С. З. КУЗЬМИН

Цифровая обработка радиолокационной информации



«СОВЕТСКОЕ РАДИО» МОСКВА - 1967

УДК 621.396 96

Книга представляет собой монографию по статистической теории первичной и вторичной обработки информации РЛС кругового обзора с помощью дискретных вычислительных устройств.

8 книге излагаются вопросы алгоритмизации процессов обработки радиолокационной информации и вопросы технической реализации этих алгоритмов на цифровых автоматах и цифровых вычислительных машинах.

Книга предназначена для широкого круга специалистов, занимающихся проектированием и эксплуатацией систем автоматической обработки радиолокационной информации, а также для аспирантов и студентов, специализирующихся в области радиолокации и автоматизации управления.

3-3.14
46-66

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблемы, возникающие перед системами управления и наблюдения за воздушными объектами, становятся все более сложными и разнообразными по мере увеличения количества этих объектов и их скоростей. В этих условиях использование операторов на радиолокационных станциях (РЛС) для визуального обнаружения воздушных объектов, определения их координат и параметров движения, становится малоэффективным.

С появлением цифровой вычислительной техники в радиолокации стало интенсивно разрабатываться новое направление, связанное с заменой индикаторных выходных устройств аппаратурой полуавтоматического и автоматического съема и обработки радиолокационной информации. Это, в свою очередь, привело к появлению новой отрасли науки и техники, получившей название цифровой обработки радиолокационной информации.

Данная книга представляет собой монографию по теории основных процессов цифровой обработки радиолокационной информации применительно к автономной двухкоординатной РЛС кругового обзора, работающей в амплитудном режиме.

Во введении дается представление о системе обработки радиолокационной информации в целом и ее отдельных частях. Здесь же обсуждаются проблемы и состояние теории цифровой обработки.

В первой главе рассматриваются элементы статистической теории обработки радиолокационных сигналов,

обсуждаются статистические критерии качества обработки и обосновывается модель системы обработки, подлежащая дальнейшему изучению. Применение статистических критериев обработки иллюстрируется конкретными примерами решения задач обнаружения и оценки параметров отраженных радиолокационных сигналов (пачек).

Во второй главе сначала излагаются результаты общей теории дискретизации случайных сигналов по времени (или другому аргументу) и амплитуде. Затем эти результаты используются для решения задачи дискретизации сигналов одноканальной импульсной РЛС. В заключение решается задача совместной оптимизации порогов и интервалов квантования и рассматриваются принципы реализации устройств для квантования сигналов по времени и амплитуде.

Третья глава посвящена изложению элементов статистической теории первичной обработки дискретизованных радиолокационных сигналов пачечной структуры. Рассматриваются вопросы абстрактного синтеза цифровых автоматов для реализации алгоритмов первичной обработки. В заключение анализируются качественные характеристики цифровых устройств первичной обработки.

Четвертая глава, самая большая в книге, посвящена изложению теории вторичной обработки радиолокационной информации, включающей в себя автоматическое обнаружение траекторий целей и автоматическое слежение за целями (автосопровождение целей). Рассматриваются простейшие алгоритмы обнаружения траекторий, а также оптимальные и инженерные (удобные с точки зрения реализации на ЦВМ) алгоритмы автосопровождения. Задачи вторичной обработки требуют для своего решения применения результатов теории импульсных систем автоматического управления. В книге используются выводы из этой теории для расчета качественных характеристик систем автосопровождения, работающих по замкнутому циклу.

Книга написана по материалам открытой отечественной и иностранной литературы.

Необходимо заметить, что в опубликованной литературе имеется только небольшое число работ, посвященных тем или иным аспектам теории и техники цифровой обработки радиолокационной информации. Поэтому при

рассмотрении проблемы в целом возникает целый ряд трудностей, связанных в первую очередь с отсутствием единой установившейся терминологии. Автор будет признателен всем, кто пришлет свои замечания и пожелания по улучшению содержания книги.

Введение

ПРИНЦИПЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Для автоматизации процессов контроля воздушного пространства и управления воздушным движением необходимо иметь исчерпывающую и непрерывную информацию о координатах и характеристиках движущихся воздушных объектов, появляющихся в заданной области пространства. Эту информацию получают, как правило, с помощью радиолокационных станций (РЛС) кругового или секторного обзора (обзорных РЛС).

В дальнейшем все движущиеся воздушные объекты, информацию о которых получают с помощью РЛС, будем называть радиолокационными целями или просто целями.

В реальных условиях слежения за множеством воздушных целей, движущихся с большими скоростями, человек не в состоянии оперативно оценивать многообразие сложившейся обстановки и производить обработку радиолокационной информации, пользуюсь только визуальными индикаторами. В связи с этим возникает проблема передачи части или всех функций человека-оператора при обработке радиолокационной информации вычислительным устройствам, т. е. проблема построения автоматизированных систем обработки радиолокационной информации.

В такого рода системах автоматизация процессов обработки радиолокационной информации может быть

частичной или полной. При частичной автоматизации строятся так называемые полуавтоматические системы обработки. Человек-оператор входит в полуавтоматическую систему как ее важнейшее органическое звено, без которого работа системы невозможна. Проектирование таких систем должно производиться с учетом специфических особенностей психологии и физиологии человека с тем, чтобы рационально распределить функции между человеком и вычислительными устройствами.

В автоматических системах обработки радиолокационной информации все этапы обработки возлагаются на вычислительные устройства. Функции человека в таких системах в основном ограничиваются наблюдением за работой системы и ее техническим обслуживанием.

Для определения путей и возможностей проектирования автоматизированных систем обработки радиолокационной информации необходимо сначала в общем плане рассмотреть задачи, подлежащие решению в таких системах. Эти задачи (применительно к обзорной РЛС) сводятся:

— обнаружению сигналов (отметок), отраженных от интересующих нас движущихся объектов (целей);

— оценке координат обнаруженных целей;

— обнаружению траекторий целей по совокупности отметок, полученных в ряде периодов обзора РЛС;

— вычислению параметров движения целей (скорости, курса и т. д.) и нахождению на этой основе сглаженных и упрежденных на некоторый отрезок времени координат.

Первые две задачи обычно называются задачами съема или первичной обработки радиолокационной информации. Остальные задачи получили название задач вторичной обработки радиолокационной информации.

В неавтоматизированной системе все перечисленные задачи первичной и вторичной обработки решаются оператором с помощью индикатора кругового (секторного) обзора и простейших вычислительных средств.

В полуавтоматической системе обработки автоматизации обычно подлежат только операции определения параметров движения целей и выработки упрежденных координат.

Эти операции носят в основном вычислительный характер и легко могут быть выполнены как с помощью

аналоговых, так и с помощью дискретных вычислительных устройств. Другие задачи обработки выполняются в этой системе оператором визуально или с помощью механизированных устройств (съемников), позволяющих повысить темп и точность визуальной обработки.

В автоматической системе обработки как первичная, так и вторичная обработка производится с помощью логических и вычислительных устройств. При этом, как правило, задачи, связанные с обработкой и кодированием информации, полученной в течение одного обзора РЛС, решаются с помощью специализированных вычислительных устройств первичной обработки (УПО), а задачи обработки траекторий целей решаются с помощью цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Объем памяти и быстродействие ЦВМ должны быть достаточными для обработки всех наблюдаемых РЛС целей в реальном масштабе времени.

Познакомимся с принципами построения автоматических и полуавтоматических систем обработки радиолокационной информации и на этой основе определим круг вопросов, подлежащих рассмотрению в данной книге.

В.1. Принципы построения полуавтоматической системы обработки [59]

Упрощенная схема полуавтоматической обработки информации показана на рис. В.1. В схему входят визуальный индикатор, оператор, съемник координат с экрана индикатора и вычислительное устройство, предназначенное для расчета параметров и построения траектории движения целей.

Съем координат с экрана индикатора и ввод их в вычислительное устройство производится оператором путем совмещения электронного маркера (метки), связанного с механизмом съемника, с соответствующими отметками от цели.

Сигналы (отметки от целей) из приемного тракта РЛС поступают на индикатор сопровождения с дискретностью, определяемой периодом обзора T_o. Оператор, наблюдая за экраном индикатора, обнаруживает цели и самостоятельно или по данным целеуказания выбирает

те из них, которые подлежат полуавтоматическому сопровождению.

Постановка выбранной цели на сопровождение осуществляется путем последовательного ввода в вычислительное устройство координат и моментов времени локации двух соседних отметок. По данным первых двух вводов в вычислительном устройстве определяются параметры движения и начинается вычисление упрежденных координат цели. При использовании аналоговых вычислительных устройств упрежденные координаты вычисляются непрерывно, а при использовании дискретных вы-

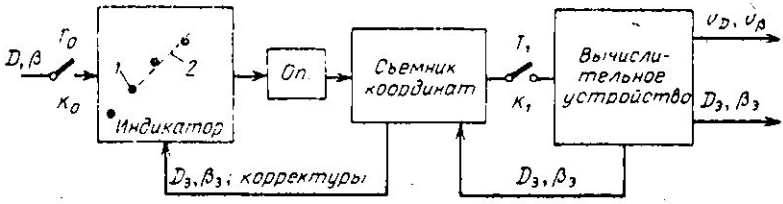


Рис. В.1. Упрощенная схема системы полуавтоматической обработки радиолокационной информации:
/—отметка от цели; 2 —траектория движения маркера.

числительных устройств (ЦВМ)—через фиксированные интервалы времени. Параметры движения и экстраполированные координаты выдаются потребителям.

Экстраполированные координаты $D_э$, $\beta_э$ используются, кроме того, для перемещения маркера по экрану индикатора. Траектория движения маркера соответствует расчетной траектории движения цели. В момент получения новой отметки, принадлежащей данной траектории, оператор наблюдает рассогласование между координатами наблюденной отметки и координатами, рассчитанными на момент наблюдения в вычислительном устройстве. Если это рассогласование превышает допустимую величину, оператор вводит корректуру путем нового совмещения маркера с отметкой и замыкания ключа K_1. Ввод корректур прекращается при совпадении истинной и расчетной траекторий.

Процесс полуавтоматического слежения за одной линейно изменяющейся координатой D с помощью дискретного вычислительного устройства поясняется на рис. В.2. Пусть в моменты времени t_0 и t_1 оператор про-

изводит совмещение маркера с двумя полученными в соседних обзорах отметками и вводит координаты этих отметок в вычислительное устройство. По введенным коор-

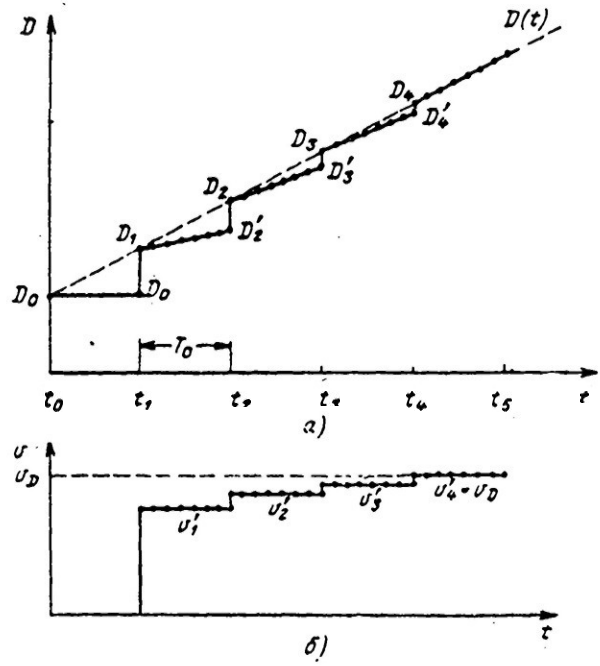


Рис. В.2. Временные диаграммы, поясняющие процесс полуавтоматического слежения за одной линейно изменяющейся координатой:
а — установление процесса экстраполяции координаты; б — установление процесса отработки скорости изменения координаты.

динатам D_0 и D_1 в вычислительном устройстве производится расчет скорости изменения координаты по формуле

$$v'_1 = \frac{D_1 - D_0}{t_1 - t_0} = \frac{D_1 - D_0}{T_0}$$

и упрежденной координаты по формуле

$$D(t_1 + k\Delta t) = D_1 + v'_1 k\Delta t \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где Δt — период выдачи рассчитанных значений координаты, кратный периоду обзора T_0.

Через период T_0, на выходе вычислительного устройства будет координата (см. рис. В.2,*а*).

$$D'_2 = D_1 + v'_1 T_0.$$

Так как в момент t_2 истинная координата равна D_2, то оператор наблюдает рассогласование между истинной и рассчитанной координатами, равное $\Delta D_2 = D_2 - D'_2$. Он ликвидирует это рассогласование, путем нового совмещения маркера с отметкой. При этом в вычислительное устройство вводится корректура по координате, равная ΔD_2, на основании которой вычисляется корректура по скорости

$$\Delta v_1 = \frac{\Delta D_2}{t_2 - t_1}.$$

Новое значение скорости после ввода корректуры будет (см. рис. В.2,*б*)

$$v'_2 = v'_1 + \Delta v_1.$$

После нескольких корректур скорость, рассчитываемая вычислительным устройством, совпадает с истинной скоростью изменения координаты v_D. В этом случае, в каждом новом периоде обзора, отметки от цели будут совпадать с рассчитанной траекторией. Наступает установившийся процесс, в котором оператор не участвует. Новое вмешательство оператора в процесс сопровождения потребуется только в случае, если изменится закон движения цели.

Оператор в полуавтоматической системе обработки выполняет функции дискриминатора ошибок. Характеристика этого элемента системы нелинейна, так как существует зона нечувствительности, в пределах которой корректуры не вводятся. Размеры зоны нечувствительности определяются разрешающей способностью индикатора и индивидуальными способностями оператора (остротой зрения, опытностью, степенью усталости в данное время и т. д.).

Основными характеристиками качества полуавтоматической системы обработки являются точности вычисления параметров и координат, а также пропускная способность системы.

Точности вычисления параметров и координат определяются совершенством алгоритмов обработки и сте-

пенью соответствия принятого в системе закона изменения координат (гипотезы о характере изменения координат) истинной траектории движения сопровождаемой цели.

Пропускная способность системы определяется требуемой частотой ввода корректур по каждой цели. Очевидно, чем меньше частота ввода корректур, тем большее число целей сможет обслужить один оператор, следовательно, тем больше пропускная способность системы полуавтоматической обработки.

Системы полуавтоматической обработки находят применение в тех случаях, когда число целей, подлежащих сопровождению, ограничено и оператор (или группа операторов) способен обеспечивать слежение за каждой из них с заданной точностью. Кроме того, полуавтоматические системы используются как дублирующие в случае выхода из строя автоматических систем обработки или при перегрузке последних интенсивными помехами.

Теоретическое исследование систем полуавтоматической обработки затруднено из-за наличия в них такого звена, как человек-оператор, функционирование которого трудно описать математически.

В данной книге системы полуавтоматической обработки не рассматриваются.

В.2. Принципы построения системы автоматической обработки

В последнее время все большее внимание уделяется разработке и внедрению полностью автоматизированных систем обработки радиолокационной информации.

Разработка новой автоматизированной системы начинается с синтеза алгоритмов (формализованных правил) ее работы. Для синтеза алгоритмов необходимо иметь подробное математическое описание всех подлежащих автоматизации процессов и, кроме того, исходя из конкретного назначения системы, выбрать критерий (или группу критериев) качества ее работы. Чем конкретнее наши (формализованные) знания о характере процессов, подлежащих автоматизации, и чем совершеннее критерии качества, используемые при синтезе системы, тем

больше гарантий правильного функционирования спроектированной автоматизированной системы.

Обращаясь к перечисленным выше задачам, подлежащим решению на всех этапах обработки радиолокационной информации, необходимо заранее отметить, что все они в большей или меньшей степени поддаются математической формализации, а значит, процесс их решения можно автоматизировать. Теоретической базой для математического описания (алгоритмизации) процессов

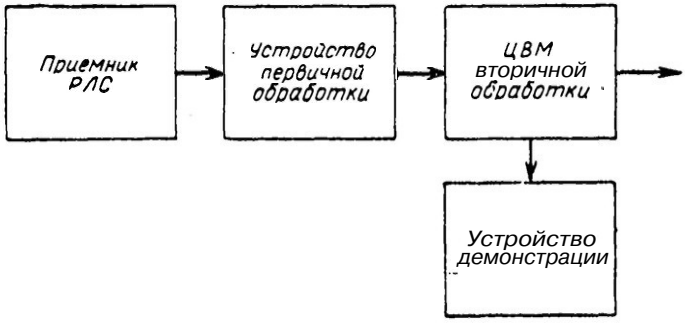


Рис. В.3. Упрощенная схема системы автоматической обработки радиолокационной информации.

обработки радиолокационной информации является достаточно подробно развитая в настоящее время статистическая теория приема и обработки радиолокационных сигналов, изложенная в целом ряде фундаментальных работ советских и зарубежных ученых [4, 6, 10 и др.]. Базой для автоматизации процессов обработки радиолокационной информации могут служить в первую очередь цифровые вычислительные машины (ЦВМ), а также другие, аналоговые и дискретные, вычислительные устройства специального назначения. С точки зрения надежности, экономичности и габаритности аппаратуры предпочтение необходимо отдать цифровым вычислительным устройствам. При этом надо иметь в виду, что особенности работы дискретных устройств оказывают определенное вляние на методы и алгоритмы обработки радиолокационной информации.

Рассмотрим принципы построения и возможные варианты аппаратурной реализации элементов системы

автоматической обработки информации обзорной РЛС. Упрощенная схема такой системы приведена на рис. В.3.

Непосредственно из приемного тракта РЛС координаты всех целей снимаются устройством первичной обработки, кодируются и поступают на вход вычислительной машины вторичной обработки. Вычислительная машина вторичной обработки по данным, полученным в ряде соседних обзоров, выявляет корреляцию отметок и производит «завязку» траекторий, вычисление параметров траекторий, а также сглаживание и экстраполяцию координат по каждой обрабатываемой траектории. Процесс автоматической обработки информации контролируется с помощью устройства демонстрации.

Устройство первичной обработки радиолокационной информации в данном случае представляет собой устройство сопряжения радиолокатора с ЦВМ и должно выполнять следующие функции:

1) отсеивать помехи и выделять полезные сигналы, отраженные от целей;

2) оценивать координаты обнаруженных целей;

3) преобразовывать информацию о цели в стандартные сообщения, применительно к данной ЦВМ;

4) изменять критерии обнаружения для обеспечения разумной скорости ввода информации в ЦВМ при наличии интенсивных помех.

Следует заметить, что устройство первичной обработки по своим габаритам может быть в несколько раз больше, чем ЦВМ вторичной обработки. Поэтому вопросам рационального выбора методов первичной обработки и аппаратурной реализации этих методов должно быть уделено самое серьезное внимание.

Уже давно доказано, что оптимальной процедурой обработки при обнаружении импульсных радиосигналов (как когерентных, так и некогерентных) является их накопление. При визуальном обнаружении накопителем импульсных сигналов служит люминофор электронной лучевой трубки, а решение об обнаружении принимается оператором по яркости пятна. Основным элементом автоматического устройства обнаружения также является накопитель сигналов.

Принцип реализации последетекторного накопления импульсных видеосигналов показан на рис. В.4. Из рисунка следует, что для того, чтобы обнаружить ав-

тематически наличие отраженного от цели сигнала необходимо накапливать амплитуды видеоимпульсов в течение времени нахождения цели в луче диаграммы направленности антенны РЛС (при этом число отраженных от цели импульсов равно N_0). Накопленная сумма (суммарная амплитуда) затем сравнивается с порогом, выбираемым исходя из наперед заданного критерия качества обнаружения. При превышении суммарной амплитудой порогового уровня принимается решение об обнаружении цели.

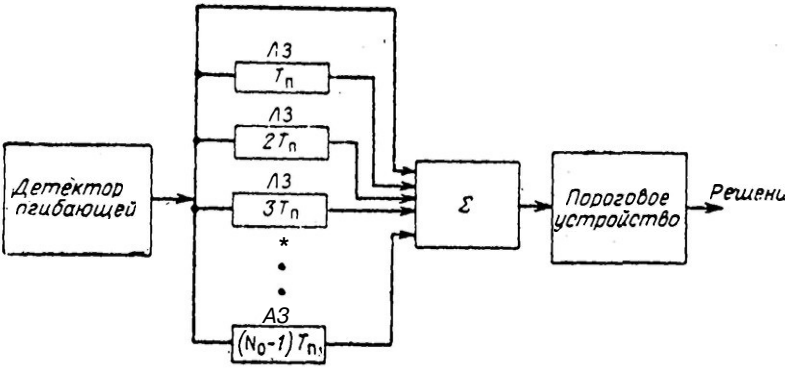


Рис. В.4. Принцип реализации последетекторного накопления импульсных видеосигналов.

Использование аналоговых накопителей позволяет осуществить автоматическое пороговое обнаружение отраженных сигналов без существенного уменьшения дальности действия РЛС.

Для аналогового накопления возможны по крайней мере два типа устройств — потенциалоскопы и ультразвуковые линии задержки. Этим устройствам свойственны серьезные недостатки, затрудняющие их использование на практике. Так, в потенциалоскопах чрезвычайно трудно обеспечить линейность закона накопления, что приводит к потерям в пороговом сигнале. Трудно достигнуть также разрешающей способности потенциалоскопа, равной разрешающей способности РЛС, что приводит к потерям в разрешающей способности и точности при оценке координат. Наконец, трудности возникают и в связи с требованиями совмещения лучей, для удовлет-

ворения которых необходимо, чтобы при каждой развертке записывающий луч проходил по одной и той же линии на поверхности накопительной пластины. По этой же линии должен проходить и считывающий луч. В связи с этим жесткие требования предъявляются к допустимой величине нелинейности и нестабильности тока развертки.

Существенные недостатки свойственны и аналоговым накопителям, использующим ультразвуковые линии задержки. Основными из них являются громоздкость (при больших N_0), а также необходимость точного согласования задержки с частотой следования зондирующих импульсов РЛС. Для каждого нового типа РЛС накопитель должен быть другим. Применение накопителей на ультразвуковых линиях задержки вообще невозможно в РЛС, в которых частота следования зондирующих импульсов, переменная.

Указанные недостатки аналоговых накопителей заставляют переходить к дискретным накопителям, подобным используемым в цифровых вычислительных машинах. Такие накопители просты в устройстве, экономичны, надежны и могут быть приспособлены для работы с РЛС различных типов путем изменения программы накопления.

Упрощенная схема одного из возможных способов реализации автоматического обнаружения сигналов во всей зоне обзора РЛС с использованием цифровых накопителей показана на рис. В.5 [31].

В регистр со сдвигом (РгС) в момент посылки зондирующего импульса записывается единица (запись производится с помощью импульса запуска). Импульсом запуска включается также генератор масштабных импульсов временной дискретизации видеосигналов. Импульсы этого генератора используются для перемещения (сдвига) единицы вдоль регистра скачками, расстояние между которыми равно или меньше длительности импульса РЛС. Число разрядов регистра РгС равно числу масштабных импульсов, укладывающихся в пределах интервала временной развертки, соответствующего максимальной дальности действия РЛС:

$$n_{\text{р}} = \frac{2D_{\text{макс}}}{c\Delta t_{\text{и}}},$$

каком-либо участке по дальности установленного критерия обнаружения, принимается решение о наличии цели на этой дальности. Оценка координаты дальности осуществляется по номеру накопителя, а оценка координаты азимута производится путем фиксаций центра последовательности нулей и единиц, удовлетворяющей критерию обнаружения.

Таким образом, рассмотренная цифровая схема в принципе позволяет решать задачи обнаружения и оценки координат целей. Причем для ее реализации используются только элементы дискретной вычислительной техники, что позволяет сделать соответствующую аппаратуру надежной в работе и достаточно гибкой, допускающей при необходимости изменение программ обработки.

Цифровые обнаружители наряду с простотой реализации имеют еще одно существенное преимущество, связанное с однотипностью аппаратуры с ЦВМ, осуществляющей дальнейшую обработку радиолокационной информации.

По отдельным вопросам теории и техники цифрового обнаружения опубликовано несколько работ (30, 38, 58]. Однако в целом проблема цифровой обработки в литературе освещена недостаточно. Между тем очевидно, что переход к цифровым методам обработки означает отход от установленных в статистической теории радиолокации оптимальных методов обработки. Это связано, во-первых, с необходимостью цифрового преобразования (квантования) обрабатываемых сигналов, которое неизбежно ведет к потерям в пороговом сигнале и, следовательно, к потерям в качестве обработки.

Разработка оптимальных методов дискретизации исходных сигналов является одной из основных задач, возникающих в процессе проектирования цифровых систем обработки радиолокационной информации. Далее, хотя идея накопления сигналов при их обнаружении остается в силе и при обработке дискретизованных сигналов, однако техника реализации и выходной эффект будут отличаться от полученных для случая оптимальной обработки неквантованных сигналов. Задача состоит в том, чтобы разработать и обосновать квазиоптимальные и инженерные методы обработки дискретизованных сигналов, а также способы оценки потерь при такой обработке.

Наконец, чрезвычайно важное значение имеет также разработка способов аппаратурной реализации алгоритмов обработки квантованных сигналов исходя из естественного требования простоты и минимального объема соответствующего оборудования. В этой области в последнее время получены серьезные теоретические результаты, главным образом, благодаря работам В. М. Глушкова и его учеников по теории синтеза цифровых вычислительных устройств (цифровых автоматов) для переработки дискретной информации. Синтез цифровых автоматов для обработки дискретизованных радиолокационных сигналов является важной составной частью проблемы цифровой обработки радиолокационной информации.

Таким образом, проблема цифровой обработки радиолокационных сигналов в части, касающейся автоматического обнаружения и оценки координат целей, включает в себя следующие задачи:

1. Преобразование непрерывных по своей природе отраженных радиолокационных сигналов в дискретную форму, удобную для обработки с помощью дискретных вычислительных устройств.

2. Алгоритмизация процессов обработки дискретизованных радиолокационных сигналов.

3. Реализация алгоритмов обработки с помощью элементов дискретной вычислительной техники.

Некоторые результаты решения указанных задач, применительно к обработке сигналов одноканальной импульсной РЛС кругового (или секторного) обзора, составляют содержание второй и третьей глав настоящей книги.

Перейдем теперь к рассмотрению принципов автоматизации процессов вторичной обработки радиолокационной информации с помощью ЦВМ. Процесс вторичной обработки радиолокационной информации разбивается на 2 самостоятельных этапа: обнаружение траекторий целей и ележение за траекториями целей.

Обнаружение траекторий целей в процессе вторичной обработки может осуществляться визуально (оператором) или автоматически (вычислительным устройством). Автоматическое обнаружение траектории целей называется автозахватом.

Рассмотрим один из возможных способов автозахвата траектории цели (рис. В.6).

Пусть появилась одиночная отметка (*1*) в некоторой точке зоны обзора РЛС. Очевидно, эту отметку следует принять за первую (начальную) отметку траектории новой цели. В следующем обзоре вторую отметку, принадлежащую той же траектории, следует искать в некоторой области, окружающей начальную отметку. Размеры этой области определяются следующим образом. Пусть $v_{мин}$ — минимальная скорость движения интересующих нас целей, $v_{макс}$ — максимальная скорость тех же целей, а $T_о$ — период обзора РЛС. Тогда область вероятного нахождения отметок в следующем обзоре можно представить в виде кольца, внутренний радиус которого $r_{мин} = v_{мин} T_о$, а внешний $r_{макс} = v_{макс} T_о$. Площадь кольца равна

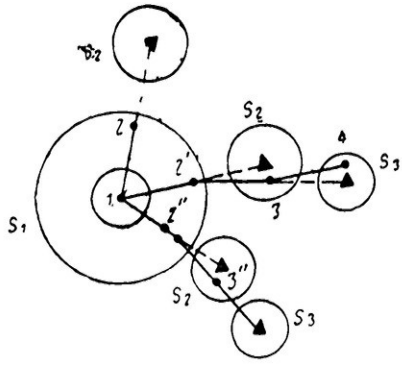


Рис. В.6. Пояснение способа реализации автозахвата траектории цели.

$$S_1 = \pi T_о^2 (v_{макс}^2 - v_{мин}^2).$$

В область S_1 может попасть не одна, а несколько отметок. Каждую из них следует считать как возможное продолжение предполагаемой траектории (см. рис. В.б). По двум отметкам можно вычислить скорость и направление движения каждой из предполагаемых целей, а затем предсказать (экстраполировать) положение отметки на следующий (третий) обзор. Вокруг экстраполированных отметок (которые на рис. В.б обозначены треугольниками) образуются круговые области S_2, размеры которых определяются, исходя из возможных ошибок предсказания. Если в какую-либо область S_2 в третьем обзоре попала отметка, то она считается принадлежащей к обнаруживаемой траектории и траектория продолжается. При попадании n отметок в n—1 областей принимается

решение об обнаружении траектории и она передается на сопровождение.

Рассмотренный способ автозахвата вытекает из анализа действий человека-оператора при визуальном обнаружении траекторий. Все операции, выполняемые в процессе автозахвата, принципиально являются формализуемыми. Следовательно, их выполнение можно возложить на вычислительную машину. Однако даже без детального анализа видно, что задача эта является чрезвычайно громоздкой и требует применения достаточно быстродействующих ЦВМ.

К теоретическим проблемам автозахвата относятся:

— разработка алгоритмов автозахвата, удобных для реализации на ЦВМ;

— разработка методов расчета качественных характеристик алгоритмов автозахвата.

Слежение за траекториями целей состоит в непрерывной привязке вновь полученных отметок к своим траекториям, сглаживании координат и вычислении параметров движения целей. Автоматическое слежение за траекторией цели обычно называют автосопровождением цели.

Рассмотрим принцип реализации автосопровождения цели при вторичной обработке информации обзорной РЛС. Пусть в n смежных обзорах РЛС получены отметки, которые «увязываются» в траекторию цели, изображенную на рис. В.7. Отметка с индексом n соответствует текущему обзору РЛС, а отметки с индексами $n-1$, $n-2$, ... — предыдущим обзорам. Первая задача, подлежащая решению в процессе автосопровождения, состоит в сглаживании координат отметок и вычислении (оценке) параметров траектории. Сглаживание координат применяется для того, чтобы по дискретным отметкам, принадлежность которых к траектории уже определена, выработать непрерывные данные о траектории. При этом, безусловно, предполагается, что отметки поступают с ошибками, а сглаженные значения надо получить по возможности более точными. Сглаженные координаты и параметры траектории выдаются потребителям радиолокационной информации.

Пусть далее в $(n+1)$-м обзоре получено несколько новых отметок, показанных на рис. В.7 зачерненными точками. Вторая задача автосопровождения состоит

в том, чтобы определить, какая из полученных в новом обзоре отметок принадлежит к интересующей нас траектории. Используя тот факт, что траектория цели вплоть до n-го обзора определена, можно предсказать путем экстраполяций положение принадлежащей к этой траектории отметки на $(n+1)$-м обзоре. На рис. В.7 экстраполированная отметка обозначена треугольником.

Экстраполированная отметка, как правило, не совпадает ни с одной из вновь полученных отметок. Отклоне-

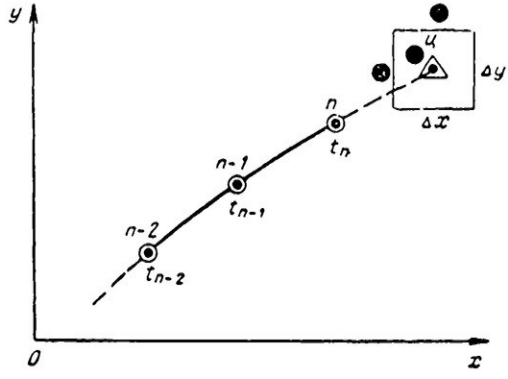


Рис. В.7. Пояснение способа реализации автосопровождения цели.

ние экстраполированной отметки от вновь полученных определяется следующими факторами:

1) ошибками расчета координат экстраполированной отметки по данным предыдущих обзоров;

2) ошибками измерения координат цели в новом обзоре;

3) непредвиденным маневром цели за время обзора.

Таким образом, взаимное положение экстраполированной на $(n+1)$-й обзор отметки и новой отметки, полученной в этом обзоре и принадлежащей той же траектории, является случайным и определяется точностью измерения координат и маневренными возможностями цели.

Выделим в пространстве обзора некоторую область с центром, совпадающим с экстраполированной отметкой. Эта область может быть, например, прямоугольни-

ком со сторонами Ax и Ay, как показано на рис. В.7. Если известны статистические характеристики ошибок измерения координат и маневра цели, то можно определить вероятность попадания новой отметки в область $(\Delta x, \Delta y)$. С другой стороны, задавшись вероятностью попадания отметки в указанную область, при тех же условиях, можно определить ее размеры. Область $(\Delta x, Ay)$ принято называть упрежденной областью или стробом.

Теперь, если размеры строба выбраны так, что вероятность попадания в него истинной отметки велика, то отметку, попавшую в строб, следует считать принадлежащей данной траектории, а отметки, оказавшиеся за пределами строба, — ложными или принадлежащими другим траекториям.

Выбор размеров и формы строба представляет самостоятельную задачу вторичной обработки и будет рассматриваться в дальнейшем. Здесь необходимо только отметить следующее очевидное обстоятельство. Чем больше размеры строба, тем выше вероятность попадания истинной отметки в строб, но вместе с тем возрастает вероятность попадания в строб других отметок, в том числе и ложных. Уменьшение размеров строба увеличивает селективность процесса отбора отметок, однако при этом возрастает вероятность пропуска истинной отметки.

На рис. В.7 представлен частный случай, когда в стробе обнаруживается только одна отметка. Однако случаи, когда в строб попадает не одна, а несколько отметок, являются правилом, а не исключением. Попадание в строб нескольких отметок обусловлено главным образом наличием ложной информации от помех. В связи с этим возникает новая задача — отбор (селекция) одной истинной отметки из нескольких попавших в строб. Эта задача также будет рассматриваться в дальнейшем.

Наконец, может возникнуть такая ситуация, когда в стробе не окажется ни одной отметки. В этом случае наиболее разумно принять экстраполированную отметку за истинную и считать ее продолжением траектории.

Таким образом, в процессе автосопровождения каждой цели выполняются следующие операции:

— сглаживание координат и определение (оценка) параметров траектории цели (направление движения, скорость, ускорение и т. д.);

— экстраполяция координат цели на следующий обзор или на несколько обзоров;

— выделение упрежденной области, в которой с некоторой вероятностью ожидается появление новой отметки (стробирование отметки);

— сличение координат экстраполированной отметки с координатами отметок, попавших в строб, и выбор одной из них для продолжения траектории.

По характеру выполняемых операций автосопровождение сводится главным образом к решению задач вычисления параметров. Однако операция селекции отметок в стробе сводится, вообще говоря, к обнаружению истинной отметки среди ложных.

Отметим также, что хотя этапы обнаружения траектории и слежения за траекторией отличаются по характеру решаемых задач, в процессе их выполнения используется один и тот же принцип пообзорной связи отметок, состоящий в том, что на основании сведений о координатах цели, полученных в ряде предыдущих обзоров, можно предсказать положение цели на следующий обзор с точностью до некоторой конечной области, зависящей от ошибок измерения координат и маневренных возможностей цели.

Одной из основных теоретических проблем автоматизации процесса сопровождения целей является разработка алгоритмов выполнения перечисленных выше операций и путей реализации этих алгоритмов на ЦВМ.

В опубликованной литературе отсутствует теория вторичной обработки в целом. Имеющиеся немногочисленные работы [10, 42, 46, 51, 53 и др.] посвящены главным образом теории сглаживания и экстраполяции координат целей по дискретным наблюдениям. В этих работах почти не уделяется внимания вопросам реализации разработанных алгоритмов на ЦВМ. Отсутствует также сравнение качественных характеристик различных алгоритмов. Глава четвертая данной книги имеет целью восполнить в некоторой мере указанный пробел в литературе.

Качество работы автоматизированной системы обработки радиолокационной информации зависит в первую очередь от оптимальности выполнения каждой из операций обработки. Синтез оптимальных алгоритмов обработки производится в соответствии с некоторыми напе-

ред заданными критериями, выбираемыми из существа решаемых задач и конкретных требований, предъявляемых к решениям.

Поскольку обрабатываемая радиолокационная информация носит случайный характер и может быть описана только статистически, то и критерии оптимальности алгоритмов обработки должны быть статистическими. В связи с этим в качестве общей теоретической основы для синтеза алгоритмов обработки целесообразно использовать теорию статистических решений, дающую общий подход к выбору оптимальных правил обработки случайных сигналов.

В данной книге методы теории статистических решений используются для синтеза алгоритмов обработки на всех ее этапах. Необходимые сведения из математической статистики и теории статистических решений, а также общие вопросы применения статистических методов при обработке радиолокационной информации изложены в первой главе.

В заключение заметим, что кроме разработки алгоритмов выполнения основных операций существенное значение имеет таже организация системы обработки и оптимизация системы в целом, а также рассмотрение ее функционирования как системы массового обслуживания с целью определения пропускной способности.

Разработка общего алгоритма системы обработки требует дополнительной увязки отдельных его частей, что связано во многих случаях с непреодолимыми теоретическими и вычислительными трудностями. Поэтому важное значение приобретает исследование систем обработки путем моделирования основных ее функций на универсальных цифровых вычислительных машинах. К моделированию системы обработки (или ее отдельных частей) прибегают в тех случаях, когда, с одной стороны, аналитические методы исследования не дают достаточно достоверных данных, а с другой стороны, когда натурные испытания разработанной системы невозможны по техническим или экономическим соображениям.

В книге не рассматриваются вопросы моделирования систем обработки. Однако приведенные в ней частные алгоритмы выполнения отдельных операций могут быть использованы при составлении моделирующего алгоритма системы обработки в целом.

1.

Формулировка задач обработки радиолокационной информации с точки зрения теории статистических решений

§ 1.1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ [1, 2, 3, 7]

Для синтеза оптимальных алгоритмов обработки информации в автоматизированной системе и анализа точности этих алгоритмов необходимо знать вероятностные характеристики действующих на систему случайных возмущений (сигналов). Чтобы определить необходимые вероятностные характеристики случайных сигналов (которые представляют собой случайные величины или случайные процессы), естественно обратиться к опыту.

Разработка рациональных методов обработки результатов наблюдений случайных величин и случайных процессов с целью определения их вероятностных характеристик является основной задачей математической статистики.

В основе статистических методов определения вероятностных характеристик случайных величин и случайных процессов лежит закон больших чисел. Согласно этому закону при большом числе опытов вероятности событий могут быть заменены соответствующими частотами, а их математические ожидания — средними арифметическими значениями. Если число произведенных опытов действительно велико, то полученные таким образом вероятностные характеристики близки к их истинным

значениям. Однако на практике часто приходится ограничиваться малым числом опытов (наблюдений), например вследствие дороговизны или по другим соображениям. И в этом случае для определения вероятностных характеристик случайных величин (случайных функций) приходится пользоваться теми же формулами, которые применяются при большом числе опытов. Естественно, вероятностные характеристики, определенные на основе малого числа опытов, будут приближенными. В математической статистике приближенные значения вероятностных характеристик называются оценками этих характеристик.

Как известно из теории вероятностей, основной вероятностной характеристикой случайных величин и случайных процессов является функция распределения или плотность распределения вероятностей. Если о виде функции распределения до опыта (априори) ничего не известно, то необходимо, прежде чем решать статистическую задачу, выбрать гипотезу относительно математического вида функции распределения. Для выбора гипотезы иногда имеются те или иные объективные данные. В общем же случае таких данных может и не быть.

После того как гипотеза о функции распределения выбрана (высказана), возникает новая задача: каким образом выяснить, насколько хорошо выбранная функция распределения описывает полученные в результате опыта данные. Эта задача решается с помощью некоторых статистических критериев. Простейший критерий состоит в нанесении опытных данных на график и в сравнении этого графика с гипотетической кривой.

Проверка гипотез с помощью статистических критериев составляет первую основную задачу математической статистики.

Функция распределения (плотность распределения вероятностей) исследуемой случайной величины содержит один или несколько параметров. Например, для нормального распределения такими параметрами являются математическое ожидание a и дисперсия σ^2. Определив численные значения этих параметров, мы получим полную характеристику исследуемой случайной величины, т. е. полностью решим поставленную статистическую задачу. Следовательно, в процессе статистического эксперимента необходимо также вычислять наилучшие воз-

можные оценки неизвестных параметров функции распределения.

Получение статистических оценок неизвестных параметров распределения и определение надежности этих оценок составляют вторую основную задачу математической статистики.

Развитие математической статистики происходило первоначально по указанным выше двум независимым направлениям: первое направление — теория статистической оценки параметров, второе направление — теория проверки (испытания) гипотез. В конце 30-х и в 40-е годы оба эти направления были объединены в общей теории статистических решений, впервые сформулированной в работах А. Вальда.

В нашу задачу не входит сколько-нибудь подробное рассмотрение методов математической статистики. Мы рассмотрим здесь лишь некоторые узловые вопросы, необходимые для изучения методов обработки радиолокационной информации.

1.1.1. Основные понятия теории статистических оценок параметров распределения

Во многих задачах вид, иначе говоря, математическая форма теоретического распределения, бывает известен либо его удается получить из теории вероятностей. Так, например, на практике часто исходят из того, что ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения. В артиллерийских расчетах, опираясь на обширный опытный материал, полагают, что распределение точек поражения на плоскости следует двумерному нормальному закону распределения. В теоретической физике доказано, что число радиоактивных атомов, распадающихся в течение некоторого промежутка времени, следует закону Пуассона и т. д.

Однако знание математической формы закона распределения вероятностей еще не дает полной вероятностной характеристики изучаемой случайной величины, так как в закон распределения входит один или несколько параметров, не известных до эксперимента. Оценки этих параметров могут быть получены только в результате эксперимента. Именно ради нахождения оценок параметров часто и производится статистический экспе-

римент. В связи с этим возникает необходимость изучить общие свойства возможных оценок параметров распределения или, как их обычно называют в математической статистике, статистических параметров и установить некоторые общие требования к оценкам.

Пусть объектом эксперимента является некоторая случайная величина X. Математический вид (формула) плотности распределения вероятности этой случайной величины известен априори. В процессе эксперимента производится n опытов (n выборок случайной величины X). Выборочные значения обозначаются $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По результатам эксперимента необходимо оценить неизвестные параметры распределения случайной величины X.

В общем случае неизвестные параметры мы будем обозначать через $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, а их статистические оценки (т.. е. значения, полученные из опыта) — через $\theta^*_1, \theta^*_2, \ldots, \theta^*_k$.

Очевидно, всякая оценка θ^* параметра θ представляет собой некоторую функцию

$$\theta = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

от выборочных значений $x_1, x_2, \ldots x_n$. Следовательно, оценка θ^* сама есть случайная величина, так как вследствие статистических флюктуаций каждая новая выборка дает новое значение оценки. Исчерпывающей статистической характеристикой оценки является закон ее распределения. Знание закона распределения той или иной оценки позволяет вычислять вероятность ее отклонений от оцениваемого параметра, ее математическое ожидание и ее дисперсию. А с помощью этих последних могут быть точно сформулированы требования к статистическим оценкам.

В качестве первого требования, которому должна удовлетворять правильно найденная оценка $\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для некоторого параметра можно поставить требование сходимости по вероятности оценки к оцениваемому параметру при неограниченном увеличении объема наблюдений, т. е.

$$\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{по вер.}} \theta.$$

Оценки, удовлетворяющие этому требованию, называются состоятельными. Состоятельность статистической оценки как раз и обеспечивает ее практическую близость, по крайней мере при больших значениях n, к оцениваемому параметру. Однако при малых n из состоятельности оценки еще нельзя сделать никаких выводов о ее пригодности для приближенного определения соответствующего параметра.

Вторым требованием, предъявляемым к статистическим оценкам, является требование несмещенности, т. е. отсутствия в них систематических ошибок. Для несмещенной оценки при любом конечном n (в том числе и при малом) должно выполняться условие

$$M[\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \theta,$$

т. е. математическое ожидание несмещенной оценки должно быть равно оцениваемому параметру.

Оценка называется положительно смещенной, если $M[\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)] > \theta$, и отрицательно смещенной, если $M[\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)] < \theta$.

Требование несмещенности оценки важно при малом объеме выборки, так как именно с такими выборками приходится обычно иметь дело в практических случаях. Примером несмещенной оценки для центра рассеивания (среднего значения) a является среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Для того чтобы убедиться в этом, вычислим математическое ожидание случайной величины $\bar{x}$. Согласно теореме сложения вероятностей

$$M[\bar{x}] = M\left[\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i].$$

Так как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть конкретные выборки одной и той же случайной величины X, то все они имеют одинаковое распределение

$$M[x_1] = M[x_2] = \ldots = M[x_n] = M[X] = a.$$

Тогда

$$M[\bar{x}] = \frac{nM[X]}{n} = M[X] = a.$$

Состоятельные несмещенные оценки могут быть иногда построены различными способами. Из двух состоятельных несмещенных оценок для одного и того же параметра Θ естественно отдать предпочтение той, у которой дисперсия оценки $D[\theta^*] = \sigma^2_{\theta^*} = M[(\theta^* - \theta)^2]$ будет меньше

В математической статистике при весьма общих предположениях доказано *[7],* что дисперсия оценок, построенных на основе выборки объема *n,* не меньше некоторой нижней границы. Так, для случая оценки одного параметра для дисперсии любой несмещенной оценки выполняется неравенство

$$\sigma^2_{\theta^*} \geqslant \frac{1}{nM\left[\left(\frac{d \ln w(x/\theta)}{d\theta}\right)^2\right]}, \qquad (1.1)$$

где n — объем выборки;

$w(x/\theta)$ — плотность вероятности случайной величины при непрерывном ее распределении.

В случае дискретного распределения

$$w(x/\theta) = P(X = x/\theta)$$

означает вероятность значения x случайной величины X (при условии зависимости x от параметра б).

Если существует такая несмещенная оценка $\theta^*_э$, для которой дисперсия $\sigma^2_{\theta^*}$ достигает нижней границы, равной правой части неравенства (1.1), то она называется эффективной оценкой. Эффективная оценка всегда состоятельна. Если мы имеем какую-нибудь другую несмещенную оценку θ^*, то сравнительную эффективность этой оценки измеряют отношением дисперсий

$$E(\theta^*) = \frac{\sigma^2_{\theta^*_э}}{\sigma^2_{\theta^*}},$$

где $\sigma^2_{\theta^*_э}$ — дисперсия эффективной оценки;

$\sigma^2_{\theta^*}$ — дисперсия сравниваемой оценки.

Введем теперь важное в математической статистике понятие функции правдоподобия. Пусть плотность распределения $w(x/\theta)$ случайной величины X зависит от одного параметра б. Пусть, далее, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ есть n независимых реализаций этой величины, а $X\backslash, x_2, \ldots, x_n$ — их возможные значения, с которыми мы встречаемся в выборке объема n. Совместная плотность вероятности многомерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ представляется произведением значений плотности $w(x_i/\theta)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (так как X_i независимы):

$$w(x_1, x_2, \ldots x_n/\theta) = w(x_1/\theta)\, w(x_2/\theta) \ldots w(x_n/\theta).$$

Совместная плотность вероятности зависит от выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и интересующего нас параметра θ. Наблюдаемые в процессе эксперимента выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставляются в выражение для совместной плотности вероятности, после чего она становится функцией одного параметра θ. Совместная плотнрсть вероятности, рассматриваемая как функция неизвестного параметра, называется функцией правдоподобия. Чтобы отличать функцию правдоподобия от совместной плотности вероятности, для нее введено специальное обозначение

$$L(x_1 x_2, \ldots x_n/\theta).$$

Пусть X — дискретная случайная величина с k возможными значениями. Производится n независимых испытаний, в каждом из которых осуществляется один из k взаимно исключающих друг друга случайных исходов.

Обозначим через $m_1, m_2, \ldots, m_k$ числа наступлений каждого из k исходов в выборке объема n ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ называются частотами исходов в выборке). Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Обозначим через $p_1(\theta), p_2(\theta), \ldots, p_k(\theta)$ вероятности осуществления в отдельном испытании каждого из k возможных исходов. Эти вероятности являются функциями параметра б. В этом случае функция правдоподобия для совокуп-

ности дискретных случайных величин определяется соотношением

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta) = p_1^{m_1}(\theta)\, p_2^{m_2}(\theta) \ldots p_k^{m_k}(\theta).$$

Предположим теперь, что получена такая оценка $\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра θ, что функцию правдоподобия $L(x_1 x_2, \ldots, x_n/\theta)$ можно представить в виде произведения двух сомножителей:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta) = G_1[\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta)] \times$$

$$\times G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

из которых первый зависит лишь от θ^* и 9, а второй — лишь от $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Если оценка $\theta^*(x_1, x_2, \ldots x_n)$ обладает указанным свойством, то она называется достаточной оценкой.

Рассмотрим пример. Пусть результаты наблюдений (эксперимента) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представляют собой независимые, одинаково нормально распределенные величины с неизвестным средним значением a_x. Предположим для простоты, что дисперсия известна и равна единице ($\sigma_x^2 = 1$). Тогда функция правдоподобия будет иметь вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n/a_x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_x)^2\right],$$

где $\exp[z] = e^z$.

Эту функцию можно записать так:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n/a_x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \right.$$

$$\left. + \sum^{n} x_i a_x - \frac{n}{2} a_x^2\right].$$

Выберем в качестве оценки для a_x среднее арифметическое значение $\bar{x}$:

$$a_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Тогда функцию правдоподобия можно представить в виде произведения двух сомножителей (с точностью до постоянного множителя $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n$):

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n/a_x) = \exp\left[n\left(a_x\bar{x} - \frac{1}{2}a_x^2\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right].$$

Первый сомножитель зависит лишь от $\bar{x}$ и a_x, а второй — лишь от x_i. Следовательно, $\bar{x}$ является достаточной оценкой для a_x.

Одним из наиболее важных общих методов нахождения оценок является метод максимального правдоподобия. Сущность этого метода заключается в утверждении, что при данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наилучшая оценка соответствует такому значению параметра θ в функции правдоподобия $L(x_1 x_2, \ldots, x_n/\theta)$, при котором эта функция достигает максимального значения. Этот же метод находит применение и для случая, когда оценке подвергается насколько неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, от которых зависит функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Отыскивая такие значения параметров $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k$, при которых $L(x_1 x_2 \ldots, x_n/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ достигает максимума (при данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$), мы получаем наилучшие оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

Для нахождения максимума функции $L(x x_2 \ldots x_n/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ необходимо продифференцировать эту функцию по искомым параметрам и результаты приравнять нулю.

Исходя из этого правила, для нахождения оценки по методу максимума правдоподобия составляются уравнения правдоподобия:

$$\left.\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1=\theta^*_1} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2=\theta^*_2} = 0, \qquad (1.2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left.\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_k}\right|_{\theta_k=\theta^*_k} = 0,$$

при условиях, что

$$\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1^2}\right|_{\theta_1=\theta^*_1} < 0, \quad \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2}\right|_{\theta_2=\theta_2^*} < 0, \ldots, \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k^2}\right|_{\theta_k=\theta^*_k} < 0. \qquad (1.2')$$

Тогда θ^*_1, θ^*_2, ..., θ^*_k, полученные из решения системы (1.2), есть оценки по методу максимума правдоподобия для параметров θ_1, θ_2, ..., θ_k.

Часто удобнее иметь дело не с L, а с $\ln L$. Соответствующие уравнения правдоподобия будут иметь вид

$$\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1=\theta^*_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_2=\theta^*_2} = 0, \ldots, \left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k}\right|_{\theta_k=\theta^*_k} = 0, \qquad (1.3)$$

а дополнительные условия

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2}\right|_{\theta_1=\theta^*_1} < 0, \quad \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2}\right|_{\theta_2=\theta^*_2} < 0, \ldots, \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_k^2}\right|_{\theta_k=\theta^*_k} < 0. \qquad (1.3')$$

Таким образом, оценки по максимуму правдоподобия получаются как решения определенной системы уравнений правдоподобия. Это дает вполне регулярный прием для нахождения оценок, который позволяет разыскивать их в ряде важных задач. В отдельных случаях удается найти решение системы уравнений (или одного уравнения) правдоподобия элементарными средствами. Однако часто получающиеся уравнения являются сложными и могут быть решены только численными методами.

Проиллюстрируем технику применения метода максимального правдоподобия на одном примере.

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону.

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

с неизвестным средним значением a_x и неизвестной дисперсией σ_x^2. Пусть в результате эксперимента получены n независимых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X. Требуется определить оценки максимального правдоподобия для a_x и σ_x^2.

Функция правдоподобия выборки равна

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n/a_x, \sigma_x^2) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sigma_x^n} \exp\left[-\frac{1}{} \sum^{n} (x_i - a_x)^2\right],$$

а ее логарифм

$$\ln L(x_1, x_2 \ldots x_n/a_x, \sigma_x^2) =$$

$$= -\frac{n}{2} \ln \frac{1}{2\pi} - n \ln \sigma_x - \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{(=1}^{n} (x_i - a_x)^2. \qquad (1.4)$$

Для нахождения оценки для a_x продифференцируем $\ln L$ по a_x:

$$\frac{}{\partial a_x} = -\frac{}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_x).$$

Оценка для a_x находится из решения уравнения правдоподобия

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_x)\Big|_{a_x = a^*_x} = 0,$$

откуда

$$a^*_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}. \qquad (1.5)$$

Следовательно, оценкой максимального правдоподобия для a_x является среднее арифметическое из наблюденных значений $\bar{x}$. Эта оценка, как нам известно, является несмещенной.

Если теперь выражение для a^*_x подставить в (1.4), а затем (1.4) продифференцировать по σ_x, то получим

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_x} = -\frac{n}{\sigma_x} + \frac{1}{\sigma_x^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Оценка для σ_x^2 находится из решения уравнения правдоподобия

$$-n\sigma_x^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \Big|_{\sigma_x^2 = \sigma^{*2}_x} = 0.$$

Следовательно, оценкой максимального правдоподобия для a_x является

$$\sigma^{*2}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (1.6)$$

Покажем, что оценка максимального правдоподобия для σ_x^2 является смещенной. Для этого запишем выражение (1.6) в виде

$$\sigma^{*2}_x = \frac{1}{n}\sum (x_i - a_x + a_x - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_x)^2 - (\bar{x} - a_x)^2.$$

Так как x_i — независимые случайные величины с одним и тем же законом распределения, то

$$M[(x_i - a_x)^2] = M[(X_i - M[X])^2] = \sigma_x^2, \qquad (1.7)$$

$$M[(\bar{x} - a_x)^2] = \frac{\sigma_x^2}{n}. \qquad (1.8)$$

Тогда для математического ожидания $M[\sigma_x^{*2}]$ имеем согласно (1.7) и (1.8)

$$M[\sigma_x^{*2}] = \frac{n\sigma_x^2}{n} = \frac{\sigma_x^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad (1.9)$$

Таким образом, в отличие от $\bar{x}$ оценка σ_x^{*2} имеет математическое ожидание (1.9), не равное дисперсии σ_x^2. Следовательно, оценка максимального правдоподобия для σ_x^2 является смещенной. Однако смещение оценки мало и в пределе, при $n \to \infty$, стремится к нулю, т. е. оценка σ_x^{*2} является состоятельной.

Из рассмотренного примера видно, что в одних случаях метод максимального правдоподобия дает несмещенные оценки, в других случаях, по крайней мере, состоятельные оценки.

Метод максимального правдоподобия обладает рядом положительных свойств, делающих его весьма пригодным для оценки параметров. Во-первых, он всегда приводит к состоятельным (хотя иногда и смещенным) оценкам, распределенным асимптотически нормально, во-вторых, эти оценки имеют наименьшую возможную дисперсию по сравнению с другими также асимптотически нормальными оценками. Наконец, в тех случаях, когда характер распределения допускает достаточные оценки для совокупности данных параметров, эти оценки получаются по методу максимального правдоподобия.

Поэтому можно быть уверенным, что оценки по методу максимального правдоподобия используют всю доставляемую выборкой информацию относительно неизвестных параметров.

1.1.2. Общие принципы проверки гипотез с помощью статистических критериев

Пусть производится некоторый статистический эксперимент. Объектом эксперимента является случайная величина (случайная функция) X. Относительно X известно, что она принадлежит к одному из двух гипотетических распределений $w_0(x)$ или $w_1(x)$. Эксперимент ис-

пользуется для проверки гипотезы о том, что случайная величина распределена по закону $w_0(x)$. Эта гипотеза называется нулевой гипотезой *Но*. Альтернативной является гипотеза H_1 о том, что случайная величина X распределена по закону $w_1(x)$.

Все возможные результаты эксперимента можно изобразить в виде точек X_i ($i = 1, 2, \ldots$) некоторой области В (рис. 1.1). При этом безразлично, заполняют ли возможные результаты всю область В или они могут попадать лишь в отдельные точки, принадлежащие В (например, в целочисленные точки). На основании результатов эксперимента необходимо принять решение о том, правильна или ложна гипотеза Яр.

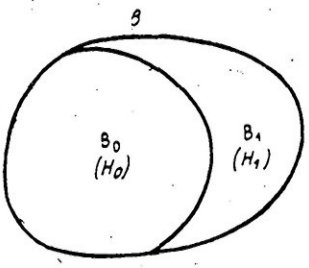


Рис. 1.1. К постановке задачи проверки гипотез:
B_0 — область принятия нулевой гипотезы; B_1 — область отказа от нулевой гипотезы (критическая область).

Для того чтобы принимать решение, необходимо предварительно установить некоторый критерий или правило решения. Установить правило решения — это значит каждому X_i из области В поставить в соответствие либо гипотезу *Но*, либо гипотезу H_1, т. е. разбить область В на две части: $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$, для одной из которых считать верной гипотезу H_0, а для другой — гипотезу H_1. Область $\mathbf{B}_0$ называется областью принятия нулевой гипотезы, а область $\mathbf{B}_1$ — областью отказа от нулевой гипотезы (критической областью).

Поскольку решение должно быть однозначным, возможны ошибки решения. Ошибки могут быть двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что гипотеза H_0 отвергается, когда она верна на самом деле (т. е. принимается решение $H = H_1$, когда на самом деле $H = H_0$).

Ошибка второго рода состоит в том, что гипотеза H_0 не отвергается, когда на самом деле она является ложной (т. е. принимается решение $H = H_0$, когда на самом деле $H = H_1$).

Пусть $w_0(x) = w(x/H_0)$ — плотность вероятности результатов эксперимента (наблюденных точек) при усло-

вии, что верна гипотеза H_0. Тогда условная вероятность ошибки первого рода определяется выражением

$$\alpha = \int_{B_1} w(x|H_0)\,dx. \qquad (1.10)$$

Условная вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости критерия (правила) и устанавливается заранее. Необходимым условием при установлении правила решения является выбор области B_1 так, чтобы обеспечить неравенство

$$\alpha \leqslant \alpha_0, \qquad (1.11)$$

где α_0 — заданная допустимая вероятность ошибки первого рода.

Но если бы принималась во внимание лишь ошибка первого рода, то выбор B_1 был бы в значительной степени произвольным. Может даже показаться, что в качестве B_1 удобно выбирать пустое множество. Тогда вероятность ошибки первого рода была бы равна нулю. Почему же так не поступают? Да потому, что имеется возможность совершить ошибку второго рода.

Пусть $w_1(x) = w(x/H_1)$ — плотность вероятности результатов эксперимента при условии, что верна гипотеза H_1. Тогда условная вероятность ошибки второго рода определяется выражением

$$\beta = \int_{B_0} w(x|H_1)\,dx, \qquad (1.12$$

а условная вероятность правильного решения, состоящего в том, что гипотеза H_0 отвергается, а вместо нее принимается гипотеза H_1 — выражением

$$p = 1 - \beta = \int_{B_1} w(x, H_1)\,dx. \qquad (1.13)$$

Условная вероятность правильного решения относительно выбора гипотезы H_1 называется мощностью критерия (решающего правила). Чем больше мощность критерия, тем лучше решение.

Следовательно, задача состоит в том, чтобы оптимальным образом разбить область В на две части: $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$. Оптимальность состоит в обеспечении минимального значения ошибки второго рода ($\beta = \min$) при допустимом значении ошибки первого рода ($\alpha \leqslant \alpha_0$).

Рассмотрим теперь решение задачи о нахождении наиболее мощного критерия (правила решения) для случая непрерывного распределения вероятностей наблюдаемых значений x_i в области В.

Предположим, что известна плотность вероятности n-мерной выборки исследуемой случайной величины при условии, что гипотеза H_0 верна. Эту условную плотность вероятности можно представить в виде $w_0 = w(x_1, x_2, \ldots, x_n/H_0)$. Аналогично будем считать заданной условную плотность вероятности n-мерной выборки, соответствующую гипотезе H_1: $w_1 = w(x_1, x_2, \ldots, x_n/H_1)$. Кроме того, предположим, что функция w_0 нигде не равна нулю в области В. Тогда можно составить отношение

$$= \frac{w(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid H_1)}{w(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid H_0)} = \frac{w_1}{w_0}, \qquad (1.14)$$

которое является непрерывной функцией выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Выберем некоторое произвольное положительное число l_0 и найдем вероятность события $P(l < l_0)$. Эта вероятность согласно (1.14) будет равна

$$P(l < l_0) = P(w_1 < l_0 w_0).$$

Предположим теперь, что верна гипотеза H_0. Тогда найдется такое положительное l_0, что

$$P(w_1 < l_0 w_0) = 1 - \alpha_0,$$

откуда

$$P(w_1 \geqslant l_0 w_0) = \alpha_0. \qquad (1.15)$$

В таком случае область $\mathbf{B}_1$ определяется неравенством

или

$$\frac{w_1}{w_0} \geqslant l_0. \qquad (1.16)$$

Неравенство (1.16) и является решением нашей задачи. Действительно, область $\mathbf{B}_1$ в силу (1.15) удовлетворяет условию (1.11). Кроме того, можно доказать [7], что если $\mathbf{B}'_1$ — любая другая область, также удовлетворяющая условию (1.11), то $\beta(\mathbf{B}'_1) \geqslant \beta(\mathbf{B}_1)$, т. е. ошибка второго рода для области $\mathbf{B}'_1$ не меньше, чем для $\mathbf{B}_1$.

Условная плотность вероятности $w(x_1, x_2, \ldots, x_n/H_0)$ называется функцией правдоподобия гипотезы H_0, и точно так же $w(x_1, x_2, \ldots, x_n|H_1)$ называется функцией правдоподобия гипотезы H_1. Отношение

$$\frac{w(x_1, x_2, \ldots, x_n|\ H_1)}{w(x_1, x_2, \ldots, x_n\ |\ H_0)}$$

называется отношением правдоподобия.

Только что найденный критерий (правило решения), наиболее чувствительный к альтернативной гипотезе H_1, можно сформулировать так: гипотезу H_0 следует отвергнуть тогда, когда отношение правдоподобия (1.16) будет не менее l_0. При этом критическое значение l_0 определяется таким образом, чтобы вероятность ошибки первого рода α была не больше некоторого заданного числа α_0.

Поскольку рассмотренный критерий проверки гипотез впервые был предложен в работах Неймана и Пирсона, его называют критерием Неймана — Пирсона.

Перейдем теперь к определению понятий простой и сложной гипотез. Эти понятия потребуются нам в приложениях теории проверки гипотез к задачам обнаружения сигналов в помехах.

Если гипотеза каждому событию из области В ставит в соответствие определенную вероятность, то такая гипотеза называется простой. Если же вероятности зависят, кроме того, и от параметров, то мы имеем дело со сложной гипотезой.

К определению простой и сложной гипотез можно подойти и несколько иначе.

Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ — неизвестные параметры закона распределения исследуемой случайной величины X (напри-

мер, для нормального закона $\theta_1 = a_x, \theta_2 = \sigma_x^2$). Если гипотезой определяется единственное значение всех k параметров (например, $a_x = 1, \sigma_x^2 = 1$ для нормального закона), то такая гипотеза называется простой. Если же согласно гипотезе некоторый параметр может иметь больше одного значения (например, $a_x \geqslant 1$), то мы имеем дело со сложной гипотезой.

Рассмотрим один практический пример. Пусть наблюдается некоторая реализация случайного процесса на выходе приемного устройства РЛС и на основании этой реализации необходимо решить, присутствует сигнал, отраженный от цели, или нет. Сформулируем эту задачу в форме проверки гипотез. Гипотеза H_0 состоит в том, что сигнал отсутствует (амплитуда сигнала $S=0$). Это простая гипотеза. Тогда гипотеза tfi — гипотеза о наличии сигнала, отраженного от цели (амплитуда сигнала $S>0$). Поскольку гипотезой H_1 не фиксируется значение амплитуды отраженного сигнала, то она является сложной.

Задача проверки двух гипотез для случая, когда одна из них (H_0) является простой, а вторая (H_1) — сложной, решается следующим образом. Пусть параметр Θ, значение которого не фиксируется гипотезой H_1, принимает некоторое множество конкретных значений: $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(i)}, \ldots, \theta^{(m)}$. Тогда для каждого фиксированного значения $\theta^{(i)}$ можно провести проверку гипотезы H_0 относительно простой гипотезы H_1. Если критическая область $\mathbf{B}_1(\theta^{(i)})$ идентична для всех $\theta^{(i)}$ из интервала его значений, то проверка гипотезы H_0 относительно сложной гипотезы H_1 не отличается от случая, когда гипотеза H_1 простая. Неопределенность, возникающая из-за того, что гипотеза H_1 сложная, оказывается несущественной.

Если же критические области для различных $\theta^{(i)}$ не идентичны, то не существует методов для нахождения наилучшего в указанном выше смысле критерия проверки гипотезы H_0 относительно сложной гипотезы H\. Последний случай в дальнейшем не встречается.

Пример 1. Пусть наблюдаемые значения случайной величины X расположены и диапазоне всех действительных чисел. Пусть H_0 — гипотеза о том, что случайная величина X подчинена нормальному закону с нулевым

средним значением $(a_x=0)$ и единичной дисперсией $(\sigma_x^2=1)$. Пусть, далее, H_1 — гипотеза о том, что случайная величина X подчинена нормальному закону со средним значением $a_x=1$ и дисперсией $\sigma^2=1$. На основании единичной (одномерной) выборки x из случайной величины X, необходимо проверить гипотезу H_0 относительно гипотезы H_1. Поскольку гипотезами H_0 и H_1 определяются все значения неизвестных параметров распределения, мы имеем дело со случаем проверки простых гипотез (рис. 1.2).

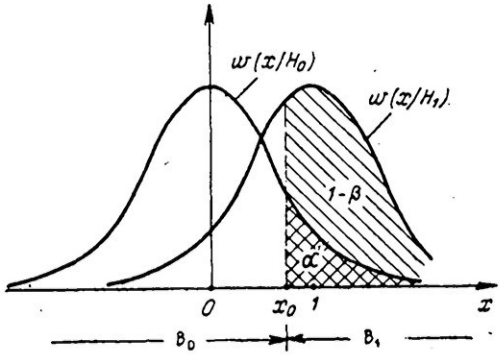


Рис. 1.2. К примеру 1.

Функция правдоподобия гипотезы H_0 равна

$$w(x/H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Функция правдоподобия гипотезы H_1 равна

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-1)^2\right].$$

Отношение правдоподобия записывается в виде

$$l(x)=\frac{w(x/H_1)}{w(x/H_0)}=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]}{\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}=$$

$$=\exp\left[\frac{1}{2}(2x-1)\right].$$

Критическая область $\mathbf{B}_1$ находится из условия

$$l(x) \geqslant l_0, \tag{1.17}$$

где l_0 определяется по допустимой вероятности ошибки первого рода а.

Поскольку при положительном значении аргумента логарифм есть действительная монотонно возрастающая функция, мы можем заменить условие (1.17) эквивалентным условием

$$\ln l(x) = x - \frac{1}{2} \geqslant \ln l_0,$$

откуда получим

$$x \geqslant \ln l_0 + \frac{1}{2} = x_0.$$

Таким образом, для принятия гипотезы H_1 необходимо, чтобы наблюдаемое значение x было больше некоторого фиксированного значения x_0. Точка x_0 делит множество наблюдаемых значений случайной величины Хна две области: область $\mathbf{B}_1$ при значениях x от x_0 до $+\infty$ и область $\mathbf{B}_0$ при значениях x от $-\infty$ до x_0. Точка x_0 по условию входит в область B|.

Вероятность ошибки первого рода равна

$$\alpha = \int_{\mathbf{B}_1} w(x/H_0)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \tag{1.18}$$

Так как значение а задано, то из уравнения (1.18) можно найти число x_0, при превышении которого можно принимать решение о том, что $a_x = 1$. Условная вероятность правильного решения равна

$$P = 1 - \beta = \int_{\mathbf{B}_1} w(x/H_1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-1)^2\right] dx \tag{1.19}$$

Пример 2. Видоизменим пример 1 следующим образом. Пусть, как и прежде, H_0 — гипотеза о том, что случайная величина X подчинена нормальному закону с нулевым средним значением и дисперсией, равной единице. Гипотеза H_1 состоит в том, что случайная величина X подчинена нормальному закону с дисперсией $\sigma_x^2=1$ и средним значением $a_x=a$, где a — неизвестное положительное число.

Тогда H_0 — простая гипотеза, а ее функция правдоподобия равна

$$w(x\mid H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

H_1 — сложная гипотеза с функцией правдоподобия

$$w(x\mid H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-a)^2\right].$$

В соответствии с примером I при фиксированном значении a критическая область $\mathbf{B}_1(a)$ для проверки гипотезы H_0 относительно гипотезы H_1 состоит из тех x, для которых

$$l_a(x)=\frac{w(x\mid H_1)}{w(x\mid H_0)}=\exp\left(ax-\frac{a^2}{2}\right)\geqslant l_0(a),$$

$$\ln l_a(x)=ax-\frac{a^2}{2}\geqslant \ln l_0(a),$$

$$x\geqslant \frac{\ln l_0(a)}{a}+\frac{a^2}{2}, \qquad (1.20)$$

т. е. $x\geqslant x_0(a)$.

Если теперь для двух разных значений $a=a_1$ и $a=a_2$ $x_0(a_1)>x_0(a_2)$, то из неравенства (1.20) следует, что $\mathbf{B}_1(a_2)$ во всяком случае содержит все точки x, входящие в $\mathbf{B}_1(a_1)$. Однако по критерию Неймана — Пирсона условная вероятность ошибки первого рода поддерживается постоянной

$$\alpha_{a_1}=\int\limits_{\mathbf{B}_1(a_1)} w(x\mid H_0)\,dx=\alpha_{a_2}=\int\limits_{\mathbf{B}_1(a_2)} w(x\mid H_0)\,dx=\alpha. \qquad (1.21)$$

Равенство (1.21) возможно только в том случае, если все $\mathbf{B}_1(a)$ равны друг другу и мы можем положить $B_1(a_2)=\mathbf{B}_1(a_1)$. Это значит, что все критерии для проверки гипотезы H_0 относительно любой из простых гипотез, составляющих *Ни* одинаковы.

1.1.3. Основные положения общей теории статистических решений

Общая теория статистических решений дает единый подход к построению оптимальных решающих устройств для обработки случайных сигналов. Основным достоинством этой теории является то, что она объединяет в себе все разнообразие используемых в статистике критериев оптимальности, причем эти критерии получаются из общей теории решений как частные случаи.

Рассмотрим основные положения общей теории решений и некоторые ее результаты применительно к задаче обработки радиолокационных сигналов.

Пусть $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$—n-мерная выборка (реализация) случайного сигнала. Тогда $S = (S_1, S_2 \ldots S_n)$—$n$-мерный случайный вектор. Множество всех возможных векторов S будем в дальнейшем называть пространством исходных сигналов и обозначать S. Все возможные сигналы S могут быть представлены как точки в пространстве сигналов S (рис. 1.3).

Для такого представления сигналов необходимо иметь априорные (предшествующие опыту) данные о распределении сигналов в пространстве S. Априорные данные в соответствии с характером сигнала могут быть заданы в двух видах: либо в виде задания плотности распределения $w(S)$ сигнала в пространстве S, если сигнал является чисто случайным, либо, если сигнал является функцией одного или более случайных параметров $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, о виде [задания распределения этих параметров $w_S(\theta)$.

В теории статистических решений рассматриваются два крайних случая априорных знаний об исходном сигнале: полное априорное знание о сигнале, когда известно распределение $w(S)$ в первом случае или распределение параметров $w_S(\theta)$ во втором, и полное априорное незнание, когда априорные распределения не известны.

Исходный сигнал поступает на вход решающего устройства, которое предназначено для анализа этого сигнала и принятия некоторого решения. В общей теории статистических решений под решающим устройством подразумевается наблюдатель (статистик). Однако это может быть и некоторое автоматическое устройство, работающее по определенному алгоритму.

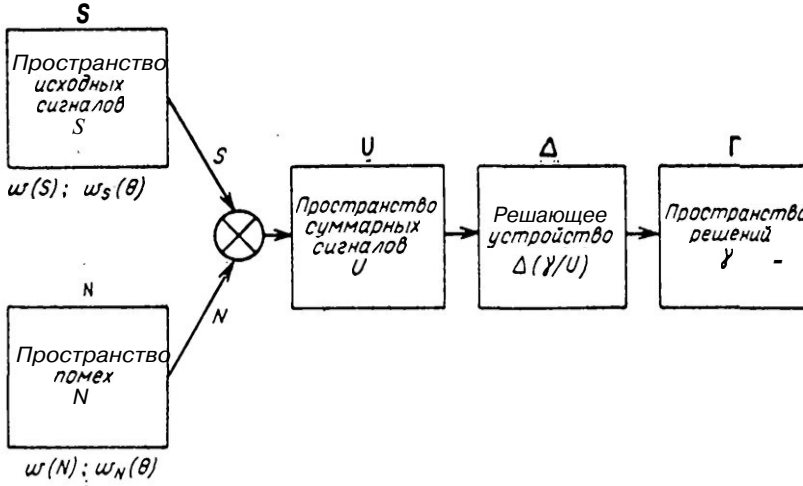


Рис. 1.3. Схема, иллюстрирующая постановку задачи статистических решений.

На вход решающего устройства, кроме исходного сигнала, который подразумевается как полезный, поступает также помеха *N*. Все возможные сигналы помехи образуют пространство помех N. Статистические характеристики помехи являются заданными, в задаче статистических решений, т. е. должны быть известны заранее. Они задаются в виде закона распределения $w(N)$ помехи в пространстве помех N или в виде закона распределения параметров $w_N(\theta)$, от которых зависит помеха (рис. 1.3).

Таким образом, суммарный сигнал на входе решающего устройства представляет собой комбинацию (смесь) сигнала и помехи

$$U = S \oplus N,$$

где значок Θ означает способ комбинирования сигнала и помехи (сложение, вычитание, умножение и т. д.).

Способ комбинирования сигнала и помехи является заданным в задаче статистических решений, т. е. должен быть известен заранее.

Пусть U_1, U_2, . . . U_n — n-мерная выборка (реализация) суммарного сигнала. Тогда $\boldsymbol{U}=(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ — n-мерный случайный вектор суммарного сигнала. Множество всех возможных векторов $\boldsymbol{U}$ будем и в дальнейшем называть пространством входных суммарных сигналов и обозначать U.

Статистическое описание ансамбля n-мерных выборок суммарного сигнала возможно в предположении, что исходный сигнал принимает некоторое фиксированное значение из пространства S. В этом случае может быть найдена условная плотность вероятности $w(U_1, U_2, \ldots, U_n/S)$, поскольку статистика помехи и способ комбинирования сигнала и помехи предполагаются известными.

Задача решающего устройства состоит в том, чтобы по n-мерной выборке $\boldsymbol{U}=(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ из суммарного сигнала решить оптимальным образом, какой именно сигнал присутствует на входе или какие значения имеют параметры исходного сигнала.

Все возможные решения, которые может сделать решающее устройство, называются пространством решений, которое обозначается Г. Каждое возможное решение из пространства Г будем обозначать γ. Пространство решений должно быть известно заранее.

Пространство решений может совпадать с пространством сигналов либо отличаться от него. Если необходимо решить, какой сигнал 5, присутствует на входе, то пространство решений аналогично пространству сигналов. Если же необходимо решить, какое значение имеют параметры б сигнала S, то пространство решений отличается от пространства сигналов.

Пространство решений может быть непрерывным, т. е. состоящим из бесконечного числа точек, непрерывно примыкающих друг к другу, либо дискретным, т. е. состоящим из конечного числа точек.

До сих пор мы не касались вопроса о структуре решающего устройства, предназначенного для перевода

(преобразования) пространства входных сигналов в пространство решений. Этот вопрос является центральным вопросом всей проблемы статистических решений и требует более детального рассмотрения.

Полное описание процесса решения может быть сделано заданием плотности вероятности того, что при условии появления фиксированного сигнала U на входе решающего устройства на выходе будет получено решение γ. Эта условная плотность вероятности обозначается $\Delta(\gamma/U)$ и называется решающей функцией или решающим правилом. По определению, решающая функция (правило) является случайной функцией. Однако в общей теории решений доказывается возможность замены случайных решающих функций эквивалентными им неслучайными решающими функциями. Неслучайная решающая функция соответствует такому случаю, когда по данному сигналу U принимается одно вполне определенное решение γ_U с вероятностью, равной единице, т. е. когда между сигналом U и решением γ имеется регулярная зависимость

$$\gamma = \gamma(U).$$

Если при неслучайной решающей функции под $\Delta(\gamma/U)$ также понимать (в целях универсальности) плотность вероятности принять решение γ при данном U, то следует полагать

$$\Delta(\gamma/U) = \delta(\gamma - \gamma_U), \qquad (1.22)$$

где $\delta(\gamma - \gamma_U)$ — дельта-функция, равная бесконечности при $\gamma = \gamma_U$ и нулю при $\gamma \neq \gamma_U$;

γ_U — решение, выносимое с вероятностью единица, на основе анализа входного сигнала U.

В дальнейшем будем пользоваться только неслучайными решающими функциями.

Вследствие влияния помех при любой решающей функции $\Delta(\gamma/U)$ неизбежны ошибки решения. Каждая такая ошибка сопровождается некоторыми потерями качества решения. При постановке задачи оптимального выбора решающей функции $\Delta(\gamma/U)$ предполагается, что в соответ-

ствии с характером решаемой задачи и требованиями, предъявляемыми к решению, мера потери заранее выбрана в виде функции $F(S, \gamma)$, называемой функцией потери. Функция потери строится так, что если решение γ_1 ближе к истинному значению 5, чем решение γ_2, то

$$F(S, \gamma_1) \leqslant F(S, \gamma_2).$$

Обычно правильным решениям приписываются нулевые потери, поэтому функция потери

$$F(S, \gamma) \geqslant 0.$$

Эта функция выбирается заранее и входит в условие задачи статистических решений. Выбор функции потери подробно обсуждается там, где рассматриваются конкретные приложения теории.

Так как 5 и γ являются случайными величинами (или случайными функциями времени), то и функция потери $F(S, y)$ является случайной величиной. Поэтому для оценки качества решения в теории статистических решений принимается не сама функция потери, а ее математическое ожидание, называемое средним риском

$$M[F(S, \gamma)] = R = \iint_{S\Gamma} F(S, \gamma)\, w(S, \gamma)\, dS d\gamma. \quad (1.23)$$

Очевидно, чем меньше величина среднего риска, тем лучше решение. Наилучшей (оптимальной) является такая решающая функция, которая обеспечивает минимум среднего риска R.

Так как между U и γ существует регулярная зависимость

$$\gamma = \gamma(U),$$

то

$$w(S, \gamma)\, dS d\gamma = w(S, U)\, dS dU.$$

Далее, так как

$$w(S, U) = w(S) w(U/S),$$

то выражение (1.23) можно представить в виде

$$R = \int_S w(S)\, dS \int_U F(S, \gamma_U)\, w(U/S)\, dU \qquad (1.24)$$

или

$$R = \int_S r_S w(S)\, dS, \qquad (1.25)$$

где

$$r_S = \int_J F(S, \gamma_U)\, w(U/S)\, dU \qquad (1.26)$$

называется условным риском или риском при фиксированном сигнале 5.

Из выражения (1.24) следует, что для получения оптимального решения необходимо знать априорную плотность вероятности сигнала 5. Если же априорная плотность вероятности сигнала не известна или известна неполностью, то оптимальное (с минимальным средним риском) решение получить невозможно.

Априорное распределение сигналов в некоторых задачах передачи и обработки информации известно или может быть определено с достаточной точностью на оснований экспериментального материала (радиосвязь, телевидение и др.). Однако во многих случаях и, в частности, в радиолокации, априорное распределение траекторий целей, а следовательно, и отраженных сигналов не известно и в принципе не может быть найдено из-за отсутствия сходных ситуаций, опытом которых можно было бы воспользоваться.

При отсутствии априорных сведений о сигнале применяются те или другие приближенные методы оптимизации решения.

Наиболее распространенными из них являются:

1. Метод условного риска r_S. Решающая функция $\Delta(\gamma/U)$ подбирается в этом случае таким образом, чтобы она давала наилучшие результаты (т. е. наименьшее значение риска r_S) для одного или нескольких, выбранных из каких-либо соображений, значений полезного сигнала S. Естественно, для других S выбранная таким образом решающая функция может оказаться далекой от оптимальной.

2. Метод равномерного распределения $w(S)$. Если распределение $w(S)$ совершенно неизвестно, то наиболее естественно полагать его равномерным в некотором интервале значений 5, т. е.

$$ttj\ (5) = \text{const}.$$

В этом случае оптимальная решающая функция получается фактически также из минимума условного риска, и если в действительности распределение w (5) окажется существенно неравномерным, то полученное таким образом решение не будет оптимальным.

3. Метод минимаксного критерия оптимальности. Как отмечалось ранее, каждому возможному сигналу можно поставить в соответствие некоторый условный риск. Вообще говоря, этот риск будет различным для различных сигналов и среди них будет иметься некоторый максимум

$$r_{\text{о макс}} = \max_{(S)} r_S.$$

Минимаксный критерий оптимальности является таким критерием, который обеспечивает наилучшее решение для наихудшего случая. Для получения минимаксного решения сравнивают различные решения на основе максимальных условных рисков $r_{S\text{макс}}$. В качестве оптимального выбирают то решение $\gamma_м$, которое обеспечивает наименьший из максимальных условных рисков, т. е.

$$r(S,\ \gamma_м) = \min_{(\Gamma)} r(S,\ \gamma)_{\text{макс}} = \min_{(\Gamma)} \cdot \max_{(S)} r(S,\ \gamma).$$

Методы нахождения минимаксного решения еще недостаточно разработаны и в дальнейшем применяться не будут.

§ 1.2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

1.2.1. Постановка задачи

При рассмотрении статистической модели процесса обработки радиолокационной информации будем иметь в виду только импульсные радиолокационные станции

(РЛС) кругового или секторного обзора. Предполагается, что основные сведения из теории радиолокации читателю известны.

Полезная информация в радиолокации получается вследствие отражения объектом (целью) части электромагнитной энергии зондирующих сигналов РЛС и, следовательно, зависит от отражающих свойств цели и ее удаления от РЛС. Как отражающая поверхность радиолокационных целей, так и среда, в которой распространяются радиоволны, подвержены беспрерывным флюктуациям. Поэтому отраженные от цели сигналы по своей природе являются случайными.

Наряду с полезными сигналами на вход приемного устройства РЛС поступают различного рода «ложные» сигналы, которые создают неопределенность ситуации при приеме, т. е. являются помехой приему полезных сигналов.

Задача приемного устройства РЛС состоит в оптимальной обработке принятых случайных сигналов с тем, чтобы выделить полезную информацию о цели с минимальными потерями.

Условимся в дальнейшем под полезной информацией понимать, в конечном счете, координаты и параметры траекторий движения целей. Поэтому оптимальное приемное устройство мыслится в виде комплекса устройств, осуществляющих как оптимальную обработку высокочастотных отраженных радиолокационных сигналов (оптимальная фильтрация), так и дальнейшую (последетекторную) обработку сигналов и координат для оптимального обнаружения и воспроизведения траекторий движущихся целей.

В данном параграфе, исходя из общих выводов теории статистических решений, рассматривается статистическая модель процесса приема и обработки информации импульсной обзорной РЛС.

1.2.2. Статистические характеристики принимаемых радиолокационных сигналов

Как нам уже известно, в теории статистических решений устанавливается следующая схема (модель) обработки: на входе решающего устройства принимается случайный сигнал (либо сигнал со случайными параме-

трами); решающее устройство обрабатывает этот сигнал в соответствии с некоторым установленным заранее решающим правилом и выдает на выход однозначное решение о самом сигнале (если он чисто случайный) или о параметрах этого сигнала (если сигнал является функцией случайных параметров).

При обработке радиолокационной информации окончательное решение выносится не о сигналах, присутствующих на входе решающего устройства, а о траекториях целей, от которых получены эти сигналы. Поэтому при построении обобщенной статистической модели процесса обработки радиолокационной информации наряду с понятиями обрабатываемых сигналов, решающих правил И принимаемых решений необходимо ввести еще дополнительное понятие первичного сообщения.

Назовем первичным сообщением траекторию, выполняемую целью за весь период времени ее наблюдения. Траектория движения цели описывается временными функциями ее координат относительно местоположения РЛС: дальности $-D(t)$, азимутального угла $\beta(t)$ и угла места $\varepsilon(t)$. Все возможные траектории образуют пространство траекторий, которое назовем пространством первичных сообщений и обозначим через Y. Каждую траекторию из пространства первичных сообщений будем обозначать через Y (рис. 1.4).

Траектория движения зависит от типа цели, задачи, решаемой целью, а также от ее маневренных возможностей. В общем случае траектория является случайной функцией времени и параметров. Поэтому для полного статистического описания множества траекторий необходимо знать априорную плотность вероятности $w(Y)$ каждой из них в пространстве Y. Однако, как правило, в задачах обработки радиолокационной информации априорные (доопытные) плотности вероятности не известны.

Указанную так называемую «априорную трудность» можно уменьшить, если использовать некоторые неслучайные закономерности, присущие траекториям реальных целей. Так, для подавляющего большинства траекторий можно указать класс функций, к которому принадлежит траектория и на этой основе построить более или менее подходящую модель движения цели.

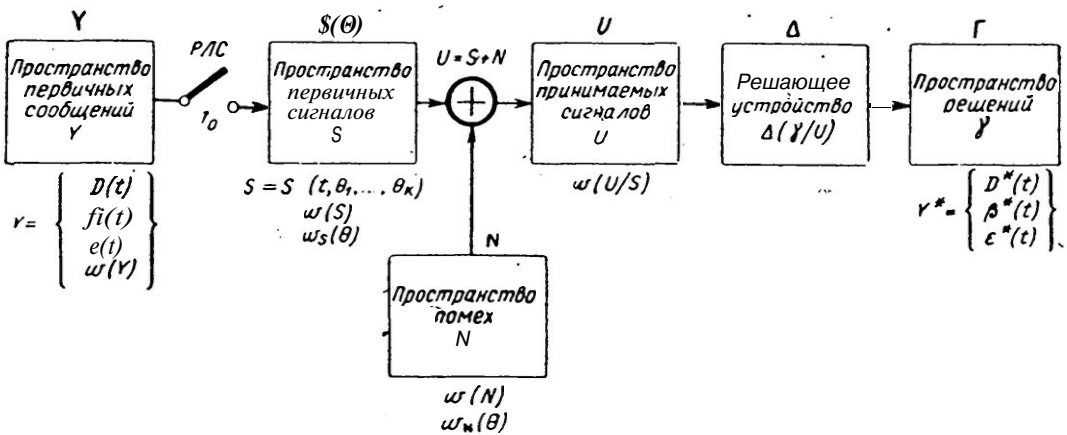


Рис. 1.4. Обобщенная схема процесса обработки радиолокационной **информации.**

В практике проектирования систем обработки радиолокационной информации часто представляют траекторию в виде суммы некоторых функций времени со случайными параметрами и, в частности, в виде временного полинома. В этом случае каждая из независимых координат траектории цели представляется в виде:

$$Y(t) = \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r f_r(t)$$

или

$$Y(t) = \sum_{r=0}^{s} \vartheta\, t^r,$$

где ϑ_r — коэффициенты с произвольными (случайными): значениями (параметры траектории).

Для конкретного проектирования системы обработки радиолокационной информации необходимо далее задаться степенью полинома s, что эквивалентно выбору рабочей гипотезы о характере изменения во времени координат целей, подлежащих обработке в системе.

Простейшим является представление координат цели в виде полиномов первой степени, что соответствует равномерному во времени изменению координат (прямолинейное и равномерное движение). Возможны, конечно, и другие предположения (гипотезы) о характере изменения координат цели. Выбор гипотезы о характере изменения координат цели во времени называется выбором статистической модели движения цели. Подробно этот вопрос рассматривается в гл. 4.

В процессе обзора пространства РЛС с узким лучом диаграммы направленности происходит кратковременное облучение целей электромагнитной энергией зондирующих импульсов и прием отраженных сигналов. При равномерном обзоре пространства отраженные сигналы от каждой цели поступают периодически. Каждый отраженный сигнал несет информацию о мгновенном положении цели в пространстве обзора, т. е. дает одну точку траектории. Новая точка траектории будет получена через период обзора T_0. Следовательно, радиолокатор преобразует информацию о траектории цели в дискретную последовательность отраженных сигналов (см. рис. 1.4).

В свою очередь, каждый отраженный от цели сигнал представляет собой серию радиоимпульсов («пачку» радиоимпульсов). Под пачкой понимается периодическая последовательность импульсов, отраженных от одной цели за время ее нахождения в луче диаграммы направленности антенны РЛС. Задержка импульсов пачки относительно начала отсчета (момента посылки зондирующих импульсов) является примерно одинаковой. Расчетное число N_0 импульсов в пачке определяется частотой следования зондирующих импульсов $F_п$, угловой скоростью вращения антенны $\Omega_а$ и шириной диаграммы направленности антенны 2φ на заданном уровне, т. е.

$$N_0 = \frac{2F_п\varphi}{\Omega_а}. \qquad (1.27)$$

В современных обзорных РЛС число N_0 колеблется в довольно широких пределах ($N_0 = 10 — 250$). Закон, по которому изменяются амплитуды импульсов в пачке, определяется видом функции $g(t)$, описывающей форму диаграммы направленности антенны РЛС на передачу и прием. На рис. 1.5 изображена пачка высокочастотных импульсов на входе приемника обзорной РЛС. Моменты времени $t_1, t_2 \ldots t_\lambda, \ldots, t_{N_0}$ являются моментами посылки зондирующих импульсов. Интервалы времени $t_D^{(1)}, t_D^{(2)}, \ldots, t_D^{(\lambda)}, \ldots, t_D^{(N_0)}$ характеризуют задержку каждого отраженного от цели импульса по отношению к соответствующему зондирующему импульсу. Длительность отраженных импульсов $\tau_и$ принимается одинаковой для всей пачки.

Обычно различают когерентную и некогерентную пачки отраженных импульсов. Когерентную пачку импульсов, отраженных от неподвижной цели, можно записать в виде последовательности сигналов

$$S_\lambda(t) = S_\lambda(t)\cos[\omega_0 t - \psi_\lambda(t) - \xi] \quad (\lambda = 1, 2 \ldots N_0), \qquad (1.28)$$

где ω_0 — несущая частота;

$S_\lambda(t)$ и $\psi_\lambda(t)$ — огибающая и медленно меняющаяся фаза λ-го отраженного импульса, определяемые излученным импульсом, расстоянием до цели и ее отражающими свойствами;

ξ — начальная фаза, изменение которой от им пульса к импульсу известно.

Некогерентная пачка импульсов записывается в виде

$$S_\lambda(t, \xi_\lambda) = S_\lambda(t)\cos[\omega_0 t - \psi_\lambda(t) - \xi_\lambda] \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, N \tag{1.2S}$$

где ξ_λ — начальная фаза λ-го импульса, причем все ξ считаются неизвестными случайными величинами, распре деленными равномерно в интервале $0 - 2\pi$.

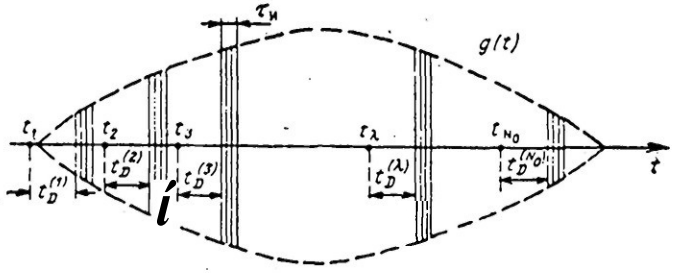


Рис. 1.5. Пачка высокочастотных импульсов,

В общем случае сигнал S_λ можно записать в виде

$$S_\lambda = S_\lambda(t, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k),$$

где t — текущее время;

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ — параметры сигнала.

Из-за наличия замираний в атмосфере, флюктуаций отражающей поверхности и перемещения целей в пространстве каждому первичному сообщению соответствует множество отраженных первичных сигналов. Появление каждого конкретного сигнала из пространства первичных сигналов можно описать заданием плотности вероятности $w(S)$ этих сигналов в пространстве S, либо плотности вероятности неизвестных параметров $w(\theta)$ в пространстве параметров Θ.

В некогерентных обзорных РЛС полезными параметрами, несущими информацию о наличии цели и ее координатах, являются амплитуды отраженных импульсов и время задержки пачки. Другие параметры не используются в процессе обнаружения и оценки координат це-

ли, и информация о них разрушается при обработке. Поэтому для полного статистического описания пачки отраженных импульсов достаточно знать плотность вероятности распределения амплитуд огибающей одиночных отраженных импульсов и корреляционную связь между импульсами в пачке.

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали, что одномерная плотность вероятности амплитуд импульсов, отраженных от флюктуирующей цели, описывается законом Релея. Выражение для плотности вероятности имеет вид

$$w(S_\lambda) = \frac{S_\lambda}{\overline{S_\lambda^2}} \exp\left[-\frac{S_\lambda^2}{2\overline{S_\lambda^2}}\right] \qquad (1.30)$$

где $\overline{S_\lambda^2}$ — среднее значение квадрата амплитуды λ-го импульса пачки.

Что касается корреляционной связи между импульсами пачки, то здесь нельзя дать определенного и одинакового для всех случаев ответа.

Характер этой связи в сильной степени зависит от типа цели.

В теоретических исследованиях обычно рассматриваются следующие случаи:

1. Пачки нефлюктуирующих импульсов, что соответствует приему сигналов от нефлюктуирующей цели. Это определенная идеализация реального процесса, так как все цели в большей или меньшей степени флюктуируют.

2. Пачки медленно флюктуирующих импульсов, соответствующие приему сигналов от медленно флюктуирующей («мерцающей») цели. При этом период флюктуаций значительно больше длительности пачки, так что все импульсы пачки изменяются «дружно» от периода к периоду обзора (от пачки к пачке).

3. Пачки быстро флюктуирующих импульсов, соответствующие приему сигналов от быстро флюктуирующей цели. При этом предполагается, что период флюктуаций настолько мал, что каждый импульс в пачке флюктуирует независимо от соседних. Быстро флюктуирующая цель также является идеализацией реальной цели.

В дальнейшем мы будем пользоваться только двумя крайними гипотезами о флюктуации цели — нефлюктуирующая цель и быстро флюктуирующая цель.

При приеме отраженные сигналы дополнительно искажаются помехами $N(t)$, имеющими место в системе (см. рис. 1.4). Статистические характеристики помех описываются законами их распределения $w(N)$ и во многих случаях бывают известны заранее.

В общем случае помехами в процессе обработки радиолокационной информации являются:

— внутренние шумы приемной аппаратуры, главным образом, шумы входных и смесительных каскадов приемника РЛС;

— хаотические отражения электромагнитных волн от капель дождя, тумана, облаков, растительности, местных предметов и т. д.;

— искусственные помехи, создаваемые противником в виде облака пассивных отражателей (пассивная помеха), либо с помощью специальных передатчиков помех (активная помеха).

Рассмотрим кратко основные статистические характеристики перечисленных составляющих помех.

Напряжение внутренних шумов приемника получается в результате наложения (суперпозиции) весьма большого числа малых независимых составляющих (дробовой эффект, флюктуации электронов и т. д.), причем ни одна из них не характеризуется очень большой по сравнению с другими дисперсией. Поэтому на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей считают, что одномерный закон распределения амплитуд напряжения внутренних шумов является нормальным, т. е.

$$w(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_N} \exp\left[-\frac{N^2}{2\sigma_N^2}\right]. \qquad (1.31)$$

В некогерентных импульсных обзорных РЛС внутренние шумы приемной аппаратуры не имеют междупериодной (от зондирования к зондированию) корреляции. Поэтому для них одномерный закон распределения вероятностей является исчерпывающей статистической характеристикой внутренних шумов.

Подробное исследование Сигналов, отраженных от хаотически расположенных частиц (в том числе и от облака пассивных отражателей [4], показало, что помеху, обусловленную хаотическими отражениями, можно рассматривать как стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения. Нормальный характер помехи объясняется тем, что она является суперпозицией большого числа независимых, или почти независимых, слагаемых, обусловленных отдельными рассеивающими частицами.

В общем случае активная и пассивная помехи имеют междупериодную корреляцию, т. е. амплитуды напряжения этих помех имеют статистическую связь между своими значениями в моменты t_1, $t_2 = T_п + t_1$, $t_3 = 2T_п + t_1$ и т. д. Однако в дальнейшем при синтезе алгоритмов и устройств для обработки радиолокационных сигналов предполагается, что суммарная помеха не имеет междупериодной корреляции. Тем самым общий случай хаотических отражений (в том числе и искусственные помехи) ид рассмотрения исключается, а учитываются лишь собственные шумы приемника и кроме того «шумоподобные» составляющие хаотических отражений и искусственных помех.

Если помеха представляет собой сумму составляющих: $N_1(t)$ от собственных шумов приемника, $N_2(t)$ от хаотических отражений и $N_3(t)$ от искусственных помех, т. е.

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t),$$

то в случае допущения независимости этих случайных процессов имеем

$$\sigma_N^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_3}^2.$$

Из последней формулы видно, что влияние «шумоподобных» составляющих от хаотических отражений и искусственных помех в данном случае сказывается в том, что увеличивается интенсивность суммарной помехи.

При прохождении через каскады приемной аппаратуры спектр мощности помехи ограничивается сравнительно узкой полосой пропускания этой аппаратуры. Поэтому помеха, сопутствующая приему отраженных радиолокационных сигналов, является узкополосной.

Узкополосную помеху можно представить в виде

$$N(t) = E_N(t)\cos[\omega_0 t + \psi_N(t)],$$

где $E_N(t)$ — огибающая узкополосной помехи (медленно меняющаяся функция времени);

$\psi_N(t)$ — фаза огибающей узкополосной помехи.

Как показано в [5], одномерный закон распределения амплитуд огибающей узкополосной помехи является релеевским

$$w(E_N) = \frac{E_N}{\sigma_N^2}\exp\left[-\frac{E_N^2}{2\sigma_N^2}\right] \text{ при } E_N > 0; \qquad w(E_N) = 0 \text{ при } E_N < 0, \tag{1.32}$$

фаза имеет равномерное распределение в интервале $(0—2\pi)$, т. е.

$$w(\psi_N) = \frac{1}{2\pi},$$

а корреляционная функция не равна нулю только при $\tau \leqslant \frac{1}{\Delta f_э}$, где $\Delta f_э$ — эффективная полоса пропускания приемного устройства.

Огибающая помехи может быть выделена на нагрузке линейного, квадратичного или какого-либо другого детектора огибающей.

На входе приемного устройства помеха суммируется с отраженными сигналами, образуя суммарные (принятые) сигналы (см, рис. 1.4). Рассмотрим статистические характеристики суммарных радиолокационных сигналов.

Каждый суммарный сигнал представляет собой аддитивную смесь отраженного сигнала и помехи

$$U_\lambda(t) = S_\lambda(t) + N(t).$$

Амплитуду суммарного сигнала можно выразить через огибающую и фазу суммарного процесса

$$U_\lambda(t) = E_\lambda(t)\cos[\omega_0 t + \psi_\lambda(t)],$$

где $E_\lambda(t)$ — огибающая λ-го суммарного сигнала;

$\psi_\lambda(t)$ — фаза огибающей этого сигнала.

Плотность распределения вероятности огибающей аддитивной смеси отраженного сигнала постоянной амплитуды и узкополосной шумовой помехи имеет следующий вид [5]:

$$w(E_\lambda) = \frac{E_\lambda}{\sigma_N^2} \exp\left[-\frac{E_\lambda^2 + S_\lambda^2}{2\sigma_N^2}\right] I_0\left(\frac{E_\lambda S_\lambda}{\sigma_N^2}\right), \quad (1.33)$$

где $I_0(Z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Выражение (1.33) получило название обобщенного закона Релея. При $S_\lambda = 0$ это выражение преобразуется в обычный закон Релея (1.32).

Введем обозначения:

$x_\lambda = \frac{E_\lambda}{\sigma_N}$ — относительная (нормированная) амплитуда огибающей;

$a_\lambda = \frac{S_\lambda}{\sigma_N}$ — относительная амплитуда сигнала; обычно a_λ называется отношением сигнал/помеха по напряжению, а $\frac{a_\lambda^2}{2}$ — отношением сигнал/помеха по мощности;

$w(x_\lambda | a_\lambda)$ — условная плотность распределения вероятностей суммарного сигнала при наличии отраженного сигнала;

$w(x_\lambda | 0)$ — условная плотность распределения вероятности суммарного сигнала при отсутствии отраженного сигнала.

С учетом введенных обозначений имеем

$$w(x_\lambda | a_\lambda) = x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2 + a_\lambda^2}{2}\right] I_0(a_\lambda x_\lambda), \quad (1.34)$$

$$w(x_\lambda | 0) = x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2}{2}\right]. \quad (1.35)$$

Графики плотностей вероятности (1.34) и (1.35) при различных значениях a приведены на рис. 1.6. Из графиков следует, что с увеличением a обобщенный закон Релея по форме все более приближается к нормальному

закону. Это положение можно показать также аналитически.

При больших значениях аргумента $(a_\lambda x_\lambda \gg 1)$ имеет место следующее асимптотическое разложение для модифицированной функции Бесселя [8]:

$$I_0(Z) = \frac{\exp[z]}{} \left(1 + \frac{1}{8z} + \dots\right).$$

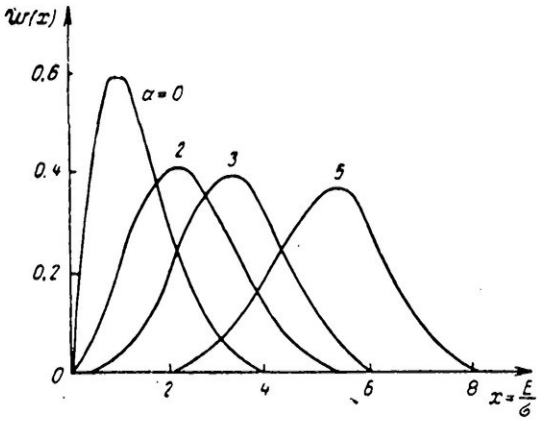


Рис. 1.6. Плотность распределения вероятности амплитуд смеси сигнала постоянной амплитуды и узкополосной шумовой помехи.

Подставляя это выражение в формулу (1.34), получим приближенную формулу

$$w(x_\lambda \mid a_\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_\lambda - a_\lambda)^2}{2}\right]\left[\sqrt{\frac{x_\lambda}{a_\lambda}}\left(1 + \frac{1}{8a_\lambda x_\lambda}\right)\right]. \tag{1.36}$$

Из этой формулы следует, что при $a_\lambda x_\lambda \gg 1$ с точностью до поправочного множителя

$$\sqrt{\frac{x_\lambda}{a_\lambda}}\left(1 + \frac{1}{8a_\lambda x_\lambda}\right)$$

обобщенный закон Релея переходит в нормальный закон распределения вероятности. Поправочный множи-

тель в большинстве случаев может быть опущен (при $a_\lambda \approx 3 \div 5$).

Выражения (1.34) и (1.35) представляют собой законы распределения вероятностей амплитуд огибающей одиночного импульса при наличии и отсутствии сигнала соответственно.

Теперь, исходя из принятого условия об отсутствии междупериодной корреляции помех, легко получить плотность совместного распределения амплитуд огибающих пачки из N_0 импульсов в области цели

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}/a_\lambda) = w(x_1/a_1)\, w(x_2/a_2) \ldots w(x_{N_0}/a_{N_0}) =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{N} x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2 + a_\lambda^2}{2}\right] I_0(a_\lambda x_\lambda). \qquad (1.37)$$

Соответственно для N_0 выборок в области помехи (при отсутствии цели) имеем

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}/0) = \prod_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2}{2}\right]. \qquad (1.38)$$

В случае быстрых флюктуаций цели амплитуда огибающей смеси сигнала с помехой подчинена закону Релея [5].

$$w(x_\lambda/k_\lambda) = \frac{x_\lambda}{1 + k_\lambda^2} \exp\left[-\frac{x_\lambda^2}{2(1 + k_\lambda^2)}\right], \qquad (1.39)$$

где $k_\lambda^2 = \frac{\overline{S^2}}{\sigma_N^2}$ — отношение среднего квадрата амплитуды сигнала к дисперсии помехи.

Плотность совместного распределения вероятностей амплитуд огибающих пачки из N_0 импульсов для данного случая будет равна

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}/k_\lambda) = \prod_{\lambda=1}^{N_0} \frac{x_\lambda}{1} \exp\left[-\frac{x_\lambda^2}{2(1 + k_\lambda^2)}\right]. \qquad (1.40)$$

На этом мы заканчиваем краткое рассмотрение статистических характеристик входных сигналов, т. е. сигналов, поступающих на вход решающего устройства обработки радиолокационной информации,

1.2.3. Общая характеристика решающих устройств для обработки радиолокационной информации

Рассмотренная в § 1.1 схема статистических решений иллюстрирует общий подход с точки зрения теории статистических решений к выбору оптимального решающего устройства. Как неоднократно подчеркивалось, смысл оптимальности решения зависит от существа решаемой задачи.

Поскольку решающее устройство для обработки радиолокационной информации предназначено для преобразования множества траекторий целей в множество оценок временных функций, описывающих эти траектории (см. рис. 1.4), то естественно поставить задачу синтеза такого решающего устройства на основе выводов теории статистических решений. Однако решение этой задачи в общем виде пока невозможно из-за отсутствия методики синтеза, пригодной для практического использования.

В настоящее время единственно возможной является следующая последовательность решения задачи оптимизации процесса обработки радиолокационной информации:

1) весь процесс обработки разбивается на элементарные операции, легко поддающиеся математическому описанию;

2) для каждой элементарной операции строится оптимальное решающее устройство в смысле теории статистических решений;

3) производится совместная оптимизация совокупности решающих устройств.

В соответствии с этим процесс обработки радиолокационной информации в дальнейшем разбивается на следующие операции:

1. Фильтрация принимаемых высокочастотных радиолокационных сигналов, которая осуществляется в радио-

частотном тракте приемника РЛС. Оптимальность фильтрации радиолокационных сигналов понимается, как правило, в смысле обеспечения максимального отношения амплитуды каждого принимаемого сигнала к среднеквадратичному значению напряжения помехи на входе детектора, а следовательно, и на его выходе (при монотонной характеристике детектора).

Необходимо отметить, что устройства (фильтры), рассчитанные на то, чтобы обеспечить оптимальную фильтрацию полезных сигналов не являются решающими устройствами в смысле теории статистических решений, так как они не выносят никаких решений относительно наличия или отсутствия сигнала. Их роль сводится к тому, чтобы помочь составить суждение (решение) о сигнале последующему (последетекторному) решающему устройству.

Рассмотрению вопросов оптимальной фильтрации радиолокационных сигналов посвящено большое число опубликованных работ советских и иностранных авторов [3, 4, 6 и др.].

2. Обнаружение принимаемых радиолокационных сигналов. Задача обнаружения решается в устройствах последетекторной обработки сигналов и состоит в вынесении однозначного решения: либо сигнал есть, либо сигнала нет. Оптимальность решения задачи обнаружения сигналов понимается, как правило, © смысле обеспечения минимального числа ошибок решения. Ошибки решения могут быть двух родов: ошибка первого рода состоит в том, что решающее устройство принимает решение о наличии сигнала, когда на самом деле его нет; ошибка второго рода состоит в том, что принимается решение об отсутствии сигнала, когда на самом деле он есть.

3. Определение мгновенного положения цели (координат цели) в пространстве по результатам одного обзора. Для этого необходимо найти статистическую оценку времени задержки отраженных импульсов относительно моментов посылки зондирующих импульсов (оценка дальности цели), а также оценку углового положения антенны РЛС в момент прохождения максимума диаграммы направленности через центр цели (оценка углового положения цели). Оптимальность решения задачи оценки параметров понимается в смысле макси-

мального приближения оценки к оцениваемому параметру.

4. Обнаружение траектории цели по совокупности радиолокационных сигналов, полученных в ряде последовательных обзоров РЛС. По смыслу и применяемым ме-

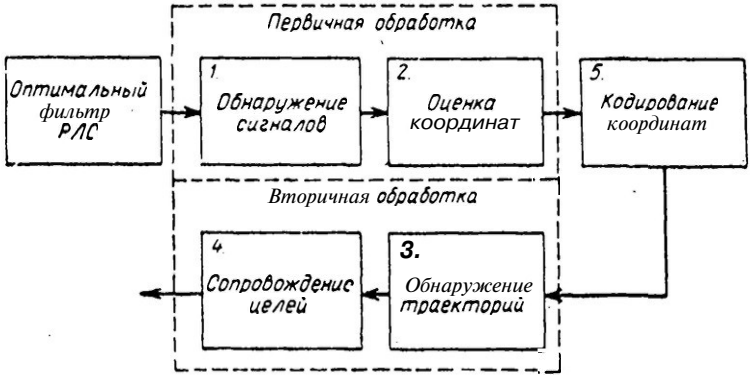


Рис. 1.7. Последовательность обработки радиолокационной информации.

тодам решения задача обнаружения траекторий аналогична задаче обнаружения сигналов.

5. Слежение за траекторией цели (сопровождение цели). Слежение за траекторией цели сводится к нахождению оценок параметров движения цели (скорости, ускорения и т. д.), а также сглаженных и экстраполированных координат.

На рис. 1.7 показана последовательность обработки радиолокационной информации и функции, выполняемые соответствующими устройствами. Первое и второе решающие устройства оперируют с первичными радиолокационными сигналами, искаженными помехой, третье и четвертое решающие устройства оперируют уже не с радиолокационными сигналами, а с координатами целей, полученными в процессе первичной обработки этих сигналов. Между этими группами решающих устройств возможно кодирующее устройство (5) для преобразования координат к виду, удобному для машинной обработки.

§ 1.3. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ И ТРАЕКТОРИЙ

1.3.1. Исходные предпосылки

Как уже отмечалось, задачу обнаружения при обработке радиолокационной информации целесообразно решать в два этапа:

1. В процессе первичной обработки принимаемых радиолокационных сигналов с целью обнаружения пачек импульсов (отметок), отраженных от целей. Исходными сигналами для решения задачи обнаружения отметок являются суммарные сигналы (полезные сигналы + помеха), поступающие на вход приемника РЛС.

2. В процессе вторичной обработки радиолокационной информации с целью обнаружения (завязки) траекторий интересующих нас целей. Исходными сигналами для решения задачи обнаружения траекторий являются одиночные отметки, обнаруженные в процессе первичной обработки. Помехами обнаружению траекторий являются ложные отметки, образующиеся вследствие допускающихся при обнаружении полезных сигналов ошибок первого рода.

В данном параграфе рассматривается общий подход к решению задачи обнаружения случайных сигналов с точки зрения теории статистических решений. Полученный алгоритм затем иллюстрируется на конкретном примере обнаружения пачки отраженных от нефлюктуирующей цели некогерентных импульсов.

1.3.2. Алгоритм оптимального обнаружения случайных сигналов

Рассмотрим задачу обнаружения сигналов в помехах с точки зрения теории статистических решений. Так как в задаче обнаружения имеется только два возможных решения, то часто такая задача называется двоичной (бинарной) задачей обнаружения.

Задача двоичного обнаружения по своему смыслу есть задача проверки гипотезы H_0 о том, что на входе решающего устройства есть только помеха по отноше-

ию к альтернативной гипотезе H_1 о том, что на входе есть сигнал и помеха. Множество решений в задаче обнаружения содержит лишь две точки, а именно: γ_0 — решение, что на входе имеется только помеха $(S=0)$ и γ_1 — решение, что на входе имеется сигнал и помеха $(S>0)$.

Априорную вероятность гипотезы H_1 обозначим через P_S, а априорную вероятность гипотезы H_0 — через Q_S. Очевидно,

$$P_S+Q_S=1.$$

Суммарный сигнал, принятый на вход решающего устройства обнаружения, представляет собой фиксированную выборку элементарных сигналов, наблюдаемых в заранее выбранные моменты времени $t_1<t_2<\ldots<t_N$ (временное положение сигнала считается известным).

Совокупность случайных величин $V(t_1), V(t_2), \ldots, U(t_{N_0})$ составляет N_0-мерный вектор принятного сигнала $\boldsymbol{U}=(U_1, U_2, \ldots, U_{N_0})$, который представляет собой либо аддитивную смесь полезного сигнала $\boldsymbol{S}=(S_1, S_2, \ldots, S_{N_0})$ и помехи $\boldsymbol{N}=(N_1, N_2, \ldots, N_{N_0})$, т. е. $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N}$ при справедливости гипотезы H_1, либо только помеху $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{N}$ при справедливости гипотезы H_0.

Поскольку статистические харакхеристики помехи считаются известными, можно найти выражения для условной плотности вероятности вектора принятых сигналов при справедливости гипотезы H_1 — $\boldsymbol{U}/H_1)$ и при справедливости гипотезы H_0 — $w(\boldsymbol{U}/H_0)$

Решение задачи обнаружения можно геометрически представить как разбиение пространства принимаемых сигналов U на две части U_0 и U_1, соответствующие гипотезам H_0 и H_1. Подобное разбиение для случая $N_0=2$ схематически изображено на рис. 1.8.

Поскольку по данному входному сигналу $\boldsymbol{U}$ принимается одно конкретное решение, в результате возможны следующие исходы:

I. Принято решение γ_0 об отсутствии сигнала и на самом деле сигнал отсутствует $(S=0)$. Вероятность этого исхода обозначим $P_{\text{в}}$.

2. Принято решение γ_1 о наличии сигнала, а на самом деле сигнала нет $(S=0)$. Такой исход называется ложным обнаружением. Вероятность ложного обнаружения обозначим $P_{ло}$.

3. Принято решение γ_0 об отсутствии сигнала, а на самом деле сигнал есть $(S>0)$. Такой исход называется пропуском сигнала. Вероятность пропуска обозначим $P_{проп}$.

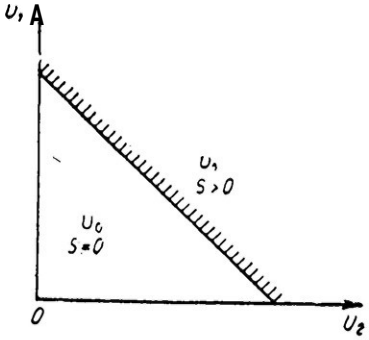


Рис. 1.8. К решению задачи обнаружения.

4. Принято решение γ_1 о наличии сигнала и на самом деле он есть $(S>0)$. Такой исход называется правильным обнаружением сигнала. Вероятность правильного обнаружения обозначим $P_{обн}$.

Исходы 1 и 4 являются правильными решениями, а исходы 2 и 3 — неправильными (ошибочными).

Для вероятностей исходов имеют место очевидные соотношения:

$$P_{обн} = \int_{U_1} w(U/H_1)\,dU,$$

$$P_{ло} = \int_{U_1} w(U/H_0)\,dU, \qquad (1.41)$$

$$P_{проп} \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_н = 1 - P_{ло}.$$

В нашу задачу входит построение оптимального решающего устройства обнаружения. Очевидно, решающее устройство будет тем лучше, чем меньше ошибочных решений оно принимает. Следовательно, в качестве критерия оптимальности решающего устройства обнаружения необходимо выбрать критерий минимального количества ошибочных решений.

Исходя из смысла задачи обнаружения и возможных исходов при принятии решения, функцию потери выберем в виде табл. 1.1.

ТАБЛИЦА 1.1

Сигнал		$S_0 (S = 0)$	$S_1 (S > 0)$
Решение	То	0	C_1
	γ_1	C_2	0

В этой функции правильным решениям приписываются нулевые потери, пропуску сигнала — постоянные потери C_1, а ложному обнаружению — постоянные потери C_2.

Теперь можно получить оптимальную решающую функцию (решающее правило) для обнаружения сигнала. Как нам известно, такой решающей функцией является решающая функция, обеспечивающая минимальный средний риск R.

Выражение для среднего риска (1.23} в этом случае принимает вид суммы:

$$R = \sum_S \sum_\gamma F(S, \gamma) P(S, \gamma), \qquad (1.42)$$

где $P(5, \gamma)$ — совместная вероятность сигнала 5 и решения γ.

Сумма (1.42) при выбранной функции потери записывается следующим образом:

$$R = C_2 P(S_0 \gamma_1) + C_1 P(S_1, \gamma_0). \qquad (1.43)$$

Это выражение можно записать также в виде

$$R = C_2 P(S_0) \text{ Я } (\gamma_1 / S_0 + C_1 P(S_1) P(\gamma_0 / S_1). \qquad (1.44)$$

Входящие в формулу (1.44) вероятности имеют следующий смысл:

$P(S_0) = Q_S$ — априорная вероятность отсутствия сигнала;

$p(S_1) = P_S$ — априорная вероятность наличия сигнала;

$P(\gamma_1/S_0) = P(\gamma_1/H_0)$ — вероятность ложного обнаружения;

$P(\gamma_0/S_1) = P(\gamma_0/H_1)$ — вероятность пропуска сигнала.

При этом средний риск равен

$$R = C_2 Q_S P_{\text{ло}} + C_1 P_S P_{\text{проп}}. \qquad (1.45)$$

Очевидно, при прочих равных условиях средний риск будет тем меньше, чем меньше вероятности ложного обнаружения $P_{\text{ло}}$ и пропуска сигнала $P_{\text{проп}}$. Выбор оптимальной решающей функции состоит в минимизации взвешенной суммы этих вероятностей.

Учитывая соотношения (1.41), имеем

$$R = P_S C_1 \left(1 - \int_{U_1} w(U/H_1)\, dU\right) + Q\ C_2 \int_{U_1} w(U/H_0)\, dU.$$

После очевидных преобразований получим

$$R = P_S C^1 + \int_{U_1} [-P_S C^1 w(U/H_1) + Q_S C^2 w(U/H_0)]\, dU. \qquad (1.46)$$

Первый член выражения (1.46) от решающей функции не зависит. Поэтому минимальное значение среднего риска достигается в том случае, если подынтегральное выражение в (1.46) имеет минимальное в алгебраическом смысле значение. Минимальное значение подынтегрального выражения достигается, если выполняется условие

$$P_S C_1 w(U/H_1) \geqslant Q_S C_2 w(U/H_0),$$

или

$$\frac{w(U/H_1)}{w(U/H_0)} \geqslant \frac{Q_S C_2}{P_S C^1}. \qquad (1.47)$$

Обозначим отношение правдоподобия

$$\frac{w(U/H_1)}{w(U/H_0)} = l(U).$$

Обозначим также $\frac{Q_S C_1}{P_S C_2} = l_0$. Тогда алгоритм оптимального обнаружения будет состоять в следующем.

Полагаем $\gamma = \gamma_1$, если

$$l(\boldsymbol{U}) \geqslant l_0; \tag{1.48}$$

полагаем $\gamma = \gamma_0$, если

$$l(\boldsymbol{U}) < l_0. \tag{1.48а}$$

Здесь l_0 играет роль порога, зависящего от заданных стоимостей ошибочных решений и априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала.

Таким образом, для принятия оптимального решения в задаче обнаружения необходимо определять лишь одну функцию от принятых сигналов, а именно, отношение правдоподобия. Эта функция совершенно не зависит от стоимостей, приписываемых ошибочным решениям и априорной вероятности наличия сигнала. Величины C_1, C_2, P_S, Q_S используются лишь при установке порога обнаружения.

При $C_1 = C_2 = 1$ критерий среднего риска называется критерием идеального наблюдателя [6].

При синтезе решающих устройств обнаружения, кроме критериев среднего риска и идеального наблюдателя, часто используется хорошо известный в статистике критерий Неймана — Пирсона (см. § 1.1). Процедура решения Неймана — Пирсона, так же как и в предыдущем случае, состоит в вычислении отношения правдоподобия $l(\boldsymbol{U})$ и сравнении этого отношения с фиксированным порогом, т. е.

$$\frac{w(\boldsymbol{U}/H_1)}{w(\boldsymbol{U}/H_0)} \geqslant l'_0. \tag{1.49}$$

Однако порог l'_0 определяется в этом случае, исходя из допустимой вероятности ложного обнаружения

$$l'_0 = f(P_{\text{ло}})$$

и не зависит от априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала.

Рассмотренные критерии оптимальности обнаружения построены на основе фиксированного объема выборки

сигнала, принимаемого на входе решающего устройства обнаружения. Однако во многих случаях и, в частности, при обнаружении траекторий целей по совокупности отметок, полученных в соседних периодах обзора РЛС, фиксация объема выборки оказывается нецелесообразной вследствие дополнительной задержки в выдаче решения, а также из-за сложности технической реализации соответствующих устройств.

В этом случае может быть использован метод решения, основанный на последовательном (пошаговом) анализе входных сигналов без предварительной фиксации объема выборки. Этот метод называется методом последовательного анализа [1].

Как показал Вальд, оптимальным критерием последовательного анализа является критерий, основанный на исследовании отношения правдоподобия. Оптимальность последовательного анализа отношения правдоподобия состоит в том, что при этом обеспечивается минимальное среднее время принятия решения при заданных вероятностях ложного обнаружения $P_{ло}$ и пропуска сигналов $P_{проп}$.

Процесс принятия решений при последовательном анализе состоит в следующем. После приема очередного k-го сигнала вычисляется отношение правдоподобия

$$l_k = \frac{w(U_1, U_2, \ldots, U_k/H_1)}{w(U_1, U_2, \ldots, U_k/H_0)}.$$

Если это отношение превышает некоторое число B, называемое верхним порогом, то принимается решение о справедливости гипотезы H_1, т. е. об обнаружении сигнала. Если отношение правдоподобия стало меньше некоторого числа A, называемого нижним порогом, то гипотеза H_1 отвергается, т. е. принимается решение об отсутствии сигнала. Диапазон значений отношения правдоподобия от A до B является зоной неопределенности. В этом диапазоне испытания продолжаются.

"Значения нижнего и верхнего порогов определяются по формулам [1]:

$$A = \frac{P_{проп}}{1 - P_{ло}};$$

$$B = \frac{1 - P_{проп}}{P_{ло}}.$$

1.3.3. Пример решения задачи оптимального обнаружения некогерентной пачки импульсов по критерию Неймана—Пирсона

Проиллюстрируем решение задачи оптимального обнаружения сигналов на примере обнаружения некогерентной пачки из N_0 нефлюктуирующих импульсов по критерию Неймана — Пирсона.

Необходимые для составления отношения правдоподобия условные плотности вероятности принятых сигналов при справедливости гипотезы $H_1(S>0)$ и при справедливости гипотезы $H_0(S=0)$ определяются формулами (1.37) и (1.38) соответственно. Подставив (1.37) и (1.38) в формулу (1.49), получим отношение правдоподобия

$$l(x_1, \ldots, x_{N_0}) = \prod_{\lambda=1} \frac{x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2 + a_\lambda^2}{2}\right] I_0(a_\lambda x_\lambda)}{x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2}{2}\right]} =$$

$$= \exp\left[\sum_{\lambda=1}^{N_0} \frac{a_\lambda^2}{2}\right] \sum_{\lambda=1}^{N_0} I_0(a_\lambda x_\lambda).$$

В дальнейшем вместо отношения правдоподобия $l(x_1, \ldots, x_{N_0})$ удобнее пользоваться его натуральным логарифмом $\ln l(x_1, \ldots, x_{N_0})$. Поскольку логарифм является монотонной функцией своего аргумента, то неравенство (1.49) после логарифмирования не нарушится. Натуральный логарифм отношения правдоподобия имеет вид

$$\ln l(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}) = -\sum_{\lambda=1}^{N_0} \frac{a_\lambda^2}{2} + \sum_{\lambda=1}^{N_0} \ln I_0(a_\lambda x_\lambda) \geqslant \ln l'_0.$$

Следовательно, решение об обнаружении принимается по правилу

$$\sum \ln I_0(a_\lambda x_\lambda) \geqslant \ln l'_0 + \sum \frac{a_\lambda^2}{2}. \qquad (1.50$$

Выражение (1.50) определяет алгоритм оптимального обнаружения пачки нефлюктуирующих радиолокационных сигналов. Согласно этому алгоритму процедура оптимального обнаружения сводится к выполнению следующих операций.

1, Нелинейное преобразование входного сигнала, соответствующее выделению огибающей каждого импульса пачки. Характеристика детектора огибающей должна удовлетворять условию

$$I_\lambda = \ln I_0(a_\lambda x_\lambda). \qquad (1.51)$$

Известно следующее приближенное представление функции (1.51):

$$\ln I_0(z) \approx \begin{cases} \frac{z^2}{4}, & \text{при } z \ll 1, \\ \zeta, & \text{при } z \gg 1. \end{cases}$$

Случай $\zeta = a_\lambda x_\lambda \ll 1$ соответствует слабому сигналу. Случай $z = a_\lambda x_\lambda \gg 1$ соответствует сильному сигналу.

Таким образом, оптимальная характеристика детектора должна быть квадратичной для слабых по сравнению с помехой сигналов и линейной для сильных. Такой характеристикой обладает обычный детектор огибающей, так как при слабых сигналах начальная часть его детекторной характеристики является квадратичной.

2. Суммирование (накопление) взвешенных амплитуд сигналов, полученных на выходе детектора. При приеме сильных сигналов необходимо образовать сумму

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda a_\lambda = a_0 \sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda g_\lambda,$$

т. е. необходимо просуммировать на N_0 позициях принимаемые сигналы x_λ с весами g_λ, определяемыми формой диаграммы направленности антенны. Алгоритм оптимального обнаружения пачки в этом случае будет

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda g_\lambda \geqslant \frac{\ln l_0'}{a_0} + \frac{a_0}{2} \sum_{\lambda=1}^{N_0} g_\lambda^2 = x_0.$$

При приеме слабых сигналов необходимо образовать сумму

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} 2 \quad 2 \qquad a_0^2 \sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda^2 g_\lambda^2 .$$

Алгоритм оптимального обнаружения пачки слабых сигналов запишется в виде

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda^2 g_\lambda^2 \geqslant 4 \frac{\ln l_0'}{a_0^2} + 2 \sum_{\lambda=1}^{N_0} g_\lambda^2 = x_0' .$$

• 3. Сравнение полученной суммы с порогом $x_0(x'_0)$. Если результат суммирования превышает порог, то принимается решение об обнаружении цели.

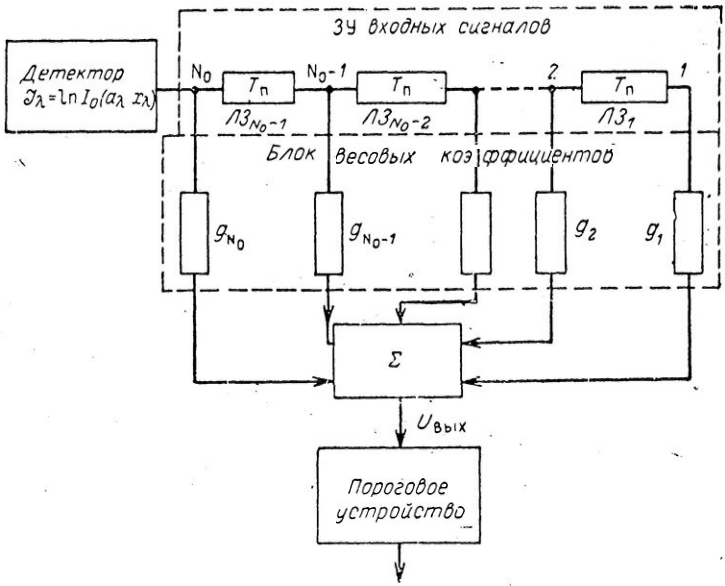


Рис. 1.9. Структурная схема оптимального решающего устройства обнаружения.

На рис. 1.9 приведена структурная схема решающего устройства для оптимального обнаружения пачки некогерентных импульсов. В схему входят: детектор, запоминающее устройство амплитуд сигналов на выходе детек-

тора, блок весовых коэффициентов, накопитель (сумматор) и пороговое устройство.

Рассмотренный пример иллюстрирует применение теории для синтеза оптимального алгоритма обнаружения пачки некогерентных импульсов, отраженных от нефлюктуирующей цели. Аналогично могут быть получены алгоритмы оптимального обнаружения пачек импульсов при других предположениях о статистике отраженных сигналов.

§ 1.4. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

1.4.1. Исходные предпосылки

В процессе обработки радиолокационной информации задачи оценки параметров возникают, по крайней мере, на двух этапах.

1. При оценке координат мгновенного положения целей в процессе первичной обработки радиолокационных сигналов.

2. При оценке параметров траекторий движущихся целей в процессе вторичной обработки отметок.

Решение задачи оценки координат мгновенного положения целей производится одновременно с обнаружением отраженного сигнала (отметки). Статистические характеристики сигналов, поступающих на вход решающего устройства оценки координат, одинаковы со статистическими характеристиками сигналов, поступающих на вход решающего устройства обнаружения. Следовательно, задачи оценки параметров сигнала и обнаружения сигнала имеют общую статистическую модель, описанную в § 1.1. Различие между задачами оценки и обнаружения сводится в статистическом смысле только к различиям в выборе функций потерь.

Однако при решении задач оценки координат по принятым сигналам необходимо дополнительно иметь в виду следующие исходные предпосылки.

I. Задача оценки координат возникает только для тех сигналов (отметок), наличие которых зафиксировано практически достоверно. Поэтому можно считать, что при оценке координат имеет место существенное превы-

шение сигнала над помехой, во всяком случае достаточное для его надежного обнаружения.

2. Задача оценки координат может быть решена, если известно, каким образом оцениваемая координата закодирована в принимаемом сигнале. В импульсных РЛС обзорного действия координаты цели закодированы в следующих параметрах сигналов:

— в задержке отраженных сигналов во времени относительно моментов посылки зондирующих импульсов (дальность до цели);

— в амплитудной модуляции импульсов пачки в соответствии с формой огибающей диаграммы направленности антенны на прием и передачу, что позволяет оценивать угловые координаты цели по положению максимума огибающей пачки.

3. Помехами при оценке координат являются искажения формы и амплитуд импульсов в принимаемой пачке. Эти помехи не являются аддитивными по отношению к оцениваемым координатам.

Решение задачи оценки параметров траекторий движущихся целей включает в себя определение оценок (численных значений) скорости, ускорения, сглаженных координат траекторий, экстраполированных координат траекторий и т. д. Эта задача решается при вторичной обработке по координатам отметок, наблюдаемых в ряде соседних обзоров РЛС. Помехами при оценке параметров траекторий являются ошибки оценки координат, а также ложные отметки.

При оценке параметров траектории решаются следующие три задачи:

— воспроизведение (простая оценка) параметров траектории;

— сглаживание и интерполяция траекторий;

— экстраполяция траекторий.

При простой оценке ставится задача оценки численных значений параметров траектории в момент последнего наблюдения координат цели. При сглаживании (интерполяции) ставится задача воспроизведения функции, описывающей изменение координат во времени. Оценка сглаженных координат на момент последнего наблюдения также относится к простой оценке. Оценка сглаженной координаты в любой точке внутри интервала наблюдения (кроме точки последнего наблюдения)

называется интерполяцией. При экстраполяции ставится задача оценки координат на моменты времени, выходящие за интервал наблюдения.

В данном параграфе рассматривается решение задачи оценки параметров в общем виде. Применение одного из полученных алгоритмов иллюстрируется примером оценки азимута цели по пачке некогерентных импульсов.

1.4.2. Алгоритм оптимальной оценки параметров сигналов

В теории статистических решений задача оценки параметров сигналов формулируется следующим образом.

Имеется выборка из n случайных сигналов $U_1, U_2, \ldots, U_n$, образующая n-мерный вектор входного сигнала U. Сигнал U состоит из аддитивной смеси полезного сигнала $S(t, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ и помехи $N(t)$. Закон распределения сигнала $U=(U_1 U_2, \ldots, U_n)$ известен точно, за исключением параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Это означает, что при фиксированных значениях параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ известна n-мерная условная вероятность

$$w(U_1, U_2, \ldots, U_n/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = w(U/\theta).$$

Кроме того, известны априорные плотности вероятности $w(\theta_1), w(\theta_2), \ldots, w(\theta_k)$ параметров. На основании заданных таким образом статистических характеристик входного сигнала, требуется найти решающую функцию (алгоритм), гарантирующую получение оптимальных (в смысле выбранной функции потери) оценок параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

При решении сформулированной задачи сначала возьмем случай простой оценки одного неизвестного параметра θ, представляющего собой числовую случайную величину. При этом решающее устройство должно выдавать численное значение оценки параметра, которое обозначается θ^*.

Остановимся прежде всего на выборе функции потери. Выбор функции потери при оценке параметров зависит от требований, предъявляемых к решающему устройству по качеству выходной информации. Эти требования во всех случаях сводятся к измерению параметров с наибольшей точностью. Следовательно, в качестве функции потери в данном случае целесообразно выбирать некото-

рую функцию от разности между истинным значением оцениваемого параметра и его оценкой.

Обычно в задачах оценки используются функции потери следующих видов:

1. Простая функция потери

$$F(\theta, \theta^*) = c[1 - \delta(\Theta - \theta^*)], \tag{1.52}$$

где δ — символ дельта-функции.

При использовании простой функции потери всем правильным решениям приписываются потери, равные $-\infty$, а всем неправильным решениям, независимо от величины ошибок решения, приписываются постоянные потери c. Простая функция потери изображена на рис. 1.10,*а*.

2. Допустимая функция потери

$$F(\theta, \theta^*) = \begin{cases} 0, & \text{при } |\Theta - \theta^*| \leqslant a, \\ c, & \text{при } |\theta - \theta^*| > a. \end{cases} \tag{1.53}$$

При использовании допустимой функции потери всем решениям, абсолютная ошибка которых не превышает некоторого фиксированного значения a, приписываются нулевые потери, а решениям с ошибками больше a — постоянные потери c. Допустимая функция потери изображена на рис. 1.10,*б*.

3. Линейная функция потери

$$F(\theta, \theta^*) = c|\theta - \theta^*|. \tag{1.54}$$

Линейная функция потери приписывает правильному решению нулевые потери, а всем неправильным решениям — потери, увеличивающиеся по линейному закону с ростом модуля абсолютной ошибки решения. Линейная функция потерн изображена на рис. 1.10,*в*

4. Квадратичная функция потери

$$F(\theta, \theta^*) = c(\theta - \theta^*)^2. \tag{1.55}$$

Квадратичная функция потери приписывает всем неправильным решениям потери, изменяющиеся по квадратичному закону с ростом ошибок решения (рис. 1.10,*г*). Эта функция есть квадрат «расстояния»

между истинным значением параметра и оценкой параметра, т. е. квадрат ошибки оценки параметра.

5. Функция потери с насыщением

$$F(\theta, \theta^*) = 1 - \exp[-c(\theta - \theta^*)^2]. \qquad (1.56)$$

Функция потери с насыщением (рис. 1.10,5) применяется в том случае, когда целесообразно учитывать тот

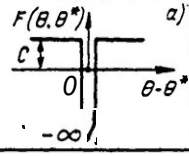
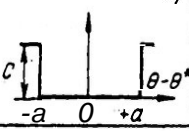
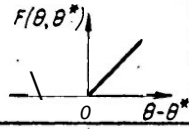
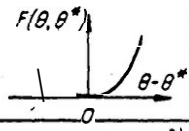
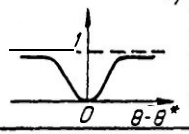
	график	Формула	Название
1.		$F(\theta,\theta^*)=C[1-\delta(\theta-\theta^*)]$	Простая функция потери
2.		$F(\theta,\theta^*)=\begin{cases} C, \text{ при } (\theta-\theta^*)>a \end{cases}$	Допустимая функция потери
3.		$F(\theta,\theta^*)=C(\theta-\theta^*)$	Линейная функция потери
4.		$F(\theta,\theta^*)=C(\theta-\theta^*)^2$	Квадратичная функция потери
5.		$F(\theta,\theta^*)=1-\exp[C(\theta-\theta^*)]$	Функция потери с насыщением

Рис. 1.10. Функции потери при оценке параметров.

факт, что потери не могут расти безгранично с ростом ошибок решения. Так, например, если по данным РЛС производится наведение истребителя на цель, то вероят-

ность наведения зависит от точности решающего прибора. С увеличением ошибок уменьшается вероятность успешного наведения. Однако это уменьшение не будет безграничным, так как вероятность наведения без применения решающего прибора не равна нулю. Очевидно, с увеличением ошибок решающего прибора потери будут асимптотически приближаться к некоторой постоянной величине, равной потерям при отсутствии решающего прибора. Этот факт и учитывает функция потери с насыщением.

Возможны, конечно, и другие фунции потери. В практике синтеза систем обработки радиолокационной информации наиболее часто используется квадратичная функция потери.

Рассмотрим решение задачи простой оценки единственного параметра при квадратичной функции потери. В соответствии с выражением (1.23) средний риск при квадратичной функции потери записывается в виде

$$R = c \int_{\Theta} d\theta \int_{\Theta^*} (\theta - \theta^*)^2 w(\theta, \theta^*)\, d\theta^*. \qquad (1.57)$$

где Θ — пространство оцениваемых параметров;
Θ^* — пространство оценок;
$w(\theta, \theta^*)$ — совместная плотность вероятности оцениваемых параметров и их оценок.

Преобразуем выражение (1.57). таким образом, чтобы получить решение в явном виде. Так как при оценке параметров используется только неслучайная решающая функция, то между $\boldsymbol{U}$ и Θ^* существует регулярная зависимость

$$\theta^* = \theta^*_{\boldsymbol{U}}. \qquad (1.58)$$

Поэтому

$$w(\theta, \theta^*)\, d\theta\, d\theta^* = w(\boldsymbol{U}, \theta)\, d\boldsymbol{U} d\theta.$$

Кроме того,

$$w(\boldsymbol{U}, \theta) = w(\theta)\, w(\boldsymbol{U}/\theta). \qquad (1.59)$$

С учетом (1.58) и (1.59) выражение для среднего риска имеет вид

$$R = c \int_{\boldsymbol{U}} d\boldsymbol{U} \int_{\Theta} (\theta - \theta^*_{\boldsymbol{U}})^2 w(\boldsymbol{U}/\theta)\, w(\theta)\, d\theta. \qquad (1.60)$$

Очевидно, средний риск будет минимален при сведении к минимуму второго интеграла в выражении (1.60) посредством выбора величины θ^*, т. е.

$$I = \int_{\Theta} (\theta - \theta^*)^2 w(U/\theta)\, w(\theta)\, d\theta \to \min. \qquad (1.61)$$

Для минимизации этого интеграла используется обычный прием исследования функций на минимум. Условие минимума интеграла (1.61)

$$\frac{dI}{d\theta^*} = 0, \text{ при } \frac{d^2I}{d\theta^{*2}} > 0$$

дает

$$\int_{\Theta} (\theta - \theta^*)\, w(U/\theta)\, w(\theta)\, d\theta = 0,$$

или

$$\int_{\Theta} \theta w(U/\theta)\, w(\theta)\, d\theta = \theta^*_U \int_{\Theta} w(U/\theta)\, w(\theta)\, d\theta. \qquad (1.62)$$

Из выражения (1.62) получаем

$$\theta^*_U = \frac{\int_{\Theta} \theta w(U/\theta)\, w(\Theta)\, d\theta}{\int_{\Theta} w(U/\theta)\, w(\Theta)\, d\theta}. \qquad (1.63)$$

Так как

$$\int w(U/\theta)\, w(\theta)\, d\theta = w(U),$$

$$w(U/\theta) w(\theta) = w(U)\, w(\theta/U),$$

то окончательно получим

$$\theta^*_U = \int_{\Theta} \theta w(\theta/U)\, d\theta. \qquad (1.64)$$

Таким образом, оптимальная оценка параметра б при квадратичной функции потери представляет собой условное математическое ожидание этого параметра при данной реализации сигнала U. Оптимальное решающее устройство

должно по принятой реализации U выбирать в качестве решения ϑ^*_U абсциссу „центра тяжести" площади, расположенной под кривой $w(\vartheta/U)$, т. е. среднее значение апостериорного распределения. При этом оно будет обеспечивать минимальный средний риск.

С другой стороны, из выражения (1.57) следует, что средний риск при квадратичной функции потери совпадает со средним квадратом ошибки оценки параметра

$$R = \overline{c(\vartheta - \vartheta^*)^2}$$

Следовательно, критерий минимума среднего риска при квадратичной функции потери совпадает с критерием минимума среднеквадратичной ошибки.

Легко показать, что оптимальная оценка (k-мерного векторного параметра $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$ находится из выражения

$$\vartheta^*_U = \int_\Theta \vartheta w(\vartheta/U) \qquad \text{rf}^*. \qquad (1.65)$$

Если оценке подлежит сглаженная координата x^*_n в момент последнего измерения, причем

$$x_n = \vartheta_0 + \vartheta_1 t_n + \vartheta_2 t_n^2 + \ldots + \vartheta_s t_n^s,$$

то, представляя x_n в виде

$$t_n, \vartheta_s) = T_n \vartheta,$$

получим

$$x^*_{n\,\text{опт}} = T_n \int_\Theta \vartheta w(\vartheta/U) d\vartheta, \qquad (1.66)$$

где $T_n\vartheta$ — скалярное произведение векторов

$$T_n = (1, t_n, t_n^2, \ldots, t_n^s).$$

$$\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s).$$

Аналогично для оценки координаты, экстраполированной на $(n+l)$-й момент измерения, получим

$$x^*_{n+l} = T_{n+l} \int_\Theta \vartheta w(\vartheta/U) d\vartheta. \qquad (1.67)$$

Таким образом, во всех рассматриваемых случаях задача оптимальной оценки сводится к нахождению условного математического ожидания многомерного векторного параметра ϑ при фиксированной реализации входного сигнала U.

Непосредственное использование для получения оценок выражений (1.64) — (1.67) связано с существенными вычислительными трудностями. Практически более удобно находить оценку по максимуму апостериорного распределения $w(\vartheta/U)$. В работах [3, 10] доказано, что если это распределение симметрично относительно своего максимума, то положение центра тяжести площади, расположенной под кривой $w(\vartheta/U)$, совпадает с положением максимума этой кривой и оценка параметра по максимуму апостериорного распределения будет также оптимальной.

Симметричность апостериорного распределения зависит от плотности распределения помех. Если плотность распределения помех $w(N)$ описывается одногорбной кривой, симметричной относительно наивероятнейшего значения, то распределение $w(\vartheta/U)$ при больших отношениях сигнала к помехе ($a \gg 1$) также имеет вид одногорбной кривой, симметричной относительно наивероятнейшего значения ϑ. Представим $w(\vartheta/U)$ в следующем виде:

$$w(\vartheta/U) = \frac{1}{w(U)} w(\vartheta)\, w(U/\vartheta).$$

При фиксированном сигнале U

$$\frac{1}{w(U)} = \text{fc} = \text{const},$$

а условная плотность вероятности $w(U/\vartheta)$, представленная как функция оцениваемого параметра, называется функцией правдоподобия и обозначается $L(U/\vartheta)$.

Следовательно,

$$w(\vartheta/U) = kw(\vartheta)\, L(U/\vartheta).$$

Задача оценки еще более упрощается, когда априорное распределение оцениваемого параметра $w(\vartheta)$ является равномерным или, по крайней мере, медленно меняющимся

по сравнению с $w(\vartheta/U)$. В этом случае достаточно фиксировать положение максимума функции правдоподобия $L(U/\vartheta)$, или любой функции, связанной с $L(U/\vartheta)$ монотонно.

Последний способ статистической оценки параметров получил название метода максимального правдоподобия и широко используется в практике (см. п. 1.1.1).

1.4.3. Оптимальная оценка азимута цели по пачке некогерентных импульсов

В качестве примера на применение метода максимального правдоподобия рассмотрим решение задачи оценки азимута по принятой пачке из N_0 некогерентных импульсов, полученных от нефлюктуирующей цели.

Функция правдоподобия для оценки азимута по пачке нефлюктуирующих импульсов получается следующим образом. Запишем условную плотность вероятности пачки [см. формулу (1.37)]

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}/a_\lambda) = \prod^{N_0} x_\lambda \exp\left[-\frac{a_\lambda^2 + x_\lambda^2}{2}\right] I_0(a_\lambda x_\lambda).$$

Эта плотность вероятности зависит от параметра a_λ. Однако все a_λ определяются однозначно, если известна зависимость

$$a_\lambda = a_0 g(\beta_\lambda, \beta_0),$$

где $g(\beta_\lambda, \beta_0)$ — функция, описывающая форму диаграммы направленности антенны на прием и передачу.

Функцию $g(\beta_\lambda, \beta_0)$ удобно представить в виде

$$g(\beta_\lambda, \beta_0) = g\left(\frac{\beta_\lambda - \beta_0}{\varphi}\right) = g(\alpha_\lambda),$$

где β_λ — значение азимутального угла при приеме λ-го импульса пачки (рис. 1.11);

β_0 — точный азимут цели;

φ — половина ширины диаграммы направленности на заданном уровне мощности.

Если, например,

$$g(\alpha_\lambda) = e^{-\alpha_\lambda^2},$$

т. е. огибающая описывается гауссовой кривой, то φ представляет собой половину ширины диаграммы направленности на уровне $1/e$ по мощности.

Теперь мы видим, что плотность вероятности амплитуд пачки зависит от двух параметров: a_0 — отношения

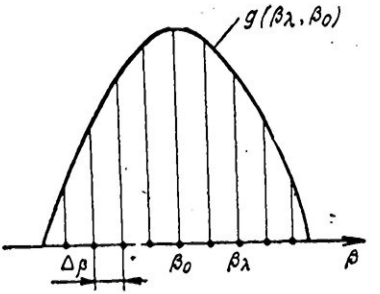


Рис. 1.11. Огибающая амплитуд пачки видеоимпульсов.

сигнала к помехе в центре диаграммы направленности и β_0 — истинного азимута цели.

При фиксированной выборке сигнала $(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0})$ функция правдоподобия запишется в виде

$$L(x/a_0, \beta_0) = \prod^{N_0} x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda + a_0^2 g^2(\beta_\lambda, \beta_0)}{2}\right] I_0[x_\lambda a_\lambda g(\beta_\lambda, \beta_0)]. \quad (1.68)$$

В работе [11] показано, что если сигнал содержит несколько независимых случайных параметров, то оценку каждого из них можно производить раздельно при фиксированных других параметрах. В нашем случае параметры β_0 и a_0 являются независимыми. Поэтому на основании функции правдоподобия (1.68) будем производить только оценку параметра β_0, а параметр a_0 будем считать фиксированным.

Перейдем к непосредственному применению метода максимального правдоподобия для получения алгоритма оценки азимута нефлюктуирующей цели. Поскольку оценка азимута цели производится после ее обнаружения, положим $a_0 \gg 1$. Тогда согласно формуле (1.36) закон распределения амплитуд каждого импульса пачки можно считать нормальным и функция правдоподобия пачки имеет вид

$$L(x/a_0, \beta_0) = \prod^{N_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[x_\lambda - a_0 g(\beta_\lambda, \beta_0)]^2}{2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{N_0} \exp\left\{-\sum_{\lambda=1}^{N_0} \frac{[x_\lambda - a_0 g(\beta_\lambda, \beta_0)]^2}{2}\right\}. \quad (1.69)$$

Для нахождения оценки удобнее пользоваться натуральным логарифмом функции правдоподобия

$$\ln L = N_0 \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{N_0} [x_\lambda - a_0 g(\beta_\lambda, \beta_0)]^2, \quad (1.70)$$

Составим уравнение правдоподобия. Для этого продифференцируем выражение (1.70) по β_0 и приравняем производную нулю при $\beta_0 = \beta^*_0$. В результате получим

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = a_0 \sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \frac{\partial g(\beta_\lambda, \beta_0)}{\partial \beta_0} -$$

$$- a_0^2 \sum_{\lambda=1}^{N_0} g(\beta_\lambda, \beta_0) \frac{\partial g(\beta_\lambda, \beta_0)}{\partial \beta_0}\Bigg|_{\beta_0 = \beta_0^*} = 0. \quad (1.71)$$

Второй член в выражении (1.71) не содержит x_λ и, следовательно, не зависит от амплитуд принимаемых импульсов пачки. Этот член зависит только от формы диаграммы направленности антенны. Так как диаграмма направленности симметрична и юстируется так, что истинный азимут цели соответствует направлению оси диаграммы на цель, то этот член равен нулю. Поэтому

окончательное выражение для уравнения правдоподобия имеет вид

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \eta(\beta_\lambda, \beta_0^*) = 0, \tag{1.72}$$

где

$$\eta(\beta_\lambda, \beta_0^*) = \frac{\partial g(\beta_\lambda, \beta_0^*)}{\partial \beta_0} \tag{1.73}$$

— функция от огибающей диаграммы направленности антенны. Эта функция является асимметричной. В дальнейшем функцию $\eta(\beta_\lambda, \beta_0)$ будем называть весовой функцией оценки азимута.

Выражение (1.72) представляет собой оптимальный с точки зрения критерия максимального правдоподобия алгоритм обработки пачки импульсов для оценки азимута нефлюктуирующей цели. Операции этого алгоритма следующие (рис. 1.12):

1. Прием и запоминание амплитуд импульсов пачки (на рис. 1.12 $ЗУ_{x_\lambda}$ выполнено на линиях задержки).

2. Образование весовой функции согласно выражению (1.73). Для конкретной формы диаграммы направленности весовая функция представляет собой набор постоянных коэффициентов. Если весовая функция реализуется на сопротивлениях, как показано на рис. 1.12, то на входе правого сумматора напряжения инвертируются.

3. Взвешивание амплитуд каждого принимаемого импульса пачки в соответствии со значениями весовых коэффициентов $g_1 - g_{N_0}$.

4. Образование полусумм взвешенных амплитуд импульсов справа и слева от нулевого значения весовой функции.

5. Сравнение напряжений, накопленных сумматорами Σ_1 и Σ_2 и выдача сигнала, соответствующего моменту равенства взвешенных полусумм. Этот сигнал фиксирует центр принимаемой пачки.

Применение метода максимального правдоподобия для оценки азимута цели по пачке быстро флюктуирую-

щих импульсов дает следующее окончательное выражение для алгоритма обработки пачки:

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda^2 \, \eta'(\beta_\lambda, \beta_0^*) = 0, \tag{1.74}$$

где

$$\eta'(\beta_\lambda, \beta_0^*) = \frac{g(\beta_\lambda, \beta_0^*)}{[1 + k_0^2 g^2(\beta_\lambda, \beta_0^*)]^2} \cdot \frac{\partial g(\beta_\lambda, \beta_0^*)}{\partial \beta_0^*} \tag{1.75}$$

— весовая функция оценки азимута для случая быстро флюктуирующей цели.

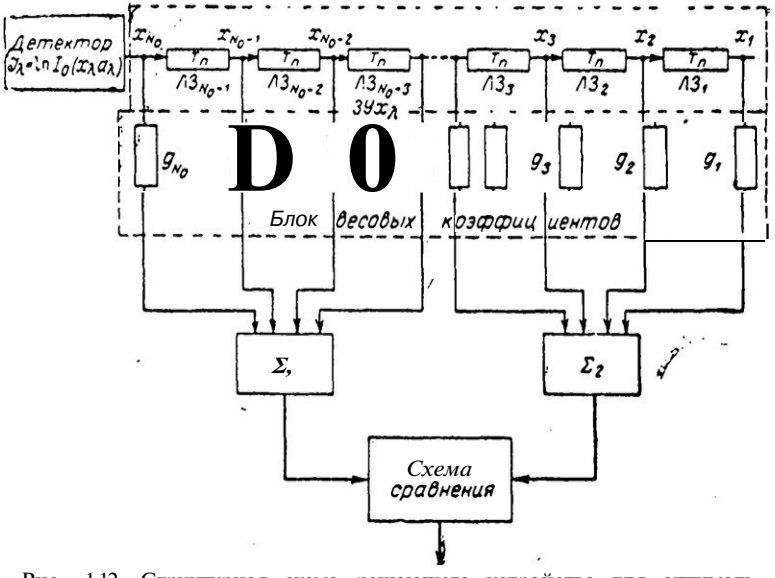


Рис. 1.12. Структурная схема решающего устройства для оптимальной оценки азимута цели.

Сравнение выражений (1.72) и (1.74) показывает, что в отличие от случая нефлюктуирующей цели для оценки азимута быстро флюктуирующей цели необходимо суммировать с весами квадраты амплитуд принимаемых импульсов пачки. Весовая функция $\eta'(\beta_\lambda \beta^*_0)$ для этого случая выражается более сложно, однако ее характер не меняется. В частности, она так же, как и в предыду-

щем случае, является асимметричной с нулевым значением в максимуме диаграммы направленности. Поэтому процедура оптимальной оценки и структура решающего устройства не изменяются (за исключением операции возведения в квадрат амплитуд принимаемых импульсов).

Рассмотрим теперь вкратце вопрос о потенциальной точности оценки азимута по пачке принимаемых импульсов.

Задача определения потенциальной точности измерения азимута формулируется следующим образом: при заданной форме диаграммы направленности и заданных отношениях сигнала к помехе, частотах, повторения зондирующих импульсов, частотах вращения антенны и т. д, найти нижнюю границу дисперсии оценки азимута $\sigma^2_{\beta мин}$.

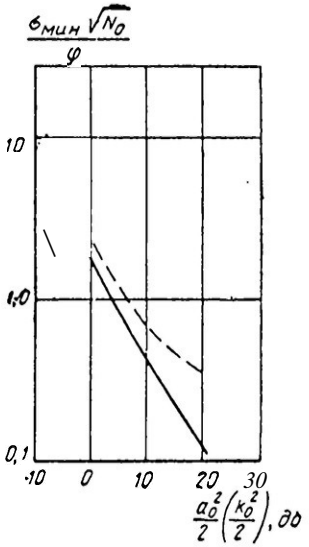


Рис. 1.13. Графики относительных потенциальных ошибок оценки азимута: ——— нефлюктуирующая цель; – – – – – быстро флюктуирующая цель.

В работе (12] произведены расчеты и построены графики для нижней границы дисперсии оценки азимута для случаев нефлюктуирующей и быстро флюктуирующей цели. Окончательные формулы имеют вид:

для нефлюктуирующей цели $(a_0 \gg 1)$

$$\sigma_{\beta мин} = \frac{2\varphi}{\sqrt{N_0 a_0}} \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'^2(\alpha_\lambda)}{g(\alpha_\lambda)} d\alpha_\lambda}}, \qquad (1.76)$$

для быстро флюктуирующей цели

$$\sigma_{\beta мин} = \frac{\varphi}{k_0 \sqrt{N_0}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'^2(\alpha_\lambda)}{[1 + k_0 g(\alpha_\lambda)]^2} d\alpha_\lambda}}. \qquad (1.77)$$

Графики относительных потенциальных ошибок как функции от отношения сигнала к помехе в децибелах приведены на рис. 1.13. Сплошная кривая соответствует нефлюктуирующей цели, пунктирная — быстро флюктуирующей.

2.

Дискретизация радиолокационных сигналов

§ 2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для обработки радиолокационных сигналов с помощью дискретных устройств необходимо предварительно преобразовать непрерывное по времени и амплитуде напряжение на выходе детектора приемного устройства РЛС в дискретную форму.

Первым этапом дискретизации сигналов, являющихся случайными функциями времени, является дискретизация по аргументу, т. е. по времени. При этом непрерывный на ограниченном интервале наблюдения $(0, T_н)$ сигнал преобразуется во временную последовательность дискретных значений амплитуды в моменты выборок (последовательность выборок амплитуды сигнала) или в дискретную последовательность других величин, связанных с амплитудой сигнала на интервале наблюдения $(0, T_н)$, взаимно однозначным соответствием. Если амплитуда сигнала является функцией не одного, а нескольких независимых аргументов (например, времени, допплеровской частоты и т. д.), то дискретизация должна быть осуществлена по каждому аргументу.

Вторым этапом дискретизации является преобразование выборочных значений амплитуд в некоторое число градаций, т. е. представление выборочных амплитуд некоторым числом в десятичной системе счисления. В последующем, путем эквивалентного преобразования исходного (десятичного) алфавита, информация об амплитудах выборок сигнала может быть закодирована в двоичном коде.

Основными проблемами дискретного преобразования сигналов являются оптимальный выбор последовательности измеренных значений непрерывного сигнала при дискретизации по параметрам и оптимальный выбор числа градаций при дискретизации по амплитуде. Эти проблемы применительно к сигналам импульсных РЛС и рассматриваются в настоящей главе,

§ 2.2 ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

2.2.1. Принцип временной дискретизации случайных сигналов

При дискретизации по времени сигналов, являющихся случайными функциями времени, основной задачей является выбор такой последовательности измеренных значений (выборок) непрерывного сигнала в течение интервала наблюдения, чтобы по этим измеренным значениям можно было вновь восстановить исходный сигнал с заданной точностью. Измеренные значения называются наблюдаемыми координатами случайного процесса [13]. Обоснование выбора наблюдаемых координат случайного процесса обычно связывается с моделью сигнала, подлежащего дискретизации.

В технике передачи информации в настоящее время широко используется модель стационарного сигнала с ограниченным спектром. В этом случае в качестве наблюдаемых координат могут быть взяты:

1. Значения коэффициентов ряда Фурье, представляющих случайный процесс на ограниченном интервале $(0, T_н)$ его наблюдения [14]. Сущность этого представления состоит в том, что любая непрерывная функция может быть разложена в ряд Фурье на интервале наблюдения

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_н}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_н}\right), \quad (2.1)$$

где $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_н$;

t_0 — момент начала наблюдения.

Сяедовательно, совокупность коэффициентов Фурье $(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ может быть взята в качестве наблюдаемых координат случайного процесса, по которым с помощью формулы (2.1) затем легко восстановить исходную функцию.

2. Амплитудные выборки в равноотстоящие моменты времени

$$S(t) = \{S(t_k)\}.$$

Это представление непосредственно связано с теоремой Котельникова [15], согласно которой любую функцию $S(t)$ с ограниченным в полосе $0 < \Delta f < \Delta f_{макс}$ спектром можно разложить в ряд по функциям вида $\frac{\sin x}{x}$, а именно:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t_0 + t_k) \frac{\sin 2\pi \Delta f_{макс}(t - t_0 - t_k)}{2\pi \Delta f_{макс}(t - t_0 - t_k)}, \qquad (2.2)$$

где $S(t_0 + t_k$ — коэффициенты разложения, представляющие собой мгновенные значения функции $S(t)$ в дискретные моменты времени $(t_0 + t_k)$, причем

$$t_k = k\Delta t \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\Delta t = \frac{1}{2\Delta f_{макс}}.$$

Таким образом, сигнал с ограниченным спектром определяется последовательностью амплитуд, измеренных через $\frac{1}{2\Delta f}$ *сек*. Выбор начального момента отсчета t_0 между 0 и $\frac{1}{2\Delta f}$ является произвольным. При этом для каждого нового t_0 получится новая последовательность амплитуд. Однако каждая из этих последовательностей однозначно определяет исходную функцию.

Ряд (2.2) представляет разложение случайной функции с ограниченным спектром на бесконечном интервале наблюдения $(-\infty < t < \infty)$. Однако можно показать [14], что случайная функция $S(t)$ на ограниченном ин-

тервале наблюдения (О, $T_н$) также представляется равнодискретными выборками амплитуд через интервалы $\Delta t = \frac{1}{2\Delta f_{макс}}$.

3. Выборки амплитуды огибающей и фазы несущей в равноотстоящие моменты времени.

Функцию с ограниченной полосой частот от $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ до $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$, где $f_0 \neq 0$, можно представить как модулированное по амплитуде и частоте колебание

$$S(t) = E(t)\cos[2\pi f_0 t + \psi(t)],$$

где $E(t)$ — амплитуда огибающей;

$\psi(t)$ — мгновенная фаза несущей.

Такую непрерывную функцию можно представить последовательностью амплитуд огибающей $E(t_0)$, $E(t_1)$, ... и фаз несущей $\psi(t_0)$, $\psi(t_1)$, ..., измеренных в равноотстоящие моменты времени [14]

$$= \frac{}{\Delta f_{макс}}.$$

4. Неравномерные выборки амплитуд случайного процесса [16], причем число этих выборок на интервале наблюдения сигнала (О, $T_н$) должно быть равно $2T_н\Delta f_{макс}$, т. е. равно числу необходимых равнодискретных выборок. Эти $2T_н\Delta f_{макс}$ отсчетов могут быть смещены произвольным образом, так что можно концентрировать их в малом интервале наблюдения вблизи начала процесса, а затем предсказать остальной процесс.

Во многих случаях (в том числе и при приеме радиолокационных сигналов) процесс, подлежащий дискретизации, является нестационарным и с неограниченным спектром. Поэтому в таких случаях неприменимы и подходы к выбору наблюдаемых координат, описанные выше.

Для нестационарных случайных сигналов ограниченной длительности $T_с$ с неограниченным спектром характерным является ограниченность интервала корреляции $\tau_{кор}$ [17]. Под интервалом корреляций понимается про-

межуток времени, за который практически исчезает статистическая связь между соседними выборками амплитуд сигнала. Число некоррелированных элементов сигнала равно

$$N_0 = \frac{T_c}{\tau_{кор}}$$

и называется числом степеней свободы сигнала.

Очевидно в качестве наблюдаемых координат нестационарного сигнала должны выбираться амплитудные выборки, отстоящие друг от друга на интервал τ_1, не превышающий интервал корреляции $\tau_{кор}$. Восстановление исходного сигнала по дискретным данным в этом случае производится в соответствии с соотношением

$$U^*(t) = \sum^{N-1} U(k\tau_1) f(t - k\tau_1), \qquad (2.3)$$

где $U(k\tau_1)$ — выборки амплитуд сигнала с интервалом

$$\tau_1 \leqslant \tau_{кор};$$

N — число выборок сигнала на интервале наблюдения, причем $N \geqslant N_0$;

$f(t - k\tau_1)$ — множество ортогональных неслучайных функций времени, которые отличаются друг от друга только смещением на интервал, кратный τ_1.

На рис. 2.1 изображена функциональная схема дискретизации нестационарных сигналов по времени с последующим восстановлением исходного сигнала $U^*(t)$ в соответствии с формулой (2.3). Работа схемы состоит в следующем. Генератор импульсов ГИ выдает на вход модулятора М последовательность импульсов с периодом повторения τ_1. На другой вход модулятора поступает исходный сигнал $V(t)$. Модулятор осуществляет модуляцию последовательности импульсов с выхода ГИ напряжением сигнала $U(t)$. На выходе модулятора получается последовательность дискретных выборок амплитуды сигнала $U(k\tau_1)$. Для восстановления исходного сигнала последовательность $U(k\tau_1)$ пропускается через фильтр Ф с импульсной реакцией $f(t-k\tau_1)$.

В качестве критерия оптимальности воспроизведения сигнала по дискретным данным обычно выбирается квадратичная функция потери вида

$$F(U,\ U^*) = [U^*(t) - U(t)]^2.$$

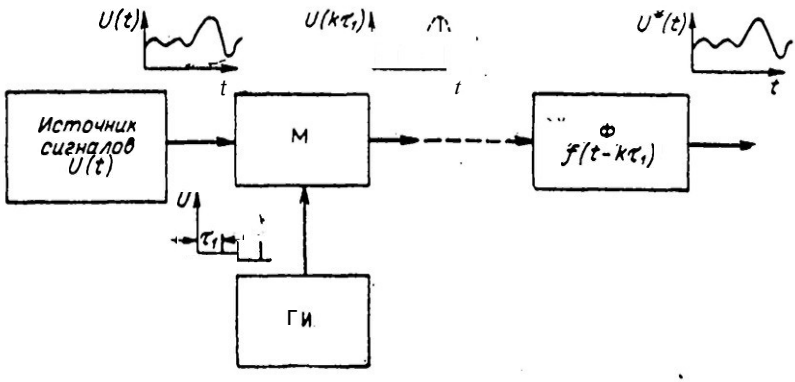


Рис. 2.1. Функциональная схема временной дискретизации случайных сигналов,

В этом случае средняя по всему интервалу наблюдения T_c дисперсия ошибки воспроизведения будет равна

$$\sigma_U^2 = \overline{F(U, U^*)} = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} F(U, U^*)\, dt. \qquad (2.4)$$

В работе [17] показано, что наилучшая точность воспроизведения исходного сигнала в схеме, изображенной на рис. 2.1, достигается в случае, когда импульсная реакция фильтра Ф совпадает в интервале $\left|-\frac{\tau_1}{2} \div \frac{\tau_1}{2}\right|$ с функцией корреляции $R(\tau)$ сигнала $U(t)$ и равна нулю вне указанного интервала. Предельная дисперсия ошибки воспроизведения при этом равна

$$\sigma^2_{U\,\text{мин}} = 1 - \frac{2}{\tau_1}\int_0^{\frac{\tau_1}{2}} R^2(\tau)\, d\tau. \qquad (2.5)$$

Для приближенных расчетов функцию корреляции сигнала можно аппроксимировать в виде

$$R(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_{кор}}.$$

В этом случае

$$\sigma^2_{U\,мин} = 1 - \frac{2}{\tau_1}\int_0^{\frac{\tau_1}{2}} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_{кор}}\right)^2 d\tau = \frac{6\gamma - 1}{12\gamma^2}, \qquad (2.6)$$

где $\gamma = \frac{\tau_{кор}}{\tau_1}$ — отношение интервала корреляции к интервалу выборки.

Формула (2.6) показывает, что при $\gamma = 1$, что соответствует выборке с интервалом корреляции, усредненная по всему интервалу наблюдения дисперсия ошибки воспроизведения равна 5/12. С изменением интервала выборки дисперсия ошибки воспроизведения изменяется примерно обратно пропорционально γ.

Таким образом, предложенный в работе [17] подход к временной дискретизации нестационарных случайных сигналов дает четкую зависимость точности воспроизведения сигнала от частоты выборки. Задавшись некоторой допустимой точностью воспроизведения, легко найти интервал временной дискретизации.

2.2.2. Принципы амплитудной дискретизации случайных сигналов

Для дискретных систем передачи и обработки случайных сигналов необходимо, кроме временной дискретизации, производить еще дискретизацию этих сигналов по значениям функции (амплитуде). Дискретизация по амплитуде носит название квантования.

В процессе квантования непрерывная случайная величина $U_k = U(k\tau)$ с плотностью вероятности $w(U_k)$ преобразуется в дискретную случайную величину $U'k$, принимающую установленное число значений. Так, если случайная величина U_k определена в интервале $(U_{макс}, U_{мин})$ и назначено m порогов квантования $U_{мин} < U_1 < U_2 < \ldots < U_{i-1} < U_i < \ldots < U_m < U_{макс}$, разбивающих интервал $(U_{макс}, U_{мин})$ на $m+1$ подынтервалов (U_i, U_{i+1}) $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$, то этой непрерывной случайной величине может быть сопоставлена дискрет-

ная случайная величина, принимающая значения U'_{ki} с вероятностью.

$$p(U'_{ki}) = \int_{U_i}^{U_{i+1}} w(U_k)\, dU_k. \qquad (2.7)$$

Устройство для квантования амплитуд сигналов, называемое квантизатором (рис. 2.2,*а*), представляет собой нелинейный элемент с амплитудной характеристикой, изображенной на рис. 2.2,*б*. Интервал h_i изменения амплитуды входного сигнала между порогами U_i и U_{i+1} называется интервалом или шагом амплитудного квантования. Входному сигналу, лежащему в любой точке внутри интервала h_i, соответствует одно значение выходного сигнала U'_i. Значения выходного сигнала могут относиться к любой точке внутри интервала h_i.

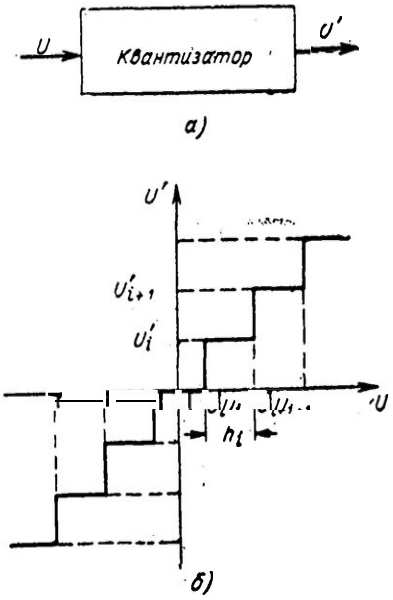


Рис. 2.2. Квантизатор и его амплитудная характеристика.

В общем случае шаг амплитудного квантования не является постоянной величиной, что соответствует неравномерному расположению порогов по оси U.

Основной задачей теории квантования является оптимальный выбор числа порогов и длины шагов квантования. Причем критерий оптимальности квантования определяется, естественно, существом решаемой задачи. Если по квантованным данным в дальнейшем необходимо восстановить амплитуды исходных сигналов, что характерно для импульсной связи, то к выбору порогов и интервалов квантования необходимо подходить с точ-

ки зрения обеспечения минимальных потерь при восстановлении исходного процесса. Такой подход к оптимизации процесса квантования целесообразен также в некоторых задачах обработки радиолокационной информации, например в случае необходимости производить оценку амплитуд принимаемых сигналов.

Одновременное решение задачи о выборе числа m порогов и длины h_i шагов квантования, по-видимому, до сих пор отсутствует. При наперед заданном числе порогов задача о выборе длины шагов квантования может быть решена следующим образом [18].

Выбираем в качестве функции потерь $F(\Delta U)$ некоторую функцию от ошибки квантования. Под ошибкой квантования понимается разность между значениями сигнала на входе и выходе квантизатора, т. е.

$$\Delta U = (U - U'_i).$$

Тогда среднюю величину потерь (условный риск) квантования можно представить в виде

$$\overline{\Delta U^2} = \sum_{i=1}^{m} \int_{U_i}^{U_{i+1}} F(U - U'_i)\, w(U)\, dU, \qquad (2.8)$$

где $w(U)$ — известная плотность распределения амплитуд входного сигнала.

Из выражения (2.8) следует, что потери квантования зависят как от выбора порогов U_i, так и от выбора значений сигнала U'_i в каждом из интервалов h_i. Поэтому для минимизации потерь при фиксированном m необходимо продифференцировать выражение (2.8) по U_i и U'_i и полученные результаты приравнять нулю. Дифференцирование дает

$$\frac{\partial \overline{\Delta U^2}}{\partial U_i} = F(U_i - U'_{i-1})\, w(U_i) - F(U_i - U'_i)\, w(U_i) = 0, \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial \overline{\Delta U^2}}{\partial U'_i} = -\int_{U_i}^{U_{i+1}} F'(U - U'_i)\, w(U)\, dU = 0, \qquad (2.10)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

При квадратичной функции потери

$$F(U - U'_i) = (U - U'_i)^2.$$

В этом случае из решения уравнений (2.9) и (2.10) получаем

$$U'_i = \frac{\int_{U_i}^{U_{i+1}} U w(U)\, dU}{\int_{U_i}^{U_{i+1}} w(U)\, dU}, \qquad (2.11)$$

т. е. U'_i должно выбираться в точке, соответствующей центру тяжести площади под кривой $w(U)$ между U_i и U_{i+1},

$$U_i = \frac{U'_{i-1} + U'_i}{2}, \qquad (2.12)$$

т. е. порог U_i должен выбираться посредине между соседними значениями U'_{i-1} и U'_i.

Уравнения (2.11) и (2.12) полностью определяютвсе значения порогов U_i и выходных уровней U'_i. Однако решение их можно получить только численными методами. Численное решение сводится к следующему. Сначала выбираем некоторое подходящее значение U'_1 и из уравнения

$$\int_{U_{\text{мин}}}^{U_1} (U - U'_1)\, w(U)\, dU = 0 \qquad (2.13)$$

находим значение U_1,т. е. первый порог. Зная U_1 и U'_1, находим U'_2 по формуле (2.12)

$$U'_2 = 2U_1 - U'_1.$$

Затем, подставляя значения U_1 и U'_2 в уравнение (2.13), находим U_2, а по формуле (2.12) находим U'_3 и т. д., вплоть до определения значения U'_m. Если найденное таким образом U'_m соответствует центру тяжести площади под кривой $w(U)$ между U_m и $U_{\text{макс}}$, то первоначальное значение U'_1 было выбрано правильно и расчет закончен. При невыполнении этого условия выбирается

новое значение U'_1 и расчет повторяется. Решение задачи необходимо производить на цифровой вычислительной машине.

В большинстве практических случаев интервалы квантования h_i выбираются одинаковыми, а выходной уровень берется равным середине соответствующего интервала, т. е.

$$U'_i = \frac{U_i + U_{i+1}}{2}. \tag{2.14}$$

В этом случае для оценки потерь квантования можно воспользоваться известными из математической статистики [7] поправками к группировке (поправки Шеппарда), устанавливающими связь между моментами m_ν исходного непрерывного распределения и моментами μ_ν этого распределения, полученными по сгруппированным по интервалам длины h выборочным (дискретным) значениям.

Для первого и второго центральных моментов поправки Шеппарда имеют вид

$$\mu_1 - m_1 = 0,$$

$$\mu_2 - m_2 = \frac{1}{12} h^2. \tag{2.15}$$

Задаваясь допустимым увеличением дисперсии за счет квантования, можно однозначно определить интервал квантования h.

К вопросу выбора числа уровней квантования можно подойти и с точки зрения теории дискретной выборки сигнала с ограниченным спектром [19].

Предположим, что временные выборки амплитуд непрерывного случайного процесса статистически независимы (выборки производятся с интервалом, равным (или бо́льшим) интервалу корреляции). Тогда одномерная плотность вероятности $w(U)$ полностью описывает процесс изменения амплитуд выборок. Будем теперь считать в качестве сигнала, подвергающегося квантованию, не самое выборку входного сигнала U, а ее функцию плотности вероятности распределения $w(U)$. Функция $w(U)$ является непрерывной и гладкой функцией. Как

известно, такая функция может быть преобразована по Фурье, т. е. выражена при помощи второй функции $\varphi(f)$ от новой переменной f таким образом, что

$$\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(U) \exp(-j2\pi fU)\, dU, \qquad (2.16)$$

а

$$w(U) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(f) \exp[j2\pi fU]\, df, \qquad (2.17)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

В области колебаний функция $w(U)$, где $U = t$ изображает время, представляет собой импульс, а функция $\varphi(f)$ является спектром функции $w(U)$, представляя ее в виде бесконечного ряда колебаний

$$\varphi(f) \exp[j2\pi fU]\, dU.$$

В области вероятностных явлений функция $\varphi(f)$ носит название характеристической функции для функции плотности вероятности распределения $w(U)$. При этом в обоих случаях функции $w(U)$ и $\varphi(f)$ связаны друг с другом зависимостями (2.16) и (2.17). Если, например, функция $w(U)$ — нормальное распределение вероятностей (нормальный закон) с $a = 0$ и $\sigma = 1$, т. е.

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{U^2}{2}\right],$$

то в области колебаний эта функция представляет так называемый колокольный импульс [21]. Спектр колокольного импульса в соответствии с (2.16) будет

$$\varphi(f) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{U^2}{2}\right] \exp[-j2\pi fU]\, dU.$$

После несложных преобразований последнее выражение приводится к виду

$$\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-2\pi^2 f^2] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(U + j2\pi f)^2\right] dU.$$

Произведя замену переменных и интегрируя, получим окончательно

$$\varphi(f) = \exp[-2\pi^2 f^2].$$

Из полученного выражения следует, что спектр амплитуд колокольного импульса (и, следовательно, спектр функции нормального распределения вероятностей) описыв.ается экспонентой, быстро затухающей с ростом f. Очевидно, без заметного искажения этот спектр можно ограничить некоторой частотой $f_{макс}$ и считать функцию $w(U)$ функцией с ограниченным в полосе $0 < \Delta f < f_{макс}$ спектром.

Для функции с ограниченным спектром, как нам известно, существует представление (2.2), позволяющее заменять эту функцию последовательностью равнодискретных выборок ее мгновенных значений, взятых с интервалом, равным полупериоду высшей частоты спектра.

В этом смысле квантование по амплитуде сигнала U (с нормальной плотностью распределения амплитуд) сводится к равнодискретным выборкам значений функции нормального распределения вероятности $w(U)$ через интервалы

$$h = \Delta U = \frac{1}{2f_{макс}},$$

где $f_{макс}$ — высшая частота спектра функции $w(U)$.

Аналогичный подход к решению задачи амплитудного квантования справедлив и при других функциях плотности вероятностей амплитуд сигнала. При этом, поскольку спектр функции плотности вероятностей амплитуд сигналов является, как правило, неограниченным, неизбежны ошибки квантования, обусловленные конечной длительностью интервалов квантования ΔU.

Рассматривая в качестве функции, подлежащей квантованию, функцию распределения $w(U)$, а не функцию $U(t)$, мы автоматически ограничиваемся восстановлением моментов исходного сигнала по квантованным данным и не рассматриваем восстановление самого сигнала. Как показано в работе [19], с точки зрения восстановления моментов достаточно эффективным является грубое квантование с интервалом $\Delta U = \sigma$. Это дает основание применять предельно грубое квантование (вплоть до двоичного) в тех случаях, когда вообще не ставится

задача воспроизведения по квантованным данным исходного сигнала, а необходимо лишь решить, есть сигнал или он отсутствует. Именно такую задачу приходится решать при обнаружении радиолокационных сигналов.

§ 2.3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ ОБЗОРНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ РЛС

2.3.1. Модель сигнала, подлежащего дискретизации

Суммарный сигнал на выходе приемного устройства РЛС является непрерывной функцией времени и координат целей. Независимо от метода радиолокации и типа РЛС этот сигнал в процессе обзора пространства развертывается в сигнал $U(t)$, зависящий только от одного аргумента — времени t. Одновременно в процессе развертки происходит естественная дискретизация координат по этому аргументу.

Рассмотрим для примера процесс развертки сигнала двухкоординатной импульсной РЛС кругового обзора. Суммарный сигнал в этом случае представляется в виде

$$U = U(D, \beta, t),$$

где D, β — плоскостные координаты цели относительно местоположения РЛС;

U — суммарное напряжение принятых сигналов и внутренних шумов приемника.

В результате периодического обзора с периодом T_0 непрерывные функции координат $D(t)$ и $\beta(t)$ преобразуются в дискретный ряд мгновенных значений координат $D(iT_0)$, $\beta(iT_0)$, где i — номер обзора. Это первый этап дискретизации по времени. Более мелкая дискретизация по времени получается в результате дискретной посылки зондирующих импульсов с периодом $T_п$. При этом одновременно дискретизуется координата, совпадающая с плоскостью обзора (в нашем случае координата β). Сигналы же, полученные за один период посылки зондирующих импульсов, т. е. в процессе одной развертки дальности, остаются непрерывными во времени.

Таким образом, сигнал на выходе приемного устройства импульсной РЛС можно представить в виде функции времени

$$U(t) = U\left(iT_0,\ kT_{\text{п}},\ \frac{ct}{2}\right),$$

где i — номер обзора;

k — номер зондирования в пределах одного периода обзора;

$\frac{c}{2}$ — скорость развертки дальности.

Легко показать, что подобное временное развертывание сигналов производится в РЛС любых других типов. В дальнейшем используется только модель сигнала импульсной РЛС. В качестве полезного сигнала принимается радиоимпульс с колокольной огибающей вида

$$S = S_0 \exp\left[-\pi\left(\frac{\tau}{\tau_{\text{и}}}\right)^2\right]. \qquad (2.18)$$

Помеха на входе приемника представляет собой нормальный стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и дисперсией σ_N^2.

Предполагается, что линейная часть приемника имеет колокольную амплитудно-частотную и линейную фазово-частотную характеристики. Модуль амплитудно-частотной характеристики линейной части приемника описывается выражением

$$|K(f)| = K_0 \exp\left[-\pi\frac{(f-f_0)^2}{\Delta f^2}\right] \qquad (2.19)$$

Как известно [6], фильтр с такими характеристиками является оптимальным для колокольного радиоимпульса, настроенного на частоту f_0, равную средней частоте в полосе Δf пропускания оптимального фильтра. Длительность импульса $\tau_{\text{и}}$ и полоса пропускания фильтра на уровне $\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ удовлетворяют при этом условию

$$\tau_{\text{и}}\Delta f = 1.$$

Поскольку в радиолокации $\Delta f \ll f_0$, то помеха на выходе линейной части приемника представляет собой узкопо-

лосный нормальный случайный процесс. Спектр огибающей помехи будет колокольным и по форме совпадающим с амплитудно-частотной характеристикой линейной части приемника, т. е.

$$G(f) = \frac{2\pi\sigma_N^2}{\Delta f} \exp\left[-\pi \frac{(f-f_0)^2}{\Delta f^2}\right].$$

Эффективная ширина спектра помехи для случая, когда средняя частота ее спектра совпадает с несущей частотой сигнала, определяется из выражения [6]

$$\Delta f_э = 2\pi \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |G(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\Delta f. \qquad (2.20)$$

Функция корреляции помехи связана с эффективной полосой соотношением;

$$R(\tau_{кор}) = \sigma_N^2 \exp\left[-\frac{(2\pi)^2 (\Delta f_э)^2 \tau_{кор}^2}{4\pi}\right] = \sigma_N^2 \exp\left[-\pi^2\left(\frac{\tau_{кор}}{\tau_и}\right)^2\right]. \qquad (2.21)$$

При $\tau_{кор} = \tau_и$ $R(\tau_{кор})$ практически равна нулю. Следовательно, независимые отсчеты огибающей помехи расположены на расстоянии $\tau_и$ друг от друга.

Рассмотренная модель сигнала, подлежащего дискретизации, естественно, не является универсальной, однако она близка к физически реализуемому в импульсной радиолокации сигналу.

2.3.2. Принцип дискретизации сигналов обзорной импульсной РЛС

Рассмотрим теперь принципиальную сторону вопроса о реализации процесса дискретизации сигналов, полученных на выходе детектора огибающей импульсной РЛС. Предварительно условимся называть квантованием как дискретизацию сигналов по амплитуде, так и дискретизацию по времени. Интервалы дискретизации сигналов

по времени будем называть интервалами временного квантования, а интервалы дискретизации по амплитуде — уровнями амплитудного квантования.

Функциональная схема квантования радиолокационных сигналов приведена на рис. 2,3, а временные диаграммы, поясняющие работу схемы, — на рис. 2.4.

Напряжение огибающей с выхода приемного устройства РЛС (эпюра *1* рис. 2.4) поступает на один из вхо-

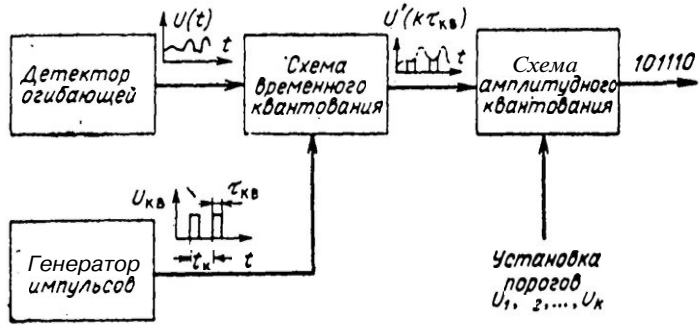


Рис. 2.3. Функциональная схема квантования радиолокационных сигналов.

дов схемы временного квантования. На другой вход этой схемы поступают масштабные импульсы временного квантования длительностью $\tau_{кв}$ с периодом $t_к$ (эпюра *2)*. На выходе схемы временного квантования получается равнодискретная выборка амплитуд огибающей в пределах каждого импульса квантования (эпюра *3)*. Эта выборка поступает на вход схемы амплитудного квантования. Схема амплитудного квантования в общем случае имеет m порогов и $m+1$ уровней и выдает на выходе номер уровня, который превышен выборкой в каждом интервале временного квантования. Номер уровня может быть закодирован в двоичном коде или представлен числом импульсов стандартной амплитуды, равным числу превышенных уровней (эпюра *4)*. В частном случае двоичного квантования (например, с порогом U_2) схема выдает импульс стандартной амплитуды и длительности (единицу), если амплитуда огибающей в пределах ширины импульса $\tau_{кв}$ превышает порог U_2, и пропуск (нуль), если этот порог не превышается (эпюра 5).

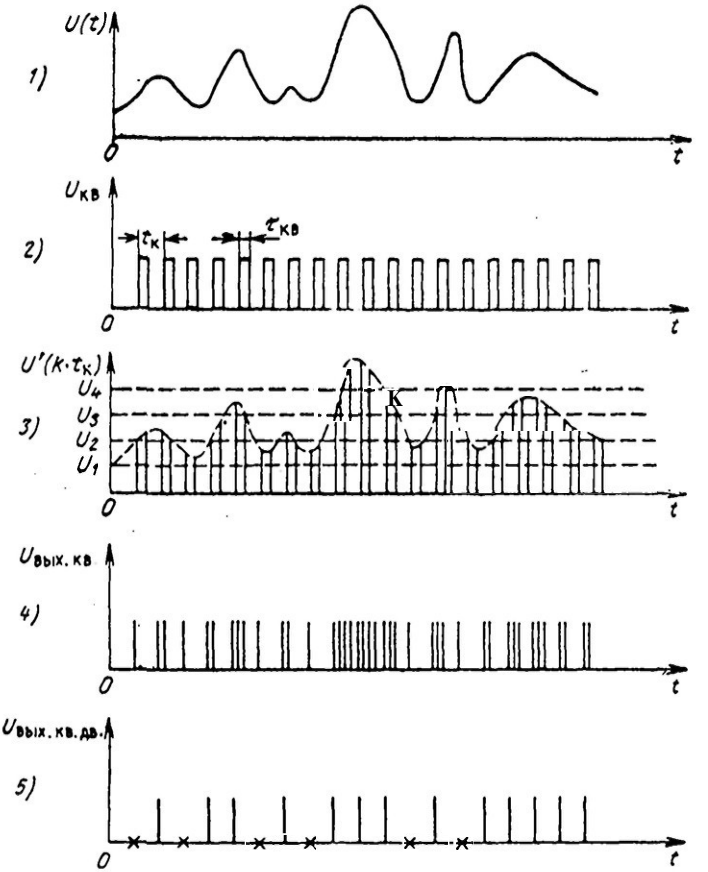


Рис. 2.4. Временные диаграммы, поясняющие процесс квантования радиолокационных сигналов.

Временное квантование приводит к разбиению развертки дальности РЛС на элементарные участки шириной

$$\Delta_d = \frac{ct_к}{2}, \tag{2.22}$$

где $t_к$ — интервал временного квантования. Число таких участков определяется из выражения

$$b = \text{fe}\frac{\text{акс}}{\Delta_d}, \tag{2.23}$$

где $D_{макс}$ — максимальная дальность обнаружения РЛС.

В процессе периодической посылки зондирующих импульсов с одновременным вращением антенны, зона обзора РЛС разбивается на элементарные участки по

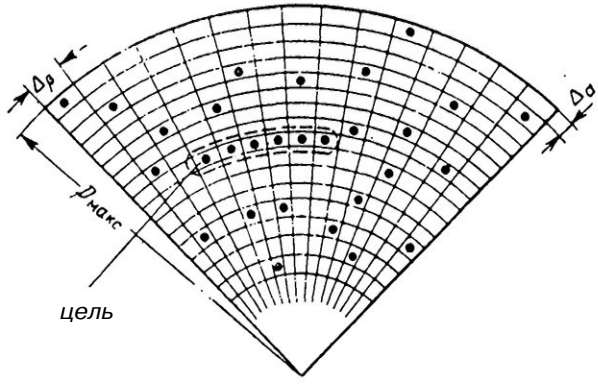


Рис. 2.5. Изображение зоны обзора РЛС после временного и двоичного амплитудного квантования сигналов.

азимуту. Угловой размер элементарного участка по азимуту (угловая дискретность азимута)

$$\Delta_\beta = 2\pi \frac{T_п}{T_0}, \qquad (2.24)$$

где $T_п$ — период посылки зондирующих импульсов;

T_0 — период вращения антенны.

Таким образом, в результате временного квантования зона обзора РЛС разбивается на элементарные ячейки (рис. 2.5) с площадью $S = \Delta_d \Delta_\beta$, общее число которых равно

$$N_э = \frac{2\pi D_{макс}}{\Delta_d \Delta_\beta}. \qquad (2.25)$$

Квантование амплитуд сигналов приводит к дискретизации «яркости» изображения каждой элементарной ячейки. В зависимости от амплитуды выходного сигнала эта яркость будет характеризоваться дискретным числом в некотором алфавите, определяемом числом уровней квантования. В простейшем случае двоичного квантова-

ния получается абсолютно черно-белое изображение зоны обзора, где абсолютно черный фон обозначает наличие квантованных сигналов (единиц) в соответствующих ячейках, а абсолютно белый — их отсутствие (см. рис. 2.5).

Обработка квантовых по времени и амплитуде сигналов с целью обнаружения и определения координат целей в пространстве обзора в простейшем случае состоит в последовательном анализе яркости ячеек, относящихся к одной дальности (так как импульсы в пачке имеют одну и ту же дальность).

2.3.3. Выбор интервалов временного квантования

При выборе интервалов временного квантования радиолокационных сигналов возможны следующие, не исключающие друг друга, подходы:

а) с точки зрения минимизации пропусков полезного сигнала при обнаружении. При этом интервал квантования должен быть, по крайней мере, не больше эффективной длительности полезного сигнала (отраженного импульса);

б) с точки зрения сохранения разрешающей способности РЛС, что приводит к необходимости выбирать интервал временного квантования не больше длительности зондирующего импульса РЛС;

в) с точки зрения обеспечения требуемой точки оценки дальности по квантованным данным.

Как видим, перечисленные подходы не противоречат выводам из общей теории временной дискретизации случайных сигналов, в соответствии с которыми интервал временного квантования должен быть меньше или равным интервалу корреляции квантуемого процесса. Имеется, конечно, в виду, что полоса пропускания приемника РЛС согласована со спектром полезного сигнала.

При рассмотрении общей теории дискретизации предполагалось, что длительность импульса временного квантования пренебрежимо мала по сравнению с интервалом квантования $t_к$, так что имели место точечные выборки амплитуд сигнала через интервал $t_к$. При квантовании же радиолокационных сигналов, вследствие специфических особенностей решаемых задач, длительность им-

пульсов квантования $\tau_{кв}$ оказывается соизмеримой с интервалом квантования $t_к$ (см. рис. 2.4), а иногда просто равной этому интервалу.

В связи с этим оптимизация процесса временного квантования радиолокационных сигналов сводится к выбору как длительности импульса квантования, так и длительности интервала квантования. Возникает также необходимость рассматривать обнаружение сигнала не в точке, а в пределах интервала ограниченной длительности.

- Временное квантование импульсами, длительность которых равна периоду квантования (импульсы квантования следуют друг за другом без пропусков, но и не перекрываясь), является наиболее легко реализуемым и поэтому находит широкое применение в практике (см. п. 2.4.4). В этом случае, естественно, интервал квантования может быть взят бо́льшим, чем интервал корреляции напряжения на выходе приемника РЛС с целью, например, уменьшения числа элементарных участков по дальности.

Рассмотрим влияние увеличения длительности интервала квантования в целое число раз по сравнению с интервалом корреляции на качество обнаружения одиночного импульса. При этом предположим, что обнаруживаемый сигнал имеет прямоугольную форму, по длительности равен интервалу корреляции ($\tau_и = \tau_{кор}$) и целиком вмещается в интервал временного квантования, равный

Вероятность обнаружения смеси сигнала с помехой на интервале μ обозначим $P_{S\mu}$, а вероятность ложного обнаружения на этом интервале $P_{N\mu}$. Легко видеть, что при сделанных предположениях и обозначениях имеют место следующие соотношения:

$$P_{S\mu} = 1 - (1 - P_{S1})(1 - P_{N1})^{\mu-1}, \qquad (2.26)$$

$$P_{N\mu} = 1 - (1 - P_{N1})^{\mu}. \qquad (2.27)$$

Так как обычно $P_{N1} \ll 1$, то

$$(1 - P_{N1})^{\mu} \simeq (1 - \mu P_{N1}).$$

Следовательно, из (2.27) получаем

$$P \cong \mu P$$

Как и следовало ожидать, увеличение интервала временного квантования в μ раз по сравнению с $\tau_{кор}$ во столько же раз увеличивает вероятность ложного обнаружения на этом интервале. Однако увеличение интервала $t_к$ в μ раз приводит к уменьшению в μ раз общего числа элементарных участков по дальности, на которых может быть зафиксировано ложное обнаружение. Поэтому общее число ложных решений остается неизменным, независимо от выбора μ.

Из выражения (2.26) следует, что с увеличением μ вероятность обнаружения сигнала увеличивается и тем больше, чем меньше исходная вероятность обнаружения P_{S1}. Так, например, при $P_{S1}=0{,}8$, $P_{N1}=0{,}1$ и $\mu=2$, $P_{S\mu}=0{,}82$, а увеличение вероятности обнаружения составляет 2,5%. При $P_{S1}=0{,}3$ и тех же P_{N1} и μ имеем $P_{S\mu}=0{,}37$, а увеличение вероятности обнаружения составляет 23,3%. Следовательно, в случае обнаружения сигналов малой интенсивности имеет смысл увеличивать интервал временного квантования по сравнению с интервалом корреляции. При этом существенно увеличивается вероятность обнаружения сигнала, а общее число ложных решений не изменяется. Естественно, увеличение интервала квантования приводит к потерям в разрешающей способности и точности оценки дальности.

Более подробно влияние длительности интервала квантования и длительности импульса квантования на вероятность обнаружения сигнала будет рассматриваться в следующем параграфе.

2.3.4. Выбор порогов амплитудного квантования

При выборе порогов амплитудного квантования радиолокационных сигналов используются две группы критериев оптимальности:

1. Информационные критерии, т. е. критерии, связанные с потерей информации о полезном сигнале в процессе квантования.

2. Критерии, связанные с принятием решения об обнаружении одиночного сигнала или пачки сигналов. Среди этих критериев основными являются критерий минимального риска и критерий Неймана—Пирсона.

Рассмотрим главным образом двоичное квантование сигналов. Это обусловлено простотой реализации двоичного квантизатора и последующих устройств для обработки квантованных сигналов.

В случае, когда квантизатор имеет только один порог, напряжение на его выходе может принимать только два значения (0, 1). Поэтому совокупность сигналов на выходе квантизатора представляет собой совокупность случайных двоичных чисел, т. е.

$$U' = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ p(0) & p(1) \end{Bmatrix},$$

где $p(0)$ и $p(1)$ — вероятности появления нуля и единицы соответственно.

Если мы имеем какое-либо известное распределение $w(U)$ амплитуд сигнала и установлен порог U_0 двоичного квантования, то в соответствии с выражением (2.7) имеем

$$p(1) = \int_{U_0}^{\infty} w(U)\,dU \quad \text{и} \quad p(0) = \int_{0}^{U_0} w(U)\,dU.$$

Процесс двоичного квантования схематически показан на рис. 2.6.

Выбор порога двоичного квантования можно производить с точки зрения минимизации потерь информации об амплитуде сигнала при квантовании [22].

Пусть полезный сигнал S принимает одно из двух возможных значений S_i ($i=0$, 1), причем $S=S_0=0$ соответствует отсутствию сигнала, а $S=S_1$ — наличию сигнала с некоторой фиксированной амплитудой. Априорные вероятности наличия сигналов S_0 и S_1 равны P_{s0} и P_{s1} соответственно ($P_{s0}+P_{s1}=1$).

Принятый сигнал U характеризуется условной плотностью вероятности распределения $w(U|S_i)$, которая при фиксированном S_i и заданной статистике помех предполагается известной. Сигнал U квантуется на два уровня, т. е. ему в соответствие ставится двоичная случайная величина U'_j, принимающая значения $j=0$, 1

с вероятностью $p(j|S_i, U_0)$, где U_0 — значение порога квантования.

Количество информации $I(S_i, U'_j|U_0)$, содержащееся в U'_j относительно Si, зависит от порога квантования U_0. Очевидно, в качестве оптимального можно условиться считать такой порог $U_{0\,опт}$, который максимизирует

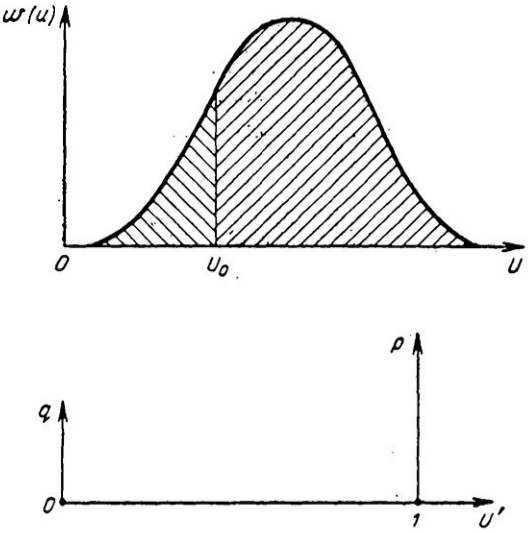


Рис. 26. Схематическое представление процесса двоичного квантования.

количество информации $I(S_i, U'_j|U_0)$ или, что то же, минимизирует потери информации $I(S_i, U)$, содержащейся в неквантованном принятом сигнале U, относительно полезного сигнала S_i.

Функционал количества информации, содержащегося в квантованном сигнале, можно записать в виде [22]

$$I(S_i, U'_j|U_0) = \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{1} P_{S_i}\, p(j|S_i, U_0) \times \times \log \frac{p(j|S_i, U_0)}{\sum_{i=0}^{1} P_{S_i} p(j|S_i, U_0)}. \qquad (2.28)$$

Максимум $I(S_i, U'_j|U_0)$ получается из условия равенства нулю первой производной выражения (2.28) по U_0 (при дополнительном условии, что вторая производная по этому параметру отрицательна).

Дифференцирование (2.28) дает

$$\frac{\partial I}{\partial U_0} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{S_i} \frac{\partial p(j|S_i, U_0)}{\partial U_0} \log \frac{p(j|S_i, U_0)}{\sum_{l=0}^{1} P_{S_l} p(j|S_l, U_0)}. \tag{2.29}$$

Так как

$$p(0|S_i, U_0) = \int_0^{U_0} w(U|S_i)\, dU,$$

$$p(1|S_i, U_0) = \int_{U_0}^{\infty} w(U|S_i)\, dU, \tag{2.30}$$

то

$$\frac{\partial p(j|S_i, U_0)}{\partial U_0} = (-1)^j w(U_0|S_i). \tag{2.31}$$

Учитывая (2.29), (2.30) и (2.31), уравнение для нахождения оптимального порога $U_{0\,опт}$ по критерию минимума потери информации получим в виде

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{S_i} (-1)^j w(U_0|S_i) \log \frac{p(j|S_i, U_0)}{\sum_{l=0}^{1} P_{S_l} p(j|S_l, U_0)}\Bigg|_{U_0 = U_{0\,опт}} = 0. \tag{2.32}$$

Результаты выбора по этому критерию оптимальных порогов для сигналов с различными статистическими характеристиками в основном совпадают с полученными ниже результатами по критерию минимального риска при обнаружении.

Задача определения оптимального порога двоичного квантования по критерию минимального риска аналогична задаче синтеза оптимального решающего устройства для обнаружения одиночных сигналов. Оптимальный порог двоичного квантования сигналов с известной

амплитудой по этому критерию получается из условия минимизации взвешенной суммы ошибок первого и второго рода. Для нахождения оптимального порога необходимо продифференцировать выражение для среднего риска по порогу и приравнять результат нулю.

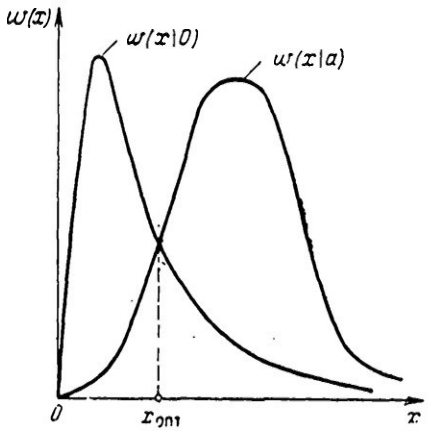


Рис. 2.7. Оптимальный порог двоичного квантования по критерию среднего риска при $C_1 = C_2 = 1$; $P_S = Q_S = 0{,}5$.

Средний риск при обнаружении одиночного нормированного сигнала в соответствии с общей формулой (1.45) запишем в виде

$$R = C_1 F \int_{-\infty}^{x_0} w\,(x/a)\,dx + C_2 P_{S1} \int_{x_0}^{\infty} w\,(xjO)\,dx. \qquad (2.33)$$

Возьмем для простоты случай:

$$C_1 = C_2 = 1,\ P_{S0} = P_{S1} = 0{,}5.$$

Тогда, дифференцируя выражение (2.33) по x_0, получим уравнение для нахождения оптимального порога $x_{0\,опт}$:

$$w\,(x/0)\big|_{x_0 = x_{0опт}} = w\,(x_0/a)\big|_{x_0 = x_{0опт}}. \qquad (2.34)$$

В соответствии с выражением (2.34) оптимальный порог должен выбираться так, как показано на рис. 2.7.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Для нормированных амплитуд смеси сигнала и помехи на выходе синхронного детектора имеем:

$$w(x/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2}\right],$$

$$w(x/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.34), после несложных преобразований получим

$$x_{0\,\text{опт}} = \frac{a}{2}.$$

Таким образом, оптимальный порог двоичного квантования сигналов на выходе синхронного детектора равен половине амплитуды полезного сигнала. Аналогичный результат, но значительно более сложным путем, получен в работе [22] по критерию минимума потери информации о полезном сигнале.

2. Для нормированных амплитуд смеси нефлюктуирующего сигнала и помехи на выходе детектора огибающей имеем

$$w(x/a) = x \exp\left[-\frac{x^2+a^2}{2}\right] I_0(ax),$$

$$w(x/0) = x \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.34), получаем

$$\ln I_0(ax_{0\,\text{опт}}) = \frac{a^2}{2}. \qquad (2.35)$$

Уравнение (2.35) не решается в явном виде. Для случая слабых сигналов $(ax_{0\,\text{опт}} \ll 1)$, используя асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя

$$I_0(ax_{0\,\text{опт}}) \sim 1 + \frac{(ax_{0\,\text{опт}})^2}{4},$$

$$\ln I_0(ax_{0\,\text{опт}}) \approx \frac{a^2 x_{0\,\text{опт}}^2}{4},$$

получим

$$x_{0опт} = \sqrt{2}.$$

Для ряда значений амплитуды сигнала $(a \geqslant 1)$ численное решение уравнения (2.35) дает следующие результаты:

a	1	2	3	4
$x_{0опт}$	1.5	1,75	2.1	2.5

При увеличении амплитуды сигнала оптимальный порог стремится к $\frac{a}{2}$. В работе [22] аналогичные результаты получены по критерию минимума потери информации.

На рис. 2.8 приведены рассчитанные по формуле (2.33) кривые среднего риска в зависимости от порога

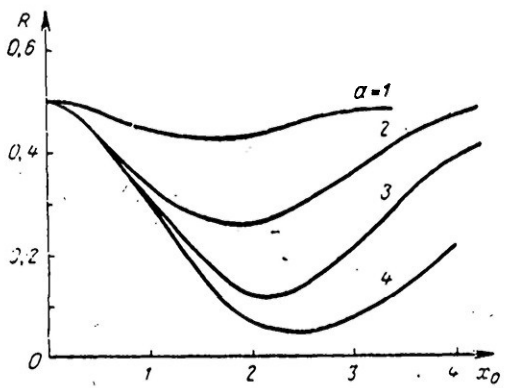


Рис. 2.8. Средний риск при двоичном квантовании одиночного сигнала.

квантования для нескольких, наиболее характерных для импульсной РЛС обзорного действия отношений сигнала к помехе. Кривые имеют слабо выраженные минимумы, что свидетельствует о некритичности выбора порога двоичного квантования. В среднем, для достаточно широкого диапазона отношений сигнала к помехе, оп-

тимальные пороги лежат в диапазоне 1,8—2,2, что дает возможность выбирать фиксированное значение порога для всех ожидаемых отношений сигнала к помехе, без заметного проигрыша в вероятности обнаружения.

При использовании критерия Неймана — Пирсона порог квантования выбирается только исходя из заданной вероятности его превышения за счет помехи, т. е. исходя из заданной вероятности появления единицы в области помехи.

Если с выхода детектора огибающей поступает только помеха, т. е. $a=0$, то вероятность появления единицы равна

$$p_N(x_0)=\int_{x_0}^{\infty} x\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]dx=\exp\left[-\frac{x_0^2}{2}\right].$$

При заданной вероятности p_N из этого выражения можно найти относительный порог амплитудного квантования

$$x_0=\sqrt{2\ln\frac{1}{p_N}}. \qquad (2.36)$$

Вероятность появления единицы при наличии нефлюктуирующего сигнала определяется в этом случае по формуле

$$p_S(x_0,\ a)=\int_{\sqrt{1\ln\frac{1}{p_N}}}^{\infty} x\exp\left[-\frac{x^2+a^2}{2}\right]I_0(ax)\,dx. \qquad (2.37)$$

Графически зависимость $[1-p_S(x_0,\ a)]=f(a)$ представлена на рис. 2.9.

Вероятность появления единицы при наличии быстро флюктуирующего сигнала вычисляется по формуле

$$p_S(x_0,\ k)=\int_{x_0}^{\infty}\frac{x}{1+k^2}\exp\left[-\frac{x^2}{2(1+k^2)}\right]dx.$$

Рассмотрим теперь влияние двоичного квантования на точность оценки времени задержки импульсного сигнала.

В случае двоичного квантования отсчет времени задержки производится в точке пересечения фронтом импульса порогового уровня x_0. При этом фиксация временной задержки производится с помощью различного рода электронных реле (спусковых схем, триггеров). Воздействие помех сказывается в появлении не-

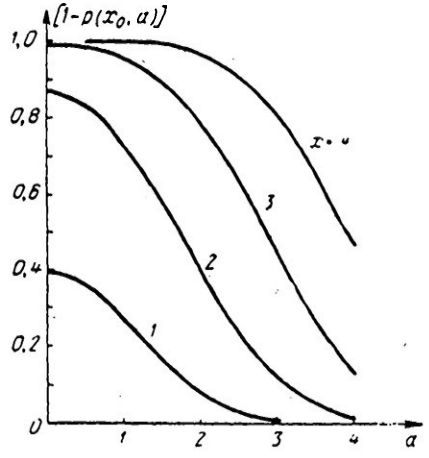


Рис. 2.9. Кривые вероятности необнаружения одиночного сигнала.

стабильности срабатывания реле, что, в свою очередь, приводит к ошибкам оценки временного положения импульса. К такому же эффекту приводят и флюктуации, присущие самому реле (нестабильность питания, температуры и т. д.), вызывающие непостоянство уровня срабатывания x_0. Однако эти флюктуации можно отнести к помехам, считая уровень x_0 ПОСТОЯННЫМ.

Одиночный импульсный сигнал на входе реле можно представить в виде

$$U(t) = S(t - t_0) + N(t),$$

где t_0 — истинная задержка сигнала (рис. 2.10).

Пусть момент срабатывания t_c задается точкой пересечения кривой $U(t)$ уровня U_0. Тогда этот момент времени будет определяться уравнением

$$S(t_c) + N(t_c) = U_0.$$

При отсутствии помех выполнялось бы условие

Приравнивая полученные выражения, находим

$$S(t_0) - S(g + N(t_c) = 0. \qquad (2.38)$$

Подставим в (2.38)

и разложим $S(t_c) = S(t_0 - \Delta\tau)$ в ряд Тейлора. Ограничиваясь линейным приближением, получим

$$S'(t_0)\,\Delta\tau - N(t_c) = 0.$$

Если $N(t)$ — малое приращение огибающей, обусловленное действием помех, так что можно положить $N(t_c) = N(t_0)$, то линейное приближение ошибки времени задержки находится из выражения

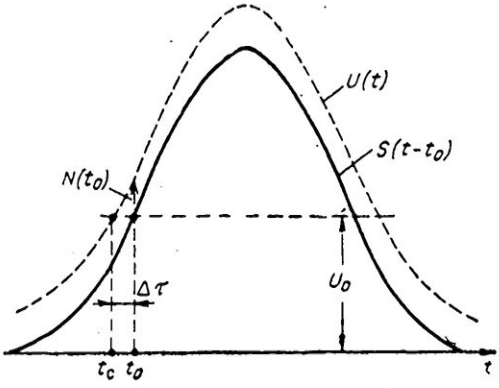


Рис. 2.10. К оценке точности измерения временной задержки колокольного импульса при двоичном квантовании.

$$\Delta\tau = \frac{N(t_0)}{S'(t_0)},$$

где $S'(t_0)$ — крутизна фронта импульса на уровне U_0. Дисперсия этой ошибки будет равна:

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sigma_N^2}{S'^2(t_0)}. \qquad (2.39)$$

Для модели сигнала с колокольной огибающей имеем:

$$S(t) = S_0 \exp\left[-\pi\left(\frac{t}{\tau_и}\right)^2\right],$$

$$S'(t_0) = -\frac{2\pi}{\tau_и^2} S(t_0) t_0,$$

$$S'^2(t_0) = \frac{4\pi^2}{\tau_и^4} S^2(t_0) t_0^2.$$

Дисперсия ошибки для импульса с колокольной огибающей

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\tau_и^4 \sigma_N^2}{S^2(t_0)\, 4\pi^2 t_0^2}. \qquad (2.40)$$

Выразим t_0 через амплитуду импульса

$$t_0^2 = -\frac{\tau_и^2}{\pi} \ln \frac{S(t_0)}{S_0}. \qquad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.40) и переходя к нормированным величинам, получим

$$\sigma_\tau^2 = -\frac{\tau_и^2}{4\pi x_0^2 \ln\left(\frac{x_0}{a_0}\right)} = -\frac{1}{4\pi \Delta f^2 x_0^2 \ln\left(\frac{x_0}{a_0}\right)}$$

или, переходя к безразмерному времени $\nu = \Delta f \cdot t$, получим окончательно

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{4\pi x_0 \ln\left(\frac{a_0}{x_0}\right)} \qquad (2.42)$$

Формула (2.42) верна только при $a_0 > x_0$.

На рис. 2.11 приведены рассчитанные по формуле (2.42) графики дисперсий ошибок отсчета времени задержки колокольного импульса для нескольких значений отношения сигнала к помехе *a*. Дисперсия ошибок

имеет минимум в точке максимальной крутизны импульса. Эту точку легко найти аналитически. Обозначим

Тогда

$$\frac{dy}{d\alpha} = -2\alpha e^{-\alpha^2},$$

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = -2(1-2\alpha^2)e^{-\alpha^2}.$$

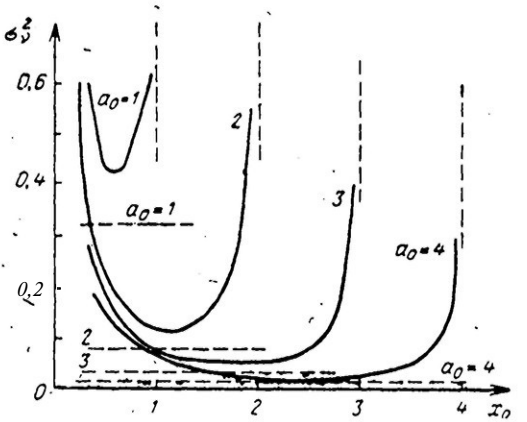


Рис. 2.11. Графики дисперсии ошибок отсчета времени задержки колокольного импульса.

Абсцисса точки максимальной крутизны удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = 0.$$

Решая это уравнение (беря положительный корень), получим

$$1-2\alpha^2 = 0, \quad \alpha = 0{,}707.$$

Ордината точки наибольшей крутизны равна

$$y = e^{-0{,}5} = 0{,}607.$$

Таким образом, с точки зрения обеспечения максимальной точности отсчета задержки колокольного им-

пульса порог квантования надо выбирать на уровне $x_0 = 0{,}607 a_0$.

Из рассмотрения кривых рис. 2.11 для дисперсии ошибок также следует, что для сильных сигналов, когда, собственно говоря, и имеет смысл измерять их задержку, выбор порога x_0 некритичен. Поэтому обоснованные выше значения порога x_0 с точки зрения оптимального обнаружения сильных сигналов являются оптимальными и с точки зрения обеспечения максимальной точности измерения времени их задержки.

Как известно [6], оптимальная процедура отсчета времени задержки импульсного сигнала состоит в нахождении положения на оси времени максимума соответствующей функции правдоподобия. Максимум функции правдоподобия в данном случае совпадает с максимумом амплитуды сигнала.

Потенциальная точность отсчета времени задержки характеризуется следующей дисперсией ошибки:

$$\sigma^2_{\tau\text{пот}} = \frac{1}{a_0^2 (\Delta f_в)^2} = \frac{1}{a_0^2 \pi \Delta f^2}, \qquad (2.43)$$

а для безразмерного времени—

$$\sigma^2_{\nu\text{пот}} = \frac{1}{a_0^2 \pi}. \qquad (2.44)$$

На рис. 2.11 пунктирными линиями нанесены значения дисперсии потенциальных ошибок задержки, подсчитанные по формуле (2.44). Сравнение графиков при совпадающих значения a_0 позволяет оценить потери в точности отсчета задержки, обусловленные двоичным квантованием амплитуд импульсных сигналов.

Рассмотрим теперь кратко опубликованные в литературе результаты по оценке эффективности многоуровневого квантования амплитуд сигналов. Если ставится задача восстановления амплитуды сигнала по квантованным данным, то выбор интервалов многоуровневого квантования можно производить по критерию условного риска (см. п. 2.2.2). Как показано в работе [18], дисперсия ошибки квантования с ростом числа уровней убывает по экспоненциальному закону.

Возможен также подход к выбору интервалов многоуровневого квантования с точки зрения минимизации потерь информации о полезном сигнале. Полученные в работе [23] результаты показывают, что с этой точки зрения многоуровневое квантование эффективнее двоичного только при слабых сигналах. При отношениях сигнала к помехе $a \geqslant 2$ двоичное квантование исчерпывает практически всю полезную информацию об амплитуде сигнала.

Наконец, выбор интервалов многоуровневого квантования можно производить с точки зрения минимизации потерь в пороговом сигнале при обнаружении последовательности (пачки) квантованных сигналов. Полученные в работе [24] результаты показывают, что выигрыш в пороговом отношении сигнала к помехе по мощности при многоуровневом квантовании по сравнению с двоичным квантованием не превышает 1 *дб*.

Практическая реализация цифровой обработки при многоуровневом квантовании сигналов значительно сложнее, чем при двоичном. Поэтому во многих случаях сознательно идут на некоторое увеличение потерь ради простоты аппаратуры.

§ 2.4. СОВМЕСТНОЕ КВАНТОВАНИЕ ПО АМПЛИТУДЕ И ВРЕМЕНИ

2.4.1. Вероятность обнаружения нестационарного сигнала в пределах фиксированного временного интервала

В предыдущем параграфе при выборе оптимального порога двоичного квантования мы оперировали с вероятностями превышения порога в точке, т. е. не учитывали того факта, что длительность импульса временного квантования конечна и соизмерима с длительностью интервала корреляции квантуемого сигнала. При временном квантовании сигналов импульсами конечной длительности необходимо вместо вероятности обнаружения в точке учитывать вероятность обнаружения в пределах фиксированного временного интервала.

Задача о вероятности превышения нестационарным случайным сигналом заданного порога двоичного кван-

тования в пределах конечного временного интервала ставится следующим образом [25, 26, 28].

Пусть $U(t)$ — непрерывный случайный сигнал, о свойствах которого никаких специальных предположений не делается. Пусть UQ — порог амплитудного квантования сигнала и, кроме того, задан временной интервал $(t_1, t_1+\tau_{кв})$, в пределах которого рассматривается вероят-

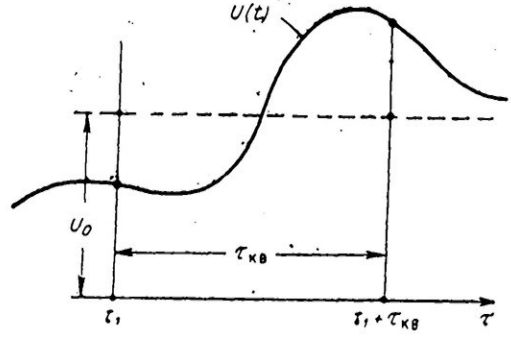


Рис. 2.12. К обнаружению нестационарного сигнала на фиксированном временном интервале.

ность превышения сигналом порога U_0 (рис. 2.12). Очевидно, сигнал $U(t)$ будет обнаружен в интервале $(t_1, t_1+\tau_{кв})$, если произойдет одно из двух несовместных события:

1. Сигнал превышает порог в момент t_0, т. е.

$$U(t_1) \geqslant U_0.$$

Вероятность этого события представляет собой вероятность превышения сигналом порога U_0 в момент $t\backslash$ и определяется выражением

$$p_1 = P(U_0, t_1) = \int_{U_0}^{\infty} w(U, t_1)\, dU. \qquad (2.45)$$

2. В момент времени t_1 сигнал не превышает порог, но на временном интервале $/t\backslash, t_1+\tau_{кв})$ произошло пересечение порога U_0 снизу вверх, хотя бы один раз. Вероятность события 2 равна

$$p_2 = (1 - p_1) P_{\backslash\backslash>/}(U_0, t_1, \tau_{кв}), \qquad (2.46)$$

Где $P_{N\geqslant 1}(U_0, t_1, \tau_{кв})$ — условная вероятность хотя бы одного выброса (пересечения порога U_0 снизу вверх) на интервале $(t_1, t_1+\tau_{кв})$.

Условием является неравенство $U(t_1) < U_0$. Полная вероятность обнаружения сигнала равна сумме вероятностей p_1 и p_2, т. е.

$$P_{обн}(U_0, t_1, \tau_{кв}) = p_1 + (1-p_1) P_{N\geqslant 1}(U_0, t_1, \tau_{кв}). \quad (2.47)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (2.47) учитывает влияние конечной длительности интервала $\tau_{кв}$ на вероятность обнаружения сигнала $V(t)$. При $\tau_{кв} \to 0$, $P_{N\geqslant 1}(U_0, t_1, \tau_{кв})$ также стремится к нулю и второе слагаемое пропадает. Наоборот, при увеличении $\tau_{кв}$ второе слагаемое будет вносить заметную поправку в сторону увеличения вероятности обнаружения. Поправка будет тем существеннее, чем меньше p_1.

При определении полной вероятности обнаружения сигнала по формуле (2.47) основное затруднение связано с нахождением условной вероятности $P_{N\geqslant 1}(U_0, t_1, \tau_{кв})$, так как для этого необходимо знать закон распределения числа выбросов, превышающих порог U_0. точно решить задачу о нахождении $P_{N\geqslant 1}(U_0 t_1, \tau_{кв})$ в общем случае весьма трудно.

Рассмотрим частный случай, когда среднее число выбросов, превышающих порог U_0, достаточно мало, чтобы можно было считать появление последовательных выбросов независимыми редкими событиями. Тогда число выбросов можно считать приближенно подчиняющимся закону Пуассона [25]:

$$P_k(U_0, t_1, \tau_{кв}) = \frac{\left[\overline{N(U_0, t_1, \tau_{кв})}\right]^k}{k!} \exp\left[-\overline{N(U_0, t_1, \tau_{кв})}\right]. \quad (2.48)$$

Единственным параметром этого закона является среднее число выбросов $\overline{N(U_0, t_1, \tau_{кв})}$ за время $\tau_{кв}$, которое можно вычислить точно.

Из формулы (2.48) следует, что вероятность того, что за время $\tau_{кв}$ не произойдет ни одного выброса равна

$$P_0(U_0, t_1, \tau_{кв}) = \exp\left[-\overline{N(U_0, t_1, \tau_{кв})}\right],$$

а вероятность получить хотя бы один выброс

$$P_{N\geqslant 1}(l$$

$$=1-\exp\left[-\overline{N(U_0,\ t_1,\ \tau_{кв})}\right]. \qquad (2.49)$$

Для определения $\overline{N(U_0,\ t_1,\ \tau_{кв})}$ найдем сначала вероятность того, что в бесконечно малом промежутке времени, непосредственно следующем за t_1, произойдет выброс, превышающий U_0. Для этого нужно, чтобы в момент времени t_1 амплитуда сигнала была меньше U_0 $(U(t_1)<U_0)$, а в момент времени t_1+dt эта амплитуда была больше U_0, т. е. $U(t_1+dt)>U_0$.

Учитывая малость dt, с точностью до бесконечно малых второго порядка можно записать

$$U(t_1+dt)=U(t_1)+\left.\frac{dU}{dt}\right|_{t_1} dt,$$

где $\left.\frac{dU}{dt}\right|_{t_1}$, обозначаемое в дальнейшем $v_U(t_1)$,— скорость изменения сигнала в момент t_1.

Следовательно, условие $U(t_1+dt)>U_0$ можно заменить условием

$$U_0-v_U(t_1)\cdot dt<U(t_1),$$

а условие наличия выброса в интервале dt можно записать в виде

$$U_0-v_U(t_1)\,dt<U(t_1)<U_0 \text{ при } v_U(t_1)>0.$$

Для вычисления вероятности этого неравенства введем в рассмотрение двумерный закон распределения амплитуды сигнала и скорости ее изменения в один и тот же момент времени t_1 — $w(U,\ v_U/t_1)$. Тогда вероятность выброса на интервале dt будет равна

$$P(U_0,\ t_1,\ dt)=P(U_0-v_U(t)\,dt<U(t)<U_0)=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_{U_0-v_U\,dt}^{U_0} w(U,\ v_U/t_1)\,dv_U dU, \qquad (2.50)$$

где пределы внутреннего интеграла охватывают значения амплитуды, а внешнего — скорости ее изменения.

Внутренний интеграл в (2.50) может быть вычислен сразу, так как у него пределы интегрирования отличаются на бесконечно малую величину $v_U dt$ и, следовательно, пользуясь теоремой о среднем, получим

$$\int_0^{U_0} w(U,\ v_U/t_1)\,dU = v_U w(U_0,\ v_U/t_1)\,dt.$$

Таким образом,

$$P(U_0,\ t_1,\ dt) = dt \int_0^{\infty} v_U w(U_0,\ v_U/t_1)\,dv_U. \qquad (2.51)$$

Для определения числа выбросов на интервале $\tau_{кв}$ разобьем его на m непересекающихся равных интервалов Δt_j, таких, что вероятность получить в каждом из них больше одного выброса равна нулю, и введем вспомогательные случайные величины x_j, каждая из которых равна единице, если внутри соответствующего интервала имеет место выброс с положительной производной, и нулю — в противном случае. Тогда полное число выбросов $N(U_0, t_1,\ \tau_{кв})$ на интервале $\tau_{кв}$ будет равно сумме величин x_j:

$$\mathrm{N}(U_0,\ t_1,\ \tau_{кв}) = \sum_{j=1}^{m} x_j. \qquad (2.52)$$

Находя математическое ожидание от обеих частей равенства (2.52) и учитывая при этом, что математическое ожидание каждой из величин x_j численно равно вероятности выброса в j-м интервале, получим

$$\overline{\mathrm{N}(U_0,\ t_1,\ \tau_{кв})} = \sum_{j=1}^{m} P(U_0,\ t_j,\ \Delta t_j).$$

Увеличивая число интервалов до бесконечности и подставляя вместо $P(U_0, t_j, \Delta t_j)$ его значение из (2.51), получим

$$\overline{\mathrm{N}(U_0,\ t_1,\ \tau_{кв})} = \int_{t_1}^{t_1+\tau_{кв}} dt \int_0^{\infty} v_U w(U_0 v_U/t_1)\,dv_U. \qquad (2.53)$$

Внутренний интеграл в формуле (2.53) можно трактовать как среднее значение числа пересечений порога Uo в момент t_1, т. е.

$$\overline{N(U_0, t_1)} = \int_0^{\text{оп.}} v_U w(U_0, v_U/t_1)\, dv_U. \qquad (2.54)$$

Тогда

$$\overline{N(U_0, t_1, \tau_{кв})} = \int_{t_1} \overline{N(U_0, t_1)}\, dt. \qquad (2.55)$$

Подставляя теперь выражение (2.55) для $\overline{N(U_0, t_1, \tau_{кв})}$ в выражение (2.49) для вероятности получения хотя бы одного выброса на интервале $\tau_{кв}$, а последнее — в выражение (2.47) для полной вероятности обнаружения сигнала на интервале $\tau_{кв}$, получим окончательно:

$$P_{обн}(U_0, t_1, \tau_{кв}) = P(U_0, t_1) + [1 - P(U_0, t_1)]\left\{1 - \exp\left[-\int_{t_1}^{t_1+\tau_{кв}} \overline{N(U_0, t_1)}\, dt\right]\right\}. \qquad (2.56)$$

Формула (2.56) дает возможность вычислить вероятность обнаружения нестационарного сигнала на конечном временном интервале при фиксированном пороге Uo и позволяет производить совместный выбор порога и длительности импульса квантования (или интервала квантования, если $t_к = \tau_{кв}$) по какому-либо заранее принятому критерию. В частности, таким критерием может быть максимизация вероятности обнаружения сигнала с заданной интенсивностью, так как с увеличением порога U_0 вероятность обнаружения уменьшается, а с увеличением интервала $\tau_{кв}$ — увеличивается.

2.4.2, Вероятность ложного обнаружения стационарной помехи в пределах фиксированного временного интервала

При расчете вероятности обнаружения в пределах фиксированного временного интервала помехи, представляющей собой стационарный случайный процесс, фор-

мула (2.56) значительно упрощается. В этом случае вероятность обнаружения в одной точке интервала не зависит от времени и определяется выражением

$$PN\ (U_0)=\int_{U_0}^{\infty} w\,(U)\,dU=\overline{N\,(U_0)}\tau_{ср}\ (U_0), \qquad (2.57)$$

где $\overline{N(U_0)}$ — среднее число выбросов, превышающих порог U_0 В единицу времени; $\tau_{ср}(U_0)$ — средняя длительность выброса на уровне U_0.

Кроме того, для стационарных помех имеем

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau_{кв}} \overline{N\,(U_0,\ t_1)}\,dt=\int_{0}^{\tau_{кв}} \overline{N\,(U_0)}\,dt=\overline{N\,(U_0)}\,\tau_{кв}. \qquad (2.58)$$

С учетом выражений (2.57) и (2.58) формула для вероятности ложного обнаружения на интервале $\tau_{кв}$ преобразуется к виду

$$P_{л0}\,(U_0,\ \tau_{кв})=\overline{N\,(U_0)}\,\tau_{ср}\,(U_0)+$$

$$+[1-\overline{N\,(U_0)}\,\tau_{ср}\,(U_0)]\,\{1-\exp\,[-\overline{N\,(U_0)}\,\tau_{кв}]\}.$$

После элементарных преобразований получим окончательно

$$P_{л0}\,(U_0,\ \tau_{кв})=1-[1-\overline{N(U_0)}\,\tau_{ср}\,(U_0)]\exp\,[-\overline{N\,(U_0)}\,\tau_{кв}]. \qquad (2.59)$$

Таким образом; для вычисления вероятности ложного обнаружения на интервале $\tau_{кв}$ нужно знать среднее число выбросов $\overline{N(U_0)}$ и среднюю длительность выбросов.

Общее выражение для среднего в единицу времени числа выбросов, превосходящих порог U_0, получено в предыдущем пункте [ем. (2.54)]. Для стационарной помехи среднее число выбросов не зависит от времени, поэтому из выражения (2.54) имеем

$$\overline{N\,(U_0)}=\int_{0}^{\infty} v_U w\,(U_0,\ v_U)\,dv_U. \qquad (2.60)$$

Формула для двумерной плотности вероятности Огибающей U и ее производной v_U на уровне U_0 получена в [5] и имеет вид:

$$w(U_0,\ v_U) = \frac{U_0}{\sigma_N^3 \delta\omega \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_N^2}\left(U_0^2 + \frac{v_U^2}{\delta\omega^2}\right)\right], \quad (2.61)$$

где $\delta\omega$ — средняя ширина спектра флюктуаций, равная для фильтра с амплитудно-частотной характеристикой вида (2.19) [5],

$$\delta\omega \approx 0{,}8\pi\Delta f_в.$$

Подставляя выражение (2.61) в (2.60), после интегрирования получим

$$\overline{N(U_0)} = \frac{\delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{U_0}{\sigma_N} \exp\left[-\frac{U_0^2}{2\sigma_N^2}\right]. \quad (2.62)$$

Или, переходя к нормированному порогу x_0, для фильтра с колокольной амплитудно-частотной характеристикой вида (2.19), получим окончательно

$$\overline{ВД} \approx \sqrt{\pi}\Delta f x_0 \exp\left(-\frac{x_0^2}{2}\right). \quad (2.62а)$$

Средняя длительность выброса огибающей помехи определяется выражением

$$\int_0^{\infty} \qquad \sqrt{2\pi}\sigma_{..}$$

Для фильтра с колокольной амплитудно-частотной характеристикой получим

$$\tau_{ср}(x_0)) \approx -\frac{1}{\qquad}, \quad (2.63а)$$

Формулы (2.62) и (2.63) определяют среднее за единицу времени число и среднюю длительность выбросов помехи на входе квантизатора, где они воздействуют на электронное реле, которое срабатывает только от им-

пульсов определенной длительности $\tau > \tau_m$. Поэтому представляет интерес рассмотрение вопроса о числе выбросов помехи, длительность которых превышает τ_m. Для этого необходимо знать плотность распределения выбросов по длительности. Задача определения плотности распределения выбросов по длительности чрезвычайно сложна и в общем виде до сих пор не решена. В литературе [26] получены приближенные формулы, годные для частных случаев больших порогов, в предположении, что выбросы и интервалы между выбросами представляют собой независимые случайные величины, а моменты начала выбросов подчинены закону Пуассона. В этом случае плотность распределения выбросов определяется выражением

$$w[\tau(U_0)] = \frac{1}{\overline{N(U_0)}} \frac{\partial^2 R_\eta(\tau)}{\partial \tau^2 (U_0)}, \qquad (2.64)$$

где $R_\eta(\tau)$ — нормированная корреляционная функция так называемого ограниченного процесса $\eta(t)$, определяемого следующим образом:

$$\eta(t) = x[U(t) - U_0],$$

$$x = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Нормированную корреляционную функцию ограниченного процесса можно представить в виде

$$R_\eta(\tau) = \exp[-\overline{N(U_0)}\,\tau].$$

С учетом этого

$$w[\tau(U_0)] = \overline{N(U_0)} \exp[-\overline{N(U_0)}\,\tau]. \qquad (2.65)$$

Зная закон распределения длительности выбросов, можно вычислить число выбросов, имеющих длительность $\tau > \tau_m$, по следующей формуле:

$$\overline{N(U_0, \tau_m)} = \overline{N(U_0)} \left(1 - \int_0^{\tau_m} w[\tau(U_0)]\, d\tau\right) =$$

$$= \overline{N(U_0)} \exp[-\overline{N(U_0)}\,\tau_m]. \qquad (2.66)$$

На рис. 2.13 построены графики вероятности ложного обнаружения в зависимости от безразмерной длительности временного интервала $\nu_{кв}=\Delta f\tau_{кв}$ при различных нормированных порогах x_0. Сплошные кривые построены без учета чувствительности электронного реле, а пунктирные кривые соответствуют случаю, когда электронное реле, фиксирующее наличие выброса по-

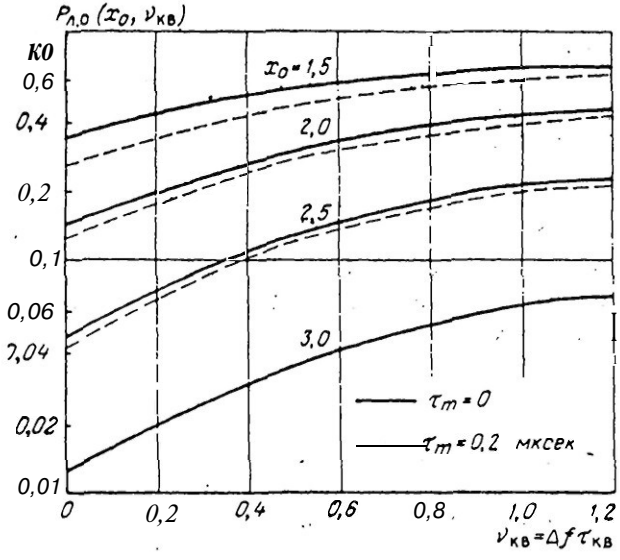


Рис. 2.13. Вероятность ложного обнаружения в зависимости от интервала квантования.

мехи, срабатывает только от импульсов длительностью $\tau_m \geqslant 0{,}2$ *мксек*.

Кривая показывает, что с увеличением интервала $\nu_{кв}$ вероятность ложного обнаружения растет, причем относительный рост этой вероятности тем больше, чем выше порог x_0. Так, при $x_0=1{,}5$ увеличение интервала $\nu_{кв}$ от О до 1 приводит к увеличению вероятности ложного обнаружения примерно в 2 раза, а при $x_0=3$ такое же увеличение интервала $\nu_{кв}$ увеличивает вероятность ложного обнаружения в 6 раз.

2.4.3. Обнаружение на интервале импульса с колокольной огибающей

Пусть на вход приемного устройства поступает высокочастотный импульс с колокольной огибающей вида (2.18) и широкополосная стационарная нормальная помеха. Амплитудно-частотная характеристика линейной части приемника точно согласована со спектром сигнала и имеет вид (2.19). Детектор работает в линейном режиме и безынерционен для огибающей. Найдем вероятность превышения суммой сигнала и помехи на выходе детектора установленного порога U_0 В интервале $\tau_{кв}$, воспользовавшись для этого формулой (2.56)

Для безразмерного времени $\nu = \Delta f t$ нормированная огибающая сигнала запишется в виде

$$a_\nu = a_0 \exp[-\pi\nu^2], \qquad (2.67)$$

где $a_\nu = \frac{}{\sigma_N}$ — отношение сигнала к помехе в момент ν;

$a_0 = \frac{S_0}{\sigma_N}$ — отношение сигнала к помехе в центре сигнала ($\nu = 0$).

Вероятность обнаружения сигнала (2.67) в одной точке ν интервала $\nu_{кв}$ запишется в виде

$$P(x_0, \nu) = \int_{x_0}^{\infty} x \exp\left[-\frac{x^2 + a_\nu^2}{2}\right] I_0(a_\nu x)\, dx, \qquad (2.68)$$

где $x_0 = \frac{U_0}{\sigma_N}$ — нормированный порог;

$x = \frac{U}{\sigma_N}$ — нормированная огибающая суммарного сигнала.

Вероятность (2.68) будет различной для различных значений ν, так как a_ν изменяется по закону (2.67).

Выражение для математического ожидания числа выбросов огибающей суммы амплитудно-модулированного сигнала и помехи на выходе детектора огибающей получено В. С. Черняком и имеет вид

$$\overline{N(x_0, \nu)} = \overline{N_0(x_0, \nu)} \cdot M[a_\nu, x_0, z^2, \psi], \qquad (2.69)$$

где

$$\overline{N_0(x_0, \nu)} = \frac{\delta\omega}{\sqrt{2\pi}} x_0 \exp\left[-\frac{x_0^2 + a_\nu^2}{2}\right] I_0(a_\nu x_0) \quad (2.70)$$

— квазистационарное приближение для математического ожидания числа выбросов огибающей, не учитывающее скорость изменения огибающей сигнала:

$$M(a_\nu, x_0, z^2, \psi) = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot z \cdot \frac{I_1(a_\nu x_0)}{I_0(a_\nu x_0)} + \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \times$$

$$\times \left\{ I_0\left(\frac{z^2}{4}\right) + \frac{z^2}{2}\left[I_0\left(\frac{z^2}{4}\right) + I_1\left(\frac{z^2}{4}\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right.$$

$$\times \frac{I_{2n}(a_\nu x_0)}{I_0(a_\nu x_0)} \left[2 I_n\left(\frac{z^2}{4}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2(4n^2-1)}\right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{z^2}{2}\left(\frac{I_{n-1}\left(\frac{z^2}{4}\right)}{2n-1} - \frac{I_{n+1}\left(\frac{z^2}{4}\right)}{2n+1} \right) \right] \right\} \quad (2.71)$$

— функция поправки к квазистационарному приближению $N_0(x_0, \nu)$, учитывающая скорость изменения огибающей сигнала;

$$z^2 = \frac{a'^2_\nu}{\delta\omega^2};$$

a'_ν — производная нормированной огибающей сигнала по ν; $I_k(x)$ — модифицированная функция Бесселя k-го порядка; $\psi = 0$, при $a'_\nu > 0$, т. е. когда амплитуда сигнала увеличивается (знак «+» перед первым членом формулы (2.71)); $\psi = \pi$, при $a'_\nu < 0$, т. е. когда амплитуда сигнала уменьшается (знак «—» перед первым членом формулы (2.71)).

При небольших относительных скоростях изменения амплитуды сигнала, когда $z^2 < 0{,}4$ для расчета M можно, с погрешностью, не превышающей 10%, пользоваться простой формулой:

$$M[a_\nu, x_0, z^2, \psi] = 1 + \frac{z^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, z \frac{I_1(a_\nu x_0)}{I_0(a_\nu x_0)}. \quad (2.72)$$

При $z = 0\,(a'_v = 0)$ $M = 1$, что соответствует случай йё-модулированного сигнала.

Вычисления функции поправок $M[a_v, x_0, z^2, \psi]$ для различных значений a_v, x_0, z и $\psi = 0, \pi$ можно выполнить на электронной вычислительной машине. На

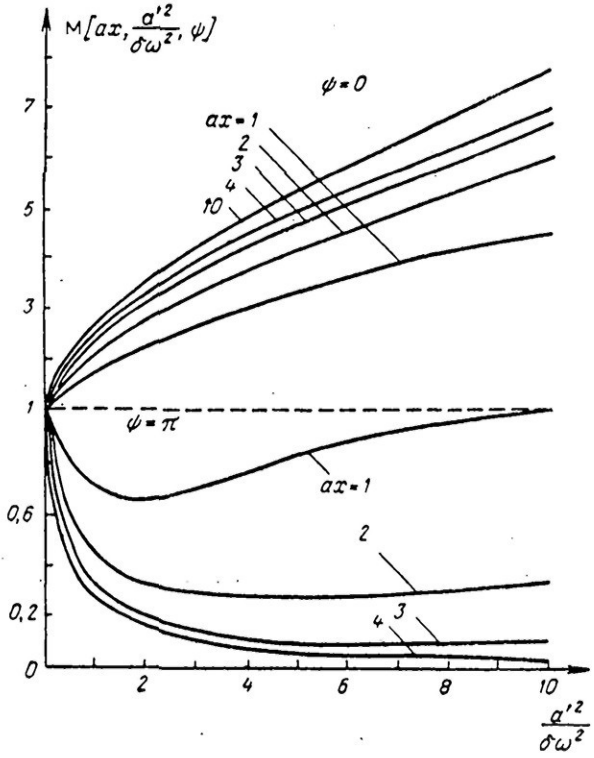


Рис. 2.14. Кривые поправок M.

рис. 2.14 приведены построенные по результатам вычислений графики поправок в функции от z^2. По этим графикам можно находить поправки к квазистационарному приближению $\overline{N_0(x_0, \nu)}$. Вычисление $\overline{N_0(x_0, \nu)}$ можно производить непосредственно по формуле (2.70) или по графикам рис. 1.6, так как выражение для $\overline{N_0(x_0, \nu)}$

с точностью до постоянного множителя $\frac{\delta\omega}{\sqrt{2\pi}}$ совпадает с выражением для плотности вероятности огибающей сигнала и узкополосной помехи.

На рис. 2.15 построены графики зависимости от безразмерного времени ν среднего числа выбросов, пре-

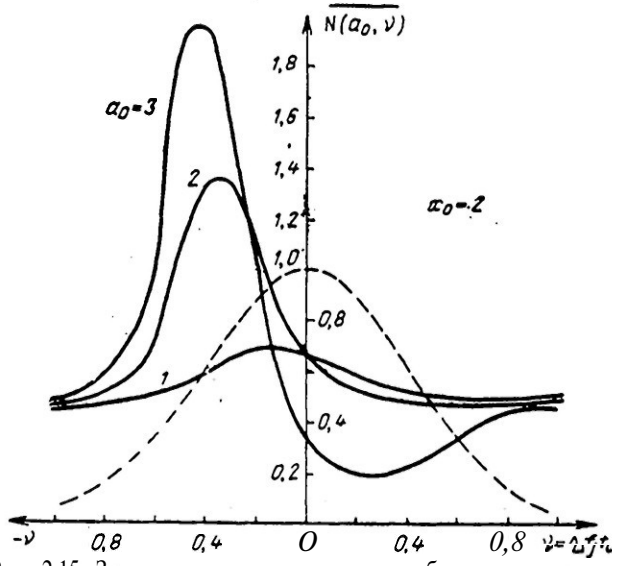


Рис. 2.15. Зависимость среднего числа выбросов, превышающих порог x_0, от безразмерного времени.

вышающих порог $x_0=2$, для случая, когда середина колокольного импульса совпадает с началом координат и $a_0=1$, 2, 3. Из графиков видно, что максимумы среднего числа выбросов смещены в сторону фронта импульса. Абсолютные величины максимумов увеличиваются с увеличением отношения сигнала к помехе, а их положение на оси времени соответствует точке наибольшей крутизны фронта импульса. Соответственно на спаде импульса наблюдаются минимумы среднего числа выбросов.

Теперь можно наметить порядок численных расчетов вероятности обнаружения сигнала с колокольной огибающей в пределах интервала квантования.

1; По формуле (2.70) находится среднее число выбросов огибающей (без учета изменения скорости огибающей) в каждой точке из диапазона изменения $\nu_{кв}$. Начало отсчета $\nu_{кв}$ удобно располагать в центре колокольного импульса.

2. По графикам на рис. 2.14 или по формуле (2.72) (при $z^2<0{,}4$) рассчитывается поправка на число выбросов огибающей в зависимости от значений a_ν; x_0 и a'_ν.

3. Строятся графики $\overline{N(x_0, \nu)} = \overline{N_0(x_0, \nu)}\, M[a_\nu, x_0, z^2, \psi]$, аналогичные изображенным на рис. 2.15.

4. Путем графического интегрирования кривых $\overline{N(x_0, \nu)}$ определяется среднее число выбросов на интервале $\nu_{кв}$.

5. По формуле (2.56) рассчитывается вероятность $P_{обн}(x_0, \nu, \nu_{кв})$ обнаружения сигнала на интервале $\nu_{кв}$. Необходимое при расчете вероятности $P_{обн}(x_0, \nu, \nu_{кв})$ значение $P(x_0, \nu)$ в начальной точке ν интервала $\nu_{кв}$ рассчитывается по формуле (2.68) или находится по таблицам [29].

Численные расчеты вероятности обнаружения в пределах интервала квантования можно, естественно, производить и непосредственно по формуле (2.56) с учетом формул (2.69), (2.70) и (2.71), на электронной вычислительной машине.

На рис. 2.16 приведены рассчитанные по изложенной методике графики зависимости вероятности обнаружения сигнала с колокольной огибающей от длительности интервала $\nu_{кв}$ при фиксированном пороге $x_0=2$ и $a_0=1$, 2 и 3 для случая, когда середина интервала совпадает с максимумом огибающей сигнала. Из этих графиков следует, что по мере расширения интервала $\nu_{кв}$ вероятность обнаружения сигнала увеличивается. Относительное увеличение вероятности обнаружения больше для слабых сигналов, чем для сильных. Так, для сигнала с $a_0=1$ при $x_0=2$ расширение интервала квантования от 0 до $\tau_{кор}(\nu_{кв}=1)$ приводит к увеличению вероятности обнаружения более чем в 2 раза. Для сигнала же с $a_0=2$ это увеличение не превышает 30%. При дальнейшем увеличении a_0 относительное приращение вероятности обнаружения будет уменьшаться, однако вероятность обнаружения на интервале всегда будет несколько больше вероятности обнаружения в точке, совпадающей с максимумом амплитуды импульса. Поэто-

Му встречающееся в Литературе [21, 24] утверждений о том, что вероятность обнаружения на интервале, равном длительности импульса, равна вероятности обнаружения в точке, соответствующей максимуму его амплитуды, верно только при сравнительно больших отношениях сигнала к помехе. При малых отношениях сигнала к помехе вероятность обнаружения на интерва-

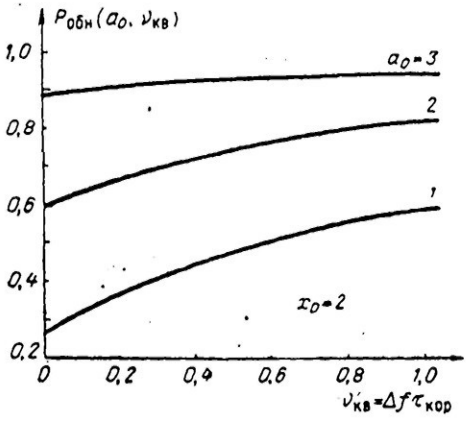


Рис. 2.16. Зависимость вероятности обнаружения колокольного импульса от ширины интервала квантования.

ле больше вероятности обнаружения в любой точке импульсного сигнала, в том числе больше вероятности обнаружения в точке его максимума.

До сих пор мы рассматривали случай, когда середина интервала $\tau_{кв}$ совпадает с максимумом огибающей сигнала. Однако обычно интервал $\tau_{кв}$ располагается произвольным образом относительно этого максимума. В связи с этим представляет интерес рассмотрение зависимости вероятности обнаружения сигнала от сдвига τ_0 середины интервала $\tau_{кв}$ относительно максимума огибающей сигнала (при различных значениях $\tau_{кв}$).

На рис. 2:17 показана такая зависимость для рассматриваемого частного случая импульса с колокольной огибающей. Взяты значения: $\tau_{кв}=0{,}4$ и 0,8 ширины интервала временной корреляции, а $x_0=2$; значения вероятностей отнесены к середине интервала $\tau_{кв}$.

Из графиков следует, что относительный сдвиг интервала длительностью $\tau_{кв}=0{,}8\tau_{кор}$ в пределах длительности сигнала на уровне $0{,}5a_0$ $(-0{,}5<\nu_0<0{,}5)$ практически не влияет на вероятность его обнаружения. С уменьшением $\tau_{кв}$ наблюдается уменьшение вероятности обнаружения, особенно на концах интервала сдвига. Отсюда следует целесообразность выбора широкого им-

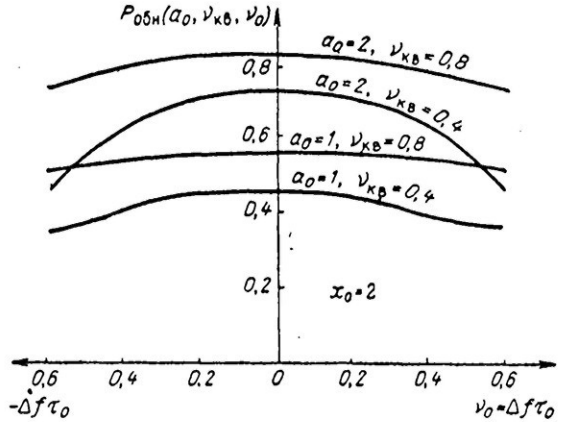


Рис. 2.17. Зависимость вероятности обнаружения колокольного импульса от сдвига интервала квантования относительно его центра.

пульса временного квантования вплоть до длительности интервала корреляции, т. е.

При квантовании сигналов, длительность которых брльше интервала корреляции, в пределах длительности сигнала будет укладываться несколько интервалов квантования. Для обнаружения такого сигнала необходимо, чтобы сигнал превысил порог x_0 хотя бы на одном из интервалов временного квантования. В этом случае вероятность обнаружения сигнала определяется по формуле

$$P_{обн}=1-(1-P(x_0, t_1, \tau_{кв}))(1-P(x_0, t_2, \tau_{кв}))\ldots$$
$$\ldots(1-P(x_0, t_n, \tau_{кв})), \qquad (2.73)$$

где $P(x_0, t_i, \tau_{кв})$ — вероятность обнаружения на i-м интервале квантования в (пределах длительности сигнала;

n — число интервалов $\tau_{кв}$, укладывающихся в пределах длительности сигнала.

Заметим в заключение, что рассмотренная в данном пункте методика расчета вероятности обнаружения на интервале квантования пригодна для любого закона модуляции амплитуды импульсного сигнала.

2.4.4. Функциональная схема устройства квантования сигналов

Вопросам технической реализации устройств для совместного квантования сигналов по времени и амплитуде посвящен ряд опубликованных работ [30], [31] и др. В настоящем пункте рассматривается один из возможных вариантов такой схемы, предназначенной для квантования сигналов импульсной РЛС.

В соответствии с рассмотренными выше принципами совместного квантования сигналов по амплитуде и времени схема должна выполнять следующие функции:

1. Квантование сигналов по амплитуде, состоящее в определении моментов времени, когда амплитуда огибающей смеси сигнала с помехой на выходе приемного устройства РЛС превышает определенный уровень (порог).

2. Квантование сигнала по времени (дальности), состоящее в замене сигналов, превысивших порог амплитудного квантования, нормированными сигналами, положение которых по времени точно определено синхронизирующими импульсами временного квантования.

Будем рассматривать схему, в которой интервалы временного квантования следуют один за другим без перерывов. Это соответствует случаю, когда период временного квантования равен длительности интервала квантования, т. е. $t_к = \tau_{кв}$.

Функциональная схема устройства квантования изображена на рис. 2.18, а временные диаграммы, поясняющие работу схемы, — на рис. 2.19.

В схему входят следующие элементы:

а) пороговое устройство,

б) усилитель-ограничитель (амплитудный нормализатор),

в) формирователь коротких импульсов,

г) нормализатор сигналов по времени,

Кроме того, в состав схемы устройства квантования обязательно включается автоматический регулятор порогового уровня U_0.

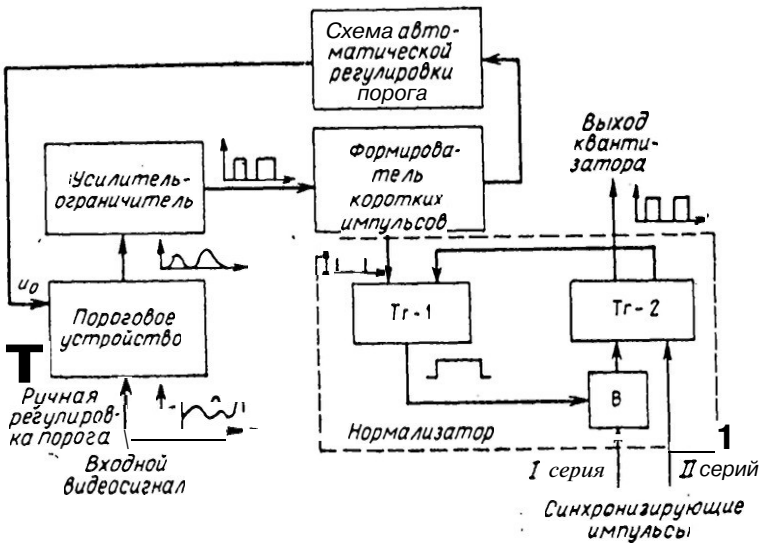


Рис. 2.18. Функциональная схема устройства квантования сигналов (квантизатора).

Рассмотрим работу схемы, пользуясь для пояснения временными диаграммами на рис. 2.19.

Огибающая непрерывного сигнала (эпюра *1*) с выхода приемного устройства РЛС подается на вход порогового устройства, представляющего собой амплитудный ограничитель. Сигналы, превысившие порог ограничения U_0, поступают на вход широкополосного усилителя-ограничителя. С выхода усилителя снимаются импульсы стандартной амплитуды с длительностью, равной времени пребывания входного сигнала выше порога ограничения (эпюра *2).* Из прямоугольных импульсов, полученных на выходе усилителя-ограничителя, формируются затем короткие импульсы (эпюра 5), фиксирую-

шие моменты превышения входными сигналами порога амплитудного квантования. Эти импульсы используются для управления схемой нормализации сигналов по времени, а также поступают в схему автоматической регулировки порога. В схеме автоматической регулировки порога производится счет импульсов, превысивших по-

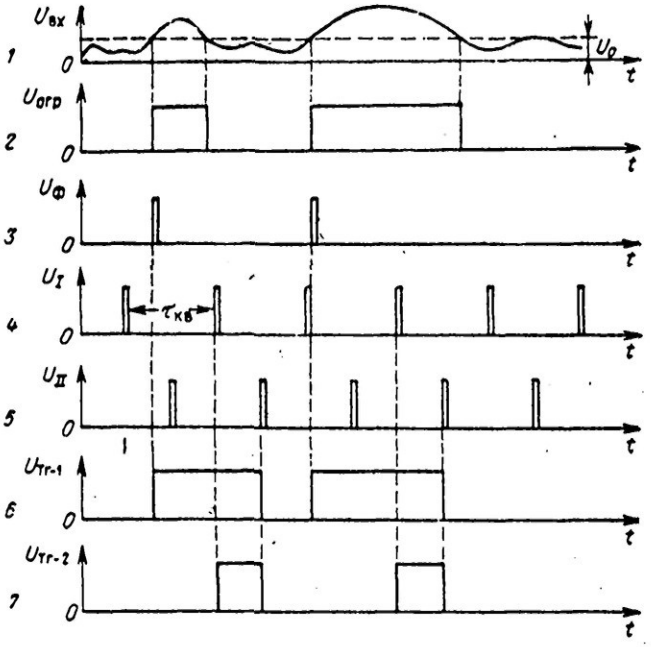


Рис. 2.19. Временные диаграммы, поясняющие работу схемы квантования сигналов,

рог U_0 и в зависимости от того, больше или меньше это число допустимого числа ложных сигналов на выходе квантизатора, вырабатывает новое значение U_0.

Нормализация выходных импульсов по времени производится с помощью синхронизирующих импульсов, жестко связанных с импульсами запуска РЛС. В рассматриваемой схеме используются две серии синхронизирующих импульсов, сдвинутых друг относительно друга на половину периода своего следования, т. е. на половину интервала временного квантования (эпюры *4* и *5*).

Импульс с выхода формирователя коротких импульсов ставит триггер Тг-1 нормализатора в единичное состояние, в результате чего на вентиль В выдается разрешающий потенциал. Очередной синхронизирующий импульс первой серии через открытый вентиль В ставит в единичное состояние триггер Тг-2. Возвращение Тг-2 в нулевое состояние осуществляется очередным синхронизирующим импульсом второй серии. При этом Тг-1 также возвращается в нулевое состояние (эпюры *6*, *7*).

Таким образом, триггер Тг-2 формирует выходной сигнал схемы квантования. Длительность этого сигнала равна половине периода повторения синхронизирующих импульсов, а его временное положение соответствует положению входного сигнала, превысившего порог амплитудного квантования.

Как видно из временных диаграмм работы схемы, выходной нормализованный сигнал выдается с задержкой относительно исходного сигнала. Величина этой задержки распределена равномерно в интервале, равном периоду следования синхронизирующих импульсов. Следовательно, схема вносит дополнительную ошибку по дальности, максимальная величина которой равна

$$\Delta U_{\text{кв макс}} \text{——} \frac{}{2}.$$

В заключение заметим, что все элементы схемы квантования должны обладать высоким быстродействием и стабильностью работы. Так, экспериментальная (Проверка показывает, что при длительности интервала квантования $\tau_{кв} = 2$ *мксек* полоса пропускания усилителя-ограничителя должна быть не менее 10 *Мгц,* а быстродействие триггеров не менее 2 *Мгц.* Только при этих условиях обеспечивается достаточная крутизна фронта ограниченного импульса и точная фиксация временного положения сигналов. Высокие требования предъявляются также к стабильности источников питания.

3.

Первичная обработка квантованных радиолокационных сигналов

§ 3.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ РЕШАЮЩИХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ПАЧЕК КВАНТОВАННЫХ СИГНАЛОВ

3.1.1. Постановка задачи

Обработку квантованных сигналов (пачек), в процессе которой используется вся сохранившаяся после квантования информация о первичном (неквантованном) сигнале, будем в дальнейшем называть квазиоптимальной обработкой.

Подходя к вопросу о квазиоптимальной обработке пачки квантованных сигналов, необходимо иметь в виду, что квантование неизбежно связано с потерей информации. Поэтому теоретически никакой алгоритм обработки квантованных сигналов не может обеспечить лучшие (или даже равные) качественные характеристики, чем алгоритм оптимальной обработки неквантованных сигналов.

С другой стороны, обработку квантованных сигналов можно осуществлять с помощью дискретных вычислительных устройств (дискретных накопителей), которым, в отличие от аналоговых накопителей, не свойственно явление насыщения. Поэтому несмотря на потери при квантовании дискретное накопление квантованных сигналов во многих случаях будет не менее эффективным, чем аналоговое накопление неквантованных сигналов.

В настоящем параграфе излагаются вопросы статистического синтеза дискретных решающих устройств

для квазиоптимального обнаружения и определения угловой координаты цели по пачке квантованных сигналов. Излагаемый материал является в некоторой мере обобщением результатов, опубликованных в большом числе работ, ссылки на которые делаются по ходу изложения.

3.1.2. Алгоритм квазиоптимального обнаружения пачки квантованных сигналов

А. Случай двоичного квантования сигналов. С точки зрения теории статистических решений, задача обнаружения пачки двоично-квантованных сигналов формулируется в следующем виде.

Пусть произведена дискретная выборка значений огибающей $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N0}\}$ на N_0 соседних элементарных участках по азимуту в пределах одного кольца дальности (см. рис. 2.5). Каждое из выборочных значений x_λ подвергается затем двоичному квантованию по амплитуде путем сравнения с пороговым уровнем x_0. Исход единичного испытания x_λ считается положительным, если соответствующее выборочное значение превышает порог ($x_\lambda = 1$), и отрицательным, если порог не превышается ($x_\lambda = 0$).

Совокупность исходов после квантования $\{x_1, x_2, \ldots, x'_{N0}\}$ представляет собой последовательность нулей и единиц. Эта последовательность поступает на вход решающего устройства. Задача решающего устройства состоит в том, чтобы на основе анализа полученной последовательности нулей и единиц решить оптимальным образом представляет ли принятая выборка пачку отраженных от целей импульсов или она относится к помехе.

Для решения сформулированной задачи решающее устройство должно обрабатывать поступающие сигналы в соответствии с некоторым наперед заданным алгоритмом, причем квазиоптимальный алгоритм обнаружения, как и для случая неквантованных сигналов, сводится к проверке гипотезы H_0 об отсутствии полезного сигнала против альтернативной гипотезы tfj о его наличии, т. е. к образованию отношения правдоподобия и сравне-

нию этого отношения с некоторым наперед заданным числом, выбираем исходя из априорной вероятности наличия сигнала и потерь, приписываемых ошибочным решениям (критерий среднего риска), или исходя из допустимой вероятности ложного обнаружения (критерий Неймана — Пирсона).

Для синтеза алгоритма обнаружения необходимо прежде всего найти статистические характеристики последовательности нулей и единиц, подлежащей обработке. Сделаем это сначала безотносительно к областям сигнала и помехи.

Обозначим через p_λ вероятность получения единицы на Я позиций, а через q_λ — вероятность получения нуля на этой позиции. Очевидно, $q_\lambda = 1 - p_\lambda$. Вероятность получения любого из двух возможных исходов в результате λ-го испытания можно записать в виде

$$P(x_\lambda) = p_\lambda^{x_\lambda} q_\lambda^{1-x_\lambda}, \quad (x_\lambda = 0, 1). \tag{3.1}$$

Вследствие независимости испытаний совместная вероятность получения некоторой комбинации нулей и единиц во всех N_0 испытаниях будет равна

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}) = \prod_{\lambda=1}^{N_0} p_\lambda^{x_\lambda} q_\lambda^{1-x_\lambda}. \tag{3.2}$$

В соответствии с формулой (3.2) вероятность получения единиц в каждом из N_0 испытаний равна

$$P(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N_0}) = \prod_{\lambda=1}^{N_0} p_\lambda,$$

а вероятность получения всех нулей

$$\prod_{\lambda=1}^{N_0}$$

Теперь на основании формулы (3.2) можно легко записать выражения для функций правдоподобия гипотез H_1 и H_0.

Функция правдоподобия гипотезы $И$\ имеет вид

$$L(x_1, x \ldots x_{N_0}/H_1) = \prod_{\lambda=1}^{N_0} p_{S\lambda}^{x_\lambda} q_{S\lambda}^{1-x_\lambda}, \qquad (3.3)$$

где $p_{S\lambda}$ — вероятность получения единицы на λ-позиции сигнальной пачки $(q_{S\lambda} = 1 - p_{S\lambda})$.

Функция правдоподобия гипотезы H_0 имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}/H_0) = \prod^{N_0} p_{N\lambda}^{x_\lambda} q_{N\lambda}^{1-x_\lambda}, \qquad (3.4)$$

где $p_{N\lambda}$ — вероятность получения единицы на Я-позиции в области помехи, одинаковая для всех λ $(q_{N\lambda} = 1 - p_{N\lambda})$.

Найдем отношение правдоподобия и сравним его с постоянным числом l_0, выбираемым в соответствии с установленным критерием оптимальности решения

$$l(x \quad x \quad v) = \frac{L(x_1, x \quad , x_{N_0}/H_1)}{} =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{N_0} \left(\frac{p_{S\lambda}}{p_{N\lambda}}\right)^{x_\lambda} \left(\frac{q_{S\lambda}}{q_{N\lambda}}\right)^{1-x_\lambda} \geqslant l_0.$$

Логарифм отношения правдоподобия

$$\ln l(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}) = \sum_{\lambda=1}^{N} \left[x_\lambda \ln \frac{p_{S\lambda}}{p_{N\lambda}} + \right.$$

$$\left. + (1 - x_\lambda) \ln \frac{q_{S\lambda}}{q_{N\lambda}} \right] \geqslant \ln l_0. \qquad (3.5)$$

После несложных преобразований выражения (3.5) получим

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \ln \frac{p_{S\lambda} q_{N\lambda}}{p_{N\lambda} q_{S\lambda}} \geqslant \ln l_0 - \sum_{\lambda=1}^{No} \ln \frac{q_{S\lambda}}{q_{N\lambda}}. \qquad (3.6)$$

Обозначая в выражении (3.6)

$$\eta_\lambda = \ln \frac{p_{S\lambda} q_{N\lambda}}{p_{N\lambda} q_{S\lambda}}, \quad \ln l_0 - \sum^{N_0} 1 \qquad = \text{const} = \mathcal{L},$$

запишем окончательную формулу для алгоритма квазиоптимального обнаружения пачки квантованных радиолокационных сигналов в следующем виде:

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \eta_\lambda \geqslant \mathcal{L}. \tag{3.7}$$

Функция η_λ, учитывающая ожидаемые значения вероятности получения единиц и нулей в области сигнала и помехи, носит название весовой функции обнаружения двоично-квантованных сигналов. Огибающая этой функции по форме соответствует огибающей диаграммы направленности антенны РЛС на прием и передачу *.

В соответствии с алгоритмом (3.7) процесс квазиоптимального обнаружения пачки двоично-квантованных сигналов сводится к выполнению следующих операций.

1. Запоминание сигналов (единиц и нулей) на выходе квантизатора в пределах ширины пачки (на N_0 позициях).

2. Суммирование значений предварительно запрограммированной весовой функции на тех позициях, на которых получены единицы с выхода квантизатора.

3. Сравнение полученной суммы с пороговым числом $\mathcal{L}$ и выдача решения об обнаружении (или необнаружении) пачки.

Структурная схема решающего устройства обнаружения, реализующего алгоритм (3.7), изображена на рис. 3.1. На схеме, для простоты, запоминающее устройство квантованных сигналов представлено в виде регистра со сдвигом РгС. Весовая функция условно запрограммирована на сопротивлениях. Накопитель «взвешенных» единиц в этом случае представляет собой сумматор токов или напряжений. Однако *все* указанные эле-

* Как показывают расчеты, функция η_λ весьма некритична к интенсивности отраженного от цели сигнала.

менты схемы легко могут быть реализованы средствами дискретной вычислительной техники (см. п. 3.1.5).

Характерной особенностью решающего устройства обнаружения квантованных сигналов является наличие фактически двух порогов. Первый порог устанавливается в квантизаторе и является входным порогом (порогом обнаружения отдельных импульсов пачки). Второй

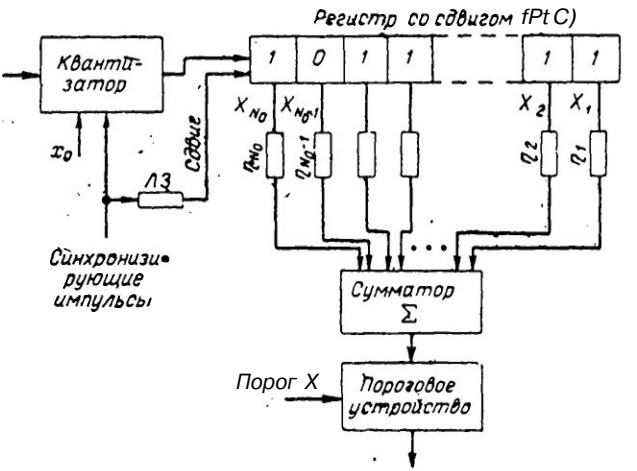


Рис. 3.1. Структурная схема решающего устройства для обнаружения пачкн двоично-квантованных сигналов.

порог устанавливается на выходе схемы и является порогом обнаружения пачки.

Предположим теперь, что вероятности $p_{S\lambda}$ одинаковы в пределах всей ширины диаграммы направленности (пачка имеет прямоугольную форму). Тогда из выражения (3.6) легко получить квазиоптимальный алгоритм обнаружения пачки прямоугольной формы

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \geqslant \mathcal{L}' = \frac{\ln l_0 - N_0 \ln \frac{q_S}{q_N}}{\ln \frac{p_S q_N}{p_N q_S}}, \qquad (3.8)$$

где правая часть, обозначенная через $\mathcal{L}'$, есть величина постоянная.

Как видно из выражения (3.8), в случае прямоугольной пачки процедура обнаружения квантованных сигналов сводится к счету импульсов единиц, полученных на выходе квантизатора в пределах ширины пачки, и сравнению числа накопленных импульсов с пороговым числом $\mathscr{L}'$. Схема обнаружения получается чрезвычайно простой, легко реализуемой с помощью обычного двоичного счетчика.

Для упрощения решающих устройств обнаружения на практике часто используют двоичные счетчики и при обработке реальных (отраженных от целей) пачек. Однако такие решающие устройства уже не будут квазиоптимальными в смысле введенного в начале этого параграфа определения, так как при обработке не принимается во внимание реальная форма диаграммы направленности антенны РЛС, известная заранее.

Б. Случай многоуровневого квантования сигналов. При многоуровневом квантовании с фиксированным числом уровней k каждое выборочное значение огибающей x_λ преобразуется в дискретные величины x' в соответствии со следующим правилом:

$$x'_\lambda = j, \text{ если } x_j \leqslant x_\lambda \leqslant x_{j+1}, j = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

где $x_0 = 0$, $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k$, $x_{k+1} = \infty$ — пороги квантования.

Вероятность события $x'_\lambda = j$ равна

$$p_{jS\lambda} = p(x'_\lambda = j/a_\lambda) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x/a_\lambda)\, dx$$

при наличии сигнала и

$$p_{jN\lambda} = p(x'_\lambda = j/0) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x/0)\, dx$$

при его отсутствии.

В дальнейшем, для упрощения, выкладок будем считать, что пачка импульсов имеет прямоугольную форму. В этом случае, для некоторого фиксированного набора порогов $\{x_1, x_2, x_3 \ldots x_k\}$, отношение правдоподо-

бия для пачки из N_0 импульсов можно записать в виде

$$l(\mathbf{x}') = l(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{N_0}) = \prod_{j=0}^{k} {}^{N_j} = \prod_{j=0}^{k} (l_j)^{N_j}, \quad (3.9)$$

где $l_j = \frac{p_{jS\lambda}}{p_{jN\lambda}}$, при условии

$$\sum_{j=0}^{k} N_j = N_0.$$

При оптимальном обнаружении пачки это отношение должно сравниваться с порогом l_0 (выбираемым также как и раньше, например, по критерию Неймана — Пирсона), т. е. должно быть проверено выполнение неравенства

$$l(\mathbf{x}') \geqslant l_0. \quad (3.10)$$

После логарифмирования (ЗЛО) с учетом (3.9) лолучим квазиоптимальный алгоритм обнаружения в виде

$$\sum_{j=0}^{k} N_j \ln l_j = \sum_{j=0}^{k} N_j \eta_j \geqslant \ln l_0 \quad \left(\sum_{j=0}^{k} N_j = N_0\right). \quad (3.11)$$

В соответствии с (3.11) обнаружение прямоугольной пачки импульсов при многоуровневом квантовании сводится к суммированию чисел $N_j (j = 0, 1, 2, \ldots, k)$ с весовыми коэффициентами η_j, которые равны логарифмам ожидаемых отношений вероятностей попадания огибающей в интервалы $x_j \div x_{j+1}$ при наличии и отсутствии сигнала. Структурная схема решающего устройства для реализации алгоритма (3.11) изображена на рис. 3.2. На выходе квантизатора сигналы распределяются по $k + 1$ каналам в соответствии с попаданиями в интервалы $x_j \div x_{j+1}$. В каждом канале сгоит счетчик, фиксирующий число N_j попаданий огибающей в j-й интервал в пределах ширины пачки из N_0 импульсов. Каждое из чисел N_i затем взвешивается в соответствии со значением $\ln l_j$ (значения $\ln l_j$ программируются заранее на основе ожидаемой интенсивности сигналов). Взвешен-

ные значения N_j (числа $N_j \ln l_j$) затем поступают на общий сумматор, а с последнего — на пороговое устройство, где и принимается решение об обнаружении сигнала.

Как видно из рис. 3.2, даже для идеализированного случая прямоугольной пачки решающее устройство обнаружения при многоуровневом квантовании сигналов получается достаточно сложным. Между тем, как пока-

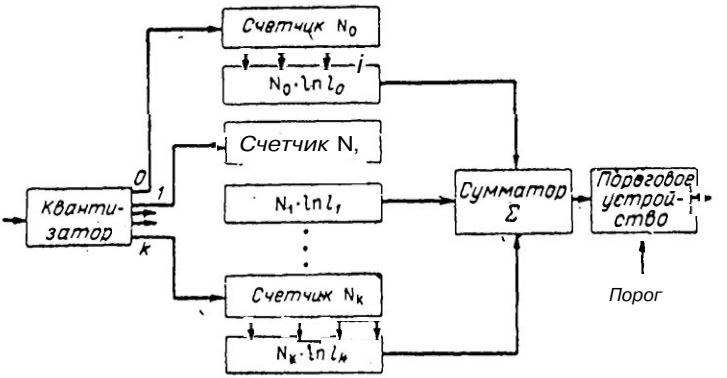


Рис. 3.2. Структурная схема решающего устройства для обнаружения пачки импульсов, при многоуровневом квантовании сигналов.

зали исследования, опубликованные в литературе [24], разница в потерях при накоплении двоично-квантованных сигналов и сигналов с большим числом уровней квантования ($k=10$) составляет приблизительно 1 *дб*. Это дает основание применять двоичное накопление там, где не предъявляются чрезвычайно жесткие требования к качественным характеристикам обнаружения.

3.1.3. Качественные характеристики обнаружения двоично-квантованных сигналов и выбор второго порога

Расчет качественных характеристик обнаружения пачки двоично-квантованных сигналов сначала производится при следующих допущениях:

1. Пачка имеет прямоугольную форму (вероятность появления импульсов единиц на всех позициях пачки одинакова).

2. Вся пачка находится в пределах строба фиксированных размеров. Размер строба по дальности соответствует интервалу временного квантования, а размер строба по азимуту равен ширине диаграммы направленности антенны РЛС.

При принятых допущениях поставленная задача решается на основе частной теоремы о повторении опытов [32]. Согласно этой теореме вероятность $P_{\mathscr{L}N}$ события, состоящего в том, что точно $\mathscr{L}$ из N_0 импульсов превысят порог квантизатора, определяется биномиальным законом

где

$$C_{N_0}^{\mathscr{L}} = \frac{N_0!}{\mathscr{L}!\,(N_0-\mathscr{L})!}$$

— число возможных способов, которыми можно выбрать $\mathscr{L}$ элементов из N_0 (число сочетаний из $\mathscr{L}$ элементов по N_0).

Очевидно, пачка импульсов будет обнаружена, если прроговый уровень квантизатора превысят не только $\mathscr{L}$ но и $\mathscr{L}+1$, $\mathscr{L}+2$, ..., N_0 импульсов. Поэтому вероятность обнаружения пачки определяется вероятностью события, заключающегося в том, что не менее $\mathscr{L}$ импульсов пачки превысят пороговый уровень квантизатора. Эта вероятность определяется выражением

$$P_{\text{обн}} = \sum_{l=\mathscr{L}}^{N_0} C_{N_0}^{l} p_S^{l} q_S^{N_0-l}. \qquad (3.13)$$

Аналогично, вероятность ложного обнаружения, т. е. вероятность получить не менее $\mathscr{L}$ импульсов в области помехи (где полезный сигнал отсутствует), может быть определена по следующей формуле:

$$P_{\text{л.о}} = \sum_{l=\mathscr{L}}^{N_0} C_{N_0}^{l} p_N^{l} q_N^{N_0-l} \qquad (3.14)$$

формулы (3.13) и (3.14) являются основными для определения эффективности обнаружения прямоуголь-

ной пачки квантованных сигналов и позволяют, например, определить требуемое пороговое отношение сигнала к помехе при заданной вероятности ложных тревог (критерий Неймана — Пирсона).

Действительно, если N_0 и $\mathcal{L}$ зафиксированы, а также задана допустимая вероятность ложного обнаружения, то из формулы (3.14) определяется допустимая вероятность p_N превышения выбросом помехи уровня квантования x_0. Далее по формулам (2.36) можно найти значение x_0, обеспечивающее допустимую вероятность p_N. Задавшись теперь требуемой вероятностью правильного обнаружения, по формуле (3.13) находится p_S, а затем по формуле (2.37) или по графику рис. 2.9 определяется пороговое отношение сигнала к помехе для обеспечения заданной вероятности обнаружения.

Для расчета вероятности квазиоптимального обнаружения пачки импульсов с произвольной огибающей необходимо знать законы распределения вероятностей суммы

$$s_A = \sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \eta_\lambda$$

в области сигнала и в области помехи.

Плотность вероятности $w(s_A)$ через известные функции не выражается. Поэтому приходится пользоваться более или менее подходящим приближением для этой плотности вероятности.

При больших $N_0 \geqslant (50—100)$ можно допустить, что как в области сигнала, так и в области помехи сумма s_A подчинена нормальному закону распределения вероятности, т. е.

$$w(s_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(s_A)}} \exp\left[-\frac{(s_A - M(s_A))^2}{2D(s_A)}\right].$$

Математическое ожидание суммы s_A в области помехи равно

$$M(s_A)_N = \sum_{\lambda=1}^{N_0} M(x_{N\lambda})\,\eta_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{N_0} p_N \eta_\lambda = p_N \sum_{\lambda=1}^{N_0} \eta_\lambda.$$

Аналогично в области сигнала имеем

$$M(s_A)_S = \sum_{\lambda=1}^{N_0} p_{S\lambda}\eta_\lambda.$$

Дисперсия суммы s_A в области помехи определяется по формуле

$$D(s_A)_N = p_N q_N \sum_{\lambda=1}^{N_0} \eta_\lambda^2,$$

а в области сигнала по формуле

$$D(s_A)_S = \sum_{\lambda=1}^{N_0} p_{S\lambda} q_{S\lambda} \eta_\lambda^2.$$

Таким образом, закон распределения суммы s_A в области помехи записывается в виде

$$w_N(s_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{\lambda=1}^{N_0} p_N q_N \eta_\lambda^2}} \exp\left[- \frac{\left(s_A - \sum_{\lambda=1}^{N_0} p_N \eta_\lambda\right)^2}{2 \sum_{\lambda=1}^{N_0} p_N q_N \eta_\lambda^2} \right],$$

а вероятность ложного обнаружения определяется по формуле

$$P_{л_0} = \int_{\mathcal{L}}^{\infty} w_N(s_A)\, ds_A = \left(\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\mathcal{L} - p_N \sum_{\lambda=1}^{N_0} \eta_\lambda}{\sqrt{p_N q_N \sum_{\lambda=1}^{N_0} \eta_\lambda^2}} \right] \right), \tag{3.15}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ — интеграл вероятности ошибок.

Из формулы (3.15) следует, что вероятность ложного обнаружения зависит как от величины первого порога

(которым определяется вероятность p_N), так и от величины второго порога $\mathcal{L}$.

Аналогичным образом можно получить формулу для вероятности правильного обнаружения пачки. Эта формула имеет вид

$$P_{\text{обн}} = \int_{\mathcal{L}}^{\infty} w_S(s_A)\, ds_A = \left(\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\mathcal{L} - \sum_{\lambda=1}^{N_0} p_{S\lambda}\eta_\lambda}{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{N_0} p_{S\lambda} q_{S\lambda} \eta_\lambda^2}} \right] \right). \tag{3.16}$$

Погрешность вычисления вероятности обнаружения по формуле (3.16) при $N_0 = (10—20)$ составляет 20—30%.

Остановимся теперь вкратце на задаче выбора оптимальной величины порога *St*. В общем виде задача определения оптимального порога сводится к нахождению максимума функции $P_{\text{обн}} = f(N_0, \mathcal{L}, p_\lambda)$ по переменной *St*. Однако строгое решение этой задачи наталкивается на большие трудности вычислительного порядка, так как функция $f(N_0, \mathcal{L}, p_\lambda)$ не является аналитической функцией.

Если число N_0 импульсов в прямоугольной пачке не очень велико, то зависимость порогового сигнала от $\mathcal{L}$ при фиксированных значениях вероятности обнаружения пачки $P_{\text{обн}}$ и вероятности ложного обнаружения $P_{\text{л.о}}$ могут быть подсчитаны по. таблицам биномиального распределения [34].

Расчет производится следующим образом. По известным значениям $P_{\text{обн}}$, $P_{\text{л.о}}$ и N_0 находятся по таблицам значения p_S и p_N, при которых обеспечивается превышение некоторого порога $\mathcal{L}$, выбранного произвольным образом в интервале $(1—N_0)$. Затем по вероятностям p_S и p_N при известных законах распределения амплитуд огибающей находится сначала порог, а затем отношение сигнала к помехе, необходимое для обеспечения требуемой величины p_S. Расчет производится для всех $1 \leqslant \mathcal{L} \leqslant N_0$.

На рис. 3.3 изрбражены рассчитанные описанным способом графики зависимости требуемого отношения сигнала к помехе от порога $\mathcal{L}$ при $P_{л\,0} = 10^{-5}$, $N_0 = 16$, для случаев нефлюктуирующей (рис. 3.3,*а*) и быстро флюктуирующей (рис. 3.3,*б*) пачек. Аналогичные графики для других значений N_0, $P_{обн}$, $P_{л\,0}$ приведены в работе [33].

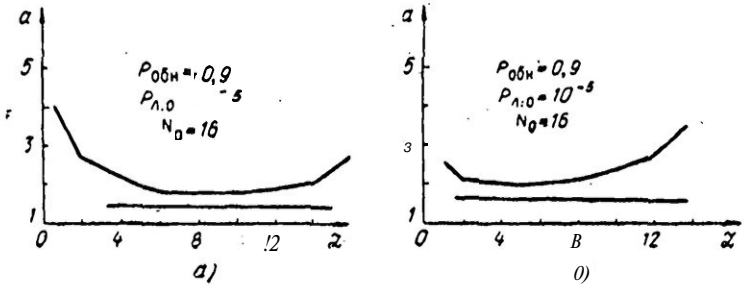


Рис. 3.3. Графики зависимости требуемого отношения сигнала к помехе от величины второго порога:
а — нефлюктуирующая цель: *б* — флюктуирующая цель.

Из анализа графиков рис. 3.3 и в работе [33] следует, что для каждого N_0 существует целый интервал оптимальных значений порога $\mathcal{L}$, который соответствует минимуму порогового отношения сигнала к помехе. Это свидетельствует о том, что выбор порога $\mathcal{L}$ некритичен. Оптимальное значение $\mathcal{L}$ с достаточной степенью точности можно определить из выражения [33]

$$\mathcal{L}_{опт} \approx 1{,}5\sqrt{N_0}. \qquad (3.17)$$

Для сравнения квазиоптимального метода накопления двоично-квантованных сигналов с оптимальным методом накопления неквантованных сигналов на рис. 3.4 изображены графики зависимости порогового сигнала в децибалах от числа накапливаемых сигналов для обоих случаев. Кривая *1* соответствует оптимальной обработке неквантованных сигналов на выходе линейного детектора с использованием идеального (без насыщения) накопителя [33]. Кривая *2* соответствует накопле-

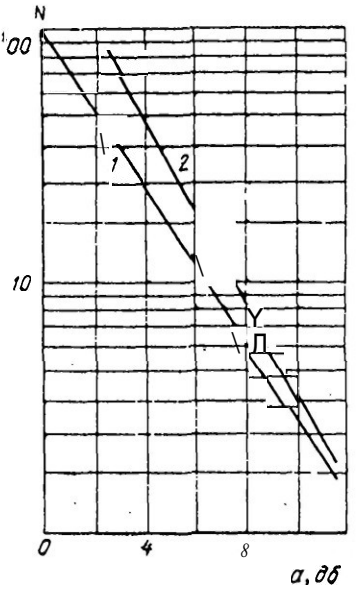


Рис. 3.4. Зависимость порогового сигнала (в *дб)* от числа накапливаемых сигналов:
1 — идеальное (без насыщения) накопление; 2 — накопление двоично-квантованных сигналов при оптимальном $\mathcal{L}$.

нию двоично-квантованных сигналов при оптимальном пороге $\mathcal{L}_{опт}$, рассчитанном по формуле (3.17). Сравнение этих кривых показывает, что при небольших пачках ($N_0 = 10—20$) потеря в пороговом сигнале при двоичнрм накоплении По сравнению с идеальным накоплением составляют 1 — 1,5 *дб.*

3.1.4. Алгоритм квазиоптимальной оценки азимута цели по пачке двоично-квантованных сигналов

Наряду с обнаружением, при обработке пачки квантованных сигналов решается также задача оценки угловой координаты (в нашем случае азимута β) цели, от которой получена эта пачка. Преимущество оценки азимута по пачке квантованных сигналов, по сравнению с решением аналогичной задачи при отсутствии квантования, состоит, главным образом, в простоте соответствующей аппаратуры. При этом качественные характеристики (точность) оценки азимута по пачке квантованных сигналов, естественно, ухудшаются.

Задача квазиоптимальной оценки азимута цели ло пачке двоично-квантованных сигналов формулируется следующим образом. Располагая совокупностью N_0 квантованных сигналов (нулей и единиц), отнесенных к одной и той же дальности, но полученных при различных азимутальных положениях антенны, необходимо с наибольшей точностью определить истинный азимут цели.

Для решения поставленной задачи, могут быть использованы, рассмотренные в гл. 1 статистические методы оценки неизвестных параметров распределения, в том числе и метод максимального правдоподобия, которым и. воспользуемся в дальнейшем.

Согласно формуле (3.3) функция правдоподобия дискретной последовательности N_0 квантованных сигналов определяется следующим образом:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}) = \prod_{\lambda=1}^{N_0} p_\lambda^{x_\lambda} q_\lambda^{1-x_\lambda}, \qquad (3.18)$$

где

$$x_\lambda = \begin{cases} 1, \text{ если } x_\lambda \geqslant x_0 \\ 0, \text{ если } x_\lambda < x_0, \end{cases}$$

$$p_\lambda = f(\beta_\lambda, \beta_0),$$

β_λ — азимутальное положение λ-го импульса пачки;
β_0 — азимут цели, подлежащий оценке.

Для случая нефлюктуирующей цели имеем

$$\int_{x_0}^{\infty} x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2 + a_\lambda^2}{2}\right] I_0(x_\lambda a_\lambda)\, dx_\lambda,$$

где $a_\lambda = a_0 g(\beta_\lambda, \beta_0)$;

$g(\beta_\lambda, \beta_0)$ — функция, описывающая огибающую диаграммы направленности антенны на прием и передачу.

Для случая быстро флюктуирующей цели имеем

$$\int_{x_0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+k_\lambda^2}\right] dx_\lambda = \exp\left[-\frac{x_0^2}{2(1+k_\lambda^2)}\right],$$

где $k_\lambda = k_0 g(\beta_\lambda, \beta_0)$.

Найдем логарифм функции правдоподобия (3.18)

$$\ln L = \sum x_\lambda (\ln p_\lambda - \ln q_\lambda) + \sum \ln q_\lambda. \qquad (3.19)$$

Для составления уравнения правдоподобия продифференцируем (3.19) по оцениваемому параметру

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = \sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \left(\frac{1}{p_\lambda} \frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0} - \frac{1}{q_\lambda} \frac{\partial q_\lambda}{\partial \beta_0} \right) + \sum_{\lambda=1}^{N_0} \frac{1}{q_\lambda} \frac{\partial q_\lambda}{\partial \beta_0}. \quad (3.20)$$

Вторая сумма в правой части выражения (3.20) не зависит от амплитуд принимаемых сигналов, а определяется только формой огибающей диаграммы направленности антенны. При симметричной форме диаграммы направленности и правильной юстировке антенны (ось диаграммы направленности совпадает с геометрической осью антенны) эта сумма приблизительно равна нулю. Используя это положение, а также очевидное соотношение

$$\frac{\partial c}{\partial \beta_0} = -\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0},$$

получим уравнение правдоподобия для оценки азимута в виде

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \frac{1}{p_\lambda q_\lambda} \frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0} \Big|_{\beta_0 = \beta^*_0} = 0. \quad (3.21)$$

Обозначим

$$\eta_\lambda = \eta(\beta_\lambda, \beta^*_0) = \frac{1}{p_\lambda q_\lambda} \frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta^*_0}. \quad (3.22)$$

Функцию $\eta(\beta_\lambda, \beta^*_0)$ можно рассматривать как функцию веса позиций сигнальной пачки в оценке азимута. Эта функция является асимметричной.

С учетом (3.22) уравнение правдоподобия (3.21) запишется в виде

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \eta(\beta_\lambda, \beta^*_0) = 0. \quad (3.23)$$

Выражение (3.23) показывает, что оценка максимального правдоподобия для центра пачки квантованных сигналов получается из условия равенства нулю суммы значений функции $\eta(\beta_\lambda, \beta^*_0)$ на позициях, где сигнальные

импульсы превышают пороговый уровень квантизатора (в этих точках $x_\lambda = 1$).

Для пояснения сказанного обратимся к рис. 3.5, где изображена весовая функция $\eta(\beta_\lambda, \beta^*_0)$ и последовательность нулей и единиц в области цели. Каждой позиции в области цели соответствует некоторый азимут β_λ относительно центра диаграммы направленности β_0. Будем

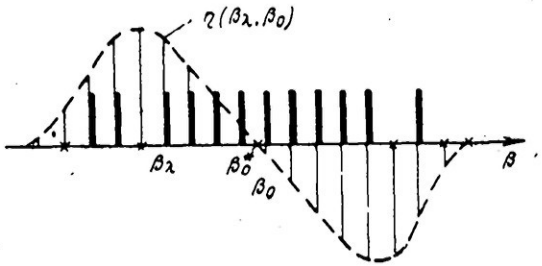


Рис. 3.5. К оценке азимута цели по пачке квантованных сигналов.

перемещать весовую функцию вдоль оси β до тех пор, пока сумма значений $x_\lambda \eta_\lambda$ справа и слева от ее нулевого значения не станет равной нулю. Тогда оценка азимута β^*_0, соответствует положению на оси β нулевой точки весовой функции.

Форма весовой функции характеризует количество информации об азимуте цели, содержащееся в импульсах (единицах), расположенных на различных расстояниях от центра пачки. Единицам, расположенным в области центра пачки, присваивается нулевой (или очень малый) вес в оценке азимута, так как вероятность их появления в этой области мало изменяется с отклонением от центра диаграммы направленности. С удалением от центра диаграммы направленности вес полученных единиц увеличивается и достигает максимума в области, где производная от огибающей диаграммы направленности по азимуту имеет максимальную величину. При дальнейшем уходе от центра диаграммы направленности вес полученных единиц в оценке азимута снова уменьшается и достигает нулевого значения на краях пачки. Форма весовой функции зависит также от

отношения сигнала к помехе a_0 в центре диаграммы направленности. Однако численные расчеты показывают [35], что эта зависимость не очень жесткая, так что при изменении a_0 от 1 до 10, при прочих равных условиях, весовая функция остается практически неизменной.

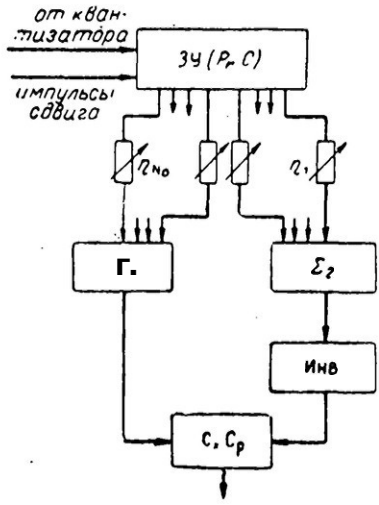


Рис. 3.6. Структурная схема решающего устройства для оценки азимута цели по пачке квантованных сигналов.

Рассмотрим теперь структурную схему решающего устройства, реализующего алгоритм (3.23) максимального правдоподобия при оценке азимута по пачке квантованных сигналов. Эта схема изображена на рис. 3.6.

В схему входит ЗУ квантованных сигналов, реализованное с помощью регистра со сдвигом, устройство программирования весовой функции, реализованное в виде набора делителей напряжения, два суммирующих устройства (Σ_1 и Σ_2), инвертор (Инв) и схема сравнения (СхСр).

Нормированные сигналы с выхода квантизатора подаются на вход первого разряда регистра РгС и по мере поступления импульсов сдвига сдвигаются вправо на один разряд, так что с приходом очередного сигнала, предыдущие оказываются сдвинутыми на целое число периодов повторения. Пропуски сигналов (нули) также будут сдвигаться вдоль регистра.

На выходе каждого из разрядов регистра после очередного сдвига будет высокий потенциал, если в разряде записана единица, или низкий потенциал, если в разряде записан нуль.

Программирующее устройство весовой функции разделено на две части, каждая из которых образует одну половину весовой функции. Взвешенные сигналы поступают на вход суммирующих устройств (Σ_1, Σ_2). При

подключении инвертора на выходе линейного сумматора Σ_2 в схеме воспроизводится несимметричная весовая функция.

Суммарные сигналы подаются на схему сравнения СхСр. Сигнал на выходе СхСр появится только в случае равенства сумм Σ_1 и $-\Sigma_2$. Момент появления сигнала на выходе СхСр соответствует прохождению нуля весовой функции через центр принимаемой пачки. Если зафиксировать этот момент на оси β, то он будет соответствовать оценке азимута цели β^*_0.

Одновременная реализация симметричной весовой функции для квазиоптимального обнаружения пачки и несимметричной весовой функции для квазиоптимальной оценки азимута этой пачки связана с увеличением объема оборудования. Поэтому иногда ограничиваются только одной симметричной весовой функцией как для обнаружения, так и для оценки азимута пачки. Азимут пачки в этом случае определяется по положению на оси β максимума взвешенной суммы (3.7). Поскольку этот максимум тупой, точность оценки азимута при этом несколько ухудшается.

3.1.5. Точность оценки азимута по пачке квантованных сигналов

Расчетная формула для дисперсии ошибок при оценке азимута по пачке квантованных сигналов будет выводиться при допущении, что оценка максимального правдоподобия является эффективной. Нижняя граница дисперсии эффективной оценки в случае дискретного распределения, содержащего параметр β_0, определяется следующей формулой [7]:

$$\sigma^2_{\beta\,\text{мин}} = \frac{1}{2^{N_0}\left(\frac{\partial \ln P_i(\beta)}{\partial \beta_0}\right)^2 P_i(\beta)}, \qquad (3.24)$$

где P_i — вероятность наличия одной из конкретных реализаций нулей и единиц, общее число которых составляет 2^{N_0};

N_0 — число выборок в каждой реализации (число импульсов в пачке).

Для вывода расчетной формулы возьмем сначала одну конкретную реализацию из общего числа 2^{N_0}, например, реализацию, содержащую единицы на всех N_0 позициях. Вероятность такой реализации

$$P_1 = P\underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{Ng} = \prod_{\lambda=1}^{N_0} p_\lambda.$$

Для этого случая

$$\left(\frac{\partial \ln P_1}{\partial \beta_0}\right)^2 P_1 = \frac{1}{P_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial \beta_0}\right)^2 = \sum_{\lambda=1}^{N_0}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0}\right)^2 \frac{1}{p_\lambda}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\lambda}}^{N_0} p_j +$$

$$+\sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq k}}^{N_0}\sum_{k=1}^{N_0}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0}\right)\left(\frac{\partial p_k}{\partial \beta_0}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\lambda\\ j\neq k}}^{N_0} p_j.$$

Возьмем теперь вторую реализацию, содержащую нули на всех позициях (т. е. противоположную первой). Вероятность этой реализации равна

$$P_2 = P\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{N_0} \prod_{\lambda=1}^{N_0} q_\lambda.$$

Соответствующий член суммы в знаменателе формулы (3.24) для этой реализации имеет вид

$$\left(\frac{\partial \ln P_2}{\partial \beta_0}\right)^2 P_2 = \sum_{\lambda=1}^{N_0}\left(\frac{\partial q_\lambda}{\partial \beta_0}\right)^2 \frac{1}{q_\lambda}\prod_{j=1}^{N_0} q_j +$$

$$+\sum_{\lambda\neq k}^{N_0}\sum^{N_0}\left(\frac{\partial q_\lambda}{\partial \beta_0}\right)\left(\frac{\partial q_k}{\partial \beta_0}\right)\prod_{\substack{j\neq\lambda\\ j\neq k}}^{N_0} q_j.$$

Аналогично можно написать выражения для всех пар слагаемых в знаменателе (3.24), содержащих взаимно обратные исходы (нули и единицы) на всех N_0

позициях пачки. Суммируя полученные выражения и имея в виду очевидные соотношения

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0} = -\frac{\partial q_\lambda}{\partial \beta_0}, \quad \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0}\right)^2 = \left(\frac{\partial q_\lambda}{\partial \beta_0}\right)^2,$$

видим, что сумма вторых членов равна, нулю, а сумма первых членов имеет вид

$$\sum_{\lambda=1}^{N_0} \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0}\right)^2 \left(\frac{1}{p_\lambda} + \frac{1}{q_\lambda}\right) = \sum_{\lambda=1}^{N_0} \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_\lambda \cdot q_\lambda}.$$

Таким образом, формула для нижней границы дисперсии оценки азимута по пачке квантованных сигналов имеет вид

$$\beta^2_{\text{мин}} \geq \frac{1}{\sum_{\lambda=1}^{N_0} \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0}\right)^2 \frac{1}{p_\lambda q_\lambda}}$$

Из общей формулы (3.25) для каждой конкретной модели обрабатываемого сигнала можно получить расчетные формулы.

Так, для случая пачки нефлюктуирующих сигналов на выходе детектора огибающей, имеем

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \int_{x_0}^{\infty} x_1 \exp\left[-\frac{x_1^2 + a_\lambda^2}{2}\right] I_0(x_1 a_\lambda)\, dx_1. \quad (3.26)$$

где $a_\lambda = a_0 g(\alpha_\lambda)$,

$$\alpha_\lambda = \frac{\beta_\lambda - \beta_0}{\varphi},$$

Произведя в выражении (3.26) дифференцирование под знаком интеграла, а затем интегрирование по частям, получаем

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0} = x_0 \exp\left[-\frac{x_0^2 + a_\lambda^2}{2}\right] I_1(x_0 a_\lambda)\, a_0 \frac{\partial g(\alpha_\lambda)}{\partial \beta_0}. \quad (3.27)$$

Для случая, когда диаграмма направленности антенны аппроксимируется гауссовой кривой

$$g(\alpha_\lambda) = e^{2}, \qquad (3.28)$$

расчетная формула для минимальной среднеквадратичной ошибки оценки азимута получается в следующем виде:

$$\sigma_{\beta\,\text{мин}} = \frac{\varphi^2 \exp\left[\frac{4}{2}\right]}{2x_0 a_0} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[\sum_{\lambda=1}^{N_0} \exp\left[-a_\lambda^2\right] I_1^2(a_\lambda x_0)\, a_\lambda^2 g^2(\alpha_\lambda)\, \frac{1}{p_\lambda q_\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.29)$$

Для численных расчетов удобно α_λ представить в следующем виде (при N_0 нечетном):

$$\alpha_\lambda = \frac{\lambda \cdot \Delta_\beta}{\varphi} \quad \left(-\frac{N_0 - 1}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{N_0 - 1}{2}\right), \qquad (3.30)$$

где Δ_β — угловое расстояние между соседними импульсами пачки. С учетом (3.30) формула для минимальной среднеквадратичной ошибки оценки азимута имеет вид

$$\sigma_{\beta\,\text{мин}} = \frac{\varphi^2 \exp\left[\frac{x_0^2}{2}\right]}{2x_0 a_0 \Delta_\beta} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[2\sum_{\lambda=1}^{\frac{N_0-1}{2}} \exp\left[-a_\lambda^2\right] I_1^2(a_\lambda x_0)\, \lambda^2 g^2(\alpha_\lambda)\, \frac{1}{p_\lambda q_\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.31)$$

Часто в теоретических исследованиях диаграмма направленности антенны аппроксимируется в виде кривой

$$g(\alpha_\lambda) = \left(\frac{\sin \pi\alpha_\lambda}{\pi\alpha_\lambda}\right)^2.$$

Расчетная формула для минимальной среднеквадратичной ошибки оценки азимута в этом случае имеет вид

$$\sigma_{\beta\ мин} = \frac{3\varphi^2 \exp\left[\frac{x_0^2}{2}\right]}{2\pi^2 x_0 a_0 \Delta_\beta} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[\sum_{\lambda=1}^{\frac{N_0-1}{2}} \exp\left[-a_\lambda^2\right] I_1^2(a_\lambda x_0)\, \lambda^2 g^2(a_\lambda)\, \frac{1}{p_\lambda q_\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.32)$$

Рассмотрим теперь случай пачки быстро флюктуирующих сигналов, для которого:

$$p_\lambda = \exp\left[-\frac{x_0^2}{2(1+k_\lambda^2)}\right],$$

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial \beta_0} = p_\lambda x_0^2 k_0^2 g(a_\lambda) \frac{\partial g(a_\lambda)}{\partial \beta_0} \frac{1}{(1+k_\lambda^2)^2}. \qquad (3.33)$$

Подставляя выражение (3.33) в формулу (3.25), получим расчетную формулу для минимального значения среднеквадратичной ошибки оценки азимута в рассматриваемом случае.

Если огибающая пачки аппроксимируется кривой $\left(\frac{\sin \pi a_\lambda}{\pi a_\lambda}\right)^2$ имеем

$$\sigma_{\beta\ мин} = \frac{3\varphi}{\sqrt{\Omega^2 \lambda_0^2 x_0^2 k^2}} \cdot \frac{1}{\left[\sum_{\lambda=1}^{N_0} \frac{p_\lambda}{q_\lambda} \cdot \frac{a_\lambda^2 g^4(a_\lambda)}{(1+k_\lambda^2)^4}\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad (3.34)$$

или с учетом выражения (3.30)

$$\sigma_{\beta\ мин} = \frac{3\varphi^2}{2\pi^2 x_0^2 k_0^2 \Delta_\beta} \cdot \frac{1}{\left[\sum_{\lambda=1}^{S-1} \frac{\quad}{\quad}\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.35)$$

Аналогичным образом могут быть получены формулы для других форм огибающих пачки быстро флюктуирующих импульсов.

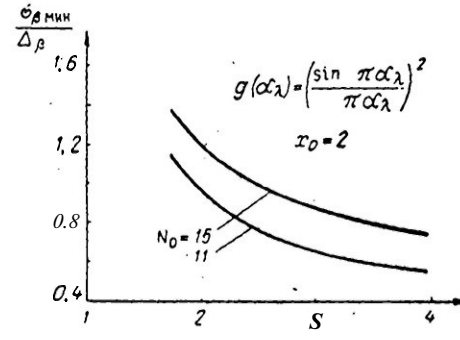


Рис. 3.7. Графики относительных среднеквадратичных ошибок оценки азимута по пачке квантованных сигналов.

Рассчитанные по формуле (3.32) значения $\frac{\sigma_{\beta\,мин}}{\Delta_\beta}$ для различных a_0 и $N_0 = 11$ и 15 приведены на рис. 3.7.

3.1.6. Пример практической реализации квазиоптимальной обработки пачки импульсов с помощью симметричной весовой функции

В качестве примера рассмотрим один из возможных вариантов практической реализации цифрового вычислительного устройства для квазиоптимальной обработки пачки импульсов. Рассмотрение этого примера целесообразно, главным образом, с точки зрения оценки необходимого объема оборудования. Структурная схема вычислительного устройства изображена на рис. 3.8. Принцип ее работы состоит в следующем.

Квантованные сигналы (в пределах одного интервала временного квантования) поступают на вход сдвигающего регистра РгС и по мере поступления каждого нового импульса квантования сдвигаются вдоль регистра вправо. Число разрядов регистра в принципе должно быть равно расчетному числу импульсов в пачке или даже

нескольких меньше этого числа, с учетом пропадания сигнальных импульсов на краях пачки.

Сигналы с выхода каждого разряда регистра должны взвешиваться в соответствии со значением весовых коэффициентов, рассчитанных заранее. В данной схеме весовые коэффициенты представляются в двоичном коде

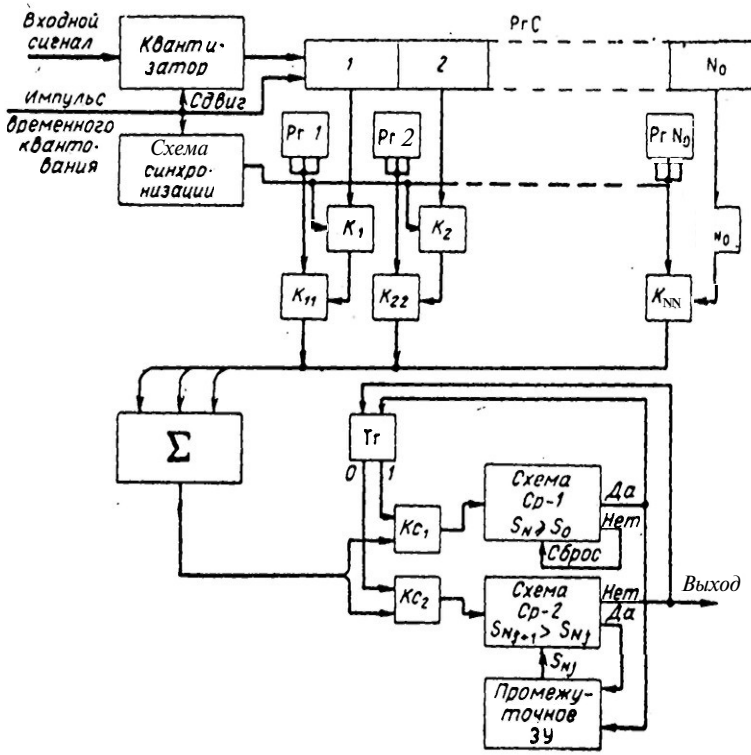


Рис. 3.8. Структурная схема цифрового вычислительного устройства для квазиоптимальной обработки пачки импульсов с помощью симметричной весовой функции.

и запоминаются в регистрах Pr1—PrN_0. Требуемое число разрядов для представления какой-либо величины в двоичном коде с необходимой точностью определяется по формуле [56]

$$k = \log_2\left(\frac{100}{2\delta_{доп}} + 1\right),$$

где $\delta_{доп}$ — допустимая относительная погрешность преобразования непрерывной величины в дискретную, выраженная в процентах.

Зададимся относительной точностью представления, равной 10%. Тогда ближайшее большее целое $k=3$, т. е. для представления в двоичном коде каждого весового коэффициента достаточно трехразрядного регистра.

Схема синхронизации поочередно выдает разрешающие импульсы малой длительности на клапаны $К_1 — К_{N_0}$. Если в первом разряде регистра РгС записана единица, то разрешающий импульс с выхода $К_1$ поступит на вход клапана $К_{11}$ и содержимое регистраРг1 переписывается в накапливающий сумматор Σ. Таким образом, производится операция перемножения сигнала x_1 и его веса η_1, т. е. образование произведения $x_1\eta_1$. Через интервал времени, необходимый для установления процессов в сумматоре, второй импульс схемы синхронизации поступит на клапан $К_2$ и произойдет аналогичная операция переписи в сумматор числа с Рг2. В сумматоре это число складывается с первым и т. д., вплоть до получения суммы произведений всех единиц, записанных в РгС, на соответствующие весовые коэффициенты.

В дальнейшем сумма

$$s_N = \sum_{\lambda=1}^{N_0} x_\lambda \eta_\lambda$$

через систему клапанов $Кс_1$ поступает на схему сравнения СхСр-1, где сравнивается с порогом s_0. Если $s_N < s_0$, то значение суммы стирается.

Если выполняется неравенство $s_N > s_0$, то с выхода схемы сравнения СхСр-1 сумма s_N переписывается в промежуточное ЗУ (регистр). Одновременно происходит переключение выхода сумматора на вход схемы сравнения СхСр-2 (с помощью триггера Тг). В этой схеме новая сумма сравнивается с предыдущей. Если новая сумма $s_N(j+1) > s_N(j)$, то она переписывается в ЗУ, а старая стирается. Если же эта сумма меньше предыдущей, то выдается выходной сигнал, который с точностью до одного интервала дискретности импульсов в пачке соответствует центру обнаруженной пачки.

В схеме на рис. 3.8 реализована только одна (симметричная) весовая функция. Эта функция ярляется оп-

тимальной с точки зрения обнаружения пачки. С точки же зрения оценки центра пачки симметричная весовая функция не является оптимальной, что приводит к ухудшению точности оценки азимута по сравнению с предельной.

Очевидно, не представляет принципиальных трудностей реализация в одной схеме одновременно двух весовых функций, одна из которых (симметричная) будет оптимальной с точки зрения обнаружения пачки, а другая (несимметричная) будет оптимальной с точки зрения оценки положения центра пачки. Естественно, объем оборудования при этом значительно увеличится.

§ 3.2. ОБРАБОТКА ДВОИЧНО-КВАНТОВАННЫХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ НАКОПИТЕЛЕЙ И ПРОГРАММНЫХ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ (ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ)

3.2.1. Принципы и методы безвесовой обработки радиолокационных сигналов

Рассмотренные в предыдущем параграфе квазиоптимальные методы обработки пачек квантованных радиолокационных сигналов все еще достаточно сложны в реализации. Основное усложнение схем связано с необходимостью программирования весовых функций для обнаружения пачек и определения их азимутального положения.

С целью дальнейшего упрощения аппаратуры можно отказаться от использования при обработке информации о форме пачки, т. е. считать пачку прямоугольной. В этом случае единственным признаком, по которому можно отличить область цели от области помехи, является увеличение плотности единиц в некотором интервале позиций (например, в пределах ширины диаграммы направленности антенны РЛС). Плотность единиц в области цели будет, естественно, больше, чем плотность единиц в области помехи. Следовательно, устройство безвесовой обработки должно оценивать плотность единиц и реагировать на изменения этой плотности.

При обработке по плотности единиц основной проблемой является фиксация границ пачки. Для этого за-

ранее устанавливаются некоторые правила (критерии), в соответствии с которыми определяется принадлежность отдельных квантованных сигналов к одной и той же пачке.

Правила обработки включают в себя:

а) критерий фиксации начала пачки;

б) критерий фиксации конца пачки;

в) критерий обнаружения;

г) критерий фиксации середины пачки.

Совокупность критериев, заданных в описательном виде или в виде соответствующих математических и логических выражений, определяет алгоритм безвесовой обработки пачки.

Рассмотрим возможные критерии фиксации границ пачки и ее обнаружения *.

В качестве критерия фиксации конца пачки может быть принято, например, наличие одного пропуска единицы на очередной позиции. В этом случае пачка есть совокупность позиций, на которых единицы следуют без пропусков. Можно также фиксировать конец пачки по наличию серии из двух или нескольких (к) пропусков подряд. Тогда пачка есть совокупность позиций, на которых отсутствует к пропусков подряд, но возможны $k-1$ и менее пропусков. Можно, наконец, условиться фиксировать конец пачки по появлению некоторой комбинации из нулей и единиц на заданном числе позиций,

Наиболее часто конец пачки фиксируется по наличию серии из k пропусков. При выборе к необходимо иметь в виду следующие обстоятельства. Если к мало, то велика вероятность «расщепления» или даже потери цели, так как на внутренних позициях пачки возможны пропуски одного, двух и т. д. импульсов (единиц) подряд. При больших же к ухудшается разрешающая способность по азимуту и точность измерения азимута. Для правильного выбора к необходимо иметь экспериментальные данные о числе и распределении пропусков в пачках, в условиях сопровождения реальных целей.

Начало пачки легче всего фиксировать на позиции, где впервые не выполняется критерий конца. Однако

---

* Поскольку возможны случаи, когда критерий фиксации начала пачки вообще не устанавливается, рассмотрение целесообразно начать с описания критериев фиксации конца пачки.

возможны И специальные критерии фиксации начала, не связанные с критериями фиксации конца. Так, например, можно потребовать, чтобы начало пачки фиксировалось обязательно на позиции, где получена первая единица после серии к и более пропусков. Можно также в качестве критерия начала потребовать появление некоторой совокупности из единиц и нулей на фиксированном интервале позиций или просто некоторой серии из единиц. При выборе критерия начала пачки исходят из обеспечения максимальной вероятности обнаружения сигнала (лачки).

Для обнаружения пачки может быть применено накопление (счет) единиц между началом и концом пачки. Накопитель можно выполнить так, что k—1 и меньше пропусков подряд будут восстанавливаться на внутренних сигнальных позициях. В этом случае в процессе обнаружения накапливаются не единицы *на* выходе квантизатора, а позиции между началом и концом пачки. Если число позиций в пачке превышает некоторое пороговое число $\mathcal{L}$, то принимается решение об обнаружении пачки. В- качестве накопителей можно использовать обычные двоичные счетчики, что существенно упрощает схему обнаружителя.

Принцип накопления импульсов в границах пачки поясняется временными диаграммами на рис. 3.9. Рис. 3.9,*а* иллюстрирует накопление между соседними сериями из двух нулей, а рис. 3.9,*б* — накопление между первой единицей и серией из двух нулей. Сигнал обнаружения в обоих случаях выдается при накоплении пяти импульсов. Кроме указанных сигналов о положении границ пачки и ее обнаружении, накопитель может выдать число импульсов, накопленных к моменту фиксации конца пачки.

Если начало пачки фиксируется по наличию некоторой серии из m единиц на m позициях, или по некоторой комбинации из l единиц на m смежных позициях, то критерий начала пачки является одновременно и критерием ее обнаружения, а конец пачки фиксируется только для последующего определения азимута цели.

Такие обнаружители в дальнейшем будем называть программными обнаружителями «m/m—k» или «l/m—k», где через дробь обозначен критерий обнаружения, а через к — критерий фиксации конца пачки.

Принцип фиксации границ пачки программным обнаружителем «3/3—3» поясняется временными диаграммами на рис. 3.10. В данном случае сигнал обнаружения пачки выдается при появлении во входной последова-

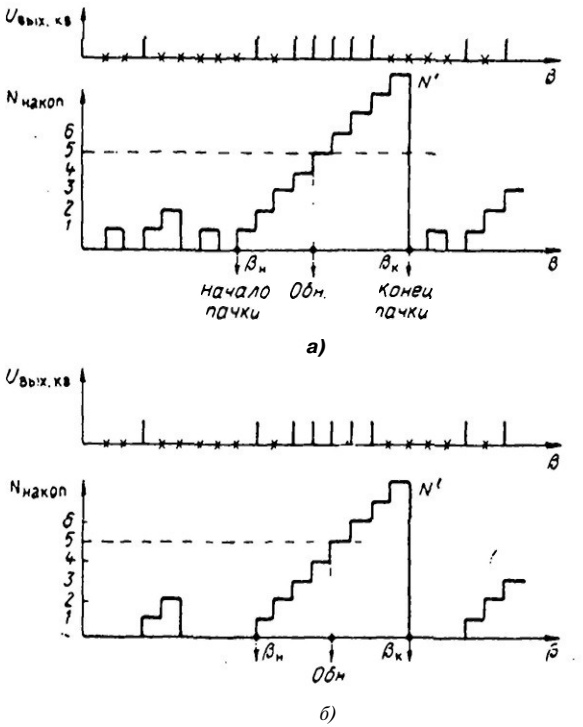


Рис. 3.9. Временные диаграммы, поясняющие принцип накопления импульсов:
а — между соседними сериями из двух нулей; *б* — между первой единицей и серией из двух нулей.

тельности квантованных сигналов трех единиц подряд (серии из трех единиц). Конец пачки выдается при появлении серии из трех нулей.

Рассмотрим теперь возможные способы оценки положения центра пачки (азимута цели) при безвесовой обработке.

Оценка азимута цели при безвесовой обработке осуществляется путем фиксации положения середины обнаруженной пачки.

В качестве сигналов, по которым оценивается положение середины пачки, используются сигналы, выдаваемые обнаружителями. В накопителях (см. рис. 3.9) та-

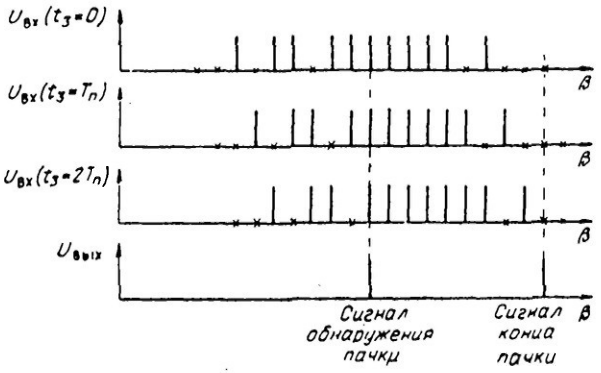


Рис. 3.10. Временные диаграммы, поясняющие принцип фиксации границ пачки программным обнаружителем «3/3—3».

кими сигналами являются импульсы, выдаваемые схемой при фиксации начала и конца обнаруженной пачки и, кроме того, число позиций между началом и концом пачки (ширина пачки). В схемах программного обнаружения «m/m—k» или «l/m—k» (см. рис. 3.10) сигналами, позволяющими оценить положение середины пачки являются импульсы, фиксирующие начало (обнаружение) и конец пачки. Оценка положения середины пачки по перечисленным выше сигналам может быть произведена следующими способами:

1. По азимутам импульсов, фиксирующих начало и конец пачки с последующим нахождением среднего арифметического. Алгоритм оценки азимута в этом случае имеет вид

$$\beta^*_0 = \frac{\beta_н + \beta_к}{2}, \qquad (3.36)$$

где β^*_0 — оценка азимута цели;

$\beta_н$ — азимут начального импульса пачки;

$\beta_к$ — азимут конечного импульса пачки.

2. По азимуту начального или конечного импульса пачки и ширине пачки. Алгоритм оценки азимута в этом случае имеет вид

$$\beta^*_0 = \beta_к - \frac{\Delta_\beta N'}{2}, \tag{3.37}$$

или

$$\beta^*_0 = \beta_н + \frac{\Delta_\beta N'}{2}, \tag{3.37а}$$

где N' — число позиций, соответствующее ширине обнаруженной пачки;

Δ_β — угловая дискретность импульсов в пачке.

Алгоритмы (3.36) и (3.37) чрезвычайно просты в реализации. В этом их преимущество по сравнению с алгоритмом квазиоптимальной оценки азимута с помощью несимметричной весовой функции.

Устройства для безвесовой обработки радиолокационных сигналов (накопители и программные обнаружители) представляют собой дискретные вычислительные устройства, входными сигналами для которых являются последовательности квантованных радиолокационных сигналов, принимающих только два значения — нуль и единица. Эти устройства функционируют по определенному наперед заданному алгоритму и выдают дискретные сигналы об обнаружении пачки и ее границах. Такого рода дискретные вычислительные устройства получили название автоматов для обработки дискретных сигналов или цифровых автоматов.

Необходимо иметь в виду, что алгоритмы безвесовой обработки сигналов выбираются первоначально из практических соображений, связанных с простотой реализации *. При этом статистический синтез алгоритмов обработки, как правило, исключается и заменяется статистическим анализом конкретных схем. Следовательно, в процессе проектирования цифровых автоматов для обработки радиолокационных сигналов возникает две задачи:

— задача синтеза схем цифровых автоматов по заданному алгоритму функционирования; критерием каче-

* Выбор производится из числа известных алгоритмов и с учетом статистических характеристик входных сигналов.

ства при синтезе схем является минимизация числа элементов;

— задача статистического анализа схем, с целью получения численных оценок по вероятности обнаружения и точности измерения координат.

Синтез схем цифровых автоматов делится на 2 этапа: этап абстрактного синтеза, в процессе которого выявляется взаимодействие элементов и объем памяти автомата, и этап структурного синтеза, в процессе которого разрабатывается структурная схема автомата с учетом использования конкретных элементов.

В настоящем параграфе, исходя из выводов общей теории синтеза цифровых автоматов [36], [36], рассматривается задача абстрактного синтеза некоторых схем цифровых автоматов для обработки радиолокационных сигналов (пачек).

Структурный синтез схем цифровых автоматов выходит за рамки данной книги.

3.2.2. Некоторые сведения из теории синтеза цифровых автоматов

В кибернетике цифровыми автоматами называются устройства, предназначенные для переработки дискретной (цифровой) информации.

Заданный алгоритм переработки информации реализуется в автомате определенной организацией зависимости между сигналами, действующими на его входах, и сигналами, получаемыми на его выходах.

Автоматы, в которых последовательности сигналов, вырабатываемых на его выходах, однозначно определяются входными последовательностями, называются детерминированными в отличие от вероятностных автоматов, которые вырабатывают случайные последовательности выходных сигналов. В данном параграфе задачи синтеза будут решаться для детерминированных автоматов.

Детерминированные автоматы, в свою очередь, можно разделить на три типа, отличающихся друг от друга в функциональном отношении.

В автоматах первого типа выходной сигнал, вырабатываемый в момент $t+\Delta t$ (где Δt — запаздывание, обусловленное физическими свойствами работы автомата), зависит только от входного сигнала, поступившего в мо-

мент t, и не зависит от сигналов, поступивших на входы автомата в предшествующие моменты времени. Такое однозначное и неизменное во времени соответствие между входными и выходными сигналами обусловлено неизменностью внутреннего состояния автомата. Автоматы с неизменным внутренним состоянием называются автоматами без памяти (логическими схемами).

В автоматах второго типа выходной сигнал, вырабатываемый в некоторый дискретный момент времени, зависит не только от входных сигналов, поступивших в данный момент, но и от сигналов, поступивших в предшествующие моменты времени. Предшествующие входные сигналы фиксируются в автомате путем изменения его внутреннего состояния. Выходной сигнал такого автомата однозначно определяется поступившими входными сигналами и его внутренним состоянием в данный момент времени. Этими же факторами однозначно определяется и то состояние, в которое автомат переходит.

Так как всякое физически реализуемое устройство может быть построено лишь из конечного числа элементов, то оно может находиться только в конечном числе функционально различимых состояний, называемых объемом памяти. Таким образом приходим к понятию конечного автомата как устройства, имеющего конечное число внутренних состояний и конечное число входов и выходов.

Если конечный автомат снабдить внешней неограниченной памятью, то получим автомат третьего типа, называемый машиной Тьюринга. С помощью машины Тьюринга можно реализовать любой алгоритм переработки информации [36].

В дальнейшем будем заниматься синтезом автоматов второго типа — конечных автоматов.

Прежде чем приступить к синтезу конечных автоматов для обработки радиолокационных сигналов, необходимо ввести некоторые определения и понятия, которые потребуются в дальнейшем.

1. Поступающую на вход автомата информацию и преобразованную (выходную) информацию кодируют конечной совокупностью символов. Эту совокупность называют соответственно входным и выходным алфавитом. Отдельные символы, образующие алфавит, называют буквами, а любые конечные упорядоченные последова-

тельности букв данного алфавита называют словами в данном алфавите. Слово, не содержащее ни одной буквы, называют пустым словом или пустой буквой и обозначают «*е*».

Например, в алфавите, состоящем из двух букв $Y = (Y_0, Y_1)$, словами будут $y_0, y_0y_1y_0y_0y_1y_0y_1$, ... и т. д.

2. Конечный автомат считается заданным, если задана совокупность шести его характеристик:

— конечное множество возможных внутренних состояний автомата $A=(a_0, a_1, \ldots, a_n)$;

— конечное множество $X = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ входных сигналов;

— конечное множество $Y=(y_0, y_1, \ldots, y_k)$ выходных сигналов;

— элемент a_0 из множества A, называемый начальным состоянием автомата;

— функция переходов f, определяющая состояние автомата $a(t+1)$ в момент дискретного времени $t+1$ в зависимости от состояния автомата $a(t)$ и значения входного сигнала $x(t)$ в момент времени t:

$$a(t+1) = f[a(t), x(t)]; \qquad (3.38)$$

— функция выходов φ, определяющая зависимость выходного сигнала автомата $y(t)$ от состояния автомата и входного сигнала в момент времени t:

$$y(t) = \varphi[a(t), x(t)]. \qquad (3.39)$$

3. Процесс преобразования информации автоматами описывается с помощью алфавитных операторов. Операторы, описывающие работу автоматов, обычно задают таблицами переходов, которые определяют функцию (3.38), и таблицами выходов, определяющими функцию (3.39). Столбцы таблицы переходов (табл. 3.1) соответ-

ТАБЛИЦА 3,1

Состояние автомата		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Входной сигнал	x_0	a_0	a_2	a_3	a_4	a_0
	x_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1

ствуют внутренним состояниям автомата, а строки — символам входных сигналов. В клетку таблицы переходов, находящуюся на пересечении a_i столбца и x_j строки, записывается состояние автомата $f(a_i, x_j)$, © которое он переходит из состояния a_i под воздействием входного сигнала x_j.

ТАБЛИЦА 3.2

Состояние автомата		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Входной сигнал	x_0	e	y_0	y_0	y_1	e
	x_1	y_0	y_0	y_0	y_0	y_0

Аналогично составляется таблица выходов (табл. 3.2) только в клетку, соответствующую состоянию a_i и входному сигналу x_j, записывается выходной сигнал, который формируется при данном переходе. Обе эти таблицы можно объединить в одну и получить таблицу переходов и выходов автомата (табл. 3.3).

ТАБЛИЦА 3.3

Состояние автомата		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Входной сигнал	x_0	a_0 e	a_2 y_0	a_3 y_0	a_4 y_1	a_0 e
	x_1	a_1 y_0	a_1 y_0	a_1 y_0	a_1 y_0	a_1 y_0

4. Автоматы, заданные таблицами (3.1) и (3.2), называются автоматами первого рода или автоматами Мили. Их особенность состоит в том, что выходные сигналы зависят как от состояния автомата, так и от входного сигнала. На практике встречаются автоматы, выходные сигналы которых в момент времени t зависят только от состояния автомата в тот же момент времени. Такие автоматы получили название автоматов второго рода, или автоматов Мура.

Функции переходов и выходов автомата Мура, заданного на множестве входных сигналов $X = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$, множестве внутренних состояний $A = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ и множестве выходных сигналов $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_k)$, можно записать в виде

$$a(t+1) = f[a(t), x(t)], \tag{3.40}$$

$$y(t) = \varphi[a(t)]. \tag{3.41}$$

Операторы (3.40) и (3.41) удобно задавать отмеченными таблицами переходов. Отмеченная таблица переходов автомата Мура (табл. 3.4) строится аналогично таблице пер'еходов автомата Мили, но над символами каждого внутреннего состояния автомата записывается выходной сигнал, который автомат формирует в данном состоянии.

ТАБЛИЦА 3.4

Выходы		e	y_0	y_0	y_0	y_1
Состояния		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Входы	x_0	a_0	a_2	a_3	a_4	a_0
	x_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1

В работах [36] и [37] доказывается возможность перехода от автомата одного рода к автомату другого рода. Автоматы для обработки радиолокационных сигналов будут в дальнейшем синтезироваться как автоматы Мура.

5: Большую наглядность обеспечивает задание автоматов с помощью направленных графов. Граф автомата состоит из вершин (изображаемых окружностями), соединенных стрелками. Они называются ребрами графа. Вершины графа отождествляются с состояниями автомата, а стрелки — с входными сигналами. В случае автомата Мили на стрелках отмечаются также выходные сигналы, выдаваемые при переходе автомата из одного состояния в другое по указанному входному сигналу. В случае автомата Мура выходные сигналы ставятся в вершинах графа. На рис. 3.11 и рис. 3.12 приведены.

графы автоматов Мили и Мура, заданные табл. 3.3 и 3.4 соответственно.

6. Первоначально алгоритм функционирования автомата задается в описательной форме. В задачу абстрактного синтеза входит, во-первых, получение по заданному

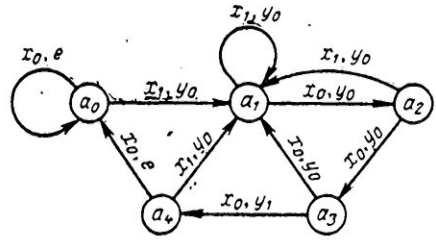


Рис. 3.11. Граф автомата Милн, заданного табл. 3.3.

алгоритму функционирования таблиц переходов и выходов или графа автомата, во-вторых, минимизация числа внутренних состояний (вершин гра'фа) автомата, что эквивалентно минимизации объема его памяти. Иногда

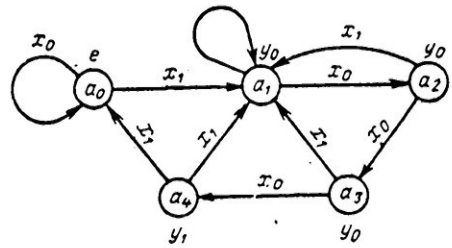


Рис. 3.12. Граф автомата Мура, заданного табл. 3.4.

удается сразу по описанию алгоритма построить таблицу переходов или граф автомата. Однако в общем случае для составления таблиц переходов и выходов необходимо сначала получить строгую математическую запись алгоритма функционирования автомата.

Одним из аналитических способов задания автомата является запись алгоритма его функционирования на языке регулярных событий, т. е. с помощью регулярных

выражений алгебры событий. Этот способ позволяет достаточно просто переходить от словесного к строгому математическому описанию работы автомата и, кроме того, является наиболее удобным при синтезе автоматов для обработки радиолокационной информации.

Ниже приводятся необходимые сведения из алгебры событий.

Пусть задан некоторый конечный алфавит $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Событием S в данном алфавите X называется произвольное множество слов в этом алфавите, а сам алфавит $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называют входным алфавитом этого события.

Для представления событий, содержащих бесконечное количество слов, конечными выражениями вводят ряд. операций над событиями, т. е. строят алгебру событий. В алгебре событий рассматривают три основные операции: дизъюнкцию событий, произведение событий и итерацию событий.

Дизъюнкцией событий $S_1, S_2, \ldots, S_k$ называют событие $S = S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_k$, где $\vee$ —знак дизъюнкции, состоящее из всех слов, входящих в события S_1, S_2, S_3, ..., S_k, т. е. дизъюнкция объединяет все слова, входящие в события S_1, S_2, ..., S_k.

Например, если событие S_1 содержит слова x_1, x_1x_2, x_2x_1, а событие S_2 содержит слова x_2x_2, x_1x_2, то дизъюнкция этих событий $S_1 \vee S_2$ содержит слова x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2, x_1x_2 и т. д.

Пусть события S_1 и S_2 состоят из множества слов (x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..) и (x_{21}, x_{22}, x_{23}, ...) соответственно. Произведением этих событий называется событие $S = S_1S_2$, состоящее из всех слов вида $x_{11}x_{21}$, $x_{11}x_{22}, x_{11}x_{23}$, ..., $x_{12}x_{21}$, $x_{12}x_{22}$, $x_{12}x_{23}$, ..., $x_{13}x_{21}, x_{13}x_{22}, x_{13}x_{23}$, ..., т. е. из всех слов, полученных приписыванием к каждому слову события S_1 каждого слова события S_2.

Необходимо заметить, что произведение событий не коммутативно, т. е.

$$S_1 \cdot S_2 \neq S_2 \cdot S_1.$$

Итерацией события S называют событие $\{S\}$, состоящее из пустого слова e и всех слов вида S, SS, SSS и т. д. до бесконечности. Иначе говоря; если событие S состоит из слов $l_1, l_2, \ldots, l_k$, то итерация этого события содержит

все возможные произведения этих слов, конечные и бесконечные,

Итерация событий является одноместной операцией, так как она применяется только к одному событию. Для обозначения итерации вводят фигурные скобки, которые в данном случае называются итерационными.

Если задан конечный входной алфавит $X = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$, то любое событие, которое можно получить из букв данного алфавита с помощью конечного числа операций дизъюнкции, произведения и итерации, называют регулярным событием, а выражение, составленное с помощью этих операций, — регулярным выражением.

Любой алгоритм переработки информации, который может быть записан в виде регулярного выражения, реализуется конечным автоматом. Следовательно, одной из возможных форм задания конечных автоматов (в дополнение к указанным выше) является задание автоматов с помощью" регулярных выражений.

При синтезе автоматов для обработки радиолокационных сигналов наиболее часто встречающимися регулярными событиями являются:

а) событие, содержащее все слова, оканчивающиеся буквой x_i

$$S = \{x_0 \vee x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_m\} x_i;$$

б) событие, состоящее из всех слов алфавита $X = (x_0 x_1)$, не содержащих серий из r букв x_0 и оканчивающихся буквой X\

$$S = \{x_1 \vee x_0 x \vee x_0 x_0 x_1 \vee \ldots \vee x_0 \underbrace{x_0 \ldots x_0}_{r-1} x_1\}.$$

7. Приведем теперь основные сведения из алгебры-логики, которые нам потребуются при логическом синтезе схем цифровых автоматов.

Алгебра логики оперирует с высказываниями. Высказыванием называется всякое утверждение, которое может быть истинным или ложным. Истинным высказываниям приписывается символ «1», а ложным — «0». Из одного или нескольких высказываний, принимаемых за простые, можно составлять сложные высказывания.

В дальнейшем простые высказывания обозначаются через A, B, C ..., а сложные — через P, Q, R, ... и т. д. Сложные высказывания также могут принимать только два значения в зависимости от истинности или ложности входящих в них простых высказываний. Все сложные высказывания могут быть получены с помощью трех логических операций (связей): операции отрицания (логическая связь НЕ), операции логического умножения (логическая связь И) и операции логического сложения (логической связи ИЛИ).

Отрицанием высказывания A ($P=\bar{A}$) называется сложное высказывание, которое истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно. Операция отрицания реализуется схемой инвертора.

Логическим умножением двух простых высказываний A и B ($P=AB$) называют сложное высказывание «A и B», которое ложно, когда хотя бы одно простое высказывание ложно. Операция логического умножения реализуется логической схемой И (схемой совпадения).

Логическим сложением двух простых высказываний называется сложное высказывание ($P=A+B$), которое истинно, если хотя бы одно из входящих в него высказываний истинно, и ложно, если оба простых высказывания ложны. Операция логического сложения реализуется логической схемой ИЛИ (катодный повторитель с двумя входами).

В алгебре логики имеется 4 закона: переместительный, сочетательный, распределительный и инверсии. Первые три закона аналогичны законам обычной алгебры. Закон инверсии, отсутствующий в обычной алгебре, для логического сложения и умножения записывается в виде:

для сложения

$$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B},$$

для умножения

$$\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}.$$

Наряду с законами алгебры логики применяются также равносильности (эквивалентности), которые могут быть получены, исходя из основных логических связей и законов алгебры логики.

Наиболее часто встречающиеся равносильности приведены ниже:

1) $\bar{\bar{A}} = A$ — применение двойного отрицания к высказыванию не изменяет его,

2) $A \cdot A \cdot A \ldots = A$ — вытекает из определения логического умножения,

3) $A + A + \ldots + A = A$ вытекает из определения логической суммы,

4) $A + 1 = 1$ — вытекает из определения логического сложения,

5) $A \cdot 1 = A$ — вытекает из определения логического умножения,

6) $(A + AB) = A$

7) $A(A + B) = A$

8) $A + \bar{A}B = A + B$

— получены путем преобразований с учетом равносильностей 1—5 и т. д.

Законы алгебры логики и основные равносильности позволяют упрощать (минимизировать) путем преобразования сложные логические выражения.

Пример

$$P = ABC + A\bar{B}C + \bar{A}BC = AC(B + \bar{B}) + \bar{A}BC =$$

$$= AC + \bar{A}BC = C(A + \bar{A}B) = C(A + B).$$

Другой метод минимизации логических выражений основан на использовании диаграмм Вейча [38]. Проиллюстрируем применение этих диаграмм на примере минимизации выражения

$$P = AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC + A\bar{B}\bar{C}.$$

ТАБЛИЦА 3.5

	A		$\bar{A}$	
B	1	1	0	0
$\bar{B}$	1	0	0	1
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Составляется табл. 3.5, число клеток которой равно 2^n, где n — число аргументов (простых высказываний). Если сложное событие истинно при некотором наборе простых высказываний, то в клетку, соответствующую этому набору, ставится «1», а если ложно, то — «0». Над соседними единицами осуществляется операция «склеивания». Операция «склеивания» определяется соотношением:

$$AB + A\bar{B} = A.$$

Так, например, единицы первой строки в первых двух столбцах могут быть «склеены». В результате «склеивания» этих единиц получим AB. Единица первой строки первого столбца и единица второй строки первого столбца также «склеиваются» и дают AC. Единицы во второй строке в первом и последнем столбце при «склеивании» дают BC. В результате «склеивания» получим минимизированное выражение

$$P = AB + A\bar{C} + \bar{B}\bar{C}.$$

На этом мы заканчиваем рассмотрение основных теоретических предпосылок, необходимых для синтеза цифровых автоматов. Другие более подробные сведения из теории приводятся в процессе синтеза конкретных схем.

3.2.3. Абстрактный синтез цифровых накопителей радиолокационных сигналов

Рассмотрим сначала простейший случай составления графа и отмеченной таблицы переходов автомата Мура, осуществляющего накопление позиции между двумя соседними сериями из к нулей. Для примера возьмем $k=2$.

Алгоритм работы такого автомата словесно формулируется следующим образом (см. временные диаграммы на рис. 3.9,*а*). Пусть вначале автомат находится в исходном (нулевом) состоянии. В следующем такте автомат накапливает единицу независимо от характера входного сигнала (нуля или единицы). При появлении двух нулей подряд автомат возвращается в исходное состояние. В противном случае происходит накопление

следующей единицы. При накоплении заданного числа $\mathcal{L}$ единиц выдается сигнал y_0, фиксирующий обнаружение пачки. После обнаружения накопление единиц продолжается с целью определения ширины пачки. При появлении двух нулей после обнаружения выдается сигнал $y_к$, фиксирующий конец пачки, а накопленная информация сбрасывается. Сброс накопленной информации и выдача сигнала $y_к$ происходит также при переполнении накопителя. Емкость накопителя составляет M единиц.

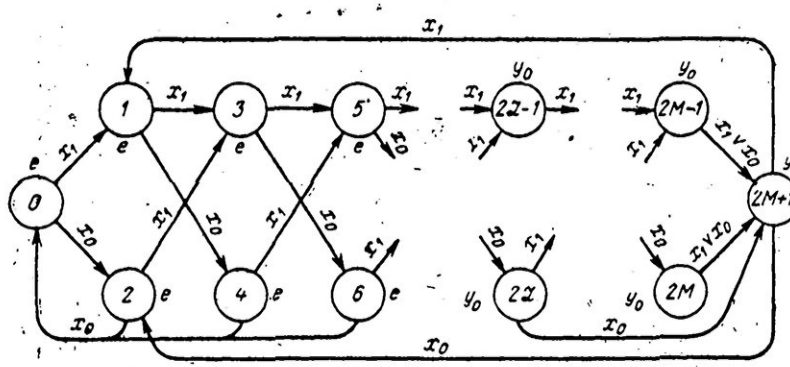


Рис. 3.13. Граф автомата-накопителя радиолокационных сигналов.

По описанию алгоритма работы рассматриваемого автомата можно непосредственно, минуя этап составления регулярных выражений, изобразить граф, а затем записать отмеченную таблицу переходов.

Граф описанного автомата изображен на рис. 3.13. Из графа видно, что общее число состояний автомата (включая исходное состояние) равно $2M+2$. Одному накопленному числу соответствует два состояния автомата. Возвращение в исходное состояние возможно только из четных состояний при появлении серии из двух нулей, если число накопленных единиц меньше $\mathcal{L}$. При появлении серии из двух нулей после выдачи сигнала об обнаружении (а также при переполнении накопителя) автомат переходит в состояние $2M+1$, в котором выдается сигнал $y_к$. Из этого состояния автомат переходит во второе состояние при поступлении на вход нуля и в первое состояние при поступлении на вход единицы. Наличие $(2M+1)$-го состояния обусловлено особенностью работы

автоматов Мура, состоящей в том, что каждый выходной сигнал выдается только после перехода автомата в новое состояние. Поэтому $(2M+1)$-е состояние не может быть совмещено с исходным, так как в исходном состоянии автомат выходного сигнала не выдает (выходной сигнал в исходном состоянии соответствует пустой букве *е)*.

Отмеченная таблица переходов автомата представлена табл. 3.6. По этой таблице также легко можно проследить процесс накопления и выдаваемые автоматом сигналы.

ТАБЛИЦА 3.6

Выходы		e	e	$в$	e	e	...	y_0	y_0	...	y_0	y_0	$y_к$
Состояния		0	1	2	3	4	...	$2\mathscr{L}-1$	$2\mathscr{L}$	...	$2M-1$	$2M$	$2M+1$
а	x_0 (0)	2	4	0	6	0	...	$2\mathscr{L}+2$	$2M+1$	...	$2M+1$	$2M+1$	2
$\ddot{e}$	x_1 (1)	1	3	3	5	5	...	$2\mathscr{L}+1$	$2\mathscr{L}+1$	...	$2M+1$	$2M+1$	1

Минимальное количество элементов памяти K, из которых можно составить схему конечного автомата с $2M+2$ внутренними состояниями, рав'но ближайшему большему целому числу, полученному из выражения

$$K=\log_2(2M+2).$$

Если взять $M=16$, что соответствует максимальному ожидаемому числу позиций в пачке $N_0=16$, то $K=5$. Следовательно, емкость памяти рассмотренного автомата равна 5 двоичным ячейкам. Это могут быть 5 триггеров с раздельными входами или 5 триггеров со счетными входами и т. д. Конкретный выбор ячеек памяти производится при структурном синтезе схемы автомата.

Рассмотрим теперь случай синтеза автомата-накопителя, фиксирующего начало пачки по первой единице после серии из трех и более нулей, а конец пачки — по появлению серии из трех нулей после обнаружения сигнала (после накопления $\mathscr{L}$ единиц). При синтезе разделим условно автомат на две части: программную часть, управляющую накоплением единиц, и собственно накопитель. Займемся синтезом только программной части,

так как число элементов памяти накопителя всегда можно определить по требуемой его емкости.

Алгоритм работы программной части рассматриваемого автомата (которая в дальнейшем будет называться просто автоматом) формулируется следующим образом. Если на вход автомата (предварительно возвращенного в исходное состояние) после любой серии нулей поступает единица, то автомат переходит в новое состояние и вырабатывает сигнал y_0, разрешающий запись единиц в накопитель. Сигнал y_0 должен выдаваться до тех пор, пока на вход автомата не поступит серия из трех нулей. При поступлении трех нулей автомат выдает сигнал y_1, управляющий выдачей числа из накопителя и сбросом накопителя.

Составим регулярные выражения, описывающие функционирование автомата. При этом учтем, что множество входных сигналов состоит из двух символов 0 и 1, которые закодируем: $0—x_0$, $1—x_1$. Множество выходных сигналов также состоит из двух символов y_0 и y_1.

Событие, состоящее в том, что на вход автомата поступает серия x_0, может быть представлено выражением

$$S_1 = \{x_0\}.$$

Это значит, что на вход автомата могут поступать слова x_0, x_0x_0, $x_0x_0x_0$, $x_0x_0x_0x_0 \ldots x_0$ и т. д.

Событие, состоящее в том, что после серии нулей на вход автомата поступает x_1 может быть записано в следующем виде:

$$S_2 = \{x_0\}\, x_1.$$

Событие, состоящее в том, что на вход автомата поступает последовательность, не содержащая трех нулей подряд, записывается в виде

$$S_3 = \{x_1 \vee x_0x_1 \vee x_0x_0x_1\}.$$

Это могут быть слова x_1, x_1x_1, $x_1x_1 \ldots x_1$ и т. д., или x_0x_1, $x_0x_1x_0x_1x_0x_1x_0x_1 \ldots x_0x_1$ и т. д., или $x_0x_0x_1$, ад>*1*о*о*1- • • • $x_0x_0x_1$ и т. д.

Таким образом, событие

$$R_1 = S_2 \cdot S_3 = \{x_0\}\, x_1 \{x_1 \vee x_0x_1 \vee x_0x_0x_1\}/y_0, \qquad (3.42)$$

состоящее в том, что после произвольной серии нулей на вход автомата поступает единица, а за ней любая произвольная комбинация нулей и единиц, не содержащая трех нулей подряд, представлено в автомате выходным сигналом y_0.

. Событие $R_2 = S_2 \cdot S_3 \cdot x_0 \cdot x_0 \cdot x_0$, т. е.

$$R_2 = \{x_0\} x_1 \{x_1 \vee x_0 x_1 \vee x_0 x_0 x_1\} x_0 x_0 x_0 / y_1, \quad (3.43)$$

состоящее в том, что после любой комбинации нулей и единиц поступает три нуля подряд, представлено в автомате выходным сигналом y_1.

По полученным регулярным выражениям (3.42), (3.43) необходимо теперь составить таблицу переходов автомата. Она составляется в соответствии со следующими правилами [38].

1. В регулярных выражениях (3.42) и (3.43) производится разметка мест. Местами регулярного выражения называют промежутки между двумя буквами, между буквой и знаком дизъюнкции, между буквой и скобкой (обычной или итерационной). Кроме того, вводят два специальных места — начальное и конечное. Первое из них располагается слева от самого левого знака в выражении для R, а второе — справа от самого правого знака.

При разметке регулярных выражений различают основные и предосновные места. Основными называются места, слева от которых стоит буква, а также все начальные и конечные места. Все места, справа от которых стоит буква, называются предосновными.

Одни и те же места могут быть одновременно и основными и предосновными. Основные места отмечаются индексами десятичных цифр от 1 до n (начальное место отмечается индексом «0»), а каждое предосновное место отмечается совокупностью индексов основных мест. Индексы основных мест записываются непосредственно под регулярными выражениями, а индексы предосновных мест располагаются ниже индексов основных, под горизонтальной чертой.

Разметка регулярных выражений производится по правилам подчинения мест, которые вытекают из определения операций и порядка их выполнения в алгебре событий. Эти правила сводятся к следующим:

а) индекс места перед любыми скобками распространяется на начальные места всех дизъюнктивных членов (одночленов), записанных в этих скобках;

б) индекс конечного места любого одночлена, заключенного в любые скобки, распространяется на место, непосредственно следующее за этими скобками;

в) индекс места перед итерационными скобками распространяется на место, непосредственно следующее за этими скобками, а индекс места за итерационными скобками — на начальные места всех одночленов, заключенных в итерационные скобки;

г) индекс конечного места любого одночлена, заключенного в итерационные скобки, распространяется на начальные места всех одночленов, заключенных в эти итерационные скобки;

д) индексы мест, справа и слева от которых стоят буквы, никуда не распространяются;

е) индекс конечного места распространяется на те же места, на которые распространяется индекс начального места.

2. Если одно регулярное выражение входит сомножителем в другое регулярное выражение, то в дальнейшем рассматривается только последнее. В нашем случае выражение R_1 входит в выражение R_2, поэтому разметке подлежит только выражение R_2.

Следуя приведенным правилам, ниже произведена разметка мест в регулярном выражении R_2 (3.43).

$$R_2 = \underset{0}{|}\{\underset{1}{|}x_0\underset{1}{|}\}\underset{2}{|}x_1\underset{2}{|}\{\underset{3}{|}x_1\underset{3}{|}\vee\underset{4}{|}x_0\underset{4}{|}x_1\underset{5}{|}\vee\underset{6}{|}x_0\underset{6}{|}x_0\underset{7}{|}x_1\underset{8}{|}\}\underset{9}{|}x_0\underset{9}{|}x_0\underset{10}{|}x_0\underset{11}{|}$$

0	0	**2**	**2**	4	**2**	6	7	**2**	9	10
1	1	**3**	**3**		**3**			**3**		
11		**5**	**5**		**5**			**5**		
	И	**8**	**8**		**8**			**8**		

Все основные места последовательно отмечены индексами от I до 11. Начальное место (0) соответствует начальному состоянию автомата.

Предосновное место справа от первой открывающей итерационной скобки подчинено месту, непосредственно расположенному слева от нее (правило а), поэтому индекс «0» записывается под этим предосновным местом. По правилу г) это же предосновное место подчинено основному месту с индексом 1. Кроме того, на это пред-

основное место распространяется индекс конечного места (11) (правило е). Аналогичным образом производится индексация всех предосновных мест в выражении R_2.

По размеченному регулярному выражению уже можно составить таблицу переходов автомата. Однако целесообразно вначале уменьшить число индексов основных мест, а следовательно, и число внутренних состояний автомата.

При уменьшении числа индексов основных мест можно воспользоваться следующим правилом.

Если несколько предосновных мест отмечено одинаковой совокупностью индексов и справа от этих мест записаны одинаковые буквы, то основные места, расположенные справа от этих букв, можно отметить одинаковыми индексами.

Следуя этому правилу в размеченном выражении R_2, можно отметить одинаковыми индексами основные места 4, 6 и 9, например, индексом 4, а основные места 7 и 10 — индексом 6.

Окончательно размеченное выражение R_2 с уменьшенным числом основных индексов имеет вид

$$R_2 = \{x_0\}_1 x_1 \{x_1 \vee x_0 x_1 \vee x_0 x_1\}_7 x_0 x_0 x_0$$

0	0	2	4	4	2	4	6	2	4	6	
1	1	3	3		3			3			
8	8	5	5		5			5			
		7	7		7			7			

3. По минимизированному регулярному выражению строится отмеченная таблица переходов автомата Мура.

В качестве начального состояния выбирается состояние «0» и со столбца, соответствующего этому состоянию, начинается построение отмеченной таблицы переходов. Столбцы, соответствующие остальным состояниям, выписываются в произвольном порядке, но лишь после того, как обозначающие их состояния уже появились в выписанных ранее столбцах таблицы. Строки таблицы обозначаются буквами j алфавита входных сигналов (x_0, x_1). Составление отмеченной таблицы переходов производится в следующем порядке.

Сначала определяются внутренние состояния, в которые переходит автомат по сигналу x_0. Для этого находятся все предосновные места, содержащие индекс 0,

справа от которых записана буква x_0. В выражении R_2 имеется одно такое место. Основное место, расположенное за этой буквой, отмечено индексом 1. Следовательно, автомат по сигналу x_0 переходит из состояния О в состояние 1. Сигнал x_1 переводит автомат из состояния О в состояние 2, так как за предосновным местом, содержащим индекс 0 после буквы x_1, расположено основное место с индексом 2.

После заполнения первого столбца второй столбец обозначается одним из состояний, которое уже появилось в первом столбце (например, состоянием 1). Из состояния 1 по сигналу x_0 автомат переходит в состояние 1, так как за предосновным местом, содержащим индекс I, после буквы x_0 расположено основное место с индексом 1.

Аналогично определяются переходы автомата в другие внутренние состояния. Если из какого-либо состояния по какому-либо входному сигналу автомат не может перейти в другое состояние, то на соответствующее место таблицы переходов записывается пустое состояние (отмечается звездочкой).

Каждое из внутренних состояний автомата в полученной таблице переходов (табл. 3.7) отмечается соответствующим выходным сигналом, который автомат формирует в этом состоянии.

Если же в данном состоянии выходной сигнал не формируется, то соответствующее состояние отмечается буквой «*e*».

ТАБЛИЦА 3.7

Выходы		e	e	y_0	y_0	y_0	y_0	y_0	y_0	y_1
Состояния		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Входы	x_0	1	1	4	4	6	4	8	4	1
	x_1	2	2	3	3	5	3	7	3	2

4. После того как получена отмеченная таблица переходов 3.7, в некоторых случаях имеется возможность уменьшить число состояний этой таблицы.

Столбцы табл. 3.7, имеющие состояния 0 и 1 и отмеченные выходными сигналами e, имеют одинаковые

переходы. При поступлении сигнала x_0 автомат переходит в состояние *1* и из нулевого, и из единичного состояния. Аналогично по входному сигналу x_1 автомат из состояний 0 и 1 переходит в состояние 2. Поэтому представляется возможным объединить эти состояния (1 и 2) и обозначить каким-либо одним индексом, например, нулем. Состояния 2, 3 и 7, отмеченные выходным сигналом y_0, также можно объединить и обозначить через 1. Состояние 6 обозначим через 3, а 4 — через 2 и 8 — через 4. После объединения получается минимизированная отмеченная таблица переходов 3.8.

ТАБЛИЦА 3.8

Выходы		e	y_0	y_0	y_0	y_1
Состояния		**0**	*1*	2	**3**	**4**
Входы	x_0	**0**	2	3	**4**	**0**
	x_1	**1**	**1**	1	1	1

По полученной отмеченной таблице переходов на рис. 3.14 построен граф, позволяющий наглядно представить функционирование автомата.

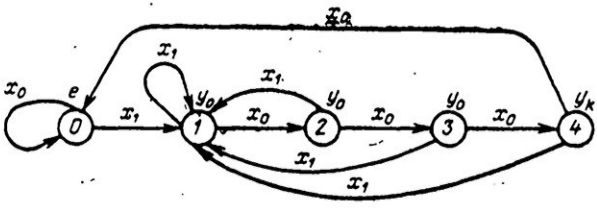


Рис. 3.14. Граф программной части автомата-накопителя радиолокационных сигналов.

Для реализации синтезированной программной части автомата потребуется три ячейки памяти. Если емкость накопителя взять такой же, как и в предыдущем примере, т. е. $M=16$, то для его реализации потребуется 4 ячейки памяти. Общее число ячеек памяти автомата-накопителя получается равным 7. Если же синтезировать

автомат-накопитель в целом, то получится всего 5 ячеек памяти. Значит, раздельный синтез частей автомата приводит к увеличению объема памяти. Но из этого еще не следует, что общий объем оборудования также возрастет. Во многих случаях" некоторое увеличение объема памяти приводит к существенному упрощению логической части схемы.

3.2.4. Абстрактный синтез цифровых программных обнаружителей

Как уже отмечалось, под цифровыми программными обнаружителями понимаются автоматы, выдающие сигнал об обнаружении пачки при поступлении на их входы некоторой комбинации из l единиц на m смежных позициях и фиксирующие конец пачки при появлении серии из к нулей. В частном случае, при $l=m$ автомат фиксирует обнаружение пачки при появлении серии из m единиц. Сигналы обнаружения y_0 и конца пачки $y_к$ являются выходными сигналами автомата.

Рассмотрим порядок синтеза абстрактных схем (графов) программных автоматов-обнаружителей. Возьмем сначала простейший случай, когда автомат обнаруживает пачку по серии из трех единиц, а конец пачки фиксируется по серии из двух нулей. Программа работы такого автомата сводится к следующему.

Если на вход автомата поступает любая комбинация из нулей и единиц, не содержащая серии из трех единиц, то автомат находится в одном из своих внутренних состояний, не отмеченных реальным выходным сигналом (выходной сигнал равен e). При поступлении серии из трех единиц автомат переходит в состояние, в котором выдается сигнал обнаружения y_0. Этот сигнал выдается до тех пор, пока в последовательности входных сигналов появится серия из двух нулей. При поступлении серии из двух нулей автомат переходит в состояние, в котором выдается сигнал, фиксирующий конец пачки $y_к$.

Регулярное выражение, описывающее работу автомата, записывается в виде

$$R = \{x_0\} x_1 x_1 |_{y_0} \{x_1 \vee x_0 x_1\}^* x_0 x_0 |_{y_к}. \qquad (3.44)$$

По этому выражению можно непосредственно, минуя этапы разметки регулярных выражений и минимизации

таблицы переходов, составить граф автомата (рис. 3.15). По графу на рис. 3.15 легко проследить работу автомата и определить требуемое число ячеек памяти для его реализации. В данном случае $K=3$.

Возьмем теперь случай автомата, обнаруживающего пачку по трем единицам на четырех смежных позициях и фиксирующего конец пачки по серии из двух нулей («3/4—2»). В данном случае нет необходимости подробно описывать алгоритм функционирования автомата. Заметим только, что, задавая программу обработки

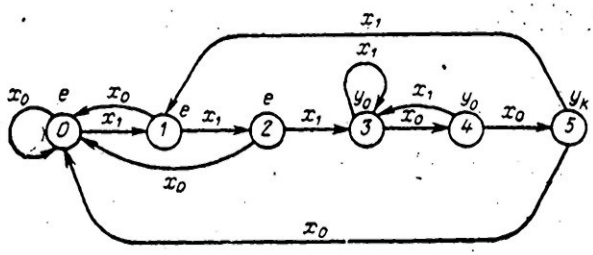


Рис. 3.15. Граф программного обнаружителя «3/3—2».

«3/4—2», необходимо дополнительно условиться о том, как будет фиксироваться начало пачки.

В случае программы «3/4—2» пачка обнаруживается в общем случае при поступлении следующих комбинаций: 1011, 1101, 0111, 1110. Если условиться, что начало пачки всегда должно совпадать с первой единицей, то комбинация 0111 должна быть исключена. При этом автомат должен выдавать сигнал обнаружения как при поступлении единицы на последней (четвертой) позиции, так и при поступлении нуля на этой позиции, после трех единиц. Программа работы автомата при этом усложняется, а число его внутренних состояний увеличивается.

Проще синтезируется автомат, когда условия его работы заданы так, что сигнал обнаружения выдается при поступлении на последней позиции однотипных сигналов (в данном случае единиц). Тогда сигнальными являются первые три из указанных выше комбинации и автомат фактически реализует два критерия обнаружения: «3/3» и «3/4». Недостатком такой программы является наличие неопределенности в фиксации начала пачки, так как при первых двух комбинациях начало пачки фикси-

руется по единице, а при третьей комбинации — по нулю. Это приводит к дополнительной неучитываемой ошибке измерения азимута, максимальная величина которой равна половине интервала угловой дискретности импульсов в пачке.

В дальнейшем будем синтезировать автомат, обнаруживающий пачку по комбинациям 1011, 1101, 111.

Регулярное выражение, описывающее работу такого автомата, записывается в виде

$$R = (x_1 x_1 \vee x_1 x_0 x_1 \vee x_1 x_1 x_0)\, x_1 |_{y_0} \{x_1 \vee x_0 x_1\}\, x_0 x_0 |_{y_к}. \quad (3.45)$$

По этому выражению уже значительно труднее сразу построить граф или записать отмеченную таблицу переходов. Воспользуемся общей методикой составления отмеченной таблицы переходов. При изложении некоторые промежуточные этапы будем опускать.

В соответствии с методикой, подробно описанной в предыдущем пункте, первым этапом при составлении отмеченных таблиц переходов является разметка мест в регулярном выражении (3.45). В окончательном виде размеченное регулярное выражение имеет вид

$$R = \underset{0}{|}\big(\underset{}{|} x_1 \underset{1}{|} x_1 \underset{2}{|} \vee \underset{}{|} x_1 \underset{1}{|} x_0 \underset{3}{|} x_1 \underset{4}{|} \vee \underset{}{|} x_1 \underset{1}{|} x_1 \underset{2}{|} x_0 \underset{5}{|}\big) \underset{}{|} x_1 \underset{6}{|} \{ \underset{}{|} x_1 \underset{7}{|} \vee \underset{}{|} \underset{8}{} \underset{9}{}\} \underset{}{|} x_0 \underset{8}{|} x_0 \underset{10}{|}.$$

0, 10	1		0, 10	1	3		0, 10	1	2	2, 4, 5	6, 7, 9	6, 7, 9	8	6, 7, 9	8

Соответствующая этому выражению отмеченная таблица переходов представлена табл. 3.9. Звездочками обозначены неопределенные состояния автомата, которые необходимо доопределить.

ТАБЛИЦА Э9

Выходы		e	e	e	e	e	e	y_0	y_0	y_0	y_0	$y_к$
Состояния		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Входы	x_0	*/0	3	Б	*/0	*/3	*/0	8	8	10	•8	*/0
	x_1	1	2	б	4	6	6	7	7	9	7	1

Доопределение состояний производится на основе анализа программы работы автомата.

В данном случае не определены переходы автомата по сигналу x_0 из 0, 3, 4, 5 и 10 состояний. Если автомат находится в нулевом состоянии и поступил сигнал x_0, то целесообразно оставить его в том же состоянии. Аналогично, из 10 состояния (после выдачи сигнал $y_к$) также целесообразно возвратить автомат по сигналу x_0 в нулевое состояние. В состояние 3 автомат переходит из состояния 1 при получении комбинации x_1x_0. При поступлении следующего сигнала x_0 автомат должен возвратиться в исходное состояние, так как выполняется критерий конца пачки. Аналогичным образом из состояния 5 по сигналу x_0 автомат должен возвращаться также в исходное состояние.

Труднее обстоит дело с доопределением перехода автомата из состояния 4 по сигналу x_0. В состояние 4 автомат переходит из состояния 3 по сигналу x_1. При этом в автомате фиксируется комбинация $x_1x_0x_1$. Следующий нуль должен перевести автомат в такое состояние, чтобы в дальнейшем не потерять предыдущую единицу. Таким состоянием, как легко видеть, является состояние 3.

Доопределенные состояния записаны правее дробной черты в соответствующих клетках отмеченной таблицы переходов 3.9. Так как из состояния *6, 7* и *9* автомат переходит в одни и те же состояния, то эти состояния можно объединить. В окончательном виде отмеченная таблица переходов представлена табл. 3.10.

ТАБЛИЦА 3.10

Выходы		*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	y_0	y_0	$y_к$
Состояния		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Входы	x_0	0	3	5	0	3	0	7	8	0
	x_1	1	2	6	4	6	6	6	6	1

На рис. 3.16 изображен граф автомата, реализующего программу «3/4—2». По графу легко проследить функционирование автомата и определить необходимый

объем памяти. В данном случае необходимое число ячеек памяти $K=4$.

Приведем теперь окончательные результаты синтеза автомата, реализующего программу «3/5—3», т. е. фикси-

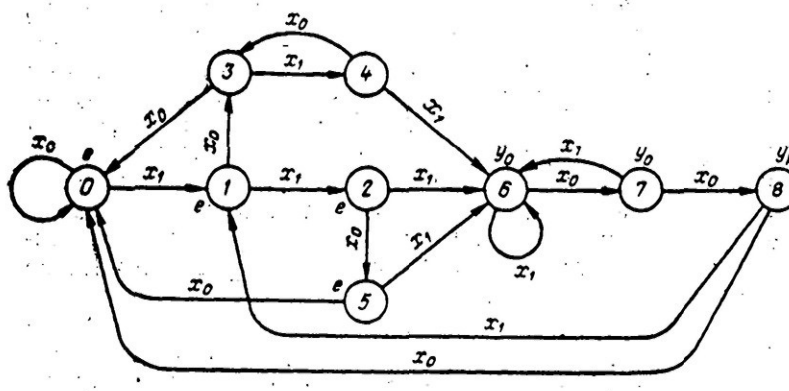


Рис. 3.16. Граф программного обнаружителя «3/4—2».

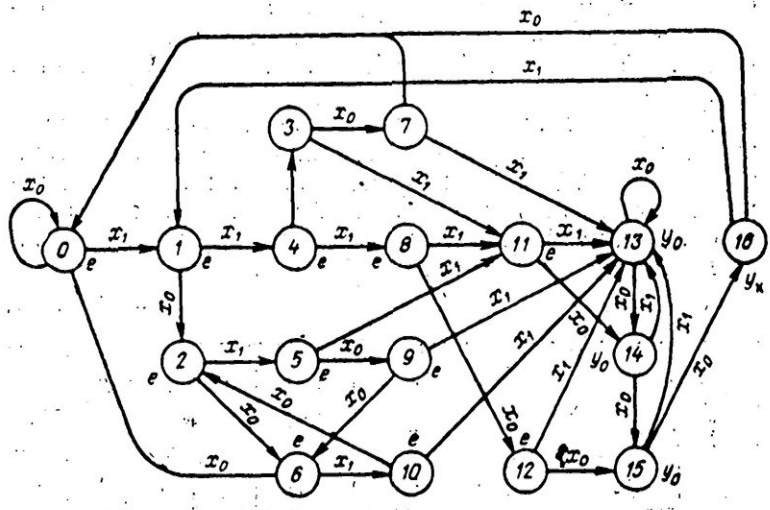


Рис. 3.17. Граф программного обнаружителя «3/5—3».

рующего обнаружение пачки при появлении трех единиц на 5 смежных позициях и конец пачки по серии из трех нулей. Дополнительными условиями при синтезе этого автомата являлись:

1) начало пачки фиксируется всегда по единице;

2) сигнал обнаружения выдается на 5 позиций от начала пачки независимо от того, выполняется ли логика обнаружения именно на 6 позиции или на предыдущих позициях (третьей или четвертой). Например, при приеме комбинаций 11010 и 10111 логика обнаружения выполняется на 4 позиции, однако автомат должен выдавать сигнал обнаружения на 5 позиции.

Граф автомата изображен на рис. 3.17. Общее число состояний автомата равно 17, поэтому для его реализации потребуется 5 ячеек памяти.

В заключение отметим, что, кроме рассмотренных в данном параграфе цифровых накопителей и цифровых программных обнаружителей, аналогичным образом могут быть синтезированы абстрактные схемы, реализующие другие, более сложные алгоритмы обработки. В качестве примера таких сложных автоматов можно указать на обнаружители, рассмотренные в работе Диннина и Рида [39]. Синтез сложных автоматов, не отличаясь принципиально от синтеза рассмотренных автоматов, естественно, значительно более громоздок.

3.2.5. Пример логического синтеза схемы цифрового программного обнаружителя

Абстрактные схемы (графы) позволяют уяснить принцип работы автоматов и определить необходимый объем их памяти. Однако по результатам этого синтеза еще невозможно построить структурную схему автомата с использованием каких-либо конкретных элементов дискретной вычислительной техники.

Задача синтеза схем сложных автоматов из конкретных элементов (элементарных автоматов) решается на этапе структурного синтеза, который следует за этапом абстрактного синтеза. Структурный синтез включает в себя выбор элементарных автоматов и определение такого способа их соединения между собой, который обеспечивает функционирование схемы в соответствии с заданной таблицей переходов. Кроме того, на этапе структурного синтеза решается задача минимизации числа логических элементов схемы.

Методы структурного синтеза узлов электронных цифровых машин подробно рассмотрены в литературе

[36, 38]. Полученные там результаты целиком могут быть использованы при синтезе схем цифровых автоматов для обработки радиолокационной информации.

Синтез схем цифровых автоматов можно производить, минуя этап абстрактного синтеза, т. е. без минимизации этих схем по количеству элементов памяти. Такой синтез производится на основе алгебры логики и поэтому называется логическим синтезом.

Логический синтез предполагает задание условий работы автомата в описательной форме или с помощью таблиц условий работы. По условиям работы составляется логическая формула, которая, после минимизации по законам алгебры логики, определяет состав элементов и порядок их соединения. Количество элементов памяти определяется из условий работы схемы.

В качестве примера произведем логический синтез автомата, фиксирующего обнаружение пачки при появлении трех единиц на 5 смежных позициях, а конец пачки по серии из трех нулей. Описание алгоритма работы такого автомата произведено в предыдущем пункте, а его граф изображен на рис. 3.17.

Введем следующие обозначения:

$x_i (i=1-5)$ — логические переменные на каждой из пяти рассматриваемых позиций; логические переменные принимают только два значения нуль и единица, причем нулевые значения логических переменных отмечаются знаком отрицания $(\bar{x}_i)$.

P_0 — сложное событие, при котором выполняется логика обнаружения;

$P_к$ — сложное событие, при котором выполняется логика конца пачки.

Составим таблицу условий обнаружения пачки (см. табл. 3.11). В этой таблице приведены все комбинации логических переменных, приводящие к обнаружению $(P_0=1)$. Другие комбинации переменных, не приводящие к обнаружению пачки на 5 позициях $(P_0=0)$, в табл. 3.11 не внесены.

Запишем логическую формулу, определяющую условия обнаружения

$$P_0 = \bar{x}_1 (\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5 +$$
$$+ \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 +$$
$$+ x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5).$$

ТАБЛИЦА 3.11

№ п/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
1	1	0	0	1	1	1
2	1	0	1	0	1	1
3	1	0	1	1	0	1
4	1	0	1	1	1	1
5	1	1	0	0	1	1
6	1	1	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1
8	1	1	1	0	0	1
9	1	1	1	0	1	1
10	1	1	1	1	0	1
11	1	1	1	1	1	1

После минимизации этого выражения по законам алгебры логики получим

$$P_0 = x_1[(x_2 + x_5)(x_3 + x_4) + x_2x_5 + x_3x_4]. \quad (3.46)$$

Из формулы (3.46) следует, что для реализации критерия обнаружения потребуется 4 схемы «И» и 4 схемы «ИЛИ».

Логическая формула, определяющая условие фиксации конца пачки, записывается в виде

$$P_к = \overline{x}_3\,\overline{x}_4\,\overline{x}_5.$$

Для реализации критерия фиксации конца пачки потребуется три инвертора и две схемы И.

Как видно из таблицы условий работы, для реализации схемы необходимо иметь также 5 элементов памяти (триггеров) для записи входной информации на 5 соседних позициях. Эти элементы памяти должны быть соединены последовательно в сдвигающий регистр. С единичных выходов всех пяти триггеров снимаются сигналы на схему, реализующую критерий обнаружения. С нулевых выходов 3, 4 и 5 триггеров снимаются сигналы на схему, реализующую критерий фиксации конца пачки. Съем сигналов с нулевых выходов обеспечивает одновременно их инвертирование.

Структурная схема рассмотренного автомата представлена на рис. 3.18. В состав этой схемы, кроме ука-

занных выше элементов, входит еще триггер управления ТгУ и схема $И_7$, которые обеспечивают выдачу сигнала «конец пачки» только после выдачи сигнала «начало пачки».

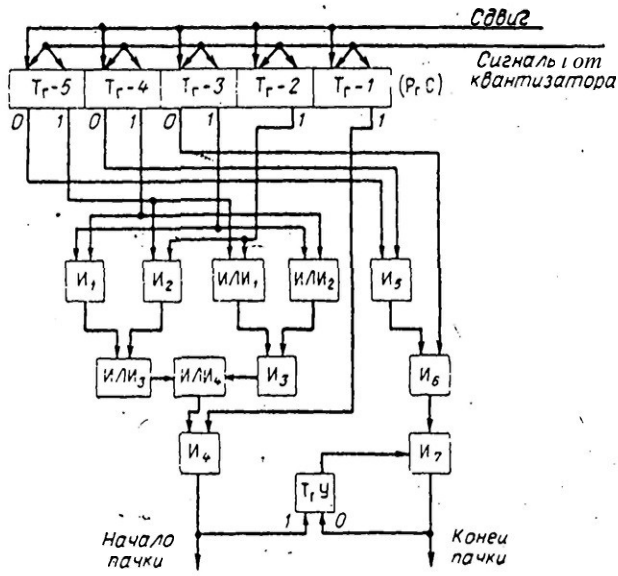


Рис. 3.18. Структурная схема автомата, реализующего программу «3/5—3».

Сравнение схем на рис. 3.8 и 3.18 показывает, что последняя значительно проще по объему оборудования и, следовательно, значительно надежнее в работе.

§ 3.3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ НАКОПИТЕЛЕЙ И ПРОГРАММНЫХ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ

3.3.1. Постановка задачи

При статистическом анализе качественных характеристик цифровых накопителей и программных обнаружителей (цифровых автоматов) основная трудность связана с многообразием программ обработки, подлежащих анализу. Каждая из программ (или группа программ) имеет свои специфические особенности поведения под

воздействием случайных сигналов и, следовательно, имеет отличные от других качественные характеристики. Выбрать программу с наилучшими качественными характеристиками среди многообразия возможных программ можно только путем сравнения их поведения под воздействием сигналов с одинаковыми статистическими характеристиками. При этом необходимо также учитывать сложность практической реализации программы (объем оборудования). Наилучшей, очевидно, будет такая программа, которая при приемлемых требованиях к объему необходимого для ее реализации оборудования, дает лучшее приближение к качественным характеристикам (вероятность обнаружения, точность измерения угловой координаты) квазиоптимального метода обработки.

Вопросам анализа цифровых обнаружителей посвящен ряд опубликованных работ. Среди них следует, в первую очередь, отметить работу Диннина и Рида [39], посвященную анализу цифровых накопителей, книгу Я. С. Ицхоки и др. [40], посвященную анализу программных обнаружителей. В работе [39] приводятся результаты, главным образом, экспериментального исследования путем моделирования на ЦВМ некоторых программ цифрового накопления, а задача теоретического анализа только ставится. В книге [40] производится подробный анализ программных обнаружителей (логических схем) с помощью апларата вероятностной комбинаторики при условии бесконечной емкости памяти системы обработки, т. е. без учета реализации программ в цифровых устройствах (автоматах) с ограниченной памятью.

В данном параграфе обосновывается методика и производится статистический анализ конкретных схем цифровых автоматов с конечной памятью (конечных автоматов).

Автоматы для обработки радиолокационных сигналов, синтезированные в предыдущем параграфе, рассматривались как детерминированные автоматы в том смысле, что для каждого из них задание предыдущего состояния $a_i = a(t-1)$ и текущего входного сигнала $x(t)$ однозначно определяет следующее очередное состояние $a_j = a(t)$, в которое переходит автомат под воздействием этого входного сигнала из состояния $a_i = a(t-1)$. Алфавит входных сигналов для таких автоматов состоит толь-

ко из двух символов — $x_0(t)$ и $x\backslash(t)$, соответствующих нулю (x_0) и единице ($x\backslash$) на входе автомата в. очередном такте его работы. Сигналы x_0 и x_1 характеризуются вероятностью своего появления q и p, причем сумма этих вероятностей на каждой позиции равна единице $(p+q=1)$.

Указанная особенность входных сигналов позволяет рассматривать на входе автомата единственный случайный сигнал X, принимающий значения нуль или единица в соответствии с вероятностями q и p. Под воздействием случайного входного сигнала X автомат, находящийся на предыдущей позиции в состоянии a_i, перейдет на следующей позиции либо в состояние a_{j_0} с вероятностью q, либо в состояние a_{j_1} с вероятностью p.

Автоматы, переходы которых являются случайными, получили название автоматов со случайными переходами [37].

Всякий автомат со случайными переходами естественно задавать с помощью матрицы переходов $\|p_{ij}\|$. Матрица переходов автомата, предназначенного для обработки радиолокационных сигналов, обладает следующими свойствами:

а) сумма элементов любой из ее строк равна единице,

б) в матрице не имеется столбцов, состоящих из одних нулей, что соответствует отсутствию в автомате состояний, вероятность перехода в которые равна нулю,

в) элементы матрицы представляют собой неотрицательные вещественные числа, не превышающие единицу,

Матрицы, удовлетворяющие перечисленным свойствам, принято называть стохастическими матрицами.

Таким образом, поведение автомата под воздействием случайных сигналов, принимающих только два возможных значения (нуль и единица), описывается стохастической матрицей переходов.

С другой стороны, стохастическими матрицами переходов описывается в теории вероятностей широкий класс случайных последовательностей, называемых цепями Маркова. Цепь Маркова определяет такую последовательность испытаний, при которой вероятность тех или иных исходов каждого очередного испытания зависит от

исхода предшествующего испытания и не зависит непосредственно от исходов всех остальных испытаний.

Легко видеть, что функционирование автомата со случайными переходами можно описать цепью Маркова, если его состояния интерпретировать как исходы испытаний. Это позволяет анализировать автоматы со случайными переходами с помощью аппарата цепей Маркова.

Заметим, что для более полной аналогии с марковскими цепями необходимо рассматривать не просто автоматы со случайными переходами, а так называемые случайные автоматы, у которых случайна не только функция переходов, но и выбор начального состояния.

В дальнейшем такая аналогия позволит описать поведение автоматов как под воздействием стационарных, так и под воздействием нестационарных сигналов.

Исходным шагом при анализе вероятностных характеристик автоматов является составление стохастической матрицы его переходов. Для составления матрицы переходов могут быть использованы либо таблица переходов автомата, либо его граф. Причем, так как во многих случаях граф или таблица переходов автомата могут быть составлены оразу на основе словесного описания программы его работы, то статистический анализ автомата может предшествовать синтезу его схемы.

3.3.2. Воздействие стационарных помех на цифровой накопитель радиолокационных сигналов

1. При анализе в первую очередь будем иметь в виду схему цифрового накопителя позиций между соседними сериями нулей (см. эпюры на рис. 3.9,*а*) со счетчиком емкостью M единиц. Рассмотрим работу схемы, когда на вход квантизатора поступает стационарная помеха типа внутренних шумов приемника. На выходе квантизатора в этом случае появляется стационарная последовательность нулей и единиц. Если теперь зафиксировать некоторую постоянную дальность, то на вход цифрового автомата будет воздействовать последовательность нулей и единице в пределах одного кольца дальности.

Последовательность нулей и единиц, отнесенных к одной дальности, в области помехи представляет собой

последовательность испытаний Бернулли с исходами нуль и. единица. Будем считать появление нуля неудачей, а, появление единицы успехом. Тогда последовательность нулей и единиц соответствует последовательности неудач и успехов в испытаниях Бернулли.

Состояние автомата (накопителя) при каждом новом испытании Бернулли (на каждой новой позиции) зависит только от его состояния на предыдущей позиции и от исхода нового испытания. Следовательно, процесс накопления статистически описывается цепью Маркова [41].

Перейдем к непосредственному анализу состояний автомата. Сначала рассмотрим простейший случай, когда сброс накопленной информации (возвращение автомата в исходное состояние) происходит при появлении одного нуля.

Условимся говорить, что в момент n-го испытания Бернулли (на n позиции внутри рассматриваемого кольца дальности) автомат находится в состоянии flo, если это испытание привело к неудаче и в состоянии a_i ($i=1, 2, 3, \ldots, M$), если последняя неудача наблюдалась при испытании с номером $n-i$. Нулевое испытание будем считать неудачным. Тогда совокупность состояний автомата описывается цепью Маркова с возможными переходами $a_i \to a_0$, $a_M \to a_0$ И $a_i \to a_{i+1}$ ($i<M$). Соответствующая матрица вероятностей перехода имеет вид

$$A_{MM}=\left\|\begin{array}{cccccc} p_{00} & \text{Pot} & p_{02} & p_{03}\cdots & & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13}\cdots & & p_{1M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{M0} & p_{M1} & p_{M2} & p_{M3} & \cdots & p_{M-1,\,M} \end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{cccccc} q_N & p_N & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_N & 0 & p_N & 0 & \ldots & 0 \\ q_N & 0 & 0 & p_N & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right\|, \qquad (3.47)$$

где p_N — вероятность получения единицы в области помехи,

$$q_N=1-p_N.$$

Обозначим через $P_i(я)$ — вероятность того, что автомат перейдет в состояние a_i за n шагов, если известно его состояние при я = 0. Очевидно,

$$\sum_{i=0}^{M} P_i(n) = 1$$

Вероятность того, что автомат находится в состоянии a_j после следующего шага, равна

$$P_j(n+1) = \sum_{i=0}^{M} P_i(n)\, p_{ij} = \boldsymbol{P}(n)\, \boldsymbol{A}_{MM}, \qquad (3.48)$$

где $\boldsymbol{P}(n) = [P_0(n),\ P_1(n) \ldots P_i(n) \ldots P_M(n)]$ вектор-строка вероятностей состояний автомата после n шагов (на я-й позиции),

p_{ij} — вероятность перехода из состояния a_i в состояние a_j за один шаг.

Таким образом, путем умножения вектора-строки состояний автомата на л-м шаге на матрицу вероятностей перехода можно найти вектор-строку состояний автомата на $n+1$ шаге.

Для определения вероятности ложного обнаружения необходимо знать предельные вероятности состояний автомата, когда число шагов (переходов) л велико. Путем непосредственного подсчета можно показать, что в рассматриваемом случае с ростом n вероятности состояний автомата становятся независимыми от его начального состояния, т. е. мы имеем дело с эргодической цепью Маркова [43]. Для эргодических цепей Маркова можно определить вероятности состояний P_i как вероятности того, что автомат находится в состоянии a_i после большого числа переходов. Вектор-строка $\boldsymbol{P}$ с компонентами P_i $(i=0—M)$ будет тогда пределом последовательности векторов $\boldsymbol{P}_i(n)$, когда л стремится к бесконечности. Вектор $\boldsymbol{P}$ называется вектором предельных вероятностей состояний.

Из соотношения (3.48) следует, что вектор P должен удовлетворять условию

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}_{MM} \quad (\boldsymbol{P} = [P_0,\ P_1,\ P_2 \ldots P_i \ldots P_M]), \qquad (3.49)$$

причем сумма компонент этого вектора должна быть равна единице, т. в.

$$\sum_{i=0}^{M} P_i = 1. \tag{3.50}$$

Уравнения (3.49) и (3.50) позволяют найти предельные вероятности состояний автомата, матрица вероятностей переходов которой имеет вкд (3.47).

Из уравнения (3.50) имеем

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_M = 1,$$

а из уравнения (3.49)

$$\begin{aligned} P_1 &= p_N P_0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_M &= p_N P_{M-1}. \end{aligned}$$

Получена система из $M+1$ уравнения с $M+1$ неизвестными. Решение этой системы дает

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{q_N}{M+1}, \\ P_1 &= p_N \cdot \frac{q_N}{1 - p_N^{M+1}}, \\ P_2 &= p_N^2 \cdot \frac{q_N}{1 - p_N} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_M &= p_N^M \cdot \frac{q_N}{1 - p_N^{M+1}}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Если M велико, а p_N мало ($p_N \ll 1$), то для предельных вероятностей состояний автомата под воздействием помех имеем:

$$P_0 = q_N;\ P_1 = q_N p_N;\ P_2 = q_N p_N^2;\ \ldots;\ P_M = q_N p_N^M.$$

Вероятность ложного обнаружения соответствует предельной вероятности накопления в автомате $i=\mathcal{L}_0$ единиц, где $\mathcal{L}_0$ — установленный в схеме порог обнаружения, т. е.

$$P = P_{\mathcal{L}_0}. \tag{3.52}$$

Рассмотрим теперь случай, когда возвращение автомата в нулевое состояние происходит при наступлении рекуррентного события ε_k, состоящего в появлении серии из к пропусков подряд. Условимся считать, что при нулевом испытании осуществилось ε_k, т. е. автомат находится в исходном (нулевом) состоянии, Тогда в момент времени n автомат находится в состоянии a_0 (в нуле), если ε_k произошло на n-й позиции, и в состоянии a_i, если событие ε_k произошло на $n-i$-й позиции. Из состояния a_i возможны переходы только в a_0 (если на $i+1$ позиции произошло событие ε_k, или в a_{i+1}. Из состояния a_M возможен переход только в состояние a_0 с вероятностью единица.

Таким образом, и в этом случае мы имеем дело с цепью Маркова, матрица вероятности перехода которой по своей структуре аналогична матрице (3.47).

Для случая $k=2$ матрица вероятностей перехода имеет вид

$$A_{MM} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ q_N^2 & 0 & 1-q_N^2 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ q_N^2 & 0 & 0 & \text{1-Й} & 0 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & \text{1-Й} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.53}$$

Воспользовавшись уравнениями (3.49), (3.50) и матрицей (3.53), можно определить предельные вероятности состояний накопителя. Решение системы $M+1$ уравнения с $M+\backslash$ неизвестными для рассматриваемого случая дает

$$P_0 = \frac{q_N^2}{1+q_N^2-(1-q_N^2)^M},$$

$$P_1 = P_0,$$

$$P_2 = P_0 (1 - q_N^2), \tag{3.54}$$

$$P_3 = P_0 (1 - q_N^2)^2,$$

. . . . . .

$$P_M = P_0 (1 - q_N^2)^{M-1}.$$

При больших M и $p_N \ll 1$ третьим членом в знаменателе выражения для P_0 можно пренебречь. В этом случае имеем:

$$P_0 = \frac{q_N^2}{1 + q_N^2}. \tag{3.55}$$

На рис. 3.19 приведены рассчитанные по формулам (3.54). графики зависимости предельных вероятностей состояний автомата от вероятности p_N превышения помехой уровня квантования при $k=2$.

Вероятность ложного обнаружения, так же как и в предыдущем случае, равна предельной вероятности

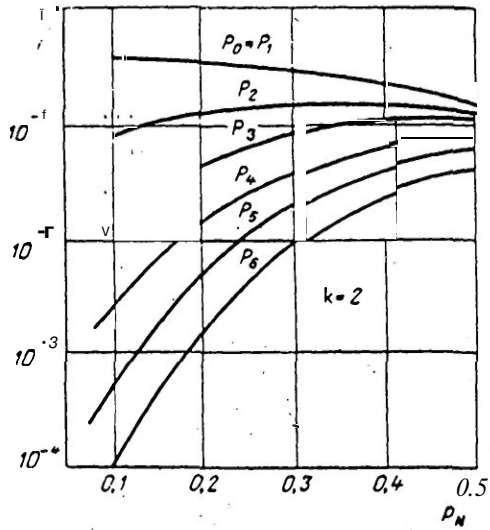


Рис. 3.19. Предельные вероятности состояний накопителя в стационарных помехах при $k=2$.

накопления $i = \mathcal{L}_0$ единиц. При заданных $P_{л0}$ и $\mathcal{L}_0$ по графикам на рис. 3.19 можно найти допустимое p_N.

Если k=3, то матрица вероятностей перехода имеет вид:

$$A_{M,M} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_N^3 & 0 & 0 & 1-q_N^3 & 0 & \dots & 0 \\ \text{Й} & 0 & 0 & 0 & 1-q_N^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_N^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-q_N^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}. \quad (3.56)$$

Предельные вероятности состояний накопителя снова находятся решением системы $M+1$ уравнения с $M+1$ неизвестными, полученной из условий (3.49), (3.50):

$$\begin{aligned} &P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_M = 1, \\ &P_1 = P_0, \\ &P_2 = P_1, \\ &P_3 = P_2 (1 - q_N^3), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &P_M = P_{M-1} (1 - q_N^3). \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений дает

$$\begin{aligned} &P_0 = \frac{q_N^3}{1 + 2q_N^3 - (1 - q_N^3)^{M-1}}, \\ &P_1 = P_2 = P_0, \\ &P_3 = P_0 (1 - q_N^3), \\ &P_4 = P_0 (1 - q_N^3)^2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\text{p} \quad - \text{p} \ (1 - q_N^3)^{M-2}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

При больших M и $p_N \ll 1$ третий член в знаменателе выражения для P_0 стремится к нулю. Поэтому можно считать

$$P_0 = \frac{q_N^3}{1 + 2q_N^3}. \qquad (3.58)$$

По формулам (3.57) и (3.58) легко рассчитать предельные вероятности состояний накопителя и, следовательно, определить вероятность ложного обнаружения

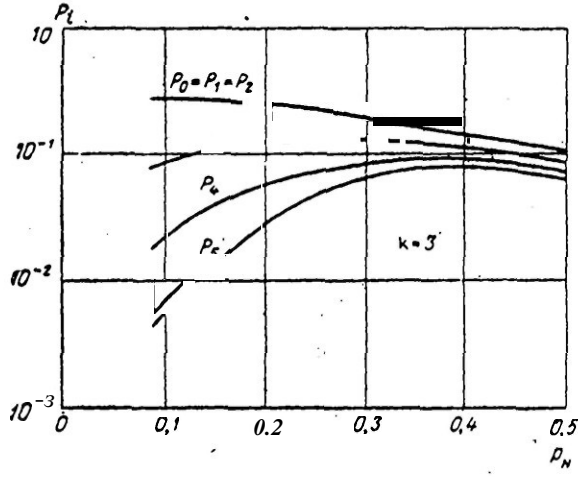


Рис. 3.20. Предельные ворятности состояний автомата-накопителя в стационарных помехах при $k=3$.

при различных $\mathcal{L}_0$. Соответствующие графики приведены на рис. 3.20.

Аналогичным способом можно произвести расчет предельных вероятностей состояния накопителя для других значений к рекуррентного события e_k, с наступлением которого происходит возвращение автомата (накопителя) в исходное состояние. Читателю рекомендуется для тренировки составить матрицу переходов и рассчитать предельные вероятности состояния автомата при $k=4$.

2. Для автомата-накопителя, фиксирующего начало пачки по первой единице, а конец пачки по серии из к нулей, предельные вероятности состояний накопителя,

а следовательно, и вероятности ложного обнаружения, вычисляются по методике, изложенной выше.

Пусть, например, конец пачки фиксируется по серии из двух нулей ($k=2$). Тогда матрица вероятностей перехода автомата имеет вид:

$$A_{MM}=\begin{Vmatrix} q_N & p_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_N^2 & 0 & 0 & 1-q_N^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_N^2 & 0 & 0 & 0 & 1-q_N^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-q_N^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}. \quad (3.59)$$

Используя методику, подробно описанную выше, получим

$$\left.\begin{aligned} &P_0+P_1+P_2+\dots+P_M=1,\\ &P_1=P_2=P_0p_N,\\ &P_3=P_2(1-q_N^2)=P_0p_N(1-q_N^2),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &P_M=P_{M-1}(1-q_N^2)=P_0p_N(1-q_N^2)^{M-2}. \end{aligned}\right\} \quad (3.60)$$

Из решения системы уравнений (3.60) можно найти вероятность исходного состояния P_0, а затем вероятности всех других состояний,

Для вероятности исходного состояния P_0 решение имеет вид:

$$P_0=\frac{q_N^2}{q_N^2+p_N[1+q_N^2-(1-q_N^2)^{M-1}]}. \quad (3.61)$$

При большом M (при большой емкости накопителя)

тогда

$$P_0=\frac{q_N^2}{1-p_N^2q_N}. \quad (3.62)$$

Если, кроме того, положить $p_N \ll 1$, то получим приближенно

$$P_0 \approx q_N^2 .$$

Степень приближения будет достаточно высокой уже при $p_N = 0{,}1—0{,}2$, е. при тех вероятностях превышения помехой порога квантизатора, которые практически больше всего используются.

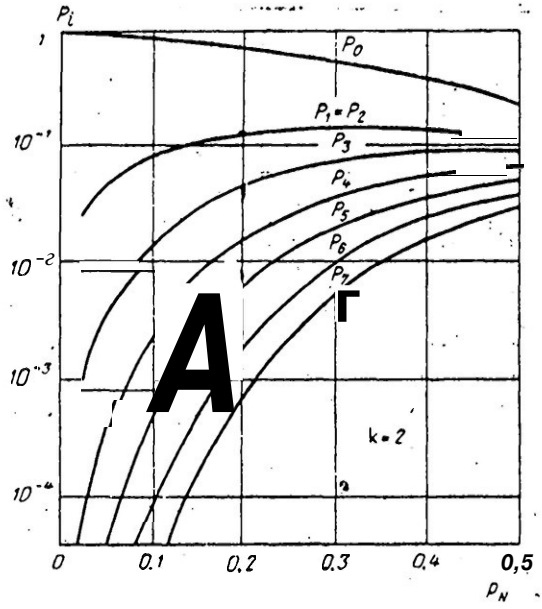


Рис. 3.21. Предельные вероятности состояния в стационарных помехах автомата-накопителя, фиксирующего начало пачки по первой единице, а конец по серии из двух нулей.

Выражение для P_0 И система уравнений (3.60) дает возможность определить предельные вероятности всех состояний накопителя. Если, кроме того, задан порог $\mathcal{L}_0$ обнаружения, то вероятность ложного обнаружения $P_{л0} = P_{\mathcal{L}_0}$, где $P_{\mathcal{L}_0}$ — предельная вероятность накопления $\mathcal{L}_0$ единиц в области помехи.

Для случая k=3 окончательные формулы для предельных вероятностей состояний имеют вид (при больших M):

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{q_N^3}{q_N^3 + p_N(1+2q_N^3)}, \\ P_1 &= P_2 = P_3 = P_0 p_N, \\ P_4 &= P_0 p_N (1 - q_N^3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_M &= P_0 p_N (1-q_N^3)^{M-3}. \end{aligned}\right\} \quad (3.63)$$

Графики предельных вероятностей состояний автомата-накопителя, фиксирующего начало пачки по первой единице, а конец пачки по 2-м нулям и 3-м нулям, приведены на рис. 3.21 и 3.22 соответственно.

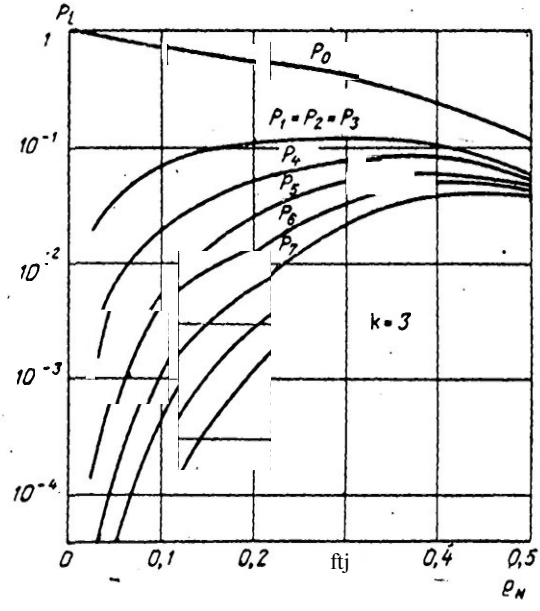


Рис. 3.22. Предельные вероятности состояний в стационарных помехах автомата-накопителя, фиксирующего начало пачки по первой единице, а конец по серии из трех нулей.

3. Аналогичным образом могут быть получены формулы для предельных вероятностей состояний цифровых накопителей любых других типов.

3.3.3. Воздействие стационарных помех на цифровой программный обнаружитель

Переходя к анализу цифровых программных обнаружителей, заметим, что эти обнаружители включают в себя, как правило, две составные части:

— собственно обнаружитель — цифровой автомат, реализующий установленный критерий обнаружения пачки;

— накопитель — цифровой автомат, осуществляющий счет позиций внутри обнаруженной пачки и возвращение автомата в исходное состояние при выполнении установленного критерия конца пачки.

Тот факт, что обе части такого автомата иногда не составляют единое целое при схемной реализации, а относятся к различным блокам аппаратуры первичной обработки радиолокационной информации, не является в данном случае существенным.

1. Рассмотрим сначала поведение в стационарных помехах автомата с программой работы «m/m—k», т. е. автомата, в котором сигнал обнаружения выдается при наличии m единиц на m смежных позициях, а возвращение в исходное состояние (после обнаружения) происходит при появлении серии из к нулей, а также при переполнении накопителя.

Граф автомата при $m=3$, $k=2$ (программа «3/3—2») представлена на рис. 3.23. Из рисунка видно, что до выполнения критерия обнаружения автомат возвращается в исходное состояние при поступлении одного нуля. После выполнения критерия обнаружения (после перехода автомата в состояние 3) выдается сигнал y_0 и включается накопитель. Переход автомата в состояние 4 (которое на схеме для простоты рассмотрения представлено в виде двух состояний $4p_N$ и $4q_N$) осуществляется с вероятностью, равной единице. Переходы автомата в следующие состояния 5, *6*, ...,M осуществляются при отсутствии в последовательности входных сигналов двух нулей подряд, т. е. с вероятностью $p_{ij}=1-q_N^2$. При накопле-

нии M' единиц (где $M' = M - 3$ — предельное число состояний накопителя) осуществляется возвращение автомата в нуль с вероятностью, равной единице.

Легко видеть, что рассматриваемый программный обнаружитель представляет собой последовательное соединение двух цифровых автоматов, один из которых накапливает только следующие подряд друг за другом единицы, а второй считает позиции, на которых отсутствует два нуля подряд (начиная с нуля или с единицы) после

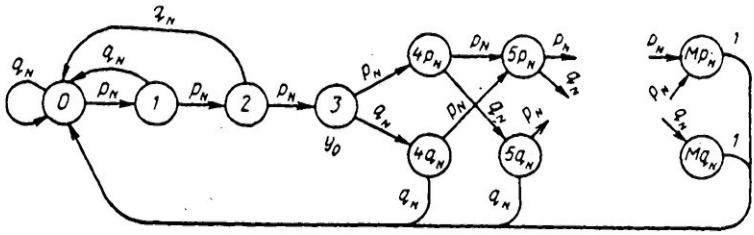


Рис. 3.23. Граф программного автомата «3/3—2».

выполнения критерия обнаружения. Такие автоматы будем в дальнейшем называть каскадными автоматами.

В соответствии с графом (рис. 3.23) можно обычным образом составить матрицу вероятностей перехода каскадного автомата. Эта матрица имеет вид:

$$A_{MM} = \left\| \begin{array}{cccccc} q_N & PN & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_N & 0 & PN & 0 & 0 & 0 \\ q_N & 0 & 0 & PN & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q_N^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{строк} \\ M+1 \end{array}. \qquad (3.64)$$

$M+1$ столбцов

Используя методику, подробно изложенную в предыдущем пункте, получим систему уравнений для определения предельных вероятностей состояний автомата

$$\left.\begin{aligned}
&P_0+P_1+P_2+\ldots+P_M=1,\\
&P_1=P_0p_N;\ P_2=P_1p_N=P_0p_N^2;\\
&P_3=P_4=P_2p_N=P_0p_N^3;\\
&P_5=P_4(1-q_N^2)=P_0p_N^3(1-q_N^2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_M=P_{M-1}(1-q_N^2)=P_0p_N^3(1-q_N^2)^{M-4}=\\
&\qquad=P_0p_N^3(1-q_N^2)^{M'-1}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.65)$$

Решая эту систему уравнений относительно P_0, получаем

$$P_0=\frac{q_N^2}{q_N(1-p_N^4)+p_N^3[1-(1-q_N^2)^{M'}]}.$$

При больших M' (т. е. при большой емкости накопителя) имеем

$$P_0=\frac{q_N^2}{q_N(1-p_N^4)+p_N^3}.$$

Если, кроме того, $p_N \ll 1$, получаем приближенно

$$P_0\approx q_N.$$

Подставляя найденное значение P_0 в уравнения (3.65), получим окончательно

$$\left.\begin{aligned}
&P_1\approx q_Np_N,\\
&P_2\approx q_Np_N^2,\\
&P_3\approx q_Np_N^3=P_{\text{по}},\\
&P_4=P_3.\\
&\mathcal{P}_1\approx q_Np_N^3(1-q_N^2),\\
&\mathcal{P}_2\approx q_Np_N^3(1-q_N^2)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathcal{P}_{M'}\approx q_Np_N^3(1-q_N^2)^{M'-1},
\end{aligned}\right\}\qquad(3.66)$$

где $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ..., $\mathcal{P}_{M'}$ — вероятности накопления (после обнаружения) одного, двух и т. д. (до M') импульсов;

M' — емкость накопителя (второго каскада автомата).

Аналогичным образом получаются формулы для предельных вероятностей состояний при программе обработки «4/4—2»

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{q_N^2}{q_N(1-p_N^5)+p_N^4[1-(1-q_N^2)^{M'}]} \approx q_N, \\ P_1 &= P_0 p_N, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_4 &= P_0 p_N^4 = P_{\text{по}}, \\ \mathcal{P}_1 &= P_0 p_N^4, \\ \mathcal{P}_2 &= P_0 p_N^4 (1-q_N^2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{P}_{M'} &= P_0 p_N^4 (1-q_N^2)^{M'-1}. \end{aligned}\right\} \quad (3.67)$$

Решение задачи для программы «4/4—3» дает

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{q_N^3}{q_N^2(1-p_N^6)+p_N^4[1+q_N^3-(1-q_N^3)^{M'-1}]} \approx q_N, \\ P_1 &= P_0 p_N, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ P &= P_0 p_N^4 = P_{\text{по}}, \\ \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}_2 = P_4, \\ \mathcal{P}_2 &= P_4 (1-q_N^3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \mathcal{P}_{M'} &= P_4 (1-q_N^3)^{M'-2}. \end{aligned}\right\} \quad (3.68)$$

Формулы (3.66), (3.67) и (3.68), полученные для частных случаев программ «3/3—2», «4/4—2», «4/4—3», легко обобщаются на случай произвольной программы «m/m—k». Для общего случая формулы для предельных

вероятностей состояний двухкаскадного автомата записываются в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{q_N^k}{q_N^{k-1}\left(1-p_N^{m+1}+p_N^m\left[1+(k-2)\,q_N^k-(1-q_N^k)^{M'-(k-2)}\right]\right)},\\
P_1 &= P_0 p_N,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
P_m &= P_0 p_N^m,\\
\mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}_2 = \ldots = \mathcal{P}_{k-1} = P_m,\\
\mathcal{P}_k &= P_m\left(1-q_N^k\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathcal{P}_{M'} &= p_m\left(1-q_N^k\right)^{M'-(k-1)},
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.69)
$$

где m — число состояний 1-го каскада автомата (исключая нулевое состояние, которое является общим для обоих каскадов);

M' — число состояний 2-го каскада автомата (емкость накопителя);

к — критерий фиксации конца пачки.

Формулы (3.69) дают возможность производить анализ воздействия стационарных помех на двухкаскадные автоматы с программой работы «m/m—к». Однако методика анализа легко применима для автоматов подобного типа с произвольным числом каскадов и произвольной программой работы.

2. Рассмотрим теперь воздействие стационарных помех на двухкаскадный автомат, пропрамма работы которого состоит в следующем: обнаружение сигнала фиксируется при появлении l единиц на m сложных позициях, возвращение в исходное состояние (после обнаружения) происходит при появлении серии из к нулей, а также при переполнении накопителя. Кратко программа работы такого автомата записывается в виде «l/m—к».

Возьмем, для примера, случай двухкаскадного автомата, работающего по программе «3/4—2».

Первый каскад автомата является каскадом обнаружения (см. граф на рис. 3.16). Сигнал об обнаружении пачки выдается при достижении автоматом состояния *6*, Достижение состояния 6 возможно только при наличии

в последовательности входных сигналов в одной из трех комбинаций 111, 1011, 1101, содержащих три единицы на четырех позициях. Возвращение в нуль (без обнаружения) происходит при появлении серии из двух нулей.

Второй каскад представляет собой накопитель позиций между моментом обнаружения пачки и моментом выполнения критерия конца пачки по двум нулям подряд.

Здесь уместно подчеркнуть, что хотя возвращение в исходное состояние, как первого, так и второго каскада автомата происходит при появлении серии из двух нулей, реализуемые в этих каскадах программы накопления различны. Первый каскад переходит в узловое состояние, соответствующее обнаружению пачки (состояние *6* на рис. 3.16), только при появлении указанных выше комбинаций из нулей и единиц и не достигает этого состояния при наличии других комбинаций, не содержащих серии из двух нулей (0101, 1010). Второй же каскад накапливает все комбинации, не содержащие серии из двух нулей.

Матрица вероятностей перехода рассматриваемого автомата имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} q_N & p_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_N & q_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_N & p_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_N & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_N & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q_N^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-q_N^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \quad (3.70)$$

Пользуясь теперь общим правилом нахождения предельных вероятностей состояний, получим систему уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
&P_0+P_1+P_2+\ldots+P_M=1,\\
&P_1=P_0p_N,\\
&P_2=P_1p_N,\\
&P_3=(P_1+P_4)\,q_N,\\
&P_4=P_3p_N,\\
&P_5=P_2q_N,\\
&P_6=(P_2+P_4+P_5)\,p_N,\\
&\mathrm{P}\ \ =P\\
&P_8=P_7(1-q_N^2),\\
&P_9=P_8(1-q_N^2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_M=P_{M-1}(1-q_N^2),
\end{aligned}\right\} \qquad (3.71)
$$

Решение этой системы уравнений получается в виде

$$
\left.\begin{aligned}
&P_0=\frac{1}{\dfrac{(1-p_N^3)+q_Np_N^2(1-q_N^2p_N^2)}{q_N(1-p_Nq_N)}+P'_6\left[\dfrac{1-(1-q_N^2)^{M-6}}{q_N^2}\right]},\\
&\mathrm{P}_1=P_0p_N,\ P_2=P_0p_N^2,\ P_3=P_0\frac{q_Np_N}{1-p_Nq_N},\\
&P_4=P_0\frac{q_Np_N^2}{1-p_Nq_N},\quad P_5=P_0q_Np_N^2,\\
&P_6=P_0\left(p_N^3+\frac{q_Np_N^3}{1-p_Nq_N}+q_Np_N^3\right)=P_0P'_6,\\
&P_7=P_6,\ P_8=P_6(1-q_N^2)\ldots P_M=P_6(1-q_N^2)^{M-7}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.72)
$$

При малых значениях $p_N \ll 1$ с большой степенью приближения можно считать

$$
P_0 \approx (1-p_Nq_N)\,q_N\,. \qquad (3.73)
$$

Вероятность ложного обнаружения при рассматриваемой программе работы автомата равна вероятности до-

стижения состояния 6 в области помехи. Эта вероятность с учетом (3.73) равна

$$P_{\text{ло}} \approx q_N (1 - p_N \; Я_H) \left(p_N^3 + \frac{q_N p_N^3}{1 - p_N q_N} + q_N p_N^3 \right)$$

или, после преобразований,

$$P_{\text{ло}} \approx q_N \; p_N^3 \; [(1 - p_N q_N)(1 + q_N) + q_N]. \qquad (3.74)$$

Аналогично могут быть получены формулы для предельных вероятностей состояний автомата, работающего

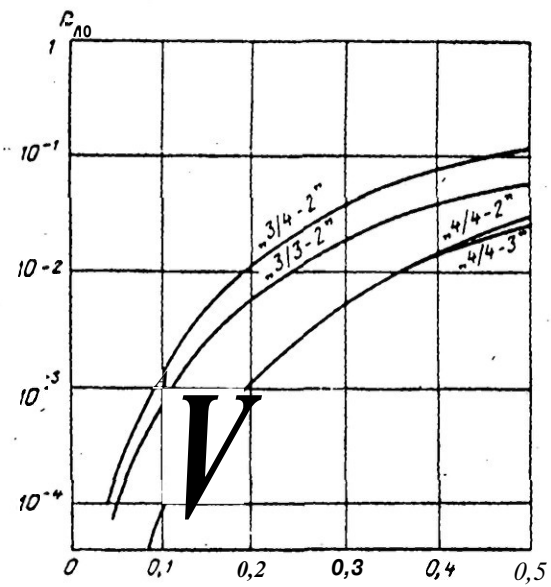


Рис. 3.24. Вероятность ложного обнаружения для программных обнаружителей.

по любой другой программе типа «*l*/*m*—k». К сожалению, формулы в общем виде получаются чрезвычайно громоздкими и не наглядными.

На рис. 3.24 изображены графики вероятности ложного обнаружения для программ работы автомата «3/3—2», «4/4—2», «4/4—3» и «3/4—2» в функции от вероятности p_N превышения помехой уровня квантования.

Эти графики дают наглядное представление о фильтрующей способности различных программ обработки. Чем больше m, тем меньше вероятность ложного обнаружения при одних и тех же значениях p_N. Программы «l/m» и, в частности, «$m-1/m$» хуже фильтруют помеху, чем программы «m/m». Влияние к начинает сказываться только при больших $p_N \geqslant 0{,}3-0{,}4$, выходящих за пределы практически допустимых значений. Поэтому в большинстве случаев влиянием критерия фиксации конца пачки на вероятность ложного обнаружения можно пренебречь.

В заключение анализа воздействия помех на цифровые обнаружители заметим, что наряду с такой общепринятой характеристикой фильтрующей способности обнаружителей, как вероятность ложного обнаружения $P_{\text{ло}}$, часто необходимо знать среднее число ложных отметок р, фиксируемых на выходе обнаружителя в единицу времени. Среднее число ложных отметок в единицу времени является наиболее наглядной характеристикой для оценки фильтрующей способности конкретных программ обнаружения и ее необходимо знать для предъявления требований к последующим звеньям обработки. Так, для предъявления требований к ЦВМ вторичной обработки по емкости ЗУ и быстродействию необходимо знать, наряду с ожидаемым числом истинных целей, также и число ложных отметок, поступающих на вход этой машины в единицу времени. Или, наоборот, зная производительность ЦВМ вторичной обработки и число обрабатываемых целей можно предъявить требование к устройству первичной обработки по допустимому числу ложных отметок, выдаваемых в единицу времени.

Если рассматривать одно кольцо дальности (один интервал временного квантования), то среднее число ложных отметок в этом кольце будет

$$N_k = B_k P_{\text{ло}}(k),$$

где B_k — число позиций в k-м кольце дальности (одинаковое для всех колец дальности),

$P_{\text{ло}}(k)$ — вероятность ложного обнаружения в этом же кольце дальности (которая также одинакова для всех колец дальности).

Среднее число ложных отметок за одну секунду в одном кольце дальности будет

$$\rho_k = F_п \cdot P_{л0}(k), \tag{3.75}$$

где $F_п$ — частота повторения зондирующих импульсов.

Если число колец дальности равно b, то среднее число ложных отметок за одну секунду во всей зоне обзора РЛС будет

$$\rho_\Sigma = \rho_k \cdot b. \tag{3.76}$$

3.3.4. Вероятность обнаружения сигнала цифровым накопителем

При анализе вероятности обнаружения полезного сигнала (пачки) необходимо учитывать следующие особенности:

1. В области сигнала накопление единиц начинается не с нуля, а с любого уровня (числа), накопленного за счет помех к моменту поступления сигнала. Если цифровой автомат анализирует входные сигналы во всем кольце дальности (вкруговую) или в широком азимутальном стробе, то в качестве M-мерного вектора вероятностей исходного состояния накопителя перед поступлением полезного сигнала можно принять вектор $P = [P_0 P_1, \ldots, P_M]$ предельных вероятностей состояний накопителя в области помехи. Вектор вероятностей исходного состояния накопителя в дальнейшем будем обозначать $P^{(0)} = [P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \ldots, P_M^{(0)}]$, где значок $^{(0)}$ означает, что эти вероятности состояний имеют место на нулевой позиции сигнальной пачки.

2. Последовательность дискретных состояний автомата в области сигнала также образуют цепь Маркова в том смысле, что условная вероятность достижения любого состояния накопителя в области сигнала определяется только вероятностью его предыдущего состояния и вероятностью перехода в следующее состояние независимо от того, каким образом было достигнуто предыдущее состояние. Однако здесь вероятность перехода зависит от номера позиции, так что цепь Маркова является неоднородной. Для неоднородных цепей Маркова не изучено асимптотическое поведение вероят-

ностей перехода. Поэтому изучение процесса накопления в области сигнала возможно только по этапам (шагам) при переходе на каждую новую позицию.

Рассмотрим процесс накопления пачки импульсов в случае простейшего критерия возвращения накопителя в исходное состояние по одному нулю.

Обозначим через $p_{ij}(\lambda)$ вероятность перехода из состояния i в состояние j за один шаг на λ-й позиции сигнальной пачки. Тогда матрица вероятностей перехода в результате первого шага (на 1-й позиции сигнальной пачки) будет

$$A_{MM}(1)=\left\|\begin{array}{cccccc} p_{00}(1) & p_{01}(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{10}(1) & 0 & p_{12}(1) & 0 & \dots & 0 \\ p_{20}(1) & 0 & 0 & p_{23}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M-1,0}(1) & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{M-1,M}(1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right\|. \tag{3.77}$$

Элементы матрицы (3.77) на 1-м шаге имеют значения

$$p_{i0}(1)=q_S(1)=q_1,$$

$$p_{i,i+1}(1)=p_S(1)=p_1,$$

где p_1 — вероятность единицы на первой позиции пачки;

q_1 — вероятность нуля на первой позиции пачки.

Вектор вероятностей состояний накопителя после приема первого импульса пачки определяется умножением справа вектора вероятностей исходных состояний на матрицу переходов, т. е.

$$P^{(1)}=[P_0^{(1)}, P_1^{(1)}, \dots, P_M^{(1)}]=$$

$$=[P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \dots, P_M^{(0)}]\times\left\|\begin{array}{ccccc} q_1 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 & 0 & 0 & \dots & p_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right\|.$$

Вычисления дают:

$$\left.\begin{aligned} P_0^{(1)} &= q_1 + P_M^{(0)} p_1, \\ P_1^{(1)} &= P_0^{(0)} p_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_M^{(1)} &= P_{M-1}^{(0)} p_1. \end{aligned}\right\} \qquad (3.78)$$

После приема второго импульса пачки имеем

$$p_{i0}(2) = q_S(2) = q_2,$$

$$p_{i,i+1}(2) = p_S(2) = p_2.$$

Теперь матрица переходов имеет вид:

$$A_{MM}(2) = \left\| \begin{matrix} q_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & \dots & p_2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad (3.79)$$

а вектор вероятностей состояний накопителя

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}^{(1)} \boldsymbol{A}_{MM}(2).$$

Проделав вычисления, получим

$$\left.\begin{aligned} P_0^{(2)} &= q_2 + P_M^{(1)} p_2, \\ P_1^{(2)} &= P_0^{(1)} p_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_M^{(2)} &= P_{M-1}^{(1)} p_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.80)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для следующих $\lambda = 3, 4, \dots, N_0$ позиций, где N_0 — число импульсов в пачке, получим окончательные рекуррентные формулы для

вычисления вероятностей состояний после приема λ-го импульса пачки

$$\left.\begin{aligned} P_0^{(\lambda)} &= q_\lambda + P_M^{(\lambda-1)} p_\lambda; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_i^{(\lambda)} &= P_{i-1}^{(\lambda-1)} p_\lambda; \\ \lambda &= 1, 2, \ldots, N_0; \\ & M. \end{aligned}\right\} \qquad (3.81)$$

Аналогично путем пошагового решения можно получить вероятности состояний накопителя при возвращении в исходное состояние с наступлением произвольного рекуррентного события ε_k.

Пусть после $(\lambda-1)$-го шага получен вектор вероятностей состояний $\boldsymbol{P}^{(\lambda-1)} = [P_0^{(\lambda-1)} P_1^{(\lambda-1)} \ldots P_M^{(\lambda-1)}]$. Матрица вероятностей переходов из состояния $\lambda-1$ в состояние λ для случая, когда ε_k — серия из двух нулей, имеет вид:

$$\boldsymbol{A}_{MM}(\lambda) = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_2(\lambda) & 0 & 1-\varepsilon_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_2(\lambda) & 0 & 0 & \ldots & 1-\varepsilon_2(\lambda) \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|, \qquad (3.82)$$

где

$$\varepsilon_2(\lambda) = q_\lambda q_{\lambda-1}, \quad \varepsilon_2(1) = q_0 q_1, \quad q_0 = q_N.$$

Умножая справа вектор-строку вероятностей состояний на $\lambda-1$ позиции на матрицу вероятностей перехода (3.82), после несложных вычислений получим

$$\left.\begin{aligned} P_0^{(\lambda)} &= \varepsilon_2(\lambda)[1 - P_0^{(\lambda-1)}] + P_M^{(\lambda-1)}[1-\varepsilon_2(\lambda)], \\ P_1^{(\lambda)} &= P_0^{(\lambda-1)}, \quad P_2^{(\lambda)} = P_1^{(\lambda-1)}[1-\varepsilon_2(\lambda)], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_M^{(\lambda)} &= P_{M-1}^{(\lambda-1)}[1-\varepsilon_2(\lambda)]. \end{aligned}\right\} \qquad (3.83)$$

Если ε_k — серия из трех нулей, то матрица вероятностей перехода из состояния $\lambda-1$ в состояние λ имеет вид

$$A_{MM}(\lambda)=\left\|\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_3(\lambda) & 0 & 0 & 1-\varepsilon_3(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_3(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\varepsilon_3(\lambda) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right\|, \quad (3.84)$$

где

$$\varepsilon_3(\lambda)=q_{\lambda-2}q_{\lambda-1}q_\lambda,\ \varepsilon_3(1)=q_N^2 q_1,\ \varepsilon_3(2)=q_N q_1 q_2.$$

Соответствующие формулы для вероятностей состояний на λ-й позиции имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} P_0^{(\lambda)}=[1-P_0^{(\lambda-1)}-P_0^{(\lambda-2)}]\,\varepsilon_3(\lambda)+P_M^{(\lambda-1)}\,[1-\varepsilon_3(\lambda)], \\ P_1^{(\lambda)}=P_0^{(\lambda-1)}, \\ P_2^{(\lambda)}=P_1^{(\lambda-1)}, \\ P_3^{(\lambda)}=P_2^{(\lambda-1)}\,[1-\varepsilon_3(\lambda)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_M^{(\lambda)}=P_{M-1}^{(\lambda-1)}[1-\varepsilon_3(\lambda)]. \end{array}\right\} \quad (3.85)$$

Теперь, зная вероятности состояний накопителя, можно вычислить вероятность обнаружения пачки. Для этого воспользуемся следующим очевидным рекуррентным соотношением:

$$P_{\text{обн}}(\lambda)=P_{\text{обн}}(\lambda-1)+P_{\mathscr{L}_0}^{(\lambda)}[1-P_{\text{обн}}(\lambda-\mathscr{L}_0-1)],$$

где $P_{\text{обн}}(\lambda)$ — вероятность обнаружения на λ-й позиции сигнальной пачки;

$P_{\text{обн}}(\lambda-1)$ — вероятность обнаружения на $(\Lambda-1)$-й позиции;

$P_{\mathscr{L}_0}^{(\lambda)}$ — вероятность обнаружения впервые на λ-й позиции (вероятность накопить на λ-й позиции $\mathscr{L}_0$ единиц впервые в области сигнала).

Вычисление $P_{обн}(\lambda)$ производится последовательно, начиная с первой и заканчивая N_0 позиций. Полная вероятность обнаружения пачки равна

$$P_{обн}(N_0) = P_{обн}(N_0 - 1) + P_{\mathcal{L}_0}^{(N_0)}[1 - P_{обн}(N_0 - \mathcal{L}_0 - 1)]. \quad (3.86)$$

Формулы (3.81), (3.83), (3.85) и (3.86) позволяют вычислять вероятности состояний накопителя и вероятности обнаружения сигнала для любой произвольной формы огибающей пачки.

Порядок расчета вероятности обнаружения следующий:

I. По известному расчетному числу импульсов в пачке N_0 определяется оптимальный порог накопителя

$$\mathcal{L}_0 \approx 1{,}5\sqrt{N_0}.$$

2. По заданным допустимой вероятности ложного обнаружения $P_{ло}$ и критерию сброса к, пользуясь графиками рис. 3.19 (при к=2) или графиками рис. 3.20 (при к=3), определяется допустимая вероятность p_N превышения порога x_0 помехой. По найденному p_N определяется оптимальный порог x_0 по формуле

$$x_0 = \sqrt{-2 \ln p_N}$$

или по таблицам [29].

3. Определяются предельные вероятности состояний накопителя в области помехи. Эти вероятности являются вероятностями начального состояния накопителя перед приемом пачки сигнальных импульсов.

4. Определяются a_λ по известной функции огибающей $g(a_\lambda)$ для различных a_0. Функция $g(a_\lambda)$ задается заранее.

5. По таблицам [29] определяются вероятности превышения нормированными сигналами a_λ порога x_0 на всех позициях сигнальной пачки.

6. Последовательным применением формул (3.83) или (3.85), в зависимости от критерия сброса к, находятся вероятности состояний счетчика-накопителя после приема всех импульсов пачки.

7. По рекуррентной формуле (3.86) определяется полная вероятность обнаружения пачки.

На рис. 3.25 приведены графики зависимости вероятности обнаружения пачки с $N_0 = 11$ от отношения сигнала к помехе a_0 для двух значений вероятности ложной тревоги. Графики рассчитывались по изложенной выше методике.

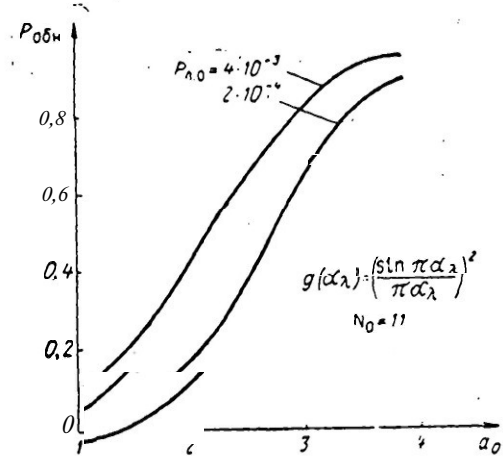


Рис. 3.25. Вероятность обнаружения пачки цифровым накопителем.

Для случая накопления автоматом, фиксирующим начало пачки по первой единице, а конец по к пропускам подряд, задача определения вероятности обнаружения решается аналогичным образом.

Если, например, $k=2$, то формулы для вероятностей состояний на λ позиции имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0^{(\lambda)} = q_\lambda P_0^{(\lambda-1)} + \varepsilon_2(\lambda)\,(1 - P_0^{(\lambda-1)} - P_1^{(\lambda-1)}) + \\
&\qquad + (1 - \varepsilon_2(\lambda))\, P_M^{(\lambda-1)}, \\
&P_1^{(\lambda)} = P_2^{(\lambda)} = P_0^{(\lambda-1)} p_\lambda, \\
&P_3^{(\lambda)} = P_2^{(\lambda-1)}[1 - \varepsilon_2(\lambda)], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&P_M^{(\lambda)} = P_{M-1}^{(\lambda-1)}[1 - \varepsilon_2(\lambda)].
\end{aligned}\right\} \quad (3.87)$$

Формулы для случаев других к могут быть получены по соответствующим матрицам переходных вероятностей. Вероятность обнаружения подсчитывается по формуле (3.86).

3.3.5. Вероятность обнаружения сигнала цифровым программным обнаружителем

Так же, как и в случае автоматов-накопителей, вероятности состояний в области сигнала двухкаскадного автомата с раздельными критериями обнаружения и накопления определяются путем последовательного (пошагового) умножения справа вектора вероятностей состояний на предыдущем шаге на матрицу вероятностей перехода. В качестве вектора вероятностей исходных состояний перед приемом первого импульса пачки берется вектор предельных вероятностей состояний в области помехи.

1. Пусть, как и прежде, известен вектор вероятности состояний на $\lambda-1$ шаге (при приеме $\lambda-1$ импульса пачки). Тогда для случая автомата с программой работы «m/m—k» вектор вероятностей состояний на λ шаге определяется из выражения

$$P^{(\lambda)} = P^{(\lambda-1)} A_{MM}(\lambda).$$

Матрица вероятностей перехода для программы «m/m—k» имеет вид:

$$A_{MM}(\lambda) = \left\| \begin{array}{cccccccc} q_\lambda p_\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_\lambda & 0 & p_\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_\lambda & 0 & 0 & p_\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_m^\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\varepsilon_m^\lambda & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_m^\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\varepsilon_m^\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \begin{array}{l} m-1 \\ \\ \\ \\ k-1, \\ \\ \\ \\ M'-(k-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

(3.88)

где m — критерий обнаружения (емкость 1-го каскада);
к — критерий сброса (возвращения в нуль);
M' — емкость накопителя.

Произведя операции перемножения вектора $\boldsymbol{P}^{(\lambda-1)}$ на матрицу $\boldsymbol{A}_{MM}(\lambda)$, получим систему уравнений для определения составляющих вектора $\boldsymbol{P}^{(\lambda)}$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0^{(\lambda)} = q_\lambda \sum_{l=0} P_l^{(\lambda-1)} + \varepsilon_k(\lambda) \sum_{\mathcal{L}=k-1} \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{(\lambda-1)} + \mathcal{P}_{M'}^{(\lambda-1)},\\
&P_1^{(\lambda)} = P_0^{(\lambda-1)} p_\lambda,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_m^{(\lambda)} = P_{m-1}^{(\lambda-1)} p_\lambda = P_{\text{обн}}(\lambda),\\
&P_{m+1}^{(\lambda)} = P_m^{(\lambda-1)} = \mathcal{P}_1^{(\lambda)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{m+k-1}^{(\lambda)} = P_{m+k-2}^{(\lambda-1)} = \mathcal{P}_{k-1}^{(\lambda)},\\
&P_{m+k}^{(\lambda)} = P_{m+k-1}^{(\lambda-1)}[1-\varepsilon_k(\lambda)] = \mathcal{P}_k^{(\lambda)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{m+M'}^{(\lambda)} = P_{m+M'-1}^{(\lambda-1)}[1-\varepsilon_k(\lambda)] = \mathcal{P}_{M'}^{(\lambda)}.
\end{aligned}\right\} \quad (3.89)$$

Путем последовательной подстановки результатов решения на предыдущем шаге в систему уравнений (3.89) находится вероятность состояния автомата на каждой позиции $(\lambda = 1 - N_0)$ сигнальной пачки.

Вероятность обнаружения пачки на каждой λ-й позиции равна, очевидно, вероятности события, состоящего в том, что на этой позиции первый каскад автомата перейдет в свое последнее m-е состояние. Эта вероятность равна $P_m^{(\lambda)}$.

Вероятность обнаружения хотя бы на одной позиции пачки определяется рекуррентными формулами

$$\left.\begin{aligned}
&P_{\text{обн}}(\lambda) = P_{\text{обн}}(\lambda-1) + P\ \ [1 - P_{\text{обн}}(\lambda-m-1)],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{\text{обн}} = P_{\text{обн}}(N_0) = P_{\text{обн}}(N_0-1) +\\
&\qquad + P_m^{(N_0)}[1 - P_{\text{обн}}(N_0-m-1)],
\end{aligned}\right\} \quad (3.90)$$

где N_0 — число импульсов в пачке.

2. Для автомата, работающего по программе «l/m—k», вероятность обнаружения определяется так же, как и в ранее рассмотренных случаях. Однако здесь нецелесообразно (из-за громоздкости) записывать формулы в общем виде. Решение целесообразно искать отдельно для каждой конкретной программы работы первого каскада автомата.

Так, для программы работы «3/4—k» вероятность состояний накопителя на λ-й позиции сигнальной пачки определяется из выражений

$$
\left.
\begin{aligned}
P_0^{(\lambda)} &= q_\lambda (P_0^{(\lambda-1)} + P_3^{(\lambda-1)} + P_5^{(\lambda-1)}) + \\
&\quad + \varepsilon_k(\lambda) \sum_{\mathcal{L}=k-1}^{M'-1} \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{(\lambda-1)} + \mathcal{P}_{M'}^{(\lambda-1)}, \\
P_1^{(\lambda)} &= P_0^{(\lambda-1)} p_1, \\
P_2^{(\lambda)} &= P_1^{(\lambda-1)} p_1, \\
P_3^{(\lambda)} &= (P_1^{(\lambda-1)} + P_4^{(\lambda-1)}) p_1, \\
P_4^{(\lambda)} &= P_3^{(\lambda-1)} p_1, \\
P_5^{(\lambda)} &= P_2^{(\lambda-1)} q_1, \\
P_6^{(\lambda)} &= (P_2^{(\lambda-1)} + P_4^{(\lambda-1)} + P_5^{(\lambda-1)}) p_1 + P_{\text{обн}}(\lambda), \\
\mathcal{P}_1^{(\lambda)} &= P_{\text{обн}}(\lambda - 1) = \mathcal{P}^{(\lambda-1)} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\mathcal{P}_{k-1}^{(\lambda)} &= \mathcal{P}_{k-2}^{(\lambda-1)}, \\
\mathcal{P}_k^{(\lambda)} &= \mathcal{P}_{k-1}^{(\lambda-1)} [1 - \varepsilon_k(\lambda)], \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\mathcal{P}_{M'}^{(\lambda)} &= \mathcal{P}_{M'-1}^{(\lambda-1)} [1 - \varepsilon_k(\lambda)],
\end{aligned}
\right\} \quad (3.91)
$$

где $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{M'}$ — вероятности состояний накопителя после обнаружения.

Приведенная система уравнений позволяет последовательно находить вероятности всех состояний по каждой позиции. Зная вероятности состояний на каждой позиции, можно определить вероятность обнаружения пач-

ки. В данном случае вероятность обнаружения на λ-й позиции $P_{обн}(\lambda)=P_6^{(\lambda)}$. Применяя затем формулы (3.90), можно подсчитать полную вероятность обнаружения пачки, состоящей из N_0 сигнальных импульсов.

Аналогичным образом составляются выражения для вероятностей состояния накопителя на λ-й позиции, при других программах обработки «l/m—k».

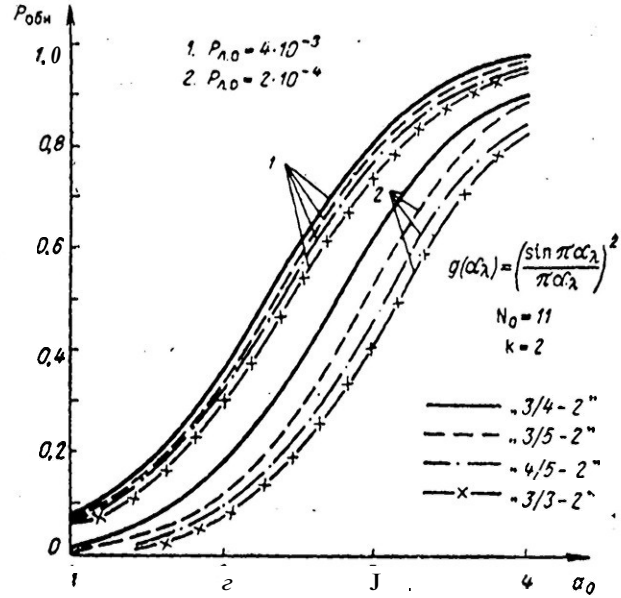


Рис. 3.26. Вероятность обнаружения пачки программными обнаружителями.

На рис. 3.26 построены графики вероятности обнаружения для нескольких программ обработки. Сравнение этих графиков показывает, что наилучшей с точки зрения вероятности обнаружения является программа «3/4—2». Однако все рассмотренные программы имеют близкие качественные характеристики по вероятности обнаружения, особенно при относительно большой допустимой вероятности ложного обнаружения ($P_{л0}=4\cdot10^{-3}$).

Сравнение графиков на рис. 3.25 с графиками на рис. 3.26 показывает, что при $P_{л0}=4\cdot10^{-3}$ накопитель

обеспечивает несколько большую вероятность правильного обнаружения по сравнению с программным обнаружителем «3/4—2», а при $P_{л0}=2\cdot10^{-4}$ сравниваемые графики примерно совпадают.

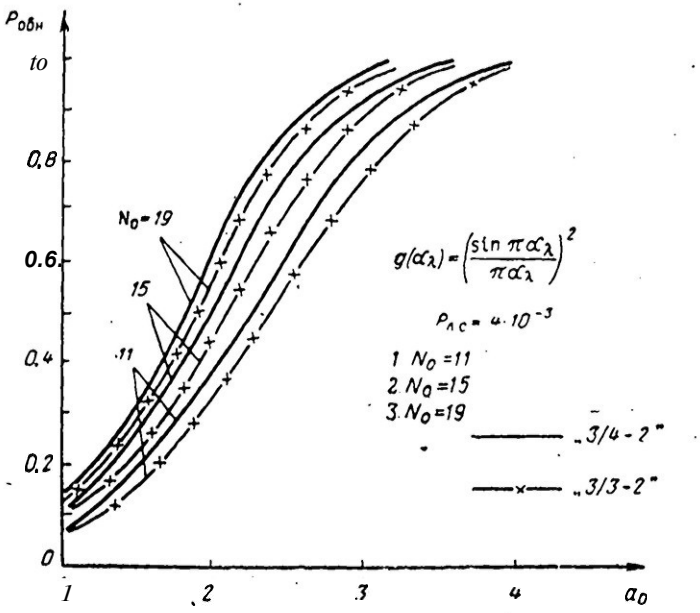


Рис. 3.27. Зависимость вероятности обнаружения от числа импульсов в пачке N_0.

На рис. 3.27 построены графики обнаружения программными обнаружителями «3/3—2» и «3/4—2» при разных N_0. Эти графики иллюстрируют рост вероятности обнаружения с увеличением числа импульсов в пачке.

3.3.6. Точность оценки азимута при обнаружении пачки с помощью цифровых автоматов

Как уже отмечалось в п. 3.2.1 при цифровом обнаружении центр пачки определяется по азимутальному положению сигналов, фиксирующих начало и конец обнаруженной пачки. Если β_λ —азимут позиции, на которой произошло обнаружение пачки, а β_μ — азимут позиции на ко-

торой зафиксирован конец этой же пачки, то азимут середины обнаруженной пачки (азимут цели) определяется по формуле

$$\beta_{ср} = \beta^*_0 = \frac{\beta_\lambda + \beta_\mu}{2}. \qquad (3.92)$$

Так как β_λ и β_μ являются случайными величинами, то при определении азимута цели по формуле (3.92) вносятся ошибки измерения $\Delta\beta$.

На рис. 3.28 показана одна реализация пачки из 11 импульсов, ограниченная в квантизаторе на уровне x_0

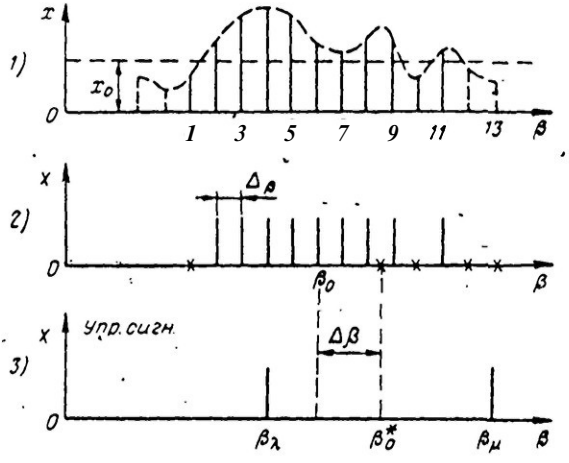


Рис. 3.28. К определению точности оценки азимута цели.

(эпюра *1*) и соответствующая последовательность квантованных сигналов, т. е. нулей и единиц (эпюра *2*). Если обнаружение пачки происходит по серии из трех единиц, а конец пачки фиксируется на позиции, где получена серия из двух нулей (программа обнаружения «3/3—2»), то изображенная на рис. 3.28 пачка обнаруживается на *4* позиции, а ее конец фиксируется в области помехи на *13* позиции (эпюра *3*). При этом вносится ошибка оценки азимута $\Delta\beta = 2{,}5\Delta_\beta$, где Δ_β — угловая дискретность импульсов в пачке.

Пусть отсчет координаты β ведется от нулевой позиции пачки. Тогда измеренный азимут равен

$$\beta^*_0 = \frac{\lambda + \mu}{2} \Delta_\beta, \tag{3.93}$$

где λ — номер позиции, на которой зафиксировано начало пачки;

μ — номер позиции, на которой зафиксирован конец пачки.

Истинный азимут середины пачки определяется в этом случае по формуле

$$\beta_0 = \frac{N_0 + 1}{2} \Delta\beta, \tag{3.94}$$

где No — расчетное число импульсов в пачке.

Ошибка оценки азимута равна

$$\Delta\beta = \pm \left(\frac{\lambda + \mu}{2} - \frac{N_0 + 1}{2} \right) \Delta_\beta. \tag{3.95}$$

Формулой (3.95) определяется суммарная ошибка оценки азимута, включающая как случайную, так и систематическую составляющие.

Систематическая ошибка оценки азимута зависит от принятой программы обработки пачки и состоит из компенсируемой и некомпенсируемой частей. Компенсируемая часть систематической ошибки обусловлена тем, что сигналы начала и конца пачки выдаются только после выполнения программ накопления и сброса. В общем случае программ обработки «*m*/*m*—k» или «*l*/*m*—k» смещение вправо момента фиксации начала пачки равно *m*—1 позиций, а смещение в ту же сторону момента фиксации конца пачки равно k позиций.

Суммарное систематическое смещение центра обнаруженной пачки равно

$$\Delta\beta_{\text{сист}} = \frac{m + k - 1}{2}.$$

В цифровых накопителях, фиксирующих начало пачки по первому импульсу, а конец по наличию (после единицы) первой серии из к нулей, компенсируемое систематическое смещение центра пачки равно

$$\Delta\beta_{сист} = \frac{k}{2}*$$

- Аналогичным образом можно определить компенсируемое смещение и для других программ обработки. Компенсируемое смещение легко устранить схемным путем.

Наряду с компенсируемой составляющей некоторые программы обработки вносят еще некомпенсируемые систематические ошибки, обусловленные несимметричностью этих программ. Дело в том, что программа обнаружения, как правило, «жестче», чем программа фиксации конца пачки, вследствие чего имеют место неодинаковые условия фиксации начала и конца пачки. Например, при программе «*m*/*m*—k» до обнаружения не допускается пропусков единиц в пачке, а после обнаружения допускается k—1 пропуск, что приводит к укорочению левой части пачки (относительно центра) и к удлинению ее правой части.

Несимметричность программ обработки не свойственна цифровым накопителям, фиксирующим начало пачки по первому импульсу, а также программе «*m*/*m*—1». Все другие обнаружители имеют несимметричную программу обработки и вносят некомпенсируемую систематическую ошибку.

Некомпенсируемая систематическая ошибка зависит от отношения сигнала к помехе и, как показали подробные исследования, для логик «*m*/*m*—2» и «*l*/*m*—2», может достигать значений, соизмеримых со среднеквадратичными значениями случайной составляющей ошибки.

В дальнейшем некомпенсируемая составляющая систематической ошибки будет относиться к случайным ошибкам.

Случайные ошибки оценки азимута обусловлены, главным образом, несимметричностью пропусков сигнальных импульсов на краях пачки, где отношение сигнала к помехе мало.

Дисперсия случайной ошибки оценки азимута определяется дисперсией оценки середины пачки по формуле (3.93). В соответствии с этой формулой имеем

$$D\left(\frac{\beta^*_0}{\Delta_\beta}\right)=\frac{\sigma^2_\beta}{\Delta^2_\beta}=D\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)=\frac{1}{4}[D(\lambda)+D(\mu)+2R(\lambda,\ \mu)],$$

где $R(\lambda, \mu)$ — корреляционный момент связи случайных величин λ и μ.

Используя известное из теории вероятностей соотношение

$$D(x)=M(x^2)-[M(x)]^2,$$

получим

$$=\frac{1}{4}\{M(\lambda^2)-[M(\lambda)]^2+M(\mu^2)-[M(\mu)]^2+2R(\lambda,\ \mu)\}. \tag{3.96}$$

В общем случае входящие в формулу (3.96) слагаемые определяются из следующих соотношений:

$$M(\lambda^2)=\frac{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\lambda^2 P_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}P_\lambda};\quad M(\mu^2)=\frac{\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\infty}\mu^2 P_\mu}{\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\infty}P_\mu}. \tag{3.97}$$

$$M(\lambda)=\frac{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\lambda P_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}P_\lambda};\quad M(\mu)=\frac{\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\infty}\mu P_\mu}{\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\infty}P_\mu}. \tag{3.98}$$

$$R(\lambda,\ \mu)=M(\lambda,\ \mu)-M(\lambda)\ M(\mu). \tag{3.99}$$

$$M(\lambda,\ \mu)=\frac{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\infty}\lambda\mu P_{\lambda\mu}}{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\infty}P_{\lambda\mu}}, \tag{3.100}$$

где P_λ — вероятность фиксации начала пачки на Я-й позиции;

P_μ — вероятность фиксации конца пачки на μ-й позиции;

$P_{\lambda\mu}$ — совместная вероятность одновременной фиксации начала пачки на Я-й позиции, а конца на μ-й позиции.

Вероятность $P_{\lambda\mu}$ можно представить в одном из следующих видов:

$$P_{\lambda\mu} = P_\lambda P(\mu/\lambda) = P_\mu P(\lambda/\mu), \qquad (3.101)$$

где $P(\mu/\lambda)$ — условная вероятность фиксации конца пачки на μ-й позиции при условии, что начало пачки заведомо зафиксировано на Я-й позиции.

Аналогичным образом определяется условная вероятность $P(\lambda/\mu)$.

Если в исследуемом кольце дальности находится только одна пачка сигнальных импульсов, то справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} P_{\lambda\mu} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} P_\lambda P(\mu/\lambda) = P_\lambda \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} P(\mu/\lambda) = P_\lambda .$$

Аналогично

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} P_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} P_\mu P(\lambda/\mu) = P_\mu \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} P(\lambda/\mu) = P_\mu .$$

Следовательно,

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} P_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} P_\lambda = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} P_\mu = \Pi .$$

Таким образом, $1/\Pi$ является общим нормирующим множителем в формулах (3.97), (3.98) и (3.100). Численная величина П равна среднему числу начал (концов), фиксируемых в пачке. При отсутствии совместных ситуаций, удовлетворяющих критерию обнаружения пачки, $\Pi = P_{обн}$. Однако при большом числе импульсов в пачке $\Pi > P_{обн}$. Более того, возможны случаи, когда в пачке

могут быть зафиксированы не одно, а несколько начал (концов), что соответствует «расщеплению» пачки на два или несколько обнаруживаемых «осколков». В этом случае $\Pi > 1$.

Подставляя выражения (3.97), (3.98) и (3.99) в формулу (3.96), получим для дисперсии ошибок оценки азимута следующую формулу:

$$\frac{\sigma_\beta^2}{\Delta_\beta^2}=\frac{1}{4\Pi}\Big[\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\lambda^2 P_\lambda+\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\mu^2 P_\mu+2\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\lambda\mu P_{\lambda\mu}\Big]-$$

$$-\frac{1}{4\Pi^2}\Big[\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\lambda P_\lambda+\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\mu P_\mu\Big]^2. \qquad (3.102)$$

Теперь необходимо уточнить пределы суммирования переменных в формуле (3.102).

При определении вероятности фиксации начала (обнаружения) пачки на λ позиции счет позиции целесообразно начинать с 1-й позиции пачки. При этом число учитываемых предыдущих позиций равно уменьшенной на единицу «ширине» критерия обнаружения. Учет большего числа предыдущих позиций в большинстве практических случаев (при $p_N \leqslant 0{,}2$—$0{,}3$) нецелесообразен, так как вероятность фиксации начала пачки в области помехи ничтожно мала. Из этих же соображений $\lambda_{\text{макс}} = N_0$.

Счет позиций μ, на которых возможна фиксация конца пачки, следует начинать с $\lambda+k$-й позиции и заканчивать на N_0+k-й позиции.

С учетом введенных ограничений на пределы изменения переменных λ и μ формула (3.102) приобретает пригодный для практических расчетов окончательный вид:

$$\frac{\sigma_\beta^2}{\Delta_\beta^2}=\frac{1}{4\Pi}\Big[\sum_{\lambda=1}^{N_0}\lambda^2 P_\lambda+\sum_{\mu=\lambda+k}^{N_0+k}\mu^2 P_\mu+2\sum_{\lambda=1}^{N_0}\sum_{\mu=\lambda+k}^{N_0+k}\lambda\mu P_{\lambda\mu}\Big]-$$

$$-\frac{1}{4\Pi^2}\Big[\sum_{\lambda=1}^{N_0}\lambda \qquad N_0+k$$

Величины P_λ и P_μ вычисляются в процессе определения вероятности обнаружения пачки. Так, при определении азимута по сигналам, выдаваемым накопителем, вероятность P_λ есть вероятность накопления $\mathcal{L}_0$ единиц на Я позиции, а вероятность P_μ —вероятность возвращения накопителя в исходное состояние на μ позиции. В програм-

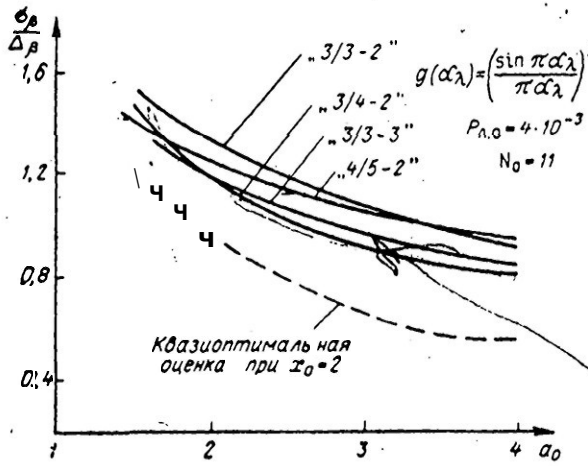


Рис. 3.29. Относительные среднеквадратичные значения ошибок оценки азимута при различных программах обработки пачки.

мных автоматах P_λ есть вероятность достижения состояния, соответствующего выдаче сигнала обнаружения на X позиции, а P_μ — вероятность возвращения автомата в исходное состояние (после выполнения критерия обнаружения) на μ позиции.

На рис. 3.29 и 3.30 приведены рассчитанные по формуле (3.103) графики относительных ошибок оценки азимута для некоторых программ обработки «m/m—k» и «l/m—k». Сравнение этих графиков позволяет сделать следующие выводы:

1. Рассмотренные программы при прочих равных условиях мало отличаются по точности оценки азимута цели.

2. Наилучшей с точки зрения обеспечиваемой точности оценки азимута цели является программа «3/4—2».

не явл. наилуч.

3. С увеличением порога (при одном и том же числе импульсов в лачке) ошибка оценки азимута уменьшается.

4. С увеличением числа импульсов в пачке (при одной и той же вероятности ложного обнаружения) ошибки оценки азимута увеличиваются.

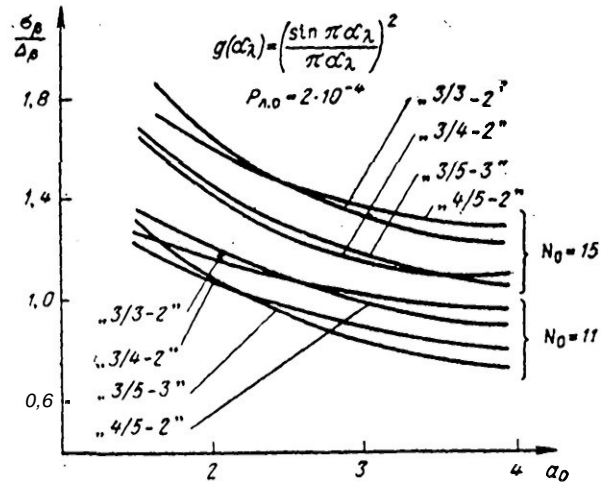


Рис. 3.30. Сравнение точности оценки азимута при $N_0=11$ и $N_0=15$.

Для сравнения рассмотренных программ безвесовой обработки с квазиоптимальным методом обработки на рис. 3,29 пунктирной линией изображен график потенциальных ошибок оценки азимута по пачке квантованных сигналов с $N_0=11$ (см. также рис. 3.7). Примерно одинаковые условия сравнения получаются для программы «3/4—2», так как для этой программы при $P_{л0}=4\cdot10^{-3}$ $x_0\approx2$. Сравнение показывает, что безвесовая обработка примерно на 30—40% хуже по точности, чем квазиоптимальная обработка с помощью несимметричной весовой функции.

4.

Вторичная обработка радиолокационной информации обзорной РЛС

§ 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И НАЗНАЧЕНИЕ ВТОРИЧНОЙ ОБРАБОТКИ

С выхода устройства первичной обработки информации обзорной РЛС выдаются (в виде числовых кодов) координаты мгновенного положения истинных целей, а также координаты так называемых «ложных целей», образованных помехами, прошедшими фильтр первичной обработки. В дальнейшем совокупность сведений о координатах истинной цели на выходе устройства первичной обработки будем называть отметкой от цели. Соответственно совокупность координат «ложной цели» будем называть ложной отметкой.

Отметка от цели приближенно отражает истинное положение цели в момент ее локации. Однако по одной отметке еще нельзя принять достоверное решение об обнаружении цели, тем более нельзя по ней определить параметры траектории ее движения (направление движения, скорость и т. д.), которые необходимы потребителям радиолокационной информации.

В связи с этим становится очевидным, что первичная обработка не решает проблемы получения исчерпывающей информации о целях. Первичная обработка является лишь начальной стадией процесса извлечения информации о целях.

Чтобы принять решение о наличии цели и определить параметры ее траектории, необходимо проанализировать

информацию, полученную за несколько обзоров. Так именно и поступает оператор, наблюдающий за экраном индикатора кругового обзора. Если в какой-либо точке экрана появилась одиночная отметка, оператор фиксирует эту отметку как возможную отметку отдели. Если в следующем обзоре отметка появилась вновь и, кроме того, сдвинулась в каком-либо направлении на некоторое расстояние, то уже имеется основание принять решение об обнаружении цели. Естественно, по трем и более отметкам, полученным в смежных обзорах, вероятность правильного обнаружения будет больше. Одновременно по положению отметок можно определить направление движения цели, а измерив расстояние между соседними отметками, можно рассчитать и скорость движения цели.

Все указанные операции имеют конечной целью определение траектории движения цели. Эти операции принципиально могут быть формализованы и их выполнение может быть возложено на вычислительную машину.

Автоматическая (машинная) обработка координат отметок, полученных за несколько обзоров РЛС для обнаружения и непрерывного слежения за траекториями движения целей, называется вторичной обработкой радиолокационной информации. Характерным для вторичной обработки является использование информации, полученной за несколько обзоров РЛС.

Если в основе первичной обработки лежат статистические отличия полезных сигналов от помех, то для вторичной обработки исходными являются статистические характеристики траекторий радиолокационных целей.

Иногда говорят, что при вторичной обработке используются статистические различия между траекториями целей и «траекториями» помех.

§ 4.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ВТОРИЧНОЙ ОБРАБОТКИ

4.2.1. Статистическая модель движения цели

Суммарный сигнал на входе устройства вторичной обработки можно представить в виде аддитивной смеси полезного сигнала (траектории движения цели) и помехи, т. е.

$$F(\vartheta, t) = Y(\vartheta, t) + N(t), \qquad (4.1)$$

где $Y(\vartheta, t)$ — функция времени и параметров, описывающая процесс изменения координат;

$N(t)$ — помеха, под которой понимаются все те причины, которые искажают траекторию или затрудняют ее обнаружение и воспроизведение.

Траектория движения цели зависит от многих факторов и условий, таких, как тип цели (самолет или ракета), высота полета, скорость, маневренные возможности и т. д. Траектория цели может совершенно не зависеть от действия противоположной стороны (противника), однако возможны и такие случаи, когда траектория зависит от состояния или действия сил, против которых цель направлена. Кроме того, на траекторию цели оказывает влияние целый ряд случайных факторов, связанных с неравномерной плотностью атмосферы, ветром, неточностью управления и т. д.

Все эти факторы вынуждают относить ансамбль траекторий к категории процессов со случайно изменяющимися во времени параметрами, т. е. к категории случайных функций времени. Очевидно, для полного статистического описания ансамбля траектории на входе проектируемой системы вторичной обработки необходимо знать законы распределения вероятности функции $Y(\vartheta, t)$ или параметров, ее определяющих. Однако, как правило, таких законов получить ни теоретически, ни экспериментально не удается, что связано с известной «априорной трудностью». Поэтому в процессе проектирования систем обработки информации приходится задаваться некоторыми предположениями (гипотезами) о статистических характеристиках обрабатываемых сигналов, т. е. исходить из более или менее правдоподобной статистической модели движения цели.

Представление траектории в виде случайной функции времени не является единственно возможным. Действительно, перед проектированием системы всегда известно, для какого класса целей она предназначена (аэродинамические цели, баллистические цели и т. д.). Каждому же классу целей можно сопоставить некоторый класс детерминированных функций, описывающих, точно или с некоторым приближением, траектории их движения. Так, например, траектории неманеврирующих баллистических ракет и спутников Земли относятся к классу

гладких кривых второго порядка (эллипс, парабола, окружность). Траектории самолетов представляют собой совокупность участков с прямолинейным и равномерным движением и участков ограниченного их техническими характеристиками маневра.

Исходя из этого, траекторию движения цели можно представить в виде некоторой детерминированной функции со случайными (или просто неизвестными) параметрами. Выбор модели движения состоит в этом случае в выборе вида функции (или совокупности функций) и в задании предположений о параметрах, от которых она зависит.

Выбор той или иной модели движения цели обусловливается конкретным назначением системы. Необходимо также учитывать трудности проектирования и сложность аппаратуры автосопровождения гипотетической траектории. Очевидно, наилучшей является та модель, которая более полно отражает характер движения реальных целей и требует для реализации алгоритмов автосопровождения минимального объема оборудования.

Ниже описываются некоторые применяющиеся в процессе синтеза систем автоматического сопровождения конкретные модели движения целей.

Как уже отмечалось, при автосопровождении неманеврирующих баллистических ракет в качестве модели движения могут быть использованы уравнения их траектории [43].

Движение баллистического снаряда в прямоугольной системе координат с началом в центре тяжести Земли можно определить на основе закона Ньютона. Если не учитывать вращение Земли, то математически этот закон может быть выражен с помощью трех независимых дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right), \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

где m — масса снаряда;
t — текущее время;

x, y, z — прямоугольные декартовы координаты положения снаряда по отношению к выбранной системе координат;

F_x, F_y, F_z — функции, характеризующие известные силы, действующие на снаряд, зависящие, в общем случае, от положения снаряда, скорости его движения и времени.

Решение каждого из уравнений (4.2) предполагает знание двух постоянных интегрирования. Следовательно, при известных F_x, F_y, F_z движение баллистического снаряда можно полностью определить, если найти шесть постоянных интегрирования (параметров). Каждой шестерке параметров будет соответствовать своя траектория.

Задача определения параметров траектории баллистического снаряда может быть решена на основе использования радиолокационной информации, которая обычно содержит данные об азимуте (β), угле места (ε), дальности (D) и скорости изменения дальности (v_D) снаряда относительно местоположения РЛС.

При проектировании систем автосопровождения аэродинамических целей в простейшем случае может быть взята за основу так называемая полиномиальная модель движения. Полиномиальная модель движения основана на представлении процесса изменения координат цели на ограниченном участке наблюдения в виде полинома степени s относительно времени, т. е.

$$Y(\vartheta, t) = \sum_{r}^{s} \vartheta_r t^r = \vartheta_0 + \vartheta_1 t + \vartheta_2 t^2 + \ldots + \vartheta_s t^s, \quad \textbf{(4.3)}$$

где ϑ_r — параметры движения, на которые накладываются те или иные ограничения.

Имеется целый ряд исследований процессов автосопровождения, в основу которых положена полиномиальная модель входного полезного сигнала. Отличаются они только различными предположениями о характере и допустимых значениях коэффициентов полинома ϑ_r. Так, в работах Заде и Рагаззини [44] и Лииса [45] коэффициенты $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, ft,$ рассматриваются как совокупность произвольных чисел. Аналогичным образом можно рассматривать коэффициенты tf_r как случайные

величины с известными коэффициентами корреляции. Возможны, конечно, и другие ограничения на коэффициенты ϑ_r.

Здесь важно отметить тот факт, что представление коэффициентов ϑ_r (параметров траектории) в виде случайных величин или обыкновенных (произвольных) чисел не вяияет на алгоритм оценки этих коэффициентов по радиолокационным данным. Изменяется только интерпретация полученных оценок, состоящая в том, что в результате оценки случайного параметра мы получаем оценку его математического ожидания, а при оценке неслучайного параметра — его. приближенное значение. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты ϑ_r представляют собой случайные величины с нормальным законом распределения вероятностей.

При проектировании систем обработки радиолокационной информации на основе полиномиальной модели движения целей-самолетов весьма важным является правильный выбор степени полинома, описывающего изменение координат во времени. При этом приходится исходить из более или менее правдоподобных физических представлений и соображений, а также из тактики действия целей.

Весь маршрут полета самолетов можно разделить на участки с качественно различными режимами полета: участки прямолинейного полета и участки изменения направления полета (маневра). Причем участки прямолинейного полета и маневра чередуются случайным для наземного наблюдателя (системы обработки) образом.

Исходя из такого представления о характере движения целей, можно сформулировать следующие предпосылки для проектирования системы их сопровождения:

а) на участках прямолинейного полета и маневра целесообразно использовать различные гипотезы о характере изменения координат цели во времени;

б) на участках прямолинейного полета изменение плоскостных координат цели во времени (в дальнейшем рассматривается одна координата *y)* описывается полиномами первой степени (гипотеза о прямояинейном равномерном движении) т. е.

$$y(t) = y_0 + v_y t;$$

б) на участках маневра процесс изменения координат во времени можно описать полиномами, степени выше первой (второй, третьей и т. д.).

При представлении координат маневрирующей цели в виде полинома второй степени имеем

$$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{a_y}{2} t^2,$$

где y_0, v_y, a_y — параметры траектории маневрирующей цели, имеющие смысл начальной координаты, скорости изменения координаты и ускорения по координате соответственно.

Можно показать, что представление координат маневрирующей цели полиномом третьей степени существенных преимуществ в точности оценки параметров траекторий не дает. В то же время при таком представлении значительно усложняются алгоритмы и аппаратура обработки.

Таким образом, для описания траектории цели полиномиальной моделью на всем маршруте ее полета, вообще говоря, должны использоваться не одна, а две (или даже несколько) гипотезы.

В связи с этим иногда говорят о кусочно-полиномиальной модели, в соответствии с которой процесс движения цели представляется в виде последоватеяьности полиномиальных участков с различными коэффициентами и с различными степенями полиномов. Система обработки должна в этом случае перестраиваться (или самонастраиваться) в соответствии с характером движения каждой цели.

Полиномиальная или любая другая детерминированная модель движения цели имеет существенный недостаток, состоящий в том, что она не позволяет учитывать возможность неожиданного (непредвиденного) маневра цели.

Кроме полиномиальной модели, для описания траектории движения цели может быть принята модель случайного процесса при некоторых допущениях (гипотезах) о статистике параметров, определяющих изменение координат во времени. В качестве таких параметров могут быть приняты скорость изменения координаты v_y,

которая при дискретном измерении определяется первым приращением координаты за обзор

$$u_n = y_n - y_{n-1},$$

и ускорение по координате, определяющееся вторым приращением (приращением первого приращения)

$$\gamma_n = u_n - u_{n-1}.$$

Простейшей из такого рода моделей является модель со стационарными и независимыми первыми приращениями [6]. В этом случае последовательность первых приращений координаты представляется в виде некоррелированного дискретного случайного процесса с неизменными от обзора к обзору математическим ожиданием и дисперсией, а изменение координаты представляется в виде нестационарного случайного процесса скачкообразного (диффузионного) характера.

Модель со стационарными и независимыми первыми приращениями применяется при проектировании систем сглаживания скорости при равномерном изменении координат.

Бояее сложной является модель со стационарными и независимыми вторыми приращениями (рис. 4.1). Для такой модели вторые приращения по координате представляются в виде некоррелированного дискретного процесса с известными математическим ожиданием (обычно равным нулю) и дисперсией (график на рис, 4.1,*а*). Первые приращения при этом будут коррелированными случайными величинами (график на рис. 4.1,*б*), что позволяет учесть более или менее плавный характер изменения координаты (график на рис. 4.1,*в*) и, тем самым, более полно отразить особенности движения реальных целей.

Возможно, конечно, применение моделей движения, учитывающих постепенный характер изменения ускорения при маневре, считая независимыми случайными величинами третьи приращения координаты. Однако модели с независимыми третьими (и, тем более, четвертыми и т. д.) приращениями в практике проектирования распространения не получили. Обычно ограничиваются моделями со стационарными первыми или вторыми приращениями.

Модели движения со стационарными и независимыми первым и вторым приращениями, естественно, не учитывают всех особенностей движения реальных целей. Основным недостатком этих моделей является то, что в них не учитываются (не фиксируются) реальные ограничения на диапазон возможных изменений параметров движения (скорость, ускорение и т. Д.) целей.

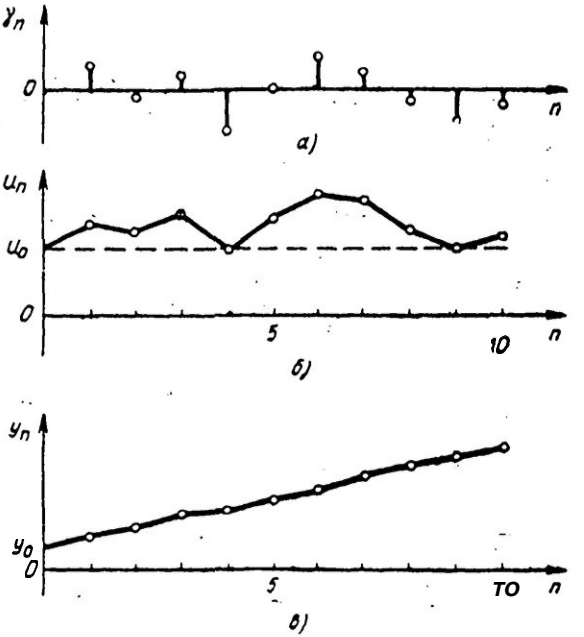


Рис. 4.1. Одна из возможных реализаций модели движения с независимыми и стационарными вторыми приращениями:
а — дискретные значения второго приращения; б — изменение первого приращения; в — изменение координаты.

Дальнейшим развитием модели со стационарными приращениями является корреляционная модель движения цели. Корреляционная модель движения цели основана на представлении процесса изменения координат маневрирующей цели в виде нестационарного случайного процесса, вторая производная которого $y''(t)$ имеет корреляционную функцию вида:

$$R(\tau) = \sigma^2_{y''(t)} \exp[-\lambda(\tau)], \qquad (4.4)$$

где $\sigma^2_{y''(t)}$ — дисперсия второй производной (ускорения);

Я — средняя частота изменения ускорения.

Представление движения маневрирующей цели в виде случайного процесса, имеющего корреляционную функцию вида (4.4), позволяет учесть как случайный характер величины ускорения (причем на распределение вероятностей величины ускорения никаких ограничений не накладывается), так и случайный характер момента изменения ускорения.

Корреляционная модель является обобщением модели со стационарными вторыми приращениями на случай, когда учитывается связь ускорения в настоящий момент с ускорением в предыдущие моменты времени, т. е. когда процесс изменения ускорения рассматривается как марковский процесс. При этом число m изменений ускорения в течение некоторого фиксированного интервала времени t_0 описывается законом Пуассона:

$$P_m = \frac{(\lambda t_0)^m}{m!} e^{-\lambda t_0}. \qquad (4.5)$$

Заметим, что упоминавшуюся выше кусочно-полиномиальную модель движения, при некоторых ограничениях, можно рассматривать как частный случай корреляционной модели. Если траектория представляется отрезками полиномов второй степени, коэффициенты при t^2 у которых случайны, независимы и имеют одинаковое распределение вероятностей, а количество отрезков распределено по закону Пуассона с параметром λ, то корреляционная функция второй производной исходного процесса имеет вид (4.4), а параметр λ приобретает смысл средней частоты изменения ускорения.

Положительной стороной моделей движения, в основе которых лежит гипотеза о случайном изменении параметров (о случайном маневрировании), является то, что ограничения, накладываемые на возможные способы движения цели, здесь значительно слабее ограничений, используемых в случаях гипотез о детерминированных законах движения, и носят статистический характер. Однако и в этом случае накладываемые ограничения (особенно на дисперсию изменения параметров и частоту маневрирования) являются также, по сути дела, произвольными.

Пожалуй, наиболее правильным являлся бы игровой подход к выбору модели движения цели. При этом процесс автосопровождения должен быть представлен как игра двух систем, одной из которых является система управления полетом цели, а другой — система автосопровождения цели. Стратегия системы управления полетом цели состоит в уходе от автосопровождения (сбое автосопровождения). Стратегия системы автосопровождения состоит в недопущении сбоя. Таким образом на-

оценен некоторыми потерями сторон. К сожалению, такой подход к выбору модели движения цели не нашел еще освещения в литературе;

До сих пор в качестве случайных (ияи неизвестных) параметров гипотетической траектории рассматривались параметры изменения каждой из независимых координат (скорость, ускорение). Вместо этих параметров при вторичной обработке радиолокационной информации иногда используется другая пара параметров — скорость цели $V_ц$ и курс цели $Q_ц$, причем под кур.сом цели понимается угол между направлением на север и направлением вектора скорости цели, отсчитываемый по часовой стрелке. В отличие от параметров изменения координат параметры $V_ц$ и $Q_ц$ называются параметрами траектории цели.

Переход к оценке параметров траектории ($V_ц$ и $Q_ц$) Б процессе обработки радиолокационной информации целесообразен по следующим причинам.

1. Параметров траекторий всего два, тогда как параметров изменения плоскостных координат четыре (v_D, a_D, $v_β$, $a_β$ или v_x, a_x, v_y, a_y).

2. Параметры траектории либо не изменяются вовсе (при прямолинейном равномерном движении), либо изменяются приблизительно по линейному закону (при маневре). Поэтому упрощаются алгоритмы обработки.

3. Как сокращение числа оцениваемых параметров, так и упрощение алгоритмов обработки приводят к сокращению оборудования.

В заключение подчеркнем, что задание гипотезы движения цели не исчерпывается только указанием предполагаемого характера изменения координат (детерминированный или случайный процесс) и выбором параметров, подлежащих оценке. Для того чтобы полностью

представить процесс движения целей, необходимо еще, исходя из теоретических исследований или на основании изучения реальных траекторий, задаться гипотезами о видах маневра, продолжительности маневра, интенсивности маневра и их статистических характеристиках.

Комплекс гипотез, определяющих вид траекторий движения целей и возможные статистические характеристики маневра, будем в дальнейшем называть обобщенной гипотезой о статистической модели движения цели. На основании обобщенной гипотезы проектируются системы автосопровождения целей.

Один из возможных примеров задания обобщенной гипотезы о статистической модели движения цели-самолета можно представить в следующем виде:

1. Траектория движения цели (т. е. закон изменения во времени ее координат) имеет вид полинома со случайными коэффициентами.

2. За период наблюдательного времени цель движется либо равномерно, либо совершает маневр. Вероятность равномерного движения цели равна $p_{нм}$, а вероятность маневра $p_м = 1 - p_{нм}$.

3. Маневр цели может совершаться по курсу и скорости (маневр по высоте отсутствует). Маневры по курсу и скорости взаимно*независимы.

4. Маневр цели по скорости на каждом участке маневра происходит с постоянным ускорением a_V. Ускорение на различных участках маневра есть величина случайная, подчиненная нормальному закону распределения вероятностей с дисперсией σ_{aV} и математическим ожиданием, равным нулю.

5. Маневр цели по курсу на каждом участке маневра происходит с постоянным центростремительным ускорением a_Q, т. е. по дуге окружности. Интенсивность маневра по курсу на различных участках есть величина случайная, подчиненная нормальному закону распределения вероятностей с дисперсией σ_{aQ} и математическим ожиданием, равным нулю.

6. Период маневра, т. е. время, в течение которого цель маневрирует, также является случайной величиной; распределение времени маневра цели принимается пуассоновским с заданным параметром λ.

В некоторых случаях при задании обобщенной статистической модели движения цели предполагают, что модуль вектора скорости остается постоянным (цель маневрирует только по курсу). Траектория цели в этом случае представляется в виде набора сопряженных дуг окружности с различной кривизной (в том числе и нулевой). Кривизна дуг K является случайной функцией времени и подчинена нормальному закону распределения с дисперсией σ_K^2 и нулевым математическим ожиданием, т. е.

$$w(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_K} \exp\left\{-\frac{K^2}{2\sigma_K^2}\right\}. \qquad (4.6)$$

Легко видеть, что вторая модель движения цели проще первой, хотя первая более полно отражает истинную картину поведения цели на траектории; но ни одна из этих моделей не характеризует всех возможных случаев поведения цели. Можно, конечно, усложнить модель и учесть другие возможные случаи, однако при этом усложняется синтез устройств автосопровождения. В дальнейшем будем пользоваться моделью движения, учитывающей как маневр по скорости, так и маневр по курсу.

4.2.2. Статистические характеристики помех

В общем случае помеху можно записать в виде:

$$N(t) = f[\sigma(t),\ \rho(t),\ \pi(t)] + m(t), \qquad (4.7)$$

где $m(t)$ — случайные колебания цели вокруг заданной траектории, обусловленные влиянием случайных возмущений среды, в которой осуществляется полет, а также ошибками системы управления полетом цели;

$\sigma(t)$ — ошибки измерения координат цели РЛС совместно с ошибками первичной обработки;

$\rho(t)$ — ложные отметки, обусловленные внутренними шумами приемной аппаратуры, а также искусственными и естественными помехами;

$\pi(t)$ — пропуски отметок от цели, обусловленные флюктуациями отражающей поверхности цели и влиянием искусственных помех.

Рассмотрим кратко каждую из составляющих, входящих в выражение (4.7).

1. Случайные колебания цели вокруг заданной траектории представляют собой стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения вероятностей. Так как в среднем цель всегда удерживается на заданной траектории, то математическое ожидание указанного процесса равно нулю. Случайные отклонения траектории от заданного закона движения характеризуются дисперсией отклонения и корреляционной функцией, определяющей связь этих отклонений в смежных периодах обзора. Корреляционная функция $R_m(jT_0)$, где $j=0, 1, 2, \ldots$ — число смежных периодов обзора, может быть найдена экспериментально для каждого типа цели и системы ее управления. Иногда эту функцию алпроксимируют экспонентой

$$R_m(jT_0) = \sigma_m^2 \exp[-c'(jT_0)], \qquad (4.8)$$

где c' — постоянный множитель;

σ_m^2 — дисперсия отклонения цели от заданного закона движения.

2. Ошибки измерения координат цели имеют систематическую и случайную составляющие. В дальнейшем всюду будем считать, что систематическая ошибка либо отсутствует, либо компенсируется.

Случайные ошибки измерения координат обусловлены влиянием большого числа независимых факторов и поэтому подчинены нормальному закону распределения. Для статистической характеристики этих ошибок необходимо знать только дисперсию и корреляционную функцию. Корреляционные функции случайных ошибок измерения координат $R_0(jT_0)$ в принципе могут быть определены экспериментальным путем. Для наземных РЛС с периодом обзора в несколько (5—10) секунд случайные ошибки измерения координат можно считать

некоррелированными в соседних обзорах. В этом случае

$$R_0(jT_0) = \begin{cases} \sigma_0^2 & \text{при } j = 0, \\ 0 & \text{при } j \neq 0, \ j = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (4.9)$$

Выражение (4.9) справедливо для каждой из независимых координат, измеряемых РЛС. Для рассматриваемых далее одноканальных обзорных РЛС такими координатами являются дальность и азимут.

Таким образом, статистические характеристики ошибок измерения координат характеризуются двумя нормальными законами:

$$w(\Delta D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_D} \exp\left[-\frac{\Delta D^2}{2\sigma_D^2}\right],$$

$$w(\Delta\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\beta} \exp\left[-\frac{\Delta\beta^2}{2\sigma_\beta^2}\right],$$

где σ_D и σ_β — известные значения дисперсий ошибок измерения дальности и азимута цели соответственно.

3) Ложные отметки возникают случайно и независимо во всей зоне обзора РЛС. Предположим, что ложные отметки распределены во времени равномерно со средней плотностью ρ отметок в секунду. На основании этого плотность ложных отметок γ на единицу площади можно подсчитать следующим образом.

Разделим зону обзора РЛС с максимальной дальностью обнаружения $D_{\text{макс}}$ на конечное число b колец шириной Δ_d (см. рис. 2.5). Зная общее число ложных отметок, возникающих в зоне обзора за период T_0, равное ρT_0, и учитывая тот факт, что среднее число ложных отметок в каждом кольце одинаково (обзор равномерный во времени), получим число ложных отметок, приходящихся на одно кольцо:

$$\nu' = \frac{\rho T_0}{b}.$$

Площадь кольца, взятого на дальности D, будет

$$s_k(D) = 2\pi D \Delta_d.$$

Следовательно, на единицу площади обзора приходится $v_D = \frac{\rho T_0}{2\pi D \Delta_d b}$ ложных отметок. Или, учитывая, что $b = \frac{D_{макс}}{\Delta_d}$, получим окончательную формулу:

$$v_D = \frac{\rho T_0}{2\pi D_{макс} D} \left[\frac{отм}{км^2}\right], \qquad (4.10)$$

где T_0 — период обзора;
$D_{макс}$ — максимальная дальность обнаружения;
D — текущая дальность.

Таким образом, статистически ложные отметки могут быть охарактеризованы либо средней плотностью во времени ρ (см. формулу 3.16), либо средней плотностью v_D на единицу площади зоны обзора.

4. Пачки отраженных импульсов из-за флюктуаций сигналов и влияния помех могут в некоторых случаях пропадать, что, естественно, приводит к пропаданию отметок от цели в соответствующих периодах обзора. Пропадание отметок в общем случае может быть описано законом Пуассона. Однако определение параметра этого закона (среднего числа пропусков в единицу времени) — задача чрезвычайно сложная, так как пропадание отметок в сильной степени зависит от дальности.

Заметим в заключение, что составляющие помех 1 и 2 оказывают в основном влияние на точность экстраполяции координат и выбор размеров строба, а составляющие помех (3) и (4) — на качество сличения отметок в стробе.

§ 4.3. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ (АВТОЗАХВАТ) ТРАЕКТОРИЙ

4.3.1. Исходные предпосылки

Как уже отмечалось, первым этапом вторичной обработки является автоматическое обнаружение (автозахват) траекторий.

Процесс обнаружения новой траектории начинается с образования вокруг одиночной отметки, не попадающей ни в один из уже имеющихся стробов, кольцевой зоны первичного захвата (рис. В.6).

Если в зону первичного захвата попадает одна или несколько отметок, полученных в следующем периоде обзора, то каждая из них принимается за возможное продолжение новой траектории. Далее по координатам двух связанных отметок путем экстраполяции строятся новые зоны связи, а отметки, лопавшие в эти зоны в следующем (третьем) обзоре, привязываются к соответствующим траекториям. Процесс привязки новых отметок продолжается до тех пор, пока будет выполнен критерий обнаружения (передачи на сопровождение) траектории или критерий сброса необнаруженной траектории.

Операции, выполняемые в процессе автозахвата, сводятся к экстраполяции координат и стробированию отметок. Относительно этих операций в дальнейшем принимаются следующие предпосылки.

1. Экстраполяция координат производится в соответствии с гипотезой о равномерном и прямолинейном движении цели. Это обусловлено тем, что при автозахвате нет достаточной информации для выявления маневра цели (мало время наблюдения).

2. Зоны связи автозахвата имеют простейшую форму в виде областей, ограниченных двумя значениями азимута (границами строба по азимуту) и двумя значениями дальности (границами строба по дальности) в полярной системе координат.

3. За единицу измерения площади строба принимается площадь элементарного участка (см. рис. 2.5)

$$s_0 = \Delta_d \Delta_\beta = \frac{c\tau_и}{2} \cdot \frac{2\pi}{T_0 F_п}. \qquad (4.11)$$

В этом случае размеры стробов не зависят от дальности и, кроме того, распределение ложных отметок в зоне обзора можно принять равномерным.

Среднее число ложных отметок в пределах элементарного участка определяется по формуле

$$\nu_0 = \frac{pT_0}{N_э}, \qquad (4.12)$$

где $N_э$ — число элементарных участков в зоне обзора РЛС, равное для РЛС кругового обзора

$$\frac{2\pi D_{макс}}{\text{дальн.}}$$

Качество алгоритмов автозахвата оценивается следующими характеристиками:

— средним числом ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в единицу времени;

— надежностью автозахвата, которая характеризуется вероятностью обнаружения истинной траектории и при

— требуемым быстродействием и объемом памяти вычислительного устройства, предназначенного дяя реализации алгоритма.

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые алгоритмы автоматического обнаружения траекторий и оцениваются их качественные характеристики по среднему числу передаваемых на сопровождение и находящихся на сопровождении ложных траекторий и вероятности правильного обнаружения истинных траекторий. В аналогичной постановке, пожалуй впервые, задача об обнаружении траекторий решалась Уаксом [46]. Вопросам схемной реализации автозахвата и исследованию устойчивости различных схем посвящена работа [47].

4,3.2. Алгоритмы автозахвата траекторий

Задача автозахвата траекторий по своему смыслу есть задача проверки статистических гипотез. Пусть H_0 — гипотеза о том, что полученная выборка x_1, x_2, ... x_n связанных отметок принадлежит ложной траектории, а H_1 — гипотеза о том, что эта выборка принадлежит истинной траектории. Функция правдоподобия гипотезы H_0 записывается в виде: $w(x_1, x_2, \ldots, x_n | H_0)$, а функция правдоподобия гипотезы H_1 — в виде $w(x_1,$

Тогда оптимальная процедура автозахвата траектории по критерию минимума среднего риска записывается в виде

$$l(x \quad x \quad \ldots, x_n) = \frac{w(x_1, x_2, \ldots, x_n | H_1)}{w(x_1, x_2, \ldots, x_n | H_0)} \geqslant \frac{Q_T C_2}{P_T C_1}, \quad (4.13)$$

т. е. сводится к образованию отношения правдоподобия и сравнению этого отношения с порогом, зависящим от стоимостей C_1 и C_2, приписываемых ошибкам первого и

второго рода и априорных вероятностей наличия $P_т$ и отсутствия $Q_т$ истинной траектории.

При обнаружении траекторий, с точки зрения уменьшения числа наблюдений при принятии решения, весьма целесообразным является применение критерия последовательного анализа является многоэтапность статистического эксперимента для выбора между гипотезами H_0 и H_1. Решение о продолжении или прекращении эксперимента на данном этапе зависит от исхода предыдущего этапа, в отличие от классического статистического эксперимента, где число этапов (число испытаний) назначается заранее. Однако как при классическом анализе, так и при последовательном анализе, решение выносится на основе одной и той же функции наблюдаемых значений координат — отношения правдоподобия.

Оптимальность последовательного анализа доказана лишь для случая однородной независимой выборки отметок, когда выборочные значения являются независимыми реализациями одной и той же траектории.

В этом случае функции правдоподобия гипотез можно представить в виде

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_k/H_0) = w(x_1/H_0)\, w(x_2/H_0) \ldots w(x_k/H_0),$$

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_k/H_1) = w(x_1/H_1)\, w(x_2/H_1) \ldots w(x_k/H_1),$$

а отношение правдоподобия в виде

$$l(x_1, x_2 \ldots x_k) = \prod_{i=1}^{k} \mu_i, \qquad (4.14)$$

где $\mu_i = \frac{w(x_i/H_1)}{w(x_i/H_0)}$ — частное отношение правдоподобия, вычисленное по результатам i-го испытания.

Если после очередного k-го испытания отношение правдоподобия (4.14) превысило некоторое число B, называемое верхним порогом, то принимается решение о справедливости гипотезы H_1. Если же это отношение стало меньше некоторого числа A, то принимается гипотеза H_0. При

$$A < l(x_1, x_2 \ldots x_k) < B$$

испытания продолжаются.

Значения нижнего и верхнего порогов определяются формулами [1]

$$A = \frac{P_{\text{проп}}}{1 - P_{\text{лт}}}, \quad B = \frac{1 - P_{\text{проп}}}{P_{\text{лт}}}.$$

Применение последовательного анализа дает уменьшение (в среднем) числа наблюдений при принятии решения об обнаружении траектории. Это, в свою очередь, приводит к увеличению дальности автозахвата, а также к уменьшению объема памяти ЦВМ по сравнению с классическим анализом.

Оптимальные последовательные (и при фиксированном объеме выборки) алгоритмы автозахвата траекторий, основанные на образовании отношения правдоподобия по данным всей выборки, оказываются в большинстве случаев чрезвычайно громоздкими. Поэтому часто может оказаться целесообразным использование более простых алгоритмов, хотя и обладающих худшими показателями качества. Алгоритмы такого рода могут быть построены на основе подробно рассмотренных в предыдущей главе критериев обнаружения «m/m» или «l/m».

Число одиночных отметок, которые надо хранить в этом случае по каждой из обнаруживаемых траекторий, не превышает $m-1$ при использовании критерия «m/m», и $l-1$ — при использовании критерия «l/m». Следовательно, с точки зрения уменьшения требований к объему памяти ЦВМ целесообразно выбирать малые значения m и l. Однако при этом, естественно, увеличивается число передаваемых на сопровождение ложных траекторий.

К выбору m и l при автозахвате траекторий можно подходить и с несколько другой точки зрения [20]. Дело в том, что задача автозахвата траекторий, вообще говоря, есть задача распознавания образов ненулевого порядка, т. е. образов, положение которых изменяется во времени по какому-либо закону в отличие от образов нулевого порядка, положение которых не изменяется за время наблюдения. Если распознаванию подлежит образ первого порядка, то для этого необходимо иметь не менее двух значений координат. Для распознавания же образа второго порядка минимальное число используемых значений координат должно быть не менее трех и т. д.

При автозахвате траекторий по данным радиолокационных наблюдений постановка задачи распознавания образов порядка выше первого является нецелесообразной из-за малости времени наблюдения. Обычно все траектории обнаруживаются (распознаются) как образы первого порядка. Следовательно, значение m (при критерии автозахвата «m/m») или значение l (при критерии автозахвата «l/m») можно выбирать порядка 2—3.

Алгоритмы автозахвата траекторий реализуются, как правило, на ЦВМ. Однако для теоретического рассмотрения удобно представить устройство автозахвата траекторий как цифровой автомат, функционирующий по определенной программе под воздействием случайных входных сигналов, принимающих только два возможных значения — нуль или единица, — в соответствии с попаданием или непопаданием очередной отметки в соответствующую зону связи.

В этом случае для анализа вероятностных характеристик процесса автозахвата траекторий (число ложных траекторий, передаваемых на сопровождение, число ложных траекторий, находящихся на сопровождении, вероятность правильного обнаружения истинной траектории) можно применить рассмотренную в предыдущей главе методику с использованием аппарата цепей Маркова.

4.3.3. Среднее число передаваемых на сопровождение ложных траекторий

Среднее число ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в каждом обзоре, является одной из существенных характеристик качества алгоритмов автозахвата. Рассмотрим один из возможных методов расчета этого числа с применением аппарата цепей Маркова.

При выводе основных соотношений будем исходить из следующих упрощающих предпосылок.

1. Среднее число ложных отметок, поступающих в устройство автозахвата за период обзора, есть величина постоянная, равная $N_{л_0} = \rho T_0$, где ρ — среднее число ложных отметок в единицу времени, выдаваемых из устройства первичной обработки.

2. Среднее число истинных (целевых) отметок $\bar{N}_{цо}$ также одинаково в каждом обзоре.

3. Общее за обзор число поступающих в устройство автозахвата отметок значительно меньше числа элементарных участков в зоне обзора, т. е.

$$(\overline{N}_{ло} + \overline{N}_{цо}) \ll N_э.$$

4. Каждая возникающая траектория не зависит от других, т. е. траектории не пересекаются. Этим самым из рассмотрения исключаются случаи образования смешанных траекторий по истинным и ложным отметкам. Предположение о независимости траекторий позволяет рассматривать автозахват истинных и ложных траекторий раздельно.

5. Размеры (площадь) всех упрежденных зон являются одинаковыми независимо от «возраста» (длины) траектории,

Рассмотрим подробно случай, когда в алгоритме автозахвата реализуется критерий «m/m». Траектория возникает с появления одиночной отметки и передается на сопровождение при попадании в соответствующие зоны связи (стробы) m отметок подряд (в каждом соседнем периоде обзора). В каждый фиксированный момент времени траектория находится в одном из $m+1$ состояний $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Из любого промежуточного состояния $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ возможны переходы либо в следующее, либо в нулевое состояние. Состояние a_m является поглощающим. Из этого состояния траектория передается на сопровождение. Переход из состояния a_0 в состояние a_1 происходит с вероятностью P_0 появления начальной отметки $(Q_0 = 1 - P_0)$. Матрица вероятностей перехода в этом случае имеет вид

$$A_{mm} = \begin{Vmatrix} Q_0 & P_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ p_{10} & 0 & p_{12} & 0 & \cdot & 0 \\ p_{20} & 0 & 0 & p_{23} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m-1,0} & 0 & 0 & \cdot & p_{m-1,m} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (4.15)$$

Если начальную точку траектории совместить с началом отсчета времени, то условная вероятность того, что траектория, возникшая в нулевом обзоре, еще существует, в n обзоре можно записать в виде

$$P(a_j(n)/a_1(0)) = \sum_{j=1}^{m} p_{1j}^{(n)}, \qquad (4.16)$$

где $p_{1j}^{(n)}$ — вероятность перехода из состояния 1 в состояние j за n шагов (обзоров).

Пусть $\overline{N_1(i)}$ — среднее число одиночных отметок (начальных точек ложных траекторий), полученных в i обзоре ($i=0, 1, \ldots, я$). Тогда среднее число траекторий (длиной от 1 до m) после n-го обзора определится из выражения

$$\overline{N_\Sigma(n)} = \sum_{i=0}^{n} \overline{N_1(i)} \sum_{j=1}^{m} p_{1j}^{(n-i)}, \qquad (4.17)$$

где принято

$$p_{1j}^{(0)} = 1 \text{ при } j = 1,$$

$$p_{1j}^{(0)} = 0 \text{ при } j \neq 1.$$

Среднее число начал траекторий $\overline{N_1(i)}$ можно определить из выражения

$$\overline{N_1(i)} = \overline{N_{л0}} - p_a \overline{N_\Sigma(i-1)}, \qquad (4.18)$$

где p_a — постоянная (вследствие условия 5) вероятность возникновения ложных отметок в упрежденных стробах автозахвата, образованных по каждой из обнаруживаемых траекторий.

Так как ложные отметки распределены в зоне обзора равномерно, со средней плотностью ν_0, то вероятность возникновения этих отметок в стробах автозахвата описывается законом Пуассона. В этом случае вероятность возникновения в стробе одной и более ложных отметок определяется выражением

$$p_a = 1 - \exp(-\nu_0 N_a),$$

где ν_0 определяется формулой (4.12);

N_a — число элементарных участков (площадью s_0) в пределах строба автозахвата.

С учетом (4.18) выражение для среднего числа ложных траекторий после n-го обзора можно записать в виде

$$\overline{N_\Sigma(n)} = \overline{N_{л0}} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{1j}^{(n-i)} - p_a \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{N_\Sigma(i-1)}\, p_{1j}^{(n-i)}. \qquad (4.19)$$

Будем считать $n \gg 1$, так что процесс возникновения и пропадания ложных траекторий является установившимся. Тогда производя в выражении (4.19) формальную замену переменных $n-i=k$, что соответствует переносу начала отсчета времени в точку n, и ограничиваясь z предыдущими периодами обзора $(0 \leqslant k \leqslant z)$, получим

$$\overline{N_{\Sigma}(n)} = \sum_{k=0}^{z} \overline{N_{\text{ло}}} \prod_{i=1}^{k} p_{i,i+1} - p_a \sum_{k=0}^{z} \overline{N_{\Sigma}(n-k-1)} \prod_{i=1}^{k} p_{i,i+1}, \tag{4.20}$$

В рассматриваемом случае критерия обнаружения «m/m» выбор z однозначно определяется выбором fn.

Запишем выражение для $\overline{N_{\Sigma}(n)}$ при различных z:

$$z=0,\ \overline{N_{\Sigma}(n)} = \overline{N_{\text{ло}}} - p_a \overline{N_{\Sigma}(n-1)};$$

$$z=1,\ \overline{N_{\Sigma}(n)} = \overline{N_{\text{ло}}}(1+p_{12}) - p_a[\overline{N_{\Sigma}(n-1)} + p_{12}\overline{N_{\Sigma}(n-2)}];$$

$$z=2,\ \overline{N_{\Sigma}(n)} = \overline{N_{\text{ло}}}(1+p_{12}+p_{12}p_{23}) - p_a[\overline{N_{\Sigma}(n-1)} +$$

$$+ p_{12}\overline{N_{\Sigma}(n-2)} + p_{12}p_{23}\overline{N_{\Sigma}(n-3)}];$$

. . . . . .

$$z=m-1,\ \overline{N_{\Sigma}(n)} = \overline{N_{\text{ло}}}(1+p_{12}+p_{12}p_{23}+\ldots+p_{12}p_{23}\ldots$$

$$\ldots p_{m-1,m}) - p_a[\overline{N_{\Sigma}(n-1)} + p_{12}\overline{N_{\Sigma}(n-2)} +$$

$$+ p_{12}p_{23}\overline{N_{\Sigma}(n-3)} + \ldots + p_{12}p_{23}\ldots p_{m-1,m}\overline{N_{\Sigma}(n-m)}].$$

В дальнейшем, при $z \geqslant m$, число $\overline{N_{\Sigma}(n)}$ не изменяется, так как

$$\sum_{1,j}^{m} p_{1,j}^{(k \geqslant m)} = 0.$$

Полагая в установившемся режиме

$$\overline{N_{\Sigma}(n)} = \overline{N_{\Sigma}(n-1)} = \ldots = \overline{N_{\Sigma}(n-m)} = \overline{N_{\Sigma}},$$

получим

$$\overline{N_{\Sigma}} = \overline{N_{\text{ло}}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{m} p_{1j}^{(k)} p^{(k)} = p \overline{N_{\Sigma}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{m} p^{(k)}$$

или

$$\overline{N_{\Sigma}} = \overline{N_{\text{ло}}} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{m} p_{1j}^{(k)}}{1 + p_a \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{m} p_{1j}^{(k)}}. \qquad (4.21)$$

Выражение (4.21) определяет общее число ложных траекторий, находящихся в устройстве автосопровождения после очередного обзора (в установившемся режиме). Из этого числа только те траектории, которые имеют m связанных отметок, передаются на автосопровождение. Среднее число передаваемых на автосопровождение ложных траекторий находится после группировки траекторий по их длине и, как легко показать, определяется по формуле

$$\overline{N_{\text{л тр}}} = (\overline{N_{\text{ло}}} - p_a \overline{N_{\Sigma}}) p_{12} p_{23} \ldots p_{m-1m}. \qquad (4.22)$$

Вероятности перехода p_{ij} $(j \geq i)$ есть вероятности попадания ложных отметок в упрежденные стробы, образованные по каждой из траекторий. Поскольку по условию 5 все стробы имеют одинаковые размеры, то

$$p_{12} = p_{23} = \ldots = p_{m-1m} = p_a.$$

С учетом этого окончательная форма для $\overline{N_{\text{л тр}}}$ имеет вид

$$\overline{N_{\text{л тр}}} = (\overline{N_{\text{ло}}} - p_a \overline{N_{\Sigma}}) p_a^{m-1}. \qquad (4.23)$$

Аналогичным образом находится число передаваемых на сопровождение ложных траекторий при автозахвате по критерию «l/m». Однако в данном случае расчет производится после выбора конкретных значений l и m, так как в общем виде, для произвольных значений l и m, задача решена быть не может.

Определим число передаваемых на сопровождение ложных траекторий для критерия -автозахвата «3/4».

Матрица вероятностей перехода в этом случае имеет вид -

$$A = \begin{Vmatrix} Q_0 & P_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_a & 1-p_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_a & p_a \\ 1-p_a & 0 & 0 & 0 & p_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-P_a & 0 & 0 & p_a \\ 1-p_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

где p_a — вероятность попадания ложной отметки в строб автозахвата.

Траектория возникает в состоянии a_1, и передается на сопровождение при достижении состояния a_6 (см. граф на рис. 3.16).

Состояние a_6 является в этом случае поглощающим (соответствует обнаружению траектории).

Для вычисления среднего числа траекторий продолжительностью от 1 до 4 периодов обзора, как и в предыдущем случае, справедлива формула (4.21), которая в данном случае записывается в виде

$$\overline{N_\Sigma} = N_{л0} \frac{\sum_{k=0}^{3} \sum_{j=1}^{6} p_{1j}^{(k)}}{3 \quad 6}. \qquad (4.24)$$

Траектория передается на сопровождение при появлении в стробах автозахвата подряд трех отметок или при появлении трех отметок в четырех соседних периодах обзора. Поэтому среднее число ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в каждом обзоре, равно

$$\overline{N_{л\,тр}} = (\overline{N_{л0}} - p_a \overline{N_\Sigma}) p_a^2 (3 - 2p_a). \qquad (4.25)$$

Заметим, что при. применении критерия «3/4» в устройстве автозахвата могут находиться необнаруженные траектории продолжительностью 5 и более пе-

риодов обзора, например, при поступлении последовательности 101010..., где единица соответствует наличию отметки в стробе, а нуль—ее отсутствию. Однако вероятность появления таких последовательностей большой длины мала и их в данном случае можно не учитывать.

В общем случае произвольного критерия обнаружения «l/m» пределы суммирования по k и j в формуле (4.24) определяются в каждом конкретном случае после

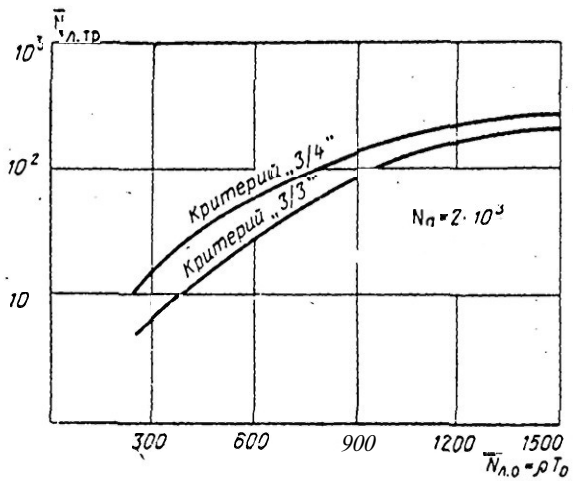


Рис. 4.2. Среднее число передаваемых на сопровождение ложных траекторий.

составления матрицы вероятностей перехода. При этом целиком может быть использована методика синтеза и анализа цифровых автоматов, изложенная в предыдущей главе.

На рис. 4.2 построены графики, показывающие зависимость числа передаваемых на сопровождение ложных траекторий от плотности ложных отметок на входе и критерия автозахвата траекторий. Из графика следует, что при постоянном размере зон связи (стробов автозахвата) фильтрующие способности критерия «3/4» примерно в 2 раза хуже, чем критерия «3/3».

Увеличение плотности помех на входе в 5 раз (с 300 до 1 500 ложных отметок за обзор) приводит к увеличению среднего числа передаваемых на сопровождение за

обзор ложных траекторий примерно в 25 раз при критерии обнаружения «3/3» и в 30 раз при критерии обнаружения «3/4».

4.3.4. Среднее число ложных траекторий, находящихся на сопровождении

Установим зависимость между средним числом ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в каждом обзоре, и средним числом ложных траекторий, нахо-

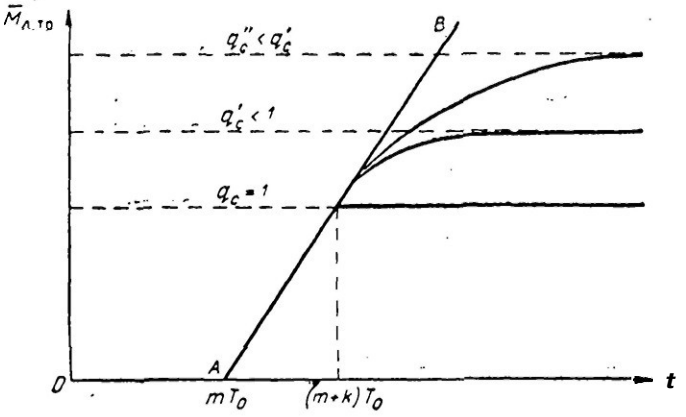


Рис. 4.3. Пояснение процесса установления числа ложных траекторий, находящихся на сопровождении.

дящихся на сопровождении в установившемся режиме. Знание среднего числа ложных траекторий, находящихся на сопровождении в установившемся режиме, необходимо для обоснования требований к аппаратуре автосопровождения по емкости ЗУ и быстродействию.

Сначала рассмотрим процесс установления числа ложных траекторий, находящихся на сопровождении (рис. 4.3).

Предположим, что в устройство автозахвата (УАЗ) начала поступать информация (истинные и ложные отметки с выхода УПО) в момент t_0, который принимается за начало отсчета времени. Для простоты положим $t_0 = 0$. Пусть далее в УАЗ установлен критерий автозахвата «m/m». Тогда через промежуток времени mT_0 в уст-

ройство автосопровождения (УАС) начнут поступать обнаруженные траектории, в том числе и ложные.

Пусть из устройства автозахвата за каждый период обзора передается на сопровождение в среднем $\bar{N}_{л\,тр}$ ложных траекторий. Если, кроме того, предположить, что ложные траектории в пределах зоны обзора распределены равномерно, то число ложных траекторий, переданных на сопровождение, будет увеличиваться от обзора к обзору по линейному закону. На рис. 4.3 рост числа переданных на сопровождение ложных траекторий изображен схематически прямой *AB*.

В устройствах автосопровождения устанавливается критерий сброса траекторий с сопровождения (критерий фиксации конца траектории), аналогичный критерию фиксации конца пачки, устанавливаемому в устройствах первичной обработки радиолокационной информации. Обычно сброс траектории с сопровождения производится при появлении некоторой фиксированной серии из к пропусков отметок в стробах сопровождения.

Критерий сброса с сопровождения, естественно, является единым как для истинных, так и для ложных траекторий. Поэтому при выборе этого критерия (числа к) необходимо прежде всего иметь в виду возможность пропадания истинных траекторий на больших дальностях. Очевидно, нецелесообразно производить сброс траектории при наличии одного пропуска отметки в стробе сопровождения, так как при этом велика опасность сбросить истинную траекторию. С другой стороны, при сбросе по большому числу пропусков, увеличивается число сопровождаемых ложных траекторий, что приводит к излишней загрузке УАС ложной информацией и к увеличению требований к этому устройству по емкости ЗУ и быстродействию.

Если в УАС установлен критерий сброса по наличию k пропусков отметок подряд, то сброс ложных траекторий с сопровождения начнется в (m + k) обзоре. При этом, если бы вероятность сброса каждой из ложных траекторий, захваченных к обзоров тому назад, была равна единице, то все траектории, поступившие в *m* обзоре, были бы сброшены в (m + k) обзоре и сразу после (m+k) обзора наступил бы установившийся процесс, при котором среднее число поступающих на сопровождение ложных траекторий равно среднему числу сбрасы-

ваемых ложных траекторий. В этом случае среднее число находящихся на сопровождении ложных траекторий равно

$$\bar{M}_{л\,тр} = k\,\bar{N}_{л\,тр},$$

а длина каждой ложной траектории в УАС равна

$$Л = (k-1)\,T_0.$$

Принципиальна имеется отличная от нуля вероятность построения ложной траектории любой конечной длины. Поэтому число ложных траекторий, находящихся в устройстве автосопровождения, будет расти, стремясь к некоторой постоянной величине (асимптоте), зависящей, в конечном итоге, от плотности ложных отметок на входе УАС и критерия сброса траекторий с сопровождения.

На рис. 4.3 показан схематически процесс установления числа ложных траекторий при $m=4$ и $k=3$. Из рисунка видно, что чем больше плотность ложных отметок на входе УАС, тем большее число ложных траекторий находится на сопровождении в установившемся режиме и тем больше время установления этого режима.

Получим теперь аналитическую зависимость между числом ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в каждом обзоре, и числом ложных траекторий, находящихся на сопровождении в установившемся режиме. Будем при этом предполагать, что размеры всех стробов сопровождения одинаковы и, кроме того, отсутствует перекрытие стробов, образованных для продолжения истинных и ложных траекторий. Для сброса каждой из поступивших на сопровождение траекторий необходимо, чтобы к раз подряд в стробы сопровождения не попало ни одной ложной отметки. Вероятность непопадания ложной отметки в строб сопровождения обозначим q_c. Очевидно,

$$q_c = \exp(-\nu_0 N_c),$$

где ν_0 — среднее число ложных отметок в пределах элементарного участка [см. формулу (4.12)];

N_c — число элементарных участков в пределах площади строба сопровождения.

Пусть в каждом обзоре в среднем:

$\overline{M^{(0)}_{л\,тр}}$ ложных траекторий подтверждается,

$\overline{M^{(1)}_{л\,тр}}$ ложных траекторий не подтверждается в первый раз,

$\overline{M^{(k)}_{л\,тр}}$ ложных траекторий не подтверждается к раз и, следовательно, сбрасывается с сопровождения.

Кроме того, в каждом обзоре поступает на сопровождение в среднем $\overline{N}_{л\,тр}$ новых ложных траекторий.

В установившемся режиме работы между указанными величинами существуют следующие очевидные зависимости:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M^{(1)}_{л\,тр}} &= (\overline{N}_{л\,тр} + \overline{M^{(0)}_{л\,тр}})\, q_c,\\
\overline{M^{(2)}_{л\,тр}} &= (\overline{N}_{л\,тр} + \overline{M^{(0)}_{л\,тр}})\, q_c^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overline{M^{(k)}_{л\,тр}} &= (\overline{N}_{л\,тр} + \overline{M^{(0)}_{л\,тр}})\, q_c^k.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

Таким образом, среднее число ложных траекторий, сбрасываемых с сопровождения в каждом обзоре, определяется выражением

$$\overline{M_{сбр\,л\,тр}} = \overline{M^{()}_{л\,тр}} = (\overline{N}_{л\,тр} + \overline{M^{(0)}_{л\,тр}})\, q_c^k.$$

Очевидно, в установившемся режиме работы среднее число ложных траекторий, поступающих на сопровождение в каждом обзоре, равно среднему числу сбрасываемых с сопровождения в каждом обзоре ложных траекторий, т. е. выполняется условие

$$\overline{N}_{л\,тр} = \overline{M^{(k)}_{л\,тр}} = (\overline{N}_{л\,тр} + \overline{M^{(0)}_{л\,тр}})\, q_c^k, \qquad (4.27)$$

Из последнего выражения можно определить число подтверждаемых в каждом обзоре ложных траекторий. Однако в ЗУ устройства автосопровождения хранятся не только подтвержденные траектории, но также и траектории, которые не подтверждены 1, 2, ... k—1 раз. Следовательно, среднее число находящихся в УАС ложных траекторий определяется из выражения

$$\overline{M_{л\,тр}} = \overline{M^{(0)}_{л\,тр}} + M^{(1)}_{л\,тр} + \ldots + \overline{M^{(k-1)}_{л\,тр}} + \overline{N}_{л\,тр}.$$

Используя выражения (4.26) и (4.27), получим

$$\overline{M_{л\,тр}} = \overline{N_{л\,тр}}\left(\frac{1}{q_c} + \frac{1}{q_c^2} + \cdots + \frac{1}{q_c^k}\right),$$

или свертывая сумму в скобках по формуле для суммы членов геометрической прогрессии, получим окончательно

$$\overline{M_{л\,тр}} = \frac{(1 - q_c^k)}{q_c^k (1 - q_c)}\,\overline{N_{л\,тр}}. \qquad (4.28)$$

Формула (4.28) позволяет определять среднее число находящихся на сопровождении ложных траекторий, если известны среднее число передаваемых на сопровождение ложных траекторий, критерий сброса с сопровождения, плотность ложных отметок на входе устройства сопровождения и размеры стробов сопровождения. В свою очередь, среднее число ложных траекторий, передаваемых на сопровождение, определяется критерием автозахвата, плотностью ложных отметок на входе устройства автозахвата и размерами стробов автозахвата (см. графики на рис. 4.2).

В заключение рассмотрим два примера на применение формулы (4.28).

а) При очень малой плотности помех, когда $q_c \to 1$, получим (используя правило Лопиталя)

$$\lim_{q_c \to 1} \overline{M_{л\,тр}} = \frac{\frac{d}{dq_c}(1 - q_c^k)}{\frac{d}{dq_c}[q_c^k (1 - q_c)]}\,\overline{N_{л\,тр}} = k\overline{N_{л\,тр}}.$$

Такую же формулу мы записали выше, исходя из простейших качественных рассуждений (см. также рис. 4.3).

б) При очень большой плотности помех, когда $q_c \to 0$, $\overline{M_{л\,тр}} \to \infty$, т. е. число находящихся на сопровождении траекторий растет в этом случае безгранично (прямая AB на рис. 4.3).

4.3.5. Вероятность обнаружения траектории

Вероятность обнаружения траекторий зависит, в общем случае, от выбора порогов и интервалов квантования одиночных сигналов в квантизаторе, от выбора программы первичной обработки пачек и от выбора критерия обнаружения траекторий (автозахвата). Поэтому в общем виде задачу оптимального обнаружения траекторий можно поставить следующим образом. Не фиксируя предварительно пороги и интервалы квантования одиночных сигналов и программу первичной обработки пачек, выбрать их в совокупности с критерием обнаружения траекторий таким образом, чтобы при заданном числе ложных траекторий, передаваемых на сопровождение, получить наибольшую вероятность обнаружения истинных траекторий (критерий Неймана — Пирсона).

В такой общей постановке решение задачи обнаружения траектории пока отсутствует.

Другой подход к решению задачи состоит в том, что все предшествующие обнаружению траекторий операции (квантование, первичная обработка) считаются выполненными оптимально и в этих условиях необходимо выбрать критерий автозахвата и оценить его по вероятности правильного обнаружения.

В такой частной постановке в данном пункте рассматривается задача о вычислении вероятности обнаружения траекторий по критериям «m/m» и «l/m».

При вычислении вероятности обнаружения траекторий необходимо учитывать тот факт, что дальность до цели изменяется от обзора к обзору и в связи с этим вероятность обнаружения одиночных отметок будет нарастать или убывать в зависимости от того, приближается или удаляется цель по отношению к РЛС. Обычно считается, что автозахват траекторий производится на максимальной дальности по целям, приближающимся к РЛС. Поэтому имеет место нарастающая вероятность обнаружения цели в процессе автозахвата.

Зависимость вероятности обнаружения от дальности для импульсной РЛС можно получить, если уравнение дальности записать в следующем виде:

$$D^4 = \frac{P_и G^2 \lambda^2 \sigma_ц}{(4\pi)^3 k P_0}, \qquad (4.29)$$

где $P_и$ — излучаемая мощность *(вт)*;

G — коэффициент усиления антенны;

λ — рабочая длина волны $(м)$;

$\sigma_ц$ — эффективная отражающая поверхность цели $(м^2)$;

$\varkappa$ — коэффициент, учитывающий превышение принимаемого сигнала над помехой, необходимое для реализации заданной вероятности обнаружения;

P_0 — чувствительность приемника *(вт)*.

Из выражения (4.29) следует, что при фиксированных параметрах РЛС и эффективной отражающей поверхности цели дальность обнаружения есть функция от коэффициента $\varkappa$, а следовательно, и от заданной вероятности обнаружения. Введем нормированную дальность d следующим образом:

$$d = \frac{D}{D_{макс}} \varkappa^{-\frac{1}{4}},$$

где $D_{макс}$ — дальность действия радиолокатора при $\varkappa = 1$. Величину d можно рассматривать как коэффициент, учитывающий уменьшение дальности обнаружения по сравнению с максимальной, вследствие вероятностного характера процесса обнаружения. Следовательно, задача сводится к отысканию зависимости вероятности правильного обнаружения $P_{обн}$ от коэффициента d. При этом необходимо также учитывать заданную (фиксированную) вероятность ложного обнаружения, так что в окончательном виде необходимо получить зависимость

$$P_{обн} = f(d,\ P_{ло}).$$

В случае обнаружения некогерентной пачки импульсов на фоне собственных шумов, при условии оптимальной обработки пачки с точки зрения получения максимума отношения правдоподобия, вероятность ложного обнаружения определяется по следующей формуле [4]:

$$P_{ло} = \frac{1}{2^{N_0-1}(N_0-1)!} \int_{z}^{\infty} z^{2N_0-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad (4.30)$$

где N_0 — количество импульсов в пачке (пачка принимается прямоугольной формы);

x_0 — порог ограничения (амплитудного квантования).

Для вероятности правильного обнаружения нефлюктуирующей пачки в [4] получены асимптотические выражения:

$$P_{\text{обн}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \tag{4.31}$$

$$P_{\text{обн}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \tag{4.32}$$

где

$$y_0 = x_0 - \frac{0{,}707\sqrt{N_0}}{d^2} - \frac{(2N_0 - 1)}{\sqrt{2N_0}} d^2; \tag{4.33а}$$

$$b = \frac{x_0 - N_0\left(1 + \frac{1}{2d^4}\right)}{\sqrt{N_0\left(1 + \frac{1}{d^4}\right)}}. \tag{4.33б}$$

Точность формулы (4.31) с ростом N_0 ухудшается, а точность формулы (4.32) возрастает. Этим и определяются границы их применимости. По формуле (4.30) для заданной вероятности ложного обнаружения $P_{\text{ло}}$ при различных N_0 находятся значения порога x_0, которые затем подставляются в формулы (4.33а) и (4.33б). По формулам (4.31) и (4.32) при различных значениях d вычисляются соответствующие вероятности правильного обнаружения нефлюктуирующей цели. Для быстро флюктуирующей цели вероятность обнаружения вычисляется по формуле [4]

$$P_{\text{обн}} = \frac{1}{2^{N_0-1}(N_0-1)!} \int_{\frac{x_0}{\sqrt{1+\frac{1}{d^2}}}}^{\infty} z^{2N_0-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{4.34}$$

Графики зависимости вероятности правильного обнаружения от нормированной дальности d для широкого диапазона значений количества интегрируемых (идеальным интегратором) импульсов и вероятностей ложного обнаружения построены в работе [48]. При этом учитывался также характер флюктуаций отражающей по-

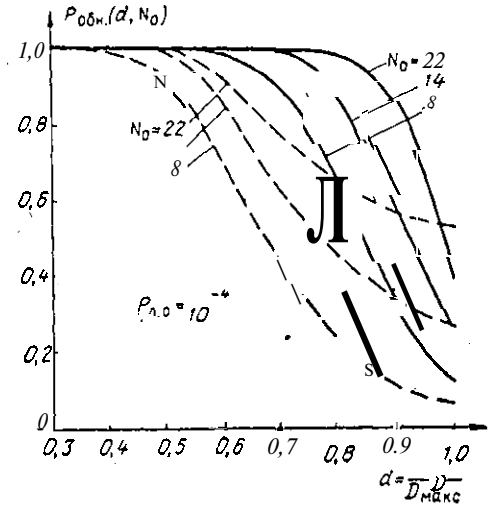


Рис. 4.4. Зависимость вероятности обнаружения от нормированной дальности:
——— быстро флюктуирующая цель:
——— нефлюктуирующая цель.

верхности цели (нефлюктуирующая, медленно флюктуирующая и быстро флуктуирующая цель).

На рис. 4.4 для иллюстрации приведены заимствованные из [48] графики вероятности обнаружения в функции от нормированной дальности, при числе импульсов в пачке $N_0=8$, 14, 22, $P_{ло}=10^{-4}$, для нефлюктуирующей и быстро флюктуирующей цели.

Расчет нарастающей вероятности обнаружения цели производится следующим образом. Если заданы параметры РЛС и эффективная отражающая поверхность цели, то по формуле (4.29) при $\varkappa=1$ рассчитывается $D_{макс}$. Кроме того, по заданным частоте посылок $F_п$, ширине диаграммы направленности 2φ и скорости вращения антенны $\Omega_а$ находится No. Характером флюк-

туаций цели задаются. После этого по графикам легко найти вероятность обнаружения (при фиксированной $P_{ло}$) на максимальной дальности (при $d=1$), а затем и нарастающую вероятность обнаружения с уменьшением d.

Теперь зная как вычисляется нарастающая вероятность обнаружения одиночных отметок, можно перейти к определению вероятности обнаружения траекторий при фиксированном критерии автозахвата типа «m/m» или «l/m». Эта вероятность вычисляется по следующей рекуррентной формуле:

$$P_i = P_{i-1} + \Delta P_i, \tag{4.35}$$

где ΔP_i — вероятность обнаружения траектории впервые в i-м обзоре.

Для критерия «m/m» ΔP_i вычисляется по следующей формуле:

где $p_i = p(d_i)$ — вероятность обнаружения отметки на нормированной дальности d_i;

$$d_i = d_{i-1} \pm v_d T_0;$$

v_d — нормированная радиальная скорость цели.

Расчет вероятности обнаружения траектории начинается с $d_0=1$.

Для критерия «3/4» вычисление ΔP_i производится по следующей формуле:

$$\begin{aligned}\Delta p_i = {} & p_i p_{i-1} p_{i-2} q_{i-3} q_{i-4} (1 - P_{i-5}) + \\ & + p_i p_{i-1} q_{i-2} p_{i-3} q_{i-4} (1 - P_{i-5}) + \\ & + p_i q_{i-1} p_{i-2} p_{i-3} q_{i-4} q_{i-5} (1 - P_{i-6}).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Аналогичным образом вычисляется Δp_i для других критериев типа «l/m». На рис. 4.5 построены графики нара-

стающей вероятности обнаружения траектории нефлюктуирующей цели с $N_0 = 14$, в функции от нормированных дальности d и радиальной скорости перемещения цели v_d, при критериях автозахвата «3/3» и «2/2». Графики позволяют проследить влияние скорости перемещения цели на дальность обнаружения траектории с определенной вероятностью (надежностью). Для сравнения на этом же графике пунктиром нанесена кривая зависи-

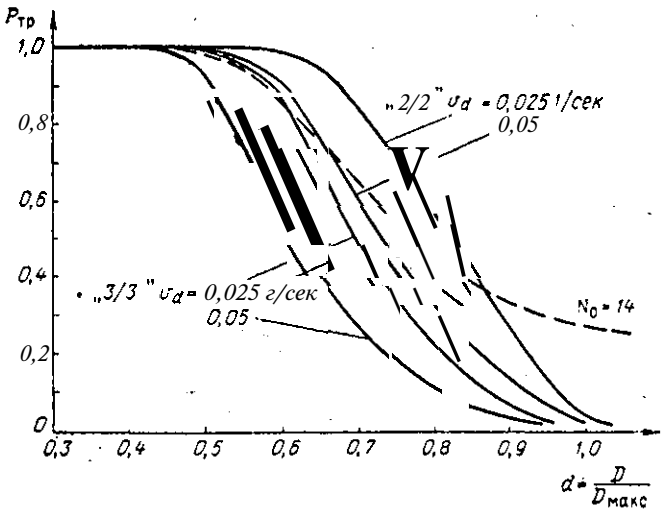


Рис. 4.5. Нарастающая вероятность обнаружения траектории (нефлюктуирующая цель).

мости вероятности обнаружения одиночной отметки от нормированной дальности.

В заключение отметим еще раз, что в данном случае вероятность обнаружения траектории вычислялась без учета влияния ложных отметок, так как с самого начала было сделано допущение о независимости траекторий истинных целей и помех.

Если же учитывать возможность взаимодействия истинных и ложных траекторий, то задача значительно усложняется.

Решение задачи в общем виде может быть получено поэтапным (пошаговым) путем, подобно тому, как вычислялась вероятность обнаружения пачки в помехах.

§ 4.4. ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КООРДИНАТ И ПАРАМЕТРОВ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЦЕЛИ

4.4.1. Постановка задачи

Задача оптимальной оценки координат и параметров траектории движущейся цели формулируется следующим образом. С устройства автозахвата через равные промежутки времени T_0, определяемые периодом вращения антенны станции, на вход устройства автосопровождения поступает информация о координатах цели. Эта информация искажается помехами, которые проявляются в случайных отклонениях цели от заданной траектории, в ошибках измерения координат и т. д. По дискретным отметкам, полученным с ошибками, необходимо построить траекторию движения цели. Для этого сначала надо выбрать функцию $Y(t)$, описывающую изменение координат во времени, а затем найти оценки параметров этой функции. Функция $Y(t)$ получила название сглаживающей функции. Выбор типа сглаживающей функции соответствует выбору гипотезы о законе движения цели.

При решении задач синтеза оптимальных алгоритмов оценки координат и параметров движущихся целей в дальнейшем принимаются следующие упрощающие предположения.

1. Система сопровождает только одну цель.

2. Траектория цели лежит в горизонтальной плоскости.

3. Входные данные (результаты наблюдения) поступают в прямоугольной системе координат x, y или преобразуются в эту систему координат в процессе предыдущих этапов обработки.

4. Каждая из координат представляется временным полиномом. Степень полинома задается соответствующими гипотезами. Коэффициенты полинома случайны и могут принимать произвольные значения. Корреляционная связь между коэффициентами полинома отсутствует.

5. Система сопровождения работает по каждой координате в отдельности. Решение ищется для одной ко-

ординаты y. Решение для другой координаты x будет аналогичным.

При принятых предположениях поставленная задача сводится к оценке математического ожидания полиномиальной функции со случайными коэффициентами.

Задачи синтеза линейных оптимальных систем сглаживания и экстраполяции случайных функций времени на основе критерия среднеквадратичной ошибки решались в работах Заде и Рагаззини [44], Лииса [45] и др. Общая теория синтеза динамических систем на основе критерия минимума среднеквадратичной ошибки разработана В. С. Пугачевым [49], В. П. Перовым [50] и другими советскими учеными.

В настоящем параграфе задача синтеза оптимальных алгоритмов сглаживания и экстраполяции координат, представленных в виде полинома со случайными коэффициентами, решается на основе критерия максимального правдоподобия.

4.4,2. Применение методе максимального правдоподобия для оценки математического ожидания полиномиальной функции

Пусть $Y(\vartheta, t)$ — случайная функция времени и параметров, представляющая собой аддитивную смесь полезного сигнала $y(\vartheta, t)$ и помехи $N(t)$:

$$Y(\vartheta, t) = y(\vartheta, t) + N(t).$$

Полезный сигнал (координата) представляется полиномом со случайными коэффициентами, т. е.

$$y(\vartheta, t) = \vartheta_0 + \vartheta_1 t + \vartheta_2 t^2 + \ldots + \vartheta_s t^s = \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t^r. \quad (4.38)$$

Помеха (случайные колебания цели вокруг заданной траектории и ошибки измерения координат) имеет нормальное распределение с известной корреляционной функцией и равным нулю средним значением. Требуется найти оценку математического ожидания функции $Y(\vartheta, t)$ по результатам наблюдения одной ее реализации в дискретном ряде точек $t_1, t_2 \ldots t_n$.

Сформулированная задача сводится к оценке векторного параметра ϑ, составляющими которого являются величины $\vartheta_r (r = 1, 2 \ldots s)$, по результатам наблюдения

случайного вектора Y с составляющими $y_i = y(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Для решения задачи необходимо сначала найти функцию правдоподобия n-мерной выборки случайной функции $Y(\vartheta, t)$. Поскольку случайная функция $Y(\vartheta, t)$ распределена нормально, каждая выборка из этой случайной функции представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения. Поэтому функция правдоподобия n-мерной выборки случайной функции $Y(\vartheta, t)$ соответствует функции правдоподобия η-мерной системы коррелированных нормально распределенных случайных величин.

Соответствующая нормальному закону n-мерная функция правдоподобия по определению равна

$$L(y_1, y_2, \ldots, y_n/\vartheta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |B_r|}} \exp\left\{-\frac{1}{2|B_{nn}|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\xi_i\xi_j\right\}, \quad (4.39)$$

где $|B_{nn}|$ — определитель корреляционной матрицы помехи, элементы которого равны $R_{ij} = R_N(t_i, t_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$;

$$|B_{nn}| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} \end{vmatrix}; \quad (4.40)$$

$$R_{ij} = R_{ji};$$

$$R_{ii} = \sigma_i^2;$$

K_{ij} — алгебраическое дополнение элемента R_{ij} в определителе $|B_{nn}|$, представляющее собой определитель матрицы, полученной из матрицы B_{nn} вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Величина ξ_i определяется выражением

$$\xi_i = y_i - M[y_i]$$

или, с использованием выражения (4.38),

$$\xi_i = y_i - \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_i^r \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.41}$$

Аналогично

$$\xi_j = y_j - \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_i^r \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.41a}$$

Воспользуемся теперь общим правилом нахождения оценок по методу максимального правдоподобия. Для этого найдем сначала логарифм функции правдоподобия:

$$\ln L(y_1, y_2, \ldots, y_n/\vartheta) =$$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |B_{nn}|}} - \frac{1}{2|B_{nn}|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \xi_i \xi_j. \tag{4.42}$$

Дифференцируя выражение (4.42) по составляющим ϑ_r векторного параметра ϑ, получим

$$\frac{\partial \ln L(y_1, y_2, \ldots, y_n/\vartheta)}{\partial \vartheta_r} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln L}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \vartheta_r} =$$

$$= \frac{1}{2|B_{nn}|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \xi_j \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_i^r.$$

Подставляя в полученное выражение значение ξ_j из выражения (4.41а) и приравнивая результат нулю при $\vartheta_r = \vartheta^*_r$, получим систему уравнений максимального правдоподобия

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{K_{ij}}{|B_{nn}|} \left[y_j - \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_j^r \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_i^r \Big|_{\vartheta_r = \vartheta^*_r} = 0. \tag{4.43}$$

Решив эту систему уравнений относительно ϑ_r, получим выражения для алгоритмов оптимальной оценки коэффициентов временного полинома (параметров, описывающих процесс изменения во времени координаты *y*).

Подставив оценки коэффициентов ϑ^*_r в (4.38), получим оценку сглаженного значения координаты y в момент n последнего наблюдения

$$y^*(t_n) = \sum_{r=0}^{s} \vartheta^*_r t_n^r. \qquad (4.44)$$

Аналогичным образом может быть получена оценка экстраполированной координаты на любой момент времени $t_l (l > n)$ путем подстановки в формулу (4.44) вместо t_n значения t_l.

В частном случае, когда на интервале между двумя соседними выборками помеха некоррелирована, т. е.

$$R_N(t, t') = 0 \text{ при } t \neq t',$$

корреляционная матрица превращается в диагональную, определитель которой равен

$$|B_{nn}| = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}.$$

Если, кроме того, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma^2 = \sigma^2$, то

$$\frac{K_{ij}}{|B_{nn}|} = \frac{1}{\sigma^2} \text{ при } i = j.$$

В этом случае система уравнений правдоподобия сильно упрощается и записывается так:

$$\sum_{l=1}^{n} \left[y_j - \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_j^r \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_l^r \Big|_{\vartheta_r = \vartheta^*_r} = 0. \qquad (4.45)$$

Именно для этого случая будут в дальнейшем получены окончательные формулы для оценок параметров и координат.

4.4.3. Алгоритмы оценки параметров и координат при равноточных независимых наблюдениях

Для вывода расчетных формул воспользуемся системой уравнений (4.45). Напомним, что в этой системе уравнений обозначено:

$y_i = y_i(t_i)$ — наблюдаемое значение координаты в момент времени t_i;

$\sum_{r=0}^{s} \vartheta_r t_i^r$ — сглаживающая функция, описывающая математическое ожидание координаты y.

Если учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_0}\sum_{r=0}^{s}\vartheta_r t_i^r = 1,\ \frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\sum_{r=0}^{s}\vartheta_r t_i^r = t_i,\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial \vartheta_s}\sum_{r=0}^{s}\vartheta_r t_i^r = t_i^s,$$

то систему уравнений (4.45) можно записать в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}\left(y_l - \sum_{r=0}^{s}\vartheta^*_r t_l^r\right)1 = 0,\\
&\sum_{l=1}^{n}\left(y_l - \sum_{r=0}^{s}\vartheta^*_r t_l^r\right)t_l = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{l=1}^{n}\left(y_l - \sum_{r=0}^{s}\vartheta^*_r t_l^r\right)t_l^s = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.46)$$

В системе (4.46) $(s+1)$ уравнение с $(s+1)$ неизвестными. Все уравнения являются линейными относительно коэффициентов ϑ^*_r.

Это значит, что устройство для оценки параметров и координат цели при нормальной статистике помех является линейным.

Дальнейшее решение системы уравнений (4.46) зависит от выбранной рабочей гипотезы о характере изменения координаты во времени. Выбор рабочей гипотезы соответствует априорному предположению о характере действительной траектории цели, подлежащей сопровождению при вторичной обработке. Для аэродинамических

целей (самолетов, крылатых ракет) наиболее характерными являются прямолинейное равномерное движение и маневр с постоянной угловой скоростью. В соответствии с этим в дальнейшем будем использовать две рабочие гипотезы: гипотеза 1 о равномерном прямолинейном Изменении координаты и гипотеза 2 о изменении координаты по кривой второго порядка.

Рассмотрим частные решения системы (4.46) для указанных двух гипотез о характере изменения координат.

1. Если координата y описывается полиномом первой степени, то значение ее математического ожидания в i-й точке наблюдения (в i-м обзоре) записывается в виде:

$$y_i = y_0 + v_y t_i.$$

Следовательно, система уравнений, подлежащая решению, в этом случае будет

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y^*_0 - v^*_y t_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - y^*_0 - v^*_y t_i)\, t_i &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Раскрывая скобки и производя операцию суммирования, получим

$$\left.\begin{aligned} n y^*_0 + v^*_y \sum_{i=1}^{n} t_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ y^*_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + v^*_y \sum_{i=1}^{n} t_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i t_i. \end{aligned}\right\} \qquad (4.47)$$

Решая систему уравнений (4.47) относительно y^*_0 и v^*_y, получим

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{i=1}^{n}}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} t_i^2},$$

$$v^*_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} t_i - n \sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} t_i^2}, \qquad (4.48)$$

Формулы (4.48) значительно упрощаются, если результаты наблюдений y_i поступают через равные промежутки времени, что соответствует случаю сопровождения цели по данным одной РЛС. Приняв момент первого учитываемого наблюдения за нулевой *отсчет* времени, получим для следующих наблюдений:

$$t_i = (i-1)T_0, \qquad (4.49)$$

где i — номер наблюдения;

T_0 — период вращения антенны РЛС.

С учетом (4.49) система уравнений (4.47) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} n y^*_0 + u^*_y \sum_{i=1}^{n} (i-1) &= \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ y^*_0 \sum_{i=1}^{n} (i-1) + u^*_y \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i (i-1), \end{aligned}\right\} \qquad (4.50)$$

где $u^*_y = v^*_y T_0$ — оценка приращения координаты за обзор.

Воспользуемся выражениями [51]:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Подставив их в (4.50) и решив систему уравнений относительно искомых оценок y^*_0 и u^*_y, получим окончательно

$$y^*_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{6i-4-4n}{n(n+1)} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{y_0}(i), \qquad (4.51)$$

$$u^*_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{12}{n(n^2-1)} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{u_y}(i), \qquad (4.52)$$

где

$$\eta_{y_0}(i) = -\frac{\dots}{n(n+1)}; \qquad (4.51a)$$

$$\dots = \frac{12i - 6 - 6n}{n(n^2-1)}. \qquad (4.52a)$$

Функция $\eta(i)$ называется весовой функцией оценки соответствующего параметра.

Для примера рассмотрим применение полученных формул в простейшем случае, когда оценки начальной координаты и скорости производятся по результатам двух наблюдений $(n=2)$. Подставляя в формулы (4.51) и (4.52) $i=1, 2$, получим

$$v^*_y = \frac{y_2 - y_1}{T_0}.$$

Используя формулы (4.51) и (4.52), можно вычислить значение сглаженной на момент последнего (n-го) наблюдения координаты. Для этого запишем выражение для математического ожидания координаты в точке n в следующем виде:

$$y^*_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{y_0}(i) + \frac{1}{T_0} \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{u_y}(i)\, t_n. \qquad (4.53)$$

Подставив в выражение (4.53) вместо t_n его значение $t_n = (n-1)T_0$, получим

$$y^*_n = \sum^{n} \frac{6i - 2n - 2}{\dots} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{y_n}(i), \qquad (4.54)$$

где

$$\dots = \frac{6i - 2n - 2}{n(n+1)} \qquad (4.54a)$$

— весовая функция сглаживания координаты y.

Для определения оценки экстраполированной на один период обзора координаты в выражение (4.53) вместо t_n надо подставить:

$$t_{n+1} = nT_0.$$

Тогда, решая это уравнение, получим

$$y^*_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i - 2n - 4}{n(n-1)} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{y_{n+1}}(i), \qquad (4.55)$$

где

$$\eta_{y_{n+1}}(i) = \frac{6i - 2n - 4}{n(n-1)} \qquad (4.55а)$$

— весовая функция экстраполяции координаты y.

Аналогичным образом могут быть получелы значения координат, экстраполированных на произвольное число p обзоров. Для этого в формулу (4.53) вместо t_n надо подставить:

$$t_{n+p} = (n + p - 1)T_0.$$

Таким образом, получены выражения для оптимальных алгоритмов оценки параметров равномерно и прямолинейно изменяющейся координаты, а также для оценки сглаженных и экстраполированных значений этой координаты. Все выражения являются однотипными. Изменяются только значения весовой функции. Если оценка сглаженной координаты производится по двум ее наблюденным значениям ($n=2$), то, подставив в формулу (4.54) $i=1, 2$, получим

т. е. сглаженное значение координаты (при $n=2$) равно наблюденному ее значению в последней точке наблюдения.

Аналогично для экстраполированной на один обзор координаты при $n=2$ получим по формуле (4.55)

$$y^*_3 = 2y_2 - y_1.$$

На рис. 4.6 изображены рассчитанные по формулам (4.52а), (4.54а) и (4.55а) весовые функции оценки при-

ращения координаты за обзор, сглаженной координаты и экстраполированной координаты при числе точек наблюдения $n=3$.

Упрощенная структурная схема решающего устройства, реализующего полученные алгоритмы оценки по

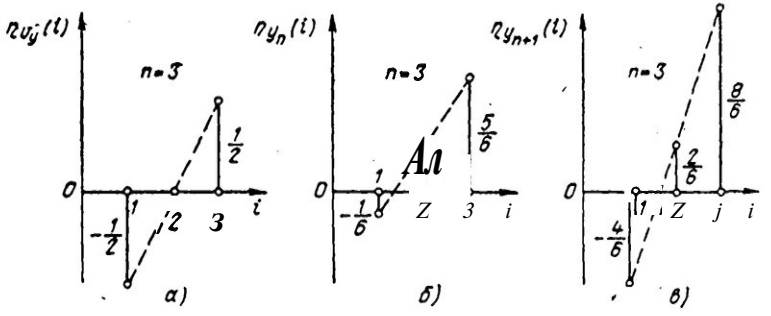


Рис. 4.6. Весовые функции оценки при $n=3$:
а — приращения координаты; *б* — сглаженной координаты; *а* — экстраполированной координаты.

трем последним наблюденным значениям координаты, приведена на рис. 4.7. В схему входит запоминающее устройство, прелназначенное для хранения двух наблю-

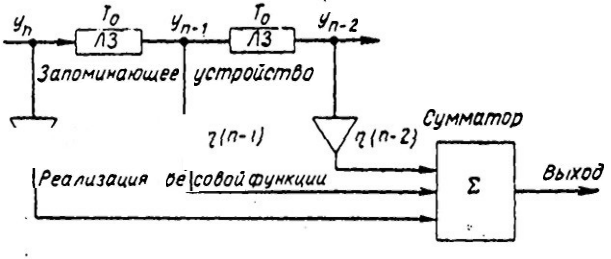


Рис. 4.7. Упрощенная схема решающего устройства для оптимальной оценки параметров и координат.

денных значений координаты, устройство для реализации весовой функции и суммирующее успройство. Запоминающее устройство реализовано в виде двух линий задержки на период обзора РЛС (T_0). Наблюденное значение координаты y_n в n-м (текущем) обзоре взвешивается в соответствии с весовым коэффициентом $\eta(n)$

и, кроме того, поступает на вход первой линии задержки. Значения координат y_{n-1} и y_{n-2}, полученные в $n-1$ и $n-2$ обзорах, после задержки на T_0 и $2T_0$ взвешиваются со своими весовыми коэффициентами. Взвешенные значения координат одновременно поступают на вход суммирующего устройства. На выходе суммирующего устройства получаются значения соответствующих оценок параметров или координат. Очевидно, для одновременной оценки, например, скорости, сглаженной координаты и экстраполированной координаты, необходимо иметь три различных устройства для реализации соответствующих весовых функций и три суммирующих устройства. При реализации вышеуказанных алгоритмов на цифровой вычислительной машине (ЦВМ) запоминание наблюденных координат производится в оперативном запоминающем устройстве ЦВМ, весовые функции в виде констант хранятся в долговременном запоминающем устройстве, а операция суммирования производится последовательно для каждой оцениваемой координаты (или параметра) в арифметическом устройстве ЦВМ.

2. При изменении координаты в соответствии с полиномом второй степени уравнение для сглаживающей функции в i-й точке наблюдения запишется в виде

$$y^*_i = y^*_0 + v^*_y t_i + \frac{a^*_y}{2} t_i^2$$

где y^*_0, v^*_y, a^*_y—оценки начальной координаты, скорости и ускорения соответственно. Система уравнений правдоподобия для этого случая запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y^*_0 - v^*_y t_i - \frac{a^*_y}{2} t_i^2\right) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y^*_0 - v^*_y t_i - \frac{a^*_y}{2} t_i^2\right) t_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y^*_0 - v^*_y t_i - \frac{a^*_y}{2} t_i^2\right) t_i^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.5G)$$

Или, раскрывая скобки и производя суммирование по n, получим

$$\left.\begin{aligned} ny^*_0 + v^*_y \sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{a^*_y}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ y^*_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + v^*_y \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \frac{a^*_y}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} y_i t_i, \\ y^*_0 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + v^*_y \sum_{i=1}^{n} t_i^3 + \frac{a^*_y}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i^4 &= \sum_{i=1}^{n} y_i t_i^2. \end{aligned}\right\} \quad (4.56a)$$

Решая систему уравнений (4,56а) относительно искомых оценок y^*_0, v^*_y и a^*_y, а затем используя полученные оценки параметров для нахождения оценок сглаженной и экстраполированной координаты, получим в окончательном виде

$$y^*_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{y_0}(i), \quad (4.57)$$

$$v^*_y = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{v_y}(i), \quad (4.58)$$

$$a^*_y = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{a_y}(i), \quad (4.59)$$

$$y^*_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{y_n} \quad (0. \quad (4.60)$$

$$y^*_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \eta_{y_{n+1}}(i), \quad (4.61)$$

где

$$\eta_{y_0}(i) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)} [3(n+1)(n+2) - 2i(6n+7) + 10i^2]; \quad (4.57a)$$

$$\eta_{v_y}(i) = -\frac{6}{T_0 n (n^2-1)(n^2-4)}[(n+1)(n+2)(6n-7) - 2i(16n^2-19) + 30i^2(n-1)]; \quad (4.58a)$$

$$\eta_{a_y}(i) = \frac{60}{T_0^2 n (n^2-1)(n^2-4)}[(n+1)(n+2) - 6i(n+1) + 6i^2]; \quad (4.59a)$$

$$\eta_{y_n}(i) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)}[(n+1)(n+2) - 2i(4n+3) + 10i^2]; \quad (4.60a)$$

$$\eta_{y_{n+1}}(i) = \frac{3}{n(n-1)(n-2)}[(n+2)(n+3) - 2i(4n+7) + 10i^2]. \quad (4.61a)$$

Полученные выражения показывают, что процедура оценки параметров и координат при использовании гипотезы 2 остается такой же, как и для случая гипотезы 1.

Ниже, в качестве примера, приводятся формулы для нахождения оценок параметров, а также сглаженных и экстраполированных значений координаты, изменяющейся в соответствии с полиномом второй степени при $n = 3$:

$$y^*_0 = y_1,$$

$$v^*_y = -\frac{1}{T_0}\left[\frac{1}{2}y_3 - 2y_2 + \frac{3}{2}y_1\right],$$

$$a^*_y = \frac{1}{T_0^2}[y_3 - 2y_2 + y_1],$$

$$y^*_3 = y_3,$$

$$y^*_4 = 3y_3 - 3y_2 + y_1.$$

Аналогичные расчетные формулы при других значениях n могут быть получены из общих формул (4.57)—(4.61).

4.4.4. Ошибки оценки параметров и координат при оптимальном сглаживании и экстраполяции

Рассмотрим сначала случай равномерного и прямолинейного изменения координаты (гипотеза *1)*. Для дисперсии ошибки оценки приращения координаты по определению имеем

$$\sigma^2_{u^*_v} = M[(\Delta u^*_v)^2] = M\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \eta_{u_v}(i)\Big)^2\Big] =$$

$$= M\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Delta y_i \Delta y_j \eta_{u_v}(i)\,\eta_{u_v}(j)\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_{u_v}(i)\,\eta_{u_v}(j)\,M(\Delta y_i \Delta y_j). \qquad (4.62)$$

Математическое ожидание произведения двух центрированных случайных величин является корреляционным моментом этих величин. Для рассматриваемой статистики помех корреляционный момент обладает следующим свойством:

$$M[\Delta y_i \Delta y_j] = R(\Delta y_i \Delta y_j) = \begin{cases} \sigma^2_v & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Учитывая это, выражение (4.62) можно записать в виде

$$\sigma^2_{u^*_v} = \sum_{i=1}^{n} (\eta_{u_v}(i))^2 \sigma^2_v.$$

Подставляя сюда значения η_u из (4.52а), получим

$$\sigma^2_{u^*_v} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v}{12\left[i^2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6n}\right]}\right)^2 =$$

$$= \frac{36\sigma^2_y}{[n(n^2-1)]^2} \sum_{i=1}^{n} (2i - n - 1)^2.$$

Используя выражения

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получим окончательно

$$\sigma_{u^*_y} = \sigma_y \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}. \tag{4.63}$$

Аналогично получаются формулы для среднеквадратичных ошибок оценки сглаженной и экстраполированной координаты.

Среднеквадратичная ошибка оценки сглаженной координаты определяется выражением

$$\sigma_{y^*_n} = \sigma_y \sqrt{\frac{2(2n-1)}{n(n+1)}}. \tag{4.64}$$

(4.64)

Среднеквадратичная ошибка экстраполированной на один обзор координаты равна

$$\sigma_{y^*_{n+1}} = \sigma_y \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n(n-1)}}. \tag{4.65}$$

В общем случае при экстраполяции координаты на ρ обзоров среднеквадратичная ошибка экстраполяции вычисляется по формуле

$$\sigma_{y_{n+p}} = \sigma_y \sqrt{2\frac{(n-1)(2n-1)+6p(n-1)+6p^2}{n(n^2-1)}}. \tag{4.66}$$

Для координаты, изменяющейся в соответствии с гипотезой 2, запишем окончательные формулы для ошибок оценки параметров v^*_y и a^*_y. Среднеквадратичная ошибка оценки скорости определяется по формуле

$$\sigma_{v^*_y} = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{T_0}\sqrt{\frac{(2n-1)(8n-11)}{n(n^2-1)(n^2-4)}}. \tag{4.67}$$

Среднеквадратичная ошибка оценки ускорения цели определяется по формуле

$$\sigma_{a^*_y} = \frac{12\sqrt{5}\sigma_y}{T_0^2\sqrt{n(n^2-1)(n^2-4)}} \tag{4.68}$$

На рис. 4.8 приведены графики относительных значений среднеквадратичных ошибок оценки параметров и координат по методу максимального правдоподобия. Пунктирными кривыми показаны относительные ошибки для гипотезы равномерного прямолинейного измене-

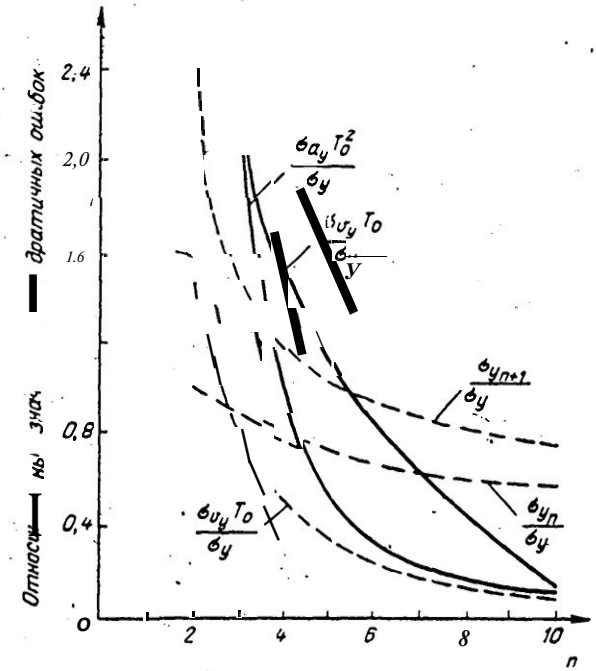


Рис. 4.8. Графики относительных значений среднеквадратичных ошибок оценки параметров и координат по методу максимального правдоподобия:
———— для гипотезы I; ———— для гипотезы 2.

ния координаты (неманеврирующая цель), а сплошными кривыми — соответствующие ошибки для гипотезы изменения координаты по полиномиальной кривой второго порядка (маневрирующая цель).

Анализ приведенных графиков показывает, что при оптимальном сглаживании и экстраполяции по методу максимального правдоподобия для получения высокой точности оценки параметров и координат необходим одновременный учет большого числа (5—6) предыдущих наблюдений.

В процессе автосопровождения реальных целей прямолинейные и криволинейные участки траектории чередуются случайным образом. Поэтому в системе автосопровождения необходимо иметь устройство (алгоритм), которое в соответствии с принятыми критериями должно производить выбор гипотез и переключение алгоритмов автосопровождения по каждой цели. Цель, движущаяся по прямолинейной траектории, считается неманеврирующей. Цель, движущаяся по кривой второго порядка, считается маневрирующей. В задачу указанного выше устройства входит обнаружение факта изменения характера движения цели, т. е. обнаружение маневра цели.

В качестве критерия наличия маневра по координате формально может быть принято неравенство нулю оценки ускорения. В соответствии с этим критерием, например при $n=3$, маневр отсутствует, если

$$y_3 - 2y_2 + y_1 = 0,$$

т. е.

$$y_2 = \frac{y_3 + y_1}{2}. \tag{4.69}$$

Однако вследствие наличия случайных ошибок в измерении координаты равенство (4.69) никогда не будет выполняться. Поэтому такой метод обнаружения маневра практически непригоден.

С вероятностью, примерно равной 0,68, маневр по координате может быть обнаружен путем сравнения дисперсии оценки ускорения с дисперсией наблюденной координаты. Алгоритм обнаружения маневра в этом случае записывается в виде:

$$\sigma^2_{a^*_y} \geqslant K\sigma^2_y \text{ — имеется маневр,}$$
$$\sigma^2_{a^*_y} < K\sigma^2_y \text{ — маневр отсутствует,}$$

а устройство обнаружения маневра (УОМ) представляет собой пороговое устройство.

Порог K УОМ зависит (при фиксированном значении σ^2_y) от числа подряд следующих наблюденных значений координаты, используемых для расчета ускорения. При $n=$

$=3$ и $T_0=1$ по формуле (4.68) получаем $\sigma^2_{a^*_y}=6\sigma^2$. Следовательно, в этом случае $K=6$. При $n=4$ $\sigma^2_{a^*_y}=\sigma^2_y$. Порог K в этом случае будет равен единице. С увеличением n порог будет уменьшаться, что способствует повышению чувствительности УОМ. Однако при этом увеличивается время выявления маневра. С этой точки зрения, брать число n больше 4—5 нецелесообразно.

4.4.5. Оптимальная оценка параметров и координат при наличии независимых наблюдений скорости

Рассмотрим решение задачи оптимальной экстраполяции и сглаживания координаты для случая, когда наряду с наблюденными значениями координаты в составе входной информации имеются независимые наблюдения скорости изменения этой координаты. Очевидно, использование этой дополнительной информации позволит производить сглаживание и экстраполяцию с большей точностью.

Пусть координата цели $y(t)$ изменяется равномерно и прямолинейно, т. е.

$$y(t)=y_0+v_y t.$$

Наблюденные значения координаты $y(t_i)=y_i$ будем считать равноточными с дисперсией σ^2_y. Наблюденные значения скорости v_{y_i} также считаются равноточными с дисперсией σ^2_v.

В нашу задачу входит определение статистических оценок параметров y^*_0 и v^*_y, а также статистических оценок сглаженной координаты $y^*(t_n)=y^*_n$ и экстраполированной координаты y^*_{n+1}. Как и раньше, для определения статистических оценок будем применять метод максимального правдоподобия.

Поскольку результаты наблюдений подчинены нормальному закону распределения вероятности и по принятому допущению некоррелированы, то функция правдоподобия для искомых параметров запишется в виде

$$L(y_1,\ldots,y_n;\ v_{y_1},\ldots,v_{y_n}/y^*_0,\ v^*_y)=$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_{v_y}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y^*_i)^2}{\sigma_y^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(v_{y_i} - v^*_y)^2}{\sigma_{v_y}^2} \right] \right\}. \quad (4.70)$$

где $y^*_i = y^*_0 + v^*_y t_i$ — значение сглаженной координаты в точке t_i;

v^*_y — значение сглаженной скорости, одинаковое для всех i.

После логарифмирования выражения (4.70) получим

$$\ln L = \ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_{v_y}}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y^*_i)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma_{v_y}^2}\sum_{i=1}^{n}(v_{y_i} - v^*_y)^2 \right]. \quad (4.71)$$

Для определения оптимальных оценок параметров y^*_0 и v^*_y продифференцируем (4.71) по этим параметрам и приравняем результаты нулю. Получающиеся при этом уравнения правдоподобия имеют следующий вид:

$$ny^*_0 + v^*_y \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$\frac{1}{\sigma_y^2}\left(y^*_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + v^*_y \sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) + \frac{1}{\sigma_{v_y}^2} n v^*_y =$$

$$= \frac{1}{\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{n} y_i t_i + \frac{1}{\sigma_{v_y}^2}\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}.$$

Теперь, имея в виду, что данные поступают равнодискретно с периодом T_0, т. е.

$$t_i = (i-1)T_0,$$

а также с учетом известных соотношений

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{n(n-1)}{2},\quad \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

получим уравнения правдоподобия в следующем виде:

$$ny^*_0+\frac{n(n-1)}{2}T_0v^*_v=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$\frac{n(n-1)}{2}y^*_0+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}T_0v^*_v+\frac{\sigma^2_y}{\sigma^2_{v_v}T_0}nv^*_v=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(i-1)y_i+\frac{\sigma^2_y}{\sigma^2_{v_v}T_0}\sum_{i=1}^{n}v_{y_i}.$$

Обозначим

$$v_v T_0 = u_v,$$

$$\frac{\sigma^2_y}{\sigma^2_{v_v}T^2_0}=c,\quad v_{y_i}T_0=s_{y_i}:$$

Используя эти обозначения, получим уравнения правдоподобия в окончательном виде

$$\left.\begin{aligned} ny^*_0+\frac{n(n-1)}{2}u^*_v&=\sum_{i=1}^{n}y_i,\\ \frac{n(n-1)}{2}y^*_0+\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+cn\right]u^*_v&=\\ =\sum_{i=1}^{n}[(i-1)y_i+cs_{y_i}]&. \end{aligned}\right\} \quad (4.72)$$

Решение системы уравнений (4.72) дает следующие результаты:

$$y^*_0 = \frac{2(n-1)}{n(n^2-1+12c)}\left[\sum_{l=1}^{n}\left(2n+2-3l+\frac{6c}{n-1}\right)y_l - \right.$$

$$\left. - 3c\sum_{l=1}^{n} s_{y_l}\right], \qquad (4.73)$$

$$u^*_y = \frac{6}{n(n^2-1+12c)}\left[\sum_{l=1}^{n}(2i-n-1)\,y_i + 2c \quad s_{y_i}\right]. \qquad (4.74)$$

При $c=0$, что соответствует случаю, когда измерения скорости отсутствуют ($\sigma_{v_y}=\infty$), полученные формулы для оценок y^*_0 и v^*_y совпадают с аналогичными формулами, полученными в п. 4.4.3.

Сглаженное значение координаты y^*_n на момент последнего наблюдения t_n находится, как и раньше, из выражения

$$y^*_n = y^*_0 + (n-1)\,u^*_y.$$

Подставляя в это выражение определяемые по формулам (4.73) и (4.74) значения y^*_0 и u^*_y, получим

$$y^*_n = \frac{2(n-1)}{n(n^2-1+12c)}\left[\sum_{l=1}^{n}\left(3i-n-1+\frac{6c}{n-1}\right)y_i + \right.$$

$$\left. + 3c\sum_{l=1}^{n} s_{y_l}\right]. \qquad (4.75)$$

Аналогично может быть получено экстраполированное значение координаты на один или несколько обзоров. Для экстраполяции на один обзор имеем

$$y^*_{n+1} = y^*_n + nu^*_y,$$

или, с учетом выражений (4.73) и (4.74), получим

$$\left(\frac{n(n^2-1+12c)}{12}\right)\hat{s}_{y_n} = \sum_{i=1}^{n}\left(3i-n-2+\frac{6c}{n+1}\right)y_i + \\ +3c\sum_{i=1}^{n}s_{y_i}. \qquad (4.76)$$

Если в составе входной информации отсутствуют данные о скорости ($c=0$), то формулы (4.75) и (4.76) совпадают с формулами (4.54) и (4.55).

Использование независимых наблюдений скорости несколько усложняет алгоритмы оценки параметров и координат цели. Очевидно, применение этих алгоритмов будет оправдано только в случае, если при этом получается существенное уменьшение ошибок оценки.

Подход к вычислению дисперсий ошибок оценки параметров, сглаженных и экстраполированных координат на основе линейной комбинации некоррелированных результатов наблюдений обсуждался в п. 4.4.4. Ниже приводятся (без вывода) формулы для расчета ошибок оценки скорости и сглаженной координаты при наличии наблюденных значений скорости и производится сравнение этих ошибок с соответствующими ошибками при отсутствии наблюдений скорости.

Формула для дисперсии ошибок оценки скорости имеет вид

$$\sigma^2_{\dot{y}_n} = \frac{12\sigma^2_y}{n(n^2-1+12c)}. \qquad (4.77)$$

Дисперсия ошибок оценки сглаженной координаты определяется по формуле

$$\sigma^2_{y_n} = \frac{4(n-1)^2\sigma^2_y}{n(n^2-1+12c)^2}\left[\frac{(n+1)(2n-1)}{2}+\right. \\ \left.+\frac{3c(5n-1)}{n-1}+\frac{36c^2}{(n-1)^2}\right]. \qquad (4.78)$$

На рис. 4.9 приведены графики дисперсий ошибок, рассчитанных по формулам (4.77) и (4.78) при $c=1$.

Для оравнения на этом же рисунке приведены графики дисперсий соответствующих ошибок при отсутствии независимых наблюдений скорости (пунктирные кривые).

Сравнение графиков показывает, что дисперсии ошибок оценки скорости и сглаженной координаты при на-

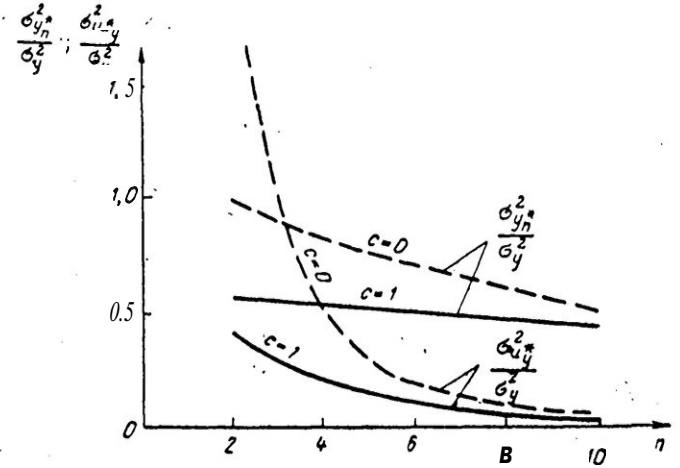


Рис. 4.9. Графики относительных значений дисперсии ошибок оценки сглаженной координаты и приращения координаты:
———— при наличии независимых наблюдений скорости ($c=1$);
———— без наличия независимых наблюдений скорости ($c=0$).

личии наблюдений скорости существенно уменьшаются. Так, для малых n и $c=1$ дисперсия ошибки сглаженной координаты уменьшается на 30—40%, а дисперсия ошибки оценки скорости — более чем в 2 раза,

§ 4.5. ОПТИМАЛЬНОЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ КООРДИНАТЫ И СКОРОСТИ ЕЕ ИЗМЕНЕНИЯ

4.5.1. Введение

В настоящем параграфе рассматриваются метод и алгоритмы последовательного (итерационного) сглаживания координат и параметров. Сущность этого метода состоит в том, что сглаженные значения (оценки) в очередном (n-м) обзоре определяются по предыдущим (по-

лученным в $n-1$ обзоре) сглаженным значениям и результатам последнего (в n-м обзоре) наблюдения. Независимо от числа наблюдений при оценке используются только два числа: предыдущая оценка и результат ново: го наблюдения. При этом требования к емкости ЗУ и быстродействию аппаратуры значительно уменьшаются, а точность выходных данных повышается.

4.5.2. Алгоритм последовательного сглаживания при равноточных наблюдениях

При синтезе алгоритмов последовательного сглаживания можно исходить из рекурсивного метода наименьших квадратов [52]. Этот метод позволяет последовательно находить оценки, оптимальные в смысле минимума среднеквадратичной ошибки приближения к истинному значению оцениваемого параметра при условии, что результаты соседних наблюдений некоррелированы. Каждому наблюдению при этом приписывается вес, обратно пропорциональный дисперсии наблюденного значения.

Если принять, как в предыдущем параграфе, что наблюденные значения координаты некоррелированы в соседних обзорах и распределены по нормальному закону, то метод наименьших квадратов дает те же результаты, что и метод максимального правдоподобия.

Воспользуемся полученными ранее уравнениями правдоподобия и выведем формулы последовательного сглаживания координаты и скорости ее изменения для случая гипотезы о равномерном и прямолинейном движении цели.

Запишем исходные уравнения правдоподобия в следующем виде:

$$n y^*_{0n} + u^*_n \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad (4.79а)$$

$$y^*_{0n} \sum_{i=1}^{n} (i-1) + u^*_n \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i (i-1). \qquad (4.79б)$$

Индекс n у оценок здесь обозначает, что они составлены по результатам n наблюдений.

Запишем теперь уравнение, подобное (4.79а), для случая $n-1$ наблюдений:

$$(n-1)\,y^*_{0n-1}+u^*_{n-1}\sum_{i=1}^{n}=\sum_{i=1}^{n-1}y_i.$$

Вычитая это уравнение из уравнения (4.79а), получим

$$n\,(y^*_{0n}-y^*_{0n-1})+(u^*_n-u^*_{n-1})\sum_{i=1}^{n}(i-1)=$$

$$=y_n-[y^*_{0n-1}+(n-1)u^*_{n-1}].$$

Учитывая далее, что

$$y^*_{n-1}=y^*_{0n-1}+(n-2)\,u^*_{n-1},$$

где y^*_{n-1} — сглаженное значение координаты по данным $n-1$ наблюдений, получим окончательно

$$n\,(y^*_{0n}-y^*_{0n-1})+\frac{n\,(n-1)}{2}\,(u^*_n-u^*_{n-1})=$$

$$=y_n-(y^*_{n-1}+u^*_{n-1}). \qquad (4.80)$$

Аналогично, уравнение, подобное (4.79б), для случая $n-1$ наблюдений имеет вид

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(i-1)-(n-1)\Big]\,y^*_{0n-1}+$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2-(n-1)^2\Big]\,u^*_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)\,y_i.$$

Вычитая это уравнение из уравнения (4.79б) и раскрывая выражения под знаком суммы, после несложных преобразований получим:

$$n\,(y^*_{0n}-y^*_{0n-1})+\frac{n\,(2n-1)}{3}\,(u^*_n-u^*_{n-1})=$$

$$=2\,[y_n-(y^*_{n-1}+u^*_{n-1})]. \qquad (4.81)$$

Решая теперь совместно уравнения (4.80) и (4.81) относительно u^*_n, получим

$$u^*_n = u^*_{n-1} + \beta_n [y_n - (y^*_{n-1} + \text{ttV}_{(}1. \quad (4.82)$$

где

$$\beta_n = \frac{6}{n(n+1)}. \quad (4.82а)$$

Легко видеть, что

$$y^*_{n\text{э}} = y^*_{n-1} + u^*_{n-1}$$

представляет собой экстраполированное значение координаты на момент n-го наблюдения по данным $n-1$ наблюдений. Поэтому выражение (4.82) можно записать в виде

$$u^*_n = {}^*_{n-1} + \beta_n (y_n - У_{n\text{э}}). \quad (4.83)$$

Выражение (4.83) при $T_0 = 1$ определяет сглаженное значение скорости как линейную комбинацию предыдущего сглаженного значения скорости и текущего отклонения (рассогласования) наблюденного значения координаты от рассчитанного по предыдущим данным экстраполированного значения координаты. Коэффициент β_n носит название коэффициента сглаживания скорости и должен вычисляться последовательно для каждого нового наблюдения.

Получим теперь формулы для последовательного сглаживания координаты. Для этого воспользуемся полученными ранее формулами (4.54) и (4.55) для оценок сглаженного и экстраполированного значения координаты по n ее наблюдениям.

Запишем формулу (4.54) для y^*_n в следующем виде:

$$y^*_n = \frac{2}{n(n+1)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (3i - n - 1) y_i + (2n - 1) y_n \right]. \quad (4.84)$$

Экстраполированное значение координаты $y^*_{n\text{э}}$ по данным $n-1$ наблюдений в соответствии с формулой (4.55) равно

$$y^*_{n\text{э}} = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum^{n-1} (3i - n - 1) y_i. \quad (4.85)$$

Сравнивая формулы (4.84) и (4.85), получим

$$y_n - \frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)} y^*_{n\text{э}} + \frac{2(2n-1)}{n(n+1)} y_n.$$

Обозначим

$$\alpha_n = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}. \qquad (4.86)$$

Тогда

$$y^*_n = (1-\alpha_n)\, y^*_{n\text{э}} + \alpha_n y_n$$

или

$$y^*_n = y^*_{n\text{э}} + \alpha_n (y_n - y^*_{n\text{э}}). \qquad (4.87)$$

Уравнение (4.87) определяет сглаженное значение координаты как линейную комбинацию ее экстраполиро-

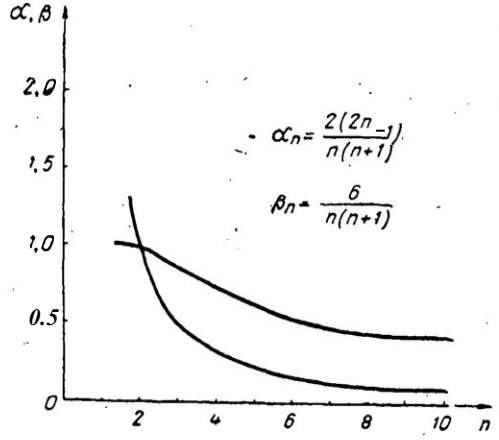


Рис. 4.10. Зависимость α_n и β_n от числа наблюдений n.

ванного (по результатам предыдущих наблюдений) значения и взвешенного с коэффициентом α_n рассогласования между экстраполированным и наблюденным значениями. Коэффициент α_n носит название коэффициента сглаживания координаты и должен последовательно вычисляться для каждого нового n по формуле (4.86).

На рис. 4.10 приведены графики зависимости коэффициентов α_n и β_n от числа наблюдений n. Из графиков видно, что с увеличением n коэффициенты сглаживания

координаты и. скорости асимптотически приближаются к нулю. Особенно быстро уменьшается коэффициент β_n. Отсюда следует, что с увеличением n результата последних наблюдений при сглаживании координаты и скорости должны учитываться все с меньшим весом, так что при достаточно больших n новые наблюденные значения координаты практически можно не учитывать.

Однако для реальных целей такой вывод не является оправданным по следующим причинам. Во-первых, движение даже неманеврирующей цели мож_ет быть описано полиномом первой степени только на весьма ограниченном участке наблюдения, так как не исключены слабые маневры или вообще полет на всем маршруте по кривой с малой крутизной (при использовании радионавигационных систем). Во-вторых, возможны случайные периодические отклонения цели от заданного маршрута ее полета. Хотя эти отклонения вообще-то не должны воспроизводиться системой, однако пренебрежение ими может привести к срыву сопровождения.

Все это говорит о том, что в реальных условиях значения коэффициентов сглаживания α_n и β_n ограничены снизу и для установившегося режима автосопровождения должны быть выбраны постоянными.

Схема вычислительного устройства, реализующего алгоритмы (4.83) и (4.87) последовательного сглаживания скорости и координаты, приведена на рис. 4.11. Основными элементами схемы являются сумматоры 1, 2, 3 и 4, которые выполняют операции алгебраического суммирования сигналов, представленных в цифровом виде (как правило, в двоичном коде). Первый сумматор вычисляет сигнал ошибки по результату последнего наблюдения y_n и экстраполированному значению координаты $y^*_{n\text{э}}$. Вычисленное значение сигнала ошибки используется для получения оценок y^*_n и u^*_n. Оценку y^*_n выдает четвертый сумматор, на вход которого подается взвешенный с постоянным коэффициентом веса α_n сигнал ошибки и экстраполированное значение координаты $y^*_{n\text{э}}$ с выхода третьего сумматора. Второй сумматор по результатам предыдущей оценки u^*_{n-1} и взвешенному с коэффициентом β_n сигналу ошибки выдает текущее сглаженное значение приращения координаты за обзор $u^*_n = v^*_n T_0$. Так как T_0 всегда известно, то отсюда сразу получается сглаженное значение скорости v^*_n. Третий

сумматор по результатам предыдущих (задержанных на период обзора T_0) оценок координаты y^*_{n-1} и приращения u^*_{n-1} вычисляет экстраполированное на момент последнего измерения значение координаты $y^*_{nэ}$. Сглаженные значения y^*_n и u^*_n выдаются потребителям, а $y^*_{nэ}$ поступает на вход первого сумматора и, кроме того, выдается в схему селекции отметок (см. § 4.7),

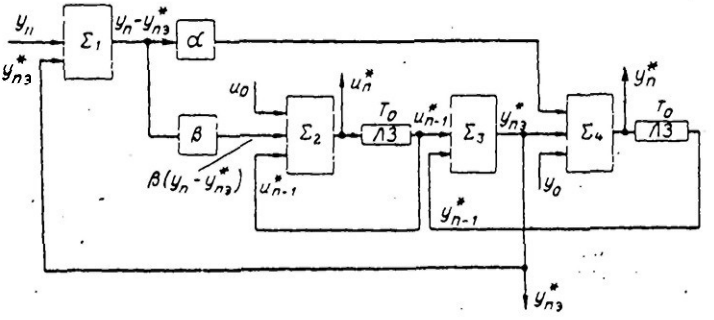


Рис. 4.11. Структурная схема вычислительного устройства для последовательного сглаживания координаты и скорости

Перед началом работы в схему должны быть введены начальные значения координаты y_0 и первого приращения u_0. Эти значения играют роль входных данных в момент времени $t=0$.

Оптимальные алгоритмы последовательного сглаживания могут быть получены также на основе модели движения со стационарными и независимыми вторыми приращениями.

Если исходить из модели движения со стационарными и независимыми вторыми приращениями, при условии равенства нулю его среднего значения, то формулы для оптимального последовательного сглаживания координаты и скорости имеют вид (6]

$$y^*_n = y^*_{nэ} + \frac{\sigma^2_{y^*_{nэ}}}{\sigma^2_{y^*_{nэ}} + \sigma^2_{y_n}} (y_n - y^*_{nэ}), \qquad (4.88)$$

$$u^*_n = u^*_{n-1} + \frac{R(y^*_{nэ}, u^*_{n-1})}{\sigma^2_{y^*_{nэ}} + \sigma^2_{y_n}} (y_n - y^*_{nэ}), \qquad (4.89)$$

где $\sigma^2_{y^*_{n\text{э}}}$ — дисперсия ошибки экстраполяции координаты (по данным $n-1$ наблюдений);

$\sigma^2_{y_n}$ — дисперсия ошибки n-го наблюдения координаты;

$R(y^*_{n\text{э}}, u^*_{n-1})$ — корреляционный момент связи экстраполированной координаты и сглаженного первого приращения координаты.

Обозначая в формулах (4.88) и (4.89)

$$\alpha_n = \frac{\sigma^2_{y^*_{n\text{э}}}}{\sigma^2 \quad \perp \sigma^2},$$

$$\beta_n = \frac{R(y^*_{n\text{э}}, u^*_{n-1})}{\sigma^2_{y^*_{n\text{э}}} + \sigma^2_{y_n}},$$

видим, что эти формулы в точности совпадают с формулами (4.87) и (4.83), которые мы получили, исходя из полиномиальной модели движения. Следовательно, различие в подходах к описанию модели движения не изменяет общего алгоритма последовательного сглаживания координаты и скорости. Этим еще раз подчеркивается тот факт, что независимо от интерпретации входных сигналов (случайный или детерминированный процесс) способ их обработки для получения оптимальных оценок остается одинаковым. Измениться могут только пороги, настройка, весовые коэффициенты и т. д., которые доступны регулировке или самонастройке в процессе эксплуатации соответствующей аппаратуры. Так и в нашем случае коэффициенты α_n и β_n теперь оказываются зависящими не непосредственно от числа наблюдений, а от величин дисперсий и корреляционных моментов связи сглаженных значений скорости и координаты, а также от дисперсии наблюденного значения координаты. С ростом n дисперсия и корреляционный момент связи сглаженных значений уменьшаются, что приводит к уменьшению α_n и β_n. Установление этих коэффициентов в реальных условиях обусловлено теми же факторами, что и в ранее рассмотренном случае.

Остановимся теперь на задаче последовательной оценки координат и параметров маневрирующей цели.

Если в процессе автосопровождения ставится задача оценки ускорения движения цели, то, естественно, необ-

ходимо для этого предусмотреть соответствующие алгоритмы и устройства для их реализации. При полиномиальной модели движения цели это приводит к необходимости синтеза оптимальных алгоритмов оценки параметров и координат для гипотезы движения цели по кривой второго порядка (гипотеза 2). Для модели со стационарными приращениями в этом случае "необходимо условиться о стационарности и независимости третьего приращения и искать оптимальные оценки первого и второго приращения.

Однако, как правило, при автосопровождении не ставится задача оценки величины ускорения маневрирующей цели. В задачу системы обработки обычно входит оценка координат и скорости, а также своевременное выявление (обнаружение) преднамеренного маневра цели с тем, чтобы, изменив соответствующие настройки (но не способ обработки), обеспечить сопровождение маневрирующей цели. В качестве таких настроек, позволяющих приспосабливать систему обработки для сопровождения как неманеврирующих, так и маневрирующих целей, используются коэффициенты сглаживания α и β.

При сопровождении неманеврирующих целей коэффициенты α и β должны быть взяты малыми (большое сглаживание). При этом хорошо фильтруются (сглаживаются) случайные ошибки, а динамические ошибки, обусловленные маневром цели, будут выделяться почти несглаженными. С увеличением α и β ухудшается сглаживание случайных ошибок, однако улучшается сглаживание динамических ошибок. Следовательно, при сопровождении маневрирующей цели надо увеличить коэффициенты α и β.

Более подробно влияние коэффициентов сглаживания α и β на фильтрацию случайных и динамических ошибок будет рассматриваться ниже.

4.5.3. Алгоритмы последовательного сглаживания с учетом независимых наблюдений скорости

При синтезе оптимальных алгоритмов последовательной оценки координаты и скорости до сих пор рассматривался случай, когда в схему обработки вводятся только наблюденные значения координаты. Для некото-

рых типов РЛС, кроме того, возможны независимые Наблюдения скорости изменения координаты. Эти наблюдения целесообразно использовать для получения более точных оценок сглаженных значений координаты и скорости.

Для получения оптимальных алгоритмов оценки для этого случая воспользуемся полученными в п. 4.5.5 уравнениями правдоподобия (4.72), учитывающими наблю-

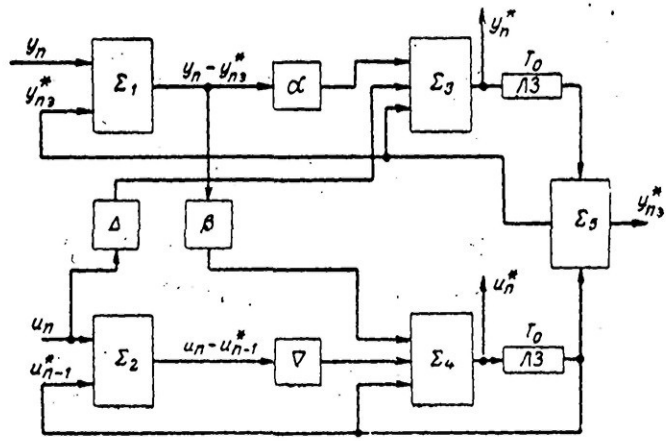


Рис. 4.12. Структурная схема вычислительного устройства для последовательного сглаживания координаты и скорости при наличии независимых наблюдений скорости.

денные значения скорости при прямолинейном и равномерном движении цели.

Решая эти уравнения совместно, получим формулы для оптимальной оценки сглаженных значений координаты и скорости в следующем виде:

$$y^*_n = y^*_{n\text{э}} + \alpha_n(y_n - y^*_{n\text{э}}) + \Delta_n u_n, \qquad (4.90)$$

$$u^*_n = u^*_{n-1} + \beta_n(y_n - y^*_{n\text{э}}) + \nabla_n(u_n - u^*_{n-1}), \qquad (4.91)$$

где $\alpha_n = \dfrac{2(n-1)\left(2n^2 - n + \dfrac{6c}{n-1}\right)}{n^2(n^2 - 1 + 12c)}$;

$$\beta_n = \frac{6(n-1)}{n(n^2 - 1 + 12c)};$$

$$\Delta_n = \frac{6c(n-1)}{n(n^2-1+12c)},$$

$$\nabla_n = \frac{12c}{n(n^2-1+12c)}.$$

Здесь α_n и Δ_n имеют смысл коэффициентов сглаживания координаты, а β_n и ∇_n — коэффициентов сглаживания скорости. При $c=0$ (отсутствие информации о скорости) $\Delta_n = \nabla_n = 0$, а остальные формулы преобразуются в соответствующие формулы для случая отсутствия информации о скорости.

Схема вычислительного устройства, реализующего алгоритмы (4,90) и (4.91), изображена на рис. 4.12. Эта схема по своей структуре аналогична схеме, изображенной на рис. 4.11, и специальных пояснений не требует.

4.5.4. Характеристики качества оптимального последовательного сглаживания координаты и скорости. Выбор коэффициентов α и β

Полученная в п. 4.5.2 схема, реализующая алгоритмы последовательного сглаживания координаты и скорости, эквивалентна дискретной системе автоматического управления (САУ) с обратной связью, уравнения движения которой в конечных разностях имеют вид:

$$\begin{aligned} y^*_n &= y^*_{n\text{э}} + \alpha \Delta y_{n\text{э}} + y_0, \\ u^*_n &= u^*_{n-1} + \beta \Delta y_{n\text{э}} + u_0, \\ y^*_{n\text{э}} &= y^*_{n-1} + u^*_{n-1}, \\ \Delta y_{n\text{э}} &= y_n - y^*_{n\text{э}}. \end{aligned} \qquad (4.92)$$

Входным сигналом рассматриваемой дискретной САУ является последовательность отсчетов координаты $y(t)$ в дискретные моменты времени nT_0, т. е.

$$y_n = y(t)|_{t=nT_0} = y(nT_0).$$

Выходными сигналами системы являются:

$y^*_n = y^*(nT_0)$ — сглаженные значения координаты в моменты времени nT_0,

$u^*_n = u^*(nT_0)$ — сглаженные значения приращения координаты в моменты времени nT_0,

$y^*_{n\text{э}} = y^*_\text{э}(nT_0)$ — экстраполированные на момент времени nT_0 значения координаты,

$\Delta y_{n\text{э}} = \Delta y_\text{э}(nT_0)$ — ошибки экстраполяции.

При анализе качественных характеристик дискретных САУ используется аппарат дискретного преобразования Лапласа, который позволяет любую последовательность вещественных чисел представить в виде периодической функции с периодом $p = j\Omega$, где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, а $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Для последовательности измеренных значений координаты $y(nT_0)$ преобразование Лапласа имеет вид

$$y(p) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0)\, e^{-pnT_0}.$$

Аналогичные выражения легко записать для любой другой входной или выходной дискретной последовательности.

Часто вместо переменной e^{-pT_0} вводят оператор Z^{-1}. В этом случае говорят о Z-преобразовании дискретной последовательности. Для входной координаты $y(nT_0)$ Z-преобразование (или изображение в плоскости Z) записывается в виде

$$y(-Z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0)\, Z^{-n} = y(0)\, Z^0 + y(T_0)\, Z^{-1} + y(2T_0)\, Z^{-2} + \ldots$$

Оператор Z^{-1} символически изображает задержку на один период обзора T_0, так что

$$y_{n-1} = y[(n-1)T_0] = Z^{-1} y_n,$$

$$y_{n-2} = Z^{-1} y_{n-1} = Z^{-2} y_n \text{ и т. д.}$$

Подробнее с методом и таблицами Z-преобразования дискретных последовательностей читатель может ознакомиться по многочисленной литературе, посвященной им-

пульсным системам автоматического управления (см., например, [53]).

Используя метод **Z-преобразования**, получим импульсные передаточные функции рассматриваемой системы. Для упрощения положим $y_0=0$ и $u_0=0$. Запишем выражения (4.92) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
y^*_n &= y^*_{n-1} + T_0 v^*_{n-1} + \alpha (y_n - y^*_{n-1} - T_0 v^*_{n-1}),\\
v^*_n &= v^*_{n-1} + \frac{\beta}{T_0}(y_n - y^*_{n-1} - T_0 v^*_{n-1}),\\
y^*_{n\text{э}} &= y^*_{n-1} + T_0 v^*_{n-1},\\
\Delta y_{n\text{э}} &= y_n - y^*_{n-1} - T_0 v^*_{n-1}.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Применяя Z-преобразование правых частей системы уравнений (4.93), получим

$$\begin{aligned}
y^*_n [1 - (1-\alpha) Z^{-1}] &= (1-\alpha) Z^{-1} T_0 v^*_n + \alpha y_n,\\
v^*_n [1 - (1-\beta) Z^{-1}] &= \frac{\beta}{T_0}(y_n - Z^{-1} y^*_n),\\
y^*_{n\text{э}} &= (y^*_n + T_0 v^*_n) Z^{-1},\\
\Delta y_{n\text{э}} &= y_n - (y^*_n + T_0 v^*_n) Z^{-1}.
\end{aligned}$$

Решая совместно полученные уравнения относительно y^*_n, v^*_n, $y^*_{n\text{э}}$ и $\Delta y_{n\text{э}}$, получим

$$\frac{y^*_n}{y_n} = K_{y^*_n}(-Z) = \frac{\alpha + (\beta - \alpha) Z^{-1}}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1-\alpha) Z^{-2}}, \tag{4.94}$$

$$\frac{v^*_n}{y_n} = K_{v^*_n}(-Z) = \frac{\frac{\beta}{T_0}(1 - Z^{-1})}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1-\alpha) Z^{-2}}, \tag{4.95}$$

$$\frac{y^*_{n\text{э}}}{y_n} = K_{y^*_{n\text{э}}}(-Z) = \frac{(\alpha + \beta) Z^{-1} - \alpha Z^{-2}}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1-\alpha) Z^{-2}}, \tag{4.96}$$

$$\frac{\Delta y_{n\text{э}}}{y_n} = K_{E_{\text{э}}}(-Z) = \frac{(1 - Z^{-1})^2}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1-\alpha) Z^{-2}}, \tag{4.97}$$

где $K_{y^*_n}(-Z)$, $K_{v^*_n}(-Z)$, $K_{y^*_{n\text{э}}}(-Z)$ и $K_{E_{\text{э}}}(-Z)$ - импульсные передаточные характеристики системы по сглаженной координате, сглаженной скорости, экстрапо-

лированной координате и ошибке экстраполяции соответственно.

Полученные выражения для импульсных передаточных характеристик системы позволяют проанализировать все основные показатели ее качества: устойчивость, переходный процесс, а также случайные и динамические ошибки в установившемся режиме работы.

а) Устойчивость системы. Для того чтобы система была устойчивой, необходимо чтобы знаменатель импульсной передаточной характеристики имел нули внутри единичного круга на плоскости Z. Исследование аналогичных систем на устойчивость по критерию Шур-Кона [47] или по критерию Раусса—Гурвица [54] дает следующие необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$\alpha > 0,\ \beta \geqslant 0,\ (2\alpha + \beta) < 4.$$

Эти условия определяют треугольник устойчивости на плоскости α, β, все внутренние точки которого, а также все точки основания ($\beta = 0$) в интервале $0 < \alpha < 2$ соответствуют устойчивой системе.

б) Переходный процесс. Поведение системы в неустановившемся (переходном) режиме имеет существенное значение при ее переключении с одной цели на другую (скачок по координате) или при резком маневре цели (скачок по скорости). Наиболее существенным является, конечно, переходный процесс при маневре скоростью, так как возникающие при этом ошибки в переходном режиме могут привести к срыву сопровождения за счет непопадания очередной отметки в упрежденный строб. Поэтому выбор размеров строба необходимо производить с учетом переходного процесса, а коэффициенты сглаживания α и β необходимо выбирать так, чтобы ошибки в переходном режиме при маневре скоростью были минимальными.

Получим переходную характеристику системы при воздействии на ее входе единичного перепада скорости:

$$y_{вх}(t) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } y_{вх}(t) = t \text{ при } t \geqslant 0.$$

В этом случае Z-преобразование входного сигнала имеет вид [53]:

$$y_{вх}(-Z) = \frac{T_0 Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2}.$$

Подставляя это выражение в (4.97), получим

$$\Delta y_{пэ}(-Z) \quad \frac{T_0 Z^{-1}}{}$$

Полагая $T_0 = 1$ и деля числитель на знаменатель, получим

$$\Delta y_{пэ}(-Z) = Z^{-1} + a_1 Z^{-2} + (a_1^2 - a_2) Z^{-3} + a_1 (a_1^2 - 2a_2) Z^{-4} +$$

$$+ [(a_1^2 - a_2) - a_1^2 a_2] Z^{-5} + [a_1 (a_1^2 - a_2)(a_1 - 3a_2)] Z^{-6} + \ldots,$$

где $a_1 = 2 - \alpha - \beta;$

$a_2 = 1 - \alpha.$

Коэффициенты при обратных степенях Z^n и являются ординатами переходного процесса для моментов времени nT_0. Выбирая различные значения а и β в пределах треугольника устойчивости, можно построить графики переходного процесса, ординаты которых будут соответствовать ширине необходимого строба при экстраполяции координаты. Подробные исследования, опубликованные в работе [47], показали, что для большей части области устойчивости переходный процесс в рассматриваемой системе имеет колебательный или слабодемпфированный характер, за исключением области, вблизи диагонали прямой, описываемой уравнением $\alpha = \beta$. Быстрое затухание переходного процесса получается при больших значениях а и β, приблизительно для $\alpha \approx \beta$.

в) Случайные ошибки в установившемся режиме. Наблюденные значения координаты сопровождаются ошибками случайного характера. Предполагается, как и ранее, что последовательность случайных ошибок в равноотстоящих точках на оси времени представляет собой дискретный стационарный случайный процесс и полностью характеризуется дисперсией σ_v^2. Рассматриваемая система сглаживания координаты и скорости является линейной. При этих условиях дисперсия случайной ошибки на выходе системы определяется по формуле [47]

$$\sigma^2_{вых} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{\text{единичная} \\ \text{окружность}}} \sigma_v^2 [K(Z) K(-Z)] Z^{-1} dZ, \qquad (4.98)$$

где $K(-Z)$ — соответствующая импульсная передаточная характеристика.

Непосредственное вычисление интеграла (4.98) связано с большими трудностями, поэтому пользуются обходными путями.

В теории непрерывных САУ для вычисления дисперсии случайных ошибок используется интеграл [55]:

$$I_k = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} Y(p)\,Y(-p)\,dp. \qquad (4.99)$$

При этом $Y(p)$ представляет собой рациональную дробь от p и интеграл (4.99) имеет вид

$$I_k = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{c(p)\,c}{d(p)\,d(-p)}\,dp, \qquad (4.100)$$

где $Y(p) = \frac{c(p)}{d(p)}$;

$$Y(-p) = \frac{}{d(-p)};$$

$$c(p) = \sum_{i=0}^{m} c_i p^i;$$

$$d(p) = \sum^{k} d_j p^j;$$

c_i и d_j — постоянные коэффициенты, $m < k$.

Для вычисления интегралов вида (4.100) составлены удобные таблицы, которые частично приведены в книге [55]. Интеграл (4.98) можно свести к интегралу вида (4.100), если произвести в нем формальную замену

$$W = \frac{Z-1}{Z+1}.$$

Подставляя в (4.98)

$$Z = \frac{1+W}{} \text{ и } dZ = \frac{2dW}{},$$

получим

$$\sigma^2_{вых} = \frac{\sigma^2_y}{\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{}{}\,.$$

Следовательно, для представления интеграла (4.98) с помощью табличного интеграла (4.100) необходимо принять

$$\frac{K(W)}{1+W}=\frac{c(W)}{d(W)} \text{ и } \frac{K(-W)}{1-W}=\frac{c(-W)}{d(-W)},$$

а при вычислении дисперсий случайной ошибки $\sigma^2_{вых}$ надо взять удвоенное значение этого интеграла.

Подсчитаем теперь по описанной методике дисперсию случайной ошибки сглаживания координаты.

Производя в выражении (4.94) замену

$$Z^{-1}=\frac{1-W}{1+W},$$

получим

$$\frac{K_{y^*_n}(W)}{1+W}=\frac{\beta+(2\alpha-\beta)W}{\beta+2\alpha W+(4-2\alpha-\beta)W^2}=\frac{c_0+c_1W}{d_0+d_1W+d_2W^2},$$

где

$$c_0=\beta;\quad c_1=2\alpha-\beta;\quad d_0=\beta;\quad d_1=2\alpha;$$
$$d_2=4-2\alpha-\beta. \qquad (4.101)$$

Аналогично, заменяя

$$Z=\frac{1+W}{1-W},$$

получим

$$\frac{K_{y^*_n}(-W)}{1-W}=\frac{c_0-c_1W}{d_0-d_1W+d_2W^2}.$$

По таблицам *[55]* находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{)}{d_2W^2)}\,\frac{(c_0-c_1W)}{(d_0-d_1W+d_2W^2)}\,dW=$$
$$=\frac{c_1^2d_0+c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}.$$

Дисперсия случайной ошибки сглаживания координаты будет равна

$$\sigma_{y^*_n}=\quad{}^2=\frac{}{d_0d_1d_2}$$

или, после подстановки коэффициентов разложения в соответствии с обозначениями (4.101), окончательно получим

$$\sigma^2_{y^*_n} = \frac{2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\beta}{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)} V^2 \qquad (4.102)$$

Аналогичным образом подсчитывается дисперсия случайной ошибки экстраполяции координаты. Для этого применяется W-преобразование импульсной передаточной характеристики системы по экстраполированной координате (4.96) и сведение полученного выражения к табличному интегралу.

Окончательная формула для дисперсии случайной ошибки экстраполяции имеет вид

$$\sigma_{y^*_{n\vartheta}} = \frac{}{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)} V \qquad (4.103)$$

На рис. 4.13 приведены построенные по формулам (4.102) и (4.103) графики относительных дисперсий случайных ошибок сглаживания и экстраполяции координаты в. зависимости от коэффициентов сглаживания а и β. Из этих графиков можно сделать два важных вывода:

1. При одних и тех же значениях α и β ошибки экстраполяции в несколько раз больше ошибок сглаживания.

2. Для хорошей фильтрации случайных ошибок при сглаживании и экстраполяции координаты необходимо выбирать малые значения коэффициентов сглаживания а и β.

Дисперсия случайной ошибки сглаживания скорости вычисляется по формуле

$$\sigma^2_{v^*_v} = \frac{2\beta^2}{\alpha T_0 (4 - 2\alpha - \beta)} \sigma^2_v. \qquad (4.104)$$

Графики относительных дисперсий этих ошибок в зависимости от коэффициентов сглаживания а и β приведены на рис. 4.14.

г) Динамические ошибки в установившемся режиме маневра. Важной характеристикой качества рассматриваемой системы является также

динамическая ошибка, возникающая в случае, когда цель движется по криволинейному курсу. Рассмотрим зависимость динамической ошибки от коэффициентов сглаживания а и β для режима установившегося маневра цели по координате y, причем будем полагать, что маневр происходит по кривой второго порядка, т. е. в за-

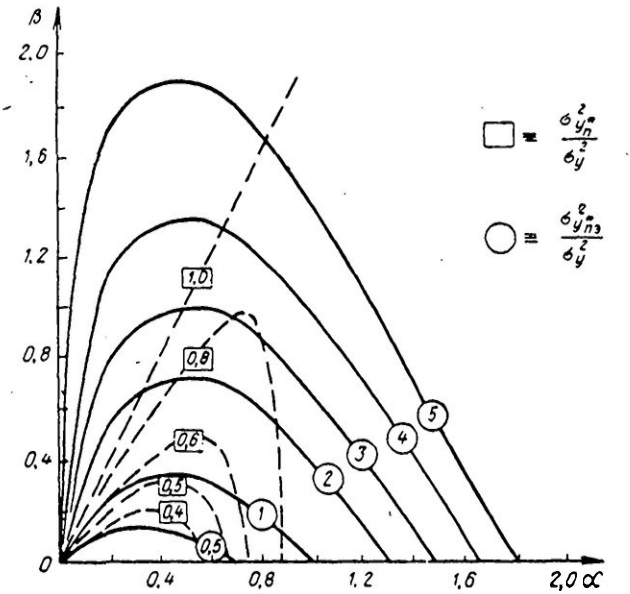


Рис. 4.13. Графики относительных дисперсий случайных ошибок:

——— — экстраполяции координат; - - - - - - - сглаживания координат.

коне изменения координаты отсутствуют производные по Бремени выше второй степени.

В общем случае квадрат динамической ошибки находится из выражения [50]:

$$(\Delta_д y)^2 = C_i^2 \left(\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right)^2,$$

где $\frac{d^i y(t)}{dt^i}$ — i-я производная входного сигнала.

В случае дискретных входных данных первая производная входного сигнала соответствует первому приращению координаты

$$\frac{dy(t_n)}{dt} = y_n \quad y_{n-1} - u_n,$$

а вторая производная—второму приращению координаты, т. е.

$$\frac{d^2y(t_n)}{dt^2} = \dot{u}_n - u_{n-1} = \gamma_n.$$

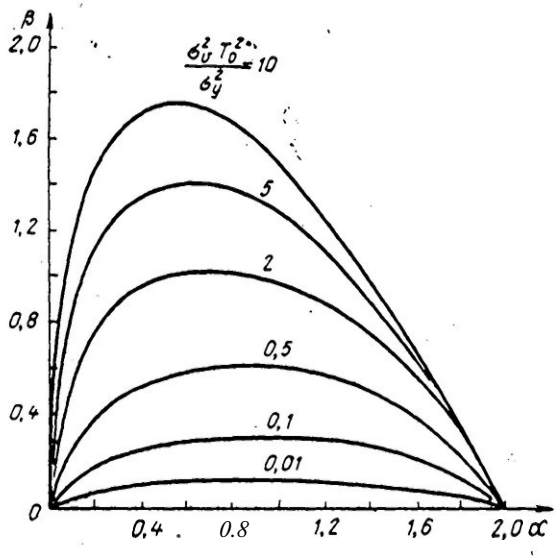


Рис. 4.14. Графики относительных дисперсий случайных ошибок сглаживания скорости.

Коэффициенты динамической ошибки C, определяются из выражения [50]

$$C_i^2 = \left[\frac{1}{i!}\frac{d^i K_E(-Z)}{dZ^i}\right]\Big|_{Z=1},$$

где $K_E(-Z)$ — Z-передаточная характеристика *по* сигналу ошибки.

Получим теперь выражения для динамических ошибок сглаживания и экстраполяции координаты в зависимости от коэффициентов сглаживания α и β.

Передаточная характеристика рассматриваемой системы по ошибке сглаживания координаты имеет вид

$$K_{E_c}(-Z) = 1 - K_{y^*_n}(-Z) = 1 - \frac{\alpha + (\beta - \alpha) Z^{-1}}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1 - \alpha) Z^{-2}}.$$

Производя преобразования, получим

$$K_{E_c}(-Z) = \frac{(1 - \alpha)(1 - Z^{-1})^2}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1 - \alpha) Z^{-2}}.$$

Дифференцируя $K_{E_c}(-Z)$ по 2, получим

$$C_{1c} = \left.\frac{dK_{E_c}(-Z)}{dZ}\right|_{Z=1} = 0,$$

$$C_{2c} = \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 K_{E_c}(-Z)}{dZ^2}\right|_{Z=1} = \frac{1 - \alpha}{\beta}.$$

Таким образом, квадрат динамической ошибки сглаживания координаты имеет вид

$$(\Delta_д y^*_n)^2 = \frac{(1 - \alpha)^2}{\beta^2} \gamma^2. \qquad (4.105)$$

Из выражения (4.105) следует, что квадрат динамической ошибки сглаживания координаты уменьшается с ростом α и β и равен нулю при $\alpha = 1$.

При выводе выражения для квадрата динамической ошибки экстраполяции координаты воспользуемся формулой (4.97) для Z-преобразования ошибки экстраполяции. Дифференцируя это выражение по Z дважды, получим

$$G_{1э} = \left.\frac{dK_{E_э}(-Z)}{dZ}\right|_{Z=1} = 0,$$

$$C_{2э} = \left.\frac{d^2 K_{E_э}(-Z)}{dZ}\right|_{Z=1} = \frac{1}{\beta^2}.$$

Таким образом, квадрат динамической ошибки экстраполяции координаты y определяется выражением

$$(\Delta_{\partial} y^*_{\text{пэ}})^2 = \frac{\gamma_n^2}{\beta^2}. \qquad (4.106)$$

Из выражения (4.106) следует, что квадрат динамической ошибки экстраполяции не зависит от α и уменьшается с ростом β.

д) **Выбор коэффициентов α и β.** Расчет оптимальных значений коэффициентов α и β сначала будем производить ло критерию минимума дисперсии суммарной (случайной плюс динамической) ошибки сглаживания в установившемся режиме, т. е. исходя из условия

$$\sigma^2_{\Sigma_c}(\alpha_{c\,\text{опт}}, \beta_{c\,\text{опт}}) = \min. \qquad (4.107)$$

Дисперсия суммарной ошибки сглаживания координаты имеет вид

$$\sigma^2_{\Sigma_c}(\alpha, \beta) = \sigma^2_y \eta^2_c(\alpha, \beta) + C^2_{2c}(\alpha, \beta)\gamma^2_n.$$

Переходя к относительным ошибкам, получим

$$\frac{\sigma^2_{\Sigma_c}}{\sigma^2_y} = \eta^2_c(\alpha, \beta) + \Gamma^2_n C^2_{2c}(\alpha, \beta), \qquad (4.108)$$

где

$$\eta^2_c(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)}{2},$$

$$C^2_{2c}(\alpha, \beta) = \frac{(1-\alpha)^2}{\beta^2};$$

$\Gamma^2_n = \frac{\gamma^2_n}{\sigma^2_y}$ — относительное значение второго приращения координаты, которое назовем интенсивностью маневра по координате.

Для нахождения оптимальных значений а и β по критерию (4,107) необходимо взять частные производные от выражения (4.108) по а и β и приравнять их к нулю при $\alpha = \alpha_{c\,\text{опт}}$ и $\beta = \beta_{c\,\text{опт}}$.

В результате дифференцирования получаем 2 уравнения:

$$\frac{(2\alpha+\beta)^2-4\beta(\alpha^2+1)}{\alpha^2(4-2\alpha-\beta)^2}-\frac{1-\alpha}{\beta^2}\cdot\Gamma_n^2\Big|_{\substack{\alpha=\alpha_{c\,опт}\\ \beta=\beta_{c\,опт}}}=0, \quad (4.109)$$

$$\frac{4(1-\alpha)^2}{\alpha(4-2\alpha-\beta)^2}-\frac{(1-\alpha)^2}{\beta^2}\Gamma_n^2\Big|_{\substack{\alpha=\alpha_{c\,опт}\\ \beta=\beta_{c\,опт}}}=0. \quad (4.109а)$$

Непосредственное решение уравнений (4.109) и (4.109а) с целью нахождения $\alpha_{c\,опт}$ и $\beta_{c\,опт}$ чрезвычайно громоздко. Найдем сначала зависимость $\alpha_{опт}=f(\beta_{опт})$. Для этого выразим Γ_n^2 из уравнений (4.109) и (4.109а).

$$\Gamma_n^2=\frac{\beta^2[(2\alpha+\beta)^2-4\beta(\alpha^2+1)]}{(1-\alpha)\alpha^2(4-2\alpha-\beta)^2} \quad \text{из уравнения (4.109),}$$

$$\Gamma_n^2=\frac{4\beta^2}{\alpha(4-2\alpha-\beta)^2} \quad \text{из уравнения (4.109а).}$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$\frac{\beta^2(2\alpha+\beta)^2-4\beta(\alpha^2+1)}{(1-\alpha)\alpha^2(4-2\alpha-\beta)^2}=\frac{4\beta^2}{\alpha(4-2\alpha-\beta)^2}. \quad (4.110)$$

Если наложить на коэффициенты α и β естественные ограничения, вытекающие из условий устойчивости системы,

$$\alpha>0;\ \beta>0,\ 2\alpha+\beta<4$$

и, кроме того, условиться, что $\alpha\neq1$, то выражение (4.110) значительно упрощается и имеет вид:

$$(2\alpha+\beta)^2-4\beta(\alpha^2+1)=4\beta\alpha(1-\alpha).$$

Из этого выражения получаем (беря только арифметическое значение корня)

$$\alpha_{c\,опт}=\frac{\sqrt{4\beta_{c\,опт}-\beta_{c\,опт}^2}}{2}. \quad (4.111)$$

График зависимости (4.111) построен на рис. 4.15 (кривая *1*).

Используй теперь уравнения (4.109) и (4.109а) и зависимость (4.111) между $\alpha_{опт}$ и $\beta_{опт}$, можно построить графики $\alpha_{опт} = f(\Gamma_n^2)$ и $\beta_{опт} = f(\Gamma_n^2)$. Такие графики построены на рис. 4.16 (сплошные кривые). По этим гра-

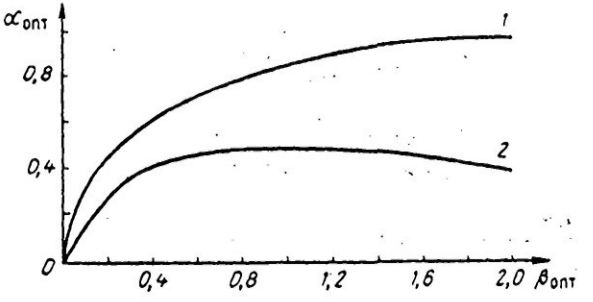


Рис. 4.15. Графики зависимости $\alpha_{опт} = f(\beta_{опт})$
1 — сглаживание координаты; *2* — экстраполяция координаты.

фикам можно выбрать оптимальные с точки зрения принятого критерия значения $\alpha_{опт}$ и $\beta_{опт}$, если известна интенсивность маневра по координате.

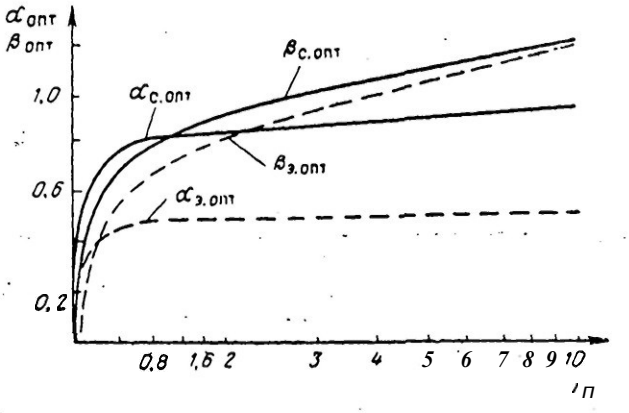


Рис. 4.16. Графики зависимости $\alpha_{опт} = f(\Gamma^2_n)$, $\beta_{опт} = f(\Gamma^2_n)$:
———— при сглаживании координаты; — — — — при экстраполяции координаты.

Аналогичным образом может быть решена задача определения оптимальных значений коэффициентов a и β по критерию минимума суммарной ошибки экстраполяции. Зависимость между оптимальными значениями коэффициентов a и β в этом случае имеет вид (кривая *2* на рис. 4.15)

$$\alpha_{\text{эопт}} = \sqrt{\beta_{\text{эопт}}} - \frac{\beta_{\text{эопт}}}{2}, \qquad (4.112)$$

а графики $\alpha_{\text{эопт}} = f(\Gamma_n^2)$ и $\beta_{\text{эопт}} = f(\Gamma_n^2)$ изображены на рис. 4.16 пунктирными линиями.

§ 4.6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ (СКОРОСТИ И КУРСА)

4.6.1. Введение

Оптимальные алгоритмы последовательного сглаживания координаты и скорости ее изменения, полученные в предыдущем параграфе, хотя и обладают преимуществами по сравнению с алгоритмами обработки при фиксированном объеме выборки n, однако еще довольно сложны в реализации. Сложность реализации связана, главным образом, с необходимостью иметь отдельные схемы (алгоритмы) для обработки каждой из независимых координат.

В настоящем параграфе рассматриваются алгоритмы сглаживания курса и скорости цели, предварительно вычисленных по ее наблюденным координатам. По сглаженным значениям скорости и курса можно затем однозначно определить сглаженные и экстраполированные значения координат.

Преимущество такого метода обработки состоит, во-первых, в том, что объем вычислений при выполнении операций сглаживания здесь сокращается по меньшей мере вдвое, так как вместо сглаживания четырех параметров (x, y, v_x, v_y) в данном случае подлежит сглаживанию только два параметра ($V_{\text{ц}}$ — скорость цели и $Q_{\text{ц}}$ — курс цели). Во-вторых, при таком методе обработки облегчается выявление маневра цели.

Первое преимущество, очевидно, не требует дальнейших пояснений. На втором же преимуществе необходимо

остановиться особо. Как известно, Цель, осуществляющая полет в горизонтальной плоскости, может маневрировать по курсу (развороты), по скорости (ускорения или замедления) или по курсу и скорости одновременно. При независимой обработке каждой из координат в случае маневра цели трудно определить вид этого маневра (маневрирует ли цель по курсу или по скорости), так как сглаженные координаты и скорость их изменения сложным образом связаны со скоростью и курсом цели. При выборе же в качестве рабочих параметров скорости $V_{ц}$ и курса $Q_{ц}$ вид маневра определяется элементарно. Кроме того, в режиме установившегося маневра обычно один из параметров траектории остается более или менее постоянным, а второй изменяется по линейному закону. Это позволяет, например, при маневре по скорости продолжать сглаживание курса и, наоборот, при маневре по курсу продолжать сглаживание скорости. При равномерном и прямолинейном полете цели $V_{ц}$ и $Q_{ц}$ — постоянные величины. Поэтому процесс их сглаживания чрезвычайно прост. Это тоже не маловажный фактор при реализации алгоритмов обработки.

Отметим, что рассматриваемые в дальнейшем алгоритмы сглаживания параметров траектории не являются оптимальными с точки зрения теории статистических решений, так как для их синтеза не используется статистика входных сигналов. Такие алгоритмы можно назвать инженерными. Инженерные алгоритмы специально предназначаются для реализации на ЦВМ и оцениваются по простоте реализации и точности выходных данных. Наиболее приемлемыми для практической реализации считаются такие алгоритмы, которые при минимальных требованиях к объему запоминающего устройства и быстродействию ЦВМ обеспечивают для каждого конкретного случая допустимые ошибки решения.

4.6.2. Принцип экстраполяции координат по параметрам траектории

Принцип экстраполяции координат по параметрам траектории в общем виде можно пояснить следующим образом. Пусть в момент времени t_n (последний обзор) получены координаты x_n, y_n отметки от цели. Пусть, кроме того, рассчитаны параметры траектории в этой

точке (скорость V_n, курс Q_n) и их первые приращения ΔV_n и ΔQ_n. Задача состоит в том, чтобы определить экстраполированное на $n+1$ обзор значение координат x_{n+1}, y_{n+1} (рис. 4.17).

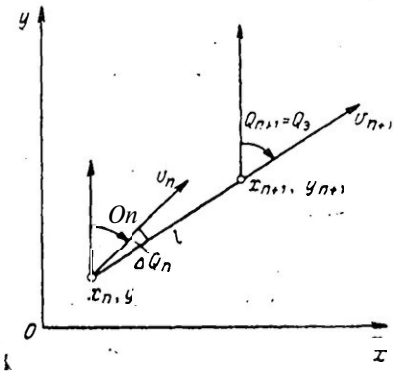


Рис. 4.17. Пояснение принципа экстраполяции координат по параметрам траектории.

Расстояние l, которое цель пролетит за время T_0, равно

$$l = \left(V_n + \frac{\Delta V_n}{2} T_0\right) T_0 = V_n T_0 + \frac{\Delta V_n}{2} T_0^2 .$$

Курс цели изменится за это время на величину ΔQ_n. Откладывая от точки с координатами x_n, y_n отрезок l под углом $Q_n + \Delta Q_n$, получим координаты экстраполированной отметки $x_э = x_{n+1}$, $y_э = y_{n+1}$. Координаты экстраполированной отметки вычисляются по формулам:

$$x_{n+1} = x_э = x_n + l \sin (Q_n + \Delta Q_n);$$

$$y_{n+1} = y_э = y_n + l \cos (Q_n + \Delta Q_n).$$

Экстраполированное значение курса в точке x_{n+1}, y_{n+1} равно

$$Q_{n+1} = Q_э = Q_n + \Delta Q_n,$$

а экстраполированное значение скорости

$$V_{n+1} = V_э = V_n + \Delta V_n.$$

Таким образом, для определения координат и параметров траектории в упрежденной точке необходимо в данном случае иметь координаты цели в момент последнего наблюдения, а также параметры траектории и их приращения в тот же момент времени.

Может показаться, что экстраполяция рассматриваемым методом вообще не требует сведений о прошлом поведении цели. Однако это не так. Чтобы получить такие параметры как скорость и курс цели необходимо иметь по крайней мере две отметки, а для вычисления их приращений — не менее трех. Следовательно, в данном случае «история» движения цели, по существу, концентрируется в параметрах траектории и, в конечном счете, здесь используется тот же принцип взаимосвязи между предыдущим и последующим положением цели.

Ошибки вычисления координат отметки в упрежденной точке будут определяться ошибками измерения координат в точке *n,* а также ошибками, с которыми определены в этой точке параметры траектории и их приращения. Для увеличения точности экстраполяции применяется сглаживание параметров. Сглаживание параметров особенно целесообразно в том случае, когда они не изменяются от обзора к обзору. В этом случае процесс экстраполяции сводится к нахождению координат в упрежденной точке по координатам, наблюденным в текущем обзоре и сглаженным параметрам траектории.

4.6.3. Сглаживание параметров траектории по методу средневзвешенных

Сглаживание постоянных параметров траектории может быть произведено по известному из математической статистики методу средневзвешенных. Сущность этого метода сводится к следующему. Пусть производятся измерения некоторой величины с неодинаковой точностью и необходимо определить ее среднее значение по результатам нескольких измерений. В этом случае необходимо учитывать точность отдельных измерений, что делается при помощи так называемых относительных весов измерений. Под относительным весом измерения

понимается величина, обратно пропорциональная дисперсии каждого измерения, т. е.

$$\eta_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Среднее значение при неравноточных измерениях называется средневзвешенным и определяется следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i}{n},$$

$$i=1$$

где x_i — результат i-го измерения.

Дисперсия средневзвешенного определяется по формуле

$$\frac{1}{\sigma_{\bar{X}}^2} \quad \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \quad + \frac{1}{\sigma_n}$$

Если в процессе эксперимента средневзвешенное значение уточняется после каждого нового измерения, то используется рекуррентная формула (при $n>2$):

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_{i-1} \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_{i-1}}} + Xi \frac{1}{\sigma_i^2}}{\frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_{i-1}}} + \frac{1}{\sigma^2_{x_i}}}.$$

Предположим теперь, что в результате вычисления постоянного параметра $V_ц$ (скорости цели) определено средневзвешенное значение этого параметра за $n-1$ обзоров, обозначаемое в дальнейшем $\bar{V}_{n-1}$ и дисперсия среднего $\sigma^2_{\bar{}}$. Тогда после получения в n обзоре величины V_n

с дисперсией σ_V^2 новое усредненное значение параметра $V_{ц}$ за n обзоров вычисляется по рекуррентной формуле

$$\bar{V}_n = \frac{\bar{V}_{n-1}\frac{1}{\sigma^2_{\bar{V}_{n-1}}} + V_n \frac{1}{\sigma^2_{V_n}}}{\frac{1}{\sigma^2_{\bar{V}_{n-1}}} + \frac{1}{\sigma^2_{V_n}}},$$

или после преобразования

$$\bar{V}_n = \frac{\bar{V}_{n-1}\sigma^2_{V_n} + V_n \sigma^2_{\bar{V}_{n-1}}}{\sigma^2_{\bar{V}_{n-1}} + \sigma^2_{V_n}}. \qquad (4.113)$$

Дисперсия усредненной скорости определяется по формуле

$$\sigma^2_{\bar{V}_n} = \frac{\sigma^2_{V_n} \cdot \sigma^2_{\bar{V}_{n-1}}}{\sigma^2_{V_n} + \sigma^2_{\bar{V}_{n-1}}}. \qquad (4\ 114)$$

Если дисперсия ошибок определения скорости в каждом обзоре одинакова, т. е.

$$\sigma^2_{V_1} = \sigma^2_{V_2} = \ldots = \sigma^2_{V_n} = \sigma^2_V,$$

то средневзвешенное значение, вычисляемое по формуле (4.113), совпадает со средним арифметическим, т. е.

$$\bar{V}_n = \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{n},$$

а дисперсия среднего равна

$$\sigma^2_{\bar{V}_n} = \frac{\sigma^2_V}{n}.$$

Однако независимо от того, равноточны или неравноточны результаты расчета скорости в каждом обзоре,

сглаженное значение скорости после очередного обзора определяется по двум неравноточным его значениям. Одним из них является сглаженное значение по результатам предыдущих обзоров, а другим — вычисленное значение в новом обзоре.

Из формул (4.113) и (4.114) следует, что при условии постоянства усредняемого параметра и при большом числе наблюдений имеется теоретическая возможность получить значение этого параметра с любой степенью точности. Высокая же точность оценки параметров обеспечивает вычисление сглаженных и экстраполированных координат также с высокой точностью.

Другим важным преимуществом рассматриваемого метода является малый объем хранимой информации по каждой цели, так как для новых расчетов необходимо хранить только усредненные значения параметров с соответствующими дисперсиями.

Так как вычисленные по координатам двух соседних отметок текущие значения параметра $V_{ц}$ не являются независимыми, то описанный метод усреднения не будет оптимальным, а дисперсия $\sigma^2_{\overline{V}}$ не будет совпадать с истинной дисперсией усредненной скорости. Дисперсия $\sigma^2_{\overline{V}}$ будет несколько больше истинной дисперсии усредненной скорости.

Усреднение по методу средневзвешенных целесообразно только тогда, когда параметры траектории являются постоянными. Однако условие постоянства параметров, особенно на больших интервалах наблюдения, выполняется не всегда, так как цель может маневрировать. В случае маневра цели усреднение параметров приводит не к улучшению, а к ухудшению результатов. Поэтому здесь также как и раньше, необходимо различать два случая: либо цель движется равномерно и прямолинейно (неманеврирующая цель), либо цель маневрирует по курсу или скорости. При наличии маневра, что связано с изменением того или иного параметра, усреднение по этому параметру должно быть прекращено. Если при этом другой параметр остается неизменным, то целесообразно продолжать его усреднение.

Для решения вопроса о продолжении или прекращении усреднения параметров вводится критерий ма-

невра. Наиболее просто обнаруживать маневр по абсолютной величине приращения параметров

$$|\Delta V_n| = |V_n - \bar{V}_{n-1}|,$$

$$|\Delta Q_n| = |Q_n - \bar{Q}_{n-1}|.$$

Если эти приращения, отнесенные к среднеквадратичному значению случайной ошибки оценки параметра, становятся больше некоторого наперед заданного числа a, т. е.

$$\frac{|\Delta V_n|}{\sigma_V} \geqslant a_1,$$

или

$$\frac{|\Delta Q_n|}{\sigma_Q} \geqslant a_2,$$

то принимается решение о наличии маневра по соответствующему параметру и усреднение этого параметра прекращается. Короче говоря, в данном случае алгоритм обнаружения маневра принципиально ничем не отличается от рассмотренного в § 4.3 алгоритма переключения гипотез I и 2.

4.6.4. Точностные характеристики метода средневзвешенных

Рассмотрим возможности метода средневзвешенных по фильтрации случайных ошибок измерения параметров (для случая равноточных измерений). Для этого получим зависимости дисперсий ошибок расчета параметров и координат от числа измерений, а затем сравним полученные результаты с соответствующими дисперсиями оптимального метода оценки.

Усредненную скорость по координате y по результатам n наблюдений (при равноточных наблюдениях) можно вычислить по следующей формуле:

$$\bar{V}_y = \frac{1}{(n-1)T_0}(y_n - y_0),$$

где y_n — наблюденная координата в момент времени

y_0 — наблюденная координата в момент времени $t=0$.

Тогда

$$\Delta\bar{V}_y = \frac{1}{(n-1)T_0}(\Delta y_n - \Delta y_0).$$

Применяя свойство дисперсии $D(ay) = a^2 D(y)$, получим

$$\sigma^2_{\bar{V}_y} = \frac{1}{(n-1)^2 T_0^2}[D(y_n) + D(y_0)] = \frac{2\sigma_y^2}{(n-1)^2 T_0^2}.$$

Среднеквадратичная ошибка оценки скорости будет равна

$$\sigma_{\bar{V}_y} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_y}{(n-1)T_0}. \qquad (4.115)$$

Для сравнения ошибок метода средневзвешенных с ошибками оптимального метода, рассмотренного в § 4.3, найдем отношение величин среднеквадратичных ошибок оценки скорости обоими методами.

Разделив (4.63) на (4.115), получим

$$\frac{\sigma_{V^*_y}}{\sigma_{\bar{V}_y}} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{n(n+1)}}. \qquad (4.116)$$

Из выражения (4.116) видно, что если для оценки скорости используются две или три отметки, то

и только при $n \geqslant 4$ это отношение медленно убывает.

Таким образом, при ограниченном числе используемых отметок метод средневзвешенных дает практически ту же точность оценки скорости, что и оптимальный метод.

Экстраполированное на один период обзора значение координаты при известной усредненной скорости ее изменения вычисляется по формуле

$$y_{n+1} = y_n + \bar{V}_y \cdot T_0,$$

или

$$y_{n+1} = y_n + \frac{y_n - y_0}{n-1} = \frac{n}{n-1} y_n - \frac{1}{n-1} y_0.$$

Ошибка вычисления экстраполированной координаты будет

$$\Delta y_{n+1} = \frac{n}{n-1} \Delta y_n - \frac{1}{n-1} \Delta y_0.$$

Используя обычный способ для вычисления дисперсии ошибки, получим

$$\sigma_{y_{n+1}} = \sigma_y \sqrt{1 + \frac{2n}{(n-1)^2}}. \qquad (4.117)$$

Из формулы (4.117) следует, что ошибка вычисления экстраполированной координаты при усреднении скорости по методу средневзвешенных не может быть меньше ошибки единичного измерения этой координаты. В этом отношении рассматриваемый метод уступает оптимальному, где при большом числе используемых отметок экстраполированная координата может быть вычислена с точностью, превышающей точность единичного измерения. Однако при малых n ошибки расчета экстраполированных координат как одним, так и другим из сравниваемых методов, примерно одинаковы.

На рис, 4,18 приведены графики ошибок оценки скорости и экстраполированной координаты в зависимости от числа усредняемых отметок. Графики показывают, что при обработке координат неманеврирующей цели, когда число усредняемых результатов вычисления скорости по наблюденным значениям координаты велико, метод средневзвешенных дает хорошую точность оценки скорости и экстраполированной координаты.

Аналогичным образом можно получить формулу дисперсии усредненного значения курса и оценить зависимость дисперсии экстраполяции координаты от ошибок расчета курса. Читателю рекомендуется проделать соответствующие вычисления самостоятельно.

В заключение отметим, что метод средневзвешенных полностью лишен возможности фильтровать динамические ошибки, т. е. ошибки, возникающие при маневре цели. Поэтому этот метод не применим для сопровождения маневрирующих целей. Как уже указывалось вы-

ше, при наличии маневра цели по какому-либо параметру, усреднение этого параметра прекращается, а вычисление экстраполированных координат производится только по результатам двух последних наблюде-

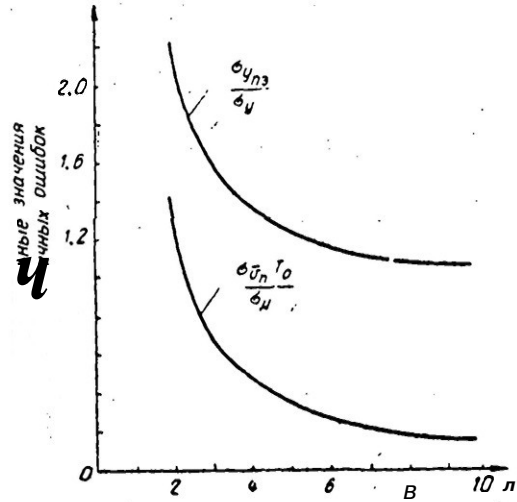


Рис. 4.18. Графики относительных среднеквадратичных ошибок оценки скорости и экстраполяции координаты при усреднении параметров по методу средневзвешенных.

ний. В этом состоит основной недостаток метода средневзвешенных, который ограничивает возможности его применения несмотря на простоту реализации.

4.6.5. Экспоненциальное сглаживание параметров траектории

При сглаживании параметров траектории по методу средневзвешенных используются все их значений, независимо от давности поступления, с одинаковым весом. При этом не учитывается «старение» данных, что приводит к большим ошибкам экстраполяции координат и усугубляет трудности в выявлении маневра цели. Анализ реальных траекторий целей показывает, что, даже на участках, где преднамеренный маневр отсутствует, корреляция последующих значений параметров ($V_ц$ и $Q_ц$)

с их предыдущими значениями убывает по экспоненциальному закону с увеличением временного интервала между моментами их получения (измерения). Поэтому для сглаживания параметров траектории целесообразно применять метод, в котором предыдущие значения параметра учитываются с убывающими по экспоненциальному закону весами.

При использовании метода экспоненциального сглаживания для нахождения сглаженных значений параметра используется его последнее измеренное значение и несколько предыдущих сглаженных значений. Для случая сглаживания курса цели формула экспоненциального сглаживания имеет вид [53]:

$$\bar{Q}_n = (1-\zeta)\,Q_n + \mathrm{tf}[3n\text{-}i.\ \bar{Q}_{n-1} \ldots \bar{Q}_{n-s}], \quad (4.118)$$

где f — некоторая функция от своих аргументов, определяемая законом изменения во времени сглаживаемого параметра (курса);

ζ — постоянная величина, имеющая смысл коэффициента сглаживания.

В простейшем случае постоянного во времени курса для нахождения его очередного сглаженного значения используется только текущее измерение и предыдущее сглаженное значения. Формула (4.118) имеет тогда вид:

$$\bar{Q}_n = (1-\zeta)\,Q_n + \zeta\bar{Q}_{n-1}. \quad (4.119)''$$

Именно этот случай будет рассматриваться в дальнейшем. Формулу (4.119) можно записать в виде

$$\bar{Q}_n = (1-\zeta)\,Q_n + \zeta(1-\zeta)\,Q_{n-1} +$$

$$+\zeta^2(1-\zeta)\,Q_{n-2} + \ldots + \zeta^n(1-\zeta)\,Q_0 = \sum_{i=0}^{n} \eta_i Q_{n-i},$$

где $\eta_i = (1-\zeta)\zeta^i$ — весовая функция учитываемых при сглаживании измеренных значений курса.

На рис. 4.19 представлены графики весовой функции η_i при различных значениях ζ ($\zeta = 0{,}9;\ 0{,}5;\ 0{,}1$). Из рисунка видно, что весовая функция сглаживания курса имеет вид экспоненты. Чем меньше ζ, тем в меньшей сте-

пени учитываются результаты предыдущих измерений (меньше сглаживание) и, наоборот, чем больше ζ, тем больше сглаживание, т.е. тем больше результатов пре-

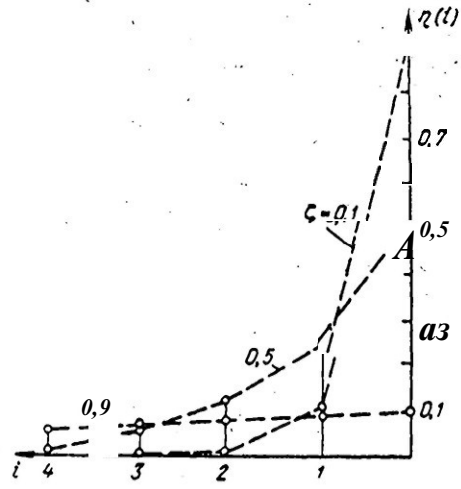


Рис. 4.19. Весовые функции при экспоненциальном сглаживании.

дыдущих измерений учитывается при вычислении сглаженного значения. Поэтому коэффициент ζ получил название коэффициента сглаживания.

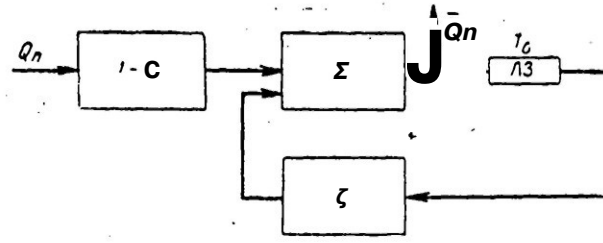


Рис. 4.20. Структурная схема системы, реализующей экспоненциальное сглаживание.

Выражение (4.119) представляет собой уравнение движения замкнутой импульсной САУ, структурная схема которой изображена на рис. 4.20.

Как показано в работе [57], при используемых в нашем случае значениях $0 \leqslant \zeta < 1$ такая система является устойчивой.

Экспоненциальное сглаживание параметров может быть применено в реальных алгоритмах сглаживания и экстраполяции координат как неманеврирующей, так и маневрирующей цели. Очевидно, разница в применении будет состоять только в выборе различных значений ζ — большего для неманеврирующей цели и меньшего для маневрирующей цели. Вопрос о выборе оптимального значения коэффициента сглаживания ζ рассматривается в следующем пункте.

4.6.6. Ошибки при экспоненциальном сглаживании параметров траектории. Выбор оптимального значения ζ

Качество алгоритма экспоненциального сглаживания оценивается по величине ошибок сглаживания и экстраполяции параметра. В настоящем пункте будут рассматриваться только ошибки экстраполяции параметра ввиду того, что эти ошибки оказывают существенное влияние на надежность автосопровождения. Однако излагаемая ниже методика полностью применима также и для расчета ошибок сглаживания.

Вывод формульных зависимостей для случайной и динамических составляющих ошибки экстраполяции производится для параметра $Q_{ц}$ — курса цели. Для другого параметра — $V_{ц}$ ход рассуждений и окончательные результаты будут аналогичными.

Будем исходить из условия, что в качестве экстраполированного на следующий обзор значения курса принимается его сглаженное значение в текущем обзоре, т. е.

$$Q_n = Q_{n+1} = \bar{Q}_n.$$

Поэтому мгновенное значение суммарной ошибки экстраполяции курса определяется выражением

$$\Delta Q_{э\Sigma} = \bar{Q}_n - Q^{\circ}_{n+1},$$

где Q°_{n+1} — истинное значение курса в момент времени t_{n+1}

$$\bar{Q}_n = \sum_{i}^{n} \eta_i Q_{n-i}, \qquad (4.120)$$

Q_{n-i} — результаты измерений курса во всех обзорах (включая n-й), которые представляют собой аддитивную смесь истинных значений Q°_{n-i} и помех (ошибок измерений курса), т. е.

$$Q_{n-i} = Q^{\circ}_{n-i} + \Delta Q_{n-i}. \qquad (4.121)$$

Используя выражения (4.120) и (4.121), суммарную ошибку экстраполяции курса можно представить в следующем виде:

$$\Delta Q_{э\Sigma} = \sum_{i=0}^{n} \eta_i (Q^{\circ}_{n-i} + \Delta Q_{n-i}) - Q^{\circ}_{n+1} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \eta_i Q^{\circ}_{n-i} - Q^{\circ}_{n+1} \right) + \sum_{i=0} \eta_i \Delta Q_{n-i}. \qquad (4.122)$$

Первое слагаемое выражения (4.122), заключенное в скобки, представляет собой динамическую составляющую $\Delta_д Q_э$ суммарной ошибки экстраполяции курса, а второе — случайную составляющую $\Delta Q_э$ этой ошибки. Так как случайная и динамическая составляющие не коррелированы между собой, дисперсия суммарной ошибки будет;

$$\sigma^2_{Q_{э\Sigma}} = \sigma^2_{Q_э} + (\Delta_д Q_э)^2.$$

Вычислим дисперсию случайной и квадрат динамической составляющей. При этом здесь удобнее производить расчеты не на основе импульсной передаточной характеристики, как это делалось в предыдущем параграфе, а непосредственно на основе весовой функции.

Так как математическое ожидание случайной ошибки равно нулю, то дисперсию этой ошибки можно записать в виде

$$\sigma^2_{Q_э} = M\left[\left(\sum_{i=0}^{n} \eta_i \Delta Q_{n-i} \right)^2 \right].$$

После элементарных преобразований получим

$$a^2 \_ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \eta_i \eta_j R_Q (i-j),$$

где $R_Q(i-j)$ — корреляционная функция случайных ошибок измерения курса.

Поскольку курс вычисляется по двум наблюденным значениям координат, то вычисленные значения курса коррелированы в двух соседних обзорах (при условии, что наблюденные значения координат некоррелированы). Коэффициент корреляции двух соседних вычисленных значений курса, как легко показать, отрицателен и равен 0,5.

Следовательно,

$$R_Q(i-j)=\begin{cases}\sigma_Q^2, & \text{при } i-j=0,\\ -0{,}5\sigma_Q^2, & \text{при } |i-j|=1,\\ 0, & \text{при } |i-j|>1.\end{cases} \qquad (4.123)$$

С учетом выражения (4.123) выражение для дисперсии случайной ошибки можно записать в виде

$$\sigma_{Q_\text{в}}^2=\sigma_Q^2\left[\sum_{i=0}^{n}\eta_i^2-\sum_{i=0}^{n}\eta_i\eta_{i+1}\right].$$

Имея в виду, что при $n\to\infty$ (установившийся режим работы)

$$\sum_{i=0}^{\infty}[(1-\zeta)\zeta^i]^2=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(1-\zeta)^2\zeta^{2i}=(1-\zeta)^2(1+\zeta^2+\zeta^4+\zeta^6+\ldots),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\eta_i\eta_{i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}(1-\zeta)^2\zeta^{2i+1}=$$

$$=(1-\zeta)^2(\zeta+\zeta^3+\zeta^5+\ldots),$$

получим окончательно

$$\sigma_{Q_\text{в}}^2=\sigma_Q^2\frac{(1-\zeta)^2}{1+\zeta}. \qquad (4.124)$$

Формула (4.124) показывает, что дисперсия случайной ошибки экстраполяции курса тем меньше, чем больше коэффициент сглаживания ζ.

Вычислим теперь квадрат динамической ошибки экстраполяции курса для случая установившегося маневра цели. Мгновенное значение динамической ошибки можно представить в виде [50]

$$\Delta_p Q_\Theta = C_0 Q^{\circ}(t) + C_1 \frac{dQ^{\circ}(t)}{dt_3} + C_2 \frac{d^2Q^{\circ}(t)}{dt^2} + \cdots +$$

$$+ C_r \frac{[d^r Q^{\circ}(t)}{dt^r},$$

где C_r — коэффициенты динамической ошибки, определяемые из выражения

$$C_r = \frac{(-1)^r}{r!} \mu_r - a_r,$$

где

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{\infty} j^r \eta_j, \quad r = 0, 1, 2 \ldots l),$$

l — степень многочлена, описывающего функцию $Q^{\circ}(t)$.

Так как курс цели при установившемся маневре изменяется линейно во времени, то $l = 1$.

Коэффициенты a_r принимают значения:

$$a_0 = 0, \; a_1 = p, \ldots, \; a_r = \frac{p^r}{r!},$$

где p — требуемое время экстраполяции, выраженное в периодах обзора.

Вычисления коэффициентов динамической ошибки дают:

$$\mu_0 = \sum_{j=0}^{\infty} j^0 \eta_j = (1-\zeta) \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^j = 1,$$

следовательно, $C_0 = 0$;

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{\infty} j \eta_j = (1-\zeta) \sum_{j=0}^{\infty} j \zeta^j = \frac{\zeta}{\ldots},$$

следовательно, при экстраполяции на один обзор ($p=1$,

Таким образом,

$$\Delta_{\partial} Q_{\partial} = -\frac{1}{1-\zeta}\frac{dQ^{\circ}(t)}{dt}.$$

Для дискретных измерений, аналогом первой производной является первая разность

$$Q^{\circ}_{i} - Q^{\circ}_{n-1} = \varphi,$$

где φ — угол, на величину которого изменится истинный курс цели за время одного обзора. Так как в соответствии с принятой моделью движения цель совершает маневр с постоянным центростремительным ускорением, то для каждой конкретной реализации установившегося маневра φ будет постоянной величиной. Следовательно, окончательно имеем

$$\frac{1}{1-\zeta}$$

Квадрат динамической ошибки экстраполяции курса определяется выражением

$$(\Delta_{\partial} Q_{\partial})^2 = \frac{1}{(1-\zeta)^2}\varphi^2. \qquad (4.125)$$

С учетом выражений (4.124) и (4.125) дисперсия относительной суммарной ошибки экстраполяции курса будет равна

$$\frac{\sigma^2_{Q_{\partial\Sigma}}}{\sigma^2_{Q}} = \frac{(1-\zeta)^2}{1+\zeta} + \frac{1}{(1-\zeta)^2}\psi^2, \qquad (4.126)$$

где $\psi^2 = \frac{\omega^2}{\gamma}$ — относительная интенсивность маневра.

На рис. 4.21 построены графики зависимости дисперсии относительной суммарной ошибки экстраполяции от коэффициента сглаживания ζ при различных интенсивностях маневра. Графики имеют экстремумы миниманль-

ного типа, которые смещаются влево при увеличении интенсивности маневра. Отсюда можно сделать вывод о целесообразности изменения коэффициента сглаживания ζ с целью поддержания ошибки на минимальном или близком к минимальному уровню для каждого конкретного значения интенсивности маневра, Из графиков ошибок также следует, что выбор коэффициентов ζ для каж-

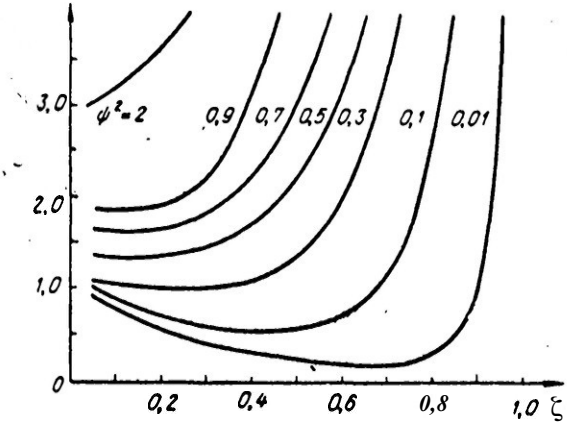


Рис. 4.21. Графики зависимости дисперсии относительной суммарной ошибки экстраполяции от коэффициента сглаживания ζ.

дого значения интенсивности маневра некритичен, так как экстремумы графиков тупые.

Для нахождения оптимального значения ζ по критерию минимума дисперсии суммарной ошибки продифференцируем выражение (4.126) по ζ и приравняем результат к нулю. Окончательное уравнение для $\zeta_{опт}$ имеет вид:

$$(1+\zeta_{опт})^2(1-\zeta_{опт})^2-4(1-\zeta_{опт})^3+$$
$$+2\psi^2(1+\zeta_{опт})^2=0.$$

На рис. 4.22 построен график зависимости $\zeta_{опт}=f(\psi^2)$. По этому графику можно выбрать оптимальное значение коэффициента сглаживания $\zeta_{опт}$, если известна интенсивность маневра цели по курсу.

Необходимо, однако, иметь в виду, что интенсивность маневра может быть определена по входным данным

(координатам цели) только приближенно через относительное приращение курса в каждом обзоре

$$\psi_n = \frac{|\Delta Q_n|}{\sigma_Q} = \frac{|Q_n - Q_{n-1}|}{\sigma_Q}$$

или через относительное среднее приращение курса за несколько обзоров

$$\bar{\psi}_n = \frac{1}{k\sigma_Q} |\Delta Q_n + \Delta Q_{n-1} + \ldots + \Delta Q_{n-k}|.$$

При оценке интенсивности маневра по текущему приращению курса велики случайные ошибки оценки вслед-

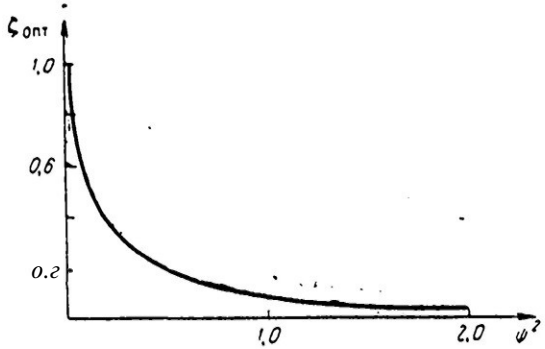


Рис. 4.22. График зависимости оптимального коэффициента сглаживания ζ от относительной интенсивности маневра.

ствие чего велика вероятность ложного обнаружения маневра. При оценке интенсивности маневра по среднему за несколько обзоров приращению курса увеличивается время на обнаружение маневра, что в конечном счете приводит к большим динамическим ошибкам при сопровождении цели. Более или менее приемлемой является оценка интенсивности маневра по среднему приращению курса за два периода обзора

$$\Delta\bar{Q}_n = \frac{1}{2}(\Delta Q_n + \Delta Q_{n-1}).$$

При этом, как легко показать, $\sigma^2_{\Delta\bar{Q}_n} = 0{,}5\sigma^2_Q$ ($\sigma^2_{\bar{\psi}^2_n} = 0{,}5$). При

столь грубой оценке интенсивности маневра вместо плавной перестройки системы целесообразно принимать двухальтернативный выбор: маневр есть или маневр отсутствует. Можно, например, условиться, что маневр отсутствует, если $\bar{\psi}_{\text{м}}^2 < 0{,}5$. В этом случае с вероятностью $p \approx \approx 0{,}68$ будут приниматься правильные решения об обнаружении маневра при $\bar{\psi}_{\text{п}}^2 \geqslant 0{,}5$.

Для случаев отсутствия и наличия маневра целесообразно выбирать постоянные значения ζ. Если маневр отсутствует, можно взять $\zeta = 0{,}4—0{,}6$, а при наличии маневра можно взять постоянное $\zeta = 0{,}1$ (см. рис. 4.22).

Возможно, конечно, и другое разделение областей наличия и отсутствия маневра.

4.6.7. Формульная схема алгоритма сглаживания и экстраполяции координат по параметрам траектории

В качестве примера рассмотрим построение формульной схемы алгоритма сглаживания и экстраполяции координат цели при экспоненциальном сглаживании параметров траектории. Формульную схему будем строить для случая, когда входная информация поступает в радиолокационной системе координат (дальность наклонная — $D_{\text{ц}}$, азимут — $\beta_{\text{ц}}$, высота — $H_{\text{ц}}$), а выходная информация выдается потребителям в прямоугольной системе координат с центром в точке расположения РЛС ($\bar{x}_{\text{ц}}$, $\bar{y}_{\text{ц}}$, v_x, $\bar{v}_y$). Все формулы алгоритма будем объединять в блоки (этапы). Каждый из таких блоков выдает информацию следующему блоку или на выход схемы.

1 этап. Ввод данных и преобразование наклонной дальности в горизонтальную. Для преобразования наклонной дальности в горизонтальную необходимо иметь в составе входной информации высоту цели над линией горизонта $H'_{\text{ц}}$ или угол места цели ε.

В первом случае горизонтальная дальность вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{D_{\text{ц}}^2 - H_{\text{ц}}'^2}, \qquad (4.127)$$

а во втором — по формуле

$$d = D_{\text{ц}} \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon}, \qquad (4.127а)$$

2 этап. Вычисление курсового угла цели. Курсовым углом цели q называется угол, отсчитываемый по часовой стрелке, между направлением «РЛС—цель» и направлением вектора скорости цели. Для вычисления кур-

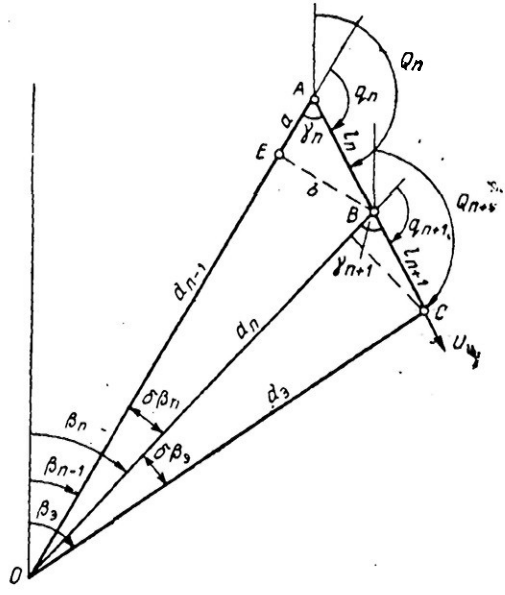


Рис. 4.23. К построению формульной схемы алгоритма экстраполяции и сглаживания координат.

сового угла после очередного n-го обзора, сначала определяется несколько вспомогательных величин (рис. 4.23):

$$\left.\begin{aligned} \delta\beta_n &= \beta_n - \beta \\ a_n &= d_{n-1} - d_n \cos\delta\beta_n, \\ b_n &= d_n \sin\delta\beta_n, \\ \gamma_n &= \operatorname{arctg}\frac{|b_n|}{|a_n|}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.128)$$

В зависимости от знаков a_n и b_n курсовой угол цели находится из табл. 4.1

ТАБЛИЦА 4.1

sign a_n	sign b_n	$q_n = \pm\gamma_n + \text{const}$
+	+	$180° - \gamma_n$
−	+	γ_n
−	−	$360° - \gamma_n$
+	−	$180° + \gamma_n$

3 этап. Вычисление параметров траектории Q_n и V_n. Текущее значение курса цели определяется по формуле

$$Q_n = \beta_{n-1} + q_n, \tag{4.129}$$

а текущее значение скорости — по формуле

$$V_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{T_0} = \frac{l_n}{T_0}, \tag{4.130}$$

где l_n — путь, пройденный целью за период обзора T_0.

Для дальнейших расчетов необходимо знать дисперсии текущих значений курса и скорости. Произведем вычисление этих дисперсий. Текущая ошибка по курсу в соответствии с формулой (4.129) равна

$$\Delta Q_n = \Delta\beta_{n-1} + \Delta q_n,$$

где $\Delta\beta_{n-1} = \Delta\beta$ — ошибка измерения азимута, одинаковая во всех обзорах.

Для вычисления ошибки Δq_n воспользуемся известным из математической статистики методом оценки погрешности формул. Имеем:

$$\Delta q_n = \Delta\gamma_n,$$

$$\gamma_n = \operatorname{arctg}\frac{|b_n|}{|a_n|} = f_1\left(\frac{b_n}{a_n}\right),$$

$$\Delta q_n = \frac{\partial f_1}{\partial b_n}\Delta b_n + \frac{\partial f_1}{\partial a_n}\Delta a_n.$$

В свою очередь,

$$b_n = f_2(d_n,\ \delta\beta_n),\ \Delta b_n = \frac{\partial f_2}{\partial d_n}\Delta d_n + \frac{\partial f_2}{\partial(\delta\beta_n)}\Delta(\delta\beta_n),$$

$$a_n = f_3(d_{n-1},\ d_n,\ \delta\beta_n),$$

$$\Delta a_n = \frac{\partial f_3}{\partial d_{n-1}}\Delta d_{n-1} + \frac{\partial f_3}{\partial d_n}\Delta d_n + \frac{\partial f_3}{\partial(\delta\beta_n)}\Delta(\delta\beta_n).$$

Производя дифференцирование и подстановки в соответствующие формулы, получим

$$\Delta q_n = \frac{1}{l_n}[\sin\ q_n\,\Delta d_{n-1} + \sin(\delta\beta_n - q_n)\,\Delta d_n +$$

$$+ d_n\cos(q_n + \delta\beta_n)(\Delta\beta_n - \Delta\beta_{n-1})].$$

Учитывая, что $\delta\beta_n$, как правило, мало, можно считать

$$\sin(-q_n + \delta\beta_n) \approx -\sin q_n,\ \cos(q_n + \delta\beta_n) \approx \cos q_n.$$

Тогда

$$\Delta q_n \approx \frac{1}{l_n}[(\Delta d_n - \Delta d_{n-1})\sin q_n + d_n(\Delta\beta_n - \Delta\beta_{n-1})\cos q_n],$$

а

$$\Delta Q_n \approx \Delta\beta + \frac{1}{l_n}[(\Delta d_n - \Delta d_{n-1})\sin q_n +$$

$$+ d_n(\Delta\beta_n - \Delta\beta_{n-1})\cos q_n].$$

Текущая ошибка измерения азимута цели при автоматической первичной обработке равна, как правило, нескольким угловым минутам. Значения текущей ошибки расчета курсового угла при некоторых значениях d_n, V_n и q_n приведены в табл. 4.2.

ТАБЛИЦА 4.2

q_n	Δq	
	$d_n = 200$ км, $V_n = 200$ м/сек	$d_n = 20$ км, $V_n = 800$ м/сек
0°	26°	40′
90°	5°	~1,5°

Из табл. 4.2 следует, что определяющий вес в ошибке текущего курса имеет ошибка расчета курсового угла.

Следовательно, ошибкой измерения азимута здесь можно пренебречь. Тогда

$$\Delta Q_n \approx \Delta q_n \approx \frac{1}{l_n}[(\Delta d_n - \Delta d_{n-1}) \sin q_n + d_n (\Delta\beta_n - \Delta\beta_{n-1}) \cos q_n].$$

Дисперсия ошибки расчета текущего курса находится из соотношения

$$\sigma^2_{Q_n} = \overline{(\Delta Q_n)^2} \approx \frac{2}{l_n^2} (\sigma_d^2 \sin^2 q_n + d_n^2 \sigma_\beta^2 \cos^2 q_n). \quad (4.131)$$

Аналогичным образом получается дисперсия ошибки вычисления текущей скорости. В окончательном виде формула для дисперсии ошибки вычисления текущей скорости имеет вид:

$$\sigma^2_{V_n} \approx \frac{2}{T_0} (\sigma_d^2 \cos^2 q_n + d\sigma_\beta^2 \sin^2 q_n), \quad (4.132)$$

где σ_β^2 и σ_d^2 — дисперсии ошибок измерения дальности и азимута, соответственно, которые для каждого конкретного типа РЛС можно принять постоянными.

4 этап. Обнаружение маневра цели и выбор коэффициента сглаживания ζ. Для обнаружения маневра цели вычисляются значения приращений курса и скорости цели по формулам:

$$\Delta\bar{Q}_n = 0{,}5\,(Q_n - Q_{n-2}),$$

$$\Delta\bar{V}_n = 0{,}5\,(V_n - V_{n-2}).$$

Затем квадраты этих приращений сравниваются с постоянными величинами $0{,}5\sigma^2_{\Delta_n}$ $(0{,}5\sigma^2_{V_n})$.

Если $(\Delta\bar{Q}_n)^2 \geqslant 0{,}5\sigma^2_{\Delta_n}$, то принимается решение, что цель маневрирует по курсу и для сглаживания курса выбирается коэффициент сглаживания $\zeta_м = 0{,}1$.

Если $(\Delta\bar{Q}_n)^2 < 0{,}5\sigma^2_{\Delta_n}$, то принимается решение об отсутствии маневра по курсу и для сглаживания выбирается $\zeta_{нм} = 0{,}4\ (0{,}5)$.

Аналогично, при $(\Delta\hat{V}_n)^2 \geqslant 0{,}5\hat{\sigma}^2_{V}$ для сглаживания скорости выбирается $\zeta_м = 0{,}1$, а при $(\Delta\bar{V}_n)^2 < 0{,}5\sigma^2_{V_n}$ — выбирается $\zeta_{нм} = 0{,}4\,(0{,}5)$.

5 этап. **Определение** сглаженных значений параметров $\bar{Q}_n$ и $\bar{V}_n$. Сглаживание параметров траектории производится по итерационным формулам:

$$\bar{Q}_n = (1-\zeta)\,Q_n + \zeta\bar{Q}_{n-1},$$

$$\bar{V}_n = (1-\zeta)\,V_n + \zeta\bar{V}_{n-1}.$$

Дисперсии ошибок сглаженных параметров определяются по формулам:

$$\sigma^2_{\bar{Q}_n} = \frac{(1-\zeta)^2}{1+\zeta}\sigma^2_{Q_n} + \frac{(\Delta\bar{Q}_n)^2}{(1-\zeta)^2},$$

$$\sigma^2_{\bar{V}_n} = \frac{(1-\zeta)^2}{1+\zeta}\sigma^2_{V_n} + \frac{(\Delta\bar{V}_n)^2}{(1-\zeta)^2},$$

где ζ берутся равными $\zeta_м$ или $\zeta_{н.м}$ для случаев маневрирующей и неманеврирующей цели, соответственно.

6 этап. Вычисление сглаженных значений прямоугольных координат цели. Для вычисления сглаженных значений координат сначала вычисляются сглаженные значения скорости их изменения (которые также являются выходными данными):

$$\bar{v}_{x_n} = \bar{V}_n \sin\bar{Q}_n,$$

$$\bar{v}_{y_n} = \bar{V}_n \cos\bar{Q}_n.$$

Затем вычисляются приращения сглаженных координат:

$$\Delta\bar{x}_n = \bar{v}_{x_n} T_0,$$

$$\Delta\bar{y}_n = \bar{v}_{y_n} T_0.$$

После этого сглаженные значения координат вычисляются по формулам:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \Delta\bar{x}_n,$$

Координаты $\bar{x}_n$ и $\bar{y}_n$, а также составляющие скорости по координатам $\bar{v}_{x_n}$ и $\bar{v}_{y_n}$, выдаются потребителям.

7 этап. Вычисление экстраполированных координат $D_э$, $\beta_э$. Вычисление экстраполированных координат производится исходя из гипотезы о равномерном и прямолинейном движении цели, по крайней мере, в течение следующего $(n+1)$-го периода обзора.

Прямоугольные, экстраполированные на следующий обзор координаты вычисляются по формулам;

$$x_{n+1} = \bar{x}_n + \Delta\bar{x}_n,$$

$$y_{n+1} = \bar{y}_n + \Delta\bar{y}_n.$$

Для стробирования отметок нужны не прямоугольные, а полярные экстраполированные координаты. Поэтому производится преобразование прямоугольных экстраполированных координат в полярную систему $D_э$, $\beta_э$.

Преобразование координат производится по формулам:

$$d_э = d_{n+1} = \sqrt{x^2_{n+1} + y^2_{n+1}},$$

$$D_э = D_{n+1} = \sqrt{d^2_{n+1} + H'^2_{ц}},$$

$$\beta_э = \beta_{n+1} = \pm\beta'_{n+1} + \text{const},$$

$$\beta'_{n+1} = \text{arctg}\frac{|x_{n+1}|}{|y_{n+1}|}.$$

Упрежденный азимут β_{n+1} определяется в зависимости от знаков x_{n+1} и y_{n+1} в соответствии с табл. 4.3

ТАБЛИЦА 4.3

sign x_{n+1}	sign y_{n+1}	$\beta_{n+1} = c_. + \beta''_{n+1}$
+	+	β'_{n+1}
−	+	$360° - \beta'_{n+1}$
+	−	$180° - \beta'_{n+1}$
−	−	$180° + \beta'_{n+1}$

Экстраполированные значения полярных координат цели могут быть получены и непосредственно, минуя этап преобразования прямоугольных экстраполированных координат в полярные.

В соответствии с рис. 4.23 экстраполированную дальность можно вычислить по формуле

$$d_э = d_{n+1} = \sqrt{d_n^2 - 2d_n l_{n+1}\cos\gamma_{n+1} + l_{n+1}^2}, \qquad (4.133)$$

где

$$\gamma_{n+1} = 180° - |\bar{Q}_n - \beta_n| = 180° - |q_{n+1}|.$$

Экстраполированный азимут вычисляется по формуле

$$\beta_э = \beta_n + \delta\beta_э, \qquad (4.134)$$

где

$$\delta\beta_э \approx \frac{l_{n+1}\sin\gamma_{n+1}}{d_n - l_{n+1}\cos\gamma_{n+1}}. \qquad (4.134а)$$

Пользуясь формулами (4.133) и (4.134), получим выражения для дисперсий ошибок экстраполированных координат.

Беря частные производные от выражения (4.133) по d_n, l_{n+1} и γ_{n+1}, получим

$$\Delta d_{n+1} = \frac{d_n + l_{n+1}\cos\gamma_{n+1}}{d_n}\Delta d_n +$$

$$\ldots n\gamma_{n+1}\Delta\gamma_{n+1}.$$

Полагая приближенно

$$\frac{l_{n+1}\cos\gamma_{n+1}}{\ldots} \ldots 0 \quad l_{n+1} \approx 0 \quad \Delta\gamma \quad \approx \Delta\bar{Q}$$

получим

$$\Delta d_{n+1} \approx \Delta d_n + \Delta l_{n+1}\cos\gamma_{n+1} - l_{n+1}\sin\gamma_{n+1}\Delta\bar{Q}_n.$$

Учитывая, что

После статистического усреднений (при допущении, что ошибки Δd_n, Δl_{n+1} и $\Delta \overline{Q}_n$ независимы), получим окончательно

$$\sigma^2_{d_{n+1}} \approx \sigma^2_d + T_0^2 \cos^2 \gamma_{n+1} \sigma^2_{\overline{V}_n} + \overline{V}^2_n T_0^2 \sin^2 \gamma_{n+1} \sigma^2_{\overline{Q}_n}. \quad (4.135)$$

Аналогично вычисляется дисперсия ошибки экстраполяции азимута цели.

Беря частные производные от выражения (4.134а) по d_n, l_{n+1} и γ_{n+1}, получим

$$\Delta(\delta\beta_э) \approx \frac{l_{n+1} \sin \gamma_{n+1}}{(d_n - l_{n+1} \cos \gamma_{n+1})^2} \Delta d_n +$$

$$+ \frac{\text{rf}_w 5\text{lnY}_w \quad +1}{(a_n - \iota_{n+1} \text{COS} \ \gamma_{n+1})} \Delta l \quad \text{-L} \quad \frac{\text{rfn}\hat{}\text{n»}|\text{-C03Y}_{w+}|}{(a_n - \iota_{n+1} \cos \text{I}_{n+1})} \Delta \nu$$

Полагая приближенно

$$\frac{l_{n+1} \sin \gamma_{n+1}}{(d_n - l_{n+1} \cos \gamma_{n+1})^2} \approx 0,$$

$$d_n - l_{n+1} \cos \gamma_{n+1} \approx d_n,$$

и учитывая выражение (4.134), получим

$$\Delta\beta_э \approx \Delta\beta_n + \frac{\sin \gamma_{n+1}}{d_n} \Delta l_{n+1} + \frac{l_{n+1}}{d_n} \cos \gamma_{n+1} \Delta\gamma_{n+1}.$$

Принимая во внимание, что

и производя статистическое усреднение, получим

$$\sigma^2_{\beta_э} \approx \sigma^2_{\beta_n} + \frac{T_0^2}{d_n^2} \sin^2 \gamma_{n+1} \sigma^2_{\overline{V}_n} + \frac{\overline{V}_n^2 T_0^2}{d_n^2} \cos^2 \gamma_{n+1} \sigma^2_{\overline{Q}_n}. \quad (4.136)$$

Экстраполированные координаты и дисперсии их расчета выдаются в устройство сличения информации.

На основании приведенной формульной схемы можно составить укрупненную формульно-логическую схему алгоритма сглаживания и экстраполяции координат,

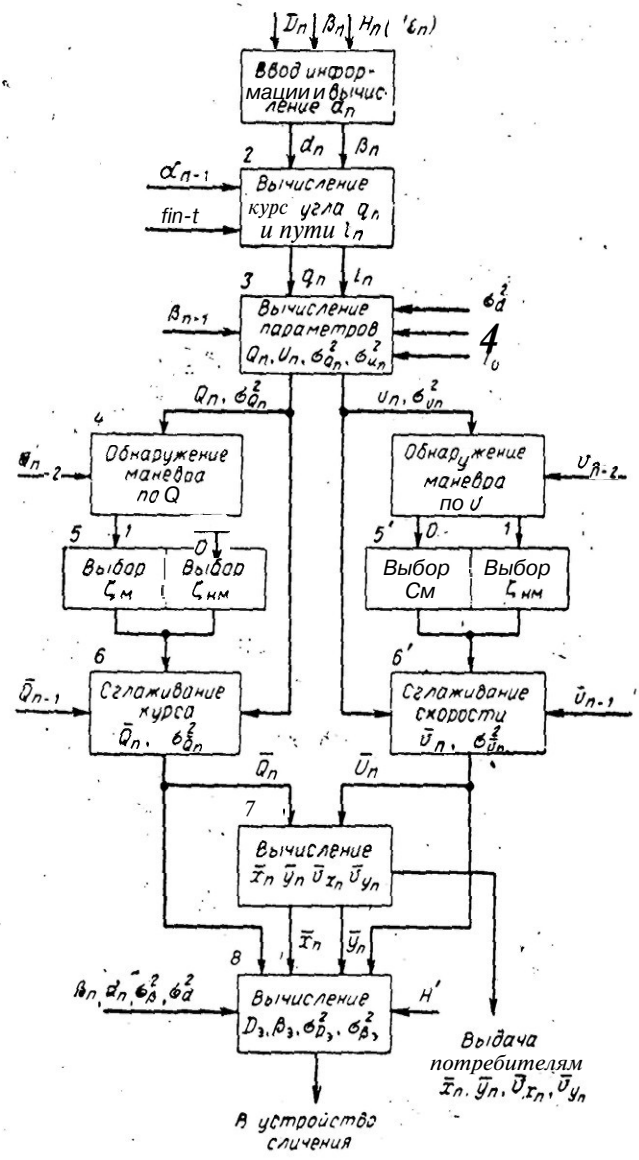


Рис. 4.24. Формульно-логическая схема алгоритма сглаживания и экстраполяции.

изображающую последовательность выполнения операций этого алгоритма на ЦВМ. Такая схема изображена на рис. 4.24.

В блоках I, 2 и 3 алгоритма по наблюденным координатам в текущем и предыдущем обзорах производится вычисление текущих значений параметров траектории и их дисперсий.

В блоках 4 и 4′ производится обнаружение маневра по параметрам. Для этого, в соответствии с принятым критерием, производится вычисление усредненного за два соседних периода обзора приращения параметра и находится отношение этого приращения к дисперсии ошибки вычисления параметра. Если отношение превышает установленный порот, то происходит обнаружение маневра (выход-1) и в блоке 5 или 5′ выбирается коэффициент сглаживания, соответствующий маневрирующей цели. Если же порог не превышается (выход-0), то выбирается коэффициент сглаживания для неманеврирующей цели.

В блоках 6 и 6′ производится вычисление сглаженных значений параметров. Эти значения используются затем для вычисления в блоке 7 сглаженных значений прямоугольных координат и сглаженных значений скоростей изменения этих координат. Иногда сглаженные параметры, кроме того, выдаются потребителям информации.

В блоке 8 производится вычисление экстраполированных координат и дисперсий ошибок по этим координатам. Экстраполированные координаты используются в процессе сличения отметок в стробах.

§ 4.7. СТРОБИРОВАНИЕ И СЕЛЕКЦИЯ ОТМЕТОК В СТРОБАХ

4,7.1. Постановка задачи

Как уже отмечалось, одной из основных операций, выполняемых в процессе автоматического сопровождения целей по данным обзорной РЛС, является отбор отметок (из числа полученных в новом обзоре) для продолжения каждой из сопровождаемых траекторий. Отбор отметок и их «привязка» к сопровождаемым траекториям называется селекцией траекторий и производится на основе сравнения координат и параметров новых

отметок с экстраполированными координатами и характеристиками сопровождаемых траекторий. В простейшем случае селекция траекторий производится только по координатам отметок.

Сравнение координат наблюденных и экстраполированных отметок в принципе можно производить во всей зоне обзора РЛС, например, по критерию минимального расстояния между ними. Однако объем вычислений в этом случае будет чрезвычайно велик. Для упрощения процесса селекции траекторий и сокращения объема вычислений сравнение координат наблюденных отметок (НО) и экстраполированных отметок (ЭО) обычно производится в стробах.

Строб представляет собой заранее выбранную область зоны обзора РЛС, координаты центра которой совпадают с координатами ЭО. Размер и форма строба обычно выбираются так, чтобы вероятность попадания в него НО, принадлежащей данной траектории, была близка к единице.

При слежении за несколькими целями в помехах (внутренних и внешних) в строб могут попадать не только отметки, принадлежащие той траектории, для которой он построен, но и ложные отметки, образованные прошедшими фильтр первичной обработки помехами, или даже отметки, принадлежащие другим траекториям. Поэтому при селекции траектории путем стробирования возникает необходимость селекции отметок, попавших в строб, с целью выбора одной отметки, вероятность принадлежности которой к сопровождаемой траектории наибольшая. В настоящем параграфе рассматриваются принципы стробирования и селекции отметок в стробах.

4.7.2. Стробирование отметок от цели

Стробирование отметок может быть физическим и математическим. Под физическим стробированием понимается выделение предполагаемой области появления новой отметки, принадлежащей сопровождаемой траектории, путем непосредственного воздействия на приемное устройство РЛС (например, путем отпирания выхода приемника только в областях предполагаемого появления отметки). Под математическим стробированием

понимается формирование предполагаемой области появления новой отметки в виде некоторой совокупности чисел (границ строба). Форму строба, как правило, выбирают простейшей, легко реализуемой в аппаратуре физического стробирования или на ЦВМ (при математическом стробировании).

При обработке информации в полярной системе координат простейший строб задается двумя значениями дальности $D_{н\,стр}$ и $D_{к\,стр}$ (границы строба по дальности) и двумя значениями азимута $\beta_{н\,стр}$ и $\beta_{к\,стр}$ (границы строба по азимуту), либо координатами центра строба $D_э$, $\beta_э$ и его размерами относительно центра ($\Delta D_{стр}$, $\Delta\beta_{стр}$). Строб в полярной системе координат изображен на рис. 4.25,*а*.

При обработке информации в прямоугольной системе координат (при этом возможно только математическое стробирование) простейший (прямоугольный) строб также задается двумя парами чисел, определяющих границы Строба ($x_{н\,стр}$, $x_{к\,стр}$, $y_{н\,стр}$, $y_{к\,стр}$), или координатами центра строба $x_э$, $y_э$ и его размерами $\Delta x_{стр}$, $\Delta y_{стр}$ относительно центра. Строб в прямоугольной системе координат изображен на рис. 4.25,*б*.

При отборе отметок в полярный строб проверяются неравенства:

$$|D_i - D_э| \leqslant \Delta D_{стр}, \qquad (4.137)$$

$$|\beta_i - \beta_э| \leqslant \Delta\beta_{стр}.$$

Аналогично при отборе отметок в прямоугольный строб проверяются неравенства:

$$|x_i - x_э| \leqslant \Delta x_{стр}, \qquad (4.137а)$$

$$|y_i - y_э| \leqslant \Delta y_{стр}.$$

Все отметки, удовлетворяющие неравенству (4.137) или неравенству (4.137а), могут явиться продолжением траектории. Отбор единственной отметки, которая имеет наибольшую вероятность принадлежности к траектории, производится в процессе селекции отметок в стробе.

Размеры строба выбираются из условия обеспечения заданной вероятности попадания в него истинных отметок. Так, например, если выбрать строб с размерами $\Delta x_{стр} =$

$= \sigma_{x\Sigma}$, $\Delta y_{стр} = \sigma_{y\Sigma}$, где $\sigma_{x\Sigma}$, $\sigma_{y\Sigma}$ — суммарные среднеквадратичные отклонения истинных отметок от экстраполированных по осям x и y, то вероятность попадания истинных отметок в строб будет равна $P_0 \approx 0{,}68$ (при нормальном законе распределения суммарных ошибок). При $\Delta x_{стр} = 2\sigma_{x\Sigma}$, $\Delta y_{стр} = 2\sigma_{y\Sigma}$ эта вероятность будет равна

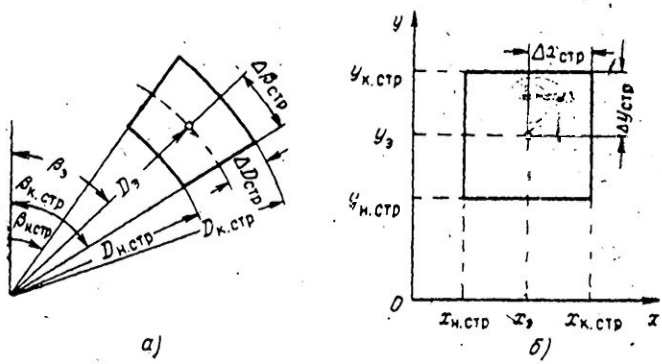


Рис. 4.25. Стробы:
а — в полярной системе координат; б — в прямоугольной системе координат.

0,92. Для получения вероятности P_0, близкой к единице (например, 0,997), необходимо размеры строба брать равными:

— в прямоугольной системе координат

$$\Delta y_{стр} = 3\sigma_{y\Sigma},$$

— в полярной системе координат

$$\Delta D_{стр} = 3\sigma_{D\Sigma},$$

$$\Delta\beta_{стр} = 3\sigma_{\beta\Sigma}.$$

Дисперсии суммарных отклонений истинных отметок от экстраполированных в прямоугольной системе координат определяются по формулам:

$$\sigma^2_{x\Sigma} = \sigma^2_x + \sigma^2_{x\text{в}\Sigma},$$

$$\sigma^2_{y\Sigma} = \sigma^2_y + \sigma^2_{y\text{в}\Sigma},$$

где σ_x^2, σ_y^2 — дисперсий ошибок измерения координат;

$\sigma_{x\Sigma}^2$, $\sigma_{y\Sigma}^2$ — дисперсии суммарных ошибок экстраполяции.

По аналогичным формулам определяются дисперсии суммарных отклонений отметок от центра строба в полярной системе координат. Дисперсии суммарных отклонений истинных отметок от экстраполированных можно выразить через дисперсии ошибок измерения координат и константы алгоритма экстраполяции.

Так, при оптимальной экстраполяции прямолинейной траектории в прямоугольной системе координат, используя формулу (4.65), получим

$$\sigma_{x\Sigma} = \sigma_x \frac{\sqrt{\quad}}{n(n-1)}, \qquad (4.138)$$

аналогично

$$\sigma_{y\Sigma}^2 = \sigma_y^2 \frac{(n+1)(n+2)}{n(n-1)}. \qquad (4.139)$$

В этом случае размеры строба определяются числом используемых при экстраполяции наблюдений и уменьшаются с увеличением n.

При последовательной экстраполяции по замкнутому циклу в прямоугольной системе координат дисперсии суммарных отклонений истинных отметок от экстраполированных ($\sigma_{x\Sigma}^2$, $\sigma_{y\Sigma}^2$) и размеры строба ($\Delta x_{стр}$, $\Delta y_{стр}$) непосредственно выражаются через коэффициенты сглаживания α и β.

Аналогично, при последовательной экстраполяции по параметрам траектории, суммарные отклонения и размеры строба легко выразить через коэффициент сглаживания параметров траектории ζ.

При отсутствии маневра цели и периодическом (без пропусков) поступлении наблюденных значений координат строб рассчитывается только на компенсацию случайных ошибок измерения координат и имеет минимальные размеры. При наличии маневра цели необходимо расширять строб на величину появляющейся при этом динамической ошибки сопровождения. Размеры строба при этом будут зависеть от интенсивности маневра и способности алгоритма экстраполяции фильтровать динамические ошибки. Оптимальным в этом случае является перестраиваемый по величине строб в зависимо-

сти от интенсивности маневра. Если в системе принимается только двухальтернативное решение о наличии или отсутствии маневра, то для маневрирующей цели строб должен рассчитываться на случай наибольшей интенсивности маневра.

На размеры строба в сильной степени влияют пропуски отметок. Как уже указывалось выше, при пропуске одной или даже нескольких отметок система сопровождения продолжает экстраполяцию положения по предыдущим значениям координат и скорости. Ошибки экстраполяции при этом значительно возрастают, в чем легко убедиться, хотя бы из анализа формулы (4.66) для дисперсии ошибок экстраполяции на p обзоров. Простейшие расчеты по формуле (4.66) показывают, что, например, при $n=3$ дисперсия ошибки экстраполяции на два периода обзора более чем в 2 раза превышает дисперсию ошибки экстраполяции на один период обзора. При этих же исходных данных и экстраполяции на три периода обзора $\sigma^2_{y_{n+3}} / \sigma^2_{y_{n+1}} = 4$, т. е. дисперсия ошибки экстраполяции увеличивается в 4 раза. Следовательно, при пропуске отметок размеры строба должны быть значительно увеличены.

Таким образом, в системе сопровождения для селекции траекторий должны вырабатываться стробы, по крайней мере, трех размеров.

1. Узкий строб для сопровождения неманеврирующих или слабо маневрирующих целей при отсутствии пропусков отметок.

2. Средний строб для сопровождения сильно маневрирующих целей при отсутствии пропусков отметок.

3. Широкий строб (или набор широких стробов) для сопровождения при наличии пропусков отметок.

В строб, размеры которого выбраны исходя из приведенных выше соображений, будут попадать также ложные отметки, образованные внутренними шумами приемного устройства и искусственными помехами, прошедшими фильтр первичной обработки.

Попадание ложных отметок в строб создает в нем неопределенную ситуацию, требующую дальнейшего анализа. При анализе возможны два подхода [47]:

1. Имея несколько отметок, в стробе продолжать траекторию по каждой из них. Продолжения траектории

по ложным отметкам, из-за отсутствия их корреляции, через несколько обзоров будут сброшены с сопровождения, а продолжение траектории по истинным отметкам останется.

2. Выбрать в стробе одну отметку, вероятность принадлежности которой к сопровождаемой траектории наибольшая, а остальные отбросить, как ложные. Именно такой подход и рассматривается в дальнейшем.

4.7.3. Алгоритм селекции отметок в двумерном стробе

В общем виде задача селекции отметок может быть сформулирована как задача проверки двух конкурирующих гипотез H_0 и H_1 для каждой из попавших в строб отметок. Гипотеза H_0 состоит в том, что отметка с координатами D_i, β_i ($i=1, 2, \ldots, m$, где m — число отметок, попавших в строб) является ложной. Гипотеза H_1 (альтернативная гипотеза) состоит в том, что эта отметка целевая (истинная) и принадлежит сопровождаемой траектории. Если известны функции правдоподобия гипотез $L(D_i, \beta_i/H_0)$ и $L(D_i\beta_i/H_1)$, то решение задачи селекции отметок сводится к проверке условия (критерий Неймана—Пирсона):

$$\frac{L(D_i, \beta_i/H_1)}{L(D_i, \beta_i/H_0)} \geq K_i, \qquad (4.140)$$

где K_i — порог решения, выбираемый из условия минимума ошибки первого рода, т. е. минимума ошибки, состоящей в том, что принимается решение об истинности i-й отметки, когда на самом деле она ложная.

Особенность решения задачи селекции состоит в том, что здесь удобнее составлять функции правдоподобия гипотез не по координатам отметок, а по отклонениям координат попавших в строб отметок относительно центра строба, т. е. относительно координат экстраполированной отметки. При этом легко учесть основное статистическое различие отклонений истинных и ложных отметок, состоящее в том, что закон распределения вероятности отклонения истинных отметок от центра строба является нормальным, а закон распределения отклонений ложных отметок — равномерным. Оптимизация процесса селекции отметок по их отклонениям от центра строба производится по критерию максимального прав-

доподобия, в соответствии с которым за истинную отметку надо принимать ту, функция правдоподобия которой максимальна, т. е.

$$L(\Delta D_i,\ \Delta\beta_i) = \max,$$

где ΔD_i, $\Delta\beta_i$ — отклонения i-й отметки от экстраполированной по координатам D и β.

Функция правдоподобия отклонения истинной отметки от центра строба на плоскости характеризуется двумерным нормальным законом [32]:

$$L(\Delta D_i,\ \Delta\beta_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_{D\Sigma}\,\sigma_{\beta\Sigma}\sqrt{(1-r_i^2)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_i^2)}\left[\frac{\Delta D_i^2}{\sigma_{D\Sigma}^2} - \frac{2r_i\Delta D_i\Delta\beta_i}{\sigma_{D\Sigma}\sigma_{\beta\Sigma}} + \frac{\Delta\beta_i^2}{\sigma_{\beta\Sigma}^2}\right]\right\},$$

где r_i — коэффициент корреляции величины ΔD_i и $\Delta\beta_i$. Обозначим выражение в квадратных скобках под знаком экспоненты через λ_i^2. Тогда

$$L(\Delta D_i,\ \Delta\beta) = \frac{1}{2\pi\sigma_{D\Sigma}\,\sigma_{\beta\Sigma}\sqrt{(1-}} \exp\Gamma - \frac{1}{2(1-r_i^2)}\lambda_i^2\Big]. \tag{4.141}$$

Из выражения (4.141) следует, что для максимизации функции правдоподобия необходимо минимизировать λ_i^2, т. е.

$$\lambda_i^2 = \frac{\Delta D_i^2}{\sigma_{D\Sigma}^2} - \frac{2r_i\Delta D_i\Delta\beta_i}{\sigma_{D\Sigma}\sigma_{\beta\Sigma}} + \frac{\Delta\beta_i^2}{\sigma_{\beta\Sigma}^2} = \min. \tag{4.142}$$

Уравнение (4.142) представляет собой уравнение эллипса, центр которого совпадает о центром строба.

Таким образом, оптимальное правило селекции отметок по методу максимального правдоподобия сводится к отбору отметки, суммарное эллиптическое отклонение которой от центра строба будет минимальным.

Если перейти к прямоугольной системе координат xOy с началом в центре строба и направить ось Ox по линии

«РЛС—цель», а ось $0y$ перпендикулярно этому направлению, то уравнение (4.142) запишется в виде

$$\lambda = \frac{}{} = \min,$$

где

$$\Delta x_i = \Delta D_i;\ \sigma^2_{x\Sigma} = \sigma^2_{D\Sigma};$$

$$\Delta y_i = D_i \Delta\beta_i;\ \sigma^2_{y\Sigma} = D_i^2 \sigma^2_{\beta\Sigma};\qquad (4.143)$$

$$r = \frac{M(\Delta x_i \Delta y_i)}{\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}}.$$

Если не учитывать корреляцию отклонений, то процедура отбора отметок упрощается и сводится к вычислению суммы квадратов нормированных отклонений по осям Ox и $0y$ для каждой отметки попавшей в строб

$$\lambda \qquad\qquad (4.144)$$

и сравнение полученных результатов между собой с целью выбора отметки с $\lambda_i^2 = \lambda^2_{\min}$.

Если, кроме того, положить $\sigma^2_{x\Sigma} = \sigma^2_{y\Sigma}$, то задача сводится к вычислению квадратов линейных отклонений отметок от центра строба.

Естественно, упрощение алгоритма селекции выгодно с точки зрения уменьшения загрузки ЦВМ вторичной обработки, однако качество сличения при этом ухудшается.

На рис. 4.26 представлена упрощенная формульно-логическая схема селекции отметок при физическом стробирбвании в полярной системе координат. Последовательность выполнения операции этого алгоритма сводится к следующему.

1. По результатам обработки а предыдущем обзоре выбираются размеры строба на следующий обзор. При выборе размеров строба на следующий обзор учитывается:

— выявлен или не выявлен маневр цели,

— имеется ли пропуск отметки в текущем обзоре.

2. Координаты границ строба в полярной системе координат ($D_н$, $D_к$, $\beta_н$, $\beta_к$) выдаются в схему физического стробирования приемного устройства РЛС. На вы-

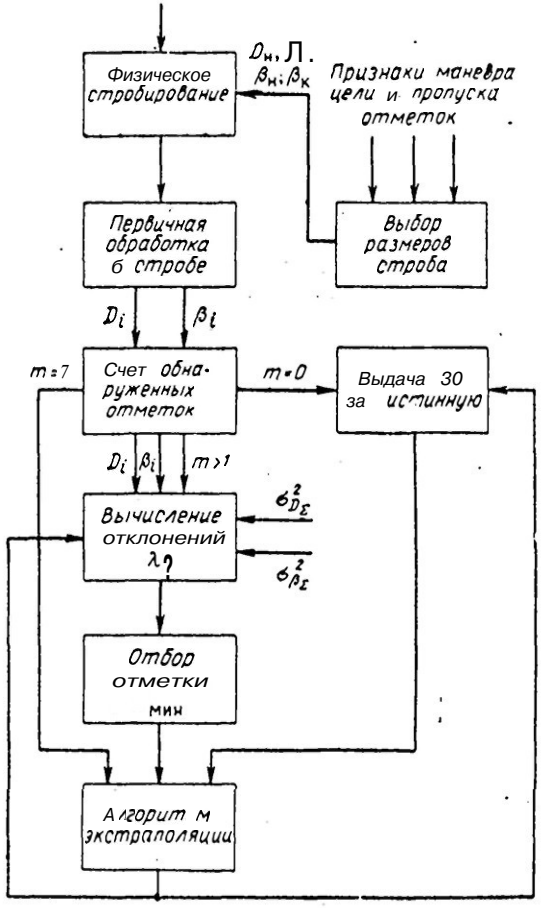


Рис. 4.26. Упрощенная формульно-логическая схема селекции отметок в стробе.

ходе приемного устройства будут получены сигналы только в пределах стробируемого участка зоны обзора. Эти сигналы подвергаются первичной обработке с целью обнаружения и кодирования координат всех отметок, попавших в строб.

3. Подсчитывается число обнаруженных в стробе отметок. Если в стробе не обнаружено ни одной отметки, то вырабатывается команда на выдачу экстраполированной отметки в качестве истинной. Если в стробе обнаружено только одна отметка, то она сразу выдается на вход алгоритма экстраполяции. Наконец, если в стробе обнаружено несколько отметок, то все они поступают в вычислительный блок, где определяются нормированные отклонения каждой отметки от центра строба по формулам:

$$\Delta D_i = |D_i - D_0|,$$

$$\Delta\beta_i = |\beta_i - \beta_0|,$$

$$\xi_i^2 = \frac{\Delta D_i^2}{\sigma_{D\Sigma}^2}, \quad \eta_i^2 = \frac{\Delta\beta_i^2}{\sigma_{\beta\Sigma}^2},$$

$$\lambda_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2.$$

Дисперсии $\sigma_{D\Sigma}^2$ и $\sigma_{\beta\Sigma}^2$ рассчитываются по формулам, приведенным выше.

4. Сравниваются квадраты суммарных отклонений и выбирается одна отметка с $\lambda_i^2 = \lambda_{\text{мин}}^2$. Эта отметка выдается на вход алгоритма экстраполяции.

5. После выполнения операций экстраполяции цикл селекции повторяется для новых отметок.

4.7,4. Вероятность правильной селекции

Качество процесса селекции отметок в двумерном стробе можно оценить вероятностью правильной селекции, т, е. вероятностью события, состоящего в том, что в очередном обзоре для продолжения траектории отобрана именно истинная отметка.

Для вычисления вероятности правильной селекции сделаем следующие допущения:

1. Селекция производится в прямоугольном стробе $2\Delta x_{\text{стр}}$, $2\Delta y_{\text{стр}}$, ориентированном так, что корреляция отклонений отметок по осям Ox и $0y$ относительно центра строба отсутствует. При этом допущении двумерный

закон распределения вероятности отклонений истинных отметок от центра строба записывается в виде

$$w(\Delta x_i, \Delta y_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_i^2}{\sigma_{x\Sigma}^2} + \frac{\Delta y_i^2}{\sigma_{y\Sigma}^2}\right)\right],$$

а линия равных вероятностей отклонений представляет собой эллипс

$$\frac{\Delta x_i^2}{\sigma_{x\Sigma}^2} + \frac{\Delta y_i^2}{\sigma_{y\Sigma}^2} = \lambda_i^2. \qquad (4.145)$$

При $\lambda = 1$ эллипс (4.145) называется эллипсом среднеквадратичных отклонений, а при $\lambda = 3$ — эллипсом полных отклонений.

Площадь эллипса (4.145) определяется выражением

$$s_{эi} = \pi\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}\lambda_i^2 = \pi\left(\frac{\Delta x_i^2}{a} + a\Delta y_i^2\right), \qquad (4.146)$$

где $a = \frac{\sigma_x}{\sigma_{y\Sigma}}$ — коэффициент сжатия эллипса.

2. Ложные отметки распределены в стробе равномерно, с одинаковой средней плотностью ν. Вероятность непопадания ложных отметок внутрь эллипса площадью $s_{эi}$ равна

$$q_{л0}(s_{эi}) = \exp(-\nu s_{эi}).$$

3. Размеры строба $\Delta x_{стр}$, $\Delta y_{стр}$ выбраны такими, что вероятность попадания в строб истинной отметки в очередном обзоре равна единице ($P_0 = 1$).

При сделанных допущениях селекция истинной отметки будет правильной, если внутрь эллипса, проведенного через точку с координатами этой отметки, не попадет ни одной ложной отметки.

Вероятность этого события будет равна

$$P_c = \int_{-\Delta x_{стр}}^{\Delta x_{стр}} \int_{-\Delta y_{стр}}^{\Delta y_{стр}} \frac{1}{2\pi\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}} \exp\left[-\left(\frac{\Delta x}{2\sigma_{x\Sigma}^2} + \frac{\Delta y_i^2}{2\sigma_{y\Sigma}^2}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\nu\pi\left(\frac{\Delta x_i^2}{a}+a y_i^2\right)\right] d(\Delta x_i)\, d(\Delta y_i). \qquad (4.147)$$

Поскольку размеры строба выбраны так, что $\Delta x_{c\,тр} \geqslant 3\sigma_{x\Sigma}$, $\Delta y_{c\,тр} \geqslant 3\sigma_{y\Sigma}$, в выражении (4.147) можно перейти к интегрированию в бесконечных пределах по каждой координате. Кроме того, учитывая симметричность отклонений по нормальному закону, получим

$$P_c = \frac{1}{\pi\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp\left[\left(\frac{}{2\sigma_{x\Sigma}^2} + \frac{}{2\sigma_{y\Sigma}^2}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\pi\nu\left(\frac{\Delta x_i^2}{a}+a\Delta y_i^2\right)\right] d(\Delta x_i)\, d(\Delta y_i). \qquad (4.148)$$

После элементарных преобразований выражения (4.148 получим

$$P_c = \frac{1}{\pi\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}} \int_0^{\infty} \exp\left[-A(\Delta x_i)^2\right] d(\Delta x_i) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left[-B(\Delta y_i)^2\right] d(\Delta y_i),$$

где

$$A = \frac{1}{2\sigma_{x\Sigma}^2} + \nu\pi a$$

$$B = \frac{1}{2\sigma_{y\Sigma}^2} + \nu\pi a.$$

Каждый из полученных интегралов сводится к табличному

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Поэтому для вероятности P_c имеем:

$$P_c = \frac{1}{4\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}} \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}}.$$

После подстановки значений A, B и $\bar{n}$ получим окончательно

$$P_c = \frac{1}{1 + 2\pi\nu\sigma_{x_2}\sigma_{\mu 2}}. \qquad (4.149)$$

Из выражения (4.149) следует, что вероятность правильной селекции тем меньше, чем больше плотность ложных отметок ν и суммарные среднеквадратичные отклонения истинной отметки от центра строба σ_{x_2} и з ..

4.7,5. Разрешающая способность при селекции траекторий путем стробирования

Под разрешающей способностью метода селекции траекторий понимается его способность не перепутывать траектории двух близких целей, движущихся по подобным траекториям. Разрешающую способность метода

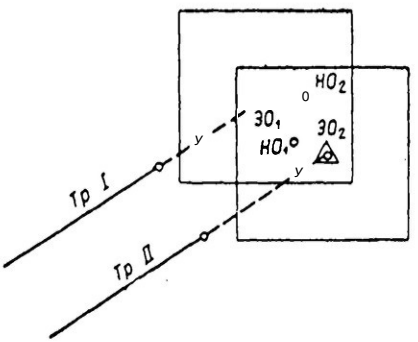


Рис. 4.27. Возможный вариант перепутывания отметок при сопровождении близких траекторий.

селекции можно оценить минимальным расстоянием между траекториями, при котором они не перепутываются с заданной вероятностью (например, с вероятностью 0,95, 0,99 и т. д.).

Возможность перепутывания двух рядом расположенных подобных траекторий иллюстрируется на рис. 4.27. Вследствие близкого взаимного расположения траекторий I и II стробы их сопровождения перекрываются.

При этом возможны случаи, когда обе отметки попадают в перекрытую часть стробов. Если отбор отметок для продолжения траекторий производится по критерию минимального расстояния от центра строба, то для случая, показанного на рис. 4.27, траектории будут перепутаны, так как наблюденная отметка, принадлежащая второй траектории ($НО_2$), ближе к центру первого строба ($ЭО_1$) и наоборот.

пособности методов селекции траекторий следует производить одновременно по двум или даже трем координатам. Однако решение двумерной и, тем более, трехмерной задачи представляет большие математические трудности. Поэтому ограничимся оценкой разрешающей способности только по одной координате x. Разрешающая способность по двум (x, y) и трем $(x, y, И)$ координатам будет, естественно, больше разрешающей способности по одной координате, так как перепутывание двух отметок в k-мерном стробе возможно только при одновременном перепутывании всех k координат этих отметок.

Найдем зависимость вероятности перепутывания двух траекторий по одной координате от расстояния между центрами стробов сопровождения при отборе отметок в стробе по методу минимальных линейных отклонений.

При этом будем иметь в виду следующие предположения и допущения.

1. Под сбоем (перепутыванием) при разрешении понимается однократный неправильный отбор отметки для продолжения траектории (перепутывание в одном обзоре).

2. Отметки от целей поступают в строб сопровождения без пропусков и при полном отсутствии ложных отметок. В этом случае в стробе сопровождения каждой цели имеется только одна (истинная) отметка.

3. Задача рассматривается для случая, когда цель не совершает не предусмотренного алгоритмом автосопровождения маневра, т. е. когда центр строба (положение ЭО) совпадает с центром рассеяния наблюденных отметок. В этом случае дисперсия суммарных отклонений наблюденных отметок от экстраполированных равна $\sigma^2_{x\Sigma} = \sigma^2_{x\text{э}} + \sigma^2_{\text{э}}$, где $\sigma^2_{\text{э}}$ — дисперсия случайной ошибки экстраполяции,

Дисперсии суммарных отклонений принимаются одинаковыми для обеих траекторий.

4. В дальнейшем под x будем понимать нормированные на σ_x отклонения отметок от центров своих стробов. Плотности распределения вероятности нормированных отклонений текущих отметок от экстраполированных

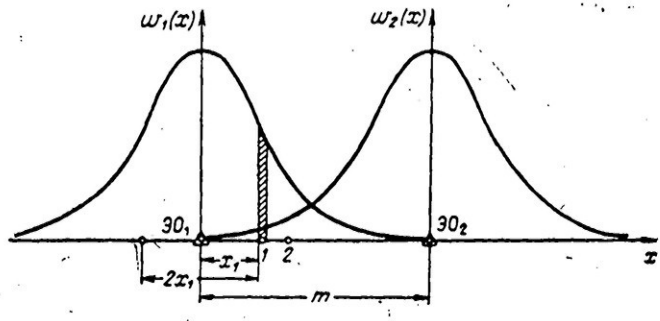


Рис. 4.28. К выводу формулы для вероятности перепутывания двух траекторий.

принимаются нормальными, с центрами, разнесенными друг относительно друга на нормированное расстояние $m=\frac{l_x}{\sigma_x}$, где l_x — расстояние между центрами стробов по координате x.

На рис. 4.28 изображены законы распределения $w_1(x)$ и $w_2(x)$ отклонений отметок по координате x для первой и второй траекторий соответственно.

Если совместить начало отсчета координаты x с $ЭО_1$, то

$$w_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right],$$

$$w_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right].$$

Вероятность правильного отбора отметки 1, принадлежащей к первой траектории и имеющей в данный момент нормированную координату x_1 (рис. 4.28), равна совместной вероятности попадания этой отметки в элементарный интервал Δx_1 и отсутствия отметки 2, принад-

лежащей ко второй траектории, в интервале $(-x_1, x_1)$, т. е.

$$\Delta P_{11} = w_1(x_1)\Delta x_1 \left[1 - \int_{-x_1}^{x_1} w_2(x)dx\right], \quad (4.150)$$

где $w_1(x_1)\Delta x_1$ — вероятность попадания первой отметки в элементарный интервал Δx_1,

$\int_{-x_1}^{x_1} w_2(x)\,dx$ — вероятность попадания второй отметки в интервал $(-x_1, x_1)$.

При нормальном законе распределения отметок относительно центров своих стробов вероятность попадания второй отметки в интервал $(-x_1, x_1)$ равна

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{x_1} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m+x_1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-x_1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2)\,dt$ — функция Лапласа. В этом случае формула (4.150) записывается в виде

$$\Delta P_{11} = \left\{1 - \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m+x_1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-x_1}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\} w_1(x_1)\Delta x_1. \quad (4.151)$$

Устремляя $\Delta x_1 \to 0$ и интегрируя (4.151) в пределах размеров строба 1, выбираемого из расчета $\Delta x_{1\text{стр}} = 3\sigma_{x\Sigma}$, получим выражение для вероятности правильного отбора первой отметки для продолжения первой траектории в следующем виде:

$$P_{11} = \int_{-3}^{3} \left\{1 - \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m+x_1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-x_1}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\} w_1(x_1)\,dx_1. \quad (4.152)$$

Выражение (4.152) не интегрируется в явном виде, кроме одного частного случая, когда $m = 0$ (стробы совпа-

дают). При $m=0$, переходя к интегрированию в бесконечных пределах, получаем

$$P_{11}(m=0)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\left[1-\Phi\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\right]\exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right]dx.$$

Производя замену переменных $\frac{x_1}{\sqrt{2}}=t$, получаем

$$P_{11}(m=0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}[1-\Phi(t)]\exp(-t^2)\,dt.$$

По таблицам [59] находим

$$\int_0^{\infty}[1-\Phi(t)]\exp(-t^2)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Следовательно,

$$P_{11}(m=0)=0{,}5,$$

т. е. при совпадении стробов равновероятно отобрать для траектории I отметку 1, принадлежащую этой траектории, или отметку 2, принадлежащую второй траектории.

В общем случае $(m>0)$ вероятность P_{11} может быть найдена численными методами.

Рассуждая аналогичным образом (совмещая начало отсчета x с $ЭО_2$), можно получить выражение для вероятности P_{22} правильного отбора" второй отметки для второй траектории. Так как плотности вероятности отклонения отметок от $ЭО_1$ и $ЭО_2$ одинаковы и с одинаковой дисперсией, то, очевидно, $P_{11}=P_{22}$.

Зная вероятности P_{11} и P_{22}, можно вычислить вероятность $P_{п}$ перепутывания траектории. Если понимать под перепутыванием неправильный отбор отметки хотя бы для одной траектории, то

$$P_{п}=1-P_{11}P_{22}=1-P_{11}^2. \qquad (4.153)$$

По формуле (4.153) на рис. 4.29 построен график, иллюстрирующий зависимость вероятности перепуты-

вания траекторий от нормированного расстояния m между центрами стробов. Из графика следует, например, что С вероятностью 0,95 траектории разрешаются (не пере-

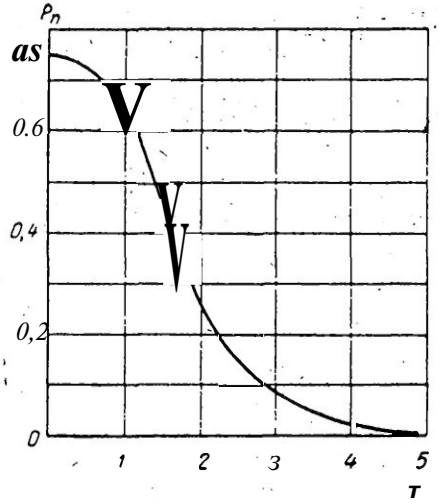


Рис. 4.29, График зависимости вероятности перепутывания от нормированного расстояния между центрами стробов.

путываются) при $m = 3{,}5$, т. е. при расстоянии между центрами стробов $l_x = 3{,}5\sigma_{xc}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вальд А. Последовательный анализ. Физматгиз, 1960.
2. Миддлтон Д. и Ван-Метер Д. Современные статистические методы в теории приема сигналов. В сб. «Прием сигналов при наличии шума», под ред. Л. С. Гуткина. Изд-во иностранной литературы, 1960.
3. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1961.
4. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Советское радио», 1960.
5. Бунимович В. И. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. Изд-во «Советское радио», 1951.
6. Ширман Я. Д., Голиков В. Н. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Советское радио», 1963.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ., под ред. акад. Колмогорова. Изд-во иностранной литературы, 1948.
8. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1960.
9. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 2. Пер, с англ., под ред. Б. Р. Левина. Изд-во «Советское радио», 1962.
10. Бакут П. А. и др. Вопросы статистической теории радиолокации, под ред. Г. П. Тартаковского. Изд-во «Советское радио», 1964.
11. Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуационных помех. Изд-во «Советское радио», 1961.
12. Сверлинг П. Максимальная точность определения угловых координат импульсной радиолокационной станцией, «Вопросы радиолокационной техники», 1957, № 2.
13. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. Пер. с англ. и дополнения А. М. Яглома. Изд-во иностранной литературы, 1961.
14. Питерсон В., Бердсал Т., Фокс В. Теория обнаружения сигналов. В сб. «Теория информации и ее приложения», пер. с англ., под ред. А. А. Харкевича. Физматгиз, 1959.
15. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1958.
16. Yen J. L. On nonuniform Sampling of Bandwidth — Limited signals. «IRE Transactions on Circuit Theory» Dec. 1956, v. CT-3, № 4.
17. Железнов Н. А. Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщения. «Радиотехника и электроника». 1958, вып. 1.

[8. Max J. Quantizing for minimum Distortion. «IRE Transactions on Information Theory», March, 1960, v. IT-6, № I.
!9, Widrow B. A stady of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory. «IRE Transactions on Information Theory», Dec. 1956, v. CT-3, № 4.
20. Баширинов А. Е., Флейшман Б. С. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. Изд-во «Советское радио», 1962.
21. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
22. Тараеенко Ф. П. Об оптимальном пороге квантования принимаемого сигнала для бинарных систем обнаружения. «Известия высших учебных заведений». Сер. радиотехническая, 1960, № 3.
23. Медведев Г. А. Квантование при обнаружении сигналов, принятых в присутствии шумов. «Известия высших учебных заведений». Сер. радиотехническая, 1962, № 4.
24. Клюев Н. Ф. Обнаружение импульсных сигналов с помощью накопителей дискретного действия. Иэд-во «Советское радио», 1963.
25. Свешников А. С. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
26. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
27. Тихонов В. И. Выбросы суммы сигнала и шума. «Радиотехника и электроника», 1963, № 11.
28. Куклев Л. П., Озерский Ю. Л. Вероятность превышения флюктуационным напряжением уровня ограничения в заданном отрезке времени. «Научные доклады высшей школы», Радиотехника и электроника, 1958, № 3.
29. Барк П. С, Большев Л. Н., Кузнецов П. И., Черенков А. П. Таблицы распределения Релея—Райса. Изд-во АН СССР, 1964.
30. Gerardin L. Barbier R. Extraction automatique d'informations radar sous forme numérique. cL'onde Electrique», Oct. 1961, Ns 10.
31. Hubbard J. V. Digital Automatic Radar Date Extraction Equipment. «The Radio and Electronic Eng. (J. Brit IRE)». 1963, v. 26, № 5.
32. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1958.
33. Schwartz M. A Coincidence Procedure for Signal Detection. «IRE Transactions on Information Theory», Dec. 1956, v. IT-2, № 4.
34. Tables of Comulative Binomial Distribution. Cambridge. Massachusets, 1956.
35. Бернстейн Р. Исследование угловой точности обзорного радиолокатора. В сб. «Прием сигналов при наличии шума», под ред. Л. С. Гуткина. Изд-во иностранной литературы, 1960.
36. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.
37. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Изд-во АН УССР, 1964.
38. Вавилов Е. Н., Портной Г. П. Синтез схем электронных цифровых машин. Изд-во «Советское радио», 1963.

39. Диннин Г., Рид И. Исследование обнаружения и локаций сигналов при помощи счетчиков. В сб. «Прием сигналов при наличии шума», под ред. Л. С. Гуткина. Изд-во иностранной литературы, 1960.
40. Ицхоки Я. С, Овчинников Н. И., Фирсов Л. П. Логические схемы. Устройства первичной обработки радиолокационной информации. Изд-во ВВИА им. проф. Жуковского, 1963.
41. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., под ред. Е. Б. Дынкина. Изд-во «Мир», 1964.
42. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., под ред. Н. П. Бусленко. Изд-во «Советское радио», 1964.
43. Шапиро И. И. Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных измерений, пер. с англ., под ред. Ю. Г. Мильграма. Изд-во иностранной литературы, 1961.
44. Zadeh L. and Ragazzini J. An Extension of Wiener's Theory of Prediction. «Journ. Applied Physics», June, 1950, v. 21, № 7.
45. Lees A. Interpolation and Extrapolation of Sampled—Date. «IRE Transactions», 1956, v. IT-2, № 1.
46. Уакс Н. Улучшение отношения сигнал/шум и статистика семейств следов сигналов. «Вопросы радиолокационной техники», resefcrr
47. Goujet J. P. Utilization de la' Transformation en Z pour l'etude de la porsuite automatique des informations radar. Annales de Radioélectricité. Janv. 1962, № 67," Т. XVII.
48. Каценбоген М. С. Характеристики обнаружения. Изд-во «Советское радио», 1965,
49. Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, 1960.
50. Перов В. П. Статистический синтез импульсных систем. Изд-во «Советское радио», 1959.
51. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. ОГИЗ, 1945.
52. Levine N. A new Technique for Increasing the Flexibility of Recwisive Least Squares Date Smoothing. Bell system Techn, 1961, № 3.
53. Цыпкин Я. 3. Теория импульсных систем. Физматгиз, 1958.
54. Скланский Д. Выбор оптимальных параметров системы сопровождения при обзоре. «Вопросы радиолокационной техники», 1958, № 2.
55. Ньютон Д. К., Гулд Л. А., Кайзер Д. Ф. Теория линейных следящих систем. Физматгиз, 1961.
56. Харкевич А. А. Борьба с помехами. Физматгиз, 1963.
57. Karush W. Stability of a Method of Smoothing in a Digital Computer. «IRE Transactions», 1955, v. EC-4, № 1.
58. Хайнкли. Автоматическое обнаружение целей и передача кодированных радиолокационных данных. «Зарубежная радиоэлектроника», 1961, № 5.
59. Трофимов К. Н. Постоянная времени механизма полуавтоматического сопровождения. «Вестник информаций». Изд-во «Советское радио», 1950, № 9.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ*

Бакут П. А. 14, 25
Бернстейн Р. 170
Бунимович В. И. 64, 65, 67, 138
Вавилов Е. Н. 19, 185, 194, 199, 210
Вайнштейн Л. А. 14, 63, 69, 288, 289
Вальд А. 27, 29, 77, 274
Вентцель Е. С. 161, 377
Глушков В. М. 20, 185, 186, 189, 210
Гренандер У. 98
Гуткин Л. С. 27, 69, 170, 209, 213
Диннин Г. 209, 213
Железнов Н. А. 100, 103
Зубаков В. Д. 14, 63, 69, 288, 289
Ицхоки Я. С. 213
Каценбоген М. С. 290
Клюев Н. Ф. 131, 146, 160
Котельников 99
Крамер 27, 32, 43, 107, 171
Куклев Л. П. 132
Левин Б. Р. 27, 66
Медведев Г. А. 131
Миддлтон Д. 27
Перов В. П. 294, 334, 335, 356
Питерсон В. 98, 99
Пугачев В. С. 294
Сверлинг П. 95
Свешников А. С. 132, 133
Скланский Д. 329
Стратонович Р. Л. 132, 139
Тарасенко Ф. П. 119, 120, 124
Тихонов В. И. 132
Уакс Н. 25, 272
Фалькович С. Е. 91
Феллер В. 216
Харкевич А. А. 98, 99, 108, 146, 177
Хайнкли 19
Ховард Р. А. 25
Цыпкин Я. З. 25, 328, 329
Черняк В. С. 141
Шапиро И. И. 217, 258
Ширман Я. Д. 14, 69, 111, 112, 130, 260, 322
Barbier R. 19, 148
Gerardin L. 19, 148
Goujet J. P. 272, 329, 330, 375
Hubbard J. V. 148
Levine N. 317
Max J. 105, 130
Schwartz M. 165
Widrow B. 107, 109
Yen J. L. 100

* Здесь приводятся фамилии авторов, работы которых использовались при написании книги. Если работа принадлежит группе авторов, — то фамилия первого из них.

Автоматизированные системы обработки информации 7, 8, 25
Автоматическое обнаружение сигналов с использованием цифровых накопителей 17, 18
——траекторий 21, 270
Автоматы 186—188, 195, 212
Алгоритм автозахвата траекторий 272
— квазиоптимального обнаружения пачки квантованных сигналов 153
— квазиоптимальной оценки азимута цели 166
— сглаживания и экстраполяции координат 360, 369
— селекции отметок а двумерном стробе 376
Алфавитные операторы 187
Амплитудное квантование 109
Аналоговые накопители 16, 17

Вероятность ложного обнаружения в зависимости от интервалов квантования 140
——для программных обнаружителей 233
— обнаружения пачки программными обнаружителями 245
——, зависимость от числа импульсов в пачке 246
——цифровым накопителем 241
——сигнала цифровым накопителем 235
——цифровым программным обнаружителем 242
Весовая функция обнаружения двоично-квантованных сигналов 156
——оценки параметра 301.
——при экспоненциальном сглаживании 352

Граф автомата 190
——накопителя радиолокационных сигналов 106, 203
— программного обнаружителя «3/3—2» 205
——«3/4—2» 208
——«3/5—3» 208

Двумерная плотность вероятности огибающей и ее производной 138
Дискретизация сигналов обзорной импульсной РЛС 110
— случайных сигналов 4, 97, 98, 101
Дискретные накопители 152
Дисперсия ошибок отсчета времени задержки колокольного импульса 128, 129
——оценки скорости и сглаженной координаты 315
— — сглаживания координаты 332
— — экстраполяции 333

Задача обнаружения пачки двоично-квантованных сигналов 153
Задача обнаружения сигналов и траекторий 71
— определения оптимального порога двоичного квантования 121

— оценки параметров 81
— синтеза оптимального решающего устройства для обнаружения одиночных сигналов 121
Задачи вторичной обработки информации 8
— селекции 376
— съема (первичной обработки) информации 8
Законы распределения вероятностей амплитуд огибающей одиночного импульса 65, 67

Импульсные передаточные характеристики 328
Импульсы с колокольной огибающей 141
Интервал корреляции 100

Квазиоптимальная обработка 152
Квантизатор 104, 149
Квантование амплитудное 118
— двоичное 120, 127, 153, 160
———, его влияние на точность оценки времени задержки импульсного сигнала 125
— по амплитуде и времени 131
— сигналов, длительность которых больше интервала корреляции 147
———импульсной РЛС 148
———многоуровневое 158
Критерий минимального риска 119
— наблюдателя идеального 76
— Неймана — Пирсона 43, 47, 76, 119, 125, 154, 162, 287. 376
— Раусса — Гурвица 329
— среднего риска 76, 154
— Шур — Кона 329

Лапласа преобразования 327
Ложное обнаружение стационарной помехи в пределах фиксированного временного интервала 136

Маркова цепи 214—216, 219, 235, 275
———эргодические 217
Матрицы переходов 214, 216, 231, 236, 242. 276, 280
Метод максимального правдоподобия 35, 37. 90, 294
— минимаксного критерия оптимальности 54
— последовательного анализа 77
— средневзвешенных 343, 347
— условного риска 53
Модель стационарного сигнала с ограниченным спектром 98

Наблюдаемые координаты случайного процесса 98
Накопление пачки импульсов 181, 236
Нормальное распределение 108

Обобщенная гипотеза о модели движения цели 266
Обработка двоично-квантованных сигналов с помощью цифровых автоматов 179
— — — безвесовая 179
— вторичная 4, 255, 256
———первичная 152
Ограниченный процесс 139
Оптимальная оценка азимута цели 90
— экстраполяция 307
Оптимальное обнаружение сигнала 79
— решающее устройство обнаружения 74, 80
— сглаживание 307
Оптимальный порог двоичного квантования по критерию среднего риска 122
Отметка ложная 255
— от цели 255
Относительная дисперсия случайных ошибок 334, 335
Отношение правдоподобия 43, 75, 76
Оценка азимута цели по пачке квантованных сигналов 169, 171, 176
— параметров сигналов 83
— — при независимых наблюдениях скорости 34

——— и координат траектории цели 298, 324, 340, 350
Оценки достаточные 34
— отрицательно смещенные 31
— положительно смещенные 31
— состоятельные 31
— эффективные 32
Ошибки оценки азимута при различных программах обработки пачки 253, 254
— в установившемся режиме системы 330
— динамические в системе 333
— квантования 105
— оценки параметров и координат траектории 307, 347, 353
— квазиоптимальной оценки азимута по пачке квантованных сигналов 176

Пачка квантованных сигналов 152
— радиоимпульсов 59
——— когерентная 59
——— некогерентная 59, 90
Первичное сообщение 56
Плотность распределения выбросов по длительности 138
— совместного распределения амплитуд импульсов 67
Последовательная оценка координат и параметров маневрирующей цели 323
Последовательное (итерационное) сглаживание координаты и скорости 316, 326
——— параметров траектории 340
Правильное обнаружение сигнала 73
Предельные вероятности состояний накопителя в стационарных помехах 220, 222, 224, 225
Пространство решений 50
— сигналов 50

Разрешающая способность метода селекции траекторий 383
Решающая функция 51
Решающие устройства для обнаружения квантованных сигналов 157
— — для обработки информации 68
——— для оптимальной оценки азимута цели 94
— — для оценки азимута цели по пачке квантованных сигналов 170
— для обнаружения квантованных сигналов 157

Сглаживающая функция 293
Сглаживание параметров траектории 343
— экспоненциальное 350
Селекция отметок 370, 379, 380
Синтез автомата-накопителя 197
— цифровых программных обнаружителей 204
Системы обработки полуавтоматические 9, 10
———, пропускная способность 12
Среднее число ложных траекторий 275, 281, 282
Средний риск 52
——— при двоичном квантовании одиночного сигнала 124
Средняя длительность выбросов огибающей помехи 138
Статистические характеристики входных сигналов 55, 256
Стробирование отметок 370

Теория проверки (испытания) гипотез 29
— статистических решений 26, 27, 48, 55

Уровень значимости критерия 41
Условный риск 105
Устойчивость системы 329
Устройства для последовательного сглаживания координаты и скорости 322, 325

Фиксация границ пачки обнаружителем «3/3—3» 182, 183

Функция потери 52, 83
Функция правдоподобия 33
——— дискретной последовательности квантованных сигналов 167
——— полиномиальной функции 295

Характеристическая функция для функции плотности вероятности 108

Цели радиолокационные 7, 261
— , игровая модель 265
— , корреляционная модель 2G3
— , модель с независимыми приращениями 260
— , полиномиальная модель 261, 293
Цифровая обработка радиолокационной информации 3, 19
Цифровое вычислительное устройство для квазиоптимальной обработки пачки импульсов 176
Цифровых автоматов теория синтеза 185
Цифровые накопители 195
———, статистический анализ 212
— программные обнаружители 204
———, статистический анализ 226

Частоты в выборке 33
Число степеней свободы сигнала 101

Экстраполяция координат по параметрам траектории 341

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение

Принципы автоматизации процессов обработки радиолокационной информации

В.I. Принципы построения полуавтоматической системы обработки 9
В.2. Принципы построения системы автоматической обработки . 13

Глава 1

Формулировка задач обработки радиолокационной информации с точки зрения теории статистических решений

§ 1.1. Элементы математической статистики н теории статистических решений (1, 2, 3, 7] 27
1.1.1. Основные понятия теории статистических оценок параметров распределения 29
1.1.2. Общие принципы проверки гипотез с помощью статистических критериев. 39
1.1.3. Основные положения общей теории статистических решений. 48
§ 1.2. Статистическая модель процесса обработки радиолокационной информации 54
1.2.1. Постановка задачи 54
1.2.2. Статистические характеристики принимаемых радиолокационных сигналов. 55
1.2.3. Общая характеристика решающих устройств для обработки радиолокационной информации. 68
§ 1.3. Общая формулировка задачи обнаружения сигналов и траекторий. 71
1.3.1. Исходные предпосылки. 71
1.3.2 Алгоритмы оптимального обнаружения случайных сигналов 71
1.3.3. Пример решения задачи оптимального обнаружения некогерентной пачки импульсов по критерию Неймана — Пирсона 78
§ 1.4. Общая формулировка задачи оценки параметров . . . 81
1.4.1. Исходные предпосылки. 81
1.4.2. Алгоритм оптимальной оценки параметров сигналов . 83

1.4.3. Оптимальная оценка азимута цели по пачке некогерентных импульсов 90

Глава 2

Дискретизация радиолокационных сигналов

§ 2.1. Постановка задачи 97
§ 2.2. Общие принципы дискретизации случайных сигналов . . 98
2.2.1. Принципы временной дискретизации случайных сигналов 98
2.2.2. Принципы амплитудной дискретизации случайных сигналов 103
§ 2.3. Дискретизация сигналов обзорной импульсной РЛС . 110
2.3.1. Модель сигнала, подлежащего дискретизации . . . 110
2.3.2. Принцип дискретизации сигналов обзорной импульсной РЛС 112
2.3.3. Выбор интервалов временно́го квантования 116
2.3.4. Выбор порогов амплитудного квантования . . . 118
§ 2.4. Совместное квантование по амплитуде и времени . 131
2.4.1. Вероятность обнаружения нестационарного сигнала в пределах фиксированного временного интервала . 131
2.4.2. Вероятность ложного обнаружения стационарной помехи в пределах фиксированного временно́го интервала . 136
2.4.3. Обнаружение на интервале импульса с колокольной огибающей 141
2.4.4. Функциональная схема устройства квантования сигналов 148

Глава 3

Первичная обработка квантованных радиолокационных сигналов

§ 3.1. Статистический синтез решающих устройств для обработки пачек квантованных сигналов 152
3.1.1. Постановка задачи 152
3.1.2. Алгоритм квазиоптимального обнаружения пачки квантованных сигналов 153
3.1.3. Качественные характеристики обнаружения двоично-квантованных сигналов и выбор второго порога . . 160
3.1.4. Алгоритм квазиоптимальной оценки азимута цели по пачке двоично-квантованных сигналов 166
3.1.5. Точность оценки азимута по пачке квантованных сигналов 171
3.1.6. Пример практической реализации квазиоптимальной обработки пачки импульсов с помощью симметричной весовой функции 176
§ 3.2. Обработка двоично-квантованных сигналов с помощью цифровых накопителей и программных обнаружителей (цифровых автоматов) 179
3.2.1. Принципы и методы безвесовой обработки радиолокационных сигналов 179
3.2.2. Некоторые сведения из теории синтеза цифровых автоматов 185
3.2.3. Абстрактный синтез цифровых накопителей радиолокационных сигналов 195

3.2.4. Абстрактный синтез цифровых программных обнаружителей . . . 204
3.2.5. Пример логического синтеза схемы цифрового программного обнаружителя . . . 209
§ 3.3. Статистический анализ цифровых накопителей и программных обнаружителей . . . 212
3.3.1. Постановка задачи . . . 212
3.3.2. Воздействие стационарных помех на цифровой накопитель радиолокационных сигналов . . . 215
3.3.3. Воздействие стационарных помех на цифровой программный обнаружитель . . . 226
3.3.4. Вероятность обнаружения сигнала цифровым накопителем . . . 235
3.3.5. Вероятность обнаружения сигнала цифровым программным обнаружителем . . . 242
3.3.6. Точность оценки азимута при обнаружении пачки с помощью цифровых автоматов . . . 246

Глава 4

Вторичная обработка радиолокационной информации обзорной РЛС

§ 4.1. Определение и назначение вторичной обработки . . . 255
§ 4.2. Статистические характеристики входных сигналов для вторичной обработки . . . 256
4.2.1. Статистическая модель движения цели . . . 256
4.2.2. Статистические характеристики помех . . . 267
§ 4.3. Автоматическое обнаружение (автозахват) траекторий 270
4.3.1. Исходные предпосылки . . . 270
4.3.2. Алгоритмы автозахвата траекторий . . . 272
4.3.3. Среднее число передаваемых на сопровождение ложных траекторий . . . 275
4.3.4. Среднее число ложных траекторий, находящихся на сопровождении . . . 282
4.3.5. Вероятность обнаружения траектории . . . 287
§ 4.4. Оптимальная оценка координат и параметров при полиномиальной модели движения цели . . . 293
4.4.1. Постановка задачи . . . 293
4.4.2 Применение метода максимального правдоподобия для оценки математического ожидания полиномиальной функции . . . 294
4.4.3. Алгоритмы оценки параметров и координат при равноточных независимых наблюдениях . . . 298
4.4.4. Ошибки оценки параметров и координат при оптимальном сглаживании и экстраполяции . . . 307
4.4.5. Оптимальная оценка параметров и координат при наличии независимых наблюдений скорости . . . 311
§ 4.5. Оптимальное последовательное сглаживание координаты и скорости ее изменения . . . 316
4.5.1. Введение . . . 316
4.5.2. Алгоритм последовательного сглаживания при равноточных наблюдениях . . . 317
4.5.3. Алгоритмы последовательного сглаживания с учетом независимых наблюдений скорости . . . 324

4.5.4. Характеристики качества оптимального последовательного сглаживания координаты и скорости. Выбор коэффициентов α и β 326
§ 4.6. Последовательное сглаживание параметров траектории (скорости и курса) 340
4.6.1. Введение. 340
4.6.2. Принцип экстраполяции координат *по* параметрам траектории. 341
4.6.3. Сглаживание параметров траектории по методу средневзвешенных. 343
4.6.4. Точностные характеристики метода средневзвешенных 347
4.6.5. Экспоненциальное сглаживание параметров траектории 350
4.6.6. Ошибки при экспоненциальном сглаживании параметров траектории. Выбор оптимального значения ζ . . . 353
4.6.7. Формульная схема алгоритма сглаживания и экстраполяции координат по параметрам траектории . . . 360
§ 4.7. Стробирование и селекция отметок в стробах . . 370
4.7.1. Постановка задачи. 370
4.7.2. Стробирование отметок от цели. 371
4.7.3. Алгоритм селекции отметок в двумерном стробе . . 376
4.7.4. Вероятность правильной селекции. 380
4.7.5. Разрешающая способность при селекции траекторий путем стробирования 383
Литература 389
Именной указатель 392
Предметный указатель 393

СЕРГЕЙ ЗАХАРОВИЧ КУЗЬМИН

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Редактор Н. Д. Иванушко
Технический редактор В. В. Беляева
Художественный редактор В. Т. Сидоренко
Корректор В. В. Команова

Сдано в набор 22/VIII 1966 г. Подписано к печати 17/II 1967 г.
Г-44534 Формат 84×108¹/₃₂ Бумага типографская № 2
Объем 21 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 20 Тираж 9 300 экз.

Издательство «Советское радио» Москва, Главпочтамт, п. я, 693. Зак. 2622.
Московская типография № 10 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Шлюзовая наб., 10.
Цена в переплете № 7—1 р. 40 к.

У