, цепи с сосредоточенными постоянными оказываются малопригодными.

Если длина волны соизмерима с линейным размером цепи, то цепь будет излучать, да и конструктивное выполнение системы с сосредоточенными параметрами в этих условиях практически невозможно. Поведение цепи будет определяться не только включёнными в неё конденсаторами и индуктивностями, но и характером распределения электромагнитной волны: соотношением стоячей и бегущей компонент этой волны; положением узлов и т. д.

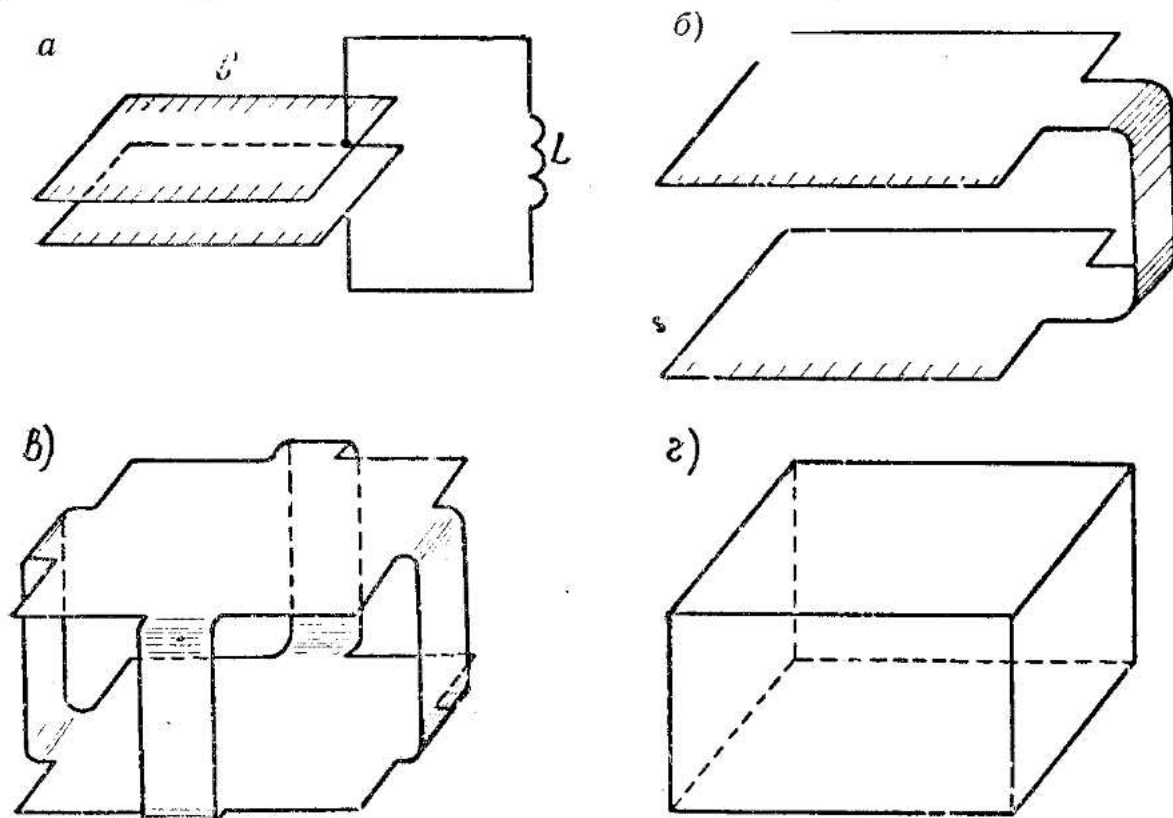


Рис. 82.1

Например, при частоте 1500 Мгц ($\lambda = 20$ см) входное сопротивление двух отрезков медного провода длиной по 5 см ($\lambda : 4$), соединённых концами, равно очень большой величине и, наоборот, те же два отрезка проволоки, концы которых разомкнуты, имеют

входное сопротивление, практически равное нулю, как это следует из теории длинных линий (см. § 63).

Рассмотрим простую колебательную цепь, состоящую из конденсатора и индуктивности (рис. 82.1 а). Желая уменьшить собственную длину волны цепи, мы от катушки индуктивности перейдём к ленте, соединяющей раздвинутые пластины конденсатора (рис. 82.1 б); затем — к ряду параллельно включённых лент (рис. 82.1 в) и, наконец, — к замкнутой со всех сторон полости (объёмному резонатору, см. рис. 82.1 г).

Возбуждение такого объёмного резонатора может быть осуществлено с помощью петли (магнитного диполя) или электрического диполя, введённых внутрь определённым образом и питаемых высокой частотой (см. конец § 74).

Можно и по-иному представить картину электромагнитного процесса в объёмном резонаторе. Электромагнитные колебания в объёме, ограниченном со всех сторон проводящими стенками, можно рассматривать как результат наложения многократно отражённых от этих стенок электромагнитных волн.

Такое многократное отражение приводит к установлению в объёме резонатора системы стоячих волн.

В технике высоких частот объёмный резонатор имеет существенные преимущества сравнительно с обычной резонансной цепью. У объёмного резонатора отсутствуют потери на излучение — электромагнитное поле, возбуждённое в замкнутой полости резонатора, полностью экранировано от внешнего пространства стенками резонатора.

Кроме того, токи проводимости, возникающие в стенках, испытывают гораздо меньшее затухание сравнительно с токами в проводах резонансной цепи с сосредоточенными или распределёнными параметрами. Сама конструкция объёмного резонатора (металлическая оболочка) механически компактна и прочна и может нести соответствующую механическую нагрузку.

В отличие от простой резонансной цепи с сосредоточенными параметрами, имеющей одну собственную резонансную частоту, объёмный резонатор (как и любая резонансная система с распределёнными параметрами, например, длинная линия) имеет бесконечное множество собственных частот, с которыми в нём могут возникать свободные электромагнитные колебания.

Рассчитаем поле в прямоугольном объёмном резонаторе, возбуждённом, например, электрическим вибратором (см. рис. 82.2).

Расположим электрический вибратор параллельно оси z . Рассчитаем «электрический» вектор Герца. Как и в предыдущих случаях, вектор Герца будет иметь одну компоненту $\Gamma = \Gamma_z$.

Его комплексная амплитуда должна удовлетворять волновому уравнению, приведённому в § 74,

$$\frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{r}}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{r} = 0. \quad (82.1)$$

Положим $\dot{r} = \Psi(x, y, z) = XYZ$. Функции X, Y, Z можно определить по ф-лам (74.8):

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + k_3^2 Z = 0; \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_1^2 X = 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_2^2 Y = 0, \quad (82.2)$$

где вместо β_z введено, для симметрии, обозначение k_3 .

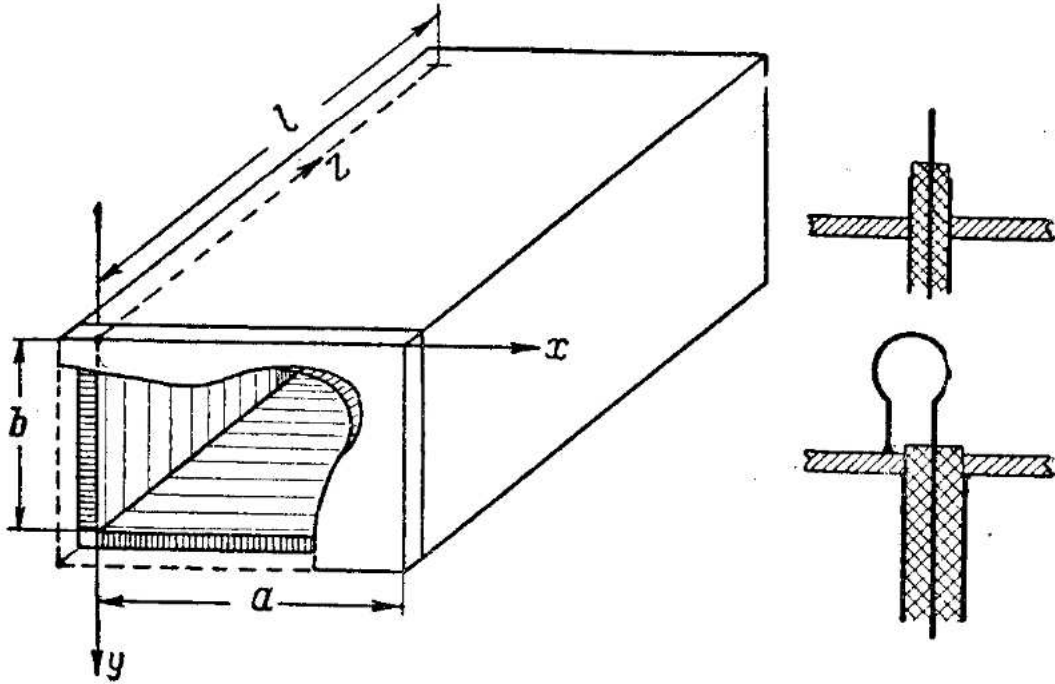


Рис. 82.2

Очевидно,

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \beta^2. \quad (82.3)$$

Комплексная амплитуда вектора Герца будет равна

$$\dot{r} = \Gamma_0 \sin(k_1 x + \varphi) \sin(k_2 y + \psi) \sin(k_3 z + \vartheta). \quad (82.4)$$

Шесть постоянных интегрирования ($k_1, k_2, k_3, \varphi, \psi, \vartheta$) определим из граничных условий. На поверхности стенок объёмного резонатора $E_\tau = 0$ и $H_n = 0$.

Следовательно,

$$x = 0, a \begin{cases} E_y = E_z = 0 \\ H_x = 0 \end{cases}, \quad (82.5)$$

$$y = 0, b \begin{cases} E_x = E_z = 0 \\ H_y = 0 \end{cases}, \quad (82.6)$$

$$z = 0, l \begin{cases} E_x = E_y = 0 \\ H_z = 0 \end{cases}. \quad (82.7)$$

Выразим комплексные амплитуды компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в функции «электрического» вектора $\dot{\Gamma}$ в прямоугольных координатах по формулам § 43, проведя расчёт аналогично выводу ф-л (76.6) и (76.8). Мы получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_x &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}}{\partial x \partial z}, \\ \dot{\mathcal{E}}_y &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}}{\partial y \partial z}, \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \frac{\partial^2 \dot{\Gamma}}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{\Gamma}_z, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathcal{H}_x &= i \omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial y} \\ \mathcal{H}_y &= i \omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial x} \\ \mathcal{H}_z &= 0 \end{aligned} \quad (82.8)$$

Граничные условия (82.5) для $x=0, a$ требуют обращения в нуль E_y, E_z и H_x . Эти компоненты определены дифференцированием вектора $\dot{\Gamma}$ по y и z (не по x !), поэтому они удовлетворяются, если для указанных граничных условий ($x=0, a$) $\dot{\Gamma}$ обращается в нуль. На том же основании, т. е., что $\dot{\mathcal{E}}_x, \dot{\mathcal{E}}_z$ и $\dot{\mathcal{H}}_y$, входящие в граничные условия (82.6), определены производными от $\dot{\Gamma}$ по x и z (не по y !), обращение $\dot{\Gamma}$ в нуль при $y=0, b$ удовлетворит граничным условиям (82.6). Граничные условия для $z=0, l$ требуют обращения в нуль E_x, E_y и H_z ; H_z тождественно равно нулю, а E_y и E_x определяются дифференцированием $\dot{\Gamma}$ по z , следовательно, граничные условия для z удовлетворятся, если при $z=0, l$ обращается в нуль $\frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial z}$.

Если при $x=0, a$ и $y=0, b$ вектор $\dot{\Gamma}$ обращается в нуль, то и величина $\frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial z}$ также будет равна нулю и наоборот.

Следовательно, граничные условия (82.5, 82.6 и 82.7) будут удовлетворены, если при значениях x, y, z , указанных в этих условиях, $\frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial z} = 0$;

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, a \\ y &= 0, b \\ z &= 0, l \end{aligned} \right\} \frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial z} = 0. \quad (82.9)$$

На этом примере мы ещё раз убеждаемся в большом удобстве для расчёта электромагнитного поля вектора Герца.

Так как

$$\frac{\partial \dot{\Gamma}}{\partial z} = \Gamma_0 k_3 \sin(k_1 x + \varphi) \sin(k_2 y + \psi) \cos(k_3 z + \vartheta),$$

то, чтобы удовлетворить условиям (82.9), должно быть

$$\varphi = 0, \psi = 0, \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$k_1 = \frac{m\pi}{a}, k_2 = \frac{n\pi}{b}, k_3 = \frac{p\pi}{l},$$

где m, n, p — целые числа.

Итак,

$$\dot{r} = \Gamma_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \quad (82.10)$$

По ф-лам (82.8) рассчитаем комплексные амплитуды составляющих поля $E_{mnp} = TM_{mnp}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_x &= -\Gamma_0 \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{l} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z \\ \dot{\mathcal{E}}_y &= -\Gamma_0 \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{l} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \Gamma_0 \left[\beta^2 - \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z \\ \dot{\mathcal{H}}_x &= i \Gamma_0 \omega \varepsilon_a \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z \\ \dot{\mathcal{H}}_y &= -i \Gamma_0 \omega \varepsilon_a \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z \end{aligned} \right\}. \quad (82.11)$$

Чтобы для заданных частот объёмный резонатор имел наименьшие размеры, надо найти наименьшие значения параметров m, n, p . Нетрудно видеть, что тройки чисел $(0, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(1, 0, 1)$; $(0, 1, 1)$ обращают тождественно все компоненты в нуль. Наименьшие значения m, n, p , не обращающие тождественно поля в нуль, будут $(1, 1, 0)$:

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 \\ n &= 1 \\ p &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (82.12)$$

Компоненты поля E_{110} будут:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= 0 \\ \dot{E}_y &= 0 \\ \dot{E}_z &= \dot{\Gamma}_0 \beta^2 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \\ \dot{\mathcal{H}}_x &= i \Gamma_0 \frac{\omega \varepsilon_0 \pi}{b} \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \\ \dot{\mathcal{H}}_y &= -i \Gamma_0 \frac{\omega \varepsilon_0 \pi}{a} \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (82.13)$$

Картина распределения амплитуд E и H для этого поля приведена на рис. 82.3 а, б, в.

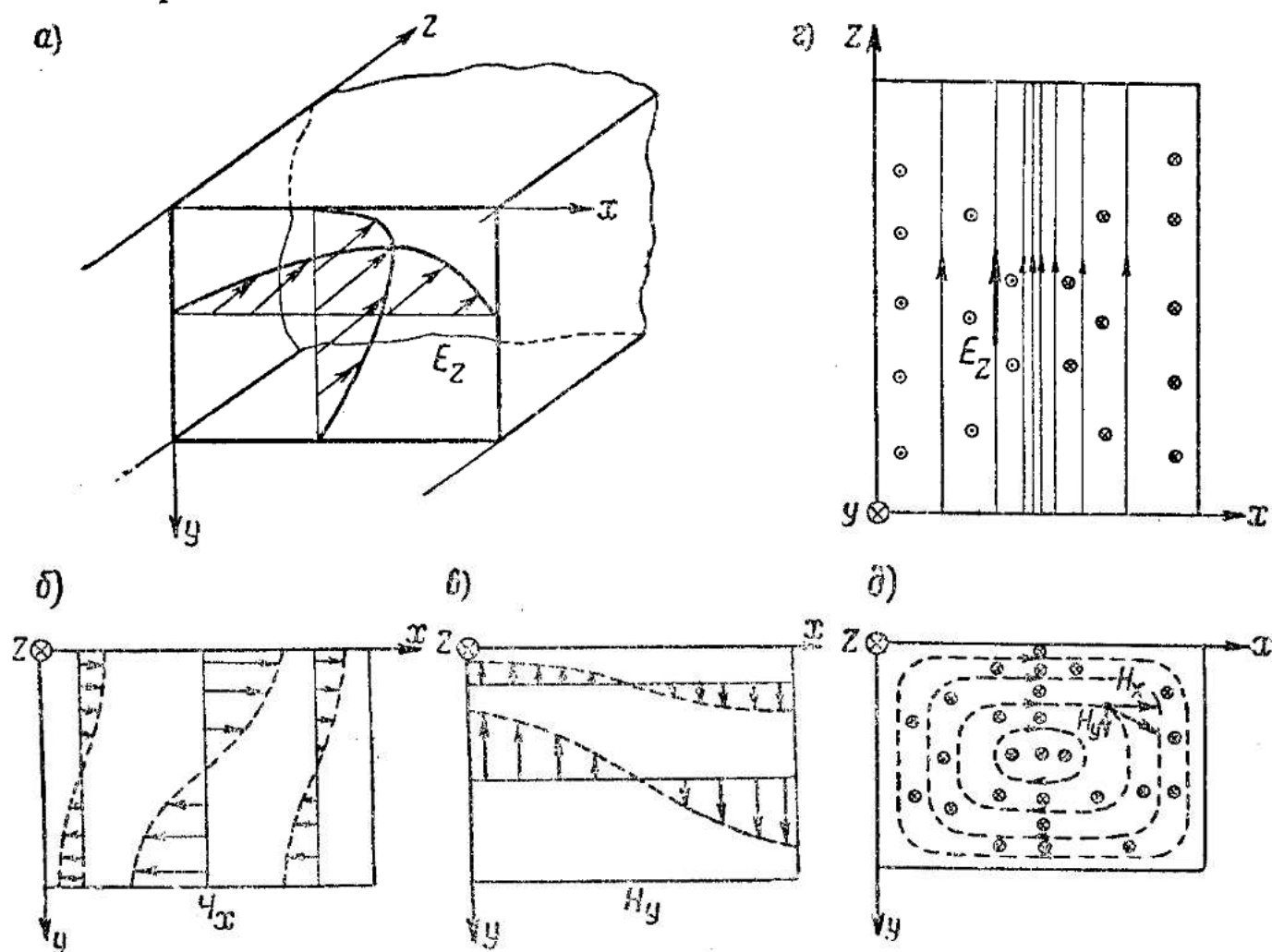


Рис. 82.3

На этих рисунках приведены картины распределения амплитуд составляющих E_z , H_x и H_y для произвольного сечения объёмного резонатора, перпендикулярного оси z . Эти картины по оси z остаются неизменными, так как компоненты поля E_{110} от z не зависят.

Возвращаясь к аналогии, развитой в начале параграфа (см. рис. 82.1), можно отметить, что для рассмотренного частного случая поля, роль обкладок ёмкости играют стенки, перпендикулярные оси z , а индуктивности — стенки, параллельные z . Картина векторных линий показана на рис. 82.3 z, d . Колебания электромагнитного поля, возбуждённого в объёмном резонаторе, являются резонансными колебаниями резонатора.

При отключении внешнего источника возбуждения возникающие собственные колебания затухают за счёт потерь в стенках резонатора. В рассмотренном нами идеальном случае (стенки резонатора без потерь, $\sigma = \infty$) собственные колебания должны продолжаться неопределённо долго. Их частота (собственная частота незатухающих колебаний объёмного резонатора или резонансная частота) может быть рассчитана по ф-ле (82.3):

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} f = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

Подставим «поперечные» волновые числа из ф-л (82.10) и получим

$$f_{рез} = f_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}. \quad (82.14)$$

Из этой формулы очевидно, что множество собственных частот объёмного резонатора (спектр частот) является дискретным множеством (спектр линейчатый), так как эти частоты определяются тройкой целых чисел m, n, p .

Источник возбуждения резонатора может, конечно, иметь частоту колебаний, отличную от любой из собственных резонансных частот резонатора. При действии такого источника в объёмном резонаторе возникают вынужденные колебания с частотой источника. Очевидно, возможна настройка внешнего источника на любую собственную частоту резонатора и, наоборот, резонатор можно настроить на данную частоту. Настройка резонатора может быть осуществлена изменением размеров a, b, l . Существует множество конструктивных приёмов решения этой задачи.

Из множества собственных частот объёмного резонатора на практике пользуются обычно самыми низкими частотами. Для режима «электрического» возбуждения, рассмотренного выше (в этом режиме в резонаторе возникают волны $E = TM$, у которых магнитное поле при любых значениях m, n и p имеет только поперечные компоненты и $H_z = 0$) самая низкая частота получается [см. ф-лу (82.12)] при

$$m = 1, n = 1, p = 0$$

и будет равна

$$f_{110} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{c}{2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}, \quad (82.15)$$

причём эта наименьшая частота будет наименьшей, если $a > l$, $b > l$.

Для режима «магнитного» возбуждения (в этом режиме в резонаторе возникают волны $H \equiv TE$, у которых электрическое поле при любых значениях m , n и p имеет только поперечные компоненты и $E_z = 0$) самая низкая частота получается при

$$m = 1, n = 0, p = 1,$$

$$m = 0, n = 1, p = 1$$

и будет равна

$$f_{101} = \frac{c}{2} \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{al},$$

$$f_{011} = \frac{c}{2} \frac{\sqrt{b^2 + l^2}}{bl}. \quad (82.16)$$

В практических конструкциях чаще всего применяют объёмные резонаторы в форме тел вращения. Особенно большое применение находят цилиндрические и тороидальные резонаторы.

Принципиальная сторона явлений, происходящих в объёмных резонаторах этих форм, та же, что и в исследованных прямоугольных. Для расчёта поля в цилиндрическом резонаторе можно воспользоваться вектором Герца, вычисленным для цилиндрических волноводов.

Конструкции и картины некоторых типов полей в цилиндрическом и тороидальном резонаторах приведены на рис. 82.4.

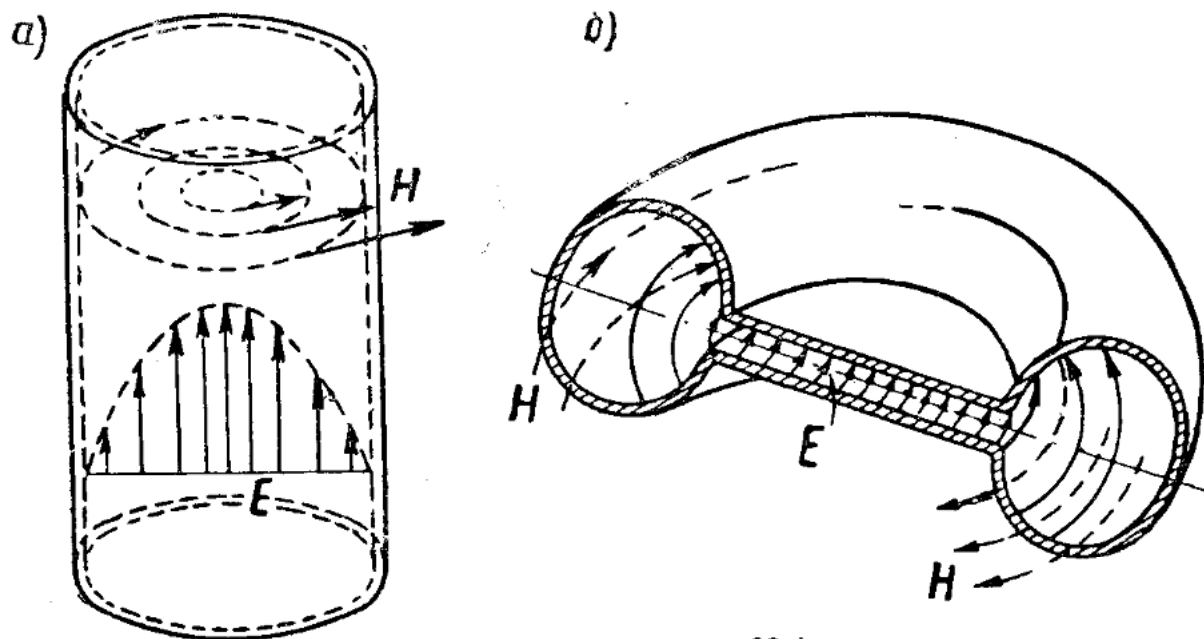


Рис. 82.4

СВОДКА ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Векторная алгебра

Представление вектора:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\circ A = x^\circ A_x + y^\circ A_y + z^\circ A_z; \quad A_l = \mathbf{l}^\circ \cdot \mathbf{A} = A \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{l}}), \quad (\text{П.1})$$

где $\mathbf{A}^\circ, x^\circ, y^\circ, z^\circ, \mathbf{l}^\circ$ — единичные векторы и A_x, A_y, A_z, A_l — проекции вектора $\mathbf{A}$ на направление осей x, y, z, l .

Скалярное произведение 2 векторов

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = AB_A = A_B \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{П.2})$$

где A_B — проекция $\mathbf{A}$ на направление $\mathbf{B}$ и B_A — проекция $\mathbf{B}$ на направлении $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{П.3})$$

Векторное произведение двух векторов

$$[\mathbf{AB}] \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B} = n^\circ AB \sin(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} x^\circ & y^\circ & z^\circ \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (\text{П.4})$$

где n° — единичный вектор нормали к плоскости векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, образующий с векторами $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ правовинтовую систему. Проекции векторного произведения на оси координат:

$$[\mathbf{AB}]_x = A_y B_z - A_z B_y; \quad [\mathbf{AB}]_y = A_z B_x - A_x B_z; \quad [\mathbf{AB}]_z = A_x B_y - A_y B_x, \quad (\text{П.5})$$

$$[\mathbf{AB}] = -[\mathbf{BA}]. \quad (\text{П.6})$$

Тройное скалярное произведение:

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{BC}] = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{AB}] = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{CA}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \pm V, \quad (\text{П.7})$$

где V — объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.
Двойное векторное произведение

$$[\mathbf{A} [\mathbf{BC}]] = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{П.8})$$

Условие ортогональности двух векторов

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad |[\mathbf{AB}]| = AB. \quad (\text{П.9})$$

Условие коллинеарности двух векторов

$$[\mathbf{AB}] = 0 \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB. \quad (\text{П.10})$$

Векторный анализ

Пусть скаляры Ψ, φ и векторы $\mathbf{G}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ — функции точки (т. е. функции 3 пространственных координат).

Поток вектора $\mathbf{G}$ сквозь поверхность S

$$\Psi_G = \int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_S G \cdot dS \cdot \cos(\widehat{\mathbf{G}, d\mathbf{S}}), \quad (\text{П.11})$$

Поток вектора $\mathbf{G}$ сквозь замкнутую поверхность

$$\Psi_G = \oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{П.12})$$

Дивергенция вектора $\mathbf{G}$

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}. \quad (\text{П.13})$$

Теорема Остроградского

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{G} \cdot dV \quad (\text{П.14})$$

(в этих интегралах замкнутая поверхность S ограничивает объём V).

Градиент скаляра φ

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \varphi \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \mathbf{n}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (\text{П.15})$$

где $\mathbf{n}^\circ$ — единичный вектор нормали к поверхности уровня: $\varphi = \text{const.}$

Проекция градиента на произвольное направление $\mathbf{l}^\circ$

$$\operatorname{grad}_l \varphi = (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{l}^\circ = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}^\circ \cdot \mathbf{l}^\circ = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(\widehat{\mathbf{l}^\circ \mathbf{n}^\circ}) = \frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad (\text{П.16})$$

где

$$dl = dn \frac{1}{(\cos(\widehat{\mathbf{l}^\circ \mathbf{n}^\circ}))}.$$

Условие потенциальности поля вектора $\mathbf{G}$

$$\oint_l \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = 0; \quad \mathbf{G} = \operatorname{grad} \varphi; \quad G_l = \frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad (\text{П.17})$$

где l — любой замкнутый контур в поле вектора $\mathbf{G}$.

Уравнение Лапласа

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (\text{П.18})$$

Уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \eta, \quad (\text{П.19})$$

где η — функция координат.

Условие непотенциальности поля вектора $\mathbf{A}$ (в частности, признак того, что поле $\mathbf{A}$ — вихревое)

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \neq 0. \quad (\text{П.20})$$

Ротор (кёрль) вектора $\mathbf{A}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \operatorname{curl} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint [d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}]}{\Delta V}. \quad (\text{П.21})$$

Проекция ротора (кёрля) вектора $\mathbf{A}$ на направление нормали ($\mathbf{n}^\circ$) к площадке ΔS

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} \equiv \operatorname{curl}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}. \quad (\text{П.22})$$

Теорема Стокса

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{П.23})$$

(в этих интегралах замкнутый контур l ограничивает поверхность S).

Оператор Гамильтона (набла) ∇ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \varphi &= \text{grad } \varphi \\ \nabla \cdot \mathbf{G} &= \text{div } \mathbf{G} \\ [\nabla \mathbf{A}] &= \text{rot } \mathbf{A} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П.24})$$

Оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \Delta$

$$\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi = \text{div} \cdot \text{grad } \varphi.$$

Векторные расчёты с операторами Гамильтона и Лапласа

$$\text{grad } (\varphi \cdot \psi) = \nabla (\varphi \cdot \psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi = \varphi \cdot \text{grad } \psi + \psi \text{grad } \varphi, \quad (\text{П.25})$$

$$\text{div } (\varphi \cdot \mathbf{G}) = \nabla (\varphi \cdot \mathbf{G}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \varphi = \varphi \cdot \text{div } \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \text{grad } \varphi, \quad (\text{П.26})$$

$$\text{div } [\mathbf{A} \mathbf{B}] = \nabla [\mathbf{A} \mathbf{B}] = \mathbf{B} [\nabla \mathbf{A}] - \mathbf{A} [\nabla \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}, \quad (\text{П.27})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = [\nabla [\nabla \mathbf{A}]] = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (\text{П.28})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}, \quad (\text{П.29})$$

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0; \quad \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0. \quad (\text{П.30})$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМАХ

Координатная система	Прямолинейная	Цилиндрическая	Сферическая
Операция			
Обозначение координат	x, y, z	R, χ, z	R, θ, χ (П.31)
Линейные приращения	dx, dy, dz	$dR, R d\chi, dz$	$dR, R d\theta, R \sin \theta d\chi$ (П.32)
Единичные векторы (орты)	$\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{z}^\circ$	$\mathbf{R}^\circ, \chi^\circ, \mathbf{z}^\circ$	$\mathbf{R}^\circ, \theta^\circ, \chi^\circ$ (П.33)
Элементарные объёмы $dV =$	$dx \cdot dy \cdot dz$	$dR \cdot R d\chi \cdot dz$	$dR \cdot R d\theta \cdot R \sin \theta \cdot d\chi$ (П.34)
Градиент $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi =$	$\mathbf{x}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$\mathbf{R}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \chi^\circ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} + \mathbf{z}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$\mathbf{R}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R} \left\{ \theta^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \chi^\circ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \right\}$ (П.35)
Дивергенция $\text{div } \mathbf{G} = \nabla \cdot \mathbf{G} =$	$\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$	$\frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} (R G_R) + \frac{\partial G_\chi}{\partial \chi} \right\} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$	$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 G_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \times \sin \theta) + \frac{\partial G_\chi}{\partial \chi} \right\}$ (П.36)

Координатная система	Прямолинейная	Цилиндрическая	Сферическая
Операция			
Ротор $\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] =$	$\begin{bmatrix} x^\circ, y^\circ, z^\circ \\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x, A_y, A_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} R^\circ, \chi^\circ, \frac{1}{R} z^\circ \\ \frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial \chi}, \frac{\partial}{\partial z} \\ A_R, R A_\chi, A_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \sin \theta} R^\circ, \frac{1}{R \sin \theta} \theta^\circ, \\ \frac{1}{R} \chi^\circ \\ \left \frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \chi} \right. \\ A_R, R A_\theta, R \sin \theta \cdot A_\chi \end{bmatrix}$ (П.37)
Оператор Лапласа и скаляр: $\text{div grad } \varphi =$ $= \nabla^2 \varphi =$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) +$ $+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \right.$ $+ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) +$ $\left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} \right\}$ (П.38)
Оператор Лапласа и вектор: $\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad } \times$ $\times \text{div } \mathbf{A} -$ $- \text{rot rot } \mathbf{A} =$	$x^\circ \nabla^2 A_x +$ $+ y^\circ \nabla^2 A_y + z^\circ \nabla^2 A_z$	$R^\circ \left\{ \nabla^2 A_R - \right.$ $- \frac{1}{R^2} \left(A_R + \right.$ $+ 2 \frac{\partial A_\chi}{\partial \chi} \left. \right\} +$ $+ \chi^\circ \left\{ \nabla^2 A_\chi - \right.$ $- \frac{1}{R^2} \left(A_\chi - \right.$ $- 2 \frac{\partial A_R}{\partial \chi} \left. \right\} +$ $+ z^\circ \nabla^2 A_z$	$-$ (П.39)

Общий вид векторных комплексов

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}(x, y, z, t) &= x^\circ A_{0x} e^{i(\omega t + \psi_x)} + y^\circ A_{0y} e^{i(\omega t + \psi_y)} + z^\circ A_{0z} e^{i(\omega t + \psi_z)} = \\ &= \{x^\circ A_{0x} e^{i\psi_x} + y^\circ A_{0y} e^{i\psi_y} + z^\circ A_{0z} e^{i\psi_z}\} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{П.40})$$

Здесь выражение в скобках — комплексная амплитуда. Так как ψ_x, ψ_y, ψ_z вообще говоря, различны, то компоненты вектора $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ будут пульсировать с различными фазами. Вектор $\mathbf{A}$ может и не быть линейно поляризованным.

СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

С 1963 г. в СССР стандартизована «Международная система единиц» — «СИ» (ГОСТ 9867—61) и в электротехнике стандартизована система обозначений (ГОСТ 1494—61).

В системе «СИ», в основном совпадающей с системой МКСА, за основные единицы приняты:

1. Единица длины — 1 метр = $1\,650\,763,73\lambda$ (оранжевая) при переходе от $2p_{10}$ к $5d_5$ у Kr^{86} , т. е. метр выражен определённым числом длин волны, излучаемой определённым изотопом газа криптона 86 в определённой части (оранжевой) спектра. Этот метр практически совпадает с платино-иридиевым эталоном, хранящимся в Севре под Парижем.

2. Единица времени — 1 секунда = $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$ части тропического года для 1900 г., 0 янв. в 12 час., практически совпадает с секундой, равной $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ части средних солнечных суток.

3. Единица массы — 1 килограмм, равный массе платино-иридиевого эталона, хранящегося в Севре и равного (приблизительно) массе 1 литра воды при 4°C .

4. Единица электрического тока — 1 ампер, сила неизменяющегося тока, который, будучи поддерживаем в двух параллельных тонких проводках, находящихся на расстоянии 1 метра, вызывал бы силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ ньютон на метр проводника.

Все остальные единицы являются производными (например, ед. силы = $1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}^2} = 1 \text{ н} = \frac{1000}{9,81} \approx 102 \text{ г силы}$) и определяются из основных физических законов (например, единица силы из второго закона Ньютона, единица сопротивления из закона Ома и т. д.).

Из основных законов электромагнетизма определяются: электрическая постоянная ϵ_0 — из закона Кулона $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi c^2 10^{-7}} \approx 8,86 \cdot 10^{-12}, \frac{\phi}{\text{м}};$$

магнитная постоянная — из закона Ампера взаимодействия двух параллельных токов $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{il I}{a}$:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{гн}}{\text{м}} \approx 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{гн}}{\text{м}}.$$

Наряду с системой «СИ» допускается система СГС (система Гаусса — сантиметр — грамм — секунда), в которой основными единицами служат только механические единицы:

единица длины — 1 сантиметр,
единица массы — 1 грамм,
единица времени — 1 секунда.

Производной единицей будет единица силы:

$$\text{единица силы} = 1 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{сек}^2} = 1 \text{ дина}.$$

Все электромагнитные единицы в этой системе выражаются через механические. Так, например, из закона Кулона определяется единица заряда:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2} \text{ при } q_1 = q_2 = q; \quad q = R \sqrt{F};$$

по размерности $[q] = \frac{1}{2} \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^{-1}}$ и по величине $1 \text{ q (СГС)} = \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ К.}$

Основные уравнения электромагнетизма в системе Гаусса (нерационализированной, т. е. при записи закона Кулона и закона Био — Савара без 4π в знаменателе), будут:

1. Закон Кулона: $F = \frac{q_1 q_2}{R^2};$

2. Теорема Гаусса: $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q;$

3. Вектор смещения $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E};$

4. Вектор поляризации $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E};$

5. Уравнение Лапласа — Пуассона: $\text{grad div } \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon};$

6. Закон Био — Савара: $d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{I d\mathbf{l} \sin \alpha}{R^2};$

7. Закон Ампера: $d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}];$

8. Закон полного тока $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I;$

9. Вектор магнитной индукции $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{J} = \mu \mathbf{H};$

10. Вектор намагниченности $\mathbf{J} = \chi_m \mathbf{H};$

11. 1-е уравнение Максвелла: $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \delta + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};$

12. 2-е уравнение Максвелла: $c \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}.$

В системе Гаусса: электрическая постоянная $\epsilon_0 = 1,$

магнитная постоянная $\mu_0 = 1.$

Однако всякий раз, когда уравнение связывает магнитную величину с электрическим током (например, ур-ния 6, 7, 8, 11), то у тока появляется множитель $\frac{1}{c}$, если же магнитная величина связывается с электрическим напряжением (или эдс) (например, ур-ние 12), то у электрического напряжения появляется множитель c , где $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$ — скорость света.

ТАБЛИЦА ЕДИНИЦ В СИСТЕМЕ «СИ» И ГАУССА (НЕРАЦИОНАЛИЗИРОВАННАЯ)

Наименование величины	Обозначение	Единица измерения	Сокращённое обозначение		Содержит единиц системы СГС (Гаусса)
			русское	международное	
Длина	l	метр	$м$	m	10^2 см
Время	t	секунда	$сек$	S	1 сек
Масса	m	килограмм	$кг$	Kg	10^3 г
Сила	F	ньютон	$н$	N	10^5 дин
Энергия	W	джоуль	$дж$	J	10^7 эрг
Мощность	P	ватт	$вт$	W	$10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}$
Частота	f	герц	$гц$	Hz	1 гц
Сила тока, ток	I, i	ампер	$а$	A	$3 \cdot 10^9$
Плотность тока	δ	ампер на кв. метр	$а/м^2$	A/m^2	$3 \cdot 10^5$
Количество электричества	Q, q	кулон	$к$	C	$3 \cdot 10^9$
Электрическое напряжение разность потенциалов	$U, \varphi_1 - \varphi_2$	вольт	$в$	V	$\frac{1}{300}$
Напряжённость электрического поля	E	вольт на метр	$в/м$	V/m	$\frac{1}{3} 10^{-4}$
Поляризованность (вектор поляризации)	P	кулон на кв. метр	$к/м^2$	C/m^2	$3 \cdot 10^5$
Электрическая ёмкость	C	фарада	ϕ	F	$9 \cdot 10^{11} \text{ (см)}$
Электрическая постоянная	ϵ_0	фарада на метр	$\phi/м$	F/m	$4\pi \cdot 9 \cdot 10^9$
Электрическое смещение	D	кулон на кв. метр	$к/м^2$	C/m^2	$3 \cdot 10^5$
Электрическое сопротивление	r	ом	$ом$	Ω	$\frac{1}{9} 10^{-11}$
Удельное эл. сопротивление	ρ	ом., умнож. на метр	$ом \cdot м$	Ωm	$\frac{1}{9} 10^{-9}$
Электрическая проводимость	g	сименс	$1/ом$	S	$9 \cdot 10^{11}$
Электрическая восприимчивость	$\kappa_э$	—	—	—	$1/4\pi$
Магнитный поток	Φ	вебер	$вб$	Wb	10^8 максвелл
Магнитная индукция	B	тесла	$тл$	T	10^4 гаусс
Намагниченность (интенсивность намагничивания)	J	ампер на метр	$а/м$	A/m	10^{-3}

Наименование величины	Обозначение	Единица измерения	Сокращённое обозначение		Содержит единиц системы СГС (Гаусса)
			русское	международное	
Магнитная постоянная	μ_0	генри на метр	гн/м	H/m	$10^7/4\pi$
Напряжённость магнитного поля	H	ампер на метр	а/м	A/m	$4\pi \cdot 10^{-3}$ эрстед
Намагничивающая сила	$A\omega$	ампер-виток	а	A	$4\pi \cdot 10^{-1}$ гильберт
Магнитное сопротивление	r_m	единица на генри	1/гн	1/H	$4\pi \cdot 10^{-9}$
Индуктивность и взаимная индуктивность	L, M	генри	гн	H	10^9 (см)
Векторный потенциал	A	вебер на метр	вб/м	Wb/m	$10^6 \frac{\text{максвелл}}{\text{см}}$
Вектор Пойнтинга	П	ватт на кв. метр	вт/м ²	W/m ²	$4\pi/3 \cdot 10^{13} \frac{\text{эрг}}{\text{сек} \cdot \text{см}^2}$
Магнитная восприимчивость	k_m	—	—	—	$1/4\pi$

1. Максвелл Д. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. Гостехиздат, 1952.
2. Лоренц Г. А. Теория электронов и её применение к явлениям света и теплового излучения. Гостехиздат, 1956.
3. Абрагам — Беккер. Теория электричества. ОНТИ, 1936.
4. Беккер Р. Электронная теория. ОНТИ, 1936.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, 1956.
6. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
7. Смайт В. Электростатика и электродинамика. ИЛ, 1954.
8. Пановский В. и Филиппс М. Классическая электродинамика. Физматгиз, 1963.
9. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. Изд. «Высшая школа», 1961.
10. Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники, ч. III. Госэнергоиздат, 1959.
11. Нетушил А. В. и Поливанов К. М. Теория электромагнитного поля. Ч. 3. Госэнергоиздат, 1956.
12. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. Госэнергоиздат, 1960.
13. Брунов Б. Я. и др. Теория электромагнитного поля. Госэнергоиздат, 1962.
14. Измайлов С. Б. Курс электродинамики. Учпедгиз, 1962.
15. Куполян С. Д. Теоретические основы электротехники. Ч. III, Госэнергоиздат, 1963.
16. Семёнов А. А. Теория электромагнитных волн. Изд. Московского университета, 1962.
17. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. «Советское радио», 1957.
18. Гольдштейн Л. Д. и Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. Изд. «Советское радио», 1956.
19. Рамо С. и Уиннери. Поля и волны в современной радиотехнике. Гостехиздат, 1950.
20. Бухгольц Г. Расчёт электрических и магнитных полей. Изд. иностранной литературы, 1961.
21. Говорков В. А. и Куполян С. Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. Изд. «Высшая школа».
22. Батыгин В. В. и Топтыгин И. Н. Сборник задач по электромеханике. Физматгиз, 1962.
23. 50 лет волн Герца. Изд. АН СССР, 1938.
24. Из предистории радио. Изд. АН СССР, 1948.

	Стр.
Предисловие	5
Введение	7
В.1. Электромагнитное поле и его материальность	7
В.2. Краткая история развития учения об электромагнитном поле	9

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава I. Электростатическое поле

§ 1. Поле различно распределённых зарядов в вакууме	24
§ 2. Теорема Гаусса. Основные дифференциальные уравнения электростатического поля	27
§ 3. Электростатическое поле в диэлектрике	30
§ 4. Потенциал электростатического поля	34
§ 5. Потенциал поля различно распределённых зарядов	37
§ 6. Электростатическое поле в присутствии проводников. Понятие о методе зеркальных изображений	42
§ 7. Уравнение Лапласа—Пуассона. Граничные условия	46
§ 8. Существование и единственность решения уравнения Лапласа—Пуассона	50
§ 9. Ёмкость и конденсатор	51
§ 10. Ёмкости, заряды и потенциалы системы изолированных проводящих тел	54
§ 11. Энергия электростатического поля и её пространственное распределение	56
§ 12. Электростатические силы	61

Глава II. Стационарное электрическое поле в проводящей среде

§ 13. Закон сохранения электрического заряда	65
§ 14. Закон Джоуля—Ленца	68
§ 15. Стационарное электрическое поле	69
§ 16. Время релаксации	70
§ 17. Сторонние силы, эдс. Закон Ома	71
§ 18. Интегральная форма закона Ома. Моделирование электростатического поля	73

Глава III. Стационарное магнитное поле

§ 19. Силовое действие магнитного поля. Законы Лоренца, Ампера и Био—Савара	75
§ 20. Закон полного тока	78
§ 21. Стационарное магнитное поле в магнетиках	81
§ 22. Непрерывность магнитного потока. Граничные условия	87
§ 23. Скалярный потенциал магнитного поля	90
§ 24. Дифференциальная форма закона полного тока. Векторный потенциал	91
§ 25. Индуктивность и взаимоиндуктивность	96
§ 26. Магнитная масса. Эквивалентность магнитного листка и замкнутого тока	100

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава IV. Уравнения Максвелла

§ 27. Обобщение понятия электрического тока	104
§ 28. Ток смещения	105

	Стр.
§ 29. Первое уравнение Максвелла	110
§ 30. Закон электромагнитной индукции	113
§ 31. Вихревое (индуцированное) электрическое поле	115
§ 32. Второе уравнение Максвелла. Квазистационарные процессы.	119

Глава V. Энергия и силы магнитного поля

§ 33. Преобразование энергии в магнитно-связанных цепях	122
§ 34. Энергия системы магнитно-связанных цепей и объёмно распределённых токов	128
§ 35. Пространственное распределение магнитной энергии и её объёмная плотность	130
§ 36. Силы магнитного поля. Расчёт потокоцеплений и индуктивностей	132

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава VI. Явления излучения и распространения радиоволн

§ 37. Открытие явлений излучения и распространения радиоволн. Опыты Герца, Лебедева. Осуществление радиопередачи Поповым	134
§ 38. Полная система уравнений Максвелла. Граничные условия	139
§ 39. Физическое содержание уравнений Максвелла. Правило Ленца	145

Глава VII. Интегрирование уравнений Максвелла. Электродинамические потенциалы

§ 40. Волновые уравнения. Определение электродинамических потенциалов	151
§ 41. Электродинамические потенциалы. Уравнение Даламбера	154
§ 42. Решение волновых уравнений. Запаздывающие потенциалы	157
§ 43. «Электрический» вектор Герца	165
§ 44. «Магнитный» вектор Герца. Принцип двойственности	170

Глава VIII. Распространение электромагнитной энергии

§ 45. Развитие учения о сохранении, преобразовании и потоке энергии. Теорема Умова	175
§ 46. Поток мощности распространяющегося электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга	178
§ 47. Анализ картин распространения электромагнитной энергии	180

ЧАСТЬ ЧЕТВЁРТАЯ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ИЗЛУЧЕНИЕ И ПЕРЕДАЧА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Глава IX. Распространение плоских электромагнитных волн в неограниченной среде

§ 48. Распространение однородной плоской волны в идеальной среде	184
§ 49. Плоско-поляризованные волны	188
§ 50. Гармонические плоские волны	192
§ 51. Плоская гармоническая волна в поглощающей среде. Дисперсия	199
§ 52. Аналогия явлений распространения электромагнитных волн в пространстве и в длинной линии	208
§ 53. Поток мощности электромагнитной волны. Комплексный вектор Пойнтинга	209

	Стр.
§ 54. Скорость распространения в дисперсной среде	211
§ 55. Поверхностный эффект. Случай плоского проводника	216
§ 56. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе	220
Глава X. Излучение электромагнитных волн	
§ 57. Расчёт поля элементарных излучателей — электрического и магнитного диполей Герца	227
§ 58. Принцип взаимности. Лемма Лоренца. Теорема единственности	241
Глава XI. Отражение, прохождение и преломление плоских волн	
§ 59. Явления отражения, прохождения и дифракции	248
§ 60. Отражение плоской волны от поверхности плоского идеального проводника при нормальном падении	249
§ 61. Отражение и прохождение плоской волны при нормальном падении на идеальный диэлектрик	256
§ 62. Отражение от диэлектрика с проводимостью	264
§ 63. Аналогия явления отражения и прохождения плоской волны сквозь границу раздела двух диэлектриков с распространением вдоль линии, нагруженной на конце	266
§ 64. Обобщение понятия «направление распространения волны». Неоднородные плоские волны	270
§ 65. Отражение плоской волны, падающей на поверхность идеального проводника под произвольным углом	274
§ 66. Отражение и преломление плоской волны, падающей на поверхность раздела двух идеальных диэлектриков под произвольным углом	282
§ 67. Формулы Френеля	285
§ 68. Угол полной поляризации. Закон Брюстера. Явление полного отражения	286
§ 69. Преломление плоской волны при наклонном падении на поверхность поглощающей среды	287
§ 70. Преломление в оптически «плотной» или сильно поглощающей среде. Приближённые граничные условия Леонтовича	289
Глава XII. Распространение электромагнитных волн вдоль направляющих систем	
§ 71. Ленточная линия. Основная волна. Волны высших порядков. Критические условия. Дисперсия	292
§ 72. Распространение электромагнитных волн в плоском диэлектрическом слое. Поверхностные волны. Критические условия.	304
§ 73. Прямоугольные волноводы	310
§ 74. Расчёт поля в прямоугольном волноводе. Граничные условия. Возбуждение волноводов	312
§ 75. «Электрические» волны в прямоугольном волноводе ($E \parallel TM$)	318
§ 76. «Магнитные» волны в прямоугольном волноводе ($H \parallel TE$)	322
§ 77. Картины поля в прямоугольном волноводе	326
§ 78. Цилиндрические волноводы. «Электрическая» волна «E»	333
§ 79. «Магнитная» волна « H_{n1} »	340
§ 80. Коаксиальный кабель	341
§ 81. Распространение электромагнитной энергии в волноводах	348
§ 82. Объёмные резонаторы	349
Приложение I. Сводка основных формул векторной алгебры и векторного анализа	357
Приложение II. Системы единиц	361
Литература	365