С. З. КУЗЬМИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Москва «Советское радио» 1974

6Ф2.4
К89
УДК 621.396.96

Редакция литературы по вопросам космической радиоэлектроники

Кузьмин С. 3.

К89 Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации, М., «Сов. радио», 1974

432 с. с ил.

Материал книги представляет собой дальнейшее развитие методов синтеза и анализа основных алгоритмов цифровой обработки информации, вошедших в книгу автора «Цифровая обработка радиолокационной информации», изданную в 1967 г.

Книга предназначена для инженерно-технических работников, связанных с проектированием и эксплуатацией автоматизированных радиолокационных систем, а также для аспирантов и студентов.

К $\frac{30402\text{-}064}{046(01)\text{-}74}$ 14-74

6Ф2.4

© Издательство «Советское радио», 1974,

Предисловие

Широкое внедрение цифровой вычислительной техники во все сферы производства и управления привело к возникновению ряда новых научных направлений. Одним из таких направлений является цифровая обработка информации, в том числе, цифровая обработка радиолокационной (радиотехнической) информации, производимая в интересах решения задач обороны, при исследовании космоса и для решения ряда научно-технических и народнохозяйственных проблем.

В данной книге изложены основы теории цифровой обработки радиолокационной информации применительно, главным образом, к РЛС обнаружения и сопровождения. Материал книги представляет собой дальнейшее развитие методов синтеза и анализа основных алгоритмов цифровой обработки, вошедших в книгу автора «Цифровая обработка радиолокационной информации», изданную в 1967 г.

Книга состоит из двух разделов. В разделе I (гл. 1—4) излагаются общие вопросы теории синтеза и анализа цифровых информационных систем применительно к проблеме обработки радиолокационной информации. Глава I содержит элементы статистической теории обработки радиолокационных сигналов, элементы теории дискретизации и квантования, вводятся статистические критерии для оптимальной обработки квантованных радиолокационных сигналов. В гл. 2 приводятся сведения из абстрактной теории синтеза устройств и алгоритмов для переработки дискретной информации. В гл. 3 рассматриваются методы анализа дискретных систем с применением математического аппарата дискретных цепей Маркова для определения вероятностных характеристик, а также теории массового обслуживания для расчета пропускной способности устройств и алгоритмов обработки радиолокационной информации. В гл. 4 рассматриваются методы исследования алгоритмов обработки радиолокационной информации путем статистического моделирования на универсальной ЦВМ.

Раздел II (гл. 5—10) посвящен исследованию конкретных методов и алгоритмов цифровой обработки радиолокационной информации. В гл. 5 излагаются вопросы анализа и синтеза алгоритмов и устройств цифровой первичной обработки радиолокационных сигналов. Рассматриваются вопросы реализации алгоритмов первичной обработки на ЦВМ. В гл. 6 излагаются вопросы синтеза основных операций вторичной обработки радиолокационной информации. Основными здесь являются вопросы статистической оценки параметров траекторий при фиксированном объеме выборки. В гл. 7 излагаются вопросы анализа и реализации алгоритмов обнаружения и сопровождения траекторий целей. В гл. 8 излагаются вопросы обнаружения и селекции сигналов в стробах индивидуального сопровождения применительно к цифровым радиолокационным измерителям: синтезирован оптимальный алгоритм

обнаружения и селекции сигналов в двумерном стробе и произведен анализ его статистических характеристик, рассмотрены упрощенные алгоритмы обнаружения и селекции сигналов в стробе. Гл. 9 посвящена рассмотрению теории последовательного сглаживания (фильтрации) параметров траектории. Рассмотрены вопросы обнаружения маневра цели и некоторые методы оценки параметров траекторий маневрирующих целей. В гл. 10 изложены некоторые вопросы отождествления и объединения радиолокационной информации, полученной от нескольких разнесенных источников.

При изложении материала раздела II непосредственно используется теоретический материал, изложенный в разделе I.

В книге принята тройная нумерация формул (номер главы, номер параграфа и порядковый номер формулы в пределах параграфа). При ссылках на формулы в пределах параграфа указывается только порядковый номер, при ссылках на формулы из другого параграфа той же главы указывается номер параграфа и порядковый номер формулы, при ссылках на формулы из других глав указывается полный (тройной) номер. Книга написана по материалам открытой отечественной и зарубежной литературы. Список основной использованной литературы приводится в конце каждой главы.

При написании книги и подготовке ее к печати автор получил большое число полезных советов и рекомендаций от своих коллег по научной и педагогической работе. Особо необходимо отметить плодотворное влияние совместных работ с докт. техн. наук Ярушеком В. Е., канд. техн. наук Колосовым Л. В. и Руженцевым В. Н. Всем им автор выражает свою признательность.

При оформлении рукописи неоценимую помощь оказала Т. М. Кузьмина.

Автор особо признателен рецензентам книги докт. техн, наук проф. И. А. Большакову и докт. техн. наук проф. В. В. Липаеву за ряд ценных советов и пожеланий, во многом способствовавших улучшению книги.

Автор с большим интересом и благодарностью примет все замечания и предложения по существу вопросов, изложенных в книге.

ВВЕДЕНИЕ. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Понятие о системе обработки радиолокационной информации. В настоящее время широкое применение находят автоматизированные системы управления и наблюдения (АСУ) за воздушной (космической) обстановкой для решения задач противовоздушной (противокосмической) обороны, а также для решения целого ряда научно-технических и народнохозяйственных задач (исследование космоса, управление воздушным движением и т. д.). Важнейшей составной частью таких АСУ является радиолокационная система сбора и обработки информации об объектах (целях), подлежащих разведке.

В радиолокационную систему входят (рис. В.1):

— измерительный радиолокационный комплекс, включающий одну или несколько РЛС;

— комплекс вычислительных средств (система) обработки радиолокационной информации;

— комплекс средств передачи информации между элементами радиолокационной системы и к потребителям;

— средства управления, предназначенные для обеспечения согласованной работы всех элементов.

Круг задач, решаемых радиолокационной системой, варианты построения и требования к составляющим ее комплексам определяются назначением и принципами функционирования АСУ, в которой радиолокационная система является основным источником информации. Нас в дальнейшем будет интересовать только та часть радиолокационной системы, в которой производится обработка информации.

Как элемент радиолокационной системы, системы обработки радиолокационной информации непосредственно связана с источниками радиолокационных сигналов и должна обеспечивать решение следующих задач:

— «отсеивание» помех и выделение полезных сигналов, несущих информацию об интересующих систему управления целях;

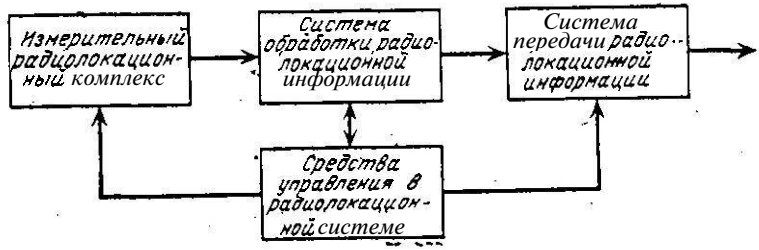


Рис. В.1. Состав радиолокационной системы.

— определение параметров отраженных сигналов;

— «увязывание» отраженных сигналов в траектории и определение параметров этих траекторий;

— селекция траекторий целей по признаку их важности для системы;

— формирование обобщенной воздушной (космической) обстановки в зоне ответственности (в зоне действия) системы управления.

Уже из предварительного знакомства с задачами, решаемыми в системе обработки радиолокационной информации, усматривается многообразие выполняемых системой функций, связанных с поэтапной переработкой больших потоков информации. Каждый этап обработки сводится к выполнению определенного набора операций над входными сигналами и может осуществляться в отдельных устройствах той или иной сложности. Система обработки может быть, таким образом, представлена как совокупность элементарных подсистем, между которыми имеются сложные взаимосвязи. Такие системы получили название сложных кибернетических систем.

Сложность системы обработки делает, как правило, невозможным формализацию и анализ ее работы в целом. Поэтому предварительно систему приходится разбивать на элементы и изучать первоначально их функционирование. В общем случае разбиение сложной системы на элементы может быть выполнено неоднозначно и во многом определяется конкретным назначением системы. Однако целесообразно производить разбиение так, чтобы элементы имели четко выраженное функциональное назначение и наряду с этим было возможно производить их описание с достаточно общих математических позиций.

В связи с таким подходом процесс обработки радиолокационной информации можно разделить на следующие функционально законченные операции.

1. Обнаружение полезных (отраженных от целей) сигналов и формирование радиолокационных отметок. Задача обнаружения сигналов состоит в вынесении однозначного решения: либо сигнал есть ($S > 0$), либо сигнала нет ($S = 0$). Оптимальность решения задачи обнаружения сигналов понимается, как правило, в смысле обеспечения минимального числа ошибочных решений.

2. Определение (оценка) координат радиолокационных отметок, полученных в результате однократного взаимодействия источника (цели) и получателя (РЛС) информации в канале связи «цель — РЛС». В процессе этой операции производится статистическая оценка*) дальности до цели (например, по задержке отраженного сигнала относительно момента посылки зондирующего сигнала), статистическая оценка радиальной скорости цели по допплеровскому сдвигу частоты отраженного сигнала относительно частоты зондирующего сигнала (для РЛС с разрешением по радиальной скорости), а также статистическая оценка угловых координат цели, закодированных в параметрах модуляции отраженного сигнала. Оптимальность решения задачи оценки парамет-

*) В математической статистике под оценкой понимается как процесс «оценивания» параметра, так и результат этого процесса.

ров понимается в смысле максимального приближения оценки к истинному значению оцениваемого параметра (в смысле минимизации ошибок оценки).

Операции 1 и 2 выполняются на основе сигналов, полученных в каждом периоде (цикле) обзора РЛС. Совокупность этих операций составляет содержание первого этапа обработки, называемого первичной обработкой радиолокационной информации.

3. Обнаружение траектории цели по совокупности радиолокационных отметок, полученных в ряде последовательных периодов (циклов) обзора РЛС. В процессе выполнения этой операции необходимо установить принадлежность нескольких отметок из различных периодов обзора к одной цели, принять по ним однозначное решение о наличии или отсутствии цели, а также вычислить начальные значения параметров траектории обнаруженной цели.

4. Слежение за траекторией цели (сопровождение траектории цели). В процессе слежения за траекторией необходимо в каждом обзоре отобрать новые отметки для продолжения траектории и уточнить параметры траекторий с учетом координат новых отметок.

5. Траекторные расчеты по каждой (или части) из находящихся на сопровождении целей в интересах потребителей радиолокационной информации. Сюда относятся точное сглаживание и прогнозирование (экстраполяция) параметров траекторий на рубежи принятия окончательных решений, определение районов старта и падения баллистических целей и др.

Операции 3, 4 и 5 выполняются пообзорно на основе радиолокационных отметок, полученных в процессе первичной обработки информации, в общем случае нескольких РЛС. Совокупность этих операций составляет содержание второго этапа обработки и называется вторичной обработкой радиолокационной информации.

6. Третьим этапом обработки является объединение информации нескольких источников (отдельных РЛС или групп РЛС, имеющих общую систему вторичной обработки) по целям, находящимся в области перекрытия их зон обзора. В процессе объединения информации решаются задачи отождествления (идентификации) траекторий, полученных от нескольких источников по одной и той же цели, и вычисления параметров объединенных траекторий.

При использовании для обработки радиолокационной информации цифровых вычислительных машин (ЦВМ), перечисленным операциям предшествует вспомогательная операция, состоящая в дискретизации и кодировании сигналов на выходе видеотракта приемного устройства РЛС. Устройство дискретного преобразования и кодирования сигналов является в этом случае согласующим звеном между аналоговым радиоприемным устройством РЛС и цифровой системой обработки радиолокационной информации.

Последовательность выполнения перечисленных операций обработки радиолокационной информации показана на рис. В.2. Операции

первичной обработки обычно выполняются на каждой РЛС. Вторичная обработка радиолокационной информации может производиться совместно для комплекса РЛС (узла). Объединение информации обычно производится на командных пунктах (пунктах сбора информации) с целью получения обобщенной радиолокационной обстановки в зоне ответственности радиолокационной системы.

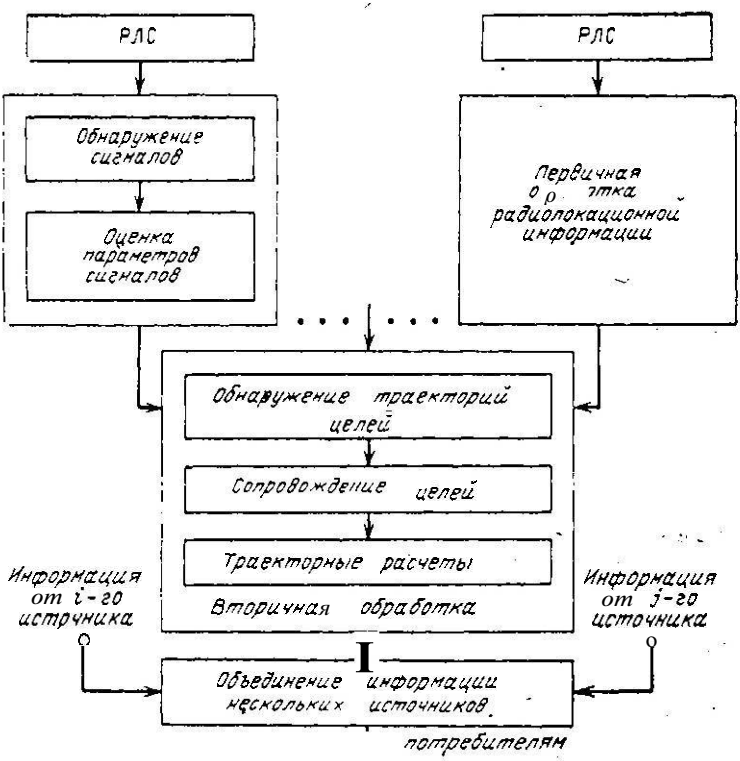


Рис. В.2. Последовательность выполнения операций обработки радиолокационной информации.

Задачи автоматизации процессов обработки радиолокационной информации. В реальных условиях слежения за многими целями, движущимися с большими скоростями, человек не в состоянии оперативно оценивать многообразие сложившейся обстановки, пользуясь только визуальными индикаторами. В связи с этим возникает проблема передачи части или всех функций человека-оператора при обработке радиолокационной информации вычислительным устройствам, т. е. проблема построения автоматизированных систем обработки радиолокационной информации.

Автоматизация процессов обработки радиолокационной информации может быть частичной или полной. При частичной автоматизации создаются так называемые полуавтоматические системы обработки.

Человек-оператор (ОП) входит в полуавтоматическую систему как ее важнейшее звено, без которого работа системы невозможна (рис. В.3). В автоматических системах все операции обработки выполняются с помощью вычислительных устройств. Функции человека в таких системах в основном ограничиваются наблюдением за работой системы и ее техническим обслуживанием (рис. В. 3).

Для автоматизации процессов обработки необходимо прежде всего разработать формализованные правила (алгоритмы) выполнения всех ее операций. Теоретической базой для алгоритмизации процессов обра-

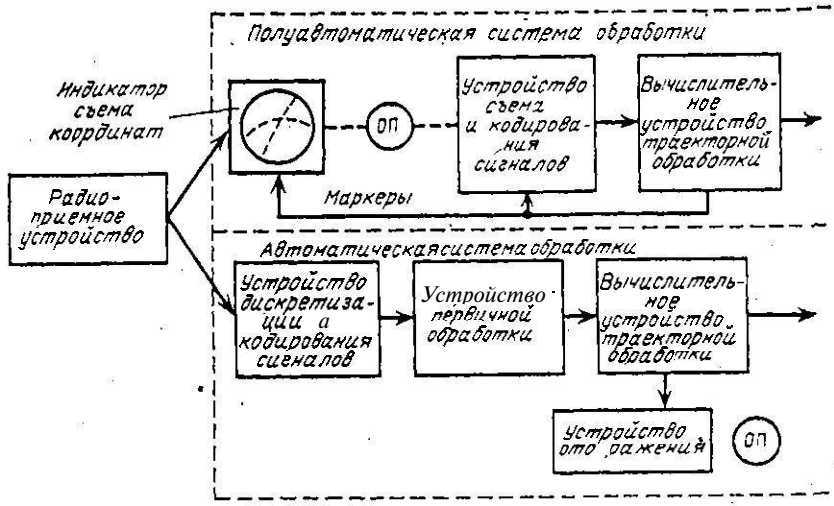


Рис. В.3. Принципы построения системы обработки радиолокационной информации.

ботки является теория статистических решений и статистическая теория радиолокации. Получаемые из теории оптимальные алгоритмы обеспечивают максимальный эффект выполнения операций в смысле выбранных критериев оптимальности, но без учета возможностей реализации.

Базой для реализации автоматизированной системы обработки радиолокационной информации служат в первую очередь ЦВМ, а также специализированные аналоговые и дискретные вычислительные устройства. С точки зрения надежности, экономичности и габаритов аппаратуры предпочтение необходимо отдать цифровым вычислительным устройствам. Система обработки, реализованная на ЦВМ и других специализированных цифровых вычислительных устройствах, называется цифровой системой обработки радиолокационной информации, а сам процесс обработки называется в этом случае цифровой обработкой радиолокационной информации.

При реализации системы обработки на ЦВМ должны учитываться следующие особенности последних как дискретных преобразователей информации:

— для обработки на ЦВМ информация должна быть представлена в дискретном виде и закодирована двоичным кодом (или другими кодами, с которыми оперирует ЦВМ);

— преобразование информации в ЦВМ производится последовательно по тактам. Объем информации, хранимой и преобразуемой в каждом такте, является конечным.

Первая из указанных особенностей обусловливает необходимость предварительной дискретизации и кодирования радиолокационных сигналов для обработки на ЦВМ. Дискретизация неизбежно ведет к потерям в пороговом сигнале и, следовательно, к потерям в качестве обработки по сравнению с оптимальной обработкой непрерывных (неквантованных) сигналов. Разработка оптимальных (с минимальными потерями информации) методов дискретизации радиолокационных сигналов является специфической задачей, возникающей при реализации цифровой системы обработки радиолокационной информации.

Из второй особенности ЦВМ как дискретного преобразователя информации следует ограниченность (конечность) ее быстродействия. Это, в свою очередь, приводит к ограничению пропускной способности систем, построенных на базе ЦВМ. Если теперь учесть необходимость одновременной обработки информации о множестве целей, находящихся в зоне обзора РЛС в реальном масштабе времени, то возникает проблема обеспечения требуемой пропускной способности цифровой системы обработки. Для решения этой проблемы во многих случаях приходится упрощать (видоизменять) оптимальные алгоритмы основных операций обработки с целью их приспособления для реализации на ЦВМ с заданной ограниченной производительностью или вообще отказываться от автоматизации некоторых операций.

Таким образом, разработка алгоритмов выполнения основных операций обработки, обеспечивающих приемлемые качественные характеристики выходной информации при одновременном учете возможностей их реализации на ЦВМ с ограниченной производительностью, является одной из основных задач автоматизации процессов обработки на базе ЦВМ.

Алгоритмизация процессов обработки производится на начальной стадии проектирования системы обработки радиолокационной информации, В дальнейшем необходимо увязать между собой отдельные элементарные алгоритмы и разработать комплексный алгоритм системы с учетом реализации на конкретной ЦВМ, определить степень автоматизации операции и этапов обработки, распределить функции между человеком-оператором и ЦВМ в системе и т. д. Решение перечисленных задач должно сопровождаться анализом эффективности построения отдельных подсистем и системы в целом по «внешним» (задаваемым потребителями радиолокационной информации) или «внутренним» (специфическим для радиолокационной системы) критериям оптимальности.

Раздел I

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

1. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ ДИСКРЕТИЗОВАННЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

1.1. Статистические закономерности формирования радиолокационных сигналов

В данном параграфе рассматриваются основные закономерности формирования радиолокационных сигналов в соответствии со статистической моделью радиолокационного наблюдения, что соответствует элементарному изложению необходимых в дальнейшем основных положений статистической теории радиолокации [1, 10, 13, 18].

1.1.1. Схемная модель процесса радиолокационного наблюдения

Для наглядности процесс радиолокационного наблюдения можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 1.1. Ниже приводится элементарное описание блоков этой схемы и их взаимодействия.

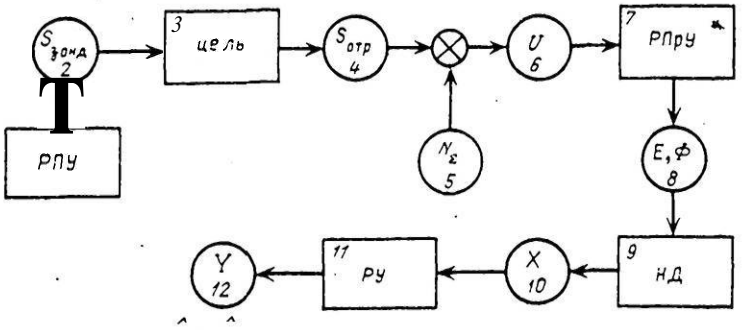


Рис. 1.1. Схемная модель процесса радиолокационного наблюдения.

1. Передающее устройство РПУ (блок *1)* является источником зондирующих сигналов РЛС. Каждый зондирующий сигнал характеризуется своими параметрами, такими как энергия, фаза высокочастотного заполнения, закон модуляции и др. Аналитически зондирующий сигнал можно записать в виде

$$S_{зонд}(0 = A(t)\cos[2\pi f_0 t - \varphi(t) + \psi_{зонд}],$$

где $A(t)$ — закон амплитудной модуляции (огибающая); f_0 — несущая частота зондирующего сигнала; $\varphi(t)$ — закон фазовой модуляции; $\psi_{зонд}$ — начальная фаза зондирующего сигнала.

Наиболее важными характеристиками одиночных зондирующих сигналов являются: энергия сигнала Э, определяющая максимально достижимое отношение сигнал/помеха на выходе радиотракта РЛС; ширина спектра Δf, которая определяет разрешающую способность по дальности; длительность сигнала $\tau_и$, которая определяет разрешающую способность по скорости.

Существенным для описания функционирования РЛС является понятие когерентности зондирующих сигналов. Применительно к импульсному сигналу когерентность соответствует однозначной связи между начальными фазами $\psi_{зонд}$ следующих друг за другом импульсов. Применение зондирующих сигналов в виде последовательности (пачки) из N когерентных импульсов позволяет при оптимальной обработке отраженных сигналов увеличить отношение сигнал/помеха и улучшить разрешающую способность по скорости.

2. Через передающую антенну РЛС зондирующие сигналы излучаются в пространство. В процессе сканирования антенны с узкой диаграммой направленности происходит кратковременное облучение цели электромагнитной энергией зондирующих сигналов. Совокупность излученных в направлении цели зондирующих сигналов образует множество зондирующих сигналов $S_{зонд}$ (см. блок 2 на рис, 1.1).

3. Цель (блок *3)* является пассивным отражателем энергии и, вследствие этого, источником полезной информации в канале «РЛС — цель».

Информационной характеристикой цели является траектория ее движения, задаваемая временными функциями текущих координат. Траектория движения цели может быть представлена либо детерминированной функцией времени и параметров, либо в виде случайного процесса с заданными статистическими характеристиками.

Энергетической характеристикой цели является ее эффективная отражающая поверхность (ЭОП). В теории радиолокации обычно используют одну из следующих статистических моделей ЭОП [13]:

а) цель представляет собой совокупность большого числа независимых и равноценных отражателей с заданным средним значением эффективной поверхности $\bar{\Sigma}$;

б) цель представляет собой совокупность элементов первой модели и содержит, кроме того, доминирующую точку с постоянной эффективной поверхностью Σ_0 (очевидно, первая модель является частным случаем второй при $\Sigma_0 = 0$).

Плотность вероятности ЭОП цели при наличии доминирующей «блестящей точки» имеет вид

$$w(\Sigma) = \frac{}{} \left(\frac{\Sigma + \Sigma_0}{} \right) I_0 \left(\frac{2\sqrt{\Sigma\Sigma_0}}{} \right) \qquad (1.1.1)$$

а при ее отсутствии

$$w(\Sigma) = \bar{\Sigma}^{-1} \exp\left(-\Sigma/\bar{\Sigma}\right), \qquad (1.1.2)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

4. Каждый отраженный от цели сигнал формируется в результате воздействия на зондирующий сигнал цели и окружающей среды и может быть аналитически представлен в виде некоторой известной функции времени и случайных параметров, т. е. $S_{отр} = S(t, \vartheta)$, где ϑ — вектор параметров отраженного сигнала. Совокупность всех возможных сигналов, отраженных от цели за время ее наблюдения, образует множество отраженных сигналов $S_{отр}$ (блок *4)*.

5. Аналогичным образом определяется множество $N_п$ сигналов внешних помех, в которое кроме сигналов, отраженных от ложных целей, входят сигналы постановщиков помех, а также сигналы других мешающих источников.

6. На вход приемной антенны РЛС воздействует сигнал, образующийся в результате смешивания отраженных сигналов и внешних помех. В приемном устройстве полезный сигнал подвергается дополнительному искажению внутренними шумами аппаратуры $N_ш$. Пересчитанные на вход приемного устройства внутренние шумы аддитивно смешиваются с внешними помехами, образуя суммарную помеху $N_Σ$ (блок 5), записываемую в виде

$$N_Σ(t) = N_п(t) + N_ш(t).$$

Обычно предполагается, что на входе приемного устройства суммарная помеха аддитивно смешивается с отраженным сигналом. Суммарный сигнал (блок *6)* на входе приемного устройства записывается в виде

$$U(t) = S_{отр}(t, \vartheta) + N_Σ(t).$$

7. Оконечное устройство РЛС полагается состоящим из двух частей: собственно приемника РПрУ (блок 7), представляющего собой оптимальный согласованный фильтр и безынерционный детектор, и решающего устройства РУ (блок *10*), служащего для преобразования выходных сигналов приемника в решение, принимаемое на основе этих сигналов. В общем случае множество выходных сигналов приемника включает в себя подмножество огибающих Е и подмножество фаз огибающих Ф, отфильтрованных и продетектированных в приемнике входных сигналов (блок *8)*.

При цифровой обработке радиолокационной информации между приемником и решающим устройством ставятся преобразователи сигналов из аналоговой формы в дискретную (НД, блок *9)*. В этом случае множество X сигналов на входе рашающего устройства (блок *9)* является дискретным, а само РУ представляет собой цифровое вычислительное устройство (блок *11)*.

8. Множество решений Y (блок *12)* в задаче радиолокационного наблюдения в простейшем случае представляет собой множество оценок координат и параметров движения наблюдаемых целей.

Для синтеза оптимальных решающих устройств обработки радиолокационной информации необходимо знать статистические характеристики обрабатываемых сигналов. Поэтому в дальнейшем производится некоторая детализация рассмотренной модели в этом направлении.

1.1.2. Статистические характеристики отраженных сигналов

В дальнейшем имеются в виду, главным образом, обзорные РЛС (кругового или секторного обзора), предназначенные для слежения за множеством целей. Траектория каждой из сопровождаемых целей строится в этом случае по дискретным данным (измеренным значениям координат), полученным в процессе многократного (равномерного или программного) обзора пространства.

В качестве наблюдаемых координат обзорная РЛС может выдавать данные о дальности r, пропорциональной задержке τ отраженного сигнала, азимуте β и угле места ε. Методы измерения дальности и радиальной скорости, а также разрешающая способность и точность отсчета этих координат непосредственно связаны с характеристиками зондирующего сигнала. Отсчет координаты азимута производится, как правило, по максимуму огибающай отраженного сигнала. Разрешающая способность и точность отсчета азимута определяется шириной диаграммы направленности антенны РЛС в горизонтальной плоскости на прием и передачу.

Измерение угла места в обзорной РЛС производится обычно с помощью парциальных игольчатых антенных лучей, расположенных в вертикальной плоскости один над другим. Если каждый луч связан со своим приемником, то угол места определяется по номеру канала, принявшего отраженный сигнал. Разрешающая способность и точность отсчета по углу места определяется, в первом приближении, шириной парциальных диаграмм направленности в вертикальной плоскости.

Ниже рассматриваются статистические характеристики отраженных сигналов, применительно к одному парциальному каналу обзорной РЛС, совершающей равномерный обзор пространства в горизонтальной плоскости.

При равномерном сканировании в горизонтальной плоскости одиночный сигнал, отраженный от подвижной цели, можно представить в виде [1]

$$S_{\text{отр}}(t, \vartheta) = A_S(t) g(\beta_0, \beta) S(t-\tau) \cos[2\pi f_0 (t-\tau) + 2\pi F_д t + \varphi(t) + \psi_0], \quad (1.1.3)$$

где $A_S(t)$ — интенсивность отраженного сигнала, зависящая от дальности до цели и ее эффективной отражающей поверхности; $g(\beta_0, \beta)$ — огибающая обобщенной диаграммы направленности РЛС на прием и передачу в горизонтальной плоскости (при $\beta = \beta_0$, $g(\beta_0, \beta) = 1$); β — текущий азимут антенны; β_0 — истинный азимут цели в момент локации; $S(t-\tau)$ — закон амплитудной модуляции сигнала (модулирующая функция); τ — задержка отраженного сигнала относительно посылки зондирующего сигнала; $\varphi(t)$ — закон фазовой модуляции; ψ_0 — начальная фаза отраженного сигнала; $F_д$ — допплеровский сдвиг частоты отраженного сигнала; f_0 — несущая частота сигнала.

Если отраженный сигнал представляет собой последовательность периодически повторяющихся импульсов (пачку импульсов), то моду-

лирующая функция в (3) будет иметь вид

$$S_{\text{п}}(t-\tau) \approx \sum_{}^{N} S\,[t-\tau-(\lambda-1)\,T_{\text{п}}], \qquad (1.1.4)$$

где N — расчетное число импульсов в пачке, определяемое по формуле

$$N = \varphi_p F_{\text{п}}/\dot{\beta}_a. \qquad (1.1.5)$$

В последней формуле: φ_p — ширина диаграммы направленности антенны в горизонтальной плоскости на заданном уровне мощности (в градусах); β_a — скорость сканирования (вращения) луча антенны (в *град/сек*); $F_{\text{п}}$ — частота следования зондирующих сигналов.

В реальных условиях, за счет флюктуаций эффективной отражающей поверхности цели и изменения условий распространения радиоволн, отраженный сигнал всегда флюктуирует по интенсивности, частоте и фазе. Задержка сигнала и азимут его прихода являются неизвестными для наблюдателя параметрами и, следовательно, также могут рассматриваться как случайные величины.

Таким образом, отраженный от подвижной цели сигнал представляется в виде заданной функции времени с совокупностью случайных параметров, т. е. $S_{\text{отр}} = S\,(\tau, \beta_0, F_{\text{д}}, A_S, \psi_0, t)$. Часть из этих параметров подлежит оценке при обработке. Такие параметры называются существенными. Другие параметры не несут полезной информации, т. е. являются паразитными. В процессе обработки обычно производится статистическое усреднение принимаемых сигналов по совокупности паразитных параметров (если такое усреднение вообще возможно).

Основными полезными параметрами сигнала, подлежащими оценке при приеме, являются задержка τ, пропорциональная дальности до цели, и азимут β_0. При синтезе оптимальных решающих правил для оценки этих параметров принимается условие их неизменности в процессе одиночного измерения.

Параметр $F_{\text{д}}$ содержит информацию о радиальной составляющей скорости цели. Наличие независимой информации о скорости цели на каждом обзоре позволяет увеличить точность воспроизведения траектории цели, однако при этом усложняется процесс обработки сигнала. В зависимости от того, воспринимается ли частотный сдвиг $F_{\text{д}}$ как полезный или паразитный параметр, радиолокационные системы делятся на системы с поиском по скорости и системы с усреднением по скорости. В системах с усреднением по скорости закон распределения доплеровских сдвигов частоты $w\,(F_{\text{д}})$ полагается равномерным в рабочем интервале $\pm F_{\text{д макс}}$.

Начальная фаза отраженного сигнала в некогерентных системах также является паразитным параметром и предполагается распределенной равномерно в интервале $(0-2\pi)$.

Параметр A_S, характеризующий интенсивность отраженного сигнала, непосредственно зависит от эффективной отражающей поверхности цели. Для цели с эффективной отражающей поверхностью, описываемой статистической моделью б) (п. 1.1.1), одномерная плотность

вероятности интенсивности отраженного сигнала сводится к обобщенному закону Релея

$$w(A_S) = \frac{A_S}{\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{A_S^2 + A_0^2}{2\sigma_A^2}\right) I_0\left(\frac{A_S A_0}{\sigma_A^2}\right), \qquad (1.1.6)$$

где A_0 — интенсивность сигнала, отраженного от доминирующей «блестящей» точки; σ\ — дисперсия интенсивности сигналов, отраженных от совокупности недоминирующих блестящих точек.

Для частного случая статистической модели а) плотность вероятности интенсивности отраженного сигнала описывается необобщенным законом Релея

$$w(A_S) = \frac{A_S}{\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{A_S^2}{2\sigma_A^2}\right). \qquad (1.1.7)$$

Кроме рассмотренных моделей, в теоретических исследованиях иногда принимают модель нефлюктуирующего отраженного сигнала (сигнала с постоянной, но неизвестной амплитудой).

Для отраженных сигналов пачечной структуры используются следующие модели флюктуаций интенсивности:

1. Пачка нефлюктуирующих отраженных сигналов, что соответствует предположению об отсутствии флюктуации отражающей поверхности цели.

2. Пачка быстрофлюктуирующих отраженных сигналов, что соответствует предположению о независимых друг от друга флюктуациях сигналов в лачке.

3. Пачка медленнофлюктуирующих отраженных сигналов, что соответствует предположению о медленной флюктуации («мерцании») отражающей поверхности цели. При этом считается, что все сигналы в пачке изменяются «дружно» от периода к периоду обзора.

1.1.3. Статистические характеристики помех

Согласно принятой модели на входе приемного устройства отраженные сигналы искажаются суммарными помехами N_Σ (блок *5* на рис. 1.1).

В общем случае помехами в процессе приема и обработки радиолокационных сигналов являются;

— внутренние шумы приемной аппаратуры $N_ш$, главным образом, шумы входных и смесительных каскадов приемника РЛС,

— ложные цели естественного и искусственного происхождения (пассивные помехи),

— активные помехи, создаваемые специальными передатчиками помех,

— помехи, создаваемые соседними источниками излучения.

Рассмотрим кратко основные статистические характеристики перечисленных составляющих помех.

Внутренние шумы приемной аппаратуры обусловлены флюктуационными процессами в электронных приборах и представляют собой ста-

ционарный случайный процесс. Одномерная плотность вероятности мгновенных значений напряжения внутренних шумов записывается в виде

$$w(N_{ш}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ш}} \exp\left[-\frac{N_{ш}^2}{2\sigma_{ш}^2}\right], \qquad (1.1.8)$$

где $\sigma_{ш}^2$ — дисперсия шума.

Такое распределение называется гауссовым или нормальным. В общем случае шумовая помеха описывается многомерным нормальным законом распределения вероятности. Важной чертой нормальных помех является то, что они полностью определяются своим смешанным моментом второго порядка (функцией корреляции) $R(\tau)$. Это значительно упрощает процесс исследования. Обычно принимается, что в импульсных обзорных РЛС внутренние шумы приемной аппаратуры не имеют междутактовой (от зондирования к зондированию) корреляции. Поэтому в качестве единственной статистической характеристики шумовой составляющей помехи берется ее дисперсия $\sigma_{ш}^2$.

Подробное исследование сигналов, отраженных от хаотически расположенных частиц (в том числе и от облака пассивных отражателей [3]), показало, что пассивную помеху также можно рассматривать как стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения вероятности. Нормальный характер пассивной помехи объясняется тем, что она является суперпозицией большого числа независимых слагаемых, обусловленных отдельными рассеивающими частицами. Нормальным законом можно аппроксимировать также распределение большинства видов применяемых в радиолокации активных помех (особенно шумовых активных помех).

В общем случае внешние (активная и пассивная) помехи имеют междупериодную корреляцию, т. е. амплитуды напряжения этих помех имеют статистическую связь между своими значениями в моменты t_1, $t_2 = t_1 + T_{п}$, $t_3 = t_1 + 2T_{п}$, и т. д. Поэтому для их описания нужно знать дисперсию $\sigma_{п}^2$ и коэффициент междупериодной корреляции $\rho_{п\,ij}$.

Коэффициент междупериодной корреляции смеси некоррелированного шума и коррелированной помехи можно представить в виде

$$P_{iJ} = \frac{\sigma_{п}^2}{\sigma_{ш}^2 + \sigma_{п}^2}, \qquad (1.1.9)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

В качестве примера негауссовой помехи можно указать на хаотическую импульсную помеху (ХИП), создаваемую работающими источниками излучения. Эта помеха характеризуется скважностью $Q_{хип}$ и амплитудой $U_{хип}$, которые являются случайными величинами. Законы распределения этих случайных величин могут быть самыми произвольными, что в значительной мере затрудняет анализ воздействия ХИП в процессе радиолокационного приема.

1.1.4. Оптимальная обработка принимаемых радиолокационных сигналов

В соответствии с выводами статистической теории радиолокации оптимальный приемник должен состоять из двух основных частей: устройства фильтрации сигналов и решающего устройства. Оптимальное устройство фильтрации должно обеспечивать наилучшее выделение сигналов из помех и их разрешение. Решающее устройство предназначено для анализа сигналов на выходе устройства фильтрации и вынесения решения о наличии сигналов и о параметрах сигналов, несущих информацию о целях.

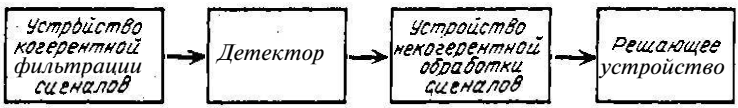


Рис. 1.2. Структурная схема оптимального приемного устройства.

Рассмотрению вопросов оптимальной обработки радиолокационных сигналов посвящено большое число опубликованных работ советских и зарубежных авторов [1, 9, 13, 18]. В случае, когда форма и частота отраженных сигналов известна, сигналы не перекрываются во времени, а помехи аддитивны и близки к гауссовым, схема приемного устройства, реализующего оптимальный алгоритм обнаружения сигналов или измерения их параметров, может быть представлена в виде, изображенном на рис. 1.2. Входящее в состав этой схемы устройство когерентной фильтрации сигналов, в случае известной $F_д$, должно обеспечивать выполнение операции корреляции поступающего на его вход сигнала $V(t)$ с ожидаемым (опорным) сигналом $S_{вонд}(t-\tau)$, т. е.

$$y(\tau) = \int_0^{\tau_и} U(t)\, S_{вонд}(t-\tau)\, dt. \qquad (1.1.10)$$

Для реализации операции вида (10) могут быть применены корреляционный, корреляционно-фильтровый и фильтровый способы обработки входных сигналов.

Напряжение с выхода устройства когерентной фильтрации поступает на детектор, где выделяется его огибающая. Данная операция устраняет из дальнейшего рассмотрения фазу и частоту высокочастотного заполнения обрабатываемых колебаний. Полученное на выходе видеонапряжение в дальнейшем подвергается функциональному преобразованию и некогерентной обработке, которая дополнительно улучшает отношение сигнал/помеха.

Оптимальное устройство некогерентной обработки выполняет весовое суммирование выборочных значений огибающей напряжения на выходе детектора. Сигналы с выхода устройства некогерентной обра-

ботки являются исходными для вынесения решений об обнаружении целей и оценках параметров их траекторий. Для этого служит решающее устройство или совокупность решающих устройств, обеспечивающих поэтапную переработку информации.

В случае, когда параметр $F_{\text{д}}$ отраженного сигнала неизвестен, оптимальное устройство фильтрации должно быть многоканальным. Решающее устройство в этом случае производит анализ сигналов как с отдельных каналов, так и по совокупности каналов.

По способам построения устройства обработки сигналов можно разделить на три группы: аналоговые, цифровые и смешанные. Для устройств первого типа характерным является использованиедля их построения аналоговых радиотехнических элементов. Устройства второго типа выполняются на элементах цифровой вычислительной техники. Устройства третьего типа содержат как аналоговые, так и цифровые элементы. В настоящее время имеется принципиальная возможность построения оптимального приемного устройства полностью на элементах цифровой вычислительной техники. Однако когерентную обработку пока более удобно реализовать в аналоговом виде. Что же касается реализации устройств некогерентной обработки и решающих устройств, то в последнее время здесь наметилась явная тенденция преимущественного использования дискретной вычислительной техники. Таким образом, по способу реализации современные приемные устройства относятся к типу смешанных.

В дальнейшем будут рассматриваться только вопросы некогерентной обработки сигналов с учетом ее реализации на элементах цифровой вычислительной техники.

1.1,5. Статистические характеристикисигналов на выходе детектора огибающей.

Выходным сигналом радиотехнической (УПЧ + детектор) части приемного устройства РЛС является напряжение огибающей суммарного сигнала, поступающего на его вход. Статистические характеристики этого напряжения являются исходными для синтеза оптимальных устройств некогерентной обработки сигналов.

Если справедлива гипотеза об отсутствии флюктуаций отраженных от цели сигналов, то на нагрузке детектора выделяется огибающая E_{SN} (0 аддитивной смеси отраженного сигнала постоянной амплитуды S и узкополосной помехи N_{Σ}. Одномерная плотность вероятности для выборочных значений этой огибающей имеет вид

$$w(E_{SN}) = \begin{cases} \dfrac{E_{SN}}{\sigma_N^2} \exp\left(-\dfrac{E_{SN}^2 + S^2}{2\sigma_N^2}\right) I_0\left(\dfrac{E_{SN}\, S}{\sigma_N^2}\right), & E_{SN} > 0, \\ 0, & E_{SN} \leqslant 0, \end{cases} \quad (1.1.11)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Выражение (11) получило название обобщенного закона Релея или закона Райса. При S = 0, т. е. при отсутствии отраженного сигнала, это выражение преобразуется в обычный закон Релея

$$w(E_N) = \frac{E_N}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{E_N^2}{2\sigma_N^2}\right). \qquad (1.1.12)$$

Введем следующие обозначения:

$x = E_{SN}/\sigma_N$ — относительная (нормированная) амплитуда огибающей;

$a = S/\sigma_N$ — отношение сигнала к помехе по напряжению;

$w(x|S)$ — условная плотность вероятности огибающей при наличии отраженного сигнала;

$w(x|0)$ — условная плотность вероятности огибающей при отсутствии отраженного сигнала.

С учетом введенных обозначений имеем:

$$w(x|S) = x \exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2}\right) I_0(ax), \qquad (1.1.13)$$

$$w(x|0) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \qquad (1.1.14)$$

Выражения (13) и (14) представляют собой условные одномерные плотности вероятности для выборочных значений нормированной огибающей при наличии и отсутствии нефлюктуирующего сигнала соответственно. Аналогичным образом записывается условная плотность вероятности при справедливости модели б) для флюктуации отражающей поверхности цели (см. п. 1.1.1).

Если полезный сигнал представляет собой пачку из N импульсов, возникает необходимость в записи совместной плотности вероятности N выборочных значений огибающей. Эта совместная плотность может быть записана для случая отсутствия корреляции между выборками в виде

$$w(x_1, \ldots, x_N | S_1 \ldots S_N) = w(x_1|S_1) \ldots w(x_N|S_N) = \prod_{\lambda}^{N} x_\lambda \exp\left(-\frac{x_\lambda^2+a_\lambda^2}{2}\right) I_0(a_\lambda x_\lambda). \qquad (1.1.15)$$

Соответственно для N выборочных значений в области помехи (при отсутствии цели) имеем

$$w(x_1 \ldots x_N | 0 \ldots 0) = \prod_{\lambda}^{N} x_\lambda \exp\left(-\frac{x_\lambda^2}{2}\right). \qquad (1.1.16)$$

В случае быстрых флюктуаций, отраженных от цели сигналов, амплитуда огибающей аддитивной смеси сигнала с узкополосной нормальной помехой распределена по закону Релея

$$w(x|S) = \frac{x}{1+k^2} \exp\left[-\frac{x^2}{2(1+k^2)}\right], \qquad (1.1.17)$$

где $k^2 = \overline{S^2}/\sigma_N^2$ — отношение среднего значения квадрата амплитуды сигнала к дисперсии помехи.

Совместная плотность вероятности огибающих пачки из N некоррелированных сигналов в области цели запишется теперь в виде

$$w(x_1, \ldots, x_N | S_1, \ldots, S_N) = \prod_{\lambda=1}^{N} \frac{x_\lambda}{1+k_\lambda^2} \exp\left[-\frac{x_\lambda^2}{2(1+k_\lambda^2)}\right]. \quad (1.1.18)$$

В дальнейшем, в основном, будут использоваться приведенные простейшие модели смесей сигналов и помех. Там же, где потребуется использование других моделей, законы их распределения будут обсуждаться особо.

1.2. Дискретизация, квантование и кодирование радиолокационной информации

Для обработки радиолокационной информации с помощью цифровых вычислительных средств необходимо предварительное преобразование аналоговых сигналов, полученных с выхода видеотракта РЛС, в цифровую форму.

Цифровое преобразование обычно производится в два этапа. Первым этапом является замена непрерывной функции последовательностью ее значений (выборок) в дискретном ряде точек (значений аргумента). Вторым этапом, называемым квантованием, является представление выборочных значений функции некоторым числом, например, в десятичной системе счисления. В последующем, путем эквивалентного преобразования исходного алфавита, информация об амплитудах выборок может быть закодирована в двоичном коде.

Цифровое преобразование сигналов неизбежно приводит к потере информации, закодированной в их параметрах. Поэтому при проектировании цифровых систем обработки радиолокационной информации возникают задачи оптимального выбора интервалов дискретизации и квантования с точки зрения минимизации этих потерь. Одновременно должна приниматься во внимание сложность реализации как преобразующих устройств, так и устройств обработки оцифрованной информации.

Вопросам теории дискретного преобразования сигналов посвящено большое число опубликованных работ. Среди них основополагающее значение имеет известная работа Котельникова [6], в которой впервые решена задача об оптимальном периоде дискретизации функции с ограниченным спектром. Дальнейшие обобщения результатов этой работы и конкретные приложения теории производились, в основном, применительно к дискретным системам передачи данных [10, 19, 141. Рассмотрению методов дискретизации и квантования в общем виде посвящена работа Ж. Маркюса [16].

В данном параграфе излагаются основные результаты теории дискретизации и квантования применительно к задачам цифровой обработки радиолокационной информации.

1.2.1. Принципы дискретизации непрерывной функции времени

Дискретизация непрерывной функции времени состоит в измерении (отсчете) ее значений в дискретные моменты времени, отстоящие друг от друга на интервал Δ_t. Интервал Δ_t называется периодом дискретизации. Обычно период дискретизации выбирают постоянным.

Устройство дискретизации можно рассматривать как периодически действующий ключ, замыкающийся на время τ с периодом Δ_t (рис. 1.3, а). При этом длительность замыкания ключа τ должна быть значительно меньше периода Δ_t.

Временная диаграмма преобразования непрерывной функции в последовательность мгновенных (при $\tau \to 0$) выборочных значений $x(k\Delta_t)$ изображена на рис. 1.3, *б*. Выходной сигнал устройства дискретизации представляет собой в этом случае последовательность импульсов бесконечно малой длительности, амплитуды которых равны значениям непрерывной функции в дискретные моменты времени $k\Delta_t$. Этот сигнал можно записать в виде

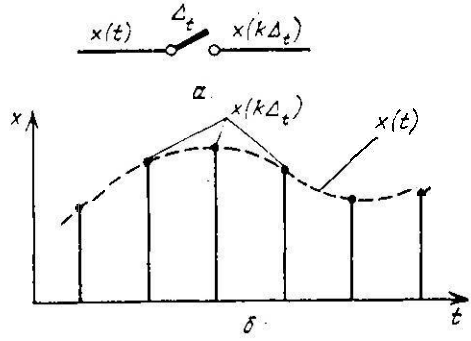


Рис. 1.3. Пояснение процесса дискретизации непрерывной функции времени:
а — принципы реализации, *б* — временная диаграмма.

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,\delta(k(t)\Delta_t - s)\,ds, \qquad (1.2.1)$$

где $k(t) = [t/\Delta_t[$ $([y[$ — означает операцию взятия ближайшего целого числа, не меньшего y); $\delta(t)$ — дельта-функция.

Функция $x^*(t)$ в дискретной технике называется решетчатой функцией [121. Представление исходной непрерывной функции $x(t)$ в виде решетчатой функции $x^*(t)$ возможно только с известными ограничениями. Одним их таких принципиальных ограничений является требование конечности спектра дискретизуемой функции. По теореме Котельникова [10] непрерывная функция с ограниченным спектром полностью определяется в любой момент времени счетным множеством дискретных значений, отстоящих друг от друга на величину Δ_t, равную

$$\Delta_t \leqslant 1/2f_{\text{макс}}, \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

где $f_{\text{макс}}$ — граничная частота спектра исходной функции $x(t)$.

В соответствии с выражением (2) предельная (наинизшая) частота дискретизации должна быть такой, чтобы на период изменения наивысшей гармоники дискретизуемой функции приходилось не менее двух отсчетов. В этом случае существует взаимно однозначное соответствие между непрерывной и решетчатой функциями.

Во многих случаях (в том числе и при приеме радиолокационных сигналов) процесс, подлежащий дискретизации, является нестационар-

ным случайным процессом и имеет практически неограниченный спектр. В таких случаях неприменимы и подходы к выбору периода дискретизации, описанные выше. Для нестационарных случайных процессов ограниченной длительности T_c с неограниченным спектром характерным является ограниченность интервала корреляции $\tau_{кор}$, под которым понимается промежуток времени, за который практически исчезает статистическая связь между соседними значениями сигнала. Число некоррелированных элементов сигнала равно

$$n = T_c / \tau_{кор}$$

и называется числом его степеней свободы.

При дискретизации нестационарного сигнала должны производиться амплитудные выборки, отстоящие друг от друга на интервал τ_1, не превышающий интервал корреляции $\tau_{кор}$ [19]. Решетчатая функция дискретизованного сигнала будет иметь в этом случае вид

$$x^*(t) = \int_0^{T_c} x(s)\,\delta(k(t)\tau_1 - s)\,ds \quad t \in [0, T_c], \tag{1.2.3}$$

где $k(t)\tau_1$ аналогично (1.2.1) равно ближайшему, не меньшему t, числу, кратному τ_1; $\tau_1 \leqslant \tau_{кор}$.

Одной из основных задач теории дискретизации является оценка потерь информации при восстановлении исходной функции по дискретным данным. Для этой цели вводится функция импульсной реакции сглаживающего фильтра $x_и^*(t)$, которая может, например, принимать на каждом интервале $(t,\ t + \tau_1)$ постоянное значение $x_и^*(t) = x^*(k(t)\tau_1)$, т. е. быть ступенчатой функцией. За оценку качества воспроизведения принимается среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} [x_и^*(t) - x^*(t)]^2\,dt. \tag{1.2.4}$$

В работе [19] показано, что наилучшая точность воспроизведения исходного сигнала достигается в случае, когда импульсная реакция соответствующего сглаживающего фильтра совпадает в интервале $|-\tau_1/2 \div \tau_1/2|$ с функцией корреляции $R(\tau)$ сигнала $x(t)$ и равна нулю вне указанного интервала.

Предельная ошибка воспроизведения при этом равна

$$\sigma^2_{x\,мин} = 1 - 2\int_0^{\tau_1/2} R^2(\tau)\,d\tau. \tag{1.2.5}$$

Для приближенных расчетов функцию корреляции можно аппроксимировать выражением

$$R(\tau) = 1 - |\tau|/\tau_{кор}.$$

В этом случае

$$\sigma^2_{x\,мин} = (6\alpha - 1)/12\alpha^2, \tag{1.2.6}$$

где а $= \tau_{кор} - 1/\tau$ отношение интервала корреляции к интервалу выборки.

Таким образом, задавшись некоторым допустимым значением дисперсии ошибки воспроизведения, легко найти интервал временной дискретизации.

1.2.2. Принципы квантования случайных сигналов

В цифровых системах обработки радиолокационной информации необходимо, кроме временной дискретизации, производить еще дискретизацию принимаемых случайных сигналов по значениям функции (амплитуде). Дискретизация по амплитуде носит название квантования.

В процессе квантования непрерывная случайная величина $x_k = x(k\Delta_t)$ с плотностью вероятности $w(x_k)$ преобразуется Б дискретную случайную величину $x'(k)$, принимающую установленное число значений. Так, если случайная величина x определена в интервале $(x_{макс}, x_{мин})$ и назначено m порогов квантования $x_{мин} < x_1 <$ [illegible] интервал $(x_{макс}, x_{мин})$ на $m+1$ подынтервалов, то этой непрерывной случайной величине может быть сопоставлена дискретная случайная величина, принимающая значения $x' = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностью

$$p(x_l') = \int_{x_l}^{x_{l+1}} w(x)\, dx.$$

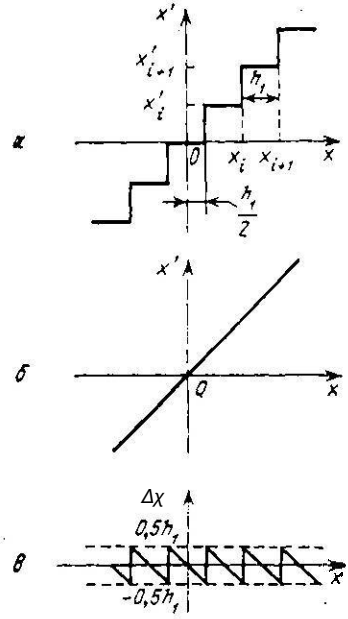


Рис. 1.4. Пояснение процесса квантования выборок сигнала:
а — амплитудная характеристика квантизатора; *б* — линейная составляющая амплитудной характеристики; *в* — кусочно-линейная составляющая амплитудной характеристики.

Устройство для квантования сигналов, называемое квантизатором, представляет собой нелинейный элемент с амплитудной характеристикой, изображённой на рис. 1.4, *а*. Интервал h_l изменения амплитуды входного сигнала между порогами x_l и x_{l+1} называется интервалом или шагом амплитудного квантования. Входному сигналу, лежащему в любой точке внутри интервала h_l, соответствует одно значение выходного сигнала x_l'. Значения выходного сигнала могут относиться к любой точке внутри интервала h_l.

В общем случае шаг амплитудного квантования не является постоянной величиной, что соответствует неравномерному расположению порогов на оси x. Однако учитывая сложность технической реализации не-

равномерного квантования, в цифровых системах применяют в основном равношаговое квантование, а выходные уровни берутся равными середине соответствующего интервала между порогами, т. е.

$$x_l' = (x_l + x_{l+1})/2. \qquad (1.2.7)$$

При равношаговом квантовании нелинейная характеристика квантизатора может быть представлена в виде суммы двух составляющих: линейной составляющей с коэффициентом наклона $\gamma = 1$ (рис. 1.4, б) и кусочно-линейной составляющей (рис, 1.4, *в),* ординаты которой равны разности между ординатами исходной нелинейной характеристики и выделенной линейной части этой характеристики. В соответствии с этим процесс квантования амплитуд сигнала можно рассматривать как наложение на входной сигнал x добавочного сигнала $\Delta\chi$, ограниченного по величине половиной шага квантования, т. е. $-h/2 \leqslant \Delta x \leqslant h/2$.

Процесс Δx характеризует искажение сигнала при квантовании и называется шумом квантования. Шум квантования обычно представляется в виде нормального случайного процесса, корреляционная функция которого зависит от числа уровней квантования. С увеличением числа уровней шум квантования становится все менее коррелированным и приближается к белому шуму. В последнем случае для оценки потерь квантования можно воспользоваться известными из математической статистики [15] поправками к группировке (поправками Шеппарда), устанавливающими связь между моментами m_ν исходного непрерывного распределения и моментами μ_ν этого распределения, полученными по сгруппированным на интервалах длиной h выборочным (дискретным) значениям.

Для первого и второго центральных моментов поправки Шеппарда имеют вид

$$\mu_1 - m_1 = 0, \quad \mu_2 - m_2 = h^2/12. \qquad (1.2.8)$$

Задавшись допустимым увеличением дисперсии за счет квантования, можно однозначно определить интервал квантования h.

К вопросу выбора числа уровней квантования можно подойти и с точки зрения теории дискретизации сигнала с ограниченным спектром, Предположим, что последовательные значения амплитуд дискретизованного сигнала статистически независимы. Тогда одномерная плотность вероятности $w(x)$ полностью описывает процесс. Функция $w(x)$ является непрерывной и гладкой функцией. Как известно, для такой функции существует Фурье-образ, т. е. она может быть выражена при помощи так называемой характеристической функции $\varphi(f)$ от новой переменной f таким образом, что

$$\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \exp(-j2\pi f x)\, dx \qquad (1.2.9)$$

и

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty} \varphi(f) \exp(j2\pi f x)\, df. \qquad (1.2.10)$$

Без заметного искажения характеристическую функцию можно ограничить некоторой частотой $f_{макс}$ и считать $w(x)$ функцией с ограниченным в полосе $0 < \Delta / < f_{макс}$ спектром. По теореме Котельникова такую функцию можно однозначно представить последовательностью равнодискретных выборок ее мгновенных значений, взятых с интервалом, равным

$$h = 1/2f_{макс},$$

где $f_{макс}$ — верхняя граница частотного спектра функции $w(x)$.

Рассматривая в качестве функции, подлежащей квантованию, плотности распределения вероятности $w(x)$, а не сигнал x, мы автоматически ограничиваемся восстановлением моментов исходного сигнала по квантованным данным и не рассматриваем восстановление самого сигнала. Как показано в работе [22], с точки зрения восстановления моментов достаточно эффективным является грубое квантование с интервалом $h = \sigma_x$. Это дает основание применять предельно грубое квантование (вплоть до двоичного) в тех случаях, когда вообще не ставится задача воспроизведения по квантованным данным исходного сигнала, а необходимо лишь решить, есть сигнал или он отсутствует. Именно такую задачу приходится решать при обнаружении радиолокационных сигналов.

В заключение отметим, что для дальнейшей обработки на ЦВМ квантованные сигналы должны быть представлены (закодированы) в системе счисления, используемой в системе обработки. Обычно используется двоичный код, как наиболее распространенный в современных системах. Число разрядов n двоичного кода связано с числом уровней квантования $m + 1$ соотношением

$$n = \lceil \log_2 (m + 1) \rceil,$$

где знак $\lceil a \rceil$ означает округление до ближайшего целого числа, не меньшего a.

1.2.3. Дискретизация и квантование сигналов обзорной импульсной РЛС

Рассмотрим здесь принципиальную сторону вопроса о реализации процесса дискретизации и квантования сигналов, полученных на выходе приемного устройства одноканальной импульсной РЛС обзорного действия.

Суммарный сигнал на выходе приемного устройства обзорной РЛС является непрерывной функцией времени и координат целей. Независимо от метода радиолокации этот сигнал в процессе обзора пространства развертывается в сигнал $x(t)$, зависящий только от одного аргумента — времени t. Одновременно в процессе развертки происходит естественная дискретизация координат по этому аргументу.

Возьмем для примера случай двухкоординатной импульсной РЛС кругового обзора. Суммарный сигнал в этом случае представляется в виде

$$x = x(r, \beta, t),$$

где r, β — полярные координаты цели относительно местоположения РЛС.

В результате периодического обзора пространства с периодом T_0 непрерывные функции координат г *(t)* и β *(t)* преобразуются в дискретный ряд мгновенных значений координат $r(iT_0)$, $\beta(iT_0)$, где i — номер обзора. Это первый этап дискретизации по времени. Более мелкая дискретизация по времени получается в результате дискретной посылки зондирующих импульсов с периодом $T_п$. При этом одновременно дискретизируется координата, совпадающая с плоскостью обзора (в нашем случае координата β). Сигналы, же, полученные за один период посылки зондирующих импульсов, т. е. в процессе одной развертки дальности, остаются непрерывными во времени. Таким образом, сигнал на выходе приемного устройства обзорной импульсной РЛС можно представить в виде функции времени

$$x(t) = x(iT_0,\ kT_п,\ t_р),$$

где i — номер обзора, k — номер зондирования в пределах одного периода обзора, $t_р = c/2$ — время рзвертки дальности.

Легко показать, что подобное временное развертывание сигналов производится в РЛС любых других типов. В дальнейшем используется модель сигнала импульсной РЛС. В качестве полезного сигнала принимается импульс с колокольной огибающей вида

$$S(t) = S_0 \exp\ [-\pi\,(t/\tau_и)^2]. \qquad (1.2.11)$$

Помеха на входе приемника представляется в виде нормального стационарного случайного процесса с нулевым средним значением и дисперсией σ_N^2 (белый шум).

Предполагается, что линейная часть приемника имеет колокольную амплитудно-частотную и линейную фазо-частотную характеристики. Модуль амплитудно-частотной характеристики линейной части приемника описывается выражением

$$|K(f)| = K_0 \exp\left[-\pi \frac{(f-f_0)^2}{\Delta f^2}\right]. \qquad (1.2.12)$$

Как известно [13], фильтр стакими характеристиками является оптимальным для колокольного радиоимпульса, настроенного на частоту f_0, равную средней частоте в полосе $\Lambda/$ пропускания оптимального фильтра. Длительность импульса $\tau_и$ и полоса пропускания фильтра на уровне $\exp\ (-\pi/4)$ удовлетворяют при этом условию $\tau_и \Delta f = 1$.

Помеха на выходе линейной части приемника представляет собой узкополосный случайный процесс. Спектр огибающей помехи будет колокольным и по форме совпадающим с амплитудно-частотной характеристикой линейной части приемника, т. е.

$$G(f) = \frac{2\pi\sigma_N^2}{\Delta/} \exp\left[-\pi \frac{(f-f_0)^2}{\Delta f^2}\right].$$

Эффективная ширина спектра помехи для случая, когда средня: частота ее спектра совпадает с несущей частотой сигнала, определяет ся из выражения

$$\Delta f_э = \sqrt{\pi}\Delta f. \qquad (1.2.13$$

Функция корреляции помехи связана с эффективной полосой со отношением

$$R(\tau) = \sigma_N^2 \exp\left[-\frac{(2\pi\Delta f_э\tau)^2}{4\pi}\right] = \sigma_N^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_и^2}\right). \qquad (1.2.14$$

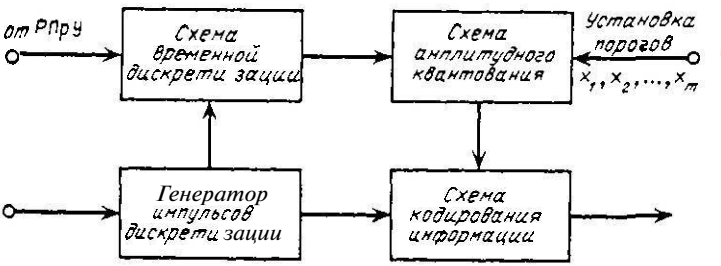


Рис. 1.5. Структурная схема устройства дискретизации и квантования сигналов импульсной РЛС.

При $\tau = \tau_и$, $R(\tau)$ практически равна нулю. Следовательно, независимые отсчеты огибающей помехи расположены на расстоянии $\tau_и$ друг от друга.

Таким образом, в импульсной обзорной РЛС искусственной дискретизации и квантованию подлежит процесс на выходе приемника в пределах одного такта зондирования (в пределах одной развертки дальности). Структурная схема соответствующего устройства приведена на рис. 1.5, а временные диаграммы, поясняющие работу схемы, на рис. 1.6.

Напряжение огибающей с выхода приемного устройства РЛС (временная диаграмма *1*) поступает на один из входов схемы временной дискретизации. На другой вход этой схемы поступают импульсы временной дискретизации длительностью $\tau_{кв}$ с периодом Δ_t (временная диаграмма *2)*. На выходе схемы временной дискретизации получается равнодискретная выборка амплитуд огибающей в пределах каждого импульса дискретизации (временная диаграмма *3)*. Эта выборка поступает на вход схемы амплитудного квантования. Схема амплитудного квантования в общем случае имеет m порогов и $m+1$ уровней и выдает на выходе номер уровня, который превышен выборкой в каждом интервале временной дискретизации. Номер уровня может быть в дальнейшем представлен числом импульсов стандартной амплитуды (временная диаграмма *4)*. В частном случае однопорогового (двоичного) квантования (например с порогом x_2) схема выдает импульс стандартной амплитуды и длительности (единицу), если амплитуда огибающей в пределах ширины импульса $\tau_{кв}$ превышает порог x_2, и пропуск (нуль),

если этот порог не превышается (временная диаграмма 5). В схеме кодирования задержки и амплитуды выборок преобразуются в двоичный код.

При двоичном квантовании амплитуд сигналов простейшим вариантом цифрового преобразования напряжения на выходе приемника

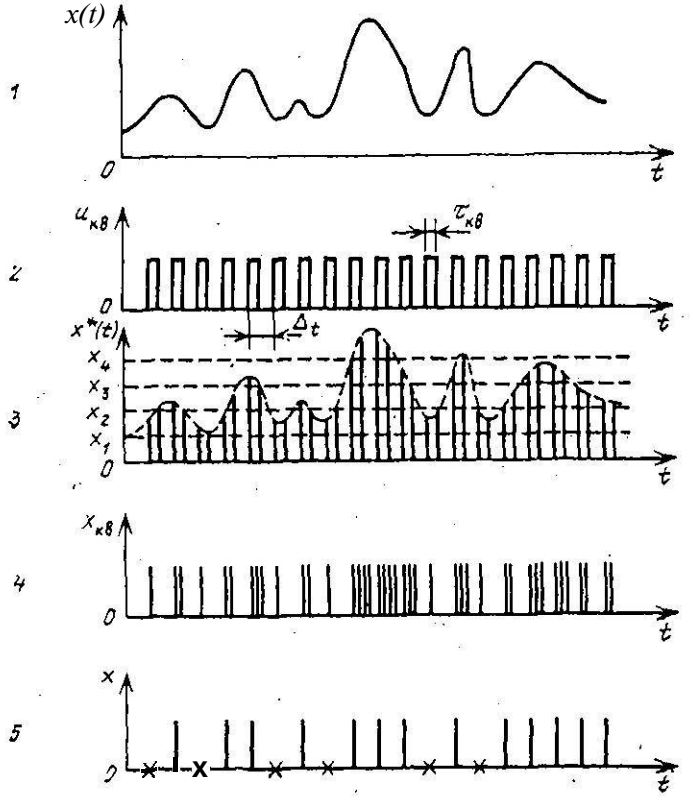


Рис. 1.6. Временные диаграммы, поясняющие процесс дискретизации и квантования сигналов РЛС.

является непосредственное кодирование задержки и длительности каждого выброса, превысившего порог двоичного квантования.

Временная дискретизация видеосигналов приводит к разбиению развертки дальности РЛС на элементарные участки шириной

$$\Delta_r = c\Delta_t/2. \qquad (1.2.15)$$

Число таких участков определяется из выражения

$$n_r = r_{макс}/\Delta_r, \qquad (1.2.16)$$

где $r_{макс}$ ~ максимальная дальность обнаружения РЛС.

В процессе периодической *посылки* зондирующих импульсов с одновременным вращением антенны зона обзора РЛС разбивается на эле-

ментарные участки по азимуту. Угловой размер элементарного участка по азимуту (угловая дискретность азимута)

где $T_п$ — период посылки зондирующих импульсов, T_0 — период вращения антенны.

Таким образом, в результате рассмотренных двух этапов временной дискретизации зона обзора РЛС кругового обзора разбивается на элементарные ячейки с площадью $S_э = \Delta_r \Delta_\beta$, общее число которых равно

$$n_э = 2\pi r_{макс}/\Delta_r \Delta_\beta. \qquad (1.2.18)$$

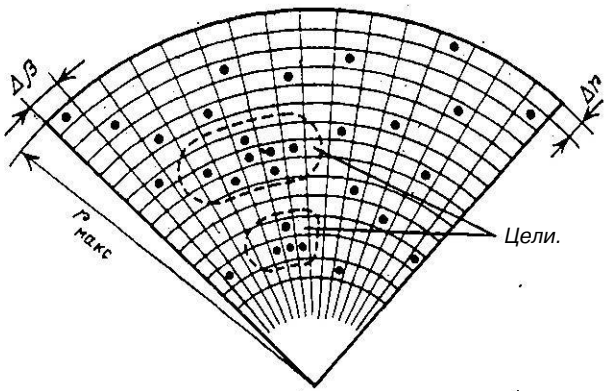


Рис. 1.7. Изображение участка зоны обзора РЛС после временной дискретизации и двоичного квантования сигналов.

Квантование амплитуд сигналов приводит к дискретизации яркости изображения каждой элементарной ячейки. В зависимости от амплитуды принимаемого сигнала эта яркость будет характеризоваться дискретной величиной (числом). В простейшем случае двоичного квантования амплитуд получается абсолютно черно-белое изображение зоны обзора, где черные точки обозначают наличие квантованных сигналов (единиц) в соответствующих ячейках, а белый фон — их отсутствие. Изображение участка зоны обзора РЛС кругового обзора после временной дискретизации и двоичного амплитудного квантования принимаемых сигналов приведено на рис. 1.7.

Обработка дискретизованных сигналов с целью обнаружения и определения координат целей в зоне обзора РЛС в простейшем случае состоит в анализе областей с повышенной относительно общего фона яркостью изображения.

1.2.4. Выбор интервалов дискретизации радиолокационной информации

В общем случае, при решении задач оптимальной дискретизации радиолокационной информации обоснованию подлежат:

— период обзора радиолокатора T_0,

— период дискретизации выходного напряжения приемника в пределах одного периода зондирования Δ_t.

В соответствии с общей теорией дискретизации, при выборе периода обзора РЛС должен учитываться только характер траекторий, подлежащих сопровождению целей. Обычно координаты радиолокационных целей представляют собой гладкие функции времени, что, казалось бы, дает возможность выбирать достаточно большой период их дискретизации. Однако при радиолокационном наблюдении на первое место ставится задача быстрого и надежного обнаружения цели в условиях малых отношений сигнала к помехе, имеющих место на краях зоны обзора. Для решения этой задачи нужно увеличивать частоту обзора. Повышения частоты обзора требует и необходимость высокой точности воспроизведения траектории цели по дискретным данным, при наличии ошибок измерения. Сдругой стороны, при фиксированной частоте посылок зондирующих импульсов и заданной ширине диаграммы направленности антенны, с увеличением частоты обзора уменьшается число импульсов в пачке, так как

$$N = \varphi_p F_п / 2\pi F_0 = \text{const}/F_0.$$

С уменьшением же числа импульсов в пачке уменьшается вероятность ее обнаружения и точность измерения координат, что, в конечном счете, приводит к ухудшению условий обнаружения траектории цели. Имея в виду указанные противоположные тенденции, можно выбрать оптимальный период обзора пространства для каждой конкретной РЛС по вероятностному или точностному критерию.

При обработке радиолокационных сигналов, полученных в процессе каждого периода зондирования, не ставится задача восстановления исходного процесса после его дискретизации. Основным здесь является требование не пропустить полезный сигнал. Поэтому выбор интервалов временной дискретизации напряжения на выходе приемника должен оптимизироваться с точки зрения минимизации пропусков полезного сигнала при обнаружении. Для этого, очевидно, период выборки должен быть не больше эффективной длительности отраженного сигнала.

Если при дискретизации напряжения на выходе приемника исходить из общей теории дискретизации функции с ограниченным спектром, то при $\tau_и \Delta f = 1$, где Δf — эффективная ширина полосы приемного тракта, получаем $\Delta_t = \tau_и/2$, что соответствует двум отсчетам (выборкам) на длительность зондирующего сигнала. Увеличение числа отсчетов, приходящихся на длительность полезного сигнала, повышает вероятность его обнаружения, однако приводит к усложнению алгоритма обработки.

Кроме рассмотренного, при временной дискретизации радиолокационных сигналов возможны и другие подходы:

а) с точки зрения сохранения разрешающей способности РЛС по координате r, что приводит к необходимости выбирать интервал временной дискретизации не больше длительности зондирующего сигнала;

б) с точки зрения реализации потенциальных возможностей РЛС по точности оценки координаты r, что приводит к необходимости вы-

бирать Δ_t исходя из допустимого увеличения ошибок за счет дискретизации.

Сопоставление перечисленных подходов позволяет считать приемлемым выбор периода дискретизации Δ, примерно равным (но несколько меньшим) длительности зондирующего сигнала. Выборки амплитуд огибающей, следующие с периодом Δ_t да $\tau_и$, можно считать не коррелированными между собой. Поэтому в качестве статистической характеристики выборок может быть взята одномерная плотность вероятности огибающей.

До сих пор предполагалось, что длительность импульса временной дискретизации $\tau_{кв}$ пренебрежимо мала по сравнению с периодом Δ_t. Однако на практике длительность импульсов $\tau_{кв}$ берется обычно соизмеримой с периодом Δ_t, а иногда просто равной этому периоду. Поэтому в процессе проектирования дискретных систем обработки информации обзорных РЛС возникает необходимость рассматривать обнаружение сигнала не в точке, а в пределах интервала ограниченной длительности. Подробно этот вопрос рассмотрен в литературе [8].

Отметим, наконец, что кроме амплитудных выборок при дискретизации радиолокационных сигналов иногда берутся выборки средней энергии квантуемого процесса на некотором интервале Δt, равном или меньшем периода Δ_t. Качество обнаружения при этом несколько улучшается, но реализуется этот метод значительно сложнее.

1.2.5. Выбор порогов квантования радиолокационных сигналов

При выборе порогов амплитудного квантования радиолокационных сигналов используются две группы критериев оптимальности.

1. Критерии, связанные с принятием решения об обнаружении одиночного сигнала или пачки сигналов. Среди этих критериев основными являются критерий минимального риска и критерий Неймана — Пирсона.

2. Информационные критерии, т. е. критерии, связанные с потерей информации о полезном сигнале в процессе квантования.

Приведем прежде всего некоторые опубликованные в литературе результаты по оценке эффективности многоуровневого квантования амплитуд сигналов. Если ставится задача восстановления амплитуды сигнала по квантованным данным, то выбор интервалов многоуровневого квантования можно производить по критерию условного риска. Как показано в работе [23], дисперсия ошибки квантования с ростом числа уровней убывает по экспоненциальному закону.

Возможен также подход к выбору интервалов многоуровневого квантования сточки зрения минимизации потерь информации о полезном сигнале. Полученные результаты [21] показывают, что с этой точки зрения многоуровневое квантование эффективнее двоичного только при слабых сигналах. При отношении сигнала к помехе $a \geqslant 2$ двоичное квантование исчерпывает практически всю полезную информацию об амплитуде сигнала.

Наконец, выбор интервалов многоуровневого квантования можно оптимизировать с точки зрения минимизации потерь в пороговом сиг-

нале при обнаружении последовательности (пачки) квантованных сигналов. Полученные результаты [20] показывают, что выигрыш в пороговом отношении сигнала к помехе по мощности при многоуровневом квантовании по сравнению с двоичным квантованием не превышает 1 *дб*.

Практическая реализация цифровой обработки при многоуровневом квантовании сигналов значительно сложнее, чем при двоичном. Поэтому во многих случаях сознательно идут на некоторое увеличение потерь ради простоты реализации.

При двоичном квантовании амплитуд совокупность сигналов на выходе квантизатора представляет собой последовательность случайных двоичных чисел 0 и 1, появляющихся с вероятностями p и q соответственно. При известном распределении амплитуд квантуемых сигналов вероятности p и q определяются из выражений

$$p = \int_{x_1}^{\infty} w(x)\,dx, \quad q = \int_{0}^{x_1} w(x)\,dx.$$

Задача определения оптимального порога двоичного квантования по критерию минимума среднего риска аналогична задаче выбора оптимального порога решения при обнаружении одиночных сигналов. Оптимальный порог при этом получается из условия минимизации взвешенной суммы ошибок первого и второго рода. Для нахождения оптимального порога необходимо продифференцировать выражение для среднего риска по порогу и результат приравнять нулю.

Средний риск при обнаружении одиночного нормированного сигнала можно записать в виде

$$R = C_1 P_{S1} \int_{0}^{x_1} w(x \mid S)\,dx + C_2 P_{S0} \int_{x_1}^{\infty} w(x \mid 0)\,dx. \qquad (1.2.19)$$

где C_1, C_2 — постоянные потери, приписываемые пропуску сигнала и ложному обнаружению соответственно; P_{S0}, P_{S1} — априорные вероятности отсутствия и наличия полезного сигнала соответственно.

Возьмем для простоты случай:

$$C_1 = C_2 = 1, \qquad P_{S0} = P_{S1} = 0{,}5.$$

Тогда, дифференцируя Выражение (19) по x_1, получим уравнение для нахождения оптимального порога $x_{1\,\text{опт}}$:

$$w(x \mid 0)|_{x_1 = x_{1\text{опт}}} = w(x \mid S)|_{x_1 = x_{1\text{опт}}}. \qquad (1.2.20)$$

Например, для нормированных амплитуд смеси нефлюктуирующего сигнала и помехи на выходе детектора огибающей имеем

$$w(x \mid S) = x \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_0(ax),$$

$$w(x \mid 0) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (20), получим

$$\ln I_0 (a x_{1\text{опт}}) = a^2/2. \qquad (1.2.21)$$

Уравнение (21) не решается в явном **виде. Для случая** слабых сигналов ($a x_{1\text{опт}} \ll 1$), используя асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя

$$I_0 (a x_{1\text{опт}}) \approx 1 + a^2 x_{1\text{опт}}^2/4,$$
$$\ln I_0 (a x_{1\text{опт}}) \approx a^2 x_{1\text{опт}}^2/2,$$

получаем $x_{1\text{опт}} = \sqrt{2}$.

Для ряда значений отношения сигнала к помехе ($a \geqslant 1$) численное решение уравнения (21) дает следующие результаты

a	1	2	3	4
$x_{1\text{опт}}$	1,5	1,75	2,1	2,5

При увеличении отношения сигнала к помехе оптимальный порог стремится к $a/2$.

На рис. 1.8 приведены рассчитанные по формуле (19) кривые среднего риска в зависимости от порога квантования для нескольких наиболее характерных для импульсной РЛС обзорного действия отношений сигнала к помехе. Кривые имеют слабо выраженные минимумы, что свидетельствует о некритичности выбора порога двоичного квантования. В среднем, для достаточно широкого диапазона отношений сигнала к помехе, оптимальные пороги лежат в диапазоне 1,8—2,2, что дает возможность выбирать фиксированное значение порога для всех ожидаемых отношений сигнала к помехе, без заметного проигрыша в вероятности обнаружения.

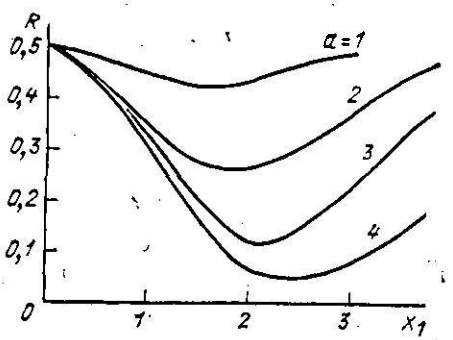


Рис. 1.8. Средний риск при обнаружении одиночного двоично квантованного сигнала.

При использовании критерия Неймана — Пирсона порог квантования выбирается только исходя из заданной вероятности появления единицы в области помехи.

Если с выхода детектора огибающей поступает только помеха, т. е. $s = 0$, то вероятность появления единицы равна

$$p_N (x_1) = \int_{x_1}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right).$$

При заданной вероятности p_N из этого выражения можно найти относительный порог амплитудного квантования

$$x_1 = \left(2\ln\frac{1}{P_{ы}} \right)^{1/2}. \qquad (1.2.22)$$

Вероятность появления единицы при наличии нефлюктуирующего сигнала определяется в этом случае по формуле

$$p_S(x_1, a) = \int_{(2\ln 1/p_N)^{1/2}}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2} \right) I_0(ax)\, dx. \qquad (1.2.23)$$

При двоичном квантовании отсчет времени задержки обычно производится в точке пересечения фронтом импульса порогового уровня x_1. При этом фиксация временной задержки производится с помощью электронных реле. Воздействие помех сказывается в появлении нестабильности срабатывания реле, что в. свою очередь приводит к ошибкам оценки временного положения импульса. К такому же эффекту приводят и флюктуации, присущие самому реле из-за нестабильности питания, температуры и т. д.

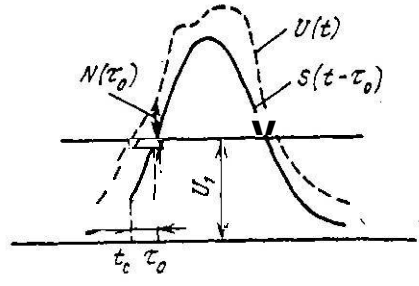


Рис. 1.9. К оценке точности задержки импульсного сигнала при двоичном квантовании.

Рассмотрим влияние двоичного квантования на точность оценки времени задержки импульсного сигнала (рис. 1.9).

Одиночный импульсный сигнал на входе реле можно представить в виде

$$U(t) = S(t - \tau_0) + N(t),$$

где τ_0 — истинная задержка сигнала,

Пусть момент срабатывания t_c задается точкой пересечения кривой $V(t)$ уровня U_1. Тогда этот момент времени будет определяться уравнением

$$S(t_c) + N(t_c) = U_1.$$

При отсутствии помех выполнялось бы условие

$$S(\tau_0) = U_1.$$

Приравнивая полученные выражения, находим

$$S(t_c) - S(\tau_0) + N(t_c) = 0. \qquad (1.2.24)$$

Подставим в (24) $t_c = \tau_0 - \Delta\tau$ и разложим $S(t_c) = S(\tau_0 - \Delta\tau)$ в ряд Тейлора. Ограничиваясь линейным приближением, получаем

$$\dot{S}(\tau_0)\Delta\tau - N(t_c) = 0.$$

Если $N(t)$ — малое приращение огибающей, обусловленное действием помех, так что можно положить $N(t_c) = N(\tau_0)$, то линейное приближение ошибки времени задержки находится из выражения

$$\Delta\tau = N(\tau_0)/\dot{S}(\tau_0),$$

где $\dot{S}(\tau_0)$ — крутизна фронта импульса на уровне U_1. Дисперсия этой ошибки будет равна

$$\sigma_\tau^2 = \sigma_N^2 / \dot{S}^2(\tau_0). \qquad (1.2.25)$$

Для модели сигнала с колокольной огибающей

$$S(t) = S_0 \exp\left[-\pi\left(\frac{t}{\tau_и}\right)^2\right], \quad \dot{S}(\tau_0) = -\frac{2}{\tau_и} S(\tau_0)\tau_0 .$$

Дисперсия ошибки для импульса с колокольной огибающей

$$\sigma_\tau^2 = \tau_и^4 \sigma_N^2 / S^2(\tau_0)\, 4\pi^2 \tau_0^2. \qquad (1.2.26)$$

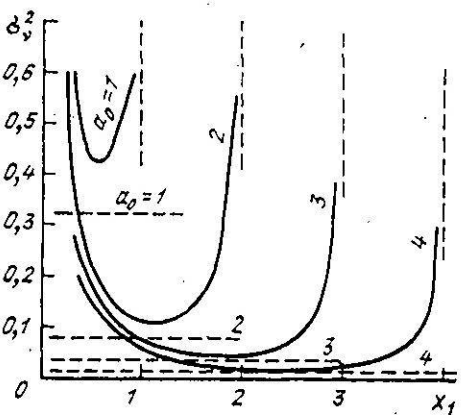


Рис. 1.10. Графики дисперсий-ошибок отсчета времени задержки колокольного импульса.

Выразим τ_0 через амплитуду импульса

$$\tau_0^2 = -(\tau_и^2/\pi)\ln(S(\tau_0/S_0). \qquad (1.2.27)$$

Подставляя (27) и (26) и переходя к нормированным величинам, получаем

$$\sigma_\tau^2 = -\frac{\tau_и^2}{4\pi x_1^2 \ln(x_1/a_0)} = -\frac{1}{4\pi\Delta f^2 x_1^2 \ln(x_1/a_0)}$$

или, переходя к безразмерному времени $\nu = \Delta f t$, окончательно имеем

$$\sigma_\nu^2 = [4\pi x_1^2 \ln(a_0/x_1)]^{-1}. \qquad (1.2.28)$$

Формула (28) верна только при $a_0 > x_1$.

На рис. 1.10 приведены рассчитанные по формуле (28) графики дисперсий ошибок отсчета времени задержки колокольного импульса для нескольких значений отношения сигнала к помехе a_0. Из рассмотрения этих графиков следует, что для сильных сигналов, когда, собственно говоря, и имеет смысл измерять их задержку, выбор порога x_1 некритичен. Поэтому обоснованные выше значения порога x_1 с точки зрения оптимального обнаружения сильных сигналов являются приемлемыми и с точки зрения оценки времени их задержки.

Как известно [13], оптимальная процедура отсчета времени задержки импульсного сигнала состоит в нахождении положения на оси времени максимума соответствующей функции правдоподобия. Максимум функции правдоподобия в данном случае совпадает с максимумом амплитуды сигнала.

Потенциальная точность отсчета времени задержки характеризуется следующей дисперсией ошибок

$$\sigma_{\tau пот}^2 = 1/a_0^2 (\Delta f_э)^2 = 1/a_0^2 \pi\Delta f^2, \qquad (1.2.29)$$

а для безразмерного времени

$$\sigma_{\nu пот}^2 = 1/a_0^2 \pi. \qquad (1.2.30)$$

На рис. 1.10 пунктирными линиями нанесены значения дисперсии потенциальных ошибок задержки, подсчитанные по формуле (30). Сравнение графиков при совпадающих значениях a_0 позволяет оценить потери в точности отсчета задержки, обусловленные двоичным квантованием амплитуд сигналов.

1.3. Статистический синтез алгоритмов обработки квантованных сигналов пачечной структуры

В качестве общей теоретической основы для синтеза алгоритмов обработки радиолокационной информации в настоящее время широко используется математический аппарат теории статистических решений. Применение теории статистических решений позволяет найти аналитически алгоритмы тех преобразований, которые нужно произвести над сигналом, чтобы получить результаты, оптимальные в определенном смысле. Помимо вида оптимальных преобразований, важным является вопрос о соответствующих потерях преобразования. Поэтому разрабатываются также методы, позволяющие вычислять эти потери.

В настоящем параграфе рассматриваются методы непосредственного синтеза оптимальных алгоритмов обработки квантованных радиолокационных сигналов на основе критериев теории статистических решений. В качестве исходных для синтеза принимаются следующие предпосылки.

1. Полезный сигнал имеет пачечную структуру и состоит из N импульсов.

2. Период Δ_t дискретизации напряжения на выходе приемного устройства выбран так, чтобы все импульсы принимаемой пачки попадали в один и тот же интервал по дальности шириною Δ_r.

3. Обработка последовательности квантованных сигналов производится раздельно в каждом интервале по дальности. Дальнейшее рассмотрение относится к одному из таких интервалов.

1.3.1. Оптимальный алгоритм обнаружения пачки двоично квантованных сигналов

С точки зрения теории статистических решений, задача обнаружения пачки двоично квантованных сигналов формулируется следующим образом.

Пусть произведена выборка значений огибающей $(x_1, x_2, \ldots. x_N)$ на N соседних позициях по азимуту в пределах одного интервала по дальности (см. рис. 1.7). Каждое из выборочных значений x_λ подвергается затем двоичному квантованию по амплитуде путем сравнения с пороговым уровнем x_1. Исход единичного испытания x_λ считается положительным, если соответствующее выборочное значение превышает порог ($x_\lambda = 1$), и отрицательным, если порог не превышается ($x_\lambda = 0$).

Совокупность исходов после квантования $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ представляет собой прследовательность нулей и единиц. Эта последовательность поступает на вход решающего устройства. Задача решающего устройства сострит в том, чтобы на основе анализа принятой выборки нулей и единиц решить Оптимальным образом, представляет ли эта выборка пачку отраженных от цели импульсов или она относится к помехе.

Для решения сформулированной задачи решающее устройство должно обрабатывать поступающие сигналы в соответствии с некоторым

наперед заданным алгоритмом, причем оптимальный алгоритм обнаружения, как и для случая неквантованных сигналов, сводится к проверке гипотезы H_0 об отсутствии полезного сигнала против альтернативной гипотезы H_1 о его наличии, т. е, к образованию отношения правдоподобия и сравнению этого отношения с некоторым наперед заданным числом, выбираемым исходя из априорной вероятности наличия сигнала и потерь, приписываемых ошибочным решениям (критерий среднего риска), или исходя из допустимой вероятности ложного обнаружения (критерий Неймана — Пирсона).

Для синтеза алгоритма обнаружения необходимо прежде всего определить функцию правдоподобия гипотез H_0 и H_1. Обозначим p_λ— вероятность получения единицы на λ позиции пачки, а q_λ — вероятность получения нуля на этой позиции. Вероятность получения любого из двух возможных исходов в результате λ-го испытания можно записать в виде

$$P(x_\lambda) = p_\lambda^{x_\lambda} q_\lambda^{1-x_\lambda} \qquad (x_\lambda = 0,1). \tag{1.3.1}$$

Будем в дальнейшем считать выборки огибающей в пределах фиксированного интервала дальности статистически независимыми. Тогда совместная вероятность получения некоторой комбинации нулей и единиц на всех N позициях пачки равна

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_{\lambda=1}^{N} p_\lambda^{x_\lambda} q_\lambda^{1-x_\lambda}. \tag{1.3.2}$$

Теперь, на основании формулы (2), можно записать выражение для условной вероятности любой комбинации нулей и единиц при наличии и отсутствии полезного сигнала.

При наличии полезного сигнала

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_N \mid H_1) = \prod^{N} p_{S\lambda}^{x_\lambda} q_{S\lambda}^{1-x_\lambda}, \tag{1.3.3}$$

где $p_{S\lambda}$ — вероятность получения единицы на λ-й позиции сигнальной пачки; $q_{S\lambda} = 1 - p_{S\lambda}$.

При отсутствии сигнала

$$P(x_1, x_2 \ldots x_N \mid H_0) = \prod_{\lambda=1}^{N} p_{N\lambda}^{x_\lambda} q_{N\lambda}^{1-x_\lambda}, \tag{1.3.4}$$

где $p_{N\lambda}$ — вероятность получения единицы на λ-й позиции в области помех, одинаковая для всех λ; $q_{N\lambda} = 1 - p_{N\lambda}$.

Будем считать заданным порог обнаружения l_0. Тогда, с учетом выражений (3) и (4) условие оптимального обнаружения пачки запишется в виде

$$\prod^{N} \left(\frac{p_{S\lambda}}{q_{S\lambda}}\right)^{x_\lambda} \left(\frac{q_{S\lambda}}{q_N}\right)^{1-x_\lambda} \geqslant l_0. \tag{1.3.5}$$

Логарифмируя выражение (5), получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{N}\left[x_\lambda \ln\frac{p_{S\lambda}}{p_N}+(1-x_\lambda)\ln\frac{q_{S\lambda}}{q_N}\right]\geqslant \ln l_0.$$

Последнее выражение после элементарных преобразований приводится к виду

$$\sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda \ln\frac{p_{S\lambda}\,q_N}{p_N\,q_{S\lambda}}\geqslant \ln l_0-\sum_{\lambda=1}^{N}\ln\frac{q_{S\lambda}}{q_N}. \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

Обозначая в выражении (6)

$$\eta_\lambda=\ln\frac{p_{S\lambda}\,q_N}{p_N\,q_{S\lambda}},\qquad \mathcal{L}=\ln l_0-\sum_{\lambda=1}^{N}\ln\frac{q_{S\lambda}}{q_N}, \qquad (1.3.6а)$$

запишем формулу для алгоритма оптимального обнаружения пачки двоично квантованных сигналов в следующем окончательном виде

$$\sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda\,\eta_\lambda\geqslant\mathcal{L}. \qquad (1.3.7)$$

Последовательность коэффициентов η_λ, учитывающих ожидаемые значения вероятности получения нулей и единиц в области сигнала, носит название весовой функции обнаружения двоично квантованных сигналов (ВФО). Эта функция по форме аналогична огибающей диаграммы направленности антенны РЛС на прием и передачу, причем, как показывают расчеты, значения коэффициентов η_λ весьма некритичны к интенсивности отраженного от цели сигнала.

В соответствии с формулой (7) алгоритм оптимального обнаружения пачки квантованных сигналов сводится к выполнению следующих операций.

1. Прием и запоминание квантованных сигналов (нулей и единиц) в пределах ширины пачки (на N позициях).

2. Суммирование значений предварительно запрограммированной весовой функции на тех позициях пачки, на которых получены единицы.

3. Сравнение полученной суммы с пороговым числом $\mathcal{L}$ и выдача решения об обнаружении или необнаружении пачки.

Структурная схема реализации рассмотренного алгоритма приведена на рис. 1.11.

Предположим теперь, что вероятности $p_{S\lambda}$ одинаковы в пределах всей ширины диаграммы направленности, т. е. что пачка имеет прямоугольную форму. Тогда из выражения (6) получаем оптимальный алгоритм обнаружения пачки прямоугольной формы в виде

$$\sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda\geqslant\mathcal{L}'=\frac{\ln l_0-N\ln(q_S/q_N)}{\ln(p_S\,q_N/p_N\,q_S)}, \qquad (1.3.8)$$

где правая часть, обозначенная через $\mathcal{L}'$, — постоянный порог.

Как видно из выражения (8), в случае прямоугольной пачки процедура обнаружения сводится к счету импульсов единиц, полученных в пределах ширины пачки, и сравнению накопленного числа с пороговым числом $\mathscr{L}'$. Схема обнаружителя получается чрезвычайно простой, легко реализуемой с помощью обычного счетчика.

Кроме того, в случае прямоугольной пачки обнаружение полезного сигнала можно производить по наличию любой комбинации из N' единиц на N смежных позициях.

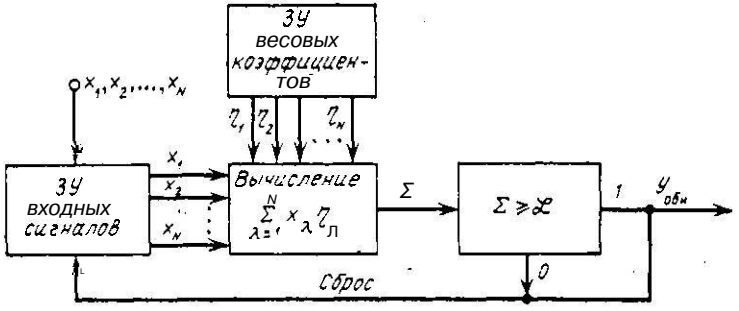


Рис. 1.11. Структурная схема оптимального алгоритма обнаружения двоично квантованных сигналов.

Для облегчения реализации на практике часто используют упрощенные алгоритмы обнаружения и при обработке реальных (непрямоугольных) пачек.

1.3.2. Качественные характеристики обнаружения пачки двоично квантованных сигналов

Расчет качественных характеристик обнаружения пачки двоично квантованных сигналов сначала производится при следующих допущениях:

1. Пачка имеет прямоугольную форму (вероятность появления импульсов единиц на всех позициях пачки одинакова).

2. Вся пачка находится в пределах строба фиксированных размеров. Размер строба по дальности соответствует интервалу временной дискретизации, а размер строба по азимуту равен ширине диаграммы направленности антенны РЛС.

При принятых допущениях поставленная задача решается на основе частной теоремы о повторении опытов [4]. Согласно этой теореме вероятность $P_{\mathscr{L}'N}$ события, состоящего в том, что точно $\mathscr{L}'$ из N импульсов превысят порог x_1, определяется биномиальным законом

$$P_{\mathscr{L}'N} = C_N^{\mathscr{L}'} p_S^{\mathscr{L}'} q_S^{N-\mathscr{L}'}, \tag{1.3.9}$$

где

$$C_N^{\mathscr{L}'} = N!/\mathscr{L}'!(N-\mathscr{L}')!$$

— число возможных комбинаций (сочетаний) из N элементов по $\mathscr{L}'$.

Очевидно, пачка импульсов будет обнаружена, если пороговый уровень превысят не только $\mathscr{L}'$ но и $\mathscr{L}'+1$, $\mathscr{L}'+2 \ldots N$ импульсов. Поэтому вероятность обнаружения пачки определяется вероятностью события, заключающегося

том, что не менее $\mathscr{L}'$ импульсов пачки превысят пороговый уровень квантования x_1. Эта вероятность определяется выражением

$$P_{\text{обн}} = \sum C_N^l p_S^l q_S^{N-l}. \qquad (1.3.10)$$

Аналогично вероятность ложного обнаружения, т. е. вероятность получить не менее $\mathscr{L}'$ единиц в области помехи, может быть определена по следующей формуле

$$P_{\text{ло}} = \sum^{N} C_N^l p_N^l q_N^{N-l}. \qquad (1.3.11)$$

Формулы (10) и (11) являются основнымн для определения эффективности алгоритма обнаружения прямоугольной пачки двоично квантованных сигналов и позволяют, например, определять требуемое пороговое отношение сигнала к помехе при заданной вероятности ложных тревог (критерий Неймана — Пирсона).

Действительно, если N и $\mathscr{L}'$ зафиксированы, а также задана допустимая вероятность ложного обнаружения, то из формулы (11) определяется допустимая вероятность p_N превышения выбросом помехи уровня квантования x_1. Далее по формуле (2.22) можно найти значение x_1, обеспечивающее допустимую вероятность p_N. Задавшись теперь требуемой вероятностью правильного обнаружения, по формуле (10) находим p_S, а затем по формуле (2.23) определяется пороговое отношение сигнала к помехедля обеспечения заданной вероятности обнаружения.

Для расчета вероятности обнаружения пачки импульсов с произвольной огибающей необходимо знать законы распределения вероятностей суммы

$$\Sigma_A = \sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda \eta_\lambda$$

в области сигнала и в области помехи.

Плотность вероятности $w(\Sigma_A)$ через известные функции не выражается. Поэтому приходится пользоваться более или менее подходящим приближением для этой плотности вероятности.

При больших N $\geqslant$ 50 можно допустить, что как в области сигнала, так и в области помехи Σ_A подчинена нормальному закону распределения вероятности, т. е.

$$w(\Sigma_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\Sigma_A)}} \exp\left[-\frac{(\Sigma_A - M(\Sigma_A))^2}{2D(\Sigma_A)}\right].$$

Математическое ожидание суммы Σ_A в области помехи равно

$$M(\Sigma_A)_N = \sum^{N} M(x_{N\lambda})\eta_\lambda = p_N \sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda.$$

Аналогично в области сигнала имеем

$$M(\Sigma_A)_S \quad {}^{N}_{\lambda} \quad p_{S\lambda}\eta_\lambda.$$

Дисперсия суммы Σ_A в области помехи определяется по формуле

$$_A\,IN - p_N \; {}_{\lambda N} \sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda^2,$$

а в области сигнала по формуле

$$D(\Sigma_A)_S = \sum_{\lambda=1}^{N} p_{S\lambda} q_{S\lambda} \eta_\lambda^2.$$

Таким образом, плотность вероятности суммы Σ_A в области помехи записывается в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi p_N q_N \sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda^2}} \exp\left[-\frac{\left(\Sigma_A - \sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda\right)^2}{2 p_N q_N \sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda^2} \right],$$

а вероятность ложного обнаружения определяется по формуле

$$P_{\text{ло}} = \int_{\mathscr{L}'}^{\infty} w_N(\Sigma_A)\, d\Sigma_A = \left(\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda}{\sqrt{p_N q_N \sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda^2}} \right] \right), \qquad (1.3.12)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2} \right) dt$ — функция Лапласа.

Из формулы (12) следует, что вероятность ложного обнаружения зависит как от величины первого порога (которым определяется вероятность p_N), так и от величины второго порога $\mathscr{L}'$.

Аналогичным образом можно получить формулу для вероятности правильного обнаружения пачки. Эта формула имеет вид

$$P_{\text{обн}} = \int_{\mathscr{L}'}^{\infty} w_S(\Sigma_A)\, d\Sigma_A = \left(\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{\sum_{\lambda=1}^{N} \eta_\lambda}{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{N} p_{S\lambda} q_{S\lambda} \eta_\lambda^2}} \right] \right). \qquad (1.3.13)$$

Погрешность вычисления вероятности обнаружения по формуле (13) при $N = 15$ составляет 20 — 30%.

1.3.3. Оптимальный алгоритм обнаружения пачки при многоуровневом квантовании амплитуд сигналов

При многоуровневом квантовании с фиксированным числом порогов каждое выборочное значение огибающей x_λ преобразуется в дискретную величину x'_λ в соответствии со следующим правилом:

$$x'_\lambda = l, \quad \text{если} \quad x_l < x_\lambda \leqslant x_{l+1}, \quad l = \overline{0, m},$$

где $x_0 = 0$, $x_{m+1} = \infty$.

Вероятность события $x'_\lambda = j$ равна

$$p_{jS\lambda} = p(x'_\lambda = l \mid S_\lambda) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x_\lambda \mid S_\lambda)\, dx_\lambda$$

при наличии сигнала н

$$p_{jN\lambda} = p\,(x'_\lambda = j \mid 0) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} w\,(x_\lambda \mid 0)\,dx_\lambda$$

при его отсутствии.

В дальнейшем, для упрощения выкладок, будем считать, что пачка импульсов имеет прямоугольную форму. В этом случае, для некоторого фиксированного набора порогов $(x_1, x_2 \ldots x_m)$, отношение правдоподобия для пачки из N импульсов можно записать в виде

$$l\,(x'_1,\ x'_2,\ \ldots.\ x'_N) = \prod_{j=0}^{m} (p_{jS\lambda} \mid p_{jN\lambda})^{N_j} = \prod_{j=0}^{m} (l_j)^{N_j}, \qquad (1.3.14)$$

где $l_i = p_{jS\lambda} \mid p_{jN\lambda}$ при условии $\sum_{j=0}^{m} N_j = N$.

При оптимальном обнаружении пачки это отношение должно сравниваться с порогом l_0 (выбираемым так же как и раньше, например, по критерию Неймана—Пирсона), т. е. должно быть проверено выполнение условия

$$l\,(x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_N) \geqslant l_0. \qquad (1.3.15)$$

После логарифмирования (15) с учетом (14) получим оптимальный алгоритм обнаружения пачки в виде

$$\sum_{j=0}^{m} N_j \ln l_j > \ln l_0. \qquad (1.3.16)$$

В соответствии с (16) обнаружение прямоугольной пачки импульсов при многоуровневом квантовании сводится к суммированию чисел N_j, $j = 0, m$, с весовыми коэффициентами $\ln l_j$, которые равны логарифмам ожидаемых отношений вероятностей попадания огибающей в интервалы $x_j - x_{j+1}$ при наличии и отсутствии сигнала.

1.3.4. Оптимальный алгоритм оценки координат центра пачки двоично квантованных сигналов

Оценка координат мгновенного положения цели производится одновременно с обнаружением отраженного сигнала (пачки). В одноканальной импульсной РЛС оценке подлежат:

— дальность до цели, характеризуемая задержкой отраженного сигнала относительно зондирующего,

— угловая координата, закодированная в амплитудной модуляции импульсов пачки, в соответствии с формой огибающей диаграммы направленности антенны на прием и передачу.

С достаточной для практики точностью можно считать, что цель не изменяет своего положения в пространстве за время приема всей пачки отраженных сигналов. Это значит, что дальность до цели может быть оценена по формуле

$$r_{\text{ц}} = \sum_{\lambda=1}^{N'} r_\lambda / N',$$

а дисперсия оценки дальности равна

$$\sigma^2_{r_д} = \sigma^2_{r_\lambda}/N',$$

где r_λ — дальность по λ-му сигналу пачки; $\sigma^2_{r_\lambda}$ — дисперсия оценки дальности по одиночному двоично квантованному сигналу; N' — число импульсов (единиц) в принятой пачке.

При равномерном обзоре в горизонтальной плоскости угловой координатой, подлежащей оценке, будет азимут цели. Азимут цели соответствует в этом случае азимуту центра пачки. Поэтому оценка координаты азимута цели сводится к оценке азимута центра пачки. Получим оптимальный алгоритм оценки азимута центра пачки двоично квантованных сигналов.

Пусть принимается пачка из N двоично квантованных сигналов с известными статистическими характеристиками. Положение центра пачки неизвестно и подлежит оценке по результатам анализа принимаемой последовательности нулей и единиц. В качестве критерия оптимальности выбирается дисперсия оценки, а в качестве метода оценки — метод максимального правдоподобия. Истинный азимут центра пачки обозначается в дальнейшем β_0, а его оценка $\hat{\beta}_0$.

Функция правдоподобия оцениваемого параметра β_0 — $L(\beta_0)$ получается непосредственно из выражения для условной вероятности комбинации нулей и единиц при наличии сигнала (см. предыдущий пункт)

$$\prod^{N}$$

Входящая в это выражение вероятность обнаружения сигнала на λ позиции $p_{S\lambda}$, например, для случая нефлюктуирующего сигнала определяется по формуле

$$p_{S\lambda} = \int_{x_\lambda}^{\infty} x_\lambda \exp\left(-\frac{x_\lambda^2 + a_\lambda^2}{2}\right) I_0(a_\lambda x_\lambda)\, dx_\lambda,$$

т. е. является функцией a_λ (параметр x_1 считается фиксированным). Однако все a_λ определяются однозначно, если известна зависимость

$$a_\lambda = a_0 g(\beta_\lambda, \beta_0), \qquad (1.3.17)$$

где $g(\beta_\lambda, \beta_0)$ — функция огибающей диаграммы направленности антенны РЛС на передачу и прием (рис. 1.12, *а*); β_λ — значение азимутального угла при приеме λ-го импульса пачки; a_0 — отношение сигнала к помехе в центре пачки.

Таким образом, вероятность $p_{S\lambda} = f(a_0, \beta_0)$ является функцией двух неизвестных параметров a_0 и β_0. В дальнейшем будем считать параметр a_0 фиксированным.

С учетом (17) и сделанных допущений, функция правдоподобия для оценки β_0 записывается в виде:

$$L(\beta_0) = \prod_{\lambda=1}^{N} p^{x_\lambda}(\beta_\lambda, \beta_0)\, q^{1-x_\lambda}(\beta_\lambda, \beta_0).$$

Найдем логарифм функции правдоподобия

$$\ln L(\beta_0) = \sum^{N} x_\lambda (\ln p(\beta_\lambda, \beta_0) - \ln q(\beta_\lambda, \beta_0)) + \sum^{N} \ln q(\beta_\lambda, \beta_0). \quad (1.3.18)$$

Для составления уравнения правдоподобия продифференцируем (18) по оцениваемому параметру β_0:

$$\frac{d \ln L}{d\beta_0} = \sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda \left[\frac{1}{p(\beta_\lambda, \beta_0)} \frac{dp(\beta_\lambda, \beta_0)}{d\beta_0} - \frac{1}{q(\beta_\lambda, \beta_0)} \frac{dq(\beta_\lambda, \beta_0)}{d\beta_0} \right] + \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{q(\beta_\lambda, \beta_0)} \frac{dq(\beta_\lambda, \beta_0)}{d\beta_0}. \quad (1.3.19)$$

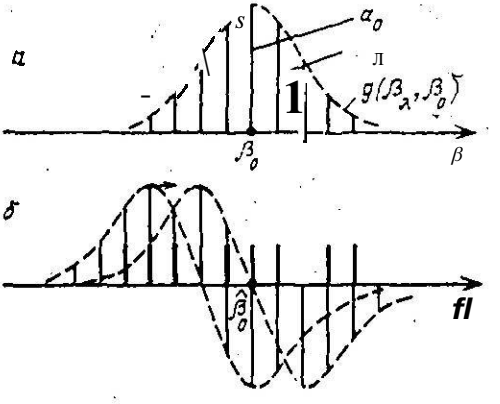


Рис. 1.12. Пояснение процесса оценки положения центра пачки двоично квантованных сигналов:
а - огибающая пачки; *б* — сдвиг весовой функции относительно реализации.

Вторая сумма в правой части выражения (19) не зависит от выборки принимаемых сигналов, а определяется только формой диаграммы направленности антенны. При симметричной форме этой диаграммы рассматриваемая сумма приблизительно равна нулю.

Учитывая последнее обстоятельство, а также используя очевидное соотношение

$$\frac{dq(\beta_\lambda, \beta_0)}{d\beta_0} = -\frac{dp(\beta_\lambda, \beta_0)}{d\beta_0},$$

получим уравнение правдподобия для оценки параметра β_0 в виде

$$\sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda \frac{1}{p(\beta_\lambda, \beta_0) q_\lambda(\beta_\lambda, \beta_0)} \frac{dp(\beta_\lambda, \beta_0)}{d\beta_0}\Bigg|_{\beta_0 = \hat{\beta}_0} = 0. \quad (1.3.20)$$

Обозначим

$$\eta(\beta_\lambda, \beta_0) = \frac{1}{p(\beta_\lambda, \beta_0) q(\beta_\lambda, \beta_0)} \frac{dp(\beta_\lambda, \beta_0)}{d\beta_0}. \quad (1.3.21)$$

Дискретную функцию (21) можно рассматривать как функцию веса позиций сигнальной пачки в оценке азимута цели (рис. 1.12, б). Огибающая этой функции характеризует количество информации об азимуте цели, содержащееся в импульсах (единицах), расположенных на различных расстояниях от центра пачки. Форма огибающей, вообще говоря, зависит от отношения сигнала к помехе a_0 в центре пачки. Однако численные расчеты показывают, что эта зависимость не очень жесткая, так что при изменении a_0 в достаточно широких пределах, при прочих равных условиях, функция веса позиций пачки остается практически неизменной.

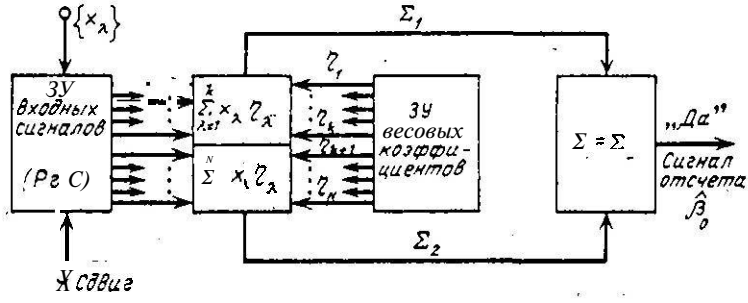


Рис. 1.13. Упрощенная структурная схема алгоритма максимального правдоподобия при оценке положения центра пачки.

С учетом (21) уравнение правдоподобия (20) записывается в виде

$$\sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda \, w(\beta_\lambda, \hat{\beta}) = 0 \qquad (1.22)$$

В соответствии с этим уравнением, оценка максимального правдоподобия для центра пачки двоично квантованных сигналов получается из условия равенства нулю суммы значений функции $\eta(\beta_\lambda, \beta_0)$ на позициях, где сигнальные импульсы превышают пороговый уровень амплитудного квантования (в этих точках $x_\lambda = 1$). Принципиально алгоритм (22) реализуется путем скачкообразного сдвига весовой функции относительно принятой реализации нулей и единиц или путем сдвига самой реализации относительно неподвижной весовой функции (рис. 1.12, б). При этом процесс сдвига и суммирование значений весовой функции на позициях, где $x_\lambda = 1$, повторяется до тех пор, пока сумма (22) не станет равной нулю (или меньше по абсолютной величине некоторого фиксированного числа). После этого отсчет азимута β_0 производится по положению на оси β нулевой точки функции $\eta(\beta_\lambda, \beta_0)$.

Упрощенная структурная схема реализации алгоритма (22) максимального правдоподобия при оценке азимута цели по пачке двоично квантованных сигналов изображена на рис. 1.13. В схему входят: ЗУ квантованных сигналов в виде регистра со сдвигом (Рг С), запоминающее устройство дискретных значений функции веса, два суммирующих устройства Σ_1 и Σ_2 и устройство сравнения сумм,

Ё каждом такте работы схемы содержимое Рг С сдвигается на один разряд. При этом в первый разряд заносится новая информация (нуль или единица), а из последнего разряда информация сбрасывается. Таким образом создается «поток» информации через регистр. Функция веса является «неподвижной», причем правая часть этой функции (см. рис. 1.12, *б*) получается инвертированной.. Взвешенные сигналы поступают на вход суммирующих устройств Σ_1 и Σ_2, а с выхода этих устройств суммарные сигналы поступают на два входа схемы сравнения. Сигнал на выходе схемы сравнения появляется только в случае равенства сумм Σ_1 и Σ_2. Момент появления сигнала на выходе схемы сравнения соответствует прохождению центра принимаемой пачки через нулевую точку функции веса. Если зафиксировать этот момент на оси β, то получим оптимальную оценку азимута цели β_0.

Отметим в заключение, что одновременная реализация симметричной весовой функции для оптимального обнаружения пачки и несимметричной весовой функции для оптимальной оценки азимута центра этой пачки связана с увеличением объема оборудования. Поэтому иногда ограничиваются только одной симметричной весовой функцией (ба) как для обнаружения, так и для оценки азимута центра пачки. Азимут пачки в этом случае определяется по положению на оси β максимума взвешенной суммы (7). Поскольку этот максимум тупой, точность оценки азимута при этом несколько ухудшается.

1.3.5, Дисперсия оценки азимута по пачке двоично квантованных сигналов

Достаточно простая формула для расчета дисперсии ошибки оценки азимута цели по пачке двоично квантованных сигналов может быть получена при допущении, что оценка максимального правдоподобия является эффективной.

Нижняя граница дисперсии эффективной оценки в случае дискретного распределения, содержащего параметр β_0, определяется следующей формулой [15]:

$$\sigma^2_{\beta\,\text{мин}} = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{2^N} \left(\frac{\overline{dP_i(\beta)}}{d\beta_0}\right)^2 P_i(\beta), \qquad (1.3.23)$$

где $P_i(\beta)$ — вероятность наличия одной из конкретных реализаций нулей иединиц, общее число которых составляет 2^N; N — число выборок в каждой реализации (число импульсов в пачке).

Для вывода расчетной формулы возьмем сначала одну конкретную реализацию из общего числа 2^N, например, реализацию, содержащую единицы на всех N позициях. Вероятность такой реализации

$$P_1 = P(\underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{N}) = \prod_{\lambda=1}^{N} P_\lambda.$$

Для этого случая

$$\left(\frac{d\ln P_1}{d\beta_0}\right)^2 P_1 = \frac{1}{P_1}\left(\frac{dP_1}{d\beta_0}\right)^2 = \sum_{\lambda=1}^{N}\left(\frac{dp_\lambda}{d\beta_0}\right)^2 \frac{1}{p_\lambda}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\lambda}}^{N} p_j + \sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq k}}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{dp_\lambda}{d\beta_0}\right)\left(\frac{dp_k}{d\beta_0}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} p_j.$$

Возьмем теперь вторую реализацию, содержащую нули на всех K позициях (т. е. обратную первой). Вероятность этой реализации равна

$$P_2 = P(0\ 0\ \ldots\ 0) = \prod_{\lambda=1}^{N} q_\lambda.$$

Соответствующий член суммы в знаменателе формулы (23) для этой реализации имеет вид

$$\left(\frac{d\ln P_2}{d\beta_0}\right)^2 P \quad \sum_{\lambda=1}^{N} \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\lambda}}^{N} \quad \sum_{k} \quad \frac{dp_\lambda}{d\beta_0}\,\frac{dp_k}{d\beta_0}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\lambda\\ j\neq k}} q_j.$$

Аналогично можно написать выражения для всех пар слагаемых в знаменателе (23), содержащие взаимно дополнительные комбинации нулей и единиц на всех позициях пачки. Суммируя полученные выражения и имея в виду очевидные соотношения

$$\frac{dp_\lambda}{d\beta_0} = -\frac{dq_\lambda}{d\beta_0}, \qquad \left(\frac{dp_\lambda}{d\beta_0}\right)^2 = \left(\frac{dq_\lambda}{d\beta_0}\right)^2,$$

видим, что сумма вторых членов равна нулю, а сумма первых членов имеет вид

$$\sum_{\lambda=1}^{N}\left(\frac{dp_\lambda}{d\beta_0}\right)^2\left(\frac{1}{p_\lambda}+\frac{1}{q_\lambda}\right) = \sum_{\lambda=1}^{N}\left(\frac{dp_\lambda}{d\beta_0}\right)^2\frac{1}{p_\lambda q_\lambda}.$$

Таким образом, формула для нижней границы дисперсии оценки азимута по пачке двоично квантованных сигналов имеет вид

$$\sigma^2_{\beta\,\text{мин}} = \left[\sum_{\lambda=1}^{N}\left(\frac{dp_\lambda}{d\beta_0}\right)^2\frac{1}{p_\lambda q_\lambda}\right]^{-1} \qquad (1.3.24)$$

Из общей формулы (24) для каждой конкретной модели обрабатываемых сигналов можно получить более удобные для расчетов формулы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вопросы статистической теории радиолокации, Том. I., М., «Сов. радио», 1963. Авт.: П. А. Бакут, И. А, Большаков, Б. М. Герасимов и др.

2. Математические основы современной радиоэлектроники. Под ред. А. С. Гуткина. М., «Сов. радио», 1968. Авт.: И. А. Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левин, Р. Л. Стратонович.

3. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Сов. радио», 1960.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
5. Гуткин Л. С. Современная радиоэлектроника и ее проблемы. М., «Сов. радио», 1968.
6. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М., Госэнергоиздат, 1958.
7. Клюев Н. Ф. Обнаружение импульсных сигналов с помощью накопителей дискретного действия. М., «Сов. радио», 1963.
8. Кузьмин С. 3. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.
9. Слока В. К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов. М., «Сов. радио», 1970.
10. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
11. Теоретические основы информационной техники. М., «Энергия», 1971. Авт.: Ф. Е. Темников, В. А. Афонин, В. И. Дмитриев.
12. Цыпкин Я. 3. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1958.
13. Теоретические основы радиолокации. М., «Сов. радио», 1970. Авт.: Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков, И. Н. Бусыгин и др.
14. Дечч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. Под ред. Б. Р. Левина. М., «Сов. радио», 1965.
15. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., ИЛ, 1948.
16. Маркюс Ж. Дискретизация и квантование. М., «Энергия», 1969.
17. Миддлтон Д. Очерки по теории связи. М., «Сов. радио», 1966.
18. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. М., ИЛ, 1963.
19. Железнов Н. А. Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщений — «Радиотехника и электроника», 1958, вып. 1.
20. Медведев Г. А. Квантование при обнаружении сигналов, принятых в присутствии шумов. — «Известия вузов СССР. Сер. радиотехн.», 1962, № 4.
21. Тараценко Ф. П. Об оптимальном пороге квантования принимаемого сигнала для бинарных систем обнаружения. — «Известия вузов СССР. Сер. радиотехн.», 1960, № 4.
22. Widrow B. A Study of Rough Amplitude Quantisation by Means of Nyquist Sampling Theory. — «IRE Trans. on IT», 1956, v. CT-3, № 4.
23. Max J. Quantizing for minimum Distortion. — «IRE Trans. on IT», 1960, v. IT-6, M1.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АБСТРАКТНОГО СИНТЕЗА УСТРОЙСТВ И АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

2.1. Абстрактные схемы цифровых автоматов

В дальнейшем предполагается, что для реализации алгоритмов обработки радиолокационной информации на всех ее этапах применяются цифровые вычислительные машины и непрограммные цифровые вычислительные устройства специального назначения. Характерными особенностями цифровых вычислительных устройств являются:

— дискретность множества входных и выходных сигналов,

— дискретность множества внутренних состояний,

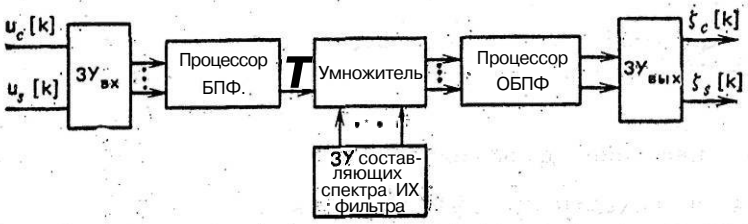


Рис. 1.9

Вернемся к вопросу реализации согласованной фильтрации радиосигналов в частотной области с учетом применения алгоритма БПФ. Структурная схема соответствующего вычислительного устройства представлена на рис. 1.9. Состав схемы и назначение блоков ясны из рисунка. Необходимо только отметить, что на вход процессора прямого БПФ одновременно поступают две квадратурные составляющие, которые вместе образуют комплексный сигнал, подлежащий преобразованию: БПФ — комплексное умножение — ОБПФ. Поэтому входное ЗУ, выходное ЗУ и все промежуточные регистры должны иметь двойную длину разрядной сетки.

Для согласованной фильтрации сигналов необходимо выполнить одно прямое БПФ, одно обратное БПФ и перемножение $(2\times M)$-точечных комплексных чисел. В дальнейшем принимаем $M=l+n-1$. Так как основное время работы рассматриваемого вычислительного устройства тратится на комплексные умножения, число операций свертки представим в виде

$$\mathrm{tf}_{\mathrm{вУ}} = 2\,[(M/2)\log_2 M] + M = M[1+\log_2 M].$$

Число этих операций, приходящееся на одну пару квадратурных составляющих выходного сигнала, составит

$$N_{\mathrm{вУ}}/l = M\,[l+\log_2 M]/l.$$

При прямом вычислении во временной области число комплексных умножений на одну выходную выборку равно n (при $l=n$). Следовательно, выигрыш в числе операций комплексного умножения при применении прямого БПФ

$$K_{\mathrm{ВПФ}} = n^2/M\,[1+\log_2 M] = n/2\,[1+\log_2 2n].$$

Расчеты по этой формуле показывают, что выигрыш $K_{\mathrm{БПФ}} > 1$ только при $l \geqslant 12$, но при $l=2048$ $K_{\mathrm{БПФ}} = 85$.

2.1.1. Элементы алгебры логики и синтез логических схем

Алгебра логики оперирует с высказываниями. Высказыванием называется всякое утверждение, которое может быть истинным или ложным. Истинным высказываниям приписывается символ «1», а ложным — «0». Из одного или нескольких высказываний, принимаемых за простые, можно составлять сложные высказывания. В дальнейшем простые высказывания обозначаются через x_1, x_2, ..., а сложные — через y_1, y_2, ... Сложные высказывания также могут принимать только два значения в зависимости от истинности или ложности входящих в них простых высказываний.

Все сложные высказывания могут быть получены с помощью трех логических операций:

— операции логического умножения (пересечения), которая обычно называется конъюнкцией или операцией И и обозначается через Д или · (точка);

— операции логического сложения (объединения), которая обычно называется дизъюнкцией или операцией ИЛИ и обозначается через V или $+$;

— операции логического отрицания (дополнения), которая называется операцией НЕ и обозначается $\bar{}$ (надчеркивание).

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

— для конъюкции · (точка); где это возможно, знак вообще опускается;

— для дизъюнкции $+$;

— для отрицания $\bar{}$.

Коньюкцией двух простых высказываний x_1 и x_2 называется сложное высказывание x_1x_2, которое ложно, когда хотя бы одно простое высказывание ложно, и истинно, когда оба простых высказывания истинны. Операция конъюнкции реализуется логической схемой И (схемой совпадения).

Дизъюнкцией двух простых высказываний называется сложное высказывание $(x_1 + x_2)$, которое истинно, если хотя бы одно из входящих в него высказываний истинно, и ложно, если оба простых высказывания ложны. Операция дизъюнкции реализуется логической схемой ИЛИ.

Отрицанием высказывания называется сложное высказывание y, которое истинно, когда x ложно, и ложно, когда x истинно (например: $y = \bar{x}$, $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$). Операция отрицания реализуется схемой инвертора.

В алгебре логики имеется четыре закона: переместительный, сочетательный, распределительный и инверсии. Переместительный и сочетательный законы для операции логического сложения записываются в виде

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \qquad x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3.$$

Кроме того, непосредственно из определения операции логического сложения, записываются следующие равносильности*):

$$x + 0 = x, \qquad x + 1 = 1 \qquad x + x = x.$$

*) Логические выражения называются равносильными, если они равны при всех возможных значениях аргумента.

Переместительный и сочетательный закон для операции логического умножения записываются в виде

$$x_1 x_2 = x_2 x_1, \qquad (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3),$$

а соответствующие этой операции равносильности равны

$$x0 = 0, \qquad x1 = x, \qquad xx = x.$$

Распределительный закон соответственно для операций логического сложения и логического умножения определяется следующими соотношениями:

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3,$$
$$x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3).$$

Закон инверсии, который в обычной алгебре отсутствует, определяется соотношениями:

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2, \qquad \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

Непосредственно из закона алгебры логики и записанных выше равносильностей можно получить следующие полезные соотношения:

$$x_1 \bar{x}_1 = 0, \qquad x_1 \vee \bar{x}_1 = 1, \qquad (x_1 \vee \bar{x}_2) x_2 = x_1 x_2,$$
$$x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 = x_1 \vee x_2, \qquad x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_1, \qquad (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1.$$

Законы алгебры логики и другие, записанные выше соотношения позволяют упрощать путем преобразований сложные логические функции.

Логические (булевы) функции образуются из конечного числа двоичных переменных с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Для описания логических функций используются таблицы истинности, в которых для каждой i-й комбинации значений переменных сопоставлено значение функции y_i, равное 0 или 1. Всего имеется 2^m комбинаций значений m переменных. Поэтому таблицу истинности можно представить в виде табл. 2.1.

В соответствии с приведенными в таблице 2^m комбинациями можно образовать систему из 2^m функций $f_i(x_{m-1}, \ldots, x_0)$:

$$f_0(x_{m-1} x_{m-2} \ldots, x_1, x_0) = \bar{x}_{m-1} \bar{x}_{m-2} \ldots \bar{x}_1 \bar{x}_0,$$
$$f_1(x_{m-1}, x_{m-2}, \ldots; x_1, x_0) = \bar{x}_{m-1} \bar{x}_{m-2} \ldots \bar{x}_1 x_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{2^m-1}(x_{m-1}, x_{m-2} \ldots, x_1, x_0) = x_{m-1} x_{m-2} \ldots x_1 x_0,$$

каждая из которых принимает значение, равное единице только для сочетания переменных, характеризующих i-ю комбинацию ($i = 0 - 2^m - 1$). Образуем конъюнкции $f_i(x_{m-1}, \ldots, x_0)\, y_i$, которые являются функциями значений y_i.

Тогда функция

$$y(x_{m-1}, x_{m-2} \ldots x_1, x_0) = \sum^{2^m-1} f_i(x_{m-1}, x_{m-2}, \ldots, x_1, x_0)\, y_i \qquad (2.1.1)$$

Таблица 2.1

i	x_{m-1}	x_{m-2}	. . .	x_2	x_1	x_0	y_i
0	0	0	. . .	0	0	0	y_0
1	0	0	. . .	0	0	1	y_1
2	0	0	. . .	0	1	0	y_2
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2^m-2	1	1	. . .	1	1	0	y_{2^m-2}
2^m-1	1	1	. . .	1	1	1	y_{2^m-1}

является аналитической записью логической функции, заданной таблицей истинности — (табл. 2.1).

Форма записи логической функции в виде выражения (1) получила название совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) функции. Члены f_i этой функции, которым соответствует $y_i = 1$, называются конституентами единицы. Аналогично члены f_i, которым соответствует $y_i = 0$, называются конституентами нуля. Обычно логическую функцию задают путем перечисления дизъюнктивных членов.

Логические функции применяются для описания функционирования цифровых автоматов. Каждая такая функция подлежит в дальнейшем реализации с помощью устройств, называемых логическими элементами. Однако прежде чем приступить к реализации, необходимо попытаться преобразовать логическую функцию с целью ее упрощения. Суть последнего состоит в нахождении какого-то другого выражения, представляющего ту же функцию, но для практической реализации которого требуется меньше оборудования, чем для первоначального варианта. Для упрощения (минимизации) логических функций используются в первую очередь основные соотношения алгебры логики. Однако существуют и специальные методы минимизации, с которыми при необходимости можно ознакомиться по многочисленной специальной литературе (см. напр. [2]).

В качестве примера произведем синтез логической схемы автомата, фиксирующего обнаружение пачки при появлении в исследуемой последовательности нулей и единиц не менее трех единиц на 5 смежных позициях (3 из 5).

Введем следующие обозначения: x_i — логические переменные на каждой из пяти смежных позиций (логические переменные принимают только два значения: 0 или 1 — причем нулевые значения логических

переменных отмечаются знаком отрицания); $y_{обн}$ — сложное событие, определяемое согласно табл. 2.2

Таблица 2.2

t	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	$y_{обн}$
1	1	1	0	0	1	1
2	1	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1	1
5	1	0	0	1	1	1
6	0	1	0	1	1	1
7	1	1	0	1	1	1
8	0	0	1	1	1	1
9	1	0	1	1	1	1
10	0	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1

Составим таблицу истинности искомой логической функции (табл. 2.2). Из 32 возможных комбинаций в таблице приведены только те комбинации, которые приводят к обнаружению пачки ($y_{обн} = 1$).

Логическая функция обнаружения пачки записывается в виде

$$y_{обн} = (x_5 x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 + x_5 \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_5 x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 + x_5 x_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 + x_5 \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 + \bar{x}_5 x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 + x_5 x_4 \bar{x}_3 x_2 x_1 + \bar{x}_5 \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_2 x_1 + x_5 \bar{x}_4 x_3 x_2 x_1 + \bar{x}_5 x_4 x_3 x_2 x_1 + x_5 x_4 x_3 x_2 x_1).$$

После минимизации функции по законам алгебры логики получим

$$y_{обн} = [(x_5 + x_2)(x_4 + x_3) + x_5 x_2 + x_4 x_3] x_1. \quad (2.1.21)$$

Из формулы (2) следует, что для реализации рассматриваемой логики обнаружения потребуется 4 схемы И и 4 схемы ИЛИ. Кроме того, как видно из табл. 2.2, для реализации схемы автомата потребуется также 5 элементов памяти (триггеров Т) для записи входной информации на 5 смежных позициях. Структурная схема полученного автомата представлена на рис 2.1.

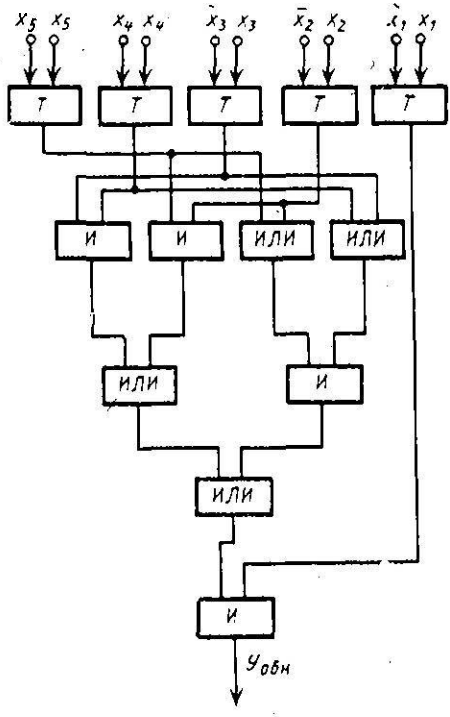


Рис. 2.1. Структурная схема автомата.

2.1.2. Математическая модель конечного автомата

Основной математической моделью конечного цифрового автомата является так называемый абстрактный автомат первого рода $\mathcal{A}^{(1)}$, который задается совокупностью из шести характеристик

$$\mathcal{A}^{(1)} = \{X, Y, A, a_0, F_1, \Phi_1\}, \qquad (2.1.3)$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ — конечное множество входных сигналов (алфавит входных сигналов); $Y = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ — конечное множество (алфавит) выходных сигналов автомата; $A = (a_0, a_1, \ldots a_M)$ — конечное множество внутренних состояний автомата; a_0 — исходное (начальное) состояние автомата, с которого он начинает работу; F_1 — функция переходов, устанавливающая зависимость внутреннего состояния автомата в момент времени $t + 1$ от входного сигнала и внутреннего состояния в момент времени t, т. е.

$$a\,(t+1) = F_1[x\,(t), a(t)] \quad \text{при } t=0,\ a\,(t) = a_0 \qquad (2.1.4)$$

Φ_1 — функция выходов, устанавливающая зависимость выходного сигнала автомата от входного сигнала и внутреннего состояния для одного и то же момента времени t, т. е.

$$y\,(t) = \Phi_1[x\,(t),\ a\,(t)]. \qquad (2.1.5)$$

Здесь и далее t — дискретное время, принимающее целочисленные значения.

Частным случаем автомата первого рода $\mathcal{A}^{(1)}$ является автомат второго рода $\mathcal{A}^{(2)}$, который описывается функцией переходов

$$a\,(t+1) = F_2[\chi\,(0, a(t)]$$

и функцией выходов

$$y\,(t) = \Phi_2(a\,(0)).$$

Задать детерминированный конечный автомат — значит выразить для него в явном виде функции переходов и выходов. Для этого применяются таблицы, графы и матрицы переходов.

Таблица переходов (табл. 2.3) служит для непосредственного задания функции переходов автомата. Строки этой таблицы соответствуют символам алфавита входных сигналов, а столбцы — внутренним состояниям автомата*). В клетку таблицы переходов, находящуюся на пересечении a_i столбца и x_j строки, записывается состояние автомата $F(x_j, a_i)$, в которое он переходит из состояния a_i под воздействием входного сигнала x_j.

*) В рассматриваемом примере алфавит входных сигналов состоит из двух символов x_0 и x_1, а число состояний автомата равно 4.

ражение (2.4) определяет алгоритм нерекурсивного фильтра с двукратным ЧПВ (ЧПВ-2). Для определения коэффициентов этого фильтра составим разностные уравнения:

$$\Delta Z_{cs}[n] = \zeta_{cs}[n] - \zeta_{cs}[n-1],$$
$$\Delta Z_{cs}[n-1] = \zeta_{cs}[n-1] - \zeta_{cs}[n-2].$$
$$Z_{cs}[n] = \Delta Z_{cs}[n] - \Delta Z_{cs}[n-1] = \quad (2.5)$$
$$= \zeta_{cs}[n] - 2\zeta_{cs}[n-1] + \zeta_{cs}[n-2].$$

Следовательно, коэффициенты фильтра равны $h_0 = h_2 = 1$, $h_1 = -2$, $h_i = 0$ при $i > 2$. Структурная схема цифрового фильтра ЧПВ с $\nu = 2$ (для одного квадратурного канала) представлена на рис. 2.2.

Аналогично можно получить коэффициенты фильтра при значениях ν, больших 2. Так, для фильтра ЧПВ с $\nu = 3$ $h_0 = 1$, $h_1 = -3$, $h_2 = 3$, $h_3 = -1$, $h_i = 0$ при $i > 3$, алгоритм фильтрации

$$Z_{cs}[n] = \zeta_{cs}[n] - 3\zeta_{cs}[n-1] + 3\zeta_{cs}[n-2] - \zeta_{cs}[n-3]. \quad (2.6)$$

Нерекурсивные ЦФ просты в реализации, однако имеют пологие скаты амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), что ухудшает эффективность компенсаций пассивных помех.

Кроме нерекурсивных в качестве режекторных ЦФ могут быть использованы рекурсивные РФ, реализующие алгоритм:

$$Z_{cs}[n] = \sum_{i}^{\nu} a_i \zeta_{cs}[n-i] \sum_{j}^{k} b_j Z_{cs}[n-j], \quad (2.7)$$

где a_i и b_j — коэффициенты рекурсивного ЦФ.

Методы синтеза рекурсивных ЦФ рассмотрены в многочисленной литературе (например; [4, 7, 22, 26, 46]). Не вдаваясь в подробности, отметим, что для рекурсивных режекторных ЦФ СДЦ наиболее подходящим считается синтез по квадрату АЧХ в соответствии со следующей методикой [22]. Сначала на основе заданных параметров внешней обстановки и исходных предпосылок выбирается порядок и определяется АЧХ аналогового фильтра-прототипа, а затем приближение квадрата АЧХ цифрового фильтра к квадрату АЧХ аналогового фильтра-прототипа

Большую наглядность обеспечивает задание автоматов с помощью направленных графов. Граф автомата состоит из вершин (изображаемых кружками или точками), соединенных стрелками. Последние называются ребрами графа. Вершины графа отождествляются с состояниями автомата, а стрелки — с входными сигналами. В случае автомата $\mathcal{A}^{(1)}$ на стрелках через дробную черту отмечаются также выходные сигналы.

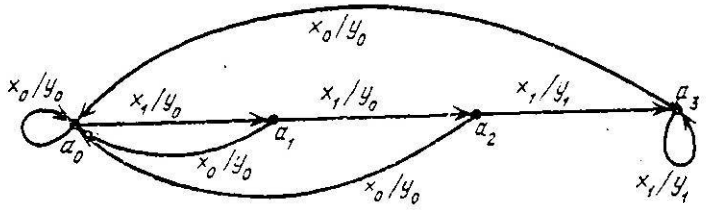


Рис. 2.2. Граф автомата $\mathcal{A}^{(1)}$.

выдаваемые при переходе автомата по указанному входному сигналу. В случае автомата $\mathcal{A}^{(2)}$ выходные сигналы ставятся в вершинах графа. На рис. 2.2 и 2.3 приведены графы автоматов $\mathcal{A}^{(1)}$ и $\mathcal{A}^{(2)}$, заданных табл. 2.5 и 2.6 соответственно.

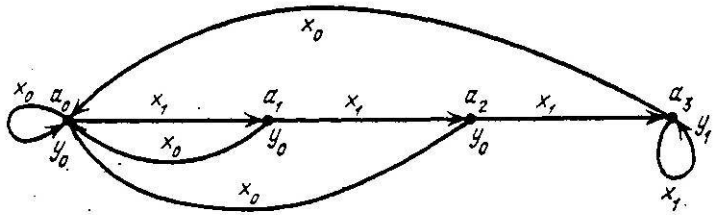


Рис. 2.3. Граф автомата $\mathcal{A}^{(2)}$.

Для аналитического исследования более удобны матрицы переходов конечных автоматов. Матрица переходов автомата $\mathcal{A}^{(1)}$ с $M+1$ состояниями содержит $(M+1) \times (M+1)$ элементов. Элемент строки i и колонки j обозначается μ_{ij} и определяется так:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} x_l/y_k, & l = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}, \text{ если переход } i \to j \text{ существует.} \\ 0, & \text{если переход } i \to j \text{ не существует.} \end{cases}$$

Для автомата, граф переходов которого изображен на рис. 2.2, матрица переходов имеет вид

$$M = \begin{Vmatrix} x_0/y_0 & x_1/y_0 & 0 & 0 \\ x_0/y_0 & 0 & x_1/y_0 & 0 \\ x_0/y_0 & 0 & 0 & x_1/y_1 \\ x_0/y_0 & 0 & 0 & x_1/y_1 \end{Vmatrix}.$$

Для автоматов второго рода матрица переходов строится аналогично рассмотренному выше. В ней под дробной чертой в элементах μ_{ij} ставится выходной сигнал, соответствующий состоянию y_j. Для детерминированных автоматов каждая строка матрицы переходов содержит n элементов, не равных нулю, где n — число символов в алфавите входного сигнала.

Отметим в заключение, что формы задания цифровых автоматов в виде таблиц переходов получили название стандартных форм.

2.1.3. Абстрактный синтез конечных автоматов

Первоначально алгоритм функционирования автомата задается в содержательной (словесной) форме. На этапе абстрактного синтеза осуществляется переход от содержательной формы записи алгоритма функционирования автомата к одной из стандартных форм. Кроме того, на этапе абстрактного синтеза производится минимизация числа внутренних состояний автомата, что эквивалентно минимизации объема его памяти.

Иногда удается сразу по описанию алгоритма построить таблицу переходов или граф автомата. Однако в общем случае для перехода к стандартным формам необходимо сначала перейти к промежуточной, так называемой начальной форме задания автомата. В качестве начальной формы задания автомата выбирают такую, переход к которой от алгоритма, сформулированного описательно, и получение из которой одной из стандартных форм достаточно просто. Одной из известных начальных форм задания автомата является запись алгоритма его функционирования на языке регулярных событий [41. Этот способ позволяет достаточно просто переходить от словесного к строго математическому описанию функционирования автомата и, кроме того, является наиболее удобным при синтезе автоматов для обработки радиолокационной информации.

Ниже приводятся необходимые сведения из алгебры событий.

Пусть задан некоторый конечный алфавит $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Событием S в данном алфавите X называется произвольное множество слов*) в этом алфавите, а сам алфавит $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется входным алфавитом этого события.

Для представления событий, содержащих бесконечное количество слов, конечными выражениями вводят ряд операций над событиями, т. е. строят алгебру событий. В алгебре событий рассматривают три основные операции: дизъюнкцию событий, произведение событий и итерацию событий.

Дизъюнкцией событий $S_1, S_2, \ldots, S_k$ называется событие $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$, состоящее из всех слов, входящих в события $S_1, S_2, \ldots, S_k$, т. е. дизъюнкция объединяет все слова, входящие в события $S_1, S_2, \ldots, S_k$, Например, если событие S_1 содержит слова x_1,

*) Под словом понимается произвольная последовательность букв алфавита.

x_1 x_2, x_2x_1, а событие S_2 содержит слова x_2x_2, x_1x_2, то дизъюнкция этих событий $S_1 \dotplus S_2$ содержит слова x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2.

Пусть события S_1 и S_2 состоят из множества слов $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots)$ и $(x_{21}, x_{22}\, x_{23}, \ldots)$ соответственно. Произведением этих событий называется событие $S = S_1S_2$, состоящее из всех слов вида $x_{11}x_2x_{11}x_{22}$, $x_{11}x_{23}$, ..., $x_{12}x_{21}$, $x_{12}x_{22}$, $x_{12}x_{23}$, ... т. е. из всех слов, полученных приписыванием к каждому слову события S_1 каждого слова события S_2. Необходимо заметить, что произведение событий некоммутативно, т, е. $S_1S_2 \neq S_2S_1$.

Итерацией события S называется событие $\{S\}$, состоящее из пустого слова e и всех слов вида S, SS, 55S и т. д. до бесконечности. Иначе говоря, если событие S состоит из слов l_1, l_2, ..., l_k, то итерация этого события содержит все возможные произведения этих слов, конечные и бесконечные. Итерация события является одноместной операцией, так как она применяется только к одному событию. Для обозначения итерации вводят фигурные скобки, которые в данном случае называются итерационными.

Если задан конечный входной алфавит $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то любое событие, которое можно получить из букв данного алфавита с помощью конечного числа операций дизъюнкции, произведения и итерации, называют регулярным событием, а выражение, составленное с помощью этих операций, — регулярным выражением.

В теории автоматов доказывается, что любой алгоритм переработки информации, который может быть записан в виде регулярного выражения, реализуется конечным автоматом.

Рассмотрим пример абстрактного синтеза автомата, предназначенного для выделения в бинарной последовательности квантованных сигналов групп, начинающихся единицей и заканчивающихся серией из трех нулей. Описательно алгоритм работы синтезируемого автомата формулируется следующим образом. Если на вход автомата (предварительно возвращенного в исходное состояние) после любой серии нулей поступает единица, то автомат переходит в новое состояние и вырабатывает сигнал $y_н$, фиксирующий начало группы. Сигнал $y_н$ должен выдаваться до тех пор, пока на вход автомата не поступит серия из трех нулей. При поступлении этой серии автомат выдает сигнал $y_к$, фиксирующий конец группы.

Составим регулярное выражение, описывающее функционирование автомата. При этом учтем, что множество входных сигналов состоит из двух символов — 0 и I, которые закодируем: $0 - x_0$, $1 - x_1$. Множество выходных сигналов также состоит из двух символов $y_н$ и $y_к$. Событие, состоящее в том, что на вход автомата поступает серия x_0, может быть представлено выражением $S_1 = \{x_0\}$.

Событие, состоящее в том, что после серии нулей на вход автомата поступит x_1, может быть записано в следующем виде $S_2 = \{x_0\}x_1$. Событие, состоящее в том, что на вход автомата поступает последовательность, не содержащая трех нулей подряд, записывается в виде

Это могут быть слова x_1, x_1x_1, ад/., x_1 и т. д., или $x_0x_1\,x_0x_1x_0x_1\ldots$ ЗД и т. д., или $x_0x_0x_1.\,x_0x_0x_1$ и т. д.

Таким образом, событие

$$R_1 = S_2S_3 = \{x_0\}\,x_1\,\{x_1 + x_0x_1 + x_0x_0x_1\}, \qquad (2.1.6)$$

состоящее в том, что после произвольной серии нулей на вход автомата поступает единица, а за ней любая произвольная комбинация нулей

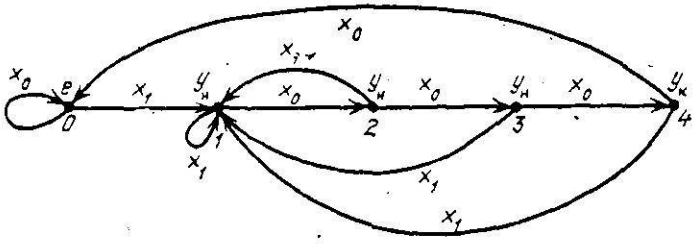


Рис. 2.4. Граф автомата $\mathscr{A}^{(2)}$.

и единиц, не содержащая трех нулей подряд, представлено в автомате выходным сигналом $y_н$.

Событие $R_2 = S_2S_3x_0x_0x_0$, т. е,

$$R_2 = \{x_0\}x_1\{x_1 + x_0x_1 + x_0x_0x_1\}x_0x_0x_0, \qquad (2.1.7)$$

состоящее в том, что после наступления события R_1 поступает три нуля подряд, представлено в автомате выходным сигналом $y_к$.

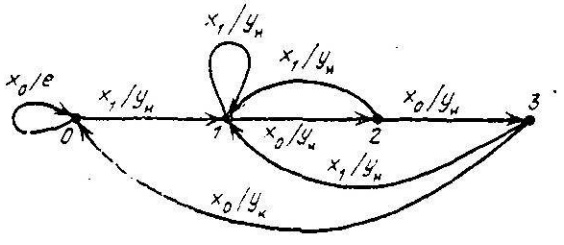


Рис. 2.5. Граф автомата $\mathscr{A}^{(1)}$.

Из сравнения (6) и (7) видно, что регулярное выражение для события R_1 входит в регулярное выражение для события R_2. Следовательно, для описания работы синтезируемого автомата достаточно записать регулярное выражение для события R_2, дополнив его указанием моментов выдачи сигналов $y_н$ и $y_к$. В результате получим регулярное выражение

$$R = \{x_0\}\,x_1|_{y_н}\{x_1 + x_0x_1 + x_0x_0x_1\}\,x_0x_0x_0|_{y_н},$$

описывающее функционирование рассматриваемого автомата в целом,

В специальной литературе [2, 3] опубликованы подробные алгоритмы абстрактного синтеза автоматов по соответствующим регулярным

выражениям. Для примеров, аналогичных рассматриваемому, краткое описание всех этапов составления отмеченной таблицы переходов автомата $\mathcal{A}^{(2)}$, имеется в книге [6]. Здесь только заметим, что для несложных алгоритмов таблицу переходов или граф соответствующего автомата можно построить непосредственно по регулярному выражению, без применения специальных методов синтеза.

Для рассматриваемого алгоритма на рис. 2.4 построен граф автомата второго рода $\mathcal{A}^{(2)}$, а на рис. 2.5 — граф автомата первого рода $\mathcal{A}^{(1)}$. Из сравнения графов следует, что в автомате $\mathcal{A}^{(1)}$ отсутствует состояние 4, так как оно объединяется с состоянием 0. Следовательно, общее число состояний автомата уменьшается на единицу. В дальнейшем будем иметь в виду только автоматы первого рода $\mathcal{A}^{(1)}$.

2.1.4. Композиция (свертка) цифровых автоматов

Совместная работа автоматов задается операцией композиции. В общем случае под композицией понимаются различные способы соединений и виды работы автоматов, такие как последовательное, параллельное и смешанное соединение, одновременная и поочередная работа и т. д. Мы в дальнейшем будем рассматривать только способы соединения цифровых автоматов.

Рассмотрим сначала простейший случай композиции — последовательное соединение двух автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (рис. 2.6). На входе автомата $\mathcal{A}_1$ действует сигнал $x_1(t)$. Автомат $\mathcal{A}_2$ получает на, вход выходные сигналы автомата $\mathcal{A}_1$, т. е.

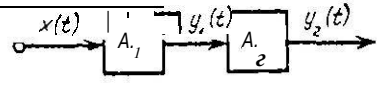


Рис. 2.6. Последовательное соединение двух автоматов.

$$x_2(t) = y_1(t) = \Phi_1[a_1(t),\ x_1(t)].$$

Для нормального функционирования второго автомата необходимо, чтобы алфавит выходных сигналов автомата $\mathcal{A}_1$ совпадал с алфавитом входных сигналов автомата $\mathcal{A}_2$. Сигнал на выходе второго автомата можно записать в виде

$$y_2(0 = \Phi_2\{(a_2(0.\ \Phi_1[a_1(0.\ x_1(t)]\} = \Phi_2[a_1(0.\ a_2(t),\ x_1(t)].$$

Если каждую пару состояний $a_1(t)$ и $a_2(t)$ составляющих автоматов связать с одним состоянием $a(t)$ объединенного автомата, то получим

$$y_2(t) = y(t) = \Phi[a(t),\ x_1(t)],$$
$$a(t+1) = F[a(t),\ x_1(t)].$$

Таким образом, объединенный автомат $\mathcal{A}$ есть конечный автомат. Если автомат $\mathcal{A}_1$ имеет $M_1 + 1$ состояний, а автомат $\mathcal{A}_2$ — $M_2 + 1$, то общее число состояний объединенного автомата $M + 1 = (M_1 + 1) \times (M_2 + 1)$. Каждой паре состояний автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответствует одно состояние автомата $\mathcal{A}$. Состояния объединенного автомата обозначаются $(a_i \leftrightarrow a_j)$.

Обозначим элементы матрицы переходов первого автомата $\mu^{(1)}_{ij}$, а второго — через $\mu^{(2)}_{ij}$. Тогда элементы матрицы переходов автомата $\mathcal{A}$ определяются по правилу

$$\mu_{i\leftrightarrow k,\ j\leftrightarrow l} = \mu^{(1)}_{ij}\,\mu^{(2)}_{kl} \qquad (2.1.8)$$

Умножение элементов матриц переходов производится следующим образом [8]. Пусть (x_1/y_1) — пара вход — выход, соответствующая переходу $\mu^{(1)}_{ij}$, а (x_2/y_2) —

аналогичная пара для перехода $\mu_{kl}^{(2)}$. Тогда

$$\mu_{ij}^{(1)}\mu_{kl}^{(2)} = \begin{cases} x_1/y_2, & y_1 = x_2, \\ 0, & \text{если } y_1 \neq x_2. \end{cases} \qquad (2.1.9)$$

Дополнительные правила умножения элементов матриц устанавливаются на основании законов и равносильностей алгебры логики.

Рассмотрим пример последовательного соединения двух автоматов, предназначенных для обработки стационарной последовательности дискретных сигналов, каждый из которых может принимать только два значения — нуль и единица.

Пусть автомат $\mathscr{A}_1$ предназначен для восстановления одиночных пропусков единиц во входной последовательности сигналов, Матрица переходов этого автомата имеет вид (10)

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 0/0 & I/I \\ 0/1 & 1/1 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.10)$$

Второй автомат $\mathscr{A}_2$ получает на вход выходные сигналы автомата $\mathscr{A}_1$ и предназначен для выделения серий из четырех и более единиц в последовательности этих сигналов.

Матрица переходов автомата $\mathscr{A}_2$ имеет вид (11)

$$M_2 = \begin{Vmatrix} 0/0 & 1/0 & 0 & 0 \\ 0/0 & 0 & 1/0 & 0 \\ 0/0 & 0 & 0 & 1/0 \\ 0/0 & 0 & 0 & 1/1 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.11)$$

Пользуясь правилом (9), образуем матрицу переходов объединенного автомата $\mathscr{A}$, представляющего собой последовательное соединение автоматов $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. Эта матрица имеет вид

$$M = M_1 M_2 = \begin{array}{c|cccccccc} & 0\leftrightarrow0 & 0\leftrightarrow1 & 0\leftrightarrow2 & 0\leftrightarrow3 & 1\leftrightarrow0 & 1\leftrightarrow1 & 1\leftrightarrow2 & 1\leftrightarrow3 \\ \hline 0\leftrightarrow0 & 0/0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/0 & 0 & 0 \\ 0\leftrightarrow1 & 0/0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/0 & 0 \\ 0\leftrightarrow2 & 0/0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/0 \\ 0\leftrightarrow3 & 0/0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/1 \\ 1\leftrightarrow0 & 0 & 0/0 & 0 & 0 & 0 & 1/0 & 0 & 0 \\ 1\leftrightarrow1 & 0 & 0 & 0/0 & 0 & 0 & 0 & 1/0 & 0 \\ 1\leftrightarrow2 & 0 & 0 & 0 & 0/0 & 0 & 0 & 0 & 1/0 \\ 1\leftrightarrow3 & 0 & 0 & 0 & 0/1 & 0 & 0 & 0 & 1/1 \end{array} \qquad (2.1.12)$$

Из матрицы (12) следует, что состояние $1 \leftrightarrow 0$ автомата является не достижимым из любого другого состояния. Следовательно, его можно исключить. При этом исключается также состояние $0 \leftrightarrow$ \, в которое автомат переходит только из состояния $1 \leftrightarrow 0$.

Таким образом, объединенный автомат имеет 6 состояний и функционирует в соответствии с матрицей переходов (13)

$$M = \begin{Vmatrix} 0/0 & 0 & 0 & 1/0 & 0 & 0 \\ 0/0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/0 \\ 0/0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/1 \\ 0 & 0/0 & 0 & 0 & 1/0 & 0 \\ 0 & 0 & 0/0 & 0 & 0 & 1/0 \\ 0 & 0 & 0/1 & 0 & 0 & 1/1 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.13)$$

•рассмотрим теперь пример более сложной последовательно-параллельной композиции автоматов, в соответствии со схемой соединения, приведенной на рис. 2.7.

Пусть автомат $\mathscr{A}_1$ выдает сигнал (единицу), если во входной последовательности квантованных сигналов (нулей и единиц) появляется (обнаруживается) серия из двух единиц или условленная комбинация из двух единиц на трех смежных позициях (11 или 101). Автомат $\mathscr{A}_2$ предназначен для фиксации во входной последовательности квантованных сигналов серий из двух нулей.

Выходные сигналы автоматов $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ поступают на вход третьего автомата $\mathscr{A}_3$, предназначенного для счета тактов от момента срабатывания автомата $\mathscr{A}_1$ до момента сброса накопленной информации при появлении серии из двух нулей. При сбросе автомат $\mathscr{A}_3$ выдает в двоичном коде число тактов между срабатываниями автоматом $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. В качестве автомата $\mathscr{A}_3$ в дальнейшем выбирается двухразрядный двоичный счетчик.

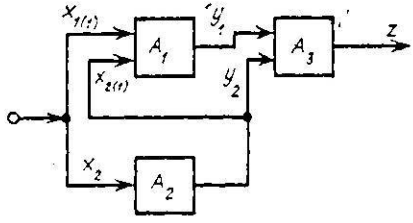


Рис. 2.7. Последовательно-параллельная композиция автоматов.

Образуем сначала свертку автоматов $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$, соединение которых является смешанным (последовательно-параллельным).

В соответствии с алгоритмом работы автомата $\mathscr{A}_1$ и с учетом воздействия на его входах сигналов $x_{1(1)}$ и $x_{2(1)} = y_2$ (алфавит этих сигналов одинаковый и содержит только две буквы — 0 и 1) матрица его переходов имеет вид

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 01/0 + 00/0 & 0 & 10/0 & 0 \\ 01/0 + 00/0 & 0 & 0 & 10/1 \\ 0 & 01/0 + 00/0 & 0 & 10/0 \\ 01/0 & 0 & 0 & 10/1 + 00/1 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.14)$$

В матрице (14) входные сигналы обозначены двумя символами, первый (левый) из которых соответствует сигналу $x_{1(1)}$, а второй (правый) — сигналу $x_{2(1)}$. Алфавит входных сигналов автомата теперь содержит четыре буквы — 00, 01, 10, 11. Из них буква 11 является запрещенной, так как, исходя из логики работы автомата $\mathscr{A}_2$, сигнал единица на его выходе не может появиться одновременно с получением единицы во входной последовательности обрабатываемых сигналов.

Матрица переходов автомата $\mathscr{A}_2$ записывается в виде

$$M_2 = \begin{Vmatrix} 0/1 & 1/0 \\ 0/0 & 1/0 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.15)$$

Элементы $\mu_{i \leftrightarrow k,\ j \leftrightarrow l}$ матрицы переходов для последовательно-параллельного соединения автоматов образуются по правилу

$$\mu_{i \leftrightarrow k,\ j \leftrightarrow l} = \begin{cases} x_{1(1)}(ij)/y_1(ij)\,y_2(kl) & \text{при} \quad 1)\ x_{2(1)}(ij) = y(kl), \\ & 2)\ x_{1(1)}(ij) = x_2(kl); \\ 0 & \text{При}\ 1)\ x_{2(1)}(ij) \neq y_2(kl), \text{ или} \\ & 2)\ x_{1(1)}(ij) \neq x_2(kl) \end{cases}$$

Для рассматриваемой композиции автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$; матрица переходов имеет вид

$$M_2' = M_1 M_2 = \begin{Vmatrix} 0/01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/00 & 0 & 0 \\ 0/00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/00 & 0 & 0 \\ 0/01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0/00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0/01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0/00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0/01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/10 & 1/10 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.16)$$

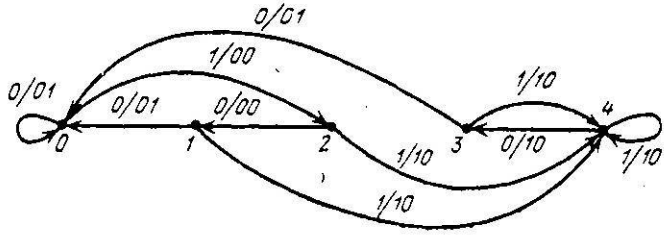


Рис. 2.8. Граф автомата, полученного в результате последовательного соединения двух автоматов.

В этой матрице состояния $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow 1$, и $2 \leftrightarrow 0$ являются недостижимыми. Вычеркивая эти состояния и производя преобразования, получим окончательно матрицу

$$M_2'' = \begin{Vmatrix} 0/01 & 0 & 1/00 & 0 & 0 \\ 0/01 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0/00 & 0 & 0 & 1/00 \\ 0/01 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0/10 & 1/10 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.17)$$

В соответствии с матрицей (17) на рис. 2.8 изображен граф автомата $\mathcal{A}_2''$, полученного в результате свертки автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. По графу легко проследить функционирование этого автомата.

Рассмотрим теперь последовательное соединение автоматов $\mathcal{A}_2''$ и $\mathcal{A}_3$.

В качестве автомата $\mathcal{A}_3$ мы условились для простоты взять двухразрядный счетчик, на выходе которого можно получить сигналы, соответствующие накоплению 0, 1, 2 и 3 единиц.

Матрица переходов автомата $\mathcal{A}_3$ (двухразрядного счетчика) имеет вид

$$M = \begin{Vmatrix} 00/0\,(00) & 10/0\,(00) & 0 & 0 \\ 00/1\,(01) + 01/1\,(01) & 0 & 10/0(00) & 0 \\ 00/1\,(10) + 01/1\,(10) & 0 & 0 & 10/0(00) \\ 00/1\,(11) + 01/1\,(11) + 10/1\,(11) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.18)$$

В этой матрице входные сигналы также помечены двумя символами, в соответствии с алфавитом выходных сигналов автомата $\mathcal{A}_2''$. При наличии сигнала 00 на выходе автомата $\mathcal{A}_2''$ счетчик сбрасывается в нуль. Последнее условие срабатывания

автомата $\mathscr{A}_3$ являются дополнительным и устанавливается исходя из требуемой последовательности работы схемы.

Выходные сигналы счетчика также имеют двойную нумерацию. Первый представляет собой сигнал обнаружения (единица) или. необнаружения (нуль) заданной комбинации нулей и единиц на входе автомата $\mathscr{A}_3$, а второй (в скобках)—число в двоичном коде, снимаемое со счетчика в момент сброса накопленной информации.

Порядок составления матрицы переходов при последовательной композиции двух автоматов рассматривался выше. Здесь мы опустим громоздкие промежуточные операции и приведем только в окончательном виде граф полученного объединенного автомата, представляющего собой последовательно-параллельную композицию из трех рассмотренных автоматов (рис. 2.9).

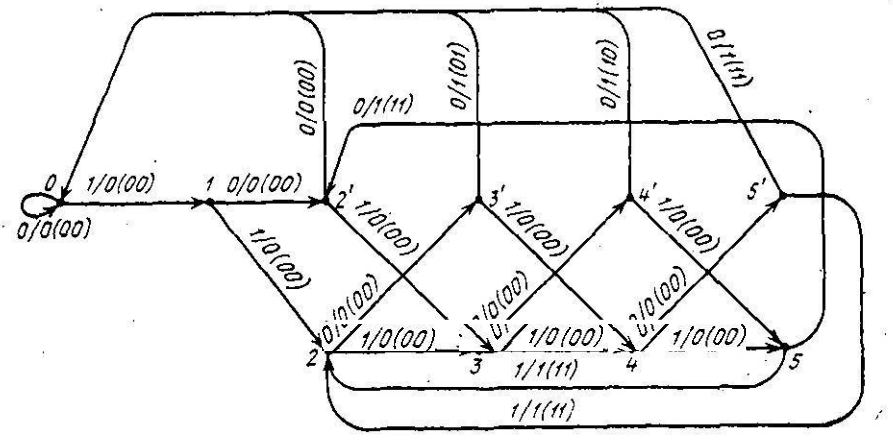


Рис. 2.9. Граф объединенного автомата.

Рассмотренные примеры композиции автоматов охватывают практически все случаи, встречающиеся при синтезе специализированных устройств цифровой обработки радиолокационной информации.

В дальнейшем в книге этапы синтеза и композиции автоматов будут опускаться.

2.1.5. Модель конечного автомата со случайными переходами

До сих пор рассматривались конечные автоматы, для которых задание входного сигнала (входного слова) x_t и состояния $a\,(t-1)$ однозначно определяет выходной сигнал (выходное слово) y_t и новое состояние $a\,(t)$. Такие автоматы называются детерминированными.

Наряду с детерминированными в приложениях находят применение конечные автоматы, в которых переходы из состояния в состояние являются случайными. Такие автоматы называются автоматами со случайными переходами. В автомате со случайными переходами задание входного сигнала и состояния определяет лишь вероятности $\pi_{ij}(x)$ перехода из состояния a_i в состояние a_j под воздействием входного сигнала x_t. Очевидно, детерминированный автомат является частным случаем автомата со случайными переходами, так как в нем.

вероятность одного определенного перехода равна единице, а остальных — нулю.

В общем случае конечный автомат со случайными переходами $\mathcal{A}_c$ задается следующей шестеркой характеристик

$$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c\{X,\ У,\ A,\ a_0,\ \Pi(x_t)\Phi\ [a\ (t),\ x_t]\}, \qquad (2.1.19)$$

где X и $У$ — непустые конечные множества входных и выходных сигналов автомата, элементы которых обозначаются через x_t и y_t соответственно; A — непустое конечное множество физических состояний автомата; a_0 — начальное состояние автомата; $\Pi\ (x_t)$ — множество квадратных матриц порядка $(M + 1)$ X $(M + 1)$, где $M + 1$ число состояний автомата, определяющее вероятностный закон изменения состояний автомата под воздействием входного сигнала x_t (элементы $\pi_{ij}(x_t)$ этой матрицы определяют вероятность того, что в результате воздействия сигнала x_t на входе автомат, находящийся в состоянии a_i в момент времени $t - 1$, перейдет в состояние a_j в момент времени t); $\Phi\ [a\ (t),\ x_t]$ — неслучайная функция выходов автомата, представляющая собой отображение множества пар состояний автомата и входных сигналов на множество выходных сигналов У.

Таким образом, автомат со случайными переходами отличается от детерминированного автомата тем, что вместо детерминированной функции переходов его функционирование определяется множеством матриц переходных вероятностей.

В теории синтеза устройств и алгоритмов цифровой обработки радиолокационной информации особое место занимает конечный автомат с неизменной структурой, на вход которого поступает последовательность случайных сигналов, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями q и p соответственно $(p + q = 1)$. Переходы автомата из одного внутреннего состояния в другое носят в этом случае вероятностный характер, так как они определяются случайными воздействиями «внешней среды». Следовательно, систему «среда — автомат» можно рассматривать как некоторую вероятностную систему, функционирование которой аналогично функционированию автомата со случайными переходами.

В дальнейшем под автоматами со случайными переходами понимается именно рассмотренная система «случайный входной сигнал + детерминированный одновходовый автомат». Функционирование такого автомата полностью определяется с помощью единственной матрицы переходных вероятностей. Для определенности считается, что первая строка (как и первый столбец) матрицы переходных вероятностей соответствует начальному состоянию автомата. Выходные сигналы в матрице переходных вероятностей не отмечаются (отождествляется с состояниями).

Если вероятности q и p не изменяются во времени, т. е. от такта к такту работы автомата, то автомат со случайными переходами называется однородным. Например, матрица переходных вероятностей однородного автомата со случайными переходами, эквивалентного

детерминированному автомату, синтезированному в п. 2.1.3 (граф на рис. 2.5), имеет вид

$$\Pi = \begin{Vmatrix} Я & P & 0 & 0 \\ 0 & P & q & 0 \\ 0 & P & 0 & я \\ Я & P & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.20)$$

По матрице переходных вероятностей для одновходового автомата со случайными переходами обычным образом может быть построен граф, дуги которого отмечаются вероятностями переходов между соответствующими состояниями.

Можно показать, что матрицы переходных вероятностей обладают следующими свойствами:

а) элементы матрицы представляют собой неотрицательные вещественные числа, т. е. $\pi_{ij}(x_t) > 0$;

б) сумма элементов любой из ее строк равна единице, т. е.

$$\sum_{j=0}^{M}$$

в) в матрице не имеется столбцов, состоящих из одних нулей, что соответствует отсутствию в автомате состояний, вероятность перехода в которые равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=0}^{M} \pi_{ij}(x_t) > 0.$$

Такие матрицы называются стохатическими. Известно, что стохастическими матрицами описывается в теории вероятностей широкий класс случайных последовательностей, называемых простыми цепями Маркова. Это позволяет анализировать автоматы со случайными переходами с помощью аппарата цепей Маркова [7, 91.

Для более полной аналогии с марковскими цепями необходимо рассматривать не просто автоматы со случайными переходами, а так называемые случайные (стохастические) автоматы, у которых случайна не только функция переходов, но и выбор начального состояния. В дальнейшем такая аналогия позволит описывать функционирование автоматов под воздействием как стационарных, так и нестационарных последовательностей сигналов.

Возможностьописания функционирования автомата с помощью математического аппарата цепей Маркова не ограничивается только рассмотренным случаем одновходового автомата и двоичного квантования сигналов. Известно, что автомат с многими входами путем эквивалентного преобразования может быть сведен к автомату с одним входом при соответствующем расширении множества входных сигналов. К полученному таким образом эквивалентному автомату применимы рассмотренные выше методы анализа.

2.2. Абстрактные схемы алгоритмов

Для реализации основных процессов переработки информации в радиолокационной системе используются программные автоматы, каковыми являются в частности цифровые вычислительные машины (ЦВМ). Особенностью ЦВМ является ее алгоритмическая универсальность, т. е. способность реализовать любые алгоритмы. Алгоритмическая универсальность ЦВМ обеспечивается необходимым набором операций и особым принципом организации управления в процессе их выполнения.

Абстрагируясь от физической реализации, ЦВМ можно представить как некоторый дискретный преобразователь информации, оперирующий с входными сигналами, которые представлены в виде слов в конечном алфавите, и выдающий информацию также в виде слов в некотором выходном алфавите, в общем случае, отличном от входного. Процесс преобразования информации сводится к установлению однозначного соответствия между словами входного и выходного алфавитов. Всякая функция, сопоставляющая слова выходного алфавита словам входного алфавита, называется алфавитным оператором или алфавитным отображением [4].

Все конкретные алфавитные операторы могут быть заданы с помощью правил, позволяющих *за* конечное *число шагов* установить выходное слово, соответствующее любому наперед заданному входному слову из области определения алфавитного оператора. Алафавитные операторы, задаваемые с помощью конечной системы правил, принято называть алгоритмами.

В современной математике понятие алгоритма трактуется несколько шире, а именно, как реализация вычисления значений какой-либо функции, заданной в виде формулы или в любом другом виде. До сих пор мы пользовались понятием алгоритма именно в этом смысле. Определение установленное в абстрактной теории алгоритмов не противоречит общепринятому. Разница состоит только в том, что в абстрактной теории заведомо имеется в виду алгоритм переработки дискретной информации, представленной в некотором конечном алфавите. Этим подчеркивается принципиальная особенность реализации алгоритмов на ЦВМ.

Алгоритмам присущи следующие общие свойства:

1) детерминированность, состоящая в том, что метод действия (вычислений) задается настолько точно и общепринято, что не остается места произволу;

2) массовость, состоящая в том, что алгоритм служит не для решения какой-либо одной конкретной задачи, а для решения целого класса задач;

3) результативность, состоящая в том, что алгоритмическая процедура должна остановиться через конечное число шагов, после чего можно получить результат.

Способы представления и преобразования алгоритмов в самом общем виде рассматриваются в абстрактной теории алгоритмов. Эта теория получила широкое развитие в трудах советских ученых, о чем свиде-

тельствует большое число публикаций в периодической печати и монографиях [1, 4, 10, 11].

В данном параграфе излагаются элементарные вопросы абстрактной теории алгоритмов, которые будут использоваться в дальнейшем.

2.2.1 Способы задания алгоритмов

В абстрактной теории алгоритмов разрабатываются некоторые общие способы задания алгоритмов, обладающие свойством универсальности. При этом доказывается, что всякие общие способы задания алгоритмов включают в себя объекты двоякой природы, одни из которых называются операторами счета, а другие — логическими операторами или распознавателями. Элементарные операторы счета обозначаются $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots$ и представляют собой достаточно простые алфавитные операторы, с помощью последовательного выполнения которых осуществляется переработка информации. Распознаватели, обозначаемые в дальнейшем через $P_1, P_2, \ldots, P_i$, служат для распознавания тех или иных свойств перерабатываемой алгоритмом информации и для изменения, в зависимости от результатов распознавания, порядка следования элементарных операторов счета.

Одним из наиболее известных способов задания алгоритмов являются блок-схемы или формульно-логические схемы алгоритмов. На блок-схеме алгоритма каждый элементарный оператор и распознаватель представляются в виде геометрических фигур (прямоугольников, ромбов, кружков и т. д.). Эти фигуры соединяются между собой стрелками в соответствии с заданным в алгоритме порядком следования элементарных операторов счета и распознавателей. Внутри фигур записываются названия или содержание операций. Иногда внутри фигур записываются формулы выполняемых операций и проверяемые логические условия. Тогда говорят, что схема алгоритма является формульно-логической.

Кроме блок-схемы, алгоритм может быть задан операторной схемой. Операторной схемой алгоритма называется выражение, составленное из элементарных операторов счета, распознавателей (логических операторов) и указателей последовательности их выполнения. Кроме того, в операторную схему входят особые операторы пуска A_0 и останова $A_к$. Например, из операторов A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 и распознавателей P_1, P_2, P_3 и P_4 можно составить следующую операторную схему

$$A_0 \downarrow^{3} A_1 P_1 \uparrow^{1} A_2 P_2 \uparrow^{2} \downarrow P_3 \uparrow^{3} A_3 \downarrow^{2} A_4 P_4 \uparrow^{4} A_5 \downarrow^{4} A_к. \qquad (2.2.1)$$

В этой схеме знак $\uparrow$ означает начало стрелки, а знак $\downarrow$ ее конец. Одинаковыми номерами отмечаются начало и конец одной и той же стрелки. Работа алгоритма начинается со срабатывания оператора пуска. Порядок работы других блоков операторной схемы следующий: если последний сработавший блок был оператором счета, то следующим работает очередной по порядку блок, если же последний сработавший блок был распознавателем, то возможны два случая.

В случае выполнения проверяемого условия работает соседний справа блок. Если это условие не выполнено, то следующим должен работать блок, к которому ведет стрелка, начинающаяся после данного распознавателя. Работа алгоритма прекращается тогда, когда последний из сработавших блоков содержит указание о переходе к оператору останова $A_к$.

Для операторных схем сложных алгоритмов часто используется несколько отличный от описанного способ обозначения последовательности срабатывания блоков, или, как принято говорить, способ передачи управления от блока к блоку.

Передача управления от операторов счета к оператору, не стоящему рядом, обозначается приписыванием к символу оператора справа вверху номера того оператора, которому передается управление. Например, запись A_1^3 означает, что от оператора A_1 управление передается оператору 3. Факт передачи управления данному оператору обозначается номером того оператора, от которого передается управление, записываемым слева вверху от символа данного оператора. Например, запись ${}^5A_2$ означает, что оператору A_2 управление передается от оператора 5.

Для изображения передачи управления от логических операторов используются стрелки с номерами тех операторов, которым передается управление. Стрелка, поставленная справа вверху от символа логического оператора обозначает передачу управления в случае, когда условие, проверяемое данным логическим оператором выполнено, а управление должно быть передано не рядом стоящему блоку (оператору). Стрелка, поставленная справа внизу от символа логического оператора, обозначает передачу управления в случае, когда условие, проверяемое данным логическим оператором, оказывается невыполненным. Например, запись $P_{\downarrow 4}^{\uparrow 3}$ означает, что от логического оператора P_1 управление следует передать оператору 3, если условие проверяемое P_1, выполнено, или оператору 4, если это условие не выполнено.

В новых обозначениях операторная схема (1) записывается в виде

$$A_0 \quad {}^6A_1 P_{2\downarrow 5} A_3 P_{4\downarrow 7} \quad {}^2P_{5\downarrow 1} A_6 \quad {}^4A_7 P_{8\downarrow к} A_9 \quad {}^8A_к. \qquad (2.2.2)$$

Высокая степень абстракции достигается при задании алгоритмов с помощью матриц и направленных графов особого рода, которые называются граф-схемами алгоритмов.

Матричная схема алгоритма имеет вид

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_к \\ A_0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \dots & \alpha_{0n} & \alpha \\ A_1 & \alpha & \alpha_{12} & \dots & & \alpha_{1к}^{0к} \\ A_2 & \alpha_{21}^{11} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \alpha_{2к} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & \alpha_{nк} \end{array} \qquad (2.2.3)$$

где $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(P_1, P_2, \dots P_l)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2 \dots n, n+1$ — логические функции, удовлетворяющие следующему условию:

если после выполнения оператора A_i функция α_{ij} при некотором наборе логических переменных $P_1, P_2 \ldots P_l$, принимающих значения $P_l = 1$ или $\overline{P}_l = 0$, равна единице, то следующим должен выполняться оператор A_j. Возможно, что некоторые функции $\alpha_{ij} = 1$, тогда непосредственно за оператором A_i должен выполняться оператор A_j. С другой стороны, некоторые из α_{ij} могут быть тождественно равны нулю $(\alpha_{ij} = 0)$. Последнее означает, что при работе алгоритма, описываемого данной матричной схемой, непосредственно после оператора A_i невозможно выполнение оператора A_j ни при каком наборе значений логических переменных.

Для алгоритма, операторная схема которого записана выражением (1), матричная схема имеет вид

$$\Delta = \begin{array}{c|cccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_к \\ A_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & \overline{P}_1\overline{P}_2 & P_1 & \overline{P}_1 P_3 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & \overline{P}_2\overline{P}_3 & 0 & P_2 P_3 & \overline{P}_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 & \overline{P}_4 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}. \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

Пусть запись $A_i \rightarrow A_j$ означает, что после выполнения оператора A_i следует выполнять оператор A_j. В операторной схеме алгоритма этой записи соответствует непосредственное следование оператора A_j за оператором A_i, т. е. $A_i A_j$, а в матричной схеме $\alpha_{ij} = 1$. Запись

$$A_i \rightarrow \alpha_{i1}A_1 + \alpha_{i2}A_2 + \ldots + \alpha_{in}A_n. \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

означает, что после выполнения оператора A_i следует выполнять тот оператор, у которого функция α_{ij}, стоящая непосредственно слева от оператора A_j в выражении (5), равна единице. Другие функции α_{il}, $l \neq j$, будут при этом равны нулю.

Выражение (5) называется формулой перехода для оператора A_i. Такие формулы легко могут быть составлены для всех операторов счета алгоритма, заданного матричной схемой. Для этого необходимо:

а) каждый оператор A_j ($j = 1, 2, \ldots,$ л, $n + 1$) умножить на логическую функцию, которой он подчинен после оператора A_i;

б) все произведения $\alpha_{ij}A_j$, полученные из элементов i-й строки и соответствующих операторов, соединить знаком дизъюнкции.

Так, из матричной схемы (4) получаем следующую систему формул перехода

$$\begin{aligned} &A_0 \rightarrow A_1, \\ &A_1 \rightarrow \overline{P}_1\overline{P}_2 A_1 + P_1 A_2 + \overline{P}_1 P_3 A_3, \\ &A_2 \rightarrow \overline{P}_2\overline{P}_3 A_1 + P_2 P_3 A_3 + \overline{P}_2 A_4, \\ &A_3 \rightarrow A_4, \\ &A_4 \rightarrow P_4 A_5 + \overline{P}_4 A_к, \\ &A_5 \rightarrow A_к. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

Другим способом формального описания алгоритмов является представление их в виде граф-схем. Граф-схема алгоритма есть конечный ориентированный граф, удовлетворяющий следующим условиям:

а) в каждом графе есть два отмеченных узла: входной (соответствующий оператору пуска), из которого выходит только одна стрелка, и выходной (соответствующий оператору останова), из которого не выходит ни одной стрелки;

б) из каждого узла, отличного от входного или выходного, выходит либо одна стрелка (А-узел), либо две (Р-узел); стрелки, выходящие из Р-узлов, отмечаются знаками + и — или цифрами 1 и 0;

в) каждому А-узлу однозначно сопоставлен оператор преобразования информации A_i, а каждому Р-узлу — логический оператор P_i. В граф-схемах алгоритмов А-узлы, а также входной и выходной узлы условно изображаются прямоугольниками, а Р-узлы — кружками.

Построение граф-схемы алгоритма, равносильной (т. е. с той же последовательностью операторов) заданной матричной схеме, производится следующим образом:

1) сначала строятся частные графы (подграфы), равносильные формулам перехода данной матричной схемы;

2) затем производится операция объединения равносильных ветвей подграфов;

3) наконец, производится операция объединения одинаковых операторов и окончательное оформление граф-схемы.

Чтобы получить граф-схему с минимальным или близким к нему числом Р-узлов, необходимо по заданным формулам перехода построить подграфы также с минимальным или близким к нему числом таких узлов. Число Р-узлов можно уменьшить путем объединения однаковых ветвей составляющих подграфов.

Методику построения и преобразования граф-схем алгоритмов проиллюстрируем на конкретном примере, взяв в качестве исходной матричную схему алгоритма (4). Исходными для построения граф-схемы являются формулы перехода (6). По этим формулам сначала должны быть построены подграфы для каждого из операторов $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_5$.

Построение подграфа начинается с приведения формулы перехода к скобочной форме, содержащей разложение соответствующей логической функции по каждой из входящих в нее переменных. Например, формула перехода

$$A_1 \to \overline{P_1}\, P_3 A_1 + P_1 A_2 + \overline{P_1}\, P_3 A_3$$

после приведения записывается в виде

$$A_1 \to P_1 A_2 + \overline{P_1}\,(P_3 A_3 + \overline{P_3}\, A_1).$$

Аналогично формула перехода для A_2 после приведения имеет вид

$$A_2 \to P_2\,(P_3 A_3 + \overline{P_4} A_1) + \overline{P_2} A_j.$$

Другие формулы перехода в выражении (6) приведения не требуют. Теперь уже легко построить подграфы каждой операции. Эти подграфы изображены на рис. 2.10.

Следующим этапом является поиск и объединение равносильных ветвей. В нашем случае равносильными являются ветви подграфов *б* и *в,* начинающиеся с оператора P_3 и обведенные пунктирной линией. После объединения равносильных ветвей получим подграф, изображенный на рис. 2.11. Других эквивалентных ветвей в рассматриваемом алгоритме нет.

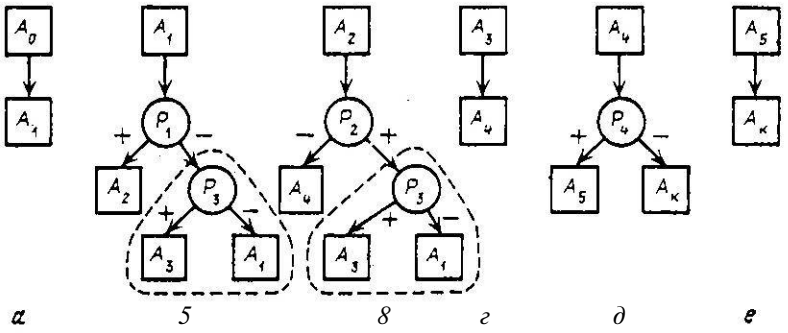


Рис. 2.10. Подграфы операций алгоритма.

Наконец, производится объединение одинаковых операторов счета и получение окончательной граф-схемы алгоритма эквивалентного заданной матричной схеме. В окончательном виде граф-схема рассматриваемого алгоритма приведена на рис. 2.12.

Таким образом, рассмотренный способ построения граф-схем алгоритмов по заданной матричной схеме позволяет производить минимизацию числа логических операторов алгоритма и тем самым способствует его упрощению. Этап минимизации числа операторов является необходимым этапом подготовки алгоритма к машинной реализации. В дальнейшем будем считать, что при синтезе алгоритмов обработки радиолокационной информации приняты все меры к минимизации его структуры.

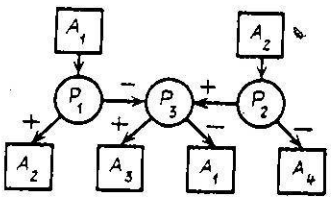


Рис. 2.11. Объединенный подграф равносильных ветвей б и в.

При анализе свойств и качественных характеристик алгоритмов, представленных граф-схемами, целесообразно дальнейшее преобразование последних с целью объединения операторов счета с логическими операторами (попарно или несколько операторов счета с одним логическим оператором) в узлы, которые предназначены для реализации более или менее крупных частей алгоритма. Из каждого такого объединенного узла будет выходить две стрелки. Стрелка обозначается знаком «+» или «1», если в результате выполнения операции узла проверяемое условие выполняется, и знаком «—» или «0», если это условие не выполняется.

Например, для алгоритма, граф-схема которого приведена на рис. 2.12, можно произвести следующее объединение операторов в блоки (входной и выходной узлы ни с чем не объединяются):

$$a_1 \sim A_1P_1,\ a_2 \sim A_2P_2,\ a_3 \sim P_3,\ a_4 \sim A_4P_4,\ a_5 \sim A_3A_4P_4,\ a_6 \sim A_5.$$

Получаемая при этом преобразованная граф-схема алгоритма изображена на рис. 2.13.

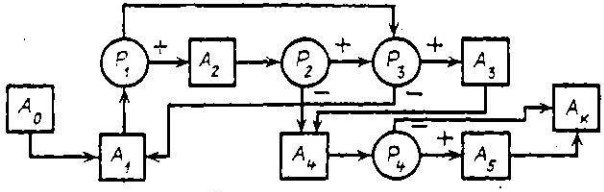


Рис. 2.12. Граф-схема алгоритма.

Сравнение преобразованной граф-схемы алгоритма с рассмотренными ранее графами конечных автоматов показывает их полную аналогию. Эта аналогия Позволяет в дальнейшем подходить к исследованию алгоритмов, реализуемых с помощью конечных автоматов и ал-

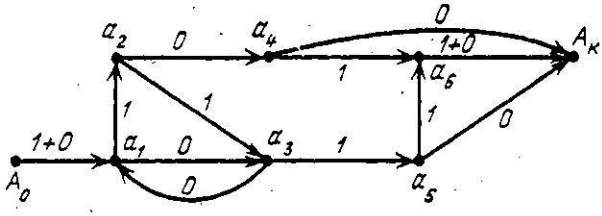


Рис. 2.13. Преобразованная граф-схема алгоритма.

горитмов, реализуемых на универсальных программных автоматах (ЦВМ) с единой точки зрения и с помощью одного и того же математического аппарата.

2.2.2. *Композиция алгоритмов*

Как и ранее, под композицией алгоритмов понимаются различные способы соединения алгоритмов с целью обеспечения их совместной работы. При этом, естественно, решаются задачи минимизации числа операторов объединенного алгоритма.

Одним из наиболее распространенных видов композиции алгоритмов является их суперпозиция. При суперпозиции двух алгоритмов А и В выходное слово первого алгоритма А рассматривается как входное слово второго алгоритма В, так что результат суперпозиции (алгоритм Д) можно представить в виде Д = В (А). Это определение, естественно, распространяется на случай суперпозиции какого угодно конеч-

ного числа алгоритмов. Для получения граф-схемы объединенного алгоритма достаточно в этом случае выходной узел каждого предыдущего алгоритма совместить с входным узлом последующего алгоритма.

Другими возможными методами композиции алгоритмов являются их объединение, разветвление, повторение (итерация) и т. д. Мы в дальнейшем рассмотрим простейший случай объединения двух алгоритмов, заданных матричными схемами.

Итак, пусть решается задача объединения двух алгоритмов. В качестве первого составляющего алгоритма возьмем алгоритм, рассматриваемый в предыдущем пункте и заданный матрицей (4). Матричная схема второго составляющего алгоритма имеет вид

$$A_2 = \begin{array}{c|cccccc} & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_к \\ A_0 & P_5 & \bar{P}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & \bar{P}_1 & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & \bar{P}_5 P_3 & \bar{P}_5 \bar{P}_3 & P_5 \\ A_6 & 0 & 0 & 0 & P_3 & \bar{P}_3 & 0 \end{array}. \qquad (2.2.7)$$

В каждом из объединяемых алгоритмов порядок следования операторов счета, после проверки одних и тех же логических условий, как правило, различный. Например, в рассматриваемом случае при выполнении условий логического оператора P_1 в первом алгоритме выполняется оператор A_2, а во втором — оператор A_4. Поэтому в объединенный алгоритм должны быть введены дополнительные логические переменные, определяющие принадлежность оператора счета к тому или иному алгоритму. Число к дополнительных переменных связано с числом N объединяемых алгоритмов соотношением $2^k \geqslant N$. В нашем случае достаточно ввести одну новую логическую переменную π и положить, что для операторов счета алгоритма $\mathcal{A}_1$ эта переменная принимает значение 1(+), а для операторов алгоритма $\mathcal{A}_2$ — значение 0 (—).

Итак положим:

— для операторов алгоритма $\mathcal{A}_1$ — $A_0^{(1)}A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$, $A_4^{(1)}A_5^{(1)}$ — Дополнительная переменная — $\pi = 1$;

— для операторов алгоритма $\mathcal{A}_2$ — $A_0^{(2)}$, $A_2^{(2)}, A_3^{(2)}$, $A_4^{(2)}$, $A_5^{(2)}$ — дополнительная переменная $\pi = 0$:

Для операторов A_1 и A_6, каждый из которых входит только в один из алгоритмов переменная л исключается.

В процессе решения поставленной задачи прежде всего составляется матрица объединенного алгоритма. Элемент α_{ij} этой матрицы образуется как дизъюнкция элементов α_{ij} матриц составляющих алгоритмов, умноженных на соответствующие значения дополнительной переменной (в общем случае, на соответствующие комбинации дополнительных переменных).

Составленная по этому правилу матричная схема объединенного алгоритма, составляющими которого являются алгоритмы, представленные матричными схемами (4) и (7), имеет вид

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_к \\ A_0 & \pi & \bar{\pi}P_5 & \bar{\pi}\bar{P}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & P_1 P_2 & P_1 & \bar{P}_1 P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & \pi P_2 P_3 & 0 & \pi P_2 P_3 + \bar{\pi} & \pi \bar{P}_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & \bar{\pi}\bar{P}_1 & \pi + \bar{\pi}P_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi P_4 & \bar{\pi} & \pi \bar{P}_4 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\pi}\bar{P}_5 P_3 & \bar{\pi}\bar{P}_5 \bar{P}_3 & \pi + \bar{\pi}P_5 \\ A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & \bar{P}_3 & 0 \end{array} \quad \textbf{(2.2.8)}$$

От матрицы (8) можно далее перейти к граф-схеме, используя для этого способ, описанный в предыдущем пункте.

Приведенные формулы перехода для рассматриваемого объединенного алгоритма имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &\to \pi A_1 + \bar{\pi}(P_5 A_2 + \bar{P}_5 A_3), \\ A_1 &\to P_1 A_2 + \bar{P}_1 (P_3 A_3 + \bar{P}_3 A_1), \\ A_2 &\to \pi [P_2 (P_3 A_3 + \bar{P}_3 A_1) + \bar{P}_2 A_4] + \bar{\pi} A_3, \\ A_3 &\to \pi A_4 + \bar{\pi}(P_1 A_4 + \bar{P}_1 A_3), \\ A_4 &\to \pi (P_4 A_5 + \bar{P}_4 A_к) + \bar{\pi} A_6, \\ A_5 &\to \pi A_к + \bar{\pi} [P_5 A_к + \bar{P}_5 (P_3 A_5 + \bar{P}_3 A_6)], \\ A_6 &\to P_3 A_5 + \bar{P}_3 A_6. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

По этим формулам далее строятся подграфы операций. Объединяя затем равносильные ветви и совмещая операторы счета, получим граф-схему объединенного алгоритма. Построение этой схемы предлагается читателям при самостоятельной работе с материалом.

В рассматриваемом примере объединения алгоритмов мы не учитывали способ изменения значений дополнительной переменной и, следовательно, порядок выполнения составляющих алгоритмов. Учесть это можно путем введения дополнительного управляющего алгоритма, который обычно называется алгоритмом-диспетчером. Диспетчеризация выполнения алгоритмов в современных управляющих ЦВМ находит широкое применение [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А. Логика. Автоматы. Алгоритмы. М., Физматгиз, 1963.

2. Вавилов Е. Н., Портной Г. П. Синтез схем электронных цифровых машин. М., «Сов. радио», 1963.

3. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., Физматгиз, 1962.

4. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев. Изд-во АН УССР, 1964.
5. Колин К. К., Липаев В. В. Проектирование алгоритмов управляющих ЦВМ. М., «Сов. радио», 1970.
6. Кузьмин С. З. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.
7. Поспелов Д. А. Игры и автоматы. М., «Энергия», 1966.
8. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. Пер. с англ. Под ред. П. П. Пархоменко. М., «Наука», 1966.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Пер. с англ. Под ред. Е. Б. Дынкина. М., «Мир», 1964.
10. Дьяченко В. Ф. Построение граф-схем алгоритмов. В кн.: Проблемы передачи информации. Вып. 12, М., Изд-во АН СССР, 1962.
11. Лазарев В. Г. Пийль Е. И. Способ получения сложных алгоритмов путем объединения простых алгоритмов. — «Известия АН СССР. Сер. Энергетика и автоматика», 1962, № 3.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

3.1. Критерии оценки эффективности алгоритмов обработки радиолокационной информации

Одним из условий успешного решения задач проектирования системы цифровой обработки радиолокационной информации является умение количественно оценивать эффективность методов и алгоритмов обработки, а также технических средств, предназначенных для их реализации. В общем случае задача такой оценки сводится к выбору специальных критериев, которые могут служить мерой эффективности соответствующих алгоритмов, а также к определению путей нахождения их значений при выбранных параметрах системы и внешних воздействиях. Эта задача называется задачей анализа алгоритмов (элементов) системы обработки.

В процессе анализа производится оценка возможных вариантов построения алгоритмов и устройств проектируемой системы. Далее путем сравнения рассмотренных вариантов может быть решена задача выбора наилучшего в определенном смысле алгоритма или устройства. Необходимо иметь в виду, что возможности анализа сложных систем в целом, особенно аналитическими методами, ограничены. Поэтому анализ системы цифровой обработки радиолокационной информации обычно производится по частям, в рамках основных операций обработки, перечисленных во введении.

При анализе алгоритмов обработки радиолокационной информации должны учитываться особенности, вытекающие из способа их реализации на цифровых вычислительных устройствах. Эти особенности часто приводят к появлению нового качества, без учета которого анализ не отвечает своим целям.

При решении вопроса о выборе критериев эффективности обычно рекомендуется пользоваться следующими соображениями [6]:

— выбранный критерий должен отражать основное назначение алгоритма (устройства), а также соответствовать цели анализа,

— используемый в качестве критерия показатель должен быть критичен по отношению к варьируемым параметрам,

— используемый критерий должен быть наглядным и по возможности просто определяемым.

-В соответствии с этими соображениями, при сравнительном анализе алгоритмов обработки радиолокационной информации используются следующие группы критериев эффективности [3]:

1. Критерии, определяющие возможности алгоритмов по полноте отображения реальной обстановки в зоне обзора РЛС. Полнота отображения обстановки характеризуется, в конечном счете, вероятностью правильного обнаружения объектов и помех. Если за время обзора пространства в среднем обнаруживается N объектов из N_0 находящихся в зоне обзора, то вероятность правильного обнаружения равна $P_{обн} \approx \approx N/N_0$ и, так как $N \leqslant N_0$, то $P_{обн} \leqslant 1$. Значение $P_{обн}$ весьма критично к энергетическим характеристикам РЛС, а также существенно зависит от выбранного метода обнаружения целей. К рассматриваемой группе критериев эффективности относятся также критерии, характеризующие методы (алгоритмы) обработки по разрешающей способности, по способности различать цель с малой эффективной отражающей поверхностью на фоне близко расположенных мешающих объектов и т. д.

2. Критерии, определяющие возможности алгоритмов по достоверности отображения обстановки в зоне обзора РЛС. В системе цифровой обработки радиолокационной информации достоверность отображения характеризуется обычно числом ложных отметок (траекторий), обнаруживаемых или передаваемых на сопровождение в каждом периоде обзора РЛС. Кроме непосредственных потерь, связанных с неопределенностью ситуации (ложные тревоги), увеличение объема обрабатываемой ложной информации приводит к перегрузке вычислительных средств и уменьшению возможностей системы по обработке полезной информации.

3. Критерии, определяющие динамические характеристики алгоритмов и соответствующих им цифровых фильтров. Для характеристики динамических свойств фильтров, реализующих алгоритмы обработки радиолокационной информации, используются обычные в теории импульсных систем показатели: характер переходного процесса, устойчивость, динамические и случайные ошибки в установившемся режиме работы и т. д. Наиболее общей точностной характеристикой алгоритмов обработки информации является корреляционная матрица ошибок оценки параметров на рубежах выдачи информации, при заданном запаздывании в выдаче данных.

4. Критерии, определяющие затраты на реализацию алгоритмов обработки с помощью специализированных цифровых устройств или на ЦВМ универсального типа. Затраты на реализацию характеризуются числом операций, выполняемых в процессе однократного использования алгоритма, а также объемом памяти вычислительного устройства (ЦВМ), занятого в процессе его реализации.

Перечисленные критерии характеризуют качественные показатели выдаваемой информации и затраты вычислительных ресурсов при однократном использовании алгоритма, т. е. при обработке информации об одной цели. В реальных же условиях работы обзорной РЛС обработке подлежит информация о множестве целей, одновременно находящихся в зоне обзора РЛС. Процесс обработки информации в этом случае сводится к многократному применению соответствующих алгоритмов по каждой из обрабатываемых целей. На однократное применение алгоритма тратится определенное время, в течение которого ЦВМ (имеется в виду однопрограммная) не может обрабатывать информацию о других целях. Вместе с тем обработка должна быть реализована в реальном масштабе времени на ЦВМ с ограниченной производительностью. Поэтому, наряду с проблемами качественной обработки информации о каждой отдельной цели, возникает проблема организации обработки информации о множестве целей. Для этого процесс обработки радиолокационной информации должен рассматриваться как процесс массового обслуживания, а ЦВМ, предназначенная для реализации алгоритмов обработки, как обслуживающий прибор (аппарат) соответствующей системы массового обслуживания.

Основным показателем эффективности системы массового обслуживания является ее пропускная способность. Поэтому при реализации совокупности алгоритмов обработки на конкретных вычислительных средствах, анализу подлежит пропускная способность соответствующей обслуживающей системы. Если число обрабатываемых целей и состав алгоритмов обработки заданы, то. представляется возможным предъявить требования к вычислительным средствам по быстродействию и емкости запоминающих устройств.

Легко видеть, что критерий эффективности по пропускной способности системы обработки тесно связан с критериями, характеризующими качество обработки информации о каждой отдельной цели. Достаточно, например, заметить, что при неизменной энергетике РЛС для повышения вероятности обнаружения и улучшения точности оценки параметров движения цели требуется использование более сложных алгоритмов обработки, что приводит к увеличению объема вычислений и объема хранимой в процессе вычислений информации в оперативном запоминающем устройстве (ОЗУ) ЦВМ. А это, в свою очередь, приводит к повышению требований к ЦВМ по быстродействию и объему ОЗУ, или к уменьшению пропускной способности при заданных параметрах ЦВМ.

3.2. Методы анализа вероятностных характеристик алгоритмов обработки радиолокационной информации

В дальнейшем под вероятностными понимаются характеристики, относящиеся к оценке полноты и достоверности отображения обстановки в зоне обзора РЛС. Сюда относятся, главным образом, вероятность правильного обнаружения полезных (истинных) сигналов и траекторий, вероятность ложного решения о наличии сигнала (траектории)

из-за влияния помех или соответствующее число ложных решений в пределах фиксированного временного интервала.

Рассматриваемые в данном параграфе методы анализа вероятностных характеристик алгоритмов обработки радиолокационной информации основываются на следующих исходных предпосылках;

1. Входные сигналы представляют собой бинарную последовательность случайных чисел (нулей и единиц). Вероятности появления элементов этой последовательности, в общем случае, изменяются от такта к такту. Корреляционная связь между элементами последовательности распространяется только на соседние такты, т. е. последовательность входных сигналов представляет собой простую цепь Маркова. Вырожденным случаем этой цепи является последовательность некоррелированных входных сигналов (последовательность Бернулли или, что то же, цепь Маркова нулевого порядка).

Использование для описания входных сигналов дискретного случайного процесса без последствия не ограничивает сколько-нибудь общности получаемых результатов, так как цепь Маркова более высокого, чем первый, порядка с двумя состояниями может быть преобразована в цепь Маркова первого порядка за счет расширения множества состояний [14].

2. Цифровые устройства и алгоритмы, реализуемые на ЦВМ, представляются в виде конечных автоматов (алгоритмов) с фиксированной структурой и случайными переходами. Как известно, функционирование таких устройств описывается стохастическими матрицами переходных вероятностей, что позволяет существенным образом использовать при их анализе математический аппарат простых цепей Маркова.

Вопросам применения математического аппарата цепей Маркова для анализа процессов обнаружения следов траекторий посвящены опубликованные в литературе работы [12—14]. Систематическое изложение метода анализа вероятностных характеристик обнаружителей с использованием аппарата цепей Маркова имеется в книге [4].

3.2.1. Основные сведения из теории простых цепей Маркова

Опубликованная литература по теории цепей Маркова насчитывает десятки томов. В нашу задачу не входит сколько-нибудь подробное рассмотрение этой теории. Ограничимся здесь только некоторым справочным набором определений и соотношений, которые будут использоваться непосредственно при анализе вероятностных характеристик схем и алгоритмов обработки радиолокационной информации.

Пусть некоторая физическая система в момент времени t_0 находится в одном из состояний $a_0, a_1 \ldots a_i, \ldots$ В фиксированные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k$ система под воздействием случайных факторов (сигналов) может переходить из одного состояния в другое, причем в любой момент времени t_k вероятность оказаться в наперед заданном состоянии a_j определяется только тем состоянием a_i, в котором она находилась непосредственно перед скачком, т. е. в момент времени t_{k-1}, и не зависит от всех остальных состояний, в которых эта система нахо-

дилась до момента t_{k-1}. Тогда говорят, что поведение этой системы описывается простой цепью Маркова (цепью первого порядка).

Условная вероятность перехода из состояния a_i в момент времени t_{k-1} в состояние a_j в момент времени t_k

$$\pi_{ij}(k-1,\ k) = p\ (a_j,\ t_k/a_i, t_{k-1})$$

называется переходной вероятностью этой цепи.

Цепь Маркова задается:

— вектор-строкой $\mathrm{P}\ (0) = \| P_0\ (0) P_1\ (0) \ldots P_i\ (0) \ldots \|$ вероятностей начального состояния системы в момент времени t_0,

— матрицей переходных вероятностей $\Pi\ (k-1k)$, элементами которой являются переходные вероятности $\pi_{ij}(k-1,\ k)$.

Если переходные вероятности $\pi_{ij}\ (k-1,k)$ не зависят от времени, т. е. $\pi_{ij}(k-1,\ k) = \pi_{ij}, k = 1, 2, \ldots$, то цепь Маркова называется однородной. Для однородной цепи Маркова справедливы следующие соотношения:

1. Безусловная вероятность перехода системы в состоянии a_j за один шаг по определению равна

$$P_j\ (1) = \sum_i P_i\ (0)\ \pi_{ij}, \qquad (3.2.1)$$

где $P_i\ (0)$ — вероятность состояния a_i при $t = 0$.

2. Безусловная вероятность того» что система за n шагов перейдет в состояние a_j, равна

$$P_j\ (n) = \sum_i P_i\ (0)\ \pi_{ij}^{(n)}, \quad i = 1,\ 2,\ 3 \qquad (3.2.2)$$

где $\pi_{ij}^{(n)}$ — условная вероятность перехода из состояния a_i в состояние a_j за n шагов.

Вероятность $\pi_{ij}^{(n)}$ удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению (уравнению Маркова):

$$\pi_{ij}^{(n)} = \sum_v \pi_{iv}^{(s)}\ \pi_{vj}^{(n-s)}, \quad s = \overline{0,\ n}, \qquad (3.2.3)$$

где суммирование проводится по всем состояниям.

3. Если представить вероятности переходов $\pi_{ij}^{(n)}$ в виде матрицы, то получим n-ю степень матрицы вероятностей переходов Π, т. е. Π^n. С учетом этого, вектор-строка вероятностей состояний системы после л шагов определяется из соотношения:

$$\mathbf{P}(n) = \mathrm{P}\ (0)\ \Pi^n = \mathrm{P}\ (n-1)\ \Pi. \qquad (3.2.4)$$

5. Цепь Маркова называется эргодической, если вероятности состояний $P_j\ (n)$ при увеличении n сходятся к предельным вероятностям P_j, которые не зависят от начальных вероятностей $P_i\ (0)$, т. е. когда

$$\lim P_j\ (n) = P_j, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

Вероятности P_j называются финальными вероятностями состояний системы.

Финальные вероятности являются решением следующей системы линейных уравнений

$$P_j = \sum P_\nu \pi_{\nu j}, \quad \nu = 0, 1, 2 \qquad (3.2.5)$$

Из соотношения (4) после предельного перехода при $n \to \infty$ получим следующее матричное уравнение, связывающее вектор-строку финальных вероятностей состояний системы с матрицей ее переходных вероятностей

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\Pi, \quad \mathbf{P} = \| P_0 P_1 \ldots P_j \ldots \|. \qquad (3.2.6)$$

Причем, сумма компонентов этого вектора равна единице

$$\sum P_j = 1, \quad j = 0, 1, 2 \qquad (3.2.7)$$

Для произвольной (неоднородной) цепи Маркова вероятность перехода из состояния a_i в момент времени t_k в состояние a_j в момент времени t_s определяется из соотношения

$$\pi_{ij}(k, s) = \sum_\nu \pi_{i\nu}(k, r), \pi_{\nu j}(r, s), \quad k < r < s, \qquad (3.2.8)$$

которое называется уравнением Колмогорова — Чэпмена.

Матрица переходных вероятностей за s шагов (начиная с момента времени t_k) будет в этом случае равна произведению s матриц, т. е.

$$\Pi(k, s) = \Pi(k, \text{ft} + 1)\ \Pi(k + 1, k + 2) \ldots \Pi(k + s - 1, \text{ft} + s).$$

Если известна вектор-строка вероятностей начального состояния системы P (ft) в момент времени t_k, то вектор-строка вероятностей состояний после s шагов (переходов) определяется выражением

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(k)\ \Pi(k, \text{s}). \qquad (3.2.9)$$

Вектор-строку вероятностей состояний можно также определять последовательно, по рекуррентной формуле

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(s - 1)\ \Pi(s - 1, \text{s}). \qquad (3.2.10)$$

Если цепь Маркова является однородной, то переходные вероятности $\pi_{ij}(s, t)$ зависят лишь от разности t — s:

$$\pi_{ij}(\text{s}, t) = \pi_{ij}(t - s).$$

Для однородной цепи Маркова имеет место следующая классификация состояний:

а) состояние a_i называется невозвратным, если спустя некоторый конечный промежуток времени t система с вероятностью 1 никогда больше не возвратится в это состояние. Состояние a_i, которое не является невозвратным, называется возвратным;

б) говорят, что состояние a_j достижимо из состояния a_i, если $\pi_{ij}(s, \text{s} + l) \neq 0$ для какого-нибудь l; состояния a_i и a_j называются сообщающимися, если они достижимы друг из друга. Если каждое сос-

тояние цепи достижимо из любого другого состояния, то цепь Маркова называется неприводимой;

в) состояние a_i называется периодическим, если возвращение в него возможно лишь через число шагов n, кратное некоторому целому числу k;

г) состояние a_i называется поглощающим, если из этого состояния невозможен переход ни в какое другое состояние.

3,2.2. Применение математического аппарата цепей Маркова для анализа вероятностных характеристик алгоритмов обнаружения

В гл. 2 было показано, что алгоритму цифровой обработки двоично квантованных сигналов можно поставить в однозначное соответствие граф со случайными переходами. Функционирование такого графа при поступлении на его вход последовательности случайных сигналов, принимающих только два возможных значения (О или 1), описывается стохастической матрицей переходных вероятностей.

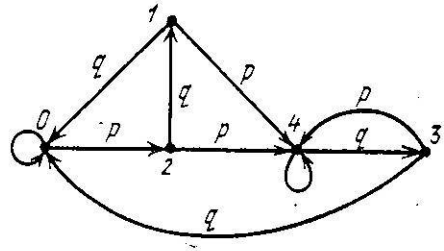


Рис. 3.1. Граф со случайными переходами для случая некоррелированной последовательности входных сигналов.

Преобразование детерминированного графа в граф со случайными переходами получается особенно просто, если входные сигналы представляют собой некоррелированную последовательность нулей и единиц (последовательность Бернулли). В этом случае преобразование состоит в формальной замене физических сигналов, которыми отмечены переходы детерминированного графа, соответствующими вероятностями появления этих сигналов (вместо единицы — p, вместо нуля — q).

В качестве примера, на рис. 3.1 приведен граф со случайными переходами для обнаружителя комбинаций 11 и 101, синтезированного в п. 2.1.4 в результате параллельной композиции двух автоматов (рис. 2.8). Соответствующая матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\Pi = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 & 0 & p \\ 2 & 0 & q & 0 & 0 & p \\ 3 & q & 0 & 0 & 0 & p \\ 4 & 0 & 0 & 0 & q & p \end{array}. \qquad (3.2.11)$$

Строки этой матрицы, соответствующие состояниям I и 3, являются одинаковыми и, казалось бы, указанные состояния можно объединить. Однако в исходном графе (рис. 2.8) переходы в состояния 1 и 3 отмечены различными выходными сигналами. Следовательно, они не подлежат объединению.

Во многих случаях. которые здесь не конкретизируются, поступающие для обработки сигналы коррелированы в двух соседних тактах и образуют простую цепь Маркова. Матрица переходных вероятностей этой цепи имеет вид

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{Vmatrix}. \qquad (3.2.12)$$

Переходные вероятности π_{ij} представляют собой условные вероятности появления сигнала j после сигнала i ($i, j = 0,1$).

Для переходных вероятностей π_{ij} выполняются соотношения

$$\pi_{00} + \pi_{01} =$$

Кроме того; в соответствии с уравнением (6), абсолютные вероятности p и q являются финальными вероятностями рассматриваемой системы и связаны с переходными вероятностями соотношениями

$$q\pi_{00} + p\pi_{01} = q, \quad q\pi_{10} + p\pi_{11} = p. \qquad (3.2.14)$$

Для определения вероятности переходов π_{ij} через абсолютные вероятности p и q необходимо знать коэффициент корреляции между соседними сигналами. В общем случае этот коэффициент записывается в виде

$$\rho_{i,\,i+1} = \overline{(x_i\, x_{i+1} - \overline{x_i^2})}/\sigma_{x_i}^2,$$

где x_i — входной сигнал, принимающий значения 0 и 1. Если последовательность входных сигналов стационарна, получим

$$\rho = (p\pi_{11} - p^2)/pq.$$

Решая теперь совместно уравнения (13) и (14) с учетом выражения для ρ, получим

$$\pi_{00} = я + \rho p, \qquad \pi_{01} = p - \rho p,$$
$$\pi_{10} = я - \rho q, \qquad \pi_{11} = p + \rho q.$$

Таким образом, матрица переходных вероятностей цепи Маркова, описывающей стационарную последовательность попарно коррелированных сигналов, имеет вид

$$\Pi = \begin{Vmatrix} q(1+\rho) & p(1-\rho) \\ q(1-\rho) & p(1+\rho) \end{Vmatrix}. \qquad (3.2.15)$$

Элементы матрицы (15) представляют собой условные вероятности получения j-го сигнала после i-го сигнала в последовательности сигналов, поступающих на вход устройства, реализующего заданный алгоритм обработки. Следовательно, вероятности переходов соответствующего графа определяются теперь не абсолютными вероятностями отсутствия

(q) и наличия (p) сигналов, а условными вероятностями, определяемыми из матрицы (15).

Для примера на рис. 3.2 изображен граф со случайными переходами для рассматриваемого в данном пункте обнаружителя, при воздействии на его входе попарно коррелированных стационарных сигналов. По этому графу обычным образом составляется матрица переходных вероятностей для анализа работы схемы.

Поскольку получение графа функционирования алгоритма обработки при наличии попарно коррелированных входных сигналов и известном коэффициенте корреляции, не представляет принципиальных трудностей, в дальнейшем при анализе будем предполагать, что входные сигналы некоррелированы между собой, а последовательность сигналов представляет последовательность Бернулли.

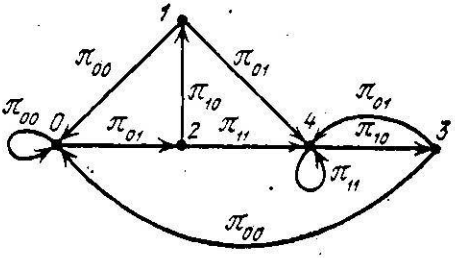


Рис. 3.2. Граф со случайными переходами для случая попарно коррелированной последовательности входных сигналов.

Перейдем теперь непосредственно к анализу алгоритма обработки, заданного графом и матрицей переходных вероятностей при воздействии на его входе стационарной последовательности случайных двоично квантованных сигналов.

В рассматриваемом случае с ростом числа переходов n вероятности состояний алгоритма становятся независимыми от его начального состояния, т. е. мы имеем дело с эргодической цепью Маркова. Для эргодических цепей Маркова можно определить вероятности состояний P_i, как вероятности того, что цепь находится в состоянии a_i после большого числа переходов. Вектор-строка P с компонентами P_i $(i = \overline{0, M})$, будет тогда пределом последовательности векторов $\mathbf{P}(n)$, когда n стремится к бесконечности. Вектор-строка P называется вектором предельных (финальных) вероятностей цепи.

При получении явных выражений для предельных вероятностей состояний эргодической цепи Маркова используются основное матричное уравнение (6) и дополнительное нормирующее условие (7), Чтобы не усложнять дальнейшее изложение мы проиллюстрируем применение этих соотношений на конкретном примере определения предельных вероятностей состояний обнаружителя, матрица переходных вероятностей которого имеет вид (11).

Матричное уравнение (6) запишем в виде:

$$\mathbf{P} = \|P_0\, P_1\, P_2\, P_3\, P_4\| \times \begin{Vmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \\ д & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & q & 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{Vmatrix}.$$

Откуда получаем

$$P_0 = q\,(P_0 + P_1 + P_3), \quad P_1 = P_2 q,\ P_2 = P_0 p,$$
$$P_3 = P_4 q,\ P_4 = \text{Р (Л} + P_2 + \text{я»} + \text{Л).}$$

Кроме того, из условия нормировки (7) получаем

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1.$$

В результате получена система из 6 линейных уравнений, а неизвестных только пять ($P_0 \div P_4$). Чтобы исключить неоднозначность решения, одно из уравнений системы надо исключить, но так, чтобы не нарушить связи между переменными. Этому условию удовлетворяет уравнение для P_0, которое и исключаем.

Решение оставшейся системы уравнений получается в виде

$$P_0 = q^2; \quad P_1 = q^3 p; \quad P_2 = q^2 p;$$
$$P_3 = pq\,(1 - q^2);\ P_4 = \text{р}\ (1 - q^2). \qquad (3.2.16)$$

Выражения (16) и определяют предельные вероятности состояний рассматриваемого алгоритма. Нетрудно видеть, что аналогичным образом могут быть рассчитаны предельные вероятности для любых других алгоритмов, если задана матрица переходных вероятностей соответствующей эргодической цепи Маркова.

Кроме предельных вероятностей состояний, для рассматриваемых схем часто интересуются вероятностью первого достижения заданного состояния в каждом такте работы. Так в рассматриваемой схеме установленному критерию обнаружения (11 или 101) соответствует первое достижение состояния 4. Вероятность этого события равна

$$\mathcal{P}_4 = (P_1 + P_2)p.$$

При анализе воздействия на обнаружители стационарных помех вероятность первого достижения установленного критерия обнаружения соответствует вероятности ложного обнаружения в фиксированном такте работы (на фиксированной позиции).

При обработке нестационарной последовательности двоично квантованных сигналов с целью обнаружения (выявления) заданной комбинации, задача о вероятностях состояний обнаружителя в определенный момент времени может быть решена только последовательно, путем многократного применения формулы (9). Для этого надо знать матрицу переходных вероятностей системы на каждом шаге и вектор вероятностей исходного состояния системы.

Матрица переходных вероятностей обнаружителя по своему характеру остается прежней, однако значения вероятностей переходов на каждом шаге будут различными. Эти вероятности должны быть известны заранее.

При определении вектора вероятностей исходного состояния возможны, по крайней мере, два случая:

1. Полезный сигнал (например, пачка импульсов с произвольной огибающей) принимается на фоне стационарных помех, а область помех до появления полезного сигнала достаточно протяженная, вслед-

ствие чего можно считать, что перед поступлением полезного сигнала имеет место установившийся режим работы обнаружителя. В этом случае вероятности исходного состояния обнаружителя перед поступлением полезного сигнала определяются предельными вероятностями его состояний в области стационарных помех.

2. Сигналы являются нестационарными в течение всего времени работы обнаружителя. Это имеет место, например, при обнаружении траектории цели по последовательности локационных отметок, полученных от приближающейся (удаляющейся) цели. В этом случае вероятности исходного состояния обнаружителя должны быть заданы особо. В частности, вероятность начального состояния может быть взята равной единице, а вероятности остальных — нулю.

В данном случае целью анализа является определение вероятности обнаружения сигнала или траектории, что. соответствует выявлению установленной алгоритмом обнаружения совокупности элементарных сигналов (отметок). При появлении такой совокупности обнаружитель достигает определенного состояния, причем вероятность ее обнаружения нарастает от такта к такту, т. е. с получением каждого нового элементарного сигнала.

Для вычисления нарастающей вероятности обнаружения исходная цепь Маркова *и* соответствующий ей граф со случайными переходами, должны быть преобразованы в цепь (граф) с поглощающим экраном. Поглощающий экран совмещается с состоянием, переход в которое приводит к выполнению установленного критерия обнаружения.

Установление поглощающего экрана приводит фактически к отбрасыванию части состояний, достижение которых в исходной цепи возможно только после достижения состояния, в котором установлен поглощающий экран. Этот факт надо учитывать при задании вектора вероятностей исходного состояния обнаружителя. В частности, с целью сохранения условия $\sum_i P_i = 1$, предельные верятности отброшенных (закороченных) состояний добавляются к предельной вероятности состояния, в котором установлен поглощающий экран.

• В дальнейшем методику расчета нарастающей вероятности обнаружения нестационарного сигнала проиллюстрируем на примере. Возьмем в качестве исходного алгоритм, граф которого изображен на рис. 3.1, и будем считать, что нестационарный полезный сигнал появляется после того, как наступило стационарное состояние обнаружителя в области помехи. Поглощающий экран совместим с состоянием a_4, переход в которое приводит к выполнению критерия обнаружения. Состояние a_3 в этом случае будет отброшено. Следовательно, предельную вероятность достижения этого состояния в области помехи надо прибавить к предельной вероятности достижения состояния a_4 в той же области. Вектор-строка вероятностей исходного состояния обнаружителя перед поступлением полезноto сигнала в этом случае будет равна

$$\mathrm{P}\,(0) = \| P_0\,(0) P_1\,(0) P_2\,(0) P_4'\,(0) \|, \qquad \text{где } P_4' = P_3 + P_4.$$

Матрица переходных вероятностей цепи с поглощающим экраном записывается для каждой позиции, где присутствует нестационарный

сигнал. Для λ-й позиции нестационарного сигнала эта матрица имеет вид (для рассматриваемого обнаружителя)

$$\Pi_\lambda = \begin{vmatrix} q_\lambda & 0 & q_\lambda & 0 \\ q_\lambda & 0 & 0 & p_\lambda \\ 0 & q_\lambda & 0 & p_\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вектор-строку состояний цепи на λ-й позиции полезного сигнала можно записать в виде

$$\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P}(\lambda - 1)\ \Pi(\lambda).$$

Вычисления дают

$$P_0(\lambda) = [P_0(\lambda - 1) + P_1(\lambda - 1)]q_\lambda,\quad P_1(\lambda) = P_2(\lambda - 1)q_\lambda,$$
$$P_2(\lambda) = P_0(\lambda - 1)p_\lambda,\quad P_4(\lambda) = [P_1(\lambda - 1) + P_2(\lambda - 1)]p_\lambda + P_4(\lambda - 1). \qquad (3.2.17)$$

Последнее уравнение системы (17) определяет нарастающую вероятность достижения состояния a_4 на λ-м шаге. Оно состоит из двух слагаемых: первое из них характеризует вероятность достижения состояния a_4 точно на λ-й позиции, а второе — вероятность того, что это состояние уже достигнуто на предыдущих позициях.

Рассмотренные элементарные приемы использования математического аппарата цепей Маркова для расчета вероятности обнаружения стационарных и нестационарных сигналов пригодны в инженерной практике. Напомним еще раз, что эта методика не изменится, если входной сигнал представляет собой стационарную или нестационарную простую цепь Маркова.

3.3. Методы анализа динамических и точностных характеристик алгоритмов цифровой обработки радиолокационной информации

Наряду с обнаружением сигналов (траекторий) в процессе обработки радиолокационной информации решается большая группа задач, связанных с воспроизведением и сглаживанием параметров траекторий, а также с преобразованием этих параметров. При этом последовательность входных сигналов преобразуется в соответствии с алгоритмами обработки в выходные сигналы, несущие информацию об искомых параметрах или функциях этих параметров.

Алгоритм преобразования входных сигналов в выходные называется также дискретным оператором, а соответствующее устройство, реализующее дискретный оператор — дискретным фильтром. Если алгоритм реализуется на ЦВМ, то в этом случае последняя выступает в роли цифрового фильтра.

Цифровой фильтр является системой дискретного действия, причем дискретность проявляется в двух отношениях: во-первых, входные сигналы являются дискретизованными по времени в соответствии

с принятыми в РЛС принципами получения сигналов и организации обзора пространства; во-вторых, сигналы (как входные, так и выходные) представляются в виде n-разрядных двоичных кодов, что соответствует их многоуровневому квантованию. Наличие квантования по уровню наряду с округлениями вычислений в ЦВМ делает соответствующий цифровой фильтр сугубо нелинейным, что в значительной степени затрудняет его анализ.

Для выяснения принципиальных вопросов, связанных с анализом цифровых фильтров, в дальнейшем будем предполагать, что на вход поступает неквантованный дискретный сигнал, а вычисления производятся абсолютно точно. В этом случае при анализе можно отвлечься от физических принципов, положенных в основу работы ЦВМ и считать основной характеристикой цифрового фильтра только реализуемый алгоритм преобразования входных сигналов в выходные.

Обычно алгоритмы обработки радиолокационной информации, связанные с восстановлением параметров траекторий, являются линейными или линеаризованными. Поэтому и соответствующие цифровые фильтры являются линейными. Дополнительно к этому необходимо предположить, что в процессе реализации алгоритма не проверяются логические условия и отсутствуют условные переходы, так как при наличии последних возникают дополнительные трудности в анализе.

Таким образом, при анализе динамических и точностных характеристик алгоритмов обработки радиолокационной информации, реализованных на ЦВМ, в дальнейшем принимаются следующие допущения:

— входные и выходные сигналы дискретизованы, но не квантованы,

— алгоритмы обработки информации, и, следовательно, соответствующие фильтры являются линейными.

При сделанных допущениях для анализа может быть использован математический аппарат теории линейных импульсных систем.

В данном параграфе рассматриваются некоторые основные вопросы теории импульсных систем, используемые в дальнейшем для анализа динамических характеристик алгоритмов цифровой обработки радиолокационной информации.

3,3,1. Решетчатые функции и их Z-преобразование

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция времени. Соответствующая ей решетчатая функция, имеющая отличные от нуля значения в моменты $t = n\Delta_t$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$; Δ_t — период дискретизации, определяется выражением

$$f_n = f(n) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t = n\Delta_t, \\ 0 & \text{при } t \neq n\Delta_t. \end{cases}$$

Для анализа решетчатых функций используется математический аппарат конечных разностей и сумм, являющихся дискретным аналогом дифференциала и интеграла.

Конечные разности первого порядка для решетчатой функции $f(n)$ можно вычислить с помощью следующих соотношений:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \qquad (3.3.1)$$

где $\Delta f(n)$ — прямая разность первого порядка:

$$\nabla f(n) = f(n) - f(n-1), \tag{3.3.1а}$$

где $\nabla f(n)$ — обратная разность первого порядка. В дальнейшем будут использоваться только прямые конечные разности решетчатых функций.

Конечная разность ft-го порядка определяется рекуррентно как разность первого порядка от разности $(k-1)$-го порядка, т. е.

$$\Delta^{(k)} f(n) = \Delta\left[\Delta^{(k-1)} f(n)\right] = \Delta^{(k-1)} f(n+1) - \Delta^{(k-1)} f(n). \tag{3.3.2}$$

Для вычисления разности fc-го порядка в некоторой точке n требуется знать значения решетчатой функции в $k+1$ точках.

Соотношение между решетчатой функцией f_i (л) и ее разностями различных порядков $\Delta^k f(n)$ называется уравнением в конечных разностях. Уравнениями в конечных разностях (разностными уравнениями) описывается поведение дискретных (цифровых) систем. Линейные дискретные системы описываются линейными разностными уравнениями.

Решение линейных разностных уравнений значительно упрощается применением так называемых операционных методов. Эти методы основаны на переходе от решетчатых функций к их изображениям. В качестве изображения решетчатой функции в дискретной технике используют дискретное преобразование Лапласа или Z-преобразование.

Разностное уравнение в области изображений сводится к алгебраическому; последнее решается достаточно просто.

Дискретное преобразование Лапласа для решетчатой функции записывается в виде

$$\mathscr{L}[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-pn\Delta t};$$

отсюда Z-преобразование решетчатой функции получается подстановкой $e^{-p\Delta t} = Z$, т. е.

$$Z[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, Z^{-n}. \tag{3.3.3}$$

Обычно для записи Z-преобразования используется обозначение $Z[f(n)] = F^*(Z)$. Для нахождения Z-преобразования решетчатых функций следует пользоваться специальными таблицами, помещенными в книгах по теории импульсных систем управления (например, [3, 7]). Здесь приведем только некоторые важные свойства Z-преобразования, которые потребуются в дальнейшем.

1. Свойство линейности. Если $Z[f_1(n)] = F_1^*(Z)$, $Z[f_2(n)] = F_2^*(Z)$, то

$$Z[af_1(n) + bf_2(n)] = aF_1^*(Z) + bF_2^*(Z). \tag{3.3.4}$$

2. Свойство запаздывания (теорема запаздывания). Рассмотрим решетчатую функцию $f_i(n)$ и ту же самую решетчатую функцию, но сдвинутую на k периодов дискретизации в сторону запаздывания, т. е. $f_i(n-k)$. Теорема запаздывания утверждает, что если $Z[f(n)] = F^*(Z)$, то

$$Z[f(n-k)] = Z^{-k} F^*(Z). \tag{3.3.5}$$

Аналогичным образом может быть сформулирована теорема упреждения $Z[f_i(n+k)] = Z^k F^*(Z)$.

3. Свертка решетчатых функций. Если

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} f_1(n-k)\, f_2(k) = \sum_{k=0}^{n} f_1(k)\, f_2(n-k),$$

то

$$F^*(Z) = F_1^*(Z)\, F_2^*(Z). \tag{3.3.6}$$

4. Начальное значение решетчатой функции. Если $Z[f(n)] = F^*(Z)$, то

$$f(0) = \lim \frac{Z-1}{Z} F^*(Z). \tag{3.3.7}$$

5. Конечное значение решетчатой функции

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{Z\to 1+0} \frac{Z-1}{Z} F^*(Z). \tag{3.3.8}$$

3.5.2. *Передаточные функции дискретных фильтров*

В общем случае выходной сигнал дискретного фильтра в момент $t = n\Delta_t$ определяется значением входного сигнала в тот же момент времени, а также значениями входных и выходных сигналов в предшествующие моменты времени, т. е.

$$y_n = f(x_n x_{n-1}, \ldots, x_{n-m}, y_{n-1}, \ldots y_{n-l}). \tag{3.3.9}$$

Если зависимость (9) является линейной, то дискретный фильтр называется линейным. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только линейных дискретных фильтров, для которых выходной сигнал определяется из уравнения

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_m x_{n-m} - b_1 y_{n-1} - \ldots - b_l y_{n-l}. \tag{3.3.10}$$

Линейный дискретный фильтр удобно описывать с помощью передаточной функции, под которой понимается отношение Z-преобразования выходного сигнала к Z-преобразованию входного, т. е.

$$K^*(Z) = Y^*(Z)/X^*(Z). \tag{3.3.11}$$

С учетом свойства запаздывания Z-преобразование уравнения (10) имеет вид

$$Y^*(Z)(1 + b_1 Z^{-1} + \ldots + b_l Z^{-l}) = X^*(Z)(a_0 + a_1 Z^{-1} + \ldots + a_m Z^{-m}).$$

Откуда получаем

$$K^*(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + \ldots + a_m Z^{-m}}{\ldots}. \tag{3.3.12}$$

По виду передаточной функции дискретные фильтры подразделяются на два типа: рекурсивные и нерекурсивные. Выходной сигнал рекурсивного фильтра определяется, помимо текущего и предыдущих значений входного сигнала, еще и предыдущими значениями выходного сигнала, что эквивалентно введению задержанной обратной связи. Рекурсивному фильтру соответствует передаточная функция (12). Выходной сигнал нерекурсивного фильтра зависит только от текущего значения и конечного числа предшествующих значений входного сигнала. Передаточная функция нерекурсивного фильтра является частным случаем (12), а именно: многочленом от Z^{-1}.

$$K^*(Z) = \sum_{i=0}^{m} a_i (Z^{-1})^i. \tag{3.3.13}$$

При решении задач цифровой обработки информации применение рекурсивных фильтров позволяет обойтись значительно меньшим объемом памяти и меньшим быстродействием по сравнению с нерекурсивными фильтрами. Однако нерекурсивные фильтры обладают рядом преимуществ перед рекурсивными и тоже находят применение в системах обработки радиолокационной информации.

В качестве примера на получение передаточной функции нерекурсивного фильтра рассмотрим задачу экстраполяции (прогнозирования) линейной функции на один период дискретизации по двум значениям входного сигнала, взятым через интервал времени T_0.

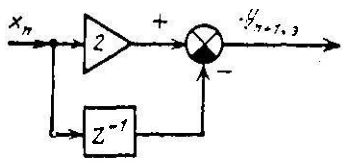


Рис. 3.3. Структурная схема экстраполирующего фильтра.

Входной сигнал в этом случае имеет вид

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0\, t.$$

Дискретные значения сигнала в моменты $(n-1)\,T_0$ и nT_0 равны

$$x_n = x_0 + \dot{x}_0\, nT_0, \qquad x_{n-1} = x_0 + \dot{x}_0 (n-1)\,T_0. \tag{3.3.14}$$

Из решения системы уравнений (14) находим

$$x_0 = x_n - n(x_n - x_{n-1}), \qquad \dot{x}_0 = (x_n - x_{n-1})/T_0.$$

Экстраполированное значение координаты равно

$$y_{n+1,\ 9} = x_0 + (n+1)\,T_0 \dot{x}_0 = 2x_n - x_{n-1}.$$

Применяя к полученному уравнению операцию Z-преобразования, получим передаточную функцию в виде

$$K^*_{y_{n+1,\ 9}}(Z) = (2Z-1)/Z.$$

Для наглядного представления функционирования дискретных фильтров служат структурные схемы, содержащие элементы задержки на период дискретизации (изображаемые прямоугольниками), множительные устройства (изображаемые треугольниками) и суммирующие устройства (изображаемые кружками). Структурная схема рассмотренного выше экстраполирующего фильтра изображена на рис. 3.3.

3.3.3. Методы анализа характеристик качества дискретных фильтров

Основными показателями качества дискретных фильтров являются: характер переходного процесса, т. е. поведение фильтра Б неустановившемся режиме работы; устойчивость фильтра; динамические и случайные ошибки в установившемся режиме работы.

Переходный процесс в фильтре исследуется при подаче на его вход типового сигнала, представляющего собой дискретную ступенчатую функцию

$$1(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geqslant 0, \end{cases}$$

Z — преобразование которой равно I $(Z) = Z/(Z - 1)$.

При заданной передаточной функции фильтра K^* (2), 2-преобразование его переходной характеристики получается в виде

$$H^* \ (2) = K^*(Z)\, Z/(Z - 1).$$

Если теперь удается представить переходную характеристику в виде ряда по обратным степеням 2, то коэффициенты при Z^{-i} и являются ординатами переходного процесса для моментов времени $i\Delta_t$, где Δ_t — период дискретизации по времени.

Дискретный фильтр называется устойчивым, если переходные процессы в нем затухают с течением времени. Для исследования устойчивости составляется характеристическое уравнение фильтра путем приравнивания нулю его характеристического полинома.

Для нахождения характеристического полинома передаточная функция фильтра представляется в виде дробно-рациональной функции от 2. Полином, стоящий в знаменателе этой функции, называется характеристическим полиномом и записывается в виде

$$B^*(Z) = b_0 Z^l + b_1 Z^{l-1} + \quad 4\text{-} \ b_l$$

Соответствующее характеристическое уравнение тогда имеет вид

$$B^* \ (Z) = 0.$$

Для того чтобы фильтр был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни его характеристического уравнения были расположены внутри окружности единичного радиуса с центром в начале координат плоскости Z. Следовательно, задача исследования устойчивости сводится к изучению расположения корней характеристического уравнения относительно единичной окружности $Z = 1$. Для решения этой задачи используются критерии устойчивости дискретных систем автоматического управления, такие как критерий Рауса—Гурвица, Найквиста, Михайлова и др. В частности, при использовании критерия Рауса — Гурвица условия устойчивости фильтра формулируются в виде неравенств, накладывающих ограничения на коэффициенты характеристического полинома. Так например, для фильтра, степень характеристического полинома которого $l = 1$, условие устойчивости записывается в виде

$$b_0 + b_1 > 0, \ b_0 - b_1 > 0,$$

а для фильтра, степень характеристического полинома которого $l = 2$, эти условия имеют вид

$$b_0 + b_1 + b_2 > 0, \quad b_0 - b_1 + b_2 > 0, \quad b_0 - b_2 > 0.$$

С увеличением степени характеристического полинома свыше 3—4 применение рассматриваемого критерия существенно усложняется.

С применением других критериев можно ознакомиться по специальной литературе [11.

Для определения установившегося режима дискретного фильтра достаточно считать, что действие входного сигнала $x(i)$ началось не в момент времени $t = 0$, а в момент $t = -\infty$. При этом установившееся значение выходного сигнала определяется выражением

$$y_n = \sum_{r=0}^{\infty} x_{n-l}\,\eta_l, \qquad (3.3.15)$$

где η_l — коэффициенты функции веса, характеризующие степень участия входных сигналов с различной задержкой в формировании выходного сигнала в момент дискретного времени n.

Между передаточной функцией фильтра и его весовой функцией существует однозначное соотношение

$$K^*(Z) = \sum_{l}^{\infty} \eta_l Z^{-l}. \qquad (3.3.16)$$

Предположим теперь, что для получения выходного сигнала в фильтре используется только $k+1$ последних дискретных значений входного сигнала. Это значит, что в выражении (15) будут равны нулю коэффициенты весовой функции начиная с η_{k+1}, т. е.

$$\eta_{k+1} = \eta_{k+2} = \ldots = 0. \qquad (3.3.17)$$

Такой фильтр называется фильтром с конечной памятью.

Если же при формировании выходного сигнала используются все предыдущие значения входного сигнала ($k \to \infty$), то фильтр называется фильтром с бесконечной памятью.

Рассмотрим теперь задачу определения точностных характеристик дискретного фильтра в установившемся режиме работы. При этом, естественно, предполагается, что входной сигнал фильтра наряду с полезной составляющей S_n содержит аддитивную составляющую помехи N_n, т. е. $x_n = S_n + N_n$, а требуемым выходным сигналом фильтра является результат выполнения желаемой операции B над полезным сигналом S_n, т. е.

$$b_n = BS_n. \qquad (3.3.18)$$

Поскольку входные сигналы содержат наряду с полезными сигналами помеху, то величина выходного сигнала y_n будет в принципе отличаться от требуемой величины b_n. Разница между действительным и желаемым выходным сигналом

$$\varepsilon_n = y_n - b_n$$

представляет собой полную ошибку фильтра.

С учетом (15) и (18) можно записать (для фильтра с бесконечной памятью)

$$\sum_{l=0}^{\infty} + N_{n-l})\,\eta_l - BS_n,$$

или

$$\varepsilon_n = \left(\sum S_{n-l}\eta_l - BS_n\right) + \sum_{l}^{\infty} N_{n-l}. \qquad (3.3.19)$$

Из выражения (19) видно, что полная ошибка фильтра состоит из двух составляющих

$$\varepsilon_n = d_n + \xi_n,$$

где d_n — представляет собой динамическую ошибку фильтра, ξ_n — Случайную ошибку фильтра.

Величина динамической ошибки d_n позволяет судить о точности преобразования полезного сигнала, а величина случайной ошибки характеризует степень подавления (фильтрации) помех.

Рассмотрим более подробно вычисление динамической ошибки фильтра.

Будем полагать, что на любом отрезке времени, соизмеримом с длительностью переходного процесса в фильтре, полезный сигнал можно представить в виде полинома степени г, т. е.

$$S(t-\tau) = S_t - \dot{S}_t\tau + \ddot{S}_t\frac{\tau^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^r}{r!}S_t^{(r)}\tau^r,$$

где $S_t, \dot{S}_t, \ldots, S_t^{(r)}$ — производные полезного сигнала в момент времени t (при $\tau = 0$). На входе дискретного фильтра полиномиальный полезный сигнал целесообразно представить в виде ряда, коэффициентами которого являются не производные, а конечные разности. При этом получаем

$$S_{n-l} = S_n - \Delta^{(1)}S_n\,l + \Delta^{(2)}S_n\frac{l^2}{2!} + \ldots + (-1)^r\Delta^{(r)}S_n\frac{l^r}{r!}, \qquad (3.3.20)$$

где $\Delta^{(i)}S_n$ — конечная разность i-го порядка.

Требуемый сигнал на выходе фильтра можно представить в виде

$$b_n = BS_n = a_0S_n + a_1\Delta^{(1)}S_n + \frac{a_2}{2!}\Delta^{(2)}S_n + \ldots + \frac{a_r}{r!}\Delta^{(r)}S_n, \qquad (3.3.21)$$

где значения коэффициентов a_i ($i = 0, 1, \ldots, r$) определяются видом операции, выполняемой фильтром. Например, для фильтра, предназначенного для сглаживания и экстраполяции полезного сигнала $a_i = (\lambda T_0)^i$, причем при сглаживании $\lambda = 0$, а при экстраполяции λ равно интервалу экстраполяции, выраженному числом периодов дискретизации.

Пусть теперь фильтр обладает конечной памятью, равной N периодов дискретизации. Подставив выражение (20) и (21) в формулу для

динамической ошибки (19) и приняв во внимание (17), получим выражение

$$d_n = c_0 \delta_n + c_1 \Delta^{(1)} \delta_n + \ldots + c_r \Delta^{(r)} \delta_n, \qquad (3.3.22)$$

где величина

$$c_i = \mu_i - a_i/i! \qquad (3.3.23)$$

называется коэффициентом динамической ошибки,

$$\mu_i = \sum_{l=0}^{N} \frac{(-l)^l}{i!} \eta_l \quad i = 0, 2, \ldots, r, \qquad (3.3,24)$$

представляет собой выражение для моментов весовой функции фильтра.

Аналогично системам управления, фильтр называется астатическим (r + 1)-го порядка, если он не обладает динамической ошибкой при воспроизведении входного сигнала, точно описываемого полиномом степени r. Для получения фильтра с астатизмом (r + 1)-го порядка необходимо обеспечить равенство нулю всех r + 1 коэффициентов динамической ошибки, т. е. $c_i = \mu_i - a_i/i! = 0$, $i = 0,1, \ldots, r$. При $c_0 = 0$ получаем фильтр с астатизмом первого порядка, при $c_0 = c_1 = 0$ — фильтр с астатизмом второго порядка и т. д.

Если же степень полинома, описывающего полезный сигнал, не соответствует астатизму фильтра, то появляются динамические ошибки, определяемые неучтенными $r + 1$, $r + 2$, ... и т. д, производными входного сигнала.

Отметим в заключение, что для рекурсивных фильтров, выходной сигнал которых выражается через последнее значение входного сигнала и предыдущее значение выходного, коэффициенты динамической ошибки определяются из выражения [51

$$c_i = \left[\frac{1}{i} \frac{d^i K_E^*(Z)}{dZ^i} \right]_{Z=1}, \qquad (3.3.25)$$

где $K_E^*(Z)$ — передаточная функция фильтра по сигналу ошибки, определяемая из выражения $K_E^*(2) = 1 - K^*(Z)$.

Рассмотрим теперь задачу определения случайных ошибок фильтра в установившемся режиме работы. При этом для упрощения будем предполагать, что помеха представляет собой нормальный стационарный случайный процесс и выборки помехи не коррелированы между собой. В этом случае помеха на входе фильтра полностью характеризуется дисперсией $\sigma_{вх}^2$, а дисперсия случайной ошибки на выходе фильтра определяется из выражения

$$\sigma_{вых}^2 = \sigma_{вх}^2 \sum_{l=0}^{N} \eta_l^2. \qquad (3.3.26)$$

Качество фильтра с точки зрения подавления помехи можно характеризовать в относительных единицах

$$\varphi^2 = \frac{\sigma_{вых}^2}{\sigma_{вх}^2} = \sum_{l=0}^{N} \eta_l^2. \qquad (3.3.27)$$

Если вычисление φ^2 по формуле (27) затруднительно, то используется дискретный аналог формулы Парсеваля

$$\varphi^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|Z|=1} K^*(Z) K^*(-Z) Z^{-1} dZ. \qquad (3.3.28)$$

Интеграл в правой части выражения (28) удобно вычислять, используя замену переменной Z на ν, по правилу

$$\nu = (Z - 1)/(Z + 1).$$

Произведя такую замену, получаем

$$\varphi^2 = \frac{1}{\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{K^*(\nu) K^*(-\nu)}{(1+\nu)(1-\nu)} d\nu.$$

Введем обозначения

$$\frac{K^*(\nu)}{1+\nu} = \psi(\nu), \qquad \frac{K^*(-\nu)}{1-\nu} = \psi(-\nu).$$

Тогда

$$\varphi^2 = \int_{-j\infty}^{+j\infty} \psi(\nu) \psi(-\nu) d\nu. \qquad (3.3.29)$$

Интеграл в правой части выражения (29) аналогичен интегралу, используемому при вычислении квадратичных интегральных оценок непрерывных систем и имеющему вид [10]

$$I_2 = \frac{1}{} \int_{}^{+j\infty} Y(p) Y(-p) dp, \qquad (3.3.30)$$

где

$$Y(p) = \frac{c(p)}{d(p)}, \quad Y(-p) = \frac{c(-p)}{d(-p)},$$

$$c(p) = \sum_{l=0}^{m} c_l p^l, \quad d(p) = \sum_{l=1}^{k} d_l p^l,$$

c_l и d_l — постоянные коэффициенты; $m < kp$ — комплексная переменная.

Для интегралов вида (30) составлены удобные таблицы, которые приведены в [10].

Таким образом, интеграл (28) может быть сведен к интегралу (30). После вычисления последнего дисперсия случайной ошибки определяется по формуле

$$\sigma^2_{\text{вых}} = 2 I_2 \sigma^2_{\text{вх}}. \qquad (3.3.31)$$

Вычисление дисперсии случайных ошибок при коррелированных входных сигналах представляет собой значительно бо́льшую трудность и здесь не рассматривается.

3.4. Анализ процесса обработки радиолокационной информации как процесса массового обслуживания

Как уже отмечалось, для анализа процессов обработки информации о множестве целей на ЦВМ с ограниченной производительностью необходимо применять методы теории массового обслуживания. Система обработки информации в этом случае представляется в виде соответствующей системы массового обслуживания.

Любая система массового обслуживания взаимодействует с источниками требований (заявок) на обслуживание. В радиолокационной системе в качестве источников требований на обслуживание выступают воздушные или космические объекты (цели), находящиеся в зоне



Рис, 3.4. Представление системы обработки радиолокационной информации в виде системы массового обслуживания.

обзора РЛС. Эти источники требований взаимодействуют с системой обслуживания не непосредственно, а через датчики информации о требованиях, роль которых выполняют РЛС. В приемном устройстве РЛС требования преобразуются (кодируются) в сигналы.

Упорядоченная в процессе обзора временная последовательность сигналов, поступающих для обработки, образует входящий поток требований системы массового обслуживания (рис. 3.4). Элементарные требования входящего потока возникают в случайные моменты времени. Поэтому статистически входящий поток характеризуется законом распределения интервалов между двумя подряд следующими требованиями.

Система обслуживания в данном случае представляет собой комплекс вычислительных средств, предназначенных для обработки радиолокационной информации (рис. 3.4). Для обслуживания каждого требования затрачиваются различные (в общем случае, случайные) временные интервалы. Статистически процесс обслуживания требований в системе характеризуется законом распределения времени обслуживания.

Так как в зоне обзора РЛС цель может находиться лишь ограниченное время, а система обслуживания обладает ограниченной производительностью, то часть требований, поступивших в систему, может быть обслужена только частично или не обслужена вовсе. Поэтому выходящий поток рассматриваемой системы массового обслуживания состоит как из обслуженных, так и необслуженных требований. В содержательном смысле выходящий *поток обслуженных* требований в системе обработки радиолокационной информации представляет собой последовательность оценок параметров сопровождаемых целей.

В данном параграфе рассматриваются характеристики процесса массового обслуживания при обработке радиолокационной информации и приводятся необходимые сведения из теории массового обслуживания, которые потребуются в дальнейшем.

3.4.1. Характеристика входящего потока для системы обработки радиолокационной информации

Первой задачей, которая возникает при представлении системы обработки в виде системы массового обслуживания, является изучение потока требований, которые поступают в обслуживающую систему. При этом чрезвычайно важным является количественное описание этого потока.

Процесс поступления требований на обслужийание есть случайный процесс. Этот процесс может быть описан некоторой функцией $X(t)$, определяющей число требований, нуждающихся в обслуживании за промежуток времени $(0, t)$. Функция $X(t)$ может принимать только целочисленные положительные значения. Поэтому для полного определения потока требований достаточно знать, какова будет вероятность того, что за время $(0, t_1)$ поступит k_1 требований, за время $(0, t_2)$ — k_2 требований и т. д.

Задание функции

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n; k_1, k_2, \ldots, k_n) = P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \ldots,$$

для любых $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ полностью определяет поток требований. В частности, можно определить вероятность того, что за промежуток времени $(0, t)$ поступит точно k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ требований. Вероятность этого события равна

$$f(t, k) = P\{X(t) = k\} = P_k(t).$$

Зная функцию $f(t, k)$, можно также найти функцию $w(t)$, представляющую собой плотность распределения длительности интервалов времени между двумя требованиями потока.

Потоком источников требований для радиолокационной системы является поток целей, влетающих в зону обзора РЛС. В дальнейшем принимается, что этот поток является простейшим, т. е. потоком, обладающим свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия:

Для простейшего потока распределение длительности интервалов между соседними целями является показательным, т. е.

$$w(t) = \Lambda_{ц} \exp(-\Lambda_{ц} t), \qquad (3.4.1)$$

а вероятность появления в промежутке времени $(0, t)$ ровно k целей определяется законом Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\Lambda_ц t)^k}{k!} \exp(-\Lambda_ц t), \qquad (3.4.2)$$

где $\Lambda_ц$ — параметр потока, равный среднему числу целей, пересекающих внешнюю границу зоны обзора в единицу времени.

При влете в зону обзора РЛС цель поступает на обслуживание радиолокационной системой. Обслуживание прекращается, когда цель покидает зону обзора. Время нахождения цели в системе массового обслуживания обычно можно считать случайной величиной, зависящей от конфигурации зоны обзора и положения траектории относительно точки стояния РЛС. Распределение этой случайной величины обычно принимается равномерным.

Зная среднее время $\bar{t}_э$ пребывания цели в зоне обзора и параметр потока $\Lambda_ц$, можно подсчитать среднее число целей, одновременно находящихся в зоне обзора РЛС: $\bar{N}_{цэ} = \Lambda_ц \bar{t}_э$,

В дальнейшем предполагается, что цели распределены в зоне обзора равномерно с одинаковой средней плотностью на единицу ее объема.

На выходе приемного устройства РЛС пространственная картина расположения целей в зоне обзора преобразуется во временную последовательность соответствующих радиолокационных сигналов. Последние и являются требованиями входящего потока для системы обработки. Поток сигналов, отраженных от цели, также принимается простейшим с параметром $\lambda_ц = N_{цэ} T_0$, где T_0 — период просмотра зоны обзора.

Гипотеза о простейшем потоке отраженных от целей сигналов на входе системы обработки во многих случаях является грубым допущением. Основное возражение вызывает допущение об отсутствии последействия в потоке, так как цели, как правило, группируются в зоне обзора определенным образом. Не всегда выполняется также условие ординарности потока, особенно, когда система обработки получает информацию от нескольких источников по отдельным каналам связи.

Тем не менее, применение гипотезы о простейшем входящем потоке требований при проектировании системы обработки радиолокационной информации может быть допущено, по крайней мере, по двум причинам: I) ввиду того, что анализ системы массового обслуживания при призвольном входящем потоке является более сложным; 2) ввиду того, что простейший поток является для системы массового обслуживания наиболее трудным, так что система, спроектированная для его обслуживания, дает гарантию успешного обслуживания других возможных потоков с тем же параметром [1].

Наряду с полезными сигналами, отраженными от целей, на вход системы обработки в качестве требований на обслуживание поступают ложные сигналы, образованные внутренними и внешними помехами. Поток ложных требований естественного происхождения (от внутренних шумов, гидрометеоров и т. д.) с достаточной степенью точности можно считать простейшим. Для искусственных помех гипотеза о простейшем потоке может быть принята, очевидно, с большими допущениями.

3.4.2. Характеристика системы обработки радиолокационной информации как системы массового обслуживания

Основной проблемой теории массового обслуживания является получение описания процесса функционирования системы устройств (аппаратов), предназначенных для обслуживания входящего потока требований. Под обслуживающей системой при этом подразумеваются как устройства, осуществляющие непосредственное обслуживание требований, так и устройства, предназначенные для хранения очереди подлежащих обслуживанию требований.

В общем случае система обслуживания характеризуется:

1) числом устройств (каналов), которые могут обслуживать требования одновременно;

2) числом устройств (мест), предназначенных для хранения очереди на обслуживание;

3) дисциплиной обслуживания;

4) распределением времени обслуживания одного требования.

При обработке радиолокационной информации в качестве системы обслуживания применяются отдельные ЦВМ или комплексы ЦВМ. Каждая ЦВМ может одновременно обслуживать только одно требование, т. е. является одноканальной системой обслуживания, а комплекс из n параллельно работающих ЦВМ — n-канальной системой.

Обычно в системе обработки организуется очередь требований, ожидающих обслуживания. Такая система массового обслуживания называется системой с ожиданием (очередью). Длительность ожидания обслуживания и соответственно число ожидающих обслуживания требований, являются случайными величинами, зависящими от статистических характеристик входящего потока и интенсивности обслуживания.

Дисциплина обслуживания определяет порядок выбора требований для обслуживания из числа уже поступивших и находящихся в очереди. Различают обслуживание требований в порядке их поступления на вход системы (кто раньше пришел, тот раньше обслуживается), случайный выбор требований из очереди и обслуживание с приоритетом, когда преимущество в обслуживании представляется наиболее важным (в соответствии с установленным критерием оценки важности) требованиям.

Обслуживание требований в системе обработки радиолокационной информации сводится к реализации заранее разработанных алгоритмов. Время, затрачиваемое на каждую реализацию алгоритма, по многим причинам является случайной величиной и, следовательно, может быть задано только статистически. Если обозначить время обслуживания через τ, то исчерпывающей его характеристикой как случайной величины, будет функция распределения $W(t) = P(\tau < t)$, $t \geqslant 0$, или плотность распределения $w(\tau)$.

В качестве моментов закона распределения времени обслуживания обычно берут:

среднюю длительность операции обслуживания $\bar{\tau}$ (или среднюю скорость обслуживания μ) $\bar{\tau} = \frac{1}{\mu} = \int_0 \tau\, w(\tau) d\tau$,

дисперсию времени обслуживания $\sigma_\tau^2 = \int_0 (\tau - \bar{\tau})^2 w(\tau) d\tau$.

Особое место в теории массового обслуживания занимают системы с экспоненциальным распределением времени обслуживания, для которых $w(\tau) = \mu \exp(-\mu\tau)$.

Дисперсия времени обслуживания в этом случае равна $1/\mu^2$.

Экспоненциальный закон времени обслуживания является наиболее согласованным с пуассоновским распределением входящего потока, что позволяет достаточно просто производить аналитический расчет систем массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания.

В некоторых системах процесс обслуживания осуществляется рядом элементарных линий, каждая из которых имеет экспоненциальное распредление времени обслуживания. Например, они могут состоять из k идентичных линий со средней длительностью обслуживания $\bar{\tau}/k = 1/k\mu$. Плотность вероятности времени обслуживания для такой системы определяется выражением

$$w(\tau) = \mu k \frac{(\mu k \bar{\tau})^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\mu k \tau), \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

которое называется специальным распределением Эрланга.

В выражении (3) случаю $k = 1$ соответствует экспоненциальное распределение времени обслуживания. При увеличении k дисперсия времени обслуживания уменьшается, при $k \to \infty$ обслуживание одного требования будет выполняться точно за $1/\mu$ единиц времени.

Существуют и другие распределения, которые могут быть представлены несколькими экспонентами с различной скоростью затухания. Представление распределения времени обслуживания в виде комбинации экспоненциальных составляющих позволяет аппроксимировать процесс обслуживания марковским процессом и получить аналитическое решение задачи.

К сожалению, в системах обработки радиолокационной информации, реализованных на ЦВМ, плотность распределения времени обслуживания обычно отличается от экспоненциальной и не сводится к эрланговским распределениям. Это приводит к необходимости исследования вопроса о законах распределения времени обслуживания в каждом конкретном случае. Соображения о законах распределения времени обслуживания при реализации алгоритмов обработки радиолокационной информации на ЦВМ рассматриваются в дальнейшем (гл. 5 и 7).

3.4.3. Краткая характеристика выходящих потоков системы обработки радиолокационной информации

Обычно обработка радиолокационной информации производится рядом последовательно расположенных вычислительных центров, оборудованных ЦВМ, например, в соответствии с основными этапами обработки, рассмотренными во введении. На каждый последующий этап обработки поступают лишь требования, которые были полностью обслужены на предыдущем этапе. Кроме того, в процессе обработки происходит преобразование потоков: входящий поток для первичной обработки — это поток элементарных сигналов, а выходящий поток — поток радиолокационных отметок, входящий поток для вторичной обработки — это поток отметок, а выходящий — поток траекторий и т. д.

Таким образом, в процессе обработки выходящий поток предыдущего этапа является входящим потоком последующего. Поэтому важное значение приобретают статистические характеристики выходящих потоков в процессе обработки.

Непосредственное определение статистических характеристик выходящих потоков по статистическим характеристикам входящих потоков и законам распределения времени обслуживания вызывает существенные затруднения, так как в теории массового обслуживания, вообще говоря, отсутствуют регулярные приемы решения этой задачи. Поэтому в каждом конкретном случае законы распределения выходящих потоков определяются экспериментально, или на основе соображений, не относящихся к теории массового обслуживания.

В нашем случае обычно удается представить выходящий поток каждого из элементов системы обработки в виде простейшего с известной интенсивностью. В качестве соображений в пользу такого заключения можно привести следующие. Поток сигналов на выходе первичной обработки является потоком отметок от целей. Если верно условие о равномерном распределении целей в зоне обзора, то поток истинных отметок будет простейшим. Аналогично простейшим будет и поток ложных отметок. Выходящий поток системы вторичной обработки представляет собой сумму потоков сообщений об истинных и ложных траекториях, относительно каждого из которых также можно высказать аналогичные соображения. Если потоки сообщений на выходе каждой РЛС являются простейшими, то и поток на входе системы объединения информации будет простейшим.

Численные значения параметров соответствующих потоков могут быть определены с учетом временных соотношений между параметрами входящих потоков и интенсивностью обслуживания.

3.4.4. Методы анализа систем массового обслуживания с ожиданием в установившемся режиме работы

В данном пункте в ознакомительном порядке излагаются основные положения теории массового обслуживания, применительно к однолинейным системам с ожиданием, т. е. к системам с одним обслуживающим аппаратом и «бункером» для хранения очереди. В качестве метода анализа выбран так называемый диф-

ференциальный метод, в основу которого положено представление процесса обслуживания в виде дискретного марковского процесса (цепи) с конечным или счетным множеством состояний.

При аналитическом исследовании процессов массового обслуживания классическим является случай простейшего входящего потока требований и показательного (экспоненциального) распределения времени обслуживания. В этом случае состояние системы массового обслуживания полностью определяется числом ν находящихся в ней требований. Действительно, в связи со специфическими особенностями показательного закона, вероятность того, что следующее требование поступит в момент $(t + \Delta t_1)$ и что обслуживание требования, находящегося в системе, закончится в момент $(t + \Delta t_2)$, не зависит от течения процесса массового обслуживания в прошлом. Следовательно, случайный процесс ν (t) является дискретным марковским процессом с непрерывным временем.

Иначе обстоит дело, когда закон распределения времени обслуживания является произвольной функцией, Тогда вероятность выхода требования из системы в течение промежутка времени $(t + \Delta t)$ может зависеть от момента начала обслуживания этого требования, а процесс изменения состояний ν (t) уже не является марковским.

В теории массового обслуживания разработан специальный метод сведения немарковских процессов к цепям Маркова. Этот метод называется методом вложенной цепи Маркова [8] и позволяет описывать простой цепью Маркова функционирование системы массового обслуживания при простейшем входящем потоке и произвольном законе распределения времени "обслуживания.

При введении понятия вложенной цепи Маркова существенно используется то обстоятельство, что в случае простейшего входящего потока моменты времени когда требования покидают систему, являются такими моментами, что информация о поведении системы до этого момента не влияет на прогноз дальнейшего поведения процесса.

Если t_{b1}, t_{b2}, ... означает последовательность моментов выхода требований, то стохастическая последовательность ν $(t_{b\,l} + 0)$ числа требований в системе в моменты, непосредственно следующие за моментами $t_{b\,l}$, образует простую цепь Маркова. Основным соображением для введения вложенной цепи Маркова является последующее применение аппарата цепей и процессов Маркова для анализа широкого класса систем массового обслуживания. Последнее обстоятельство имеет большое методологическое значение, так как позволяет, по крайней мере, с принципиальной точки зрения, подходить к исследованию различных сторон функционирования системы обработки информации на основе единого математического аппарата.

Нас в дальнейшем будет интересовать стационарный режим работы системы массового обслуживания. Поэтому одной из важных задач является нахождение условий, при которых стационарный режим существует. Доказательство его существования связывают с доказательством существования стационарного случайного процесса, описывающего функционирование системы. Для этого в свою очередь используется понятие регенерирующего процесса. Регенерирующим называется процесс ν (t), у которого имеется особое состояние ν_0, обладающее тем свойством, что после попадания в это состояние дальнейший ход процесса не зависит от того, каким образом он протекал до этого момента. Моменты, соответствующие состоянию ν_0, называются моментами (точками) регенерации. Обозначим через $\tau_l = t_{l+1} - t_l$ интервал времени между соседними точками регенерации. Этот интервал ярляется случайной величиной.

Доказано [1], что процесс обслуживания обладает стационарным распределением, если выполняется какое-либо из двух условий:

1. Математическое ожидание τ_l конечно.
2. С вероятностью, равной единице

$$\lim N(0, T)/T > 0,$$

где N (0, T) — число точек регенерации в интервале (0, Г).

Как показано в [8], для выполнения этих условий должно выполняться соотношение $\lambda/\mu < 1$.

В качестве иллюстрации применения математической теории цепей Маркова для анализа систем массового обслуживания в установившемся режиме работы,

возьмем сначала простейший случай, когда интервалы между требованиями входящего потока распределены по показательному закону с параметром λ и время обслуживания распределено по тому же закону с параметром μ.

Пусть Xdt — вероятность поступления требования в интервале dt, а μdt — вероятность окончания обслуживания требования в этом интервале. Условимся далее считать, что в интервале $(t, t + dt)$ возможно появление не более одного требования входящего потока. Аналогично в этом интервале возможно окончание обслуживания не более одного требования и невозможно одновременное наступление двух событий: появление требования входящего потока и окончание обслуживания очередного требования.

Как и ранее, обозначим ν_i состояние, при котором в системе находится i требований, $i = \overline{0, M+1}$, где M — емкость устройства хранения очереди.

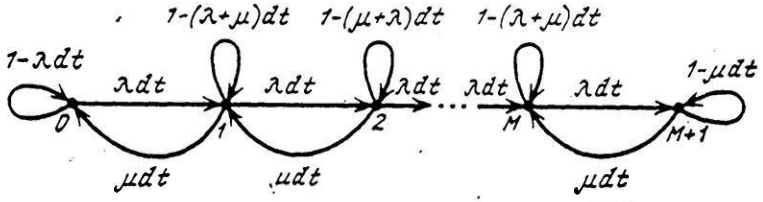


Рис. 3.5. Граф со случайными переходами для системы массового обслуживания (входящий поток простейший, закон распределения времени обслуживания показательный).

При сделанных обозначениях и допущениях матрица вероятностей перехода П рассматриваемого процесса, элементы которой π_{ij} характеризуют вероятности перехода из состояния i в момент времени t в состояние j в момент времени $(t + dt)$, имеет вид

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & M+1 \\ 0 & 1-\lambda\,dt & \lambda\,dt & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \mu\,dt & 1-(\lambda+\mu)\,dt & Xdt & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \mu\,dt & 1-(\lambda+\mu)\,dt & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\mu\,dt \end{array}. \quad (3.4.4)$$

Соответствующий граф со случайными переходами изображен на рис. 3.5.

Рассматриваемая цепь Маркова с конечным числом состояний является неприводимой и апериодической. Следовательно, существует стационарное распределение вероятностей состояний P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, M+1)$, являющееся решением матричного уравнения

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\Pi$$

с присоединенным к нему условием нормировки $\sum_{i=0}^{M+1} P_i = 1$.

Решение этого матричного уравнения получается в виде

$$\frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\,\rho^i,$$

где $\rho = \lambda/\mu$ называется коэффициентом загрузки системы.

Пусть теперь в систему поступает простейший поток требований с параметром λ, а закон распределения времени обслуживания $w(\tau)$ произвольный (но известный). Как уже отмечалось, процесс изменения состояний системы в этом случае может быть представлен вложенной цепью Маркова, переходы в которой происходят в моменты времени t_{bi} окончания обслуживания очередного (i-го)

требования. Элементами матрицы переходных вероятностей для вложенной цепи Маркова являются величины

$$\pi_{ij} = P\,[\nu\,(t_{bi+1}) = j \mid \nu\,(t_{bi}) = i],$$

которые непосредственно зависят от распределения числа требований, поступивших в интервале $\tau_i = (t_{b\,i+1} - t_{bi})$. При $\nu\,(t_b\,i) > 0$ интервал; τ_i равен продолжительности обслуживания $(i+1)$-го требования.

Вероятность поступления k требований за время обслуживания одного требования

$$p_k = \int_0^\infty \omega\,(\tau)\,\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\exp\,(-\lambda\tau)\,d\tau. \qquad (3.4.5)$$

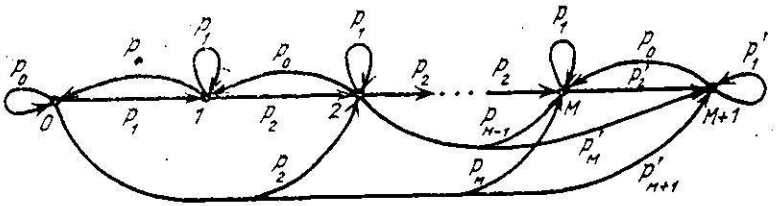


Рис. 3.6. Граф со случайными переходами для системы массового обслуживания (входящий поток простейший, закон распределения времени обслуживания произвольный).

Если $\nu\,(t_b\,i) = 0$, то первое требование, которое поступает после момента $t_b\,i$, немедленно начинает обслуживаться, а число требований, которые поступят за время обслуживания этого требования имеет распределение (5).

Учитывая, что в рассматриваемой системе один обслуживающий прибор, а емкость устройства для хранения очереди равна M, имеем

$$\pi_{0k} = p_k, \quad k = \overline{0,\ M},$$
$$\pi_{ik} = p_{k-i+1}, \quad i > 0, \quad /=\overline{0,M},$$
$$\pi_{i,\,M+1} = \sum_{k=M+i+1}^{\infty} p_k = p'_k.$$

Следовательно, матрица переходных вероятностей вложенной цепи Маркова имеет вид

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & \dots & M & M+1 \\ 0 & \mathbf{P_0} & p_1 & p_2 & \cdots & \boldsymbol{P_M} & p'_{M+1} \\ 1 & \mathbf{P_0} & p_1 & p_2 & \cdots & \boldsymbol{P_M} & p'_{M+1} \\ 2 & \mathbf{0} & p_0 & p_1 & \cdots & p_{M-1} & p'_M \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M & 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{Pi} & p'_2 \\ M+1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & p_0 & p'_1 \end{array}.$$

Соответствующий этой матрице граф со случайными переходами изображен на рис. 3.6.

Вложенная цепь Маркова также является неприводимой и апериодичеокой и для нее справедливо записанное выше матричное уравнение и условие норми-

ровки. Из решения матричного уравнения получаются следующие окончательные выражения для финальных вероятностей состояний

$$P_i = b_i P_0, \quad i = 1, 2, \ldots, M+1,$$

где

$$b_i = \frac{[b_{i-1}(1-p_1) - b_{i-2}p_2 - b_{i-3}p_3 - \ldots - b_1 p_{i-1} - p_{i-1}]}{p_0}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots M+1,$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{M+1}}. \qquad (3.4.6)$$

Формулы (6) иллюстрируют применение метода вложенной цепи Маркова для аналитического расчета вероятностных характеристик одноканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью при простейшем входящем потоке и произвольном распределении времени обслуживания. Однако этот метод дает возможность исследовать совершенно аналогичным образом функционирование системы и в случае, обратном рассмотренному, т. е. когда закон распределения времени обслуживания показательный, а входящий поток — с произвольным законом распределения.

Знание предельных (финальных) вероятностей состояний позволяет непосредственно определять следующие характеристики системы:

1. Вероятность того, что очередное требование получит отказ в обслуживании. Так как по условию очередному требованию будет отказано в обслуживании тогда, когда в очереди уже стоит M ранее поступивших требований, то вероятность отказа равна

$$P_{\text{отк}} = P_{M+1}. \qquad (3.4.7)$$

2. Математическое ожидание длины очереди, т. е. среднее число требований, ожидающих начала обслуживания, которое вычисляется по формуле

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{M+1} (i-1) P_i. \qquad (3.4.8)$$

Рассмотрим теперь один из методов непосредственного вычисления моментов распределения длины очереди и времени пребывания требования в системе с произвольным законом распределения времени обслуживания.

Обозначим через n_i случайное число требований, находящихся в очереди в момент окончания обслуживания i-го требования, а через k_i — число требований, поступивших в систему за время обслуживания требования с номером i. Значения n_i и k_i являются случайными величинами, связанными соотношениями:

$$n_i = \begin{cases} n_{i-1} + k_i - 1, & n_{i-1} > 0, \\ k_i, & n_{i-1} = 0. \end{cases} \qquad (3.4.9)$$

Первое соотношение означает, что очередь после обслуживания i-го требования равна сумме, уменьшенной на единицу очереди, оставшейся после обслуживания $(i-1)$-го требования, и числа требований, поступивших за время обслуживания i-го требования. Второе соотношение означает, что при отсутствии очереди в момент начала обслуживания i-го требования очередь, оставшаяся в момент окончания его обслуживания, равна числу требований, поступивших в систему за время обслуживания i-го требования.

Соотношение (9) можно записать в свернутом виде

$$n_i = n_{i-1} - \delta(n_{i-1}) + k_i, \qquad (3.4.10)$$

где

$$\delta(n_{i-1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } n_{i-1} > 0, \\ 0, & \text{если } n_{i-1} = 0. \end{cases}$$

Чтобы определить статистические характеристики n_i, необходимо знать статистические характеристики всех составляющих, входящих в выражение (10).

При простейшем входящем потоке и произвольном распределении времени обслуживания закон распределения k_i задается выражением (5), а математическое ожидание и дисперсия равны соответственно

$$M(k_i) = \bar{k} = \lambda \bar{\tau} = \rho, \quad \sigma_k^2 = \rho^2 + \lambda^2 \sigma_\tau^2.$$

При $\rho < 1$ существует стационарное распределение вероятности

$$\lim_{i \to \infty} P(n_i = N) = P_N.$$

В стационарном режиме вероятностные свойства n_{i-1} и n_i одинаковы, следовательно, $M(n_{i-1}) = M(n_i)$ и определяя математическое ожидание выражения (10), получим $M[\delta(n_{i-1})] = \rho$. Кроме того, очевидно, $n_i \delta(n_i) = n_i$.

Теперь можно определить математическое ожидание $M(n_i)$. Для этого возведем в квадрат выражение (10) и применим почленно операцию вычисления математического ожидания. В результате получим

$$M[n_i^2] = M[n_{i-1}^2] + M[\delta^2(n_{i-1})] + M[k_i^2] + 2M[n_i k_i] - 2M[k_i \delta(n_{i-1})] - 2M[n_{i-1}].$$

Так как в установившемся режиме $M[n_i^2] = M[n_{i-1}^2]$ и так как n_i и n_{i-1} независимы, из полученного уравнения получим

$$M[n_i] = \bar{n} = \rho + (\rho^2 + \lambda^2 \sigma_\tau^2)/2(1 - \rho). \qquad (3.4.11)$$

Обозначим через t_i время пребывания i-го требования в системе. Тогда, если обслуживание требований происходит в порядке их поступления, то

$$M[t_i] = \bar{t} = (1/\lambda) M[n_i].$$

Следовательно,

$$\bar{t} = \bar{\tau} + \frac{\rho^2 + (1 + \sigma_\tau^2/\bar{\tau}^2)}{2(1 - \rho)}. \qquad (3.4.12)$$

Второй член выражения (12) представляет собой среднее время ожидания обслуживания для поступившего на вход системы требования.

Полученные выражения используются в дальнейшем при расчете параметров ЦВМ, предназначенных для обработки радиолокационной информации.

3.4.5. Цифровая вычислительная машина как система массового обслуживания

Процесс обработки радиолокационной информации сводится к последовательному просчету целого ряда частных алгоритмов, которые в совокупности образуют комплексный алгоритм системы. Поэтому в общем случае задача проектирования цифровой системы обработки с применением теории массового обслуживания состоит в расчете основных технических параметров ЦВМ, необходимых для реализации комплексного алгоритма системы в реальном масштабе времени.

Решение указанной задачи в такой общей постановке является в настоящее время делом чрезвычайно трудным, возможным разве что при использовании статистического моделирования на универсальных ЦВМ большой производительности. При этом возникает целый ряд проб-

лем, далеко выходящих за рамки собственно теории цифровой обработки радиолокационной информации.

В дальнейшем в книге речь будет идти не о расчете технических параметров ЦВМ в целом, а об оценке требований к основным параметрам ЦВМ при реализации конкретных алгоритмов робработки.

Как известно, ЦВМ, построенная по универсальной схеме, характеризуется большим числом технических параметров (число только существенных параметров достигает двух десятков и более [2]). Естественно, не все из них в одинаковой степени важны и должны учитываться при оценке реализуемости алгоритмов с точки зрения теории массового обслуживания. Кроме того, многочисленность учитываемых параметров в сильной степени затрудняет решение самой задачи оценки. Поэтому прежде всего необходимо выбрать немногочисленную группу параметров ЦВМ, подлежащих расчету, которые с одной стороны характеризовали бы качество работы ЦВМ как системы массового обслуживания, а с другой были бы связаны однозначными зависимостями с показателями качества выдаваемой системой информации.

В дальнейшем в качестве таких параметров выбираются:

— требуемое быстродействие арифметического устройства (АУ) ЦВМ при реализации алгоритма;

— число ячеек оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) ЦВМ, занятых в процессе реализации алгоритма:

— число ячеек буферного запоминающего устройства (БЗУ) ЦВМ, необходимых при реализации алгоритма в реальном масштабе времени.

Остановимся на краткой характеристике перечисленных параметров.

Под быстродействием ЦВМ (которое определяется, главным образом, быстродействием АУ) понимается среднее число операций, выполняемых в единицу времени при реализации программы конкретной задачи и определяемое по формуле $V = 1/\Sigma p_i \tau_i$, где τ_i — время выполнения операции i-го типа; p_i — частота выполнения операции i-го типа. Таким образом, в общем случае быстродействие ЦВМ меняется от задачи к задаче. Чтобы избавиться от этого недостатка, вводится понятие приведенного быстродействия

$$V_{пр} = 1/\tau_{пр},$$

где $\tau_{пр}$ — время, затрачиваемое на выполнение одной приведенной операции (например, короткой). Приведенное быстродействие не зависит от решаемой задачи и позволяет с некоторой степенью достоверности производить ориентировочное сравнение ЦВМ по этому параметру.

С быстродействием ЦВМ непосредственно связан такой показатель качества системы обработки, как время, затрачиваемое на реализацию алгоритма и определяемое по формуле

$$\tau = N_{пр}/V_{пр},$$

где $N_{пр}$ — количество приведенных операций, требуемых для реализации алгоритма."

Количество операций алгоритма, в свою очередь, находится в непосредственной зависимости от степени соответствия алгоритма физической сущности описываемых явлений (оптимальность алгоритма), степени его проработки, качества применяемых численных методов решения, качества программирования и т. д. Обычно оптимальные алгоритмы более сложны и требуют для своей реализации большого числа операций. Упрощенные алгоритмы требуют меньшего числа операций при машинной реализации, однако основные качественные характеристики таких алгоритмов по обработке информации хуже, чем у оптимальных. Таким образом, имееется непосредственная связь между качественными характеристиками алгоритма и требуемой производительностью ЦВМ. Эту связь необходимо иметь в виду как при разработке алгоритмов, так и при выборе технических параметров ЦВМ.

Оценка объема вычислительной работы, обусловленного содержанием алгоритма и общими закономерностями его реализации на ЦВМ, производится в следующей последовательности [21:

— составление граф-схемы машинного алгоритма (программы в условных адресах), вершины которого объединяют группы подряд следующих операций, выполняемых без проверки логических условий;

— определение количества приведенных операций, представленных вершинами графа;

— определение вероятности использования вершин графа при реализации алгоритма;

— получение формальных зависимостей, характеризующих объем вычислительной работы.

Обычно в качестве функции, характеризующей объем вычислительной работы при реализации алгоритма, ищется плотность распределения числа приведенных операций или плотность распределения времени, затрачиваемого на реализацию алгоритма, что аналогично нахождению плотности распределения времени обслуживания в системе массового обслуживания.

Загрузка ОЗУ ЦВМ оценивается числом многоразрядных ячеек, занятых в процессе реализации алгоритма. Это число также непосредственно связано с характером (сложностью) алгоритма обработки и, кроме того, зависит от следующих факторов:

— способа преобразования многомерной пространственно-временной обстановки в зоне обзора РЛС (многомерного образа) в одномерную временную последовательность требований, подлежащих обработке;

— способа записи входящих сообщений (требований) и результатов промежуточных вычислений в ОЗУ;

— критерия очистки ОЗУ от устаревшей информации.

Обычно число исходных данных и промежуточных результатов, которые необходимо хранить при реализации алгоритма, изменяется случайным образом от реализаци к реализации. Следовательно, загрузка ОЗУ является случайной величиной и задача в конечном счете состоит в определении закона распределения этой случайной величины, что

соответствует определению закона распределения числа занятых каналов в многоканальной системе массового обслуживания.

Поскольку ЦВМ одновременно может обрабатывать только одно сообщение, то все последующие сообщения, поступившие в интервале времени, когда машина занята, должны быть записаны в БЗУ, откуда они выбираются для обработки в заданной последовательности. При проектировании ЦВМ возникает задача выбора объема БЗУ исходя из того, чтобы при заданном потоке требований и известном времени обработки каждого из них вероятность потери новых требованпй из-за ограниченного объема БЗУ была мала. Эта задача также относится к классу задач массового обслуживания.

В соответствии с обоснованными здесь основными параметрами ЦВМ, подлежащими оценке методами теории массового обслуживания, в дальнейшем будем представлять ЦВМ в виде трехузловой системы массового обслуживания, структурная схема которой приведена на рис. 3.7.

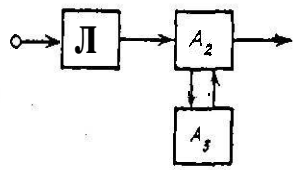


Рис. 3.7. Представление ЦВМ в виде трехузловой системы массового обслуживания.

Узел A_1 этой системы моделирует работу буферного запоминающего устройства (БЗУ). Требования входящего потока записываются в БЗУ в порядке поступления. Выбор сообщений из БЗУ для дальнейшей обработки производится в порядке простой очереди. При анализе БЗУ считается безынерционным устройством (время записи и считывания равно нулю).

Узел A_2 моделирует работу АУ и является одноканальным прибором массового обслуживания. Функционирование узла A_2 заключается в обработке требований, выбираемых из БЗУ. Эта обработка сводится, в основном, к идентификации нового требования с ранее поступившими и хранящимися в ОЗУ. При анализе АУ принимается, что программы вычислений записаны в специальном ЗУ и время на выбор и ввод программ не расходуется.

Узел $Л_3$ моделирует работу ОЗУ. В ОЗУ хранятся только результаты промежуточных вычислений. Время занятости многоразрядной ячейки ОЗУ определяется продолжительностью хранения промежуточных результатов обработки по каждому сигналу (траектории) и является случайной величиной. Поэтому ОЗУ можно считать многоканальной системой массового обслуживания с потерями.

Таким образом, ЦВМ можно рассматривать как систему массового обслуживания, в которой:

— возможны потери требований из-за ограниченной емкости БЗУ и ОЗУ;

— требования, записанные в БЗУ, обязательно обслуживаются;

— время ожидания обслуживания в очереди есть случайная величина, зависящая от интенсивности входящего потока и скорости обслуживания.

Такие системы называются системами массового обслуживания с ограниченной очередью (ограниченным временем ожидания).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко В. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966.
2. Голубев-Новожилов Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М., «Сов. радио», 1967.
3. Конторов Д. С, Голубев-Новожилов Ю. С. Введение в радиолокационною системотехнику. М., «Сов. радио», 1971.
4. Кузьмин С. 3. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.
5. Перов В. П. Статистический синтез импульсных систем. М., «Сов. радио», 1969.
6. Цветков Л. Г, Принципы количественной оценки эффективности радиоэлектронных средств. М., «Сов. радио», 1971.
7. Цыпкин Я. 3. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1959.
8. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложение. Пер. с франц. Под ред. И. Н. Коваленко. М., «Мир», 1965.
9. Кокс Д., Смит В. Теория очередей. Пер. с англ. Под ред. А. Д. Соловьева. М., «Мир», 1966.
10. Ньютон Д., Гулд Л., Кайзер Д. Теория линейных следящих систем. М., Физматгиз, 1961.
11. Федоров С. М., Литвинов А. П. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. М., «Энергия», 1965.
12. Фурман Я. А. Нахождение траекторий целей по данным радиолокационного наблюдения при учете связи между соседними отсчетами. — В кн.: Теория и техника радиолокации. М., «Машиностроение», 1968.
13. Brookner E. Recurrent Events in a Markov Chain — «Jnformation and Control». 1966, v. 9, Xs 3.
14. Уакс Н. Улучшение отношения сигнал/шум и статистика семейств следов траекторий. — «Вопросы радиолокационной техники», 1956, № 1.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ (ЦВМ)

4.1. Общие вопросы статистического моделирования сложных систем

Любая сложная информационная система, к каковым относится и система обработки радиолокационной информации, функционирует в условиях воздействия целого ряда случайных факторов, учет которых затруднителен при проведении аналитического исследования. Поэтому наряду с аналитическими методами получили широкое признание и распространение методы исследования таких систем путем статистического моделирования на универсальной быстродействующей ЦВМ.

По теории и практике моделирования сложных систем имеется большое число опубликованных работ [1, 5 и др.]. В данном параграфе излагаются основные сведения о методе статистического моделирования сложных систем, применительно к задачам, решаемым в процессе обработки радиолокационной информации.

4.1.1. Статистическое моделирование как метод исследования сложных систем

В общем случае под статистическим моделированием понимается любая процедура, включающая искусственное формирование статистической выборки и ее обработку для приближенного решения физических и математических задач. Возможности практической реализации статистического моделирования связаны с появлением быстродействующих цифровых вычислительных машин.

Применительно к исследованию сложных систем реализация метода статистического моделирования на ЦВМ сводится к решению следующих задач:

— выбор алгоритма, имитирующего процесс функционирования исследуемой системы;



Рис. 4.1. Простейшая функциональная схема алгоритма статистического моделирования.

— имитация выборок случайных входных сигналов с заданными статистическими характеристиками;

— многократная реализация исследуемого алгоритма под воздействием выборок случайных входных сигналов;

— статистическая обработка полученных результатов.

Простейшая функциональная схема алгоритма статистического моделирования изображена на рис. 4.1. Первый блок этой схемы предназначен для получения реализаций входных сигналов, подлежащих обработке, Обычно эти сигналы содержат как регулярную, так и случайную составляющие. Тенденция современного развития рассматриваемого метода состоит в том, что обе эти составляющие получаются с помощью реализации специальных программ на ЦВМ.

Второй блок представляет собой программно-реализованную систему (алгоритм), подлежащую исследованию. В процессе исследования обычно ставится задача сравнительной оценки различных вариантов построения алгоритмов с целью выявления, во-первых, их работоспособности, а во-вторых, с целью определения качественных характеристик, не поддающихся аналитическому исследованию.

Третий блок схемы на рис. 4.1 выполняет функции измерительного прибора, фиксирующего результаты моделирования. Результаты, полученные при однократной реализации алгоритма, в силу действия случайных факторов будут реализациями случайного процесса и взятые в отдельности не могут объективно характеризовать исследуемый алгоритм. Поэтому искомые характеристики при исследовании алгоритмов методом статистического моделирования получаются путем усреднения по большому числу реализаций.

Метод статистического моделирования на ЦВМ является, вообще говоря, специальным образом построенным численным методом решения, главным образом, вероятностных задач. Однако в отличие от обычных численных методов, при статистическом моделировании сохраняется логическая структура исследуемой системы, последовательность протекания во времени процессов ее функционирования, характер и состав информации о состояниях системы. С этой точки зрения имеет место некоторая аналогия между исследованием системы методом статистического моделирования и методом натурного эксперимента.

Метод статистического моделирования основан на самых общих теоремах теории вероятности (теорема Чебышева, теорема Бернулли) и является универсальным методом исследования сложных систем. Если исследуемый процесс удается описать с помощью некоторой системы математических соотношений (формул, логических условий, операторов и т. д.), то статистическое моделирование этого процесса не представляет принципиальных трудностей и не налагает дополнительных ограничений на вышеуказанные соотношения.

Основным преимуществом метода статистического моделирования является возможность решения задач исключительной сложности, недоступных решению аналитическими методами. Необходимо также отметить удобство, быстроту и относительную дешевизну этого метода, так как при моделировании не требуется создавать специальную аппаратуру.

Вместе с тем, метод обладает существенным недостатком, состоящим в том, что полученные решения носят частный характер, соответствующий фиксированному значению параметров и начальных условий. Это приводит к необходимости многократного моделирования даже для качественного анализа характеристик исследуемой системы в некотором диапазоне условий. Поэтому наиболее разумным является совместное применение упрощенных аналитических методов анализа, позволяющих учесть характер влияния различных факторов, и метода статистического моделирования, позволяющего производить более точные оценки в ограниченной области.

4.1.2. Методы моделирования на ЦВМ последовательности случайных чисел

При статистическом моделировании задача получения случайных воздействий с заданными статистическими характеристиками является первостепенной, так как от его успешного решения зависит успех решения задачи в целом.

Для формирования значений случайной величины с заданными статистическими характеристиками обычно в качестве исходных используют числа с равномерным распределением в интервале (0,1). Имеется, по крайней мере, три способа получения последовательности случайных чисел, распределенных по закону равной вероятности: 1) выборка из таблицы случайных чисел, 2) использование физических датчиков случайных чисел, 3) генерирование псевдослучайных чисел на ЭЦВМ.

Таблицы случайных чисел используются только при прикидочных расчетах выполняемых, как правило, на клавишных машинах или вручную. Физические датчики случайных чисел хотя и находят применение при моделировании на ЦВМ, однако обладают существенным недостатком, состоящим в том, что в них имеет место трудно контролируемый «дрейф распределения».

Наиболее распространен в практике моделирования метод генерации так называемых псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения непосредственно на ЦВМ. Для этого предложено большое число алгоритмов, учитывающих особенности конкретных ЦВМ. Достоинством метода генерации псевдослучайных чисел является то, что на получение каждого числа затрачивается всего несколько простейших операций, так что скорость генерирования случайных чисел имеет тот же порядок, что и скорость работы ЦВМ; любая последовательность псевдослучайных чисел может быть при необходимости многократно повторена; нужно только один раз проверить качество последовательности, затем ее можно многократно использовать при решении сходных задач.

Псевдослучайные числа с равномерным законом распределения в интервале (0,1) непосредственно используются при моделировании случайных событий и дискретных случайных величин.

Пусть необходимо реализовать случайное событие A, наступающее с заданной вероятностью p. Определим A как событие, состоящее в том, что случайное число ξ_l, выбранное из совокупности чисел ξ, равномерно распределелеиных в интервале (0,1), удовлетворяет неравенству

$$\xi_l \leqslant p. \tag{4.1.1}$$

Вероятность события A, очевидно, равна

$$P(A) = \int_0^p dx = p. \tag{4.1.2}$$

На основе соотношений (1) и (2) получаем следующее правило моделирования рассматриваемых случайных событий:

— выбираем значение ξ_l и сравниваем с p,

— если неравейство (1) выполняется, то событие A произошло,

— если неравенство (1) не выполняется, то событие A не произошло.

Такая процедура используется в дальнейшем при моделировании последовательности двоично квантованных сигналов (нулей и единиц).

Пусть теперь $A_1, A_2, \ldots, A_s$ ~ полная группа событий, наступающих с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_s$, $\sum_{l=1}^{s} P) = 1$. Определим A_l как событие, состоящее в том, что выбранное значение ξ_l случайной величины Ξ удовлетворяет неравенству

$$P_{l-1} \leqslant \xi_l \leqslant P_l \quad (l = 1, \ldots, s), \tag{4.1.3}$$

где

$$P_l = \sum_{l=1}^{l} p_j. \tag{4.1.4}$$

Аналогично (2) можно записать

$$P(A_l) = \int_{P_{l-1}}^{P_l} dx = p_l.$$

Процедура моделирования в этом случае состоит в последовательном сравнении чисел ξ_l с величинами P_l. Исходом испытания является событие A_l, если выполняется условие (3).

Такая процедура применяется при моделировании последовательности сигналов на выходе схемы многоуровневого квантования.

Остановимся, наконец, на принципах моделирования событий, образующих простую однородную цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей $\Pi = \|\pi_{ij}\|, \quad i, j = \overline{0, k}$. Возможными результатами испытаний являются в этом случае состояния цепи $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$. Вектор-строка вероятностей начального состояния цепи $P(0) = \|P_0(0), P_1(0), \ldots, P_k(0)\|$ должна быть задана.

Процедура моделирования цепи Маркова состоит в следующем. Сначала выбирается начальное состояние цепи a_l в соответствии с вероятностями началь-

ных состояний. Для этого используется процедура (3), (4), где в качестве p_j берутся вероятности P_l (0). Затем выбирается следующее случайное число ξ_{1l}, которое также сравнивается с величиной P_l. Однако здесь в качестве p_j для определения P_l берутся элементы матрицы переходных вероятностей $\pi_{l,j}$. Путем сравнения устанавливается номер состояния i_1, для которого справедливо условие (3). Тогда следующим событием данной реализации цепи будет событие a_{i_1}. Аналогично поступают и в дальнейшем. Очевидно, каждый номер i_m определяет собой не только очередное событие a_{i_m} формируемой реализации, но и распределение вероятности для выбора последующего номера i_{m+1}.

Рассмотрим теперь некоторые алгоритмы преобразования равномерно распределенных случайных чисел, позволяющие получить случайные величины с заданным законом распределения. Возможность такого преобразования вытекает из следующей теоремы [1]: если случайная величина x имеет плотность распределения $w(x)$, то распределение случайной величины

$$\xi = \int_{-\infty}^{x} w(x)\,dx$$

является равномерным в интервале (0,1).

На основе этой теоремы получено следующее правило образования последовательности чисел, распределенных по закону $w(x)$: 1) получаем число ξ_{1i}, из множества чисел, распределенных по закону равномерной плотности в интервале (0,1); 2) находим величину x_l из решения уравнения

$$\xi_l = \int_{-\infty}^{x_l} w(x)\,dx. \qquad (4.1.5)$$

В качестве первого примера применения этого правила получим выражение для образования чисел xt, распределенных по показательному закону $w(x) = \Lambda \exp(-\Lambda x)$.

На основании (5) записываем

$$\xi_l = \int_{-\infty}^{x_l} \Lambda \exp(-\Lambda x)\,dx.$$

Откуда, после интегрирования, получим

$$x_l = -(1/\Lambda)\ln(1-\xi_l).$$

Аналогично получается формула для получения случайных чисел x_l, распределенных по закону Релея

$$x_l = \sigma\sqrt{2\ln(1-\xi_l)}.$$

Изложенная методика является универсальной. Однако во многих случаях интеграл типа (5) взять не удается. Тогда применяется другой прием, состоящий в использовании специфических особенностей законов распределения.

Например, для получения чисел, распределенных по нормальному закону, используется одно из основных свойств этого закона, состоящее в том, что сумма достаточно большого числа величин, распределенных по любым законам, будет распределена по нормальному закону. Следовательно, числа x_l, распределенные по нормальному закону, можно получить из условия

$$x_l = \sum_{j}^{n} \xi_j, \quad \text{где} \quad n \geqslant 10.$$

Математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение полученной случайной величины равны

$$M[x] = n/2; \qquad \sigma_x = \sqrt{n}/2\sqrt{3}.$$

Если случайные числа y_l должны иметь нормальное распределение с $M[y] = a$ и $\sigma_y = \sigma$, то полученное выше число x_l надо преобразовать следующим образом

$$\frac{(x_l - n/2)\,\sigma}{\sqrt{n/2}\sqrt{3}} + a.$$

В качестве второго примера использования рассматриваемого метода приведем правила формирования случайных величин, распределенных по обобщенному закону Релея, имеющему вид

$$w(z) = \frac{z}{\sigma_z^2} \exp\left(-\frac{z^2+s^2}{2\sigma_z^2}\right) I_0\left(\frac{zs}{\sigma_z^2}\right).$$

Эти правила сводятся к выполнению следующих операций:

— получаем случайное число x_l, распределенное по нормальному закону с дисперсией σ_x^2 и математическим ожиданием $M[x] = 0$,

— получаем случайное число y_l, распределенное по нормальному закону с дисперсией σ_y^2 и математическим ожиданием $M[y] = s$,

— находим число

$$z_l = \sqrt{x_l^2 + y_l^2}.$$

Последовательность $\{z_l\}$ будет распределена по обобщенному закону Релея с дисперсией

В заключение рассмотрим способ получения случайных чисел, распределенных по закону Пуассона

$$P_k = \frac{a^k}{k!} \exp(-a)$$

с математическим ожиданием a.

Для этого используется теорема Пуассона: если p_l — вероятность наступления события A при одном испытании, то вероятность наступления k событий при n независимых испытаниях и $n \to \infty$, $p_l \to 0$ асимптотически равна P_k.

Выберем достаточно большое n, таким образом чтобы

$$p_n = a/n$$

была заведомо меньше единицы (не более 0,1 — 0,2). Если теперь моделировать серии по n независимых испытаний, в каждой из которых событие A происходит с вероятностью p_n, то в качестве случайных чисел x_l, имеющих распределение Пуассона, необходимо выбирать количество случаев фактического наступления события A в l-й серии испытаний.

4.1.3. Принципы построения и реализации моделирующего алгоритма

В состав комплексного моделирующего алгоритма входят:

— алгоритм выработки входных сигналов,

— исследуемый алгоритм,

— алгоритм обработки результатов моделирования.

При построении алгоритма выработки входных сигналов используются идеи, изложенные в предыдущем пункте. Необходимо только добавить, что наряду со случайными составляющими входных сигналов, во многих случаях приходится также моделировать неслучайные

воздействия, а также комбинации неслучайных и случайных воздействий.

Для составления моделирующего алгоритма исследуемой системы необходимо прежде всего иметь подробное формальное описание изучаемых в ней явлений. Сложность и многообразие этих явлений обычно не позволяют составить моделирующий алгоритм в общем виде, пригодном для исследования любых сторон функционирования системы. Поэтому структура моделирующего алгоритма имеет специфику, связанную с типом задач, для решения которых предназначена модель.

При моделировании с целью исследования работоспособности и статистических характеристик выдаваемой информации, моделирующий алгоритм практически ничем не отличается от алгоритма функционирования системы. Если такие отличия и есть, так только в том, что в моделирующем алгоритме с целью исследования фиксируются в процессе реализации все интересующие исследователя параметры. При моделировании же, например, с целью определения загрузки ОЗУ ЦВМ в процессе реализации алгоритма необходимо разрабатывать специальную модель системы массового обслуживания. При этом изменится и характер входных сигналов, и выдаваемые результаты.

Процесс исследования алгоритмов методом статистического моделирования может быть разбит на следующие этапы:

1) доработки алгоритма с целью его реализации на универсальной ЦВМ;

2) отладка программы модели;

3) проверка работоспособности алгоритма путем анализа его реакции на частные ситуации (заданные сигналы), в результате которой определяются слабые места и ошибки при составлении и программировании алгоритма;

4) статистическое исследование алгоритма путем задания множества реализаций входных сигналов и регистрации результатов их обработки.

Полученные при моделировании статистические характеристики используются для оценки алгоритма. Естественно, моделирование позволяет отработать только основные ветви сложного алгоритма и не тарантирует от отказов в непредвиденных ситуациях.

Остановимся теперь кратко на способах организации процесса непосредственного статистического исследования алгоритмов.

Процесс функционирования системы, представленной моделирующим алгоритмом, можно рассматривать как последовательную смену ее состояний, описываемую некоторыми функциями $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$.... Если функции $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$ и т. д. являются гладкими, то естественным способом организации процесса моделирования является последовательная реализация значений этих функций через равные интервалы Δt в заданном диапазоне t_0, $t_0 + T$, где t_0 — начальное значение, а T — интервал времени моделирования. Так, например, организуется процесс моделирования с целью испытания алгоритмов сглаживания параметров траектории при обработке радиолокационной информации.

В некоторых случаях, как например, при моделировании систем массового обслуживания, целесообразно моделировать состояния сис-

темы только в особых точках, совпадающих с моментами поступления входных сигналов, моментами выдачи выходных сигналов, моментами полной загрузки системы или ее полного освобождения и т. д. Естественно, свойства таких систем оцениваются по информации об особых состояниях.

На практике возможны сочетания рассмотренных способов организации моделирования.

Фиксация и обработка результатов моделирования производится соответствующим алгоритмом. Этот алгоритм должен быть построен так, чтобы исходный материал для оценки искомых величин формировался последовательно в ходе моделирования и занимал минимальный объем ОЗУ ЦВМ.

Обычно при моделировании в качестве искомых величин фигурируют: вероятность некоторых событий, вероятности возможных значений дискретной случайной величины (ряд распределения), среднее значение случайной величины, дисперсия случайной величины, корреляционные моменты случайных величин.

Рассмотрим процесс последовательного формирования перечисленных характеристик.

В качестве оценки для искомой вероятности появления события. А используется частота наступления этого события при фиксированном числе испытаний N. Поэтому в процессе моделирования формируется (накапливается) число m положительных исходов, а оценка вероятности находится, после проведения всех N испытаний, по формуле

$$\hat{p}(A) = m/\mathrm{N}.$$

Аналогично подходят и к оценке дискретного ряда распределения случайной величины. Для этого область возможных значений случайной величины разбивается на n интервалов и в процессе эксперимента накапливаются числа m_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) попаданий случайной величины в соответствующие интервалы. Оценкой для вероятности попадания случайной величины в интервал с номером k является

$$\hat{p}_k = m_k/\mathrm{N}, \quad \left(\sum_k \hat{p}_k = 1\right).$$

Для оценки среднего значения $\bar{x}$ случайной величины X в процессе моделирования в специальной ячейке накапливается сумма $\sum_i x_i$ полученных значений x_i. В конце моделирования среднее значение находится по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1} x_i.$$

Для оценки дисперсии случайной величины X в процессе моделирования дополнительно накапливается сумма $\sum x_i^2$, а вычисления производятся, по формуле

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i^2 - \frac{1}{\mathrm{N}^2}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i\right)^2.$$

Аналогичным образом, для вычисления корреляционного момента между значениями x_i и y_i случайных величин X, Y необходимо накапливать $\sum_i x_i y_i$, $\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, а вычисления производить по формуле

$$\bar{R}_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i.$$

Кроме указанных простейших случаев нахождения оценок искомых величин по результатам моделирования, возможны и особые случаи, непосредственно связанные с характером исследуемых систем. Такие случаи особо учитываются при составлении конкретных моделирующих алгоритмов.

Остановимся, наконец, на некоторых соображениях по представлению моделирующего алгоритма.

Прежде всего желательно записать моделирующий алгоритм в таком виде, чтобы в нем отражалась, главным образом, особенность его структуры без излишней детализации и независимо от характеристик ЦВМ, на которой этот алгоритм реализуется. Поэтому, как правило, моделирующий алгоритм представляется в виде операторной схемы, содержащей последовательность операторов, каждый из которых изображает достаточно крупную группу элементарных операций. Такая запись позволяет свободно ориентироваться в общей идее построения алгоритма и достаточно полно отражает его логическую структуру. Кроме операторной схемы, моделирующий алгоритм может быть представлен в виде граф-схемы, на которой стрелками и знаками показана последовательность выполнения операций.

4,1.4. Оценка точности результатов, полученных методом статистического моделирования

Общая постановка задачи о выборе числа реализаций при статистическом моделировании состоит в следующем. Пусть методом статистического моделирования отыскивается некоторый параметр a. Оценкой для a будет служить величина $\hat{a}$, являющаяся функцией от результатов моделирования. Но результаты моделирования представляют собой случайные величины, следовательно, и $\hat{a}$ является случайной величиной, степень приближения которой к a зависит от числа испытаний N.

Говорят, что приближенное равенство

$$a \approx \hat{a}$$

имеет точность ε с достоверностью (надежностью) α, если вероятность неравенства $|a - \hat{a}| < \varepsilon$ равна α, т. е.

$$P(|a - \hat{a}| < \varepsilon) = \alpha.$$

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы по заданным ε и α определить требуемое число реализаций N.

Рассмотрим сначала задачу о выборе числа реализаций при оценке вероятности p по частоте положительных исходов m/N. Так как значение m/N можно представить в виде суммы независимых, одинаково распределенных случайных величин μ_i/N, то в силу центральной предельной теоремы теории вероятности, случайная величина m/N асимптотически нормальна. Поэтому для больших значений N, обычно используемых при статистическом моделировании, мы можем определить зависимость между ε, α и N, пользуясь следующим выражением

$$P\left(\left|\frac{m}{N}-p\right|<t_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right)=\alpha,$$

откуда, при заданной точности е получаем

$$N=\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}\,t_\alpha^2. \qquad (4.1.6)$$

Значение t_α определяется по таблицам нормального распределения [31; например, для а $=0{,}95$ имеем $t_\alpha=0{,}96$.

В практике моделирования вероятность p обычно неизвестна. Поэтому для определения требуемого числа реализаций сначала выбирается $N_0 = 50 \div 100$, по результатам которого определяется приближенное значение $\hat{p} = m/N_0$, где m — число положительных исходов. Затем, принимая $p \approx \hat{p}$, вычисляется окончательное значение N в соответствии с формулой (6). Максимальное число N, соответствующее $p = 0{,}5$ равно

$$N_{\text{макс}} = t_\alpha^2/4\varepsilon^2. \qquad (4.1.6а)$$

Требуемое число реализаций при оценке математического ожидания случайной величины (с точностью е и надежностью а) по среднему арифметическому ее значений определяется из условия

$$N = t_\alpha^2\,\sigma^2/\varepsilon^2, \qquad (4.1.7)$$

где σ^2 — дисперсия исследуемой случайной величины. Однако значение дисперсии заранее неизвестно и приходится пользоваться приёмом, аналогичным рассмотренному выше. Сначала производится оценка $\hat{\sigma}^2$ для σ^2 по формуле (7) при некотором небольшом числе реализаций N_0. После этого уточняется значение N по формуле [1]

$$N = t_\alpha'^2\,\hat{\sigma}^2/\varepsilon^2,$$

где t_α' — табулированная функция а и $k = N - 1$ для распределения Стьюдента.

В качестве оценки для дисперсии исследуемой случайной величины принимается величина σ^2, полученная по формулеле (7) после проведения всех N реализаций. Если же ставится задача определить σ^2 с ошибкой, не превышающей заданную, и надежностью а, то пользуются соотношением

$$\alpha = P\left(\hat{\sigma}/\sigma \leqslant q\right),$$

где $д$ — табулированная функция а и $k = N - 1$.

строба первичного захвата, размеры которого выбираются исходя из возможного перемещения цели за период обзора. Если в следующем обзоре в. строб первичного захвата попала одна или несколько отметок, то. по каждой из них «завязывается» новая траектория. При отсутствии отметок в стробе первичного захвата начальная отметка или сбрасывается как ложная (критерий завязки «2 из 2»), или оставляется для подтверждения в следующих обзорах, при этом соответственно увеличиваются размеры строба первичного захвата (дробные критерии «2 из m», $m>2$). После того как траектория завязана, определяется направление и скорость движения предполагаемой цели, что позволяет экстраполировать и стробировать ее положение на следующие обзоры. При попадании в эти стробы новых отметок принимается окончательное решение об обнаружении траектории.

Таким образом, процесс обнаружения траектории разбивается на два этапа: на первом осуществляется завязка (обнаружение) траектории по критерию «2 из m», на втором производится подтверждение завязанной траектории, т, е. окончательное обнаружение траектории по критерию «l/n» (l из n). В частных случаях второго этапа обнаружения траектории может и не быть.

Алгоритм завязки траектории по критерию «$2/m$» совместно С алгоритмом подтверждения (окончательного обнаружения) траектории по критерию «l/n» образует объединенный алгоритм обнаружения траекторий по критерию «$2/m+l/n$».

Основными вычислительными операциями, выполняемыми в процессе обнаружения траектории, являются: оценка скорости, экстраполяция координат и. стробирование. отметок. Относительно этих операций в дальнейшем принимаются следующие предпосылки:

i. Экстраполяция координат производится в соответствии с гипотезой о равномерном и прямолинейном движении цели.

2. Стробы на всех этапах обнаружения траектории имеют форму элемента сферического слоя (см. рис. 3.3). Размеры стробов $\Delta r_{стр}$, $\Delta\beta_{стр}$, $\Delta\varepsilon_{стр}$ выбирают исходя из суммарных ошибок измерения и экстраполяции координат на соответствующем этапе обнаружения траектории.

3. За единицу объема строба принимается разрешающая способность РЛС по соответствующим координатам. В этом случае размеры стробов не зависят от дальности и, кроме того, распределение ложных отметок в зоне обзора

1) Полезный сигнал представляет собой пачку импульсов с известной огибающей и фиксированным числом N позиций. Наложение помехи приводит к искажению огибающей пачки. После двоичного квантования пачка представляет собой нестационарную последовательность нулей и единиц.

2) Помеха представляет собой стационарный процесс типа белого шума. Воспроизведение амплитудных выборок помехи на фиксированных позициях и двоичное квантование этих выборок приводят к появлению стационарной последовательности нулей и единиц.

3) Чтобы учесть влияние помех на краях пачки в моделируемой последовательности, она (пачка) должна быть размещена так, чтобы слева и справа от полезного сигнала были области «чистой» помехи.

Таким образом, каждая реализация входного сигнала делится на следующие области:

— начальная область помехи, которая занимает $n_н$ двоичных разрядов,

— область полезного сигнала, определяемая шириной пачки N,

— конечная область помехи, которая занимает $n_к$ двоичных разрядов .Суммарное число элементарных сигналов (нулей и единиц) в реализации равно $n_\Sigma = n_н + N + n_к$. Желательно, чтобы число n_Σ вмещалось в разрядную сетку универсальной ЦВМ, на которой производится моделирование.

При сделанных предпосылках вероятность появления единиц на каждой позиции в области помехи определяется по формуле

$$p_N = \exp(-x_1^2/2) \qquad (4\ 2\ 1)$$

где x_1 — порог двоичного квантования, определяемый исходя из допустимой вероятности ложного обнаружения.

Для импульсов пачки, например, может быть взята модель аддитивной смеси неслучайного сигнала и узкополосной стационарной помехи. Тогда вероятность появления единицы на λ-й позиции пачки ($\lambda = \overline{1, N}$) определяется из выражения

$$p_{s\lambda} = 1 - \int_0^{x_1} x_\lambda \exp\left[-\frac{x_\lambda^2 + a_{\lambda\lambda}^2}{2}\right] I_0(a_\lambda x_\lambda)\, dx_\lambda, \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

где $a_\lambda = a_0 g_\lambda$; (4.2.3)

a_0 — отношение сигнала к помехе в центре пачки;

g_λ — огибающая импульсов пачки, которая в рассматриваемой модели может быть взята в виде функции

$$g_\lambda = \sin^2\left(\frac{2\pi\lambda}{N-1}\right) \Big/ \left(\frac{2\pi\lambda}{N-1}\right)^2, \qquad \left(\lambda = -\frac{N-1}{2} \div \frac{N-1}{2}\right). \qquad (4.2.4)$$

Возможны, конечно, любые другие модели полезного сигнала*).

*) При моделировании удобнее брать пачку с нечетным N.

После вычисления вероятности появления единицы на очередной i-й позиции ($i = \overline{1, n_\Sigma}$) производится выбор случайного числа ξ_i с равномерным распределением в интервале (0, 1) и сравнение этого числа со значением рассчитанной вероятности, т. е. проверяется неравенство $\xi_i \leqslant p_i$. При выполнении этого неравенства в разряд ячейки ОЗУ ЦВМ, соответствующий i-й позиции, записывается единица, а при невыполнении — нуль.

Переходя от позиции к позиции, в пределах $i = \overline{1, n_\Sigma}$, формируется последовательность нулей и единиц, подлежащая дальнейшей обработке. Исходными данными для формирования каждой реализации входного сигнала являются заданные значения a_0, x_1, N, g_λ.

4.2.2. Модель алгоритма обработки

Поскольку целью моделирования обычно является исследование качественных характеристик различных алгоритмов обработки, то моделировать приходится каждый такой алгоритм. В нашем случае в качестве примера возьмем алгоритм обнаружения и фиксации границ пачки по критерию «m/m — k» (см. гл. 5). В соответствии с этим критерием, пачка считается обнаруженной, если в исследуемой реализации найдется хотя бы одна комбинация из m единиц на m смежных позициях. В момент обнаружения пачки фиксируется ее начало. Конец пачки фиксируется при появлении в реализации к нулей подряд.

Анализ каждой реализации нулей и единиц производится следующим образом. Выделяется m первых разрядов последовательности и сравнивается с критерием обнаружения. Если критерий обнаружения удовлетворяется, то фиксируется позиция с номером $\lambda = 1$, как позиция, на которой зафиксировано начало обнаруженной пачки. Если критерий обнаружения не выполняется, производится сдвиг реализации на один разряд влево и снова проверяется критерий обнаружения и т. д., до тех пор, пока не будет найдена позиция λ, фиксирующая начало пачки, или пока не будут просмотрены все разряды исследуемой реализации. В последнем случае фиксируется факт необнаружения пачки (полезного сигнала).

Как только начало пачки обнаружено, оставшаяся часть реализации последовательно, путем поразрядного сдвига, сравнивается с критерием конца пачки. При выполнении критерия конца пачки фиксируется соответствующая позиция μ и число позиций $\nu = \mu - \lambda$ в обнаруженной пачке. После обнаружения конца пачки оставшаяся часть реализации снова проверяется на удовлетворение критерию обнаружения. Это позволяет выявить возможные случаи «расщепления» пачки на две или несколько обнаруживаемых частей.

Таким образом, в рассматриваемом случае простейшего алгоритма, моделирование процесса обработки сводится к последовательному сдвигу реализации и сравнению на каждом шаге сначала участка из m разрядов с критерием обнаружения, а затем участка из к разрядов с критерием конца.

4.2.3. Фиксация и обработка результатов моделирования

В рассматриваемой модели исследованию подлежат следующие характеристики:

а) вероятность обнаружения пачки $P_{\text{обн}}$ при фиксированной вероятности ложного обнаружения,

б) ошибка оценки центра пачки, определяемая дисперсией σ^2_{β},

в) распределение вероятности для числа импульсов в пачке (с учетом восстановления к — 1 и менее пропусков на позициях пачки),

г) вероятность «расщепления» пачки $P_{\text{р}}$.

Для расчета вероятностных характеристик пачки и распределения числа импульсов в пачке в процессе моделирования фиксируется каждое из полученных чисел $\nu = \mu - \lambda$. Для этого организуется $\nu_{\text{макс}}$ счетчиков, где $\nu_{\text{макс}}$ берется равным числу позиций в моделируемой последовательности. В конце эксперимента вычисляются вероятности появления в пачке (после обнаружения) ровно ν импульсов по формуле

$$p_{\nu} = \langle n_{\text{сч}\,\nu} \rangle / N_0, \tag{4.2.5}$$

где $\langle n_{\text{сч}\nu} \rangle$ — число реализаций, в которых зафиксировано ν позиций; N_0 — общее число реализаций. Зависимость $p_{\nu} = f(\nu)$ представляет собой эмпирическую плотность распределения числа импульсов в обнаруженной пачке.

Вероятность обнаружения вычисляется по формуле

$$P_{\text{обн}} = \sum_{\nu}^{\nu_{\text{макс}}} p_{\nu}. \tag{4.2.6}$$

Для расчета вероятности расщепления пачки в алгоритме должен быть предусмотрен счетчик пачек, обнаруживаемых два и более раз (сч р). Вероятность расщепления равна

$$P_{\text{р}} = \langle n_{\text{сч р}} \rangle / N_0, \tag{4.2.7}$$

где $\langle n_{\text{сч р}} \rangle$ — число реализаций, в которых зафиксировано «расщепление».

Исходные данные для расчета дисперсии ошибки оценки углового положения центра пачки получаются в процессе моделирования следующим образом. На каждом шаге производится вычисление текущего значения относительной ошибки по формуле

$$\Delta_i = \frac{\Delta\beta_i}{\Delta_{\beta}} = \pm\left[\left(\frac{\lambda + \mu - N}{2}\right) - (n_{\text{н}} + 1)\right], \tag{4.2.8}$$

где Δ_{β} — угловая дискретность импульсов в моделируемой последовательности; $\Delta\beta_i$ — абсолютная погрешность оценки азимута. Текущая относительная ошибка накапливается от реализации к реализации модели, т. е. образуется сумма $\sum_i \Delta_i$, а также сумма $\sum_i \Delta_i^2$. В конце моделирования рассчитывается математическое ожидание ошибки по формуле

$$m_1 = M[\Delta] = \sum_{i}^{n} \Delta_i / n, \tag{4.2.9}$$

где $n = \sum^{\nu_{макс}} n_{счv}$ — число обнаруженных реализаций.

Эмпирическое значение второго момента ошибки равно

$$m_2 = M[\Delta^2] = \sum^{n} \Delta_i^2 / n. \qquad (4.2.10).$$

Искомая дисперсия ошибки вычисляется по формуле

$$\sigma_\Delta^2 = \sigma_\beta^2 / \Delta_\beta^2 = m_2 - m_1^2. \qquad (4.2.11)$$

Результаты расчета всех характеристик выдаются на печать.

При определении числа N_0 требуемых реализаций в данном случае необходимо учитывать следующие особенности:

— в процессе моделирования рассчитываются разнородные характеристики, поэтому N_0 надо определять исходя из обеспечения заданной точности и надежности расчета той характеристики, которая требует наибольшего числа реализаций при моделировании;

— вероятность появления импульсов в пачке есть величина сугубо переменная, изменяющаяся в широких пределах от значений, близких к нулю на концах пачки, до значений, близких к единице, в ее центре.

Поэтому для обеспечения высокой точности и надежности получаемых при моделировании значений вероятности обнаружения приходится брать максимальное число реализаций, в соответствии с формулой (1.6, *а*). Последнее обстоятельство является решающим для определения N_0 в целом, для всего эксперимента. Так, если задаться $\alpha = 0{,}95$, $\varepsilon = 0{,}02$, находим по таблицам интегральной функции нормального распределения $t_\alpha = 0{,}96$. Тогда $N_{0\,макс} = 1225$ реализаций.

4.2.4. Комплексный моделирующий алгоритм обработки пачек двоично квантованных сигналов

Приведенный в данном пункте комплексный моделирующий алгоритм предназначен для исследования логических обнаружителей, реализующих критерий обнаружения типа «*m* из *m*» (*m*/*m*) и фиксирующих конец пачки по *k* пропускам подряд. Принимается, что в исследуемой последовательности квантованных сигналов начальная область помехи занимает точно $n_н = m - 1$ разрядов, а конечная область помехи точно $n_к = k$ разрядов. При этом достигается некоторое упрощение моделирующего алгоритма за счет исключения ряда проверок области срабатывания схемы. Однако такое упрощение приводит и к некоторой неадекватности модели исследуемому процессу, т. к. в действительности области сигнала предшествует достаточно «обширная» область помехи.

При составлении моделирующего алгоритма использованы следующие операторы:

Φ_1 — ввод новых данных: a_0, x_1, N, g_λ, m, k;

A_2 — вычисление вероятности p_N появления единицы в области помехи по формуле (1) и запоминание этой вероятности;

A_3 — вычисление a_λ по формуле (3) и восстановление нумерации λ в порядке следования позиций ($\lambda = \overline{1, N}$);

A_4 — вычисление вероятности *psx* появления единицы в области сигнала (пачки) по формуле (2) и запоминание этой вероятности;

F_5 — запись единицы в счетчик числа сформированных разрядов реализации в начальной области помехи «Сч $i_н$» + 1 → → ⟨Сч $i_н$⟩);

Φ_6 — получение случайного числа ξ_l с равномерным законом распределения в интервале (0,1);

P_7 — проверка неравенства $\xi_l < p_N$;

F_8 — запись в i-й разряд регистра сформированной реализации (Рг Р) единицы, если условие оператора P_7 выполнено;

F_9 — запись в i-й разряд регистра Рг Р нуля, если условие оператора P_7 не выполнено;

P_{10} — проверка условия ⟨Сч $i_н$⟩ = $n_н$;

F_{11} — если условие оператора P_{10} выполняется, то содержимое счетчика ⟨Сч $i_н$⟩ сбрасывается;

F_{12} — запись единицы в счетчик числа сформированных разрядов реализации в области полезного сигнала «Сч λ» + 1 → → ⟨Сч λ⟩);

Φ_{13} — получение случайного числа ξ_λ с равномерным законом распределения в интервале (0,1);

P_{14} — проверка условия $\xi_\lambda < p_{S\lambda}$;

F_{15} — запись в $(n_н + \lambda)$-й разряд регистра Рг Р -единицы, если условие оператора P_{14} выполняется;

F_{16} — запись в $(n_н + \lambda)$-й разряд регистра Рг Р нуля, если условие оператора P_{14} не выполняется;

P_{17} — проверка условия ⟨Сч λ⟩ = N;

F_{18} — сброс ⟨Сч λ⟩, при выполнении условия оператора P_{17};

F_{19} — запись единицы в счетчик числа сформированных разрядов реализации в конечной области помехи (⟨Сч $j_к$⟩ + 1 → → ⟨Сч $j_к$⟩);

Φ_{20} — получение случайного числа ξ_l с равномерным законом распределения в интервале (0,1);

P_{21} — проверка условия $\xi_j < p_N$;

F_{22} — запись в $(n_н + N + j)$-й разряд регистра Рг Р единицы, если условие оператора P_{21} выполняется;

F_{23} — запись в $(n_н + N + j)$-й разряд регистра Рг Р нуля, если условие оператора P_{21} не выполняется;

P_{24} — проверка условия ⟨Сч $j_к$⟩ = $n_к$;

F_{25} — сброс ⟨Сч $j_к$⟩, при выполнении условия оператора P_{24};

F_{26} — запись единицы в счетчик (Сч А) просмотренных разрядов обрабатываемой реализации; «Сч А> + 1 → <Сч А»;

F_{27} — выделение из реализации m первых разрядов (слева);

P_{28} — проверка критерия обнаружения;

F_{29} — фиксация содержимого счетчика А, что соответствует запоминанию λ-й позиции, на которой впервые выполняется критерий обнаружения;

F_{30} — сдвиг реализации влево на m разрядов;
F_{31} — прибавление в Сч А m единиц;
F_{32} — выделение из оставшейся реализации к первых разрядов;
Рзз — проверка критерия обнаружения конца пачки;
F_{34} — фиксация содержимого счетчика А, что соответствует запоминанию позиции μ, на которой впервые выполняется критерий обнаружения конца пачки;
P_{35} — проверка условия $\langle$Сч А$\rangle < (n_н + N - m)$;
F_{36} — сдвиг оставшейся реализации на один разряд влево;
P_{37} — проверка условия $\langle$Сч А$\rangle < (n_н + N + n_к - к)$;
F_{38} — сдвиг оставшейся реализации на к разрядов влево;
F_{39} — фиксация в качестве конца пачки $(n_ц + N + n_к)$-й позиции;
F_{40} — сброс оставшейся реализации;
F_{41} — сброс содержимого счетчика А ($\langle$СчА$\rangle \to 0$);
P_{42} — проверка наличия записи λ и μ;
P_{43} — проверка числа записанных пар λ, μ ($[\lambda, \mu] > 1$);
F_{44} — прибавление единицы в счетчик числа «расщепленных» пачек;
F_{45} — прибавление единицы в счетчик просчитанных реализаций; $(\langle СчN_0\rangle + 1) \to \langle СчN_0\rangle$;
P_{46} — проверка неравенства $\langle СчN_0\rangle < N_{0п}$;
A_{47} — вычисление $\nu = \mu - \lambda$;
A_{48} — преобразование ν в адрес соответствующего счетчика (Сч ν);
F_{49} — запись единицы в счетчик — Счν ($\langle Счν\rangle + 1 \to \langle Счν\rangle$);
A_{50} — вычисление текущей ошибки по формуле (8);

A_{51} — вычисление $\sum_{l=1}^{n} \Delta_l = \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_l + \Delta_n$;

A_{52} — вычисление $\sum_{l=1}^{n} \Delta_l^2 = \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_l^2 + \Delta_n^2$;

A_{53} — вычисление вероятности p_ν по формуле (5) и печать;
A_{54} — вычисление вероятности обнаружения $P_{обн}$ ПО формуле (6) и печать;
A_{55} — получение $P_р$ по формуле (7);
A_{56} — вычисление m_1 по формуле (9) и печать;
A_{57} — вычисление m_2 по формуле (10) и печать;
A_{58} — вычисление дисперсии ошибки по формуле (11) и печать;
P_{59} — проверка, все ли варианты задачи просчитаны;
F_{60} — прибавление единицы в счетчик вариантов ($\langle СчW\rangle + 1 \to \langle СчW\rangle$);
$Я_{61}$ — останов.

Теперь можно записать операторную схему алгоритма, моделирующего процесс исследования логических схем обнаружения пачек двоично квантованных сигналов. Он имеет следующий вид:

$$^{60}\Phi_1 A_2 A_3 A_4\ ^{10,46} F_5 \Phi_6 P_{7;9} F_8^{10}\ ^{7}F_9\ ^{8}P_{10;5} F_{11}\ ^{17}F_{12} \Phi_{13} P_{14;16}$$

$$F_{15}^{17}\ ^{14}F_{16}\ ^{15}P_{17;12} F_{18}\ ^{24}F_{19} \Phi_{20} P_{21;23} F_{22}^{24}\ ^{21}F_{23}\ ^{22}P_{24;19} F_{25}\ ^{36}F_{26}$$

$$\Phi_{27} P_{28;36} F_{29} F_{30} F_{31}\ ^{38}F_{32} P_{33;37} F_{34} P_{35;40} F_{36}^{26}$$

$$^{33}D_{37;39} F_{38}^{32\,37} F_{39}\ ^{35}F_{40} P_{41} P_{42;44;45} P_{\ldots} \ldots F\ 42,52\ F_{45} P_{46;53}$$

$$^{43}A_{47} A \ldots A_{50} A_{51} A_{52}^{45\,46} A_{53} A_{54} A_{55} A_{56} A_{57} A_{58} P_{59}^{51} F_{60}^{58} Я_{61}.$$

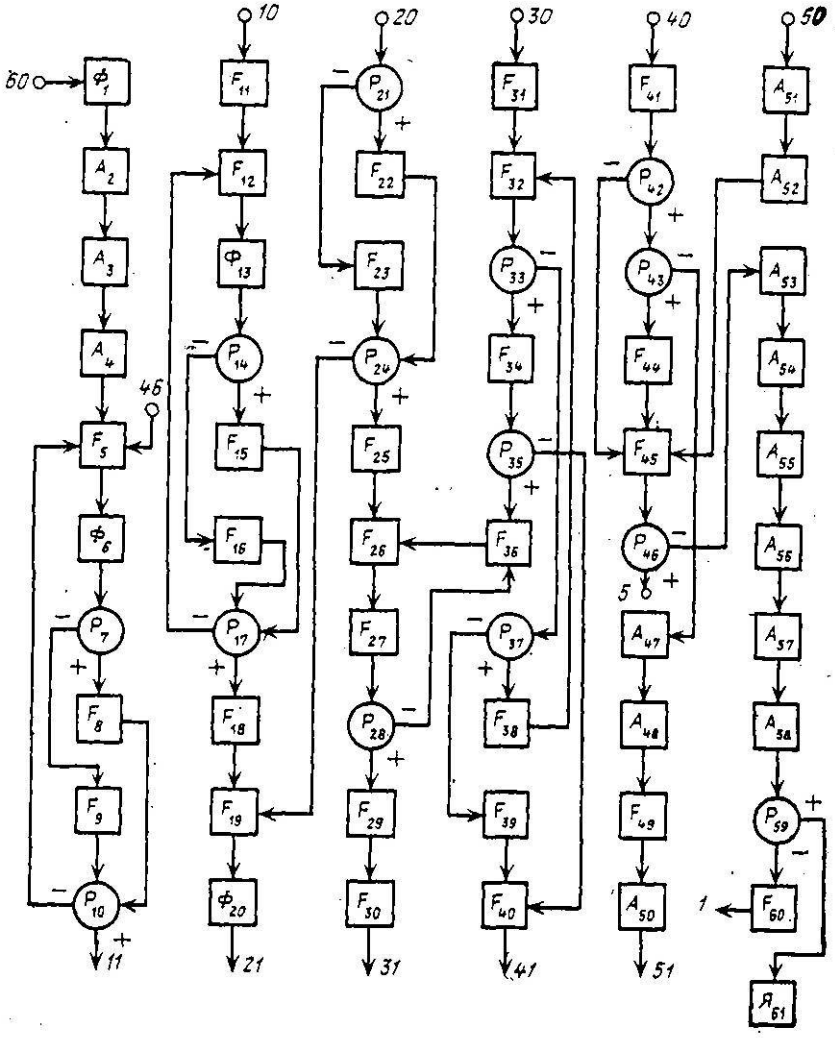


Рис. 4.2. Граф-схема моделирующего алгоритма обработки пачек двоично квантованных сигналов.

Граф-схема моделирующего алгоритма приведена на рис. 4.2. В рассматриваемой схеме операторы 1—25 представляют моделирующий алгоритм формирования реализации квантованных сигналов, операторы 26—41 — моделирующий алгоритм исследования сформированной реализации, а операторы 42—60 — моделирующий алгоритм расчета и выдачи результатов моделирования.

4.3. Моделирование последовательности радиолокационных отметок, отраженных от одиночной цели

При исследовании методом статистического моделирования процессов вторичной обработки радиолокационной информации необходимо задавать входную информацию в виде последовательности отметок, отраженных от цели за все время ее нахождения в зоне обзора РЛС. Моделирование такой последовательности на ЦВМ включает решение следующих задач: моделирование траектории движения цели; моделирование процесса обнаружения отметок от цели; моделирование ошибок локации.

Моделирующий алгоритм должен отвечать требованиям полноты отображения реальных процессов, существенных с точки зрения решаемых задач исследования. Наряду с этим важным требованием, предъявляемым к моделирующему алгоритму, является экономичность и удобство реализации на ЦВМ.

В данном параграфе рассматривается один из возможных вариантов моделирования последовательности радиолокационных отметок, отраженных от цели — самолета.

4.3.1. Модель траектории движения цели

Для исследования алгоритмов обработки радиолокационной информации достаточно рассматривать движение центра масс цели. Движение центра масс цели может быть описано, если заданы законы изменения его положения в некоторой выбранной системе координат.

В общем случае движение цели можно рассматривать в прямоугольной системе координат $0XYZ$ или $0XYH$, где H — высота цели, или в сферической системе координат (r, β, ε) с началом в точке стояния РЛС. Как уже отмечалось, в любой из указанных систем координат траекторию движения цели можно аппроксимировать временными полиномами. Однако при полиномиальном представлении достаточно сложной траектории (имеющей прямолинейные и криволинейные участки) возникают трудности в моделировании переходов с одного участка на другой. Поэтому выгоднее использовать параметрическое описание траектории, а в качестве параметров выбрать такие, которые имеют наглядный геометрический смысл.

В дальнейшем траектория движения цели задается на плоскости (считается, что $H = \text{const}$) в прямоугольной системе координат $0XY$ с центром, вынесенным из точки стояния РЛС на величину $R \geqslant r_{\text{макс}}$, где $r_{\text{макс}}$ максимальная дальность действия РЛС как по координате X, так и по координате Y (рис. 4.3).

Первым важным Параметром, характеризующим траекторию цели, является точка ее влета в зону действия рассматриваемой системы обработки. В качестве границы зоны действия системы должны приниматься границы области, образованной вращением диаграммы направленности РЛС. Упрощенным вариантом зоны является цилиндр, радиус основания которого равен максимальной дальности РЛС, а образующая — максимальной высоте зоны обзора.

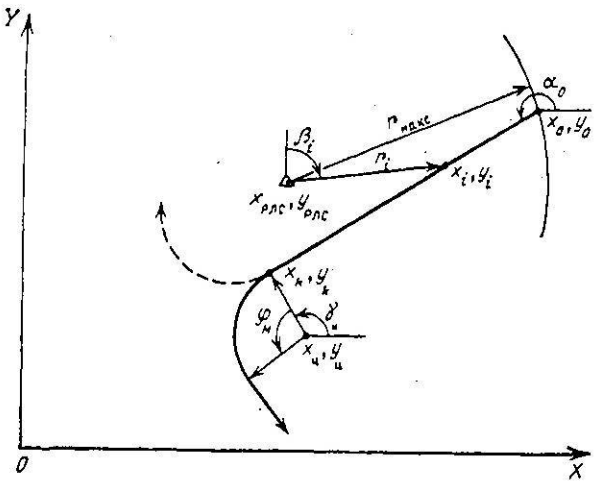


Рис. 4.3. К моделированию траектории движения цели.

Точка влета цели в зону действия системы характеризуется:

— временем влета t_0,

— прямоугольными координатами начальной точки траектории x_0, y_0.

На участках равномерного и прямолинейного движения цели задаются:

— скорость движения цели V_l, где l — номер участка траектории,

— угол α_l между осью $0X$ и вектором скорости цели V_l,

— число точек локации N_l,

— интервал времени между точками локации Δt.

Без нарушения общности начальный участок траектории может быть взят прямолинейным.

Предполагается, что на участках виража (маневра) движение цели осуществляется по дуге окружности и, следовательно, может быть описано следующими параметрами (рис. 4.3):

— нормальной перегрузкой на вираже $n_м$;

— глубиной виража $\varphi_м$, под которой понимается угол, на который цель изменяет первоначальный курс за время виража,

— скоростью цели на вираже $V_м$,

Кроме того, с использованием перечисленных параметров, вычисляются:

– радиус виража по формуле

$$R_м = V_м^2/g_0\sqrt{n_м^2-1}, \qquad (4.3.1)$$

где g_0 — ускорение силы тяжести;

— число точек локации на вираже

$$N_м =]R_м\varphi_м/V_м\Delta t[, \qquad (4.3.2)$$

где $]p[$ означает, что при расчете берется ближайшее целое число, не меньшее p.

Начальная точка виража совпадает с конечной точкой участка прямолинейного движения. Последовательность чередования участков прямолинейного движения и виража задается заранее.

Таким образом, вся траектория движения цели представляется комбинацией отрезков прямых, сопряженных дугами окружностей. Для задания такой траектории необходимо задать ее параметры в точках сопряжения (эти точки называются также опорными точками). Совокупность параметров в опорных точках рассчитывается заранее и записывается в ОЗУ ЦВМ.

После того, как опорные точки определены, построение точек локации на траектории в прямоугольной системе координат производится по формулам:

А. На прямолинейном участке (начиная от исходной точки)

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + V_i\cos\alpha_i\Delta t, \\ y_i &= y_{i-1} + V_i\sin\alpha_i\Delta t. \end{aligned} \qquad (4.3.3)$$

Б. На участке виража:

1) сначала вычисляются прямоугольные координаты центра окружности виража $x_ц, y_ц$ (см. рис. 4.3)

$$\begin{aligned} x_ц &= x_к - |R_м|\operatorname{sign} R_м\sin\alpha_i, \\ y_ц &= y_к + |R_м|\operatorname{sign} R_м\cos\alpha_i \end{aligned} \qquad (4.3.4)$$

где $x_к, y_к$ ~ координаты конечной точки предыдущего участка траектории,

$$\operatorname{sign} R = \begin{cases} +1, & \text{если вираж левый,} \\ -1, & \text{если вираж правый;} \end{cases}$$

2) затем вычисляется начальное значение угла $\gamma_н$ (рис. 4.3)

$$\gamma_н = \alpha_i - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} R_м; \qquad (4.3.5)$$

3) текущее значение γ_i, $i = 1, \ldots, n_м$, вычисляется по формуле

$$\gamma_i = \gamma_{i-1} + |\Delta\varphi|\operatorname{sign}\varphi, \qquad (4.3.6)$$

где

$$|\Delta\varphi| = \varphi_м/N_м,$$

$$\operatorname{sign}\varphi = \begin{cases} +1, & \text{если вираж левый,} \\ -1, & \text{если вираж правый;} \end{cases}$$

4) координаты очередной точки локации на участке виража определяются по формулам:

.3.7)

а составляющие скорости равны

$$v_{xмl} = \frac{x_{мl} - x_{мl-1}}{\Delta t}; \quad v_{yмl} = \frac{y_{мl} - y_{мl-1}}{\Delta t}. \tag{4.3.8}$$

Радиолокационные координаты очередной точки локации во всех случаях определяются по формулам:

$$r_l = \sqrt{(\Delta x_l)^2 + (\Delta y_l)^2},$$

$$\beta_l = \begin{cases} \beta_l' & \text{при} \quad \Delta x_l > 0, \ \Delta y_l > 0, \\ \pi - \beta_l' & \text{при} \quad \Delta x_l > 0, \ \Delta y_l < 0, \\ \pi + \beta_l' & \text{при} \quad \Delta x_l < 0, \ \Delta y_l < 0, \\ 2\pi - \beta_l' & \text{при} \quad \Delta x_l < 0, \ \Delta y_l > 0, \end{cases} \tag{4.3.9}$$

где

$$\Delta x_l = x_l - x_{РЛС}; \quad \Delta y_l = y_l - y_{РЛС}; \tag{4.3.10}$$

$$\beta_l' = \operatorname{arctg} \frac{|\Delta x_l|}{|\Delta y_l|}. \tag{4.3.11}$$

Формулы (1)—(11) используются в дальнейшем (п. 4.3.4) при составлении моделирующего алгоритма.

4.3.2. Модель процесса обнаружения отметок от цели

Моделирование процесса обнаружения одиночных отметок на траектории можно производить в соответствии с приемами, изложенными в § 4.2. Для этого предварительно задаются числом импульсов в пачке N и моделью отраженного сигнала. Отношение же сигнала к помехе в центре пачки рассчитывается на каждом шаге в зависимости от дальности до цели.

Расчет отношения сигнала к помехе для одиночного импульсного сигнала, принимаемого в максимуме диаграммы направленности РЛС, производится следующим образом. Известно, что при фиксированных параметрах РЛС и эффективной отражающей поверхности цели дальность обнаружения есть функция от некоторого коэффициента $\varkappa$, учитывающего превышение принимаемого сигнала над помехой по мощности. Поэтому формулу радиолокации можно записать в виде [4]

$$d_l \equiv r_l / r_0 = \varkappa^{-1/4},$$

где r_0 — дальность действия РЛС при $\varkappa = 1$.

Отношение сигнала к помехе по мощности можно представить в виде

$$\varkappa_i = a_{0i}^2/2,$$

где a_{0i} — отношение сигнала к помехе по напряжению.

С учетом последнего соотношения выражение для d_i записывается в виде

$$d_i = (a_{0i}/\sqrt{2})^{-1/2},$$

откуда получаем

$$a_{0i} = \sqrt{2}/d_i^2. \qquad (4.3.12)$$

Таким образом, порядок расчета a_{0i} следующий:

— задаемся максимальной дальностью обнаружения r_0, для которой $\text{floo} = \sqrt{2}$,

— после расчета дальности r_i очередной точки локации находим $d_i = r_i/r_0$,

— рассчитываем a_{0i} по формуле (12).

После этого реализуется алгоритм формирования пачки и алгоритм ее обнаружения в соответствии с изложенным в § 4.2.

Другой подход к моделированию процесса обнаружения отметок состоит в том, что вероятность обнаружения рассчитывается непосредственно, без реализации процедуры формирования и обнаружения пачки. Расчетная формула для вероятности обнаружения отметки получается следующим образом.

Пусть в соответствии с принятой моделью, эффективная отражающая поверхность цели распределена по показательному закону с плотностью вероятности

$$w(\Sigma) = \frac{1}{\bar{\Sigma}} \exp\left(-\frac{\Sigma}{\bar{\Sigma}}\right),$$

где $\bar{\Sigma}$ — среднее значение эффективной отражающей поверхности. Предположим далее, что обнаружение цели возможно, если эффективная отражающая поверхность не меньше некоторого фиксированного числа Σ_0. Тогда вероятность обнаружения равна

$$p = \int_{\Sigma_0}^{\infty} w(\Sigma)\, d\Sigma = \int_{\Sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\Sigma}} \exp\left(-\frac{\Sigma}{\bar{\Sigma}}\right) d\Sigma = \exp\left(-\frac{\Sigma_0}{\bar{\Sigma}}\right). \qquad (4.3.13)$$

В формуле (13) как Σ_0, так и $\bar{\Sigma}$ можно выразить через дальность обнаружения.

На основании формулы радиолокации для пороговой дальности обнаружения цели можно записать

$$r_0 = k \sqrt[4]{\Sigma_0},$$

где k — коэффициент пропорциональности, откуда получаем

$$\Sigma_0 = r_0^4/k^4. \qquad (4.3.14)$$

Средняя дальность обнаружения равна

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Sigma}{\bar{\Sigma}}\right) d\Sigma/\bar{\Sigma}.$$

Вычисления дают

$$\bar{r} = k\bar{\Sigma}^{1/4}\Gamma(5/4), \tag{4.3.15}$$

где $\Gamma(\ )$ — гамма-функция.
Из соотношения (15) получаем

$$\bar{\Sigma} = \bar{r}^4/k^4\Gamma^4(5/4). \tag{4.3.16}$$

С учетом соотношений (14) и (16) получаем

$$\Sigma_0/\bar{\Sigma} = (r_0/\bar{r})^4\Gamma^4(5/4) \approx 0{,}68\left(\frac{r_0}{\bar{r}}\right)^4.$$

Следовательно, текущая вероятность обнаружения равна

$$p_i \approx \exp(-0{,}68d_i^4), \tag{4.3.17}$$

где $d_i = r_i/\bar{r}$.

После вычисления p_i процедура обнаружения отметки реализуется следующим образом: выбирается случайное число ξ_i, распределенное равномерно в интервале (0,1) и производится сравнение этого числа с p_i.

При выполнении неравенства $\xi_i \leqslant p_i$ отметка считается обнаруженной.

4.3.3. Моделирование ошибок локации

Модель ошибок локации реализуется для каждой обнаруженной отметки в той системе координат, в которой производятся первичные измерения. В дальнейшем считается, что измеряемыми координатами являются полярные координаты цели r_i, β_i.

В зависимости от решаемых при моделировании задач в состав модели ошибок могут быть введены различные составляющие: случайная шумовая, случайная флюктуационная, медленно меняющаяся по заданному закону, систематическая и т. д. Ниже в качестве примера рассматривается моделирование только шумовой и флюктуационной составляющей случайных ошибок. Причем каждая из них считается распределенной по нормальному закону.

Дисперсия шумовой составляющей считается зависящей от отношения сигнала к помехе по мощности и определяется по формулам:

$$\sigma^2_{r_{ш_i}} = \sigma^2_{r_{оп}}\left(\frac{r_i}{r_{оп}}\right)^4, \quad \sigma^2_{\beta_{ш_i}} = \sigma^2_{\beta_{оп}}\left(\frac{r_i}{r_{оп}}\right)^4. \tag{4.3.18}$$

где $\sigma^2_{r_{оп}}\ \sigma^2_{\beta_{оп}}$ дисперсии шумовой составляющей на фиксированной (опорной) дальности $r_{оп}$ ($r_{оп}$ не равна r_0 из предыдущего пункта).

Дисперсия флюктуационной ошибки σ_Φ принимается постоянной, не зависящей от значений координат.

Суммарная дисперсия случайной ошибки по каждой из независимых координат определяется по формулам:

$$\sigma^2_{r_i} = \sigma^2_{r\text{ш}_i} + \sigma^2_{r\Phi}, \qquad \sigma^2_{\beta_i} = \sigma^2_{\beta\text{ш}_i} + \sigma^2_{\beta\Phi}. \tag{4.3.19}$$

Математическое ожидание случайных ошибок принимается равным нулю.

Таким образом, задача моделирования ошибок в данном случае сводится к получению случайных чисел $\Delta r_i, \Delta\beta_i$ с нормальным законом распределения и известными дисперсией и математическим ожиданием. Процедура получения таких чисел описана в §4.1.

После получения случайных чисел Δr_i и $\Delta\beta_i$ «измеренные» значения координат отметок определяются по формулам:

$$r'_i = r_i + \Delta r_i, \qquad \beta'_i = \beta_i + \Delta\beta_i. \tag{4.3.20}$$

Эти значения координат и подлежат дальнейшей обработке,

Если обработка радиолокационной информации производится в прямоугольной системе координат, то вычисление дисперсий случайных ошибок «измерения» этих координат производится по формулам:

$$\sigma^2_{x_i} = \sigma^2_{r_i}\sin^2\beta_i + r_i^2\cos^2\beta_i\,\sigma^2_{\beta_i}, \quad \sigma^2_{y_i} = \sigma^2_{r_i}\cos^2\beta_i + r_i^2\sin^2\beta_i\,\sigma^2_{\beta_i}, \tag{4.3.21}$$

а корреляционный момент связи между этими ошибками по формуле

$$R_{x_i y_i} = \sin 2\beta_i(\sigma^2_{r_i} - r_i^2\sigma^2_{\beta_i})/2. \tag{4.3.22}$$

4.3.4. Моделирующий алгоритм формирования последовательности радиолокационных отметок

При составлении рассматриваемого в данном пункте моделирующего алгоритма предполагалось:

1. Начальный участок траектории является линейным.
2. Обработка информации о траектории производится в полярной системе координат.
3. Обнаружение отметки производится на основе сравнения вероятности со случайным числом ξ_i.

Моделирующий алгоритм составлен в операторной форме. Состав и назначение операторов следующие:

Φ_1 — ввод начального участка траектории, характеризующегося координатами начальной точки r_0, β_0, скоростью V_0, углом α_0 и числом точек N_0;

F_2 — формирование признака отсутствия виража, так как начальный участок является по условию линейным;

F_3 — запись в счетчик (Сч i) числа N_i точек на линейном участке траектории; в дальнейшем, по достижении нулевого состояния этого счетчика, фиксируется конец моделирования линейного участка траектории;

A_4 — вычисление прямоугольных координат x_i, y_i очередной точки на траектории;

A_5 — вычисление полярных координат r_i, β_i той же точки;
A_6 — вычисление вероятности p_i обнаружения отметки с координатами r_i, β_i по формуле (17);
P_7 — выбор числа, равномерно распределенного в интервале (0, 1), и проверка неравенства $\xi_i \geqslant p_i$;
A_8 — вычисление дисперсий суммарных ошибок измерения координат по формулам (18) и (19);
Φ_9 — формирование случайных чисел Δr_i и $\Delta\beta_i$, распределенных по нормальному закону с дисперсиями $\sigma^2_{r_i}$ и $\sigma^2_{\beta_i}$ и математическими ожиданиями, равными нулю;
A_{10} — вычисление текущих значений координат по формулам (20);
F_{11} — формирование признака отсутствия отметки при ее необнаружении;
K_{12} — уменьшение содержимого счетчика числа точек локации на линейном участке (Сч i) на единицу «Сч i) — 1 → <Сч i)»;
P_{13} — проверка, не равно ли нулю содержимое Сч i;
P_{14} — проверка признака виража (Пм = 1);
P_{15} — проверка наличия очередного участка траектории;
Γ_{16} — ввод очередного участка траектории, характеризующегося параметрами φ_i, $R_{мi}$, V_i, N_i, α_i;
P_{17} — проверка $\varphi_i > 0$, т. е. является ли очередной введенный участок — участком виража;
F_{18} — формирование признака наличия виража;
F_{19} — запись в Сч i числа $N_м = N_i$ точек на вираже;
A_{20} — вычисление координат центра окружности виража по формуле (4);
A_{21} — вычисление начального значения угла $\gamma_н$ по формуле (5);
A_{22} — вычисление текущего значения угла γ_i по формуле (6);
P_{23} — проверка на положительность угла γ_i;
A_{24} — преобразование угла γ_i в соответствии с формулой $\gamma_{(+)} = \gamma_{(-)} + 2\pi$;
A_{25} — вычисление прямоугольных координат точки на участке виража по формуле (7);
A_{26} — вычисление составляющих вектора скорости цели на участке виража по формулам (8);
$Я_{27}$ — окончание вычислений, если все участки траекторий введены и все точки на них просчитаны.

Теперь можно записать операторную схему алгоритма, моделирующего процесс формирования последовательности радиолокационных отметок, отраженных от одиночной цели. Он имеет следующий вид:

$$\Phi_1\,{}^{17}F_2F_3\,{}^{14}A_4\,{}^{26}A_5A_6\,P_{7\uparrow 11}\,A_8\,\Phi_9\,A^{12}_{10}\,{}^{7}F_{11}$$

$$^{10}K_{12}P_{13}^{\uparrow 15}\,P_{14}^{\uparrow 22\uparrow 4\,13}P_{15\uparrow 27}\,F_{16}\,P_{17\uparrow 2}F_{18}\,F_{19}\,A_{20}\,A_{21}$$

$$^{14}A_{22}P_{23}^{\uparrow 25}\,A_{24}\,{}^{23}A_{25}\,A^{5}_{26}\,{}^{15}Я_{27}. \qquad (4.3.23)$$

Соответствующая граф-схема алгоритма приведена на рис. 4.4.

Таким образом, в рассматриваемом алгоритме операторы 1 и 16 предназначены для ввода начального и последующих участков траектории. Напомним еще раз, что параметры этих участков рассчитываются или выбираются заранее и записываются в ОЗУ ЦВМ в качестве опорных точек моделируемой траектории. Оператор 4 предназначен для вычисления прямоугольных координат точек локации на участках пря-

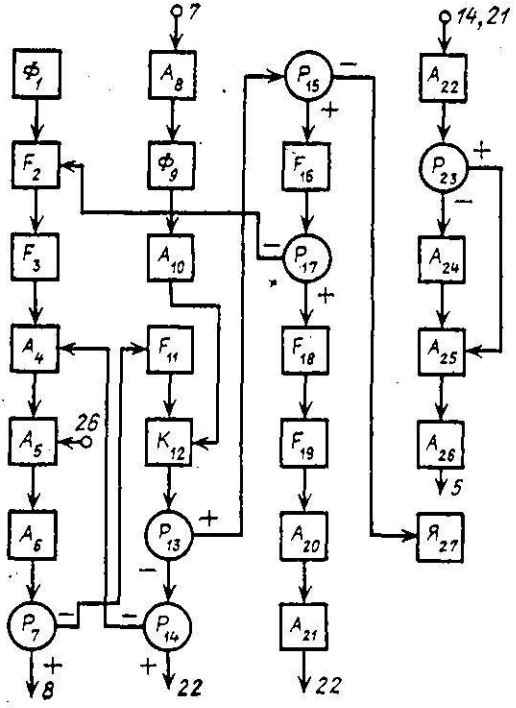


Рис. 4.4. Граф-схема моделирующего алгоритма формирования последовательности радиолокационных отметок.

молинейного и равномерного движения цели. Операторы 20—25 выполняют ту же функцию на участках виража. Оператор 5 предназначен для вычисления полярных координат отметок по их прямоугольным координатам. Операторы 6 и 7 реализуют алгоритм обнаружения отметок, а операторы 8—10 — алгоритм формирования ошибок измерения и расчета измеренных значений полярных координат обнаруженных отметок. Если отметка не обнаруживается, то оператором 11 формируется специальный признак пропуска. Остальные операторы моделирующего алгоритма являются вспомогательными.

4.4. Принципы моделирования динамической обстановки в зоне обзора РЛС

Во многих случаях и, в частности, при исследовании сложных систем обработки информации и управления возникают задачи моделирования динамической воздушной обстановки в зоне обзора РЛС. В качестве примера можно сослаться на систему дальнего обнаружения и управления в зоне крупного аэропорта, рассмотренную в литературе [1]. Мы в дальнейшем также будем исходить из специфики задач моделирования обстановки в зоне действия РЛС дальнего обнаружения и сопровождения самолетов.

Модель обстановки в зоне действия обзорной РЛС включает: модель случайного потока самолетов, пересекающих внешнюю границу зоны обзора РЛС; модель случайного потока радиолокационных отметок, отраженных от самолетов, находящихся в зоне обзора РЛС (с учетом вероятности их обнаружения и ошибок локации); модель потока ложных отметок.

Многие частные задачи, возникающие при моделировании динамической воздушной обстановки, решались выше. Поэтому в данном параграфе будут изложены, главным образом, специфические вопросы, связанные с моделированием потоков случайных событий.

4.4.1. Моделирование последовательности моментов времени и координат точек влета целей в зону обзора РЛС

Моменты времени появления целей на границе зоны обзора РЛС (моменты влета целей) образуют случайный поток событий. В установившемся режиме работы крупного аэродрома на достаточно продолжительном интервале времени этот поток можно представить в виде потока однородных событий, обозначаемых $t_{01}, t_{02}, \ldots, t_{0k}$.

Последовательность $\{t_{0k}\}$ можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} t_{01} &= \tau_1, \\ t_{02} &= \tau_1 + \tau_2, \\ t_{03} &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \\ t_{0k} &= \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_l + \ldots + \tau_k, \end{aligned} \qquad (4.4.1)$$

где τ_l — случайная величина, определяющая длину временного интервала между последовательными моментами t_{0l}.

Для определения этой последовательности должен быть задан закон распределения τ_i. В частности, можно предположить, что поток целей, пересекающих границу зоны обзора РЛС, является простейшим с плотностью вероятности вида

$$w(\tau) = \Lambda \exp(-\Lambda\tau), \ \tau > 0,$$

где Λ — параметр потока, равный математическому ожиданию числа целей, пересекающих зону обзора РЛС в единицу времени.

Случайные числа $\{\tau_i\}$ с плотностью распределения $w(\tau)$ могут быть получены на ЦВМ путем преобразования последовательности псевдослучайных чисел $\{\xi_i\}$, равномерно распределенных в интервале (0, 1).

В случае простейшего потока, между случайными числами ξ_i и τ_i существует простая аналитическая зависимость (§ 4.1)

$$\tau_i = -(\ln(1 - \xi_i))/\Lambda, \tag{4.4.2}$$

которая позволяет решить поставленную задачу.

Таким образом, моделирование моментов влета целей в зону обзора РЛС сводится к выполнению операций: выборки последовательности случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0, 1); вычисления τ_i по формуле (2); вычисления t_{0i} по формуле (1). Последовательность $\{t_{0i}\}$ записывается в ОЗУ ЦВМ.

Кроме моментов времени влета, необходимо также моделировать угловые координаты точки влета каждой цели в зону обзора РЛС. При этом желательно учитывать сложившуюся тенденцию в направлениях подлета самолетов к аэродрому и расписание движения. Если же преимущественных направлений подлета нет или они не учитываются, то можно предположить, что точки влета распределены равномерно по дуге окружности радиуса $r_{вх}$ с центром в точке стояния РЛС. При этом и азимут точки пересечения зоны обзора распределен равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, т. е. $w(\beta_{вх}) = 1/2\pi$. Теперь, при помощи псевдослучайных чисел ξ_i можно определить азимут входа по формуле

$$\beta_{вхi} = 2\pi\xi_i.$$

Таким образом, полярными координатами точки входа i-й цели в зону обзора являются дальность $r_{вх\ i}$ и азимут $\beta_{вх\ i}$. Прямоугольные координаты точки влета i-й цели получаются по формулам (при условии, что используется система координат предыдущего параграфа):

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} x_{0i} &= r_{вх}(1 + \sin\beta_{вх\ i}) \\ y_{0i} &= r_{вх}(1 + \cos\beta_{вх\ i}) \end{aligned}\right\} && \text{при } \beta_{вхi} \leqslant \frac{\pi}{2}, \\
&\left.\begin{aligned} x_{0i} &= r_{вх}[1 + \sin(\pi - \beta_{вх\ i})] \\ y_{0i} &= r_{вх}[1 - \cos(\pi - \beta_{вх\ i})] \end{aligned}\right\} && \text{при } \frac{\pi}{2} < \beta_{вхi} \leqslant \pi, \\
&\left.\begin{aligned} x_{0i} &= r_{вх}[1 - \sin(\beta_{вхi} - \pi)] \\ y_{0i} &= r_{вх}[1 - \cos(\beta_{вхi} - \pi)] \end{aligned}\right\} && \text{при } \pi < \beta_{вх\ i} \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\
&\left.\begin{aligned} x_{0i} &= r_{вх}[1 - \sin(2\pi - \beta_{вхi})] \\ y_{0i} &= r_{вх}[1 + \cos(2\pi - \beta_{вхi})] \end{aligned}\right\} && \text{при } \frac{3\pi}{2} < \beta_{вхi} \leqslant 2\pi.
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Данные о моменте времени t_{0i} и координатах точки влета x_{0i}, y_{0i} характеризуют начальную опорную точку i-й траектории и используются в дальнейшем при расчете координат точек локации в зоне обзора.

4.4.2. Моделирование типа, высоты и скорости полета цели

При создании модели воздушной обстановки необходимо исходить из того, что в зону обзора могут влетать самолеты различных типов, которые отличаются по скорости и высоте полета. Учет разнотипности целей может быть произведен следующим образом.

Составляется таблица, в которой для всех предполагаемых типов самолетов записываются скорости полета в диапазоне допустимых высот (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Диапазон высот (км)	$\Delta H_l = H_l - H_{l-1}$ $(H_0 = 0)$				
	ΔH_1	ΔH_2	ΔH_3	. . .	ΔH_m
Тип самолета	Скорость, км/час				
1	$Vn.$	V_{12}	V_{13}	. . .	—
2	—	V_{22}	V_{23}	. . .	V_{2m}
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
k	—	—	V_{k3}	. . .	V_{km}

Эта таблица хранится в ЗУ ЦВМ. Далее считается, что пересечение внешней границы зоны обзора самолетом того или иного типа носит вероятностный характер, поэтому исходя из анализа предполагаемой воздушной обстановки заранее устанавливаются вероятности появле* ния указанных в табл. 4.1 самолетов (по типам). Обозначим эти вероятности $p_1, p_2, \ldots p_k$ и предположим, что выполняется условие нормировки $\sum p_i = 1$. Тогда процедура моделирования типа самолета состоит в сравнении случайного числа ξ_i, распределенного по равномерному закону в интервале (0, 1) с величинами P_{l-1} и P_l, определяемыми по формулам:

$$P_{l-1} = \sum^{l-1} p_l \qquad P_l = \sum^{l} p_i, \quad (l = 1, k).$$

Выбирается тот тип самолета l, для которого выполняется условие

$$P_{l-1} \leqslant \xi_i < P_l.$$

После того как тип самолета выбран, в табл. 4.1 отыскивается диапазон высот полета самолетов данного типа. Например, для самолетов 2-го типа диапазон высот составляет $(H_2 - H_m)$. Далее опять таки задаются вероятности полета самолета на различных участках допустимого диапазона высот и методом, рассмотренным выше, находится поддиапазон ΔH_l, приписываемый моделируемому самолету.

Скорость самолета выбирается из табл. 4.1 после того, как определена высота его полета.

Таким образом, в процессе моделирования типа, высоты и скорости полета самолета получается третья координата начальной точки траектории и модуль вектора скорости полета самолета. Эти данные также используются при формировании новых точек локации на траектории.

4.4.3. Моделирование траектории в зоне обзора РЛС

При моделировании траектории в зоне обзора РЛС необходимо учитывать особенности функционирования системы управления, для которой эта РЛС является источником информации. В рассматриваемом случае автоматизированной системы управления движением самолетов

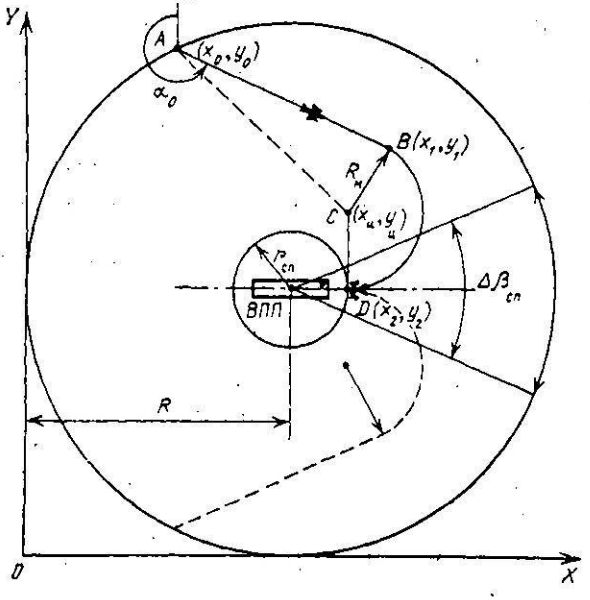


Рис. 4.5. Моделирование траекторий в зоне обзора РЛС.

в районе крупного аэродрома эти особенности определяются, главным образом, тем, что в составе автоматизированной системы управления аэродрома, кроме системы дальнего обнаружения и управления, имеется также система слепой посадки самолетов, функционирование которой начинается после вывода самолета в заданный сектор на заданную дальность. Учитывая это, при моделировании траектории полета самолетов в зоне обзора РЛС наблюдения и управления аэродрома могут быть приняты следующие исходные предпосылки (рис. 4.5):

1. Начальной точкой траектории в зоне обзора является точка вылета, расположенная на дуге окружности радиуса $r_{вх} = R$.

2. Конечной точкой траектории является любая точка на дуге окружности радиуса $r_{сп}$, соответствующего дальности захвата системы слепой посадки в заданном секторе $\Delta\beta_{сп}$.

3. Вся траектория движения самолета в зоне обзора РЛС наблюдения и управления состоит из двух участков: начального участка прямолинейного движения и конечного участка виража. В конечной точке виража самолет передается в систему слепой посадки, и, следовательно, его траектория считается законченной.

Уточним некоторые из перечисленных предпосылок с целью детализации и упрощения задачи.

Выбор координат конечной точки траектории может быть уточнен например, из условия, что точки входа самолета в сектор захвата системы слепой посадки распределены по нормальному закону с математическим ожиданием, равным середине дуги сектора $\Delta\beta_{сп}$ на дальности $z_{сп}$, и известной дисперсией. В дальнейшем для простоты будем считать, что точка входа самолета в зону захвата системы слепой посадки просто совпадает с серединой дуги, стягивающей сектор $\Delta\beta_{сп}$ на дальности $r_{сп}$.

Изложенные выше общие соображения и предпосылки относятся к построению модели траектории самолета, влетающего в зону обзора РЛС и совершающего посадку на аэродроме. В общем случае, кроме траекторий «прибывающих» самолетов, необходимо моделировать также траектории самолетов «убывающих», т. е. взлетающих с аэродрома и движущихся к границе зоны обзора РЛС, вплоть до выхода из нее. Очевидно, можно принять, что взлетающие самолеты входят в зону обзора РЛС наблюдения и управления на границе зоны действия системы слепой посадки.

Для системы обработки радиолокационной информации обслуживание подлетающих и улетающих самолетов является идентичным. Поэтому, если целью моделирования является только испытание системы обработки, можно ограничиться односторонним потоком самолетов. При исследовании же системы управления в целом требуется моделировать поток как прибывающих, так и убывающих самолетов.

В дальнейшем ограничимся моделированием траекторий подлетающих самолетов. Кроме того, для упрощения расчетов будем предполагать, что посадочная полоса расположена вдоль оси X (рис. 4.5), а прямолинейный полет и вираж самолета производится на неизменной высоте, т. е. в горизонтальной плоскости.

Наметим теперь формульную Схему расчета параметров траектории полета самолета в зоне обзора РЛС. Очевидно, траектория будет задана, если будут известны:

— координаты начальной точки траектории $A\ (x_0, y_0)$,

— скорость $V_п$ движения на прямолинейном участке и угол α_0 (п. 4.3.1),

— координаты конечной точки траектории $D\ (x_2, y_2)$,

— скорость движения на участке виража $V_м$,

— радиус виража $R_м$,

— координаты центра окружности виража $C\ (x_ц, y_ц)$,

— координаты точки сопряжения прямолинейного и криволинейного участков траектории $B\ (x_1, y_1)$,

— глубина виража $\varphi_м$.

Часть из указанных параметров определены в предыдущих пунктах. Некоторые другие, такие как координаты конечной точки траектории, скорость на участке виража, допустимая перегрузка на вираже должны быть заданы в исходных данных. Расчет остальных параметров производится в следующей последовательности:

1. Определяется радиус виража по формуле (3.1):

2. Центр окружности виража находится на линии, касательной к окружности с радиусом $r_{сп}$ в точке $D\ (x_2, y_2)$. Координаты центра находятся из выражений: -

$$x_ц = x_2,\ y_ц = y_2 \quad + R_м, \text{ если } y_0 \geqslant R$$

(вираж в этом случае — правый),

$$x_ц = x_2,\ y_ц = y_г - R_м, \quad \text{если } y_0 < R$$

(вираж в этом случае — левый).

3. Координаты точки сопряжения B находятся из следующих условий:

прямые линии $ЛВ$ и $СВ$ пересекаются под прямым углом; из этого условия получается первое уравнение, связывающее координаты точки $B\ (x_1, y_1)$ с координатами точек $A\ (x_0, y_0)$ и $C\ (x_ц, y_ц)$

$$x_1^2 - ax_1 + y_1^2 - ay_1 + c = 0, \tag{4.4.4}$$

где $a = x_0 + x_ц; \quad b = y_0 + y_ц; \quad c = x_0 y_ц + x_ц y_0;$

площадь треугольника $ЛВС$ связана с координатами углов этого треугольника соотношением

$$2S_{ABC} = x_0 (y_ц - y_1) + x_ц (y_1 - y_0) + x_1 (y_0 - y_ц).$$

Из этого соотношения получаем второе уравнение в виде:

$$dx_1 + ey_1 + f = 0, \tag{4.4.5}$$

где $d = y_0 - y_ц,\ e = x_ц - x_0,\ f = x_0 y_ц - x_ц y_0 - 2S,$

$$S = R_м \sqrt{l_{AC}^2 - R_м^2}/2,\ l_{AC}^2 = e^2 + d^2.$$

Совместное решение уравнений (4) и (5) дает единственное квадратное уравнение для координаты y_1 в виде

$$\alpha y_1^2 + \beta y_1 + \gamma = 0, \tag{4.4.6}$$

где

$$\alpha = 1 + \frac{e^2}{d^2}, \quad \beta = \frac{2ef}{d^2} + \frac{ae}{d} - b, \quad \gamma = \frac{f^2}{d^2} + \frac{af}{d} + c.$$

Решение этого уравнения дает

$$y_x = (-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})/2\alpha.$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае уравнение (6) имеет только вещественные корни. После решения уравнения (6) выбирается большее значение корня, если $x_0 < x_ц,\ y_0 > R$ или $x_0 > x_ц,\ y_0 < R$. В остальных случаях выбирается меньшее значение корня.

После вычисления координаты y_1 координата x_1 находится однозначно из уравнения (5).

4. Глубина виража $\varphi_м$ находится по одной из следующих формул;

а) если маневр правый,

$$\varphi_м = \pi - \operatorname{arctg}\frac{x_ц - x_1}{y_ц} \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x_ц, \quad y_1 > y_ц,$$

$$\varphi_м = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y_1 - y_ц}{x_1 - x_ц} \quad \text{при} \quad x_1 > x_ц, \quad y_1 \leqslant y_ц,$$

$$\varphi_м = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{y_ц - y_1}{x_1 - x_ц} \quad \text{при} \quad x_1 > x_ц, \quad y_1 \geqslant y_ц;$$

б) если маневр левый,

$$\varphi_м = \pi - \operatorname{arctg}\frac{x_ц - x_1}{y_н - y_1} \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x_ц, \quad y_1 < y_ц,$$

$$\varphi_м = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y_ц - y_1}{x_1 - x_ц} \quad \text{при} \quad x_1 > x_ц, \quad y_1 \leqslant y_ц,$$

$$\varphi_м = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{y_1 - y_ц}{x_1 - x_ц} \quad \text{при} \quad x_1 > x_ц, \quad y_1 \geqslant y_ц.$$

5. Число точек на вираже определяется по формуле

где T_0 — период обзора РЛС.

6. Число точек на линейном участке траектории определяется по формуле

$$\text{п} T_0 l,$$

где $l_{AB} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$.

7. Угол α_0, определяющий направление полета самолета на линейном участке траектории, определяется из соотношений (для правого виража)

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad \text{при} \quad x_0 > x_1, \quad y_0 > y_1,$$

$$\alpha_0 = \pi \quad \text{при} \quad x_0 = x_1, y_0 > y_1,$$

$$\alpha_0 = \text{к} + \operatorname{arctg}\frac{x_1 - x_0}{y_0 - y_1} \quad \text{при} \quad x_1 > x_0, \quad y_0 > y_1,$$

$$\alpha_0 = 3\pi/2 \quad \text{при} \quad y_1 = y_0, \quad x_1 > x_0,$$

$$\alpha_0 = \frac{3}{2}\pi + \operatorname{arctg}\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{при} \quad x_1 > x_0, \quad y_1 > y_0.$$

Аналогичные выражения для случая левого виража могут быть получены непосредственно из рис. 4.5,

После вычислений в ЗУ ЦВМ записываются отдельно параметры линейного участка траектории (x_0, y_0, $V_п$, α_0, $N_п$) и участка виража (x_1, y_1, $V_м$, $\varphi_м$, $N_м$).

Таким образом, в рассматриваемом случае процесс моделирования траектории в зоне обзора РЛС состоит в следующем. Сначала модели-

руется момент влёта самолета в зону обзора как очередное событие случайного потока однородных событий. Затем при фиксированном моменте $t_{вх}$ моделируются плоскостные координаты начальной точки траектории (x_0, y_0), высота H_0 и скорость $V_п$ полета самолета. Далее траектория самолета строится в виде двух сопряженных участков: прямолинейного и кругового.

Возможны, естественно, и более сложные модели траектории.

4.4.4. Моделирование потока истинных и ложных отметок на входе системы обработки радиолокационной информации

Процесс формирования радиолокационных отметок от самолетов, находящихся в зоне обзора РЛС, можно представить следующим образом. Луч диаграммы направленности РЛС, вращаясь равномерно, пересекает траектории самолетов, находящихся в ее зоне обзора. Получающиеся при этом точки пересечения являются «идеальными» точками локации.

Таким образом, для моделирования координат «идеальных» точек локации необходимо решать совместно уравнение траектории и уравнение движения диаграммы направленности РЛС, которое можно записать в виде

$$\beta(t) = \beta_0 + (2\pi/T_0)\, t,$$

где β_0 — азимут исходного направления (обычно $\beta_0 = 0$); T_0 — период обзора РЛС.

Однако процесс моделирования можно упростить, если сначала в произвольном порядке вычислить координаты каждой траектории, а затем расположить полученные значения в порядке возрастания дальности r и азимута β. Поскольку координата β однозначно связана с текущим временем t, то при упорядочении каждой паре координат r_i, β_i можно приписать время локации t_i.

Полученные таким образом точки локации принадлежат самолетам, находящимся в зоне обзора РЛС. Однако не все эти точки в действительности будут обнаружены в текущем обзоре. Необходимо, следовательно, учесть вероятность обнаружения самолетов как функцию дальности r (см. предыдущий параграф). Далее для всех обнаруженных «идеальных» точек локации необходимо учесть ошибки измерения координат. Моделирование ошибок производится в соответствии с процедурой, описанной в предыдущем параграфе. Полученные случайные ошибки прибавляются к координатам «идеальных» точек локации. В результате получаются координаты «реальных» радиолокационных отметок.

Таким образом, для формирования потока радиолокационных отметок от множества самолетов, находящихся в зоне обзора РЛС, можно использовать все те операции, которые используются при моделировании последовательности отметок от одиночного самолета, добавив к ним операцию упорядочения отметок по времени локации.

Перейдем теперь к вопросу моделирования потока ложных отметок в зоне обзора РЛС.

Каждую ложную отметку, так же как и истинную, будем задавать (при рассмотрении плоской картины) тремя параметрами: координатами $r_{л i}$, $\beta_{л i}$ и моментом локации $t_{л i}$.

Случайные моменты $t_{л\ i}$ появления помехи могут быть заданы как случайный поток однородных событий. В качестве интервала времени, на котором рассматриваются реализации этого потока, должен быть выбран период обзора T_0.

Последовательность операций моделирования ложных отметок сводится к следующей схеме:

— моделируется поток моментов времени $t_{л i}$ в интервале (О, T) в соответствии с методикой, изложенной в п. 4.4.1;

— находится азимут ложной отметки по формуле

$$\beta_{л\ i} = n_i \Delta_\beta,$$

где $n_i = [t_{л\ i}/T_п]$— целая часть отношения промежутка времени $t_{л\ i}$ к длительности периода зондирования $T_п$; $\Delta_\beta = (2\pi/T_0)T_п$— угловая дискретность зондирования пространства;

— находится дальность ложной отметки по формуле

$$r_{л\ i} = c\ (\Delta t_{л\ i}/2), \qquad (4.4.7)$$

где $\Delta t_{л i} = t_{л i} - n_i T_п$; $c = 3 \cdot 10^5$ *км/сек*.

Полученная по формуле (7) дальность сравнивается с максимальной дальностью РЛС. При $r_{л i} < r_{макс}$ считается, что ложная отметка находится в зоне обзора РЛС, в противном случае информация о ней стирается.

Аналогичным образом формируются координаты других ложных отметок.

Отдельно взятая последовательность ложных отметок является упорядоченной по времени локации. Однако при наличии и истинных, и ложных отметок нобходимо производить совместное их упорядочение, чтобы получить объединенный поток истинных и ложных отметок. Далее, вообще говоря, необходимо еще проверить соответствие расстояний между соседними отметками потока разрешающей способности РЛС, но при не очень больших плотностях потоков истинных и ложных отметок последнюю операцию, с целью упрощения, можно исключить.

В заключение составим операторную схему алгоритма формирования потока радиолокационных отметок на входе системы обработки радиолокационной информации. Схема является укрупненной. Принятые в ней операторы имеют следующий смысл:

A_1 — определение момента $t_к$ окончания очередного периода обзора РЛС, $t_к = t_{к-1} + T_0$,

P_2 — проверка условия $t_{вх\ i} < t_к$ принадлежности момента времени влета очередного (i-го) самолета текущему периоду обзора,

F_3 — прибавление единицы в счетчик числа m траекторий в зоне обзора РЛС ($\langle Счm \rangle + 1 \rightarrow \langle Счm \rangle$),

A_4 — моделирование координат начальной точки новой траектории,

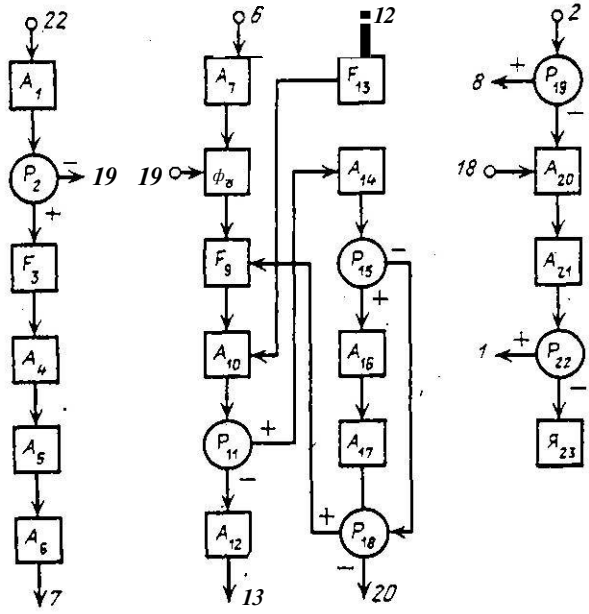


Рис. 4.6. Граф-схема моделирующего алгоритма формирования потока истинных и ложных отметок на входе системы обработки радиолокационной информации.

A_5 — моделирование скорости и высоты полета самолета,
A_6 — моделирование координат опорных точек и параметров новой траектории,
A_7 — моделирование момента $t_{вхi+1}$ входа следующей цели в зону обзора РЛС,
Φ_8 — организация счета просмотренных траекторий (организация счетчика — Сч m'),
F_9 — прибавление в Сч m' единицы,
A_{10} — выбор очередной сопровождаемой траектории,
P_{11} — проверка числа точек, просмотренных на траектории ($N_i < N_{пi} + N_{мi}$),
A_{12} — сброс траектории,
F_{13} — вычитание единицы из счетчика m числа траекторий в зоне обзора РЛС «Сч m〉— $i \rightarrow$ 〈Сч m〉),
A_{14} — моделирование «идеальной» точки локации i-й траектории,
P_{15} — моделирование процесса -обнаружения отметки,
A_{16} — формирование ошибок измерения координат,
A_{17} — расчет координат «реальных» отметок,
P_{18} — проверка, все ли траектории в зоне обзора РЛС просмотрены «Сч m'〉< m),
P_{19} — проверка условия Сч $m > 0$,
A_{20} — формирование ложных отметок,

A_{21} — упорядочение ложных отметок и выдача их в систему обработки,

P_{22} — проверка условия $N < N_0$, где N_0 — заданное число реализаций,

$Я_{23}$ — останов.

Операторная схема алгоритма имеет вид

$$^{22}A\ P \qquad F_{19}\ A_{20}\ A_{21}\ A_{22}\ A_{23}\ ^{19}\Phi^{18}F\ ^{13}A$$

Соответствующая граф-схема алгоритма приведена на рис. 4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. М., «Наука», 1968.
2. Математические основы современной радиоэлектроники. Под ред. Л. С. Гуткина. М., «Сов. радио», 1968. Авт: И. А. Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левин, Р. Л. Стратонович.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
4. Каценбоген М. С. Характеристики обнаружения. М., «Сов. радио», 1965.
5. Полляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., «Сов. радио», 1971.
6. Колин К. К., Лнпаев В. В. Проектирование алгоритмов управляющих ЦВМ. М., «Сов. радио», 1970.

Раздел II

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

5. ЦИФРОВАЯ ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДВОИЧНО КВАНТОВАННЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

5.1. Общая характеристика задач первичной обработки радиолокационных сигналов

Первичная обработка является начальной стадией извлечения информации о целях на основе сигналов, полученных на выходе приемного устройства РЛС. Обычно первичная обработка организуется по тактам. В случае импульсной РЛС продолжительность такта обработки равна длительности периода зондирования.

В процессе первичной обработки решаются следующие основные задачи:

— группирование «раздробленных» отраженных сигналов и формирование пачек;

— принятие решений о принадлежности сформированных пачек к истинным целям (обнаружение);

— определение координат центра пачек, принятых за истинные, что соответствует определению мгновенных значений координат целей в момент локации;

— привязка к координатам времени локации, что необходимо для дальнейшей обработки информации о целях.

Рассмотрим более подробно перечисленные задачи.

Эффект «дробления» отраженного от цели сигнала на целый ряд элементарных составляющих имеет место, во-первых, вследствие многоканальности РЛС. Так, во многих РЛС обзорного действия диаграмма направленности в вертикальной плоскости формируется с помощью парциальных лучей, каждый из которых образует отдельный канал обработки отраженных сигналов. Вследствие того, что парциальные диаграммы сильно перекрываются, сигналы, принимаемые в нескольких соседних каналах, могут принадлежать одной цели. Аналогичное явление имеет место в РЛС, предназначенных для измерения радиальной скорости целей с помощью набора параллельно включенных допплеровских фильтров, т. е. в РЛС, имеющих многоканальность по радиальной скорости. Второй причиной «дробления» отраженного сигнала является дискретизация по времени (дальности). Как уже отмечалось, с целью исключения пропусков отраженных сигналов, период

дискретизации берут меньше длительности зондирующего сигнала. Это обусловливает возможность фиксации отраженного от одной цели сигнала в двух и более соседних интервалах временной дискретизации. Элементарные сигналы, полученные от цели в результате однократного зондирования, подлежат объединению при обработке.

Далее необходимо иметь в виду, что обычно отраженный от цели сигнал имеет пачечную структуру, так как за время нахождения цели в луче диаграммы направленности антенны РЛС посылается несколько зондирующих сигналов и принимается столько же отраженных. Поэтому в процессе обработки возникает задача объединения в пачки сигналов, полученных в ряде соседних тактов (периодов зондирования). Возможны, естественно, случаи, когда отраженный сигнал является «моноимпульсным» и операция формирования пачек отсутствует.

После того, как пачка сформирована, возникает новая задача, состоящая в том, чтобы принять решение: является ли эта пачка истинной, т. е. принадлежащей интересующей нас цели, или она является ложной, т. е. образованной помехой. Для этого решается задача обнаружения цели. В соответствии, например, с критерием Неймана — Пирсона обнаружение цели производится по числу импульсов, составивших пачку. Если это число равно или больше некоторого порога, установленного в соответствии с допустимой вероятностью ложного обнаружения, то принимается решение об обнаружении цели. В противном случае считается, что сформированная пачка является ложной и подлежит сбросу. Возможны и другие критерии обнаружения, при формировании которых учитывается не только число, но и «кучность» образующих пачку импульсов.

При решении задачи обнаружения в значительной степени отсеиваются ложные пачки и тем самым уменьшается объем информации, подлежащей дальнейшей обработке. Однако в процессе реализации этой операции производится отсев (сброс) и некоторой части истинных пачек, особенно от целей, находящихся на больших расстояниях, где отраженный сигнал слаб. Если указанная потеря истинных пачек считается нежелательной или даже недопустимой, то операция обнаружения на этапе первичной обработки не выполняется. В этом случае каждая пачка принимается за истинную и вся тяжесть отсева ложной информации ложится на последующие этапы обработки. Объем перерабатываемой информации на последующих этапах при этом резко возрастает. В дальнейшем предполагается, что операция обнаружения пачки на этапе первичной обработки реализуется.

Далее для каждой пачки, принятой за истинную, необходимо определить ее координаты, что соответствует фиксации координат мгновенного положения цели в момент локации. Обычно значения координат цели соответствуют координатам центра пачки в l-мерном пространстве измеряемых РЛС координат.

Наконец, к координатам каждой истинной пачки должно быть приписано время ее получения, приближенно равное времени локации соответствующей цели. Координаты мгновенного положения цели в момент локации поступают для дальнейшей обработки.

5.2. Формирование пачек радиолокационных сигналов

Решение задачи объединения элементарных двоично квантованных сигналов в пачки сигналов, относимых к одной цели, может быть выполнено только с помощью достаточно быстродействующей ЦВМ. Имея в виду это обстоятельство, в данном параграфе рассматриваются принципы машинной реализации процесса объединения квантованных сигналов в пачки для трехкоординатной РЛС кругового (секторного) обзора с парциальной структурой диаграммы направленности в вертикальной плоскости.

Предполагается, что дискретизация и квантование сигналов на выходе приемного устройства РЛС производится одновременно во всех парциальных каналах. В результате в каждом интервале дискретиза-

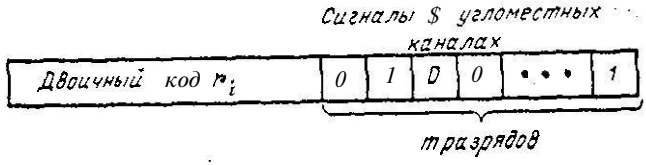


Рис. 5.1. Кодограмма информации, формируемая для каждого интервала дискретизации.

ции по времени (дальности) снимается m-позиционная (по числу парциальных каналов) последовательность нулей и единиц, причем номер позиции в последовательности соответствует номеру парциального канала. Номер интервала дальности кодируется двоичным кодом.

Кодограмма информации для i-го интервала дискретизации по дальности имеет вид, показанный на рис. 5.1. Каждая такая кодограмма записывается в буферное запоминающее устройство (БЗУ) ЦВМ в порядке увеличения дальности.

В результате равнодискретной выборки сигналов *вдоль* развертки дальности одновременно во всех парциальных каналах формируется дискретный аналог сечения зоны обзора РЛС плоскостью r, ε на фиксированном азимутальном направлении β_1. Дискретизованное сечение зоны обзора схематически показано на рис. 5.2, *а*. Элементарные квантованные сигналы (единицы) изображены на этом рисунке точками, а принятые сягналы (отраженные от цели или ложные) представляются группами точек, обведенных пунктирными линиями. В следующих тактах зондирования производятся аналогичные операции выборки, в результате которых получаются дискретные аналоги сечения зоны обзора в направлении β_2, β_3 и т. д. (рис. 5.2, *б* и в). Дискретный аналог сигнала пачечной структуры обведен на рис. 5.2 штрих-пунктирной линией.

Задача, решаемая на ЦВМ, в конечном счете состоит в том, чтобы полученные при дискретизации элементарные сигналы объединить в группы и пачки, а затем оценить координаты центра каждой пачки и выдать их для дальнейшей обработки.

Решение сформулированной задачи целесообразно производить в два этапа:

1) объединение элементарных сигналов в группы в плоскости r, ε и определение координат «центра тяжести» этих групп. Пара полученных таким образом координат r_{0i}, ε_{0i} называется радиолокационной отметкой;

2) объединение полученных отметок в пачки в плоскости β и определение координат центра пачек.

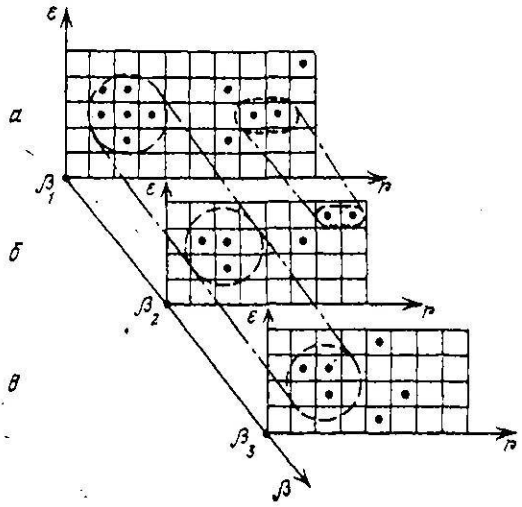


Рис. 5.2. Схематическое изображение дискретизованных сигналов пачечной структуры.

На первом этапе задача решается путем поразрядного объединения единиц из соседних интервалов дискретизации по дальности. В процессе объединения формируются частично сгруппированные последовательности нулей и единиц, так что на каждом шаге объединения сравнению подлежат предыдущая, частично сгруппированная последовательность, отнесенная к интервалу дискретизации Δr_{i-1}, и новая последовательность, полученная в интервале Δr_i.

Пусть формирование k-го разряда новой частично сгруппированной последовательности производится по правилу

$$y_i^{(k)} = x_i^{(k)} y_{i-1}^{(k)} + (x_i^{(k)} \overline{y}_{i-1}^{(k)} + \overline{x}_i^{(k)} y_{i-1}^{(k)})(x_i^{(k-1)} y_{i-1}^{(k-1)} + x_i^{(k+1)} y_{i-1}^{(k+1)}), \quad (5.2.1)$$

где $x_i^{(k)}$ ($\overline{x}_i^{(k)}$) — логическая переменная в k-м разряде новой последовательности из интервала Δr_i (о логических переменных см. гл. 2); $y_{i-1}^{(k)}$ ($\overline{y}_{i-1}^{(k)}$) — логическая переменная в k-м разряде частично сгруппированной последовательности, отнесенная к интервалу Δr_{i-1}.

В соответствии с (1) единица в k-м разряде новой частично сгруппированной последовательности получается в случае, если в сравни-

ваемых последовательностях в этих разрядах стоят единицы или если в одной из сравниваемых последовательностей в k-м разряде стоит нуль, но в соседних справа или слева разрядах стоят обе единицы.

После формирования новой частично сгруппированной последовательности необходимо решить еще две задачи:

1. Выявить, нет ли в принятой из БЗУ последовательности начала новой группы.

2. Выявить, нет ли в предыдущей частично сгруппированной последовательности таких групп, которые не подтверждаются в данном цикле сравнения, которые, следовательно, можно считать завершенными (законченными).

Серия единиц (или одна единица) в новой последовательности принимается за начало группы, если она не совпадает ни с одной из серий единиц в частично сгруппированной последовательности. Для выявления начал новых групп производится «вычитание» из новой последовательности X_i только что полученной частично сгруппированной последовательности Y_i. Формирование k-го разряда кода разности производится в этом случае по правилу

$$y_{нi}^{(k)} = x_i^{(k)} \bar{y}_i^{(k)}. \qquad (5.2.2)$$

Для выделенных таким образом серий единиц вычисляется координата угла места, после чего координаты $r_{нj}$ и $\varepsilon_{нj}$ записываются в ОЗУ ЦВМ как начало новой группы.

Для выявления законченных групп из предыдущей частично сгруппированной последовательности Y_{i-1} вычитается новая частично сгруппированная последовательность Y_i, а результирующие сигналы в каждом разряде формируются по правилу

$$y_{ki}^{(k)} = y_{i-1}^{(k)} \bar{y}_i^{(k)}. \qquad (5.2.3)$$

Выделенные таким образом группы считаются закончившимися в $i-1$-м интервале дальности. Для них вычисляется и кодируется двоичным кодом угол места $\varepsilon_{кj}$. Затем производится привязка начал и концов закончившихся групп по правилу

$$|\varepsilon_{нj} - \varepsilon_{нj}| \leqslant \Delta\varepsilon_{св}, \qquad |r_{кj} - r_{нj}| \leqslant \Delta r_{св}. \qquad (5.2.4)$$

В дальнейшем вычисляются координаты центра каждой сформированной группы. Вычисление производится по формулам

$$r_{0j} = \frac{r_{нj} + r_{кj}}{2}, \qquad \varepsilon_{0j} = \frac{\varepsilon_{нj} + \varepsilon_{кj}}{2}. \qquad (5.2.5)$$

Полученные координаты радиолокационной отметки записываются в ОЗУ и используются в дальнейшем для формирования пачек.

Таким образом, в процессе реализации первого этапа обработки все группы будут объединены в отметки и переданы на второй этап обработки. Для реализации обработки в реальном масштабе времени необходимо, чтобы к началу следующего цикла (периода зондирования) информация предыдущего цикла была полностью обработана.

Объединение радиолокационных отметок в пачки производится путем сравнения их по координатам. Новая отметка с координатами r_{0j}, β_{0j}, ε_{0j} объединяется с незавершенной пачкой, имеющей координаты r_{nj}, β_{nj}, ε_{nj}, если одновременно выполняются условия

$$\begin{aligned} |\beta_{nj}-\beta_{0j}| &\leqslant \Delta\beta_з, \\ |\varepsilon_{nj}-\varepsilon_{0j}| &\leqslant \Delta\varepsilon_з, \end{aligned} \qquad (5.2.6)$$

где $\Delta r_з$, $\Delta\beta_з$ и $\Delta\varepsilon_з$ — заранее выбранные размеры зон связи по соответствующим координатам.

Для вычисления координат незавершенных пачек может быть использован, например, метод средневзвешенных [2]. Конец пачки фиксируется по числу пропусков отметок, объединяемых в пачку в фиксированных границах по координатам r и ε.

Условимся в дальнейшем считать, что для первичной обработки поступают сформированные пачки сигналов (отметок).

5.3. Элементы синтеза оптимальных логических схем для первичной обработки пачек двоично квантованных сигналов

Задачи синтеза оптимальных алгоритмов первичной обработки пачек двоично квантованных сигналов решались в гл. I. Для реализации полученных там алгоритмов предполагалось использование специализированных цифровых вычислительных устройств с программным управлением или обычных ЦВМ. На практике могут возникнуть затруднения с обеспечением требуемой производительности указанных вычислительных средств при обработке информации во всей зоне обзора РЛС. Поэтому не лишены оснований поиски более эффективных методов реализации оптимальных алгоритмов обработки пачек, в частности с помощью непрограммных вычислителей, построенных по принципу комбинаторных логических схем, обладающих высокой надежностью и быстродействием.

Задача реализации оптимальных алгоритмов обработки пачек двоично квантованных сигналов с помощью непрограммных вычислителей сводится в конечном счете к задаче синтеза так называемых оптимальных логических схем, причем под оптимальными понимаются такие логические схемы, при синтезе которых используется вся доступная статистическая информация об обрабатываемых сигналах. В данном параграфе рассматриваются примеры синтеза оптимальных логических схем для обнаружения пачек двоично квантованных сигналов.

5.3.1. Синтез оптимальной логической схемы обнаружителя пачек полностью известных двоично квантованных сигналов.

Общий подход к решению задачи статистического синтеза оптимальных логических схем обнаружителей полностью известных сигналов пачечной структуры состоит в следующем [6].

Выписываются все возможные комбинации нулей и единиц на позициях пачки. Таких комбинаций будет 2^N. Далее для каждой комбинации вычисляется условная вероятность ее появления в области сигнала и в области помехи, рассчитывается отношение правдоподобия l_i и, в соответствии с выбранным критерием оптимальности, принимается решение об обнаружении или необнаружении сигнала при приеме данной комбинации. В процессе перебора множество всех комбинаций $U = 2^N$ разбивается на два подмножества, одному из которых U_1 ставится в соответствие решение о наличии полезного сигнала, а другому U_0 — решение об его отсутствии. Затем для подмножества U_1 записывается совершенная дизъюнктивная нормальная форма логической функции, производится ее минимизация и строится комбинаторная схема, реализующая минимальную форму. Полученная схема и будет оптимальным обнаружителем, эквивалентным по своим статистическим характеристикам алгоритму весового накопления, синтезированному в гл. 1 (формулу (1.3.7)).

Таким образом, отличие в подходах к синтезу оптимальных алгоритмов и оптимальных логических схем состоит в том, что для первых указывается только последовательность операций, которые надо выполнить после приема выборки сигналов для принятия решения об обнаружении, а для вторых — все эти операции проделываются заранее. За счет этого обеспечивается существенное повышение быстродействия последних при принятии решений.

Укажем теперь на некоторые практические трудности синтеза оптимальных логических схем. Во-первых, при больших N число комбинаций будет настолько велико, что перебор их, вычисление отношений правдоподобия и принятие частных решений становится задачей трудно выполнимой, даже с помощью быстродействующей ЦВМ. Поэтому возникает задача модернизации общей методики с целью сокращения числа переборов. Во-вторых, на практике обычно задается не порог обнаружения l_0, а допустимая вероятность ложного обнаружения $P_{\text{ло}}^{(\text{д})}$. Эту вероятность и желательно использовать непосредственно при синтезе оптимальной логической схемы.

Процедура синтеза оптимальной логической схемы обнаружителя на основе заданной допустимой вероятности ложного обнаружения состоит в следующем. Сначала выбирается комбинация $\mathbf{x}_1$ с наибольшим отношением правдоподобия l_1 и для нее рассчитывается вероятность появления в области помехи $P(\mathbf{x}_1|0)$ по формуле (1.3.2). Затем выбирается следующая по величине отношения правдоподобия комбинация $\mathbf{x}_2$, рассчитывается вероятность ее появления в области помехи $P(\mathbf{x}_2|0)$ и определяется суммарная вероятность $P(\mathbf{x}_1|0) + P(\mathbf{x}_2|0)$ появления двух первых комбинаций, Эта суммарная вероятность и будет вероятностью ложного обнаружения, если решение об обнаружении принимается только по двум отобранным комбинациям. В дальнейшем отбор новых комбинаций по признаку $l_{i+1} \leqslant l_i$ производится до тех пор, пока суммарная вероятность появления хотя бы одной из отобранных комбинаций в области помехи не превысит допустимую вероятность ложного обнаружения. Очевидно, все кодовые комбинации, для

которых $\sum_{l=1}^{k} P(\mathbf{x}_l \mid 0) \leqslant P_{\text{ло}}^{(\partial)}$, могут быть приняты в качестве сигнальных.

Отбор комбинаций по признаку уменьшения отношения правдоподобия не представляет особых трудностей и не требует перебора всех возможных комбинаций. Для этого достаточно последовательно отбирать комбинации по числу и месту пропусков единиц с учетом вероятности этих пропусков в сигнальной пачке.

Дальнейшее подробное рассмотрение всех этапов синтеза логической схемы обнаружителя произведем на конкретном примере. Пусть сигнальная пачка состоит из шести импульсов. Вероятности появления единиц на позициях пачки равны соответственно $p_{S1} = p_{S6} = 0{,}1$, $p_{S2} = p_{S5} = 0{,}36$, $p_{S3} = p_{S4} = 0{,}78$. При отсутствии полезного сигнала вероятность появления единицы на выходе квантизатора не зависит от номера позиций и равна $p_N = 0{,}09$. Зададимся вероятностью ложного обнаружения $P_{\text{ло}}^{(\partial)} = 3 \cdot 10^{-4}$. В табл. 5.1 приведены кодовые комбинации в порядке убывания отношений правдоподобия и значения вероятности $P_{\text{ло}}(k)$, получаемые, если всем комбинациям от 1-й до k-й поставить в соответствие решение об обнаружении полезного сигнала. Эта вероятность рассчитывается по формуле

$$P_{\text{ло}}(k) = \sum_{l=1}^{k} P(\mathbf{x}_l \mid 0). \qquad (5.3.1)$$

Таблица 5.1

l	Кодовые комбинации	l_l	$P_{\text{ло}}(k)$	
1	1 1 1 1 1 1	1444,18	$0{,}005 \cdot 10^{-4}$	
2	0 1 1 1 1 1	1343,45	$0{,}05 \cdot 10^{-4}$	
3	1 1 1 1 1 0	1343,45	$0{,}10 \cdot 10^{-4}$	
4	0 1 1 1 1 0	1249,94	$0{,}625 \cdot 10^{-4}$	
5	1 0 1 1 1 1	250,75	$0{,}676 \cdot 10^{-4}$	
6	1 1 1 1 0 1	250,75	$0{,}726 \cdot 10^{-4}$	
7	0 0 1 1 1 1	232,23	$1{,}245 \cdot 10^{-4}$	
8	1 1 1 1 0 0	232,23	$1{,}764 \cdot 10^{-4}$	
9	0 1 1 1 0 1	232,23	$2{,}283 \cdot 10^{-4}$	
10	1 0 1 1 1 0	232,23	$2{,}802 \cdot 10^{-4}$	$< P_{\text{ло}}^{(\partial)}$
11	0 0 1 1 1 0	215,91	$8{,}119 \cdot 10^{-4}$	$> P_{\text{п}}^{(\partial)}$

Из таблицы видно, что условие $P_{\text{ло}} \leqslant P_{\text{ло}}^{(\partial)}$ выполняется для первых десяти комбинаций. Эти комбинации и следует принять в качестве сигнальных

Теперь остается записать совершенную дизъюнктивную нормальную форму логических переменных для отобранных комбинаций

$$y_{\text{обн}} = x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_6 + \bar{x}_1x_2x_3x_4x_5x_6 +$$
$$+\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_6 + x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5x_6 + x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6 +$$
$$+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4x_5x_6 + x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5\bar{x}_6 + \bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_5x_6.$$

После минимизации по правилам булевой алгебры получим

$$y_{\text{обн}} = x_3x_4[x_5(x_1 + x_2) + x_6(x_2 + x_5)]. \qquad (5.3.2)$$

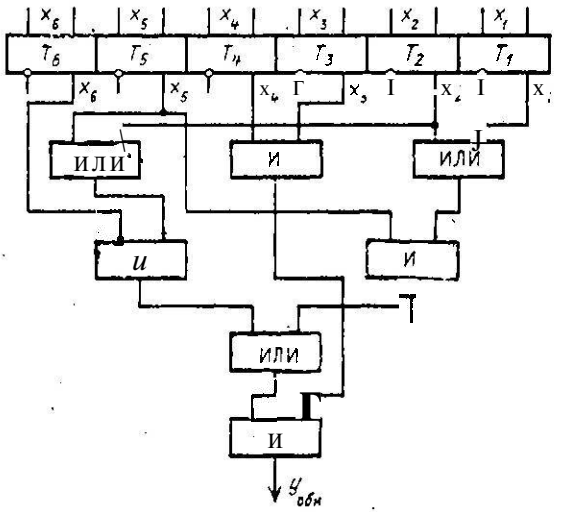


Рис. 5.3. Логическая схема оптимального обнаружителя пачки.

Логическая схема обнаружителя, реализующего полученную минимизированную функцию, показана на рис. 5.3. Кроме собственно комбинаторной схемы, на этом рисунке показано также запоминающее устройство входных сигналов на шести позициях пачки. Напомним, что работа рассматриваемой схемы происходит следующим образом: сначала в запоминающем устройстве накапливаются входные сигналы в пределах всей пачки, а затем сформированная пачка подается на вход комбинаторной части обнаружителя.

В заключение необходимо заметить, что в данном случае в процессе синтеза обнаружителя может быть подсчитана и вероятность обнаружения пачки по формуле

$$P_{\text{обн}} = \sum_{i=1}^{k} P(\mathbf{x}_i \mid S), \qquad (5.3.3)$$

где k — число отобранных комбинаций.

5.3.2. Особенности работы оптимального логического обнаружителя при неизвестном положении пачки

При синтезе оптимальной логической схемы обнаружителя предполагалось, что положение сигнала (пачки) известно. Это и обусловило основную процедуру обработки; сначала квантованные сигналы накапливаются в пределах всей пачки, а затем полученная последовательность нулей и единиц анализируется комбинаторной схемой на предмет принятия решения о ее обнаружении или необнаружении.

В реальных условиях положение пачки заранее неизвестно. Следовательно, анализ входных сигналов надо производить последовательно (по тактам), а решение принимать на каждом такте. В качестве запоминающего устройства в этом случае используется регистр со сдвигом. В каждом такте содержимое регистра сдвигается на один разряд, а в свободную ячейку записывается вновь поступивший сигнал (нуль или единица). После приема очередного сигнала содержимое регистра анализируется комбинаторной схемой обнаружителя.

Последовательный сдвиг двоично квантованных сигналов в регистре приводит к тому, что некоторые кодовые комбинации, удовлетворяющие логике обнаружения, переходят после одного или нескольких сдвигов в другие комбинации, также удовлетворяющие этой логике. Например, приведенная в табл. 5.1 кодовая комбинация 011111 после одного сдвига переходит в обнаруживаемые комбинации 111110 или 111111 (сдвиг происходит справа налево); кодовая комбинация 001111 независимо от входного сигнала также переходит в обнаруживаемые комбинации 011110 или 011111 и т. д.

Рассмотрим, как можно преобразовать выражение для логической функции обнаружителя с учетом взаимного перехода комбинаций друг в друга при сдвиге информации в регистре. В качестве примера возьмем минимизированную функцию, полученную в предыдущем пункте

$$y_{\text{обн}} = x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_6 + x_3x_4x_5x_6. \qquad (5.3.4)$$

В этой функции индексы у логических переменных представляют собой номера позиций пачки. Однако нам неизвестно положение пачки, поэтому нумерация импульсов пачки не имеет смысла. Теперь существенным фактором является только «кучность» единиц в принимаемой последовательности и от нумерации позиций пачки надо перейти к нумерации разрядов регистра, т. е. считать, что логические переменные пронумерованы в соответствии с их положением в регистре.

В соответствии с этим преобразуем дизъюнктивные члены в выражении (4) таким образом, чтобы первая двоичная переменная каждого из них имела в индексе единицу, что соответствует ее нахождению в первом разряде регистра со сдвигом. Для этого достаточно вычесть из индексов всех переменных столько единиц, чтобы индекс самой крайней слева переменной был равен единице. Подобное преобразование, очевидно, не нарушит условия обнаружения всех входящих в выражение (4) кодовых комбинаций и, вместе с тем, обнаруживает повторяемость некоторых дизъюнктивных членов. Если теперь исключить повторяю-

щиеся дизъюнктивные члены, то оудет получена упрощенная, с учетом сдвигов, форма логической функции,

Проделав указанные операции в рассматриваемом примере, получим

$$y_{\text{обн}} = x_1x_3x_4x_5 \perp$$
$$= x_1x_2x_3x_4 \dotplus x_1x_3x_4x_5 \dotplus x_1x_2x_3x_5 \qquad (5.3.5)$$

или, после преобразований,

$$y_{\text{обн}} = x_1x_3[x_4x_5 \dotplus x_2(x_4 \dotplus x_5)]. \qquad (5.3.6)$$

Соответствующая логическая схема обнаружителя (совместно с регистром со сдвигом) приведена на рис. 5.4. Сравнение схем, построен-

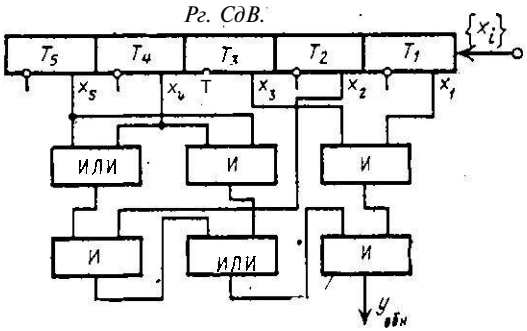


Рис. 5.4. Логическая схема обнаружителя при неизвестном положении пачки.

ных по исходной (рис. 5.3) и преобразованной с учетом сдвигов (рис.5.4) логическим функциям, показывает, что преобразование приведет к некоторому упрощению схемы обнаружителя. Платой за такое упрощение является соответствующее ухудшение качественных характеристик схемы. В частности, схема рис. 5.4 при одинаковой вероятности правильного обнаружения полезного сигнала имеет большую вероятность ложного обнаружения.

5.4. Безвесовая обработка пачек двоично квантованных сигналов

Основные трудности, возникающие при применении оптимальных логических схем обработки, состоят в том, что число импульсов в реальных пачках не является постоянным, а изменяется в зависимости от эффективной отражающей поверхности целей, дальности до целей, угла места и т. д. Оптимальные же схемы критичны к числу входных переменных и перестают быть таковыми, если это число отличается от принятого при синтезе. В связи с этим на практике часто используются упрощенные методы обработки пачек двоично квантованных сигналов. Упрощения связаны, главным образом, с отказом от использования информации о форме пачек при обработке. В этом случае единственным

признаком, по которому можно отличить область цели от области помехи, является увеличение плотности единиц в некотором фиксированном интервале позиций.

Обработка без учета информации о форме пачки называется в дальнейшем безвесовой. В данном параграфе производится описание и формализация простейших алгоритмов безвесовой обработки пачек.

5.4.1. Алгоритмы безвесовой обработки пачек двоично квантованных сигналов

В качестве исходной предпосылки для получения упрощенных методов обработки пачек двоично квантованных сигналов можно взять результаты, полученные в п. 5.3.2 при синтезе оптимальной логической схемы обнаружения пачки с неизвестным положением начала. Полученная там логическая схема при $N = 6$ выдает сигнал обнаружения, если на входе появится одна из следующих комбинаций нулей и единиц: 1111, 10111, 11101, т. е. при появлении четырех единиц на пяти смежных позициях (исключая комбинацию 11011). Очевидно, что такую или подобную логику можно использовать и для обнаружения пачек с числом импульсов $N > 6$, но теперь она уже не будет оптимальной, т. е. будет обеспечивать меньшую, чем оптимальная логика, вероятность обнаружения $P_{обн}$ при той же вероятности ложного обнаружения $P^{(\partial)}_{ло}$. На практике широко используются схемы логических обнаружителей с критериями обнаружения типа «l/m» или «l из m», где $l \leqslant m, m \leqslant 5$. Обычно эти критерии называются критериями фиксации начала пачки. Критерий фиксации начала пачки является одновременно критерием ее обнаружения.

Для исключения неоднозначности при отсчете координат пачки в процессе ее обнаружения устанавливается также критерий конца пачки. Обычно конец пачки фиксируется по наличию серии из к пропусков подряд ($k = 2 — 3$). Если логическую схему фиксации начала пачки объединить с логической схемой фиксации конца пачки так, чтобы сигнал обнаружения $y_н$ выдавался только в момент первого выполнения критерия «l/m», а сигнал $y_к$ только в момент первого выполнения критерия к, то получим так называемый логический обнаружитель с фиксацией гр'аниц пачки. В дальнейшем критерий срабатывания логического обнаружителя с фиксацией границ пачки записывается в виде «l/m — к».

Выбор подходящего критерия срабатывания логического обнаружителя производится путем сравнения различных вариантов по вероятности обнаружения и точности определения центра пачки при фиксированной вероятности ложного обнаружения $P_{ло}$. Структурная схема логического обнаружителя может быть построена исходя из описания условий его срабатывания с помощью логических функций двоичных переменных, подобно тому, как это делалось при синтезе оптимальной логической схемы (см. также § 2.1). Алгоритм работы логического обнаружителя может быть также реализован на ЦВМ.

Другой класс практических схем обнаружителей образуют так называемые накопители квантованных сигналов. Алгоритм работы накопителя непосредственно получается из оптимального алгоритма обнаружения пачки двоично квантованных сигналов [см. формулу (1.3.7)], если положить, что импульсы пачки имеют одинаковые вероятности появления (пачка прямоугольной формы). Простота реализации алгоритма накопления обусловливает его применение и в случаях реальных пачек (пачек с произвольной огибающей).

Начало пачки фиксируется накопителем по первой единице, полученной после сброса счетчика. Конец пачки фиксируется при появлении серии из к нулей, т. е. также как и в логических обнаружителях. Сигнал обнаружения выдается в момент сброса счетчика, если накопленное в нем число единиц равно или больше порогового числа N_0.

В некоторых случаях схема накопителя строится так, что счетчик считает (накапливает) не количество единиц в пачке, а количество позиций (тактов), начиная с первой единицы и до выполнения критерия конца пачки. При этом пропуски единиц на внутренних позициях пачки восстанавливаются (если их число меньше порогового числа для сброса). Решение об обнаружении принимается, также как и раньше, путем сравнения накопленного числа с пороговым. Структурная схема обнаружителя-накопителя получается путем объединения двоичного счетчика со схемой управления сбросом и логической схемой фиксации конца пачки. Возможна, естественно, непосредственная реализация алгоритма накопления на ЦВМ.

Рассмотрим теперь возможные способы оценки положения центра пачки (азимута цели) при безвесовой обработке. В качестве сигналов, по которым оценивается положение середины пачки, используются сигналы, выдаваемые обнаружителем, В схемах логических обнаружителей «l/m — k», сигналами, позволяющими оценить положение середины пачки, являются сигналы, фиксирующие начало и конец пачки. В накопителях для этой цели используется сигнал, выдаваемый при фиксации конца обнаруженной пачки и, кроме того, число позиций между началом и концом пачки (ширина пачки).

Оценка азимута цели по перечисленным выше сигналам может быть произведена по следующим формулам:

1) по азимутальному положению сигналов, фиксирующих начало и конец пачки

$$\hat{\beta}_0 = (\beta_н + \beta_к)/2, \qquad (5.4.1)$$

где $\hat{\beta}_0$ — оценка азимута цели; $\beta_н$ — азимут начального импульса пачки; $\beta_к$ — азимут конечного импульса пачки;

2) по азимутальному положению конечного импульса пачки $\beta_к$ и ширине пачки

$$\hat{\beta}_0 = \beta_к - \left(\frac{N_{сч} - 1}{2}\right)\Delta_\beta, \qquad (5.4.2)$$

где $N_{сч}$ — число позиций, соответствующее ширине обнаруженной пачки; Δ_β — угловая дискретность импульсов в пачке.

Формулы (1) и (2) чрезвычайно просты в реализации. В этом их преимущество по сравнению с алгоритмом оптимальной оценки азимута, рассмотренным в гл. 1.

Отметим в заключение, что алгоритмы безвесовой обработки двоично квантованных сигналов выбираются первоначально из практических соображений, связанных с простотой реализации. При этом статистический синтез заменяется анализом выбранных вариантов и сравнением их качественных характеристик.

5.4.2. Абстрактные схемы (графы) цифровых обнаружителей

Универсальные методы построения абстрактных схем цифровых автоматов и алгоритмов изложены в гл. 2. В данном пункте приводятся примеры построения графов цифровых логических обнаружителей и накопителей непосредственно по логической функции срабатывания схемы или просто на основе словесного описания алгоритма работы обнаружителя. Возможность применения простейших (в том числе и эвристических) методов построения абстрактных схем обусловлена относительной простотой применяемых алгоритмов обработки.

В качестве первого примера возьмем обнаружитель, реализующий логический критерий «3/4—2». Логическая функция обнаружения пачки в данном случае имеет вид

$$y_{\text{н}} = y_{\text{обн}} = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4, \qquad (5.4.5)$$

а логическая функция фиксации конца пачки равна

$$y_{\text{к}} = \bar{x}_1\bar{x}_2. \qquad (5.4.4)$$

Граф строится по частям; сначала для логики обнаружения пачки, затем для логики фиксации конца пачки и, наконец, путем объединения (композиции) полученных составляющих графов, строится граф обнаружителя в целом.

Рассмотрим практический прием построения графа по логическому выражению (3). Сначала выбираем исходное состояние графа a_0 и, начиная из этого состояния, строим цепочки переходов для каждого из конъюнктивных членов выражения (3). Вершинам цепочки приписываются запоминаемые в них комбинации нулей и единиц, а дугам — входные сигналы, под воздействием которых граф переходит из предыдущего состояния в последующее. Если i переменных, входящих в следующую конъюнкцию, совпадают с аналогичными переменными из предыдущей конъюнкции, то очередная цепочка переходов начинается из вершины a_i, принадлежащей предыдущей цепочке. Конечной вершиной каждой цепочки является состояние, отмеченное комбинацией переменных, приводящей к срабатыванию схемы обнаружения, т. е. к выдаче сигнала $y_{\text{обн}}$. В результате такого построения получим граф типа дерева, изображенный на рис. 5.5, *а*.

В дальнейшем производится упрощение графа путем объединения эквивалентных состояний. Под эквивалентными состояниями в данном

случае понимаются такие, переходы в которые из предыдущих состояний осуществляются под воздействием одних и тех же входных сигналов и при этом выдаются одинаковые выходные сигналы. Как следует из рис. 5.5, *а,* этому условию удовлетворяют состояния $a_{31}a_{42}$ и a_{43}, которые можно объединить. После этого в полученном графе необходимо доопределить некоторые переходы. Доопределение производится таким образом, чтобы не нарушалась лог,ика работы схемы и, кроме того,

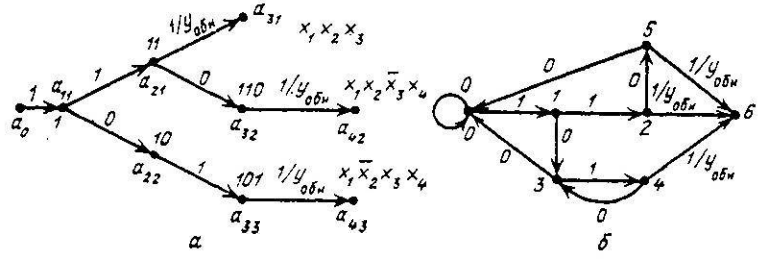


Рис. 5.5. К построению графа обнаружителя:
а — исходный граф; *б* — окончательный граф.

не терялись частичные комбинации, которые могут войти в одну из комбинаций, приводящих к обнаружению пачки. В нашем примере с этой точки зрения наиболее показательным является доопределение перехода из состояния a_{33} по входному сигналу 0. К этому переходу приводит комбинация 1010. Два последних сигнала этой комбинации могут в дальнейшем образовать комбинацию 1011, приводящую к обнаружению. Поэтому переход из состояния a_{33} по сигналу 0 надо направить в состояние a_{22}, которому соответствует комбинация 10.

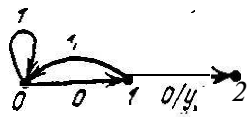


Рис. 5.6. Граф обнаружителя конца пачки.

Следует отметить, что после доопределения переходов можно в ряде случаев произвести еще раз минимизацию структуры графа, путем объединения эквивалентных состояний. В окончательном виде граф логики обнаружения «3/4» приведен на рис. 5.5, *б.*

Граф для логики фиксации конца пачки строится аналогично. Простота этой логики в нашем примере позволяет сразу представить ее граф в виде, изображенном на рис. 5.6. При объединении (композиции) полученных графов можно исходить непосредственно из учета последовательности работы элементов обнаружителя. В нашем случае сначала «работает» логика обнаружения пачки. После выдачи сигнала $y_{обн}$ начинает «работать» логика фиксации конца пачки. Поэтому объединенный граф будет представлять собой последовательное соединение двух составляющих графов. Для его построения необходимо все переходы первого графа, которым приписан сигнал $y_{обн}$, направить в исходную вершину второго графа, а переход второго графа, отмеченный выходным сигналом $y_к$, направить в исходную вершину первого графа. В результате получим граф цифрового обнаружителя, реализующего логику «3/4—2», который изображен на рис. 5.7, Аналогичным

образом могут быть построены графы для других логических обнаружителей.

Рассмотрим теперь примеры построения графов для накопителей квантованных сигналов, алгоритм работы которых задан словесно. Пусть накопление начинается с появления первой единицы после серии

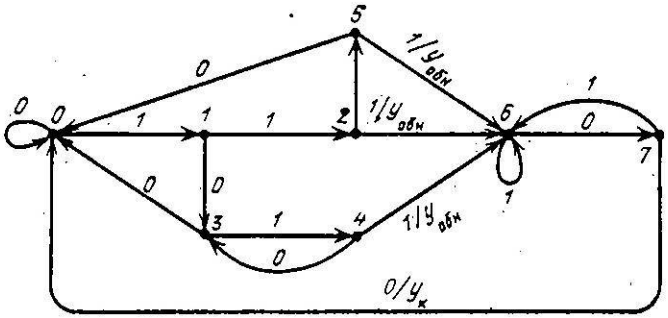


Рис. 5.7. Граф цифрового обнаружителя, реализующего логику «$^3/_4$—2».

из к и более нулей. Сигнал обнаружения выдается при накоплении N_0 единиц. После накопления порогового числа N_0 наступает насыщение схемы, т. е. ее состояния в дальнейшем не изменяются. Конец пачки фиксируется по к пропускам подряд.

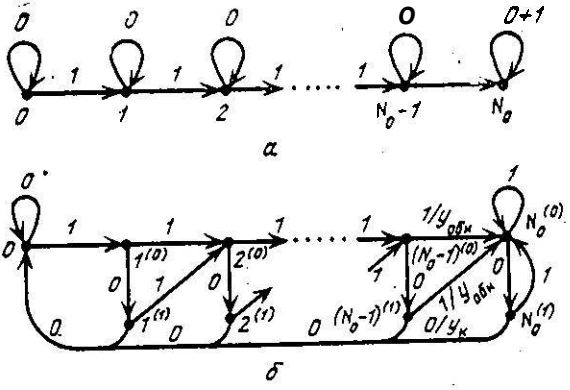


Рис. 5.8. Граф обнаружителя-накопителя:
а — граф счетчика без сброса; *б* — граф счетчика со сбросом.

Для реализации рассматриваемого алгоритма накопления необходим счетчик с насыщением и схема фиксации конца пачки. Причем эти схемы должны быть включены параллельно.

Построим сначала граф счетчика с] насыщением. Очевидно, что состояние счетчика определяется накопленным в нем числом. Поэтому общее число состояний накопителя должно быть $N_0 + 1$ (включая и исходное состояние). При поступлении единицы счетчик должен перейти в следующее состояние; при поступлении нуля состояние счет-

чика не меняется. При достижении конечного состояния счетчик должен оставаться в нем, независимо от сигнала на счетном входе. Соответствующий граф изображен на рис. 5.8, *а*. Граф обнаружителя конца пачки (для к = 2) рассматривался выше и приведен на рис. 5.6.

Рассмотрим теперь параллельную композицию двух рассмотренных графов. Очевидно, при любом состоянии счетчика, кроме исходного, обнаружитель конца пачки может находиться в одном из двух состояний (назовем их 0 и 1), соответствующих числу пропусков подряд. Поэтому в результате композиции каждое состояние счетчика a_l представляется в виде двух состояний $a_l^{(0)}$ и $a_l^{(1)}$. Объединенный граф обна-

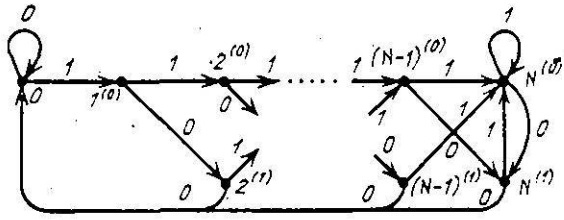


Рис. 5.9. Граф накопителя с восстановлением пропусков единиц.

ружителя показан на рис. 5.8, *б*. В этом графе сигнал обнаружения приписывается переходу в состояние $a_{N_0}^{(0)}$, а сигнал фиксации конца пачки — переходу из состояния $a_{N_0}^{(1)}$ в исходное состояние a_0. На рис. 5.9 показан граф накопителя, в котором производится восстановление пропусков единиц, если их число (подряд) не больше одного. Кроме того, счетчик в этом случае считает все азимутальные позиции между началом и концом пачки. Сигнал обнаружения выдается при достижении уровня (порога) N.

В заключение этого пункта напомним, что при необходимости, уже после того как получен граф обнаружителя, может быть легко записана и матрица его переходов. Представление работы схемы в виде матрицы переходов является исходным шагом для дальнейшего составления матрицы переходных вероятностей соответствующего графа со случайными переходами.

5.5. Статистический анализ цифровых обнаружителей

При статистическом анализе качественных характеристик цифровых логических обнаружителей и накопителей основная трудность связана с многообразием алгоритмов обработки, подлежащих анализу. Каждый из алгоритмов имеет свои специфические особенности и, следовательно, отличные от других качественные характеристики. Выбрать наилучший алгоритм среди многообразия возможных можно только путем сравнения их поведения под воздействием сигналов с одинаковыми статистическими характеристиками. При этом необходимо также учиты-

вать сложность практической реализации алгоритма. Наилучший, очевидно, будет такой алгоритм, который при приемлемых требованиях к объему оборудования (сложности программы реализации на ЦВМ) дает лучшее приближение к качественным характеристикам оптимальных алгоритмов обработки.

В данном параграфе обосновывается методика и производится статистический анализ конкретных устройств (алгоритмов) цифровой обработки пачек двоично квантованных сигналов. Приводятся некоторые результаты, полученные методом статистического моделирования на универсальной ЦВМ.

5.5.1. Анализ воздействия стационарных помех на цифровой логический обнаружитель

Будем считать, что входная последовательность обрабатываемых сигналов представляет собой последовательность испытаний Бернулли с исходами нуль и единица. В этом случае совокупность состояний обнаружителя представляет собой простую эргодическую цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей, которая для алгоритма обнаружения «m/m — k» имеет вид

$$\Pi_{m/m-k} = \begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & m & m+1 & \cdots & m+k \\ \hline 0 & q_N & p_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & q_N & 0 & p_N & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & q_N & 0 & 0 & p_N & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m-1 & q_N & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_N & 0 & \cdots & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_N & q_N & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m+k-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_N & 0 & \cdots & q_N \\ m+k & q_N & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_N & 0 & \cdots & 0 \end{array} \qquad (5.5.1)$$

где p_N — вероятность появления единицы за счет помехи; $q_N = 1 - p_N$.

Для эргодической цепи Маркова вектор P финальных вероятностей состояний не зависит от вектора вероятностей начального состояния и связан с матрицей переходных вероятностей П векторно-матричным соотношением (3.2.6) с дополнительными условиями нормировки (3.2.7). Указанные соотношения позволяют непосредственно находить финальные вероятности состояний, если известна матрица переходных вероятностей анализируемого алгоритма.

Для алгоритма обнаружения по критерию «m/m — k» с матрицей переходных вероятностей (1) решение уравнения (3.2.6) с учетом

(3,2.7) получается в виде

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{q_N^k}{q_N^{k-1}(1-p_N^m)+p_N^{m-1}(1-q_N^k)},\\
&P_1 = P_0 p_N,\\
&P_2 = P_0 p_N^2,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{m-1} = P_0 p_N^{m-1},\\
&P_m = P_0 p_N^m / q_N^k,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{m+k-1} = P_m q_N^{k-1}.
\end{aligned}
\qquad (5.5.2)
$$

Формулы (2) позволяют находить финальные вероятности состояний цепи Маркова при произвольных значениях m и k.

Вероятность ложного обнаружения на каждой из рассматриваемых позиций определяется по формуле

$$P'_{л} = P_{m}. \qquad (5.5.3)$$

т. е. равна вероятности достижения состояния a_m, начиная из исходного состояния a_0. Эту вероятность нельзя путать с вероятностью P_m, так как состояние a_m может быть достигнуто не только из состояния a_{m-1}, но и из любого состояния с номером $j \geqslant m$.

При необходимости определить вероятность ложного обнаружения хотя бы на одной из N позиций можно воспользоваться приближенной формулой

$$P_{л0} \approx P'_{л0} \mathrm{N}. \qquad (5.5.4)$$

Рассмотрим теперь алгоритм типа «l/m — k». К сожалению, ни граф, ни матрицу переходных вероятностей такого алгоритма не удается представить в общем виде, для произвольных l и m. Поэтому приходится анализировать отдельно каждый новый алгоритм.

Для алгоритма типа «2/3 — k» матрица переходных вероятностей имеет вид

$$
\Pi_{«2/3-k»} = \left\|\begin{array}{ccccccc|l}
q_N & p_N & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & q_N & p_N & 0 & \cdots & 0 & 1\\
q_N & 0 & 0 & p_N & 0 & \cdots & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & p_N & q_N & \cdots & 0 & 3\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & p_N & 0 & \cdots & q_N & 3+k-2\\
q_N & 0 & 0 & p_N & 0 & \cdots & 0 & 3+k-1
\end{array}\right\| \qquad (5.5.5)
$$

Финальные вероятности состояний этого алгоритма определяются из выражений

$$P_0 = \frac{q_N^k}{q_N^k + (1 - q_N^2)};$$

$$P_1 = P_0 p_N; \quad P_2 = P_0 p_N q_N; \tag{5.5.6}$$

$$P_3 = P_0 \frac{p_N (1 - q_N^2)}{q_N^2}; \quad P_4 = P_3 q_N;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{3+k-1} = P_3 q_N^{k-1}.$$

Вероятность ложного обнаружения на позиции равна

$$P'_{ло} = (P_1 + P_2) p_N = P_0 (1 - q_N^2). \tag{5.5.7}$$

Матрица переходных вероятностей для алгоритма «3/4 — к» имеет вид

$$\Pi_{«3/4-k»} = \begin{Vmatrix} q_N & p_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & PN & q_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_N & PN & 0 & \cdots & 0 \\ q_N & 0 & 0 & 0 & PN & 0 & 0, & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_N & 0 & 0 & p_N & 0 & \cdots & 0 \\ q_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PN & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PN & q_N & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PN & 0 & \cdots & q_N \\ q_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PN & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \tag{5.5.8}$$

Финальные вероятности состояний для этого алгоритма находятся из выражений

$$P_0 = \frac{q_N^k}{q_N^k \left[(1 - p_N^3) + \frac{p_N q_N^2 (1 - 2p_N - q_N p_N^2)}{1 - p_N q_N} \right] + p_N^2 \left(\frac{1 + q_N (1 + q_N^2)}{1 - p_N q_N} \right) (1 - q_N^2)};$$

$$P_1 = P_0 p_N; \quad P_2 = P_0 p_N^2; \quad P_3 = P_0 \frac{q_N p_N}{1 - q_N p_N}; \quad P_4 = P_0 \frac{p_N^2 q_N^2}{(1 - p_N q_N)};$$

$$P_5 = P_0 p_N^3 q_N; \quad P_6 = P_0 \frac{1}{q_N^k} \left(p_N^3 + \frac{p_N^3 q_N}{(1 - p_N q_N)} + p_N^3 q_N \right); \quad P_7 = P_6 q_N;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{6+k-1} = P_6 q_N^{k-1}. \tag{5.5.9}$$

Вероятность ложного обнаружения на позиции определяется по формуле

$$P'_{\text{ло}} = (P_2 + P_4 + P_6)\, p_N = P_0 \left(p_N^3 + \frac{p_N^3 q_N}{1 - p_N q_N} + p_N^3 q_N \right). \quad (5.5.10)$$

Аналогичным образом рассчитываются финальные вероятности состояний для других логических обнаружителей. Подчеркнем, что исходным шагом при анализе вероятностных характеристик конкретных алгоритмов логических обнаружителей является составление графа и матрицы переходных вероятностей. Так как во многих случаях граф и матрица переходных вероятностей могут быть составлены на основе словесного описания условий срабатывания обнаружителя, то статистический анализ обнаружителя может предшествовать синтезу его схемы.

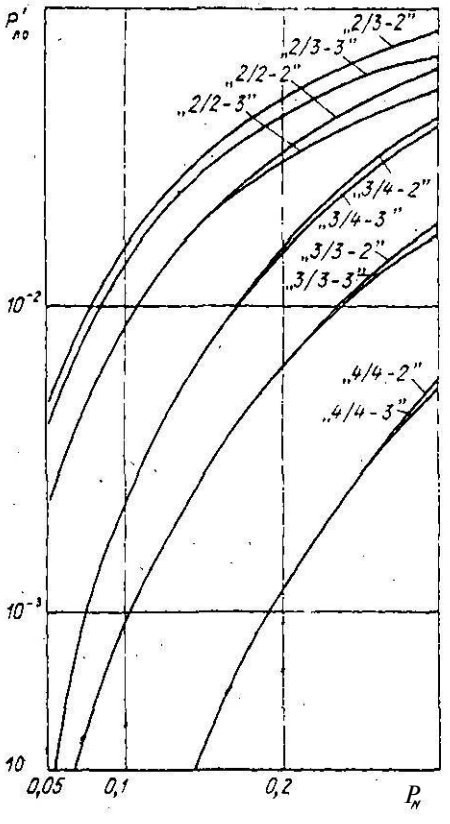


Рис. 5.10. Графики вероятности ложного обнаружения.

На ряс. 5.10 изображены графики вероятности ложного обнаружения на позиции $P'_{\text{ло}}$ для некоторых алгоритмов типа «m/m — k» и «l/m — k» в функции *от* вероятности p_N превышения помехой уровня квантования. Эти графики дают наглядное представление о фильтрующей способности различных алгоритмов цифровой обработки пачек двоично квантованных сигналов. Логики «l/m» и, в частности, «m — $1/m$» хуже фильтруют помеху, чем логики «m/m». Влияние к начинает сказываться только при больших $p_N > 0{,}1$, выходящих за пределы практически допустимых значений. Поэтому в большинстве случаев влиянием логики фиксации конца пачки на вероятность ложного обнаружения можно пренебречь.

Наряду с такой общепринятой характеристикой фильтрующей способности обнаружителей, как вероятность ложного обнаружения $P_{\text{ло}}$, часто необходимо знать среднее число ложных отметок $N_{\text{ло}}$, фиксируемых на выходе обнаружителя в единицу времени. Среднее число ложных отметок в единицу времени является наглядной характеристикой фильтрующей способности конкретных алгоритмов обнаружения. Это

число необходимо знать для предъявления требований к ЦВМ вторичной обработки радиолокационной информации по емкости запоминающих устройств и быстродействию.

Если рассматривать одно кольцо дальности (один интервал временного квантования), то среднее число ложных отметок в нем будет

$$\overline{N}_{ло1} \approx bP'_{ло},$$

где b — число позиций в кольце дальности (одинаковое для всех колец).

Если число колец дальности в зоне обзора равно n_r, а период обзора равен T_0, то среднее число ложных отметок в единицу времени определяется по формуле

$$\overline{N}_{ло} = (bn_r/T_0)\, P'_{ло}. \qquad (5.5.11)$$

5.5.2. Анализ воздействия стационарных помех на цифровой накопитель

Рассмотрим в качестве примера цифровой накопитель, реализующий программу накопления с насыщением, описанную в п. 5.4.1 при $к = 2$. Матрица переходных вероятностей в этом случае имеет вид

$$\Pi_{«1-k»} = \begin{array}{c|cccccccccc} & .0 & 1^{(0)} & 1^{(1)} & 2^{(0)} & 2^{(1)} & 3^{(0)} & \cdots & N^{(0)} & N^{(1)} \\ 0 & q_N & PN & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1^{(0)} & 0 & 0 & q_N & PN & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1^{(1)} & q_N & 0 & 0 & PN & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & q_N & PN & \cdots & 0 & 0 \\ 2^{(1)} & q_N & 0 & 0 & 0 & 0 & PN & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & PN & q_N \\ N^{(1)} & q_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & PN & 0 \end{array} \qquad (5.5.12)$$

Используя методику, подробно описанную выше, получим

$$\begin{aligned} &P_0 + P_{1(0)} + P_{1(1)} + \ldots + P_{N(0)} + P_{N(1)} = 1; \\ &P_{1(0)} = P_0 p_N; \quad P_{1(1)} = P_0 p_N q_N; \\ &P_{2(0)} = P_0 p_N (1 - q_N^2); \quad P_{2(1)} = P_0 p_N q_N (1 - q_N^2); \\ &P_{3(0)} = P_0 p_N (1 - q_N^2)^2; \quad P_{3(1)} = P_0 p_N q_N (1 - q_N^2)^2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.5.13) \\ &P_{(N-1)(0)} = P_0 p_N (1 - q_N^2)^{N-2}; \quad P_{(N-1)(1)} = P_0 p_N q_N (1 - q_N^2)^2; \\ &P_{N(0)} = P_0 \frac{p_N (1 - q_N^2)^{N-1}}{q_N^2}; \quad P_{N(1)} = P_0 \frac{p_N q_N (1 - q_N^2)^{N-1}}{q_N^2}. \end{aligned}$$

Из решения системы уравнений (13) сначала находится вероятность исходного состояния P_0. В данном случае эта вероятность равна

$$P_0 = q_N^2 . \qquad (5.5.14)$$

Выражение для P_0 и система уравнений (13) дают возможность определить все составляющие вектора финальных вероятностей состояний накопителя. Если, кроме того, задан порог обнаружения N_0, то вероятность ложного обнаружения $P'_{л0} = P_{N_0}$, где P_{N_0} — финальная вероятность накопления N_0 единиц в области помехи.

Аналогичным образом решается задача определения $P'_{л0}$ для других программ накопления.

5.5,3. Вероятность обнаружения панки сигналов логическим обнаружителем

В соответствии с общими соображениями, изложенными в п. 3.3.2, при анализе вероятности обнаружения полезного сигнала (пачки) логическим обнаружителем необходимо учитывать следующие особенности:

1. К моменту поступления сигнала (этот момент является произвольным), граф обнаружителя может находиться в любом из возможных состояний за счет влияния помех. Если входные сигналы анализируются во всем кольце дальности или в пределах широкого азимутального строба, то в качестве вектора-строки вероятностей исходного состояния графа (перед поступлением полезного сигнала) необходимо принять вектор-строку $\mathrm{P} = \| P_0 P_1 P_2 \ldots 1$ финальных вероятностей в области помехи. Вектор-строку вероятностей исходного состояния обозначим $\mathrm{P}(0) = \| P_0(0)\ P_1(0) \ldots \|$, где значок (0) показывает, что этот вектор относится к нулевой позиции пачки.

2. Последовательность дискретных состояний обнаружителя в области нестационарного сигнала (пачки сигнальных импульсов с произвольной огибающей) образует неоднородную цепь Маркова. Для неоднородной цепи Маркова нельзя вычислить финальные вероятности состояний. Задача расчета вектор-строки вероятностей состояний может быть решена теперь только рекуррентно (по шагам) путем последовательного применения формулы

$$\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P}(\lambda - 1)\Pi(\lambda), \qquad (5.5.15)$$

где $\Pi(\lambda)$ — матрица переходных вероятностей неоднородной цепи Маркова на λ-й позиции пачки ($\lambda = \overline{1, N}$); $\mathrm{P}(\lambda - 1)$ — вектор-строка вероятностей состояний на $(\lambda - 1)$-й позиции пачки.

3. Для расчета нарастающей от позиции к позиции вероятности обнаружения пачки удобно преобразовать исходную цепь Маркова в цепь Маркова с поглощающим экраном (поглощающим состоянием). Поглощающий экран должен быть совмещен с состоянием, переход в которое приводит к выполнению критерия обнаружения. В процессе преобразования исходной цепи Маркова в цепь Маркова с поглоща-

ющим экраном необходимо также преобразовать вектор-строку исходных вероятностей состояний $\mathbf{P}(0)$ так, чтобы его размерность соответствовала размерности матрицы переходных вероятностей цепи с поглощающим экраном и при этом выполнялось условие $\sum_i P_i(0) = 1$.

Преобразование это, как указано в п. 3.3.2, производится путем объединения вероятностей достижения «закороченных» состояний с вероятностью состояния, в котором установлен поглощающий экран.

Рассмотрим теперь пример расчета вероятности обнаружения пачки для алгоритма, реализующего логику обнаружения «m/m».

Пусть известна преобразованная вектор-строка вероятностей исходного состояния $\mathbf{P}(0)$. Пусть, кроме того, заданы вероятности появления единиц $p_{S\lambda}$ и нулей $q_{S\lambda} = 1 - p_{S\lambda}$ на каждой позиции пачки. Далее, в соответствии с логикой работы обнаружителя и с учетом поглощающего экрана, совмещенного с состоянием a_m, обычным образом можно записать матрицу переходных вероятностей соответствующей цепи Маркова на λ-й позиции лачки. Эта матрица имеет вид

$$\Pi_{\langle m/m\rangle}(\lambda) = \begin{Vmatrix} q_{S\lambda} & p_{S\lambda} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_{S\lambda} & 0 & p_{S\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{S\lambda} & 0 & 0 & p_{S\lambda} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{S\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{S\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (5.5.16)$$

Вектор-строка вероятностей состояний обнаружителя после приема первого импульса пачки определяется умножением вектора-строки вероятностей исходного состояния на матрицу переходных вероятностей при $\lambda = 1$, т. е,

$$\mathbf{P}(1) = \| P_0(1) P_1(1) \cdots P_m(1) \| =$$

$$= \| P_0(0) P_1(0) \ldots P'_m(0) \| \times \begin{Vmatrix} q_{S1} & p_{S1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_{S1} & 0 & p_{S1} & 0 & & 0 \\ q_{S1} & 0 & 0 & q_{S1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{S1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

где $P'_m(0) = P_m(0) + P_{m+1}(0) + \ldots + P_{m+k}(0)$.

Вычисления дают

$$P_0(1) = q_{S1}(1 - P'_m(0)),$$

$$P_1(1) = P_0(0) p_{S1},$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$P_m(1) = P_{m-1}(0) p_{S1} + P'_m(0).$$

После приема второго импульса пачки имеем

$$P(2) = P(1) \times \begin{Vmatrix} q_{S2} & p_{S2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_{S2} & 0 & p_{S2} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{S2} & 0 & 0 & p_{S2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{S2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{S2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Проделав вычисления, получим

$$P_0(2) = q_{S2}(1 - P_m(1)),$$
$$P_1(2) = P_0(1)\, p_{S2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_m(2) = P_{m-1}(1)\, p_{S2} + P_m(1).$$

Повторяя аналогичные вычисления для следующих $\lambda = 3, 4, \ldots, N$, можно рассчитать вероятности состояний обнаружителя после приема всей пачки. Окончательные рекуррентные формулы для вычисления вероятностей состояний после приема λ-хо импульса пачки имеют вид

$$P_0(\lambda) = q_{S\lambda}(1 - P_m(\lambda - 1)),$$
$$P_1(\lambda) = P_0(\lambda - 1)\, p_{S\lambda},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_m(\lambda) = P_{m-1}(\lambda - 1)\, p_{S\lambda} + P_m(\lambda - 1). \qquad (5.5.17)$$

В системе (17) $P_m(\lambda)$ представляет собой вероятность обнаружения сигнала (пачки) на λ-й позиции. Суммарная вероятность обнаружения пачки из N импульсов равна

$$P_{\text{общ}} = P_{\text{ш}}(N) = P_{m-1}(N - 1)\, p_{SN} + P_m(N - 1). \qquad (5.5.18)$$

При использовании логик обнаружения типа «l/m» задача вычисления вероятности правильного обнаружения решается аналогично. В частности, для логики «3/4» вероятности состояний обнаружителя на λ-й позиции пачки вычисляются по формулам

$$P_0(\lambda) = q_{S\lambda}[P_0(\lambda - 1) + P_3(\lambda - 1) + P_5(\lambda - 1)],$$
$$P_1(\lambda) = P_0(\lambda - 1)\, p_{S\lambda},$$
$$P_2(\lambda) = P_1(\lambda - 1)\, p_{S\lambda},$$
$$P_3(\lambda) = [P_1(\lambda - 1) + P_4(\lambda - 1)]\, q_{S\lambda}, \qquad (5.5.19)$$
$$P_4(\lambda) = P_3(\lambda - 1)\, p_{S\lambda},$$
$$P_5(\lambda) = P_2(\lambda - 1)\, q_{S\lambda},$$
$$P_6(\lambda) = [P_2(\lambda - 1) + P_4(\lambda - 1) + P_5(\lambda - 1)]\, p_{S\lambda} + P_6(\lambda - 1).$$

Суммарная вероятность обнаружения пачки в этом случае равна

$$P_{\text{общ}} = P_6(N).$$

Для тренировки читателям предлагается самостоятельно получить формулы для вероятностей состояний обнаружителя, реализующего алгоритм цифрового накопления.

На рис. 5.11 приведены графики вероятности обнаружения для нескольких логик при числе импульсов в пачке $N = 11$ и $P_{ло} = 2 \cdot 10^{-4}$, в зависимости от отношения сигнал/шум в центре пачки. Сравнение этих графиков показывает, что наилучшей, с точки зрения вероятности обнаружения, является логика «3/4». Однако все рассмотренные логики имеют близкие качественные характеристики по вероятности обнару-

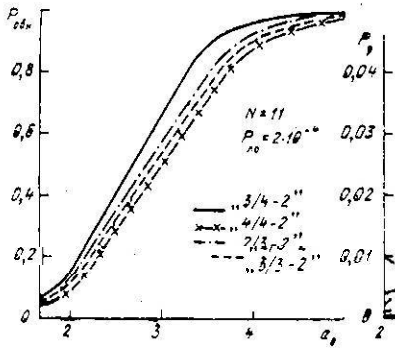


Рис. 5.11. Графики вероятности обнаружения пачки.

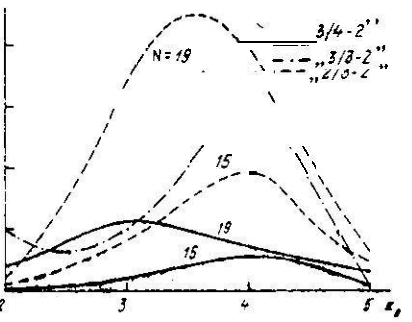


Рис. 5.12. Графики вероятности «расщепления» пачки.

жения. Аналогичные результаты имеют место и при других значениях числа N импульсов в пачке и допустимых вероятностей ложного обнаружения.

На рис. 5.12 изображены полученные методом статистического моделирования графики для вероятности «расщепления» пачки из 15 и 19 импульсов логическими обнаружителями «2/3—2», 3/3—2», и «3/4 —2» при $P_{ло} = 2 \cdot 10^{-4}$. Из этих графиков следует, во-первых, что вероятность «расщепления» достаточно мала (не превышает 0,05), а во-вторых, с этой точки зрения логика обнаружения «3/4» предпочтительнее других.

5.5.4. Точность оценки положения центра пачки логическим обнаружителем

Как уже отмечалось, при обработке пачки с помощью логического обнаружителя положение ее центра определяется по координатам сигналов, фиксирующих начало и конец пачки. Если β_λ азимут позиции, на которой произошло обнаружение пачки, а β_μ — азимут позиции на которой зафиксирован конец пачки, то азимут середины пачки, соответствующий азимуту обнаруженной цели, определяется по формуле

$$\hat{\beta}_ц = (\beta_\lambda + \beta_\mu)/2.$$

Пусть отсчет координаты β ведется от нулевой позиции пачки. Тогда измеренное значение азимута равно

$$\beta_{ц} = \left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\Delta_{\beta},$$

где λ — номер позиции, на которой зафиксировано начало пачки; μ — номер позиции, на которой зафиксирован конец пачки; Δ_{β} — угловая дискретность импульсов в пачке.

Истинный азимут середины пачки определяется в этом случае по формуле

$$\beta_{0} = \frac{N+1}{2}\Delta_{\beta},$$

где N — истинное число импульсов в пачке.

Ошибка оценки азимута равна

$$\Delta\beta = \pm\left(\frac{\lambda+\mu}{2} - \frac{N+1}{2}\right)\Delta_{\beta}. \qquad (5.5.20)$$

Формулой (20) определяется суммарная ошибка оценки азимута, включающая как случайную, так и систематическую составляющие.

Систематическая составляющая ошибки обусловлена тем, что сигналы начала и конца пачки выдаются только после выполнения логик обнаружения и сброса. В случае алгоритма обработки «m/m — k» смещение вправо момента фиксации начала пачки равно m — 1 позиций, а смещение в ту же сторону момента фиксации конца пачки равно k позиций. Суммарная систематическая ошибка в оценке центра обнаруженной пачки в этом случае равна

$$\Delta\beta_{сист} = \left(\frac{m+k-1}{2}\right)\Delta_{\beta}. \qquad (5.5.21)$$

Эта ошибка может быть скомпенсирована схемным путем.

При применении алгоритма обработки «l/m — k» смещение вправо момента фиксации начала пачки является случайной величиной, распределенной в интервале от (l — 1) до (m — 1) позиций. Обычно и вэтом случае схемным путем учитывают смещение в (m — 1)позиций, а нескомпенсированную часть относят к случайным ошибкам.

Случайные ошибки оценки азимута обусловлены, главным образом, несимметричностью пропусков сигнальных импульсов на краях пачки, где отношение сигнала к помехе мало. Дисперсия относительной случайной ошибки оценки азимута определяется по формуле

$$\frac{\sigma^{2}_{\beta}}{} = m \quad \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right] - \left(m_{1}\left[\frac{\lambda+\mu}{2}\right]\right)^{2}, \qquad (5.5.22)$$

где

$$\cdot\left[\lambda\ 2\right] \mathbf{J} = \sum_{\lambda=1}^{N+k}\sum_{\mu=\lambda+k}^{N+k}\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^{2} P_{\lambda\mu};$$

$$m_{1}\left[\frac{\lambda+\mu}{2}\right] = \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{\mu=\lambda+k}^{N+k}\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) P_{\lambda\mu};$$

$P_{\lambda\mu}$ — совместная вероятность фиксации начала пачки на λ-й позиции, а конца — на μ-й позиции.

Вероятность $P_{\lambda\mu}$ можно представить в виде

$$P_{\lambda\mu} = P_\lambda P_{\mu/\lambda}, \tag{5.5.23}$$

где P_λ — безусловная вероятность фиксации начала пачки на λ-й позиции, которая, например, для логики обнаружения «m/m» определяется из выражения (п. 5.5.2)

$$P_\lambda = P_{m-1}(\lambda - 1)\, p_{S\lambda}, \tag{5.5.24}$$

$P_{\mu/\lambda}$ — условная вероятность фиксации конца пачки на μ позиции (при условии, что начало пачки зафиксировано на λ позиции).

При известном критерии сброса к вычисление вероятности $P_{\mu/\lambda}$ производится следующим образом.

1. Строится граф со случайными переходами для логики сброса обнаруженной пачки. Исходным узлом такого графа является конечный узел графа, построенного для логики обнаружения пачки (узел a_m в графе обнаружителя, реализующего логику «m/m»). Конечным узлом графа является узел a_{m+k}, соответствующий выполнению критерия сброса. С конечным узлом графа совмещается поглощающий экран.

Полученный граф начинает функционировать после обнаружения пачки на λ позиции. Следовательно, вектор вероятностей его состояний на λ позиции пачки имеет вид

$$\mathbf{P}(\mu = \lambda) = \| P_m(\mu = \lambda)\, P_{m+1}(\mu = \lambda) \ldots P_{m+k}(\mu = \lambda) \| = \| 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \|.$$

Этот вектор является вектором вероятностей исходного состояния при вычислении вероятности $P_{\mu/\lambda}$.

Матрица переходных вероятностей графа на μ позиции пачки записывается в виде

$$\Pi_k(\mu) = \begin{Vmatrix} p_{S\mu} & q_{S\mu} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{S\mu} & 0 & q_{S\mu} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{S\mu} & 0 & 0 & \cdots & q_{S\mu} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix} \tag{5.5.25}$$

где $\mu = \lambda + k \div N + k$.

2. Путем последовательного умножения вектора-строки вероятностей состояний графа на предыдущем шаге $P(\mu - 1)$ на матрицу переходных вероятностей $\Pi_k(\mu)$ получаем систему уравнений для вычисления вероятностей состояний на следующем шаге. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} P_m(\mu) &= p_{S\mu}[1 - P_{m+k}(\mu - 1)], \\ P_{m+1}(\mu) &= P_m(\mu - 1)\, q_{S\mu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{m+k}(\mu) &= P_{m+k-1}(\mu - 1)\, q_{S\mu} + P_{m+k}(\mu - 1). \end{aligned} \tag{5.5.26}$$

3. Условная вероятность окончания пачки на μ позиции, при условии ее обнаружения на λ позиции, равна

На рис. 5.13 приведены рассчитанные по формуле (22) графики относительных значений среднеквадратичных ошибок оценки азимута пачки нефлюктуирующих сигналов для некоторых алгоритмов обра-

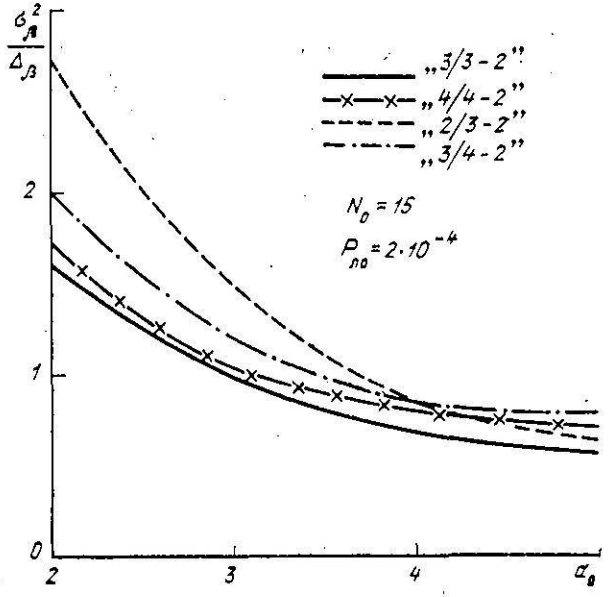


Рис. 5.13. Графики относительных значений среднеквадратичных ошибок оценки азимута пачки.

ботки «m/m — k» и «l/m — к» при N = 15 и $P_{ло} = 2 \cdot 10^{-4}$. Сравнение этих графиков позволяет сделать следующие выводы:

1. Рассмотренные алгоритмы при достаточно больших отношениях сигнала к помехе мало отличаются по точности оценки азимута пачки.

2. Алгоритм «3/4 — 2» не является наилучшим с точки зрения Обеспечения максимальной точности оценки центра пачки. С этой точки зрения предпочтительнее алгоритмы с жесткой логикой обнаружения «3/3» и «4/4».

5.6. Реализация первичной обработки на ЦВМ

В предыдущих параграфах рассматривалась теория первичной обработки двоично квантованных радиолокационных сигналов в пределах одного интервала временной дискретизации, т. е. в пределах одного кольца дальности шириною Δ_r. Обработка сигналов во всей зоне обзора РЛС возможна либо путем параллельного включения рассмот-

ренных выше обнаружителей в каждом интервале временной дискретизации, с последующим объединением данных, либо путем последовательного анализа информации во всей зоне обзора РЛС с помощью ЦВМ. Первый способ прост по идее, но чрезвычайно громоздок в реализации. Второй требует применения быстродействующих ЦВМ, способных обеспечить последовательную обработку информации в реальном масштабе времени.

В данном параграфе рассматриваются принципы реализации первичной обработки на ЦВМ для случая одноканальной импульсной РЛС кругового обзора.

5.6,1. Вариант построения системы цифровой первичной обработки

На рис. 5.14 приведен вариант блочной схемы аппаратуры, осуществляющей цифровую первичную обработку на выходе одноканальной импульсной РЛС. Рассмотрим последовательность прохождения информации в этой схеме и функции отдельных блоков.

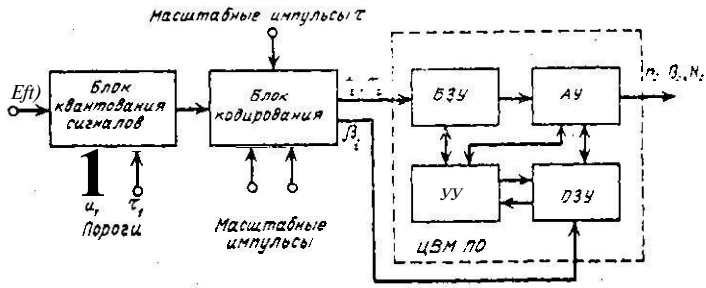


Рис. 5.14. Вариант блочной схемы аппаратуры первичной обработки РЛИ.

В блоке квантования производится:

• — дискриминация огибающей напряжения с выхода детектора РЛС на уровне u_1,

— селекция выбросов огибающей по длительности; в результате селекции по длительности отсеиваются сигналы, длительность которых меньше τ_1 (меньше порога по длительности),

— нормализация по амплитуде прошедших селекцию выбросов.

На выходе блока квантования образуется последовательность (поток) импульсов одинаковой амплитуды, но случайной длительности (с ограничением снизу).

Таким образом, в рассматриваемой схеме отсутствует предварительная дискретизация выходного напряжения приемника РЛС по времени.

В кодирующем устройстве производится:

— кодирование (в двоичном коде) времени задержки фронта каждого прошедшего селекцию выброса; цена младшего разряда кода времени задержки характеризует дискретность отсчета дальности;

— кодирование в двоичном коде длительности каждого выброса τ_l, причем цена младшего разряда при кодировании длительности выброса может быть меньше цены младшего разряда при кодировании задержки;

— кодирование в двоичном коде текущего азимута антенны β_l.

Блоки квантования и кодирования являются блоками сопряжения РЛС с ЦВМ.

Полученные на выходе устройства, кодирующего время, значения задержек и длительностей сигнала поступают на вход ЦВМ, которая предназначена для последовательной обработки потока входных сигналов с целью обнаружения полезного сигнала и оценки его координаты дальности. Сигналы с выхода устройства, кодирующего β, используются для оценки азимута пачки.

ЦВМ первичной обработки предполагается построенной по универсальной схеме и имеет в своем составе: буферное запоминающее устройство (БЗУ), оперативное запоминающее устройство (ОЗУ), арифметическое устройство (АУ) и устройство управления (УУ). БЗУ предназначено для хранения очереди отметок с координатами t_l, τ_i, поступающих для обработки. Запись кодов t_l, τ_l в БЗУ обычно производится в порядке их поступления. Выбор кодов из БЗУ также может быть упорядочен по времени (начиная с минимальной задержки t_l). В АУ реализуется основной алгоритм обработки принимаемых сигналов с целью формирования пачек, обнаружения целей и оценки их координат. ОЗУ предназначено для хранения в свернутом виде промежуточных результатов формирования пачек. Устройство управления обеспечивает заданную последовательность выполнения операции алгоритма обработки поступающих сигналов.

Обработка информации в ЦВМ организуется по тактам: Длительность такта равна длительности периода зондирования РЛС. К началу следующего такта информация предыдущего такта должна быть полностью обработана.

5.6.2. Характеристика потока сигналов на входе ЦВМ первичной обработки

Будем предполагать, что обработке подлежат сигналы некогерентной РЛС. Тогда напряжение на входе блока квантования сигналов представляет собой огибающую узкополосного стационарного случайного процесса в области, где цели отсутствуют, и огибающую суммы стационарного процесса и импульсного сигнала в области цели.

Предположим сначала, что сигнал отсутствует; напряжение огибающей помехи в блоке квантования ограничивается на уровне u_1. При достаточно высоких порогах $x_1 = u_1/\sigma_N > 1$, где σ_N — среднеквадратичное значение напряжения помехи, полученные после ограничения выбросы можно считать независимыми редкими событиями. Тогда число выбросов, появившихся в интервале t, подчиняется закону Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\Lambda(x_1)\, t)^k}{k!} \exp[-\Lambda(x_1)\, t]. \qquad (5.6.1)$$

Единственным параметром этого закона является математическое ожидание числа выбросов в единицу времени Л (x_1), которое для огибающей стационарного нормального случайного процесса (при отсутствии полезного сигнала) вычисляется по формуле [3]

$$\Lambda(x_1) = \frac{\delta\omega}{\sqrt{2\pi}} x_1 \exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right] \qquad (5.6.2)$$

где. $\delta\omega$ — ширина спектра случайного процесса, которая для фильтра с колокольной амплитудной характеристикой (такую характеристику имеет, как правило, УПЧ приемника) связана с полосой Δf УПЧ приближенным равенством $\delta\omega \approx 0{,}4\Delta\omega = 0{,}8\pi\Delta f$.

Средняя длительность выбросов, превысивших относительный порог x_1, определяется по формуле

$$\bar{\tau}(x_1) \approx \sqrt{2\pi}/\delta\omega x_1 = 1/\Delta f x_1. \qquad (5.6.3)$$

Селекция выбросов по длительности не меняет закона распределения их числа на выходе схемы квантизатора. Для определения среднего числа выбросов огибающей, прошедших селекцию по длительности на уровне τ_1, необходимо знать закон распределения длительности выбросов огибающей. В теоретических исследованиях пользуются аппроксимациями этого закона: функцией Релея или показательной функцией (или функцией Релея на начальном участке и показательной функцией на остальных участках, как это предложено в [3]).

В дальнейшем принимается, что плотность распределения длительности выбросов описывается показательной функцией вида

$$w(\tau) = \frac{1}{\bar{\tau}} \exp\left[-\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right]. \qquad (5.6.4)$$

Тогда среднее число выбросов помехи, прошедших селекцию по амплитуде и длительности, **будет равно**

$$\Lambda(x_1, \tau_1) = \Lambda(x_1) \int_{\tau_1}^{\infty} w(\tau)\, d\tau = \Lambda(x_1) \exp\left[-\frac{\tau_1}{\bar{\tau}}\right]. \qquad (5.6.5)$$

Запишем условную плотность вероятности длительности выбросов прошедших селекцию по длительности в виде [4]

$$w(\tau/\tau_1) = \begin{cases} \dfrac{w(\tau)}{\int_{\tau_1}^{\infty} w(\tau)\, d\tau} = \dfrac{1}{\bar{\tau}} \exp\left[-\dfrac{(\tau-\tau_1)}{\bar{\tau}}\right], & \tau > \tau_1, \\ 0, & \tau \leqslant \tau_1. \end{cases} \qquad (5.6.5а)$$

Средняя длительность выбросов, прошедших селекцию по амплитуде и длительности, будет равна

$$\bar{\tau}(x_1, \tau_1) = \int_{\tau_1}^{\infty} \tau w\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) d\tau = \tau_1 + \bar{\tau}(x_1). \qquad (5.6.6)$$

Таким образом, на вход ЦВМ первичной обработки поступает пуассоновский поток ложных сигналов с интенсивностью $\Lambda(x_1, \tau_1)$ и средней длительностью $\bar{\tau}(x_1, \tau_1)$.

На рис. 5.15 изображены рассчитанные по формулам (2) и (5) параметры интенсивности потока ложных сигналов в зависимости от относительного порога x_1, при отсутствии селекции сигналов по длительности (кривая *1*) и при $\tau_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ *сек*, $\Delta f = 10^6$ *гц* (кривая *2)*.

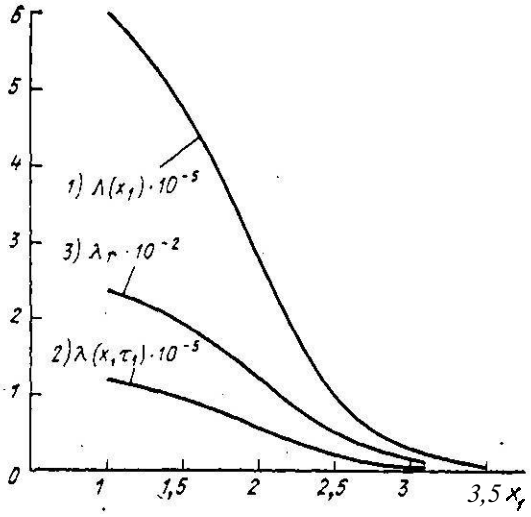


Рис. 5.15. Графики интенсивности потока ложных сигналов.

Среднее число ложных сигналов за время одной развертки дальности (за время одного такта обработки) равна

$$\lambda_r = \Lambda(x_1, \tau_1) t_r, \tag{5.6.7}$$

где $t_r = 2r_{макс}/c$, $r_{макс}$ — максимальная дальность обнаружения РЛС; c — скорость распространения электромагнитной энергии. Зависимость λ_r от порога x_1 при $r_{макс} = 300$ *км* показана на рис. 5.15 (кривая *3)*.

Учтем теперь составляющую входящего потока, обусловленную полезными сигналами, отраженными от целей. Будем считать, что в пределах одного такта обработки (на одном азимутальном направлении) число полезных сигналов также подчинено закону Пуассона с математическим ожиданием n_r. Элементарные расчеты показывают, что даже при очень большой плотности целей в зоне обзора n_r не превышает Нескольких единиц. Число же ложных сигналов может достигать нескольких десятков и даже сотен единиц. Следовательно, суммарное среднее число обрабатываемых сигналов, поступающих на вход ЦВМ первичной обработки, равно

$$N_r = \lambda_r + n_r \approx \lambda_r. \tag{5.6.8,}$$

Таким образом, основную загрузку для ЦВМ первичной обработки радиолокационной информации составляет обработка потока сообщений о ложных сигналах.

5.6.3. Машинный алгоритм цифровой первичной обработки

Рассмотрим один из возможных вариантов реализации алгоритма первичной обработки на ЦВМ. В основу построения машинного алгоритма первичной обработки положены следующие предпосылки.

1. Формирование пачек производится по методу совпадений сигналов из различных периодов зондирования. Совпадение сигналов фиксируется при наличии общей зоны их перекрытия во времени.

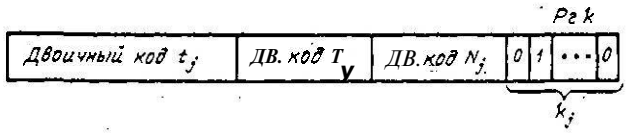


Рис. 5.16. Структура кода информации, хранимой в ОЗУ ЦВМ ПО.

2. В процессе обнаружения пачки реализуется метод цифрового накопления позиций между началом и концом сформированной пачки. Решение об обнаружении принимается при накоплении заданного числа N_0. Конец пачки фиксируется по серии из к пропусков подряд. В процессе накопления к — 1 и менее пропусков восстанавливается.

3. Азимут центра пачки (азимут цели) определяется по текущему азимуту конца пачки и числу позиций в пачке (ширине пачки).

4. Для сокращения объема ОЗУ ЦВМ применяется следующий способ записи информации, отнесенной к одной пачке:

— при совпадении двух и более сигналов из различных периодов зондирования запоминаются числовые коды времени задержки t_j (или, что то же, дальности r_j) и длительности $\Delta\tau_j$ зоны их перекрытия (совпадения);

— фиксируется число позиций N_j, на которых выполняется условие продолжения пачки (условие отсутствия конца пачки);

— запоминается k-разрядный позиционный код k_j, служащий для анализа пачки на удовлетворение критерию сброса по к пропускам подряд, причем обновление кода k_j после каждого такта обработки производится по принципу записи информации в k-разрядный регистр со сдвигом.

Структура кода информации, хранимой в ОЗУ по каждой цели, показана на рис. 5.16.

Порядок записи, сравнения, свертывания и сброса информации в процессе ее обработки при к = 2 иллюстрируется временными диаграммами на рис. 5.17.

Пусть в начальный момент времени ОЗУ очищено. Тогда коды t_j, τ_j сигналов, полученных в процессе первого периода посылок $T_п$, сначала запишутся в БЗУ, а затем полностью перепишутся в ОЗУ (временные

диаграммы *1* и 2). Записанные в ОЗУ коды упорядочены по времени поступления, т. е. по дальности. Пусть далее в процессе второго зондирования получен из БЗУ *(2)* сигнал (*1*) с задержкой t_i и длительностью τ_i (временная диаграмма *3)*. Этот сигнал сравнивается на совпадение с первым по порядку записи сигналом из ОЗУ (*1*). Как видно из рисунка, у рассматриваемых сигналов совпадение отсутствует. Очевидно, и следующие (появившиеся позже) сигналы из БЗУ (2) не совпадут с рассматриваемым сигналом (*1*) из ОЗУ (*1*), так как они будут иметь большую, чем первый, дальность. Поэтому коды первого сигнала из ОЗУ (*1*) переписываются в ОЗУ (*2*) с признаком одного пропуска (в первый раз-

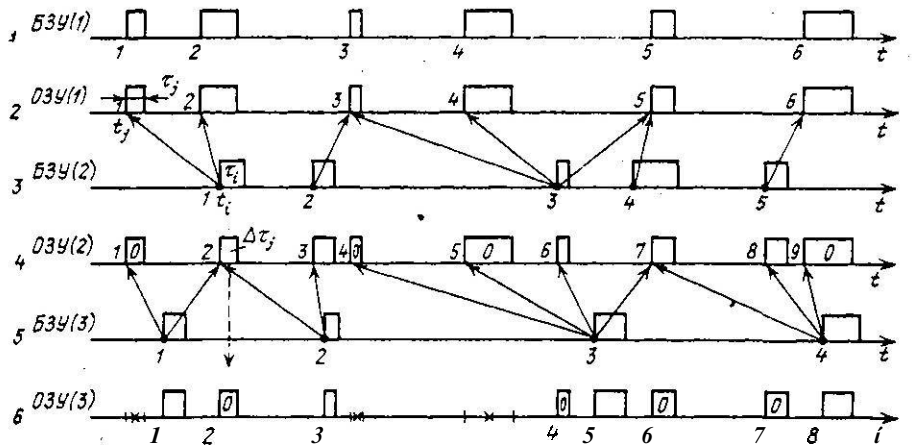


Рис. 5.17. Порядок записи и свертывания информации в ОЗУ ЦВМ ПО.

ряд характеристики k_j записывается нуль). После этого выбирается сигнал (2) из ОЗУ (*1*) и сравнивается на совпадение с тем же сигналом (*1*) из БЗУ (2). Из рисунка следует, что эти сигналы совпадают, образуя общую зону $\Delta\tau_j$. Коды задержки и длительности этой зоны записываются в ОЗУ (2) с признаком совпадения (в первый разряд характеристики k_j записывается единица). На этом заканчивается обработка сигнала *(1)* из БЗУ (2). При приеме сигнала (2) из БЗУ (2) он сравнивается с сигналом *(3)* из ОЗУ *(1)*. Из рисунка видно, что сигнал *(3)* из ОЗУ *(1)* не совпадает с сигналом (2) из БЗУ (2) и имеет большую, чем сигнал *(2),* задержку. Отсюда следует, что сигнал (2) не нужно сравнивать с другими сигналами из ОЗУ (*1*), так как они имеют еще большую, чем сигнал (*3*), задержку. Код сигнала (2) должен быть переписан в ОЗУ (*2*) с признаком начала новой пачки ($N_j = 1, k_j = 0 \ldots 1$).

Аналогичным образом производится сравнение на совпадение с сигналами из ОЗУ всех новых (поступающих из БЗУ) сигналов. В результате в ОЗУ накапливается и хранится в свернутом виде информация о частично сформированных пачках. При отсутствии подтверждений в двух соседних тактах пачка считается окончательно сформированной и она сбрасывается из ОЗУ.

Вследствие упорядоченного расположения кодов частично сформированных пачек в ОЗУ, каждый новый сигнал из БЗУ сравнивается только с частично сформированными пачками, имеющими меньшую, чем он сам, задержку и (при отсутствии совпадения с этими пачками) с одной частично сформированной пачкой из ОЗУ, имеющей большую задержку. При этом время обработки (обслуживания) каждого сигнала значительно сокращается по сравнению со случаем неупорядоченной записи кодов (в дальнейшем будем эти коды называть координатами) частично сформированных пачек.

В соответствии с изложенными принципами свертывания и хранения информации в ОЗУ, алгоритм работы арифметического устройства ЦВМ можно представить в виде следующей операторной схемы:

$$\Phi_1\ 10,\ 11,\ 12,\ 18\ \Phi\ 20,\ 25,\ 26\ \Phi_2\ A_3\ P_{4;13}\ A_5\ P_{6;11}$$

$$\cdot A_7\ P_{8;12}\ P_{9;11}\ \Phi^1_{10}{}^{6,9}\Phi^1_{11}{}^{8}\Phi^1_{12}{}^{4}A_{13}\ P_{14;19}\ A_{15}\ P_{16;21}$$

$$P_{17;19}\ \Phi^1_{18}{}^{14,17}P_{19;22}\ \Phi^2_{20}{}^{16}\Phi^1_{21}{}^{19}P_{22;26}\ A_{23}\ A_{24}\ \Phi^2_{25}{}^{22}\Phi^2_{26}. \qquad (5.6.9)$$

Операторы этого алгоритма предназначены для решения следующих задач:

Φ_1 — выбор из БЗУ кодов t_1, τ_1 очередного нового сигнала,

Φ_2 — выбор из ОЗУ координат (t_j, τ_j, N_j, k_j) очередной частично сформированной пачки,

A_3 — вычисление разности времени задержки сигнала из БЗУ относительно частично сформированной пачки из ОЗУ,

P_4 — проверка условия $\Delta t_{ij} > 0$,

A_5 — при $\Delta t_{ij} > 0$ (задержка частично сформированной пачки из ОЗУ больше задержки сигнала из БЗУ) производится проверка наличия совпадения между выбранными сигналами, для чего вычисляется $\Delta\tau_i = \tau_i - \Delta t_{ij}$,

P_6 — проверка условия $\Delta\tau_i > 0$,

A_7 — при $\Delta\tau_i > 0$ (совпадение есть) вычисляется величина $\delta_j = \tau_j - \Delta\tau_i$,

P_8 — проверка условия $\delta_j > 0$,

P_9 — при $\delta_j > 0$ принимается, что зона совпадения равна $\Delta\tau_i$ и проверяется условие $\Delta\tau_i \geqslant \tau_0$, где τ_0 — допустимая минимальная зона совпадения,

Φ_{10} — при $\Delta\tau_i \geqslant \tau_0$ в оперативном запоминающем устройстве записываются координаты уточненной частично сформированной пачки: $r_i\Delta\tau_i$, $N_j + 1, \langle 1 \to Prk\rangle$, где в скобках $\langle\ \rangle$ показана операция записи единицы в младший разряд регистра к после сдвига его содержимого на один разряд влево,

Φ_{11} — при невыполнении условия оператора P_9 считается, что зона совпадения отсутствует и сигнал из БЗУ записывается в ОЗУ как начальный сигнал новой пачки с координатами t_i, τ_i, $N_j = 1, \langle 1 \to Prk\rangle$,

Φ_{12} — при невыполнении условия оператора P_8, т. е. при $\delta_j \leqslant 0$, в качестве зоны совпадения принимается длительность зоны совпадения предыдущей, частично сформированной пачки τ_j и в ОЗУ записываются координаты : t_j, τ_j, $N_j + 1$, $\langle 1 \rightarrow Pr\ k\rangle$,

A_{13} — при $\Delta t_{ij} \leqslant 0$ (задержка частично сформированной пачки из ОЗУ меньше задержки сигнала из БЗУ) производится проверка наличия совпадения между выбранными сигналами, для чего вычисляется $\Delta\tau_j = \tau_j - \Delta t_{ij}$,

P_{14} — проверяется условие $\Delta\tau_j > 0$,

A_{15} — при $\Delta\tau_j > 0$ (совпадение есть) вычисляется величина $\delta_i = \tau_i - \Delta\tau_j$,

P_{16} — проверка условия $\delta_i > 0$,

P_{17} — при $\delta_i > 0$, принимается, что зона совпадения равна $\Delta\tau_j$ и проверяется условие $\Delta\tau_j \geqslant \tau_0$,

Φ_{18} — при $\Delta\tau_j \geqslant \tau_0$ в ОЗУ записываются новые координаты частично сформированной пачки: $t_i, \Delta\tau_j$, $N_j + 1$, $\langle 1 \rightarrow Pr\ k\rangle$,

P_{19} — при $\Delta\tau_j < \tau_0$ проверяется условие (критерий) фиксации конца пачки $k_j = к$,

Φ_{20} — при невыполнении критерия конца пачки, т. е. при $k_j \neq к$, частично сформированная пачка вновь записывается в ОЗУ с координатами: t_j, τ_j, $N_j + 1$, $\langle 0 \rightarrow Pr\ k\rangle$,

Φ_{21} — при невыполнении условия оператора P_{16}, т. е. при $\delta_i \leqslant 0$, в качестве зоны совпадения принимается длительность сигнала τ_i, полученного из БЗУ, и в ОЗУ записываются координаты: t_i, τ_i, $N_j + 1$, $\langle 1 \rightarrow Pr\ k\rangle$,

P_{22} — проверяется условие выполнения критерия обнаружения пачки: $N_j \geqslant N_0$,

A_{23} — вычисляется число Q_j элементарных интервалов от последней учитываемой позиции пачки (где выполняется критерий фиксации конца пачки) до позиции, соответствующей центру обнаруженной пачки по формуле

$$Q_j = (N_j + k - 1)/2, \tag{5.6.10}$$

A_{24} — вычисляется азимут центра пачки по формуле

$$\hat{\beta}_{0j} = \beta_{kj} - Q_j \Delta_\beta, \tag{5.6.11}$$

Φ_{25} — выдача координат r_j, β_j, N_j обнаруженной пачки,

Φ_{26} — сброс из ОЗУ информации о законченной (сформированной) пачке, не удовлетворяющей критерию обнаружения.

Соответствующая граф-схема алгоритма первичной обработки сигналов приведена на рис. 5.18. По граф-схеме можно рассмотреть функционирование алгоритма по частям, соответствующим каждому из возможных вариантов расположения сравниваемых сигналов. При этом общими для всех вариантов являются операции выбора кода t_i, τ_i очередного сигнала из БЗУ (опер. 1), выбор координат частично сформированной пачки из ОЗУ (опер. 2) и образование разности $\Delta t_{ij} = t_j - t_i$ (опер. 3).

1. Частично сформированная пачка из ОЗУ имеет большую, чем сигнал из БЗУ, задержку ($\Delta t_{ij} > 0$). Совпадение сравниваемых сигналов отсутствует ($\Delta\tau_i \leqslant 0$). В том случае сигнал из БЗУ принимается в качестве начального сигнала новой пачки (опер.: 1—2—3—4—5—6—11).

2. Если в результате выполнения операций 1—5 получено $\Delta\tau_i > 0$, то это свидетельствует о наличии совпадения сравниваемых сигналов.

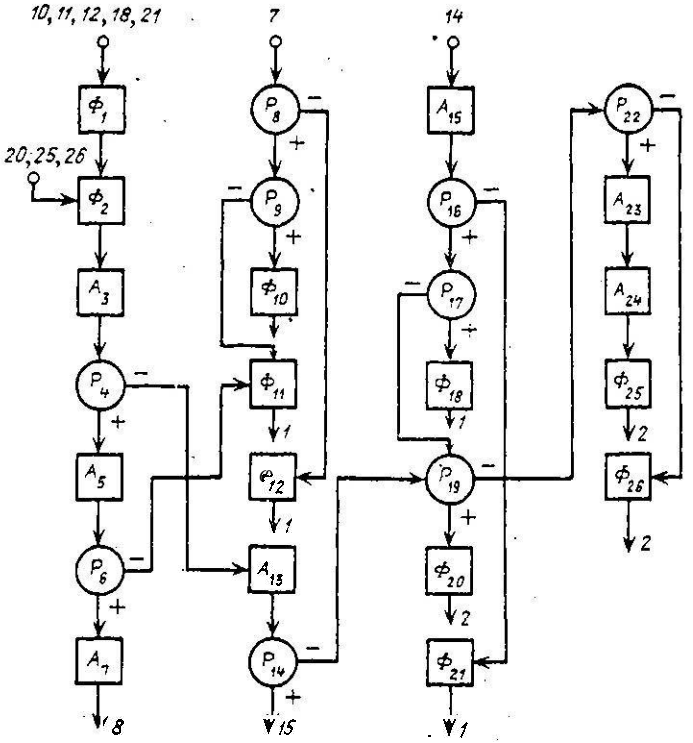


Рис. 5.18. Граф-схема алгоритма первичной обработки.

В дальнейшем проверяется, представляет ли $\Delta\tau_i$ ширину зоны совпадения. Для этого $\Delta\tau_i$ сравнивается с τ_j (опер. 7).

а). При $\tau_j \leqslant \Delta\tau_i$ ширина зоны совпадения равна τ_j. В ОЗУ записываются координаты: $t_i, \tau_j, N_j + 1$, $\langle 1 \rightarrow Pr\ k \rangle$ (опер. 12) и алгоритм переходит к выбору нового сигнала из БЗУ.

б). При $\tau_j > \Delta\tau_i$ ширина зоны совпадения равна $\Delta\tau_i$. Проверяется (опер. 9), удовлетворяет ли $\Delta\tau_i$ минимально допустимой величине зоны совпадения τ_0. При $\Delta\tau_i \geqslant \tau_0$ в ОЗУ записываются координаты зоны совпадения: $t_j, \Delta\tau_i, N_j + 1$, $\langle 1 \rightarrow Pr\ k \rangle$ (опер. 10) и алгоритм переходит к выбору очередного сигнала из БЗУ. При $\Delta\tau_i < \tau_0$ сигнал из БЗУ принимается в качестве начального сигнала новой пачки. В ОЗУ записываются координаты: $t_i, \tau_i, N_j = 1$, $\langle 1 \rightarrow Pr\ k \rangle$ (опер. 11) и осуществляется переход к выбору нового сигнала из БЗУ.

3. Частично сформированная пачка на ОЗУ имеет меньшую, чем сигнал из БЗУ, задержку ($\Delta t_{ij} \leqslant 0$). Совпадение сравниваемых сигналов отсутствует ($\Delta\tau_j \leqslant 0$). В этом случае для частично сформированной пачки из ОЗУ производится проверка на удовлетворение критерию сброса (конца пачки). Проверка производится путем сравнения содержимого регистра Рг к с серией из к нулей (опер. 19). При отсутствии совпадения k_j с к, частично сформированная пачка снова записывается в ОЗУ с прибавлением 1 к N_j и записью 0 в младший разряд регистра Рг к после сдвига его содержимого на один разряд влево. Далее выбирается для сравнения новая частично сформированная пачка из ОЗУ (опер. 20).

При совпадении k_j с к (k_j = к) проверяется выполнение критерия обнаружения (опер. 22). Если критерий обнаружения не выполняется, то информация t_j, τ_j, N_j, ⟨ Рг k ⟩ сбрасывается из ОЗУ (опер. 26) и алгоритм переходит к выбору следующей частично сформированной пачки из ОЗУ. При удовлетворении критерия обнаружения выполняются операции 23 и 24, в результате чего вычисляются азимут центра пачки. В заключение (опер. 25) координаты радиолокационной отметки t_j (r_j), β_j, N_j выдаются для дальнейшей обработки и алгоритм переходит к выбору следующей частично сформированной пачки из ОЗУ.

4. Если в результате выполнения операции 13 получено $\Delta\tau_j > 0$, то это свидетельствует о наличии совпадения сравниваемых сигналов. В дальнейшем проверяется, представляет ли $\Delta\tau_j$ ширину зоны совпадения. Для этого сравнивается $\Delta\tau_j$ с длительностью импульса τ_i (опер. 15):

А. При $\tau_i > \Delta\tau_j$ зоной совпадения является $\Delta\tau_j$. Проверяется (опер. 17), удовлетворяет ли $\Delta\tau_j$ минимально допустимой величине зоны совпадения τ_0. При $\Delta\tau_j \geqslant \tau_0$ в ОЗУ записываются координаты зоны совпадения t_i, $\Delta\tau_j$, $N_j + 1$, ⟨ 1 → Рг к ⟩ и алгоритм переходит к выбору очередного сигнала из БЗУ. При $\Delta\tau_j < \tau_0$ выполняется операция 19 и все последующие операции, рассмотренные в предыдущем пункте.

В. При $\tau_i < \Delta\tau_j$ ширина зоны совпадения равна τ_i. Поэтому в ОЗУ записываются координаты: t_i, τ_i, $N_j + 1$, ⟨ 1 → Рг к ⟩ (опер. 13) и алгоритм переходит к выбору нового сигнала из БЗУ (опер. 21).

Таким образом, рассмотрены все возможные комбинации расположения сравниваемых сигналов. В процессе обработки каждого нового сигнала из БЗУ он сравнивается с координатами нескольких частично сформированных пачек из ОЗУ; число сравнений случайно. Поэтому и время обработки сигнала из БЗУ является случайной величиной, что должно учитываться при выборе параметров ЦВМ первичной обработки.

5.6.4. Средняя частота совпадений сигналов независимых потоков

Для предъявления требований к ЦВМ первичной обработки по емкости ОЗУ при реализации рассмотренного в предыдущем пункте алгоритма (и других аналогичных алгоритмов цифровой обработки),

необходимо знать среднюю частоту совпадений выбросов помехи в соседних (или с пропуском) тактах обработки. Рассмотрим решение этой задачи.

Будем считать, что потоки сравниваемых на совпадение выбросов являются стационарными, независимыми и, кроме того, удовлетворяют условию

$$\theta_i = t_i - t_{i-1} > \tau_{i-1},$$

где t_{i-1}, τ_{i-1} — задержка и длительность (i — 1)-го выброса, θ_i — интервал времени между соседними выбросами.

В этом случае среднее число совпадений l из m выбросов (l совпадений в m подряд следующих тактах), вычисленное при условии, что продолжительность их перекрытия не менее τ_0, определяется соотношением [4]

$$\bar{\mu}_{l,\,m}(\tau_0) = \frac{1}{l!}\frac{\partial^{l+1}}{\partial y^l\,\partial\tau_0}\left[Q(\tau_0) + yP(\tau_0)\right]^m\Big|_{y=0}, \qquad (5.6.12)$$

где

$$P(\tau_0) = \Lambda(x_1,\ \tau_1)\int_{\tau_0}^{\infty} dz \int_{z}^{\infty} w(\tau/\tau_1)\,d\tau, \qquad (5.6.13а)$$

$$Q(\tau_0) = \Lambda(x_1,\ \tau_1)\int_{\tau_0}^{\infty} dz \int_{z}^{\infty} w(\theta)\,d\theta, \qquad (5.6.13б)$$

$w(\Theta)$ — плотность вероятности длительности пауз.

Подставляя в (13а) формулу (5а) для условной плотности вероятности отселектированных по длительности на уровне τ_1 выбросов и интегрируя, получим

$$P(\tau_0) = \Lambda\ (x_1,\ \tau_1)\,\bar{\tau}(x_1)\exp\left[-(\tau_0 - \tau_1)/\bar{\tau}(x_1)\right], \qquad (5.6.14)$$

где $\bar{\tau}(x_1)$ — средняя длительность выбросов, прошедших селекцию по амплитуде на уровне τ_1.

Если положить, что плотность вероятности длительности пауз описывается экспоненциальной функцией

$$w(\theta) = \frac{1}{\bar{\theta}(x_1,\ \tau_1)}\exp\left[-\theta/\bar{\theta}(x_1,\ \tau_1)\right], \qquad (5.6.15)$$

где $\bar{\theta}\ (x_1,\ \tau_1)$ — среднее значение длительности пауз, то, подставив (15) в (13б), после интегрирования получим

$$Q(\tau_0) = \Lambda\ (x_1,\tau_1)\,\bar{\theta}\ (x_1,\tau_1)\exp\left[-\tau_0/\bar{\theta}\ (x_1,\tau_1)\right]. \qquad (5.6.16)$$

Теперь из выражения (12) с учетом (14) и (16) можно получить формулы для частоты совпадений выбросов независимых потоков при любых l и т.

Так, в простейшем случае $l = m = 2$ получим

$$\bar{\mu}_{22}(\tau_0) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial \tau_0}\left\{\Lambda(x_1, \tau_1)\bar{\theta}(x_1, \tau_1)\exp\left[-\frac{\tau_0}{\bar{\theta}(x_1\tau_1)}\right]+\right.$$
$$\left.+y\Lambda(x_1, \tau_1)\bar{\tau}(x_1)\exp\left[-\frac{(\tau_0-\tau_1)}{\bar{\tau}(x_1)}\right]\right\}^2\Big|_{y=0} \qquad (5.6.17)$$

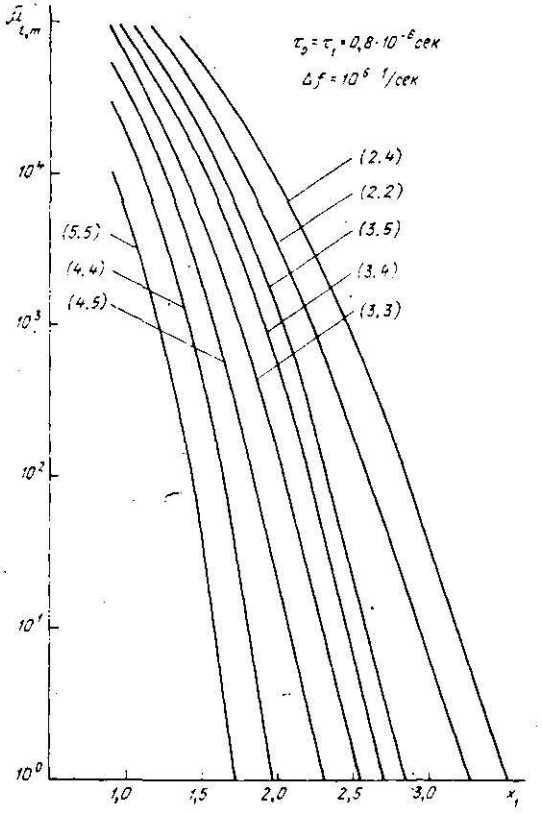


Рис. 5.19. Графики среднего числа совпадений выбросов независимых потоков.

Выполнив в формуле (17) операции дифференцирования и преобразования, найдем

$$\bar{\mu}_{22}(\tau_0) = 2\Lambda^2(x_1, \tau_1)\bar{\tau}(x_1)\exp\left[-2(\tau_0-\tau_1)/\bar{\tau}(x_1)\right].$$

Аналогичным образом для $l = m = 3$ получим

$$\bar{\mu}_{33}(\tau_0) = 3\Lambda^3(x_1, \tau_1)\bar{\tau}^2(x_1)\exp\left[-3(\tau_0-\tau_1)/\bar{\tau}(x_1)\right].$$

В общем случае для $l = m$ формула для среднего числа совпадений имеет вид

$$\bar{\mu}_{mm}(\tau_0) = m\Lambda^m(x_1, \tau_1)\bar{\tau}^{m-1}(x_1)\exp\left[-m(\tau_0-\tau_1)/\bar{\tau}(x_1)\right]. \qquad (5.6.18)$$

При обобщении решения на случай любых $l \leqslant m$ при $\tau_0 = \tau_0$ получается следующая формула для определения среднего числа совпадений l из m выбросов

$$\bar{\mu}_{lm}(\tau_0) = C_m^l \left[(m-l) + \frac{l\,\bar{\theta}(x_1, \tau_0)}{\bar{\tau}(x_1)} \right] \Lambda^m(x_1, \tau_0) \times$$

$$\times \bar{\tau}^l(x_1)\, \bar{\theta}^{m-(l+1)}(x_1, \tau_0) \exp\left[-\frac{\tau_0 (m-l)}{\bar{\theta}(x_1, \tau_0)} \right], \qquad (5.6.19)$$

где $C_m^l = m!/(m-l)!\, l!$.

Входящее в формулу (19) среднее значение длительности пауз $\bar{\Theta}(x_1, \tau_0)$ связано с $\Lambda(x_1, \tau_0)$ и $\bar{\tau}(x_1, \tau_0)$ следующим соотношением

$$\bar{\theta}(x_1, \tau_0) = (1 - \Lambda(x_1, \tau_0)\, \bar{\tau}(x_1, \tau_0))/\Lambda(x_1, \tau_0),$$

где $\bar{\tau}(x_1, \tau_0) = \tau_0 + \bar{\tau}(x_1)$.

На рис. 5.19 приведены рассчитанные по формуле (19) графики для среднего числа совпадений выбросов независимых потоков в функции от порога ограничения x_1 при $\tau = \tau_0 = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ *сек*, $\Delta f = 10^6$ *гц*.

Среднее число совпадений за фиксированное время t_r (время развертки дальности) находится из выражения

$$\bar{\mu}_{lm}^{(r)} = \bar{\mu}_{lm}\, t_r, \qquad (5.6.20)$$

которое применяется при расчете среднего числа совпадений выбросов помехи в пределах одного такта обработки.

5.6.5. Распределение числа занятых ячеек ОЗУ

Рассмотрим сначала загрузку ОЗУ ложной информацией. Согласно п. 5.6.2 поток ложных сигналов на входе ЦВМ первичной обработки является пуассоновским. На вход ОЗУ сигналы поступают с БЗУ. Если БЗУ рассчитано так, что вероятность потери требований из-за его перегрузки мала, то поток сигналов на входе ОЗУ также распределен по закону Пуассона с интенсивностью $\Lambda(x_1, \tau_0)$.

При записи в ОЗУ совпадающие сигналы объединяются в пачки, а несовпадающие образуют начала новых пачек. Одновременно пачки, неподтвердившиеся в ктактах, сбрасываются и соответствующие ячейки ОЗУ очищаются. Через некоторое время после начала наблюдения наступает стационарный режим загрузки ОЗУ, при котором среднее число записываемых в каждом такте начал новых пачек равно среднему числу сбрасываемых из ОЗУ пачек.

При пуассоновском входящем потоке ложных сигналов закон распределения числа занятых ячеек ОЗУ также будет пуассоновским с интенсивностью, равной среднему числу хранимых в ОЗУ незавершенных ложных пачек.

Рассмотрим, чему будет равно среднее за такт число ложных незавершенных пачек, хранимых в ОЗУ, при рассмотренном выше способе свертывания информации (временные диаграммы на рис. 5.17).

Пусть число ложных сигналов, поступающих на вход ОЗУ, в первом такте равно λ_r (1), а во втором λ_r (2). После двух тактов в ОЗУ будет записано

$$m_{лс}(2) = \lambda_r(1) + \lambda_r(2) - \mu_{22}^{(r)}(1, 2),$$

где $\mu_{22}^{(r)}(1,2)$ — число совпадений выбросов помехи из 1 и 2 тактов.

Если в третьем такте поступило λ_r (3) выбросов помехи, то из них в ОЗУ будет записано λ_r (3) — $\mu_{22}^{(r)}$ (2, 3) — $\mu_{23}^{(r)}$ (1, 3), где $\mu_{23}^{(r)}$ (1, 3) — число совпадений выбросов из первого и третьего тактов, а $\mu_{22}^{(r)}$(2, 3) — число совпадений выбросов из второго и третьего тактов. Кроме того, в третьем такте будет сброшено (вследствие двухкратного неподтверждения) λ_r (1) — $\mu_{22}^{(r)}$ (1, 2) — $\mu_{23}^{(r)}$ (1, 3) частично сформированных пачек. Поэтому в конце третьего такта в ОЗУ будет записано

$$m_{лс}(3) = m_{лс}(2) + \lambda_r(3) - \mu_{22}^{(r)}(2,3) - \mu_{23}^{(r)}(1,3) - \lambda_r(1) +$$
$$+ \mu_{22}^{(r)}(1,2) + \mu_{23}^{(r)}(1,3) = \lambda_r(2) + \lambda_r(3) - \mu_{23}^{(r)}(2,3).$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что при к = 2 и любом $i \geqslant 2$

$$m_{лс}(i) = \lambda_r(i-1) + \lambda_r(0 - \mu_{22}^{(r)}(i-1, O$$

В среднем, при фиксированном t_r можно считать

$$\lambda_r(1) = \lambda_r(2) = \ldots = \lambda_r(i) = \lambda_r,$$
$$\mu_{22}^{(r)}(i-1, i) = \mu_{22}^{(r)}(1,2) = \mu_{22}^{(r)}(2,3) = \ldots = \bar{\mu}_{22}^{(r)},$$

где $\bar{\mu}_{22}^{(r)}$ — среднее число совпадений двух сигналов в двух соседних тактах.

С учетом усреднения получим окончательно

$$\bar{m}_{лс} = 2\lambda_r - \bar{\mu}_{22}^{(r)}. \qquad (5.6.21)$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить соотношения для среднего числа занятых ячеек ОЗУ при других значениях критерия сброса к. Так, при к = 3 получим

$$\bar{m}_{лс} = 3\lambda_r - 2\bar{\mu}_{3,3}^{(r)} - \bar{\mu}_{23}^{(r)}. \qquad (5.6.22)$$

В общем случае можно записать

$$\bar{m}_{лс} = k\lambda_r - (k-1)\bar{\mu}_{kk}^{(r)} - (k-2)\bar{\mu}_{k-1,k}^{(r)} - \ldots - \bar{\mu}_{2k}^{(r)}. \qquad (5.6.23)$$

Таким образом, по формуле (23) можно определить среднее число ячеек ОЗУ, занятых ложной информацией.

Рассмотрим теперь соображения о расчете загрузки ОЗУ ЦВМ полезной информацией, т. е. информацией о целях. Будем предполагать,

что селекцию по амплитуде и длительности проходят практически все отраженные от цели импульсы. В этом случае среднее число ячеек ОЗУ, занятых незавершенными пачками сигналов, отраженных от целей, будет равно среднему числу целей, одновременно находящихся в пределах ширины диаграммы направленности РЛС. Если принять поток целей пуассоновским с параметром $\Lambda_ц$, то нетрудно подсчитать это число по формуле

$$\overline{m}_ц = \Lambda_ц T_0 \varphi_{0.5P}/\pi, \tag{5.6.24}$$

где $\varphi_{0,5P}$ — половина ширины диаграммы направленности РЛС на уровне $0{,}5P$, в *рад.* Например, при $\Lambda_ц = 40$ *сек*$^{-1}$, $T_0 = 10$ *сек*, $\varphi_{0,5P} = 1$ *град* получим $\overline{m}_ц \approx 2$.

Суммарное среднее число занятых ячеек ОЗУ равно

$$\overline{m}_{ОЗУ} = \overline{m}_{лс} + \overline{m}_ц, \tag{5.6.25}$$

а вероятность того, что число требуемых ячеек будет равно m, определяется по формуле

$$P_m = \frac{(\overline{m}_{ОЗУ})^m}{m!} \exp(-\overline{m}_{ОЗУ}). \tag{5.6.26}$$

Обычно $\overline{m}_{ОЗУ} \gg 10$. В этом случае распределение Пуассона может быть аппроксимировано нормальным распределением со средним значением, равным $\overline{m}_{ОЗУ}$, и среднеквадратичным отклонением, равным $\sqrt{\overline{m}_{ОЗУ}}$. Тогда плотность распределения числа занятых ячеек ОЗУ записывается в виде

$$w(m) = (2\pi\overline{m}_{ОЗУ})^{-1/2} \exp\left[-(m-\overline{m}_{ОЗУ})^2/2\overline{m}_{ОЗУ}\right]. \tag{5.6.27}$$

Очевидно, объем ОЗУ надо выбирать из условия

$$m_{ОЗУ} = \overline{m}_{ОЗУ} + a\sqrt{\overline{m}_{ОЗУ}}, \tag{5.6.28}$$

где a — положительное число (целое или дробное), выбираемое исходя из заданной вероятности переполнения ОЗУ.

Вероятность переполнения ОЗУ вычисляется по формуле

$$P_{отк} = \int_{m_{ОЗУ}}^{\infty} w(m)\,dm = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{m_{ОЗУ}-\overline{m}_{ОЗУ}}{\sqrt{2\overline{m}_{ОЗУ}}}\right)\right], \tag{5.6.29}$$

где $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-t^2)\,dt$ — функция Лапласа.

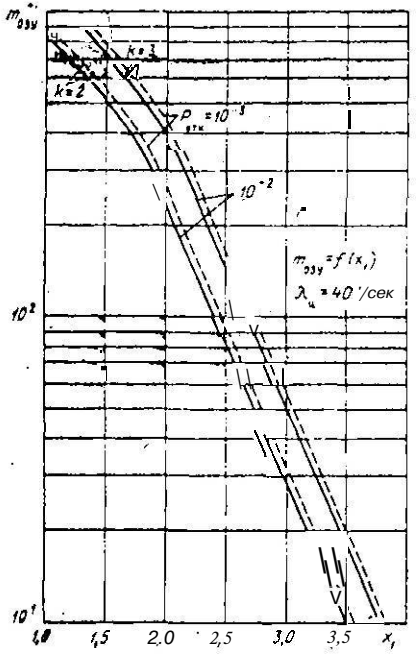


Рис. 5.20. Графики требуемого объема ОЗУ.

Преобразуем аргумент функции Лапласа, используя условие (28)

$$m_{озу}-\bar{m}_{озу}/\sqrt{2\bar{m}_{озу}}=a/\sqrt{2}.$$

Тогда

$$P_{отк}=1/2\,[1-\Phi(a/\sqrt{2})]. \quad (5.6.30)$$

Таким образом, по заданной допустимой вероятности переполнения можно определить a по формуле (30), а затем по формуле (28) определить требуемый объем ОЗУ.

На рис. 5.20 приведены графики зависимости требуемого объема ОЗУ в функции от порога x_1 при фиксированных значениях $к = 2$, 3, $\tau_0 = \tau_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ *сек*, $\Lambda_ц = 40$ 1/*сек*, $P_{отк} = 10^{-2}$ и 10^{-3}.

В заключение этого пункта заметим, что объем ОЗУ и ЦВМ первичной обработки оказывает непосредственное влияние на качественные характеристики обнаружения полезных сигналов. Действительно, при ограниченном объеме ОЗУ выбор порога x_1 приходится производить не из условий обеспечения оптимального обнаружения, а из условий предотвращения переполнения ОЗУ. При этом, чем меньше объем ОЗУ, тем выше должен быть порог x_1 и, следовательно, тем меньше будет вероятность обнаружения полезного сигнала.

5.6.6. Закон распределения времени обслуживания требований в АУ

В соответствии с машинным алгоритмом цифровой первичной обработки (п. 5.6.3) в АУ производится циклическое сравнение на совпадение частично сформированных пачек, хранимых в ОЗУ, с сигналами полученными в текущем такте обработки, которые выбираются из БЗУ. Цикл сравнения повторяется в каждом такте. К началу следующего такта БЗУ должно быть очищено от информации предыдущего такта.

Анализ алгоритма и путей (ветвей) обработки показывает (рис. 5.18), что число операций, затрачиваемых на сравнение каждой пары сигналов с последующей обработкой и записью в ОЗУ результатов сравнения, является различным в зависимости от взаимного расположения сигналов. Минимальное число операций затрачивается при обработке сигнала, принимаемого за начало новой пачки (6 операций: 1—2—3—5—6—11). Максимальное число операций (13) затрачивается при принятии решения об обнаружении пачки с последующим расчетом

координаты азимута. Ввиду случайного взаимного расположения сравниваемых сигналов число операций, затрачиваемых на их сравнение, является случайной величиной, причем закон распределения этой случайной величины аналитически получить не удается.

В дальнейшем будем считать, что в среднем на одно сравнение приходится одинаковое число операций. В этом случае время обслуживания каждого выбранного из БЗУ требования определяется только числом сигналов (незавершенных пачек) в ОЗУ, расположенных между двумя соседними сигналами входящего потока. Действительно, если в интервале задержек между предыдущим и новым сигналом входящего потока в ОЗУ нет незавершенных пачек, то время обслуживания нового требования будет минимальным, равным времени сравнения пары сигналов (временная диаграмма на рис. 5.17). При наличии в этом интервале 1, 2, ..., m пачек в ОЗУ, время обслуживания возрастет в 2, 3 . . . $m + 1$ раз соответственно.

Вероятность наличия m пачек в ОЗУ в интервале задержек $\Delta t_{l,\,l+1}$ между соседними сигналами входящего потока определяется законом Пуассона

$$P_n(\Delta t_{l,\,l+1}) = \frac{\left(\frac{\bar{m}_{\text{ОЗУ}}}{t_r}\Delta t_{l,\,l+1}\right)^m}{m!}\exp\left(-\frac{\bar{m}_{\text{ОЗУ}}}{t_r}\Delta t_{l,\,l+1}\right). \quad (5.6.31)$$

Для среднего интервала времени между соседними требованиями входящего потока, равного $\bar{\Delta t}_{l,\,l+1} = t_r/N_r$, вероятность наличия m пачек в ОЗУ равна

$$\frac{\left(\frac{\bar{m}_{\text{ОЗУ}}}{N_r}\right)^m}{m!}\exp\left(-\frac{\bar{m}_{\text{ОЗУ}}}{N_r}\right). \quad (5.6.32)$$

Выражение (32) определяет число сравнений при обслуживании одного сигнала входящего потока без учета постоянной составляющей, равной единице. Далее необходимо учесть эту постоянную составляющую, что приводит к смещенному закону Пуассона, который записывается в виде

$$P_n = \begin{cases}\left(\frac{\bar{m}_{\text{ОЗУ}}}{N_r}\right)^{n-1}\exp\left(-\frac{\bar{m}_{\text{ОЗУ}}}{N_r}\right)\Big/(n-1)!, & n \geqslant 1,\\ 0, & n < 1.\end{cases} \quad (5.6.33)$$

Математическое ожидание в этом случае равно $1 + \bar{m}_{\text{ОЗУ}}/N_r$, а дисперсия $\bar{m}_{\text{ОЗУ}}/N_r$. Поэтому для математического ожидания и дисперсии времени обслуживания имеем соответственно

$$\bar{\tau}_{\text{обсл}} = \tau_c(1 + \bar{m}_{\text{ОЗУ}}/N_r), \quad (5.6.34)$$

$$\sigma^2_{\tau_{\text{обсл}}} = \tau_c^2\,\bar{m}_{\text{ОЗУ}}/N_r, \quad (5.6.35)$$

где τ_c — время сравнения пары сигналов.

При необходимости дискретный закон распределения времени обслуживания может быть аппроксимирован подходящей функцией непрерывного параметра τ. В нашем случае, при небольших плотностях помех ($p_N \ll 1$) отношение $m_{озу}/N_r \approx к$, т. е. равно примерно принятому критерию сброса пачки. Обычно к = 2 — 3. При этом смещенный закон Пуассона может быть аппроксимирован смещенным нормальным законом и теми же математическим ожиданием и дисперсией.

5,6.7. Требования к быстродействию АУ и емкости БЗУ при реализации алгоритма первичной обработки

Для определения требуемого быстродействия АУ ЦВМ в процессе реализации алгоритма обработки радиолокационной информации необходимо прежде всего задаться коэффициентом его загрузки как одноканальной системы массового обслуживания (§ 3.4). Нас интересует, главным образом, стационарный режим работы системы, существование которого обусловлено выполнением условия $\rho = N_r \tau_{обсл} < 1$, где N_r — интенсивность суммарного входящего потока.

Как уже отмечалось, первичная обработка сигналов осуществляется по тактам, в пределах каждого интервала времени зондирования. При этом время обработки, равное периоду зондирования $T_п$, как правило, больше времени развертки дальности t_r, в течение которого принимаются входные сигналы. Следовательно, если исходить из условия $\rho < 1$, то будут получены несколько завышенные требования к быстродействию АУ. Однако мы в дальнейшем будет пользоваться условием $\rho < 1$, во-первых, ввиду необходимости предусмотреть резерв быстродействия на выполнение неучтенных операций и операций, связанных с контролем качества вычислений ЦВМ, а во-вторых, потому, что для предварительных расчетов определяющим фактором является простота решения задачи аналитическими методами.

Итак, пусть $\rho < 1$ задано. Тогда допустимое среднее время обслуживания одного требования в АУ равно $\tau_{обсл} = \rho/N_r$.

Если теперь использовать выражение (34), то можно определить допустимое время $\tau_с$ на сравнение вновь пришедшего требования с одним требованием из ОЗУ по формуле

$$\tau_с = \bar{\tau}_{обсл}/(1 + \bar{m}_{озу}/N_r). \qquad (5.6.36)$$

Допустим далее, что прямым подсчетом или путем предварительного моделирования алгоритма получено среднее число $N_с$ приведенных коротких операций, выполняемых в процессе сравнения пары сигналов. Тогда потребное быстродействие АУ для реализации рассматриваемого алгоритма первичной обработки определяется по формуле

$$\bar{V} = \frac{\bar{N}_с}{\bar{\tau}_{обсл}} = \frac{\bar{N}_с}{\rho} N_r \left(1 + \frac{\bar{m}_{озу}}{N_r}\right) \qquad (5.6.37)$$

На рис. 5.21 построены графики требуемого быстродействия АУ в функции от порога x_1 при тех же исходных предпосылках, что и при расчете требуемой емкости ОЗУ. В качестве независимого параметра взято требуемое число операций $\bar{N}_c$, затрачиваемых на сравнение пары сигналов. Из рассмотрения графиков следует, что необходимое быстродействие в сильной степени зависит от порога ограничения сигналов в устройстве квантования.

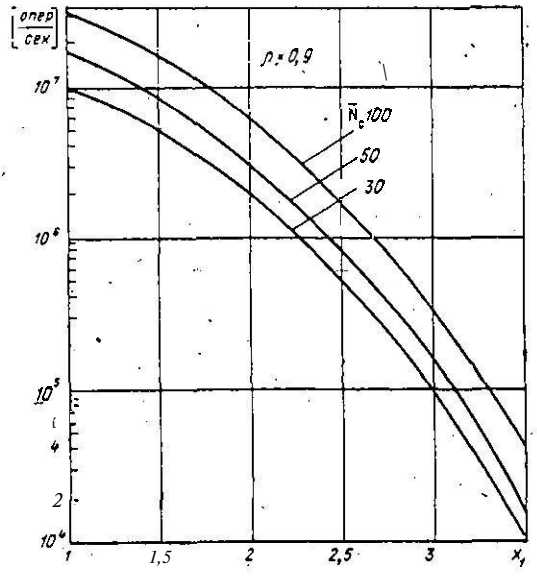


Рис. 5.21. Графики требуемого быстродействия АУ.

Для определения емкости БЗУ необходимо было бы воспользоваться методом вложенной цепи Маркова и рассчитать финальные вероятности состояний системы массового обслуживания «БЗУ — АУ» (§ 3.4). Число состояний этой системы m при заданной вероятности потери требований и будет равно числу требуемых ячеек БЗУ (точнее, число ячеек БЗУ равно m — 1), Однако расчет финальных вероятностей состояний вложенной цепи Маркова при достаточно больших m чрезвычайно громоздок. Более удобно сначала рассчитать среднее время $\bar{\gamma}$ нахождения требования в очереди по формуле (3.4.12), а затем, имея в виду, что БЗУ как «хранилище» очереди является многоканальной системой массового обслуживания с потерями, воспользоваться для расчета числа ячеек БЗУ формулой Эрланга

$$P_n = \frac{(N_r \bar{\gamma})^n}{n!} \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{(N_r \gamma)}{k!}. \qquad (5.6.38)$$

Зная P_n, по этой формуле можно найти n — требуемое число ячеек БЗУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бунимович В. И. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Сов. радио», 1951.
2. Кузьмин С. З. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.
3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, т.I М., «Сов. радио», 1969,

4. Седякин Н. М. Элементы теории случайных импульсных потоков. М., «Сов. радио», 1965.
5. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Сов. радио», 1970.
6. Ярушек В. Е. Синтез схем для обработки цифровых сигналов. — «Известия АН СССР». Техническая кибернетика», 1969, № 2.
7. Brookner E. Recurrent Events in a Markov Chain. — «Information and Control», 1966, v. 9, № 3.
8. Child P. Digital Date Processing Considerations in Radar. — «Radio and Electronic Engineer», 1964, v. 27, № 1.

6. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ ВТОРИЧНОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

6.1. Краткая характеристика основных операций вторичной обработки

В процессе вторичной обработки радиолокационной информации решаются следующие основные задачи:

— обнаружение траекторий целей,

— сопровождение целей,

— траекторные расчеты в интересах потребителей радиолокационной информации.

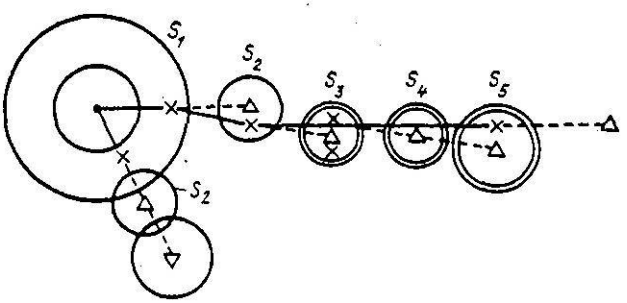


Рис. 6.1. Пояснение способа автоматического обнаружения и сопровождения траекторий.

В данном параграфе рассматриваются основные операции, выполняемые в процессе решения перечисленных задач.

Обнаружение траекторий целей в процессе вторичной обработки обычно осуществляется автоматически, с помощью ЦВМ. Рассмотрим один из возможных способов автоматического обнаружения траектории цели по данным двухкоординатной обзорной РЛС (рис. 6.1).

Пусть появилась одиночная отметка в некоторой точке зоны обзора РЛС. Очевидно, эту отметку необходимо принять за первую (начальную) отметку траектории новой цели. Теперь, если извест-

ны $V_{мин}$ — минимальная скорость движения цели, и $V_{макс}$ — максимальная скорость движения цели, то область S_1, в которой следует искать принадлежащую этой цели вторую отметку в следующем обзоре, можно представить в виде кольца, внутренний радиус которого $R_{мин} = V_{мин} T_0$, а внешний — $R_{макс} = V_{макс} T_0$. Операция формирования области S_1 называется стробированием, а сама эта область — стробом. В строб S_1 может попасть не одна, а несколько отметок. Каждую из них следует считать как возможное продолжение предполагаемой траектории (рис. 6.1). По двум отметкам можно вычислить скорость и направление движения каждой из предполагаемых целей, а затем рассчитать возможное положение отметки на следующий (третий) обзор. Операция расчета начальных значений параметров (скорости, направления движения) называется оценкой этих значений, а операция расчета возможного положения отметки на следующий обзор — экстраполяцией (предсказанием).

Вокруг экстраполированных отметок (которые на рис. 6.1 обозначены треугольниками) вновь образуются круговые стробы S_2, размеры которых определяются, исходя из возможных ошибок предсказания и формирования отметок. Если в какой-либо строб S_2 в третьем обзоре попала отметка, то она считается принадлежащей к обнаруживаемой траектории и траектория продолжается. При попадании отметок в l стробов подряд принимается решение об обнаружении траектории, и она передается на сопровождение.

Таким образом, в процессе обнаружения траектории выполняются следующие операции: стробирование, проверка критерия обнаружения, оценка начальных значений параметров траектории по минимальному объему данных, экстраполяция параметров.

Слежение за траекторией цели состоит в непрерывной привязке к ней вновь полученных отметок и уточнении параметров движения. Автоматическое слежение за траекторией цели обычно называется автосопровождением цели.

Рассмотрим принцип реализации автосопровождения цели при вторичной обработке информации обзорной двухкоординатной РЛС. Пусть по отметкам, полученным в трех обзорах подряд, принято решение об обнаружении траектории и она передана на сопровождение. Первая операция, подлежащая выполнению в процессе автосопровождения, состоит в уточнении параметров траектории по данным всех замеров координат, реализованных в процессе обнаружения траектории. Второй операцией, решаемой в процессе автосопровождения, является экстраполяция параметров на следующий обзор. В отличие от ранее рассмотренной задачи обнаружения траектории здесь эта операция может быть выполнена значительно более точно.

Выделим теперь в зоне обзора некоторую стробируемую область с центром, совпадающим с экстраполированной точкой. Эта область, как и прежде, может быть круговой (на рис. 6.1 стробы сопровожения ограничены двойными линиями). Если известны статистические характеристики ошибок экстраполяции и измерения координат, то можно определить вероятность попадания новой отметки в строб сопровождения. Наоборот, задавшись вероятностью попадания новой отметки в

строб, можно рассчитать его размеры. Теперь, если размеры строба выбраны так, что вероятность попадания в него истинной отметки велика, то отметку, попавшую в строб, следует считать принадлежащей данной траектории, а отметки, оказавшиеся за пределами строба, — ложными или принадлежащими другим траекториям.

В строб сопровождения может попасть не одна, а несколько отметок (главным образом за счет ложных отметок). В связи с этим требуется выполнить новую операцию — отбор для продолжения траектории одной отметки из нескольких попавших в строб.

Наконец, может возникнуть такая ситуация, когда в стробе не окажется ни одной отметки. В этом случае наиболее разумно принять экстраполированную отметку за истинную и считать ее продолжением траектории.

Таким образом, в процессе автосопровождения цели выполняются следующие операции: оценка параметров траектории цели; экстраполяция параметров траектории на следующий обзор или несколько обзоров; выделение упрежденной области (строба), в которой с некоторой вероятностью ожидается появление новой отметки; селекция отметок в стробе с целью выбора одной из них для продолжения траектории. Сравнение показывает, что в процессе обнаружения траектории и автосопровождения цели выполняются фактически одни и те же операции.

При траекторных расчетах производятся главным образом вычислительные операции точной оценки параметров траектории и экстраполяции параметров на большие временные интервалы.

6.2. Сигналы и помехи на входе системы вторичной обработки

На вход системы вторичной обработки поступают (в виде числовых кодов) отметки, представляющие значения координат мгновенного положения истинных целей, а также координат так называемых «ложных целей», образованных помехами, прошедшими фильтр первичной обработки.

В общем виде сигнал на входе системы вторичной обработки можно представить в виде суммы полезного, сигнала и помехи, т. е.

$$U(t) = U(\vartheta, t) + N(0, \qquad (6.2.1)$$

где $U(\vartheta, t)$ — полезный сигнал, представляющий собой траекторию движения цели; $N(t)$ — помеха, под которой понимается случайный процесс, искажающий траекторию, а также затрудняющий ее обнаружение и воспроизведение.

В данном параграфе рассматриваются применяемые в процессе проектирования систем вторичной обработки модели полезных сигналов и помех.

6.2.1. Математические модели для описания траекторий целей

Траектория движения цели зависит от многих факторов и условий, таких, как тип цели (аэродинамическая или баллистическая), высота полета, скорость, маневренные возможности и т. д. Кроме того, на траекторию цели оказывает влияние целый ряд случайных факторов, связанных с возможностью противодействия противника, неравномерной плотностью среды, в которой происходит полет, неточностью управления и др.

Перечисленные факторы вынуждают относить множество подлежащих сопровождению траекторий к категории случайных процессов. Для статистического описания этого множества необходимо знать законы распределения вероятности функции $U(\vartheta, t)$ или параметров, ее определяющих. Однако, как правило, таких законов получить ни теоретически, ни экспериментально не удается, что связано с известной «априорной трудностью». Поэтому в процессе разработки алгоритмов вторичной обработки радиолокационной информации приходится задаваться некоторыми предположениями (гипотезами), о характере полезного сигнала, т. е. исходить из более или менее правдоподобных математических моделей траекторий.

Ниже математические модели траекторий рассматриваются отдельно для космических и воздушных целей.

А. Модель траектории космической цели [6,7]

Невозмущенные траектории космических целей (КЦ), под которыми в дальнейшем понимаются баллистические ракеты (БР), искусственные спутники Земли (ИСЗ) и космические корабли относятся к классу детерминированных функций времени и параметров. Векторное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее траекторию движения КЦ в поле тяготения Земли, имеет вид [8]

$$\ddot{\rho} = \mu(\rho/\rho^3), \qquad (6.2.2)$$

где ρ — радиус-вектор КЦ относительно центра Земли (рис. 6.2); $\mu = 3{,}986 \cdot 10^5$ *км*^{3}/*сек*^{2} — гравитационная постоянная Земли.

Векторное дифференциальное уравнение (2) может быть заменено системой из трех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка, записанных в какой-либо системе координат. Например, в сферической системе координат (r — дальность, β — азимут, ε — угол места) с центром в точке привязки РЛС, система дифференциальных уравнений движения КЦ записывается в виде

$$\begin{aligned}
&\ddot{r} + f_r(r, \beta, \varepsilon, \dot{r}, \dot{\beta}, \dot{\varepsilon}) = -\mu \frac{3}{\rho^2},\\
&\ddot{\beta} r \cos\varepsilon + f_\beta(r, \beta, \varepsilon, \dot{r}, \dot{\beta}, \dot{\varepsilon}) = 0,\\
&\ddot{\varepsilon} r + f_\varepsilon(r, \beta, \varepsilon, \dot{r}, \dot{\beta}, \dot{\varepsilon}) = -\mu \frac{R_3 \cos\varepsilon}{\rho^2},
\end{aligned} \qquad (6.2.3)$$

где $\dot{r}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\varepsilon}$ — скорости измерения сферических координат; R_3 — радиус Земли.

Система (3) определяет семейство кривых второго порядка, по которым может двигаться КЦ. Для выбора конкретной кривой из этого семейства необходимо знать начальные условия, которые представляют собой постоянные интегрирования системы уравнений (3). Поскольку система включает три дифференциальных уравнения второго порядка, то постоянных интегрирования должно быть шесть.

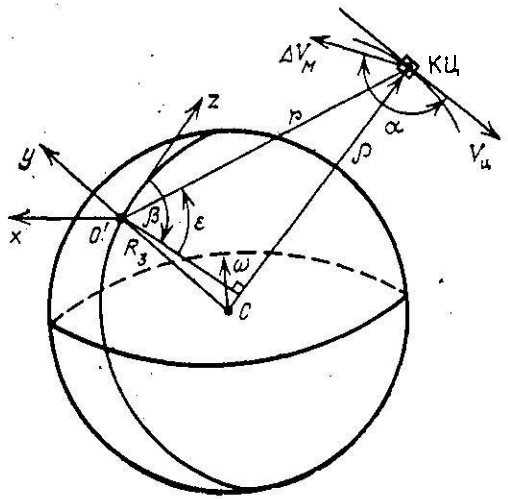


Рис. 6.2. К представлению траектории КЦ.

Постоянные интегрирования принято называть параметрами траектории КЦ. В качестве параметров траектории в рассматриваемом случае могут быть выбраны три значения координат r_0, β_0, ε_0 и три составляющих скорости изменения этих координат $\dot{r}_0$, $\dot{\beta}_0$, $\dot{\varepsilon}_0$ в момент времени t_0, принятый за начало отсчета.

К сожалению уравнения (3) не интегрируются в замкнутом виде. Поэтому приходится либо применять численные методы интегрирования, либо искать приближенные решения. Одним из возможных приближенных методов решения является представление координат КЦ в виде временных полиномов

$$r(t) = r_0 + \dot{r}_0(t-t_0) + \frac{\ddot{r}_0}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{\dddot{r}_0}{3!}(t-t_0)^3 + \ldots,$$

$$\beta(t) = \beta_0 + \dot{\beta}_0(t-t_0) + \frac{\ddot{\beta}_0}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{\dddot{\beta}_0}{3!}(t-t_0)^3 + \ldots,$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}_0(t-t_0) + \frac{\ddot{\varepsilon}_0}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{\dddot{\varepsilon}_0}{3!}(t-t_0)^3 + \ldots \qquad (6.2.4)$$

В процессе решения системы уравнений (4) параметры r_0, $\dot{r}_0$, β_0, $\dot{\beta}_0$, ε_0, $\dot{\varepsilon}_0$ оцениваются по результатам радиолокационных наблюдений, вторые производные определяются непосредственно из уравнений движения, а высшие производные (третья, четвертая и т. д.) находятся путем последовательного дифференцирования уравнений движения.

Уравнения движения могут быть записаны в других системах координат, что в свою очередь приводит к изменению набора постоянных

интегрирования. Так, например, при обработке в местной прямоугольной системе координат (рис. 6.2), с центром в точке $0'$ (ось t — по меридиану на север, ось Y — в зенит, ось X — по параллели на запад) постоянными интегрирования будут прямоугольные координаты КЦ (x_0, y_0, z_0) и скорости изменения этих координат (x_0, y_0, z_0) в момент t_0, принятый за начало отсчета. Приближенное решение уравнений движения в этом случае ищется в виде полиномиального представления координат $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Отметим, что полиномами конечной (невысокой) степени могут быть представлены сравнительно небольшие участки баллистической траектории КЦ. В этом существенный недостаток полиномиального приближения.

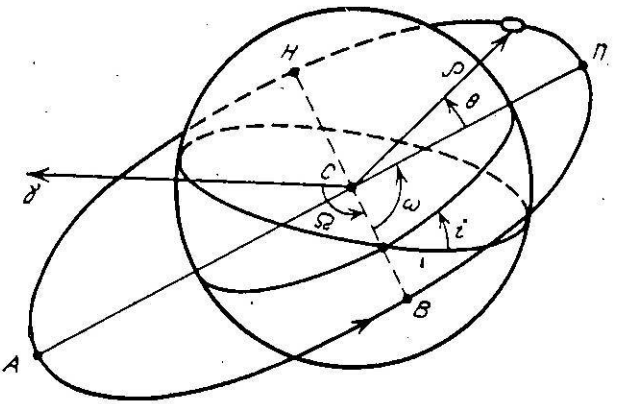


Рис. 6.3. Эллиптическая орбита КЦ.

Рассмотрим еще один из возможных вариантов представления траектории движения КЦ [12].

Траектория движения КЦ на участке полета, происходящего под действием сил инерции, называется орбитой КЦ. Орбита может быть эллиптической (круговой), параболической и гиперболической. Ограничимся здесь только случаем эллиптической орбиты.

Основными точками и линиями эллиптической орбиты являются (рис. 6.3): $П$ — перигей — ближайшая к Земле точка орбиты; $А$ — апогей — наиболее удаленная от Земли точка орбиты; линия $АП$ — линия апсид; точка B — восходящий узел орбиты — точка, в которой орбита пересекает плоскость экватора при переходе КЦ из южного полушария в северное; точка H — нисходящий узел орбиты — точка, в которой орбита пересекает плоскость экватора при переходе КЦ из северного полушария в южное; линия BH, соединяющая восходящий и нисходящий узлы, называется линией узлов.

Ориентация плоскости орбиты в пространстве определяется двумя параметрами: 1) наклонением орбиты i (рис.6.3) — углом между плоскостью экватора и плоскостью орбиты, 2) прямым восхождением восходящего узла Ω — углом между направлением на точку весеннего равноденствия γ и на восходящий узел B, отсчитываемым в плоскости экватора против часовой стрелки.

Положение орбиты в ее плоскости определяется аргументом перигея ω — угловым расстоянием перигея от восходящего узла, отсчитываемым в плоскости орбиты по направлению полета КЦ.

Вид и размеры эллиптической орбиты определяются большой полуосью орбиты a и ее эксцентриситетом e. Большая полуось орбиты—это расстояние, рав-

ное половине длины линий апсид, а эксцентриситет e — отношение фокусного расстояния к большой полуоси. Между a и e имеется однозначная связь

$$a = p/(1 - e^2),$$

где p — называется фокальным параметром орбиты. Поэтому для характеристики орбиты могут быть также взяты параметры p и e.

Положение КЦ на орбите определяется истинной аномалией Θ — углом между направлением в перигей и в точку местонахождения КЦ на орбите, отсчитываемым в плоскости орбиты по направлению полета КЦ.

Таким образом, шестерка параметров i, Ω, ω, p, e, Θ полностью определяет эллиптическую орбиту КЦ. Возможны и другие наборы параметров [6].

Параметры эллиптической орбиты могут быть непосредственно вычислены по результатам радиолокационных наблюдений, причем для вычисления начальных значений эллиптических параметров необходимо иметь два разнесенных во времени измерения сферических координат КЦ [7]. Последующие измерения используются для уточнения (сглаживания) этих параметров.

Непосредственное сглаживание в процессе вторичной обработки параметров орбиты облегчает задачи обнаружения маневра КЦ, позволяет сравнительно просто производить классификацию КЦ по типам, облегчает расчет точек старта и падения БР и т. д.

К недостаткам такого метода представления траектории КЦ относятся:

1. Сложность вычисления параметров орбиты через наблюдаемые координаты КЦ.

2. Медленная сходимость процесса усреднения этих параметров из-за больших ошибок вычисления и сложной статистической связи между текущими вычисленными значениями.

Отклонения траектории полета КЦ от заданной дифференциальным уравнением движения (2) называются возмущениями, а соответствующая траектория называется возмущенной. Основными возмущающими силами естественного происхождения являются силы, возникающие из-за нецентральности поля тяготения Земли и силы притяжения Луны, Солнца и планет.

Возмущающие силы естественного происхождения в большинстве случаев могут быть учтены в процессе построения траектории каждой конкретной КЦ.

Возмущающие силы искусственного происхождения обычно создаются включением специальных ракетных двигателей для маневра КЦ с целью перехода с одной орбиты на другую. Эти силы, особенно в конфликтных ситуациях, могут быть учтены только статистически.

Граничные значения ускорений маневра могут быть оценены следующим образом.

Время одноразового маневра определяется по формуле

$$t_м = G_{тм}/G_с,$$

где $G_{тм}$ — вес топлива, предназначенного для двигателя маневра (ДМ), $G_с$ — секундный расход топлива ДМ.

Связь изменения модуля вектора скорости КЦ с расходом топлива на его создание определяется по формуле Циолковского

$$\Delta V_м = V_г \ln \frac{G_\Sigma}{G_\Sigma - G_{тм}}, \qquad (6.2.5)$$

где G_Σ — вес КЦ до включения ДМ; $V_г$ — вектор скорости истечения продуктов сгорания при работе ДМ.

Обычно вектор $\Delta V_м$ прикладывают под некоторым углом к вектору скорости КЦ. Например, при торможении с целью перехода на более низкую орбиту, вектор $\Delta V_м$ прикладывается под углом а к направлению вектора скорости КЦ (рис. 6.2). В этом случае по формуле (5) определяется проекция приращения вектора скорости $\Delta V_м = \Delta V_м \cos a$.

Таким образом, если известны вес КЦ, запас топлива для маневра и характеристики двигателя маневра, то воспользовавшись очевидным соотношением

$\Delta V'_м = g_м t_м$, можно определить вектор дополнительного ускорения КЦ на участке маневра. Разлагая далее вектор $g_м$ по ортам принятой системы координат, получим составляющие вектора дополнительного ускорения, которые необходимо прибавить в правые части системы уравнений движения (3), чтобы описать траекторию движения маневрирующей КЦ.

В дальнейшем составляющие вектора $g_м$ будем называть интенсивностью маневра по соответствующим координатам.

Обычно считают, что в момент включения ДМ интенсивность маневра изменяется скачком от нуля до максимального значения и остается далее неизменной до конца маневра. Следовательно, каждая отдельная траектория маневрирующей. КЦ может быть представлена в виде процесса со скачкообразным в случайные моменты времени изменением параметров. Для множества траекторий маневрирующих КЦ интенсивность маневра по каждой координате можно считать случайной величиной, распределенной равномерно в интервале ($-g_{м макс} \div g_м$ маис)

Так как продолжительность маневра ограничена (порядка 30—100 *сек),* то, естественно, большую часть времени полета траектория КЦ является невозмущенной. Вероятность того, что траектория КЦ является невозмущенной, можно приближенно определить по формуле

$$q_м = 1 - p_м = (\bar{t}_н - \bar{t}_м)/\bar{t}_н,$$

где $\bar{t}_н$ — среднее время наблюдения траектории КЦ, $\bar{t}_м$ — среднее время маневра КЦ, $p_м$ — вероятность наличия маневра КЦ.

Распределение моментов времени начала и конца участка маневра КЦ только в простейшем случае можно принять равномерным в интервале времени наблюдения траектории КЦ. В конфликтных ситуациях, где манеар КЦ может быть использован как средство преодоления обороны, это распределение, естественно, не является равномерным и должно быть оценено в каждом конкретном случае.

Б. Модель траектории воздушной цели.

Траектория воздушной цели (ВЦ) не относится к классу детерминированных функций и для нее, вообще говоря, не может быть записано уравнение, определяющее функциональные связи между параметрами, как это имеет место для траектории КЦ. Однако и в этом случае основным является полиномиальное представление траектории на всех участках полета, причем все коэффициенты полинома должны теперь оцениваться по данным измерительной системы, т. е. по данным радиолокационных наблюдений. В этом состоит существенное усложнение задачи воспроизведения *по* радиолокационным данным траектории ВЦ по сравнению с траекторией КЦ.

Обычно траекторию ВЦ делят на участки прямолинейного и равномерного движения и участки маневрирования, которые чередуются случайным для наземного наблюдателя (системы обработки) образом. Маневрирование ВЦ может быть по скорости и направлению. Маневрирование по скорости ограничено допустимым тангенциальным ускорением, не превышающим $(0{,}8 \div 1)\,g$. Маневрирование по направлению (вираж) может осуществляться со значительно большей перегрузкой, порядка $(3—5)g_0$. В простейшем случае можно предположить, что основным видом маневрирования ВЦ является вираж по курсу на постоянной высоте с постоянным нормальным ускорением (перегрузкой), т. е. по дуге окружности. В этом случае проекция траектории ВЦ на горизонтальную плоскость представляет собой последовательность прямолинейных отрезков, сопряженных дугами окружностей различного

радиуса. Минимальный радиус дуги окружности виража связан с допустимой перегрузкой $n_{доп}$ формулой

$$R_{мин} = V_ц^2 / g_0 \sqrt{n_{доп}^2 - 1}. \qquad \textbf{(6.2.6)}$$

Вираж считается равновероятным в обе стороны от генерального курса. Плотность вероятности кривизны $K = 1/R$ дуги окружности виража может быть аппроксимирована формулой

$$w(K) = (1 - p_м)\,\delta(K - 0) + \frac{p_м}{\sqrt{2\pi}\sigma_K} \exp\left(-\frac{K^2}{2\sigma_K^2}\right), \qquad (6.2.7)$$

где $p_м$ — вероятность маневра цели, определяемая из априорных данных или по результатам наблюдений; $\delta(K - 0)$ — дельта-функция; σ_K^2 — дисперсия кривизны дуги окружности виража.

Вместо плотности вероятности для кривизны дуги окружности виража, аналогичным образом может быть записана формула для плотности вероятности интенсивности маневра $g_м$.

Необходимо иметь в виду, что при обработке в сферической системе координат изменение во времени текущих координат даже неманеврирующей цели может быть представлено только полиномами, степени выше первой. Это затрудняет селекцию участков прямолинейного полета ВЦ от участков виража даже в рассматриваемом простейшем случае.

В дальнейшем предполагается, что маневрирование ВЦ осуществляется независимо по каждой из наблюдаемых координат. Процесс изменения отдельно взятой координаты маневрирующей ВЦ представляется в виде суммы полиномиальной функции, описывающей движение на линейном участке, и случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией вида

$$R(\tau) = \sigma_{g\,м}^2 \exp(-\lambda\tau), \qquad (6.2.8)$$

где $\sigma_{g\,м}^2$ — дисперсия интенсивности маневра; λ — средняя частота изменения интенсивности маневра.

Такая модель позволяет учитывать связь интенсивности маневра в настоящий момент с интенсивностью маневра в предыдущие моменты, т. е. позволяет рассматривать процесс изменения интенсивности маневра как марковский процесс.

6.2.2. Статистические характеристики помех

Помехами при вторичной обработке радиолокационной информации, главным образом, являются:

— ошибки измерения координат,

— ложные отметки.

А. Ошибки измерения. Относительно этих ошибок обычно принимаются следующие исходные предпосылки:

1. Ошибки измерения по независимым наблюдаемым координатам цели независимы между собой. Это позволяет рассматривать статисти-

ческие характеристики ошибок измерения по каждой независимой измеряемой координате раздельно. В дальнейшем в качестве наблюдаемой координаты будем брать дальность r и представлять измеренное значение этой координаты в виде

$$r_i = r(\vartheta, t_i) + \Delta r_i,$$

где $r(\vartheta, t_i)$ — истинное значение координаты в момент времени t_i; Δr_i — ошибка измерения; ϑ — вектор параметров траектории.

2. Ошибки Δr_i каждого отдельного измерения наблюдаемой координаты подчинены нормальному закону распределения вероятности. Плотность вероятности для одиночного значения r_i записывается в виде

$$w(r_i | \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_i}} \exp\left[-\frac{(r_i - r(\vartheta, t_i))^2}{\ldots}\right], \qquad (6.29)$$

где $\sigma^2_{r_i}$ — дисперсия i-го отсчета координаты.

3. Совокупность ошибок $\Delta r_1, \Delta r_2, \ldots, \Delta r_n$ измерения координаты в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ представляет собой гс-мерную систему коррелированных, нормально распределенных случайных величин. Для статистической характеристики такой системы случайных величин необходимо знать: n математических ожиданий $M[\Delta r_i] (i = 1, 2, \ldots, \ldots, л)$; n дисперсий $\sigma^2_{r_i}$; $n(n-1)/2$ корреляционных моментов $N_{ij} = M\{\Delta r_i \Delta r_j\}$, характеризующих попарную корреляцию всех случайных величин, входящих в систему. Дисперсии и корреляционные моменты удобно расположить в виде квадратной матрицы размерностью $(n \times n)$.

$$N = \begin{Vmatrix} \sigma^2_{r_1} & N_{12} & N_{13} & \ldots & N_{1n} \\ N_{21} & \sigma^2_{r_2} & N_{23} & \ldots & N_{2n} \\ N_{31} & N_{32} & \sigma^2_{r_3} & \ldots & N_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{n1} & N_{n2} & N_{n3} & \ldots & \sigma^2_{r_n} \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица называется корреляционной матрицей ошибок. Диагональные элементы корреляционной матрицы ошибок для общности можно записать также в виде $\sigma^2_{r_i} = N_{ii}$. Симметричные относительно диагонали элементы корреляционной матрицы ошибок равны между собой, т. е. $N_{ij} = N_{ji}$.

В случае, когда ошибки измерения некоррелированы, все элементы корреляционной матрицы, кроме диагональных, равны нулю. Такая матрица называется диагональной.

4. Наиболее существенными составляющими ошибок измерения координаты являются:

Шумовая составляющая, обусловленная влиянием внешних и внутренних помех. Значения шумовой составляющей ошибок являются

независимыми от измерения к измерению и характеризуются корреляционной матрицей вида

$$N_{ш} = \begin{Vmatrix} \sigma^2_{ш_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{ш_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{ш_n} \end{Vmatrix}.$$

Диагональные элементы этой матрицы, представляющие собой значения дисперсии шумовой составляющей, зависят от отношения сигнала к помехе и определяются по формуле

$$\sigma^2_{ш_i} = \sigma^2_{ш_0} (r_i/r_0)^4,$$

где r_0 — некоторая фиксированная дальность, для которой определено значение $\sigma^2_{ш_0}$.

Флюктуационная составляющая, обусловленная быстрыми случайными возмущениями, имеющими место в измерительной системе РЛС. Значения флюктуационной составляющей принимаются независимыми от дальности и характеризуются корреляционной матрицей вида

$$N_{ф} = \sigma^2_{ф} I_n,$$

где $\sigma^2_{ф}$ — дисперсия флюктуационной составляющей; I_n — единичная матрица порядка $(n \times n)$ (т. е. матрица, в которой диагональные элементы равны единице, а остальные — нулю).

Систематическая составляющая, имеющая постоянную величину для данной РЛС в течение одного сеанса измерений, но случайно изменяющаяся от сеанса к сеансу. Корреляционная матрица систематической составляющей записывается в виде

$$N_{с} = \sigma^2_{с} E_n,$$

где $\sigma^2_{с}$ — дисперсия систематической составляющей; E_n — матрица порядка $(n \times n)$, составленная из единиц.

Медленно меняющиеся во времени и пространстве составляющие, основными из которых являются [2]: регулярная тропосферная и иносферная ошибки, нерегулярная тропосферная и ионосферная ошибки.

Одновременный учет всех составляющих ошибок измерения вряд ли целесообразен из-за возникающих при этом больших трудностей синтеза алгоритмов оценки параметров траектории. Обычно во всех системах учитывают случайные (шумовую и флюктуационную) и систематическую составляющие. При этом суммарная корреляционная матрица ошибок измерения координаты находится по правилу

$$N = N_{ш} + N_{ф} + N_{с}.$$

Напомним еще раз, что суммарная корреляционная матрица ошибок имеет порядок $(n \times n)$.

5, Условная плотность вероятности n-мерной выборки коррелированных нормально распределенных случайных величин записывается в виде

$$w(r_1, r_2, \ldots, r_n | \vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |N|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|K_{ij}|}{|N|}\Delta r_i \Delta r_j\right], \quad (6.2.10)$$

где $|N|$ — определитель корреляционной матрицы N ошибок измерения координаты; $|K_{ij}|$ — алгебраическое дополнение элемента N_{ij} в определителе j N |, представляющее собой определитель матрицы, полученной из матрицы N вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Двойная сумма под знаком экспоненты в выражении (10) называется квадратичной формой. Для квадратичной формы можно получить более удобное при преобразованиях и экономичное в записи векторно-матричное представление. Условимся последовательность ошибок измерения Δr_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ представлять в виде n-мерного вектор-столбца

$$\Delta r^{\mathrm{T}} = \| \Delta r_1 \Delta r_2 \ldots \Delta r_n \|,$$

где T — знак транспонирования.

Элементы $|K_{ij}|/|N|$ в выражении (10) образуют квадратную матрицу порядка $n \times n$, которая является обратной к корреляционной матрице ошибок измерения, т. е.

$$|K_{ij}|/|N| = N_{ij}^{-1}, \quad i, j = 1, 2 \ldots л,$$

где N_{ij}^{-1} — элемент обратной корреляционной матрицы ошибок измерения, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца (значок (-1) служит для обозначения обратной матрицы).

Используя введенные обозначения, квадратичную форму в выражении (10) можно представить в виде следующего векторно-матричного произведения

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|K_{ij}|}{|N|}\Delta r_i \Delta r_j = \Delta r^{\mathrm{T}} N^{-1} \Delta r. \quad (6.2.11)$$

В справедливости выражения (11) легко убедиться непосредственным подсчетом.

При векторно-матричном представлении квадратичной формы условная плотность вероятности (10) записывается в виде

$$w(r_1, r_2, \ldots, r_n | \vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |N|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\Delta r^{\mathrm{T}} N^{-1} \Delta r\right]. \quad (6.2.12)$$

Выражение (12) является основным при синтезе оптимальных алгоритмов оценки параметров траектории.

Б. Ложные отметки. Если помеха является стационарной, то ложные отметки возникают случайно и независимо друг от друга. Обычно в этом случае считают, что во времени поток ложных отметок

является ординарным и имеет постоянную плотность Λ; в процессе обзора ложные отметки попадают в неперекрываемые области зоны обзора независимым образом.

При соблюдении перечисленных условий число ложных отметок m, попадающих в любую область D (двухмерную или трехмерную), распределяется по закону Пуассона.

$$P_m = (a^m/m!) \exp(-a), \qquad (6.2.13)$$

где a — среднее число ложных отметок, попадающих в область D.

Для двухмерного случая

$$a = S_D \nu_S,$$

где S_D — площадь области D; ν_S — число ложных отметок на единицу площади.

Для трехмерного случая

$$a = V_D \nu_V,$$

где V_D — объем области D; ν_V — число ложных отметок на единицу объема.

При круговом (секторном) обзоре плотность ложных отметок на единицу площади (объема) зоны не является постоянной, а зависит от дальности. Рассмотрим эту зависимость для случая двухмерной области D.

Разделим зону обзора РЛС на кольца, ширина Δ_r, каждого из которых равна разрешающей способности по дальности. Число колец $r_{макс}/\Delta_r$. Зная общее число ложных отметок, возникающих в зоне обзора за период обзора T_0, равное ΛT_0, и учитывая тот факт, что среднее число ложных отметок в каждом кольце Δ_r одинаково (обзор равномерный), можно определить число ложных отметок, приходящееся на одно кольцо

Площадь кольца на дальности r будет равна $S_r = 2\pi r \Delta_r$. Следовательно, на единицу площади обзора на дальности r приходится

$$\nu_{Sr} = \nu'_S/S_r = \Lambda T_0/2\pi r_{макс} r \ [отм/км^2].$$

Средняя плотность ложных отметок в области, ограниченной значениями дальности $r_1 \div r_2$, определяется из выражения

$$= \frac{\Lambda T_0}{2\pi (r_2 - r_1) r_{макс}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\Lambda T_0}{2\pi r_{мако}} \frac{\ln (r_2/r_1)}{r_2 - r_1}. \qquad (6.2.14)$$

Выражение (14) позволяет рассчитывать среднюю плотность ложных отметок в областях (стробах), протяженных по координате дальности. Расчет числа ложных отметок в стробе и в этом случае производится по формуле (13), так как для наличия пуассоновского распределения условие постоянной плотности v несущественно [1]. В процессе выполнения основных операций вторичной обработки влияние ложных

отметок, в основном, сказывается на качестве селекции отметок в стробах. При этом неправильная селекция приводит к ухудшению точностных характеристик оценки параметров и в конечном счете может привести к сбою сопровождения.

6.3. Оценка параметров полиномиальной функции при фиксированном объеме выборки

Пусть $R(t)$ — принимаемый случайный процесс, представляющий собой аддитивную смесь полезного сигнала $r(\vartheta, t)$ и помехи Δr (О-Полезный сигнал — процесс изменения во времени независимой координаты цели — представляется в виде полиномиальной функции, степень которой определяется принятой моделью траектории:

$$r(\vartheta, t) = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \theta_s \frac{t^s}{s!} = \sum_{l=0}^{s} \theta_l \frac{t^l}{l!}. \qquad (6.3.1)$$

В выражении (1) коэффициенты полинома имеют смысл координаты, скорости изменения координаты, ускорения и т. д. Обычно они называются параметрами траектории цели. Совокупность параметров θ_l, записанная в виде столбца, образует $s+1$-мерный вектор параметров траектории $\vartheta = \| \theta_0 \theta_1 \ldots \theta_s \|^{\mathrm{T}}$.

Помеха, под которой понимаются ошибки измерения координаты, представляет собой нормальный случайный процесс с известной корреляционной функцией и равным нулю математическим ожиданием. Процесс измерения состоит в получении выборки значений $r_1, r_2, \ldots, r_n$ функции $R(t)$. в моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Совокупность значений r_i образует n-мерный вектор-столбец выборочных значений $\boldsymbol{r} = \| r_1 r_2 \ldots r_n \|^{\mathrm{T}}$.

6.3.1. Алгоритм оптимальной оценки параметров траектории по критерию максимального правдоподобия (общий случай)

При синтезе оптимального алгоритма оценки необходимо прежде всего записать функцию правдоподобия для оцениваемого векторного параметра ϑ по результатам n-мерной выборки случайной функции $R(t)$. В нашем случае эта функция записывается аналогично условной плотности вероятности n-мерной выборки коррелированных нормально распределенных случайных величин и в векторно-матричном представлении имеет вид [см. (2.12)1:

$$L(\vartheta) = c \exp\left[-\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}^{-1} \Delta \boldsymbol{r} \right].$$

В дальнейшем удобнее иметь дело с натуральным логарифмом функции правдоподобия

$$\ln L(\vartheta) = \ln c - \frac{1}{2} (\Delta r \mathrm{N}^{-1} \Delta r). \qquad (6.3.2)$$

Теперь, чтобы воспользоваться общим правилом нахождения оценок по методу максимального правдоподобия, необходимо продифференцировать выражение (2) по векторному параметру ϑ. Правило дифференцирования квадратичной формы по векторному параметру записывается в виде:

$$\frac{d}{d\vartheta}(\Delta r^{\mathrm{T}} N^{-1} \Delta r) = \frac{d}{d\vartheta} \Delta r^{\mathrm{T}} (N^{-1} \Delta r) = \Delta r^{\mathrm{T}} \frac{d}{d\vartheta}(N^{-1} \Delta r) +$$

$$+ (N^{-1} \Delta r)^{\mathrm{T}} \frac{d\Delta r}{d\vartheta} = \Delta r^{\mathrm{T}} N^{-1} \frac{d\Delta r}{d\vartheta} + \Delta r^{\mathrm{T}} (N^{-1})^{\mathrm{T}} \frac{d\Delta r}{d\vartheta}.$$

Так как обратная корреляционная матрица симметрична, то $(N^{-1})^{\mathrm{T}} =$

Следовательно, можно записать

$$\frac{d}{d\vartheta}(\Delta r^{\mathrm{T}} N^{-1} \Delta r) = 2 \Delta r^{\mathrm{T}} N^{-1} \frac{d\Delta r}{d\vartheta}. \qquad (6.3.3)$$

Полученное выражение является вектор-строкой. Нам же, в соответствии с принятыми ранее обозначениями для вектора оцениваемых параметров, необходимо представить вектор оценок в виде вектор-столбца. Транспонируя (3), получим

$$\left[\frac{d}{d\vartheta}(\Delta r^{\mathrm{T}} N^{-1} \Delta r)\right]^{\mathrm{T}} = 2 \left(\frac{d\Delta r}{d\vartheta}\right)^{\mathrm{T}} N^{-1} \Delta r.$$

Подставляя теперь в правую часть этого выражения значение $\Delta r = r - r(\vartheta, t)$ и приравнивая нулю, при $\vartheta = \hat{\vartheta}$, получаем

$$\frac{d\,[r(\hat{\vartheta}, t)]^{\mathrm{T}}}{d\hat{\vartheta}} N^{-1} (r - r(\hat{\vartheta}, t)) = 0. \qquad (6.3.4)$$

Имея в виду, что $[r(\hat{\vartheta}, t)]^{\mathrm{T}}$ представляет собой вектор-строку с составляющими $r(\hat{\vartheta}, t_i)$, $i = \overline{1, n}$, запишем производную в виде

$$\frac{d}{d\hat{\vartheta}}[r(\hat{\vartheta}, t)]^{\mathrm{T}} = \left\| \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_1)}{d\hat{\vartheta}} \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_2)}{d\hat{\vartheta}} \ldots \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_n)}{d\hat{\vartheta}} \right\|,$$

или, перейдя к дифференцированию по составляющим $\hat{\theta}_i$ векторного параметра ϑ, получим матрицу порядка $(s + 1) \times n$

$$\frac{d}{d\hat{\vartheta}}[r(\hat{\vartheta}, t)]^{\mathrm{T}} = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_1)}{d\hat{\theta}_0} & \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_2)}{d\hat{\theta}_0} & \ldots & \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_n)}{d\hat{\theta}_0} \\ \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_1)}{d\hat{\theta}_1} & \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_2)}{d\hat{\theta}_1} & \ldots & \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_n)}{d\hat{\theta}_1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_1)}{d\hat{\theta}_s} & \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_2)}{d\hat{\theta}_s} & \ldots & \frac{dr(\hat{\vartheta}, t_n)}{d\hat{\theta}_s} \end{array} \right\|. \qquad (6.3.5)$$

Обозначив матрицу (5) через A^T и подставляя ее в (4), запишем векторное уравнение правдоподобия в окончательном виде

$$A^T N^{-1} (r - r(\hat{\vartheta}, t)) = 0. \qquad (6.3.6)$$

Дальнейшие преобразования уравнения (6) позволяют непосредственно выразить вектор оценок $\hat{\vartheta}$ через вектор измерений r.

Для полиномиальной траектории вектор $r(\hat{\vartheta}, t)$ представим в виде произведения $r(\hat{\vartheta}, t) = A\hat{\vartheta}$. Тогда из (6) получим

$$\hat{\vartheta} = (A^T N^{-1} A)^{-1} A^T N^{-1} r.$$

Обозначив далее матрицу $A^T N^{-1} A$ через B, получим окончательно

$$\hat{\vartheta} = B^{-1} A^T N^{-1} r. \qquad (6.3.7)$$

Окончательное решение, в соответствии с выражением (7), получается при задании конкретных значений n, r и статистики помех. В частности, если ошибки измерения координаты являются некоррелированными, то

$$N^{-1} r = r' = \begin{Vmatrix} w_1 r_1 \\ w_2 r_2 \\ \vdots \\ w_n r_n \end{Vmatrix},$$

где $w_i = 1/\sigma_{r_i}^2$.

Выражение (7) в этом случае записывается в виде

$$\hat{\vartheta} = B^{-1} A^T r'. \qquad (6.3.8)$$

Решение (8) в точности соответствует оценкам, получаемым методом наименьших квадратов [5, 7].

6.3.2. Ошибки оценки параметров методом максимального правдоподобия (общий случай)

Система уравнений правдоподобия в общем случае является нелинейной. Поэтому для определения ошибок оценки параметров необходимо воспользоваться методом линеаризации этой системы. Линейное приближение будет достаточно хорошим при малых ошибках единичных измерений, что обычно выполняется в РЛС рассматриваемого класса.

Линеаризация системы уравнений правдоподобия производится следующим образом. Запишем вектор измеренных значений координаты в виде

$$r = r(\vartheta, t) + \Delta r, \qquad (6.3.9)$$

где Δr — вектор ошибок одиночных измерений координаты; ϑ — вектор истинных значений параметров,

Возьмем далее вектор-функцию $\boldsymbol{r}(\hat{\vartheta}, t)$ и разложим ее в ряд Тейлора в окрестности истинного значения векторного параметра ϑ. Пренебрегая членами второго и более высоких порядков относительно вектора ошибок $\Delta\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta} - \vartheta$, получим

$$\boldsymbol{r}(\hat{\vartheta}, t) \approx \boldsymbol{r}(\vartheta, t) + \frac{d\boldsymbol{r}(\vartheta, t)}{d\vartheta}\Delta\hat{\vartheta}. \qquad (6.3.10)$$

Обозначим, по аналогии с выражением (5), $d\boldsymbol{r}(\vartheta, t)/d\vartheta = \mathrm{A}$ — матрица порядка $n \times (s+1)$.

Тогда

$$\boldsymbol{r}(\hat{\vartheta}, t) \approx \boldsymbol{r}(\vartheta, t) + \mathrm{A}\Delta\hat{\vartheta}. \qquad (6.3.11)$$

Подставим выражения (9) и (11) в уравнение правдоподобия (6). В результате получим линейную систему уравнений относительно $\Delta\hat{\vartheta}$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}^{-1}\left[\mathrm{A}\Delta\hat{\vartheta} - \Delta\boldsymbol{r}\right] = 0. \qquad (6.3.12)$$

Решение этой системы получается в виде

$$\Delta\hat{\vartheta} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}^{-1}\Delta\boldsymbol{r}, \qquad (6.3.13)$$

где, как и прежде, $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{A}$ — матрица порядка $(s+1) \times (s+1)$.

Корреляционная матрица ошибок оценки параметров по n измеренным значениям координаты r определяется по правилу

$$\Psi = M\left[\Delta\hat{\vartheta}\Delta\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}\right], \qquad (6.3.14)$$

где в квадратных скобках стоит прямое произведение векторов, M — оператор математического ожидания;

$$\Delta\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}} = \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(\mathrm{N}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(\mathrm{B}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Так как N^{-1} и B^{-1} квадратные симметричные матрицы, то

$$(\mathrm{B}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{-1}, \quad (\mathrm{N}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathrm{N}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\Delta\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}} = \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{B}^{-1}. \qquad (6.3.15)$$

Подставляя выражения (13) и (15) в (14), получим

$$\Psi = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}^{-1}M\left[\Delta\boldsymbol{r}\Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{N}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{B}^{-1}, \qquad (6.3.16)$$

где $M\left[\Delta\boldsymbol{r}\Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\right] = \mathrm{N}$ — матрица ошибок измерения.

Учитывая далее, что произведение прямой и обратной матриц дает единичную матрицу, после преобразования в соответствии с этим правилом выражения (16) получим окончательно

$$\Psi = \mathrm{B}^{-1} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{A})^{-1}. \qquad (6.3.17)$$

Дальнейшая детализация выражения (17) производится для конкретных траекторий.

6.3.3. *Оптимальный алгоритм оценки параметров линейной траектории*

Рассмотрим решение уравнений правдоподобия (6) для случая оценки параметров линейной траектории. Этот случай имеет важное для практики значение, так как любая траектория (в том числе и баллистическая) на ограниченном интервале наблюдения может быть представлена в виде линейного полинома (полинома первой степени).

В качестве оцениваемых параметров примем координату дальности r_0 и скорость ее изменения $\dot{r}_0$ в начальный момент времени t_0. Закон изменения координаты представляется в виде

$$r(\vartheta, t) = r_0 + \dot{r}_0 (t - t_0),$$

а оценка этой координаты в момент времени $t_i \neq t_0$ равна

$$\hat{r}_i = \hat{r}_0 + \hat{\dot{r}}_0 \tau_i,$$

где $\tau_i = (t_i - t_0)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае вектор оцениваемых параметров имеет вид

$$\hat{\vartheta} = \left\| \begin{matrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\dot{\theta}}_0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \hat{r}_0 \\ \hat{\dot{r}}_0 \end{matrix} \right\|,$$

а транспонированная матрица дифференциальных операторов (5) равна

$$A^T = \left\| \begin{matrix} \frac{d\hat{r}_1}{d\hat{r}_0} & \frac{d\hat{r}_2}{d\hat{r}_0} & \cdots & \frac{d\hat{r}_n}{d\hat{r}_0} \\ \frac{d\hat{r}_1}{d\hat{\dot{r}}_0} & \frac{d\hat{r}_2}{d\hat{\dot{r}}_0} & \cdots & \frac{d\hat{r}_n}{d\hat{\dot{r}}_0} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{matrix} \right\|.$$

Для простоты примем также, что корреляционная матрица ошибок измерения N является диагональной.

Тогда можно записать:

$$N = \| \sigma_{r_i}^2 \delta_{ij} \|, \qquad N^{-1} = \| w_i \delta_{ij} \|,$$

где $\sigma_{r_i}^2$ — дисперсия измерения координаты в i-й момент времени; w_i — «вес» i-го измерения;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

С учетом сделанных обозначений, подлежащее решению уравнение правдоподобия для линейной траектории записывается в виде

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} r_1 - \hat{r}_0 - \hat{\dot{r}}_0 \tau_1 \\ r_2 - \hat{r}_0 - \hat{\dot{r}}_0 \tau_2 \\ \dots \\ r_n - \hat{r}_0 - \hat{\dot{r}}_0 \tau_n \end{Vmatrix} = 0,$$

где r_i — составляющие вектора измеренных значений координаты r.

В результате выполнения операции перемножения матриц получим систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\hat{r}_0$ и $\hat{\dot{r}}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{r}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i + \hat{\dot{r}}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i &= \sum_{i=1}^{n} w_i r_i, \\ \hat{r}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i + \hat{\dot{r}}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i r_i. \end{aligned} \qquad (6.3.18)$$

Решение этой системы относительно, искомых оценок $\hat{r}_0$ и $\hat{\dot{r}}_0$ параметров r_0 и $\dot{r}_0$ дается в виде

$$\hat{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i r_i \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i \right)^2}, \qquad (6.3.19)$$

$$\hat{\dot{r}}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i r_i \sum_{i=1}^{n} w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i \right)^2}. \qquad (6.3.20)$$

Произведем теперь дальнейшее упрощение задачи и предположим, что измеренные значения координаты r_i поступают через равные интервалы времени T_0. Это соответствует случаю оценки параметров траектории по данным РЛС с равномерным периодическим обзором пространства (в этом случае T_0 — период обзора). Кроме того, отнесем искомые оценки к моменту времени t_n последнего измерения и примем этот момент за начало шкалы отсчета времени.

В результате для входящих в выражения (18) интервалов времени τ_i можно записать (рис. 6.4)

$$\tau_i = -(n-i)T_0. \qquad (6.3.21)$$

Введем далее следующие обозначения:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = f_n, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) = g_n, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^2 = h_n. \qquad (6.3.22)$$

С учетом выражения (21) и обозначений (22) система уравнений правдоподобия для оценки параметров линейной траектории при равнодискретных измерениях имеет вид

$$\hat{r}_n f_n - \hat{\dot{r}}_n T_0 g_n = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i,$$

$$\hat{r}_n g_n - \hat{\dot{r}}_n T_0 h_n = \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i.$$

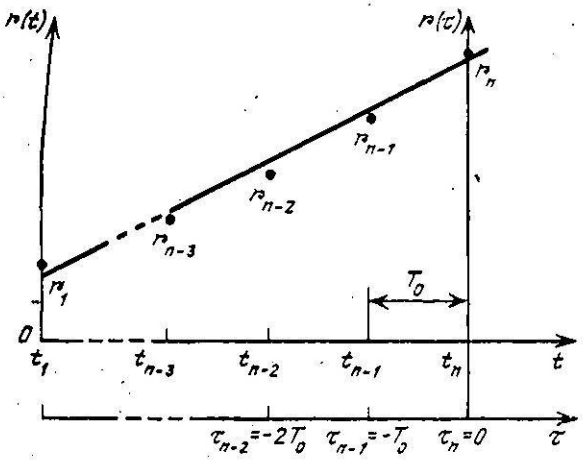


Рис. 6.4. К оценке параметров траектории при равнодискретных измерениях.

Решение этой системы уравнений получается в виде

$$\hat{r}_n = \frac{f_n \sum_{i=1}^{n} w_i r_i - g_n \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i}{K_n}, \qquad (6.3.23)$$

$$\hat{\dot{r}}_n = \frac{g_n \sum_{i=1}^{n} w_i r_i - f_n \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i}{T_0 K_n}, \qquad (6.3.24)$$

где $K_n = f_n h_n - g_n^2$.

Допустим теперь, что на ограниченном интервале наблюдения измерения значений координаты можно принять равноточными. Тогда веса измерений w_i будут одинаковыми $(w_1 = w_2 = \ldots = w_n = w)$, а введенные выше коэффициенты f_n, g_n, h_n будут равны соответственно:

$$f_n = nw,$$

$$g_n = w \sum_{i=1}^{n} (n-i) = \frac{n(n-1)}{2} w, \qquad (6.3.25)$$

$$h_n = w \sum_{i=1}^{n} (n-i)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} w.$$

Подставляя эти значения в выражения (23) и (24) и произведя элементарные преобразования, получаем окончательные формулы для оценки параметров линейной траектории при равнодискретных и равноточных измерениях:

$$\hat{r}_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_r(i)\, r_i, \tag{6.3.26}$$

$$\hat{\dot{r}}_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_{\dot{r}}(i)\, r_i, \tag{6.3.27}$$

где

$$\eta_r(i) = (6i - 2n - 2)/n(n+1), \tag{6.3.26а}$$

$$\eta_{\dot{r}(i)} = (12i - 6n - 6)/T_0\, n(n^2 - 1), \tag{6.3.27а}$$

— весовые функции оценки координаты и скорости соответственно.

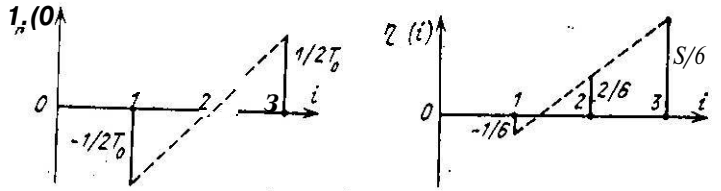


Рис. 6.Б. Весовые функции оценки координаты и скорости при $n=3$.

Для примера рассмотрим применение полученных формул в простейшем случае, когда оценки параметров линейной траектории находятся по результатам двух измерений ($n = 2$).

Подставляя в формулы (26) и (27) $i = 1, 2$, получаем

$$\hat{r}_2 = r_2, \quad \hat{\dot{r}}_2 = (r_2 - r_1)/T_0.$$

При $n = 3$ имеем:

$$\eta_r(1) = -1/6, \quad \eta_{\dot{r}}(1) = -1/2T_0,$$
$$\eta_r(2) = 2/6, \quad \eta_{\dot{r}}(2) = 0,$$
$$\eta_r(3) = 5/6, \quad \eta_{\dot{r}}(3) = 1/2T_0.$$

Следовательно,

$$\hat{r}_3 = (5r_3 + 2r_2 - r_1)/6, \quad \hat{\dot{r}}_3 = (r_3 - r_1)/2T_0.$$

На рис. 6.5 изображены рассчитанные по формулам (26а) и (27а) весовые функции оценки координаты и скорости ее изменения при $n = 3$. Заметим, что для весовых коэффициентов всегда выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_r(i) = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \eta_{\dot{r}}(i) = 0.$$

Эти условия могут быть использованы для контроля вычислений.

Упрощенная структурная схема дискретного фильтра для реализации алгоритма оценки одного из параметров линейной траектории при фиксированной выборке измеренных значений координаты изображена на рис. 6.6.

При реализации алгоритмов оценки параметров на ЦВМ выборка измеренных значений координаты хранится в оперативном запоминающем устройстве ЦВМ, значения весовых коэффициентов хранятся в долговременном запоминающем устройстве, а операции умножения и суммирования производятся последовательно для каждого оцениваемого параметра в операционном устройстве ЦВМ.

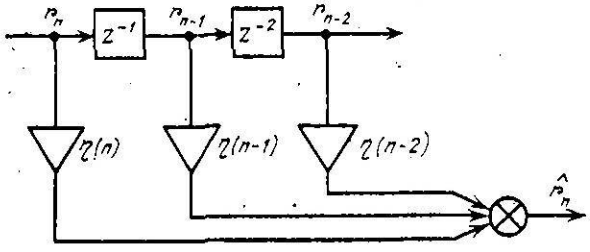


Рис. 6.6. Структурная схема дискретного фильтра.

Наряду с оценкой параметров, на каждом шаге обработки должна вычисляться корреляционная матрица ошибок оценки по формуле (17).

Матрица B. в рассматриваемом случае записывается в виде

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \dots & \tau_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} w_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & \tau_1 \\ 1 & \tau_2 \\ 1 & \tau_3 \\ \dots & \dots \\ 1 & \tau_n \end{Vmatrix}.$$

В результате выполнения операций умножения над составляющими матрицами, получим окончательно

$$B = \begin{Vmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i & \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i & \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i^2 \end{Vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен

$$|B| = \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i \right)^2.$$

Применяя теперь обычное правило обращения матриц, получим

$$\Psi = B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{Vmatrix} \sum_{l=1}^{n} w_l & -\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l \\ -\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l & \sum_{l=1}^{n} w_l \end{Vmatrix}. \qquad (6.3.28)$$

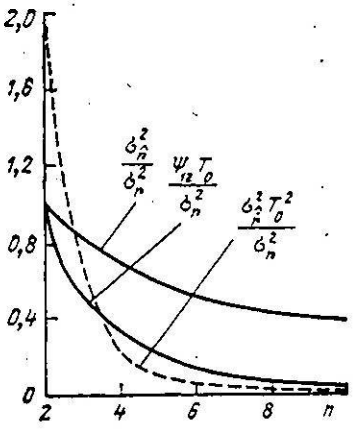


Рис. 6.7. Элементы корреляционной матрицы ошибок оценки параметров линейной траектории.

При равнодискретных измерениях координаты имеем

$$|B| = T_0^3 (f_n h_n - g_n^2) = T_0^3 K_n,$$

$$\Psi = \begin{Vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Vmatrix}. \qquad (6.3.29)$$

Если, кроме того, положить, что измерения координаты в интервале наблюдения равноточны, что соответствует $w_l = w = 1/\sigma^2$, то непосредственные расчеты дают следующее окончательное выражение для корреляционной матрицы ошибок оценки параметров:

$$\Psi(n) = \sigma^2 \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 2(2n-1)/n(n+1) & 6/n(n+1)T_0 \\ 6/n(n+1)T_0 & 12/T_0^2 n(n^2-1) \end{Vmatrix}. \qquad (6.3.30)$$

Например, при $n = 3$ корреляционная матрица ошибок оценки параметров линейной траектории имеет вид

$$\Psi(3) = \sigma^2 \begin{Vmatrix} 5/6 & 1/2T_0 \\ 1/2T_0 & 1/2T_0^2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, дисперсия сглаженной координаты по трем равноточным замерам составляет 5/6 дисперсии одиночного измерения, дисперсия приращения координаты за счет неточной оценки скорости $\sigma^2_{\Delta^{(1)}\hat{r}_3}$, где $\Delta^{(1)}\hat{r}_3 = \hat{r}_3 T_0$, составляет половину дисперсии одиночного измерения и корреляционный момент связи между оценками координаты и ее приращения тоже равен половине дисперсии одиночного измерения координаты.

На рис. 6.7 приведены графики нормированных элементов корреляционной матрицы ошибок оценки параметров линейной траектории. Из анализа этих графиков следует, что для получения достаточно точных оценок параметров линейной траектории необходимо производить совместную обработку не менее пяти-шести подряд следующих измеренных значений координаты.

6.3.4, Оптимальный алгоритм оценки параметров траектории, задаваемой полиномом второй степени

Рассмотрим теперь применение метода максимального правдоподобия для оценки параметров траектории, представляемой временным полиномом второй степени. В качестве оцениваемых параметров примем координату дальности r_n, скорость изменения дальности $\dot{r}_n$ и ускорение по дальности $\ddot{r}_n$ в момент времени t_n последнего измерения. Закон изменения дальности представляется в этом случае полиномом

$$r(\vartheta, t) = r_n + \dot{r}_n (t - t_n) + (\ddot{r}_n/2)(t - t_n)^2,$$

а ее оценка в моменты времени $t_l \neq t_n$ равна

$$\hat{r}_l = \hat{r}_n + \hat{\dot{r}}_n \tau_l + (\hat{\ddot{r}}_n/2)\tau_l^2,$$

где $\tau_l = (t_l - t_n)$.

Транспонированная матрица дифференциальных операторов $\mathbf{A}^T$ в этом случае равна

$$\mathbf{A}^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \frac{\tau_1^2}{2} & \frac{\tau_2^2}{2} & \cdots & \frac{\tau_n^2}{2} \end{Vmatrix}.$$

Корреляционную матрицу ошибок измерения, как и прежде, будем считать диагональной, т. е.

$$\mathbf{N}^{-1} = \| w_l \delta_{lj} \|, \quad w_l = 1/\sigma_l^2,$$

$$\delta_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{при } l = j, \\ 0 & \text{при } l \neq j. \end{cases}$$

Воспользуемся для нахождения вектора оценок $\hat{\vartheta}$ выражением (8), определяющим непосредственную связь оценок и результатов измерения. Матрица B в нашем случае имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \frac{\tau_n^2}{2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \tau_1 & \frac{\tau_1^2}{2} \\ 1 & \tau_2 & \frac{\tau_2^2}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \frac{\tau^2}{2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \sum_{l=1}^{n} w_l & \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l & \sum_{l=1}^{n} w_l \frac{\tau_l^2}{2} \\ \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l & \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 & \sum_{l=1}^{n} w_l \frac{\tau_l^3}{2} \\ \sum_{l=1}^{n} w_l \frac{\tau_l^2}{2} & \sum_{l=1}^{n} w_l \frac{\tau_l^3}{2} & \sum_{l=1}^{n} w_l \frac{\tau_l^4}{4} \end{Vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен

$$|B| = \frac{1}{4}\left\{\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^4 \left[\sum_{l=1}^{n} w_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 - \left(\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l\right)^2\right] + \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^3 \left[\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 - \sum_{l=1}^{n} w_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^3\right] +$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 \left[\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^3 - \left(\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2\right)^2\right]\right\},$$

а алгебраические дополнения K_{ij} определяются по формулам

$$K_{11} = \frac{1}{4}\left[\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^4 - \left(\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^3\right)^2\right],$$

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{1}{4}\left[\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^4 - 2 \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^3\right]$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{1}{2}\left[\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^4 - \left(\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2\right)^2\right],$$

$$K_{22} = \frac{1}{4}\left[\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^4 - \left(\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2\right)^2\right],$$

$$K_{23} = K_{32} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{l=1}^{n} w_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^3 - \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2\right],$$

$$K_{33} = \left[\sum_{l=1}^{n} w_l \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 - \left(\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l\right)^2\right].$$

Таким образом, обращенная матрица B^{-1} имеет вид

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (6.3.31)$$

Заметим, что в соответствие с формулой (17) матрица B^{-1} представляет собой корреляционную матрицу ошибок оценки параметров. Следовательно, матрица (31) является корреляционной матрицей ошибок оценки параметров траектории, задаваемой полиномом второй степени. Более подробный анализ этой матрицы будет проведен в дальнейшем. Входящее в выражение (8) матрично-векторное произведение $F = A^T r'$ в нашем случае записывается в виде

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \frac{\tau_1^2}{2} & \frac{\tau_2^2}{2} & \cdots & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} w_1 r_1 \\ w_2 r_2 \\ \vdots \\ w_n r_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{l=1}^{n} w_l r_l \\ \sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l r_l \\ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} w_l \tau_l^2 r_l \end{Vmatrix}. \qquad (6.3.32)$$

Подставляя теперь (31) и (32) в уравнение (8), получим формулу для оценки вектора параметров в виде

$$\hat{\theta} = \begin{Vmatrix} \hat{r}_n \\ \hat{r}_n \\ \hat{r}_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{|B|} \begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Vmatrix}.$$

Из этой формулы получаем

$$\begin{aligned} \hat{r}_n &= (K_{11} F_1 + K_{12} F_2 + K_{13} F_3)/|B|, \\ \hat{r}_n &= (K_{21} F_1 + K_{22} F_2 + K_{23} F_3)/|B|, \\ \hat{r}_n &= (K_{31} F_1 + K_{32} F_2 + K_{33} F_3)/|B|. \end{aligned} \qquad (6.3.33)$$

Формулы (33) определяют оценки параметров в общем виде.

Допустим теперь, что измерения производятся равнодискретно, т. е.

$$\tau_i = -(n-i)T_0.$$

Дополнительно к обозначениям (22) для f_n, g_n, h_n введем также следующие обозначения

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^3, \quad e_n = \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^4.$$

Тогда получим

$$|B| = T_0^6 I_n/4,$$

где $I_n = [e_n (f_n h_n - g_n^2) + d_n (g_n h_n - f_n d_n) + h_n (g_n d_n - h_n^2)]$.

Тогда

$$K_{11} = \frac{1}{4} T_0^3 \alpha_n, \quad K_{12} = K_{21} = -\frac{1}{4} T_0^5 \gamma_n,$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{1}{2} T_0^4 \delta_n, \quad K_{22} = \frac{1}{4} T_0^4 \zeta_n,$$

$$K_{23} = K_{32} = -\frac{1}{2} T_0^3 \eta_n, K_{33} = T_0^2 \varkappa,$$

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i, \quad F_2 = T_0 \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i, \quad F_3 = 1/2\, T_0^2 \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^2 r_i,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (h_n e_n - d_n^2), & \gamma_n &= (g_n e_n - h_n d_n), \\ \delta_n &= (g_n d_n - h_n^2), & \zeta_n &= (f_n e_n - h_n^2), \\ \eta_n &= (f_n d_n - g_n h_n), & \varkappa_n &= (f_n h_n - g_n^2). \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (33), получим для случая равнодискретных измерений:

$$\begin{aligned} \hat{r}_n &= \frac{1}{I_n} \left(\alpha_n \sum_{i=1}^{n} w_i r_i + \gamma_n \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i + \delta_n \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^2 r_i \right), \\ \hat{r}_n &= \frac{1}{T_0 I_n} \left(\gamma_n \sum_{i=1}^{n} w_i \qquad\qquad \right) r_i + \eta_n \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^2 r_i \Big), \\ \hat{r}_n &= \frac{2}{T_0^2 I_n} \left(\delta_n \sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \eta_n \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i + \varkappa_n \sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^2 r_i \right). \end{aligned} \qquad (6.3.34)$$

Корреляционная матрица ошибок оценки параметров имеет в этом случае следующий вид

$$\Psi = B^{-1} = \frac{1}{I_n} \begin{Vmatrix} \alpha_n & -\frac{\gamma_n}{T_0} & \frac{2\delta_n}{T_0^2} \\ -\frac{\gamma_n}{T_0} & \frac{\zeta_n}{T_0^2} & -\frac{2\eta_n}{T_0^3} \\ \frac{2\delta_n}{T_0^2} & -\frac{2\eta_n}{T_0^3} & \frac{4\varkappa_n}{T_0^4} \end{Vmatrix}. \qquad (6.3.35)$$

Предположим теперь, что измерения координаты еще и равноточны, т. е. $w_i = w$. Тогда, наряду с выражениями (25), получим

$$d_n = w \sum_{i=1}^{n} (n-i)^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} w,$$

$$e_n = w \sum_{i=1}^{n} (n-i)^4 = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30} w. \qquad (6.3.36)$$

Искомые оценки параметров в этом случае можно представить в виде

$$\hat{r}_n = \sum_{i=1} \eta_r(i)\, r_i, \quad \hat{\dot{r}}_n = \sum_{i=1} \eta_{\dot{r}}(i)\, r_i, \quad \hat{\ddot{r}}_n = \sum_{i=1} \eta_{\ddot{r}}(i)\, r_i,$$

где $\eta_r(i)$, $\eta_{\dot{r}}(i)$, $\eta_{\ddot{r}}(i)$ — дискретные весовые функции оценки координаты, скорости и ускорения соответственно.

Формулы для расчета весовых функций имеют вид:

$$\eta_r(i) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)} [(n+1)(n+2) - 2i(4n+3) + 10i^2],$$

$$\eta_{\dot{r}}(i) = \frac{6}{T_0 n(n^2-1)(n^2-4)} [(n+1)(n+2)(6n-7) - 2i(16n^2-19) + 30i^2(n-1)],$$

$$\eta_{\ddot{r}}(i) = \frac{60}{T_0^2 n(n^2-1)(n^2-4)} [(n+1)(n+2) - 6i(n+1) + 6i^2].$$

Полученные формулы показывают, что в случае равнодискретных и равноточных измерений, оптимальная оценка параметров траектории, представляемой полиномом второй степени, сводится к взвешенному суммированию измеренных значений координаты. Весовые коэффициенты являются функциями числа измерений л и порядкового номера измерения i в обрабатываемой серии. Естественно, минимальное число измерений в серии в этом случае равно трем.

При минимальном числе измерений (объеме выборки) параметры траектории вычисляются по формулам

$$\hat{r}_3 = r_3,$$

$$\hat{\dot{r}}_3 = -(r_3/2 - 2r_2 + 3r_1/2)/T_0,$$

$$\hat{\ddot{r}}_3 = (r_3 - 2r_2 + r_1)/T_0^2.$$

На рис. 6.8 представлены значения весовых, коэффициентов $\eta_r(i)$, $\eta_{\dot{r}}(i)T_0$ и $\eta_{\ddot{r}}(i)T_0^2$ при л = 4. Из рисунка следует, что огибающие этих коэффициентов не

являются линейными функциями. Однако, как и в случае линейной траектории, выполняются условия;

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_r(i) = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \eta_v(i) = \sum_{i=1}^{n} \eta_a(i) = 0.$$

Корреляционная матрица ошибок оценки параметров для рассматриваемого случая равноточных н равнодискретных измерений получается из матрицы (35). при подстановке в формулы для $I_n, \alpha_n, \gamma_n, \delta_n, \zeta_n, \eta_n$ и $\varkappa_n$ соответствующих

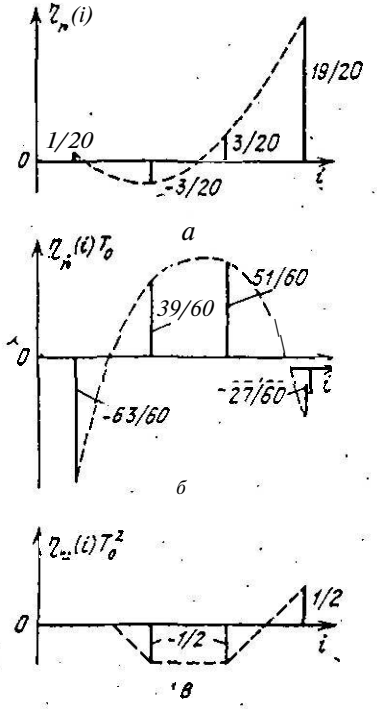


Рис. 6.8. Весовые функции оценки координаты, скорости и ускорения при $n=4$.

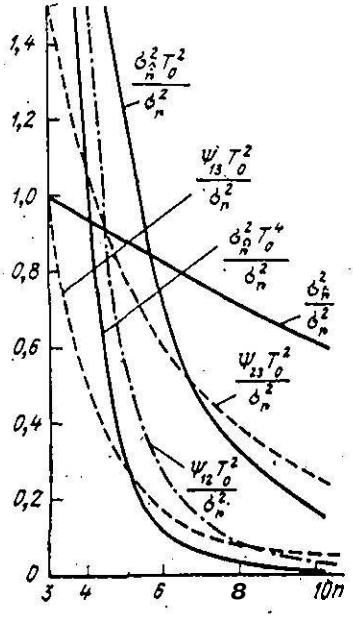


Рис. 6.9. Элементы корреляционной матрицы ошибок оценки параметров квадратичной траектории.

этому случаю значений f_n, g_n, h_n, d_n, e_n, определяемых формулами (25) и (36). Результаты расчетов элементов корреляционной матрицы Ψ. получаются в виде

$$\psi_{11} = \frac{3(3n^2-3n+2)}{n(n+1)(n+2)}\sigma_r^2,$$

$$\psi_{12} = \psi_{21} = -\frac{18(2n-1)}{T_0(n+1)(n+2)n}\sigma_r^2,$$

$$\psi_{13} = \psi_{31} = \frac{60}{T_0^2 n(n+1)(n+2)}\sigma_r^2,$$

$$\psi_{22} = \frac{12(2n-1)(8n-11)}{T_0^2(n^2-4)(n^2-1)}\sigma_r^2,$$

$$\psi_{23}=\psi_{32}=\frac{360}{T_0^3 n (n^2-4)(n+1)}\sigma_r^2,$$

$$\psi_{33}=\frac{720}{T_0^4 (n^2-4)(n^2-1) n}\sigma_r^2.$$

Например, при $n=3$, корреляционная матрица ошибок оценки параметров имеет вид

$$\Psi(3)=\left\|\begin{array}{ccc}\sigma_r^2 & -3\sigma_r^2/2T_0 & \sigma_r^2/T_0^2\\ -3\sigma_r^2/2T_0 & 13\sigma_r^2/2T_0^2 & -6\sigma_r^2/T_0^3\\ \sigma_r^2/T_0^2 & -6\sigma_r^2/T_0^3 & 6\sigma_r^2/T_0^4\end{array}\right\|$$

На рис. 6.9 приведены графики изменения нормированных элементов корреляционной матрицы ошибок оценки параметров квадратичной траектории при увеличении n. Сравнение диагональных элементов этой матрицы, характеризующих точность оценки координаты и скорости с аналогичными элементами корреляционной матрицы ошибок оценки линейной траектории (см. рис. 6.7) показывает, что при небольших значениях n точность оценки параметров линейной траектории значительно больше, чем квадратичной. Этим доказывается тот факт, что на небольших участках наблюдения квадратичную траекторию более выгодно представлять полиномом первой степени. При этом достигается значительный выигрыш в фильтрации случайных ошибок. Возникающие же из-за несоответствия гипотезы движения динамические ошибки вследствие малости аппроксимируемого участка траектории не имеют существенного значения.

6.3.5. Оценка параметров полиномиальной траектории при фиксированной выборке независимых измерений координаты и скорости

Пусть, как и прежде, траектория задается полиномом степени s, а наблюдаемый случайный процесс представляет собой последовательность независимых измерений координаты и скорости. Ошибки измерения не коррелированы между собой и распределены по нормальному закону с известными корреляционными функциями и равными нулю математическими ожиданиями.

n-мерные векторы выборочных значений имеют вид (в транспонированном виде)

$$r^{\mathrm{T}}=\|\,r_1 r_2 \ldots r_n\,\|,\quad \dot r^{\mathrm{T}}=\|\,\dot r_1 \dot r_2 \ldots \dot r_n\,\|.$$

Задача состоит в получении оценок для вектора параметров траектории $\vartheta^{\mathrm{T}}=\|\,\theta_0\ \theta_1\ \ldots\ \theta_s\,\|$ методом максимального правдоподобия.

Вследствие независимости векторов выборочных значений, функция правдоподобия вектора оцениваемых параметров записывается в виде

$$L(\vartheta)=c\exp\left[-\frac{1}{2}(\Delta r^{\mathrm{T}} N_r^{-1}\Delta r+\Delta\dot r\, N_{\dot r}^{-1}\Delta\dot r)\right],$$

где

$$\Delta r=\left\|\begin{array}{c} r_1-r(\vartheta,t)\\ \cdots\cdots\\ r_n-r(\vartheta,t_n)\end{array}\right\|,\quad \Delta\dot r=\left\|\begin{array}{c}\dot r_1-\dot r(\vartheta,t)\\ \cdots\cdots\\ \dot r_n-\dot r(\vartheta,t)\end{array}\right\|;$$

N_r^{-1} — обратная корреляционная матрица ошибок измерения координаты;
$N_{\dot r}^{-1}$ — обратная корреляционная матрица ошибок измерения скорости.

Применяя обычную процедуру нахождения оценок методом максимального правдоподобия, получим векторное уравнение правдоподобия в следующем окончательном виде

$$A_r^T N_r^{-1} \Delta r + A_r^T N_r^{-1} \Delta \dot{r} = 0, \tag{6.3.37}$$

где

$$A_r^T = \frac{\partial}{\partial \hat{\vartheta}} [r(\hat{\vartheta}, t)]^T, \quad A_r^T = \frac{\partial}{\partial \hat{\vartheta}} [\dot{r}(\hat{\vartheta}, t)]^T, \quad \dot{r}(\hat{\vartheta}, t) = \frac{d}{dt} r(\hat{\vartheta}, t).$$

Далее, используя процедуру линеаризации системы уравнений правдоподобия, получим

$$A_r^T N_r^{-1} (A_r \Delta \hat{\vartheta} - \Delta r) + A_r^T N_r^{-1} (A_r \Delta \hat{\vartheta} - \Delta \dot{r}) = 0.$$

Решение этой системы имеет вид

$$\Delta \hat{\vartheta} = C^{-1} [A_r^T N_r^{-1} \Delta r + A_r^T N_r^{-1} \Delta \dot{r}], \tag{6.3.38}$$

где

$$C = A_r^T N_r^{-1} A_r + A_r^T N_r^{-1} A_r = B_r + B_r$$

— матрица, порядка $(s + 1) \times (s + 1)$.

Используя теперь обычное правило $\Psi = M [\Delta \hat{\vartheta} \Delta \hat{\vartheta}^T]$, получим формулу для вычисления корреляционной матрицы ошибок оценки параметров в следующем окончательном виде

$$\Psi = C^{-1} B_r C^{-1} + C^{-1} B_r C^{-1} = C^{-1}. \tag{6.3.39}$$

Для иллюстрации применения полученных формул рассмотрим случай оценки параметров линейной траектории $r(t) = r_n + \dot{r}_n (t - t_n)$ при одновременном равнодискретном измерении r_i и $\dot{r}_i$ через интервалы времени T_0.

В этом случае

$$A_r^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t & 2T_0 & \cdots & nT_0 \end{Vmatrix}, \quad A_{\dot{r}}^T = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

$$N_r^{-1} = \begin{Vmatrix} w_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{r_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{r_n} \end{Vmatrix}, \quad N_{\dot{r}}^{-1} = \begin{Vmatrix} w_{\dot{r}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{\dot{r}_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{\dot{r}_n} \end{Vmatrix}, \quad w_{\dot{r}_i} = \frac{1}{\sigma_{\dot{r}_i}^2}.$$

Подставляя эти матричные выражения в уравнение правдоподобия (37), после преобразования получим систему из двух уравнений.

$$\sum_{i=1}^{n} w_{r_i} (r_i - \hat{r}_n - \hat{\dot{r}}_n \tau_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i w_{r_i} (r_i - \hat{r}_n - \hat{\dot{r}}_n \tau_i) + \sum_{i=1}^{n} w_{\dot{r}_i} (\dot{r}_i - \hat{\dot{r}}_n) = 0. \tag{6.3.40}$$

Решая эту систему с применением введенных выше обозначений для f_n, g_n, h_n, K_n, $\tau_i = -(n - i) T_0$ и дополнительно обозначая

$$\sum_{i=1}^{n} w_{\dot{r}_i} = f_n,$$

получаем окончательные выражения для искомых оценок параметров.

$$\hat{r}_n = \frac{T_0^2 f_n \left[h_n \sum_{i=1}^{n} w_{r_i} r_i - g_n \sum_{i=1}^{n} w_{r_i} (n-i) r_i + f_n \dot{f}_n \sum_{i=1}^{n} w_{r_i} r_i + T_0 f_n g_n \sum_{i=1}^{n} w_{r_i} \dot{r}_i \right]}{T_0^2 f_n K_n + f_n^2 \dot{f}_n},$$

$$\hat{\dot{r}}_n = \frac{\left\{ T_0 \left[g_n \sum_{i=1}^{n} w_{r_i} r_i - f_n \sum_{i=1}^{n} w_{r_i} (n-i) r_i \right] + \dot{f}_n \sum_{i=1}^{n} w_{r_i} \dot{r}_i \right\} f_n}{T_0^2 f_n K_n + f_n^2 \dot{f}_n}.$$

Для случая равноточных измерений дальности и скорости, когда

$$f_n = n w_r, \quad \dot{f}_n = n w_{\dot{r}}, \quad g_n = \frac{n(n-1)}{2} w_r,$$

$$h_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} w_r, \quad K_n = \frac{n^2 (n^2-1)}{12} w^2_r,$$

явные выражения для оценок дальности и скорости имеют вид

$$\hat{r}_n = \frac{2(n-1)}{n(n^2-1+12c)} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(3i - n - 1 + \frac{6c}{n-1} \right) r_i + 3c \sum_{i=1}^{n} s_i \right],$$

$$\hat{\dot{r}}_n = \frac{6}{T_0 n (n^2-1+12c)} \left[\sum_{i=1}^{n} (2i-n-1) r_i + 2c \sum_{i=1}^{n} s_i \right],$$

где $c = \sigma_r^2 / \sigma_{\dot{r}}^2$, $s_i = T_0 \dot{r}_i$.

При отсутствии измерений скорости ($c = 0$, $s_i = 0$) получаем

$$\hat{r}_n = \frac{}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (3i - n - 1) r_i,$$

$$\hat{\dot{r}}_n = \frac{6}{T_0 (n^2-1) n} \sum_{i=1}^{n} (2i-n-1) r_i,$$

то совпадает с выражениями, полученными в п. 6.3.3 настоящей главы.

Получим также корреляционную матрицу ошибок оценки параметров в простейшем случае $n = 2$ и при равноточных измерениях.

Используя общее соотношение (38), получаем

$$B_r = \begin{Vmatrix} 2w_r & -T_0 w_r \\ -T_0 w_r & T_0^2 w_r \end{Vmatrix}, \quad B_{\dot{r}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2w_{\dot{r}} \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} 2w_r & -T_0 w_r \\ -T_0 w_r & T_0^2 w_r + 2w_{\dot{r}} \end{Vmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{Vmatrix} T_0^2 w_r + 2w_{\dot{r}} & T_0 w_r \\ T_0 w_r & 2w_r \end{Vmatrix},$$

$$|C| = 2T_0^2 w_r^2 + 4w_r w_{\dot{r}} - T_0^2 w_r^2 = T_0^2 w_r^2 + 4w_r w_{\dot{r}}.$$

Окончательное выражение для корреляционной матрицы ошибок имеет вид

$$\Psi(2) = \begin{Vmatrix} \dfrac{T_0^2 w_r + 2w_r}{T_0^2 w_r^2 + 4w_r w_r} & \dfrac{T_0^2 w_r + 4w_r}{} \\ \dfrac{T_0}{T_0^2 w_r + 4w_r} & \dfrac{2}{T_0^2 w_r + 4w_r} \end{Vmatrix}.$$

При отсутствии измерений скорости ($w_r = 0$) получим

$$\Psi(2) = \begin{Vmatrix} 1 & T_0 \\ \dfrac{1}{T_0} & \end{Vmatrix} \sigma_r^2,$$

что совпадает с выражением, полученным для аналогичного случая в п. 6.3.3.

Для траектории, представляемой полиномом второй степени, учет независимых измерений скорости производится аналогично, однако формулы получаются громоздкими.

6.4. Экстраполяция (предсказание) параметров траектории

Задача экстраполяции заключается в нахождении параметров траектории в точке, лежащей вне интервала наблюдения, по их значениям внутри этого интервала. В общем случае задача экстраполяции параметров ставится следующим образом.

Пусть производится выборка измеренных значений координаты в моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ на интервале наблюдения (t_1, t_n). Выборочные значения координаты, как и прежде, равны

$$r_i = r(\vartheta, t_i) + \Delta r_i.$$

Полезный сигнал $r(\vartheta, t_i)$ представляется известной полиномиальной функцией. Помеха Δr_i — случайная последовательность ошибок измерения с известными статистическими характеристиками. Задача состоит в нахождении функции $\hat{r}(\vartheta, t_j)$ в момент времени t_j, находящийся за пределами интервала наблюдения входной последовательности. В конечном счете эта задача сводится к нахождению оценок вектора параметров ϑ в точке t_j.

Решение поставленной задачи может быть выполнено по крайней мере двумя способами.

1. Путем непосредственного расчета параметров траектории в экстраполированной точке по данным выборочных значений координат. При этом полностью могут быть использованы методы оценки, изложенные в предыдущем параграфе.

2. Путем использования для экстраполяции сглаженных (интерполированных) значений параметров в выбранной точке внутри интервала наблюдения и гипотезы о законах изменения этих параметров вне интервала наблюдения.

С точки зрения конечных результатов оба эти способа являются равноценными. На практике большее предпочтение отдается второму

способу, так как вычисление сглаженных (интерполированных) значений параметров в процессе обработки радиолокационной информации представляет самостоятельную задачу, а вычисление экстраполированных значений параметров по их сглаженным значениям более просто, чем по исходным результатам измерения.

В данном параграфе рассматривается решение задачи экстраполяции параметров полиномиальной траектории по предварительно полученным оценкам этих параметров на момент t_n последнего измерения.

6.4.1. Алгоритмы экстраполяции параметров полиномиальной траектории

При полиномиальном представлении независимой координаты (например, дальности r) экстраполированные на время $t_э$ параметры определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\hat{r}_э &= \hat{r}_n + \hat{\dot{r}}_n \tau_э + \hat{\ddot{r}}_n \frac{\tau_э^2}{2} + \cdots + \hat{r}_n^{(s)} \frac{\tau_э^s}{s!}, \\
\hat{\dot{r}}_э &= \hat{\dot{r}}_n + \hat{\ddot{r}}_n \tau_э + \cdots + \hat{r}_n^{(s)} \frac{\tau_э^{s-1}}{(s-1)!}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hat{r}_э^{(s)} &= \hat{r}_n^{(s)},
\end{aligned} \qquad \textbf{(6.4.1)}$$

где $\tau_э = (t_э - t_n)$ — время экстраполяции.

В векторно-матричной форме выражения (1) можно записать в виде

$$\hat{\vartheta}_э = F_э \hat{\vartheta}_n, \qquad (6.4.2)$$

где $F_э$ — матричный оператор экстраполяции, записываемый в виде

$$F_э = \begin{Vmatrix} 1 & \tau_э & \frac{\tau_э^2}{2} & \cdots & \frac{\tau_э^s}{s!} \\ 0 & 1 & \tau_э & \cdots & \frac{\tau_э^{s-1}}{(s-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\hat{\vartheta}_э = \begin{Vmatrix} \hat{r}_э \\ \hat{\dot{r}}_э \\ \vdots \\ \hat{r}_э^{(s)} \end{Vmatrix}, \quad \hat{\vartheta}_n = \begin{Vmatrix} \hat{r}_n \\ \hat{\dot{r}}_n \\ \vdots \\ \hat{r}_n^{(s)} \end{Vmatrix}.$$

Выражение (2) позволяет находить экстраполированные значения параметров для каждого конкретного случая представления траектории.

Пусть, например, траектория является линейной. В этом случае оператор экстраполяции

$$F_э = \begin{Vmatrix} 1 & \tau_э \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Если теперь предположить, что измерения производились равнодискретно, с периодом T_0, то вектор экстраполированных значений параметров будет иметь вид

$$\hat{\theta}_э = \begin{Vmatrix} \hat{r}_э \\ \dot{\hat{r}}_э \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I & pT_0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \hat{r}_n \\ \dot{\hat{r}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{r}_n + \dot{\hat{r}}_n pT_0 \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix}$$

где $p = \tau_э / T_0$ — отношение времени экстраполяции к периоду измерения.

Подставив соответствующие выражения для сглаженных параметров, получим

$$\hat{r}_э = \frac{1}{K}\left[(h_n + pg_n)\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - (g_n + pf_n)\sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i\right],$$

$$\dot{\hat{r}}_э = \dot{\hat{r}}_n.$$

Если, кроме того, измерения координаты линейной траектории являются равноточными, то экстраполированное значение координаты можно представить в виде

$$\hat{r}_э = \sum_{i=1}^{n} [\eta_r(i) + \tau_э \eta_{\dot{r}}(i)]\, r_i.$$

При $\tau_э = T_0$, т. е. при экстраполяции на один период обзора, получим окончательно

$$\hat{r}_э = \sum_{i=1}^{n} \eta_{r_э}(i)\, r_i, \qquad (6.4.3)$$

где $\eta_{r_э}(i) = (6i - 2n - 4)/n(n-1)$
— весовая функция измеренных значений при экстраполяции на один период обзора.

Например, при $n = 2$ экстраполированное на третий обзор значение координаты определяется по формуле

$$\hat{v}_{э_3} = 2r_2 - r_1.$$

Таким образом, формула (3) позволяет непосредственно определять экстраполированное значение координаты по ее замерам в n точках. Эта формула, естественно, может быть получена путем непосредственного синтеза оптимального алгоритма экстраполяции по критерию максимального правдоподобия.

Для случая, когда независимая координата представляется полиномом второй степени, оператор экстраполяции имеет вид

$$F_э = \begin{Vmatrix} 1 & \tau_э & \tau_э^2/2 \\ 0 & 1 & \tau_э \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Используя теперь формулы (3.34) для определения оценок параметров при равнодискретных наблюдениях, получим в соответствии с выражением (1)

$$\hat{r}_э = \frac{1}{I_п}\left[(\alpha_п + p\gamma_п + p^2\delta_п)\sum_{i=1}^{n} w_i r_i + (\gamma_п + p\zeta_п + p^2\eta_п)\sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i + \right.$$
$$\left. + (\delta_п + p\eta_п + p^2\varkappa_п)\sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^2 r_i\right],$$

$$\hat{\dot{r}}_э = \frac{1}{T_0 I_п}\left[(\gamma_п + p\delta_п)\sum_{i=1}^{n} w_i r_i + (\zeta_п + p\eta_п)\sum_{i=1}^{n} w_i (n-i) r_i + \right.$$
$$\left. + (\eta_п + p\varkappa_п)\sum_{i=1}^{n} w_i (n-i)^2 r_i\right],$$

$\hat{r}_э - \hat{r}_п.$

При равноточных и равнодискретных измерениях значения экстраполированных параметров квадратичной траектории могут быть выражены непосредственно через измеренные значения координат. Например, при экстраполяции на один период обзора ($p = 1$) для расчета экстраполированной координаты получается следующая формула

$$\hat{r}_э = \sum_{i=1}^{n} \eta_{r_э}(i)\, r_i,$$

где

$$\eta_{r_э}(i) = \frac{3\left[(n+2)(n+3) - 2i(4n+7) + 10i^2\right]}{n(n-1)(n-2)}.$$

При $n = 3$

$$r_{э э} = r_1 - 3r_2 + 3r_3.$$

С целью самоконтроля получение аналогичной формулы для экстраполяции скорости рекомендуется читателю.

6.4.2. Корреляционная матрица ошибок экстраполяции параметров

Корреляционная матрица ошибок экстраполяции параметров вычисляется следующим образом.

В соответствии с формулой (2) для вектора ошибок экстраполяции параметров можно записать

$$\Delta\hat{\vartheta}_э = F_э \Delta\hat{\vartheta}_п.$$

По определению,

$$\Psi_э = M\left[\Delta\hat{\vartheta}_э \Delta\hat{\vartheta}_э^T\right],$$

где M — знак математического ожидания.

Имея в виду, что $\Delta\hat{\vartheta}_э^T = \Delta\hat{\vartheta}_n^T F_э^T$, получаем $\Psi_э = F_э M\left[\Delta\hat{\vartheta}_n \Delta\hat{\vartheta}_n^T\right] F_э^T$.

Заменяя $M\left[\Delta\hat{\vartheta}_n \Delta\hat{\vartheta}_n^T\right] = \Psi$, получаем окончательно

$$\Psi = F_э \Psi F_э^T. \qquad (6.4.4)$$

Таким образом, корреляционная матрица ошибок экстраполяции получается путем преобразования матричным оператором $F_э$ корреляционной матрицы Ψ ошибок оценки параметров.

Для случая линейной траектории при равнодискретных измерениях на основе формулы (4) получим

$$\Psi_э = \begin{Vmatrix} 1 & pT_0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{h_n}{K_n} & \frac{\delta n}{T} \\ \frac{g_n}{T_0 K_n} & \frac{f_n}{T_0^2 K_n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ pT_0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{h_n + 2pg_n + p^2 f_n}{K_n} & \frac{g_n + pf_n}{T_0 K_n} \\ \frac{g_n + pf_n}{T_0 K_n} & \frac{fn}{T_0^2 K_n} \end{Vmatrix}.$$

Если измерения, кроме того, и равноточны, то для элементов корреляционной матрицы $\Psi_э$ получим

$$\psi_{э,11} = \sigma^2_{\hat{r}_{n+p}} = \frac{2[(n-1)(2n-1) + 6p(n-1) + 6p^2]}{n(n^2-1)} \sigma_r^2,$$

$$\psi_{э,12} = \psi_{э,21} = \frac{6[(n-1)+p]}{n(n^2-1)T_0} \sigma_r^2,$$

$$\psi_{э,22} = \frac{12}{n(n^2-1)T_0^2} \sigma_r^2.$$

Элементы корреляционной матрицы ошибок экстраполяции параметров квадратичной траектории имеют вид

$$\psi_{э,11} = \frac{1}{I_n}[\alpha_n + p(\delta_n - 2\gamma_n) + p^2(\zeta_n + \delta_n) - 2p^3\eta_n + p^4\varkappa_n],$$

$$\psi_{э,12} = \psi_{э,21} = \frac{1}{T_0 I_n}[-\gamma_n + p(\zeta_n + 2\delta_n) - 3p^2\eta_n + 2p^3\varkappa_n],$$

$$\psi_{э,13} = \psi_{э,31} = \frac{2}{T_0^2 I_n}(\delta_n - p\eta_n + p^2\varkappa_n),$$

$$\psi_{\vartheta,22} = \frac{1}{T_0^2 I_n}(\zeta_n - 4p\eta_n + 4p^2 \varkappa_n),$$

$$\psi_{\vartheta,23} = \psi_{\vartheta,32} = \frac{2}{T_0^3 I_n}(\eta_n + 4p\varkappa_n),$$

$$\psi_{\vartheta,33} = \frac{4}{T_0^4 I_n}\varkappa_n.$$

Более подробные вычисления могут быть сделаны для конкретных значений p и при условии равноточности измерений.

6.4.3. *Особенности экстраполяции параметров баллистической траектории*

Параметры баллистической траектории связаны дифференциальными уравнениями движения КЦ. Эти уравнения в местной сферической системе координат (МССК) имеют вид

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= r\dot{\varepsilon}^2 + r\dot{\beta}^2\cos^2\varepsilon - \mu\frac{r + R_3\sin\varepsilon}{\rho^3} + \\
&+ 2r[-\omega_z\dot{\beta}\cos^2\varepsilon - \omega_x(\dot{\beta}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\beta - \dot{\varepsilon}^2\sin\beta)], \\
\ddot{\beta} &= -\frac{2}{r\cos\varepsilon}[(\dot{\beta} - \omega_z)(\dot{r}\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon - \dot{r}\cos\varepsilon) - \\
&- \omega_x\cos\beta(\dot{r}\sin\varepsilon + r\dot{\varepsilon}\cos\varepsilon)], \\
\ddot{\varepsilon} &= -2\frac{\dot{r}\dot{\varepsilon}}{r} - \dot{\beta}^2\cos^2\varepsilon\sin\varepsilon + 2\omega_z\dot{\beta}\cos\varepsilon\sin\varepsilon + \\
&+ 2\omega_x\left(\frac{\dot{r}}{r}\sin\beta + \dot{\beta}\cos^2\varepsilon\cos\beta\right) - \mu\frac{R_3\cos\varepsilon}{r\rho^3},
\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

где $R_3 = 6371$ *км* — радиус Земли, $\mu = 3{,}986 \cdot 10^5$ *км*^{3}/*сек*^{2} — гравитационная постоянная Земли, $\rho = \sqrt{R_3^2 + r^2 + 2R_3 r\sin\varepsilon}$, $\omega_x = \omega\sin\varphi'$, $\omega_z = \omega\cos\varphi'$, ω — угловая скорость вращения Земли, φ' — дополнение до географической широты точки стояния РЛС.

Как уже отмечалось, в качестве параметров баллистической траектории должны быть выбраны 6 постоянных (начальных условий) интегрирования уравнений движения. В нашем случае такими параметрами является вектор оценок координат и вектор оценок скорости изменения координат КЦ. Поскольку по результатам измерений оцениваются только параметры линейной части баллистической траектории, то нахождение оценок можно производить раздельно по каждой из координат (r, β, ε), несмотря на то, что эти координаты являются связанными.

Для вычисления параметров в упрежденной точке необходимо проинтегрировать уравнения движения (5) с указанными выше начальными условиями. Интегрирование может быть выполнено только численными методами, что потребует выполнения большого числа операций на ЦВМ, Поэтому при экстраполяции на небольшие интервалы времени

можно воспользоваться приближенным представлением уравнений движения в экстраполированной точке в виде полиномов 3—4 степени.

Для случая представления решения в виде полинома 3 степени с начальными условиями, соответствующими параметрам в точке n последнего измерения, получим

$$\hat{U}_э = \hat{U}_n + \hat{\dot{U}}_n \tau_э + \hat{\ddot{U}}_n \frac{\tau_э^2}{2} + \tilde{\ddot{U}}_n \frac{\tau_э^3}{6},$$
$$\hat{\dot{U}}_э = \hat{\dot{U}}_n + \hat{\ddot{U}}_n \tau_э + \tilde{\ddot{U}} \frac{\tau_э^2}{2}, \qquad (6.4.6)$$

где

$$\hat{U}_э = \left\| \begin{matrix} \hat{r}_э \\ \hat{\beta}_э \\ \hat{\varepsilon}_э \end{matrix} \right\|, \qquad \hat{\dot{U}}_э = \left\| \begin{matrix} \hat{\dot{r}}_э \\ \hat{\dot{\beta}}_э \\ \hat{\dot{\varepsilon}}_э \end{matrix} \right\|.$$

Входящие в формулы (6) вторые производные по координатам r, β и ε находятся из уравнений движения (5) после подстановки в них оценок параметров $\hat{U}_n$ и $\dot{U}_n$.

Для нахождения третьей производной оцениваемых параметров сначала производится дифференцирование по времени уравнений движения. В нашем случае упрощенные результаты дифференцирования получаются в виде

$$\dddot{r} \approx \dot{r}\dot{\varepsilon}^2 + 2r\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + \dot{r}\dot{\beta}^2\cos^2\varepsilon + 2r\dot{\beta}\ddot{\beta}\cos^2\varepsilon - 2r\dot{\varepsilon}\dot{\beta}^2\cos\varepsilon\sin\varepsilon,$$
$$\dddot{\beta} \approx 2\ddot{\beta}\dot{\varepsilon}\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} + 2\dot{\beta}\ddot{\varepsilon}\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} + 2\frac{\dot{\beta}\dot{\varepsilon}^2}{\cos^2\varepsilon} - \frac{2\ddot{\beta}\dot{r}}{r} - \frac{2\dot{\beta}\ddot{r}}{r} + \frac{2\dot{\beta}\dot{r}^2}{r^2}, \qquad (6.4.7)$$
$$\dddot{\varepsilon} \approx 2\ddot{\varepsilon}\frac{\dot{r}}{r} - 2\dot{\varepsilon}\frac{\ddot{r}}{r} - 2\dot{\varepsilon}\frac{\dot{r}^2}{r^2} - 2\dot{\beta}\ddot{\beta}\cos\varepsilon\sin\varepsilon +$$
$$+ \dot{\beta}^2\dot{\varepsilon}\sin^2\varepsilon - \dot{\beta}^2\dot{\varepsilon}\cos^2\varepsilon.$$

Подставив теперь в полученные уравнения оценки $\hat{U}_n$, $\hat{\dot{U}}_n$ и результаты вычисления вторых производных $\tilde{\ddot{U}}$, получим искомые значения $\tilde{\dddot{U}}$.

Используя оценки параметров $\hat{U}_n$ и $\hat{\dot{U}}_n$ и вычисленные по этим параметрам вторые $\tilde{\ddot{U}}_n$ и третьи $\tilde{\dddot{U}}_n$ производные, по формулам (6) находятся экстраполированные значения параметров $\hat{U}_э$ и $\hat{\dot{U}}_э$ в МССК.

Аналогичным образом решается задача экстраполяции параметров баллистической траектории в других системах координат.

Таким образом, при экстраполяции параметров баллистической траектории существенным образом используются уравнения движения КЦ. В этом состоит первая особенность рассматриваемой операции для баллистической траектории по сравнению с общим случаем полиномиальной траектории.

Наряду с экстраполяцией параметров должна вычисляться корреляционная матрица ошибок оценки параметров в экстраполированной точке. Поскольку в данном случае оцениваются по результатам измерений только положение и скорость по каждой координате, что аналогично оценке параметров линейной траектории, то, во-первых, достигается наилучшая фильтрация случайных ошибок измерения, а во-вторых, оператор экстраполяции корреляционной матрицы ошибок оценки параметров соответствует оператору экстраполяции корреляционной матрицы ошибок оценки параметров линейной траектории, т. е.

$$F_{\theta(\delta\tau)} = \Phi = \begin{Vmatrix} 1 & \tau_э \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Последнее обстоятельство обусловливает вторую особенность выполнения операции экстраполяции параметров для баллистической траектории по сравнению с общим случаем полиномиальной траектории и состоящую в том, что независимо от закона экстраполяции параметров ошибки оценки параметров баллистической траектории экстраполируются по линейному закону.

6.5. Стробирование и селекция отметок в стробах

Как уже отмечалось, одной из основных операций, выполняемых в процессе автоматического сопровождения целей по данным обзорной РЛС, является отбор отметок (из числа полученных в новом обзоре) для продолжения каждой из сопровождаемых траекторий. Отбор отметок и их «привязка» к сопровождаемым траекториям производится на основе сравнения новых отметок с экстраполированными координатами и характеристиками сопровождаемых траекторий. В простейшем случае селекция производится только по координатам.

Сравнение координат новых отметок и экстраполированных точек в принципе можно производить во всей зоне обзора РЛС, например, по критерию минимального расстояния между ними. Однако объем вычислений в этом случае будет чрезвычайно велик. Для упрощения процесса селекции траекторий и сокращения объема вычислений сравнение координат новых отметок (НО) и экстраполированных точек (ЭТ) обычно производится в стробах.

При слежении за несколькими целями в присутствии помех (внутренних и внешних) в строб могут попадать не только отметки, принадлежащие той траектории, для которой он построен, но и ложные отметки, образованные прошедшими фильтр первичной обработки помехами, или даже отметки, принадлежащие другим траекториям. Поэтому при селекции путем стробирования возникает необходимость селекции отметок, попавших в строб, с целью выбора одной отметки, вероятность принадлежности которой к сопровождаемой траектории наибольшая. В настоящем параграфе рассматриваются методы стробирования и селекции отметок в стробах.

6.5.1. Стробирование отметок. Выбор формы и размеров стробов

В соответствии с основным принципом построения траекторий, при вторичной обработке радиолокационной информации новая отметка может быть использована для продолжения сопровождаемой (обнаруживаемой) траектории, если ее отклонение от центра строба не превышает некоторую фиксированную величину, определяемую размерами строба, т. е. если

$$|U_l - U_{эl}| \leqslant \Delta U_{l\,стр}, \qquad (6.5.1)$$

где $U_l = (r_l, \beta_l, \varepsilon_l)$ — совокупность координат l-й новой отметки, $U_{э\,l} = (r_{э\,l}, \beta_{э\,l}, \varepsilon_{э\,l})$ — совокупность координат центра строба для l-й траектории; $\Delta U_{l\,стр} = (\Delta r_{l\,стр}, \Delta\beta_{l\,стр}, \Delta\varepsilon_{l\,стр})$ — размеры строба по координатам r, β, ε для l-й траектории. Основной задачей, возникающей в процессе селекции траекторий путем стробирования, является выбор формы и размеров стробов на основе детального изучения статистических характеристик отклонения истинных (принадлежащих сопровождаемой траектории) отметок от соответствующих экстраполированных точек.

Отклонение истинной отметки от центра строба определяется суммарными (случайными плюс динамическими) ошибками экстраполяции координат траектории по предыдущим сглаженным значениям ее параметров и ошибками единичного измерения координат новой отметки. Рассмотрим более детально статистические характеристики этих ошибок, применительно к трехкоординатной РЛС обзорного действия.

Пусть по данным предыдущих ($л - 1$) обзоров произведена экстраполяция координат траектории цели на следующий $л$-й обзор. Положение экстраполированной точки обозначим 0 (рис. 6.10). В этой точке поместим начало декартовой системы координат и направим ось Y по направлению «РЛС — цель», ось X — перпендикулярно этому направлению в сторону вращения антенны, а ось Z — так, чтобы образовалась правая система координат. Суммарные отклонения новой отметки от экстраполированной точки в выбранной системе координат будем обозначать Δx_Σ, Δy_Σ и Δz_Σ. Величины этих отклонений равны (при условии отсутствия систематических ошибок измерения):

$$\Delta x_\Sigma = \Delta_{сл}\, x + \Delta_d\, x_э,\ \Delta y_\Sigma = \Delta_{сл}\, y + \Delta_d\, y_э,\ \Delta z_\Sigma = \Delta_{сл}\, z + \Delta_d\, z_э. \qquad (6.5.2)$$

При выбранных направлениях осей координат для случайных составляющих $\Delta_{сл}\, x, \Delta_{сл}\, y, \Delta_{сл}\, z$ имеем*)

$$\Delta_{сл}\, x \approx \pm\, r\,(\Delta_{сл}\,\beta_э + \Delta\beta),$$

$$\Delta_{сл}\, y = \pm\,(\Delta_{сл}\, r_э + \Delta r),\quad \Delta_{сл}\, z \approx \pm\, r\,(\Delta_{сл}\,\varepsilon_э + \Delta\varepsilon). \qquad (6.5.3)$$

где Δr, $\Delta\beta$, $\Delta\varepsilon$ — ошибки измерения.

*) Знаки приближенного равенства имеют место вследствие замены дуг $\pm r\Delta\beta$ и $\pm r\Delta\varepsilon$ соответствующими хордами.

Эти составляющие статистически независимы между собой и подчинены нормальному закону распределения вероятности с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями σ_x^2, σ_y^2 и σ_z^2 соответственно.

Плотность вероятности для системы трех независимых случайных величин $\Delta_{сл}x$, $\Delta_{сл}y$ и $\Delta_{сл}z$ будет

$$w(\Delta_{сл}x, \Delta_{сл}y, \Delta_{сл}z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{сл}x^2}{\sigma_x^2}+\frac{\Delta_{сл}y^2}{\sigma_y^2}+\frac{\Delta_{сл}z^2}{\sigma_z^2}\right)\right].$$

Поверхность, отвечающая одинаковой плотности вероятности, определяется уравнением

$$\frac{\Delta_{сл}x^2}{\sigma_x^2}+\frac{\Delta_{сл}y^2}{\sigma_y^2}+\frac{\Delta_{сл}z^2}{\sigma_z^2}=\lambda^2, \qquad (6.5.4)$$

где λ — постоянная и совершенно произвольная величина.

Разделив правую и левую часть (4) на λ^2, получим

$$\frac{\Delta_{сл}x^2}{(\lambda\sigma_x)^2}+\frac{\Delta_{сл}y^2}{(\lambda\sigma_y)^2}+\frac{\Delta_{сл}z^2}{(\lambda\sigma_z)^2}=1. \qquad (6.5.5)$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение эллипсоида, отнесенного к сопряженным полуосям $\lambda\sigma_x$, $\lambda\sigma_y$ и $\lambda\sigma_z$. При $\lambda = 1$ получаем единичный эллипсоид, т. е. эллипсоид, отнесенный к сопряженным полуосям σ_x, σ_y и σ_z (эллипсоид *1* на рис. 6.10).

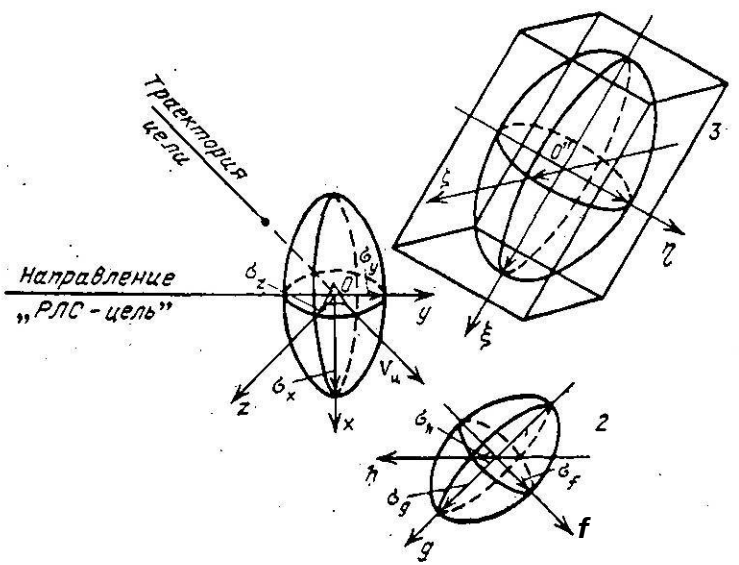


Рис. 6.10. К выбору формы и размеров строба.

Будем далее считать, что составляющие динамических ошибок экстраполяции также подчинены нормальному закону распределения вероятности и имеют независимые составляющие по осям *f*, *g* и ft, первая из которых совпадает с вектором скорости цели, вторая направле-

на противоположно тангенциальному ускорению, а третья дополняет систему координат до правой. Начало полученной системы координат, так же как и предыдущей, совпадает с экстраполированной точкой *0*. Однако, чтобы упростить изображение, на рис. 6.10 это начало вынесено в точку *0'*.

В трехмерном пространстве динамические ошибки образуют эллипсоид равных вероятностей, уравнение которого имеет вид

$$\frac{\Delta f^2}{(\lambda\sigma_f)^2}+\frac{\Delta g^2}{(\lambda\sigma_g)^2}+\frac{\Delta h^2}{(\lambda\sigma_h)^2}=1. \qquad (6.5.6)$$

Для случая $\lambda = 1$ этот эллипсоид изображен на рис. 6.10 (эллипсоид *2)*.

Эллипсоиды *1* и *2*, складываясь, образуют в пространстве суммарный эллипсоид *3*, направления сопряженных полуосей которого (направления осей декартовой системы координат $0\eta\xi\zeta$) по отношению к осям системы координат *0XYZ* и величины среднеквадратичных отклонений σ_η, σ_ξ и σ_ζ по этим полуосям определяются по правилам сложения в пространстве независимых векториальных отклонений, обусловленных случайными и динамическими ошибками [11]. На рис. 6.10, для наглядности изображения, начало системы координат $0\eta\xi\zeta$ вынесено в точку *0''*.

Плотность вероятности системы случайных величин $\Delta\eta$, $\Delta\xi$, $\Delta\zeta$ записывается в виде

$$w(\Delta\eta, \Delta\xi, \Delta\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_\eta\sigma_\xi\sigma_\zeta}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right), \qquad (6.5.7)$$

где

$$\lambda^2=\frac{\Delta\eta^2}{\sigma_\eta^2}+\frac{\Delta\xi^2}{\sigma_\xi^2}+\frac{\Delta\zeta^2}{\sigma_\zeta^2}.$$

Таким образом, поверхность равновероятного отклонения истинных отметок от центра строба представляет собой эллипсоид, величина и ориентация сопряженных полуосей которого относительно направления «РЛС — цель» зависит от ошибок измерения интенсивности маневра и направления вектора движения цели.

При эллипсоидальном распределении отклонений истинных отметок от центра строба, очевидно, и сам строб должен иметь форму эллипсоида с сопряженными полуосями $\lambda\sigma_\eta$, $\lambda\sigma_\xi$ и $\lambda\sigma_\zeta$, где λ в данном случае понимается как коэффициент увеличения размеров строба по сравнению с размерами единичного эллипсоида для обеспечения заданной вероятности попадания в строб истинных отметок.

Вероятность попадания случайной точки в эллипсоид, подобный и расположенный подобно эллипсоидам равной вероятности, определяется Из выражения

$$P(\lambda)=2\left[\Phi_0(\lambda)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)\right], \qquad (6.5.8)$$

где

$$\Phi_0(\lambda)=\frac{}{\sqrt{}}\int_0^\lambda\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt,$$

При $\lambda \geqslant 3{,}5$ вероятность $P(\lambda)$ близка к единице. Именно такие значения λ и необходимо выбирать при формировании эллипсоидального строба.

Формирование эллипсоидальных стробов практически невозможно ни при физическом, ни при математическом стробировании. Поэтому лучшее, что можно сделать, это сформировать строб в виде описанного вокруг эллипсоида суммарных ошибок параллелепипеда, как это показано на рис. 6.10. Размеры сторон параллелепипеда равны соответственно $2\lambda\sigma_\eta$, $2\lambda\sigma_\xi$ и $2\lambda\sigma_\zeta$, а его объем определяется по формуле $V_п = 8\lambda^3\sigma_\eta\sigma_\xi\sigma_\zeta$.

Если учесть, что объем эллипсоида суммарных ошибок $V_э = 4\pi\lambda^3\sigma_\eta\sigma_\xi\sigma_\zeta/3$, то получается увеличение объема строба по сравнению с оптимальным почти в два раза. Это приводит к увеличению вероятности попадания в строб ложных отметок или отметок, принадлежащих другим траекториям, и, следовательно, к ухудшению селектирующей и разрешающей способности операции стробирования.

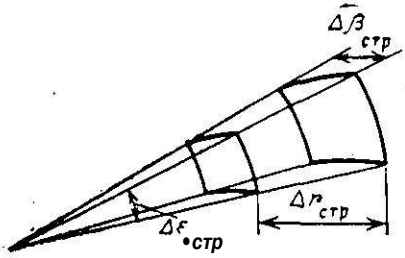


Рис. 6.11. Строб в сферической системе координат.

При обработке большого числа целей в реальном масштабе времени на ЦВМ ограниченной производительности расчет размеров и ориентации сторон строба-параллелепипеда (такой расчет принципиально должен производиться в каждом обзоре) является, как правило, неприемлемым с точки зрения загрузки ЦВМ. Тогда переходят к упрощенному варианту стробирования, смысл которого сводится к следующему. Форма строба выбирается простейшей для задания в той системе координат, в которой осуществляется обработка информации. Для случая обработки в сферической системе координат простейший строб задается линейным размером по дальности $\Delta r_{стр}$ и двумя угловыми размерами: по азимуту $\Delta\beta_{стр}$ и по углу места $\Delta\varepsilon_{стр}$ (рис. 6.11). Эти размеры могут быть установлены заранее, исходя из учета максимальных значений случайных и динамических ошибок по всем подлежащим обработке траекториям. Короче говоря, размеры строба выбираются в данном случае такими, чтобы в нем свободно вмещался и поворачивался в любом направлении эллипсоид максимально возможных (при всех направлениях полета цели) суммарных отклонений истинных отметок от соответствующих экстраполированных точек. Это самый грубый прием стробирования.

В системах с пороговым обнаружением маневра возможен дифференцированный подход к выбору стробов при сопровождении маневрирующих и неманеврирующих целей. Если маневр цели не обнаруживается, то строб рассчитывается только на компенсацию случайных и необнаруживаемой доли динамических ошибок. При обнаружении маневра строб рассчитывается на случай наибольшей его интенсивности.

На размеры строба в сильной степени влияют пропуски отметок. Как уже предварительно указывалось в § 6.1, при пропуске одной или даже нескольких отметок от цели система сопровождения (автозахвата) продолжает траекторию по предыдущим данным, путем экстраполяции ее координат и параметров. Ошибки экстраполяции при этом значительно возрастают, что приводит к необходимости соответствующего увеличения размеров строба. Обычно размеры стробов рассчитываются заранее на случай пропуска одной, двух и т. д. отметок при отсутствии и наличии маневра цели.

В заключение заметим, что все рассмотренные в данном пункте подходы к выбору размеров трехмерного строба в полной мере относятся и к случаю стробирования в плоскости, например, по координатам r и β. Двухмерное стробирование применяется в двухкоординатных РЛС, а также в трехкоординатных РЛС с парциальными каналами по углу места при раздельной обработке информации в каждом таком канале.

6.5.2. Алгоритм селекции отметок по минимуму отклонения от центра строба

В строб, размеры которого выбраны исходя из приведенных выше соображений, кроме истинных будут попадать также ложные отметки, образованные внутренними шумами приемного устройства и искусственными помехами, прошедшими фильтр первичной обработки.

Попадание ложных отметок в строб создает в нем неопределенную ситуацию, требующую дальнейшего анализа. При анализе возможны два подхода.

1. Имея несколько отметок в стробе, продолжать траекторию по каждой из них. Продолжения траектории по ложным отметкам из-за отсутствия подтверждений через несколько обзоров будут сброшены с сопровождения, а продолжение траектории по истинным отметкам останется.

2. Выбрать в стробе одну отметку, вероятность принадлежности которой к сопровождаемой траектории наибольшая, а остальные отбросить как ложные, Именно такой подход и рассматривается в дальнейшем.

Оптимизация процесса селекции отметок по их отклонениям от центра строба производится по критерию максимального правдоподобия, в соответствии с которым за истинную отметку надо принимать ту, для которой функция правдоподобия максимальна. Для случая селекции в трехмерном стробе, грани которого параллельны главным полуосям эллипсоида суммарных ошибок (рис. 6.10), условие максимального правдоподобия записывается в виде.

$$w(\Delta\eta_{i^*}, \Delta\xi_{i^*}, \Delta\zeta_{i^*}) = \max_{i} \{w(\Delta\eta_i, \Delta\xi_i, \Delta\zeta_i)\}, \qquad (6.5.9)$$

где i^* — номер отметки, принятой за истинную.

В соответствии с выражением (7) условие (9) эквивалентно условию

$$\lambda_{i^*}^2 = \min_i \left\{ \frac{\Delta\eta_i^2}{\sigma_{\eta_i}^2} + \frac{\Delta\xi_i^2}{\sigma_{\xi_i}^2} + \frac{\Delta\zeta_i^2}{\sigma_{\zeta_i}^2} \right\},$$

где i^* — номер отметки, принятой за истинную.

Следовательно, в качестве отметки для продолжения траектории надо брать ту, эллипсоидальное отклонение которой от центра стр'оба минимально.

В двухмерном стробе оптимальная -селекция отметок должна осуществляться по минимуму эллиптических отклонений.

Естественным упрощением рассмотренного оптимального алгоритма является алгоритм селекции по минимуму суммы квадратов линейных отклонений координат отметки от центра строба. Это соответствует предположению о шаровом распределении суммарных ошибок экстраполяции. При обработке в сферической системе координат упрощенный алгоритм селекции записывается в виде

$$\rho_{i^*}^2 = \min_i \{r_i^2 (1 + (\Delta\beta_i)^2 + (\Delta\varepsilon_i)^2)\},$$

где i^* — номер отметки, принятой за истинную.

В двухмерном случае алгоритм селекции осуществляется по минимуму линейных отклонений.

Упрощение алгоритма селекции выгодно с точки зрения уменьшения загрузки ЦВМ вторичной обработки, однако качество селекции при этом ухудшается.

На рис. 6.12 изображена логическая схема алгоритма селекции в двухмерном стробе по минимуму линейных отклонений отметок от его центра. Последовательность операций этого алгоритма следующая.

1. По результатам обработки в текущем обзоре выбираются размеры строба на следующий обзор (блок *1*). При выборе размеров строба учитывается выявлен ли маневр цели, имеется ли пропуск отметки в текущем обзоре.

2. Производится отбор отметок в стробе и подсчитывается количество обнаруженных в стробе отметок (блок *2)*. Если в стробе не обнаружено ни одной отметки, то формируется команда на выдачу экстраполированной отметки в качестве истинной. Если в стробе обнаружена только одна отметка, то она считается истинной и сразу выдается на вход алгоритма сглаживания и экстраполяции параметров траектории. Наконец, если в стробе обнаружено несколько отметок, то все они поступают в вычислительный блок (блок *3*), где определяются квадраты расстояний каждой отметки от центра строба по формулам:

$$\Delta r_i^2 = (r_i - r_в)^2, \quad \Delta\beta_i^2 = (\beta_i - \beta_в)^2, \quad \rho_i^2 = \Delta r_i^2 + (r_i\,\Delta\beta_i)^2.$$

3. Сравниваются квадраты расстояний и выбирается одна отметка, для которой $\rho_i^2 = \rho_{мин}^2$ (блок *4)*. Эта отметка принимается за истинную и выдается на вход алгоритма сглаживания и экстраполяции (блок 5).

Кроме величин отклонений от центра строба, для селекции могут быть использованы признаки «веса» отметок, которые формируются

в процессе первичной обработки информации как некоторый аналог отношения сигнала к помехе. В простейшем случае обработки сигналов пачечной структуры, для формирования признака веса отметки можно использовать число импульсов в пачке или ширину пачки (числа элементарных позиций между началом и концом пачки). Аналогичным образом можно сформировать признаки веса отметок в случае двухмерного и трехмерного сигнала.

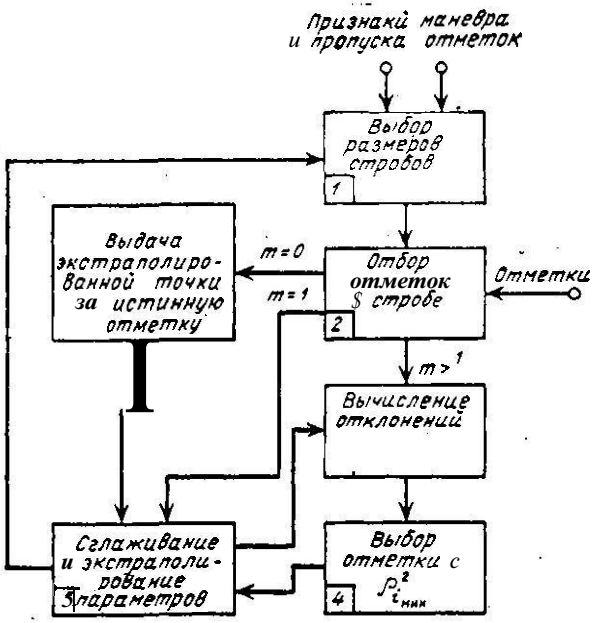


Рис. 6.12. Логическая схема алгоритма селекции отметок в двумерном стробе.

Признаки веса отметок могут использоваться в процессе селекции совместно с признаком отклонения от центра строба или даже самостоятельно. Один из возможных вариантов совместного использования признаков веса и отклонения отметок от центра строба состоит в следующем. Все отметки, попавшие в строб, разделяются на отметки с весом P_1 и отметки с весом P_0, в зависимости от того, превосходит или нет ширина пачки некоторую пороговую величину, зависящую от дальности до цели. При наличии отметок с весом P_1 в качестве истинной принимается ближайшая к центру строба отметка этой группы. При отсутствии таких отметок выбирается ближайшая к центру строба отметка с весом P_0.

Если характеризовать веса непосредственно числом импульсов (позиций) в пачке, то можно селектировать отметки по максимальному весу (отбирать отметку с наибольшим весом). Признаки отклонения отметок от центра строба в этом случае используются только при равенстве весов отметок, претендующих на отбор.

6.5.3, Вероятность правильной селекции отметок в стробе

Качество процесса селекции отметок в стробе можно оценить вероятностью правильной селекции, т. е. вероятностью события, состоящего в том, что в очередном обзоре для продолжения траектории будет отображена именно истинная отметка.

Задачу вычисления вероятности правильной селекции будем решать сначала для случая двухмерного строба при следующих предпосылках:

1. Селекция производится в прямоугольном стробе $2\Delta\eta_{стр}$, $2\Delta\xi_{стр}$ (рис. 6.13), ориентированном так, что корреляция отклонений отметок по координатам η и ξ отсутствует. При этом двухмерная плотность распределения системы случайных величин $\Delta\eta$ и $\Delta\xi$ записывается в виде

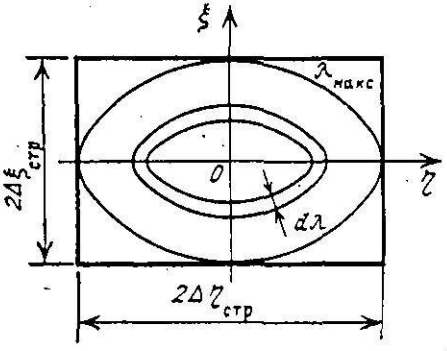


Рис. 6.13. К выводу формулы для вероятности правильной селекции.

$$w(\Delta\eta, \Delta\xi) = \frac{}{2\pi} \exp \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\eta^2}{\sigma_\eta^2} + \frac{\Delta\xi^2}{\sigma_\xi^2} \right) \right]. \quad (6.5.10)$$

Обозначим, как и прежде,

$$\Delta \quad \sigma_\eta^2 + \Delta\xi^2/\sigma_\xi^2 = \lambda^2, \quad (6.5.11)$$

и найдем плотность распределения вероятности для случайного эллиптического отклонения отметки от центра строба, т. е.для λ. Очевидно, имеет место следующее соотношение:

$$to\,(\lambda)d\lambda = w\,(\Delta\eta\Delta\xi)d\Delta\eta d\Delta\xi, \quad (6.5.12)$$

где $d\,\Delta\eta\ d\Delta\xi$ — элемент площади в системе координат $0\eta\xi$.

Площадь эллипса в системе координат $0\eta\xi$ равна

$$S_э = \pi\sigma_\eta\sigma_\xi\lambda^2. \quad (6.5.13)$$

Следовательно,

$$dS_э = 2\pi\sigma_\eta\sigma_\xi\lambda d\lambda. \quad (6.5.14)$$

Подставляя выражение (10) в (12), с учетом (14) получаем окончательно

$$w\,(\lambda) = \lambda \exp\,(-\lambda^2/2). \quad (6.5.15)$$

2. Ложные отметки распределены в зоне обзора равномерно, со средней плотностью ν_S отметок на единицу площади строба. Число ложных отметок, попавших в эллиптический строб, подчиняется в этом случае закону Пуассона, а вероятность отсутствия ложных отметок равна

$$q_{ло}\,(S_э) = \exp\,(-\nu_S S_э).$$

С учетом выражения (13) запишем

$$q_{\text{ло}}(S_0) = \exp(-k_S \lambda^2),$$

где $k_S = \pi\sigma_\eta\sigma_\xi\nu_S$.

3. Эллиптический параметр $\lambda_{\text{макс}}$ выбран так, что вероятность поладания в строб истинной отметки в очередном обзоре близка к единице.

При указанных предпосылках селекция истинной отметки будет правильной, если эта отметка попала внутрь эллиптического кольца $d\lambda$ (рис. 6.13), а ложные отметки не попали внутрь эллипса, ограничивающего это кольцо снаружи.

Вероятность этого события будет равна

$$P_c = \int_0^{\lambda_{\text{макс}}} \lambda \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \exp(-k_S \lambda^2)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^{\lambda_{\text{макс}}} \lambda \exp\left[-\left(\frac{1}{2} + k_S\right)\lambda^2\right] d\lambda.$$

Интегрирование дает следующую окончательную формулу:

$$P_c = \frac{1}{1+2k_S}\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{1}{2} + k_S\right)\lambda^2_{\text{макс}}\right]\right\}. \qquad (6.5.16)$$

При больших $\lambda_{\text{макс}} \geqslant 3$ вторым слагаемым в выражении (16) можно пренебречь. Тогда имеем

$$P_c \approx \frac{1}{1+2k_S} = \frac{1}{1+2\pi\nu_S\sigma_\eta\sigma_\xi}$$

Из выражения (17) следует, что вероятность правильной селекции тем меньше, чем больше плотность ложных отметок ν_S и среднеквадратичные значения отклонений истинных отметок от центра строба σ_η и σ_ξ.

Для случая трехмерного строба вероятность правильной селекции рассчитывается аналогичным образом при следующих исходных предпосылках.

1. Главные оси строба (эллипсоида) ориентированы так, что корреляция отклонений отметок по координатам η, ξ и ζ отсутствует. Трехмерная плотность распределения вероятности системы случайных величин $\Delta\eta$, $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ записывается в виде

$$w(\Delta\eta, \Delta\xi, \Delta\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_\eta\sigma_\xi\sigma_\zeta} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right),$$

где

$$\lambda^2 = \Delta\eta^2/\sigma_\eta^2 + \Delta\xi^2/\sigma_\xi^2 + \Delta\zeta^2/\sigma_\zeta^2.$$

Переходя, как и в предыдущем случае, к плотности распределения для эллипсоидальных отклонений отметки от центра строба, получим:

$$w(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lambda^2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right). \qquad (6.5.18)$$

2. Известна средняя плотность ν_V ложных отметок на единицу объема строба (при пуассоновском распределении числа попадающих в строб отметок). Вероятность непопадания в строб ни одной ложной отметки в этом случае равна

$$q_{\text{ло}}(V_\theta) = \exp(-\nu_V V_\theta) \tag{6.5.19}$$

или, с учетом выражения для объема эллипсоида $V_\theta = 4\pi\sigma_\eta\sigma_\xi\sigma_\zeta\lambda^3/3$, получим

$$q_{\text{ло}}(V_\theta) = \exp(-k_V\lambda^3), \tag{6.5.20}$$

где $k_V = 4\pi\sigma_\eta\sigma_\xi\sigma_\zeta\nu_V/3$.

3. Размеры $\Delta\eta_{\text{стр}}$, $\Delta\xi_{\text{стр}}$, $\Delta\zeta_{\text{стр}}$ выбраны так, что вероятность попадания в строб истинной отметки в очередном обзоре близка к единице. Вероятность правильной селекции в данном случае определяется из выражения

$$P_c = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\lambda_{\text{макс}}} \lambda^2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)\exp(-k_V\lambda^3)\,d\lambda. \tag{6.5.21}$$

Выражение (21) не интегрируется в явном виде. Поэтому найдем приближенное решение при следующих допущениях:

1) $\lambda_{\text{макс}} = \infty$;

2) $\exp(-k_V\lambda^3) \approx (1 - k_V\lambda^3)$, $(k_V\lambda^3 \ll 1)$.

Тогда

$$P_c \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \lambda^2(1 - k_V\lambda^3)\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)d\lambda.$$

Интегрирование дает

$$P_c \approx 1 - 16\,k_V/\sqrt{2\pi}. \tag{6.5.22}$$

Из выражения (22) следует, что вероятность правильной селекции отметок в трехмерном стробе уменьшается с увеличением плотности ложных отметок ν_V и среднеквадратичных ошибок σ_η, σ_ξ, σ_ζ.

6.5.4. Разрешающая способность при селекции траекторий путем стробирования

Под разрешающей способностью метода селекции траекторий понимается его способность не перепутывать траектории двух близких целей, движущихся по подобным траекториям. Разрешающую способность метода селекции можно оценить минимальным расстоянием между траекториями, при котором они не перепутываются с заданной вероятностью (например, с вероятностью 0,95, 0,99 и т. д.).

Возможность перепутывания двух рядом расположенных подобных траекторий иллюстрируется на рис. 6.14. Вследствие близкого взаим-

ного расположения траекторий Тр1 и Тр2 стробы их сопровождения перекрываются. При этом возможны случаи, когда обе отметки попадают в перекрытую часть стробов. Если отбор отметок для продолжения траекторий производится по критерию минимального расстояния от центра строба, то для случая, показанного на рис. 6.14, траектории будут перепутаны, так как наблюденная отметка, принадлежащая второй траектории ($НО_2$), ближе к центру первого строба ($ЭТ_1$) и наоборот.

Анализ разрешающей способности методов селекции траекторий следует производить одновременно по двум или даже трем координатам. Однако решение двумерной и, тем более, трехмерной задачи представляет большие математические трудности. Поэтому ограничимся оценкой разрешающей способности только по одной координате X.

Найдем зависимость вероятности перепутывания двух траекторий по одной координате от расстояния между центрами стробов сопровождения при отборе отметок в стробе по методу минимальных линейных отклонений.

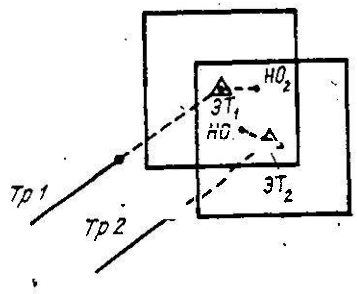


Рис. 6.14. Пояснение процесса перепутывания двух траекторий.

При этом будем иметь в виду следующие предположения и допущения.

1. Под сбоем (перепутыванием) при разрешении понимается однократный неправильный отбор отметки для продолжения траектории (перепутывание в одном обзоре).

2. Отметки от целей поступают в строб сопровождения без пропусков и при полном отсутствии ложных отметок. В этом случае в стробе сопровождения каждой цели имеется только одна (истинная) отметка.

3. Задача рассматривается для случая, когда цель не совершает не предусмотренного алгоритмом автосопровождения маневра, т. е. когда центр строба (положение ЭТ) совпадает с центром рассеяния наблюденных отметок. В этом случае дисперсия суммарных отклонений наблюденных отметок от экстраполированных равна $\sigma^2_{x_\Sigma} = \sigma^2_{x_э} + \sigma^2_x$, где $\sigma^2_{x_э}$ — дисперсия случайной ошибки экстраполяции.

Дисперсии суммарных отклонений принимаются одинаковыми для обеих траекторий.

4. В дальнейшем под x будем понимать нормированные на σ_{x_Σ} отклонения отметок от центров своих стробов. Плотности распределения вероятности нормированных отклонений текущих отметок от экстраполированных принимаются нормальными, с центрами, разнесенными друг относительно друга на нормированное расстояние $m = l_x/\sigma_{x_\Sigma}$, где l_x — расстояние между центрами стробов по координате x.

На рис. 6.15 изображены кривые распределений $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ отклонений отметок по координате x для первой и второй траекторий соответственно.

Если совместить начало отсчета координаты x с $ЭТ_1$, то

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \qquad w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right].$$

Вероятность правильного отбора отметки *1*, принадлежащей к первой траектории и имеющей в данный момент нормированную координату x_1 (рис. 6.15), равна совместной вероятности попадания этой отметки

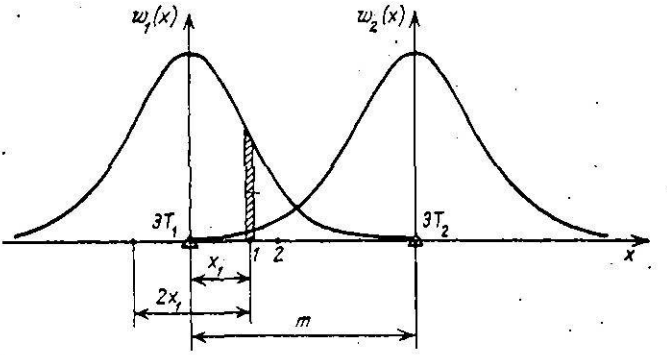


Рис. 6,15. К выводу формулы для вероятности перепутывания двух траекторий.

в элементарный интервал Δx_1 и отсутствия отметки 2, принадлежащей ко второй траектории, в интервале $(-x_1, x_1)$,т. е.

$$\Delta P_{11} = w_1(x_1)\,\Delta x_1 \left[1 - \int_{-x_1}^{x_1} w_2(x)dx\right], \qquad (6.5.23)$$

где $w_1(x_1)\Delta x_1$ — вероятность попадания отметки 1 в элементарный интервал Δx_1; $\int_{-x_1}^{x_1} w_2(x)dx$ — вероятность попадания отметки 2 в интервал $(-x_1, x_1)$.

При нормальном законе распределения отметок относительно центров своих стробов вероятность попадания отметки 2 в интервал $(-x_1, x_1)$ равна

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{x_1} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right] dx = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m+x_1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-x_1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2)\,dt$ — функция Лапласа.

В этом случае формула (23) записывается в виде

$$\Delta P_{11} = \left\{1 - \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m+x_1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-x_1}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\} w_1(x_1)\,\Delta x_1. \qquad (6.5.24)$$

Устремляя $\Delta x_1 \to 0$ и интегрируя (24) в пределах размеров строба 1, выбираемого из расчета $\Delta x_{1\,стр} = 3\sigma_{x_\Sigma}$, получим выражение для вероятности правильного отбора отметки 1 для продолжения первой траектории в следующем виде:

$$P_{11} = \int_{-3}^{3} \left\{1 - \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m+x_1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-x_1}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\} w_1(x_1)\, dx_1. \quad (6.5.25)$$

Выражение (25) не интегрируется в явном виде, кроме одного частного случая, когда $m = 0$ (стробы совпадают). При $m = 0$, переходя к интегрированию в бесконечных пределах, получаем

$$P_{11}(m=0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[1 - \Phi\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\right] \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) dx_1.$$

Производя замену переменных $x_1/\sqrt{2} = t$, получаем

$$P_{11}(m=0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [1 - \Phi(t)] \exp(-t^2)\, dt.$$

По таблицам [10] находим

$$\int_0^\infty [1 - \Phi(t)] \exp(-t^2)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Следовательно, $P_{11}(m=0) = 0{,}5$, т. е. при совпадении стробов равновероятно отобрать для первой траектории отметку 1, принадлежащую этой траектории, или отметку 2, принадлежащую второй траектории.

В общем случае ($m > 0$) вероятность P_{11} может быть найдена численными методами.

Рассуждая аналогичным образом (совмещая начало отсчета x с $ЭТ_2$), можно получить выражение для вероятности P_{22} правильного отбора отметки 2 для второй траектории. Так как плотности вероятности отклонения отметок от $ЭТ_1$ и $ЭТ_2$ одинаковы и с одинаковой дисперсией, то, очевидно, $P_{11} = P_{22}$.

Зная вероятности P_{11} и P_{22}, можно вычислить вероятность перепутывания траекторий. Если понимать под перепутыванием неправильный отбор отметки хотя бы для одной траектории, то

$$P_п = 1 - P_{11}P_{22} = 1 - P_{11}^2. \quad (6.5.26)$$

Очевидно, вероятность одновременного перепутывания по нескольким независимым координатам равна произведению вероятностей перепутывания по каждой из них, Поэтому, чем больше координат и параметров сравнивается в процессе селекции, тем больше вероятность правильного отбора отметок для продолжения каждой траектории и тем, следовательно, выше разрешающая способность процесса вторичной обработки радиолокационной информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
2. Конторов Д. С, Голубев-Новожилов Ю. С. Введение в радиолокационную системотехнику. М., «Сов. радио», 1971.
3. Кузьмин С. З. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.
4. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1960.
6. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдения. М., Физматгиз, 1962.
6. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
7. Шапиро И. Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных измерений. М., ИЛ, 1961.
8. Эскобал П. Методы определения орбит. Пер. с англ. Под ред. Демана. М., «Мир», 1970.
9. A. Lees. Interpolation and Extrapolation of Simpled Dafe. — «IRE Trans», 1956, v. IT-2, № 1.
10. Градштейн И. С, Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
11. Абезгауз Г. Г. Справочник по вероятностным расчетам. М., Воениздат, 1970.
12. Космические траекторные измерения. Под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича. А. А. Коростелева М., «Сов. радио», 1969.

7. ОБНАРУЖЕНИЕ И СОПРОВОЖДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЦЕЛЕЙ ПО ДАННЫМ ОБЗОРНОЙ РЛС

7.1. Общая характеристика процесса обнаружения траекторий

В соответствии с общими принципами, изложенными в §6.1, процесс обнаружения новой траектории начинается с образования вокруг одиночной отметки начального строба первичного захвата, размеры которого выбираются исходя из возможного перемещения цели за период обзора. Если в следующем обзоре в строб первичного захвата попала одна или несколько отметок, то по каждой из них «завязывается» новая траектория. При отсутствии отметок в стробе первичного захвата начальная отметка или сбрасывается как ложная (критерий «завязки» 2 из 2), или оставляется для подтверждения в следующих обзорах, с соответствующим увеличением размеров строба первичного захвата («дробные» критерии «2 из m», $m > 2$).

После того, как траектория завязана, определяется направление и скорость движения предполагаемой цели, что позволяет экстраполировать и стробировать ее положение на следующие обзоры. При попадании в эти стробы новых отметок принимается окончательное решение об обнаружении траектории.

Таким образом, процесс обнаружения траектории разбивается на два этапа: на первом осуществляется завязка (обнаружение) траектории по критерию «2 из m», на втором производится подтверждение завязанной траектории, т. е. окончательное обнаружение траектории,

по другому заранее установленному критерию. В частных случаях второго этапа обнаружения траектории может и не быть.

Основными вычислительными операциями, выполняемыми в процессе обнаружения траектории, являются: оценка скорости, экстраполяция координат и стробирование отметок. Относительно этих операций в дальнейшем принимаются следующие предпосылки:

1. Экстраполяция координат производится в соответствии с гипотезой о равномерном и прямолинейном движении цели.

2. Стробы на всех этапах обнаружения траектории имеют форму элемента сферического слоя (рис. 6.11). Размеры стробов $\Delta r_{стр}$, $\Delta\beta_{стр}$, $\Delta e_{стр}$ выбираются исходя из суммарных ошибок измерения и экстраполяции координат на соответствующем этапе обнаружения траектории.

3. За единицу объема строба принимается разрешаемый объем РЛС $V_0 = \delta_\eta \delta_\beta \delta_\varepsilon$, где через $\delta_U = (U = r, \beta, \varepsilon)$ обозначены разрешающие способности РЛС по соответствующим координатам. В этом случае размеры стробов не зависят от дальности и, кроме того, распределение ложных отметок в зоне обзора можно принять равномерным, так как вероятность появления ложной отметки в каждом элементарном объеме строба одинакова.

Качество процесса обнаружения траектории можно оценивать следующими характеристиками: вероятностью обнаружения траектории истинной цели; средним числом ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в единицу времени; производительностью ЦВМ, используемой для реализации алгоритма обнаружения траектории.

В дальнейшем рассматриваются основные идеи синтеза и анализа алгоритмов обнаружения траекторий применительно к РЛС обзорного действия (кругового или секторного обзора).

7.2. Алгоритм «завязки» траекторий и его анализ

Процесс «завязки» новой траектории начинается с отбора одиночной отметки, т. е. отметки, не попавшей в стробы, образованные в процессе сопровождения или обнаружения других траекторий. В дальнейшем рассматривается процесс завязки траекторий по критерию «2 из m» (2/т) в соответствии с алгоритмом, операторная схема которого записывается в виде

$$^{1,7}\,{}^{8}\Phi_1\, A_2\, P_{3\downarrow5}\, A_4^1\, {}^{3}F_5\, P_{6\downarrow8}\, F_7^1\, {}^{6}F_8^1.$$

Операторы этого алгоритма имеют следующий смысл:

Φ_1 — выбор очередной отметки, принятой за начало новой траектории в предыдущих обзорах,

A_2 — формирование строба первичного захвата,

P_3 — проверка попадания каждой новой отметки в сформированный строб,

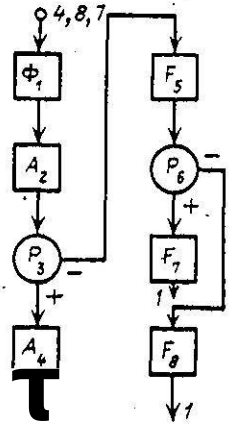
A_4 — расчет начальных параметров завязанной траектории,

F_5 — формирование (счет) числа пропусков i отметок после начальной отметки,

P_6 — проверка неравенства $i < m - 1$,
F_7 — запись числа i для проверенной отметки,
F_8 — сброс начальной отметки без завязки траектории.

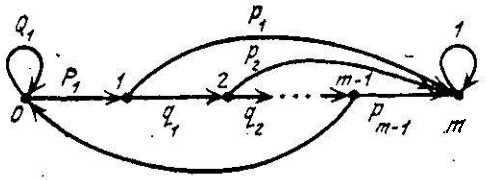
Граф-схема алгоритма изображена на рис. 7.1.

При анализе алгоритма необходимо отдельно рассматривать процессы завязки ложных и истинных траекторий. Сначала рассмотрим случай завязки ложной траектории. Соответствующий этому случаю граф со случайными переходами (абстрактная схема работы алгоритма завязки ложной траектории) изображен на рис. 7.2.



← Рис. 7.1. Граф-схема алгоритма завязки траекторий.

Рис. 7.2. Граф алгоритма завязки ложной траектории.



Из исходного состояния a_0 (на рисунке указаны только номера состояний) осуществляется переход в состояние a_1 с вероятностью P_1 появления одиночной ложной отметки, принимаемой за начало новой траектории. Из любого внутреннего состояния a_i ($i = \overline{1, m-2}$) возможны переходы либо в следующее состояние a_{i+1} с вероятностью q_i отсутствия ложных отметок в i-м стробе первичного захвата, либо в состояние a_m с вероятностью $p_i = 1 - q_i$. Из состояния a_{m-1} возможны переходы в состояние a_0 с вероятностью q_{m-1} или в состояние a_m с вероятностью $p_{m-1} = 1 - q_{m-1}$. Состояние a_m является поглощающим. При достижении этого состояния фиксируется факт завязки ложной траектории и она передается для подтверждения на второй этап обработки.

Матрица вероятности переходов рассмотренного графа имеет вид

$$\Pi_{\langle 2/m\rangle} = \begin{Vmatrix} Q_1 & P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 & \dots & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & \dots & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (7.2.1)$$

Процесс завязки ложной траектории можно теперь представить как упорядоченную совокупность переходов под воздействием случайного сигнала, принимающего значения 0 или I. Вероятность завязки ложной траектории определяется вероятностью π_1 того, что из состояния a_1 граф достигнет состояния a_m и останется в нем.

В общем случае вероятность π_i достижения поглощающего состояния a_m из любого промежуточного состояния a_l ($z = 1, \overline{m-1}$) удовлетворяет следующей системе линейных уравнений [3]

$$\pi_i = \sum_{v=1}^{m} \pi_{iv}\,\pi_v + \pi_{im}. \tag{7.2.2}$$

Для нашего случая система уравнений (2) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= q_1\,\pi_2 + p_1,\\
\pi_2 &= q_2\,\pi_3 + p_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\pi_{m-2} &= q_{m-2}\,\pi_{m-1} + p_{m-2},\\
\pi_{m-1} &= p_{m-1}.
\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Решение системы (3) для π_1 при произвольном m получается в виде

$$\pi_1 = p_1 + q_1 p_2 + \ldots + q_1 \ldots q_{m-3}\,p_{m-2} + q_1 \ldots q_{m-2}\,p_{m-1} = \left(1 - \prod_{i=1}^{m-1} q_i\right) \tag{7.2.4}$$

Вероятность q_i отсутствия ложных отметок в i-м стробе первичного захвата определяется исходя из закона Пуассона и равна

$$q_{Ni} = \exp(-n_0 V_i), \tag{7.2.5}$$

где n_0 — среднее число ложных отметок, приходящееся на единицу объема строба; V_i — объем i-го строба первичного захвата, выраженный числом разрешаемых объемов РЛС. Значение n_0 определяется по формуле

$$n_0 = \overline{N}_{ло}\,T_0/N_{Vp}, \tag{7.2.6}$$

где $\overline{N}_{ло}$ — средняя (по времени) плотность ложных отметок на выходе ЦВМ первичной обработки; T_0 — период обзора РЛС; N_{Vp} — число разрешаемых объемов в зоне обзора РЛС, равное

$$N_{Vp} = \frac{r_{макс}\,\beta_{макс}\,\varepsilon_{макс}}{\delta_r\,\delta_\beta\,\delta_\varepsilon}; \tag{7.2.7}$$

$r_{макс}$, $\beta_{макс}$, $\varepsilon_{макс}$ — координаты границ зоны обзора РЛС по дальности, азимуту и углу места.

Значение V_l определяется по формуле

$$V_l = V_1 i^3,$$

где

$$V_1 = \frac{2\dot{r}_{\text{макс}} T_0 2\dot{\beta}_{\text{макс}} T_0 2\dot{\varepsilon}_{\text{макс}} T_0}{\delta_r \delta_\beta \delta_\varepsilon} \qquad (7.2.8)$$

— объем начального строба первичного захвата.

С учетом выражений (4), (5) и (8) вероятность завязки ложной траектории равна

$$P_{\text{зав}} = P_1 \pi_1 = P_1 \left[1 - \exp\left(-n_0 V_1 \sum_{i=1}^{m-1} i^3 \right) \right] =$$

$$= P_1 \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{m^2 (m-1)^2}{4} n_0 V_1 \right] \right\}. \qquad (7.2.9)$$

При анализе процесса завязки истинной траектории необходимо принять следующие дополнительные предпосылки:

— начальной точкой истинной траектории является истинная отметка. Число и расположение траекторий в зоне обзора таково, что вероятность попадания начальной отметки истинной траектории в стробы сопровождения других траекторий (истинных и ложных) пренебрежимо мала;

— если в очередной строб первичного захвата истинной траектории попала ложная отметка, то наступает сбой процесса завязки истинной траектории,

— при попадании в строб истинной и ложной отметки завязка траекторий производится по каждой из них и сбоя не происходит.

С учетом сделанных предпосылок граф и матрица переходных вероятностей алгоритма завязки истинной траектории будут уже не такими, как для завязки ложной траектории. В частности, появятся неравные нулю вероятности перехода из промежуточных состояний $1, 2 \ldots m-2$ в нулевое состояние.

Матрица переходных вероятностей имеет следующий вид

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \pi_{10} & 0 & \pi_{12} & \ldots & 0 & \pi_{1m} \\ \pi_{20} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \pi_{2\tau} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi_{m-1,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \pi_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (7.2.10)$$

В этой матрице

$$\left.\begin{aligned} \pi_{i0} &= p_{Ni}(1 - p_{Si}), \\ \pi_{i,\,i+1} &= (1 - p_{Si})(1 - p_{Ni}), \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, m-2.$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

$$\pi_{i0} = 1 - p_{Si}, \qquad i = m-1.$$

$$\pi_{00} = q_{S1}, \quad \pi_{01} = p_{S1}.$$

где $p\$t$ (p_N i) — вероятность попадания истинной (ложной) отметки в i-й строб.

Вычисление вероятности завязки истинной траектории может быть теперь произведено обычным образом с использованием уравнений (3).

Задача оптимизации процесса завязки траекторий сводится к выбору оптимального значения m в критерии «2/m». Обычно такая оптимизация производится совместно с оптимизацией критерия подтверждения траекторий. Если же при обнаружении траекторий используется только критерий завязки, то выбор m зависит в свою очередь только от конкретных условий работы (вероятность обнаружения истинных отметок, плотность ложных отметок и т. д.).

7.3. Синтез алгоритмов подтверждения (окончательного обнаружения) завязанной траектории

Рассмотрим задачу синтеза алгоритма подтверждения завязанных траекторий по критерию последовательного анализа [1].

Задача подтверждения завязанной траектории заключается в проверке двух альтернативных гипотез: H_0 — гипотезы об отсутствии цели (подтверждается ложность завязанной траектории) и H_1 — гипотезы о наличии цели (подтверждается истинность завязанной траектории).

Последовательность исходов, состоящую в попадании (или непопадании) отметок в стробы подтверждения траектории, будет представляться в виде $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$, где

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{при попадании отметки в строб на } i\text{-шаге,} \\ 0 & \text{при отсутствии отметок в стробе на } i\text{-шаге.} \end{cases}$$

Эту последовательность в дальнейшем будем считать последовательностью независимых событий.

Задача состоит, во-первых, в том, чтобы получить выражение для расчета текущего частного отношения правдоподобия на i-шаге при наличии указанных исходов.

Пусть $X_i = 1$. Полная вероятность этого события равна

$$P_i\,(X_i = 1) = P_i\,(1 \mid H_1)\,P\,(H_1) + P_i\,(1 \mid H_0)P(H_0), \qquad (7.3.1)$$

где $P_i\,(1/H_1)$ — условная вероятность получения $X_i = 1$ при справедливости гипотезы H_1; $P_i\,(1/H_0)$ — условная вероятность получения $X_i = 1$ при справедливости гипотезы H_0; $P\,(H_1)$, $P\,(H_0)$ — априорные вероятности гипотез H_1 и H_0 соответственно.

Исходя из элементарных рассуждений, можно записать

$$P_i(1 \mid H_1) = 1 - (1 - p_{Ni})(1 - p_S\,(i)),$$
$$P_i(1 \mid H_0) = \quad ,$$

где p_{Ni} — вероятность попадания ложной отметки в строб подтверждения траектории, сформированный на i-м шаге ($q_{Ni} = 1 - p_{Ni}$ вычисляется по формуле (2.5)); $p_S\,(i)$ — вероятность обнаружения истинной отметки на i-м шеге.

Подставив значения $P_i\ (1/H_1)$ и $P_i\,(1/H_0)$ в выражение (1), получим

$$P_i\,(X_i=1)=[1-(1-p_{Ni})\,(1-p_S\,(i))]\,P\,(H_1)+p_{Ni}\,P\,(H_0). \qquad (7.3.3)$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности

$$P_i\ (1\,|\,H_1)P_i(H_1)\ =\ P_i\ (H_1\,|\,1)P_i\ (\mathrm{X}_i=1), \qquad (7.3.4)$$

где $P_i\ (H_1\,|\,1)$ — условная вероятность справедливости гипотезы H_1 при условии, что в строб подтверждения попала хотя бы одна отметка $(\mathrm{X}_i=1)$, получим

$$P_i(H_1\,|\,1)=\frac{P_i\,(1\,|\,H_1)\,P\,(H_1)}{P_i\,(\mathrm{X}_i=1)}=$$

$$=\frac{[1-(1-p_{Ni})\,(1-p_S\,(i))]\,P\,(H_1)}{[1-(1-p_{Ni})\,(1-p_S\,(i))]\,P\,(H_1)+p_{Ni}\,P\,(H_0)}. \qquad \textbf{(7.3.5)}$$

Очевидно,

$$P_i\,(H_0\,|\,1)=1-P_i\,(H_1\,|\,1). \qquad (7.3.6)$$

Следовательно,

$$P_i\ (H_0\,|\,1)=\frac{p_{Ni}\,P\,(H_0)}{[1-(1-p_{Ni})\,(1-p_S\,(i))]\,P\,(H_1)+p_{Ni}\,P\,(H_0)}. \qquad (7.3.7)$$

Если далее предположить $P\ (H_1)=P\ (H_0)=0{,}5$, окончательное выражение для отношения правдоподобия при $\mathrm{X}_i=1$ получается в виде

$$\Lambda(\mathrm{X}_i=1)=\frac{P_i\,(H_1\,|\,1)}{P_i\,(H_0\,|\,1)}=\frac{1-(1-p_{Ni})\,(1-p_S\,(i))}{p_{Ni}}=\frac{\alpha_i}{p_{Ni}}. \qquad (7.3.8)$$

Пусть теперь $\mathrm{X}_i=0$. Полная вероятность этого события равна

$$P_i\ (\mathrm{X}_i=0)=P_i\ (H_1)P\ (H_1)\ +P_i\ (0\,|\,H_0)P\ (H_0), \qquad (7.3.9)$$

где $P_i\ (0\,|\,H_1)$ — условная вероятность получения $X_i=0$ при справедливости гипотезы H_1; $P_i\ (0\,|\,H_0)$ — условная вероятность получения $\mathrm{X}_i=0$ при справедливости гипотезы H_0.
Для этих вероятностей можно записать

$$P_i\,(0\,|\,H_1)=(1-p_{Ni})(1-p_S(i)),$$
$$P_i\,(0\,|\,H_0)=(1-p_{Ni}).$$

Используя, как и в предыдущем случае, формулу полной вероятности и очевидное условие

$$P\ (H_0\,|\,0)\ =\ 1-P\ (H_1\,|\,0),$$

получим окончательно

$$l\,(\mathrm{X}_i=0)\ =\frac{P_i\,(H_1\,|\,0)}{}=\ 1-p_S\,(i)\ \ \frac{1-\alpha_i}{1-p_{Ni}}. \qquad (7.3.11)$$

Теперь можно сразу записать общее выражение для логарифма отношения правдоподобия после $n_т$ шагов последовательного анализа.

$$\lg l_{n_т} = \sum_{i=1}^{n_т} \left[X_i \lg \frac{\alpha_i}{p_{Ni}} + (1 - X_i) \lg \frac{1-\alpha_i}{1-p_{Ni}} \right]. \qquad (7.3.12)$$

В соответствии с процедурой последовательного анализа после каждого испытания $\lg l_{n_т}$ сравнивается с постоянными порогами:

$$\lg A = \lg \frac{P_{ит}}{\ldots} \text{ — порог обнаружения,}$$

$$\lg B = \lg \frac{1-P_{ит}}{1-P_{\ldots}} \text{ — порог сброса,}$$

где $P_{ит}$ — заданная вероятность обнаружения истинной траектории; $P_{лт}$ — заданная (допустимая) вероятность обнаружения ложной траектории.

В общем виде алгоритм последовательного анализа на $n_т$-м шаге запишется как условие проверки двойного неравенства:

$$\lg B \leqslant \sum_{i=1}^{n_т} \left[X_i \lg \frac{\alpha_i}{p_{Ni}} + (1 - X_i) \lg \frac{1-\alpha_i}{1-p_{Ni}} \right] \leqslant \lg A$$

или

$$0 \leqslant -\lg B + \sum_{i=1}^{n_т} \left[X_i \lg \frac{\alpha_i}{p_{Ni}} + (1 - X_i) \lg \frac{1-\alpha_i}{1-p_{Ni}} \right] \leqslant \lg \frac{A}{B}. \qquad (7.3.13)$$

В соответствии с (13) нижний порог (порог сброса) $П_B = 0$; верхний порог (порог обнаружения) $П_A = \lg (A/B)$; начальный «вес», присваиваемый траектории при ее завязке, $w_0 = -\lg B$.

В процессе анализа возможны два случая:

а) При попадании отметки в строб вес траектории увеличивается

$$w_i = w_{i-1} + \lg (\alpha_i / p_{Ni}). \qquad (7.3.14)$$

После уточнения веса производится проверка неравенства

$$w_i \geqslant П_A. \qquad (7.3.15)$$

Если неравенство (15) выполняется, то траектория считается обнаруженной и передается на сопровождение. При невыполнении неравенства (15) принимается решение на продолжение анализа.

б) В случае, если отметка в строб не попала, то вес траектории уточняется по формуле

$$w_i = w_{i-1} - \lg \frac{1-\alpha_i}{1-p_{Ni}}, \qquad (7.3.16)$$

Далее проверяется неравенство

$$w_i \leqslant 0. \qquad (7.3.17)$$

например надежность и живучесть, существенно возрастают, а главное, появляется возможность решения связанных задач существенно большего объема, чем на одной ЦВМ, за счет комплексирования и структурной модификации вычислительных средств с ограниченным эффективным быстродействием и емкостью памяти.

В общем случае производительность МВС, определяемая через эффективное быстродействие ЦВМ, входящих в ее состав, называется эффективной производительностью МВС и по определению равна

$$П_{эф} = K(M) \sum_{i=1}^{M} V_{эф\,i}, \qquad (7\text{-}7)$$

где $V_{эфi}$ — эффективное быстродействие i-й машины; M — число машин в системе; $K(M) < 1$ — коэффициент, учитывающий системные затраты производительности, зависящий от числа M объединяемых в систему машин.

В МВС машины могут выполнять программы совершенно автономно или во взаимодействии друг с другом. В соответствии с этим можно рассматривать два типа МВС. В системах первого типа единство вычислительной системы определяется только обменом информации между автономными ЦВМ. Такие МВС создаются, как правило, из однотипных ЦВМ, каждая из которых имеет процессор и память и взаимодействует с другими через специальные устройства и каналы обмена информации. Примером такой системы является резервированная МВС, в которой из общего числа M составляющих ЦВМ $M-m$ являются рабочими, а m — резервными. При создании МВС первого типа важной задачей является обеспечение межмашинного обмена информацией. Различают следующие способы организации такого обмена:

между ОЗУ ЦВМ через общее поле оперативной памяти;

между ОЗУ ЦВМ через стандартные каналы обмена информацией с помощью специального устройства, называемого адаптером канал — канал;

между внешними накопителями через стандартные каналы обмена информацией с помощью общего (объединенного) устройства управления внешними накопителями.

Системами второго типа являются МВС, предназначенные для повышения производительности путем одновременного решения несвязанных участков распараллеленного алгоритма. Такие системы являются многомашинными с программируемой структурой. Обычно они создаются из однотипных машин, т. е. являются однородными. Функциональное взаимодействие между машинами в таких системах осуществляется через регулярную программируемую сеть связи, которая организуется с помощью стандартных каналов и коммутаторов.

Коммутатор и ЦВМ, дополненная блоком реализации системных операций (БРСО), составляет элементарную ячейку однородной МВС [15]. Соединение элементарных ячеек в систему может быть кольцевым или матричным. Пример кольцевой однородной МВС показан на рис. 7.2. Коммутаторы $К_i$ состоят из вентилей, которые открывают или закрывают канал связи, идущий к соседней справа ячейке, БРСО содержит регистр настройки и узел, в котором реализуются системные операции. Содержание регистра настройки определяет вид соединительной функции коммутатора и степень участия соответствующей элементарной ячейки при решении задач на каждом этапе.

Системными операциями однородной МВС являются операции;

Операторы этого алгоритма следующие:

Φ_1 — выбор для подтверждения очередной завязанной траектории,

A_2 — экстраполяция координат траектории на i-й обзор по формуле (18),

A_3 — расчет линейных размеров строба по формуле (20),

P_4 — проверка попадания в строб отметки, полученной в i-м обзоре, по формуле (21),

A_5 — расчет p_{Ni} в стробе объемом V_i,

A_6 — вычисление приращения веса подтверждаемой траектории по формуле

$$\Delta w_i(1) = \lg(\alpha_i / p_{Ni}),$$

A_7 — уточнение веса подтверждаемой траектории по формуле (14),

P_8 — проверка неравенства (15),

Φ_9 — передача обнаруженной траектории на сопровождение,

A_{10} — вычисление приращения веса подтверждаемой траектории по формуле $\Delta w_i(0) = \lg \frac{1-\alpha_i}{1-p_{Ni}}$,

A_{11} — уточнение веса подтверждаемой траектории по формуле (16),

P_{12} — проверка неравенства (17),

Φ_{13} — сброс завязанной траектории,

P_{14} — проверка неравенства $i < n_y$, где n_y — предельное число шагов последовательного анализа.

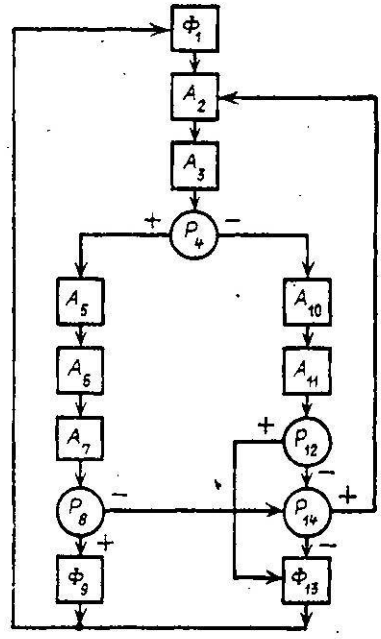


Рис. 7.3. Граф-схема алгоритма подтверждения завязанной траектории по критерию последовательного анализа.

Связи между операциями алгоритма можно также проследить по граф-схеме алгоритма, изображенной на рис. 7.3.

Алгоритмы последовательного анализа достаточно трудоемки в реализации и не всегда доступны для применения из-за ограниченной производительности вычислительных средств. Поэтому в таких случаях целесообразным является применение более простых алгоритмов подтверждения завязанной траектории, в основу которых положены критерии последовательных серийных испытаний [1].

При использовании критерия последовательных серийных испытаний решение принимается на основе конечной выборки длиною n по правилу:

если $l \geqslant l_1(n)$, то принимается решение об обнаружении траектории;

если $l < l_0(n)$, то производится сброс накопленных данных.

При невыполнении указанных неравенств решение не принимается и анализ входных данных продолжается.

Рассмотренная процедура является двухпороговой. Однако возможно применение серийных процедур с однопороговым критерием, подобным логическим критериям типа «l/m» (гл. 5). Пусть, например, условлено, что для окончательного обнаружения завязанной траектории необходимо получить две связанные отметки в не более чем четырех смежных периодах обзора (критерий «2/4»). К обнаружению траектории в этом случае приводят следующие комбинации из успехов (попаданий отметок в стробы) и неуспехов (отсутствий отметок в стробах): 1001, 101, 11. При появлении других комбинаций вся накопленная информация сбрасывается. Продолжительность анализа не превышает четырех периодов обзора.

Основные операции алгоритма серийных испытаний чрезвычайно просты в реализации. Вспомогательные же операции, состоящие в экстраполяции координат и стробировании отметок, реализуются так же, как и в алгоритме последовательного анализа. Поэтому операторная схема алгоритма серийных испытаний не приводится.

7.4. Статистические характеристики алгоритма последовательного анализа

Поскольку при синтезе алгоритмов последовательного анализа вероятности обнаружения истинной траектории $P_{ит}$ и ложной траектории $P_{лт}$ считаются заданными, задача анализа такого рода алгоритмов сводится, в основном, к нахождению распределения длительности анализа, т. е. распределения числа испытаний до вынесения окончательного решения. В классической теории последовательного анализа эта задача решается при условии постоянства вероятностей p_N и p_S, от которых зависят исходы X_i двоичного квантования входных сигналов. В нашем случае вероятности исходов X_i не являются постоянными, а последовательность этих исходов есть последовательность зависимых случайных событий. Поэтому неприменимы в чистом виде и результаты, полученные в классической теории для оценки продолжительности анализа при обнаружении траекторий.

В данном параграфе задачи оценки длительности последовательного анализа при обнаружении траекторий решаются с помощью аппарата дискретных цепей Маркова.

7.4.1. Распределение длительности последовательного анализа при фиксированных вероятностях p_S и p_N

С целью предварительной разработки методики прямой оценки распределения длительности последовательного анализа с помощью аппарата цепей Маркова рассмотрим сначала случай $p_S = \text{const}$ и $p_N = \text{const}$ в алгоритме (3.13).

Процесс последовательного анализа при принятии решения по каждой из обнаруживаемых траекторий можно описать в этом случае однородной цепью Маркова. Число состояний этой цепи для классического процесса последовательного анализа устанавливается по известным вероятностям $P_{ит}, P_{лт}$, ps и p_N.

Пусть для примера, $P_{ит} = 0{,}99$, $P_{лт} = 10^{-3}$, $ps = 0{,}68$, $p_N = 0{,}07$. Тогда по формулам, приведенным в предыдущем параграфе, находим:

$$\lg A = \lg \frac{0.99}{0{,}001} \approx 3, \quad \lg B = \frac{0{,}01}{0{,}999} \approx -2,$$

$$\Pi_A = \lg A - \lg B \approx 5, \quad \Pi_B = 0, \quad w_0 = -\lg B = 2,$$

$$\Delta w(1) = \lg \frac{[1-(1-p_S)(1-p_N)]}{p_N} \approx 1, \quad \Delta w(0) = \lg(1-p_S) = -0{,}5.$$

Таким образом, для рассматриваемого примера, процесс последовательного анализа начинается с начального «веса» $w_0 = 2$, при завязке траектории. Далее, при попадании очередной отметки в строб, w_i увеличивается на единицу, а при непопадании — уменьшается на 0,5. При достижении порогового уровня $\Pi_A = 5$, принимается решение об обнаружении траектории, при достижении порогового уровня $\Pi_B = 0$ — траектория сбрасывается как ложная.

Процесс принятия решения теперь можно рассматривать как процесс случайного блуждания точки между двумя поглощающими экранами 0 и 5. Минимальное изменение координаты блуждающей точки равно 0,5. Поэтому число состояний марковской цепи, описывающей этот процесс, разно 11. Ее матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 & 10 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & q & 0 & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}. \qquad (7.4.1)$$

В этой матрице при наличии цели $p = \alpha$, $q = 1 - a$; при отсутствии цели $p = p_N$, $q = 1 - p_N$.

Матрица переходных вероятностей (1) получена для случая, когда вероятности $P_{ит}, P_{лт}$, ps, p_N специально подобраны, а полученные значения w_0, Π_A, Δw (1), Aw (0) округлены ближайшими целыми числами. Округление приводит к отклонению от заданных качественных показателей. Поэтому в общем случае дробных весов и порога Π_A можно поступить следующим образом.

Каждое из значений Π_A, w_0, Δw (1), Δw (0) представляется в виде Приведенной простой дроби

$$\Pi_A = l_A/m_A, \quad w_0 = l_0/m_0, \quad w\ (1) = l_p/m_p, w\ (0) = l_q/m_q.$$

Затем полученные простые дроби приводятся к общему наименьшему знаменателю

$$\Pi_A = \frac{k_A l_A}{k_A m_A}, \quad w_0 = \frac{k_0 l_0}{k_0 m_0}, \quad w\,(1) = \frac{k_p l_p}{k_p m_p}, \quad w\,(0) = \frac{k_q l_q}{k_q m_q},$$

где $k_A m_A = k_0 m_0 = k_p m_p = k_q m_p$.

Новые значения: начальное состояние $w_0' = k_0 l_0$, верхний порог $\Pi_A = k_A l_A$, положительное приращение отношения правдоподобия при попадании отметки в строб $\Delta w'$ (1) $= k_p l_p$, отрицательное приращение отношения правдоподобия при отсутствии отметки в стробе $\Delta w'$ (0) $= -k_q l_q$.

Рассмотренные преобразования обычно приводят к существенному расширению числа состояний цепи Маркова и к соответствующему увеличению числа строк и столбцов матрицы переходных вероятностей. Операции с большими матрицами переходных вероятностей чрезвычайно громоздки. Поэтому для инженерных расчетов целесообразно применять аппроксимацию, сделанную выше, или производить только частичное приведение.

Обратимся к матрице (1) и рассмотрим, каким образом с помощью этой матрицы рассчитываются вероятности окончания последовательного анализа на n-м шаге испытаний.

Как известно из общей теории, вероятностные характеристики однородной цепи Маркова определяются однозначно, если заданы вектор начального распределения P (0) и матрица переходных вероятностей $\Pi = ||\pi_{ij}||$, $i, j = 1, 2, \ldots$ При этом безусловная вероятность достижения состояния j за n шагов определяется по формуле

$$P_j^{(n)} = \sum_i P_i^{(0)} \pi_{ij}^{(n)},$$

где $\pi_{ij}^{(n)}$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j за n шагов.

Вычисление вероятностей перехода за n шагов может быть выполнено по следующей рекуррентной формуле [3]

$$\pi_{ij}^{(n)} = \sum_k \pi_{ik}^{(n-1)} \pi_{kj}, \qquad (7.4.3)$$

где предположено

$\pi_{ik}^{(0)} = 1$ при $i = k$, $\pi_{ik}^{(0)} = 0$ при $i \neq k$.

Формулы (2) и (3) позволяют решить задачу о распределении числа испытаний в системе, описываемой матрицей переходных вероятностей (1).

В исходном состоянии (при завязке траектории) система находится в состоянии a_4. Вероятность этого состояния $P_4(0) = 1$, а вероятности всех других состояний $P_{i \neq 4}(0) = 0$. Поэтому

$$P_j(n) = \pi_{4j}^{(n)} = \sum_k \pi_{4k}^{(n-1)} \pi_{kj}, \quad k, j = \overline{0,10}.$$

В табл. 7.1 приведены рассчитанные по формуле (2) вероятности состояний при числе испытаний n от 0 до 12. Вероятность окончания анализа на п-м шаге равна

$$P_{\kappa}(n) = P_{\kappa}(n) + P \quad (n) \qquad (7.4.4)$$

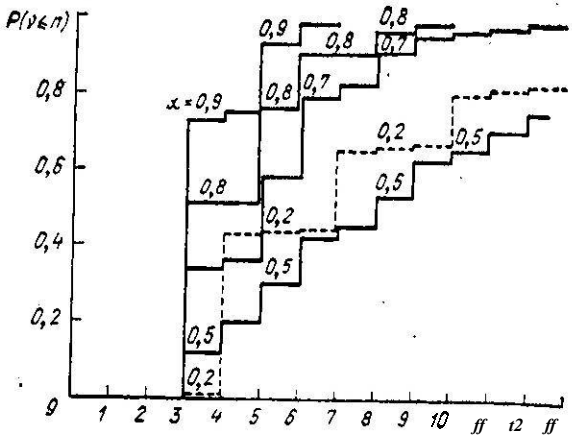


Рис. 7.4. Графики распределения длительности последовательного анализа.

Нарастающая вероятность окончания анализа на п-м шаге определяется по формуле

$$P(\nu \leq n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\kappa} \quad (n) \qquad (7.4.5)$$

На рис. 7.4 приведены графики распределения длительности последовательного анализа, рассчитанные по формуле (5). Из этих графиков следует, что длительность последовательного анализа в сильной степени зависит от вероятностей исходов испытаний α и p_N. При $\alpha(p_N) = 0{,}5$ длительность анализа наибольшая. Средняя длительность последовательного анализа определяется по формуле

$$n=0$$

Заметим в заключение, что по табл. 7.1 можно также определить нарастающую вероятность обнаружения истинной или ложной траектории на n-м шаге, если просуммировать вероятности достижения состояния a_{10} за n шагов.

Таблица 7.1

n (число шагов)	Вероятности достижения состояний										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	p	0	0	q	0	0	0	0
2	0	p	q^2	0	0	$2pq$	0	0	p^2	0	0
3	0	q^3	0	0	$3q^2p$	0	0	$3qp^2$	0	0	p^3
4	q^4	0	0	$4q^3p$	0	0	$6q^2p^2$	0	0	$3qp^3$	0
5	0	0	$4q^4p$	0	0	$10q^3p^2$	0	0	$9p^2q^3$	0	$3qp^4$
6	0	$4q^5p$	0	0	$14q^4p^2$	0	0	$19p^3q^3$	0	0	$9q^2p^4$
7	$4q^6p$	0	0	$18q^5p^2$	0	0	$33q^4p^3$	0	0	$19q^3p^4$	0
8	0	0	$18q^6p^2$	0	0	$51q^5p^3$	0	0	$52q^4p^4$	0	$19q^3p^5$
9	0	$18q^7p^2$	0	0	$69q^6p^3$	0	0	$103q^5p^4$	0	0	$52q^4p^5$
10	$18q^8p^2$	0	0	$87q^7p^3$	0	0	$172q^6p^4$	0	0	$103q^5p^5$	0
11	0	0	$87q^8p^3$	0	0	$259q^7p^4$	0	0	$275q^6p^5$	0	$103q^5p^6$
12	0	$87q^9p^3$	0	0	$346q^8p^4$	0	0	$534q^7p^5$	0	0	$275q^6p^6$

7.4.2. Процедура и распределение длительности последовательного анализа в стробах переменной величины

Рассмотрим теперь процесс окончательного обнаружения траектории в реальных стробах подтверждения, размеры которых являются переменными. Относительно правил формирования стробов, правил отбора отметок в эти стробы, а также относительно процедуры последовательного анализа в дальнейшем принимаются следующие исходные предпосылки.

1. Стробы подтверждения завязанного начала траектории рассчитываются, исходя из условия, чтобы истинная отметка попадала в них с вероятностью, близкой к единице.

2. Вероятность обнаружения в стробах подтверждения истинной отметки принимается постоянной величиной. Это обусловлено тем, что на участке в несколько (до десятка) обзоров, в течение которых производится подтверждение траектории цели, вероятность обнаружения истинной отметки изменяется незначительно.

3. Вероятность обнаружения ложной отметки в стробах подтверждения определяется плотностью ложных отметок в зоне обзора и размерами стробов. Плотность ложных отметок на единицу объема строба (разрешаемый объем РЛС) есть величина постоянная.

4. В процессе анализа, при попадании отметки в очередной строб, размеры следующего строба устанавливаются минимальными независимо от числа пропусков между отметками, по которым производится экстраполяция на следующий обзор.

5. При попадании в строб нескольких отметок для подтверждения траектории выбирается та из них, которая отобрана первой.

При указанных предпосылках «веса» событий, состоящих в отсутствии отметок в стробах подтверждения (веса нулей), не зависят от объема этих стробов, а веса событий, состоящих в попадании отметок в стробы подтверждения (веса единиц), определяются только объемом стробов. Возможные размеры стробов, в свою очередь, зависят от допустимого числа пропусков i отметок подряд в процессе последовательного анализа. Если, например, оставить неизменной процедуру, рассмотренную в предыдущем пункте, то максимальное допустимое число пропусков отметок (неподтверждений траектории) равно 10. Но теперь на каждом шаге анализа размеры стробов должны увеличиваться в соответствии с суммарными ошибками измерения и экстраполяции координат на i периодов обзора, см. формулу (3.19).

Для случая экстраполяции координаты по двум равноточным измерениям на i обзоров рост отношения линейного размера строба к среднеквадратичному значению ошибки измерения иллюстрируется табл. 7.2.

Из табл. 7.2 следует, что уже при экстраполяции на 4—5 обзоров линейные размеры строба составляют $\Delta U_{стр} \approx (40 \div 50)\ \sigma_{U\ изм}$, а при экстраполяции на 10 обзоров $\Delta U_{стр} \approx 90\ \sigma_{U\ изм}$. Если, например, взять обычную обзорную РЛС с $r_{макс} = 300$ *км* и $\sigma_{r\ изм} = 500$ ж, то при экстраполяции на 10 обзоров размер строба по дальности со-

Таблица 7.2

i	I	2	3	4	5
$\Delta U_{стр}/\sigma_{Uизм}$	14,7	22,5	31.2	38,8	47,3
t	6	7	8	9	10
$\Delta U_{стр}/\sigma_{Uизм}$	55,3	64,0	72.4	81,0	89.2

ставляет уже $r_{макс}/6$. Применение таких стробов нецелесообразно по крайней мере из-за резкого ухудшения разрешающей способности процесса вторичной обработки. Очевидно, следует ограничиться числом периодов экстраполяции не более 4 — 5. Но такое ограничение приводит к необходимости усечения процедуры последовательного анализа по числу пропусков отметок подряд. Это соответствует переменному значению нижнего порога в зависимости от накопленного веса траектории.

Таким образом, первым важным результатом рассмотрения процесса последовательного анализа в переменных стробах является доказательство необходимости установления переменного нижнего порога сброса по допустимому числу пропусков подряд отметок в стробах.

В следующем примере предполагаем, что процедура последовательного анализа дополнена ограничением числа пропусков подряд, причем для конкретного расчета возьмем это число равным 4. Кроме того, зададимся следующими значениями параметров процесса последовательного анализа: $\Pi_B = 0$, ПА $= 5$, $w_0 = 2, \Delta w(0) = -0{,}5$.

Для вычисления Δw (1) зададимся:

— вероятностью появления ложной отметки в разрешаемом объеме РЛС $p_0 = 0{,}6 \cdot 10^{-4}$. Кроме того, будем полагать $\sigma_{U\,изм} = \delta_U/2\sqrt{3}$, где $U =$ (г, β, е).

Результаты расчетов размеров стробов, вероятностей попадания в стробы ложных отметок и приращений отношения правдоподобия при $X_i = 1$ сведены в табл. 7.3.

Полученные расчетные значения приращения отношения правдоподобия являются дробными числами. Можно воспользоваться описанным выше методом приведения дробных приращений путем расширения числа состояний соответствующей цепи Маркова. В нашем случае общим знаменателем приведения будет число 50. В соответствии с этим для приведенной цепи получим $\Pi_B = 0$, $\Pi_A = 250$, $w_0 = 100$, $\Delta w\ (0) = -25$, $\Delta w_1\ (1) = 108$, $\Delta w_2\ (1) = 81$, $\Delta w_3\ (1) = 60$, $\Delta w_4\ (1) = -47$, $\Delta w_5\ (1) = 36$, а число ее состояний будет равно 251. Анализ такой цепи является исключительно громоздким.

Для приближенного анализа можно ограничиться грубым округлением приращений (последняя строка табл. 7.3). Одновременно с этим целесообразно также повысить до минус единицы «вес» нуля. Увеличе-

Таблица 7.3

Размеры стробов (в числах разрешаемых объемов РЛС)	80	270	690	1400	2540
Вероятность попадания в строб ложной отметки	$4{,}8\cdot10^{-3}$	$1{,}6\cdot10^{-2}$	$4{,}1\cdot10^{-2}$	0,08	0,14
Приращения отношения правдоподобия при $X_i=1$	2,16	1,62	1,20	0,94	0,72
Округленные приращения отношения правдоподобия	2	2	1	I	1

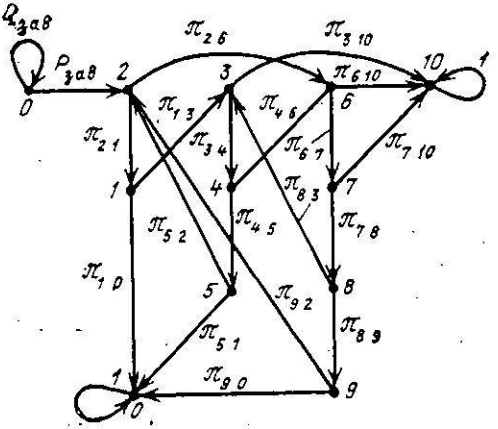


Рис. 7.5. Граф алгоритма последовательного анализа.

ние веса нуля до минус единицы приводит к недопущению более трех пропусков подряд.

Граф алгоритма поледовательного анализа при указанных выше округлениях весов единиц и нулей приведен на рис. 7.5. Обозначенные на этом графе вероятности переходов равны:

$$
\begin{aligned}
\pi_{26} &= \pi_{3\,10} = \pi_{6\,10} = 1 - {}_0 - p_S)\,(1-p_{N1}),\\
\pi_{13} &= \pi_{46} = \pi_{7\,10} = 1-(1-p_S)\,(1-p_{N2}),\\
\pi_{52} &= \pi_{83} = 1-(1-p_S)\,(1-p_{N3}),\\
\pi_{92} &= 1-(1-p_S)\,(1-{}_{N4}),\\
\pi_{21} &= \pi_{34} = \pi_{67} = (1-p_S)\,(1-p_{N1}),\\
\pi_{10} &= \pi_{45} = \pi_{78} = (1-p_S)\,(1-p_{N2}),\\
\pi_{50} &= \pi_{89} = (1-p_S)\,(1-p_{N3}),\\
\pi_{9\,д} &= (1-p_S)\,(1-p_{N4}).
\end{aligned}
\qquad (7.4.7)
$$

Теперь, для расчета вероятности окончания последовательного анализа на i-м шаге можно воспользоваться методикой, изложенной в предыдущем пункте. Таблица результатов расчета вероятностей достижения каждого из состояний на i-м шаге, аналогичная табл. 7.1, в данном случае не приводится из-за громоздкости.

В качестве примера более корректного подхода к округлению приращений отношения правдоподобия, полученных в табл. 7.3, можно сначала удвоить все приращения весов (в том числе и приращение веса

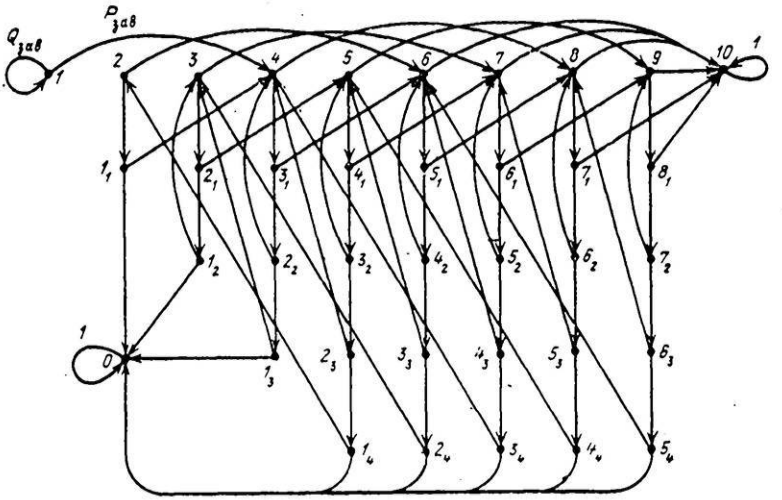


Рис. 7.6. Граф алгоритма последовательного анализа при допустимом числе пропусков, равном 4.

нуля), а затем округлить их до ближайших целых чисел. В результате получим: $\Delta w_1(1) = 4$, $\Delta w_2(1) = 3$, $\Delta w_3(1) = 2$, $\Delta w_4(1) = 2$, $\Delta w_5(1) = 1$, $\Delta w(0) = -1$. Кроме того, необходимо увеличить верхний порог ПА ДО 10 и исходное состояние до 4. Ограничение процедуры по числу пропусков подряд необходимо теперь производить искусственно, исходя из допустимых максимальных размеров стробов подтверждения. Если допустимое число пропусков равно 4, то граф алгоритма последовательного анализа имеет вид, показанный на рис. 7.6.

7.4.3. Особенности анализа объединенного алгоритма обнаружения траектории по методу последовательного анализа

Алгоритм «завязки» траектории совместно с рассмотренными в данном параграфе алгоритмами подтверждения (окончательного обнаружения) образуют объединенный алгоритм обнаруження траектории по методу последовательного анализа.

Составляющие алгоритмы объединяются- в данном случае последовательно. Поэтому граф объединенного алгоритма, состоящего из алгоритма завязки по критерию («2/т») и алгоритма подтверждения (рис. 7.3), имеет вид, показанный на рис. 7.7.

При последовательной композиции графов последнее a_m состояние графа алгоритма завязки траектории совмещается с начальным (вторым) состоянием графа алгоритма подтверждения (состояниям второго графа присвоен дополнительный индекс «п»). При сбросе как на первом, так и на втором этапах работы объединенного алгоритма граф переходит в исходное состояние 0, Состояние 10п является поглощающим.

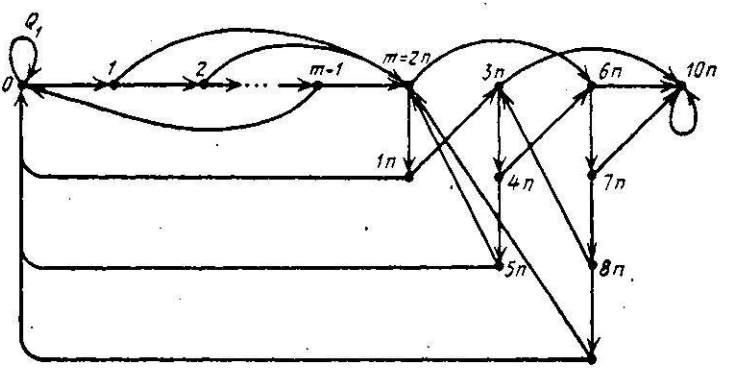


Рис. 7.7. Граф объединенного алгоритма обнаружения траектории.

При анализе объединенного алгоритма с целью определения среднего числа шагов до вынесения окончательного решения об обнаружении траектории или с целью определения вероятности окончания анализа на i-м шаге можно воспользоваться общей методикой анализа цепи Маркова с поглощающим экраном. Однако возможен и другой подход, состоящий в следующем. Сначала при заданном m определяется вероятность завязки траектории $P_{зав}$. Эта вероятность затем принимается в качестве исходной для анализа алгоритма подтверждения. В частности, в начальный момент времени подтверждения (при $j = 0$) вероятность того, что система находится в состоянии 2 п, равна теперь $P_{зав}$ (вместо единицы). Дальнейший анализ производится, как и ранее.

7.5. Статистический анализ алгоритмов серийных испытаний при обнаружении ложных траекторий

Анализ статистических характеристик метода серийных испытаний будет производить сразу для объединенного алгоритма обнаружения траекторий, представляющего собой последовательное соединение двух составляющих алгоритмов: алгоритма завязки начала траектории по критерию «2/m» и алгоритма подтверждения обнаруженного начала траектории по критерию «l/n».

мента окончания обслуживания в процессоре. Для k-й заявки это время складывается из времени ожидания обслуживания $t_{ож\,k}$ и собственно времени обслуживания $\tau_{обсл\,k}$:

$$\bar{\tau}_{\Sigma k} = \bar{t}_{ож\,k} + \bar{\tau}_{обсл\,k}. \qquad (7.13)$$

Обычно под $\bar{t}_{ож\,k}$ и $\bar{\tau}_{обсл\,k}$ подразумеваются средние значения соответствующих интервалов времени.

Средняя длительность ожидания обслуживания зависит от дисциплины обслуживания потока поступающих заявок — порядка выбора заявок многомерного потока на обслуживание из числа находящихся в очереди. Различают следующие дисциплины обслуживания:

бесприоритетная — обслуживание в порядке поступления заявок в систему («кто раньше пришел, тот раньше обслуживается»);

с относительными приоритетами — преимущественное право на обслуживание учитывается только в момент выбора очерёдной заявки на обслуживание;

с абсолютными приоритетами — поступившая заявка с более высоким, чем у обслуживаемого требования, приоритетом прерывает обслуживание менее приоритетной заявки и немедленно принимается на обслуживание.

При бесприоритетной дисциплине обслуживания среднее время ожидания для всех заявок одинаково и равно

$$\bar{t}_{ож} = \sum_{k=1}^{M} \rho_k \bar{\tau}_{обсл\,k} (1 + \nu_k^2)/2(1 - R), \qquad (7.14)$$

где $\nu_k = \sigma_{обсл\,k}/\bar{\tau}_{обсл\,k}$ — коэффициент вариации, определяемый отношением среднеквадратического отклонения длительности обслуживания к ее среднему значению. В соответствии с (7.14) минимальное среднее время ожидания будет при постоянном времени обслуживания заявок всех типов, когда $\nu_k = 0$. При экспоненциальном распределении времени обслуживания $\nu_k = 1$ и, следовательно, среднее время ожидания заявок в очереди увеличивается в два раза по сравнению со случаем постоянного времени обслуживания.

Одной из наиболее распространенных в информационных системах дисциплин обслуживания является дисциплина с фиксированными относительными приоритетами для каждого из составляющих потоков заявок. При такой дисциплине обслуживания появление заявки с высоким приоритетом не вызывает прерывания обслуживания зая-

бов—исходя из суммарных ошибок измерений и экстраполяции координат.

При попадании новой отметки в один из n стробов второго этапа граф переходит в поглощающее состояние a_{m+n}, что соответствует принятию окончательного решения об обнаружении траектории. В противном случае граф из состояния a_{m+n-1} переходит в исходное состояние a_0 (завяза'нная траектория сбрасывается как ложная).

Объем стробов первичного захвата, выраженный числом элементарных (разрешаемых) объемов РЛС, вычисляется по формуле (2.7). Объем стробов на втором этапе обнаружения траектории вычисляется по формуле (3.19).

Подчеркнем, что каждому состоянию графа (от I до $(m+n-1)$) соответствует строб определенных размеров.

Для определения вероятности обнаружения ложной траектории необходимо прежде всего найти условную вероятность π_1 того, что случайная точка, начиная движение из состояния a_1, когда-нибудь достигнет состояния a_{m+n} и останется в нем. Эта вероятность находится из решения следующей системы линейных уравнений, записываемой непосредственно на основе графа рис. 7.8

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = q_{N1}\pi_2 + p_{N1}\pi_m,\\
&\pi_2 = q_{N2}\pi_3 + p_{N2}\pi_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\pi_{m-1} = p_{N,m-1}\pi_m,\\
&\pi_m = q_{N,m}\pi_{m+1} + p_{N,m},\\
&\pi_{m+1} = q_{N,m+1}\pi_{m+2} + p_{N,m+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\pi_{m+n-1} = p_{N,m+n-1},
\end{aligned} \qquad (7.5.1)$$

Где $p_{N,i}$ — вероятность попадания ложных отметок в стробы первичного захвата, $i = \overline{1, m-1}$; $q_{Ni} = 1 - p_{Ni}$; p_{Nj} — вероятность попадания ложных отметок в стробы подтверждения, $j = \overline{m, m+n-1}$; $q_{Nj} = 1 - p_{Nj}$.

Решение системы уравнений (1) удобно сначала получить для конкретных значений m и n. Например, при $m = n = 4$ получим:

$$\pi_1 = (q_{N1}q_{N2}q_{N3} + q_{N1}q_{N2} + q_{N1})(q_{N4}q_{N5}q_{N6}p_{N7} + q_{N4}q_{N5}p_{N6} + q_{N4}p_{N5} + p_{N4}) = \left(\prod_{i=1}^{3}(1-q_{Ni})\right)\left(1 - \prod_{j=4}^{7} q_{Nj}\right).$$

По аналогии для произвольных m и n можно записать

$$\pi_1 = (q_{N1}\cdots q_{N,m-3}p_{N,m-2} + \cdots + p_{N1}) \times q_{N,m}q_{N,m+1}\cdots q_{N,m+n-2}p_{N,m+n-1} + q_{Nm}\cdots q_{N,m+n-3}p_{N,m+n-2} + \cdots + p_{N,m} = \left(1 - \prod_{i=1}^{m-1} q_{Ni}\right)\left(1 - \prod_{j=m}^{m+n-1} q_{Nj}\right). \qquad (7.5.2)$$

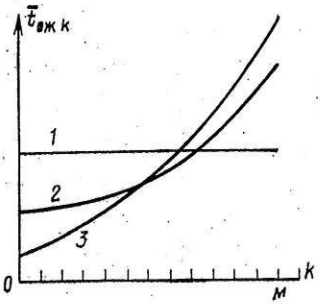


Рис. 7.8

гб'времени ожидания обслуживания от приоритетов заявок, приведены на рис. 7.8. При бесприоритетном обслуживании (*1* на рис. 7.8) среднее время ожидания постоянно, при относительных *(2)* и абсолютных (3) приоритетах имеет место уменьшение времени ожидания более приоритетных заявок за счет увеличения этого времени для менее приоритетных заявок.

Обычно в системе обработки радиолокационной информации необходимо выполнять жесткие ограничения на время ожидания только для заявок отдельных потоков, что требует присвоения им абсолютных приоритетов (например, заявок на прием информации). Для других заявок имеется запас по времени ожидания, и им можно присвоить относительные приоритеты. Часть заявок можно обслуживать в порядке простой очереди. Таким образом, приходим к необходимости применения смешанных дисциплин обслуживания, анализ которых производится в каждом конкретном случае методом моделирования.

Возвращаясь к выражению (7.13). подчеркнем, что среднее время ожидания $\bar{t}_{ож\,k}$ является составной частью общего времени пребывания требования в системе наряду с временем обслуживания $\bar{\tau}_{обсл\,k}$. Однако время обслуживания не изменяется с изменением дисциплин обслуживания. Поэтому в качестве основной временно́й характеристики функционирования ЦВМ считается среднее время ожидания обслуживания $\bar{t}_{ож\,k}$.

Другие характеристики СМО будут вводиться по мере необходимости в дальнейшем.

Обоснование требований к эффективному **быстродействию ЦВМ (ЦВС)** при обработке потока заявок. Исходными данными для обоснования требований к эффективному быстродействию ЦВМ (ЦВС) в рассматриваемом случае являются:

алгоритм вычислительного процесса, представленный в виде граф-схемы для каждого из составляющих потоков заявок;

трудоемкость составляющих комплексных алгоритмов, выраженная средним числом и дисперсией числа приве-

Вероятность $\pi_{\text{подтв}}$ в этом случае можно определить непосредственно из графа:

$$\pi_{\text{подтв}} = p_{Nm}\, p_{Nm+1}\, p_{N,m+2} + p_{Nm}\, p_{N,m+1}\, q_{N,m+2}\, p_{N,m+5} + p_{Nm}\, q_{N,m+1}\, p_{N,m+3}\, p_{N,m+4} + q_{Nm}\, p_{N,m+6}\, p_{N,m+7}\, p_{N,m+8}; \quad (7.5.5)$$

В данном случае критерий подтверждения допускает одиночный пропуск отметок в стробе. Поэтому стробы подтверждения будут двух типов:

— стробы, соответствующие состояниям m, $m+1$, $m+2$, $m+4$, $m+7$ и $m+8$, в которые алгоритм переходит при наличии отметки в предыдущем стробе,

— стробы, соответствующие состояниям $m+3$, $m+5$, $m+6$, в которые алгоритм переходит при пропуске отметки в предыдущем стробе.

Вероятность попадания ложной отметки в строб первого типа обозначим p_{N1}, а в строб второго типа — p_{N2}. Тогда из выражения (5) получим

$$\pi_{\text{подтв}} = p_{N1}^3 + 3p_{N1}^2\, q_{N1}\, p_{N2}, \quad (7.5.6)$$

где $q_{N1} = 1 - p_{N1}$. В общем случае, для произвольных n условная вероятность подтверждения по критерию «$n - 1/n$» определяется по формуле

$$\pi_{\text{подтв}} = p_{N1}^{n-1} + (n-1)\, p_{N1}^{n-2}\, q_{N1}\, p_{N2}. \quad (7.5.7)$$

Для критерия подтверждения «l/n», где $l \neq 1$, $n - 1$, n, получить формулу для $\pi_{\text{подтв}}$ в общем виде не представляется возможным, поэтому такие критерии анализируются каждый в отдельности.

В качестве примера приведем окончательное выражение для вычисления условной вероятности подтверждения траектории по критерию «2/4».

$$\pi_{\text{подтв}} = p_{N1}^2 + 2p_N q_{N1} p_{N2} + 2p_{N1}\, q_{N1}\, q_{N2}\, p_{N3} + q_{N1}^2 p_{N2}^2,$$

где p_{N3} — вероятность попадания ложной отметки в строб, образованный после двух пропусков подряд.

В справедливости этой формулы читателям предлагается убедиться самостоятельно.

7.5.2. Среднее число ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в установившемся режиме работы

Фильтрующую способность алгоритма обнаружения траекторий можно характеризовать средним за период обзора числом ложных траекторий $\overline{N}_{\text{лт}}$, передаваемых на сопровождение. Это число связано с вероятностью π_1 следующим соотношением

$$\overline{N}_{\text{лт}} = \pi_1 \overline{N}_1, \quad (7.5.8)$$

где $\bar{N}_1$ — среднее за период обзора число одиночных отметок, принимаемых в качестве начальных точек ложных траекторий в установившемся режиме работы.

Таким образом, для расчета $\bar{N}_{лт}$ необходимо сначала получить формулу для $\bar{N}_1$. Вывод этой формулы производится для простейшего алгоритма, реализующего критерий «2/m + 1/n».

В общем случае (для алгоритма «$2/m + 1/n$») число одиночных отметок, становящихся начальными точками новых ложных траекторий, после $r + 1$ обзора, можно подсчитать по формуле

$$m+n-1$$

где $N_{ло}$ (г + 1) — число ложных отметок, поступающих на вход ЦВМ обнаружения траекторий за $r + 1$ период обзора; p_{Nj} — вероятность попадания ложных отметок в строб с объемом V_j (число таких стробов равно $m + n - 1$), N_j (г) — число стробов V_j, образовавшихся в r-м обзоре ($j = 1, 2, \ldots, m + n - 1$).

Вычитаемое в формуле (9) представляет собой число ложных отметок текущего обзора, попавших в стробы всех находящихся в процессе обнаружения ложных траекторий, при условии, что эти стробы не перекрываются.

В свою очередь, для N_j (г) можно записать следующую формулу:

$$N_j(r) = \sum_{i=0}^{r} N_1(i)\, P_{1j}^{(r-i)}. \qquad (7.5.10)$$

где $N_1(i)$ — число начальных точек ложных траекторий, образованных в i-м обзоре; $P_{1j}^{(r-i)}$ — вероятность перехода системы (см. граф на рис, 7.8) из исходного состояния a_1 в состояние a_j за $(r - i)$ шагов.

При расчете по формуле (9) необходимо дополнительно предположить:

$$N_1(0) = N_{ло}(0),$$

$$P_{1j}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 1, \\ 0 & \text{при } j > 1. \end{cases}$$

Перейдем в выражении (10) к новой переменной суммирования $s = r - I$, что соответствует переносу начала отсчета на момент окончания r-го обзора. Переменная s представляет собой число шагов (обзоров), необходимых для перехода графа алгоритма из исходного состояния a_1 в состояние a_j. Для алгоритма обнаружения типа «$2/m + 1/n$» максимальное значение s соответствует максимальному числу шагов, необходимых для перехода из состояния a_1 в состояние a_{m+n-1}, и равно $s_{макс} = m + n - 2$. В этом легко убедиться, если в графе алгоритма (см. рис. 7.8) выделить самую длинную ветвь.

С учетом приведенных выше преобразований формула для расчета $N_j(r)$ записывается в виде

$$N_j(r) = \sum N_1(r-s)\,P_{1j}^{(s)}. \qquad (7.5.11)$$

В формуле (11) будут неравными нулю только слагаемые, для которых $P_{1j}^{(s)} \neq 0$. Дальнейшая задача состоит в вычислении вероятностей переходов $P_{1j}^{(s)}$. Для ее решения может быть использован подробно рассмотренный в § 5.5 рекуррентный метод расчета вероятностей состояний стохастических автоматов.

Система рекуррентных уравнений для определения вероятности $P_{1j}^{(s)}$ записывается в виде (см. граф на рис. 7.8):

$$P_{11}^{(s)} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = 0, \\ 0 & \text{при } s > 1, \end{cases}$$

$$P_{12}^{(s)} = P_{11}^{(s-1)}\,q_{N1},$$

$$P_{13}^{(s)} = P_{12}^{(s-1)}\,q_{N2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{1m}^{(s)} = P_{11}^{(s-1)}\,p_{N1} + P_{12}^{(s-1)}\,p_{N2} + \ldots + P_{1,m-1}^{(s-1)}\,p_{Nm-1} = \sum_{l=1}^{m-1} P_{1l}^{(s-1)}\,p_{Nl},$$

$$P_{1m+1}^{(s)} = P_{1m}^{(s-1)}\,q_{Nm}, \qquad (7.5.12)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{1m+n-1}^{(s)} = P_{1m+n-2}^{(s-1)}\,q_{m+n-2}.$$

Результаты решения системы (12) для конкретного алгоритма «2/4 + 1/4» сведены в табл. 7.4.

Из таблицы следует, что для расчета вероятности $P_{1j}^{(s)}$ в r-м обзоре необходимо хранить информацию максимум за 6 предыдущих обзоров. Траектории, по которым в r-м обзоре образован строб V_γ, будут обнаружены или сброшены в следующем (г + 1)-м обзоре. Это значит, что в процессе обнаружения ложной траектории алгоритмом «2/4 + 1/4» максимальная задержка информации в ОЗУ ЦВМ равна 7 периодам обзора. В общем случае, для алгоритма «2/m + 1/n» максимальное время хранения информации по одной ложной траектории равно m + л − 1 обзоров.

Запишем теперь формулу (9) с учетом формулы (11)

$$N_1(r+1) = N_{\text{ло}}(r+1) - \sum^{m+n-1} p_{Nl} \sum^{m+n-2} N_1(r-s)\,P_{1j}^{(s)}. \qquad (7.5.13)$$

В установившемся режиме работы ($r \to \infty$) можно положить: $N_1(r + 1) = N_1(\text{г}) = N_1(r - 1) = \ldots = N_1[r - (m + n - 2)\ 1 = \bar{N}_1$.

Таблица 7.4

s	$P_{1j}^{(s)}$						
	$P_{11}^{(s)}$	$P_{12}^{(s)}$	$P_{13}^{(s)}$	$P_{14}^{(s)}$	$P_{15}^{(s)}$	$P_{16}^{(s)}$	$P_{17}^{((s)}$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	q_{N1}	0	p_{N1}	0	0	0
2	0	0	$q_{N1}q_{N2}$	$q_{N1}p_{N2}$	$p_{N1}q_{N4}$	0	0
3	0	0	0	$q_{N1}q_{N2}q_{N3}$	$q_{N1}p_{N2\ N4}$	$p_{N1}q_{N4}q_{N5}$	0
4	0	0	0	0	$q_{N1}q_{N2}p_{N\ q_{N4}}$	$q_{N1}p_{N2}q_{N4}q_{N5}$	$p_{N1}q_{N4}q_{N5}q_{N6}$
5	0	0	0	0	0	$q_{N1}q_{N2}p_{N3}q_{N4}q_{N5}$	$q_{N1}p_{N2}q_{N4}q_{N5}q_{N6}$
6	0	0	0	0	0	0	$q_{N1}q_{N2}p_{N3}q_{N4}q_{N\ 5}q_{N6}$

Тогда получим $N_{ло}(r+1)=N_{ло}(r)=\ \cdot\ \cdot\ \cdot=N_{ло}[r-(m+n-2)]=$ $=\overline{N}_{ло}$,

$$\overline{N}_1 = \frac{\overline{N}_{ло}}{1+\sum_{j=1}^{m+n-1} p_{Nj} \sum_{s=0}^{m+n-2} p_{1j}^{(s)}}. \qquad (7.5.14)$$

Формула (14), с учетом системы уравнений (12), позволяет рассчитывать среднее за обзор число начальных точек ложных траекторий, образующихся в установившемся режиме работы. Зная $\overline{N}_1$ и условную вероятность захвата π_1 (см. предыдущий пункт), можно по формуле (8) рассчитать зависимость среднего числа передаваемых на сопровождение ложных траекторий $\overline{N}_{лт}$ от средней плотности помех на входе $\overline{N}_{ло}$.

Для алгоритмов, в которых критерий подтверждения отличается от «l/n» формула (14), естественно, остается справедливой. Необходимо только уточнить верхние пределы суммирования по j и s.

Верхний предел суммирования по j определяется общим числом стробов, образуемых в процессе реализации алгоритма. Для алгоритма с критерием подтверждения «l/m» ($l \neq 1$, $n-1$, я) это число больше $m+$ я -1. Поэтому в общем случае верхний предел по j равен $m+\nu-1$, где $\nu \geqslant n$.

Верхний предел суммирования по s определяется максимальным числом шагов, которые могут быть сделаны при переходе из состояния a_1 в состояние, предшествующее поглощающему. Легко показать, что это число не зависит от значения l в критерии «l/n» и всегда равно $m+n-2$.

Таким образом, в общем виде формула для определения числа одиночных отметок, принимаемых за начало ложных траекторий, при использовании алгоритма с критерием «$2/m+l/n$» записывается в виде

$$\overline{N}_1 = \frac{\overline{N}_{ло}}{1+\sum_{j=1}^{m+\nu-1} \sum_{s=0}^{m+n-2}}, \qquad (7.5.15)$$

где ν — число, определяемое из графа алгоритма.

В качестве примера применения рассмотренной методики для анализа алгоритмов, в которых критерий подтверждения отличен от $1/n$, приведем в окончательном виде табл. 7.5, аналогичную табл. 7.4, для критерия «$2/3+2/3$».

Как видно из табл. 7.5, в данном случае $\nu=5$ (при $n=3$), $s_{\text{маис}}=4$, т. е. равно $m+n-2$.

Таблица 7.5

s	$P_{11}^{(s)}$						
	$P_{11}^{(s)}$	$P_{12}^{(s)}$	$P_{13}^{(s)}$	$P_{14}^{(s)}$	$P_{15}^{(s)}$	$P_{16}^{(s)}$	$P_{17}^{(s)}$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	q_{N1}	p_{N1}	0	0	0	0
2	0	0	$q_{N1}p_{N2}$	$p_{N1}p_{N3}$	0	$p_{N1}q_{N3}$	0
3	0	0	0	$q_{N1}p_{N2}p_{N3}$	$p_{N1}p_{N3}q_{N4}$	$q_{N1}p_{N2}q_{N3}$	$p_{N1}q_{N3}p_{N6}$
4	0	0	0	0	$q_{N1}p_{N2}p_{N3}q_{N4}$	0	$q_{N1}p_{N2}q_{N3}p_{N6}$

Для сравнения фильтрующей способности некоторых алгоритмов рассматриваемого типа на рис. 7.10 приведены результаты расчета среднего числа передаваемых на сопровождение ложных траекторий $\bar{N}_{лт}$ в функции от среднего за обзор числа ложных отметок, поступающих на вход ЦВМ обнаружения траекторий. Из анализа графиков следует:

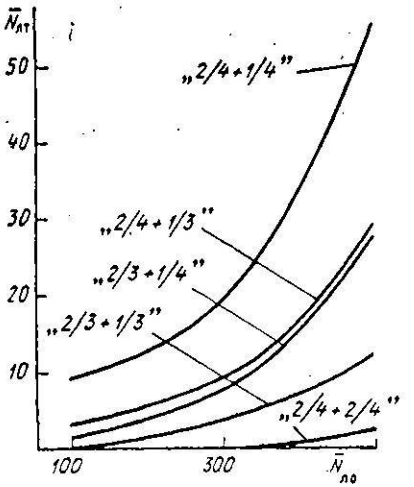


Рис. 7.10. Графики среднего числа передаваемых на сопровождение ложных траекторий.

1) фильтрующая способность алгоритмов, реализующих критерий серийных испытаний «$2/m + l/n$», увеличивается с уменьшением m и n и увеличением l,

2) увеличение l на единицу приводит к более существенному повышению фильтрующей способности, чем соответствующее уменьшение m и n.

Указанные свойства необходимо учитывать при выборе алгоритма, предназначаемого для практической реализации.

Если в системе ограничено допустимое число ложных траекторий, передаваемых на сопровождение, то совместный выбор $\bar{N}_{лт}$ и критериев алгоритма серийных испытаний позволяет предъявить требования к уровню помех на входе ЦВМ обнаружения траекторий.

7.5.3. Среднее число ложных траекторий, находящихся на обнаружении

При проектировании ЦВМ вторичной обработки радиолокационной информации иногда необходимо знать среднее число ложных траекторий, находящихся на обнаружении в установившемся режиме работы. Обозначим это число через $\bar{N}_{олт}$.

Очевидно, в процессе обнаружения находятся все ложные траектории, по которым не приняты окончательные решения о передаче на сопровождение или о сбросе. Число таких траекторий в установившемся режиме работы равно

$$N_{олт} = \sum_{j=1}^{} \bar{N}_j, \qquad (7.5.16)$$

где, в соответствии с выражением (11), в установившемся режиме

$$\bar{N}_j = \overline{\bar{N}_1} \sum_{s=0}^{m+n-2} P_{1j}^{(s)}. \qquad (7.5.17)$$

Подставляя в (16) выражение для $\bar{N}_j$, получаем:

$$\bar{N}_{олт} = \overline{\bar{N}_1} \sum_{j=1}^{m+\nu-1} \sum_{s=0}^{m+n-2} P_{1j}^{(s)}$$

или с учетом выражения (15) для $\bar{N}_1$ окончательно имеем

$$N_{олт} = N_{ло} \sum_{j=1}^{} \sum_{s=0}^{} P_{1j}^{(s)} \Big/ \left(1 + \sum_{j=1}^{} p_{Nj} \sum_{s=0}^{} P_{1j}^{(s)}\right). \qquad (7.5.18)$$

7.6. Статистический анализ алгоритмов серийных испытаний при обнаружении истинных траекторий

При анализе процесса обнаружения истинных траекторий необходимо, прежде всего, использовать исходные предпосылки, принятые в п. 7.4.2 относительно сбоев при «завязке» начала истинной траектории. Кроме того, необходимо дополнительно условиться о возможностях сбоев процесса подтверждения истинной траектории на втором этапе работы алгоритма, т. е. при реализации критерия подтверждения «l/n». Относительно последнего условимся, что правильное подтверждение завязанной истинной траектории в одном из стробов второго этапа произойдет только в случае, если в этот строб попала истинная отметка и она правильно отобрана (отселектирована) среди ложных для продолжения траектории. Если же в строб второго этапа попали только ложные отметки или произведен ошибочный отбор ложной отметки вместо истинной, то наступает сбой процесса обнаружения истинной траектории.

С учетом перечисленных предпосылок, вероятность обнаружения истинной траектории зависит не только от вероятности обнаружения истинных отметок в стробах, но также от плотности ложных отметок и эффективности метода отбора истинных отметок среди ложных на втором этапе алгоритма.

В данном параграфе излагается методика расчета нарастающей *вероятности обнаружения истинных траекторий для некоторых алгоритмов*, реализующих критерии «$2/m + l/n$».

7.6.1. Нарастающая вероятность обнаружения истинной траектории по критерию «2/m+1/n»

Функционирование алгоритма, реализующего критерий «$2/m + 1/n$» при обнаружении истинных траекторий, поясняется с помощью графа, изображенного на рис. 7.11. Особенностью этого графа, по сравнению с аналогичным графом (см. рис. 7.8), иллюстрирующим функционирование рассматриваемого алгоритма в процессе обнаружения ложных траекторий, является наличие неравных нулю вероятностей переходов в исходное состояние a_0 из любого промежуточного состояния a_j, $j = \overline{1, (m+n-1)}$.

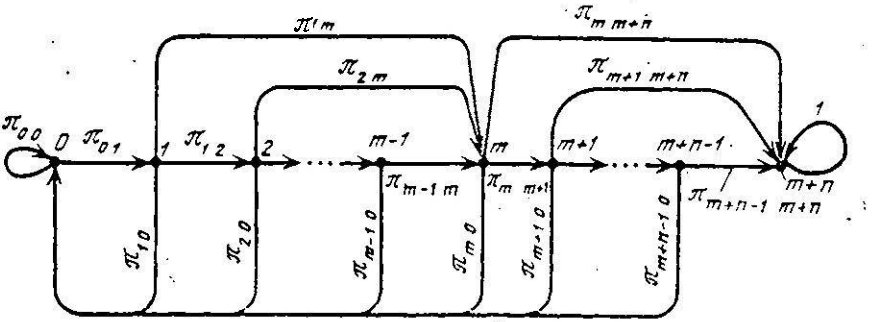


Рис. 7.11. Граф функционирования алгоритма серийных испытаний при обнаружении истинных траекторий.

Вероятность возвращения в исходное состояние a_0 из промежуточного состояния a_i, $i = \overline{1, m-1}$ равна вероятности одновременного наступления двух событий, первое из которых состоит в том, что в соответствующем стробе первичного захвата истинная отметка не обнаружена, а второе — в том, что в этот строб попала хотя бы одна ложная отметка, т. е.

$$\pi_{i0}(r) = [1 - p_S(r)]\, p_{Ni}, \qquad (7.6.1)$$

где $ps\ (r)$ — вероятность обнаружения истинной отметки в r-м обзоре (независимая от размеров строба Vj); p_{Ni} — вероятность обнаружения хотя бы одной ложной отметки в стробе V_i.

Вероятность возвращения схемы в исходное состояние a_0 из промежуточного состояния a_j, $j = \overline{m, m+n-1}$ равна сумме вероятностей двух несовместимых событий A_r и B_r, т. е.

$$P_{j0}(r) = P_j(A_r) + P_j(B_r), \quad (j = m, m+1 \ldots m+n-1), \qquad (7.6.2)$$

где

$$P_j(A_r) = [1 - p_S(r)]\, p_{Nj},$$
$$P_j(B_r) = p_S(r)\, p_{Nj}\, [1 - P_c(V_j)] \qquad (7.6.3)$$

— вероятность того, что в стробе V_j есть истинная и ложная отметки, но для подтверждения траектории отобрана ложная отметка. $P_c(V_j)$ —

вероятность правильной селекции истинной отметки среди ложных в стробе V_j.

Теперь, исходя из общих принципов работы алгоритма и с учетом выражений (1) — (3) можно определить вероятности переходов $\pi_{ij}(r)$ графа (рис. 7.11) (или элементы соответствующей матрицы переходных вероятностей).

Эти вероятности равны:

$$
\begin{aligned}
&\pi_{0\,0}(r) = 1 - p_S(r),\\
&\pi_{0\,1}(r) = p_S(r),\\
&\pi_{1\,0}(r) = p_{N1}(1 - p_S(r)),\\
&\pi_{1\,2}(r) = (1 - p_{N1})(1 - p_S(r)),\\
&\pi_{1\,m}(r) = p_S(r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pi_{m-1\;0}(r) = (1 - p_S(r)),\\
&\pi_{m-1\;m}(r) = p_S(r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pi_{m\,0}(r) = (1 - p_S(r))\,p_{Nm} + p_S(r)p_{Nm}(1 - P_c(V_m)),\\
&\pi_{m\;m+1}(r) = (1 - p_S(r))(1 - p_{Nm}),\\
&\pi_{m\;m+n}(r) = p_S(r)(1 - p_{Nm}) + p_S(r)\,p_{Nm}P_c(V_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pi_{m+n-1\;0}(1 - p_S(r))\,p_{N\,m+n-1} + P_S(r)\,p_{N\,m+n-1}(1 - P_c(V_{m+n-1})),\\
&\pi_{m+n-1\;\;m+n}(0 = p_S(\Gamma)(1 - p_{N\;m+n-1}) + p_S r)\,p_{Nm+n-1}P_c(V_{m+n-1}),\\
&\pi_{m+n\;\;m+n}(r) = 1\,.
\end{aligned}
\qquad (7.6.4)
$$

Здесь подчеркнем еще раз, что в формулах для вероятностей перехода (4) вероятность обнаружения полезного сигнала

$$\mathbf{P}(r) = \|P_0(r)\,P_1(r)\ldots P_{m+n}(r)\| = \mathbf{P}(r-1)\,\Pi_{\langle 2/m+1/n\rangle}(r) \qquad (7.6.5)$$

где P (r — 1) — вектор-строка вероятностей состояний на предыдущем $(r-1)$-м шаге; $\Pi_{\langle 2/m+1/n\rangle}(r)$ — матрица переходных вероятностей на r-м шаге.

В соответствии с выражением (5) и с учетом формул (4), определяющих элементы матрицы переходных вероятностей $\Pi_{\langle 2/m+1/n\rangle}(r)$ система рекуррентных уравнений для определения составляющих вектора P (r) записывается в виде:

$$
\begin{aligned}
&P_0(r) = P_0(r-1)\,\pi_{0\cdot 0}(r) + P_1(r-1)\,\pi_{1\,0}(r) +\\
&+\ldots + P_{m+n-1}(r)\,\pi_{m+n-1\;0}(r) = \sum_{j=1}^{m+n-1} P_j(r-1)\,\pi_{j\,0}(r),\\
&P_1(r) = P_0(r-1)\,\pi_{0\,1}(r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_m(r) = P_1(r-1)\,\pi_{1\,m}(r) + P_2(r-1)\,\pi_{2\,m}(r) +
\end{aligned}
\qquad (7.6.6)
$$

Отбор пригодных ЦВМ заключается в отыскании в множестве $\mathbf{M}=\{M_i\}_1^m$ одной или нескольких машин, удовлетворяющих заданным требованиям $\{K_j\}_1^n$. При этом возможны следующие исходы (результаты) сравнения параметров ЦВМ с набором требований К:

из имеющейся номенклатуры машин только один тип полностью удовлетворяет всем требованиям;

ни одна из выпускаемых ЦВМ не удовлетворяет полностью предъявленным требованиям;

имеется несколько типов ЦВМ, удовлетворяющих предъявленным требованиям.

В первом случае для проектируемой ЦВС выбирается единственная удовлетворяющая требованиям машина. Во втором необходимы либо корректировка требований за счет упрощения алгоритмов решаемых задач и изменения условий эксплуатации, либо принятие решения о построении многомашинной (многопроцессорной) ЦВС на основе однотипных или разнотипных ЦВМ, выпускаемых промышленностью. В третьем случае рещается задача выбора наилучшей машины из числа прошедших сравнение на соответствие предъявленным требованиям. При этом возможны несколько способов такого выбора. Здесь рассматривается простейший из них — способ ранжирования, который состоит в следующем.

Пусть требования к ЦВМ можно расположить по признаку убывания их важности, например, в такой последовательности: K_1 — надежность, K_2 — масса, K_3 — потребляемая мощность и т. д. Параметры сравниваемых ЦВМ располагаются в соответствующем порядке. Тогда, если у некоторой машины первый по важности (рангу) параметр существенно лучше, чем у других, то независимо от значения других параметров данная машина считается лучшей. Если у нескольких мащин первый по рангу параметр примерно одинаков, то лучшими среди них считаются те, у которых лучше второй по рангу параметр и т. д. до тех пор, пока не будет выбрана единственная машина. Процедура оптимизации является многошаговой и сводится к последовательному сокращению числа рассматриваемых машин. В теории оптимального проектирования систем такая процедура называется последовательным повышением уровня разрешающей способности применяемого критерия эффективности.

$$
\begin{aligned}
&\pi_{4\,\text{в}}(r) = p_S(r)(1-p_{N4}) + p_S(r)\,p_{N4}\,P_c(V_4),\\
&\pi_{5\,\text{о}}(r) = p_{N5}(1-p_S(r)) + p_S(r)\,p_{N5}\,(1-P_c(V_5)),\\
&\pi_{5\,\text{а}}(0 = p_S(r)\,(1-p_{N5}) + \text{Ps}(r)\,p_{N5}P_c(V_5),\\
&\pi_{60}(r) = (1-p_S(r))\,p_{N6} + p_S(r)\,p_{N6}\,(1-P_c(V_6)),\\
&\pi_{67}(r) = p_S(r)\,(1-p_{N6}) + p_S(r)\,p_{N6}\,P_c(V_6),\\
&\pi_{70}(r) = (1-p_S(r))\,p_{N7} + p_S(r)\,p_{N7}\,(1-P_c(V_7)),\\
&\pi_{78}(\text{г}) = p_S(\text{г})\,(1-p_{N7}) + p_S(r)\,p_{N7}P_c(V_7),\\
&\pi_{88}(r) = 1.
\end{aligned}
$$

Обозначения в формуле (7) аналогичны обозначениям, введенным в формулах (1)—(3).

В соответствии с общей методикой исследования неоднородных цепей Маркова вектор вероятностей состояний на r-м шаге в рассматриваемом случае имеет вид

$$
\mathbf{P}(r) = \| P_0(r)\,P_1(r)\ldots P_8(r)\| = \mathbf{P}(r-1)\,\Pi_{\text{«2/3+2/3»}}(\text{г}) \qquad (7.6.8)
$$

где $\Pi_{\text{«2/3+2/3»}}(r)$ — матрица переходных вероятностей, неравные нулю элементы которой рассчитываются по формулам (7).

Из решения уравнений (8) получаем следующую систему рекуррентных уравнений для расчета составляющих вектора $P(r)$:

$$
\begin{aligned}
&P_1(r) = P_0(r-1)\,\pi_{0\,1}(r),\\
&P_2(r) = P_1(r-1)\,\pi_{1\,2}(r),\\
&P_3(0 = P_1(r-1)\,\pi_{1\,3}(r) + P_2(r-1)\,\pi_{2\,3}(r),\\
&P_4(r) = P_3(r-1)\,\pi_{3\,4}(r),\\
&P_5(r) = P_4(r-1)\,\pi_{4\,5}(r),\\
&P_6(r) = P_5(r-1)\,\pi_{5\,6}(r),\\
&P_7(r) = P_6(r-1)\,\pi_{6\,7}(r),\\
&P_8(r) = P_4(r-1)\pi_{4\,8}(r) + P_5(r-1)\,\pi_{5\,8}(r) +\\
&\quad + P_7(r-1)\,\pi_{7\,8}(r) + P_8(r-1) = P_{\text{ит}}.
\end{aligned}
\qquad (7.6.9)
$$

Как и ранее, последнее уравнение системы (9) определяет суммарную вероятность обнаружения траектории на r-м шаге.

7.6.3. Графики нарастающей вероятности обнаружения истинной траектории

С целью сравнения различных критериев типа «$2/m + l/n$» при обнаружении истинных траекторий на рис. 7.13 приведены рассчитанные по изложенной методике графики зависимости вероятности обнаружения от нормированной дальности $d_r/d_{\text{макс}}$. В соответствии с принятыми обозначениями $\text{rf}_{\text{МаКС}}$ — максимальная горизонтальная дальность действия РЛС; d_r — текущая горизонтальная дальность действия РЛС; $d_r = d_{\text{макс}} - r\Delta d(T_0)$, где $Ad\ (T_0)$ — изменение координаты дальности за период обзора T_0.

Вероятность обнаружения цели на r-м шаге определялась по формуле (гл. 4)

$$p_s(r) = \exp\{-0{,}68\ (d_r/d_{\text{макс}})^4\}.$$

Вероятность правильной селекции истинных отметок в стробах подтверждения принималась постоянной и равной $P_c = 0{,}95$. Плотность ложных отметок равна 10^{-4} на единицу объема зоны обзора.

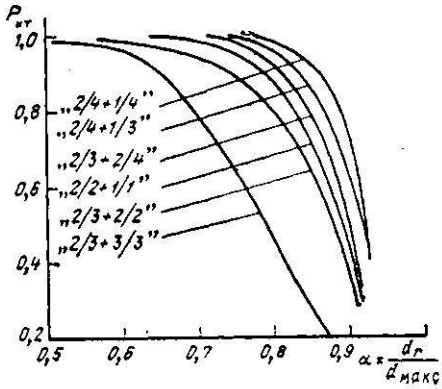


Рис. 7.13. Графики нарастающей вероятности обнаружения истинной траектории.

Из анализа и сравнения графиков следует, что сточки зрения уменьшения числа шагов при обнаружении истинной траектории целесообразно применять критерии «$2/m + 1/n$», причем небольшие колебания n и m не приводят к существенному изменению числа шагов для обеспечения близкой к единице вероятности обнаружения истинной траектории. Высокая (порядка 0,98) вероятность обнаружения истинной траектории по указанным критериям достигается на дальности, соответствующей 0,75 от максимальной дальности действия РЛС.

Применение критериев подтверждения «l/n» ($l > 1$) приводит к существенному удлинению процесса обнаружения истинных траекторий.

7.7. Алгоритм сопровождения траектории цели и его статистический анализ

Процесс обработки информации о цели на этапе обнаружения траектории заканчивается, как только выполняется установленный критерий ее обнаружения. После этого вычисляются начальные значения параметров обнаруженной траектории и она передается на автосопровождение. Автосопровождение цели понимается в дальнейшем в смысле автоматического продолжения траектории ее движения и уточнения параметров этой траектории, так что термины «автосопровождение цели» и «автосопровождение» (или просто, «сопровождение») траектории понимаются в одинаковом смысле. Более предпочтительным является термин «сопровождение траектории», которым и будем пользоваться в дальнейшем.

В данном параграфе рассматриваются принципы построения и анализа алгоритмов обработки информации на этапе сопровождения траектории. При этом процесс сопровождения траектории рассматривается изолированно от других процессов обработки, в том числе и от процесса обнаружения траектории цели.

7.7.1. Общая характеристика и структурная схема алгоритма сопровождения траектории

В процессе сопровождения каждой траектории решаются две основные задачи: стробирование и отбор новых отметок для продолжения траектории (селекция траектории); сглаживание параметров траектории и построение функции, описывающей изменение этих параметров во времени.

Принципиально выполнение обеих перечисленных задач может быть реализовано с помощью единого алгоритма. В этом случае требуемое качество решения задачи сглаживания параметров траектории должно быть согласовано с потребителями информации. Однако возможен и такой вариант построения системы, когда на алгоритм сопровождения возлагается только задача слежения за траекторией цели, а для высококачественного сглаживания параметров траектории в интересах потребителей информации создается отдельный вычислительный алгоритм, который в дальнейшем будем называть алгоритмом траекторного сглаживания (АТС).

Целесообразность выделения специального алгоритма траекторного сглаживания следует, по крайней мере, из таких соображений.

1. Операции оценки и экстраполяции параметров траектории для обеспечения непрерывности ее сопровождения должны производиться в системе Координат, измеряемых РЛС, по ходу обновления информации. К точности выполнения этих операций не. предъявляется особо жестких требований, что позволяет производить вычисления по упрощенным формулам, исходя из гипотезы прямолинейного движения цели.

2. Сглаживание параметров траектории в интересах потребителей радиолокационной информации должно производиться с учетом всех доступных сведений о характере движения цели (воздушная или космическая цель, маневрирующая или неманеврирующая цель и т. д.) по точным формулам. Сглаженные параметры при этом могут быть представлены в другой, отличной от радиолокационной, системе координат (например, в прямоугольной системе координат с центром в точке расположения пункта сбора информации). Более того, в интересах потребителей или по соображениям более удобного сопряжения с другими алгоритмами системы для сглаживания могут быть выбраны совсем не те параметры, которые необходимы при сопровождении траектории (например, параметры эллиптической орбиты при сопровождении космических объектов, курс и модуль вектора скорости при сопровождении самолетов и т. д.).

3. Потребителей интересует в первую очередь информация о целях, представляющих наибольшую важность для системы (например, самолеты, следующие на аэродром посадки в АСУ крупного аэродрома). Именно по таким целям и необходимо рассчитывать точные значения параметров траектории. Естественно, не все обнаруживаемые в зоне обзора РЛС цели одинаково важны, а некоторые из них вообще не представляют интереса для системы (удаляющиеся цели, пролетающие цели и т. д.). Следовательно, сглаживание параметров с высокой

точностью необходимо только для части сопровождаемых целей. Выделение отдельного алгоритма траекторного сглаживания позволяет в данном случае уменьшить требования к производительности вычислительных средств.

С учетом высказанных соображений структурная схема алгоритма сопровождения траектории изображена на рис. 7.14.

В блоке *1* алгоритма решается задача отбора и селекции отметки для продолжения траектории. Алгоритм стробирования и селекции отметок в стробе строится в соответствии с теоретическими предпосыл-

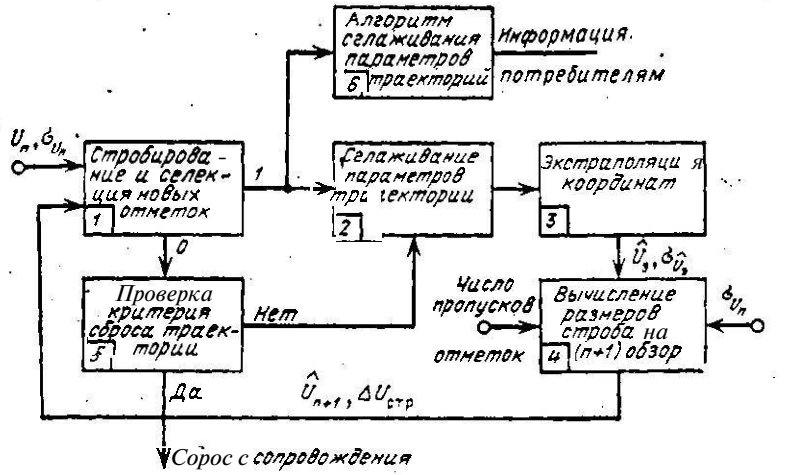


Рис. 7.14. Структурная схема алгоритма сопровождения траектории.

ками, изложенными в § 6.5. Отселектированной отметке присваивается номер сопровождаемой траектории, и она передается на вход алгоритма траекторного сглаживания (блок *6)*. Одновременно новая отметка используется для оценки параметров и экстраполяции координат цели на следующий обзор, т. е. для подготовки следующего цикла стробирования и селекции. Для этого последовательно производится:

1. Вычисление сглаженных параметров траектории при упрощенных предпосылках о законе движения цели и ошибках измерения координат (блок *2*). В некоторых случаях координаты вообще не сглаживаются, а скорости изменения координат сглаживаются по простейшим формулам. Наиболее сложный из применяемых здесь методов может сводиться к последовательному сглаживанию при гипотезе линейного движения цели (гл. 9).

2. Вычисление экстраполированных значений координат на следующий обзор (блок *3)*. Экстраполяция производится по линейному закону.

3. Вычисление размеров строба (блок *4)*. При этом используются точностные характеристики измеренных и экстраполированных координат, а также информация о пропуске отметок в стробе.

4. При отсутствии новой отметки для продолжения траектории проверяется критерий сброса этой траектории с сопровождения (блок 5). При выполнении критерия сброса сопровождение траектории прекращается, а предыдущая информация о ней «стирается». Если же критерий сброса не выполняется, то в качестве координат отобранной новой отметки используются координаты экстраполированной точки и производится новый цикл вычислений.

Таким образом все операции алгоритма сопровождения, кроме сброса траектории с сопровождения, являются известными (гл. 6). Критерий сброса траектории с сопровождения рассматривается в следующем пункте.

7.7.2. Критерий сброса траектории с сопровождения. Графы алгоритмов сопровождения траекторий

В общем случае при принятии решения о сбросе траектории с сопровождения наряду с наличием отметок для ее продолжения должен учитываться целый ряд тактических факторов, к которым можно отнести: важность цели; возможности цели изменять свою траекторию в полете; текущие координаты цели, направление ее полета и продолжительность пребывания в зоне обзора РЛС и т. д.

Однако учет тактических факторов чрезвычайно сложен и не всегда доступен из-за ограниченной производительности вычислительных средств. Поэтому основным критерием при принятии решения о сбросе траектории с сопровождения является появление некоторой пороговой серии пропусков отметок в стробах сопровождения.

При установлении порога сброса можно исходить из некоторого эквивалента количества информации, накопленной в процессе сопровождения. Это количество информации можно характеризовать, например, точностными характеристиками предсказания положения цели на следующий обзор по данным предыдущих измерений. С увеличением числа пропусков отметок неопределенность положения цели в следующем обзоре увеличивается, что приводит к необходимости увеличивать размеры строба. При некотором числе пропусков размеры строба сопровождения достигают размеров строба первичного захвата, соответствующего максимальной неопределенности в положении цели, когда ее параметры совсем неизвестны. Дальнейшее увеличение размеров строба вряд ли целесообразно.

Таким образом, в качестве момента сброса траектории с сопровождения можно выбрать момент, когда строб сопровождения становится равным стробу первичного захвата.

Представим дисперсию суммарного отклонения отметки от центра строба сопровождения в виде

$$\sigma^2_{U\Sigma} = \sigma^2_{U\,э} + \sigma^2_{U\,изм} = \sigma^2_{U\,изм}\left(1 + \frac{\sigma^2_{U\,э}}{\sigma^2_{U\,изм}}\right). \qquad (7.7.1)$$

Обозначим $\sigma^2_{U\,э}/\sigma^2_{U\,изм} = \varkappa^2$ и выберем в качестве порога сброса некоторое число $\varkappa^2_{сбр}$. Тогда, при выполнении неравенства $\varkappa^2 \geqslant \varkappa^2_{сбр}$, траектория должна быть сброшена с сопровождения. Будем называть этот критерий точностным критерием сброса.

Расчет $\varkappa^2_{сбр}$ может быть произведен исходя из принятого выше условия равенства объемов строба первичного захвата и последнего перед сбросом строба сопровождения, что дает

$$r_{макс}\beta_{макс}\varepsilon_{макс}T_0^3 = \lambda^3\sigma_{r_{изм}}\sigma_{\beta_{изм}}\sigma_{\varepsilon_{изм}}(1+\varkappa^2_{сбр})^{3/2}.$$

Решая это уравнение относительно $\varkappa^2_{сбр}$, получим выражение для численного значения порога сброса через известные характеристики РЛС и цели.

$$\varkappa^2_{сбр} = \left(\frac{r_{макс}\beta_{макс}\varepsilon_{макс}T_0}{\lambda^3\sigma^2_{r_{изм}}\sigma^2_{\beta_{изм}}\sigma^2_{\varepsilon_{изм}}}\right)^{2/3} - 1. \qquad (7.7.2)$$

Кроме порога сброса, в процессе сопровождения может быть установлен также порог устойчивого сопровождения.

Выбор порога устойчивого сопровождения может быть также связан с точностью экстраполяции координат. Например, можно условиться порог устойчивого сопровождения устанавливать на уровне достижения точности экстраполяции, близкой к точности единичного измерения координаты, т. е. на уровне $\varkappa^2_{уст} \approx 1$.

Теперь, с учетом двух установленных порогов, процесс сопровождения траектории можно представить как процесс блуждания случайной точки между двумя экранами, один из которых (при сбросе) является поглощающим, а другой—отражающим. Этот процесс характеризуется следующими возможными состояниями:

1. При экстраполяции координат достигнута точность, равная точности единичного измерения. Траектория находится в режиме устойчивого сопровождения. Случайная точка, характеризующая процесс блуждания, достигла отражающего экрана и находится вблизи него.

2. Неопределенность ожидаемого положения цели, выраженная величиной ошибки экстраполяции, настолько велика, что ее дальнейшее сопровождение нецелесообразно. Траектория сбрасывается с сопровождения (случайная точка поглощается экраном).

3. Случайная точка находится в одном из промежуточных положений между экранами, что соответствует режиму неустойчивого сопровождения траектории.

Пусть, например:

— порог сброса $\varkappa^2_{сбр} = 7$,

— порог устойчивого сопровождения $\varkappa^2_{уст} = 0{,}9$,

— дисперсия ошибок измерения $\sigma^2_{U_{изм}} = 1$,

— обнаружение траектории производится по двум отметкам подряд.

С учетом этих исходых данных, а также имея в виду, что дисперсия ошибок экстраполяции на p периодов обзора вычисляется в данном случае по формуле (см. п. 6.4.2)

$$\sigma^2_{э,\,n+p} = 2\,\frac{(n-1)(2n-1)+6p(n-1)+6p^2}{n(n^2-1)},$$

можно рассчитать график блуждания случайной точки, отображающий процесс сопровождения траектории. Такой график приведен на рис. 7.15, где сплошными линиями обозначены переходы (изменения $\varkappa^2$) при наличии отметок в стробах сопровождения, а пунктирными линиями — переходы при пропуске отметок в этих стробах. Из графика следует, что порог сброса достигается при различном числе пропусков отметок, в зависимости от накопленной о траектории информации в предыдущих обзорах. Так, из исходного состояния (сразу после передачи траектории на сопровождение) сброс производится по двум пропускам отметок подряд. После достижения порога устойчивого сопровождения сброс возможен только после семи пропусков подряд. Каждому узлу графика соответствует определенный уровень точности, выраженный в величине $\varkappa^2$, а следовательно,

и размер строба сопровождения. Если график рассчитан заранее и все его узлы пронумерованы, то размер строба может быть выбран по номеру узла.

Количество узлов графика можно значительно сократить, если объединить узлы, близкие по уровню точности, число переходов из которых до порогов одинаковое. В качестве уровня точности объединенного узла должен быть взят уровень худшего по точности узла (с большим $\mathcal{K}^2$) из объединенных в группу.

После объединения состояний получается достаточно простая абстрактная схема (граф) функционирования алгоритма сопровождения траектории, которая

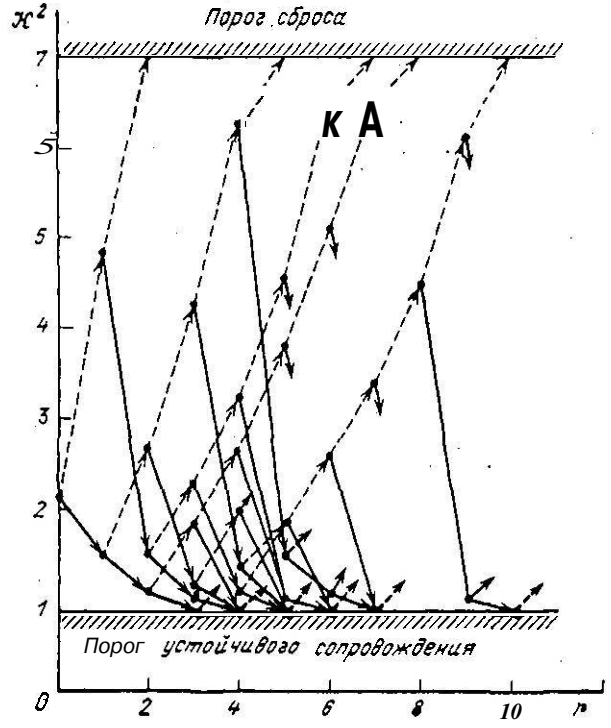


Рис. 7.15. График блуждания точки, отображающий процесс сопровождения траектории.

изображена на рис. 7.16. На графе состояние a_0 соответствует порогу сброса. При достижении этого состояния граф остается в нем с вероятностью единица. Состояние a_8 соответствует достижению порога устойчивого сопровождения. Каждому из промежуточных состояний сопоставляется определенный уровень точности, выраженный числами $\mathcal{K}^2$, записанными рядом с узлами графа. Начальным является состояние a_6, в которое граф переходит в момент обнаружения траектории.

Кроме рассмотренного, возможно также применение простейшего критерия, в соответствии с которым сброс траектории с сопровождения производится при появлении пороговой серии из $k_т$ пропусков отметок подряд. Такой критерий сброса не учитывает индивидуальные особенности каждой траектории, а также не использует информацию о накопленном уровне точности к моменту появления серии пропусков.

Единственное его достоинство состоит в простоте реализации на ЦВМ соответствующего алгоритма.

При выборе $k_т$ необходимо исходить из следующих соображений. Чем больше $k_т$, тем меньше вероятность принятия ложного решения о сбросе с сопровождения истинной траектории. С другой стороны с увеличением $k_т$ увеличивается число находящихся на сопровождении

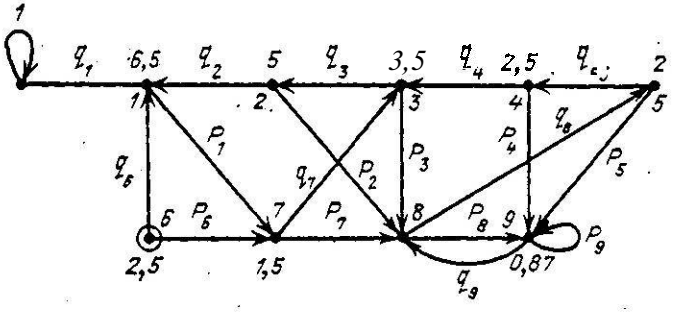


Рис. 7.16. Граф функционирования алгоритма сопровождения траектории.

ложных траекторий и их средняя продолжительность. Поэтому при выборе $k_т$ необходимо учитывать статистические характеристики пропусков (необнаружений) истинных отметок. (Окончательный выбор значения $k_т$ обычно производится при испытании системы обработки.)

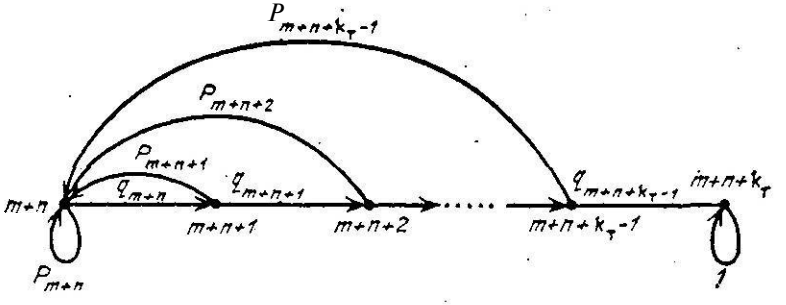


Рис. 7.17. Граф со случайными переходами для простейшего алгоритма сопровождения траектории.

С учетом критерия сброса по $k_т$ пропускам подряд, процесс сопровождения траектории описывается графом со случайными переходами, изображенным на рис. 7.17. Характер состояний и переходов этого графа позволяет так же как и раньше, выделить следующие режимы сопровождения:

1. Режим устойчивого сопровождения, характеризующийся тем, что граф находится в исходном состоянии a_{m+n} (впервые это состояние достигается при выполнении критерия обнаружения траектории).

2. Режим неустойчивого сопровождения, соответствующий одному из промежуточных состояний графа a_j, $j = (m+n+1), (m+n+k_т-1)$.

3. Режим сброса траектории с сопровождений, свидетельствующий о том, что число пропусков отметок подряд достигло порогового уровня ($к = k_т$) и граф перешел в поглощающее состояние $a_{m+n+k_т}$.

Легко видеть, что в этом случае граф алгоритма сопровождения траектории аналогичен графу алгоритма фиксации конца пачки квантованных сигналов (§ 5.4). Поэтому полностью совпадает и методика анализа этих алгоритмов.

7.7.3. Среднее число ложных траекторий, находящихся на сопровождении в установившемся режиме работы

При статистическом анализе алгоритмов сопровождения основной интерес представляет среднее время существования ложной траектории и связанное с этим временем среднее число ложных траекторий, находящихся на сопровождении в установившемся режиме работы. Кроме того, интересным является определение вероятности сброса с сопровождения истинной траектории при заданном значении вероятности обнаружения отметок. Установим здесь только зависимость между средним числом ложных траекторий, передаваемых на сопровождение в каждом обзоре, и средним числом ложных траекторий, находящихся на сопровождении в установившемся режиме работы. Для этого необходимо, прежде всего, определить вероятность окончания процесса сопровождения ложной траектории точно на μ-м шаге (обзоре) после передачи ее на сопровождение в момент $\mu = 0$. Для алгоритма, реализующего точностной критерий сброса, вероятность окончания сопровождения ложной траектории точно на μ-м шаге равна

$$P_{сбр}(\mu) = P_0(\mu), \qquad (7.7.3)$$

т. е. равна вероятности достижения состояния a_0 через μ обзоров после передачи траектории на сопровождение.

Для расчета вероятности $P_0(\mu)$ можно непосредственно воспользоваться графом на рис. 7.16. Исходным состоянием графа является состояние a_6. Вероятность перехода из этого состояния в состояние a_0 определяется выражениями

$$\begin{aligned}
&P_0(1) = 0, \quad P_0(2) = q_{N6}\, q_{N1}, \; P_0(3) = P_0(4) = 0,\\
&P_0(5) = p_{N6} q_{N7} q_{N3}\, q_{N2} q_{N1},\\
&P_0(6) = q_{N6}\, p_{N1}\, q_{N7}\, q_{N3}\, q_{N2}\, q_{N1},\\
&P_0(7) = 0, \quad P_0(8) = p_{N6}\, p_{N7}\, q_{N8}\, q_{N5}\, q_{N4}\, q_{N3}\, q_{N2}\, q_{N1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (7.7.4)$$

В случае критерия $k_т$ вероятность окончания сопровождения ложной траектории точно на μ-м шаге равна

$$P_{сбр}(\mu) = P_{m+n+k_т}(\mu), \qquad (7.7.5)$$

т. е. равна вероятности перехода графа (рис. 7.17) из состояния a_{m+n} в состояние $a_{m+n+k_т}$ за μ шагов.

Для вычисления вероятности $P_{m+n+k_т}(\mu)$ применимы следующие рекуррентные формулы

$$P_{m+n}(\mu) = \sum^{m+n+k-1} P_j(\mu-1)p_{Nj}, \quad (P_{m+n}(0)=1),$$

$$P_{m+n+1}(\mu) = P_{m+n}(\mu-1)\, q_{N,\, m+n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.7.6)$$

$$P_{m+n+k_т}(\mu) = P_{m+n+k_т-1}(\mu-1)\, q_{N,\, m+n+k_т-1}.$$

Средняя длительность ложной траектории, выраженная числом обзоров, определяется теперь по формуле (для первого алгоритма)

$$\bar{\mu} = \sum_{\mu=2}^{\infty} \mu P_0(\mu),$$

или по формуле (для второго алгоритма)

$$\bar{\mu} = \sum_{\mu=k_т}^{\infty} \mu P_{m+n+k_т}(\mu). \quad (7.7.7)$$

Далее, если известно среднее число передаваемых на сопровождение ложных траекторий, то среднее число находящихся на сопровождении ложных траекторий определяется из выражения

$$\bar{N}_{слт} = \bar{N}_{лт}\bar{\mu}. \quad (7.7.8)$$

Среднее число находящихся на сопровождении ложных траекторий учитывается при расчетах загрузки ЦВМ, на которой реализуются алгоритмы сопровождения траекторий.

7.8. Некоторые вопросы реализации алгоритмов обнаружения и сопровождения траекторий

При рассмотрении вопросов реализации алгоритмов обнаружения и сопровождения траекторий задача, в конечном счете, состоит в определении требований к ЦВМ по основным техническим параметрам, таким как: емкость запоминающих устройств (буферного — БЗУ и оперативного — ОЗУ) и быстродействие арифметического устройства (АУ).

Данный параграф посвящен изложению одного из возможных подходов к анализу алгоритмов обнаружения и сопровождения траекторий с точки зрения требуемых для реализации технических параметров ЦВМ.

В качестве аналитического аппарата, как и ранее (§ 5.6), используется аппарат теории массового обслуживания.

7.8.1, Объединенный критерий обнаружения и сопровождения траекторий

До сих пор имелось в виду, что алгоритмы обнаружения и сопровождения траекторий реализуются раздельно, т. е. в отдельных устройствах (ЦВМ).

На практике, очевидно, более удобной является такая организация процесса обработки, когда оба эти алгоритма объединены в единый алгоритм обнаружения и сопровождения траектории (АООТ), а реализация объединенного алгоритма производится с помощью одной ЦВМ. В дальнейшем имеется в виду именно такой вариант построения системы обработки.

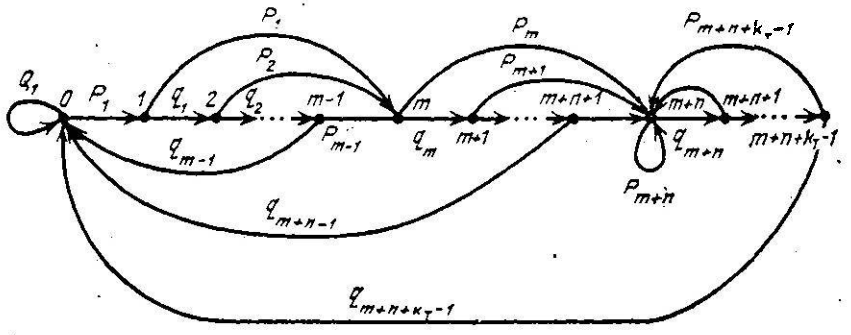


Рис. 7.18. Граф объединенного алгоритма обнаружения и сопровождения ложных траекторий.

Если заданы критерий «завязки» начала траектории «2/*m*», критерий подтверждения «*l*/*n*» и критерий сброса траектории с сопровождения, например, по критерию $k_т$ пропусков подряд, то объединенный критерий обнаружения и сопровождения траектории можно символически записать в виде: «2/т $+ l/n -$ $k_т$». Граф объединенного алгоритма при обнаружении и сопровождении ложных траекторий по критерию «$2/m + 1/n - k_т$» — изображен на рис. 7.18.

Граф объединенного алгоритма позволяет анализировать процесс обнаружения и сопровождения траекторий в целом вместо анализа по частям, произведенного выше. Не повторяя рассуждений и выводов предыдущих параграфов, уточним полученные там результаты. В частности, уточнению подлежит полученное в п. 7.5.2 выражение для числа начальных точек ложных траекторий, образующихся в установившемся режиме работы.

В объединенном алгоритме, реализующем критерий «$2/m + l/n - k_т$», число стробов равно $m + v + k_т - 1$. Поэтому верхний предел суммирования по j в формуле (5.15) будет $j_{макс} = m + v + k_т - 1$. Верхний предел суммирования по s будет теперь $s_{макс} = \infty$, так как число шагов при переходе из состояния a_1 в состояние $a_{m+n+k_т-1}$ в данном случае может быть сколь угодно большим.

Таким образом в объединенном алгоритме число ложных отметок, принимаемых за начальные точки новых траекторий, определяется по формуле

$$\overline{N}_1' = \frac{\overline{N}_{ло}}{m \quad \infty \quad p_{1j}^{(s)}}. \qquad (7.8.1)$$

Если критерий подтверждения имеет вид $1/n$, то $\nu = n$. Если далее критерий сброса точностной, то вместо $k_т$ будет взято число стробов, соответствующих этому критерию.

Среднее число передаваемых на сопровождение ложных траекторий теперь будет

$$\overline{N}_{лт}' = \overline{N}_1' \pi_1, \qquad (7.8.2)$$

т. е. меньше, чем для случая раздельной реализации, так как число начальных точек уменьшилось. Соответственно уменьшится и число ложных траекторий, находящихся на сопровождении.

7.8.2. Принципы построения машинного алгоритма обнаружения и сопровождения траекторий

В дальнейшем для иллюстрации методики расчета требуемых параметров производительности ЦВМ необходимо условиться об основных принципах построения формульно-логической схемы машинного алгоритма обнаружения и сопровождения траектории (АОСТ).

С этой целью принимается, что:

1. ЦВМ, на которой реализуется алгоритм ОСТ, построена по универсальной схеме с одним арифметическим устройством.

2. В БЗУ ЦВМ имеется две зоны, одна из которых ($БЗУ_1$) предназначена для записи информации текущего цикла обзора, а другая ($БЗУ_2$) служит для хранения информации предыдущего цикла, обрабатываемой в текущем цикле. Информация в $БЗУ_1$ записывается в порядке поступления. Выбор информации из $БЗУ_2$ для обработки производится в порядке простой очереди.

3. В ОЗУ ЦВМ выделены отдельные массивы для хранения:

— траекторий, находящихся на сопровождении (массив $M_{ст}$),

— обнаруживаемых траекторий, т. е. завязанных начальных отрезков траекторий, по которым еще не принято окончательное решение о передаче на сопровождение или о сбросе (массив $M_{от}$),

— начальных точек новых траекторий (массив $M_н$).

Каждый из указанных массивов в свою очередь имеет две одинаковые зоны, в одной из которых (обозначаемой М) хранится информация, подлежащая обработке в текущем цикле (периоде) обзора, а в другой (обозначаемой M') — информация, накапливаемая для обработки в следующем цикле. Запись информации в каждую из указанных зон неупорядоченная (в произвольном порядке).

4. В процессе обслуживания каждой новой отметки, выбираемой из БЗУ, последовательно производится:

а) Проверка попадания этой отметки в стробы сопровождаемых траекторий. При попадании новой отметки в строб одной из сопровождаемых траекторий производится уточнение параметров последней и она переписывается в зону $M'_{ст}$ (без стирания из зоны $M_{ст}$).

б) Проверка попадания новой отметки в стробы обнаруживаемых траекторий из массива $M_{от}$, если эта отметка не попала ни в один из стробов сопровождаемых траекторий. При попадании отметки в один из стробов обнаруживаемых траекторий принимается решение о продолжении анализа по этой траектории или она передается на сопровождение (записывается в зону $M'_{ст}$ без стирания из зоны $M_{от}$).

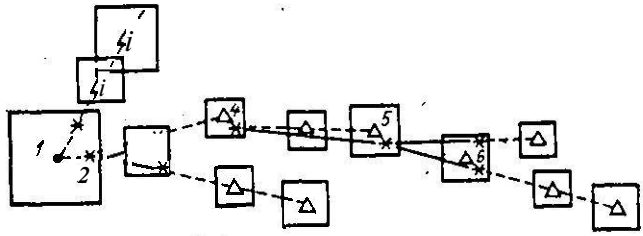


Рис. 7.19. Пояснение процесса размножения траекторий.

в) Проверка попадания новой отметки в стробы первичного захвата, образованные вокруг отметок, хранимых в массиве $M_н$, если эта отметка не попала ни в один из стробов обнаруживаемых траекторий. При попадании новой отметки в один из таких стробов завязывается начало новой траектории, которое затем записывается в массив $M'_{от}$.

г) Запись новой отметки в массив $M'_н$, если она не попала ни в один из стробов первичного захвата, образованных вокруг отметок из массива $M_н$.

5. В конце каждого цикла обзора вся хранимая в зонах $M_{ст}$, $M_{от}$ и $M_н$ информация проверяется на старение, в соответствии с принятыми в алгоритме критериями сброса. Информация, не удовлетворяющая критерию сброса, переписывается в зоны $M'_{ст}$, $M'_{от}$ или $M'_н$ (кроме траекторий (начальных точек), получивших подтверждение хотя бы одной новой отметкой). Вся остальная информация сбрасывается и ячейки $M_{ст}$, $M_{от}$ и $M_н$ очищаются.

6. При принятой организации обработки (обслуживания) отметок для подтверждения любой сопровождаемой (обнаруживаемой) траектории или для «завязки» новой траектории в стробе первичного захвата может быть отобрано несколько отметок и по каждой из них строится соответствующее продолжение. Это приводит к размножению продолжений, показанному схематически на рис. 7.19. Размножение продолжений увеличивает общее число траекторий, находящихся в процессе обработки. Однако при небольшой плотности помех число таких случаев размножения будет невелико, и при расчете требований к ЦВМ эффектом размножения можно пренебречь.

В соответствии с изложенными исходными предпосылками укрупненная операторная схема машинного алгоритма обработки информации при обнаружении и сопровождении траекторий выглядит следующим образом

$$21,20,\ 8,\ 13,\ {}^{14,19}\Phi_1\ P_{2;21}\ A_3\ {}^{6}P_{4;9}A_5\ P_{6;4}\ F_7\ A_8^1$$
$$^{11,4}P_{9;15}\ A_{10}\ P_{11;9}\ F_{12}P_{13;}|\ A|4\qquad P_{13;20}\qquad (7.8.3)$$
$$A_{16}\ P_{17;15}\ F_{18}\ A_{19}^{1\ 15}\ A_{20}^{1\ 2}\ A_{21}^{1}.$$

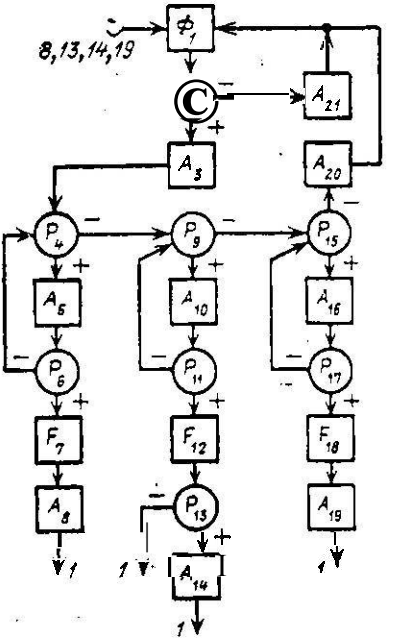


Рис. 7.20. Граф-схема алгоритма обнаружения и сопровождения траекторий.

Операторы этой схемы выполняют следующие функции:

Φ_1 — организация очередного цикла обработки,

P_2 — проверка наличия в БЗУ информации (отметок), подлежащей обработке,

A_3 — выбор из БЗУ очередной отметки,

P_4 — проверка наличия в зоне $M_{ст}$ ОЗУ сопровождаемых траекторий, не прошедших сравнения с обрабатываемой отметкой из БЗУ,

A_5 — выбор из $M_{ст}$ параметров очередной непроверенной траектории, экстраполяция параметров траектории и расчет размеров строба сопровождения,

P_6 — проверка попадания отметки в строб сопровождения,

F_7 — присвоение признака подтверждения сопровождаемой траектории,

A_8 — уточнение параметров сопровождаемой траектории и запись этих параметров в массив $M'_{ст}$,

P_9 — проверка наличия в зоне $M_{от}$ ОЗУ обнаруживаемых траекторий, не прошедших сравнения с обрабатываемой отметкой из $БЗУ_1$,

A_{10} — выбор из $M_{от}$ параметров очередной обнаруживаемой траектории, экстраполяция параметров и расчет размеров строба обнаружения,

P_{11} — проверка попадания отметки в строб обнаружения,

F_{12} — присвоение признака подтверждения обнаруживаемой траектории обрабатываемой отметкой,

P_{13} — проверка критерия обнаружения траектории,

A_{14} — уточнение параметров траектории и запись их в зону $M'_{ст}$,

P_{15} — проверка Наличия в зоне $M_н$ ОЗУ одиночных отметок, не прошедших сравнения с обрабатываемой отметкой на предмет «завязки» начального отрезка новой траектории,

A_{16} — формирование строба первичного захвата,

P_{17} — проверка попадания отметки в строб первичного захвата,

F_{18} — присвоение признака подтверждения одиночной отметки из $M_н$,

A_{19} — расчет начальных параметров вновь завязываемой траектории и запись их в зону $M'_{от}$,

A_{20} — запись обрабатываемой отметки в зону $M'_н$ в качестве начальной точки новой траектории,

A_{21} — проверка информации, хранимой в зонах $M_{ст}$, $M_{от}$ и $M_н$, на старение и подтверждение в закончившемся цикле обработки; сброс устаревшей и получившей подтверждение информации; очистка зон $M_{ст}$, $M_{от}$ и $M_н$.

Для более наглядного представления на рис. 7.20 изображена граф-схема взаимодействия операторов рассмотренного алгоритма.

Отметим еще раз, что рассмотренная схема алгоритма не является в каком-либо смысле оптимальной. Не является она и типовой. Это просто пример, на основе которого мы в дальнейшем будем производить необходимые расчеты. Без конкретного алгоритма расчет требуемых параметров производительности ЦВМ теряет смысл.

7.8.3. Краткая характеристика потока требований на входе ЦВМ обнаружения и сопровождения траекторий

Поток требований на входе ЦВМ обнаружения и сопровождения траекторий представляет собой суперпозицию потоков ложных и истинных (принадлежащих истинным траекториям) отметок.

Поток ложных отметок образуется прошедшими фильтр первичной обработки внутренними шумами приемного устройства РЛС, а также внешними помехами естественного и искусственного происхождения. Здесь, как и ранее, принимается, что ложные отметки распределены в зоне обзора равномерно, что соответствует пуассоновскому распределению их числа на цикл (период) обработки. Параметр потока ложных отметок $\Lambda_л$ зависит от интенсивности помех, от порогов квантования сигналов, от фильтрующей способности алгоритмов первичной (предварительной) обработки и т. д. Обычно величина параметра потока ложных отметок регулируется автоматически. Мы в дальнейшем будем считать этот параметр фиксированным.

В качестве модели потока истинных отметок будем также принимать пуассоновский поток с параметром $\Lambda_ц$, равным среднему числу целей, лоцируемых в единицу времени, т. е.

$$\Lambda_ц = \bar{N}_ц / T_0,$$

где $\bar{N}_ц$ — среднее число целей, одновременно находящихся в зоне обзора РЛС; T_0 — длительность периода (цикла) обзора.

Очевидно, при $T_0 = 1$ *сек* $\Lambda_ц = \bar{N}_ц$.

В свою очередь $\bar{N}_ц$ определяется по формуле

$$\bar{N}_ц = \Lambda_{вх} \bar{t}_в, \qquad (7.8.4)$$

где $\Lambda_{вх}$ — параметр потока целей, пересекающих внешнюю границу зоны обзора РЛС (влетающих в зону обзора РЛС); $\bar{t}_в$ — среднее время пребывания цели в зоне обзора, определяемое путем усреднения возможных траекторий пересечения зоны обзора целями с учетом высот и скоростей их полета.

Параметр $\Lambda_{вх}$ можно определить из следующих соображений. Если, например, РЛС работает в районе крупного аэропорта, то $\Lambda_{вх}$ можно определить по расписанию воздушного движения данного аэропорта и других аэропортов, трассы полета из которых (в которые) пересекают зону обзора РЛС. В системах ПВО параметр $\Lambda_{вх}$ определяется ожидаемой (в соответствии с существующей доктриной) интенсивностью налета самолетов противника.

Таким образом, вероятность получить за время T_0 m требований суммарного потока на входе ЦВМ ОСТ можно представить в виде

$$P\ (T) = \frac{[(\Lambda_п + \Lambda_ц)\, T_0]^m}{m!} \exp\left[-(\Lambda_п + \Lambda_ц)\, T_0\right].$$

7.8А. Расчет загрузки ОЗУ ЦВМ

В соответствии с исходными предпосылками п. 7.8.2, расчет загрузки ОЗУ ЦВМ обнаружения и сопровождения траектории необходимо производить раздельно по каждой из следующих зон:

— зона $M_{ст}$ для хранения информации о сопровождаемых траекториях,

— зона $M_{от}$ для хранения информации об обнаруживаемых траекториях,

— зона $M_н$ для хранения информации о начальных точках новых траекторий.

Прежде всего необходимо найти средние значения загрузки указанных зон ложной и истинной информацией.

Среднее число ложных траекторий, находящихся на сопровождении в установившемся режиме работы, определяется по формуле

$$\bar{N}_{слт} = \bar{N}_{лт}\, \bar{\mu}_л, \qquad (7.8.5)$$

где $\bar{\mu}_л$ — средняя длина ложной траектории, выраженная числом периодов обзора.

Среднее число истинных траекторий, находящихся на сопровождении в установившемся режиме работы, можно вычислить по формуле

$$\bar{N}_{ст} = \Lambda_ц T_0 \bar{\mu}_и, \qquad (7.8.6)$$

где $\Lambda_ц T_0$ — среднее число истинных траекторий, передаваемых на сопровождение в каждом обзоре; $\bar{\mu}_и$ — среднее число обзоров, в те-

чение которых сопровождается истинная траектория, равное среднему числу обзоров, в течение которых цель наблюдается РЛС.

Таким образом, среднее число ячеек ОЗУ зоны $M_{ст}$ равно

$$\overline{m}_{ст} = \overline{N}_{лт}\overline{\mu}_{л} + \Lambda_{ц} T_0 \overline{\mu}_{и}. \qquad (7.8.7)$$

Как легко показать, среднее число завязанных ложных траекторий, находящихся в процессе обнаружения, равно

$$N_{олт} = N_1' \sum \Sigma P_{mj}^{(s)}. \qquad (7.8.8)$$

Среднее число истинных траекторий, находящихся в процессе обнаружения, определяется по аналогичной формуле, в которой:

— среднее число начальных точек новых траекторий равно

$$\overline{N}_1' = \Lambda_{ц} T_0 p_S, \qquad (7.8.9)$$

где p_S — средняя вероятность обнаружения отметок от цели; вероятность $P_{mj}^{(s)}$ вычисляется с учетом особенностей работы алгоритма при обнаружении истинных траекторий.

При прикидочных расчетах можно считать (для критерия обнаружения «l/m»).

$$\overline{N}_{от} = \Lambda_{ц} T_0 \nu.$$

Таким образом, среднее число ячеек ОЗУ зоны $M_{от}$

$$\overline{m}_{от} = \overline{N}_{олт} + \overline{N}_{от}. \qquad (7.8.10)$$

Среднее число начальных точек новых ложных траекторий, хранящихся в зоне $M_{н}$

$$\overline{N}_{нл} = \overline{N}_1' \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{s=0}^{m-j} P_{1j}^{(s)}. \qquad (7.8.11)$$

Среднее число начальных точек истинных траекторий, хранящихся в зоне $M_{н}$ ОЗУ, можно с запасом определить по формуле

$$\overline{M}_{ни} = \Lambda_{ц} T_0 (m-1). \qquad (7.8.12)$$

Таким образом, среднее число ячеек ОЗУ зоны $M_{н}$ равно

$$\overline{m}_{н} = \overline{N}_{нл} + \overline{N}_{ни}. \qquad (7.8.13)$$

По тем же соображениям, которые были высказаны при определении объема ОЗУ ЦВМ первичной обработки, закон распределения числа ячеек каждой зоны ОЗУ ЦВМ обнаружения и сопровождения траекторий можно считать нормальным с математическим ожиданием $\overline{m}$ и среднеквадратическим отклонением $\sqrt{\overline{m}}$. Тогда потребный объем

каждой из зон $M_{ст}$, $M_{от}$ и $M_{н}$ при заданной вероятности переполнения вычисляется по формуле

$$m_{ОЗУ} = \bar{m} + a_{\alpha}\sqrt{\bar{m}}.$$

Объемы зон $M'_{ст}$, $M'_{от}$ и $M'_{н}$ вычисляются аналогично и равны соответственно объемам зон $M_{ст}$, $M_{от}$ и $M_{н}$.

7.8.5. Среднее время обслуживания одной отметки

Рассмотрим теперь порядок приближенного расчета среднего времени обслуживания отметки, выбираемой из БЗУ. В соответствии с основными принципами, положенными в основу реализации алгоритма, отметка, выбираемая для обслуживания из БЗУ, сначала сравнивается с сопровождаемыми траекториями, затем с обнаруживаемыми, затем с начальными точками, и наконец, если отсутствует совпадение этой отметки со всеми хранящимися в ОЗУ траекториями, она записывается как новая.

Вероятность обслуживания отметки в каждом из массивов ОЗУ ($M_{ст}$, $M_{от}$, $M_{н}$) зависит от числа хранимых в них траекторий. Например, для расчета вероятности обслуживания на этапе сравнения с сопровождаемыми траекториями имеем (для алгоритма «$2/m$ 4-$+ 1/n - k_т$»):

1. Среднее число ложных отметок, попадающих в стробы сопровождения в каждом обзоре, равно

$$\bar{n}_{лс} = \sum_{j=m+n}^{m+n+k_т-1} p_{Nj}\bar{N}_j, \qquad (7.8.14)$$

где p_{Nj} — вероятность попадания ложных отметок в строб сопровождения с номером j; N_j — среднее число стробов сопровождения с номером j, образованных по всем (истинным и ложным) сопровождаемым траекториям.

2. Среднее число истинных отметок, попадающих в стробы сопровождения истинных траекторий в каждом обзоре (предполагается, что истинные отметки в стробы сопровождения ложных траекторий не попадают), равно

$$\bar{n}_{ис} = p_S\bar{N}_{ст}, \qquad (7.8.15)$$

где ps — вероятность обнаружения истинных отметок в стробах сопровождения, принимаемая одинаковой для всех траекторий; $\bar{N}_{ст}$ — среднее число сопровождаемых истинных траекторий.

3. Среднее число отметок из БЗУ, подлежащих обработке в каждом цикле

$$\bar{N}_{\Sigma} = \bar{N}_{ло} + \bar{N}_{ио}. \qquad (7.8.16)$$

С учетом формул (14), (15) и (16) вероятность обслуживания отметки в массиве $M_{ст}$, т. е. вероятность ее привязки к одной из сопровождаемых траекторий, равна

$$p_c = \left(\sum_{j=m+n}^{m+n+k-1} p_{Nj} N_j + p_S N_{от} \right) \Big/ \overline{N}_\Sigma. \qquad (7.8.17)$$

Аналогичным образом получаем для вероятности обслуживания на этапе сравнения с обнаруживаемыми траекториями

$$p_o = \sum_{j=m} p_{Nj} \overline{N}_j + p_S \overline{N}_{от} \Big) \Big/ \overline{N}_\Sigma, \qquad (7.8.18)$$

где $\overline{N}_j$ — среднее число стробов с номером j, образованных по всем обнаруживаемым траекториям, $N_{от}$ — среднее число истинных траекторий, находящихся в процессе обнаружения.

Для вероятности обслуживания на этапе сравнения с начальными точками новых траекторий

$$p_н = \left(\sum_{j=1}^{m-1} p_{Nj} \overline{N}_j + p_S \overline{N}_{ни} \right) \Big/ \overline{N}_\Sigma, \qquad (7.8.19)$$

где $\overline{N}_j$ — среднее число стробов с номером j, образованных по всем начальным точкам новых траекторий, $\overline{N}_{ни}$ — среднее число начальных точек истинных траекторий.

Очевидно, вероятность того, что обслуживаемая отметка будет записана в качестве новой начальной точки, равна

$$p_1 = 1 - (p_c + p_o + p_н). \qquad (7.8.20)$$

Введем следующие обозначения:

t_c — время, затрачиваемое на проверку попадания новой отметки в строб сопровождаемой траектории,

t_o — время, затрачиваемое на проверку попадания новой отметки в строб обнаруживаемой траектории,

$t_н$ — время, затрачиваемое на проверку попадания отметки в строб первичного захвата.

Кроме того, обозначим: m_c — максимальное число сопровождаемых траекторий (массив M_c),

m_o — максимальное число обнаруживаемых траекторий (массив $M_{от}$),

$m_н$ — максимальное число начальных точек (массив $M_н$).

Так как по условию информация в массивах записывается неупорядоченно, можно считать, что распределение времени поиска необходимой траектории (отметки) в массиве является равновероятным. По-

этому закон распределения времени обслуживания отметки записывается в виде

$$w(\tau)=\begin{cases}\dfrac{p_c}{m_c t_c}, & t_c \leqslant \tau < m_c t_c,\\ \dfrac{p_o}{m_o t_o}, & m_c t_c \leqslant \tau < m_c t_c + m_o t_o,\\ \dfrac{p_н}{m_н t_н}, & m_c t_c + m_o t_o \leqslant \tau < m_c t_c + m_o t_o + m_н t_н,\\ p_1, & \tau = m_c t_c + m_o t_o + m_н t_н.\end{cases} \qquad (7.8.21)$$

В соответствии с этим законом среднее время обслуживания отметки равно

$$\bar{\tau} = p_c \frac{m_c t_c}{2} + p_o\left(m_o t_o + \frac{m_o t_o}{2}\right) + p_н\left(m_c t_c + m_o t_o + \frac{m_н t_н}{2}\right) + p_1 (m_c t_c + m_o t_o + m_н t_н). \qquad (7.8.22)$$

Отметим в заключение, что, зная $\bar{\tau}$, можно определить требуемое быстродействие АУ, воспользовавшись методикой, изложенной в гл. 5.

7.9. Принцип полуавтоматического сопровождения целей [2]

Упрощенная схема системы полуавтоматического сопровождения целей по двум плоскостным координатам x и y показана на рис. 7.21. В схему входят визуальный индикатор (индикатор сопровождения),

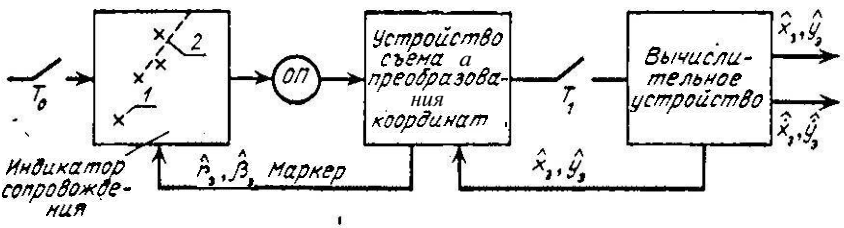


Рис. 7.21. Упрощенная схема системы полуавтоматического сопровождения целей.

устройство съема и преобразования координат и вычислительное устройство (дискретное или непрерывное), предназначенное для расчета параметров и построения траектории движения цели.

Съем координат с экрана индикатора и ввод их в вычислительное устройство производится оператором (ОП) путем совмещения электрон-

ного маркера (метки), связанного с механизмом устройства съема, с отметками от цели.

Для передачи цели на полуавтоматическое сопровождение необходим съем и ввод в вычислительное устройство двух отметок, привязанных ко времени их локации. По данным двух первых вводов определяются составляющие вектора скорости цели и начинается экстраполяция координат. Экстраполированные координаты и составляющие вектора скорости выдаются потребителям и, кроме того, используются для отображения маркера на экране индикатора.

В момент получения новой отметки оператор наблюдает рассогласование между измеренными и экстраполированными координатами. Если это рассогласование превышает допустимую величину, он вводит поправку (корректуру) путем нового совмещения маркера с отметкой. Корректура используется для уточнения координат и скорости их изменения.

После нескольких корректур скорость изменения координат, рассчитываемая в вычислительном устройстве, станет приближенно равной истинной скорости движения цели. В дальнейшем в каждом новом периоде обзора отметки от цели будут совпадать с рассчитанной в вычислительном устройстве и воспроизводимой на экране индикатора экстраполированной траекторией (траекторией движения маркера). Наступает установившийся процесс полуавтоматического сопровождения, в котором оператор не участвует. Новое вмешательство оператора (ввод корректур) потребуется только через некоторое время, когда накапливающиеся от обзора к обзору отклонение между истинной и расчетной траекторией превысит допустимую величину или когда цель резко изменит параметры траектории.

Оператор в системе полуавтоматического сопровождения целей выполняет функции дискриминатора ошибок. Характеристика этого элемента системы является нелинейной, так как существует зона нечувствительности, в пределах которой корректуры не вводятся. Размеры зоны нечувствительности определяются разрешающей способностью индикатора и индивидуальными качествами оператора (остротой зрения, опытностью, степенью усталости в данное время и т. д.).

Пропускная способность системы полуавтоматического сопровождения определяется требуемой частотой ввода корректур по каждой цели. Очевидно, чем меньше частота ввода корректур, тем большее число целей может обслужить один оператор, следовательно, тем больше пропускная способность системы.

Системы полуавтоматического сопровождения находят применение в тех случаях, когда число целей, подлежащих сопровождению, ограничено и оператор (или группа операторов) способен обеспечивать слежение за каждой из них с заданной точностью. Кроме того, полуавтоматические системы используются как дублирующие в случае выхода из строя автоматических систем обработки или при перегрузке последних интенсивными помехами.

При полуавтоматическом сопровождении цели можно выделить следующие этапы обработки информации:

1. Завязка траектории по первому и второму вводам координат.

2. Линейная экстраполяция координат,

3. Уточнение (сглаживание) координат и составляющих вектора скорости движения цели по данным корректур.

Рассмотрим основные формульные соотношения алгоритма полуавтоматического сопровождения целей.

1. Для завязки траектории оператором производится съем координат двух отметок, полученных в соседних обзорах (критерий «2/2»)

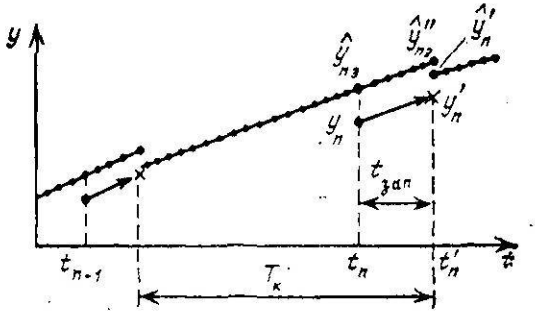


Рис. 7.22. Пояснение к процессу обработки корректур.

или в разнесенных на время $(m-1)\,T_0$ периодах обзора (критерий «2/m»). По координатам двух отметок вычисляются составляющие вектора скорости цели по координатам x и y:

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad \dot{y}_2 = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}, \tag{7.9,1}$$

где t_1, t_2 — время локации первой и второй отметки соответственно.

За начальную точку траектории принимается вторая отметка (x_2, y_2).

2, Экстраполяция координат производится по линейному закону:

$$\hat{x}_{t_\text{э}} = x_2 + \dot{x}_2 (t_2 + i\Delta t_\text{э}),$$
$$y_{t_\text{э}} = y_2 + \dot{y}_2 (t_2 + i\Delta t_\text{э}), \tag{7.9.2}$$

где $\Delta t_\text{э}$ — период экстраполяции координат, который выбирается обычно кратным периоду обзора РЛС; i — число периодов экстраполяции относительно момента времени t_2.

3. Процесс обработки корректур и уточнения параметров траектории по данным корректур поясняется на рис. 7.22, где обозначено: y_n — значение координаты y, снимаемое оператором при n-й корректуре; $\hat{y}_{n\text{э}}$ — экстраполированное значение координаты в момент локации t_n; $y'_n, y'_{n\text{э}}$ — соответствующие значения координат, отнесенные к моменту ввода корректуры; $t_{\text{зап}}$ — время запаздывания ввода корректуры относительно момента локации отметки.

Чтобы осуществить коррекцию траектории по координате y, необходимо вычислить разность Δy_n между снятым оператором значением координаты y_n и экстраполированным значением этой координаты $\hat{y}_{n\,э}$ в момент локации t_n. Но поскольку ввод корректуры происходит с запаздыванием $t_{зап}$, коррекция траектории будет произведена не в момент локации t_n, а в момент t'_n (рис. 7.22).

Для вычисления Δy_n надо, зная $y'_{nэ}$, $\hat{y}_{n-1}$ и $t_{зап}$, вычислить $\hat{y}_{nэ}$ путем обратной экстраполяции или, что то же, экстраполировать координату y_n на момент t'_n по линейному закону, принимая скорость изменения y_n равной $\hat{y}_{n-1}$.

В соответствии с этим

$$\Delta y_n = y_n + \hat{y}_{n-1} t_{зап} - y'_{nэ}, \qquad (7.9.3)$$

где $\hat{y}_{n-1}$ — сглаженное значение скорости изменения координаты y после ввода n — 1-й корректуры.

Аналогично обрабатывается корректура по координате x. Разность Δx_n при этом вычисляется по формуле

$$\Delta x_n = x_n + \hat{x}_{n-1} t_{зап} - x'_{nэ}. \qquad (7.9.4)$$

где $\hat{x}_{n-1}$ — сглаженное значение скорости изменения координаты после ввода n — 1-й корректуры.

Время запаздывания корректуры вычисляется в устройстве съема координат по формуле

$$t_{зап} = \frac{\beta_л - \beta_к}{2\pi} \cdot \Omega, \qquad (7.9.5)$$

где $\beta_л$ — азимут антенны РЛС в момент ввода корректуры; $\beta_к$ — азимут отметки (корректуры).

Новые сглаженные значения скорости изменения координат вычисляются по формулам:

$$\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + B \frac{\Delta x_n}{T^к},$$
$$\hat{y} = \hat{y}_{n-1} + B \frac{\Delta y_n}{T_к}, \qquad (7.9.6)$$

где $T_к$ — время между n — 1-й и n-й корректурами, вычисляемое в ЦВМ по формуле;

$$T_к = i_к \Delta t_э,$$

где, в свою очередь $i_к$ — число циклов экстраполяции координат с момента ввода n — 1-й корректуры.

Сглаженные значения координат (отнесенные к моменту t'_n) находятся по формулам:

$$\hat{x}'_n = \hat{x}_{n\text{э}} + A\Delta x_n,$$
$$\hat{y}'_n = \hat{y}'_{n\text{э}} + A\Delta y_n. \qquad (7.9.7)$$

Коэффициенты сглаживания A и B устанавливаются, обычно, с пульта оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башаринов А. Е., Флейшман Б. С. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. М., «Сов. радио», 1962.
2. Кузьмин С. З. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.
3. L. Takach. Stochastic Processes Problems and Solutions. First published, 1960.
4. Фурман Я. А. Определение апостериорной вероятности положения цели в пространстве по данным радиолокационного наблюдения. — В кн.: Теория и техника радиолокации. М., «Машиностроение», 1968.
5. Фурман Я. А. Нахождение траекторий целей по данным радиолокационного наблюдения при учете связи между соседними и отсчетами. — В кн.: Теория и техника радиолокации. М., «Машиностроение», 1968.
6. Sittler R. W. An Optimal Date Association Problem in Surveillance Theory. — «IEEE Trans. on Military Electr.», 1964, vol. Mil-8, № 2.
7. Sponsler G. C. First-Order Markov Process Reprensetation of Binary Radar Date Sequences. — «IRE Trans. on Inf. Theory». 1957, № 2.
8. Уакс Н. Улучшение отношения сигнал/шум и статистика семейств следов сигналов. — «Вопросы радиолокационной техники», 1956, № 1.

8. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ФИЗИЧЕСКОМ СТРОБЕ ИНДИВИДУАЛЬНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ

8.1. Принципы построения цифровых радиолокационных измерителей одиночных целей

В радиолокационных системах наряду с машинным сопровождением всех находящихся в зоне обзора целей возможно также индивидуальное сопровождение важных сточки зрения потребителей радиолокационной информации целей с помощью автономных измерительных устройств, называемых радиолокационными измерителями [1].

Радиолокационный измеритель представляет собой цифровое вычислительное устройство обработки информации, получаемой из ограниченного физическим стробом объема зоны обзора РЛС. Блок-схема измерителя представлена на рис. 8.1. Предварительное целеуказание радиолокационному измерителю производится по данным ЦВМ обнаружения и сопровождения траекторий. В дальнейшем построение

траектории цели осуществляется путем экстраполяции зоны ее возможного положения на следующий обзор по данным сглаживающего устройства точного канала.

Как видно (рис. 8.1), в радиолокационном измерителе выполняются те же операции, что и в процессе сопровождения траекторий целей с применением ЦВМ. В качестве некоторых особенностей необходимо отметить следующие.

1. Совмещение операций первичной обработки сигналов и селекции отметок в стробе сопровождения. При этом, вследствие ограниченного объема строба, в нем можно реализовать оптимальные методы квантования и обработки сигналов.

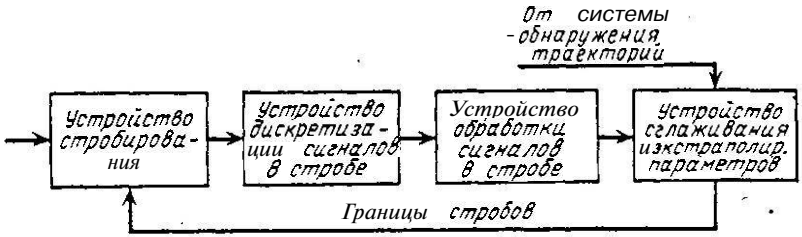


Рис. 8.1. Упрощенная структурная схема радиолокационного измерителя.

2. Сглаживание параметров траектории производится по итерационным формулам так, чтобы точность сглаживания последовательно увеличивалась.

Основной специфической задачей, подлежащей решению при синтезе радиолокационных измерителей, является задача обнаружения и селекции сигналов в стробах сопровождения. В настоящей главе указанная задача решается для случая двумерного (плоского) строба. Случай трехмерного строба не вносит принципиальных отличий в теорию, однако чрезвычайно громоздок при анализе.

Предполагается, что на входе радиолокационного измерителя сигналы квантуются по координатам с дискретностью, обеспечивающей статистическую независимость отсчетов, и по амплитуде на 2 уровня (двоичное квантование).

8.2. Алгоритм оптимальной обработки в двумерном стробе

Задача обнаружения и селекции сигналов в стробе сводится к проверке многих гипотез, причем одной из них является гипотеза об отсутствии сигнала, а другие соответствуют наличию сигнала в той или иной ячейке строба. Под ячейкой строба понимается элемент площади строба, ограниченный интервалами дискретизации сигнала по координатам τ (r) и β, где τ — временная задержка сигнала, r — дальность, β — азимут.

Как известно, достаточной процедурой при обработке результатов наблюдений с целью проверки статистических гипотез является обра-

зование отношения правдоподобия (или его логарифм) по данным выборки. В процессе принятия решения это отношение сравнивается с порогами, выбираемыми исходя из потерь, приписываемых правильным и ошибочным решениям.

Получим выражение для логарифма отношения правдоподобия при обработке двоично квантованных сигналов в двумерном стробе (общий подход см. гл. 5). Вероятность получения некоторой фиксированной комбинации единиц и нулей в пределах строба за счет помехи равна

$$P_N = \prod_{ij} p_N^{x_{ij}}(i, j)\,(1 - p_N(i, j))^{1-x_{ij}}. \qquad \textbf{(8.2.1)}$$

Аналогично, в области сигнала

$$P_S = \prod_{ij} [p_S(i, j \mid i_0, j_0)]^{x_{ij}} [1 - p_S(i, j \mid i_0, j_0)]^{1-x_{ij}}, \qquad (8.2.2)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

где $p_N(i, j)$ — вероятность получения единицы на выходе схемы квантования по амплитуде за счет помехи в ячейке (i, j);
$ps\,(i, j \mid i_0, j_0)$ — условная вероятность получения единицы на выходе схемы квантования в области сигнала в ячейке (i, j), при условии, что максимум огибающей сигнала находится в ячейке (i_0, j_0);

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_{ij} \geqslant x_1, \\ 0 & \text{при } x_{ij} < x_1; \end{cases}$$

x_1 — порог двоичного квантования; $x_{ij} = U_{ij}/\sigma_N$ — нормированная амплитуда суммарного сигнала на входе схемы квантования; n, m — линейные размеры строба.

Запишем выражение для логарифма отношения правдоподобия в виде

$$\ln l = \ln \frac{P_S}{P_N} = \ln \prod_{ij} \left(\frac{p_S(i, j \mid i_0, j_0)}{p_N(i, j)} \right)^{x_{ij}} \left(\frac{q_S(i, j \mid i_0 j_0)}{q_N(i, j)} \right)^{1-x_{ij}} =$$

$$p_S(i, j \mid i_0, j_0)\, q_N(i, j)$$

$$= \sum_{ij}$$

где

$$q_N(i, j) = 1 - p_N(i, j); \quad q_S(i, j \mid i_0, j_0) = 1 - p_S(i, j \mid i_0, j_0).$$

Отбрасывая в (3) второе слагаемое, которое является константой и может быть учтено при выборе порогов, получаем

$$\ln l = \sum_{ij} x_{ij}\, \eta(i, j \mid i_0, j_0), \qquad (8.2.4)$$

где

$$\frac{j \mid i_0, j_0)\, q_N(i, j)}{q_S(i \qquad j_0)\, p_N(i, j)} \qquad (8.2.4a)$$

, — набор весовых коэффициентов, с которыми суммируются квантованные сигналы (нули и единицы) в ячейках строба при образовании логарифма отношения правдоподобия.

Таким образом, процедура образования логарифма отношения правдоподобия сводится к образованию взвешенной суммы квантованных сигналов в каждой элементарной ячейке внутри строба. Рельеф отношения правдоподобия представляет собой случайную функцию двух переменных, т. е. случайное поле. В области помехи это поле будет однородным, а в области сигнала — неоднородным.

Конкретный вид дискретной последовательности значений $\eta\ (i, j | i_0, j_0)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ (в дальнейшем эту последовательность будем называть весовой функцией) зависит от модели обрабатываемых сигналов и помех.

Примем, что огибающая отраженного сигнала имеет вид плотности двумерного нормального распределения в системе координат τ, β. Тогда ожидаемое значение отношения сигнала к помехе в каждой ячейке строба записывается в виде

$$a_{ij} = a_0 \exp\left[-\frac{\Delta_\tau^2 (i-i_0)^2}{2\delta_\tau^2}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\Delta_\beta^2 (j-j_0)^2}{\ldots}\right], \qquad (8.2.5)$$

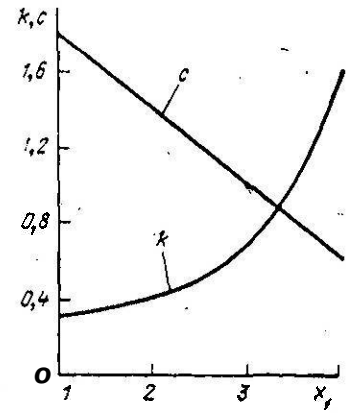


Рис. 8.2. Зависимость коэффициента k и c от порога x_1.

где a_0 — отношение сигнала к помехе в точке максимума сигнала: δ_τ, δ_β — половина ширины сигнала по координатам τ и β на уровне exp (— 1/2); Δ_τ, Δ_β — интервалы дискретизации сигнала по τ и β.

Для реализации выборок примем модель нефлюктуирующего сигнала в узкополосных помехах, огибающая которого описывается обобщенным законом Релея. Тогда

$$p_S(i, j) = \int_{x_1}^{\infty} x_{ij} \exp\left[-\frac{x_{ij}^2 + a_{ij}^2}{2}\right] I_0(x_{ij} a_{ij})\, dx_{ij}, \qquad (8.2.6)$$

$$p_N(i,j) = p_N = \exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right]. \qquad (8.2.7)$$

Кроме того, аппроксимируем функцию (6) для p$ (i, j) выражением*)

$$p_S(i, j) = \left[1 + (q_N/p_N) \exp\left(-2{,}3 k a_{ij}^c\right)\right]^{-1}, \qquad (8.2.8)$$

где k, c — коэффициенты, зависящие от порога амплитудного квантования.

*) Аппроксимация предложена В. Е. Ярушеком в неопубликованной работе

Зависимость коэффициентов k и c от порога x_1 приведена на рис. 8.2. Аппроксимирующая функция (8) отличается от исходной (6) на несколько процентов.

С учетом (8) выражение для двумерной весовой функции (4 а) имеет вид

$$\eta(i, j \mid i_0, j_0) = 2{,}3ka_0^c \exp\left[-\frac{c\Delta_\tau^2 (i-i_0)^2}{2\delta_\tau^2}\right] \exp\left[-\frac{c\Delta_\beta^2 (j-j_0)^2}{2\delta_\beta^2}\right]. \quad (8.2.9)$$

В дальнейшем постоянный множитель $2,3\, ka_0^c$ в выражении (9) полагается равным единице.

8.3. Статистические характеристики амплитуд поля отношения правдоподобия

Для анализа характеристик оптимального алгоритма обнаружения двумерной совокупности квантованных сигналов необходимо знать статистические характеристики поля отношения правдоподобия. Строгий расчет распределения вероятностей значений взвешенной суммы в области сигнала и помехи при линейном накоплении квантованных сигналов сопряжен с непреодолимыми вычислительными трудностями. Однако, учитывая, что при накоплении с двумерной весовой функцией число суммируемых дискретных выборочных значений при образовании поля отношения правдоподобия, как правило, велико, можно с достаточной надежностью принять гипотезу о нормальном распределении взвешенных сумм как в области сигнала, так и области помехи.

Ниже рассчитываются параметры нормального закона распределения амплитуд взвешенных сумм в области сигнала и помехи при использовании весовой функции (2.9).

8.3.1. Параметры распределения взвешенной суммы в области сигнала

Среднее значение взвешенной суммы в области сигнала при условии, что максимум весовой функции совпадает с центром тяжести сигнала, определяется по формуле

$$\bar{\Sigma}_S = \sum_{ij} p_S(i, j)\, \eta(i, j/i_0, j_0). \quad (8.3.1)$$

Подставляя в (1) выражение (2.8) для p_S и выражение (2.9) для $\eta(i, j/i_0, j_0)$, полагая $\tau_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ и заменяя суммирование по i j интегрированием в бесконечных пределах («центр тяжести» сигнала предполагается удаленным от краев строба на расстояние, не меньшее, чем ширина весовой функции по каждой координате), получаем

$$\bar{\Sigma}_S = \frac{1}{\Delta_\tau \Delta_\beta} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-c\left(\frac{\tau^2}{2\delta_\tau^2} + \frac{\beta^2}{2\delta_\beta^2}\right)\right] d\tau\, d\beta}{1 + \frac{q_N}{p_N} \exp\left\{-f \exp\left[-c\left(\frac{\tau^2}{2\delta_\tau^2} + \frac{\beta^2}{2\delta_\beta^2}\right)\right]\right\}},$$

где $f = 2{,}3ka_0^c$.

Переходя к полярной системе координат (ρ, φ) и производя замену переменных по формулам:

$$\tau = \sqrt{2}\,\delta_\tau \rho \sin\varphi, \quad \beta = \sqrt{2}\,\delta_\beta \rho \cos\varphi, \quad d\tau\, d\beta = 2\delta_\tau \delta_\beta \rho\, d\rho,$$

получаем

$$\overline{\Sigma}_S = \frac{4\pi\delta_\tau \delta_\beta}{\Delta_\tau \Delta_\beta} \int_0^\infty \frac{\exp[-c\rho^2]\,\rho d\rho}{1 + (q_N/p_N)\exp(-f\exp[-c\rho^2])}$$

Производя далее замену переменных $f \exp[-c\rho^2] = \xi$ и интегрируя, получаем окончательно

$$\overline{\Sigma}_S = \frac{}{cf} \ln\left(\frac{\exp(f)\, p_N}{p_{S\text{макс}}}\right), \qquad (8.3.2)$$

где

$$p_{S\text{макс}} = \left[1 + \frac{q_N}{p_N}\exp(-f)\right]^{-1};$$

$$n_\tau = \delta_\tau/\Delta_\tau; \quad n = \delta_\beta/\Delta_\beta.$$

Дисперсия взвешенной суммы при наличии сигнала равна

$$(3.3.3)$$

Переходя к интегрированию в полярных координатах, при $\tau = 0$ и $\beta = 0$ получаем

$$\frac{4\pi\delta_\tau \delta_\beta}{\Delta_\tau \Delta_\beta} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-2c\rho^2) - \exp[-f\exp(-c\rho^2)]\,\rho d\rho}{\left\{1 + \frac{q_N}{p_N}\exp[-f\exp(-c\rho)]\right\}^2}.$$

После замены переменных $\xi = f \exp(-c\rho^2)$ выражение примет вид

$$\sigma_S^2 = \frac{2\pi n_\tau n_\beta}{cf^2}\frac{q_N}{p_N}\int_0^f \frac{\xi\exp(-\xi)\,d\xi}{\left[1 + \frac{q_N}{p_N}\exp(-\xi)\right]^2},$$

Производя новую замену переменных $x = \exp(-\xi)$ и интегрируя, получаем окончательно

$$\sigma_S^2 = \frac{2\pi n_\tau n_\beta}{cf^2}\ln\left[\frac{p_{S\text{макс}}}{p_N}\exp(-fq_{S\text{макс}})\right]. \qquad (8.3.4)$$

Как уже отмечалось, распределение вероятности взвешенной суммы в области сигнала принимается нормальным. При этом, однако, необходимо учитывать, что сумма Σ_s принимает только положительные значения, так что нормальный закон является усеченным в точке $\Sigma_s = 0$ и соответствующая плотность вероятности имеет вид

$$w(\Sigma_S) = \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_S}\exp\left[-\dfrac{(\Sigma_S - \overline{\Sigma}_S)^2}{2\sigma_S^2}\right], & \Sigma_S > 0, \\ 0, & \Sigma_S < 0. \end{cases} \qquad (8.3.5)$$

где $\bar{\Sigma}_S$ и σ_S^2 определяются выражениями (2) и (4) соответственно;

$$A = \left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\bar{\Sigma}_S}{\sigma}\right)\right]^{-1}, \qquad (8.3.6)$$

в свою очередь

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Математическое ожидание для усеченного нормального закона равно [5]

$$\bar{\Sigma}'_S = \bar{\Sigma}_S + K_1 \sigma_S. \qquad (8.3.7)$$

где

$$K_1 = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\Sigma}_S}{\sigma_S}\right)^2\right],$$

а дисперсия

$$\sigma'^2_S = (1 - K_S^2)\sigma_S^2 - K_1 \sigma_S \bar{\Sigma}_S. \qquad (8.3.8)$$

8.3.2. Параметры закона распределения взвешенной суммы в области помехи

Среднее значение взвешенной суммы в области помехи определяется выражением

$$\bar{\Sigma} \quad -\nu \qquad , l)\,\eta\,(l, \qquad\qquad l, j/l_0, l_0).$$

Переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$\bar{\Sigma}_N = \frac{p_N}{\Delta_\tau \Delta_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{c(\tau-\tau_0)^2}{2\delta_\tau^2}\right] \exp\left[-\frac{c(\beta-\beta_0)^2}{2\delta_\beta^2}\right] d\tau\, d\beta =$$

$$= \frac{2\pi}{c} p_N n_\tau n_\beta. \qquad (8.3.9)$$

Корреляционная функция взвешенной суммы в области помехи определяется выражением

$$R(r,) = \Sigma \sum_{\nu\nu} \overline{x_{lj} x_{\nu\nu}}\, \eta(\tau/, \beta_j)\, \eta(\tau - r, \beta_\nu - s) -$$

$$-(\bar{\Sigma}_N)^2,$$

где обозначено

$$\tau_l = l\Delta$$

Так как

$$\overline{x_{lj} x_{\nu\nu}} = \begin{cases} p_N^2 & \text{при } l \neq \gamma,\ j \neq \nu, \\ PN & \text{при } i = \gamma,\ j = \nu, \end{cases}$$

то последнее выражение можно представить в виде

$$R(r, s) = p_N^2 \left[\sum_{ij} \eta(\tau_i, \beta_j)\right]^2 - p_N^2 \sum_{ij} \eta(\tau_i, \beta_j)\, \eta(\tau_i - r, \beta_j - s) +$$

$$+ p_N \sum_{ij} \eta(\tau_i, \beta_j)\, \eta(\tau_i - r, \beta_j - s) - (\bar{\Sigma}_N)^2 =$$

$$= p_N q_N \sum_{ij} \eta(\tau_i, \beta_j)\, \eta(\tau_i - r, \beta_j - s).$$

Переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$R(r, s) = \frac{p_N q_N}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{c(\tau - \tau_0)^2 + c(\tau - \tau_0 - r)^2}{2\delta_\tau^2} \right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{c(\beta - \beta_0)^2 + c(\beta - \beta_0 - s)^2}{2\delta_\beta^2} \right] d\tau\, d\beta.$$

Интегрирование дает

$$R(r, s) = \frac{\pi}{c} q_N p_N n_\tau n_\beta \exp\left[-\frac{cr^2}{4\delta_\tau^2} \right] \exp\left[-\frac{cs^2}{4\delta_\beta^2} \right]. \qquad (8.3.10)$$

Дисперсия взвешенной суммы в области помехи

$$\sigma_N^2 = R(0,0) = \frac{\pi}{c} q_N p_N n_\tau n_\beta. \qquad (8.3.11)$$

Таким образом, плотность распределения взвешенной суммы в области помехи записывается в виде

$$w(\Sigma_N) = \begin{cases} \dfrac{A_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_N} \exp\left[-\dfrac{(\Sigma_N - \bar{\Sigma}_N)^2}{2\sigma_N^2} \right], & \Sigma_N > 0, \\ 0, & \Sigma_N \leqslant 0, \end{cases} \qquad (8.3.12)$$

где $\bar{\Sigma}_N$ и σ_N^2 — параметры, определяемые из выражений (9) и (11) соответственно.

Значения A_1, Σ'_N и σ'^2_N рассчитываются так же, как A, Σ'_S, σ'^2_S [см. (6), (7) и (8)].

8.3.3. Плотность распределения амплитуд ложных максимумов в стробе

Размеры строба сопровождения выбираются из условия обеспечения близкой к единице вероятности попадания в него отраженного от сопровождаемой цели сигнала с учетом случайных и динамических ошибок экстраполяции. Эти размеры получаются достаточно большими, так что в стробе возможно образование нескольких ложных максимумов взвешенных сумм. При решении задач селекции сигналов в стробе необходимо знать закон распределения амплитуд ложных максимумов. Получим этот закон.

Обозначив значение взвешенной суммы в точке с координатами x, β через $\Sigma_N(\tau, \beta)$*), найдем вероятность получения максимума, заключенного в пределах

*) $\Sigma_N(\tau, \beta)$ в дальнейшем считается непрерывной функцией своих аргументов.

от $z - \Delta z$ до z в данной точке внутри строба. Условия наличия такого максимума следующие [3]:

$$z - \Delta z < \Sigma_N(\tau, \beta) \leqslant z,$$

$$\frac{\partial \Sigma_N(\tau, \beta)}{\partial \tau} = \frac{\partial \Sigma_N(\tau, \beta)}{\partial \beta} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma_N(\tau, \beta)}{\partial \tau \partial \beta} < 0; \quad \frac{\partial^2 \Sigma_N(\tau \beta)}{\partial \tau^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma_N(\tau, \beta)}{\partial \beta^2} < 0.$$

С учетом того, что при малых приращениях аргумента непрерывной функции ее производная меняется по линейному закону, так что

$$\Sigma_{N\tau}(\tau + \Delta\tau, \beta) \approx \Sigma_{N\tau}(\tau, \beta) + \Sigma_{N\tau\tau}(\tau, \beta)\Delta\tau.$$

$$\Sigma_{N\beta}(\tau, \beta + \Delta\beta) \approx \Sigma_{N\beta}(\tau, \beta) + \Sigma_{N\beta\beta}(\tau, \beta)\Delta\beta,$$

где

$$\Sigma_{N\tau} = \partial \Sigma_N(\tau, \beta)/\partial\tau; \qquad \Sigma_{N\beta} = \partial \Sigma_N(\tau, \beta)/\partial\beta;$$

$$\Sigma_{N\tau\tau} = \partial^2 \Sigma_N(\tau, \beta)/\partial\tau^2; \qquad \Sigma_{N\beta\beta} = \partial^2 \Sigma_N(\tau, \beta)/\partial\beta^2,$$

вероятность наличия в элементарном участке $(\tau + \Delta\tau, \beta + \Delta\beta)$ максимума, величина которого заключена в интервале $(z - \Delta\zeta, z)$, запишем в виде

$$\Delta P = P\{z - \Delta z < \Sigma_N \leqslant z; \quad 0 \leqslant \Sigma_{N\tau} < -\Sigma_{N\tau\tau}\Delta\tau; \quad 0 \leqslant \Sigma_{N\beta} < -\Sigma_{N\beta\beta}\Delta\beta\}.$$

Обозначим многомерный закон распределения величин Σ_N, $\Sigma_{N\tau}$, $\Sigma_{N\tau\tau}$, $\Sigma_{N\beta}$, $\Sigma_{N\beta\beta}$ через $w(\Sigma_N, \Sigma_{N\tau}, \Sigma_{N\tau\tau}, \Sigma_{N\beta}, \Sigma_{N\beta\beta})$. Тогда вероятность $\Delta P(z, \tau, \beta)$, того, что максимум будет находиться в элементарном параллелепипеде $(\Delta z, \Delta\tau, \Delta\beta)$, равна

$$\Delta P(z, \tau, \beta) = \int_{z-\Delta z}^{z} \int_{0}^{-\Sigma_{N\tau\tau}\Delta\tau} \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{-\Sigma_{N\beta\beta}\Delta\beta} \int_{-\infty}^{0} w(\Sigma_N, \Sigma_{N\tau}, \Sigma_{N\tau\tau}, \Sigma_{N\beta}, \Sigma_{N\beta\beta}) \times$$

$$\times\, d\Sigma_N\, d\Sigma_{N\tau}\, d\Sigma_{N\tau\tau}\, d\Sigma_{N\beta}\, d\Sigma_{N\beta\beta}. \qquad (8.3.13)$$

Первый, второй и четвертый интегралы могут быть взяты сразу, так как интегрирование производится в бесконечно малых интервалах. Произведя интегрирование, получим

$$\Delta P(z, \tau, \beta) = \Delta z\, \Delta\tau\, \Delta\beta \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} w(z, 0, \Sigma_{N\tau\tau}, 0, \Sigma_{N\beta\beta}) \times$$

$$\times\, \Sigma_{N\tau\tau}\, \Sigma_{N\beta\beta}\, d\Sigma_{N\tau\tau}\, d\Sigma_{N\beta\beta}. \qquad (8.3.14)$$

Вероятность $\Delta P(z, \tau, \beta)$ совпадает со средним числом максимумов, заключенных в интервале $(z - \Delta z, z)$, приходящихся на элементарную площадку $\Delta\tau\Delta\beta$. Поэтому, поделив выражение (14) на $\Delta\tau\Delta\beta$, получим среднее число максимумов в интервале $(z, \zeta - \Delta z)$ на единицу площади строба.

$$\bar{n}(z, \tau, \beta) = \Delta\zeta \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} w(z, 0, \Sigma_{N\tau\tau}, 0, \Sigma_{N\beta\beta}) \times$$

$$\times\, \Sigma_{N\tau\tau}\, \Sigma_{N\beta\beta}\, d\Sigma_{N\tau\tau}\, d\Sigma_{N\beta\beta}.$$

Учитывая, далее, что для стационарного случайного процесса среднее число максимумов не зависит от выбора τ и β [т. е. $n(z, \tau, \beta) = \bar{n}(z)$] и, кроме того,

амплитуды максимумов имеют только положительные значения, получаем полное среднее число максимумов, независимо от их величины в виде

$$\bar{N}=\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} w\,(z,\ 0,\ \Sigma_{N\tau\tau},\ 0,\ \ \Sigma_{N\beta\beta})\ \Sigma_{N\tau\tau}\ \Sigma_{N\beta\beta}\ d\Sigma_{N\tau\tau}\ d\Sigma_{N\beta\beta}.$$

Плотность вероятности для максимумов определяется из выражения

$$w\,(z)=\bar{n}\,(z)/\bar{N}. \qquad (8.3.15)$$

Поскольку $\Sigma_N(\tau,\ \beta)$ нормальное и однородное случайное поле, то и $\Sigma_{N\tau}$, $\Sigma_{N\tau\tau}$, $\Sigma_{N\beta}$, $\Sigma_{N\beta\beta}$ также будут подчинены нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю.

Запишем многомерную нормальную плотность распределения случайных величин $\Sigma_N = \xi_1, \Sigma_{N\tau}=\xi_2,\ \ \Sigma_{N\tau\tau}=\xi_3, \Sigma_{N\beta}=\xi_4,\ \ \Sigma_{N\beta\beta}=\xi_5$ в виде

$$w\,(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4, \xi_5)=\frac{1}{(2\pi)^{5/2}\sqrt{|K|}}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2|K|}\ \ \sum^{5}\ \sum^{5} K_{pq}\,(\xi_p-\bar{\xi}_p)\,(\xi_q-\bar{\xi}_q)\right\}, \qquad (8.3.16)$$

где K_{pq} — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении p-й строки и q-го столбца корреляционной матрицы системы случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_5$; $|K|$ — определитель этой матрицы; $\bar{\xi}_p$, $\bar{\xi}_q$ — средние значения случайных величин.

Корреляционная матрица в нашем случае имеет вид

$$\mathbf{K}=\begin{Vmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & 0 & \text{ft»} \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & 0 & k_{35} \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 \\ k_{51} & 0 & k_{53} & 0 & \text{ft»} \end{Vmatrix}. \qquad (8.3.17)$$

Значения компонент корреляционной матрицы (17) находятся по формулам [3]:

$$\begin{aligned}
k_{11}&=R\,(r,s)|_{r=s=0}=\sigma_N^2,\\
k_{13}=k_{31}&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,R\,(r,0)\Big|_{r=0}=-\frac{c}{2\delta_\tau^2}\,\sigma_N^2,\\
k_{15}=k_{51}&=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,R\,(0,\ s)\Big|_{s=0}=-\frac{c}{2\delta_\beta^2}\,\sigma_N^2,\\
k_{22}&=-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,R\,(r,\ 0)\Big|_{r=0}=\frac{c}{2\delta_\tau^2}\,\sigma_N^2,\\
\text{ft.4.1}\quad &=\frac{\partial^4}{\partial r^4}\,R\qquad\Big|_{r=0}\qquad\frac{3c^2}{4\delta_\tau^4}\ {}^2{}_N,\\
k_{35}=K_{53}&=\frac{\partial^4}{\partial r^2\,\partial s^2}\,R\,(r,\ 5)\Big|_{r=s=0}=\frac{c^2}{4\delta_\tau^2\,\delta_\beta^2},\\
k_{44}&=-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,R\,(0,\ s)\Big|_{s=0}=\frac{c}{2\delta_\beta^2}\,\sigma_N^2,\\
k_{55}&=\frac{\partial_4}{\partial s^4}\,R\,(0,\ s)\Big|_{s=0}=\frac{3c^2}{4\delta_\beta^4}\,\sigma_N^2.
\end{aligned} \qquad (8.3.18)$$

Определитель матрицы K равен

$$|K| = k_{11}k_{22}k_{44}\left[\left(k_{33}-\frac{k_{13}k_{31}}{k_{11}}\right)\left(k_{55}-\frac{k_{15}k_{51}}{k_{11}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(k_{35}-\frac{k_{31}k_{15}}{K_{11}}\right)\left(k_{53}-\frac{k_{51}k_{15}}{k_{11}}\right)\right]=\frac{c^6}{16\delta_\tau^6\delta_\beta^6}(\sigma_N^2)^6. \qquad (8.3.19)$$

Необходимые в дальнейшем алгебраические дополнения элементов матриць K равны

$$K_{11}=\frac{c^6}{8\delta_\tau^6\delta_\beta^6}(\sigma_N^2)^4, \quad K_{31}=K_{13}=\frac{c^5}{16\delta_\tau^4\delta_\beta^6}(\sigma_N^2)^4,$$

$$K_{15}=K_{51}=\frac{c^5}{16\delta_\tau^6\delta_\beta^4}(\sigma_N^2)^4, \quad K_{33}=\frac{c^4}{8\delta_\tau^2\delta_\beta^6}(\sigma_N^2)^4, \qquad (8.3.20)$$

$$K_{55}=\frac{c^4}{8\delta_\tau\delta_\beta^2}(\sigma_N^2)^4, \quad K_{35}=K_{53}=0.$$

С учетом (16), (19) и (20) двойной интеграл в выражении для w (z) записывается в виде

$$J=-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^5\sqrt{|K|}}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2|K|}\left[K_{11}(z-\bar{\Sigma}_N)^2+2K_{13}(z-\bar{\Sigma}_N)\Sigma_{N\tau\tau}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2K_{15}(z-\bar{\Sigma}_N)\Sigma_{N\beta\beta}+K_{33}\Sigma_{N\tau\tau}^2+K_{55}\Sigma_{N\beta\beta}^2\right]\right\}\Sigma_{N\tau\tau}\Sigma_{N\beta\beta}\,d\Sigma_{N\tau\tau}\,d\Sigma_{N\beta\beta}.$$

Произведем замену переменных

$$=\sqrt{\frac{K_{33}}{2|K|}}\Sigma_{N\tau\tau}, \quad x_3=\sqrt{\frac{K_{55}}{2|K|}}\Sigma_{N\beta\beta}.$$

Тогда

$$-\frac{K}{|}(z-\bar{\Sigma}_N)\Sigma_{N\tau\tau}=2ax_1x_2,$$

где $a=K_{13}/\sqrt{K_{11}K_{13}}$,

$$=\frac{K_{15}}{|K|}(z-\bar{\Sigma}_N)\Sigma_{N\beta\beta}=2bx_1x_3,$$

где $b=K_{15}/\sqrt{K_{11}K_{55}}$,

$$dx_2=\sqrt{\frac{K_{33}}{2|K|}}d\Sigma_{N\tau\tau}, \qquad dx_3=\sqrt{\frac{K_{55}}{2|K|}}d\Sigma_{N\beta\beta}.$$

После подстановки новых переменных получим

$$J=\frac{(2|K|)^2\exp(-x_1^2)}{(\sqrt{2\pi})^5}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}x_2x_3\exp[-(x_2^2+x_3^2+$$

дал

$$+2ax_1x_2+2bx_1x_3)]\,dx_2\,dx_3.$$

Вычисление двойного интеграла дает

$$J=\left\{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{\pi}}{4}ax_1\exp\left[a^2x_1^2\right]\left[1-\Phi\left(ax_1\right)\right]-\right.$$

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4}bx_1\exp\left[b^2x_1^2\right]\left[1-\Phi\left(bx_1\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\pi}{4}abx_1^2\exp\left[x_1^2\left(a^2+b^2\right)\right]\left[1-\Phi\left(ax_1\right)\right]\left[1-\Phi\left(bx_1\right)\right],\right.$$

где $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\exp\left(-t^2\right)dt.$

После вычисления и подстановки коэффициентов a, b, $|K|$, K_{ij} получим окончательно

$$J=\frac{\text{tfexp}(-xl)\,|}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^5\sigma_N\delta_\tau\delta_\beta}\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\exp\left(\frac{x_1^2}{4}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]\right\}^2. \qquad (8.3.21)$$

Найдем теперь среднее число максимумов на единицу площади строба. Для этого вместо интегрирования выражения (21) по z, выполнить которое затруднительно, воспользуемся только что изложенной методикой.

Очевидно, если не фиксировать амплитуду максимумов, то исходной системой случайных величин для определения числа максимумов будет $\Sigma_{N\tau}$, $\Sigma_{N\tau\tau}$, $\Sigma_{N\beta}$ и $\Sigma_{N\beta\beta}$. Обозначая закон распределения этой системы через $w\left(\Sigma_{N\tau}, \Sigma_{N\tau\tau}, \Sigma_{N\beta}, \Sigma_{N\beta\beta}\right)$ и произведя интегрирование по $\Sigma_{N\tau}$ и $\Sigma_{N\beta\beta}$, получаем выражение для среднего числа максимумов, приходящихся на единицу площади строба, в виде

$$\overline{N}=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}w\left(0,\ \Sigma_{N\tau\tau},\ 0,\ \Sigma_{N\beta\beta}\right)\Sigma_{N\tau\tau}\Sigma_{N\beta\beta}\,d\Sigma_{N\tau\tau}\,d\Sigma_{N\beta\beta}. \qquad (8.3.22)$$

Оставляя неизменными ранее введенные обозначения для переменных и имея в виду, что все они подчинены нормальному распределению с математическими ожиданиями, равными нулю, запишем совместную плотность распределения в виде

$$w\left(0,\xi_3,\ 0,\ \xi_6\right)=\frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{|K'|}}\exp\left[-\frac{1}{2|K'|}\sum_{p=2}^{5}\sum_{q=2}^{5}K_{pq}\xi_p\xi_q\right], \qquad (8.3.23)$$

где $|K^*|$ — определитель корреляционной матрицы

$$K'=\begin{Vmatrix} k'_{22} & 0 & \Theta & 0 \\ 0 & \text{ftsa} & 0 & k'_{36} \\ 0 & 0 & k'_{44} & 0 \\ 0 & k'_{63} & 0 & k'_{66} \end{Vmatrix}.$$

Окончательная формула для вычисления определителя $|K'|$ имеет вид

$$|K'|=\frac{c^6}{8\delta_\tau^6\delta_\beta^6}\left(\sigma_N^2\right)^4. \qquad (8.3.24)$$

Необходимые для расчетов алгебраические дополнения равны

$$K'_{33}=\frac{3c^4}{16\delta_\tau^2\delta_\beta^2}(\sigma_N^2)^2,\quad K'_{33}=\frac{c^4}{16\delta_\tau^4\delta_\beta^4}\sigma^2_N,$$

$$K'_{55}=\frac{3c^4}{16\delta_\tau^6\delta_\beta^2}(\sigma_N^2)^3. \qquad (8.3.25)$$

Интеграл (22) записывается теперь в виде

$$\text{If}=\frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{|K'|}}\int_0^\Gamma\int_0^\Gamma \exp\left[-\frac{K'_{33}}{2|K'|}\xi_3^2+\right.$$

$$\left.+\frac{2|K'|^{55}}{2|K'|}\xi_5^2+\frac{K'_{35}}{|K'|}\xi_3\xi_5\right]d\xi_3\,d\xi_5. \qquad (8.3.26)$$

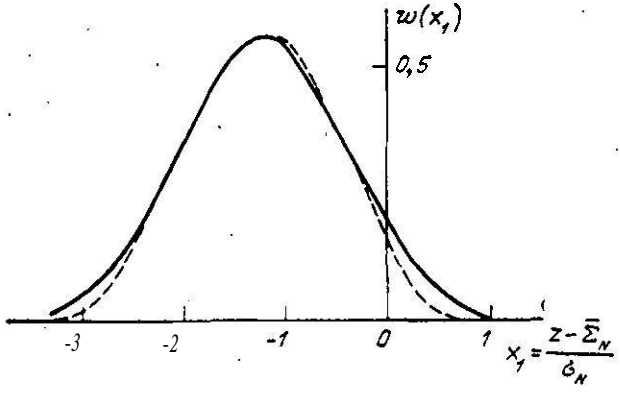


Рис. 8.3. Плотность распределения амплитуд максимумов поля отношения правдоподобия.

Произведем замену переменных

$$\sqrt{2|K'|^{33}}\,\xi_3=y_1,\qquad \sqrt{2|K'|^{55}}\,\xi_5=y_2.$$

Тогда

$$\frac{K'_{35}}{|K'|}\xi_3\xi_5=2by_1y_2,\qquad \text{где } b=\frac{K'_{35}}{\sqrt{K'_{33}K'_{55}}}.$$

Подставляя эти выражения в (26) и интегрируя, получаем

$$\bar{N}=\frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{|K'|K'_{33}K_{55}}}\left[1-\frac{1}{b}\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1/b^2-1}}{(\sqrt{1/b^2-1})^3}-\frac{b^2}{(1/b^2-1)}\right)\right].$$

С учетом численных значений $|K'|$, K'_{33}, K'_{55} и b окончательное выражение для среднего числа максимумов, приходящихся на единицу площади строба, записывается в виде

$$\bar{N}=2c/(2\pi)^2\delta_\tau\delta_\beta. \qquad (8.3.27)$$

Теперь можно записать выражение для плотности распределения амплитуд максимумов. Для этого, разделив (21) на (27), получим

$$w(x_1) = \frac{1}{\pi\sigma_N}\exp(-x_1^2)\times$$
$$\times\left\{1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}x_1\exp\left(\frac{x_1^2}{4}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]\right\}^2. \qquad (8.3.28)$$

Путем непосредственного построения можно показать (рис. 8.3), что выражение (28) хорошо апрроксимируется гауссовой кривой (пунктирная кривая на рис. 8.3), записываемой в виде

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z}\exp\left\{-\frac{[z-(\bar{\Sigma}_N+1,2\sigma_N)]^2}{2\sigma_z^2}\right\}. \qquad (8.2.29)$$

Обозначим в последнем выражениии

$$\bar{\Sigma}_N + 1,2\sigma_N = \bar{z}, \quad \sigma_N/2 = \sigma_z.$$

Тогда аппроксимированная плотность распределения амплитуд максимумов окончательно записывается в виде

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z}\exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right]. \qquad (8.3.30)$$

Так как $z > 0$, то при расчетах необходимо использовать усеченный нормальный закон.

8.4. Статистические характеристики положения максимумов поля отношения правдоподобия

Кроме сигнального признака при обнаружении и селекции отметок в стробе могут быть также использованы признаки, характеризующие отклонения максимумов отношения правдоподобия или, что то же, максимумов взвешенной суммы квантованных сигналов от центра строба или от другой его выбранной точки (например, левого нижнего угла строба). Как уже отмечалось в гл. 6, статистические характеристики этих отклонений различны для максимумов в области сигнала и помехи, что и позволяет использовать этот признак при обнаружении и селекции полезных сигналов.

В данном параграфе рассматриваются статистические характеристики положения максимумов взвешенных сумм относительно центра строба в области сигнала и помехи. При этом эффекты искажения поля, отношения правдоподобия на краях строба не учитываются.

8.4.1. Распределение отклонений максимумов в области сигнала от центра строба

Центр строба сопровождения совпадает с экстраполированной точкой. Поэтому отклонение сигнальной отметки от центра строба определяется суммарными (случайными и динамическими) ошибками экстраполяции и ошибками оценки координат цели по максимуму взвешенной суммы квантованных сигналов.

Рассмотрим статистические характеристики отклонений максимумов взвешенных сумм от центра строба. Выберем начало координат в центре строба и направим ось y по направлению «РЛС — цель», а ось x — по направлению вращения

антенны. Составляющие отклонения максимума от центра строба будем обозначать Δx_Σ и Δy_Σ. При выбранном направлении осей координат отклонения $\Delta_c x$ и $\Delta_c y$, обусловленные случайными ошибками оценки координат, являются независимыми и равны соответственно

$$\Delta_c y = \Delta r, \qquad \Delta_c x = r\Delta\beta,$$

где r — дальность до цели; Δr, $\Delta\beta$ — случайные ошибки оценки дальности и азимута соответственно.

Будем считать, что динамические ошибки измерения имеют независимые составляющие по осям e и f, первая из которых совпадает с горизонтальной проекцией вектора скорости цели, а вторая — перпендикулярна этому направлению. Направление вектора скорости цели образует с направлением «РЛС — цель» угол q (курсовой угол).

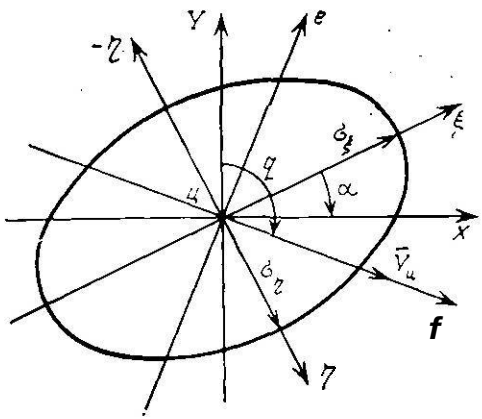


Рис. 8.4. Распределение отклонений истинных отметок от центра строба.

Проекции динамических ошибок на оси x и y равны (рис. 8.4)

$$\Delta_d x = \Delta e \cos q + \Delta f \sin q,$$
$$\Delta_d y = -\Delta e \sin q + \Delta f \cos q.$$

Суммарные отклонения по осям X и Y равны

$$\Delta x_\Sigma = \Delta_c x + \Delta_\partial x,$$
$$\Delta y_\Sigma = \Delta_c y + \Delta_\partial y,$$

а дисперсии этих отклонений представляются выражениями

$$\sigma^2_{x\Sigma} = r^2\sigma^2_\beta + \sigma^2_e \cos^2 q + \sigma^2_f \sin^2 q,$$
$$\sigma^2_{y\Sigma} = \sigma^2_r + \sigma^2_e \sin^2 q + \sigma^2_f \cos^2 q.$$

Если, кроме того, учесть, что положение экстраполированной точки вычисляется с ошибками, дисперсии которых равны $\sigma^2_{x\text{э}}$ и $\sigma^2_{y\text{э}}$, то общее отклонение максимума от экстраполированной точки характеризуется дисперсиями

$$\sigma^2_x = \sigma^2_{x\Sigma} + \sigma^2_{x\text{э}},$$
$$\sigma^2_y = \sigma^2_{y\Sigma} + \sigma^2_{y\text{э}} \qquad (8.4.1)$$

Законы распределения случайных и динамических ошибок будем считать нормальными. Тогда отклонения максимумов от центра строба на плоскости (X, У) образуют систему случайных величин с плотностью вероятности

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-k^2_{xy}}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-k^2_{xy})} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{x^2}{\sigma^2_x} - 2k_{xy}\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma^2_y}\right)\right], \qquad (8.4.2)$$

где

$$k_{xy} = \frac{M(xy)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{(\sigma^2_f - \sigma^2_e)\sin 2q}{2\sigma_x\sigma_y}.$$

Для перехода к независимым случайным величинам ξ и η необходимо произвести линейное преобразование случайных величин x и y (см. также § 6.5):

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$\eta = -\chi\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{k_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\kappa_{xy}\sigma_x^2\sigma_y^2}\right],$$

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\kappa_{xy}\sigma_x^2\sigma_y^2}\right].$$

В этом случае плотность вероятности системы случайных величин (ξ, η) записывается в виде

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta}\exp\left[-\left(\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2} + \frac{\eta_1^2}{2\sigma_\eta^2}\right)\right].$$

Пользуясь обычным приемом нахождения законов распределения функций случайных величин, можно получить плотность вероятности модуля случайного радиуса-вектора

$$\rho_S = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Эта плотность вероятности имеет вид

$$w(\rho_S) = \frac{\rho_S}{\sigma_\xi\sigma_\eta}\exp\left[-\frac{\rho_S^2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)}{4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2}\right] I_0\left[\frac{\rho_S(\sigma_\xi^2 - \sigma_\eta^2)}{4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2}\right]. \qquad (8.4.3)$$

Если перейти к нормированным случайным величинам $\xi' = \xi/\sigma_\xi$, $\eta' = \eta/\sigma_\eta$, то получим

$$w(\xi'\eta') = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2)\right],$$

что соответствует круговому распределению системы величин ($\xi'\eta'$) на плоскости.

Плотность распределения нормированного радиуса-вектора

$$\rho_S' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$$

в этом случае будет равна

$$w(\rho_S') = \rho_S'\exp\left[-\frac{\rho_S'^2}{2}\right]$$

Легко показать, что для квадрата нормированного отклонения максимума взвешенной суммы в области сигнала от центра строба справедлив экспоненциальный закон

$$w(\rho_S'^2 = R_S) = \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{R_S}{2}\right]. \qquad (8.4.5)$$

8.4.2. Распределение отклонений ближайшего к центру строба максимума в области помехи

Для однородного случайного поля положение случайной точки A (|, η), соответствующей максимуму взвешенной суммы, равновероятно в любом месте строба. Если строб эллиптический с параметром Я, то плотность распределения системы случайных величин ξ, η имеет вид

$$w_N(\xi, \eta) = \begin{cases} 1/\pi\sigma_\xi \sigma_\eta \lambda^2 & \text{при } \xi^2/\sigma_\xi^2 + \eta^2/\sigma_\eta^2 \leqslant \lambda^2, \\ 0 & \text{при } \xi^2/\sigma_\xi^2 + \eta^2/\sigma_\eta^2 > \lambda^2. \end{cases}$$

Для системы нормированных случайных величин $\xi' = \xi/\sigma_\xi$ и $\eta' = \eta/\sigma_\eta$ плотность вероятности будет равномерной внутри круга радиуса Я, т. е.

$$w_N(\xi', \eta') = \begin{cases} 1/\pi\lambda^2 & \text{при } \rho_N'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 < \lambda^2, \\ 0 & \text{при } \rho_N'^2 > \lambda^2. \end{cases} \tag{8,4.6}$$

Модуль нормированного случайного расстояния максимума от центра строба распределен в этом случае по линейному закону вида

$$w(\rho_N') = \begin{cases} \dfrac{2\rho_N'}{\lambda^2} & 0 < \rho_N' \leqslant \lambda, \\ 0, & \rho_N' > \lambda, \quad \rho_N' < 0. \end{cases} \tag{8.4.7}$$

В стробе возможно появление нескольких ложных максимумов. Будем считать, что число ложных максимумов в стробе подчинено закону Пуассона;

$$P_n(\overline{N} S_{стр}) = \frac{(\overline{N} S_{стр})^n}{n!} \exp(-\overline{N} S_{стр}), \tag{8.4.8}$$

где $\overline{N}$ определяется формулой (3.27). Такое допущение не приводит к грубым ошибкам, по крайней мере, при высоких относительных порогах двоичного квантования входных сигналов ($x_1 \geqslant 2$).

Найдем закон распределения отклонения ближайшего к центру строба ложного максимума при наличии в стробе нескольких таких максимумов. Выделим в приведенном круговом стробе с радиусом λ кольцо Δr на расстоянии r_N от его центра. Вероятность того, что в это кольцо попадет ложный максимум и он будет ближайшим к центру строба, определяется выражением

$$\begin{aligned} w(r_N)\Delta r = \frac{2r_N}{\lambda^2}\Delta r \{ & P_1(\overline{N} S_{стр}) + 2P_2(\overline{N} S_{стр}) \times \\ & \times P(r_N < \rho_N' \leqslant \lambda) + 3P_3(\overline{N} S_{стр}) [P(r_N < \rho_N' \leqslant \lambda)]^2 + \\ & + \ldots + n P_n(\overline{N} S_{стр}) [P(r_N < \rho_N' \leqslant \lambda)]^{n-1} + \ldots \}. \end{aligned} \tag{8.4.9}$$

В этом выражении

$$P(r_N < \rho_N' \leqslant \lambda) = \int_{r_N}^{\lambda} \frac{2\rho_N'}{\lambda^2} d\rho_N' = \left[1 - \frac{r_N^2}{\lambda^2}\right], \tag{8.4.10}$$

$P_i(\overline{N} S_{стр})$ определяется формулой (8).

Подставляя в (9) значений составляющих, вычисленные по формулам (8) и (10), получаем

$$w(r_N)\Delta r = \frac{2r_N}{\lambda^2}\left[\overline{N}S_{\text{стр}}\exp\left(-\overline{N}S_{\text{стр}}\right)\right]\left\{1+\frac{\overline{N}S_{\text{стр}}}{1!}\times\right.$$
$$\times\left(1-\frac{r_N^2}{\lambda^2}\right)+\frac{\left[\overline{N}S_{\text{стр}}\left(1-\frac{r_N^2}{\lambda^2}\right)\right]^2}{2!}+\frac{\left[\overline{N}S_{\text{стр}}\left(1-\frac{r_N^2}{\lambda^2}\right)\right]^3}{3!}+$$
$$\left.+\ldots+\frac{\left[\overline{N}S_{\text{стр}}\left(1-\frac{r_N^2}{\lambda^2}\right)\right]^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots\right\}\Delta r.$$

Сумма в фигурных скобках представляет собой разложение в степенной ряд экспоненциальной функции, а именно:

$$\{\ldots\}=\exp\left[\overline{N}S_{\text{стр}}\left(1-\frac{r_N^2}{\lambda^2}\right)\right].$$

С учетом этого, после упрощений, получим

$$w(r_N)\Delta r=2\pi\overline{N}r_N\exp\left[-\overline{N}\pi r_N^2\right]\Delta r\ .$$

Обозначая

$$\sigma_{r_N}^2=\frac{1}{2\pi\overline{N}},$$

получаем окончательно выражение для плотности вероятности

$$w(r_N)=\frac{r_N}{\sigma^2}\exp\left[-\right]. \qquad (8.4.11)$$

Таким образом, случайное расстояние до ближайшего к центру строба ложного максимума описывается законом Релея, а квадрат этого расстояния — экспоненциальным законом

$$w(r_N^2=d_N)=\frac{1}{\sigma_{r_N}^2}\exp\left[-\frac{d_N}{2\sigma_{r_N}^2}\right]. \qquad (8.4.12)$$

8.5. Обнаружение и селекция одиночной отметки от цели в двумерном стробе

Задача обнаружения и селекции одиночной цели в стробе на основании информации, заключенной в максимумах поля отношения правдоподобия, ставится следующим образом. Заведомо известно, что в стробе сопровождения одна цель. Получено m максимумов поля отношения правдоподобия. Требуется установить, какой именно из них (или вовсе ни одного) принадлежит к сопровождаемой цели. Остальные максимумы отбрасываются как ложные. В качестве входных данных, на основе которых принимается решение, используются амплитуды максимумов (Σ_l) и их координаты (ξ_l, η_l) относительно центра строба.

Входные данные путем описанных выше преобразований (и с учетом сделанных допущений) сводятся к системе независимых нормально распределенных случайных величин. Поэтому функция правдоподо-

бия для амплитуд и координат максимумов при условии, что каждый из них принадлежит сопровождаемой цели, записывается в виде

$$\times \exp\left[-\frac{}{2\sigma_\xi^2} - \frac{}{Ч} - \frac{\eta_i^2}{2\sigma_\eta^2}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (8.5.1)$$

$$\frac{1}{\sigma_S \sigma_\xi \sigma_\eta}$$

В соответствии с методом максимального правдоподобия в процессе принятия решения необходимо, во-первых, отобрать максимум $(i = i^*)$, для которого функция правдоподобия (1) имеет наибольшее значение, а во-вторых, сравнить это значение с порогом, выбираемым исходя из допустимой вероятности ошибочных решений.

Логарифмируя (1), получаем

$$\ln L = \ln \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma_S \sigma_\xi \sigma_\eta} - \left[\frac{(\Sigma_i - \bar{\Sigma}_S)^2}{2\sigma_S^2} + \frac{\xi_i^2}{2\sigma_\xi^2} + \frac{\eta_i^2}{2\sigma_\eta^2}\right]. \qquad (8.5.2)$$

Таким образом, задача отбора (селекции) состоит в выборе такого максимума, для которого квадратичная форма Q_i имеет минимум, т. е.

$$Q_{i^*} = \min_i \left[\frac{(\Sigma_i - \bar{\Sigma})^2}{\sigma_S^2} + \frac{\xi_i^2}{\sigma^2} + \frac{\eta_i^2}{\sigma_\eta^2}\right], \qquad (8.5.3)$$

где i^* — номер отобранного максимума.

Алгоритм селекции по минимуму квадратичной формы (3) основан на одновременном учете всех доступных наблюдению параметров поля отношения правдоподобия (амплитуд и координат максимумов) и поэтому является оптимальным для рассматриваемого случая обработки квантованных сигналов на выходе детектора огибающей. Для его реализации необходимо в каждом обзоре производить оценку среднего значения и дисперсии взвешенной суммы в области сигнала, а также дисперсии отклонения максимумов от центра строба.

На практике иногда применяются упрощенные алгоритмы селекции, основанные на использовании одного из указанных выше параметров, К таким алгоритмам относятся:

— алгоритм селекции по максимуму амплитуды взвешенной суммы,

— алгоритм селекции по минимуму отклонения взвешенной суммы от среднего значения этой суммы в области сигнала,

— алгоритм селекций по минимальному расстоянию максимума взвешенной суммы от центра строба (см. § 6.5).

Упрощения алгоритма селекции естественно приводят к ухудшению качества селекции полезных сигналов по сравнению с оптимальным алгоритмом. Важной задачей теории является оценка потерь качества при упрощении алгоритма селекции и выбор на этой основе наиболее подходящего для каждого конкретного случая алгоритма. В данном параграфе производится анализ оптимального и упрощенных алгоритмов обнаружения и селекции отметок в стробе.

8.5.1. Качественные характеристики оптимального алгоритма обнаружения и селекции

Качество оптимального алгоритма обнаружения и селекции одиночной цели в стробе характеризуется следующими показателями:

1. Вероятностью ложного обнаружения $P_{л0}$, под которой понимается вероятность того, что квадратичная форма (КФ) (3) в области помехи будет меньше некоторого порогового числа Q_0, т. е.

$$P_{л0} = \int_0^{Q_0} w_N(Q)\, dQ, \tag{8.5.4}$$

где $w_N(Q)$ — плотность вероятности КФ (3) в области помехи.

2. Вероятностью обнаружения P_0, под которой понимается вероятность того, что КФ (3) в области сигнала будет меньше порога Q_0, т. е.

$$P_0 = \int_0^{Q_0} w_S(Q)\, dQ, \tag{8.5.5}$$

где $w_S(Q)$ — плотность вероятности КФ (3) в области сигнала.

3. Вероятность ложной селекции $P_{лс}$, под которой понимается условная вероятность того, что КФ в области помехи меньше КФ в области сигнала (при условии, что обе КФ меньше порога Q_0).

Эта вероятность равна

$$P_{лс} = \int_0^{} w_S(Q)\, P_{л0}(Q_0)\, dQ. \tag{8.5.6}$$

4. Вероятностью ложного обнаружения и селекции $P_{лос}$, под которой понимается вероятность отбора для продолжения траектории ложного максимума. Эта вероятность равна

$$P_{лос} = (1 - P_0)\, P_{л0} - P_{лс}. \tag{8.5.7}$$

5. Вероятностью правильного обнаружения и селекции, под которой понимается вероятность того, что для продолжения траектории отобрана истинная отметка. Эта вероятность равна

$$P_{ос} = P_0 - P_{лс}. \tag{8.5.8}$$

Качество других упрощенных алгоритмов обнаружения и селекции характеризуется теми же показателями. Изменяются только пороги и законы распределения квадратичных (или линейных) форм, положенных в основу при синтезе упрощенных алгоритмов.

Для расчета качественных характеристик оптимального алгоритма обнаружения и селекции необходимо знать плотности распределения КФ (3) для сигнальных и ложных максимумов. Получим эти плотности, используя результаты § 8.3 и 8.4.

размеров строба по сравнению с минимальными. Причем вероятность того, что размеры строба минимальны или близки к минимальным, является наибольшей.

Распределение, наиболее соответствующее описанному процессу изменения размеров строба, может быть вида

$$w(\Delta z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{(\Delta z \quad]}{2\sigma}\right. \\ 0, \qquad \Delta z < \Delta z_{min}, \end{cases}$$

где σ_z^2 — дисперсия изменения размеров строба по координате Z.

Плотность распределения времени обслуживания в этом случае имеет вид

$$w(\tau_{зу}) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma\tau_{зу}} \exp\left[-\frac{(\tau_{зу} - \tau_{зу\,min})^2}{2\sigma^2_{\tau_{зу}}}\right], & \tau_{зу} \geqslant \tau_{зу\,min}, \\ 0, & \tau_{зу} < \tau_{зу\,min}. \end{cases} \quad (9.5)$$

Иногда размеры физического строба выбираются постоянными, рассчитанными на максимальную суммарную ошибку экстраполяции. В этом случае время обслуживания заявок в ЗУ будет постоянным.

В обнаружителе-селекторе при применении упрощенного алгоритма по максимуму пика взвешенной суммы операции обработки сводятся к следующим:

определение амплитуд взвешенной суммы в каждой ячейке строба;

последовательное сравнение между собой амплитуд взвешенной суммы с целью выбора наибольшей;

сравнение выбранных таким образом амплитуд с порогом и принятие решения об обнаружении отметки от цели.

В этом случае время анализа информации определяется размерами строба. В дальнейшем рассматривается случай двумерного строба. В соответствии с выражением (9.4) распределение нормированных размеров двумерного строба по каждой координате

$$w(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2}\right] x \geqslant x_0, \quad (9.6а)$$

$$w(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - y_0)^2}{2}\right] y \geqslant y, \quad (9.6б)$$

где $x = \Delta\beta_{стр}/\sigma_{\beta_{стр}}$; $y = \Delta r_{стр}/\sigma_{r_{стр}}$; $x_0 = \Delta\beta_{стр\,m}$ $\sigma_{\beta_{стр}}$; $y_0 = \Delta r_{стр\,min}/\sigma_{r_{стр}}$.

плотность вероятности для квадратов расстояний этих максимумов от центра строба (4.12), можно получить выражение для плотности вероятности квадратичной формы (5.3). Для этого надо найти композицию плотностей (И) и (4.12) по формуле

$$w_N(Q) = \int_0^Q w(y)\, w_{d_N}(Q-y)\, dy, \qquad (8.5.12)$$

где $Q = y + d_N$.

После подстановки в (12) плотностей вероятности (4.12) и (11), получим

$$w_N(Q) = \frac{\exp\left(-\frac{u_0^2}{2\sigma_u^2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\sigma_u\,\sigma_{r_N}^2} \exp\left(-\frac{Q}{2\sigma_{r_N}^2}\right) \times$$

$$\times \left[\int_0^Q \frac{1}{\sqrt{y}} \exp(-by) \exp(a\sqrt{y})\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^Q \frac{1}{\sqrt{y}} \exp(-by) \exp(-a\sqrt{y}) dy \right], \qquad (8.5.13)$$

где

$$a = \frac{u_0}{\sigma_u^2}; \qquad b = \left(\frac{1}{2\sigma_u^2} - \frac{1}{2\sigma_{r_N}^2}\right).$$

Вычисление первого и второго интегралов в формуле (13) дает

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \exp\left(\frac{a^2}{4b}\right) \left[\Phi\left(\sqrt{bQ} - \frac{a}{2\sqrt{b}}\right) + \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{b}}\right) \right], \qquad (8.5.14)$$

$$J_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \exp\left(\frac{a^2}{4b}\right) \left[\Phi\left(\sqrt{bQ} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{b}}\right) \right]. \qquad (8.5.15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13), с учетом значений a и 6 получаем окончательно

$$w_N(Q) = \frac{\exp\left[\frac{4}{2(\sigma_{r_N}^2 - \sigma_u^2)}\right]}{4\sqrt{\sigma_{r_N}^2 - \sigma_u^2}\,\sigma_{r_N}^2} \exp\left(-\frac{Q}{2\sigma_{r_N}^2}\right) \times$$

$$\times \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\sigma_{r_N}^2 - \sigma_u^2}}{\sqrt{2}\,\sigma_{r_N}\,\sigma_u} \sqrt{Q} + \frac{u_0\,\sigma_{r_N}}{\sqrt{2}\,\sigma_u \sqrt{\sigma_{r_N}^2 - \sigma_u^2}} \right) + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{\sqrt{\sigma_{r_N}^2 - \sigma_u^2}}{\sqrt{2}\,\sigma_{r_N}\,\sigma_u} \sqrt{Q} - \frac{u_0\,\sigma_{r_N}}{\sqrt{2}\,\sigma_u \sqrt{\sigma_{r_N}^2 - \sigma_u^2}} \right) \right], \quad Q > 0. \qquad (8.5.16)$$

распределением вида

$$w(\tau_{ос}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\tau_{ос}}}} \exp\left[-\frac{(\tau_{ос} - \tau_0)^2}{2\sigma^2_{\tau_{ос}}} \right], \quad \tau_{ос} > \tau_0, \quad (9.12)$$

Поскольку точное определение распределения времени обслуживания в общем случае невозможно, в дальнейшем при анализе обнаружителей-селекторов используются обе аппроксимации, представленные выражениями (9.11) и (9.12).

Наконец, в измерителе время, затрачиваемое на выполнение всех операций обработки, будем в нашем случае считать постоянным.

Остановимся теперь на показателях качества функционирования рассматриваемой многофазовой СМО. К ним относятся: вероятность отказа в обслуживании очередной заявки как функция емкости входного ЗУ и среднее время пребывания заявки в системе

$$\sum_{i=1}^{3} \quad \sum_{i=2}^{3}$$

где $\bar{\tau}_i$ — среднее время обслуживания в i-й фазе; $\bar{t}_{ож\,i}$ — среднее время ожидания обслуживания перед i-й фазой. С учетом этих показателей при известном числе операций, необходимых для обслуживания одного требования, можно определить требуемое быстродействие вычислительных устройств, реализующих каждую фазу обработки,

Трудность анализа систем многофазового обслуживания состоит в том, что во всех практически важных случаях выходящий поток фазы оказывается потоком более сложного вида, чем входящий. В некоторых случаях, исходя из специфических особенностей функционирования прибора, можно аппроксимировать его выходящий поток потоком простейшего типа с теми же параметрами, что и входящий. Тогда для анализа следующей фазы можно использовать аналитические методы теории массового обслуживания. Если же такой аппроксимации сделать нельзя, то единственным методом исследования является метод моделирования. Разумное сочетание аналитических методов и методов моделирования позволяет решить задачу анализа трехфазовой системы обработки информации с помощью системы РЛИ при любом из рассмотренных вариантов ее построения.

На рис. 8.8 приведены графики вероятности ложного обнаружения $P_{ло} = f(Q_0)$ при фиксированном входном пороге $x_1 = 2$ и различных $a_0 = 2$, 3 и 4. Из этих графиков следует, что при фиксированном втором пороге Q_0 вероятность ложного обнаружения увеличивается

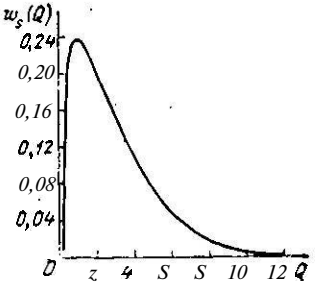


Рис. 8.6. Графики $w_s(Q)$.

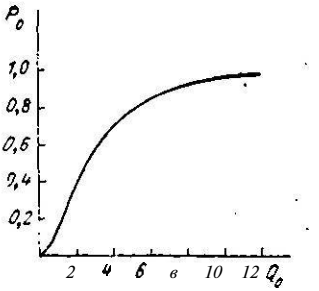


Рис. 8.7. График вероятности обнаружения сигнала.

с уменьшением отношения сигнала к помехе. Это явление обусловлено тем, что с уменьшением a_0 уменьшается $\bar{\Sigma}_S$, что при фиксированном пороге x_1 приводит к уменьшению первого члена квадратичной формы

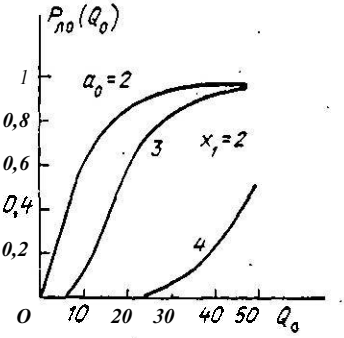


Рис. 8.8. Графики вероятности ложного обнаружения.

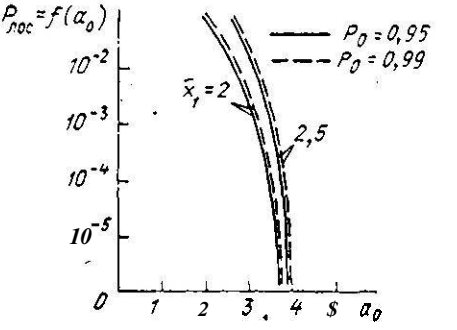


Рис. 8.9. Графики вероятности ложного обнаружения и селекции.

(3). Непосредственная зависимость вероятности ложного обнаружения от отношения сигнала к помехе является специфической особенностью рассматриваемого алгоритма.

При реализации рассматриваемого алгоритма порог решения Q_0 целесообразно выбрать по заданной вероятности P_0 правильного обнаружения полезного сигнала. В этом случае, основные характеристики алгоритма $P_{лос}$ и $P_{ос}$ являются функциями отношения сигнала к помехе и порога двоичного квантования сигналов x_1.

На рис. 8.9 построены графики $P_{лос} = f(a_0)$ при двух фиксированных значениях вероятности обнаружения $P_0 = 0,95$ (сплошная кривая) и $P_0 = 0,99$ (пунктирная кривая) и двух значениях порога

$x_1 = 2$ и 2,5. Из этих графиков следует, что вероятность ложного обнаружения и селекции уменьшается с уменьшением порога x_1 (в диапазоне рассматриваемых значений этого порога). Подробный анализ показывает, что для каждого a_0 существует оптимальное значение порога x_1, при котором $P_{лос}$ будет иметь минимальное значение.

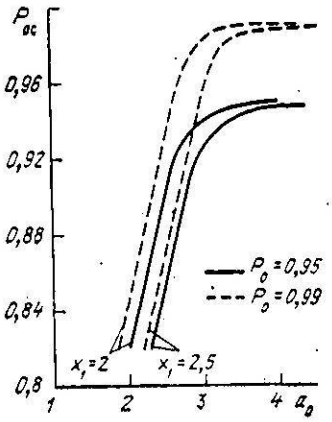


Рис. 8.10. Графики вероятности правильного обнаружения и селекции.

Имея в виду, что при больших отношениях сигнала к помехе ($a_0 > 3$) вероятность ложного обнаружения и селекции чрезвычайно мала, порог x_1 целесообразно выбирать постоянным со значением, оптимальным для случая малых (близких к пороговым) сигналов. В качестве такого оптимального значения порога можно выбрать $x_{1опт} = 2$. Это значение первичного порога, как известно [2], является близким к оптимальному по критерию минимума риска при обнаружении одиночного сигнала.

Графики вероятности правильного обнаружения и селекции $P_{ос} = f(a_0)$ приведены на рис. 8.10. Из этих графиков следует, что оптимальный алгоритм обладает высокой селектирующей способностью ($P_{ос} > 0{,}9$) уже при незначительном превышении входным сигналом порогового уровня a_0.

8.5.2. Характеристики алгоритма селекции по максимуму амплитуды взвешенной суммы

Пусть обнаружение сигналов производится по превышению взвешенной суммой некоторого порога Σ_0, а селекция — по максимальному значению взвешенной суммы сигналов, превысивших этот порог. В соответствии с плотностью распределения амплитуд взвешенной суммы в области сигнала (3.5) вероятность обнаружения сигнала будет приближенно равна (без учета усечения плотности вероятности)

$$P_0(\Sigma_0) = \int_{\Sigma_0}^{\infty} w(\Sigma_S)\, d\Sigma_S = \int_{\Sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_S} \exp\left[-\frac{(\Sigma_S - \bar{\Sigma}_S)^2}{2\sigma_S^2}\right] =$$

$$= 0{,}5 - \Phi_0\left(\frac{\Sigma_0 - \bar{\Sigma}_S}{\sigma_S}\right). \qquad (8.5.20)$$

Аналогично, используя формулу (3.30) для закона распределения амплитуд ложных максимумов, получаем выражение для вероятности ложного обнаружения в виде

$$P_{ло}(\Sigma_0) = 0{,}5 - \Phi_0\left(\frac{\Sigma_0 - \bar{z}}{\sigma_z}\right). \qquad (8.5.21)$$

Вероятность ложной селекции определяется по формуле (6) и равна

$$P_{лс} = \int_{\Sigma_0}^{\infty} P_{ло}(\Sigma)\, w(\Sigma)\, d\Sigma, \qquad (8.5.22)$$

а вероятности $P_{лос}$ и $P_{ос}$ — по формулам (7) и (8).

График вероятности $P_{лос} = f(a_0)$ при $x_1 = 2$ изображен на рис. 8.11 (кривая 3). График вероятности $P_{ос} = f(a_0)$ при $x_1 = 2$ изображен на рис. 8.12 (кривая 3). При построении этих графиков порог Σ_0 выбран так, чтобы обеспечить вероятность обнаружения $P_о = 0{,}95$ для

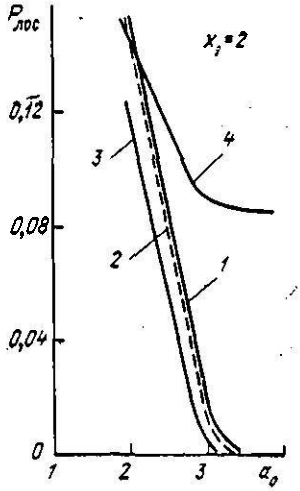


Рис. 8.11. Графики вероятности $P_{лос} =$:
1 — селекция по мин Q; *2* — селекция по мин $\Sigma - \bar{\Sigma}s$; 3 — селекция по макс Σ; *4* — селекция по мин г.

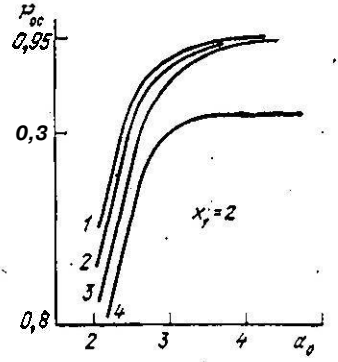


Рис. 8.12. Графики вероятности $P_{ос} = f(a_0)$:
1 — селекция по мин Q; 2 — селекция по мин $\Sigma - \bar{\Sigma}s$; *3* — селекция по макс Σ; *4* — селекция по мин г.

сигналов, близких к пороговым. Этим самым обеспечим одинаковые условия для сравнения рассматриваемого алгоритма с оптимальным алгоритмом (кривые *1* на рис. 8.11 и 8.12).

8.5,3. Характеристики алгоритма селекции по минимуму отклонения взвешенной суммы от среднего значения сигнала

Плотность вероятности нормированных отклонений амплитуд максимумов помехи от среднего значения сигнала записывается в виде (9). Закон распределения нормированных отклонений амплитуд взвешенной суммы сигнала от ее среднего значения имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right],$$

где $x = (\Sigma - \bar{\Sigma}_S)/\sigma_S$.

Пороги обнаружения $\pm\Sigma_0$ устанавливаются в этом случае исходя из заданной вероятности правильного обнаружения сигнала.

Вероятность того, что отклонение максимума взвешенной суммы в области сигнала от своего среднего значения не превысит величины $\pm\Sigma_0$, равна

$$P_0 = P(|x| < \Sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Sigma_0}^{\Sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \qquad (8.5.23)$$

Вероятность ложного обнаружения равна

$$P_{\text{ло}} = P(|u| \leqslant \Sigma_0) = \int_{-\Sigma_0}^{\Sigma_0} w_N(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_u} \int_{-\Sigma_0}^{\Sigma_0} \exp\left[-\frac{(u-u_0)^2}{\sigma_u^2}\right] du. \qquad (8.5.24)$$

Вероятность ложной селекции определяется по формуле

$$P_{\text{лс}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-}^{x} w_N(u)\, du\right] w_S(x)\, dx. \qquad (8.5.25)$$

На рис. 8.11 и 8.12 по формулам (7) и (8) с использованием (23) — (25) построены графики вероятности ложного обнаружения и селекции (кривая *2* на рис. 8.11) и вероятности правильного обнаружения и селекции (кривая *2* на рис. 8.12) при $P_0 = 0{,}95$ и $x_1 = 2$. По этим кривым можно сравнить качественные характеристики рассматриваемого алгоритма с оптимальным и другими (неоптимальными) алгоритмами.

8.5.4. Характеристики алгоритма селекции по минимальному расстоянию отметки от центра строба

Обнаружение сигналов в данном случае производится, так же как и в алгоритме п. 8.5.2, по превышению взвешенной суммой порога Σ_0, выбираемого исходя из заданной вероятности правильного обнаружения полезного сигнала. В процессе же селекции информация об амплитудах взвешенных сумм, превысивших порог Σ_0, не используется, а используется информация о положении максимумов относительно центра строба.

Вероятность обнаружения сигнала P_0 и вероятность ложного обнаружения $P_{\text{ло}}$ находятся по формулам (20) и (21) соответственно. Вероятность ложной селекции в данном случае определяется по формуле

$$P_{\text{лс}} = P_0 P_{\text{ло}} \int_0^{\lambda} w(r_N) \left[\int_{r_N}^{\lambda} w(\rho_S')\, d\rho_S'\right] dr_N, \qquad (8.5.26)$$

где $w(r_N)$ определяется по формуле (4.11); $w(\rho_S')$ определяется по формуле (4.4); λ — радиус приведенного строба.

После подстановки (4.11) и (4.4) и вычисления интегралов в (26) получим окончательно

$$P_{\text{ло}} = P_0 P_{\text{ло}} \left\{ \frac{A}{2\sigma_{r_N}^2} [1 - \exp(-A\lambda^2)] - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{\lambda^2}{z} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma_{r_N}} \right) \right] \right\}. \qquad (8.5.27)$$

где

$$A = \frac{L}{1 + \sigma_{r_N}^2}.$$

Зная P_0, $P_{\text{ло}}$ и $P_{\text{лс}}$, можно обычным образом рассчитать вероятности $P_{\text{ло}}$ и $P_{\text{ос}}$. Соответствующие графики приведены на рис. 8.11 и 8.12 (кривые *4)*.

Сравнение кривых на рис. 8.12 позволяет сделать вывод, что среди неоптимальных алгоритмов лучшим по вероятности $P_{\text{ос}}$ является алгоритм селекции по минимуму отклонения взвешенной суммы от среднего значения сигнала. Худшим *по* вероятности $P_{\text{ос}}$ является алгоритм селекции по отклонению отметок от центра строба. Этот алгоритм вряд ли является целесообразным для практического использования.

8.6. Точность оценки координат при оптимальном обнаружении и селекции в стробе

Ошибки оценки координат τ и β в стробе при применении оптимального алгоритма обнаружения и селекции полезных сигналов будут обусловлены двумя причинами:

— случайными смещениями максимума сигнальной суммы за счет флюктуаций;

— отбором ложного максимума в качестве истинного.

Введем обозначения: $\sigma_{\Sigma l}^2$ — дисперсия суммарной ошибки оценки l-й координаты ($l = \tau, \beta$); σ_{1l}^2 — дисперсия случайного смещения максимума сигнальной суммы по l-й координате; σ_{2l}^2 — дисперсия ошибки оценки l-й координаты за счет отбора ложного максимума в качестве истинного.

Тогда, очевидно, для дисперсии суммарной ошибки можно записать следующую формулу:

$$\sigma_{\Sigma l}^2 = \frac{P_{\text{ос}}}{P_{\text{ос}} + P_{\text{л ос}}} \sigma_{1l}^2 + \frac{P_{\text{лос}}}{P_{\text{ос}} + P_{\text{лос}}} ah. \qquad (8.6.1)$$

Для расчета предельных значений величин $\sigma_{1\tau}^2$ и $\sigma_{1\beta}^2$, воспользуемся формулой (1.3.24), которая в случае оценки двух независимых

координат (при симметричной весовой функции по каждой координате преобразуется в две формулы следующего вида:

$$\sigma^2_{1\tau\,\text{мин}} = \frac{1}{\sum_{ij}\left(\frac{\partial p_S(i,j)}{\partial \tau_0}\right)^2 \frac{1}{p_S(i,j)\,q_S(i,j)}}, \tag{8.6.2}$$

$$\sigma^2_{1\beta\,\text{мин}} = \frac{1}{\sum_{ij}\left(\frac{\partial p_S(i,j)}{\partial \beta_0}\right)^2 \frac{1}{p_S(i,j)\,q_S(i,j)}}, \tag{8.6.3}$$

где $ps\ (i, j)$ определяется выражением (2.8).

Произведем подробный расчет для $\sigma^2_{1\tau\text{мин}}$.

Производная $\partial p_S\ (i, j)/\partial\tau_0$ имеет вид

$$\frac{\partial p_S(l,j)}{\partial \tau_0} = f p_S(i,j)\,q_S(i,j)\frac{\partial \eta\,(i\Delta_\tau - \tau_0,\ j\Delta_\beta - \beta_0)}{\partial \tau_0},$$

где $f = 2{,}3 \quad ka_c^c$.

Тогда

$$\sum_{i,j}\left(\frac{\partial p_S(i,j)}{\partial \tau_0}\right)^2 \frac{1}{p_S(i,j)\,q_S(i,j)} =$$

$$\sum_{i,j} p_S(i,j)\,q_S(i,j)\left[\frac{\partial \eta\,(i\Delta_\tau - \tau_0,\ j\Delta_\beta - \beta_0)}{\partial \tau_0}\right]^2 =$$

$$\sum_{i,j}\frac{\partial p_S(i,j)}{\partial \tau_0}\,\frac{\partial \eta\,(i\Delta_\tau - \tau_0,\ j\Delta_\beta - \beta_0)}{\partial \tau_0} = k_\tau.$$

Переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$k_\tau = \frac{f}{\Delta_\tau \Delta_\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial p_S(\tau-\tau_0,\ \beta-\beta_0)}{\partial \tau_0}\,\frac{\partial \eta\,(\tau-\tau_0,\ \beta-\beta_0)}{\partial \tau_0}\,d\tau\,d\beta. \tag{8.6.4}$$

Так как

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \tau_0},\quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \eta}{\partial \tau_0},$$

то, производя в выражении (4) интегрирование по переменной β, получаем

$$k_\tau = \frac{f}{\Delta_\tau \Delta_\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left[p_S(\tau-\tau_0,\beta-\beta_0)\,\frac{\partial \eta\,(\tau-\tau_0,\ \beta-\beta_0)}{\partial \tau}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} p_S(\tau-\tau_0,\ \beta-\beta_0)\,\frac{\partial^2 \eta\,(\tau-\tau_0,\ \beta-\beta_0)}{\partial \tau_0^2}\,d\tau\right] d\beta. \tag{8.6.5}$$

Первый член суммы в выражении (5), после интегрирования по β, будет равен нулю, так как огибающая сигнала и огибающая весовой функции являются симметричными функциями.

Тогда получим

$$k_\tau = \frac{f}{\cdot\ \cdot\ \cdot} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_S(\tau-\tau_0, \beta-\beta_0)\frac{\partial^2 \eta(\tau-\tau_0, \beta-\beta_0)}{\partial\tau_0^2}\, d\tau\, d\beta. \quad (8.6.6)$$

Подставляя в (6) выражения (2.8) и (2.9), производя операции дифференцирования, подстановки $\tau_0 = 0$ и переходя к полярным координатам (ρ, φ), получаем

$$k = \frac{4\pi c n_\tau n_\beta f}{} \int_0^\infty \frac{(c\rho^2-1)\exp f - c\rho^2)\,\rho\, d\rho}{1+\frac{q_N}{p_N}\exp[-f\exp(-c\rho^2)]},$$

где

$$\rho = \frac{1}{\rho\delta^2} + \frac{\beta^2}{\rho\delta^2}.$$

После замены переменных $\zeta = f\exp(-c\rho^2)$ получим окончательно

$$k_\tau = \frac{2\pi n_\tau n_\beta}{\delta_\tau^2} \int_0^f \frac{\ln f - \ln\zeta - 1}{1+\frac{q_N}{}\exp(-\zeta)}\, d\zeta.$$

Обозначим

$$\Psi = \int_0^f \frac{\ln f - \ln\zeta - 1}{1+\frac{q_N}{p_N}\exp(-\zeta)}\, d\zeta. \quad (8.6.7)$$

Тогда

$$k_\tau = \frac{2\pi n_\tau n_\beta}{\delta_\tau^2}\Psi.$$

Аналогичным расчетом можно показать, что

$$k_\beta = 2\pi n_\tau n_\beta \Psi/\delta_\beta^2. \quad (8.6.8)$$

С учетом (7) и (8), выражения для дисперсий предельных ошибок оценки координат, обусловленных случайным смещением максимума взвешенной суммы, записываются в виде

$$\sigma^2_{1\tau\,\text{мин}} = \delta_\tau^2/2\pi\Psi n_\tau n_\beta, \quad (8.6.9)$$

$$\sigma^2_{1\beta\,\text{мин}} = \delta_\beta^2/2\pi\Psi n_\tau n_\beta. \quad (8.6.10)$$

На рис. 8.13 построены графики относительных среднеквадратичных ошибок σ_{1i}/σ_i (одинаковые для координат τ и β) в функции отношения сигнала к помехе a_0, при $x_1 = 2$ и 2,5. Из этих графиков следует, что с точки зрения обеспечения высокой точности оценки координат порог x_1 надо выбирать порядка двух, что совпадает с выводами,

полученными исходя из обеспечения минимальной вероятности ложного обнаружения и селекции.

При селекции по упрощенным алгоритмам, ошибка σ_{1l} будет такой же, как и в оптимальном алгоритме, так как процедура оценки координат максимумов взвешенной суммы остается неизменной.

Рассмотрим теперь вторую составляющую ошибки оценки координат σ_{2l}, обусловленную возможностью отбора ложного максимума,

Для оптимального алгоритма обнаружения и селекции по минимуму квадратичной формы расчет ошибки σ_{2l} наталкивается на непреодолимые вычислительные трудности. При селекции по максимуму взвешенной суммы или по минимуму отклонения этой суммы от среднего значения сигнала ошибка, обусловленная отбором ложного максимума, распределена равномерно в пределах строба. Дисперсия этой ошибки будет равна

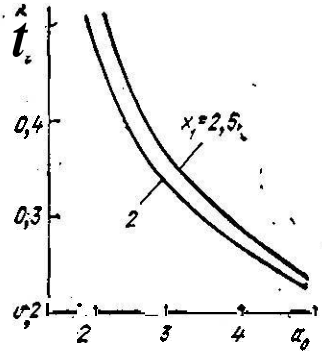


Рис. 8.13. Графики относительных среднеквадратичных ошибок.

$$\sigma_{21}^2 = \lambda^2/3,$$

где λ — радиус приведенного строба.

При $\lambda = 3\sigma_l$ ($l = \tau$, β), где σ_l — среднеквадратичное отклонение ожидаемой отметки от центра строба, получим

$$\sigma_{21}^2 = 3\sigma_l^2.$$

Эта ошибка не зависит от первичного порога x_1.

При селекции по расстоянию от центра строба рассматриваемая ошибка обусловлена отбором ближайших к центру строба ложных максимумов, распределенных по закону Релея (4.11) с дисперсией $\sigma_{r_N}^2 = 1/2\,\pi\bar{N}$, где $\bar{N}$ — среднее число максимумов, приходящихся на единицу площади строба.

В этом случае дисперсия ошибки равна $\sigma_{2l}^2 = \sigma_{r_N}^2\sigma_l^2$ и увеличивается с ростом порога x_1.

Следует заметить, что в связи с малым значением $P_{лос}$, составляющая ошибки σ_{2l} мало влияет на величину суммарной ошибки оценки координат (формула (1)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вопросы статистической теории радиолокации. Т. 2., М., «Сов. радио», 1964. Авт.: П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.

2. Кузьмин С. З. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.

3. Свешников А. С. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.

4. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Сов. радио», 1962.

5. Г. Г. Абезгауз. Справочник по вероятностным расчетам. М., Воениздат, 1970.

9. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ (ФИЛЬТРАЦИЯ) ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ ЦЕЛИ

9.1. Формулировка задачи последовательного сглаживания параметров траектории

• Рассмотренному в гл. 6 методу оценки параметров траектории на основе фиксированной выборки измеряемых координат присущи следующие недостатки;

— в процессе оценки параметров необходимо хранить большое число результатов предыдущих измерений (не менее 4—5), что при одновременном обслуживании большого числа целей приводит к существенному увеличению требуемой емкости запоминающих устройств;

— каждая новая оценка параметров получается независимо от предыдущей, следовательно, точность оценки ограничена фиксированным числом используемых данных;

— имеет место задержка выдачи оценок параметров на начальном участке сопровождения, что не всегда является допустимым.

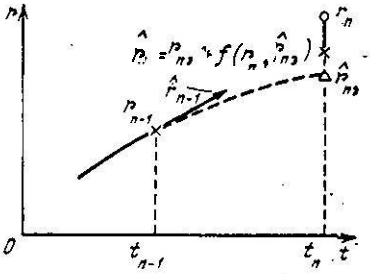


Рис. 9.1. Пояснение процесса последовательного сглаживания параметров.

В связи с отмеченными недостатками метода оценки параметров при фиксированном объеме выборки возникает необходимость построения рекуррентного алгоритма, обеспечивающего последовательное (на каждом шаге) уточнение параметров траектории по результатам новых измерений.

Для простейшего случая сглаживания одной координаты суть метода последовательного сглаживания состоит в следующем (рис.9.1). Пусть по результатам всех предыдущих измерений координаты получены оценки параметров $\hat{r}_{n-1}$, $\hat{\dot{r}}_{n-1}$, $\hat{\ddot{r}}_{n-1}$, на момент времени t_{n-1}. Зная закон изменения координаты во времени, можно экстраполировать их значения на момент t_n следующего измерения. Так, если закон изменения координаты задается полиномом второй степени, то экстраполированные значения параметров

$$\hat{r}_{n\text{э}} = \hat{r}_{n-1} + \hat{\dot{r}}_{n-1}(t_n - t_{n-1}) + \hat{\ddot{r}}_{n-1}\frac{(t_n - t_{n-1})^2}{21},$$

$$\hat{\dot{r}}_{n\text{э}} = \hat{\dot{r}}_{n-1} + \hat{\ddot{r}}_{n-1}(t_n - t_{n-1}),$$

$$\hat{\ddot{r}}_{n\text{э}} = \hat{\ddot{r}}_{n-1}.$$

На рис. 9.1 экстраполированное значение координаты обозначено треугольником (экстраполированные значения других параметров на рис. 9.1 не показаны).

В момент времени t_n производится новое измерение координаты. Измеренное значение координаты r_n обозначено на рис. 9.1 кружком. Задача теперь состоит в том, чтобы по известным экстраполированному и измеренному значениям координаты r получить сглаженное значение r_n этой координаты на момент времени t_n. Это значение (на рис. 9.1 обозначено крестиком) принадлежит отрезку прямой, соединяющей точки $\hat{r}_{n\,э}$ и r_n, т, е.

$$\hat{r}_n = \hat{r}_{nэ} + f(r_n, \hat{r}_{nэ}).$$

Особенно просто эта задача решается при отсутствии статистической связи между r_n и $\hat{r}_{nэ}$, т. е. при отсутствии междуобзорной корреляции измерений координаты. В этом случае

где A_n— некоторый оператор, зависящий от ошибок измерения и экстраполяции координаты.

Аналогичным образом решаются задачи получения сглаженных значений других параметров (скорости, ускорения и т. д.). В общем случае, задача последовательного сглаживания совокупности (вектора) параметров ставится следующим образом. Пусть $\hat{\vartheta}_{n-1}$ — вектор сглаженных значений параметров траектории цели, полученный по результатам n — 1 измерения координат. Пусть, далее, U_n — вектор измеренных координат цели в я-м обзоре. Требуется получить вектор $\hat{\vartheta}_n$ сглаженных параметров, используя для этого вектор $\hat{\vartheta}_{n-1}$ предыдущих оценок и результаты нового измерения U_n.

При решении поставленной задачи обычно вводятся следующие ограничения:

1. Процесс изменения параметров траектории во времени описывается известными функциями (задана модель траектории движения цели).

2. Измеряемые координаты цели независимы. Ошибки измерения не коррелированы от цикла к циклу измерений.

Первое ограничение позволяет получить точное выражение для оператора экстраполяции вектора параметров на момент последнего (n-го) измерения наблюдаемых координат. Второе ограничение позволяет представить новое значение вектора сглаженных параметров в виде линейной комбинации вектора экстраполированных параметров и преобразованного с помощью известных операторов вектора рассогласования между измеренными и экстраполированными значениями наблюдаемых координат.

Таким образом, задача последовательного сглаживания есть многошаговая задача оценки изменяющихся во времени параметров наблюдаемого случайного процесса (координат). Оптимальное решение этой задачи составляет содержание теории оптимальной фильтрации.

В следующем параграфе излагаются необходимые сведения из теории оптимальной фильтрации.

9.2. Элементы теории оптимальной фильтрации

Обычно под фильтрацией понимают непрерывное воспроизведение некоторой переменной величины, являющейся параметром наблюдаемого случайного процесса. Теория оптимальной фильтрации заложена фундаментальными работами Колмогорова, Винера, Стратоновича и др. Первоначально эта теория развивалась независимо от теории статистических решений и основывалась на следующих исходных предпосылках:

— фильтруемый случайный процесс является аддитивной смесью полезного сигнала (параметра) и помехи; сигнал и помеха представляют собой стационарные случайные процессы с различными корреляционными функциями;

— реализация смеси задана на столь большом промежутке времени (предшествующем данному моменту времени t), что его можно считать бесконечно большим;

— искомая оптимальная система (фильтр) осуществляет линейное преобразование;

— критерием оптимальности является минимум среднеквадратичной ошибки воспроизведения параметра или какой-либо линейной функции от параметра.

Получаемая в результате решения этой задачи оптимальная линейная система для фильтрации непрерывного во времени параметра называется фильтром Винера. Теория винеровской фильтрации изложена во многих книгах (см., например, [16, 7 и 2]). При дискретном входном сигнале аналогичная задача до Винера решалась А. Н. Колмогоровым [10].

Таким образом, в классической постановке задача фильтрации состоит в том, чтобы по результатам наблюдения случайного процесса на полубесконечном интервале времени $(-\infty, t)$ оценить значение полезного сигнала $\theta(t+\tau)$ с наименьшим искажением. Решение этой задачи при $\tau < 0$ называется фильтрацией при интерполировании случайного процесса; при $\tau > 0$ говорят о фильтрации при экстраполировании случайного процесса, а при $\tau = 0$ — о фильтрации при сглаживании случайного процесса.

За последнее время сделан целый ряд попыток объединения теории оптимальной фильтрации с теорией статистических решений. При этом исходят из следующих основных выводов последней:

— формирование апостериорной вероятности является достаточной первичной операцией любой оптимальной системы, в том числе и системы оптимальной фильтрации;

— выражение для апостериорной вероятности можно записать и для параметра, изменяющегося во времени, если известен характер этого изменения.

Широкий класс подлежащих фильтрации случайных процессов относится к классу марковских процессов. Проблема формирования апостериорной вероятности для марковских изменяющихся параметров, произвольно закодированных во входном сигнале, успешно решается в работах Р. Л. Стратоновича [5].

Ниже в данном параграфе излагаются основные результаты теории фильтрации марковских параметров. Эта теория базируется на теореме Байеса и поэтому иногда называется также байесовой фильтрацией.

9.2.1. Основное уравнение оптимальной фильтрации

Пусть наблюдаемый случайный процесс $y(t)$ представляет собой аддитивную смесь полезного параметра $\Theta(t)$, являющегося марковским процессом, и стационарной помехи $n(t)$.

Ставится задача оптимальной фильтрации параметра $\Theta(t)$ по измерениям (выборкам) смеси $y(t)$. Так как формирование апостериорной вероятности является достаточной первичной операцией в любой оптимальной системе, то и задача оптимальной фильтрации сводится, прежде всего, к вычислению апостериорного распределения вероятности для фильтруемого параметра.

Будем считать, что измерения производятся в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Тогда в соответствии с формулой Байеса выражение для n-мерной

апостериорной плотности вероятности изменяющегося во времени параметра запишется в виде

$$w(\theta_1 \ldots \theta_n \mid y_1 \ldots y_n) = C_n P_n(\theta_1, \ldots, \theta_n)\, w(y_1 y_2 \ldots y_n \mid \theta_1, \ldots, \theta_n), \quad (9.2.1)$$

где $P_n(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — n-мерная априорная плотность распределения параметра; $w(y_1, \ldots, y_n \mid \theta_1 \ldots \theta_n)$ — n-мерная функция правдоподобия параметра;

$$C_n = \left[\int \ldots \int P_n(\theta_1, \ldots, \theta_n)\, w(y_1, \ldots, y_n \mid \theta_1, \ldots, \theta_n)\, d\theta_1 \ldots d\theta_n\right]^{-1}$$

— нормирующий множитель, независимый от θ_i.

Напомним, что для марковского параметра условная плотность вероятности $w(\theta_n \mid \theta_{n-1}, \ldots, \theta_1)$ удовлетворяет соотношению

$$w(\theta_n \mid \theta_{n-1}, \ldots, \theta_1) \equiv w(\theta_n \mid \theta_{n-1}). \quad (9.2.2)$$

Функция $w(\theta_n \mid \theta_{n-1})$ называется плотностью вероятности перехода из состояния θ_{n-1} в момент времени t_{n-1} в состояние θ_n в момент времени t_n. Через эту плотность вероятности n-мерное априорное распределение параметров выражается в виде

$$P_n(\theta_1, \ldots, \theta_n) = P_1(\theta_1) \prod_{l=2}^{n} w(\theta_l \mid \theta_{l-1}), \quad (9.2.3)$$

где $P_1(\theta_1)$ — априорная плотность распределения параметра в момент времени t_1 начала наблюдения.

Предположим далее, что выборочные значения помехи в моменты измерения t_i ($i = 1, 2 \ldots n$) не связаны между собой, так что функцию правдоподобия $w(y_1, \ldots, y_n \mid \theta_1, \ldots, \theta_n)$ можно записать в виде

$$w(y_1 \ldots y_n \mid \theta_1 \ldots \theta_n) = \prod_{l=1}^{n} w(y_l \mid \theta_l). \quad (9.2.4)$$

Используя теперь выражения (3) и (4), выражение (1) для n-мерной апостериорной плотности марковского параметра можно записать в виде

$$w(\theta_1, \ldots, \theta_n \mid y_1, \ldots, y_n) = C_n P_1(\theta_1)\, w(y_1 \mid \theta_1) \times \prod_{l=2}^{n} w(\theta_l \mid \theta_{l-1})\, w(y_l \mid \theta_l). \quad (9.2.5)$$

Аналогичным образом для $n+1$-мерной апостериорной плотности получим

$$w(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1} \mid y_1, \ldots, y_{n+1}) = C_{n+1} P_1(\theta_1)\, w(y_1 \mid \theta_1) \prod_{l=2}^{n+1} w(\theta_l \mid \theta_{l-1})\, w(y_l \mid \theta_l). \quad (9.2.6)$$

Выражая теперь $w(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1} \mid y_1, \ldots, y_{n+1})$ через $w(\theta_1, \ldots, \theta_n \mid y_1, \ldots, y_n)$ получаем следующее рекуррентное уравнение:

$$w(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1} \mid y_1, \ldots, y_{n+1}) = \frac{C_{n+1}}{C_n}\, w(\theta_1, \ldots, \theta_n \mid y_1, \ldots, y_n)\, w(\theta_{n+1} \mid \theta_n)\, w(y_{n+1} \mid \theta_{n+1}). \quad (9.2.7)$$

Входящее в это уравнение произведение n-мерной апостериорной плотности распределения параметра $w(\theta_1, \ldots, \theta_n \mid y_1, \ldots, y_n)$ на плотность вероятности перехода $w(\theta_{n+1} \mid \theta_n)$ представляет собой априорную плотность распределения параметра в момент t_{n+1} по данным измерений на интервале

$t_1 - t_n$. Обозначим эту плотность вероятности через $P_n(\theta_1\theta_2, \ldots, \theta_{n+1})$. Тогда рекуррентное уравнение (7) записывается в виде

$$w(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1} | y_1, \ldots, y_{n+1}) = \\ = C_n' P_n(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}) w(y_{n+1} | \theta_{n+1}). \quad (9.2.8)$$

Полученное уравнение и является основным уравнением фильтрации марковского параметра. В соответствии с этим уравнением для формирования многомерного апостериорного распределения на очередном шаге необходимо с помощью функции перехода экстраполировать многомерное апостериорное распределение предыдущего шага и умножить результат экстраполяции на значение функции правдоподобия очередного измерения, которое характеризует вновь поступившие сведения о параметре.

Рекуррентные соотношения для оценки параметра $\hat{\theta}_t$ получаются далее путем дифференцирования многомерного апостериорного распределения (или его логарифма), по оцениваемым параметрам с последующим приравниванием результатов дифференцирования нулю и решением уравнения относительно θ_t. Получаемые оценки будут оптимальными оценками по критерию максимума апостериорной вероятности.

В задачах обработки радиолокационной информации, фильтрации в смысле, главным образом, последовательного сглаживания подлежат изменяющиеся во времени параметры сопровождаемых траекторий. Как уже отмечалось, наиболее распространенным является представление траектории в виде детерминированного процесса, в том числе в виде набора временных полиномов с неизвестными коэффициентами (параметрами движения). Следовательно, в данном случае мы имеем дело с фильтрацией детерминированных сигналов с неизвестными параметрами, принимаемых на фоне аддитивных помех.

Для детерминированных параметров плотность вероятности перехода $w(\theta_{n+1} | \theta_n)$ имеет вид дельта-функции, вследствие чего многомерное апостериорное распределение предыдущего шага трансформируется на следующий с помощью неслучайного оператора экстраполяции, примененного к вектору параметров, т. е.

$$\theta_{n+1} = F_\theta \theta_n.$$

Задача получения рекуррентных соотношений для оценки параметров в данном случае упрощается (см. следующий параграф).

9.2.2. *Некоторые задачи нелинейной оптимальной фильтрации*

Рассмотрим задачу фильтрации параметра, изменяющегося во времени скачкообразно. Пусть, например, при невозмущенном движении фильтруемый параметр остается неизменным, т. е. скорость его изменения $\dot{\theta} = 0$. Далее, начиная с неизвестного наблюдателю момента времени t_0 и до момента t_1, скорость получает приращение $\Delta\dot{\theta}_k$, которое может принимать дискретный ряд значений: $\Delta\dot{\theta}_0 = 0$, $\Delta\dot{\theta}_1$, $\Delta\dot{\theta}_2$, . . . $\Delta\dot{\theta}_m$. Указанные значения приращений образуют простую цепь Маркова с матрицей вероятностей переходов

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \beta_1 & 1-\beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_n & .0 & 1-\beta_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_m & 0 & 0 & \ldots & 1-\beta_m \end{Vmatrix},$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k.$$

Если рассмотреть теперь двумерный процесс $(y_t = y(it), \ \theta_t = \theta(t_t))$, то легко показать, что этот процесс является марковским (вследствие марковости одной из его компонент), причем первая компонента является наблюдаемой, а вторая — ненаблюдаемой. Задача состоит в том, чтобы по известному значению наблюдаемой компоненты случайного процесса найти распределение вероятности ненаблюдаемой его компоненты. Решение этой задачи составляет содержание теории условных марковских процессов и освещено в работах Р. Л. Стратоновича (см., например, [5]).

Следуя [6], получим рекуррентные соотношения для апостериорного распределения вероятности ненаблюдаемой компоненты θ_t двумерного условного марковского процесса (y_t, θ_t). Для простоты положим, что θ_t принимает только два возможных значения: 0 и 1, а матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}. \qquad (9.2.9)$$

Пусть $\mathbf{y_n} = \| y_1, y_2, \ldots, y_n \|$ — вектор-строка измеренных значений наблюдаемой компоненты случайного процесса, а $\dot{\boldsymbol{\theta}}_n = \| \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ldots \dot{\theta}_n \|$ — аналогичный вектор для ненаблюдаемой компоненты. Вследствие марковости двумерного процесса (y_t, θ_t) плотность вероятности их совместного распределения записывается в виде

$$w(\mathbf{y}_n, \dot{\boldsymbol{\theta}}_n) = w(y_1, \dot{\theta}_1) \prod_{t=2}^{n} w(y_t, \dot{\theta}_t \mid y_{t-1}, \dot{\theta}_{t-1}). \qquad (9.2.10)$$

где $w(y_t, \dot{\theta}_t \mid y_{t-1}, \dot{\theta}_{t-1})$ — плотность вероятности перехода за один шаг $\Delta t = t_t - t_{t-1}$ из состояния $(y_{t-1}, \dot{\theta}_{t-1})$ в состояние $(y_t, \dot{\theta})$, равная

$$w(y_t, \dot{\theta}_t \mid y_{t-1}, \dot{\theta}_{t-1}) = P(\dot{\theta}_t \mid \dot{\theta}_{t-1})\, w(y_t \mid \dot{\theta}_{t-1}),$$

Рассмотрим условную плотность вероятности $w(\dot{\boldsymbol{\theta}}_n \mid \mathbf{y}_n)$ значений ненаблюдаемой компоненты $\dot{\boldsymbol{\theta}}_n$, при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{y}_n$. По формуле условной вероятности имеем

$$w(\dot{\boldsymbol{\theta}}_n \mid \mathbf{y}_n) = \frac{1}{w(\mathbf{y}_n)}\, w(\mathbf{y}_n, \dot{\boldsymbol{\theta}}_n).$$

Или с учетом (10)

$$w(\dot{\boldsymbol{\theta}}_n \mid \mathbf{y}_n) = \frac{1}{w(\mathbf{y}_n)}\, w(y_1, \dot{\theta}_1) \prod_{t=2}^{n} w(y_t, \dot{\theta}_t \mid y_{t-1}, \dot{\theta}_{t-1}). \qquad (9.2.11)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно записать условную плотность вероятности для вектора ненаблюдаемой компоненты процесса по результатам $n+1$ измерения наблюдаемой компоненты в виде

$$w(\dot{\boldsymbol{\theta}}_{n+1} \mid \mathbf{y}_{n+1}) = \frac{1}{w(\mathbf{y}_{n+1})}\, w(y_1, \dot{\theta}_1) \prod_{t=2}^{n+1} w(y_t, \dot{\theta}_t \mid y_{t-1}, \dot{\theta}_{t-1}), \qquad (9.2.12)$$

Нас в конечном счете интересует апостериорная плотность вероятности для последнего значения $\dot{\theta}_{n+1}$ ненаблюдаемой компоненты, которая обозначается $w(\dot{\theta}_{n+1} \mid \mathbf{y}_{n+1})$. В общем случае для получения этой плотности вероятности необходимо проинтегрировать совместную плотность (12) по всем значениям остальных $(\dot{\theta}_1 \ldots \dot{\theta}_n)$ переменных. В нашем случае переменные принимают только два возможных значения. Поэтому интегрирование заменяется суммированием.

На основе формулы (11) для $w(\dot{\theta}_n \mid y_n)$ можно записать

$$w(\dot{\theta}_n \mid y_n) = \frac{1}{w(y_n)} \sum_{\dot{\theta}_1=0}^{1} \cdots \sum_{\dot{\theta}_{n-1}=0}^{1} w(y_1, \dot{\theta}_1) \times$$

$$\times \prod_{l=2}^{n} w(y_l, \dot{\theta}_l \mid y_{l-1}, \dot{\theta}_{l-1}); \qquad (9.2.13)$$

Аналогично на основе формулы (12) записывается апостериорная плотность для $\dot{\theta}_{n+1}$ по данным $n+1$ измерения y_{n+1}:

$$w(\dot{\theta}_{n+1} \mid y_{n+1}) = \frac{1}{w(y_{n+1})} \sum^{1} \cdots \sum^{1} w(y_1, \dot{\theta}_1) \times$$

$$\times \prod_{l=2}^{n+1} w(y_l, \dot{\theta}_l \mid y_{l-1}, \dot{\theta}_{l-1}). \qquad (9.2.14)$$

Или с учетом (13) получим

$$w(\dot{\theta}_{n+1} \mid y_{n+1}) = \frac{w(y_n)}{w(y_{n+1})} \sum_{\dot{\theta}_n=0}^{1} w(\dot{\theta}_n \mid y_n)\, w(y_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1} \mid y_n, \dot{\theta}_n).$$

Для расчета $w(y_n)/w(y_{n+1})$ воспользуемся следующим соотношением

$$\sum_{\dot{\theta}_{n+1}=0}^{1} w(\dot{\theta}_{n+1} \mid y_{n+1}) = 1.$$

Откуда получаем

$$\frac{w(y_n)}{w(y_{n+1})} \sum_{\dot{\theta}_{n+1}=0}^{1} \sum_{\dot{\theta}_n=0}^{1} w(\dot{\theta}_n \mid y_n)\, w(y_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1} \mid y_n, \dot{\theta}_n) = 1,$$

а

$$\frac{w(y_n)}{w(y_{n+1})} = \frac{1}{\sum_{\dot{\theta}_{n+1}=0}^{1} \sum_{\dot{\theta}_n=0}^{1} w(\dot{\theta}_n \mid y_n)\, w(y_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1} \mid y_n, \dot{\theta}_n)}.$$

С учетом последнего выражения получаем окончательно

$$w(\dot{\theta}_{n+1} \mid y_{n+1}) = \frac{\sum_{\dot{\theta}_n=0}^{1} w(\dot{\theta}_n \mid y_n)\, w(y_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1} \mid y_n, \dot{\theta}_n)}{\sum_{\dot{\theta}_{n+1}=0}^{1} \sum_{\dot{\theta}_n=0}^{1} w(\dot{\theta}_n \mid y_n)\, w(y_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1} \mid y_n, \dot{\theta}_n)}. \qquad (9.2.15)$$

Полученное соотношение позволяет оценить апостериорную плотность вероятности для ненаблюдаемой компоненты двумерного условного марковского процесса. В случае, когда ненаблюдаемая компонента имеет не два, а большее число состояний, соотношение (15) остается в силе, но сумма будет не по двум, а по всем возможным состояниям. Значение $w(\dot{\theta}_n \mid y_n)$ можно использовать при управлении процессоы обработки наблюдаемой компоненты на основе принятия

решения о наличии скачка параметра. Для этого на каждом шаге апостериорная плотность вероятности $w(\theta_n = 1/y_n)$ сравнивается с порогом $\mathscr{L}$ ($0 < \mathscr{L} < 1$). При $w(\theta_n = 1/y_n) < \mathscr{L}$ можно принять гипотезу об отсутствии скачка параметра и сглаживать результаты измерений в соответствии с этой гипотезой. При $w(\theta_n = 1/y_n) > \mathscr{L}$ гипотеза об отсутствии скачка отвергается и сглаживание осуществляется иначе.

Порог X можно подобрать при моделировании на ЦВМ, если задаться допустимой вероятностью ложного обнаружения скачка.

9.3. Оптимальное последовательное сглаживание параметров невозмущенной детерминированной траектории

Пусть наблюдаемая случайная последовательность имеет вид

$$\mathbf{U}_l = \mathrm{H}\vartheta_l + \Delta\mathbf{U}_l,$$

где $\mathbf{U}_l$ — l-мерный вектор наблюдаемых координат; ϑ_l - (s X 1)-мерный вектор оцениваемых параметров траектории; H — матрица размерности (l x s), устанавливающая однозначное соответствие между оцениваемыми параметрами и измеряемыми координатами; $\Delta\mathbf{U}_l$ — l-мерный вектор ошибок измерения координат; последовательность этих векторов предполагается некоррелированной случайной последовательностью с математическим ожиданием, равным нулю, и известной корреляционной матрицей.

Предполагается также, что между предыдущими и последующими значениями параметров имеется однозначная связь, так что значение параметров в двух соседних обзорах связаны соотношением

$$\vartheta_{l+1} = \mathrm{F}\vartheta_l,$$

где F — матрица, размерности $\$ \times s$.

Задача состоит в получении рекуррентных выражений для сглаженных значений параметров. В данном параграфе эта задача решается сначала в общем виде, а затем для конкретных моделей траекторий.

9.3.1. Формульная схема оптимального алгоритма последовательного сглаживания векторного параметра

В соответствии с общей теорией фильтрации, наилучший путь решения задачи последовательного сглаживания состоит в определении апостериорной вероятности фильтруемых параметров, так как она содержит всю информацию, полученную из априорных источников и результатов измерений. Зная апостериорную плотность вероятности, можно получить различные оценки интересующих нас параметров, в том числе оценки, соответствующие максимуму функции апостериорной плотности. Последние, как известно, называются оценками, оптимальными по критерию максимума апостериорной вероятности. Именно в этом смысле и понимается оптимальная фильтрация в дальней-

шем. Рассмотрим в общем виде задачу последовательного сглаживания вектора параметров траектории движения цели. При полиномиальном представлении траектории составляющими этого вектора являются: координаты, скорости изменения координат, ускорения по координатам и т. д.

Вектор сглаженных параметров будем обозначать через $\hat{\vartheta}_n$ с индексом n, указывающим время его привязки t_n. Порядок расположения составляющих вектора не оговаривается. Одновременно с последовательным уточнением вектора оцениваемых параметров будем формировать также последовательно корреляционную матрицу ошибок оценки этих параметров. Матрица Ψ_n определяет точностные характеристики сглаженных параметров на момент времени t_n и имеет размерность s X s.

Итак, пусть получено (имеется) сглаженное значение $\hat{\vartheta}_{n-1}$ вектора параметров $\hat{\vartheta}_{n-1}$ траектории цели по результатам n — 1 предыдущих измерений ее координат. Распределение вектора ϑ_{n-1}, принимается нормальным с математическим ожиданием ϑ_{n-1} и корреляционной матрицей Ψ_{n-1}.

Вектор параметров ϑ_{n-1} экстраполируется на момент следующего (n-го) измерения. Экстраполированное значение вектора параметров получается в соответствии с соотношением

$$\hat{\vartheta}_{n\text{э}} = F_\text{э} \hat{\vartheta}_{n-1}, \qquad (9,3.1)$$

где $F_\text{э}$ — известный оператор экстраполяции параметров. Конкретный вид оператора $F_\text{э}$ определяется моделью траектории цели.

Пусть, например, вектор оцениваемых параметров траектории в момент времени t_{n-1} имеет вид

$$\hat{\vartheta}_{n-1} = \| \hat{r}_{n-1}, \hat{\dot{r}}_{n-1}, \hat{\ddot{r}}_{r} \|^{\mathrm{T}}$$

что соответствует представлению отдельно взятой координаты дальности в виде полинома второй степени.

Б этом случае оператор экстраполяции параметров на время $\tau_\text{э} = (t_n - t_{n-1})$ имеет вид

$$\overset{\mathrm{p}}{\underset{\text{э}}{}} = \begin{Vmatrix} 1 & \tau_\text{э} & \frac{\tau_\text{э}^2}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \tau_\text{э} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а Выражение (1) записывается в виде

$$\hat{\vartheta}_{n\text{э}} = \begin{Vmatrix} \hat{r}_{n\text{э}} \\ \hat{\dot{r}}_{n\text{э}} \\ \hat{\ddot{r}}_{n\text{э}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau_\text{э}^2}{2} \\ 0 & 1 & \tau_\text{э} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \hat{r}_{n-1} \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \\ \hat{\ddot{r}}_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Корреляционная матрица Ψ_{n-1} ошибок оценки параметров по результатам $(n-1)$ измерений также пересчитывается (экстраполируется) на момент следующего измерения, т. е. на время $\tau_э$.

Матричный оператор пересчета корреляционной матрицы ошибок оценки параметров к моменту времени очередного измерения координат обычно совпадает с оператором $F_э$. Однако в некоторых, практически важных случаях этот оператор может отличаться от $F_э$ (см. п. 9.3.5), поэтому для него вводится обозначение Φ.

Матрица ошибок оценки экстраполированных параметров вычисляется следующим образом. В соответствии с формулой (1) для вектора ошибок экстраполяции параметров в n-м обзоре можно записать

$$= \Phi \Delta \hat{\vartheta}_{n-1}.$$

По определению,

$$\Psi_{nэ} = M\left[\Delta \hat{\vartheta}_{nэ} \Delta \hat{\vartheta}_{nэ}^{T}\right],$$

где M — знак математического ожидания.

Имея в виду, что

$$\Delta \hat{\vartheta}_{nэ}^{T} = \Delta \hat{\vartheta}_{n-1}^{T} \Phi^{T},$$

получаем

$$\Psi_{nэ} = \Phi M\left[\Delta \hat{\vartheta}_{n-1} \Delta \hat{\vartheta}_{n-1}^{T}\right] \Phi^{T}.$$

Заменяя

$$M\left[\Delta \hat{\vartheta}_{n-1} \Delta \hat{\vartheta}_{n-1}^{T}\right] = \Psi_{n-1},$$

получаем окончательно

$$\Psi_{nэ} = \Phi \Psi_{n-1} \Phi^{T}. \qquad (9.3.2)$$

С учетом допущения о линейности оператора экстраполяции, закон распределения вектора экстраполированных параметров будет нормальным. В векторно-матричной форме соответствующая плотность вероятности записывается так:

$$w(\hat{\vartheta}_{nэ}) = C_1 \exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{\vartheta}_{nэ} - \vartheta_n)^{T} \Psi_{nэ}^{-1} (\hat{\vartheta}_{nэ} - \vartheta_n)\right], \qquad (9.3.3)$$

где ϑ_n — вектор истинных значений параметров в момент t_n. Плотность вероятности (3) является априорной плотностью вероятности для вектора оцениваемых параметров перед очередным $(n$-м$)$ измерением.

В момент времени t_n производится очередное измерение координат цели. Вектор измеренных значений координат обозначается через $\mathbf{U}_n$. В общем случае трехкоординатной РЛС $\mathbf{U}_n = \| r_n, \beta_n, \varepsilon_n \|^{T}$.

Предполагается, что ошибки измерения координат подчинены нормальному закону распределения и некоррелированы в смежных обзорах. Поэтому условная плотность вероятности выборки измеренных значений координат имеет вид

$$w(\mathbf{U}_n \mid \vartheta_n) = C_2 \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_n - \mathbf{H}\vartheta_n \Xi^{-1} (\mathbf{U}_n - \mathbf{H}\vartheta_n)\|\right], \qquad (9.3.4)$$

где Ξ^{-1} — обратная корреляционная матрица ошибок измерения, которая вследствие независимости измеряемых координат имеет вид

$$\Xi^{-1} = \begin{Vmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2_{\beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma^2_{\varepsilon_n} \end{Vmatrix};$$

H — линейный оператор соответствия оцениваемых параметров и измеряемых координат.

Например, если измеряются координаты r_n, β_n и ε_n, а оцениваются параметры $\hat{r}_n$, $\hat{\dot{r}}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\dot{\beta}}_n$, $\hat{\varepsilon}_n$, $\hat{\dot{\varepsilon}}_n$, то оператор H имеет вид прямоугольной матрицы порядка 3×6:

$$H = \begin{array}{c} \\ r_n \\ \beta_n \\ \varepsilon_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \hat{r}_n & \hat{\dot{r}}_n & \hat{p}_n & \hat{\dot{p}}_n & \hat{\varepsilon}_n & \hat{\dot{\varepsilon}}_n \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Произведение $H\vartheta_n$ в формуле (4) представляет собой вектор истинных значений измеряемых координат в момент времени t_n.

Вследствие отсутствия (в соответствии с допущением 2 § 9.1) междуобзорной корреляции ошибок измерения апостериорное распределение для вектора оценок параметров после n-го измерения координат определяется по формуле Байеса

$$w(\hat{\vartheta}_n \mid U_n) = C_3\, w\,(\hat{\vartheta}_{n\ni})v\ (U_n \mid \vartheta_n), \qquad (9.3.5)$$

где C_3 — нормирующий множитель, определяющий масштаб кривой $w(\hat{\vartheta}_n|U_n)$ таким образом, чтобы площадь под этой кривой была равна единице.

Вследствие нормальности составляющих распределений апостериорное распределение (5) является нормальным. Соответствующая плотность вероятности записывается в виде

$$\text{ttJi}(\hat{\vartheta}_n|U_n) = C_4 \exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n)^{\mathrm{T}}\, \Psi_n^{-1}\, (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n)\right], \qquad (9.3.6)$$

где $\hat{\vartheta}_n$ — вектор сглаженных параметров по результатам n измерений координат; Ψ_n — матрица ошибок оценки сглаженных параметров.

Для нормального распределения $\max w\ (\hat{\vartheta}|U_n)$ совпадает с математическим ожиданием вектора оцениваемых параметров. Следовательно, задача оценки параметров по максимуму апостернорной вероятности сводится в нашем случае к нахождению параметров ϑ_n и Ψ_n в выражении (6).

Используя выражения (3), (4) и (6) для плотностей вероятности, входящих в формулу (5), после логарифмирования получаем

$$(\hat{\vartheta}_n-\vartheta_n)^{\mathrm{T}}\Psi_n^{-1}(\hat{\vartheta}_n-\vartheta_n)=(\hat{\vartheta}_{n\text{э}}-\vartheta_n)\Psi_{n\text{э}}^{-1}(\hat{\vartheta}_{n\text{э}}-\vartheta_n)+$$
$$+(U_n-H\vartheta_n)^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}(U_n-H\vartheta_n)+\text{const}. \qquad (9.3.7)$$

Последнее уравнение является исходным для нахождения вектора $\hat{\vartheta}_n$ и матрицы Ψ_n.

Так, выделение членов, представляющих собой квадратичные формы для вектора $\hat{\vartheta}_n$, дает

$$\vartheta_n^{\mathrm{T}}\Psi_n^{-1}\vartheta_n=\vartheta_{n\text{э}}^{\mathrm{T}}\Psi_{n\text{э}}^{-1}\vartheta_n+\vartheta_n^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}H\vartheta_n.$$

Из этого уравнения получаем

$$\Psi_n^{-1}=\Psi_{n\text{э}}^{-1}+H^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}H. \qquad (9.3.8)$$

Громоздкие операции по обращению матриц в выражении (8) приводят к следующему окончательному результату [8]:

$$\Psi_n=\Psi_{n\text{э}}-\Psi_{n\text{э}}H^{\mathrm{T}}(H\Psi_{n\text{э}}H^{\mathrm{T}}+\Xi)^{-1}H\Psi_{n\text{э}}. \qquad (9.3.9)$$

Сравнивая в уравнении (7) квадратичные формы, содержащие ϑ_n^{T} слева, получаем

$$\vartheta_n^{\mathrm{T}}\Psi_n^{-1}\hat{\vartheta}_n=\vartheta_n^{\mathrm{T}}\Psi_{n\text{э}}^{-1}\hat{\vartheta}_{n\text{э}}+\vartheta_n^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}U_n.$$

Из этого уравнения находим

$$\hat{\vartheta}_n=\Psi_n\left[\Psi_{n\text{э}}^{-1}\hat{\vartheta}_{n\text{э}}+H^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}U_n\right],$$

После элементарных преобразований с учетом выражений (1) и (8) получаем окончательно

$$\hat{\vartheta}_n=\hat{\vartheta}_{n\text{э}}+\Psi_nH^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}\left(U_n-H\hat{\vartheta}_{n\text{э}}\right]. \qquad (9.3.10).$$

В соответствии с выражением (10) вектор сглаженных значений параметров по результатам n измерений координат получается как сумма вектора экстраполированных на момент n-го измерения параметров и взвешенного с некоторым коэффициентом сглаживания рассогласования между измеренными и экстраполированными значениями координат. Ниже основные соотношения оптимального алгоритма последовательного сглаживания параметров траектории записаны в порядке выполнения операций:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \hat{\vartheta}_{n\text{э}}=F_{\text{э}}\hat{\vartheta}_{n-1},\\
&2)\quad \Psi_{n\text{э}}=\Phi\Psi_{n-1}\Phi^{\mathrm{T}},\\
&3)\quad \Psi_n=\Psi_{n\text{э}}-\Psi_{n\text{э}}H^{\mathrm{T}}(H\Psi_{n\text{э}}H^{\mathrm{T}}+\Xi)^{-1}H\Psi_{n\text{э}},\\
&4)\quad \hat{\vartheta}_n=\vartheta_{n\text{э}}+\Psi_nH^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}(U_n-\hat{U}_{n\text{э}}),
\end{aligned} \qquad (9.3.11)$$

где $U_{n\,\text{э}}$ — вектор экстраполированных значений координат.

В зарубежной литературе система уравнений (11) часто называется уравнениями фильтра Калмана [8, 91.

9,3.2. Последовательное сглаживание параметров линейной траектории

Закон изменения координат линейной траектории записывается в виде

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 + \dot{r}_0 (t - t_0), \\ \beta(t) &= \beta_0 + \dot{\beta}_0 (t - t_0), \\ \varepsilon(t) &= \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}_0 (t - t_0). \end{aligned} \qquad (9.3.12)$$

Сглаживание параметров линейной траектории можно производить раздельно по каждой координате, так как последние не связаны между собой. Для примера рассмотрим последовательное сглаживание параметров по координате дальности $r(t)$ при равнодискретном ее наблюдении с периодом T_0.

1. Пусть по данным предыдущих $n-1$ обзоров получены вектор сглаженных параметров

$$\hat{\vartheta}_{n-1} = \begin{Vmatrix} \hat{r}_{n-1} \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \end{Vmatrix}$$

и корреляционная матрица ошибок оценки этих параметров [см. выражение (6.3.29)]

$$\Psi_{n-1} = \frac{1_x}{K_{n-1}} \begin{Vmatrix} h_{n-1} & \frac{g_{n-1}}{T_0} \\ \frac{g_{n-1}}{T_0} & \frac{f_{n-1}}{T_0^2} \end{Vmatrix}. \qquad (9.3.13)$$

2. В соответствии с принятой моделью траектории, экстраполяция координаты на следующий обзор производится по линейному закону при условии постоянства скорости ее изменения. Следовательно, в рассматриваемом случае вектор экстраполированных параметров имеет вид

$$\hat{\vartheta}_{nэ} = \begin{Vmatrix} \hat{r}_{nэ} \\ \hat{\dot{r}}_{nэ} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{r}_{n-1} + \hat{\dot{r}}_{n-1} T_0 \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad (9.3.14)$$

а оператор экстраполяции $F_э$ (так же как и оператор пересчета ошибок Ф), как легко проверить, записывается в виде матрицы

$$F_э = \Phi = \begin{Vmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Корреляционная матрица ошибок экстраполяции вычисляется по формуле

$$\Psi_{nэ} = \Phi \Psi_{n-1} \Phi^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{h_{n-1}}{K_{n-1}} & \frac{g_{n-1}}{K_{n-1} T_0} \\ \frac{g_{n-1}}{K_{n-1} T_0} & \frac{f_{n-1}}{K_{n-1} T_0^2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ T_0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В результате выполнения операций перемножения матриц получим окончательно

$$\Psi_{n\text{э}} = \frac{1}{K_{n-1}} \left\| \begin{matrix} h_{n-1} & g_{n-1} \\ g_{n-1}+f_{n-1} & f_{n-1} \end{matrix} \right. \quad \left. \begin{matrix} g_{n-1}+f_{n-1} \\ \hline T_0 \\ f_{n-1} \\ \hline T_0^2 \end{matrix} \right\|. \qquad (9.3.15)$$

3. Вычислим теперь корреляционную матрицу ошибок сглаживания параметров с учетом последнего (n-го) измерения координаты. Для этого воспользуемся общей формулой (9). В этой формуле (для рассматриваемого случая); $\Xi_n = \sigma_{r_n}^2$ — дисперсия ошибки измерения дальности в n обзоре, $H = \| 1 \; 0 \|$ — вектор-строка,

$$H\Psi_{n\text{э}}H^{\mathrm{T}} = \psi_{11\,(n\text{э})}, \quad (H\Psi_{n\text{э}}H^{\mathrm{T}} + \Xi)^{-1} = \frac{1}{\psi_{11\,(n\text{э})} + \sigma_{r_n}^2}.$$

Запишем матрицу Ψ_n в общем виде:

$$\Psi_n = \left\| \begin{matrix} \psi_{11\,(n)} & \psi_{12\,(n)} \\ \psi_{21\,(n)} & \psi_{22\,(n)} \end{matrix} \right\|.$$

Производя вычисления в соответствии с формулой (9) для элементов матрицы Ψ_n, получаем следующие выражения:

$$\psi_{11\,(n)} = \frac{\psi_{11\,(n\text{э})}}{1 + w_{r_n}\psi_{11\,(n\text{э})}}, \quad \left(w_{r_n} = \frac{1}{\sigma_{r_n}^2}\right),$$

$$\psi_{12\,(n)} = \psi_{21(n)} = \frac{\psi_{12\,(n\text{э})}}{1 + w_{r_n}\psi_{11\,(n\text{э})}};$$

$$\psi_{22\,(n)} = \psi_{22\,(n\text{э})} - \frac{w_{r_n}\psi_{21\,(n\text{э})}\psi_{12\,(n\text{э})}}{1 + w_{r_n}\psi_{11\,(n\text{э})}}.$$

Дальнейшие преобразования этих выражений позволяют записать матрицу Ψ_n в следующем компактном виде:

$$\Psi_n = \frac{1}{K_n} \left\| \begin{matrix} h_n & \frac{g_n}{T_0} \\ \frac{g_n}{T_0} & \frac{f_n}{T_0^2} \end{matrix} \right\|, \qquad (9,3.16)$$

где

$$h_n = h_{n-1} + 2g_{n-1} + f_{n-1}, \quad g_n = g_{n-1} + f_n,$$
$$f_n = f_{n-1} + w_{r_n}, \quad K_n = K_{n-1} + w_{r_n}h_n. \qquad (9.3.17)$$

Полученные формулы позволяют непосредственно формировать элементы матрицы Ψ_n из элементов матрицы Ψ_{n-1} и веса w_{r_n} последнего измерения координаты.

Если экстраполяция производится на произвольный интервал времени $\Delta t_э$, формулы для h_n и g_n приобретают вид

$$h_n = h_{n-1} + 2g_{n-1}\left(\frac{\Delta t_э}{T_0}\right) + f_{n-1}\left(\frac{\Delta t_э}{T_0}\right)^2,$$

$$g_n = g_{n-1} + f_n\left(\frac{\Delta t_э}{T_0}\right).$$

4. Получим теперь формулы для вычисления сглаженных параметров в соответствии с общим выражением (10). В этом выражении (для рассматриваемого случая)

$$H\hat{\theta}_{nэ} = \hat{r}_{nэ},$$

$$\Psi_n H^T \Xi^{-1} = \left\| \begin{matrix} \psi_{11(n)} w_{r_n} \\ \psi_{21(n)} w_{r_n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_n \\ \frac{B_n}{T_0} \end{matrix} \right\|.$$

С учетом последних соотношений окончательные формулы для вычисления сглаженных параметров линейной траектории имеют вид

$$\hat{r}_n = r_{nэ} + A_n(r_n - \hat{r}_{nэ}), \qquad (9.3.18)$$

$$\hat{\dot{r}}_n = \hat{\dot{r}}_{n-1} + (B_n/T_0)(r_n - \hat{r}_{nэ}). \qquad (9.3.19)$$

Входящие в эти формулы коэффициенты A_n и B_n называются коэффициентами сглаживания координаты и скорости соответственно. С учетом выражения (!б) эти коэффициенты можно записать в виде

$$A_n = h_n w_{r_n}/K_n, \qquad (9.3.20)$$

$$B = g\ w.\ IK\ . \qquad /0\ 2\ 911$$

Если в очередном (n-м) обзоре имеет место пропуск отметки, то $w_{r_n} = 0$ ($\sigma^2_{r_n} = \infty$) и $A_n = B_n = 0$. В качестве сглаженного значения координаты и скорости в этом случае принимаются их экстраполированные значения.

5. При равнодискретных и равноточных (без пропусков) измерениях координаты имеем

$$f_n = n, \quad g_n = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$h_n = n(n-1)(2n-1)/6, \quad K_n = n^2(n^2-1)/12.$$

Подставляя эти значения в выражения (20) и (21), получаем

$$A_n = 2(2n-1)/n(n+1), \qquad (9.3.22)$$

$$B_n = 6/л(л+1). \qquad (9.3.23)$$

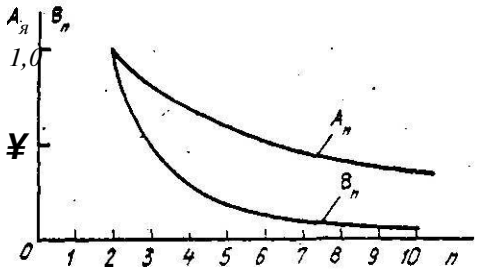


Рис. 9.2. Графики изменения коэффициентов A_n и B_n.

На рис. 9.2 приведены графики зависимости коэффициентов A_n и B_n от числа наблюдений n. Из графиков видно, что с увеличением n коэффициенты сглаживания, координаты и скорости асимптотически приближаются к нулю. Следовательно, с увеличением n результаты последних наблюдений при сглаживании координаты и скорости учитываются все с меньшим весом и алгоритм перестает реагировать на изменение входного сигнала. В этом существенный недостаток рассматриваемого метода, если иметь в виду, что для реальных целей траектория движения подвержена случайным флюктуациям.

9.3.3. Последовательное сглаживание параметров траектории, представленной полиномом второй степени

Пусть координата дальности $r(t)$ представляется полиномом второй степени, т. е.

$$r(t) = r_0 + \dot{r}_0 (t - t_0) + \ddot{r}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2}, \qquad (9.3.24)$$

и предположим, что эта координата сглаживается независимо от других. Известны — вектор оценок параметров на предыдущем шаге

$$\hat{\vartheta}_{n-1} = \begin{Vmatrix} r_{n-1} \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \\ \hat{\ddot{r}}_{n-1} \end{Vmatrix}$$

и корреляционная матрица ошибок оценки этих параметров

$$\Psi_{n-1} = \begin{Vmatrix} \psi_{11}(n-1) & \hat{\psi}_{12}(n-1) & \hat{\psi}_{13}(n-1) \\ \psi_{21}(n-1) & \hat{\psi}_{22}(n-1) & \hat{\psi}_{23}(n-1) \\ \psi_{31}(n-1) & \hat{\psi}_{32}(n-1) & \hat{\psi}_{33}(n-1) \end{Vmatrix}$$

Производя операции в соответствий с общей формульной схемой алгоритма, получаем:

1. Экстраполированные значения параметров на время $\Delta t_э$

$$\vartheta_{n э} = F_э \hat{\vartheta}_{n-1} = \begin{Vmatrix} 1 & \Delta t_э & \frac{\Delta t_э^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t_э \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \hat{r}_{n-1} \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \\ \hat{\ddot{r}}_{n-1} \end{Vmatrix}$$

Окончательные формулы имеют вид

$$\hat{r}_{n\vartheta} = \hat{r}_{n-1} + \hat{\dot{r}}_{n-1}\Delta t_\vartheta + \hat{\ddot{r}}_{n-1}\frac{\Delta t_\vartheta^2}{2},$$
$$\hat{\dot{r}}_{n\vartheta} = \hat{\dot{r}}_{n-1} + \hat{\ddot{r}}_{n-1}\Delta t_\vartheta, \qquad (9.3.25)$$
$$\hat{\ddot{r}}_{n\vartheta} = \hat{\ddot{r}}_{n-1}.$$

2. Матрица ошибок экстраполяции получается из выражения

$$\Psi_{n\vartheta} = F_\vartheta \Psi_{n-1} F_\vartheta^{\mathrm{T}}.$$

Не раскрывая (из-за громоздкости) это выражение, записываем матрицу ошибок экстраполяции в общем виде

$$\Psi_{n\vartheta} = \left\| \begin{matrix} \psi_{11\,(n\vartheta)} & \psi_{12\,(n\vartheta)} & \psi_{13\,(n\vartheta)} \\ \psi_{21\,(n\vartheta)} & \psi_{22\,(л9)} & \psi_{23\,(n\vartheta)} \\ \psi_{31\,(n\vartheta)} & \psi_{32\,(n\vartheta)} & \psi_{33\,(n\vartheta)} \end{matrix} \right\|. \qquad (9.3.26)$$

3. Результат нового измерения координаты обозначим черезэ r_n. Это измерение характеризуется дисперсией $\sigma^2_{r_n}$. Оператор соответствия измеряемых и оцениваемых параметров имеет в данном случае вид

$$H = \| 1 \;\; 0 \;\; 0 \|.$$

4. Корреляционная матрица ошибок оценки параметров с учетом последнего измерения координат записывается в общем виде:

$$\Psi_n = \left\| \begin{matrix} \psi_{11\,(n)} & \psi_{12\,(n)} & \psi_{13\,(n)} \\ \psi_{21\,(n)} & \psi_{22\,(n)} & \psi_{23\,(n)} \\ \psi_{31\,(n)} & \psi_{32\,(n)} & \psi_{33\,(л)} \end{matrix} \right\|, \qquad (9.3.27)$$

где

$$\psi_{11\,(n)} = \frac{\psi_{11\,(n\vartheta)}}{1 + \psi_{11\,(n\vartheta)} w_{r_n}}, \quad \left(w_{r_n} = \frac{1}{\sigma^2_{r_n}} \right);$$

$$\psi_{12\,(n)} = \psi_{21\,(n)} = \frac{\psi_{21\,(n)}}{1 + \psi_{11\,(n\vartheta)} w_{r_n}};$$

$$\psi_{13\,(n)} = \psi_{31\,(n)} = \frac{\psi_{31\,(n)}}{1 + \psi_{11\,(n\vartheta)} w_{r_n}};$$

$$\psi_{22\,(n)} = \psi_{22\,(n\vartheta)} - \frac{\psi_{21\,(n\vartheta)} \psi_{12\,(n\vartheta)}}{\psi_{11\,(n\vartheta)} + \sigma^2_{r_n}};$$

$$\psi_{32\,(л)} = \psi_{23\,(л)} = \psi_{32\,(n\vartheta)} - \frac{\psi_{31\,(n\vartheta)} \psi_{12\,(n\vartheta)}}{\psi_{11\,(n\vartheta)} + \sigma^2_{r_n}};$$

$$\psi_{33\,(n)} = \psi_{33\,(n\vartheta)} = \frac{\psi_{31\,(n\vartheta)} \psi_{13\,(n\vartheta)}}{\psi_{11\,(n\vartheta)} + \sigma^2_{r_n}}.$$

6. Вектор-столбец коэффициентов сглаживания имеет в данном случае вид

$$\Psi_n H^T w_{r_n} = \left\| \begin{matrix} \psi_{11\,(n)} \\ \psi_{21\,(Я)} \\ \psi_{31\,(n)} \end{matrix} \right\| w_{r_n}.$$

6. Формулы сглаживания параметров в окончательном виде записываются так:

$$\begin{aligned}\hat{r}_n &= \hat{r}_{n\text{а}} + A_n(r_n - \hat{r}_{n\text{э}}),\\ \hat{\dot{r}}_n &= \hat{\dot{r}}_{n\text{э}} + \frac{B_n}{T_0}(r_n - \hat{r}_{n\text{э}}),\\ \hat{\ddot{r}}_n &= \hat{\ddot{r}}_{n-1} + \frac{\Gamma_n}{T_0^2}(r_n - \hat{r}_{n\text{э}}),\end{aligned} \tag{9.3.28}$$

где

$$A_n = \psi_{11\,(n)}\, w_{r_n};\quad \frac{B}{T_0} = \psi_{21\,(n)}\, w_{r_n};\quad \frac{\Gamma}{T_0^2} = \psi_{31\,(n)}\, w_{r_n}.$$

9.3.4. Последовательное сглаживание параметров линейной траектории при наличии независимых измерений положения и скорости

Пусть закон изменения координаты линейный

$$r(t) = r_0 + \dot{r}_0(t - t_0),$$

и производятся независимые одновременные и равнодискретные измерения положения r_t и скорости $\dot{r}_t$. Требуется получить формульную схему алгоритма последовательного сглаживания параметров r_n и $\dot{r}_n$.

Начальные значения параметров будем считать полученными по двум предыдущим измерениям:

$$\hat{\vartheta}_{n-1} = \hat{\vartheta}_2 = \begin{Vmatrix} \hat{r}_0 \\ \hat{\dot{r}}_2 \end{Vmatrix},$$

$$\Psi_{n-1} = \Psi_2 = \begin{Vmatrix} \dfrac{T_0^2 w_{r_2} + 2w_{\dot{r}_2}}{T_0^2 w_{r_2}^2 + 4w_{r_2} w_{\dot{r}_2}} & \dfrac{T_0}{T_0^2 w_{r_2} + 4w_{\dot{r}_2}} \\ \dfrac{T_0}{T_0^2 w_{r_2} + 4w_{\dot{r}_2}} & \dfrac{2}{T_0^2 w_{r_2} + 4w_{\dot{r}_2}} \end{Vmatrix}.$$

В соответствии с общей процедурой получения последовательных оценок имеем:

1. Экстраполированные значения параметров на момент n последнего измерения

$$\vartheta_{n\text{э}} = \begin{Vmatrix} r_{n\text{э}} \\ \dot{r}_{n\text{э}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{r}_{n-1} + \hat{\dot{r}}_{n-1} T_0 \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

2. Матрица ошибок экстраполяции

$$\Psi_{n\text{э}} = \begin{Vmatrix} \psi & \\ \psi_{21\,(n\text{э})} & \psi_{22\,(n\text{э})} \end{Vmatrix},$$

где

$$\psi_{11\,(n\text{э})} = \frac{5T_0^2 w_{r_{n-1}} + 2w_{\dot{r}_{n-1}}}{T_0^2 w_{r_{n-1}}^2 + 4w_{\dot{r}_{n-1}} w_{\dot{r}_{n-1}}};\quad \psi_{12\,(n\text{э})} = \psi_{21\,(n\text{э})} = \frac{3T_0}{T_0^2 w_{r_{n-1}} + 4w_{\dot{r}_{n-1}}};$$

$$\psi_{22\,(n\text{э})} = \frac{2}{T_0^2 w_{r_{n-1}} + 4w_{\dot{r}_{n-1}}}.$$

3. Корреляционная матрица ошибок оценки параметров получается в виде

$$\Psi_n = \left\| \begin{matrix} \psi_{11\,(n)} & \psi_{12\,(n)} \\ \psi_{21\,(n)} & \psi_{22\,(n)} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$\psi_{11\,(n)} = \frac{(\psi_{11\,(n-1)} + 2T_0\psi_{12\,(n-1)} + T_0^2\psi_{22\,(n-1)} + w_{\dot r_n}\alpha}{w_{r_n}(\psi_{11\,(n-1)} + 2T_0\psi_{12\,(n-1)} + T_0^2\psi_{22\,(n-1)}) + 1 + w_{\dot r_n}\beta};$$

$$\psi_{12\,(n)} = \frac{\psi_{12\,(n-1)} + T_0\psi_{22\,(n-1)}}{w_{r_n}(\psi_{11\,(n-1)} + 2T_0\psi_{12\,(n-1)} + T_0^2\psi_{22\,(n-1)}) + 1 + w_{\dot r_n}\beta};$$

$$\psi_{22\,(n)} = \frac{\psi_{22\,(n-1)} + w_{\dot r_n}\alpha}{w_{r_n}(\psi_{11\,(n-1)} + 2T_0\psi_{12\,(n-1)} + T_0^2\psi_{22\,(n-1)}) + 1 + w_{\dot r_n}\beta};$$

$$\alpha = \psi_{11\,(n-1)}\psi_{22\,(n-1)} - \psi_{12\,(n-1)}^2;$$

$$\beta = [(\psi_{11\,(n-1)} + 2T_0\psi_{12\,(n-1)} + T_0^2\psi_{22\,(n-1)}) \times$$
$$\times (\psi_{12\,(n-1)} + T_0\psi_{22\,(n-1)}) - (\psi_{12\,(n-1)} + T_0\psi_{22\,(n-1)})^2]\, w_{r_n} + \psi_{22\,(n-1)}.$$

Таким образом, элементы матрицы Ψ_n можно непосредственно формировать из элементов матрицы Ψ_{n-1} с учетом «весов» измерений (w_{r_n}, $w_{\dot r_n}$) в новом n-м обзоре.

4. Оператор соответствия измеряемых координат и оцениваемых параметров имеет в данном случае вид

$$H = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Поэтому оператор сглаживания имеет вид

$$\Psi_n H^T \Xi^{-1} = \left\| \begin{matrix} \psi_{11\,(n)} w_{r_n} & \psi_{12\,(n)} w_{\dot r_n} \\ \psi_{21\,(n)} w_{r_n} & \psi_{22\,(n)} w_{\dot r_n} \end{matrix} \right\|.$$

5. Оценки параметров траектории по результатам n измерений получаются в виде

$$\hat r_n = \hat r_{n\text{э}} + A_n'(r_n - \hat r_{n\text{э}}) + C_n(\dot r_n - \hat{\dot r}_{n\text{э}}), \qquad (9.3.29)$$
$$\hat{\dot r}_n = \hat{\dot r}_{n\text{э}} + B_n'(r_n - \hat r_{n\text{э}}) + D_n(\dot r_n - \hat{\dot r}_{n\text{э}}),$$

где

$$A_n' = \psi_{11\,(n)} w_{r_n};\ B_n' = \psi_{21\,(n)} w_{r_n};\ C_n = \psi_{12\,(n)} w_{\dot r_n};\ D_n = \psi_{22\,(n)} w_{\dot r_n}.$$

9.3.5. Последовательное сглаживание параметров баллистической траектории

Будем предполагать, что сглаживание параметров баллистической траектории производится по данным равнодискретных измерений координат. Параметрами траектории являются сферические координаты r_n, β_n, ε_n и скорости их изменения $\dot r_n$, $\dot\beta_n$, $\dot\varepsilon_n$, приведенные к моменту t_n последнего измерения.

Пусть на первом этапе, который является предварительным и включает небольшой начальный интервал наблюдения, баллистическая тра-

ектория сглаживалась как линейная, раздельно по каждой из независимых координат. Полученный на этом этапе вектор сглаженных параметров (после транспонирования) представим в виде $\hat{\theta}^{\mathrm{T}}_{n-1} = \| \hat{r}_{n-1}, \hat{\dot{r}}_{n-1}, \hat{\beta}_{n-1}, \hat{\dot{\beta}}_{n-1}, \hat{\varepsilon}_{n-1}, \hat{\dot{\varepsilon}}_{n-1} \|$, а матрицу ошибок оценки параметров по данным $n-1$ измерений координат запишем так:

$$\Psi_{n-1} = \begin{Vmatrix} \Psi_{r\,(n-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{\beta\,(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{\varepsilon\,(n-1)} \end{Vmatrix}. \tag{9.3.30}$$

Матрица (30) является блочно-диагональной. Диагональные блоки являются матрицами порядка 2 x 2 и записываются в виде

$$\Psi_{U\,(n-1)} = \begin{Vmatrix} \dfrac{h_{U\,(n-1)}}{K_{U\,(n-1)}} & \dfrac{g_{U\,(n-1)}}{T_0 K_{U\,(n-1)}} \\ \dfrac{g_{U\,(n-1)}}{T_0 K_{U\,(n-1)}} & \dfrac{t_{U\,(n-1)}}{T_0^2 K_{U\,(n-1)}} \end{Vmatrix},$$

где $U = (r,\ \beta,\ \varepsilon)$.

При экстраполяции параметры баллистической траектории представляются обычно полиномами не выше 3—4-й степени. Для случая представления координат полиномами 3-й степени и экстраполяции на один период обзора T_0 имеем

$$\hat{U}_{n\vartheta} = \hat{U}_{n-1} + \hat{\dot{U}}_{n-1} T_0 + \tilde{\ddot{U}}_{n-1} \frac{T_0^2}{2} + \tilde{\dddot{U}} \frac{T_0^3}{6}, \tag{9.3.31}$$

$$\hat{\dot{U}}_{n\vartheta} = \hat{\dot{U}}_{n-1} + \tilde{\ddot{U}}_{n-1} T_0 + \tilde{\dddot{U}} \frac{T_0^2}{2}, \tag{9.3.32}$$

где

$$\hat{U}_n \quad \| \hat{r}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\varepsilon}_n \|^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\dot{U}}_n = \| \hat{\dot{r}}_n, \hat{\dot{\beta}}_n, \hat{\dot{\varepsilon}}_n \|^{\mathrm{T}}.$$

Необходимые для решения уравнений (32) и (33) вторые производные координат по времени вычисляются из уравнений движения [см. формулы (6.4.5)], а производные третьего порядка находятся путем дифференцирования уравнений движения [см. формулы (6.4.7)].

Корреляционная матрица ошибок оценки параметров экстраполируется в данном случае по линейному закону. Линеаризованный оператор экстраполяции корреляционной матрицы ошибок представляет собой блочную матрицу вида

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \Phi_r & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \Phi_\beta & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_\varepsilon \end{Vmatrix}, \tag{9.3.33}$$

где

$$\Phi_U = \begin{Vmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Экстраполированная корреляционная матрица ошибок оценки параметров определяется, как и прежде, из соотношения

$$\Psi_{n\text{э}} = \Phi \Psi_{n-1} \Phi^{\mathrm{T}}.$$

Подставляя в это соотношение выражения (30) и (33) и производя соответствующие операции транспонирования и перемножения матриц, получаем окончательно

$$\Psi_{n\text{э}} = \begin{Vmatrix} \Psi_{r\,(n\text{э})} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{\beta\,(n\text{э})} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{\varepsilon\,(n\text{э})} \end{Vmatrix}. \qquad (9.3.34)$$

где

$$\Psi_{U\,(n\text{э})} = \begin{Vmatrix} h_{U\,(n-1)} + 2g_{U\,(n-1)} + f_{U\,(n-1)} & \dfrac{g_{U\,(n-1)} + f_{U\,(n-1)}}{T_0 K_{U\,(n-1)}} \\ \dfrac{\delta_{U\,(n-1)} + f_{U\,(n-1)}}{K_{U\,(n-1)}} & \dfrac{f_{U\,(n-1)}}{T_0^2 K_{U\,(n-1)}} \end{Vmatrix}.$$

Рассчитаем теперь матрицу ошибок сглаживания параметров с учетом очередного (n-го) цикла измерения координат. Ошибки одиночного отсчета независимых координат r_n, β_n и ε_n являются некоррелированными между собой. Поэтому корреляционная матрица ошибок измерения в n-м обзоре имеет вид

$$\Xi_n = \begin{Vmatrix} \sigma_{r_n}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\beta_n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon n}^2 \end{Vmatrix}. \qquad (9.3.35)$$

Матрица H операторов, связывающих значения оцениваемых параметров и измеряемых координат, в данном случае представляется в виде

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (9.3.36)$$

Каждая из выделенных пунктирными прямоугольниками пара элементов этой матрицы представляет собой оператор перехода от независимой измеряемой координаты к связанной с этой координатой паре оцениваемых параметров. Поэтому матрицу (36) можно представить в виде блочно-диагональной матрицы порядка 3×3

$$H = \begin{Vmatrix} H_r & 0 & 0 \\ 0 & H_\beta & 0 \\ 0 & 0 & H_\varepsilon \end{Vmatrix}. \qquad (9.3.37)$$

Каждый диагональный элемент этой матрицы имеет порядок 1 x 2.

Подставляя теперь полученные выражения для $\Psi_{n\text{э}}$, Ξ и H в общую формулу (9), после соответствующих преобразований получим блочнодиагональную матрицу:

$$\Psi_{z_n} = \begin{Vmatrix} \Psi_{r\,(n)} & O & O & I \\ O & \Psi_{\beta\,(n)} & 0 & \end{Vmatrix}, \qquad (9.3.38)$$

где диагональные блоки $\Psi_{U(n)}$ определяются по формулам

$$\Psi_{U\,in)} = \begin{Vmatrix} A_{U\,(n)} & g_{U\,(n)} \\ K_{U\,(n)} & T_0 K_{U\,(n)} \\ \dfrac{g_{U\,(n)}}{T_0 K_{U\,(n)}} & \dfrac{f_{U\,(n)}}{T_0^2 K_{U\,(n)}} \end{Vmatrix},$$

в которых $h_{U(n)}$, $g_{U(n)}$, $f_{U(n)}$, $K_{U(n)}$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам (17) для каждой координаты в отдельности.

Вектор сглаженных параметров по данным n замеров координат определяется по общей формуле (10). Входящий в эту формулу матричный коэффициент сглаживания имеет вид

$$\Psi_n H^T \Xi^{-1} = \begin{Vmatrix} \Psi_{r\,(n)} H_r^T w_{r_n} & 0 & 0 \\ O & \Psi_{\beta\,(n)} H_\beta^T w_{\beta_n} & 0 \\ O & O & \Psi_{\varepsilon\,(n)} H_\varepsilon^T w_{\varepsilon_n} \end{Vmatrix}. \qquad (9.3.39)$$

Вектор ошибок экстраполяции равен

$$(U_n - U_{n\text{э}}) = \begin{Vmatrix} r_n - \hat{r}_{n\text{э}} \\ \beta_n - \hat{\beta}_{n\text{э}} \\ \varepsilon_n - \hat{\varepsilon}_{n\text{э}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Delta\hat{r}_{n\text{э}} \\ \Delta\hat{\beta}_{n\text{э}} \\ \Delta\hat{\varepsilon}_{n\text{э}} \end{Vmatrix}. \qquad (9.3.40)$$

С учетом выражений (36) и (40), а также имея в виду, что

$$\Psi_{U\,(n)} H_U^T w_{U_n} = \begin{Vmatrix} \psi_{11\,(n)}\, w_{U(n)} \\ \psi_{21\,(n)}\, w_{U(n)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{Un} \\ \dfrac{B_{Un}}{T_0} \end{Vmatrix},$$

получим окончательно:

$$\hat{r}_n = \hat{r}_{n\text{э}} + A_{rn}\Delta\hat{r}_{n\text{э}}, \quad \hat{\dot{r}}_n = \hat{\dot{r}}_{n\text{э}} + \frac{B_{rn}}{T_0}\Delta\hat{r}$$

$$\hat{\beta}_n = \hat{\beta}_{n\text{э}} + A_{\beta n}\Delta\hat{\beta}_{n\text{э}}, \quad \hat{\dot{\beta}}_n = \hat{\dot{\beta}}_{n\text{э}} + \frac{B_{\beta n}}{T_0}\Delta\hat{\beta}_{n\text{э}}, \qquad (9.3.41)$$

$$\hat{\varepsilon}_n = \hat{\varepsilon}_{n\text{э}} + A_{\varepsilon n}\Delta\hat{\varepsilon}_{n\text{э}}, \quad \hat{\dot{\varepsilon}}_n = \hat{\dot{\varepsilon}}_{n\text{э}} + \frac{B_{\varepsilon n}}{T_0}\Delta\hat{\varepsilon}_{n\text{э}}.$$

Система уравнений (41) определяет оптимальный алгоритм сглаживания параметров баллистической траектории в сферической системе координат с началом в точке расположения РЛС. В этой системе коэффициенты сглаживания A_n и B_n по координатам r, β и ε являются несвязанными. Следовательно, с точки зрения фильтрации случайных ошибок сглаживание радиолокационных координат баллистической траектории можно производить раздельно.

Однако между параметрами баллистической траектории существует функциональная связь, определяемая дифференциальными уравне-

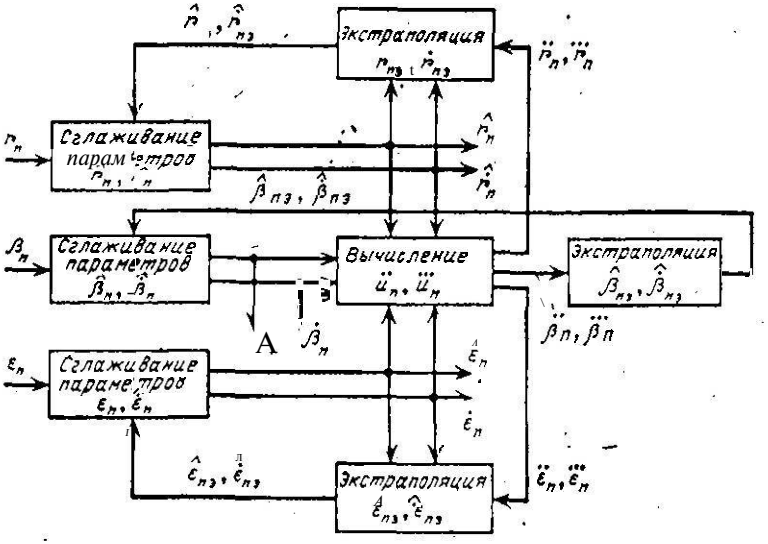


Рис. 9.3 Структурная схема алгоритма последовательного сглаживания параметров баллистической траектории.

ниями движения (6.4.5). Эта связь обусловливает функциональную зависимость между экстраполированными значениями параметров, входящих в систему уравнений сглаживания (41), и, следовательно, приводит к функциональной (динамической) связи сглаженных параметров траектории (рис. 9.3). Наличие динамической связи между параметрами баллистической траектории в сферической системе координат приводит к необходимости строить схему (алгоритм) совместного сглаживания этих параметров.

Рассмотрим теперь случай, когда оцениваемые параметры баллистической траектории представляются в прямоугольной системе координат, а сравнение измеренных и экстраполированных координат производится в сферической системе. Основные формульные соотношения алгоритма последовательного сглаживания при этом, естественно, остаются в силе, однако должны быть сделаны соответствующие преобразования.

Транспонированный вектор сглаженных параметров на предыдущем шаге имеет теперь вид $\hat{\theta}^{T}_{n-1} = \| \hat{x}_{n-1}, \hat{y}_{n-1}, \hat{z}_{n-1}, \hat{\dot{x}}_{n-1}, \hat{\dot{y}}_{n-1}, \hat{\dot{z}}_{n-1} \|$, а корреля-

ционная матрица ошибок оценки этих параметров содержит б X б неравных нулю элементов

$$\Psi_{n-1}=\begin{Vmatrix} \psi_{11\,(n-1)} & \psi_{12\,(n-1)} & \cdots & \psi_{16\,(n-1)} \\ \psi_{21\,(n-1)} & \psi_{22\,(n-1)} & \cdots & \psi_{26\,(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{61\,(n-1)} & \psi_{62\,(n-1)} & \cdots & \psi_{66\,(n-1)} \end{Vmatrix}.$$

Экстраполяция параметров, как и ранее, производится в соответствии с представлением траектории полиномами не выше 3-й степени. Корреляционная матрица ошибок оценки параметров экстраполируется по правилу

$$\Psi_{n\vartheta}=\Phi\Psi_{n-1}\Phi^{T},$$

где

$$\Phi=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Вектор измеренных значений координат и корреляционная матрица ошибок измерения, как и ранее, имеют вид

$$U_n=\begin{Vmatrix} r_n \\ \beta_n \\ \varepsilon_n \end{Vmatrix}, \qquad \Xi_n=\begin{Vmatrix} \sigma^2_{r_n} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\varepsilon_n} \end{Vmatrix}.$$

Особенностью рассматриваемого случая является то, что оператор соответствия измеряемых координат и оцениваемых параметров является нелинейным и не может быть представлен в матричном виде. Поэтому при расчете экстраполированных значений сферических координат по экстраполированным значениям прямоугольных координат используются нелинейные формулы:

$$\hat{r}_{n\vartheta}=\sqrt{\hat{x}^2_{n\vartheta}+\hat{y}^2_{n\vartheta}+\hat{z}^2_{n\vartheta}}$$

$$\beta_{n\vartheta}=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left|\dfrac{\hat{x}_{n\vartheta}}{\hat{y}_{n\vartheta}}\right|, & \hat{y}_{n\vartheta}>0, \quad \hat{x}_{n\vartheta}>0, \\ \pi-\operatorname{arctg}\left|\dfrac{\hat{x}_{n\vartheta}}{\hat{y}_{n\vartheta}}\right|, & \hat{y}_{n\vartheta}<0, \quad \hat{x}_{n\vartheta}>0, \\ \pi+\operatorname{arctg}\left|\dfrac{\hat{x}_{n\vartheta}}{\hat{y}_{n\vartheta}}\right|, & \hat{y}_{n\vartheta}<0, \quad \hat{x}_{n\vartheta}<0, \\ 2\pi-\operatorname{arctg}\left|\dfrac{\hat{x}_{n\vartheta}}{\hat{y}_{n\vartheta}}\right|, & \hat{y}_{n\vartheta}>0, \quad \hat{x}_{n\vartheta}<0. \end{cases}$$

$$\hat{\varepsilon}_{n\vartheta}=\operatorname{arctg}\frac{\hat{z}_{n\vartheta}}{\sqrt{\hat{x}^2_{n\vartheta}+\hat{y}^2_{n\vartheta}}},$$

а для пересчета элементов корреляционной матрицы ошибок используется линеаризованный оператор

$$\mathcal{H} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} & \wedge & \wedge & 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|_{\substack{x=\hat{x}_{n\vartheta} \\ y=\hat{y}_{n\vartheta} \\ z=\hat{z}_{n\vartheta}}}.$$

Оператор $\mathcal{H}$ можно также представить в виде

$$\mathcal{H} = \left\| \begin{matrix} \mathcal{H}_r^T \\ \mathcal{H}_\beta^T \\ \mathcal{H}_\varepsilon^T \end{matrix} \right\|,$$

где

$$\mathcal{H}_U^T = \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z} \quad 0 \; 0 \; 0 \right\|,$$

$$U = (r, \beta, \varepsilon).$$

В дальнейшем вычисление корреляционной матрицы Ψ_n производится обычным образом.

Матричный оператор сглаживания в данном случае имеет вид

$$\Psi_n \mathcal{H}^T \Xi^{-1} = \Psi_n \left\| \mathcal{H}_r \mathcal{H}_\beta \mathcal{H}_\varepsilon \right\| \left\| \begin{matrix} w_{r_n} & 0 & 0 \\ 0 & w_{\beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & w_{\varepsilon_n} \end{matrix} \right\|.$$

Поэтому вектор сглаженных параметров вычисляется по формуле

$$\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_{n\vartheta} + \Psi_n \left\| \mathcal{H}_r \mathcal{H}_\beta \mathcal{H}_\varepsilon \right\| \left\| \begin{matrix} w_{r_n} & 0 & 0 \\ 0 & w_{\beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & w_{\varepsilon_n} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} r_n - \hat{r}_{n\vartheta} \\ \beta_n - \hat{\beta}_{n\vartheta} \\ \varepsilon_n - \hat{\varepsilon}_{n\vartheta} \end{matrix} \right\|.$$

Элементарные преобразования позволяют получить следующее окончательное выражение, например, для $\hat{x}_n$:

$$\hat{x}_n = \hat{x}_{n\vartheta} + \frac{\Delta \hat{r}_{n\vartheta}}{\sigma^2_{r_n}} \alpha_r + \frac{\Delta \hat{\beta}_{n\vartheta}}{\sigma^2_{\beta_n}} \alpha_\beta + \frac{\Delta \hat{\varepsilon}_{n\vartheta}}{\sigma^2_{\varepsilon_n}} \alpha_\varepsilon,$$

где

$$\alpha_r = \psi_{11\,(n)} \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_{12\,(n)} \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_{13\,(n)} \frac{\partial r}{\partial z};$$

$$\alpha_\beta = \psi_{11\,(n)} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \psi_{12\,(n)} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \psi_{13\,(n)} \frac{\partial \beta}{\partial z};$$

$$\alpha_\varepsilon = \psi_{11\,(n)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \psi_{12\,(n)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \psi_{13\,(n)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}.$$

Аналогично для последней составляющей вектора параметров получаем

$$\hat{z}_n = \overset{t}{z}_{n\text{э}} + \frac{\Delta \hat{r}_{n\text{э}}}{\sigma^2_{r_n}} \quad \Delta \hat{\beta}_{n\text{э}} \quad \Delta \hat{\varepsilon}_{n\text{э}} \quad \varepsilon,$$

где

$$\varkappa_r = \psi_{61\,(n)} \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_{62\,(\text{л})} \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_{63\,(n)} \frac{\partial r}{\partial z};$$

$$\varkappa_\beta = \psi_{61\,(n)} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \psi_{62\,(n)} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \psi_{63\,(n)} \frac{\partial \beta}{\partial z};$$

$$\varkappa_\varepsilon = \psi_{61\,(n)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \psi_{62} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \psi_{63\,(n)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}.$$

Остальные составляющие вектора параметров находятся аналогично.

Полученные формулы показывают, что в рассматриваемом случае имеет место статистическая связь сглаженных параметров по всем координатам. Это существенным образом затрудняет процедуру получения оценок и приводит к повышению требований к вычислительным средствам.

9.3.6. Последовательное сглаживание параметров траектории при коррелированных ошибках измерения

Рассмотрим подход к решению задачи последовательного сглаживания параметров траектории при наличии корреляции в ошибках измерения, т. е. когда в выражении

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{H}\vartheta_n + \Delta \mathbf{U}_n$$

последовательность $\Delta \mathbf{U}_n$ представляет собой коррелированную случайную последовательность с известной корреляционной функцией.

Как известно [3], если корреляционная функция случайного процесса имеет вид

$$R_{\mathbf{U}}(k) = \sigma^2_{\mathbf{U}_n} \exp(-\alpha |k| T_0) = \sigma^2_{\mathbf{U}_n} \rho^{|k|},$$

то с помощью так называемого формирующего фильтра можно «отбелить» коррелированный процесс и представить его в виде (для дискретной последовательности отсчетов)

$$\Delta \mathbf{U}_{n+1} = \rho \Delta \mathbf{U}_n + \xi_n, \tag{9.3.42}$$

где $\rho \Delta \mathbf{U}_n$ — предсказуемая часть процесса; ξ_n — чисто случайная последовательность с равным нулю математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2_{\xi_n} = \sigma^2_{\mathbf{U}_n}(1 - \rho^2)$. Если входной сигнал l-мерный вектор, то вместо ρ в (42) будет матрица $\mathbf{P}$ коэффициентов корреляции ρ_l, а вместо $\sigma^2_{\xi_n}$ — диагональная матрица

$$\mathbf{\Xi}_n = \begin{Vmatrix} \sigma^2_{\xi_{n1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2_{\xi_{n2}} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \sigma^2_{\xi_{nl}} \end{Vmatrix}.$$

Наличие предсказуемой части позволяет обычным образом прогнозировать и сглаживать ошибки измерения. Поэтому для решения задачи сглаживания параметров в рассматриваемом случае используется прием, состоящий в расширении вектора оцениваемых параметров за счет включения в его состав вектора ошибок измерения. Расширенный вектор оцениваемых параметров записывается в виде (для n-го такта)

$$\vartheta^{\mathrm{T}}_{n(p)} = \| \theta_{n1} \dots \theta_{ns} \Delta U_{n1} \dots \Delta U_{nl} \| = \| \vartheta_n \vdots \Delta U_n \|.$$

Уравнение динамического состояния системы, связывающее между собой предыдущее и последующее значения расширенного вектора оцениваемых параметров, записывается теперь в виде

$$\vartheta_{n+1\,(p)} = F_{(p)}\, \vartheta_{n\,(p)} + \left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|,$$

где

$$F_{(p)} = \left\| \begin{matrix} F \vdots O \\ \dots\dots\dots \\ OIP \end{matrix} \right\|.$$

При таком представлении вектора оцениваемых параметров измеренные значения координат являются «точными», т. е. не содержат ошибок

где $H_{(p)} = \| H \vdots O \|$ — расширенная матрица, определяющая соответствие между измеренными координатами и оцениваемыми параметрами.

Процесс последовательного сглаживания расширенного вектора параметров состоит теперь в следующем:

1) экстраполяция параметров производится по формуле

$$\hat{\vartheta}_{n\text{э}\,(p)} = F_{(p)}\, \hat{\vartheta}_{n-1\,(p)},$$

2) корреляционная матрица ошибок экстраполяции рассчитывается по формуле*

$$\Psi_{n\text{э}\,(p)} = F_{(p)}\, \Psi_{n-1\,(p)}\, F^{\mathrm{T}}_{(p)} + \left\| \begin{matrix} O \vdots O \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \vdots \Xi_{n-1} \end{matrix} \right\|$$

3) корреляционная матрица ошибок оценки параметров по результатам n измерений

$$\Psi_{n\,(p)} = \Psi_{n\text{э}\,(p)} - \Psi_{n\text{э}(p)}\, H^{\mathrm{T}}_{(p)} \left(H_{(p)}\, \Psi_{n\text{э}\,(p)}\, H^{\mathrm{T}}_{(p)}\right)^{-1} H_{(p)}\, \Psi_{n\text{э}\,(p)},$$

4) вектор параметров после n измерений

$$\hat{\vartheta}_{n\,(p)} = \hat{\vartheta}_{n\text{э}(p)} + \Psi_{n\text{э}(p)}\, H_{(p)} \left(H_{(p)}\, \Psi_{n\text{э}\,(p)}\, H^{\mathrm{T}}_{(p)}\right)^{-1} \times \left(U_n - H_{(p)}\, F_{(p)}\, \vartheta_{n-1\,(p)}\right).$$

*) В дальнейшем оператор Ф всюду считается одинаковым с оператором F.

Недостатком рассмотренного метода является усложнение расчетов из-за увеличения размерности вектора оцениваемых параметров, причем сглаженные значения ошибок измерения обычно интереса не представляют.

Возможен другой подход к решению поставленной задачи, позволяющий обойтись без расширения вектора оцениваемых параметров [20]. Для этого с помощью матриц F и Ψ сначала определяется линейная комбинация двух последних значений вектора измерений U_n и U_{n-1}, не содержащая ΔU. Такой комбинацией может быть следующая

$$\zeta_{n-1} = U_n - \Psi U_{n-1} = (HF - \Psi H)\,\vartheta_{n-1} + \xi_{n-1} = H'\,\vartheta_{n-1} + \xi_{n-1},$$

где $H' = (HF - \Psi H)$.

Последовательные значения ζ_l можно считать «измеренными» значениями некоторого вектора, который содержит только чисто случайную составляющую ошибок ζ_l и задача теперь может быть решена применением обычных формул последовательного сглаживания.

9.4. Последовательное сглаживание параметров траектории маневрирующей цели

В реальных условиях детерминированная модель траектории цели не является адекватной реальному процессу ее полета, так как, во-первых, возможно преднамеренное маневрирование цели, а во-вторых, неизбежны случайные отклонения цели от заданной траектории вследствие непредвиденных факторов, связанных с неравномерной плотностью среды, неточностью системы управления и т. д., которые можно считать непреднамеренным маневрированием. Неучет маневра и возмущений приводит к ухудшению точностных характеристик сглаживания параметров траектории и в конечном счете может привести к срыву сопровождения.

В предвидении действия на цель возмущающих сил уравнение ее динамического состояния записывается в виде

$$\vartheta_{l+1} = F\vartheta_l + \Delta\vartheta_l$$

где $\Delta\vartheta_l$ — s-мерный случайный вектор возмущений параметров траектории.

В задачу настоящего параграфа входит рассмотрение методов учета возмущений в алгоритме последовательного сглаживания параметров маневрирующей цели.

9.4.1. Принципы построения формульной схемы алгоритма последовательного сглаживания параметров маневрирующей цели

В зависимости от точностных характеристик РЛС и предполагаемого характера маневрирования цели возможны, по крайней мере, три варианта построения формульной схемы алгоритма последовательного сглаживания параметров.

1. Предполагается, что цель имеет ограниченные возможности маневра (например, имеют место только случайные непреднамеренные возмущения траектории). Маневрирование рассматривается как стационарный случайный процесс с известными статистическими характеристиками, которые задаются, например, следующей моделью:

а) выборочные значения вектора интенсивности маневра $g_м$ представляют собой нормальную случайную последовательность с независимыми во времени (от измерения к измерению) и в пространстве компонентами;

б) математическое ожидание вектора интенсивности маневра

$$M[g_м] = 0,$$

где, например, в сферической системе координат РЛС

$$g_м^\tau = \| g_{мr}\, g_{мβ}\, g_{мε} \|;$$

О — нулевой вектор (вектор, составленный из нулей);

в) корреляционная матрица интенсивности маневра имеет вид

$$\Psi_м = \left\| \begin{matrix} \sigma^2_{мr} & O & O \\ 0 & \sigma^2_{мβ} & O \\ 0 & O & \sigma^2_{мε} \end{matrix} \right\|. \qquad (9.4.1)$$

Неравные нулю элементы этой матрицы представляют собой совокупность априорных сведений об интенсивности маневра и могут быть рассчитаны заранее на основе изучения характера возможных возмущающих сил, действующих на траектории сопровождаемых целей.

Учет в алгоритме сглаживания параметров возможного маневра цели сводится в данном случае к загрублению сглаживающего фильтра. Для этого пересчет корреляционной матрицы ошибок оценки параметров в экстраполированную точку производится по формуле

$$\Psi_{nэ} = F\Psi_{n-1}F^\tau + B\Psi_м B^\tau \qquad (9.4.2)$$

где B — матрица $s \times l$, имеющая вид

$$B = \left\| \begin{matrix} \tau_э^2/2 & O & O \\ V & O & O \\ O & \tau_э^2/2 & O \\ O & \tau_э & 0 \\ O & 0 & \tau_э^2/2 \\ O & O & \tau_э \end{matrix} \right\|; \qquad (9.4.3)$$

$\tau_э$ — период времени экстраполяции параметров.

Другие формулы алгоритма последовательного сглаживания остаются такими же, как и для случая неманеврирующей цели.

2. Предполагается, что цель имеет хорошие маневренные свойства. Маневрирование рассматривается как марковский процесс. Интенсивность маневра оценивается в процессе сглаживания параметров траектории.

В этом случае при построении формульной схемы алгоритма применяется рассмотренный в конце предыдущего параграфа прием, состоящий в расширении вектора сглаживаемых параметров за счет составляющих вектора интенсивности маневра.

Если известны коэффициенты корреляции входного процесса по каждой из координат, то для вектора интенсивности маневра можно записать рекуррентное соотношение

$$g_{м,i+1} = P g_{мi} + \Delta g_{мi}, \tag{9.4.4}$$

где $\Delta g_{мi}$ — чисто случайная последовательность с корреляционной матрицей

$$\Psi_{м} = \begin{Vmatrix} \sigma^2_{мr}(1-\rho_r^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{м\beta}(1-\rho_\beta^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{мe}(1-\rho_e^2) \end{Vmatrix}; \tag{9.4.5}$$

P — диагональная матрица, составленная из коэффициентов корреляции ρ_r, ρ_β, ρ_e. Расширенный вектор оцениваемых параметров имеет вид (после транспонирования)

$$\hat{\vartheta}^T_{n(p)} = \| \hat{r}_n \hat{\dot{r}}_n \hat{g}_{мrn} \hat{\beta}_n \hat{\dot{\beta}}_n \hat{g}_{м\beta n} \hat{e}_n \hat{\dot{e}}_n \hat{g}_{мen} \|.$$

Динамическая связь между параметрами траектории записывается теперь в виде

$$\vartheta_{n+1(P)} = F_{(p)} \text{frn(P)} + G(P) 4gn. \tag{9.4.6}$$

где

$$F_{(p)} = \begin{Vmatrix} F_{r(p)} & 0 & 0 \\ 0 & F_{\beta(p)} & 0 \\ 0\,1 & 0 & F_{e(p)} \end{Vmatrix}, \quad F_{U(p)} = \begin{Vmatrix} 1 & \tau_a & 0 \\ 0 & 1 & I \\ 0 & 0 & Pu \end{Vmatrix};$$

$$U = (r, \beta, e);$$

$$G_{(p)} = \begin{Vmatrix} G_{r(p)} \\ G_{\beta(p)} \\ G_{e(P)} \end{Vmatrix}; \quad G_{r(p)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{\beta(p)\,as} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad G_{e(p)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для расширенного вектора оцениваемых параметров экстраполяция производится так же, как и в случае неманеврирующей цели, т. е. по формуле

$$\hat{\vartheta}_{nэ(p)} = F_{(p)} \vartheta_{n-1,(p)}, \tag{9.4.7}$$

а расширенная корреляционная матрица ошибок экстраполяции параметров вычисляется по формуле

$$\Psi_{nэ(p)} = F_{(p)} \Psi_{n-1,(p)} F^T_F + B \Psi_м B^T, \tag{9.4.8}$$

где B — матрица, определяемая выражением (3).

В дальнейшем реализуется формульная схема алгоритма последовательного сглаживания для расширенного вектора параметров.

3. Предполагается, что за время наблюдения цель способна совершить только разовый маневр, состоящий, например, в переходе с одной детерминированной траектории (орбиты) на другую. В этом случае траектория цели разбивается на три участка:

1) участок до начала маневра,
2) участок во время маневра,
3) участок после окончания маневра.

В соответствии с таким разбиением вектор интенсивности маневра представляется в виде

$$g_м(t_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } t_i < t_{нм}, \\ g_{мi} & \text{при } t_{нм} \leqslant t_i \leqslant t_{км}, \\ 0 & \text{при } t_i > t_{км}, \end{cases}$$

где $t_{нм}$ — момент времени начала маневра; $t_{км}$ — момент времени конца маневра.

Как вектор ускорения маневра, так и моменты времени начала и конца маневра подлежат в этом случае статистической оценке по совокупности входных сигналов (измеряемых координат). Эта задача возлагается на специальный алгоритм, который называется алгоритмом обнаружения маневра (АОМ).

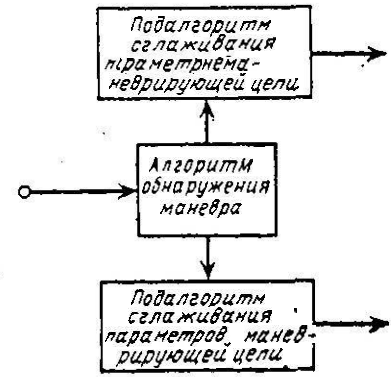


Рис. 9.4. Функциональная схема алгоритма сглаживания параметров маневрирующей цели

Алгоритм сглаживания параметров маневрирующей цели Должен включать теперь следующие составляющие (рис. 9.4):

— подалгоритм сглаживания параметров на участке необнаруженного маневра, в соответствии с гипотезой о детерминированном (или слабо возмущенном) движении цели;

— подалгоритм сглаживания параметров на участке обнаруженного маневра с учетом оценок характеристик маневра (по времени и интенсивности);

— алгоритм обнаружения маневра, на который одновременно может возлагаться задача оценки характеристик маневра.

В совокупности рассмотренные составляющие алгоритмы образуют переключающийся алгоритм (переключающийся фильтр) с управлением переключением на основе входного сигнала. Этот алгоритм функционирует следующим образом:

— до обнаружения начала маневра (и после обнаружения конца маневра) реализуется формульная схема алгоритма последовательного сглаживания параметров детерминированной траектории;

— в момент $t_{он}$ обнаружения начала маневра корректируются экстраполированные значения параметров с целью исключения дина-

мических ошибок, обусловленных запаздыванием $\tau_{зн}$ в обнаружении начала маневра;

— на участке обнаруженного маневра экстраполяция параметров производится с учетом интенсивности маневра;

— в момент $t_{0к}$ обнаружения конца маневра снова производится коррекция экстраполированных параметров с целью исключения динамических ошибок, обусловленных запаздыванием $\tau_{зк}$ в обнаружении конца маневра.

Таким образом на участке обнаруженного маневра экстраполяция параметров производится по формуле

$$\hat{\vartheta}_{nэ} = F\hat{\vartheta}_{n-1} + E \qquad (9.4.9)$$

где $g_{мп}$ — оценка вектора интенсивности маневра

$$B_n = \begin{Vmatrix} \tau_n^2/2 & 0 & 0 \\ \tau_n & 0 & 0 \\ 0 & \tau_n^2/2 & 0 \\ 0 & \tau_n & 0 \\ 0 & 0 & \tau_n^2/2 \\ 0 & 0 & \tau_n \end{Vmatrix}, \qquad (9.4.9а)$$

$$\tau_n = \begin{cases} \tau_{зн} & \text{при } t_n = t_{0н}, \\ \tau_в & \text{при } t_{0н} < t_n < t_{0к}, \\ \tau_{зк} & \text{при } t_n = t_{0к}. \end{cases} \qquad (9.4.9б)$$

Кроме вектора экстраполированных параметров уточнению подлежит также корреляционная матрица ошибок экстраполяции.

Абсолютная ошибка оценки вектора скорректированных экстраполированных параметров определяется ошибками сглаживания параметров на предыдущем шаге обработки, ошибками оценки интенсивности маневра, а также ошибками оценки времени запаздывания в обнаружении начала и конца маневра. При этом, если верна гипотеза о малости ошибок и допустимости линеаризации соответствующих функций в окрестности истинного значения параметров, то выражение для абсолютной ошибки имеет вид

$$\Delta\hat{\vartheta}_n^* = F_n \Delta\hat{\vartheta}_{n-1} + B_n \Delta g_м + D_n \Delta\tau_n, \qquad (9.4.10)$$

где $\Delta g_м$ — вектор абсолютных ошибок оценки интенсивности маневра; $\Delta\tau_n$ — ошибка в оценке времени запаздывания, равная

$$\Delta\tau_n = \begin{cases} \Delta\tau_{зн} & \text{при } t = t_{0н}, \\ 0 & \text{при } t_{0п} < t < t_{0к}, \\ \Delta\tau_{зк} & \text{при } t = t_{0к}; \end{cases} \qquad (9.4.11)$$

$D_n = \partial(B_n \Delta g_м)/\partial\tau_n$ — матричный оператор пересчета ошибок в оценке времени запаздывания в ошибки оценки экстраполированных параметров.

Корреляционная матрица ошибок экстраполяции получается теперь по общему правилу

$$\Psi^{*}_{n\text{э}} = M\left[\Delta\hat{\vartheta}^{*}_{n\text{э}}\,\Delta\vartheta^{*T}_{n\text{э}}\right]. \qquad (9.4.12)$$

Если далее принять, что ошибки сглаживания параметров $\Delta\hat{\vartheta}_{n-1}$, ошибки оценки интенсивности маневра $\Delta g_{\text{м}}$ и ошибки в оценке времени

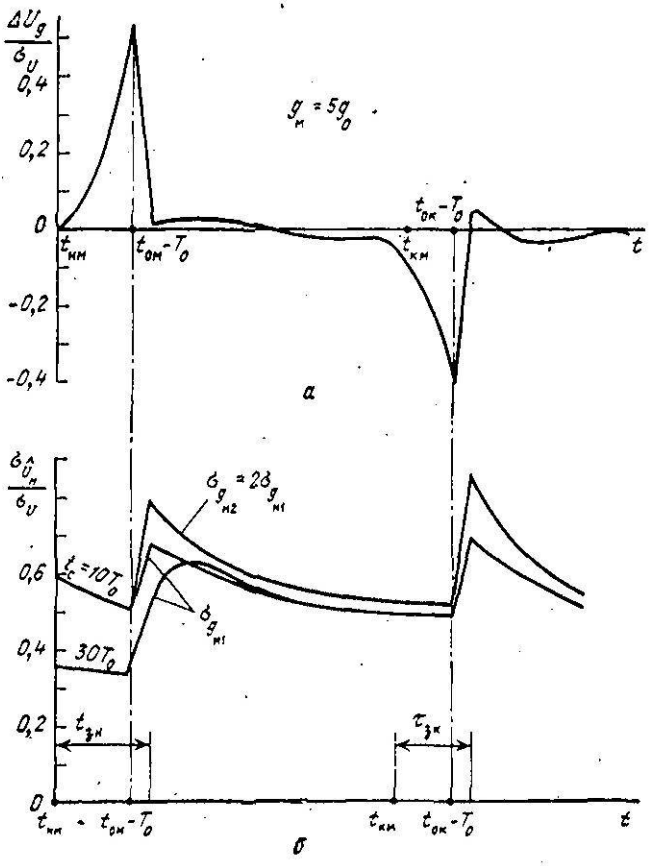


Рис. 9.5. Графики относительных значений ошибок экстраполяции параметров: *а* — динамические ошибки; *б* — случайные ошибки.

запаздывания обнаружения начала и конца маневра $\Delta\tau_n$ взаимно независимы, то выполнение операции (12) с учетом (10) дает следующий окончательный результат:

$$\Psi^{*}_{n\text{э}} = F\Psi_{n-1}F^{T} + B_n\Psi_{\text{м}}B_n^{T} + D_n\sigma^2_{\tau_n}D_n^{T}. \qquad (9.4.13)$$

На рис. 9.5 изображены графики относительных значений ошибок экстраполяции одной координаты при применении переключающегося алгоритма сглаживания параметров. График на рис. 9.5, *а* характери-

зует изменение относительной динамической ошибки экстраполяции при интенсивности маневра $g_м = 5\,g_0$. Хорошо видно резкое возрастание динамической ошибки на участке от момента начала маневра до момента обнаружения начала маневра, а также на участке от момента окончания маневра до момента обнаружения этого события. После коррекции динамические ошибки практически равны нулю. Графики на рис. 9.5, *б* характеризуют изменение относительных среднеквадратичных значений случайных ошибок экстраполяции при двух значениях среднеквадратичных ошибок оценки интенсивности маневра (ошибки оценки времени запаздывания в обнаружении начала и конца маневра в данном случае не учитывались) и двух интервалах времени сопровождения цели $t_c = 10\ T_0$ и $30\ T_0$ до начала маневра. По этим графикам можно проследить влияние переключения на качество фильтрации случайных ошибок.

Приведенные графики и более подробные расчеты позволяют сделать вывод о целесообразности применения переключающегося алгоритма сглаживания параметров маневрирующей цели, если маневр одноразовый (или, по крайней мере, двух-, трехразовый) и точностные характеристики РЛС позволяют с достаточной надежностью обнаруживать этот маневр.

9.4.2. Пример формульно-логической схемы переключающегося алгоритма последовательного сглаживания параметров маневрирующей цели

При построении примера формульно-логической схемы переключающегося алгоритма последовательного сглаживания параметров маневрирующей цели за основу взята следующая последовательность операций.

1. Очередной цикл работы алгоритма начинается с получения результатов последнего измерения координат.

2. Далее, независимо от метода обнаружения маневра, производится экстраполяция параметров и корреляционной матрицы ошибок оценки этих параметров на момент последнего измерения по обычным формулам, полученным в предыдущем параграфе,

3. По результатам обнаружения маневра, кроме оценок интенсивности маневра и времени задержки в обнаружении маневра в момент времени t_n, выдаются следующие сигналы:

00 — маневр отсутствует (и на предыдущем шаге тоже отсутствовал),

01 — маневр обнаружен в момент времени t_n,

11 — маневр продолжается,

10 — в момент времени t_n зафиксирован конец маневра.

4. При получении на выходе АОМ сигнала 00 продолжается уточнение параметров траектории по обычным формулам.

5. При получении на выходе АОМ сигнала 01 уточняются экстраполированные параметры и соответствующая корреляционная матрица ошибок с учетом времени задержки в обнаружении начала маневра $\tau_{он}$.

6. При получении на выходе АОМ сигнала 11 уточнение экстраполированных параметров и корреляционной матрицы ошибок оценки этих параметров производится с учетом интервала времени экстраполяции $\tau_э$.

7. При получении на выходе АОМ сигнала 10 уточнение экстраполированных параметров и корреляционной матрицы ошибок оценки этих параметров производится с учетом времени задержки в обнаружении конца маневра $\tau_{ок}$.

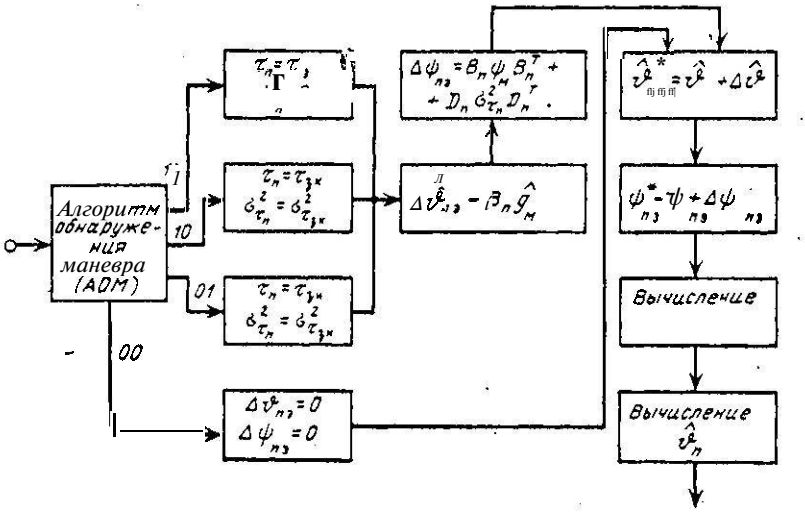


Рис. 9.6. Формульно-логическая схема переключающегося алгоритма сглаживания параметров маневрирующей цели.

8. В дальнейшем реализуется общая часть алгоритма, состоящая в уточнении оценок и корреляционной матрицы ошибок этих оценок по обычным формулам последовательного сглаживания.

Рассмотренная последовательность операций алгоритма иллюстрируется на рис. 9.6.

Формульная схема рассматриваемого алгоритма приводится ниже.

Пусть, как и ранее, результаты сглаживания на предыдущем $(n-1)$-м шаге представлены в виде (в сферической системе координат):

— транспонированный вектор сглаженных значений параметров

$$\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}_{n-1} = \| \hat{r}_{n-1},\ \hat{\dot{r}}_{n-1},\ \hat{\beta}_{n-1},\ \hat{\dot{\beta}}_{n-1},\ \hat{\varepsilon}_{n-1},\ \hat{\dot{\varepsilon}}_{n-1} \|,$$

— корреляционная матрица ошибок оценки параметров

$$\Psi_{n-1} = \left\| \begin{matrix} \Psi_{r\,(n-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{\beta(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{\varepsilon(n-1)} \end{matrix} \right\|$$

где

$$\Psi_{\mathrm{U}\,(n-1)} = \left\| \begin{matrix} a_{\mathrm{U}(n-1)} & b_{\mathrm{U}(n-1)} \\ b_{\mathrm{U}(n-1)} & c_{\mathrm{U}(n-1)} \end{matrix} \right\|, \quad \mathrm{U} = (r, \beta, \varepsilon).$$

Измеренные значения координат на п-м шаге характеризуются вектором $U_n^T = \| r_n \beta_n \varepsilon_n \|$ и матрицей ошибок

$$\Sigma_n = \left\| \begin{matrix} \sigma_{r_n}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\beta_n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{matrix} \right\|.$$

Экстраполяция параметров производится по формуле

$$\hat{}\qquad\qquad \hat{}$$

а расчет корреляционной матрицы ошибок — по формуле

Диагональные блоки этой матрицы запишем в виде

$$\Psi_{U n\text{э}} = \left\| \begin{matrix} a_{U n\text{э}} & b_{U n\text{э}} \\ b_{U n\text{э}} & c_{U n\text{э}} \end{matrix} \right\|$$

При обнаружении начала маневра реализуется алгоритм расчета поправок к экстраполированным значениям параметров

$$\Delta\hat{\vartheta}_{n\text{э}} = B_n \hat{g}_{\text{м}},$$

где B_n — вычисляется по формуле (9а) при $\tau_n = \tau_{\text{зн}}$ и алгоритм расчета поправок к корреляционной матрице ошибок — по формуле

$$\Delta\Psi_{n\text{э}} = B_n \Psi_{\text{м}} B_n^T + D_n \sigma_{\tau_{\text{вн}}}^2 D_n^T = \left\| \begin{matrix} \Delta\Psi_{n\text{э}} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\Psi_{\beta n\text{э}} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\Psi_{\varepsilon n\text{э}} \end{matrix} \right\|.$$

Диагональные элементы матрицы поправок можно записать в виде матрицы

$$\Delta\Psi_{U n\text{э}} = \left\| \begin{matrix} \Delta a_{U n\text{э}} & \Delta b_{U n\text{э}} \\ \Delta b_{U n\text{э}} & \Delta c_{U n\text{э}} \end{matrix} \right\|.$$

Значения элементов этой матрицы находятся в рассматриваемом случае по формулам:

$$\Delta a_{U\,n\text{э}} = \frac{1}{4} \sigma_{\text{м}U}^2 \tau_{\text{зн}}^4 + \hat{g}_{\text{м}U}^2 \tau_{\text{зн}}^2 \sigma_{\tau_{\text{вн}}}^2,$$

$$\Delta b_{U n\text{э}} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{м}U}^2 \tau_{\text{зн}}^3 + \hat{g}_{\text{м}U}^2 \tau_{\text{вн}} \sigma_{\tau_{\text{вн}}}^2,$$

$$\Delta c_{U n\text{э}} = \sigma_{\text{м}U}^2 \tau_{\text{зн}}^2 + \hat{g}_{\text{м}U}^2 \sigma_{\tau_{\text{вн}}}^2.$$

В дальнейшем определяются скорректированные значения вектора экстраполированных параметров

$$\hat{\vartheta}_{n\text{э}}^{*} = \hat{\vartheta}_{n\text{э}} + \Delta\hat{\vartheta}_{n\text{э}}$$

и корреляционной матрицы ошибок экстраполяции

$$\Psi^*_{n\text{э}} = \Psi_{n\text{э}} + \Delta\Psi_{n\text{э}}.$$

При расчете поправок на других участках маневра (обозначаемых кратко признаками 11 и 10) различными будут только значения τ_n, выбираемые в соответствии с выражением (9б). Кроме этого необходимо иметь в виду, что на участке обнаруженного маневра (признак маневра 11) $\sigma^2_{\dot{U}_n} = 0$.

Вычисление корреляционной матрицы ошибок оценки параметров производится далее в соответствии с общей формулой (13). После соответствующих преобразований формула для расчета диагональных блоков матрицы сводится к виду

$$\Psi^*_{\dot{U}n} = \frac{1}{1 + w_{\dot{U}n} a^*_{\dot{U}n\text{э}}} \begin{Vmatrix} a^*_{\dot{U}n\text{э}} & b^*_{\dot{U}n\text{э}} \\ b^*_{\dot{U}n\text{э}} & c^*_{\dot{U}n\text{э}} - w_{\dot{U}n}(b^2_{\dot{U}n\text{э}} - a_{\dot{U}n\text{э}} c_{\dot{U}n\text{э}}) \end{Vmatrix},$$

где $w_{\dot{U}n} = 1/\sigma^2_{\dot{U}n}$.

Коэффициенты сглаживания вычисляются по формулам

$$\frac{\quad n}{(1 + w_{\dot{U}n} a^*_{\dot{U}n\text{э}})},$$

а сглаженные параметры — по формулам

$$\hat{U}^*_n = \hat{U}^*_{n\text{э}} + A^*_n(U_n - \hat{U}^*_{n\text{э}}), \quad \hat{\dot{U}}^*_n = \hat{\dot{U}}^*_{n\text{э}} + B^*_n(U_n - \hat{U}^*_{n\text{э}}).$$

При отсутствии маневра формулы сглаживания остаются такими же, но добавки $\Delta\hat{\vartheta}_{n\text{э}}$ и $\Delta\Psi_{n\text{э}}$ равны нулю.

9.5. Обнаружение скачка параметров траектории сопровождаемой цели. (Обнаружение маневра цели)

В данном параграфе рассматривается случай, когда вектор параметров траектории испытывает возмущение типа скачка под действием вектора дополнительного ускорения $g_м(t)$.

Не равный нулю вектор $g_м(t)$ появляется в непредвиденный для наблюдателя (системы обработки) момент времени и существует в течение интервала времени $t_м$, после чего его действие прекращается. На интервале $t_м$ силы, вызвавшие появление вектора $g_м(t)$ и сам этот вектор, остаются неизменными.

Наблюдаемый процесс в дискретные моменты времени t_l представляется, как и раньше, в виде

$$U_l = H\vartheta_l + \Delta U_l.$$

На основе выборки наблюденных случайных величин, наряду с другими задачами, ставится задача выявления (обнаружения) факта возникновения скачка параметров, обусловленного дополнительным ускорением $g_м(t)$, а также факта прекращения действия этого ускорения.

Для решения задач обнаружения начала и конца маневра могут быть использованы различные статистические методы, в основе которых лежат идеи проверки гипотез, аналогично тому, как ставится и решается задача обнаружения случайных сигналов в помехах.

Очевидно для обнаружения маневра целесообразно следить за таким параметром (входным сигналом), который при отсутствии дополнительного ускорения остается постоянным, а. при его наличии изменяется достаточно интенсивно по известному заранее закону. Таким параметром может быть, например, курсовой угол цели — самолета, осуществляющего на большей части пути прямолинейный полет.

Признаком невозмущенного движения космической цели является постоянство фокального параметра p и эксцентриситета e ее эллиптической орбиты.

В качестве исходного параметра для обнаружения маневра могут быть использованы также абсолютные значения рассогласований между измеренными и экстраполированными значениями наблюденных координат, вычисляемые в процессе сглаживания параметров траектории (см. § 9.3).

9,5.1. Применение методов оптимальной нелинейной фильтрации для обнаружения маневра космической цели (КЦ) [21]

Задача обнаружения маневра КЦ ставится следующим образом. Пусть изменение закона движения КЦ состоит в том, что, начиная с неизвестного для системы обработки момента времени t_i и до момента t_j, скорость ее движения получает дополнительное ускорение $g_м$, в результате которого происходит сход КЦ с первоначальной орбиты. Интервал времени $t_j - t_i = t_м$ называется длительностью маневра. Так как в каждом конкретном случае длительность маневра неизвестна, вводится понятие средней длительности маневра $\bar{t}_м$, которая может быть найдена заранее, в процессе анализа предполагаемых или возможных ситуаций, исходя из технических или тактических соображений.

Предполагается, что изменение скорости КЦ осуществляется путем приложения мгновенного тормозящего (ускоряющего) импульса силы. В дальнейшем эта сила остается постоянной в течение всего маневра. Следовательно, и приращение ускорения на участке маневра будет постоянной величиной.

Алгоритм обнаружения маневра предназначается, например, для выявления скачка скорости изменения фокального параметра p орбиты КЦ. Поэтому в процессе формирования входного сигнала осуществляется наблюдение за величиной фокального параметра в каждом цикле измерения; вычисление фокального параметра производится по наблюденным значениям координат. Процесс вычисления p организован так, что последовательность ошибок $\{\Delta p_i\}$ является некоррелированной числовой последовательностью.

В дальнейшем для простоты принимается, что алгоритм обнаружения маневра служит только для выявления факта появления скачка

скорости изменения фокального параметра КЦ от значения 0 при отсутствии маневра к значению 1 при его наличии, а также для выявления факта обратного перехода (от значения 1 к значению 0) после прекращения маневра. Величину же скорости изменения фокального параметра ($p_м$) на участке маневра будем считать априори известной. В этом случае процесс изменения $\dot{p}$ можно рассматривать как простую цепь Маркова с двумя возможными состояниями: 0 и 1. Матрица переходных вероятностей, этой цепи имеет вид

$$\Pi_{\dot{p}} = \left\| \begin{matrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \end{matrix} \right\|. \qquad (9.5.1)$$

Матрица $\Pi_{\dot{p}}$ характеризует априорную информацию о маневре и должна быть вычислена заранее. Для приближенного вычисления элементов этой матрицы можно поступить следующим образом.

Пусть известно (получено, например, путем моделирования обстановки в зоне обзора РЛС) среднее время наблюдения $\bar{t}_{набл}$ КЦ в зоне обзора РЛС. Кроме того, считаем известными среднее время маневра $\bar{t}_м$ и среднее время $\bar{t}_0$ между двумя очередными измерениями р. Тогда указанные выше элементы матрицы переходных вероятностей можно вычислить по формулам:

$$\pi_{01} = \bar{t}_0/(\bar{t}_{набл} - \bar{t}_м), \quad \pi_{00} = 1 - \pi_{01},$$
$$\pi_{10} = \bar{t}_0/\bar{t}_м, \quad \pi_{11} = 1 - \pi_{10}. \qquad (9.5.2)$$

Для вычисления апостериорной плотности вероятности наличия скачка скорости изменения фокального параметра после очередного n-го цикла наблюдения можно теперь воспользоваться рекуррентным уравнением (2.15), которое в данном случае запишется в виде

$$w(1 \mid \mathbf{p}) = \frac{F_1(n)}{\quad}, \qquad (9.5.3)$$

где

$$w(1 \mid \mathbf{p}_n) = w(\dot{p} = 1 \mid p_1, p_2, \ldots p_n);$$
$$F_0(n) = w(0 \mid \mathbf{p}_{n-1})\, W(p_n, \dot{p}_n = 0 \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 0) +$$
$$+ w(1 \mid \mathbf{p}_{n-1})\, W(p_n, \dot{p}_n = 0 \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 1);$$
$$F_1(n) = w(0 \mid \mathbf{p}_{n-1})\, W(p_n, \dot{p}_n = 1 \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 0) +$$
$$+ w(1 \mid \mathbf{p}_{n-1})\, W(p_n, \dot{p}_n = 1 \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 1);$$

$W(p_n, \dot{P}n = j \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 0$ — плотность вероятности перехода рассматриваемого двумерного условного марковского процесса (p ṗ) из состояния $(p_{n-1}\ \dot{p}_{n-1} = i)$ в состояние $(p_n, \dot{p}_n = j)$ за один шаг.

Плотность вероятности перехода можно представить в виде

$$W(p_n, \dot{p}_n = j \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = i) =$$
$$= w(\dot{p}_n = j \mid \dot{p}_{n-1} = 0\, w(p_n \mid p_{n-1}, \dot{P}n = j, \dot{p}_{n-1} = i), \qquad (9.5.4)$$

где $w(\dot{p}_n = j | \dot{p}_{n-1} = 0 = \pi_{ij}$ — априорная вероятность получения в n-цикле приращения скорости j, при условии, что в $n-1$-м цикле это приращение было i $(i, j = 0, 1)$,

$$w(p_n | p_{n-1}, \dot{p}_n = j, \dot{p}_{n-1} = i) \approx w(p_n | \dot{p}_n = j, \dot{p}_{n-1} = i)$$

— условная плотность вероятности наблюденного значения p_n при наличии приращения скорости параметра от $p_{n-1} = i$ до $p_n = j$.

Конкретные выражения для плотности вероятности перехода записываются обычно исходя из предположения о нормальном законе распределения наблюдаемых значений параметра. Необходимо иметь также в виду, что эти выражения будут различными в зависимости от того, известны или нет априорные данные о характере изменения параметра на участке маневра.

Для рассматриваемого случая при линейном изменении параметра на участке маневра, плотности вероятности перехода определяются выражениями:

$$\begin{gathered}
W(p_n, \dot{p}_n = 0 \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 0) = \pi_{00}\, c \exp[-(p_n - \hat{p}_{n-1})^2/2\sigma_n^2], \\
W(p_n, \dot{p}_n = 1 \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 0) = \\
= \pi_{01}\, c \exp[-(p_n - \hat{p}_{n-1} - 0{,}5\, \dot{p}_M \tau_n)^2/2\sigma_n^2], \\
W(p_n, \dot{p}_n = 0 \mid p_{n-1}\, \dot{p}_{n-1} = 1) = \\
= \pi_{10}\, c \exp[-(p_n - \hat{p}_{n-1} + 0{,}5\, \dot{p}_M \tau_n)^2/2\sigma_n^2], \\
W(p_n, \dot{p}_n = 1 \mid p_{n-1}, \dot{p}_{n-1} = 1) = \\
= \pi_{11}\, c \exp[-(p_n - \hat{p}_{n-1} - \dot{p}_M \tau_n)^2/2\sigma_n^2],
\end{gathered} \tag{9.5.5}$$

где

$$c = (2\pi)^{-1/2}\, \sigma_n^{-1}; \quad \tau_n = t_n - t_{n-1}; \quad \sigma_n^2 = \sigma_{p_n}^2 + \sigma_{p_{n-1}}^2;$$

$\hat{p}_{n-1}$ — сглаженное значение фокального параметра по результатам $n-1$ наблюдения.

Сглаживание параметра p в процессе вычисления апостериорной плотности $w(1|\mathbf{p}_n)$ должно производиться последовательно (рекуррентно). Однако желательно, чтобы память сглаживающего фильтра была ограниченной и не слишком большой. С этой точки зрения наиболее подходящими являются формулы последовательного сглаживания при соответствующем подборе постоянного коэффициента сглаживания A_n.

При записи выражений (8) учитывалось, что скорость изменения параметра на участке маневра $\dot{p}_M$ является известной величиной. Кроме того, принято, что переходы параметра от значения 0 к значению 1, и наоборот, происходит в середине интервала τ_n между предыдущим и последующим моментами измерения. Эта предпосылка учтена введением коэффициента 0,5. перед соответствующими слагаемыми под знаком экспоненты.

На рис. 9.7 приведены результаты моделирования рассматриваемого алгоритма вычисления апостериорной плотности вероятности наличия скачка параметра p на основе наблюдения за текущими значениями этого параметра.

При моделировании приняты следующие исходные данные:

— скорость изменения параметра на участке маневра $\dot{p}_м = 140$ *км/сек*,

— длительность маневра $t_м = 10$ *сек*,

— априорные данные о вероятности маневра характеризуются матрицей

$$\Pi_p = \begin{Vmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{Vmatrix},$$

— среднеквадратическая ошибка расчета p равна: 50, 100, 150, 200 *км*,

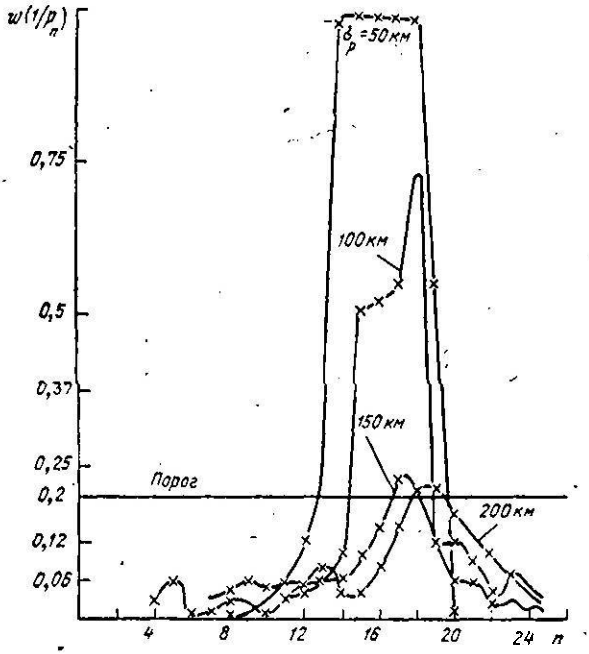


Рис. 9.7. Апостериорная вероятность наличия скачка параметра по данным моделирования.

Из приведенных на рис. 9.7 зависимостей для $w(1|p_n)$ следует, что как амплитуда, так и форма пика апостериорной плотности вероятности в области маневра в сильной степени зависят от первичных ошибок расчета параметра. Это обстоятельство является существенным при использовании рассматриваемых кривых для принятия решения об обнаружении начала и конца маневра.

Очевидно, для принятия решения об обнаружении маневра надо, чтобы $w\,(1|p_n)$ достигла или превысила соответствующим образом подобранный порог X. Величина порога обычно выбирается постоянной, в зависимости от заданной вероятности ложного обнаружения маневра. Аналитическое определение этого порога является чрезвычайно трудным, а полученные результаты требуют уточнения при моделировании. В частности, для рассматриваемого случая при заданной вероятности ложного обнаружения $P_{\text{лом}} = 10^{-4} \div 10^{-5}$ путем непосредственного моделирования получено значение порога $X = 0{,}20$. Этот порог и обозначен на рис. 9.7.

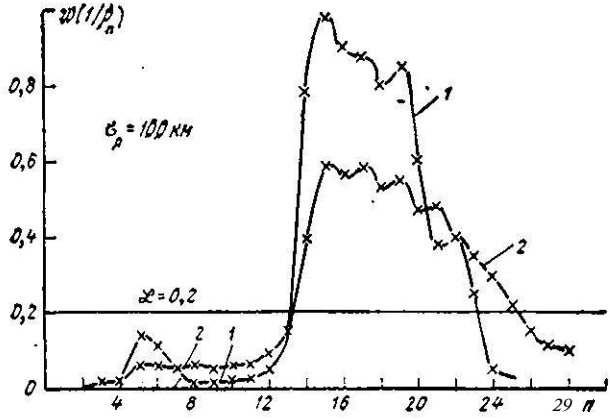


Рис. 9.8. Иллюстрация влияния неточности задания скорости **изменения параметра на характер пика апостериорной вероятности наличия маневра (по данным моделирования).**

Теперь, пользуясь рис. 9.7, можно оценить задержку в обнаружении начала $t_{\text{зн}}$ и конца $t_{\text{зк}}$ маневра в зависимости от точности измерения (расчета) рассматриваемого параметра. Как и следовало ожидать, чем хуже точность первичных измерений параметра, тем больше задержка в обнаружении начала и конца маневра.

В реальных условиях сопровождения космических целей скорость изменения параметра в. процессе маневра (интенсивность маневра), как правило, заранее неизвестна. Поэтому для реализации рассматриваемого алгоритма обнаружения маневра эту скорость приходится оценивать по результатам измерения координат или, по крайней мере, принимать, исходя из предварительного анализа возможных ситуаций, Поэтому интересным является выявление влияния неточности знания скорости изменения параметра на участке маневра на характер кривой апостериорной плотности вероятности $w\,(1\,|\,p_n)$.

Некоторое представление о влиянии неточности задания скорости изменения параметра на характер пика апостериорной вероятности наличия маневра можно получить из рис. 9.8. На этом рисунке кривая *1* соответствует случаю полного знания скорости изменения пара-

метра на участке маневра, а кривая *2* — случаю, когда эта скорость определена с большой ошибкой ($\hat{p}_м = 50$ *км/сек* вместо 135 *км/сек).*

Менее существенно, как показывают результаты моделирования, сказывается неточность задания априорных данных о маневре.

В заключение заметим, что рассмотренный метод обнаружения маневра достаточно трудоемок при реализации на ЦВМ.

9.5.2. Обнаружение маневра по текущему значению динамических ошибок экстраполяции координат

На участке маневра условие соответствия реальной траектории движения цели принятой в алгоритме сглаживания гипотезе экстраполяции параметров нарушается, вследствие чего появляются динамические ошибки сопровождения. Эти ошибки принципиально могут быть использованы в качестве исходного сигнала для обнаружения маневра цели.

В соответствии с общим подходом, вытекающим из теории статистических решений, в качестве выборочной совокупности наблюдаемых сигналов в данном случае должны быть взяты не сами ошибки, а квадратичная форма этих ошибок, которая представляется в виде

$$Q_i = (\mathbf{U}_i - \hat{\mathbf{U}}_{i\text{э}})^{\mathrm{T}} \mathrm{P}_i^{-1} (\mathbf{U}_i - \hat{\mathbf{U}}_{i\text{э}}), \qquad (9.5.6)$$

где $\mathbf{U}_i$ — вектор измеренных значений координат в момент i-го измерения; $\hat{\mathbf{U}}_{i\text{э}}$ — вектор экстраполированных значений координат на момент i-го измерения; $(\mathbf{U}_i - \hat{\mathbf{U}}_{i\text{э}})$ — вектор ошибок рассогласования между измеренными и. экстраполированными координатами, включающих как случайные, так и динамические составляющие; $\mathrm{P}_i^{-1} = (\Xi_i + \mathrm{H}\,\Psi_{i\text{э}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}})^{-1}$ — обратная корреляционная матрица суммарных ошибок измерения и экстраполяции координат.

Образованная таким образом квадратичная форма является исходной статистикой для решения задачи обнаружения маневра. В дальнейшем для принятия решений об обнаружении маневра сама эта квадратичная форма или некоторая комбинация из квадратичных форм, полученных в соседних циклах измерения, сравнивается с порогом Q_0, величина которого выбирается исходя из допустимой вероятности ложного обнаружения маневра.

Если, например, решение об обнаружении маневра принимается по одному значению квадратичной формы, то алгоритм решения имеет вид

$$Q_i > Q_0.$$

Если решение принимается по результату линейного накопления значений квадратичных форм в n соседних циклах, алгоритм решения записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \geqslant Q_0'.$$

В последнем случае в алгоритме должно быть предусмотрено запоминание $n-1$ значения квадратичных форм и «скользящее» их суммирование в n последних циклах.

Для принятия решения об обнаружении маневра может быть использована также некоторая комбинация из превышений (единиц) и непревышений (нулей) порога текущим значением квадратичной формы на фиксированном интервале наблюдения (логические критерии обнаружения).

Для определения характеристик качества обнаружения маневра рассматриваемым методом необходимо знать закон распределения квадратичной формы при отсутствии и наличии маневра.

Пусть $\Delta \mathbf{U}_t$ — l-мерный вектор с независимыми нормально распределенными компонентами, каждый из которых имеет дисперсию σ^2_{lq} $(q = 1, 2, \ldots, l)$ и математическое ожидание

$$M[\Delta \mathbf{U}_t] = \begin{cases} 0 & \text{при отсутствии маневра,} \\ \Delta_\partial \mathbf{U}_t & \text{при наличии маневра.} \end{cases}$$

Тогда при $M[\Delta \mathbf{U}_t] = 0$ распределение вероятности текущего значения квадратичной формы Q_t есть центральное χ^2-распределение с l степенями свободы. Соответствующая плотность вероятности записывается в виде

$$\chi^2(Q_t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{l/2}\Gamma(l/2)} Q_t^{l/2-1} \exp\left(-\frac{Q_t}{2}\right) & \text{при } Q_t > 0, \\ 0 & \text{при } Q_t \leqslant 0. \end{cases} \qquad (9.5.7)$$

Если же $M[\Delta \mathbf{U}_t] \neq 0$, то Q_t подчинена нецентральному χ^2-распределение с l степенями свободы и параметром нецентральности

$$\alpha_t = \Delta_\partial \mathbf{U}_t^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_t^{-1} \Delta_\partial \mathbf{U}_t,$$

где

$$\Delta_\partial \mathbf{U}_t = \| \Delta_\partial \mathbf{U}_{t1} \Delta_\partial \mathbf{U}_{t2} \ldots \Delta_\partial \mathbf{U}_{tl} \|.$$

Для суммы из n независимых квадратичных форм справедливо χ^2-распределение с ln степенями свободы. При этом, если $M[\Delta \mathbf{U}_t] = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то это распределение будет центральным, с плотностью вероятности вида

$$\chi^2(Q) = \left[2^{\frac{ln}{2}} \Gamma\left(\frac{ln}{2}\right)\right]^{-1} Q^{\frac{ln}{2}-1} \exp\left(-\frac{Q}{2}\right), \qquad (9.5.8)$$

где

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

а если $M[\Delta \mathbf{U}_t] \neq 0$ хотя бы для части индексов q или i, то распределение Q будет нецентральным, с параметром нецентральности

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

и плотностью вероятности вида [9]

$$\chi^2(Q, \alpha) = \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{Q}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^j \frac{Q^{j+\frac{ln}{2}-1}}{2^{2j+\frac{ln}{2}-1}\,\Gamma\left(j+\frac{ln}{2}\right)}. \qquad (9.5.9)$$

Формулы (7) — (9) являются исходными для расчета вероятностных характеристик различных алгоритмов обнаружения маневра,

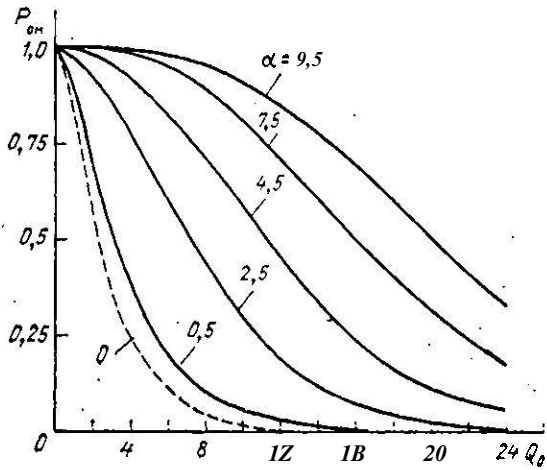


Рис. 9.9. Графики зависимости $P_{ом}(\alpha_l) = f(Q_0)$.

построенных на основе анализа квадратичной формы Q. В частности, если маневр обнаруживается по одиночному превышению квадратичной формы некоторого порога Q_0, то вероятность ложного обнаружения равна

$$P_{лом} = \int_{Q_0}^{\infty} \chi^2(Q_l)\, dQ_l, \qquad (9.5.10)$$

а вероятность правильного обнаружения маневра определяется по формуле

$$P_{ом}(\alpha_l) = \int_{Q_0}^{\infty} \chi^2(Q_l, \alpha_l)\, dQ_l. \qquad (9.5.11)$$

Графики зависимости $P_{ом} = (\alpha_l)$ от порога Q_0 при некоторых фиксированных значениях α_l (в том числе и при $\alpha_l = 0$) приведены на рис. 9.9.

Необходимо иметь в виду, что значение квадратичной формы на участке маневра изменяется с течением времени, так что вероятность обнаружения маневра является еще функцией времени от начала маневра до момента анализа квадратичной формы.

Нарастающая вероятность обнаружения маневра в этом случае равна

$$P_{\text{ом}} = 1 - \prod_{i=1} [1 - P_{\text{ом}}(\alpha_i)]. \qquad (9.5.12)$$

При обнаружении маневра по превышению суммой из n квадратичных форм соответствующего порога $Q_0\ (n)$ в формулы (10) и (11) должны быть подставлены плотности вероятности для этих сумм в области отсутствия и наличия маневра соответственно.

Если обнаружение маневра осуществляется на основе некоторого логического критерия типа «l/m», то расчет вероятности правильного обнаружения маневра может быть произведен по методике, изложенной в гл. 5 для случая обнаружения нестационарного полезного сигнала.

9.6. «Скользящее» сглаживание параметров траектории с помощью цифровых фильтров с постоянной памятью

Характерной особенностью рассмотренных до сих пор методов последовательного сглаживания параметров является использование для получения оценок всех наблюденных данных от начала сопровождения до момента последнего измерения. Такой подход, наряду с очевидными преимуществами при сглаживании детерминированной траектории, обладает и существенными недостатками, особенно при сопровождении целей, совершающих непредвиденный маневр. При этом особенно неприятными являются случаи, когда цель совершает небольшие по интенсивности маневры, типа случайных колебаний вокруг заданной траектории полета, которые не могут быть обнаружены и учтены.

В предыдущем параграфе уже рассматривался возможный способ коррекции алгоритма последовательного сглаживания путем введения добавок к элементам корреляционной матрицы ошибок экстраполяции параметров. Практически такая добавка приводит к ограничению памяти соответствующего фильтра, т. е. к ограничению числа учитываемых предыдущих измеренных значений координат.

Память сглаживающего фильтра можно ограничить заранее, путем фиксации коэффициентов сглаживания A и B, которые в данном случае обозначаются a и β. В процессе сглаживания параметров фильтром с постоянной памятью имеет место как бы последовательный просмотр ограниченного участка траектории в «скользящем окне» с фиксированной длиной. Поэтому такой метод сглаживания называется методом «скользящего» сглаживания [4].

В данном параграфе рассматриваются, главным образом, вопросы анализа фильтров «скользящего» сглаживания. Исследованию этих вопросов посвящен целый ряд опубликованных работ (например, [4, 12]).

9.6.1. Фильтр «скользящего» сглаживания параметров линейной траектории

Как и прежде, будем решать задачу «скользящего» сглаживания параметров по одной независимой координате цели (эта координата обозначается U). Алгоритм работы фильтра скользящего сглаживания в случае линейной траектории имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\ \hat{U}_{nэ} = \hat{U}_{n-1} + \hat{\dot{U}}_{n-1} T_0,\\
&\text{б)}\ \hat{U}_n = \hat{U}_{nэ} + \alpha \hat{U}_{nэ} + u_0,\\
&\text{в)}\ \hat{\dot{U}}_n = \hat{\dot{U}}_{n-1} + (\beta/T_0)\,\Delta \hat{U}_{nэ} + \dot{u}_0,\\
&\text{г)}\ \Delta U_{nэ} = U_n - \hat{U}_{nэ}.
\end{aligned} \qquad (9.6.1)$$

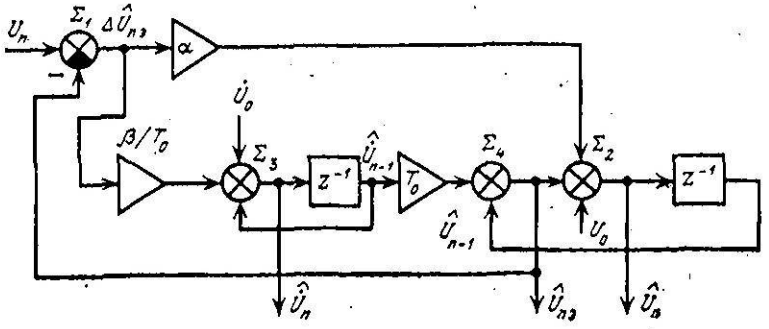


Рис. 9.10. Структурная схема фильтра «скользящего» сглаживания линейной траектории.

В данном случае входными сигналами фильтра, кроме последовательности отсчетов текущей координаты U_n, являются также начальные значения параметров u_0 и $\dot{u}_0$, вводимые в фильтр перед началом автоматического сопровождения и соответствующие моменту времени $t = t_0 = 0$.

Выходными сигналами фильтра, как и ранее, являются: сглаженное значение координаты U_n, сглаженное значение скорости $\dot{U}_n$, а также (при необходимости) и экстраполированное значение координаты на момент t_n последнего наблюдения.

В данном случае вместо операторной схемы алгоритма удобнее рассматривать структурную схему фильтра, изображенную на рис. 9.10. В этой схеме:

— на сумматоре Σ_1 вычисляется сигнал ошибки между последним наблюденным значением координаты U_n и экстраполированным значением координаты $\hat{U}_{nэ}$ [см. формулу (1г)];

— на сумматоре Σ_2 вычисляется оценка сглаженного значения координаты $\hat{U}_n$ путем суммирования экстраполированного значения координаты $\hat{U}_{nэ}$ и взвешенного сигнала ошибки; в начальный момент времени t_0 в сумматор Σ_2 должно быть введено исходное значение координаты u_0 [см. формулу (1б)];

— на сумматоре Σ_3 вычисляется оценка скорости изменения координаты, для чего используется предыдущее значение скорости $\hat{U}_{n-1}$, хранящееся в памяти фильтра (задержка значения скорости на один такт обработки обозначена оператором задержки Z^{-1}), и взвешенный с коэффициентом β/T_0 сигнал ошибки; в начальный момент времени в сумматор Σ_3 должно быть введено исходное значение скорости $\dot{u}_0$ [см. формулу (1в)];

— на сумматоре Σ_4 по предыдущим сглаженным значениям координаты и скорости вычисляется экстраполированное значение координаты $\hat{U}_{n\,э}$, которое используется в схеме и может быть также выдано потребителям.

Легко видеть, что полученная структурная схема фильтра, реализующего алгоритм скользящего сглаживания параметров линейной траектории, представляет собой дискретную систему автоматического управления с обратной связью, причем фиксация в этой схеме коэффициентов сглаживания α и β приводит к появлению новых динамических характеристик, таких, как характеристика переходного процесса, устойчивость, случайные и динамические ошибки в установившемся режиме работы, которые не свойственны исходному алгоритму последовательного сглаживания параметров траектории.

9.6.2. Анализ качественных характеристик фильтра «скользящего» сглаживания параметров линейной траектории

При анализе динамических характеристик дискретных фильтров обычно используются операторные методы и, в частности, метод Z-преобразования (см. § 3.3). В дальнейшем этот метод используется без особых пояснений.

Используя метод Z-преобразования, получим сначала передаточные функции рассматриваемого фильтра. Для упрощения положим значения $u_0 = 0$ и $\dot{u}_0 = 0$. Запишем выражения (1) в развернутом виде

$$\begin{aligned}
\hat{U}_n &= \hat{U}_{n-1} + T_0 \hat{\dot{U}}_{n-1} + \alpha (U_n - \hat{U}_{n-1} - T_0 \hat{\dot{U}}_{n-1}),\\
\hat{\dot{U}}_n &= \hat{\dot{U}}_{n-1} + (\beta/T_0)(U_n - \hat{U}_{n-1} - T_0 \hat{\dot{U}}_{n-1}),\\
\hat{U}_{n\,э} &= \hat{U}_{n-1} + T_0 \hat{\dot{U}}_{n-1},\\
\Delta\hat{U}_{n\,э} &= U_n - \hat{U}_{n-1} - T_0 \hat{\dot{U}}_{n-1}.
\end{aligned} \tag{9.6.2}$$

Применяя Z-преобразование правых частей системы уравнений (2), получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_n [1 - (1-\alpha) Z^{-1}] &= (1-\alpha) Z^{-1} T_0 \hat{\dot{U}}_n + \alpha U_n,\\
\hat{\dot{U}}_n [1 - (1-\beta) Z^{-1}] &= (\beta/T_0)(U_n - Z^{-1} \hat{U}_n),\\
\hat{U}_{n\,э} &= (\hat{U}_n + T_0 \hat{\dot{U}}_n) Z^{-1},\\
\Delta\hat{U}_{n\,э} &= U_n - (\hat{U}_n + T_0 \hat{\dot{U}}_n) Z^{-1}.
\end{aligned}$$

Решая совместно полученные уравнения относительно $\hat{U}_n$, $\hat{\dot{U}}_n$, $\hat{U}_{nэ}$ и $\Delta\hat{U}_{nэ}$, получаем:

$$K_{\hat{U}n}(Z^{-1}) = \frac{\hat{U}_n}{U_n} = \frac{\alpha + (\beta - \alpha) Z^{-1}}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1 - \alpha) Z^{-2}}, \qquad (9.6.3)$$

$$K_{\hat{\dot{U}}n}(Z^{-1}) = \frac{\hat{\dot{U}}_n}{U_n} = \frac{(\beta/T_0)(1 - Z^{-1})}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1 - \alpha) Z^{-2}}, \qquad (9.6.4)$$

$$K_{\hat{U}nэ}(Z^{-1}) = \frac{\hat{U}_{nэ}}{U_n} = \frac{(\alpha + \beta) Z^{-1} - \alpha Z^{-2}}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1 - \alpha) Z^{-2}}, \qquad (9.6.5)$$

$$K_{\Delta\hat{U}nэ}(Z^{-1}) = \frac{\Delta\hat{U}_{nэ}}{U_n} = \frac{(1 - Z^{-1})^2}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1 - \alpha) Z^{-2}}, \qquad (9.6.6)$$

где

$K_{\hat{U}n}(Z^{-1})$, $K_{\hat{\dot{U}}n}(Z^{-1})$, $K_{\hat{U}nэ}(Z^{-1})$ и $K_{\Delta\hat{U}nэ}(Z^{-1})$

— передаточные характеристики системы по сглаженной координате, сглаженной скорости, экстраполированной координате и ошибке экстраполяции соответственно.

Полученные выражения для передаточных функций системы позволяют проанализировать все основные показатели ее качества: устойчивость, переходный процесс, а также случайные и динамические ошибки в установившемся режиме работы.

а) Устойчивость системы. Для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель передаточной функции по ошибке экстраполяции $K_{\Delta\hat{U}nэ}(Z^{-1})$ имел нули внутри единичного круга на комплексной плоскости Z. Для определения устойчивости системы воспользуемся критерием Рауса — Гурвица [17], согласно которому необходимые и достаточные условия устойчивости имеют вид

$$\alpha > 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad 2\alpha + \beta < 4.$$

Эти условия определяют треугольник устойчивости на плоскости α, β, все внутренние точки которого, а также все точки основания $\beta = 0$ в интервале $0 < \alpha \leqslant 2$ соответствуют устойчивой системе.

б) Переходный процесс. Поведение системы в неустановившемся (переходном) режиме имеет существенное значение при ее переключении с одной цели на другую (скачок по координате) или при резком маневре цели (скачок по скорости).

Наиболее существенным является, конечно, переходный процесс при маневре скоростью, так как возникающие при этом ошибки в переходном режиме могут привести к срыву сопровождения за счет непопадания очередной отметки в упрежденный строб. Поэтому выбор размеров строба необходимо производить с учетом переходного процесса, а коэффициенты сглаживания α и β необходимо выбирать так, чтобы ошибки в переходном режиме при маневре скоростью *была* минимальными.

Получим переходную характеристику системы при воздействии на ее входе единичного перепада скорости: $\dot{U}_{вх}(t) = 0$ при $t < 0$ и $\dot{U}_{вх}(t) = 1$ при $t \geqslant 0$.

В этом случае Z-преобразование входного сигнала имеет вид [11]

$$U_{вх}(Z^{-1}) = T_0 Z^{-1}/(1-Z^{-1})^2. \qquad (9.6.7)$$

Подставляя это выражение в (6), получаем

$$\Delta\hat{U}_{пэ}(Z^{-1}) = \frac{T_0 Z^{-1}}{1-(2-\alpha-\beta)Z^{-1}+(1-\alpha)Z^{-2}}. \qquad (9.6.8)$$

Полагая $T_0 = 1$ и деля числитель на знаменатель, получаем

$$\Delta\hat{U}_{пэ}(Z^{-1}) = Z^{-1} + a_1 Z^{-2} + (a_1^2 - a_2) Z^{-3} + a_1(a_1^2 - 2a_2) Z^{-4} + \\ + [(a_1^2 - a_2) - a_1^2 a_2] Z^{-5} + (a_1(a_1^2 - a_2)(a_1 - 3a_2) Z^{-6} + \ldots,$$

где $a_1 = 2 - \alpha - \beta$; $a_2 = 1 - \alpha$.

Коэффициенты при обратных степенях Z^{-n} и являются ординатами переходного процесса для моментов времени nT_0. Выбирая различные значения α и β в Пределах треугольника устойчивости, можно построить графики переходного процесса, ординаты которых будут соответствовать ширине необходимого строба при экстраполяции координаты. Подобные исследования показывают, что для большей части области устойчивости переходный процесс в рассматриваемой системе имеет колебательный или слабодемпфицированный характер, за исключением области вблизи диагонали прямой, описываемой уравнением $\alpha = \beta$. Быстрое затухание переходного процесса получается при больших значениях а и β, приблизительно для $\alpha \approx \beta$.

в) Случайные ошибки в установившемся режиме. Наблюденные значения координаты сопровождаются ошибками случайного характера. Предполагается, что последовательность случайных ошибок в равноотстоящих точках на оси времени представляет собой дискретный стационарный случайный процесс и полностью характеризуется дисперсией $\sigma^2_{U_n}$. Рассматриваемая система сглаживания координаты и скорости является линейной. При этих условиях дисперсия случайной ошибки на выходе системы определяется по формуле (см. гл. 3)

$$\sigma^2_{вых} = \frac{\sigma^2_{U_n}}{2\pi j}\oint_{|Z|<1} K(Z^{-1})\, K(Z)\, Z^{-1}\, dZ, \qquad (9.6.9)$$

где $K(Z^{-1})$ – соответствующая передаточная характеристика.

Подсчитаем по методике, описанной в § 3.3, дисперсию случайной ошибки сглаживания координаты.

Производя в выражении (3) замену $Z^{-1} = (1-\nu)/(1+\nu)$, получаем

$$\frac{K_{U_n}(\nu)}{\sigma^2_{U_n}} = \frac{\beta + (2\alpha - \beta)\nu}{\beta + 2\alpha\nu + (4 - 2\alpha - \beta)\nu^2} = \frac{c_0 + c_1\nu}{d_0 + d_1\nu + d_2\nu^2}, \qquad (9.6.10)$$

где $c_0 = \beta$; $c_1 = 2\alpha - \beta$; $d_0 = \beta$; $d_1 = 2\alpha$; $d_2 = 4 - 2\alpha - \beta$.

Аналогично, заменяя $Z = (1 + \nu)/(1 - \nu)$, получаем

$$\frac{K_{Un}(-\nu)}{1-\nu} = \frac{c_0 - c_1\nu}{d_0 - d_1\nu + d_2\nu^2}.$$

По таблицам [13] находим

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(c_0 + c_1\nu)}{(d_0 + d_1\nu + d_2\nu^2)} \cdot \frac{c_0 - c_1\nu}{d_0 + d_1\nu + d_2\nu^2}\, d\nu = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2}.$$

Дисперсия случайной ошибки сглаживания координаты будет равна

$$\sigma^2_{\hat{U}n} = 2\mathcal{J}_2\,\sigma^2_{Un} = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{d_0 d_1 d_2}\,\sigma^2_{Un},$$

или, после подстановки коэффициентов разложения в соответствии с обозначениями (10), окончательно получим

$$\sigma^2_{\hat{U}n} = \frac{2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\beta}{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)}\,\sigma^2_{Un}. \qquad (9.6.11)$$

Графики относительной дисперсии этой ошибки в зависимости от коэффициентов сглаживания а и β приведены на рис. 9.11.

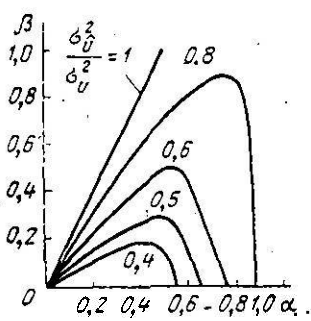


Рис. 9.11. Графики относительных ошибок «скользящего» сглаживания координаты.

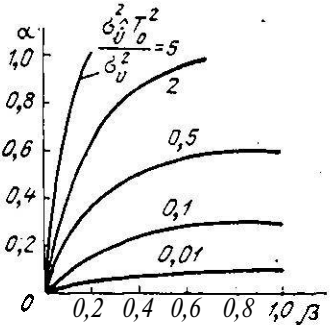


Рис. 9.12. Графики относительных ошибок «скользящего» сглаживания скорости.

Аналогичным образом подсчитывается дисперсия случайной ошибки сглаживания скорости. Для этого применяется Z-преобразование передаточной характеристики системы по сглаженной скорости (4) и сведение полученного выражения к табличному интегралу.

Окончательная формула для дисперсии случайной ошибки сглаживания скорости имеет вид

$$\sigma^2_{\hat{U}n} = \frac{2\beta^2}{\alpha T_0(4 - 2\alpha - \beta)}\,\sigma^2_{Un}. \qquad (9.6.12)$$

На рис. 9.12 приведены графики относительной дисперсии ошибки сглаживания скорости в зависимости от величины коэффициентов α и β.

Из графиков на рис. 9.11 и 9.12 следует, что для хорошей фильтрации случайных ошибок при сглаживании координаты и скорости необходимо выбирать малые значения коэффициентов сглаживания α и β.

Применяя Z-преобразование передаточной характеристики системы по экстраполированной координате (5) и путем сведения полученного выражения к табличному интегралу, определяется формула для вычисления дисперсии случайной ошибки экстраполяции, которая имеет вид

$$\overset{2}{U}_{n\text{э}} \quad \alpha(4-2\alpha-\beta) \quad \overset{2}{n} \cdot \qquad (9.6.13)$$

Подсчитаем теперь корреляционный момент связи величин $\hat{U}_n$, $\hat{\dot{U}}_n$ как математическое ожидание произведения случайной ошибки оценки координаты $\Delta\hat{U}_n$ и случайной ошибки оценки скорости ее изменения $\Delta\hat{\dot{U}}_n$, т. е.

$$K_{\hat{U}_n\,\hat{\dot{U}}_n} = M\left[\Delta\hat{U}_n\,\Delta\hat{\dot{U}}_n\right]. \qquad (9.6.14)$$

Используя формулы

$$\begin{aligned}
\hat{U}_n &= \alpha U_n + (1-\alpha)\,\hat{U}_{n\text{э}},\\
\hat{\dot{U}}_n &= (\beta/T_0)\,U_n + \hat{\dot{U}}_{n-1} - (\beta/T_0)\,\hat{U}_{n\text{э}}, \qquad (9.6.15)\\
\hat{U}_{n\text{э}} &= \hat{U}_{n-1} + T_0\hat{\dot{U}}_{n-1},
\end{aligned}$$

записываем выражения для случайных ошибок оценки сглаженной координаты $\Delta\hat{U}_n$, скорости $\Delta\hat{\dot{U}}_n$ и ошибки экстраполяции $\Delta\hat{U}_{n\text{э}}$ в виде

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{U}_n &= \alpha\Delta U_n + (1-\alpha)\,\Delta\hat{U}_{n\text{э}},\\
\Delta\hat{\dot{U}}_n &= (\beta/T_0)\,\Delta U_n + \Delta\hat{\dot{U}}_{n\text{э}} - \beta/T_0\,\Delta\hat{U}_{n\text{э}}, \qquad (9.6.16)\\
\Delta\hat{U}_{n\text{э}} &= \Delta\hat{U}_{n-1} + T_0\,\Delta\hat{\dot{U}}_{n-1}.
\end{aligned}$$

В этих выражениях величина ΔU_n представляет собой случайную ошибку измерения координаты.

В результате выполнения операции (14), с учетом (16), окончательная формула для корреляционного момента получается в виде

$$K_{\hat{U}_n\,\hat{\dot{U}}_n} = \frac{\beta(2\alpha-\beta)}{\alpha(4-2\alpha-\beta}\,\frac{\sigma^2_{\hat{U}_n}}{T_0}. \qquad (9.6.17)$$

Графики изменения коэффициента корреляции в зависимости от значений коэффициентов сглаживания α и β приведены на рис. 9.13.

Таким образом, формулы (11), (12) и (17) полностью определяют элементы корреляционной матрицы случайных ошибок «скользящего» сглаживания параметров линейной траектории.

г) Динамические ошибки в установившемся режиме маневра. Важной характеристикой качества рассматриваемого фильтра является также динамическая ошибка, возникающая в случае, когда цель движется по криволинейному курсу. Рассмотрим зависимость динамической ошибки от коэффициентов сглаживания α и β для режима установившегося маневра цели по координате U, причем будем полагать, что маневр происходит по кривой второго порядка, т. е. в законе изменения координаты отсутствуют производные по времени выше 2-й степени.

В общем случае динамическая ошибка находится из выражения (см. § 3.3)

$$\Delta_\partial U_n = \sum_{i=0}^{s} C_i \Delta^{(i)} U_n,$$

где $\Delta^i U_n$ — i-я конечная разность входного сигнала.

Первая конечная разность входного сигнала соответствует первому приращению координаты, т. е.

$$\Delta^{(1)} U_n = U_n - U_{n-1},$$

а вторая конечная разность — второму приращению координаты, т. е.

$$\Delta^{(2)} U_n = \Delta^{(1)} U_n - \Delta^{(1)} U_{n-1}.$$

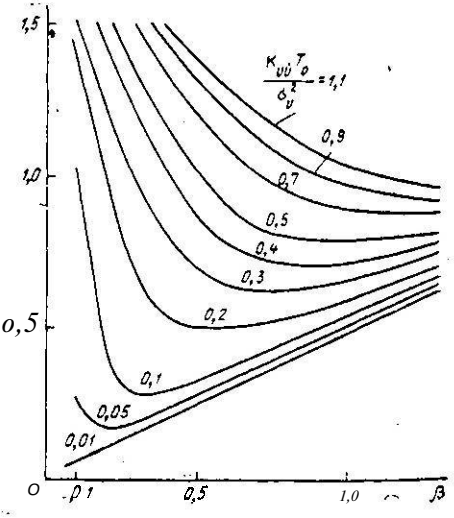


Рис. 9.13. Графики изменения коэффициента корреляции.

Коэффициенты динамической ошибки C_i определяются из выражения (3.3.25)

$$C_i = \left[\frac{1}{i!} \frac{d^i K_{\Delta\hat{U}}(Z^{-1})}{d(Z^{-1})^i} \right]_{Z^{-1}=1},$$

где $K_{\Delta\hat{U}}(Z^{-1})$ — передаточная характеристика по сигналу ошибки.

Передаточная характеристика рассматриваемой системы по ошибке сглаживания координаты имеет вид

$$K_{\Delta\hat{U}_{сгл}}(Z^{-1}) = 1 - K_{\hat{U}_n}(Z^{-1}) = 1 - \frac{\alpha + (\beta - \alpha) Z^{-1}}{1 - (2 - \alpha - \beta) Z^{-1} + (1 - \alpha) Z^{-2}}.$$

Производя преобразование, получаем

$$K_{\Delta\hat{U}_{сгл}}(Z^{-1}) = \frac{(1-\alpha)(1-Z^{-1})^2}{(1-(2-\alpha-\beta) Z^{-1} + (1-\alpha) Z^{-2}}.$$

Дифференцируя $K_{\Delta\hat{U}_{сгл}}$ по Z^{-1}, получаем

$$C_{1сгл} = \left. \frac{dK_{\Delta U_{сгл}}(Z^{-1})}{d(Z^{-1})} \right|_{Z^{-1}=1} = 0, \quad C_{2сгл} = \left. \frac{d^2 K_{\Delta U_{сгл}}(Z^{-1})}{2d(Z^{-1})^2} \right|_{Z^{-1}=1} = \frac{1-\alpha}{\beta}.$$

Таким образом, квадрат динамической ошибки сглаживания координаты имеет вид

$$(\Delta_д \hat{U}_n)^2 = \frac{1-\alpha^2}{\beta^2}[\Delta^{(2)} U_n]^2. \qquad (9.6.18)$$

Из выражения (18) следует, что квадрат динамической ошибки сглаживания координаты уменьшается с ростом α и β и равен нулю при $\alpha = 1$.

При выводе выражения для квадрата динамической ошибки экстраполяции координаты воспользуемся формулой (6) для Z-преобразования ошибки экстраполяции. Дифференцируя это выражение по Z^{-1} дважды, получаем

$$C_{1э} = \frac{dK_{\Delta\hat{U}_э}(Z^{-1})}{dZ^{-1}}\Big|_{Z^{-1}=1} = 0, \quad C_{2э} = \frac{d^2K_{\Delta U_э}(Z^{-1})}{2d(Z^{-1})^2}\Big|_{Z^{-1}=1} = \frac{1}{\beta}.$$

Таким образом, квадрат динамической ошибки экстраполяции координаты U_n определяется выражением

$$(\Delta_д \hat{U}_{nэ})^2 = \frac{1}{\beta^2}[\Delta^{(2)} U_n]^2. \qquad (9.6.19)$$

Из выражения (19) следует, что квадрат динамической ошибки экстраполяции не зависит от α и уменьшается с ростом β.

Полученные формулы для дисперсии случайных ошибок и квадрата динамических ошибок позволяют выбирать оптимальные значения коэффициентов сглаживания α и β, например, по критерию минимума дисперсии суммарной (случайной плюс динамической) ошибки сглаживания в установившемся режиме, т. е. исходя из условия

$$\sigma_{\Sigma_{сгл}}(\alpha, \beta) = \min_{\substack{\alpha=\alpha_{опт} \\ \beta=\beta_{опт}}}. \qquad (9.6.20)$$

Дисперсия суммарной ошибки сглаживания координаты имеет вид

$$\sigma^2_{\Sigma_{сгл}}(\alpha, \beta) = \sigma^2_U \eta^2_{сгл}(\alpha, \beta) + C^2_{2сгл}(\alpha, \beta)[\Delta^{(2)} U_n]^2.$$

Переходя к относительным ошибкам, получаем

$$\frac{\sigma^2_{\Sigma_{сгл}}}{\sigma^2_U} = \eta_{сгл}(\alpha, \beta) + \rho^2 C^2_{2сгл}(\alpha, \beta), \qquad (9.6.21)$$

где

$$\eta_{сгл}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\beta}{\alpha(4-2\alpha-\beta)}; \quad C_{2сгл}(\alpha, \beta) = (1-\alpha)^2/\beta^2;$$

$\rho^2 = [\Delta^{(2)} U_n]^2/\sigma^2_U$ — относительное значение второго приращения координаты, которое называется относительной интенсивностью маневра.

Для нахождения оптимальных значений а и β по критерию (20) необходимо взять частные производные от выражения (21) по α и β и при-

равнять их к нулю при $\alpha = \alpha_{опт}$ и $\beta = \beta_{опт}$. В результате дифференцирования получаем два уравнения;

$$\frac{(2\alpha+\beta)^2-4\beta(\alpha^2+1)}{\alpha^2(4-2\alpha-\beta)^2}-\frac{1-\alpha}{\beta^2}\rho^2\Big|_{\substack{\alpha=\alpha_{опт}\\ \beta=\beta_{опт}}}=0, \qquad (9.6.22)$$

$$\frac{4}{\alpha(4-2\alpha-\beta)^2}-\frac{1}{\beta^3}\rho^2\Big|_{\substack{\alpha=\alpha\\ \beta=\beta_{опт}}}=0. \qquad (9.6.23)$$

Непосредственное решение уравнений (22) и (23) с целью нахождения $\alpha_{опт}$ и $\beta_{опт}$ чрезвычайно громоздко. Найдем поэтому только зависимость $\alpha_{опт} = f(\beta_{опт})$. Для этого выразим ρ^2 из уравнений (22) и (23) и приравняем полученные выражения. В результате получим

$$\frac{(2\alpha_{опт}+\beta_{опт})^2-4\beta_{опт}(\alpha_{опт}+1)}{\alpha_{опт}(1-\alpha_{опт})}=4\beta_{опт}. \qquad (9.6.24)$$

Если наложить на коэффициенты $\alpha_{опт}$ и $\beta_{опт}$ естественные ограничения, вытекающие из условия устойчивости системы,

$$\alpha_{опт}>0,\quad \beta_{опт}\geqslant 0,\quad 2\alpha_{опт}+\beta_{опт}<4$$

и, кроме того, условиться, что $\alpha \neq 1$, то выражение (24) значительно упрощается и имеет вид

$$(2\alpha_{опт}+\beta_{опт})^2-4\beta_{опт}\alpha_{опт}(1-\alpha_{опт}).$$

Из этого выражения получаем (беря только арифметическое значение корня)

$$\alpha_{опт}=\sqrt{4\beta_{опт}-\beta_{опт}^2}/2. \qquad (9.6.25)$$

Выражение (25) совместно с уравнениями (22) и (23) позволяет выбирать пару $\alpha_{опт}$, $\beta_{опт}$, если известна интенсивность маневра по координате.

9,6.3. Фильтр «скользящего» сглаживания параметров траектории, заданной полиномом 2-й степени

В § 9.3 были получены формулы экстраполяции (3.25) и последовательного сглаживания (3.28) параметров траектории, задаваемой полиномом 2-й степени. В соответствии с этими формулами алгоритм работы фильтра «скользящего» сглаживания параметров квадратичной траектории записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \hat{U}_{n-1}=\hat{U}_{n-1}+\hat{U}_{n-1}T_0+U_{n-1}T_0^2/2,\\
&\text{б)}\quad \hat{U}_{nэ}=\hat{U}_{n-1}+\hat{U}_{n-1}T_0,\\
&\text{в)}\quad \hat{U}_n=\hat{U}_{nэ}+\alpha\Delta\hat{U}_{nэ}+u_0,\\
&\text{г)}\quad \hat{U}_n=\hat{U}_{nэ}+(\beta/T_0)\Delta\hat{U}_{nэ}+\dot{u}_0,\\
&\text{д)}\quad \hat{U}_n=\hat{U}_{n-1}+(\gamma/T_0^2)\Delta\hat{U}_{nэ}+\ddot{u}_0,\\
&\text{е)}\quad \Delta\hat{U}_{nэ}=U_n-\hat{U}_{nэ}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.6.26)$$

Структурная схема фильтра изображена на рис. 9.14.

На вход сглаживающего фильтра в данном случае, кроме последовательности отсчетов текущей координаты U_n, должны быть поданы начальные значения параметров u_0, $\dot{u}_0$ и $\ddot{u}_0$.

Выходными сигналами фильтра являются: сглаженное значение координаты $\hat{U}_n$, сглаженное значение скорости $\hat{\dot{U}}_n$, сглаженное значение ускорения $\hat{\ddot{U}}_n$, а также экстраполированные значения координаты и скорости на момент t_n последнего измерения.

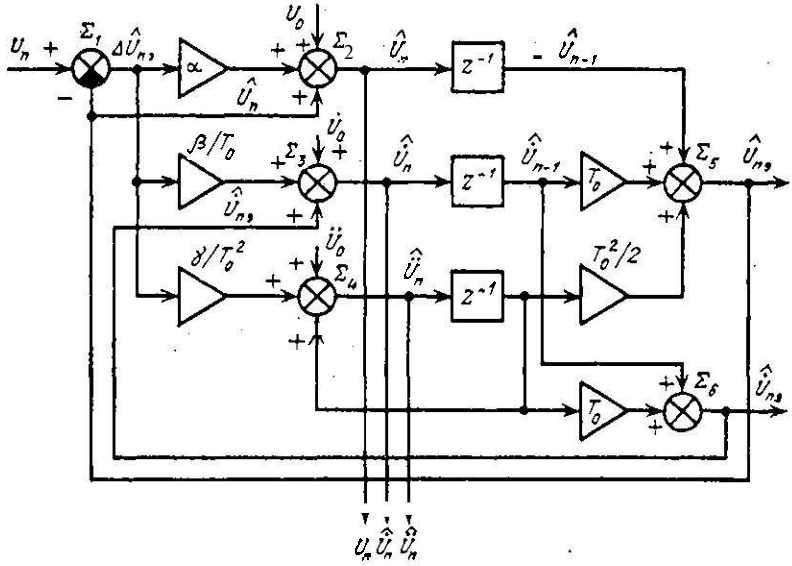


Рис. 9.14. Структурная схема фильтра скользящего сглаживания параметров квадратичной траектории.

Основными элементами структурной схемы фильтра являются:

— сумматор Σ_1, который служит для вычисления сигнала ошибки между измеренным значением координаты в момент t_n и экстраполированным на этот момент значением координаты по формуле (26е);

— сумматор Σ_2, на котором вычисляется оценка сглаженного значения координаты U_n по формуле (26в);

— сумматор Σ_3, на котором вычисляется оценка сглаженного значения скорости изменения координаты $\dot{U}_n$ по формуле (26г);

— сумматор Σ_4, на котором вычисляется оценка сглаженного значения ускорения по координате [формула (26д)];

— сумматор Σ_5, на котором вычисляется оценка экстраполированного значения координаты по формуле (26а);

— сумматор Σ_6, на котором вычисляется оценка экстраполированного значения скорости по формуле (26б).

Необходимые задержки параметров на время между двумя измерениями обозначены умножением на оператор Z^{-1}. Назначение других элементов структурной схемы легко понять из рис. 9.14.

Из рассмотрения структурной схемы следует, что фильтр «скользящего» сглаживания параметров квадратичной функции не содержит нелинейных элементов и может быть исследован методами анализа динамики линейных дискретных систем автоматического управления.

9.6.4. Анализ качественных характеристик фильтра «скользящего» сглаживания параметров траектории, заданной полиномом 2-й степени

Используя метод Z-преобразования, получаем передаточные характеристики рассматриваемого фильтра. Запишем выражения (26) в развернутом виде (при u_0, $\dot{u}_0$ и $\ddot{u}_0$ равных нулю):

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{U}_{n\text{э}} = \hat{U}_{n-1} + \hat{\dot{U}}_{n-1} T_0 + \hat{\ddot{U}}_{n-1} T_0^2/2,\\
&\hat{\dot{U}}_{n\text{э}} = \hat{\dot{U}}_{n-1} + \hat{\ddot{U}}_{n-1} T_0,\\
&\hat{U}_n = \hat{U}_{n-1} + \hat{\dot{U}}_{n-1} T_0 + \hat{\ddot{U}}_{n-1} T_0^2/2 + \alpha \Delta \hat{U}_{n\text{э}},\\
&\hat{\dot{U}}_n = \hat{\dot{U}}_{n-1} + \hat{\ddot{U}}_{n-1} T_0 + (\beta/T_0)\, \Delta U_{n\text{э}},\\
&\hat{\ddot{U}}_n = \hat{\ddot{U}}_{n-1} + (\gamma/T_0^2)\, \Delta \hat{U}_{n\text{э}},\\
&\Delta U_{n\text{э}} = U_n - \hat{U}_{n-1} - \hat{\dot{U}}_{n-1} T_0 - \hat{\ddot{U}}_{n-1} T_0^2/2.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.6.27)$$

Применяя Z-преобразование правых частей системы уравнений (27), получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{U}_{n\text{э}} = \left(\hat{U}_n + \hat{\dot{U}}_n T_0 + \hat{\ddot{U}} T_0^2/2\right) Z^{-1},\\
&\hat{\dot{U}}_{n\text{э}} = \left(\hat{\dot{U}}_n + \hat{\ddot{U}}_n T_0\right) Z^{-1},\\
&\hat{U}_n [1 - (1-\alpha) Z^{-1}] = T_0 \left[(1-\alpha)\left(\hat{\dot{U}}_n + \hat{\ddot{U}}_n T_0^2/2\right)\right] Z^{-1} + \alpha U_n,\\
&\hat{\dot{U}}_n [1 - (1-\beta) Z^{-1}] = \left[\hat{\dot{U}}_n T_0 - \beta/T_0 \left(\hat{U}_n + \hat{\dot{U}}_n \frac{T_0^2}{2}\right)\right] Z^{-1} + (\beta/T_0) U_n,\\
&\hat{\ddot{U}}_n [1 - (1-\gamma) Z^{-1}] = (-\gamma/T_0^2)\left(\hat{U}_n + \hat{\dot{U}}_n T_0\right) Z^{-1} + (\gamma/T_0^2) U_n,\\
&\Delta U_{n\text{э}} = -\left[\hat{U}_n + \hat{\dot{U}}_n T_0 + \hat{\ddot{U}}_n \frac{T_0^2}{2}\right] Z^{-1} + U_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.6.28)$$

Полагая $T_0 = 1$ и решая систему уравнений (28) относительно $\hat{U}_n$, $\hat{\dot{U}}_n$, $\hat{\ddot{U}}_n$, $\hat{U}_{n\text{э}}$, $\hat{\dot{U}}_{n\text{э}}$, $\Delta\hat{U}_{n\text{э}}$, получаем выражения для передаточных характеристик фильтра:

$$K_{\hat{U}_n}(Z^{-1}) = \frac{\hat{U}_n}{U_n} = \frac{\alpha - (2\alpha - \beta - 0{,}5\gamma) Z^{-1} + (\alpha - \beta + 0{,}5\gamma) Z^{-2}}{1 - BZ^{-1} + CZ^{-2} - DZ^{-3}}, \qquad (9.6.29)$$

$$K \quad (Z^{-1}) = \frac{\hat{\dot{U}}_n}{} \quad \frac{\beta + (\gamma - 2\beta) Z^{-1} + (\beta - \gamma) Z^{-2}}{1 - BZ^{-1} + CZ^{-2} - DZ^{-3}}, \qquad (9.6.30)$$

$$K_{\hat{U}_n}(Z^{-1}) = \frac{\hat{U}_n}{U_n} = \frac{\gamma(1-Z^{-1})^2}{1-BZ^{-1}+CZ^{-2}-DZ^{-3}}, \quad (9.6.31)$$

$$K_{\hat{U}_{n\text{э}}}(Z^{-1}) = \frac{\hat{U}_{n\text{э}}}{U_n} = \frac{(\alpha+\beta+0{,}5\gamma)Z^{-1}-(2\alpha+\beta-0{,}5\gamma)Z^{-2}+\alpha Z^{-3}}{1-BZ^{-1}+CZ^{-2}-DZ^{-3}}, \quad (9.6.32)$$

$$K_{\hat{U}_{n\text{э}}}(Z^{-1}) = \frac{\hat{U}_{n\text{э}}}{U_n} = \frac{(\beta+\gamma)Z^{-1}-(2\beta+\gamma)Z^{-2}+\beta Z^{-3}}{1-BZ^{-1}+CZ^{-2}-}$$

$$K_{\Delta\hat{U}_{n\text{э}}}(Z^{-1}) = \frac{\Delta\hat{U}_{n\text{э}}}{U_n} = \frac{\gamma(1-Z^{-1})^3}{1-BZ^{-1}+CZ^{-2}-DZ^{-3}}, \quad (9.6.34)$$

где $B = 3-\alpha-\beta-0.5\gamma$; $C = 3-2\alpha-\beta+0{,}5\gamma$; $D = 1-\alpha$.

Полученные выражения для передаточных функций фильтра позволяют проанализировать все основные показатели его качества.

а) Случайные ошибки в установившемся режиме. Измеренные значения координаты сопровождаются ошибками случайного характера. Пусть последовательность случайных ошибок в равноотстоящих точках на оси времени представляет собой дискретный стационарный случайный процесс и полностью характеризуется дисперсией.

Так как фильтр «скользящего» сглаживания параметров квадратичной траектории (рис. 9.14) является линейным, то дисперсия случайной ошибки на интересующих нас выходах этого фильтра определяется так же, как для фильтра скользящего сглаживания линейной траектории по формуле (9). Подставляя в эту формулу

$$Z^{-1} = \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad Z = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad \text{и} \quad dZ = \frac{2d\nu}{(1-\nu)^2},$$

получаем

$$\sigma^2_{\text{вых}} = \frac{\sigma^2_{U_n}}{\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{K(\nu)}{1+\nu}\frac{K(-\nu)}{1-\nu}d\nu.$$

Подсчитаем теперь дисперсию случайной ошибки сглаживания координаты. Производя в выражении (29) замену переменной Z на ν, получаем

$$\frac{K_{\hat{U}_n}(\nu)}{1+\nu} = \frac{c_0+c_1\nu+c_2\nu^2+c_3\nu^3}{d_0+d_1\nu+d_2\nu^2+d_3\nu^3}, \qquad \frac{K_{\hat{U}_n}(-\nu)}{1-\nu} = \frac{c_0-c_1\nu+c_2\nu^2-c_3\nu^3}{d_0-d_1\nu+d_2\nu^2-d_3\nu^3},$$

где

$$c_0 = d_0 = \gamma; \quad c_1 = d_1 = 2\beta; \quad c_2 = d_2 = 4\alpha-\gamma;$$
$$c_3 = 4\alpha-2\beta; \quad d_3 = 8-4\alpha-2\beta. \quad (9.6.35)$$

Для рассматриваемой системы по таблицам [13] находим интегральную оценку

$$\mathcal{J}^*_3 = 2\mathcal{J}_3 = \frac{2}{\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{K(\nu)}{1+\nu}\frac{K(-\nu)}{1-\nu}d\nu =$$

$$= \frac{\qquad\qquad}{d_0 d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3)},$$

где $\mathcal{J}^*_3$ — интегральная оценка дискретной системы; $\mathcal{J}_3$ — интегральная оценка соответствующей ей непрерывной системы.

Дисперсия случайной ошибки сглаживания координаты будет равна

$$\sigma^2_{\hat{U}_n} = \sigma^2 \varkappa^*_3,$$

или после подстановки значений коэффициентов разложения c_i, d_i в соответствии с обозначениями (35) окончательно получим

$$\sigma^2_{\hat{U}_n} = \frac{\beta(2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\beta) + 0{,}5\alpha\gamma(2\alpha + \beta - 4)}{(\alpha\beta + 0{,}5\alpha\gamma - \gamma)(4 - 2\alpha - \beta)}. \qquad (9.6.36)$$

Графики относительной дисперсии этой ошибки в зависимости от коэффициентов сглаживания α, β (при некоторых значениях γ) приведены на рис. 9.15.

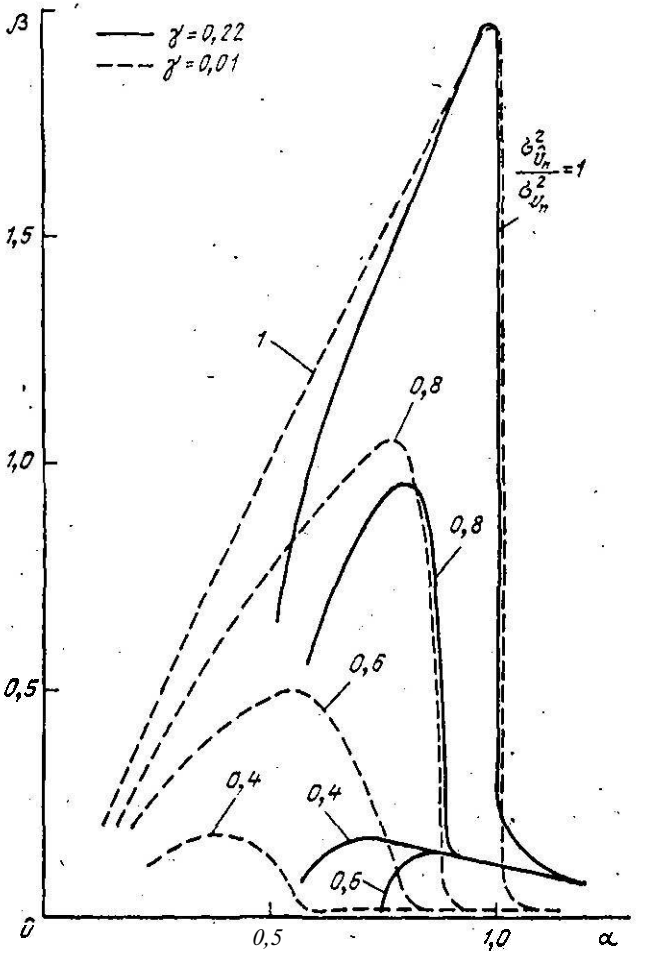


Рис. 9.15. Графики относительных ошибок сглаживания координаты.

Аналогичным образом подсчитывается дисперсия случайной ошибки сглаживания скорости. Для этого применяется ν-преобразование передаточной характеристики системы по сглаженной скорости (30) и сведение полученного выражения к табличному интегралу.

Окончательная формула для дисперсии случайной ошибки сглаживания скорости имеет вид

$$\sigma^2_{\hat{\dot{x}}} = \frac{2(\beta-\gamma)\beta^2+\gamma^2(2-\alpha)}{\alpha\beta\gamma(4-2\alpha-\beta)}. \qquad (9.6.37)$$

На рис. 9.16 приведены графики относительной дисперсии ошибки сглаживания скорости $ч$ зависимости от величины коэффициентов α, β, γ.

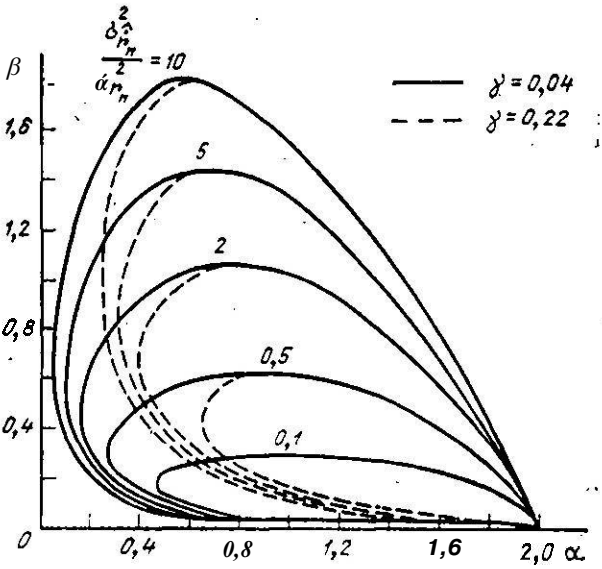


Рис. 9.16. Графики относительных ошибок сглаживания скорости.

Полученная по описанной выше методике окончательная формула для дисперсии случайной ошибки сглаживания ускорения имеет вид

$$\sigma^2_{\hat{\ddot{U}}_n} = \frac{2\beta\gamma^2}{(\alpha\beta+0,5\alpha\gamma-\gamma)(4-2\alpha-\beta)}, \qquad (9.6.38)$$

Из-за громоздкости формулы для корреляционных моментов здесь не приводятся.

б) Динамические ошибки в установившемся режиме маневра. Динамические ошибки сглаживания параметров траектории возникают при маневре цели вследствие несоответствия используемой в алгоритме гипотезы движения и реальной траектории маневрирующей цели. Рассмотрим зависимость динамической ошибки сглаживания координаты от коэффициентов α, β, γ для режима установившегося маневра цели. Сначала будем полагать, что маневр происходит по кривой второго порядка, т. е. по дуге окружности.

Как и прежде, квадрат динамической ошибки находится из выражения

$$\Delta_\partial \hat{U}_n = \sum_{l=0}^{s} C_l \Delta^{(l)} U_n,$$

а входящие в это выражение коэффициенты C_l по формуле

$$C_l = \frac{1}{l!} \frac{K_{\Delta\hat{U}_n}(Z^{-1})}{d(Z^{-1})^l}\Big|_{Z^{-1}=1},$$

где $K_{\Delta\hat{U}_n}(Z^{-1})$ — передаточная характеристика по соответствующему выходу фильтра.

Передаточная характеристика фильтра по ошибке сглаживания координаты имеет вид

$$K_{\Delta\hat{U}_n}(Z^{-1}) = 1 - \frac{\alpha-(2\alpha-\beta-0{,}5\gamma)Z^{-1}+(\alpha-\beta+0{,}5\gamma)Z^{-2}}{1-(3-\alpha-\beta-0{,}5\gamma)Z^{-1}+(3-2\alpha+0{,}5\gamma)Z^{-2}+(\alpha-1)Z^{-3}};$$

Произведя преобразования, получаем

$$\Delta U_n(Z^{-1}) = \frac{(1-\alpha)(1-Z^{-1})^3}{1-(3-\alpha-\beta-0{,}5\gamma)Z^{-1}+(3-2\alpha-\beta+0{,}5\gamma)Z^{-2}+(\alpha-1)Z^{-3}}. \quad (9.6.39)$$

Дифференцируя $K_{\Delta\hat{U}_n}(Z^{-1})$ по Z^{-1}, получаем

$$C_{1\text{сгл}} = \left.\frac{\partial K_{\Delta\hat{U}_n}(Z^{-1})}{\partial(Z^{-1})}\right|_{Z^{-1}=1} = 0, \quad C_{2\text{сгл}} = \left.\frac{\partial^2 K_{\Delta\hat{U}_n}(Z^{-1})}{\partial(Z^{-1})^2}\right|_{Z^{-1}=1} = 0.$$

Таким образом, при маневре цели по кривой второго порядка квадрат динамической ошибки сглаживания координаты равен нулю. Следовательно, рассматриваемый фильтр является фильтром с астатизмом третьего порядка.

Получим теперь выражение для динамической ошибки сглаживания координаты в случае, когда входной сигнал содержит производную третьего порядка, т. е.

б

Дифференцируя выражение (39) по Z^{-1}, получаем

$$C_{1\text{сгл}} = C_{2\text{сгл}} = 0, \quad C_{3\text{сгл}} = (1-\alpha)/\gamma.$$

Таким образом, квадрат динамической ошибки сглаживания координаты определяется в данном случае по формуле

$$(\Delta_\partial \hat{U}_n)^2 = \frac{(1-\alpha)^2}{\gamma^2}[\Delta^{(3)}U_n], \quad (9.6.40)$$

где $\Delta^{(3)}U_n$ — третья конечная разность для координаты, соответствующая третьей производной входного сигнала фильтра.

Из выражения (40) следует, что величина динамической ошибки при кубическом воздействии не зависит от β, уменьшается с ростом γ и а и равна нулю при $\alpha = 1$.

в) Переходный процесс. Получим переходную характеристику фильтра при воздействии на ее входе перепада ускорения

$$U_{\text{вх}}(t) = 0 \text{ при } t \leqslant 0, \quad U_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2}t^2 \text{ при } t > 0.$$

В этом случае Z-преобразование входного сигнала имеет вид [11]

$$U_{\text{вх}}(Z^{-1}) = \frac{T_0^2(1+Z^{-1})Z^{-1}}{2(1-Z^{-1})^3}. \quad (9.6.41)$$

Подставляя это выражение в (34) и принимая $T_0 = 1$, получаем

$$\Delta\hat{U}_{n\partial}(Z^{-1}) = \frac{(1+Z^{-1})Z^{-1}}{2[1-(3-\alpha-\beta-0{,}5\gamma)Z^{-1}+(3-2\alpha-\beta+0{,}5\gamma)Z^{-2}+(\alpha-1)Z^{-3}]}. \quad (9.6.42)$$

Величина $\Delta\hat{U}_{пэ}(Z^{-1})$ в выражении (42) представляет себой переходную характеристику фильтра (см. рис. 9.14), которая вычислена по формуле

$$\Delta\hat{U}_{пэ}(Z^{-1}) = U_{вх}(Z^{-1})\, K_{\Delta\hat{U}пэ}(Z^{-1}).$$

Деля числитель на знаменатель в выражении (42), получаем функцию переходного процесса в виде

$$\Delta\hat{U}_{пэ}(Z^{-1}) = 0{,}5\,\{Z^{-1} + (1+a_1)Z^{-2} + [a_1(1-a_1) - a_2]Z^{-3} + [a_1(a_1+1) - a_2(1+a_2-a_3)]Z^{-4} + \ldots\},$$

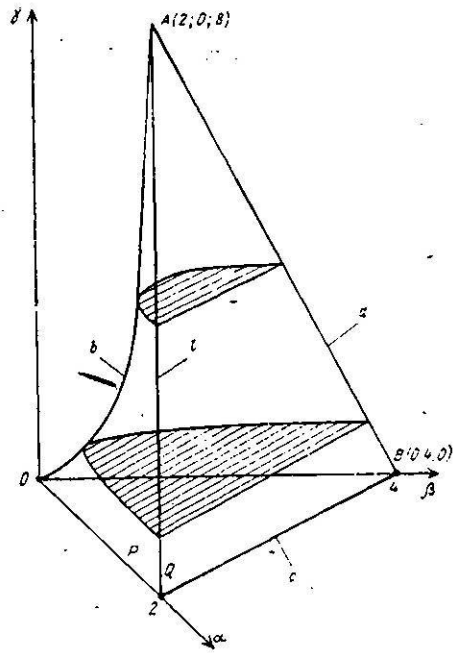


Рис. 9.17. Область устойчивости фильтра скользящего сглаживания параметров квадратичной траектории.

где $a_1 = 3 - a - \beta - 0{,}5\gamma$; $a_2 = 3 - 2\alpha - \beta + 0{,}5\gamma$; $a_3 = a - 1$.

Коэффициенты при Z^{-n} и являются ординатами переходного процесса для моментов времени nT_0. Выбирая различные значения a, β и V из области устойчивости фильтра, можно построить графики переходного процесса, ординаты которых будут пропорциональны ширине необходимого строба при экстраполяции сглаженной координаты.

Исследования переходного процесса показывают, что выбор значений $a > 1$, $\beta > 0{,}5$, $\gamma > 0{,}5$ является нежелательным, вследствие большого времени установления переходного процесса фильтра и возрастания случайной составляющей суммарной ошибки сглаживания.

г) Устойчивость фильтра. Для того чтобы фильтр «скользящего» сглаживания параметров квадратичной траектории был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель передаточной характеристики (34) по ошибке экстраполяции сглаженной координаты $K_{\Delta\hat{U}пэ}(Z^{-1})$ имел нули внутри единичного круга на комплексной плоскости Z.

Для определения устойчивости воспользуемся методом [11], который исходит из того факта, что величина интегральной оценки в области неустойчивой работы фильтра равна бесконечности, т. е. $\mathcal{J}_3^* = 0$. Из формул (36) — (38) следует, что это условие выполняется в случае

$$4 - 2\alpha - \beta = 0, \qquad (9.6.43)$$

$$2\alpha\beta + \alpha\gamma - 2\gamma = 0, \qquad (9.6.44)$$

$$a > 0,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma \geqslant 0, \qquad (9.6.45)$$

Условие (45) следует из принципа физической реализуемости фильтра.

Уравнение (43) описывает треугольник устойчивости фильтра «скользящего» сглаживания параметров линейной траектории и совместно с условиями физической реализуемости фильтра определяет область возможных значений для коэффициентов сглаживания a и β:

$$0 < \alpha < 2,\ 0 \leqslant \beta < 4. \qquad (9.6.46).$$

Уравнение (44) описывает поверхность второго порядка. Разрешив его относительно γ, получим

$$y = 2\alpha\beta/(2 - \alpha), \qquad (9.6.47)$$

С учетом условий (46) из данного уравнения получается область возможных значений γ: $0 \leqslant \gamma < 8$.

Таким образом, необходимые и достаточные условия устойчивости фильтра имеют вид

$$0 < a \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \beta < 4, \quad 0 \leqslant \gamma < 8. \qquad (9.6.48)$$

Область устойчивости фильтра, изображенная на рис. 9.17, представляет собой пирамиду сложной формы в системе координат a, β, y. В ее основании лежит треугольник устойчивости фильтра «скользящего» сглаживания параметров линейной траектории. В пространстве область устойчивости ограничивается поверхностью второго порядка, описываемой уравнением (44), и плоскостью Q. Если разрешить уравнение (44) относительно β, то получим

$$\beta = \gamma\ (2 - \alpha)/2\alpha.$$

Откуда следует, что при $\alpha = 2$ ребро l пирамиды (рис. 9.17) лежит в плоскости $\alpha 0\gamma$ и перпендикулярно плоскости $\alpha 0\beta$. Кроме того, грань Q перпендикулярна плоскости $\alpha 0\beta$.

В результате совместного решения уравнений (43) и (44) с учетом условия $0 \leqslant y < 8$ получаем, что грань a является прямой, соединяющей точки A и B (рис. 9.17).

Таким образом, область устойчивости рассматриваемого фильтра имеет следующие особенности:

— ребра l и a являются линейными,

— грань P представляет собой поверхность второго порядка,

— вся пространственная фигура стягивается при $\alpha \to 2$, $\beta \to 0$ в точку A с координатами $a = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 8$.

9.7. Экспоненциальное сглаживание параметров траектории

Рассмотрим еще один метод последовательного сглаживания параметров траектории с помощью фильтра с постоянной памятью, который называется методом экспоненциального сглаживания. При экспоненциальном сглаживании предыдущие значения параметров учитываются с убывающими по экспоненциальному закону весами.

9.7.1. Формула экспоненциального сглаживания

Для произвольного скалярного параметра Θ формула экспоненциального сглаживания имеет вид [11]

$$\hat{\theta}_n = (1 - \xi)\,\theta_n + \xi f\left[\hat{\theta}_{n-1}, \hat{\theta}_{n-2} \ldots \hat{\theta}_{n-s}\right], \qquad (9.7.1)$$

где θ_n — измеренное значение параметра в n-м обзоре; $\hat{\theta}_n$ — сглаженное значение параметра в n-м обзоре; $f[\ldots]$ — некоторая функция предыдущих сглаженных значений параметра; ξ — постоянная величина, имеющая смысл коэффициента сглаживания.

В простейшем случае сглаживания неизменного во времени параметра для нахождения очередного сглаженного значения используется

только текущее измерение и предыдущее сглаженное значение. Формула сглаживания (1) имеет тогда вид

$$\hat{\theta}_n = (1-\xi)\,\theta_n + \xi\hat{\theta}_{n-1}. \qquad (9.7.2)$$

Формула (2) может быть использована, например, при сглаживании курса $Q_ц$ и скорости $V_ц$ аэродинамической цели при равномерном и прямолинейном ее полете, а также при сглаживании эллиптических параметров неманеврирующей космической цели. Основным ее достоинством является простота реализации на ЦВМ.

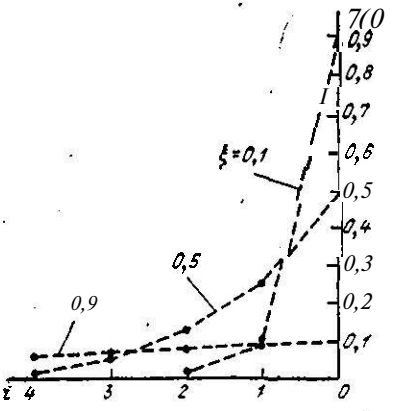


Рис. 9.18. Графики весовой функции $\eta(i)$.

Формулу (2) можно записать в виде

$$\hat{\theta}_n = (1-\xi)\,\theta_n + \xi(1-\xi)\,\theta_{n-1} + \xi^2(1-\xi)\,\theta_{n-2} + \ldots + \xi^n(1-\xi)\,\theta_0 = \sum_{i=0}^{n} \eta_i\,\theta_{n-i},$$

где $\eta_i = (1-\xi)\,\xi^i$ — весовая функция учитываемых при сглаживании измеренных значений параметра.

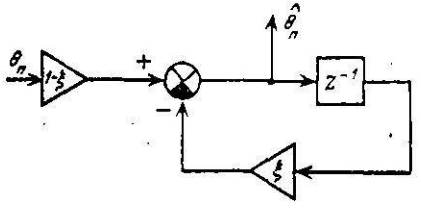


Рис. 9.19. Структурная схема фильтра экспоненциального сглаживания.

На рис. 9.18 изображены графики весовой функции η_i при различных значениях ξ ($\xi = 0{,}9;\ 0{,}5;\ 0{,}1$). Из рисунка видно, что весовая функция имеет вид экспоненты. Чем меньше ξ, тем в меньшей степени учитываются результаты предыдущих измерений (меньше сглаживание) и, наоборот, чем больше ξ, тем больше сглаживание, т. е. тем больше результатов предыдущих измерений параметра учитываются при вычислении сглаженного значения. Поэтому коэффициент ξ и получил название коэффициента экспоненциального сглаживания.

Формула (2) представляет собой уравнение движения замкнутой импульсной САУ, структурная схема которой изображена на рис. 9.19. Легко показать, что такая система устойчива при $0 \leqslant \xi < 1$.

При сглаживании линейно изменяющегося параметра формула экспоненциального сглаживания имеет вид

$$\hat{\theta}_n = (1-\xi)\,\theta_n + \xi f\left[\hat{\theta}_{n-1},\ \hat{\theta}_{n-2}\right]. \qquad (9.7.3)$$

Операция $f[\ldots]$ над предыдущими сглаженными значениями параметра должна в этом случае состоять в нахождении экстраполирован-

мого значения параметра на момент t_n последнего измерения. Если принять, например, что оценки $\hat{\theta}_{n-1}$ и $\hat{\theta}_{n-2}$ равноточны, то

$$f\left[\hat{\theta}_{n-1}, \hat{\theta}_{n-2}\right] = \hat{\theta}_{n\vartheta} = 2\hat{\theta}_{n-1} - \hat{\theta}_{n-2}. \tag{9.7.4}$$

Естественно, для экстраполяции могут быть использованы и более сложные формулы, учитывающие неравноточность оценок.

Аналогичным образом может быть получена формула экспоненциального сглаживания параметра, изменяющегося по квадратичному закону.

Мы в дальнейшем ограничимся случаем экспоненциального сглаживания неизменного во времени параметра.

9.7.2. Ошибки экспоненциального сглаживания параметров. Выбор оптимального значения ξ

Качество экспоненциального сглаживания оценивается по величине случайных и динамических ошибок сглаживания.

Мгновенное значение суммарной ошибки сглаживания параметра запишем в виде

$$\Delta\hat{\theta}_{\Sigma_n} = \hat{\theta}_n - \theta_n^{(0)}, \tag{9.7.5}$$

где $\theta_n^{(0)}$ — истинное значение параметра в момент времени t_n;

$$\hat{\theta}_n = \sum^{n} \eta_l \theta_{n-l}; \tag{9.7.6}$$

θ_{n-l} — результаты измерения (расчета) параметров, которые представляют собой аддитивную смесь истинных значений $\theta_{n-l}^{(0)}$ и ошибок измерения $\Delta\theta_{n-l}$, т. е.

$$\theta_{n-l} = \theta_{n-l}^{(0)} + \Delta\theta_{n-l}. \tag{9.7.7}$$

Используя выражения (6) и (7), суммарную ошибку сглаживания параметра можно представить в следующем виде:

$$\Delta\theta_{n\Sigma} = \sum_{l=0}^{n} \eta_l \left(\theta_{n-l}^{(0)} + \Delta\theta_{n-l}\right) - \theta_n^{(0)} =$$

$$= \left(\sum^{n} \eta_l \, \theta_{n-1}^{(0)} - \theta_n^{(0)} \right) + \sum^{n} \eta_l \, \Delta\theta_{n-l}. \tag{9.7.8}$$

Первое слагаемое в выражении (8), заключенное в скобки, представляет собой динамическую составляющую $\Delta_\partial \hat{\theta}_n$ суммарной ошибки сглаживания, а второе — случайную составляющую $\Delta_{сл}\hat{\theta}_n$ этой ошибки.

Так как случайная и динамическая составляющие не коррелированы между собой, дисперсия суммарной ошибки будет равна

$$\sigma_\Sigma^2 = \sigma_{\hat{\theta}_n}^2 + \left(\Delta_\partial \hat{\theta}_n\right)^2.$$

Вычислим дисперсию случайной и квадрат динамической составляющих ошибки.

Так как математическое ожидание случайной ошибки равно нулю, то дисперсию этой ошибки можно записать в виде

$$\sigma^2_{\hat{\theta}_n} = M\left[\left(\sum_{i=0}^{n} \eta_i \Delta\theta_{n-i}\right)^2\right]$$

После элементарных преобразований получим

$$\sigma^2 \quad \sum_{} \sum_{} \quad R_{\theta}(i-j)$$

где $R_\theta\ (i-j)$ — корреляционный момент случайных ошибок измерения параметра.

Предположим, что сглаживаемый параметр вычисляется по двум измеренным значениям координат, причем каждое измеренное значение участвует в расчете параметра дважды. Тогда, при условии отсутствия межобзорной корреляции измеренных значений координат, вычисленные значения параметра будут коррелированы в двух соседних обзорах. Непосредственным подсчетом можно показать, что коэффициент корреляции в этом случае отрицателен и равен 0,5.

Следовательно,

$$R_\theta(i-j) = \begin{cases} \sigma^2_\theta & \text{при } i-j=0, \\ -0{,}5\sigma^2_\theta & \text{при } |i-j|=1, \\ 0 & \text{при } |i-j|>1, \end{cases} \qquad (9.7.9)$$

где σ^2_θ — дисперсия расчета параметра по двум измеренным значениям координат.

С учетом (9) выражение для дисперсии случайной ошибки можно записать в виде

$$\sigma^2_{\hat{\theta}_n} = \sigma^2_\theta\left[\sum^{n} \eta_i^2 - \sum^{n} \eta_i \eta_{i+1}\right].$$

Имея в виду, что при $n \to \infty$ (установившийся режим работы)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [(1-\xi)\xi^i]^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\xi)^2 \xi^{2i} = (1-\xi)^2 (1+\xi^2+\xi^4+\ldots),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i \eta_{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\xi)^2 \xi^{2i+1} = (1-\xi)^2 (\xi+\xi^3+\xi^5+\ldots),$$

получим окончательно

$$\sigma^2_{\hat{\theta}_n} = \sigma^2_\theta \frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}. \qquad (9.7.10)$$

Формула (10) показывает, что дисперсия случайной ошибки экспоненциального сглаживания параметра тем меньше, чем больше коэффициент сглаживания ξ.

Вычислим теперь квадрат динамической ошибки сглаживания параметра для случая установившегося маневра цели по этому параметру.

Коэффициенты динамической ошибки C_i определяются из выражения (см. § 3.3)

$$C_i = \frac{(-1)^i}{i!}\mu_i - a_i,$$

где

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{\infty} j^i \eta_j \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l);$$

l — степень многочлена, описывающего функцию $\theta^{(0)}(t)$.

Коэффициенты a_i принимают значения

$$a_0 = 1,\ a_1 = p,\ \ldots.\ a_l = p^l/l!,$$

где p — число периодов экстраполяции входного сигнала; при сглаживании $p = 0$, поэтому $a_1 = 0$.

Для случая линейного изменения параметра при маневре ($l = 1$), вычисление коэффициентов динамической ошибки дают

$$\mu_0 = \sum_{j=0}^{\infty} j^0 \eta_j = (1-\xi)\sum_{j=0}^{\infty} \xi^j = 1,$$

следовательно, $C_0 = 0$;

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{\infty} j\eta_j = (1-\xi)\sum_{j=0}^{\infty} j\xi^j = \frac{\xi}{1-\xi},$$

следовательно, $C_1 = \xi/(1-\xi)$.

Таким образом,

$$\Delta_\partial \hat{\theta}_n = \frac{\xi}{1-\xi}\Delta^{(1)}\theta_n,$$

а квадрат этой ошибки определяется по формуле

$$(\Delta_\partial \hat{\theta}_n)^2 = \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2}(\Delta^{(1)}\theta_n)^2. \qquad (9.7.11)$$

С учетом выражений (10) и (11) дисперсия относительной суммарной ошибки сглаживания равна

$$\frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\theta^2} = \frac{(1-\xi)^2}{1+\xi} + \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2}\psi^2, \qquad (9.7.12)$$

где $\psi^2 = (\Delta^{(1)}\theta_n)^2/\sigma_\theta^2$ — относительная интенсивность маневра.

На рис. 9.20 построены графики зависимости дисперсии относительной суммарной ошибки сглаживания параметра от коэффициента сглаживания ξ при различных интенсивностях маневра. Графики имеют экстремумы минимального типа, которые смещаются влево при увеличении интенсивности маневра. Отсюда можно сделать вывод о целесообразности изменения коэффициента сглаживания ξ с целью поддержания ошибки на минимальном или близком к минимальному уровню для каждого конкретного значения интенсивности маневра. Из графиков ошибок также следует, что выбор коэффициентов ξ для каж-

дого значения интенсивности маневра некритичен, так как экстремумы графиков тупые.

Для нахождения оптимального значения $\xi_{опт}$ по критерию минимума дисперсии суммарной ошибки продифференцируем выражение (12) по ξ и приравняем результат к нулю. Окончательное уравнение для $\xi_{опт}$ имеет вид

$$(1-\xi_{опт}^2)(1-\xi_{опт})^3+2(1-\xi_{опт})^4-2\xi_{опт}(1+\xi)^2\psi^2=0.$$

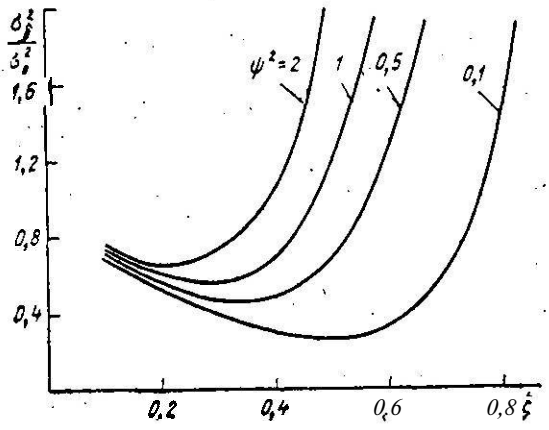


Рис. 9.20. Графики относительных суммарных ошибок экспоненциального сглаживания.

Используя это уравнение, можно выбрать оптимальное значение коэффициента сглаживания $\xi_{опт}$, если известна интенсивность маневра цели ψ^2 по параметру,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маневрирование космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1970 Авт. К. Б. Алексеев, Г. Г. Бебенин, В. А. Ярошевский.

2. Математические основы современной радиоэлектроники. М., «Сов. радио», 1968. Авт.: И. А. Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левий, Р. Л. Стратонович.

3. Богуславский И. А. Методы навигации и управления по неполной статистической информации. М., «Машиностроение», 1970.

4. Романенко А. Ф., Сергеев Г. А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., «Сов. радио», 1968.

5. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, 1966.

6. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М., «Сов. радио», 1968.

7. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. Под ред. Р. Л. Добрушина. М., ИЛ, 1960.

8. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.

9. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.

10. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. — «Известия АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 6, № 1.

11. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1958.

12. Goujet J. P. Utilization de la Transformation en 2 pour l'etude de la poursuite automatizue des informations radar. — «Annales de Radio electricite». 1962, № 1.

13 Теория линейных следящих систем. Пер. с англ. Под ред. А. М. Летова. М., Физматгиз, 1961. Авт.: Ньютон Д. К., Гулд А. А., Кайзер Д. Ф.

14. Levine N. A new Tecnique for Increasing the Flexibility of Recursive Least Squares Date Smoothing. — «Bell Sistem Techn. Journ.,» 1961, № 3.

15. Karush W. Stability of a Method of Smoothing in a Digital Computer. — «IRE Trans.», 1955, v. EC-4, № 1.

16. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Technology Press and Wiley, New York, 1949.

17. Склански й Д. Выбор оптимальных параметров системы сопровождения при обзоре. — «Вопросы радиолокационной техники», 1958, № 2.

18. Калман Р., Бьюси Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. — «Труды Американского общества инженеров-механиков: Сер. Д,» М., ИЛ, 1961, т. 33, № 1.

19. Singer R., Behnke K. Real-time tracking filter evaluation and selection. for tactical applications. — «IEEE Trans.», 1971 AES-7, № I.

20. Экспресс-информация «Астронавтика и ракетодинамика», 1969, № 35, реф. 519.

21. Точность измерения параметров движения космических аппаратов радиотехническими методами. М., «Сов. радио», 1970. Авторы: С. Д. Сильвестров и др.

10. ОБЪЕДИНЕНИЕ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ НЕСКОЛЬКИХ РАЗНЕСЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ [1]

10.1. Задачи, решаемые при объединении информации от нескольких источников

Кроме рассмотренных в предыдущих главах задач по обработке информации одной РЛС, в радиолокационных системах, включающих несколько РЛС, возникают новые специфические задачи обработки, связанные с объединением (обобщением) информации об одной цели, поступающей от нескольких источников. Решение этих задач в автоматизированной радиолокационной системе обычно называется третичной обработкой информации [1].

Основными операциями третичной обработки являются:

— отбор и отождествление радиолокационных отметок, полученных от различных источников по принадлежности к одной цели;

— вычисление усредненных оценок параметров траекторий тех целей, данные о которых получены от нескольких источников.

При выполнении перечисленных операций используются результаты вторичной обработки информации от каждой РЛС. Информация передается на пункт сбора в виде сообщений, каждое из которых относится к одной цели, и содержит следующие данные:

1) i — номер источника информации (РЛС),

2) j — номер цели, присвоенной i-м источником (РЛС),

3) $(r_{ij}, \beta_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dot{r}_{ij}, \dot{\beta}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, t_{ij})$ — совокупность параметров траектории j-й цели в системе координат i-й РЛС и момент времени их привязки;

4) корреляционная матрица Ψ_{ij} ошибок оценки параметров;

5) характеристики j-й цели по данным i-й РЛС, в состав которых входят, например:

— характеристика государственной принадлежности — ХГП_{ij},

— тип цели — T_{ij},

— состав цели и т. д.;

6) признаки цели, полученные в результате предыдущих этапов обработки, такие, как:

— признак новизны $\Pi_{\text{н}ij}$, характеризующий тот факт, что j-я цель является новой для i-й РЛС (только что поставлена на сопровождение),

— признак маневра цели $\Pi_{\text{м}ij}$, показывающий, что по данным i-й РЛС j-я цель совершает маневр,

— признак потери цели $\Pi_{\text{п}ij}$, показывающий, что по j-й цели на i-й РЛС в текущем обзоре имеет место пропуск отметки.

Имея в виду перечисленные данные, каждое сообщение можно представить в виде

$$J_{ij} = \{ij,\ U_{ij},\ \dot{U}_{ij},\ \Psi_{ij},\ X_{ij}, \Pi_{ij}, t_{ij}\}, \qquad (10.1.1)$$

где $U_{ij} = r_{ij},\ \beta_{ij},\ \varepsilon_{ij}$ — координаты цели; $\dot{U}_{ij} = \dot{r}_{ij}, \dot{\beta}_{ij},\ \dot{\varepsilon}_{ij}$ — составляющие вектора скорости цели; X_{ij} — характеристики цели; Π_{ij} — признаки цели.

В результате третичной обработки на пункте сбора формируются обобщенные сообщения по каждой цели в виде

$$\bar{J}_{\text{р}} = \{\text{р}, U_{\text{р}}, \dot{U}_{\text{р}}, \Psi_{\text{р}}, \bar{X}_{\text{р}}, t_{\text{р}}\}, \qquad (10.1.2)$$

где р — номер объединенного сообщения (траектории). Эти сообщения и используются в дальнейшем в. системе управления для оценки обстановки в зоне, обслуживаемой пунктом сбора информации.

При решении задач отождествления информации в первую очередь сравниваются координатные и скоростные компоненты сообщений, полученных от различных источников. Такое сравнение имеет смысл только после приведения этих сообщений к единому началу отсчета в пространстве и времени,

Приведение отождествляемых сообщений к единому началу отсчета в пространстве соответствует пересчету их параметров в систему координат пункта сбора информации. Пересчет производится по обычным формулам преобразования координат в пространстве [4]. Одновременно производится пересчет в систему координат пункта сбора корреляционной матрицы ошибок оценки параметров элементарных сообщений.

Приведение отождествляемых сообщений к единому началу отсчета во времени осуществляется путем экстраполяции координат и составляющих вектора скорости на очередной (k-й) момент объединения. При отождествлении сообщений об аэродинамических объектах, учитывая сравнительно невысокую скорость изменения координат, при

экстраполяции принимается обычно гипотеза о прямолинейном движении цели, независимо от наличия признака маневра. Экстраполяция параметров космических объектов производится по полиномам, степени выше первой.

Рассмотренные операции преобразования параметров сообщений являются предварительными. После их выполнения можно перейти непосредственно к решению задачи отождествления сообщений. Эта задача решается в два этапа: сначала производится грубое отождествление пар сообщений и формирование групп предварительно отождествленных сообщений, а затем — точное отождествление сообщений, отобранных в группы по каждой цели.

На первом этапе отождествление производится путем попарного сравнения координатных и скоростных составляющих сообщений J_{ij} и J_{kl}. Очевидно, если- сообщения J_{ij} и J_{kl} получены от одной и той же цели, то должны выполняться условия

$$|U_{ij}-U_{kl}|\leqslant\Delta U_{доп},\quad |\dot{U}_{ij}-\dot{U}_{kl}|\leqslant\Delta\dot{U}_{доп}, \qquad (10.1.3)$$

где $\Delta U_{доп}$, $\Delta\dot{U}_{доп}$ — допустимые отклонения, определяемые ошибками оценки и экстраполяции координат и составляющих вектора скорости соответственно.

Все сообщения, удовлетворяющие условиям (3), объединяются в «пары», после чего «пары» объединяются в группы. Каждую из таких групп будем называть группой предварительно отождествленных сообщений (для краткости — группой А).

Допустимые отклонения $\Delta U_{доп}$ и $\Delta\dot{U}_{доп}$ в выражении (3) выбираются из условия, чтобы вероятность попадания в группу А всех без исключения сообщений, принадлежащих одной цели, была близка к единице. С учетом ошибок предыдущих звеньев обработки (первичной обработки, вторичной обработки), а также ошибок преобразования и экстраполяции координат, эти допустимые отклонения получаются достаточно большими. Поэтому группы сообщений, отобранных по условию (3), могут содержать в своем составе сообщения о нескольких целях. В дальнейшем необходимо анализировать сообщения, отобранные в группу А, с целью их точного отождествления.

Для точного отождествления сообщений группы А могут быть использованы характеристики и признаки, выдаваемые РЛС, в том числе признаки принадлежности сообщений к источникам информации и нумерация целей в системе этих источников (РЛС). Возможное распределение сообщений группы А по источникам информации может соответствовать одному из следующих вариантов:

а) все сообщения поступили от одного источника,

б) все сообщения принадлежат различным источникам,

в) от нескольких источников поступило одинаковое число сообщений,

г) от нескольких источников поступило неодинаковое число сообщений.

Для варианта а) безусловным является тот факт, что все сообщения, отобранные в группу А, принадлежат различным целям (истинным

или ложным) и не подлежат отождествлению. Следовательно, группа А должна быть «расформирована». Для варианта б) принимается, что все отобранные в группу А сообщения относятся к одной цели. Допустимость такого решения следует из того, что при наличии двух целей в группе А хотя бы одна РЛС выдала по ним два сообщения. Для варианта в) общее количество целей в группе А определяется числом сообщений от любого источника. Это заключение вытекает из решений для первых двух вариантов, так как третий вариант можно рассматривать как комбинацию двух первых. Для варианта г) считается, что наиболее вероятные данные поступают от источника, от которого имеется в группе А наибольшее число сообщений.

Таким образом, признаки принадлежности сообщений к источникам информации позволяют решить задачу точного отождествления вплоть до образования вариантов группирования элементарных сообщений (сообщений, полученных от отдельных источников) по каждой цели. Для вариантов а) и б) полученные решения являются окончательными. Для других вариантов требуется дальнейшая обработка с целью принятия окончательного решения на отождествление сообщений.

При принятии решений на отождествление сообщений существенную пользу с точки зрения упрощения алгоритмов может дать анализ признаков цели (цель новая, цель маневрирует и т. д.). Однако окончательное решение принимается, как правило, на основе сравнения квадратичных форм возможных вариантов отождествления (см. следующий параграф).

Решением задачи выбора оптимального варианта группирования сообщений заканчивается этап точного отождествления информации, полученной от нескольких источников по одной цели.

Предположим, что задача оптимального группирования сообщений решена. Следующей операцией по объединению информации является вычисление координат объединенных сообщений. Задача эта в первую очередь сводится к усреднению координат и составляющих вектора скорости по данным нескольких, в общем случае неравноточных, источников. Ее решение в простейшем случае сводится к нахождению среднего арифметического координат и составляющих вектора скорости сообщений, входящих в группу по каждой цели. Так как источники сообщений являются, как правило, неравноточными, то более правильным является усреднение с весами, обратно пропорциональными дисперсиям ошибок составляющих. Наконец, можно в качестве усредненных взять координаты и составляющие вектора скорости сообщения, полученного от одного из источников, если имеются данные, что он выдает наиболее точную информацию.

Кроме обобщения координат и составляющих вектора скорости каждой цели, в процессе объединения информации должно производиться также обобщение характеристик целей, полученных на основе анализа радиолокационной информации на РЛС. Необходимо здесь только отметить, что характеристики целей находятся по данным радиолокационных измерений недостаточно точно и при их оценке и,

тем более, при объединении требуется, как правило, вмешательство человека-оператора.

Усредненные сообщения необходимо в дальнейшем привязать к объединенным траекториям. Задача эта решается чрезвычайно просто для варианта б), когда все сообщения группы А относятся к одной цели. Для других вариантов, когда в группу А попадают сообщения, принадлежащие нескольким целям, необходимо решать задачу оптимального распределения полученных усредненных сообщений между конкурирующими объединенными траекториями. Очевидно наиболее подходящим в этом случае является метод распределения (привязки) сообщений по критерию минимальных эллиптических отклонений. Этот метод достаточно подробно рассматривался при изучении вторичной обработки.

Задача распределения новых сообщений по траекториям может быть решена и несколько иначе. В следующем параграфе будет показано, что при периодическом объединении можно поставить и решить оптимальным образом задачу одновременного отождествления сообщений и их распределения по траекториям. В этом случае усреднение отождествленной информации производится после ее распределения по траекториям.

В принципе на этом можно было бы считать задачу объединения информации решенной. Однако не всегда полученная таким образом объединенная информация будет удовлетворять потребителей, так как усредненные сообщения остаются пока «несвязанными», т. е. составляют последовательность несглаженных наборов параметров объединенных траекторий. Если потребителям необходимы сглаженные по данным нескольких источников параметры траекторий целей, то потребуется еще дальнейшая обработка объединенных сообщений с целью их сглаживания. Короче говоря, может оказаться необходимым построение сглаженной объединенной траектории, как это делается в процессе вторичной обработки радиолокационной информации на РЛС.

Таким образом, используя всю информацию о параметрах траекторий, полученную на РЛС, на пункте сбора можно путем дополнительной обработки устранить избыточную информацию об отдельных траекториях и сформировать обобщенную обстановку в зоне ее ответственности. Принципы реализации основных операций обработки при обобщении информации нескольких источников рассматриваются в дальнейшем.

10.2. Статистические методы отождествления информации нескольких источников

Предварительное рассмотрение операций, выполняемых в процессе объединения радиолокационной информации нескольких источников показывает, что большинство из них либо изучались раньше, либо не относятся к собственно операциям обработки (как, например, операция преобразования сообщений в систему координат на пункте сбора).

Единственной существенно новой операцией в данном случае является операция отождествления сообщений с целью их группирования по принадлежности к одной и той же траектории. Рассмотрению некоторых оптимальных методов выполнения этой операции посвящен настоящий параграф.

10.2.1. Оптимальное отождествление сообщений, поступающих от двух РЛС по двум целям

Пусть на пункт сбора поступают сообщения от двух РЛС ($i = 1, 2$). Сообщение каждой РЛС содержит координаты и составляющие вектора скорости двух целей ($j = 1, 2$) и приведены к декартовой системе координат в точке привязки пункта сбора информации, а также приведены путем экстраполяции к моменту времени объединения t_k. Каждое из сообщений записывается в виде

$$J_{ij} = \{x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, \dot{x}_{ij}, \dot{y}_{ij}, \dot{z}_{ij}, \Psi_{ij}, t_k\}.$$

Так как в группу А грубо отождествленных сообщений попадают цели с близкими координатами, то корреляционные матрицы ошибок оценки параметров можно считать одинаковыми для всех сообщений, выдаваемых одним источником, т. е.

$$\Psi_{ij} = \Psi_i.$$

Допустим, далее, что каждое из принятых сообщений J_{ij} может быть отождествлено с одним из двух объединенных сообщений (траекторий) J_p ($p = 1, 2$), которые также предполагаются представленными в прямоугольной системе координат и экстраполированными на соответствующий момент объединения t_k.

Задача, возникающая на пункте сбора информации, состоит в том, чтобы правильно сгруппировать сообщения, принадлежащие двум целям, и правильно привязать их к соответствующим объединенным траекториям. Эта задача по своему характеру есть задача проверки статистических гипотез. Решается она следующим образом.

Представим сначала все возможные комбинации группирования и привязки сообщений. При этом будем руководствоваться правилом, согласно которому два сообщения, выданные одной РЛС и отобранные в группу А, принадлежат различным целям. Для двумерного случая соответствующая геометрическая модель представлена на рис. 10.1.

Как видно из рис. 10.1, при решении задач группирования и привязки двух новых сообщений для двух объединенных траекторий возможны следующие четыре несовместные гипотезы:

1) гипотеза I (H_I): сообщения J_{11} и J_{21} относятся к траектории J_1, а сообщения J_{12} и J_{22} — к траектории J_2;

2) гипотеза II (Ни): сообщения J_{12} и J_{22} относятся к траектории J_1, а сообщения J_{11} и J_{21} — к траектории J_2;

3) гипотеза III (H_{III}): сообщения J_{21} и J_{12} относятся к траектории J_1, а сообщения J_{11} и J_{22} — к траектории J_2;

4) гипотеза IV (H_{IV}): сообщения J_{11} и J_{22} относятся к траектории $\bar{J}_1$, а сообщения J_{21} и J_{12} — к траектории $\bar{J}_2$.

В данной задаче потери, связанные с ошибочным принятием любой из перечисленных гипотез, можно считать одинаковыми. Функция потери может быть взята равной некоторому наперед заданному постоянному числу при выборе любой неправильной гипотезы и равной нулю при выборе правильной гипотезы. Вследствие этого решение о выборе той или иной гипотезы (из возможных четырех) можно принимать по критерию максимума правдоподобия, т. е. по максимальному значению соответствующей функции правдоподобия гипотез.



Рис. 10.1. К задаче группирования и привязки сообщений для двух траекторий.

Имея в виду статистическую независимость сообщений различных источников, функции правдоподобия гипотез $H_I - H_{IV}$ записываются в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
w(H_I) &= w_I(\vartheta_{11}\,\vartheta_{21}/\bar{\vartheta}_1;\ \vartheta_{12},\ \vartheta_{22}/\bar{\vartheta}_2) = \\
&= w(\vartheta_{11}/\bar{\vartheta}_1)\,w(\vartheta_{21}/\bar{\vartheta}_1)\,w(\vartheta_{12}/\bar{\vartheta}_2)\,w(\vartheta_{22}/\bar{\vartheta}_2), \\
w(H_{II}) &= w_{II}(\vartheta_{12},\ \vartheta_{22}/\bar{\vartheta}_1;\ \vartheta_{11},\ \vartheta_{21}/\bar{\vartheta}_2) = \\
&= w(\vartheta_{12} \\
w(H_{III}) &= w_{III}(\vartheta_2\vartheta_{12}/\vartheta_1;\ \vartheta_{11},\ \vartheta_{22}/\vartheta_2) = \\
&= w(\vartheta_{21}/\vartheta_1)\,w(\vartheta_{12}/\vartheta_1)\,w(\vartheta_{11}/\bar{\vartheta}_1)\,w(\vartheta_{22}/\bar{\vartheta}_2), \\
w(H_{IV}) &= w_{IV}(\vartheta_{11},\ \vartheta_{22}/\bar{\vartheta}_1;\ \vartheta_{21},\ \vartheta_{12}/\bar{\vartheta}_2) = \\
&= w(\vartheta_{11}/\bar{\vartheta}_1)\,w(\vartheta_{22}/\bar{\vartheta}_1)\,w(\vartheta_{21}/\bar{\vartheta}_2)\,w(\vartheta_{12}/\bar{\vartheta}_2),
\end{aligned}
\qquad (10.2.1)
$$

где ϑ_{ij} — вектор параметров сообщения J_{ij}; $\bar{\vartheta}_p$ — вектор параметров сообщения J_p; $w(\vartheta_{ij}/\bar{\vartheta}_p)$ — многомерная условная плотность вероятности параметров сообщения J_{ij} при условии, что это сообщение относится (принадлежит) к объединенному сообщению $\bar{J}_p$.

При принятии решения о выборе одной из альтернативных гипотез естественным является использование разностей между соответствующими составляющими вектора параметров вновь полученных и объединенных сообщений. Поэтому от условных плотностей $w(\vartheta_{ij}/\bar{\vartheta}_p)$

необходимо перейти к плотностям распределения для вектора разностей параметров сообщенкй J_{ij} и $\bar{J}_{\mathrm{p}}$, т. е. для вектора

$$\Delta\vartheta_{ij/\mathrm{p}}=\begin{Vmatrix} x_{ij}-\bar{x}_{\mathrm{p}} \\ y_{ij}-\bar{y}_{\mathrm{p}} \\ z_{ij}-\bar{z}_{\mathrm{p}} \\ \dot{x}_{ij}-\bar{\dot{x}}_{\mathrm{p}} \\ \dot{y}_{ij}-\bar{\dot{y}}_{\mathrm{p}} \\ \dot{z}_{ij}-\bar{\dot{z}}_{\mathrm{p}} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \Delta x_{ij/\mathrm{p}} \\ \Delta y_{ij/\mathrm{p}} \\ \Delta z_{ij/\mathrm{p}} \\ \Delta \dot{x}_{ij/\mathrm{p}} \\ \Delta \dot{y}_{ij/\mathrm{p}} \\ \Delta \dot{z}_{ij/\mathrm{p}} \end{Vmatrix}. \qquad (10.2.2)$$

Для вектора разности $\Delta\vartheta_{ij/p}$ может быть принят нормальный закон распределения вероятности. Тогда соответствующая условная плотность вероятности записывается в виде

$$w(\Delta\vartheta_{ij/\mathrm{p}})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^6\,|\Psi_{ip}|}}\exp\left[-\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{ij/\mathrm{p}}\,\Psi^{-1}_{ip}\,\Delta\vartheta_{ij/\mathrm{p}}\right], \qquad (10.2.3)$$

где $\Psi_{ip}=\Psi_i+\Psi_{\mathrm{p}}$ — корреляционная матрица ошибок для вектора разности параметров сравниваемых сообщений, элементы которой равны сумме одноименных элементов матриц ошибок оценки параметров нового и обобщенного сообщений [обе эти матрицы имеют размерность (6×6)].

С учетом выражений (2) и (3) функции правдоподобия гипотез записываются в виде

$$\begin{aligned}
w(\mathrm{H_I}) &= c\exp\Big[-\tfrac{1}{2}(\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{11/1}\,\Psi^{-1}_{11}\Delta\vartheta_{11/1}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{21/1}\,\Psi^{-1}_{21}\quad{}_{21/1}+\\
&\quad+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{12/2}\,\Psi^{-1}_{12}\,\Delta\vartheta_{12/2}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{22/2}\,\Psi^{-1}_{22}\,\Delta\vartheta_{22/2})\Big],\\
w(\mathrm{H_{II}}) &= c\exp\Big[-\tfrac{1}{2}(\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{12/1}\,\Psi^{-1}_{11}\Delta\vartheta_{12/1}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{22/1}\,\Psi^{-1}_{21}\Delta\vartheta_{22/1}+\\
&\quad+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{11/2}\,\Psi^{-1}_{12}\,\Delta\vartheta_{11/2}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{21/1}\,\Psi^{-1}_{22}\,\Delta\vartheta_{21/1})\Big],\\
w(\mathrm{H_{III}}) &= c\exp\Big[-\tfrac{1}{2}(\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{21/1}\,\Psi^{-1}_{21}\Delta\vartheta_{21/1}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{12/1}\,\Psi^{-1}_{11}\Delta\vartheta_{12/1}+\\
&\quad+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{11/2}\,\Psi^{-1}_{12}\,\Delta\vartheta_{11/2}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{22/2}\,\Psi^{-1}_{22}\,\Delta\vartheta_{22/2})\Big],\\
w(\mathrm{H_{IV}}) &= c\exp\Big[-\tfrac{1}{2}(\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{11/1}\,\Psi^{-1}_{11}\Delta\vartheta_{11/1}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{22/1}\,\Psi^{-1}_{21}\Delta\vartheta_{22/1}+\\
&\quad+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{21/2}\,\Psi^{-1}_{22}\,\Delta\vartheta_{21/2}+\Delta\vartheta^{\mathrm{T}}_{12/2}\,\Psi^{-1}_{12}\,\Delta\vartheta_{12/2})\Big].
\end{aligned} \qquad (10.2.4)$$

Обозначим суммы квадратичных форм в круглых скобках выражений (4) через Σ_{I}, Σ_{II}, Σ_{III} и Σ_{IV} соответственно. Тогда оптимальное по критерию максимального правдоподобия правило принятия ре-

шения на группирование и привязку сообщений к объединенным траекториям формулируется следующим образом. В качестве наиболее правдоподобного выбирается тот вариант группирования и привязки сообщений, для которого сумма квадратичных форм Σ_k минимальна.

В соответствии с этим правилом, например, гипотеза H_I выбирается, если

$$\Sigma_I = \min_k \Sigma_k \quad (k = I,\ II,\ III,\ IV). \tag{10.2.5}$$

Аналогичным образом для выбора гипотезы H_{II} должно выполняться условие

$$\Sigma_2 = \min_k \Sigma_k \text{ и т. д.}$$

Таким образом, оптимальное отождествление и привязка сообщений в данном случае производится по минимуму суммы квадратичных форм, составленных в соответствии с возможными вариантами группирования.

Для получения упрощенных правил отождествления сделаем следующие допущения.

1. Отождествление и привязка сообщений производится только по координатам *x, y, z*.

2. Координаты x_{ij}, y_{ij} и z_{ij} вновь полученных и подлежащих отождествлению сообщений некоррелированы между собой.

3) Координаты $\bar{x}_p, \bar{y}_p$ и $\bar{z}_p$ объединенных сообщений также некоррелированы между собой.

С учетом этих допущений вектор разностей параметров сообщений имеет вид

$$\Delta\theta_{ij/p} = \begin{Vmatrix} x_{ij} - \bar{x}_p \\ y_{ij} - \bar{y}_p \\ z_{ij} - \bar{z}_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Delta x_{ij/p} \\ \Delta y_{ij/p} \\ \Delta z_{ij/p} \end{Vmatrix}, \tag{10.2.6}$$

а корреляционная матрица ошибок оценки этого вектора равна

$$\Psi_{ip} = \begin{Vmatrix} \sigma^2_{x_i} + \sigma^2_{x_p} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{y_i} + \sigma^2_{y_p} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{z_i} + \sigma^2_{z_p} \end{Vmatrix}. \tag{10.2.7}$$

Обратная корреляционная матрица Ψ^{-1}_{ip} теперь равна

$$\Psi^{-1}_{ip} = \begin{Vmatrix} w_{x_{ip}} & 0 & 0 \\ 0 & w_{y_{ip}} & 0 \\ 0 & 0 & w_{z_{ip}} \end{Vmatrix}, \tag{10.2.8}$$

где

$$w_{U_{ip}} = \frac{1}{\sigma^2_{U_i} + \sigma^2_{U_p}}, \quad U = x,\ y,\ z.$$

Теперь выражение для каждой квадратичной формы записывается в виде

$$Q_{ijp} = w_{x_{ip}} \Delta x^2_{ijp} + w_{y_{ip}} \Delta y^2_{ijp} + w_{z_{ip}} \Delta z^2_{ijp}. \qquad (10.2.9)$$

С учетом (9) сумма квадратичных форм, стоящих под знаком экспоненты, например, в выражении для функции правдоподобия первой гипотезы $w(H_1)$, теперь равна [см. (4)]

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = {} & w_{x_{11}} \Delta x^2_{111} + w_{y_{11}} \Delta y^2_{111} + w_{z_{11}} \Delta z^2_{111} + \\ & + w_{x_{21}} \Delta x^2_{211} + w_{y_{21}} \Delta y^2_{211} + w_{z_{21}} \Delta z^2_{211} + \\ & + w_{x_{12}} \Delta x^2_{122} + w_{y_{12}} \Delta y^2_{122} + w_{z_{12}} \Delta z^2_{122} + \\ & + w_{x_{22}} \Delta x^2_{222} + w_{y_{22}} \Delta y^2_{222} + w_{z_{22}} \Delta z^2_{222} = \\ = {} & \sum_{(ijp)_k} \left(w_{x_{ip}} \Delta x^2_{ijp} + w_{y_{ip}} \Delta y^2_{ijp} + w_{z_{ip}} \Delta z^2_{ijp} \right), \qquad 00.2.10)\end{aligned}$$

где k — номер набора переменных i, j, p при формировании слагаемых: $(i, j, p)_1 = (1, 1, 1)$; $(i, j, p)_2 = (2, 1, 1)$; $(i, j, p)_3 = (1, 2, 2)$; $(i, j, p)_4 = (2, 2, 2)$.

Аналогичным образом записываются выражения для сумм квадратичных форм, входящих в функции правдоподобия других гипотез, Изменится только порядок подстановки переменных i, j, p при формировании слагаемых. Так, для Σ_2 наборы переменных должны быть следующие: $(i, j, p)_1 = (1, 2, 1)$, $(i, j, p)_2 = (2, 2, 1)$, $(i, j, p)_3 = (1, 1, 2)$, $(i, j, p)_4 = (2, 1, 2)$. Для других гипотез наборы переменных можно получить непосредственно из формул (4),

Таким образом, решение на группирование и привязку сообщений к траекториям принимается в данном случае по минимуму взвешенной суммы квадратов отклонений по координатам x, y, z между поступившими и объединенными сообщениями. Это правило принятия решения значительно проще в реализации исходного правила (5) и может быть использовано в реальных алгоритмах отождествления.

10.2.2. Группирование новых сообщений без привязки к объединенным сообщениям

Рассмотренный в предыдущем пункте оптимальный метод группирования и привязки новых сообщений к объединенным сообщениям достаточно сложен в реализации, даже в упрощенном варианте. В связи с этим представляет интерес подход к решению задачи отождествления по частям: сначала группирование сообщений, которые могут быть отнесены к одной цели, затем усреднение параметров сгруппированных сообщений и, наконец, привязка усредненных сообщений к объединенным сообщениям пункта сбора информации.

Рассмотрим здесь решение задачи группирования новых сообщений без привязки групп к объединенным сообщениям.

Пусть, как и прежде, сообщения о двух целях поступают от двух РЛС. Задача, решаемая на пункте сбора информации, состоит теперь в рассмотрении всех возможных вариантов группирования новых сообщений и выборе одного из них в качестве наиболее вероятного.

Обращаясь к рис. 10.1, где показаны все возможные варианты группирования и привязки новых сообщений, замечаем, что если не учитывать привязку новых сообщений к объединенным, то варианты,

соответствующие гипотезам I и II, совпадают. Аналогично совпадают также варианты группирования сообщений, соответствующие гипотезам III и IV. Следовательно, при принятии решения на группирование сообщений в данном случае должны сопоставляться две альтернативные гипотезы (рис. 10.2):

— гипотеза 1: сообщения J_{11} и J_{21} относятся к одной цели, а сообщения J_{12} и J_{22} — к другой;

— гипотеза 2: сообщения J_{11} и J_{22} относятся к одной цели, а сообщения J_{21} и J_{12} — к другой.

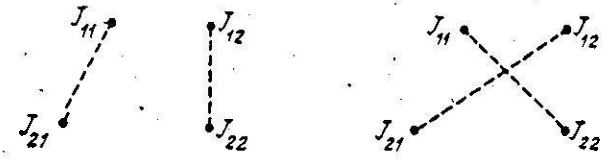


Рис. 10.2. К задаче группирования двух сообщений от двух РЛС.

Запишем выражения для векторов разностей параметров сообщений, соответствующих гипотезам 1 и 2.

Имеем

$$\mathbf{R}_1 = \begin{Vmatrix} \vartheta_{11} - \vartheta_{21} \\ \vartheta_{12} - \vartheta_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Delta\vartheta_{1121} \\ \Delta\vartheta_{1222} \end{Vmatrix}, \qquad (10.2.11)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{Vmatrix} \vartheta_{11} - \vartheta_{22} \\ \vartheta_{12} - \vartheta_{21} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Delta\vartheta_{1122} \\ \Delta\gamma_{2112} \end{Vmatrix}. \qquad (10.2.12)$$

Векторы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ имеют размерность (12 X 1).

Поскольку по условию многомерный закон распределения координат и составляющих вектора скорости каждого сообщения является нормальным, то и векторы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ являются нормально распределенными случайными векторами. Средние значения этих векторов, очевидно, равны нулю, а корреляционные матрицы вычисляются на основе корреляционных матриц исходных сообщений следующим образом:

$$\Psi_{R_1} = \Psi_{R_2} = \begin{Vmatrix} \Psi_{12} & 0 \\ 0 & \Psi_{12} \end{Vmatrix}, \qquad (10.2.13)$$

где $\Psi_{12} = \Psi_1 + \Psi_2$ ~ корреляционная матрица ошибок для составляющих $\Delta\vartheta_{ijrz}$ векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$.

Здесь, как и раньше, принимается, что ошибки РЛС при измерении координат близко расположенных целей имеют одинаковые корреляционные матрицы, т. е. $\Psi_{ij} = \Psi_i$.

Далее обычным образом можно записать выражения для функций правдоподобия гипотез 1 и 2, что соответствует записи условных плот-

ностей вероятности для векторов $\mathbf{R}_i$ $(i = 1, 2)$:

$$w(\mathbf{R}_1 | \mathrm{H}_1) = \frac{r}{(2\pi)^6 \sqrt{|\Psi_{12}|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{R}_1^{\mathrm{T}} \Psi_{\mathbf{R}_1}^{-1} \mathbf{R}_1\right], \quad (10.2.14)$$

$$w(\mathbf{R}_2 | \mathrm{H}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{|\Psi_{12}|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{R}_2^{\mathrm{T}} \Psi_{\mathbf{R}_2}^{-1} \mathbf{R}_2\right]. \quad (10.2.15)$$

Выбор гипотез, т. е. решение на группирование сообщений, принимается теперь на основании сравнения квадратичных форм, стоящих под знаком экспоненты в выражениях (14) и (15).

Гипотеза 1 принимается, если

$$\mathbf{R}_1^{\mathrm{T}} \Psi_{\mathbf{R}_1}^{-1} \mathbf{R}_1 < \mathbf{R}_2^{\mathrm{T}} \Psi_{\mathbf{R}_2}^{-1} \mathbf{R}_2. \quad (10.2.16)$$

В противном случае принимается гипотеза 2.

Предположим теперь, что отождествление производится только по координатам x_{ij}, y_{ij} и z_{ij} и корреляция между этими координатами отсутствует. Тогда корреляционная матрица ошибок для векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ запишется в виде

$$\Psi_{\mathbf{R}_1} = \Psi_{\mathbf{R}_2} = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{Vmatrix}, \quad (10.2.17)$$

где

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \begin{Vmatrix} \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 & 0 & 0 \\ & \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2 & \\ 0 & 0 & \sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2 \end{Vmatrix}. \quad (10.2.18)$$

Квадратичные формы под знаком экспоненты в выражениях (14) и (15) равны в этом случае соответственно

$$Q_{\mathbf{R}_1} = \left(\frac{\Delta x_{121}^2 + \Delta x_{222}^2}{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} + \frac{\Delta y_{121}^2 + \Delta y_{222}^2}{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2} + \frac{\Delta z_{121}^2 + \Delta z_{222}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} \right), \quad (10.2.19)$$

$$Q_{\mathbf{R}_2} = \frac{\Delta x_{122}^2 + \Delta x_{211}^2}{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} + \frac{\Delta y_{122}^2 + \Delta y_{211}^2}{\sigma_{y_1} + \sigma_{y_2}} + \frac{\Delta z_{122}^2 + \Delta z_{211}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2}, \quad (10.2.20)$$

а решение на отождествление собщений принимается на основе сравнения взвешенных сумм квадратов расстояний между одноименными координатами в комбинациях сообщений, соответствующих гипотезам 1 и 2. Гипотеза 1 выбирается в случае, если $Q_{\mathbf{R}_1} < Q_{\mathbf{R}_2}$, а гипотеза 2 — если $Q_{\mathbf{R}_2} < Q_{\mathbf{R}_1}$.

Пусть далее выполняется условие

$$\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 = \sigma_{y_1}^2 = \sigma_{y_2}^2 = \sigma_{z_1}^2 = \sigma_{z_2}^2 = \sigma^2. \quad (10.2,21)$$

Тогда выражения для квадратичных форм (17) и (18) преобразуются к виду

$$Q_{\mathbf{R}_1} = \frac{1}{2\sigma^2}(l_{1121}^2 + l_{1222}^2), \qquad Q_{\mathbf{R}_2} = \frac{1}{2\sigma^2}(l_{1122}^2 + l_{2112}^2),$$

где $l_{ijrz}^2 = \Delta x_{ijrz}^2 + \Delta y_{ijrz}^2 + \Delta z_{ijrz}^2$.

В этом случае гипотеза 1 принимается, если

$$l^2_{1121} + l^2_{1222} < l^2_{1122} + l^2_{2112}, \qquad (10.2.22)$$

а гипотеза 2 — при справедливости противоположного неравенства.

Правило (22) сокращенно записывается в виде

$$\min_{k} \sum (l^2_{ijrz})_k \qquad (k = 1, 2). \qquad (10.2.23)$$

Индекс к здесь указывает на то, что проверяется на минимум каждая из двух допустимых комбинаций квадратов разностей координат отождествляемых сообщений.

Таким образом, при выполнении условий (17) и (21) оптимальным является решение на группирование по минимуму суммы квадратов расстояний между сообщениями. Из-за простоты это правило решения может быть использовано в системе с ограниченной производительностью вычислительных средств.

10.2.3. Группирование сообщений, поступающих от m РЛС по n целям

При постановке и решении задачи группирования сообщений, полученных от m РЛС по n целям, будем считать, что каждая РЛС наблюдает всю группу целей полностью и передает на пункт сбора сообщения о всех целях группы. В процессе решения задачи необходимо рассмотреть все возможные варианты группирования этих сообщений и выбрать один, оптимальный в некотором смысле вариант. Общее число возможных вариантов группирования в этом случае определяется выражением

$$\kappa = (m \quad -\gamma.\eta \qquad (10.2.24)$$

Справедливость формулы (24) покажем на простом примере, когда $m = 2$, а $n = 3$ (две РЛС, три сообщения от каждой РЛС). Все возможные варианты группирования для этого примера приведены на рис. 10.3. Как видно из рис. 10.3 число вариантов группирования равно 6. По формуле (24) также получаем $\kappa = (2-1)!\ 31 = 6$.

Чтобы решить, какой из вариантов группирования является оптимальным, для каждого из них записывается вектор разностей параметров сообщений $\mathbf{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, входящих в данный вариант. Например, для первого варианта группирования (рис. 10.3) имеем

$$\mathbf{R}_1 = \begin{Vmatrix} \vartheta_{11} - \vartheta_{21} \\ \vartheta_{12} - \vartheta_{22} \\ \vartheta_{13} - \vartheta_{23} \end{Vmatrix}. \qquad (10.2.25)$$

Аналогичным образом можно записать выражения для векторов $\mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_6$, соответствующих другим комбинациям.

Если принять, что для группирования используется только информация о координатах и эти координаты не коррелированы между собой,

то вектор $\mathbf{R}_1$ (и другие векторы разностей координат) будут иметь размерность (9 X 1), а корреляционная матрица ошибок оценки составляющих этого вектора имеет вид

$$\Psi_{R_1} = \ldots = \Psi_{R_k} = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \\ 0 & 0 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{Vmatrix}. \qquad (10.2.26)$$

Диагональные элементы матрицы (26) представляют собой матрицы (3 X 3), определяемые выражением (18).

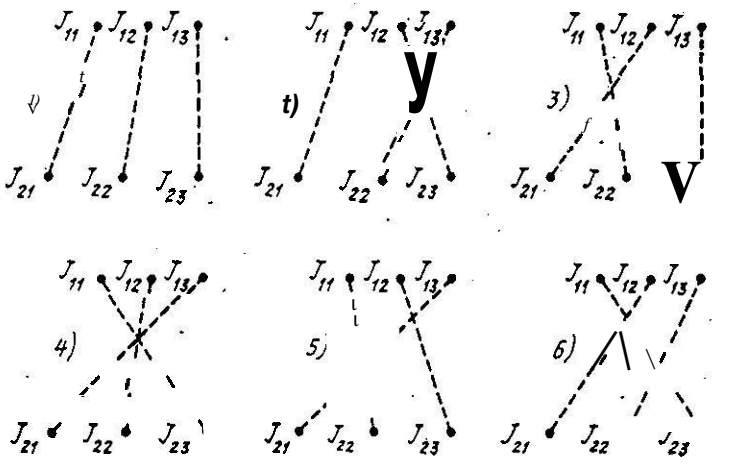


Рис. 10.3. Варианты группирования сообщений от двух РЛС по трем целям.

Теперь для каждого вектора $\mathbf{R}_i$ может быть записана квадратичная форма, аналогичная (19). Число конкурирующих гипотез при принятии решения равно числу вариантов группирования.

В качестве оптимального принимается тот вариант, для которого соответствующая квадратичная форма будет минимальной, т. е.

$$\min_i Q_i, \quad (i = \mathrm{I}, 2, \ldots. \mathrm{k}),$$

где Q_i — квадратичная форма для i-го варианта группирования.

Если предположить, что суммы дисперсий ошибок по каждой из координат одинаковы, то приходим к правилу решения

$$\min_i \sum (l_{l/rz}^2)_i ,$$

согласно которому решение на группирование принимается по минимуму суммы квадратов расстояний между сравниваемыми сообщениями.

Таким образом, задача группирования сообщений о n целях, полученных от m источников, принципиально ничем не отличается от

подробно рассмотренной в предыдущем пункте задачи группирования сообщений о двух целях, полученных от двух РЛС. Увеличивается только число возможных вариантов группирования, а следовательно, и объем вычислений.

10.2.4. Группирование при неодинаковом количестве сообщений, поступающих от каждой РЛС

При группировании сообщений в данном случае предполагается, что число целей в группе равно числу сообщений, поступивших от наиболее «производительной» РЛС. Здесь так же, как и в предыдущих случаях, необходимо рассматривать все возможные варианты группирования и выбрать среди них оптимальный.

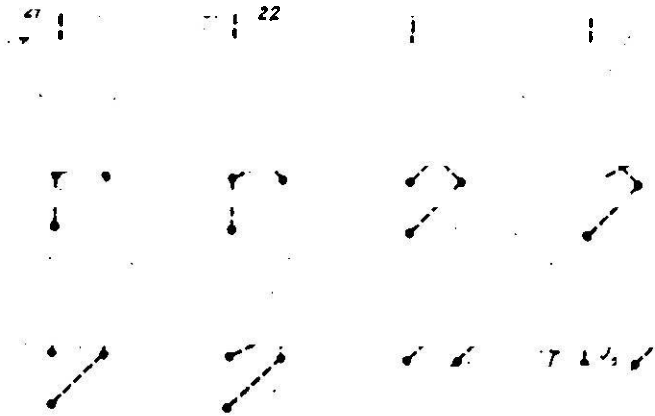


Рис. 10.4. Группирование при неодинаковом количестве сообщений от каждой РЛС.

Методика решения задачи остается прежней: сначала составляются все возможные варианты группирования, затем для каждого варианта вычисляются разности координат группируемых сообщений и находится корреляционная матрица ошибок. В результате могут быть записаны функции правдоподобия вариантов группирования и на основе их сравнения выбран оптимальный вариант.

На рис. 10.4 представлен случай, когда от первой РЛС получено три сообщения, от второй — два сообщения, а от третьей — одно сообщение. В соответствии с вариантом группирования г) (см. § 10.1) в рассматриваемом случае в стробе имеется информация о трех целях. В группу по каждой цели входят от одного до трех сообщений. Выбор оптимального варианта группирования (при условии равенства сумм

дисперсии ошибок по осям X и V) производится на основе сравнения простейших квадратичных форм, которые записываются в виде

$$\begin{aligned}
\sum (l^2_{jrz})_1 &= l^2_{3121} + l^2_{2111} + l^2_{2212}, \\
\sum (l^2_{jrz})_2 &= l^2_{3121} + l^2_{2111} + l^2_{2213}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum (l^2_{jrz})_{12} &= l^2_{3122} + l^2_{2213} + l^2_{1121}.
\end{aligned} \qquad (10.2.27)$$

Оптимальным является тот вариант группирования, для которого сумма (27) является минимальной.

10.3. Пример алгоритма периодического объединения информации

Рассмотрим один из возможных вариантов построения алгоритма обработки сообщений, поступающих от нескольких РЛС, при периодическом объединении информации о целях на пункте сбора. Схема эта представляется в укрупненном виде и служит, главным образом, для иллюстрации последовательности выполнения операций объединения, описанных в § 10.1.

При составлении схемы алгоритма приняты следующие исходные предпосылки.

1. Период объединения информации соответствует периоду обновления сообщений по каждой цели. Темп выдачи информации на пункт сбора всеми источниками (РЛС) одинаков.

2. Для отождествления используется информация о параметрах принимаемых сообщений и признаки принадлежности сообщений к источникам информации.

3. По сообщениям, полученным с РЛС, на пункте сбора строятся объединенные траектории.

4. В каждом цикле объединения группы грубо отождествленных сообщений формируются первоначально по признаку близости к экстраполированным точкам объединенных траекторий. Далее для отобранных таким образом групп решаются задачи отождествления сообщений по признаку принадлежности к источникам информации, усреднения координат групп отождествленных сообщений и привязки одной из таких групп к объединенной траектории. Группы отождествленных сообщений, не удовлетворяющие критерию привязки к данной объединенной траектории, привязываются к другим объединенным траекториям или образуют начальную точку новой объединенной траектории.

5. Из принятых сообщений, которые не попадают в зоны связи существующих объединенных траекторий, также формируются начальные точки новых объединенных траекторий. Для этого первоначально образуются группы грубо отождествленных сообщений по признаку их близости между собой, затем производится отождествление сообщений в группах по признаку принадлежности к источникам информации и, наконец, усреднение координат отождествленных групп и формирование объединенных сообщений.

В соответствии с изложенными предпосылками, укрупненная операторная схема алгоритма объединения информации записывается в виде

$$^{16}\Phi_1\ {}^{8}F_2\ {}^{7}A_3 A_4 P_{5\downarrow 7} F_6\ {}^{5}P_{7\downarrow 3} P_{8\downarrow 2} A_9 A_{10}\ {}^{14,16}F_{11} P_{12\downarrow 17} P_{13\downarrow 15} F_{14}^{11}\ {}^{13,18}A_{15}$$

$$P_{16\downarrow 11}^{1}\ {}^{12}P_{17\downarrow 19}\ {}^{20,22,23}\Lambda_{18}^{15}\ {}^{17}P_{19\downarrow 21} A_{20}^{18}\ {}^{19}P_{21\downarrow 23} A_{22}^{18}\ {}^{21}\Lambda_{23}^{18}, \qquad (10.3.1)$$

а его граф-схема изображена на рис. 10.5.

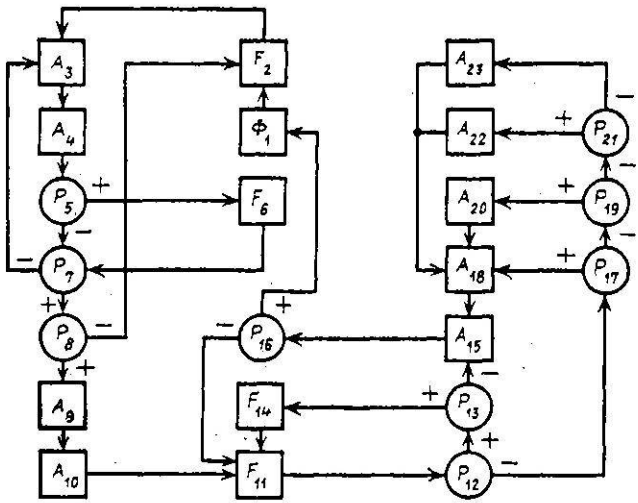


Рис. 10.5. Граф-схема алгоритма объединения информации.

Операторы алгоритма предназначены для решения следующих задач:

Φ_1 — подготовка очередного цикла объединения информации, включающая перепись из БЗУ вновь поступивших сообщений, преобразование параметров и корреляционных матриц ошибок оценки этих параметров в систему координат пункта сбора сообщений, подготовка массивов ОЗУ и другие вспомогательные операции;

F_2 — выбор очередной объединенной траектории из соответствующего массива ОЗУ;

A_3 — выбор очередного сообщения, подлежащего объединению и экстраполяция его параметров на момент привязки параметров выбранной объединенной траектории;

A_4 — формирование строба для сравнения параметров выбранных сообщений;

P_5 — проверка попадания в строб выбранного сообщения (центр строба совмещается с экстраполированной точкой объединенной траектории);

F_6 — если условие P_5 выполнено, то выбранное новое сообщение записывается в группу для подтверждения объединенной Траектории;

P_7 — проверяется, все ли новые сообщения прошли сравнение с выбранной объединенной траекторией по признаку P_5;

P_8 — если условие P_7 выполняется, то проверяется, все ли объединенные траектории выбирались для привязки к ним новых сообщений;

A_9 — совокупность элементарных операций, предназначенных для формирования групп сообщений, не попавших в стробы объединенных траекторий и отождествления сообщений в этих группах по признаку принадлежности к источникам информации;

A_{10} — совокупность элементарных операций, предназначенных для усреднения параметров отождествленных сообщений и формирования начальных точек новых объединенных траекторий (включая присвоение номера, экстраполяцию на $T_{об}$ и запись параметров в массив объединенных траекторий);

F_{11} —выбор очередной объединенной траектории совместно с новыми сообщениями, попавшими в строб этой траектории;

P_{12} — проверка условия: в стробе выбранной траектории нет новых сообщений;

P_{13} — при выполнении условия P_{12} проверяется критерий сброса объединенной траектории с сопровождения на пункте сбора информации;

F_{14} — при выполнении критерия сброса объединенная траектория считается закончившейся и информация о ней сбрасывается;

A_{15} — при невыполнении критерия сброса производится экстраполяция объединенной траектории на момент следующего объединения;

P_{16} — проверка: все ли траектории из массива объединенных траекторий уточнены по результатам очередного цикла объединения;

P_{17} — проверка условия: в стробе выбранной траектории только одно новое сообщение;

A_{18} — при выполнении условия оператора P_{17}, с учетом параметров единственного нового сообщения, уточняются (сглаживаются) параметры объединенной траектории;

P_{19} — при невыполнении условия оператора P_{17} проверяется, не являются ли все отобранные в строб объединенной траектории новые сообщения принадлежащими одному источнику (т. е. не имеют ли все отобранные в строб сообщения одинаковые номера источников);

A_{20} — при выполнении условия P_{19} производится отбор единственного сообщения для продолжения объединенной траектории и формирование из оставшихся сообщений групп предварительно отождествленных сообщений;

P_{21} — при невыполнении условия оператора P_{19} проверяется, не являются ли все отобранные в строб объединенной траектории новые сообщения принадлежащими различным источникам (не совпадающих номеров источников);

A_{22} — при выполнении условия P_{21} производится усреднение параметров сообщений, попавших в строб, и полученное таким образом усредненное сообщение привязывается к объединенной траектории;

A_{23} — при. невыполнении условия оператора P_{21} решается задача статистического отождествления сообщений в стробе, в результате

которого выбирается группа отождествленных сообщений для продолжения объединенной траектории.

Таким образом, приведенное здесь описание операций алгоритма, совместно с его граф-схемой (см. рис. 10.5) позволяют уяснить основные принципы и последовательность решения задачи объединения сообщений на пункте сбора. Детализация алгоритма потребует значительного расширения состава операций и приведет в некоторых случаях к изменению последовательности их выполнения.

Подчеркнем в заключение, что задачи, решаемые в процессе объединения информации, чрезвычайно трудоемки и их реализация возможна только на ЦВМ сравнительно высокой производительности.

10.4. Характеристики качества процесса объединения информации нескольких источников

Качество процесса объединения информации может быть оценено следующими показателями:

— вероятностью правильного отождествления каждой группы сообщений, относящихся к одной цели;

— вероятностью разветвления (размножения) и перепутывания траекторий;

— средней длительностью сопровождения объединенной траектории;

— средним числом ложных траекторий и их средней длительностью.

Каждый из перечисленных показателей характеризует одну из сторон рассматриваемого процесса и может быть рассчитан независимо от других. Однако только совокупный учет всех факторов, влияющих на качество процесса объединения информации, позволяет оценить процесс в целом.

Необходимо отметить, что совместный расчет и анализ качественных характеристик процесса объединения информации может быть выполнен только для конкретных алгоритмов методом статистического моделирования. В данном параграфе рассматриваются некоторые частные показатели качества для простейшего случая объединения информации от двух РЛС.

10.4.1. Вероятность правильного отождествления пары отметок

Под отождествлением пары отметок, полученных от различных источников, понимается утверждение гипотезы об их принадлежности к одной цели. При этом, как и ранее, имеется в виду, что отождествляемые сообщения приведены предварительно к единому началу отсчета в пространстве и времени.

В рассматриваемом случае задача отождествления сводится к стробированию параметров одного сравниваемого сообщения относительно параметров другого, т. е. к проверке «попадания» одного сообщения в строб, образованный вокруг другого. При этом вероятность правильного отождествления определяется по формуле

$$P_{от} = P(\Delta U_{ir} \leqslant \Delta U_{стр} \mid 0)\,[1 - P(\Delta U_{ir} \leqslant \Delta U_{отр} \mid \Delta S)], \qquad (10.4.1)$$

где $P(\Delta U_{ir} \leqslant \Delta U_{отр}/0)$ — условная вероятность попадания в строб $\Delta U_{стр}$, образованный вокруг радиолокационной отметки, полученной от i-го источника (РЛС), радиолокационной отметки от r-го источника, при условии, что обе отметки принадлежат одной и той же цели ($\Delta S = 0$); $P(\Delta U_{ir} \leqslant \Delta U_{стр}/\Delta S)$ — условная вероятность попадания в строб отметки, принадлежащей другой цели, при условии, что расстояние между целями равно AS.

В общем случае отождествления по совокупности координат (например, $U = (x, y, z)$

$$P(\Delta U_{lr} \leqslant \Delta U_{\text{стр}} \mid 0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(U_l) \left[\int_{U_l - \Delta U_{\text{стр}}}^{U_l + \Delta U_{\text{стр}}} w(\Delta U_{lr}) d\Delta U_{lr} \right] dU_l,$$

$$P(\Delta U_{lr} \leqslant \Delta U_{\text{стр}} \mid \Delta S) = \int_{-\infty}^{\infty} w(U_l) \left[\int_{U_l - \Delta U_{\text{стр}}}^{U_l + \Delta U_{\text{стр}}} w(\Delta U_{lr} + \Delta S)\, d\Delta U_{lr} \right] dU_l.$$

В простейшем частном случае, когда отождествление производится только по одной координате x, наблюденные значения которой подчинены нормальному закону распределения

$$P(\Delta x_{lr} \leqslant \Delta x_{\text{стр}} \mid 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_l \sigma_r} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_l^2}{2\sigma_l^2} \right) \times$$

$$\times \left\{ \int_{x_l - \Delta x_{\text{стр}}}^{x_l + \Delta x_{\text{стр}}} \exp\left[-\frac{\Delta x_{lr}^2}{2\sigma_r^2} \right] d\Delta x_{lr} \right\} dx_l,$$

$$P(\Delta x_{lr} \leqslant \Delta x_{\text{стр}} \mid \Delta S) = \frac{1}{2\pi\sigma_l \sigma_r} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x_l^2}{2\sigma_l^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ \int_{x_l - \Delta x_{\text{стр}}}^{x_l + \Delta x_{\text{стр}}} \exp\left[-\frac{(\Delta x_{lr} + \Delta S_x)^2}{2\sigma_r^2} \right] d\Delta x_{lr} \right\} dx_l.$$

Полученные для этого простейшего случая результаты [5] показывают, что при фиксированном расстоянии между целями ΔS_x можно получить оптимальные размеры строба $\Delta x_{\text{стр}}$, при которых обеспечивается наибольшая вероятность правильного отождествления. Размеры оптимального строба мало зависят от дисперсий ошибок оценки параметров σ_l^2 и σ_r^2. При оптимальных размерах строба вероятность правильного отождествления быстро увеличивается при увеличении ΔS_x.

10.4.2. Вероятность перепутывания траекторий. Влияние ложной информации

Следующей существенной операцией процесса объединения информации двух источников является вычисление усредненных параметров отождествленных пар и привязка полученных отождествленных сообщений к объединенным траекториям. На этом этапе проверяется попадание отождествленных сообщений в стробы, образованные вокруг экстраполированных на момент очередного обобщения точек объединенных траекторий. При наличии близко расположенных траекторий, когда имеет место перекрытие стробов, в результате стробирования возможны следующие неверные исходы:

— частичное или полное перепутывание отождествленных сообщений при привязке их к объединенным траекториям, что приводит к перепутыванию номеров объединенных траекторий, а также к ухудшению точностных характеристик оценки параметров объединенных траекторий,

— ложное объявление новой объединенной траектории или разветвление «старой» объединенной траектории.

В конечном счете при всех рассмотренных неверных исходах имеет место отбор для продолжения объединенной траектории «чужого» (т. е. принадлежащего другой траектории) сообщения. Вероятность этого события равна

$$P_{\text{пер}}(i) = \int\limits_{-\Delta_{\text{стр}}(i)} w_1(l) \left[1 - \int\limits_{-l} w_0(\mathrm{U})\, d\mathrm{U} \right] dl,$$

где $\Delta l_{\text{стр}}$ (0 — допустимое отклонение стробируемого сообщения относительно экстраполированной точки объединенной траектории в i-м такте; $w_1(l)$ — плотность распределения расстояния l между экстраполированной точкой и привязываемым сообщением при условии, что это сообщение принадлежит другой траектории; w_0 (U) — плотность распределения этого же расстояния при условии, что привязываемое сообщение принадлежит данной траектории.

Для уменьшения вероятности перепутывания объединенных траекторий используются различные способы «защиты». В частности, один из таких методов состоит в том, что решение на изменение номеров привязываемых отождествленных сообщений или на сброс старой и «завязку» новой объединенной траектории принимается не по однократному «сбою» или перепутыванию, а при появлении некоторой серии из m указанных событий.

В этом случае вероятность перепутывания равна

$$P_{\text{пер}}^{(m)} = 1 - \prod_{l=k}^{k+m} P_{\text{пер}}(i).$$

На качество отождествления сообщений и построения объединенных траекторий существенное влияние оказывает ложная информация в виде ложных отметок и ложных траекторий. Ложные отметки искажают траекторию в процессе ее сопровождения, что сказывается на вероятности перепутывания трасс. Ложные траектории, поставленные на сопровождение на РЛС и переданные на пункт сбора, на некотором участке могут быть объединены с истинными, что во всех случаях приводит к ухудшению качества сопровождения объединенных истинных траекторий. Ложные траектории могут также объединяться между собой, хотя вероятность такого события невелика, особенно если при отождествлении сообщений используется не только информация о координатах сообщений, но и составляющие скорости их перемещения.

10.4.3. Средняя длительность сопровождения объединенной траектории

Средняя длительность объединенной истинной траектории зависит от качества сопровождения траекторий каждой РЛС, а также от принятого критерия (правила) построения объединенной траектории по элементарным сообщениям источников. Для рассматриваемого простейшего случая объединения информации двух РЛС за основу могут быть взяты следующие правила:

а) сообщение от РЛС учитывается при построении объединенной траектории, если соответствующая траектория находится в режиме сопровождения и в очередном обзоре получена радиолокационная отметка, подтверждающая ее продолжение;

б) «завязка» объединенной траектории производится по некоторой комбинации отождествленных отметок, не привязанных ни к одной из существующих объединенных траекторий;

в) обновление параметров объединенной траектории осуществляется при наличии хотя бы одной отметки, удовлетворяющей критерию привязки к объединенной траектории;

г) сброс объединенной траектории производится при наличии к пропусков подряд.

Кроме того, предполагается отсутствие корреляции между сообщениями источников (РЛС), а также между соседними сообщениями одного источника.

При сделанных предпосылках процесс построения объединенной траектории может быть представлен в виде графа со случайными переходами, изображенного на рис. 10.6 (при к = 2).

Сопровождение объединенной траектории начинается при переходе графа в состояние a_1 с вероятностью $P_{зав}$ завязки объединенной траектории. В дальнейшем в режиме сопровождения вероятности перехода равны:

$$\pi_{11}=\pi_{21}=\pi_{31}=p_1(k)\,p_2(k),$$
$$\pi_{12}=\pi_{22}=\pi=p_1(k)\,[1-p_2(k)]+[1-p_1(k)]\,p_2(k),$$
$$\pi_{23}=\pi_{34}=[1-p_1(k)]\,[1-p_2(k)],$$

где $p_i(k)$ — вероятность получения отметки от i-й РЛС (i = 1,2) в fe-м периоде обобщения.

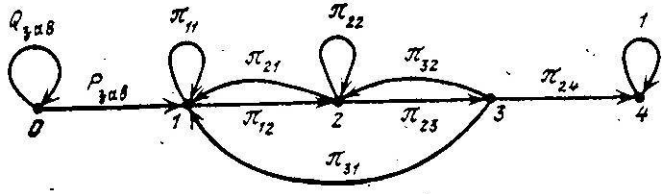


Рис. 10.6. Граф построения объединенной траектории.

Теперь, используя обычный прием нахождения вероятностей состояний в неоднородной цепи Маркова, можно найти вероятность $P_4(\mu)$ достижения состояния a_4 на μ-м шаге сопровождения. Средняя длительность объединенной траектории находится тогда по формуле

$$\bar{\mu}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu P_4(\mu).$$

Необходимо отметить, что в процессе построения объединенной траектории имеется возможность взаимной поддержки одиночных траекторий, входящих в ее состав.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. Н., Фролов Г. А. Основы автоматизации систем управления. М., Воениздат, 1971.

2. Бенеисон З. М., Хазен Э. М. Методы последовательного анализа в задачах распознавания многих гипотез. — «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1966, № 4.

3. Хазен Э, М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М., «Сов. радио», 1968.

4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М., «Наука», 1964.

5. Kanyuck A., Singer R. Correlation of Multiple — Site Frack Date. — «IEEE Trans. on Aerospace and Electronic», 1970, № 2.

6. Ван Койк, Пандиков. Статистическое описание стратегий объединения трасс при наблюдении несколькими радиолокаторами. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1971, № 11.

Предметный указатель

Автоматизированная система обработки информации 8—9
Абстрактная теория алгоритмов 69
Автоматы конечные 1-го и 2-го рода 55
Алгебра событий 58
Алгоритм обработки радиолокационной информации 10
— цифровой первичной обработки 183
— оптимальной оценки параметров траектории 211, 221, 226, 344
— экстраполяции параметров 229
— «завязки» траектории 251
— подтверждения траектории 225
— селекции отметок по минимуму отклонения от центра строба 241
— обнаружения и селекции отметок 323—333

Байеса формула 347
Биномиальный закон распределения вероятности 40
Безвесовая обработка пачек квантованных сигналов 160
Быстродействие ЦВМ обработки радиолокационной информации 109, 196, 302

Вероятность ложного обнаружения сигналов 82, 85
— ложного обнаружения траекторий 170, 270
— (нарастающая) обнаружения траектории 280—283
— правильной селекции 244—246
— перепутывания траекторий 246, 424
— обнаружения пачки двоично квантованных сигналов 40, 174
Весовая функция обнаружения двоично квантованных сигналов 39
——— оценки азимута цели 45
——— параметров траектории 2.18, 225
Вложенная цепь Маркова 104
Вторичная обработка радиолокационной информации 7, 198
Входящий поток в системе обработки радиолокационной информации 99, 180, 297
Выходящий поток в системе обработки 103

Графы конечных автоматов 57, 105, 165, 268, 270, 280
Граф-схемы алгоритмов 129, 138, 148, 187, 259, 421
Граф логических обнаружителей 163
— обнаружителей — накопителей 163

Двоичное квантование сигналов 29, 30
Динамические ошибки фильтра 95
Дизъюнкция простых высказываний 58
Дискретное преобразование Лапласа 90
Дисперсия ошибки оценки азимута 176
Дискретизация сигналов по времени 21
——— обзорной РЛС 26
Дискретный фильтр 93

Задачи первичной обработки радиолокационной информации 150
«Завязка» траектории 251
Загрузка ОЗУ ЦВМ первичной обработки радиолокационной информации 191
Закон Релея 20
— обобщенный Релея (Закон Райса) 19, 117
— нормальный 17, 41
— Пуассона 117, 180
— Эрланга 102
— распределения времени обслуживания 102, 194
— показательный (экспоненциальный) 102, 116
Законы алгебры логики 51

Идентификация траекторий 7, 405, 407
Импульсная передаточная характеристика фильтра 91, 385, 393
Импульсный сигнал 27, 35
Интервалы дискретизации сигналов 21
Интервал корреляции 24

Информационная характеристика цели 12
Итерация событий 51
Интенсивность потока ложных сигналов 182

Калмана фильтр 348
Квантование сигналов 24
— двоичное 29, 30
— многоуровневое 28, 42
Композиция цифровых автоматов 61, 64
— алгоритмов 74
Конъюнкция простых событий 51
Конечные автоматы 55
Конечный цифровой автомат со случайными переходами 65
Корреляционная матрица ошибок оценки параметров 213, 218, 225, 229, 348
——— экстраполяции параметров 232, 346
——— измерения 207, 347
Критерии оценки качества алгоритмов обработки информации 77
Критерий Неймана — Пирсона 32, 34, 38, 150
— минимального риска 32
— обнаружения типа «l/m» 161
— конца пачки 161
— последовательного наблюдателя 255
— серийных испытаний 269
— сброса траектории с сопровождения 287—290
— Рауса — Гурвица 93, 385

Лапласа преобразование (дискретное) 90
Ложные отметки 209
— траектории 269, 278

Маркова цепи 80, 104
Математическая модель конечного автомата 55
Матрица переходных вероятностей автомата 67, 167, 171, 261
— стохатическая 67
Матричная схема алгоритма 70
Метод максимального правдоподобия 46, 212
— экспоненциального сглаживания 399
Множество отраженных сигналов 13
— помех 13
— решений 13
Модель радиолокационного наблюдения 11
— флюктуации интенсивности сигнала 15, 16
——— отражающей поверхности цели 12
— ошибок локации 135, 206, 208
Моделирующий алгоритм 117
——— первичной обработки сигналов 124

Накопитель импульсных сигналов 165, 166
Нарастающая вероятность обнаружения 87
Нерекурсивный фильтр 91
Нелинейная фильтрация сигналов 341—344
Нормальное распределение 17, 41

Обнаружение полезных сигналов 6, 37, 155
— траекторий целей 7, 198, 250
— полностью известного сигнала 37
— маневра цели 367, 373
Область устойчивости фильтра «скользящего» сглаживания 385, 398
Обработка безвесовая 160
— первичная 7, 122, 150
— вторичная 7, 198
— цифровая 3, 9
Объединение информации нескольких источников 7, 405—426
Операции обработки радиолокационной информации 7
Оптимальный порог двоичного квантования 34
— алгоритм обнаружения пачки двоично квантованных сигналов 37
— логический обнаружитель 155, 159
Оптимальное группирование сообщений 408, 417, 419
Отрицание высказывания 51
Ошибка отсчета времени задержки импульсного сигнала 35
— фильтра 95, 386, 389
— экспоненциального сглаживания параметров 401
Оценка точности результатов моделирования 120
— координат радиолокационных отметок 7, 43, 162

Пачка двоично квантованных сигналов 31, 37
Первичная обработка радиолокационной информации 7, 122, 150
Периодическое объединение информации 420
Переключающийся сглаживающий фильтр 370—373
Поле отношения правдоподобия 310, 319
Полуавтоматическая система обработки 8
Пороги квантования 28, 32
Порядок астатизма фильтра 96

Подтверждение завязанной траектории 255
Последовательное сглаживание параметров 337
Принципы полуавтоматического сопровождения целей 302—306

Радиолокационная система 5
Радиолокационное устройство 13
Разрешающая способность при вторичной обработке 246—249
Распределение длительности последовательного анализа 263, 265
Рекурсивный фильтр 89, 92
Решающее устройство 13

Селекция отметок в Стробах 236, 241, 243
Синтез логической схемы автомата 54
Синтез (абстрактный) конечных автоматов 58
Синтез оптимальных логических схем для первичной оборабогки сигналов 155
Система обработки радиолокационной информации 5
Систематические ошибки оценки азимута 176
«Скользящее» сглаживание параметров траектории 383, 391
Слежение за траекториями целей 7, 198
Совершенная нормальная дизъюнктивная форма логической функции 53, 158
Среднее число ложных отметок 78, 274
— траекторий 273, 278, 291
Средняя длительность сопровождения траектории 425
— — ложной траектории 292
— выбросов помехи 181
Статистические характеристики отраженных сигналов 14
— помех 16—18, 206
— — принимаемых сигналов 18
— сигналов на выходе детектора 19
Статистический синтез алгоритмов обработки квантованных сигналов 37
Стохастическая матрица 67
Стробы захвата и сопровождения 199, 236, 240
Суммарная ошибка экспоненциального сглаживания 403
Таблицы переходов конечных автоматов 56
— выходов конечных автоматов 56

Траекторные расчеты 7, 198
Третичная обработка радиолокационной информации 405

Уравнение правдоподобия 45, 213
Устойчивость фильтра «скользящего» сглаживания 385, 398

Фильтр рекурсивный 91
— нерекурсивный 91
— с конечной памятью 94
— Калмана 348
Фильтрация параметров 337
Формула экспоненциального сглаживания параметров 399
Формирование пачек радиолокационных сигналов 150, 152
Финальные вероятности состояний 82, 85, 168
Функция правдоподобия 44, 211

Цели радиолокационные 12
— космические 201
— воздушные 205
Цифровая вычислительная машина как система массового обслуживания 111
Цифровой автомат 49, 55
— обнаружитель 166
— фильтр 89
Цифровая обработка радиолокационной информации 3, 9

Энергетическая характеристика цели 12
Экспоненциальный закон времени обслуживания 102
Экспоненциальное сглаживание параметров траектории 399
Экстраполяция параметров траектории 229

Оглавление

Предисловие 3

Введение. Принципы построения цифровой системы обработки радиолокационной информации 5

Раздел I. Общие вопросы теории цифровой обработки радиолокационной информации 11

Глава 1. Элементы статистической теории обработки дискретизованных радиолокационных сигналов 11

1.1. Статистические закономерности формирования радиолокационных сигналов 11
1.2. Дискретизация, квантование и кодирование радиолокационной информации 21
1.3. Статистический синтез алгоритмов обработки квантованных сигналов пачечной структуры 37
Список литературы 48

Глава 2. Элементы теории абстрактного синтеза устройств и алгоритмов цифровой обработки радиолокационной информации 49

2.1. Абстрактные схемы цифровых автоматов 49
2.2. Абстрактные схемы алгоритмов 68
Список литературы 76

Глава 3. Метематические методы анализа алгоритмов цифровой обработки радиолокационной информации 77

3.1. Критерии оценки эффективности алгоритмов обработки радиолокационной информации 77
3.2. Методы анализа вероятностных характеристик алгоритмов обработки рациолокационной информации 79
3.3. Методы анализа динамических и точностных характеристик алгоритмов цифровой обработки радиолокационной информации *88*
3.4. Анализ процесса обработки радиолокационной информации как процесса массового обслуживания 98
Список литературы 112

Глава 4. Исследование алгоритмов обработки радиолокационной информации методом статистического моделирования на универсальных цифровых вычислительных машинах (ЦВМ) 112

4.1. Общие вопросы статистического моделирования сложных систем 112
4.2. Пример статистического моделирования процесса обработки пачек двоично квантованных сигналов 122
4.3. Моделирование последовательности радиолокационных отметок, отраженных от одиночной цели 130
4.4. Принципы моделирования динамической обстановки в зоне обзора РЛС 139
Список литературы 149

Раздел II. Методы и алгоритмы цифровой обработки радиолокационной информации 150

Глава 5. Цифровая первичная обработка двоично квантованных радиолокационных сигналов 150

5.1. Общая характеристика задач первичной обработки радиолокационных сигналов 150
5.2. Формирование пачек радиолокационных сигналов 152
5.3. Элементы синтеза оптимальных логических схем для первичной обработки пачек двоично квантованных сигналов. 155
5.4. Безвесовая обработка пачек двоично квантованных сигналов 160
5.5. Статистический анализ цифровых обнаружителей. 166
5.6. Реализация первичной обработки на ЦВМ 178
Список литературы. 197

Глава 6. Методы и алгоритмы основных операций вторичной обработки радиолокационной информации 198

6.1. Краткая характеристика основных операций вторичной обработки 198
6.2. Сигналы и помехи на входе системы вторичной обработки . . 200
6.3. Оценка параметров полиномиальной функции при фиксированном объеме выборки 211
6.4. Экстраполяция (предсказание) параметров траектории . . 229
6.5. Стробирование и селекция отметок в стробах. 236
Список литературы 250

Глава 7. Обнаружение и сопровождение траекторий целей по данным обзорной РЛС. 250

7.1. Общая характеристика процесса обнаружения траекторий 250
7.2. Алгоритм «завязки» траекторий и его анализ 251
7.3. Синтез алгоритмов подтверждения (окончательного обнаружения) завязанной траектории 255
7.4. Статистические характеристики алгоритма последовательного анализа 260
7.5. Статистический анализ алгоритмов серийных испытаний при обнаружении ложных траекторий. 269
7.6. Статистический анализ алгоритмов серийных испытаний при обнаружении истинных траекторий. 279
7.7. Алгоритм сопровождения траектории цели и его статистический анализ. 284
7.8. Некоторые вопросы реализации алгоритмов обнаружения и сопровождения траекторий. 292
7.9. Принцип полуавтоматического сопровождения целей. . . . 302
Список литературы. 306

Глава 8. Обработка сигналов в физическом стробе индивидуального сопровождения 306

8.1. Принципы построения цифровых радиолокационных измерителей одиночных целей. 306
8.2. Алгоритм оптимальной обработки в двумерном стробе . . . 307
8.3. Статистические характеристики амплитуд поля отношения правдоподобия. 310
8.4. Статистические характеристики положения максимумов поля отношения правдоподобия. 319
8.5. Обнаружение и селекция одиночной отметки от цели в двумерном стробе. 323
8.6. Точность оценки координат при оптимальном обнаружении и селекции в стробе 333
Список литературы 336

Глава 9. Последовательное сглаживание (фильтрация) параметров траек 337
9.1. Формулировка задачи последовательного сглаживания параметров 337
9.2. Элементы теории оптимальной фильтрации 339
9.3. Оптимальное последовательное сглаживание параметров невозмущенной детерминированной траектории 344
9.4. Последовательное сглаживание параметров траектории маневрирующей цели 364
9.5. Обнаружение скачка параметров траектории сопровождаемой цели. (Обнаружение маневра цели) 373
9.6. «Скользящее» сглаживание параметров траектории с помощью цифровых фильтров с постоянной памятью 382
9.7. Экспоненциальное сглаживание параметров траектории 389
Список литературы 401
Глава 10. Объединение радиолокационной информации нескольких разнесенных источников 405
10.1. Задачи, решаемые при объединении информации от нескольких источников 406
10.2. Статистические методы отождествления информации нескольких источников 409
10.3. Пример алгоритма периодического объединения информации 420
10.4. Характеристики качества процесса объединения информации нескольких источников 423
Список литературы 426
Предметный указатель 427

Сергей Захарович Кузьмин

Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации

Художественный редактор *З. Е. Бендрова*

Технический редактор *А. А. Бе с*
Корректор *З. Г. Галушкина*

Сдано в набор 1/XII—73 г. Подп. в печать 27/V—74 г. Т-09838
Формат 60×90/16 Бумага типографская № 3
Объем 27 усл. п. л. 28,817 уч.-изд. л.
Тираж 10 500 экз. Зак. 614 Цена 1 р. 58 к.
Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии
Москва, И-41, Б. Переяславская, 46.

40'

Инв. № 38247080,

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
23	ф-ла (1.2.4)	$\ldots [x_н^*(t) - x^*(t)]^2 dt$	$\ldots [x_{ik}(t) - x(t)]^2 dt$
36	ф-ла (1.2.27)	$\ldots \ln (S(\tau_0/S_0)$	$\ldots \ln (S_i(\tau_0)/S_0)$
191	1 сверху	при $\tau_0 = \tau_0$	при $\tau_1 = \tau_0$
312	ф-ла (8.3.6)	$A = \left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\ldots}{\sigma}\right)\right]^{-1}$	$A = \left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\bar{\Sigma}_S}{\sigma_S}\right)\right]^{-1}$
313	12 снизу	$\Sigma'_N \ldots \Sigma'_S$	$\bar{\Sigma}'_N \ldots \bar{\Sigma}'_S$
348	ф-ла (9.	$\ldots = (\hat{\vartheta}_{n\vartheta} - \vartheta_n) \times$ $\times \Psi_{n\vartheta}^{-1} (\hat{\vartheta}_{n\vartheta} - \vartheta_n) + \ldots$	$\ldots = (\hat{\vartheta}_{n\vartheta} - \vartheta_n)^T \times$ $\times \Psi_{n\vartheta}^{-1} (\hat{\vartheta}_{n\vartheta} - \vartheta_n) + \ldots$
351	4 и 5 снизу	$f_n = n$, $g_n = n(n-1)/2$, $h_n = n(n-1)(2n-1)/6$, $K_n = n^2(n^2-1)/12$.	$f_n = nw_r$, $g_n = n(n-1)w_r/2$, $h_n = n(n-1)(2n-1)w_r/6$, $K_n = n^2(n^2-1)w_r^2/12$.
383	ф-ла (9.6.1)	б) $\hat{U}_n = \hat{U}_{n\vartheta} + \alpha \hat{U}_{n\vartheta} + u_0$,	б) $\hat{U}_n = \hat{U}_{n\vartheta} + \alpha\Delta\hat{U}_{n\vartheta} + u_0$,
413	1 снизу	$w_{U_{lp}} = \frac{1}{\sigma^2_{U_p} + \sigma^2_{U_p}}$,	$w_{U_{lp}} = \frac{1}{\sigma^2_{\vartheta_p} + \sigma^2_{U_l}}$

Зак. 614