УДК: 621.452: 536.24
ББК 39.55
К 78

С.Ю. Крашенинников. Введение в теорию теплообмена в воздушно-реактивных двигателях. Учебное пособие. -М.: 2009 г. с.

Основой изложенного материала является курс лекций, которые автор читает студентам пятого курса факультета аэродинамики и летательной техники МФТИ. Построение и содержание курса ориентировано на то, чтобы дать будущим инженерам общие представления о процессах теплообмена в условиях, соответствующих рабочему процессу в воздушно-реактивных двигателях (ВРД). В то же время для тех, кто будет в дальнейшем специализироваться на задачах теплообмена, это является необходимой базой при освоении методов и подходов в решении прикладных задач теплообмена в ВРД.

УДК: 621.452:536.24
ББК 39.55

Автор выражает благодарность Л.Л.Остроменской за большую помощь при оформлении рукописи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. АВИАЦИОННЫЙ ВОЗДУШНО-РЕАКТИВНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ – ТЕПЛОВАЯ МАШИНА

Об основных принципах работы ВРД

В настоящее время наиболее распространёнными авиационными двигателями являются воздушно-реактивные двигатели (ВРД), в которых в отличие от ракетных двигателей в качестве окислителя при сжигании топлива используется воздух окружающей среды.

И те, и другие двигатели являются тепловыми машинами в том смысле, что их полезная функция обусловлена превращением внутренней химической энергии топлива в механическую.

При сжигании топлива выделяется тепловая энергия. При этом создаётся усилие, необходимое для приведения в движение летательного аппарата. В ВРД используется жидкое или газообразное топливо. При его горении в смеси с воздухом выделяется тепло, которое в реактивном двигателе преобразуется в так называемую «тягу двигателя».

Предшественниками воздушно-реактивных двигателей были винтовые, тяга которых создавалась винтом, приводимым в движение поршневым мотором (двигателем внутреннего сгорания).

При использовании поршневого двигателя разделены процессы превращения тепловой энергии в механическую и создания тяги. Схема этого процесса проиллюстрирована на рис. 1.1.

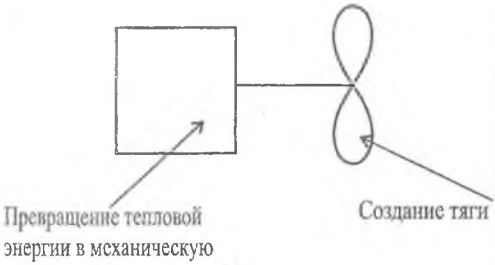


Рис. 1.1. Схема работы винтового движителя

Примером простейшего ВРД является прямоточный двигатель, который условно можно считать неким антиподом винтового, и при таком подходе обычный турбореактивный двигатель занимает промежуточное положение между ними (диаграмма на рис. 1.2).

Поршневой	Турбореактивный	Прямоточный

Рис. 1.2. Диаграмма сопоставления типов двигателей

Рассмотрим процесс создания тяги (усилия) в прямоточном воздушно-реактивном двигателе.

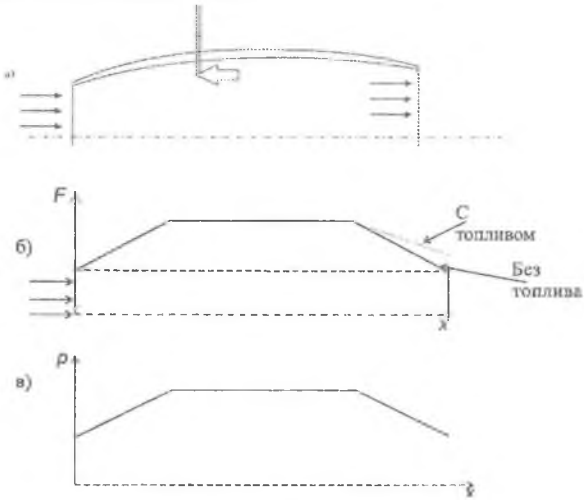


Рис. 1.3. Схемы течения в прямоточном двигателе (а) и закономерности распределения параметров по его тракту (б, в)

Схема течения в прямоточном ВРД при скорости движения, меньшей скорости звука (рис. 1.3а), состоит в следующем: поток, входящий в двигатель, расширяется, статическое давление в нём возрастает и в поток вводится горючее, которое воспламеняется. Продукты сгорания, скорость которых больше скорости потока на входе, выходят через выходное сопло. Усилие (тяга) создаётся в результате разницы в интегралах продольных компонент сил давления во входной и выходной частях канала двигателя.

На рис. 1.3б схематично показаны закономерности изменения площади внутреннего канала прямоточного ВРД, при которых возможно прохождение через ВРД одинакового количества втекающего воздуха при отсутствии или наличии дополнительного

подвода вещества. И в том, и другом случае реализуется распределение статического давления, показанное на рис.1.3в. На входе в канал и на выходе из него статическое давление совпадает с давлением в окружающей среде. Для прохождения потока массы при дополнительном подводе необходимо расширение площади выхода внутреннего потока на величину ΔF. В результате этого интеграл сил давления, направленных вдоль оси x, уменьшается на величину $P\Delta F$. Сила, действующая навстречу потоку, возрастает на величину тяги $R = P\Delta F$.

Если рассмотреть в таком же приближении ход изменения сил давления в турбореактивном двигателе, то он будет аналогичен. Входящий в двигатель воздух сжимается в компрессоре, затем попадает в камеру сгорания, где окисляет горючее, и продукты сгорания, приводящие в движение турбину, которая вращает компрессор, охлаждаются, давление снижается и газ выходит наружу. В этом процессе статическое давление повышается от значения, соответствующего давлению окружающей среды, до уровня, создаваемого компрессором, и затем снижается в турбине.

Разница сил давления в проекции на ось x, приложенных к элементам проточной части, создает силу тяги, которая, в основном, приложена к компрессору. Соответствующие схемы показаны на рис. 1.4.

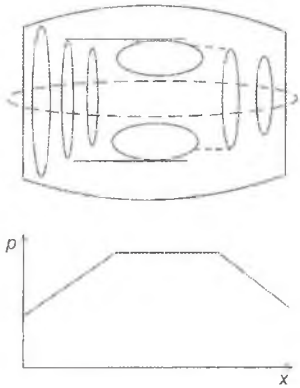


Рис. 1.4. Схемы турбореактивного двигателя и распределения параметров по его тракту

Таким образом, в воздушно-реактивном двигателе, в отличие от винтового, создание тяги совмещено с процессом превращения

тепловой энергии в механическую. Это способствует снижению массы двигателя, но создает дополнительные проблемы, связанные с его теплонапряжённым состоянием. В ВРД процессы взаимодействия горячего газа и твёрдых поверхностей происходят при значительных скоростях движения газа относительно поверхности. Известно, что при движении среды теплообмен с поверхностью интенсифицируется.

В связи с этим в настоящее время уровень температуры и давления рабочего тела в газотурбинных (турбореактивных) двигателях ниже, чем в поршневых, поскольку в последних проблема отвода тепла с поверхностей решается легче.

Высокий уровень температуры и давления рабочего тела необходим для достижения высоких к.п.д.

О коэффициенте полезного действия ВРД

Значение коэффициента полезного действия (к.п.д.) двигателя летательного аппарата (ЛА) должно отражать его эффективность как движущего средства и может быть определено как отношение некоторой «полезной» затраты энергии к расходуемой.

Полезная затрата энергии в единицу времени, иначе полезная мощность W_e при полёте ЛА, – это произведение силы тяги R двигателя на скорость движения V

$$W_e = RV.$$

Затраченная мощность W – это разность потоков полной энтальпии на входе в двигатель и на выходе из него. $W = G\,(i^*_1 - i^*_2)$,

G – расход рабочего тела.

На рис. 1.5 показана схема и даны обозначения сечений входа и выхода.

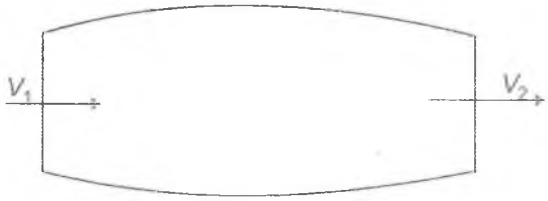


Рис. 1.5. Обозначение скоростей на входе в прямоточный двигатель и выходе из него

Величина тяги определяется как разность импульсов на входе в двигатель и выходе из него

$$R = G\,(V_2 - V_1),$$

т.е. полётный к.п.д.

$$\eta = \frac{W_e}{W} = \frac{G\left(V_2 - V_1\right)V}{G\left(i_2^* - i_1^*\right)}.$$

Если обратиться к анализу эффективности винтового движителя (см. рис.1.1), то можно представить разделение эффективности двух процессов: на эффективность превращения энергии топлива в механическую, которое происходит в двигателе и зависит от его свойств, и на эффективность превращения механической энергии в тягу, которая зависит от свойств винта.

В связи с этим целесообразно условиться, что общий коэффициент полезного действия движителя η состоит из двух составляющих:

$$\eta = \eta_t \cdot \eta_R.$$

Коэффициент η_t характеризует эффективность процесса превращения тепловой энергии в механическую. В случае ВРД

$$\eta_t = \frac{G(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2})}{W}$$

и называется термическим к.п.д.

Отсюда, поскольку

$$\eta_R = \frac{\eta}{\eta_t},$$

используя предложенное ранее определение величины η, получим

$$\eta_R = \frac{RV_1}{G(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2})} = \frac{2}{1 + \frac{V_2}{V_1}}.$$

Здесь принято, что скорость на входе в двигатель V_1 равна скорости полёта V. Аналогичные соотношения для определения эффективности ВРД опубликованы Б.С. Стечкиным в журнале «Техника воздушного флота» в 1927 г.

Коэффициент η_R называется пропульсивным коэффициентом полезного действия. Если применить полученные соотношения к

винтовому движителю, то можно видеть, что η_R характеризует к.п.д. винта, а коэффициент η_t должен характеризовать отношение мощности на валу двигателя к тепловой энергии топлива, расходуемого в единицу времени.

Можно отметить, что пропульсивный к.п.д. винта тем выше, чем меньше разность значений скоростей потока перед и за ним. Это приводит к необходимости увеличения размеров винта для получения необходимого усилия при достаточной эффективности. Такая закономерность отражается и в тенденции развития турбореактивных двигателей, в которых в настоящее время в качестве первой ступени компрессора используется мощная ступень, называемая вентилятором. Размер такого вентилятора близок к размеру винта и поэтому для повышения его эффективности необходимо применение вентиляторов всё большего размера.

Величина термического к.п.д. зависит от многих составляющих, но его предельное значение может быть определено на основании анализа цикла Карно, реализующегося в двигателе.

Согласно Карно,

$$\eta_t \leq 1 - \frac{T_{2k}}{T_{1k}},$$

где T_{2k}– температура холодильника, а T_{1k} – температура нагревателя.

Для оценки предельного значения термического к.п.д. можно принять, что T_{1k} – температура газа, совершающего работу, а T_{2k} – температура газа после совершения работы, т.е. T_{1k} – это температура газа перед турбиной ТРД, а T_{2k} – температура газа на выходе из двигателя.

Чем выше значение T_{1k}, тем ближе верхний предел к.п.д. к единице. Например, при $T_{2к}$=500 К и T_{1k} = 1400 К $\eta_{t\,max}$ = 0.643, а при T_{1k} = 1700К $\eta_{t\,max}$ = 0.706. Это указывает на то, что повышение температуры рабочего тела на 50° С соответствует, при заданных условиях, повышению термического к.п.д. приблизительно на 1 %.

Цикл Карно помогает ориентироваться в предельных значениях к.п.д. Более корректно термодинамический к.п.д. ВРД определяется с помощью цикла Брайтона.

Картине физического процесса соответствует рис. 1.6.

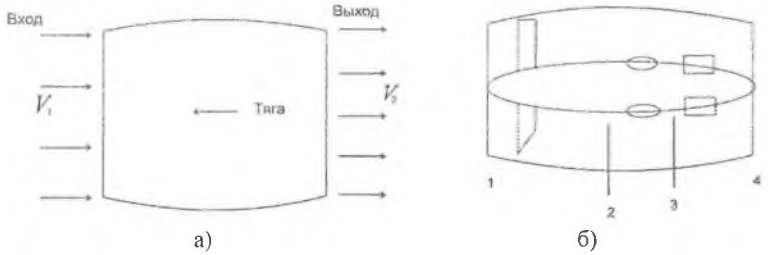


Рис. 1.6. Идеализированная схема работы ВРД (а) и обозначение начала и окончания рабочего процесса ТРД (б)

Суммарный к.п.д.

$$\eta = \frac{R_v}{W} = \eta_t \cdot \eta.$$

Рассмотрим возможность определения термического к.п.д. η_t. Есть факторы, отрицательно влияющие на эффективность двигателя, которые связаны с утечкой тепла, потерями импульса из-за трения, несовершенством лопаточных машин. Однако, в соответствии с представлениями термодинамики, существуют принципиальные ограничения к.п.д., которые обусловлены низкой (условно) температурой активного рабочего тела и высокой (условно) температурой отработавшего рабочего тела.

На рис. 1.6б показана схема ТРД с обозначением сечений, соответствующих границам различных термодинамических процессов: 1– сечение входа в двигатель, начало процесса сжатия газа; 2 – сечение выхода из компрессора и входа в камеру сгорания, начало процесса подвода тепла; 3 – сечение выхода из камеры сгорания и входа в турбину, начало процесса совершения работы и расширения газа; 4 – сечение выхода – конечная точка цикла.

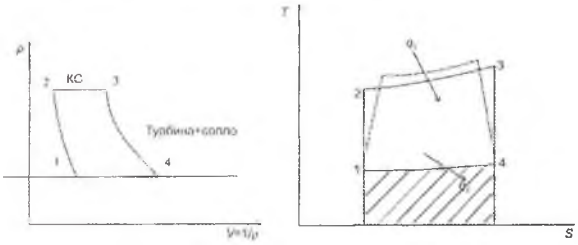


Рис. 1.7. *PV* - и *TS* - диаграммы рабочего процесса ТРД

На рис. 1.7 показаны *PV*- и *TS*-диаграммы рабочего процесса при его идеальном протекании. На *TS*-диаграмме штриховые линии соответствуют неидеальному протеканию процесса, называемого циклом Брайтона.

Эффективность термодинамического цикла можно представить как отношение работы в цикле к количеству затраченного тепла

$$\eta_c = \frac{l_c}{q_1}, \quad q_1 = C_P(T_3 - T_2) = C_P T_1 \left(\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} \right).$$

В теории ВРД показано, что для работы в цикле l_c справедливо соотношение

$$l_c = C_p T_1 \left(\pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \left(\frac{\Delta}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} - 1 \right),$$

где $\Delta = T_3/T_1$, $\pi = p_2/p_1$, k – отношение удельных теплоёмкостей C_p/C_v.

Величина l_c образована произведением двух членов: возрастающего с ростом отношения давлений на выходе из компрессора и входе в него и убывающего. Отношение температур T_3/T_1 является параметром, откуда следует, что зависимость l_c от отношения давлений π будет немонотонной и положение максимума будет зависеть от отношения температур Δ (рис. 1.8).

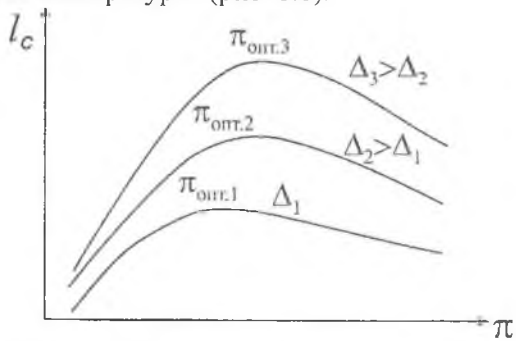


Рис.1.8. Зависимость работы в цикле от основных параметров рабочего процесса в ТРД

Максимум l_c возрастает с ростом π и сдвигается в сторону бо́льших π с повышением температуры T_3. Зависимость η_c от π будет сходна с этой зависимостью, максимум l_c будет сдвигаться в сторону бо́льших значений π с ростом T_3.

Изложенные качественные представления об эффективности рабочего цикла в газотурбинных двигателях соответствуют современным тенденциям их развития.

Если проследить по времени изменение рабочих параметров создаваемых двигателей, то будет виден явный рост уровней рабочих температур и давлений. На диаграммах, изображённых на рис. 1.9, представлены ориентировочные параметры двигателей разных поколений по времени их разработки (по годам).

Рис. 1.9. Изменение основных параметров рабочего процесса в авиационных турбореактивных двигателях по годам

Уровень температуры газа перед турбиной T_3 и степень повышения давления π возрастали с появлением каждого нового поколения создаваемых двигателей.

Эти данные дают возможность качественно судить о последовательном усложнении теплового состояния элементов двигателей и об увеличении теплового воздействия рабочего тела (газа) на элементы конструкции двигателя.

Исходя из обычных соображений можно представить, что тепловые потоки Q пропорциональны разности значений температур рабочего тела и твёрдых поверхностей и возрастают с увеличением скорости движения газа и его плотности. Это означает, что при повышении уровня давления и температуры рабочего тела тепловые потоки в двигателе возрастают и, в соответствии с рис. 1.9, с каждым новым поколением двигателей решение проблем, касающихся теплового состояния элементов двигателя, становится всё более сложным. Это требует от разработчиков новых двигателей комплексного владения проблемами, связанными с теплообменом.

- *Теория двухконтурных турбореактивных двигателей. / Под ред. С.М. Шляхтенко и В.А. Сосунова – М.: Машиностроение, 1979.*
- *Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука, 1976.*

2. ТЕПЛОНАПРЯЖЁННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ГАЗОТУРБИННОМ ВРД

Схемы современных турбореактивных двигателей

На рис. 2.1 показаны схемы современных двухконтурных турбореактивных двигателей (ДТРД) военного и гражданского назначения. И в тех, и в других процесс создания тяги происходит одинаково: входящий воздух сжимается в компрессоре, попадает в камеру сгорания, в результате чего продукты сгорания совершают работу в турбине, вращающей компрессор. Для получения высоких значений пропульсивного к.п.д. часть воздуха, минуя камеру сгорания и турбину, проходит через внешний контур двигателя и выходит через сопло. Повышение давления в этом контуре, создаваемое первыми ступенями компрессора, невелико. Двигатели военного назначения могут отличаться от гражданских наличием за турбиной форсажной камеры, в которой может дополнительно сгорать топливо и создаваться тяга в процессе, аналогичном рабочему процессу в прямоточном воздушно-реактивном двигателе.

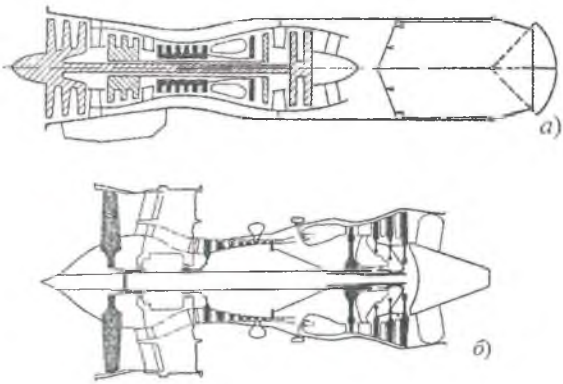


Рис. 2.1. Схемы двухконтурных турбореактивных двигателей военного (а) и гражданского назначения (б)

Наиболее теплонапряжёнными элементами двигателей являются камера сгорания и турбина.

Камера сгорания турбореактивного двигателя

На рис. 2.2 схематично показано устройство камеры сгорания.

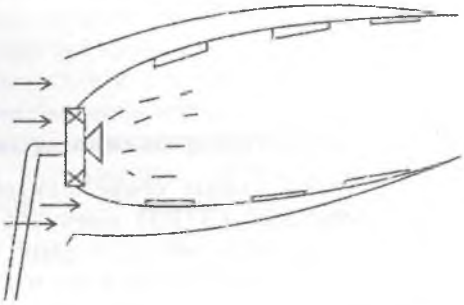


Рис. 2.2. Схематичное изображение основной камеры сгорания ТРД и движения в ней воздуха и топлива

Наружной частью камеры сгорания является корпус, который соединяется с выходом проточной части компрессора. Внутри корпуса находится так называемая жаровая труба с отверстиями, в начале которой расположен завихритель и система впрыска топлива. Воздух из компрессора попадает внутрь корпуса камеры сгорания, а часть его проходит непосредственно через завихритель внутрь жаровой трубы. Другая часть воздуха обтекает жаровую трубу и поступает в нее через отверстия. Эта часть воздуха и жаровая труба отделяют несущую конструкцию камеры сгорания и её корпус от зоны горения.

При горении в воздухе топлива (в двигателях, в основном, топливом является керосин) возникает область, которую можно отождествлять с фронтом пламени, где температура достигает примерно 2300 К.

Если бы количество воздуха и топлива было бы таким, что при сгорании, полностью окисляя топливо, в реакцию вступал бы весь кислород воздуха, то этот же уровень температуры имели бы и продукты сгорания, попадающие на турбину. Такой режим горения называется стехиометрическим. Однако в реальных двигателях часть кислорода воздуха не вступает в реакцию и поэтому средняя температура продуктов сгорания оказывается не такой высокой, т.е. рабочий процесс в камере сгорания организован при избыточном количестве воздуха,

которое характеризуется коэффициентом избытка воздуха α. Значение α, равное 1 для стехиометрического режима, показывает, во сколько раз количество воздуха превышает необходимое для полного соединения кислорода при полном окислении топлива.

Так, при $\alpha = 3$ прореагирует только третья часть кислорода воздуха, а расход керосина при этом составит около 0.02 расхода воздуха.

В реально существующих двигателях, которые называют двигателями четвертого поколения, на основных режимах работы $\alpha = 2.7\ldots3$, что соответствует среднему значению температуры продуктов сгорания, совершающих работу в турбине, ~ 1700 К.

Конструкция камеры сгорания подчинена необходимости обеспечения её работоспособности и создания потока горячих газов, который может быть использован в турбине. Последнее требование приводит к необходимости очень точного распределения охлаждающего воздуха, который дозируется отверстиями в жаровой трубе камеры сгорания. Поскольку турбина рассчитана на некоторую температуру рабочего тела (значение которой определяет к.п.д. цикла), распределение температуры в потоке перед турбиной должно быть достаточно равномерным. При неравномерном распределении температуры, когда жёстко задано её среднее значение, появляются области с повышенным значением температуры. Такое превышение температуры оказывается разрушительным для элементов турбины.

Прогресс в авиадвигателестроении требует повышения температуры цикла, а значит и повышения температуры на выходе из камеры сгорания. Это может быть достигнуто только путём уменьшения избытка воздуха; при этом происходит приближение коэффициента избытка воздуха к единице. В этих условиях применение обычной системы охлаждения камеры сгорания (жаровая труба с отверстиями) может оказаться невозможным. В связи с этим рассматриваются другие конфигурации камер сгорания, которые обеспечивают возможность поддерживать безопасное значение температуры корпуса в условиях значительно меньших расходов воздуха, – так называемые «чешуйчатые» схемы, схемы с «ударным охлаждением» и т.п.

Сопловой аппарат и первые ступени турбины

Горячие газы из камеры сгорания поступают в турбину. Прежде, чем попасть на лопатки рабочего колеса, они проходят через так

называемый сопловой аппарат – ряд неподвижных лопаток, которые поворачивают поток, обеспечивая наиболее эффективное взаимодействие потока и рабочего колеса. На рис. 2.3 показана схема взаимодействия потока с элементами турбины.

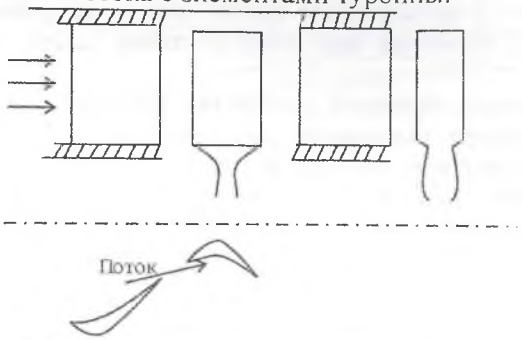


Рис. 2.3. Схема взаимодействия потока с лопатками турбины

Очевидно, что при температуре газов около 1700 К без специальных средств защиты металл турбины расплавился бы. Таким средством, прежде всего, является охлаждение лопаток соплового аппарата турбины и рабочего колеса.

На примере камеры сгорания и турбины можно представить основные требования к охлаждению элементов конструкции, подвергающихся воздействию самых горячих газов, которые движутся в тракте двигателя.

О предельных значениях температуры элементов конструкции

Из анализа рассмотренных примеров видно, что температура горячих газов в таких элементах двигателя, как камера сгорания и турбина, настолько высока, что при непосредственном взаимодействии газа и элементов конструкции последние разрушились бы. Эти элементы конструкции работоспособны только при их охлаждении до такого уровня температур, при котором они могут выполнять свою функцию. На рис. 2.4 приведена ориентировочная зависимость допустимой (предельной) нагрузки $\sigma_{пр}$ от температуры материала типа нержавеющей стали. Величина $\sigma_{пр}$ соответствует максимальному значению усилия, которое выдерживает элемент конструкции из данного материала без заметного нарушения его свойств.

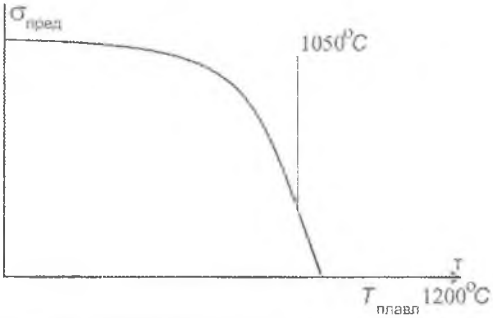


Рис. 2.4. Изменение предельного значения напряжения в материале типа стали в зависимости от температуры

Видно, что величина $\sigma_{пр}$ монотонно уменьшается с ростом температуры и резко снижается вблизи точки плавления (в рассмотренном случае $T_{плавл} \approx 1100°C$). Отсюда следует, что элементы, на которые действуют небольшие нагрузки, могут иметь температуру, достаточно близкую к температуре плавления, – в данном случае около 1000°C. Для элементов, нагрузка на которые высока, допустимыми могут оказаться лишь существенно более низкие значения температур.

В соответствии с этим допустимая температура жаровой трубы камеры сгорания 950…1000°C, соплового аппарата турбины 900…950°C, а рабочей лопатки турбины – ещё ниже.

Принцип охлаждения показан на рис. 2.5.

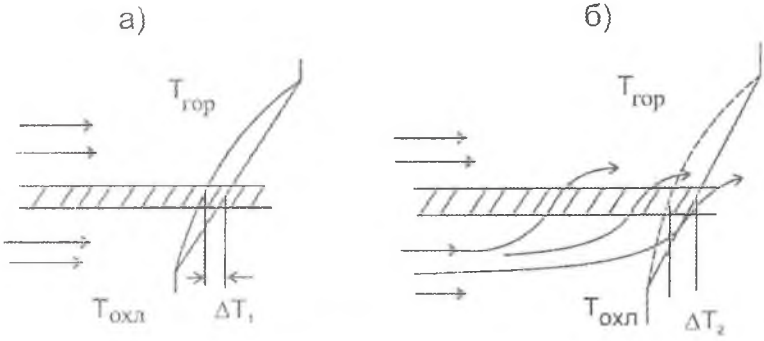


Рис. 2.5. Схемы, иллюстрирующие распределение температуры вблизи непроницаемой (а) и проницаемой (б) стенки, обтекаемой с двух сторон

При обтекании некой стенки двумя потоками газа: с одной стороны – холодного, с другой – горячего, температура стенки приобре-

тает промежуточное значение между температурами потоков, т.е. она всегда ниже температуры горячего газа. При этом возникает задача организации такого охлаждения, при котором разница температур стенки и горячего газа была бы максимальной (при прочих равных условиях). Для этого, в частности, используется возможность проникновения более холодного газа через стенку для дополнительного образования заградительной области между стенкой и горячим газом. В первом случае охлаждение называется конвективным, во втором – конвективно-плёночным.

Форсажная камера и сопло

В двигателях военного назначения, как правило, имеются форсажная камера и регулируемое сверхзвуковое сопло (рис. 2.6).

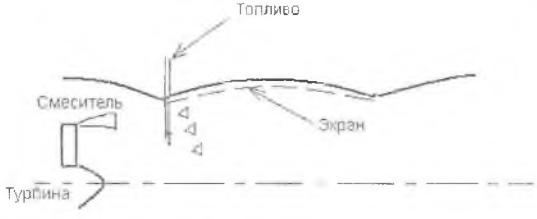


Рис. 2.6. Схема форсажной камеры ТРД

В форсажной камере температура газов ~ 2000 К, коэффициент избытка воздуха $\alpha \approx 1.2...1.3$, допустимая температура стенки внутри форсажной камеры ~ 1000°С. В форсажной камере между корпусом и горячим потоком находится металлический экран, который частично выполняет роль жаровой трубы в основной камере сгорания. Экран сделан проницаемым и холодный воздух, проходящий между ним и корпусом, выходит через специальные щели и создает на экране защитную охлаждающую плёнку.

Систему охлаждения рассчитывают таким образом, чтобы охлаждающего воздуха хватало и на защиту экрана, и на защиту горла сверхзвукового сопла.

Реализовать такую систему охлаждения для сверхзвуковой регулируемой части сопла не удается и поэтому принудительно охлаждается только горло, а сверхзвуковые створки охлаждаются внешним потоком.

Кроме того, в расширяющемся сверхзвуковом потоке температура газа понижается, что несколько облегчает тепловой режим сверхзвуковых створок сопла.

Термоциклы

Серьёзное воздействие на механические элементы двигателя оказывает цикличность тепловых нагрузок. Известно явление разрушения под действием периодического нагрева и охлаждения. В деталях двигателя соединяется несколько разрушительных воздействий: тепловая и механическая нагрузки и цикличность их проявления.

Например, для военного двигателя существуют следующие режимы работы: малый газ, номинальный режим, режимы разной высоты и скорости полёта в их прямом и обратном отсчёте. Эти режимы различаются по уровню нагрузок и температур элементов, т.е. тепловое и напряжённое состояниях элементов двигателя периодически изменяются.

При термомеханических нагрузках в материалах возникают необратимые изменения, которые накапливаются при повторном воздействии. Наиболее опасны в этом отношении механические нагрузки при повышенной температуре. При этом в наиболее неблагоприятных условиях оказываются лопатки и диски рабочих колёс компрессора и турбины.

Даже, если значения рабочих температур каких-то элементов и не очень велики, из-за высокого уровня механических нагрузок в них при циклировании накапливаются значительные изменения. Чтобы ослабить этот эффект, необходимо понижать рабочую температуру таких элементов, к которым относятся, например, диски рабочих колёс. Хотя уровень температуры в их рабочем состоянии не очень велик, поскольку они не соприкасаются с горячими газами, их также в некоторых случаях необходимо охлаждать.

Постановка задачи охлаждения

Как уже отмечалось, задачей охлаждения элементов двигателя является обеспечение работоспособности этих элементов при значении их температуры на некотором допустимом уровне. Если это достигается путём принудительного охлаждения, то специалисту, проектирующему этот элемент или анализирующему его работу, необходимо найти решение, по крайней мере, одной из двух следующих задач:

1. Определение температуры материала стенки, обтекаемой с двух сторон (холодным и горячим газом) при некоторых заданных условиях.

2. Определение условий, при которых материал стенки будет иметь заданную температуру.

На рис. 2.5 показаны схема течения и распределения температур для задачи №1 в случаях непроницаемой (а) и проницаемой (б) стенок. Необходимо определить закономерность изменения температуры в пространстве между потоками горячего и холодного газа, одновременно определяя температуру стенки. Когда стенка непроницаема, постановка задачи более простая. Во втором случае необходимо рассмотреть дополнительные эффекты, обусловленные взаимодействием потоков при проницаемости стенки.

На рис. 2.7 показана схема течения и распределения температур для задачи №2. Задана температура потока T_1 и температура стенки T_w. Значение T_w может быть задано исходя из термостойкости материала или возможных условий эксплуатации (например, для экрана форсажной камеры $T_w \approx 1000°C$). При такой постановке в результате решения задачи определяется тепловой поток в стенку, который необходимо отвести от неё, например, путём ее охлаждения с другой стороны.

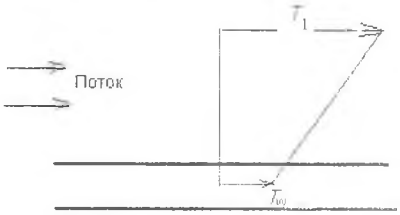


Рис. 2.7. Схема распределения температуры вблизи стенки

Задача отвода заданного потока тепла со стенки может решаться последовательными итерациями в такой же постановке, как задача №2. В результате набора её решений можно определить условия реализации заданного теплового потока.

• *Теория двухконтурных турбореактивных двигателей. /Под ред. С.М. Шляхтенко и В.А. Сосунова – М.: Машиностроение, 1979.*

• *Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. / Под ред. А.В. Лыкова, – М.: Госэнергоиздат, 1961.*

• *Авдуевский В.С. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике.– М.: Оборонгиз, 1960.*

3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПЕРЕНОС ТЕПЛА

Закон Фурье

Основой решения задач о переносе тепла является закон Фурье.

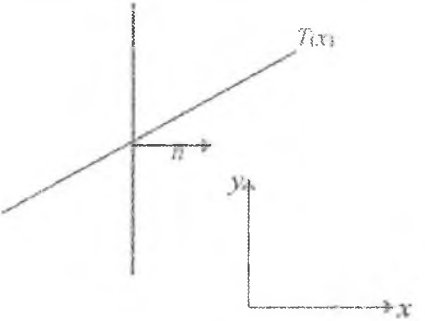


Рис. 3.1. Схема процесса передачи тепла (к выводу закона Фурье)

На рис. 3.1 показана схема явления, с помощью которой можно представить закон Фурье. В пространстве, разделённом плоскостью, нормальной к оси x, происходит процесс передачи тепла от правого полупространства к левому. Это обусловлено тем, что в окрестности разделительной плоскости имеется некоторое изменение температуры вдоль координаты x, при котором

$$\frac{\partial T}{\partial x} > 0.$$

Согласно закону Фурье количество тепла Q, перетекающее из правого полупространства в левое, для выделенного элемента разделительной плоскости ΔS будет пропорционально площади этого элемента, времени dt, коэффициенту теплопроводности вещества, заполняющего пространство k, и градиенту температуры T по нормали к плоскости со знаком минус, т.е.

$$\frac{dQ}{dt} = -k\frac{dT}{dn}\Delta S.$$

Тепло перетекает от среды с более высокой температурой к среде с более низкой температурой.

Представленное основное соотношение закона Фурье обычно используется в другой форме.

Рассматривается перетекание тепла через единичную площадку

$$\overline{Q} = \frac{Q}{\Delta S}.$$

В этом случае количество тепла можно представить как теплосодержание в единице объёма

$$\overline{Q} = \rho C_p T.$$

Изменение теплосодержания в единице объёма определяется тепловым потоком, точнее потоком тепла через единицу поверхности

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \frac{d\rho C_p T}{dt} = -k\frac{dT}{dn} = q.$$

В таком виде закон Фурье обычно используется при анализе процессов переноса тепла.

В задаче №2 предыдущего раздела соотношение

$$q = -k\frac{dT}{dn}$$

дало бы решение, если бы был определен градиент температуры.

Закон Ньютона – Рихмана

Применим полученное соотношение к анализу процесса передачи тепла через плоскую стенку при неизменных параметрах с каждой из сторон стенки.

Соответствующая схема приведена на рис. 3.2.

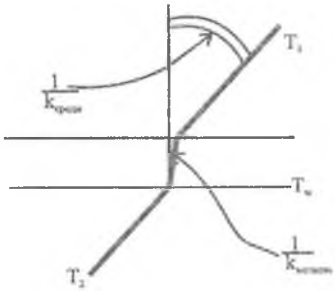


Рис. 3.2. Изменение температуры при наличии стенки между двумя средами с разной температурой

Если тепловой поток постоянен ($q = const$), то

$$\left|\frac{dT}{dy}\right| \sim \frac{1}{k},$$

т.е. в среде с низкой теплопроводностью (газ, жидкость) изменение температуры на некоторой длине намного больше, чем в среде с высокой теплопроводностью (металл).

В связи с этим при разделении потоков тонкой стенкой при анализе тепловых процессов можно принять, что в поперечном направлении температура стенки постоянна. В то же время при возможности точного измерения температуры с обеих сторон стенки легко вычислить тепловой поток q по приведённой формуле.

В случае однородного потока, движущегося вдоль стенки, значение температуры на некотором удалении от стенки может быть определено с помощью простого соотношения, которое следует из приведённых формул,

$$T = T_w + q\int_0^y \frac{d\xi}{k}.$$

Отсюда видно, что если на некотором удалении от стенки ΔL температура приобретает значение T_∞, то можно записать соотношение

$$T_\infty - T_w = q\frac{\Delta L}{k_{ср}},$$

где $k_{ср}$ – среднее значение коэффициента теплопроводности k.

Это соотношение показывает, что величину теплового потока q можно выразить через разность значений температур и некоторый коэффициент, определяемый свойствами потока вблизи стенки α ,

$$q = \alpha\,(T_\infty - T_w).$$

Коэффициент α называется *коэффициентом теплопередачи*.

Полученное соотношение может быть распространено на различные условия передачи тепла между потоком и поверхностью обтекаемого тела. В этом случае оно сохраняет прежний вид и называется *законом Ньютона – Рихмана*:

$$q = \alpha\,(T_\infty - T_w),$$

но здесь параметр α, также называемый коэффициентом теплопередачи, имеет более общий смысл. Этот коэффициент может, в целом, характеризовать сложные процессы как локального типа – теплопередача от элемента поверхности, – так и совокупной передачи тепла от всего тела, обтекаемого потоком.

- *Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. / Под ред. А.В. Лыкова. – М.: Госэнергоиздат, 1961.*
- *Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982.*
- *Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. Пер. с немец. /Под ред. А.А. Гухмана. – М.: Издат. иностр. лит., 1958.*
- *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1969.*
- *Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.*

4. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЫ

Вывод уравнения, описывающего передачу тепла в неподвижной среде

Уравнение, описывающее передачу тепла в неподвижной среде, следует из закона Фурье. Схема передачи тепла дана на рис. 4.1.

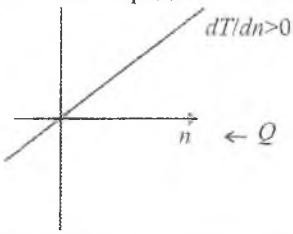


Рис. 4.1. Схема передачи тепла при наличии градиента температуры

Количество тепла Q, протекающего через воображаемую разделительную поверхность S через площадку ΔS за время Δt, будет

$$Q = -k\frac{dT}{dn}\Delta t \Delta S.$$

Поток тепла направлен навстречу градиенту температуры в соответствии со вторым началом термодинамики.

При выводе уравнения теплопроводности примéним соотношение для потока тепла к выделенному элементу в форме элементарного куба с центром в точке (x_0, y_0, z_0) (рис. 4.2).

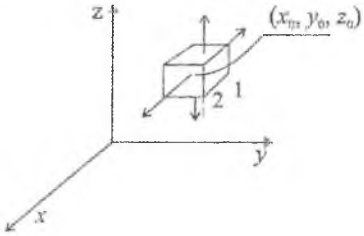


Рис. 4.2. Пояснение к выводу условия баланса тепла в элементарном объёме

Через площадку *1* вдоль оси x тепло втекает, а через площадку 2– вытекает. При этом внутри куба остается тепло ΔQ, которое определяется полной разностью потоков через все шесть граней рассматриваемого куба,

$$Q_{1x} = +k\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=x_0-\Delta x/2,\, y=y_0,\, z=z_0} \Delta t \Delta y \Delta z,$$

$$Q_{2x} = -k\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=x_0+\Delta x/2,\, y=y_0,\, z=z_0} \Delta t \Delta y \Delta z,$$

т.е. для граней куба, нормальных оси x,

$$\Delta Q_x = Q_{1x} + Q_{2x} = (\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x)\Delta t \Delta y \Delta z.$$

По аналогии могут быть получены значения ΔQ_y и ΔQ_z. Суммарная величина

$$\Delta Q = \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z \text{ или}$$

$$\Delta Q = Q_x + Q_y + Q_z = \left(\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{dT}{dz}\right)\Delta t \Delta V,$$

$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

Количество тепла на единицу объёма можно представить как

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \rho \Delta E,$$

где E – тепловая энергия единицы массы.

В этом случае полученное балансное соотношение будет иметь вид

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Свойства входящих сюда величин удовлетворяют следующим условиям:

$$\rho > 0,\ k > 0,\ \frac{\partial E}{\partial t} > 0.$$

В некоторых случаях можно принять, что k = const, а связь тепловой энергии с теплоёмкостью C имеет вид

$$C(x, y, z) = \rho \frac{\partial E}{\partial T}.$$

Тогда полученное уравнение примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{C}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T,$$

где Δ – лапласиан, а величина $\alpha = k/C$ – коэффициент температуропроводности.

Если рассматривать стационарную задачу о распределении температуры, то уравнение принимает вид $\Delta T = 0$.

Это уравнение – эллиптического типа, для которого постановка задачи формулируется в виде задачи Дирихле, с заданием условий на всей границе рассматриваемой области.

В одномерном случае это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

и может быть применено для определения распределения температуры внутри плоской стенки, на обеих поверхностях которой заданы значения температуры T_1 и T_2 (рис. 4.3).

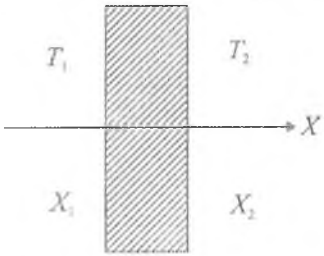


Рис. 4.3. К постановке задачи о стационарном одномерном распределении температуры

Решение уравнения будет таким: $T = в_1 x + в_2$.

Константы $в_1$ и $в_2$ определяются из граничных условий: $T(x_1) = T_1$ и $T(x_2) = T_2$ и тогда

$$T = \frac{(x - x_1)T_2 - (x - x_2)T_1}{x_2 - x_1}.$$

Нестационарное распределение температуры

В случае нестационарного распределения температуры исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T.$$

В случае одномерного нестационарного процесса уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Применительно к этому уравнению обычно ставится задача с граничными и начальными условиями. Для ряда постановок в одномерном, двумерном и трёхмерном случаях доказываются принцип максимума и теорема единственности.

Одномерная нестационарная задача иллюстрируется на рис. 4.4. Решение определяется в области на плоскости x, t, ограниченной двойными линиями и штриховой линией, параллельной оси x.

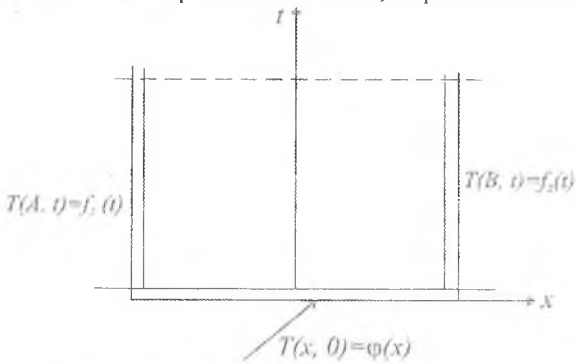


Рис. 4.4. К постановке задачи о нестационарном одномерном распределении температуры

Двойные линии обозначают контуры, на которых задаются начальные (отрезок AB на оси x) и граничные условия:

$$T(x,0) = \varphi(x) \text{ при } A<x<B,$$

$$T(A,t) = f_1(t) \text{ и } T(B,t) = f_2(t).$$

Решение внутри рассматриваемой области является единственным и удовлетворяет условию: максимум и минимум значений температуры не может наблюдаться внутри области, но возможен на её границе.

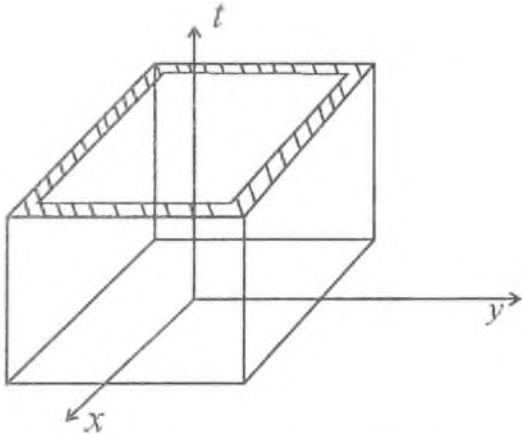


Рис. 4.5. К постановке задачи о нестационарном двумерном распределении температуры

То же самое справедливо для двумерного и трёхмерного случаев. На рис. 4.5 изображена схема постановки задачи для двумерного случая. Здесь максимум и минимум не могут наблюдаться внутри цилиндра (на картине он прямоугольной формы) с образующими, параллельными оси t.

Трёхмерный случай нельзя изобразить.

Доказательства указанных свойств решения могут быть перенесены на случай, когда задача решается для неограниченной области и используются только начальные данные ($T(x, y, z, 0) = \varphi$).

Простейшим случаем получения общего решения уравнения теплопроводности является задача о перераспределении по времени температуры в неограниченном стержне с заданным начальным распределением температуры.

Рис. 4.6. К заданию начального распределения температуры в одномерной задаче

Задано $T(x,o) = \varphi(x)$, требуется найти $T(x,t)$ (пояснение к постановке задачи на рис. 4.6).

Исходное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Из курса уравнений математической физики известно, что решение задачи даётся так называемым интегралом Пуассона

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{at}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}d\xi$$

и может быть применено для различных начальных распределений температуры. Используем это решение для двух случаев: ступенчатое распределение температуры и мгновенный точечный источник.

• *Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.*

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ЗАДАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ТЕЛЕ

Задача о ступенчатом распределении температуры

Рассмотрим неограниченный стержень, начальное распределение температуры в котором

$$T(x,0)=\varphi(x)=\left|\begin{matrix} T_1, x>0 \\ T_2, x<0 \end{matrix}\right. \quad \text{(см. рис. 5.1).}$$

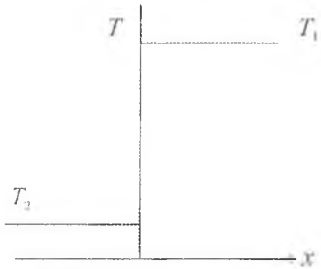


Рис. 5.1. Начальное ступенчатое распределение температуры

Для простоты преобразуем координату t в уравнении теплопроводности

$$t = t_{\text{стар.}} \cdot a$$

и тогда исходное уравнение будет

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Воспользуемся интегралом Пуассона

$$T(x,t)=\frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}+\frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}.$$

Обозначим

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

Сделаем замену переменных

$$\alpha\Big|_{-z}^{\infty} = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}\Big|_{0}^{\infty}, \quad d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

и получим

$$T(x,t) = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Интегралы в правой части можно представить в виде суммы констант и табличных интегралов

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha - \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

(использовано значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \sqrt{\pi}$).

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \int_{-z}^{0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

В результате получим

$$T(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Если вернуться к старой временной координате, то

$$z = \frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

Величина $\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$ определяется по табличной функции

$$\varphi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

которая (рис. 5.2) называется интегралом ошибок и изменяется в интервале 0-1, асимптотически приближаясь к единице при $\alpha \to \infty$.

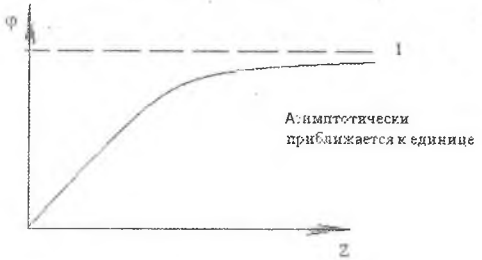


Рис. 5.2. Вид функции $\varphi(z)$ – интеграла ошибок

Решением рассматриваемой задачи будет

$$T(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2}\varphi(z).$$

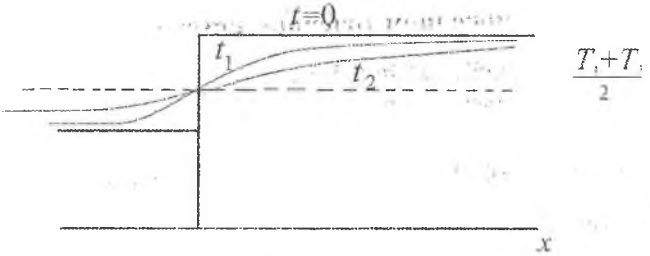


Рис. 5.3.Решение задачи о ступенчатом распределении температуры

В этом решении (рис. 5.3) проявляется дефект описания распространения тепла на основе закона Фурье: на любом расстоянии от начала координат, где находится исходная ступенька температуры, при любом сколь угодно малом значении t будет наблюдаться отличие распределения температуры от исходного. Это соответствует бесконечно большой скорости распространения тепла. Физически она ограничена скоростью теплового движения молекул c. Среднее значение c соответствует скорости распространения звука, из чего следует, что полученное решение (как и другие решения нестационарной тепловой задачи) корректно использовать при условии

$$x << ct.$$

Задача о мгновенном точечном источнике

Рассмотрим задачу о мгновенном точечном источнике.

В начальный момент распределение температуры описывается δ – функцией

$$T(x,0)=\varphi(x)=\delta(x)=0 \text{ при } |x|>0 \text{ и } \delta(x)=\infty \text{ при } |x|=0.$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$$

Решение должно описывать процесс постепенного выравнивания температуры (рис. 5.4).

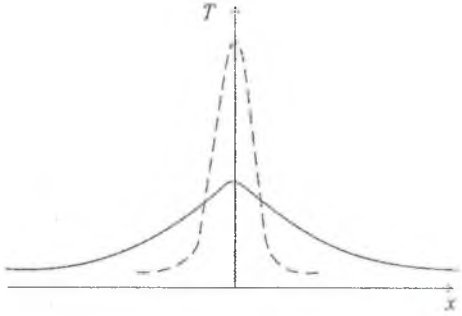


Рис. 5.4. Выравнивание распределения температуры с течением времени

В соответствии с выражением для интеграла Пуассона решение имеет вид

$$T(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi,$$

где

$$G=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}.$$

Используем для нахождения интеграла теорему о среднем

$$T(x,t)=\overline{G(x,\xi,t)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi.$$

Среднее значение $G = \overline{G}$ находится внутри интервала интегрирования. Поскольку подынтегральная функция имеет отличное от нуля значение только при $x = 0$,

$$\overline{G(x,\xi,f)} = G(x,0,t)\,.$$

Отсюда следует, что

$$T(x,t) = G(x,0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\,e^{-\frac{x^2}{4at}}.$$

Это решение называется *функцией влияния мгновенного точечного источника.* Хотя в природе таких источников не бывает, полученное решение можно использовать в практических задачах, например, для решения задачи о выравнивании температуры в стержне с местным перегревом.

Схема с начальными условиями показана на рис. 5.5.

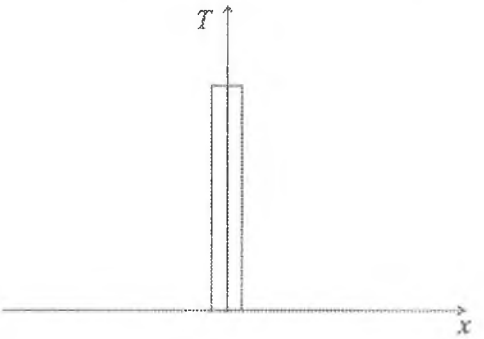


Рис. 5.5. Локальный источник тепла

Для расчёта распределения температур нужно использовать условие сохранения тепла, которому должно удовлетворять полученное решение.

Действительно,

$$Q(t) = C\rho\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx = \frac{C\rho}{2\sqrt{\pi at)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4at}}dx\,.$$

Сделаем замену переменных:

$$\alpha = x / 2\sqrt{\pi a t}, \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 d\alpha = \sqrt{\pi} \right),$$

$$Q(t) = \frac{C\rho 2\sqrt{\pi a t}}{2\sqrt{\pi a t}} = C\rho = const .$$

Это решение соответствует начальному распределению температуры в виде дельта-функции при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \text{ т.е. } \int_{-\infty}^{\infty} T(x) dx = 1 .$$

Если в начальный момент количество тепла было Q (т.е. в Q раз больше, чем $c\rho \cdot 1$), то для такого источника

$$T(x,t) = \frac{Q}{C\rho} G(x,t) = \frac{Q}{C\rho 2\sqrt{\pi a t}} e^{-\frac{x^2}{4at}} .$$

Это решение справедливо, если в некоторый момент t_0 распределение температуры близко к точечному с максимумом в точке x_0 и известно количество тепла Q .

Значение Q определяется интегрированием начального распределения температуры и может быть выражено через средние значения параметров

$$Q = \int C\rho T(x) dx \approx \Delta x \overline{C} \cdot \overline{\rho} \cdot \overline{T} ,$$

где Δx – характерная ширина начального распределения температуры, $\overline{C}$, $\overline{\rho}$, $\overline{T}$ – средние значения параметров.

Это решение допускает суперпозицию для нескольких источников, реализующихся в различных точках в разное время,

$$T(x,t) = \frac{Q_1}{C\rho} G(x - x_1, t - t_1) + \frac{Q_2}{C\rho} G(x - x_2, t - t_2) + \ldots$$

Интеграл Пуассона, как решение задачи о распределении тепла, может быть применён в случае двумерного и трёхмерного начального распределения температуры.

Для трёхмерной задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad T = \varphi(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0 .$$

Решение этой задачи в виде интеграла Пуассона будет

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}} \int \varphi(\xi, \eta, \xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4at}} .$$

В случае мгновенного точечного источника

$$T(r, t) = const \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4at}} .$$

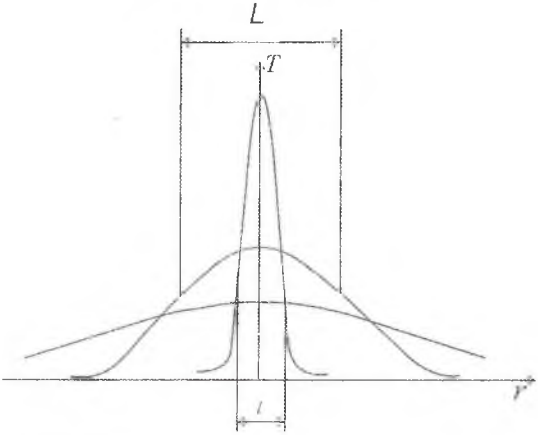


Рис. 5.6. Иллюстрация процесса выравнивания распределения температуры

На рис. 5.6 показана схема выравнивания температуры в пространстве. В трёхмерном случае так же, как и в одномерном, скорость выравнивания температуры можно охарактеризовать законом расширения неоднородности по времени.

Охарактеризуем размер неоднородности температуры характерной шириной l её распределения в пространстве (см. рис. 5.6). Значение $r = l$ может соответствовать, например, так называемой полуширине профиля температуры, т.е. расстоянию между противоположными точками распределения температуры, в которых температура равна половине её максимального значения в данный момент времени. Это соответствует условию

$$e^{-\frac{l^2}{4at}} = const \quad \text{или} \quad \frac{l^2}{4at} = const,$$

т.е. в зависимости от времени характерная ширина температурной неоднородности увеличивается по закону $l \sim \sqrt{at}$ (рис. 5.7).

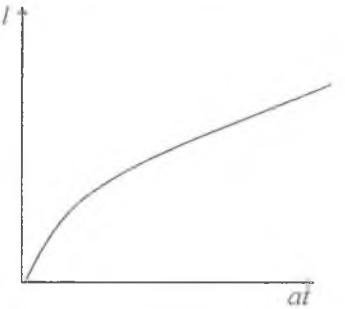


Рис. 5.7. Расширение области температурной неоднородности с течением времени

Следовательно, время, за которое характерная ширина температурной неоднородности достигнет величины L, будет

$$\tau \sim \frac{L^2}{\alpha}.$$

С помощью этого соотношения можно оценить и время, за которое начальная неоднородность температуры с характерной шириной $\Delta x << L$ распространяется на область размером порядка L. Если L – характерный размер тела, то величина τ характеризует порядок величины времени выравнивания температуры внутри тела и называется временем релаксации теплового процесса для данного тела.

- *Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.*
- *Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики – М.: Наука, 1972.*

6. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ (ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗЕ)

Уравнение переноса тепла

Первоначально обратимся к описанию процесса переноса тепловой энергии в идеальном газе, где отсутствует вязкость и теплопроводность. В этом случае закон сохранения энергии можно выразить уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho U^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-div\left[\rho\vec{U}\left(\frac{U^2}{2}+w\right)\right].$$

Здесь U – скорость; ρ – плотность; ε – внутренняя энергия единицы массы; w – тепловая функция единицы массы.

$dw = Tds + VdP$, где

(s – энтропия, V – удельный объем).

В дальнейшем U может обозначать модуль вектора скорости $\bar{U}$, компонентами которого являются u, v, w или U_i.

В левой части уравнения энергии стоит скорость изменения энергии единицы объёма жидкости, в правой – дивергенция плотности потока энергии.

В вязкой и теплопроводной среде должно быть аналогичное соотношение, однако плотность потока энергии при этом будет включать в себя ещё поток энергии из-за теплопроводности и поток энергии (приток тепловой энергии) вследствие вязкой диссипации.

Следовательно, полная плотность потока энергии в жидкости или газе при наличии вязкости и теплопроводности будет суммой

$$\rho\vec{U}\left(\frac{U^2}{2}+w\right)-k\nabla T-\vec{U}\sigma'.$$

Тензор

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial U_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial U_l}{\partial x_i},$$

где коэффициенты $\eta > 0$, $\zeta > 0$ имеют смысл коэффициентов вязкости.

Соответственно, уравнение сохранения энергии будет

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho U^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = div\left[\rho\vec{U}\left(\frac{U^2}{2} + w\right) - \left(\sigma'\vec{U}\right) - k\nabla T\right].$$

В принципе, это соотношение можно было бы считать окончательным и использовать его для решения задач о переносе энергии в потоках. Однако на практике используют возможность преобразования этого уравнения в уравнение для определения энтропии s. Для этого левую часть уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{U^2}{2} + \rho\varepsilon\right)$$

преобразуют с использованием уравнений Навье-Стокса и неразрывности для определения $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t}$; кроме того, используют термодинамические соотношения

$$d\varepsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho,$$

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho}, dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp.$$

В результате может быть получено уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho U^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -div\left[\rho\left(\frac{U^2}{2} + w\right) - \left(\vec{U}\sigma' - k\nabla T\right)\right] +$$

$$+\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{U}\nabla s\right) - \sigma'_{ik}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\left(k\nabla T\right) - div(k\nabla T).$$

Сравнивая это выражение с исходным уравнением для определения энергии, можно видеть, что энтропия удовлетворяет соотношению

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{U}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+div\left(k\nabla T\right).$$

Это уравнение будет в дальнейшем рассматриваться как общее уравнение для описания переноса тепла в жидкости или газе.

При отсутствии вязкости и теплопроводности правая часть этого уравнения обращается в ноль и получается уравнение сохранения энтропии для идеальных жидкости или газа.

Соотношение в левой части уравнения можно считать полной производной энтропии.

Tds – количество тепла, получаемое единицей массы,

$$\rho T\frac{ds}{dt}=\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}+w\frac{\partial s}{\partial z}\right),$$

u v, w – компоненты скорости.

Это значит, что левая часть уравнения для энтропии описывает количество тепла, получаемого единицей объёма движущейся среды,

$$\rho T\frac{ds}{dt}=\frac{dQ}{dt},\ dQ=C_p dT.$$

О постановке задач для уравнений гидрогазодинамики

Динамические процессы в жидкости и газе описываются системой уравнений Навье-Стокса (плюс уравнение неразрывности)

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\vec{U}\nabla\vec{U}\right]=-gradp+\eta\Delta\vec{U}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)grad\ div\vec{U}\cdot divU\ \vec{U},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\,\vec{U}=0.$$

Эта система состоит из четырёх уравнений, из которых три первых – уравнения движения.

В этой системе имеется четыре кинематических неизвестных – три компоненты скорости и давление.

Если известна плотность ρ, то система замкнута.

Отсюда следует, что в случае несжимаемой жидкости, при малых отклонениях температуры, можно решать динамическую задачу независимо от тепловой.

Решение тепловой задачи в этом случае основывается на решении уравнения

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{U}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+div\left(k\nabla T\right),$$

в котором значения скорости известны, а связь T и s задаётся исходя из каких-то дополнительных соображений. В дальнейшем будет использован этот подход.

Если изменением плотности нельзя пренебречь, то нужно использовать формулу Клапейрона

$$p=\rho RT.$$

В этом случае для замыкания системы необходима дополнительная связь $s = s\ (p,\ \rho,\ T)$ и такие связи есть – в термодинамике эти функции определены.

Следовательно, в случае сжимаемых течений уравнение переноса тепла нужно использовать в виде уравнения для энтропии, так как это уравнение (по смыслу его вывода) характеризует баланс энергии в вязкой и теплопроводной среде. Энтропия изменяется под действием двух механизмов: диссипации механической энергии в тепло из-за вязкости и перераспределения тепла вследствие теплопроводности.

Оба процесса приводят к возрастанию энтропии.

Перенос тепла в несжимаемой жидкости

Рассмотрим движение среды при значении числа Маха $M \ll 1$. В этом случае изменения плотности связаны только с температурой и не обусловлены изменениями давления.

При этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\text{p}}\frac{\partial T}{\partial t},\qquad \nabla s=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\text{p}}\nabla T,$$

$$C_{\text{p}}=T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\text{p}},\qquad T\frac{\partial s}{\partial t}=C_{\text{p}}\frac{\partial T}{\partial t},\qquad T\nabla s=C_{\text{p}}\nabla T.$$

Тогда уравнение для энтропии принимает вид

$$\rho C_{\text{p}}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{U}\nabla T\right)=div\left(k\nabla T\right)+\sigma_{\text{ik}}\frac{\partial v_{\text{i}}}{\partial x_{\text{k}}}$$

и превращается в уравнение переноса тепла.

Уравнения движения можно записать в виде

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\left(\vec{U}\nabla\right)\vec{U}\right]=-gradp+\eta\Delta\vec{U},\quad div\rho\,\vec{U}=0,$$

если изменения температуры невелики. В этом случае можно принять, что η, k, и C_{p} приблизительно постоянны, а $div\vec{U}=0$.

Тогда уравнение переноса тепла принимает более простой вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{U}\nabla T=a\Delta T+\frac{\nu}{2C_{\text{p}}}\left(\frac{\partial v_{\text{i}}}{\partial x_{\text{k}}}+\frac{\partial v_{\text{k}}}{\partial x_{\text{i}}}\right)^2.$$

Если диссипация механической энергии в тепло слабо влияет на тепловую ситуацию, то уравнение переноса тепла приобретает самую простую формулу

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{U}\nabla T=a\Delta T\ .$$

Для неподвижной однородной среды это уравнение превращается в известное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Поскольку, по предположению, изменения температуры невелики, в уравнениях движения также можно принять, что $\rho = const$.

В этом случае динамическая и тепловая задачи разделяются. Динамическая задача решается самостоятельно (4 уравнения: 3 уравнения движения + уравнение неразрывности и 4 неизвестных: $\vec{U}$ и p). Уравнение переноса тепла решается при известном распределении компонент скорости.

О законах подобия для теплопередачи

Полученная система уравнений переноса тепла имеет вид

$$\vec{U}\nabla T = a\Delta T + \Phi,$$

$$\left(\vec{U}\nabla\right)\vec{U} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta U, \qquad div\vec{U} = 0.$$

Здесь представлены уравнения для переноса тепла с диссипативным членом Ф и уравнения движения несжимаемой жидкости. В этой постановке задачи можно пренебречь влиянием скоростной сжимаемости и сил Архимеда, поскольку в уравнениях движения $\rho = const$.

Если также оставить в стороне вязкую диссипацию и рассматривать уравнение переноса тепла в простейшей форме

$$\vec{U}\nabla T = \alpha\Delta T, \text{ то}$$

в задаче останутся следующие размерности:

$$[\nu] = [a] = \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \quad [U] = \frac{\text{см}}{\text{с}}; \quad [l] = \text{см}; \quad [T - T_0] = {}^\circ C.$$

Из них можно составить две независимые безразмерные комбинации

$$\text{Re} = \frac{Ul}{\nu} \quad \text{и} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a},$$

т. е. рядом с известным критерием, числом Рейнольдса Re , появился другой критерий – число Прандтля Pr. Число Re – определяющий критерий для движения несжимаемой жидкости. При решении уравнения переноса тепла добавляется новый критерий – Pr, значение которого зависит от молекулярных свойств веществ. Для разных веществ значения числа Прандтля составят:

6.75 – вода	0.733 – воздух
16.6 – спирт	0.044 – ртуть
7250 – глицерин	–

Анализ размерностей показывает, что в рассматриваемом случае искомые распределения скоростей и температур представляются следующими функциями:

$$\frac{\vec{U}}{U} = \vec{\varphi}\left(\frac{\vec{r}}{R}, \mathrm{Re}\right), \quad \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right).$$

При решении задачи должны быть заданы характерные масштабы размерных величин: скорости U с компонентными составляющими, размера l, разности значений температур $T_1 - T_0$, а также молекулярные свойства среды.

Числа Рейнольдса и Прандтля являются определяющими безразмерными критериями, от значения которых зависит решение. Решение также определяется как безразмерный параметр путём отнесения к соответствующему масштабу. Для анализа тепловых процессов в качестве решения бывает необходимо определить величину теплового потока или аналогичную безразмерную характеристику. Такой безразмерной характеристикой является число Нуссельта Nu.

В соответствии с законом Ньютона-Рихмана тепловой поток между телом с температурой T_0 и потоком с температурой T_1

$$q = \alpha\left(T_1 - T_0\right).$$

Размерность теплового потока определяется из соотношения закона Фурье

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial n}.$$

Отсюда размерность

$$[q] = [k] \cdot T / l; \quad [k] = \frac{ккал}{м^2 \cdot ч \cdot {}^\circ C}, \quad [q] = \frac{ккал}{м^2 \cdot ч \cdot {}^\circ C}.$$

Следовательно, размерность

$$[\alpha] = \frac{ккал}{м^2 \bullet ч \bullet {}^\circ C}.$$

Из α, l и k можно образовать безразмерный параметр

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha l}{k},$$

который называется числом Нуссельта и является безразмерным коэффициентом теплопередачи, т.е. это – обезразмеренное значение коэффициента теплопередачи α.

Очевидно, что для решения рассматриваемой задачи о переносе тепла от потока к телу искомое значение параметра α будет выражаться соотношением

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}).$$

Значение числа Nu может быть также определено в различных точках поверхности тела с координатами

$$S\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right), \text{ т. е.}$$

$$\mathrm{Nu}_s = f_1\left(S, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right).$$

О теплопередаче в пограничном слое

Рассмотрим ламинарный пограничный слой на пластине. Система уравнений движения будет

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Особенностью анализа течения в приближении пограничного слоя является предположение о медленном изменении параметров вдоль продольной координаты x и наличии больших градиентов по поперечной координате y.

В этом случае $\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$ и из уравнения неразрывности следует $v << u$.

В результате в правой части первого уравнения движения пропадает вторая производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

В уравнении переноса тепла аналогично имеем

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Для газа число Прандтля близко к единице, $\nu \approx \alpha$, т.е. при аналогичных граничных условиях распределение температуры подобно распределению скорости u. Вследствие этого на пластине, наряду с динамическим пограничным слоем толщиной δ, образуется тепловой слой толщиной δ_T, причём $\delta_T \approx \delta$.

Соотношение для теплового потока

$$q=-k\frac{\partial T}{\partial y}$$

может быть представлено в конечных разностях

$$q \approx k\frac{T_w - T_\infty}{\delta_T},$$

где T_w – температура стенки, T_∞ – температура потока вне пограничного слоя.

В то же время $q = \alpha\,\Delta\,T$, т.е. $\alpha \approx \dfrac{k}{\delta}$, поскольку $\delta_T \approx \delta$.

В ламинарном пограничном слое его толщина при прочих равных условиях

$$\delta \sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}},\ \alpha \sim \sqrt{\mathrm{Re}}.$$

Число Нуссельта

$$\mathrm{Nu}=\frac{\alpha l}{k},\quad \alpha=\frac{\mathrm{Nu}k}{l}=\frac{k}{l}\sqrt{\mathrm{Re}}\cdot f(\mathrm{Pr}).$$

Здесь показано, что полученное соотношение определено с точностью до константы, которая, в свою очередь, зависит от числа Pr. Тепловой поток q и, соответственно, α имеют величины, относящиеся к единичной площади поверхности. Это значит, что если определять суммарный тепловой поток с пластины Q, то его величину можно выразить через q и площадь поверхности S следующим образом:

$$Q = qS.$$

Исходя из полученных соотношений, можно оценить одну из характеристик пластинчатого теплообменника – его эффективность на единицу массы.

При прочих равных условиях площадь пластины пропорциональна её длине Δx. $S \sim \Delta x$, т.е. $Q \sim \Delta x q$.

В свою очередь,

$$q \sim \alpha \sim \frac{k}{l}\sqrt{\mathrm{Re}}.$$

Для рассматриваемых условий $\Delta x = l$, $\mathrm{Re} \sim \Delta x$. В результате получаем

$$Q \sim \sqrt{\Delta x},$$

т.е. тепловой поток на всей поверхности пластины пропорционален её длине в степени 1/2.

Наряду с этим масса пластины M пропорциональна её длине –

$$\mathrm{M} \sim \Delta x$$

и в результате для определения эффективности теплообмена на единицу массы получаем

$$\frac{Q}{\mathrm{M}} \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}.$$

Следовательно, масса длинных пластинчатых теплообменников будет использоваться недостаточно эффективно. Следует отметить, что в приведённых рассуждениях не учтены различные конструктивные соображения, которые могут оказаться важными.

- *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с немец. – М.: Наука, 1974.*
- *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Гидродинамика, – М.: Наука, 1986.*
- *Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982.*
- *Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. Пер. с немец. /Под ред. А.А. Гухмана. – М.: Издат. иностр. лит., 1958.*

7. ЭФФЕКТЫ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛООБМЕНА

Проявление вязкой диссипации при различных значениях числа Рейнольдса

Вязкая диссипация энергии и переход ее в тепло проявляются при взаимном движении тела и вязкой среды – жидкости или газа.

Первоначально будем рассматривать эффекты вязкой диссипации, если нет заданной разности значений температур. Нагрев жидкости будет определяться работой вязких сил и кинетической энергией движущегося потока, которая пропорциональна квадрату скорости. В этом случае возникающая разность значений температур будет функцией основных определяющих параметров

$$T - T_\infty = \frac{u_\infty^2}{C_p} f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \vec{r}\right).$$

Если представить некоторую характерную разность значений в распределении температур, то

$$T - T_\infty = \frac{u_\infty^2}{C_p} f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right).$$

Определим вид функции f_1 при малых и больших значениях числа Рейнольдса.

Уравнение переноса тепла с учётом диссипации имеет вид

$$\vec{U}\nabla T = a\Delta T + \frac{\nu}{2C_p}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

Будем считать, что при малых значениях числа Рейнольдса скорости невелики и члены левой части уравнения пренебрежимо малы. В этом случае

$$a\Delta T = -\frac{\nu}{2C_p}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

Обращаясь к конечным разностям, получим

$$\alpha\frac{T_1 - T_\infty}{l^2} \sim \frac{\nu U^2}{C_p l^2}, \text{ т.е.}$$

$$T_1 - T_\infty = \Pr\frac{U^2}{C_p}\cdot const.$$

Отсюда следует, что в функцию f_1 число Прандтля входит в первой степени и функция f_1 для данного случая будет

$$f_1 = \Pr\cdot const.$$

Рассмотрим случай больших значений числа Рейнольдса: $\mathrm{Re} \to \infty$. При этом и скорость, и температура изменяются в узком слое вблизи тела. Толщина этого слоя δ настолько мала, что на малом участке тела течение можно считать плоским.

Для величины диссипации энергии в вязкой жидкости можно записать соотношение в виде интеграла по объёму V

$$E \sim \mu\int\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2 dV.$$

Если выделить единицу поверхности S тела, то объём, в котором происходит диссипация, будет измеряться толщиной динамического пограничного слоя δ.

В этом случае в конечных разностях получаем

$$E \sim \nu\rho\left(\frac{U}{\delta}\right)^2\delta = \nu\rho U^2/\delta.$$

Диссипация энергии создаёт на единичной поверхности поток тепла q

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial h}.$$

В конечных разностях имеем

$$q \sim aC_p\rho\frac{T_1 - T_\infty}{\delta_T},$$

где δ_T – толщина теплового пограничного слоя.

Приравнивая величины E_s и q, получаем

$$\frac{\nu U^2}{\delta} = aC_p\frac{(T_1 - T_\infty)}{\delta_T}const\ .$$

В итоге при больших значениях числа Рейнольдса получаем

$$(T_1 - T_\infty) = \frac{U^2}{C_p}\frac{\nu}{a}\frac{\delta_T}{\delta}\cdot const = \frac{U^2}{C_p}f_1(\mathrm{Pr}),$$

$$\text{где } f_1 = \mathrm{Pr}\cdot\frac{\delta_T}{\delta}const\ .$$

При сравнении этого и предыдущего выражений для функции f_1 можно видеть, что при больших значениях числа Рейнольдса (второй случай) влияние числа Pr ослабевает. Это связано с тем, что отношение δ_T/δ уменьшается по мере увеличения числа Прандтля, которое характеризует соотношение между вязким трением и теплопередачей

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

Влияние вязкой диссипации на распределение температуры при течении в канале

Рассмотрим установившееся течение в плоском канале при заданной температуре стенок T_w, которое называется течением Пуазейля.

Система уравнений движения и теплопередачи для плоского стационарного движения несжимаемой жидкости будет следующей:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u,$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v.$$

Распределение скорости в поперечном сечении не меняется вдоль канала и описывается соотношением

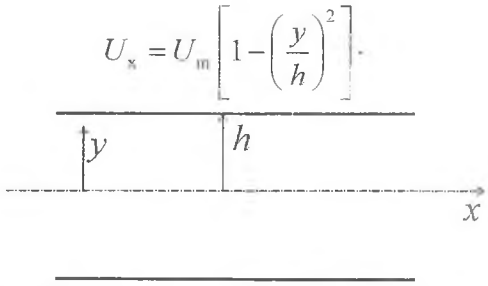


Рис. 7.1. Система координат в задаче о течении в канале

На рис.7.1 приведена система координат (U_m – максимальная скорость течения в поперечном сечении канала, на его оси).

В исходном уравнении переноса тепла

$$\vec{U}\nabla T = a\Delta T + \frac{\nu}{2C_p}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2$$

левая часть обращается в ноль, поскольку все поперечные скорости равны нулю и уравнением переноса тепла будет соотношение

$$-a\Delta T = \frac{\nu}{2C_p}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

Следовательно, уравнение для распределения температуры будет

$$-a\Delta T = \frac{\nu}{C_p}\Phi\,,\quad \Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Отсюда следует соотношение для распределения температуры в поперечном сечении канала

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{\nu}{aC_p}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = -\frac{4\nu U_m^2 y^2}{\alpha C_p h^4}.$$

После однократного интегрирования получаем

$$\frac{dT}{dy} = -\frac{4U_m^2}{3h^4}\frac{\nu}{aC_p}y^3 + const\,.$$

Константа интегрирования должна иметь нулевое значение, исходя из условий симметрии при $y = 0$.

В результате для распределения температуры, используя значение температуры стенки T_w, получаем

$$T - T_w = U_m^2 \frac{\Pr}{3C_p}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^4\right].$$

Это значит, что относительная величина температуры (в отличие от распределения скорости, которое описывается квадратичной зависимостью) распределена по закону y^4 . Безразмерный профиль температуры более наполнен, чем профиль скорости (рис. 7.2).

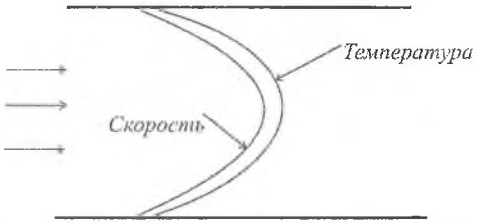


Рис. 7.2. Распределение скорости и температуры для течения Пуазейля

Особенности эффекта диссипации при течении Куэтта, критерий Эккерта

Рассмотрим плоское стационарное течение, которое возникает между двумя безграничными плоскостями, когда задана постоянная скорость движения одной плоскости относительно другой. Такое течение называется течением Куэтта (рис. 7.3). Задана также разность значений температуры на плоскостях $T_1 - T_0$.

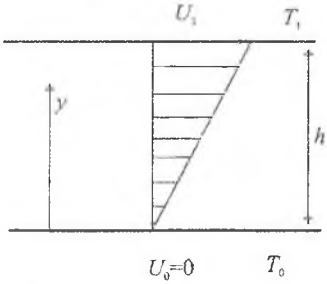


Рис. 7.3. Схема течения Куэтта

Система уравнений движения и теплопередачи для плоского стационарного движения несжимаемой жидкости будет такой:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u;$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v,\qquad u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\Delta T+\frac{\nu}{C_p}\Phi;$$

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Для рассматриваемой задачи эта система уравнений так же, как для течения Пуазейля, существенно упрощается. Поскольку $\frac{\partial}{\partial x}=0$ для всех компонент скорости и температуры, как и в случае течения Пуазейля, уравнение для распределения температуры будет

$$-a\Delta T=\frac{\nu}{C_p}\Phi.$$

Распределение скорости для течения Куэтта известно:

$$u(y)=u_1\left(\frac{y}{h}\right).$$

Уравнение переноса тепла приобретает вид

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\qquad \frac{du}{dy}=\frac{u_1}{h}$$

и в результате

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-\mu\frac{u_1^2}{h^2}.$$

Используя граничные условия для температуры, получаем

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0}=\frac{y}{h}+\frac{\mu u_1^2}{2k(T_1-T_0)}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right).$$

Видно, что распределение температуры имеет линейную часть, подобную закономерности распределения скорости, и «добавку», которая достигает максимального значения в средней части канала при $y = 0.5h$, из-за чего профиль температуры как бы «надувается».

Эта «добавка» обусловлена эффектом вязкой диссипации и её величина измеряется отношением квадрата скорости потока (кинетической энергии) к разнице температур между стенками канала. Она может быть охарактеризована безразмерным параметром

$$\frac{u_1^2}{C_p \Delta T} = \mathrm{Ec},$$

который называется числом Эккерта и является одним из определяющих параметров в течении Куэтта.

Число Эккерта характеризует отношение скоростной составляющей энтальпии к тепловой.

Коэффициент при «добавке» к линейному распределению температуры имеет значение

$$\frac{\mu C_p}{k} \frac{u_1^2}{C_p \left(T_1 - T_0\right)} = \mathrm{Pr} \cdot \mathrm{Ec}.$$

И тогда соотношение для профиля температуры в течении Куэтта будет

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \eta + \frac{1}{2} \mathrm{Pr}\, \mathrm{Ec} \eta \left(1 - \eta\right), \quad \eta = \frac{y}{h}.$$

На рис.7.4 приведены соответствующие зависимости.

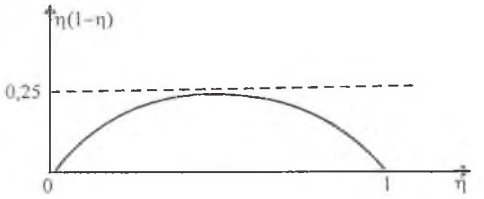


Рис. 7.4. Вид функции в члене с критерием Эккерта

В отличие от задачи, которая решается при рассмотрении течения Пуазейля, здесь появился новый безразмерный определяющий

параметр Ec, что связано с дополнительным (по сравнению с задачей для течения Пуазейля) условием: задано ещё одно значение температуры. Это значит, что в качестве исходных данных имеется определённая разность значений температур $T_1 - T_0$, образующая параметр, играющий роль теплового содержания, которое может быть отнесено к параметру, характеризующему энергию диссипации.

Энергия диссипации, в свою очередь, пропорциональна кинетической энергии потока, т.е. u_1^2.

Таким образом, число Эккерта характеризует долю, вносимую диссипацией кинетической энергии в распределение температуры в потоке. Чем больше число Эккерта, тем сильнее трансформируется профиль температуры (рис. 7.5).

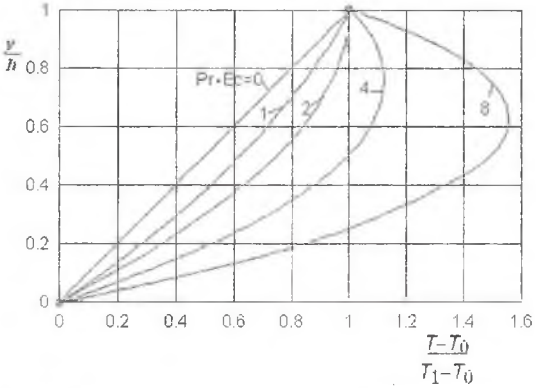


Рис. 7.5. Влияние величины Ec на распределение температуры в течении Куэтта

- *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с немец. – М.: Наука, 1974.*
- *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.*

8. ТЕПЛООБМЕН ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Уравнения движения с учётом сил Архимеда

Известно, что в жидкости (газе, атмосфере и т.п.), находящейся в поле сил тяжести при неоднородном распределении температуры, может возникать движение из-за действия сил Архимеда. В жидкости возникает конвективное движение.

Рассмотрим эффекты, которые обусловлены действием архимедовых сил при их слабом воздействии, т.е. будем полагать, что неоднородность распределения температуры невелика и соответствующие возмущения плотности тоже малы,

$$T = T_0 + T',\ T' \ll T_0,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho',\quad \rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \beta T',$$

где β – температурный коэффициент расширения жидкости.

Значение β, как правило, больше нуля, поскольку основная часть веществ при нагревании расширяется. Однако известны и другие примеры. Вода в интервале температур ... 4°С имеет значение $\beta < 0$ (благодаря этому возникает возможность неполного промерзания небольших водоёмов). Рассмотрим только случай, когда $\beta > 0$, что характерно для большей части технических процессов.

Для определения давления также имеется соотношение

$$p = p_0 + p'.$$

Необходимо учитывать гидростатическое распределение давления

$$p_0 = -\rho_0 g z + const,$$

где g – ускорение свободного падения, z – вертикальная координата.

Гидростатический перепад давления также может приводить к перераспределению плотности на величину, пропорциональную высоте h,

$$\rho_g = \frac{\rho_0 gh}{c^2}, \quad c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=const}}.$$

Скорость звука c характеризует сжимаемость среды.

Для того чтобы определяющими были эффекты тепловой конвекции, нужно, чтобы тепловое изменение плотности было много больше гидростатического, т.е.

$$\frac{gh}{c^2} \ll \beta\theta,$$

где θ – характерная разность температур.

Уравнения Навье-Стокса при наличии силы тяжести имеют вид

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}\nabla\right)\vec{U} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{U} + \vec{g}.$$

Используем условие малости изменения плотности и давления для определения величины $\nabla p/\rho$

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla\left(p_0 + p'\right)}{\rho_0 + \rho'} \approx \frac{\nabla\left(p_0 + p'\right)}{\rho_0} - \frac{\nabla\left(p_0 + p'\right)}{\rho_0}\frac{p'}{\rho_0} \approx$$

$$\approx \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0 \rho'}{\rho_0^2}.$$

Здесь использовано представление величин

$$\frac{1}{1+\delta} \cong 1 - \delta + \delta^2.$$

В соответствии с исходными представлениями

$$\rho' = -\rho_0 \beta T', \; p_0 = -\rho_0 gz + const.$$

Для величины $\nabla p/\rho$ с учётом направления силы тяжести (знака g) получаем

$$\frac{\nabla p}{\rho} = -\vec{g} + \frac{\nabla p'}{\rho} + \vec{g}\beta T'.$$

Подставляя это выражение в уравнения Навье-Стокса и опуская индекс «0», получаем

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial T}+\left(\vec{U}\nabla\right)\vec{U}=-\frac{\nabla p'}{\rho}+\nu\Delta\vec{U}-\beta\vec{g}T'.$$

В уравнении теплопроводности диссипативным членом можно пренебречь, поскольку при свободной конвекции уровень градиентов скорости мал,

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+\vec{U}\nabla T'=a\Delta T'.$$

Эти уравнения вместе с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему уравнений для описания свободно-конвективных движений жидкости, в которых нет заданной скорости, а заданы перепады температуры, характеризуемые ещё одним определяющим критерием.

Так же, как и ранее, можно перечислить искомые определяющие параметры задачи:

искомые – $U, \frac{p'}{\rho}, T'$ и определяющие параметры – ν, u, $g\beta, l$ и $T_0 - T_\infty$.

Вместо характерной скорости, задаваемой в динамической задаче, задана разность значений температур.

Из определяющих параметров можно составить две безразмерные комбинации:

Число Прандтля

$$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{a}$$

и число Рэлея

$$\mathrm{R}=\frac{g\beta l^3\left(T_0-T_\infty\right)}{\nu a}.$$

В инженерной практике вместо числа Рэлея часто используют число Грасгофа

$$\mathrm{Gr}=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Pr}}=\frac{g\beta\left(T_0-T_\infty\right)l^3}{\nu^2}.$$

Таким образом, для искомых параметров получаются следующие общие выражения:

$$\vec{U} = \frac{\nu}{l}\vec{f}\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{R}, \mathrm{Pr}\right); \quad T = \left(T_0 - T_\infty\right) f_t\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{R}, \mathrm{Pr}\right)$$

или

$$\vec{U} = \frac{\nu}{l}\vec{f}_1\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}\right); \quad T = \left(T_0 - T_\infty\right) f_{1t}\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}\right).$$

Задача Польгаузена о теплоотдаче на вертикальной стенке

Примером использования полученных соотношений для описания теплообмена при свободно-конвективном движении является решение задачи Польгаузена о теплообмене с нагретой вертикальной стенкой.

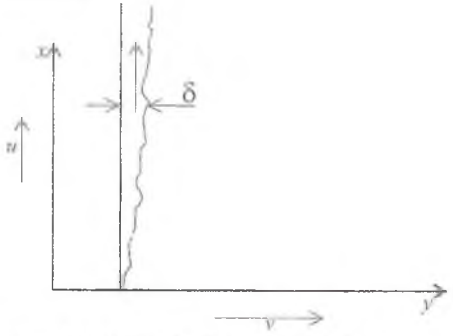


Рис. 8.1. Течение вблизи нагретой стенки

Схематично постановка задачи представлена на рис. 8.1. Вдоль вертикальной оси x расположена плоская стенка, по нормали к поверхности которой отсчитывается ось y.

Стенка нагрета – её температура T_1. Граничные условия: $y = 0$, $u = v = 0$, $T = T_1$; $y = \infty$, $u = 0$, $T = T_\infty$. Компонента скорости u направлена вдоль стенки.

Нагрев стенки вызывает движение вдоль нее. Будем считать, что это движение происходит в тонком слое δ, тогда для решения задачи

можно использовать приближение пограничного слоя, приводящее к упрощению полученной системы уравнений:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta\left(T-T\infty\right),$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2};\ \frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Польгаузен показал возможность упрощения уравнения, вводя новую независимую переменную,

$$\xi=\mathrm{Gr}^{1/4}\frac{y}{\left(4xl^3\right)^{1/4}};\quad \mathrm{Gr}=\frac{g\beta\left(T_1-T_\infty\right)l^3}{\nu^2}.$$

Здесь l – выбранная высота расположения области, для которой проводится анализ, на стенке.

При этом все параметры могут быть представлены как функция параметра ξ .

Польгаузен получил следующее решение задачи:

$$u=\frac{2\nu}{l^{3/2}}\mathrm{Gr}^{1/2}\sqrt{x}\varphi'\left(\xi\right),\qquad T-T_\infty=\left(T_1-T_\infty\right)\ \ \theta\left(\xi\right),$$

где φ и θ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям,

$$\varphi'''+3\varphi\varphi''-2\varphi'^2+\theta''=0,\quad \theta''+3\mathrm{Pr}\varphi\,\theta'=0.$$

Если представить распределение скорости и температуры при некотором значении координаты x (рис. 8.2), то можно видеть, что это – профили, заключённые внутри слоя δ. При этом температура монотонно снижается внутри этого слоя от значения T_1 на стенке до значения T_∞. Скорость u равна нулю на стенке и на границе слоя δ, а внутри этого слоя имеет максимальное значение u_m.

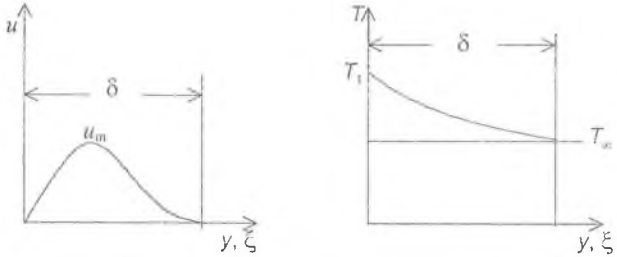


Рис. 8.2. Распределение скорости и температуры вблизи нагретой стенки

В соответствии с полученным решением

$$u_m \sim \sqrt{x}\,,$$

т.е. скорость конвективного движения монотонно нарастает по высоте стенки.

Закон изменения толщины движущегося нагретого слоя можно определить следующим образом: безразмерная координата границы слоя $\xi_\delta = const$ будет

$$\xi_\delta = \mathrm{Gr}^{1/4} \frac{\delta}{\left(4xl^3\right)^{1/4}}$$

или

$$\delta = const \frac{\left(xl^3\right)^{1/4}}{\mathrm{Gr}^{1/4}}.$$

Нарастание толщины слоя δ происходит по закону

$$\delta \sim x^{1/4}.$$

Порядок величины δ будет

$$\delta \sim \frac{l}{\mathrm{Gr}^{1/4}}.$$

Отсюда следует, что условие $\frac{\delta}{l} \ll 1$ которое необходимо для применимости полученного решения, поскольку использовано приближение пограничного слоя, будет выполняться при $\mathrm{Gr} \ll 1$.

Решение, полученное Польгаузеном, позволяет вычислить поток тепла с единицы площади поверхности стенки

$$q = -\frac{1}{l}\int_0^l k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} dx .$$

Используя условие

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

получаем для q

$$q = -\frac{k}{l}\int_0^l \theta' \frac{\mathrm{Gr}^{1/4}}{\left(4l^3\right)^{1/4} x^{1/4}} dx = -\frac{4k}{3l}\theta'(0,\mathrm{Pr})\cdot\left(\frac{\mathrm{Gr}}{4}\right)^{1/4}\cdot\left(T_1 - T_\infty\right).$$

Для определения числа Нуссельта воспользуемся цепочкой соотношений

$$\mathrm{Nu}=\frac{\alpha l}{k},\ \alpha\Delta T = q,\quad \frac{\mathrm{Nu}k}{l}\Delta T = q,\quad \mathrm{Nu} = q\frac{l}{\Delta T k},$$

т.е. $\mathrm{Nu} = \mathrm{const}\ \theta'(0,\mathrm{Pr})\ \mathrm{Gr}^{1/4}$.

В результате получаем зависимость

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Gr}^{1/4} f(\mathrm{Pr}).$$

Это соотношение полезно сопоставить с ранее полученным соотношением для описания теплообмена в обычном пограничном слое

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Re}^{1/2} f(\mathrm{Pr}).$$

Видно, что при свободной конвекции индексом «движущей силы» является параметр Грасгофа Gr.

О совокупности определяющих критериев в задачах теплообмена

Можно перечислить все определяющие критерии, которые оказались важными при решении рассмотренных задач теплообмена.

Это – $\mathrm{Re} = \frac{\rho u l}{\mu} = \frac{ul}{\nu}$, $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{u_a}$, $\mathrm{Ec} = \frac{u^2}{C_p/\Delta T}$, $\mathrm{Gr} = \frac{g\beta l^3 \Delta T}{\nu^2}$.

В условиях, когда все перечисленные критерии важны, искомые параметры будут выражаться функциями, которые зависят от чисел Re, Pr, Gr и Ec:

$$\frac{\vec{U}}{U_\infty} = f_1\left(\frac{r}{l}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Ec}\right); \quad \frac{T - T_\infty}{\Delta T} = f_2\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Ec}\right);$$

$$\mathrm{Nu} = f_3(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Ec}) \text{ и } \mathrm{Nu}_l = f_4\left(\frac{\vec{r}}{l}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Ec}\right).$$

Если рассматривать появление соответствующих критериев в последовательности учёта всех новых эффектов, то в порядке изложения данных получим следующие соотношения:
для несжимаемой жидкости при отсутствии влияния теплового поля на динамическое

$$\frac{U}{U_\infty} = f_1(r, \mathrm{Re}), \quad \frac{T - T_\infty}{\Delta T} = f_2(r, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}), \quad \mathrm{Nu} = f_3(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}), \text{ а}$$

для пограничного слоя в соответствии с этими зависимостями

$$\mathrm{Nu} = \sqrt{\mathrm{Re}}\, f(\mathrm{Pr}).$$

При появлении эффектов превращения кинетической энергии в тепло поле скорости описывается теми же зависимостями, а для распределения температуры нужно учитывать критерий Эккерта

$$\frac{T - T_\infty}{\Delta T} = f(r, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Ec}).$$

Примером наглядного проявления влияния числа Ec является течение Куэтта.

Нарушается автономность поля скоростей (даже для несжимаемой жидкости) при появлении эффектов конвекции.

В простейшем случае «чистой конвекции» (свободной конвекции)

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}).$$

Здесь отсутствуют числа Re и Ec среди определяющих параметров, так как нет заданной скорости.

Если же конвекция происходит на фоне какого-то заданного движения, то Nu = f(Re, Pr, Gr, Ec), т.е. теплопередача зависит от всех рассмотренных критериев.

• *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.*

• *Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. Пер. с немец. /Под ред. А.А. Гухмана. – М.: Издат. иностр. лит., 1958.*

9. ТЕПЛОВОЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ, АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА

Аналогия между переносом тепла и трением

При использовании приближения пограничного слоя, если нет градиента давления, уравнения движения и теплопереноса имеют большое сходство,

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{умножим на} \quad \frac{1}{\rho_\infty U_\infty l},$$

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{умножим на} \quad \frac{1}{\rho_\infty C_p U_\infty l}.$$

После обезразмеривания уравнений с помощью указанных множителей они будут иметь вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Из решения первого уравнения получается соотношение для закона нарастания динамического пограничного слоя

$$\frac{\delta}{l}\sim\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}.$$

При сопоставлении этих двух уравнений можно видеть, что если тепловой пограничный слой нарастает от того же места, что и динамический, то

$$\frac{\delta_T}{l}\sim\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}}.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемых условиях (и только при их выполнении)

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}$$

(это соотношение, в общем, без достаточных оснований иногда переносят на другие типы течений).

Применительно к газам это соотношение указывает на отсутствие большой разницы между толщиной теплового и динамического пограничных слоёв, что позволяет для упрощения анализа в необходимых случаях принимать

$$\delta_T = \delta \quad \text{и} \quad \mathrm{Pr} = 1.$$

Аналогия между переносом тепла и импульса имеет более глубокий характер и, прежде всего, проявляется в аналогии между трением и теплопередачей.

Для значений числа Nu на плоской стенке ранее было получено соотношение

$$\mathrm{Nu} = \sqrt{\mathrm{Re}}\, f(\mathrm{Pr}).$$

Если рассматривается локальное значение числа Нуссельта, то соотношение будет

$$\mathrm{Nu}_l = \sqrt{\mathrm{Re}}\, f\left(\frac{x}{l}, \mathrm{Pr}\right).$$

Для местного касательного напряжения трения на стенке известно соотношение

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu U_\infty \sqrt{\mathrm{Re}}}{l} f_1\left(\frac{x}{l}\right),$$

т.е. для значения местного безразмерного коэффициента трения можно записать выражение

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} f_1\left(\frac{x}{l}\right).$$

Сопоставляя это соотношение с соотношениями для числа Nu, получаем

$$\mathrm{Nu}_l = \frac{1}{2} C_f \,\mathrm{Re} \cdot f\left(\frac{x}{l}, \mathrm{Pr}\right) \text{ или } \mathrm{Nu} = \frac{1}{2} C_f \,\mathrm{Re} \cdot f(\mathrm{Pr}),$$

если рассматривать плоскую стенку в целом.

Это соотношение называется аналогией Рейнольдса, которая характерна для ламинарного пограничного слоя.

Если исключить из рассмотрения число Прандтля, то соотношения получаются более простыми. Примем, что

$$\mathrm{Pr} = 1.$$

Как уже отмечалось, применительно к газам такое предположение достаточно обоснованно. В этом случае распределения температуры и скорости подобны:

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{u - u_w}{u_\infty - u_w}; \text{ при этом } u_w = 0.$$

Для распределения скорости в пограничном слое известно соотношение

$$\frac{u}{u_\infty} = F\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_x}}\right), \text{трение на стенке } \tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w.$$

Из подобия распределения скорости и температуры следует

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{T_\infty - T_w}{U_\infty - U_w}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{T_\infty - T_w}{U_\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w.$$

Для определения теплового потока имеем выражение

$$q_w = k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{k}{\mu}\frac{T_\infty - T_w}{U_\infty}\tau_w.$$

Трение и коэффициент трения связаны соотношением

$$\tau_w = C_f \rho \frac{U_\infty^2}{2},$$

отсюда для теплового потока получаем

$$q_w = \frac{1}{2}\frac{k}{\mu}\frac{T_\infty - T_w}{U_\infty} C_f \rho U_\infty^3.$$

Число Нуссельта $\mathrm{Nu} = \dfrac{\alpha l}{k}$ может быть выражено через

тепловой поток $q_w = \alpha\left(T_\infty - T_w\right)$, $\quad \mathrm{Nu} = \dfrac{q_w}{T_\infty - T_w}\dfrac{l}{k}$.

В результате получаем

$$\mathrm{Nu} = \frac{C_f}{2}\rho\frac{lU_\infty}{\mu} = \frac{C_f}{2}\mathrm{Re}.$$

Известно, что для пластины

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}}.$$

Ранее было получено

$$\mathrm{Nu} = \sqrt{\mathrm{Re}}\,f\left(\mathrm{Pr}\right),$$

что согласуется с представленным соотношением. При Pr = 1

$$\mathrm{Nu} \sim C_f \cdot \mathrm{Re}.$$

Об аналогии между переносом тепла и трением

В полученном соотношении для определения коэффициента теплоотдачи на пластине значение числа Нуссельта пропорционально сопротивлению трения

$$\mathrm{Nu} \sim C_f \cdot \mathrm{Re} \cdot f\left(\mathrm{Pr}\right).$$

В инженерной практике для описания процесса теплообмена вместо числа Нуссельта часто используется число Стантона, величина которого также пропорциональна коэффициенту теплопередачи α,

$$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{C_p \rho U_\infty}.$$

Если использовать выражение для α

$$\alpha = \frac{q_w}{T_\infty - T_w} = \frac{1}{2}\frac{k}{\mu}C_f \rho U_\infty,$$

справедливое при Pr = 1, можно получить

$$\mathrm{St} = \frac{C_f}{2}.$$

Если Pr ≠ 1, то

$$\mathrm{St} = \frac{C_f}{2} f(\mathrm{Pr}).$$

Вошедшая сюда функция числа Прандтля была определена Брайнердом и Эммонсом для значений числа Прандтля, близких к единице,

$$\mathrm{St} = \frac{C_f}{2} \mathrm{Pr}^{-\frac{2}{3}} \quad \text{или} \quad \mathrm{Nu} \sim \mathrm{Pr}^{1/3} \sqrt{\mathrm{Re}}\,.$$

Эти соотношения, справедливые для плоской стенки, показывают, что в любой её точке имеется однозначная связь между трением и теплопередачей.

Эти соотношения могут быть распространены на более широкий класс течений. В качестве примера можно сделать вывод о том, что без трения нет теплообмена.

Для пластины получим

$$q = \frac{C_f}{2} C_p \rho U_\infty \Delta T\,.$$

В общем случае можно представить такую связь между трением и теплообменом в виде

$$q \sim C_p \rho U \cdot (\textit{трение}) \Delta T\,,$$

т.е. тепловой поток через единицу поверхности пропорционален скорости, плотности и теплоёмкости жидкости, а также некоторому параметру, характеризующему трение.

Такой подход позволяет судить об эффективности теплообменного устройства, в котором теплообмен происходит в пограничном слое. Можно записать более общее соотношение

$$q = A C_f C_p \rho U \Delta T\,,$$

где параметр A характеризует относительную интенсивность теплопередачи. Для пластины

$$A = \frac{1}{2} f(\mathrm{Pr}) \text{ или при } \mathrm{Pr} \approx 1 \quad A = \frac{1}{2}\,.$$

Полученное соотношение для определения теплового потока q позволяет оценивать возможности воздействия на интенсивность теплообмена:

1. С ростом потока массы ρU пропорционально возрастает величина теплового потока. Однако сопротивление трения повышается пропорционально ρU^2, т.е. при такой интенсификации теплообмена его эффективность по отношению к гидравлическим потерям понижается.

2. Возрастает и величина теплового потока при повышении плотности ρ и теплоёмкости C_p. Для реализации этого воздействия можно использовать вещества с высоким значением произведения ρC_p (вода, жидкие металлы), а также повышать давление газовой среды.

3. Наиболее распространённым способом интенсификации теплообмена является повышение коэффициента трения или общего гидравлического сопротивления теплообменного устройства. Для этого на поверхности, на которой происходит теплообмен, выполняются неровности и выступы, подчас, самой замысловатой формы (рис. 9.1). При этом увеличивается значение параметра C_f.

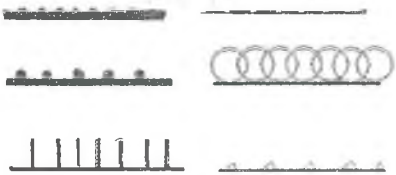


Рис. 9.1. Примеры конфигураций поверхностей, используемых для интенсификации теплообмена

При использовании третьего из перечисленных способов воздействия на теплообмен возникает вопрос о величине коэффициента A в соотношении для теплового потока. Значение коэффициента $A=1/2$ определено для пластины и однозначно соответствует аналогии Рейнольдса. Конечно, получение значения коэффициента $A > 1/2$ давало бы преимущество именно такому способу организации теплообмена. Следовательно, желательно, чтобы аналогия Рейнольдса нарушалась в сторону большей интенсификации теплообмена, чем в сторону увеличения трения.

Аналогия Рейнольдса обоснована предыдущим анализом для течения, имеющего свойства пограничного слоя, и при одновременном отсутствии градиентов давления. Таким образом, можно ожидать нарушения аналогии Рейнольдса при диффузорных и отрывных течениях, при обтекании профилей, когда градиенты давления значительны. Вопрос заключается в том, в какую сторону будет нарушаться аналогия Рейнольдса. Все имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные указывают на отсутствие возможности повышения коэффициента A по сравнению с его значением, полученным для пластины.

Полезным для практики был бы вывод о целесообразности использования поверхностей, на которых реализуются потери на трение, для передачи тепла. Примером такой поверхности является наружный контур авиационного двигателя, по которому движется относительно холодный воздух. Организация на этих стенках поверхностей для охлаждения воздуха, используемого в системах охлаждения, с точки зрения гидравлических потерь была бы выгоднее, чем установка в наружном контуре специального теплообменника. Однако в настоящее время такие конструкции не применяются из-за отсутствия соответствующих технологий.

- *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с немец. – М.: Наука, 1974.*
- *Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. /Под ред. А.В. Лыкова. – М.: Госэнергоиздат, 1961.*
- *Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982.*
- *Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. Пер. с немец. /Под ред. А.А. Гухмана. – М.: Издат. иностр. лит., 1958.*
- *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1969.*

10. СВЯЗЬ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Анализ на основе предположения об однозначной связи значений скорости и температуры

Рассмотрим распределение параметров в пограничном слое при отсутствии воздействия архимедовых сил. В этом случае система уравнений в приближении пограничного слоя имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0;$$

$$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dP}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$g\rho C_{\text{р}}\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Для анализа связи полей скорости и температуры Буземан предложил рассмотреть случай, когда

$$T=T(u).$$

Это возможно, когда $\frac{dP}{dx}=0$, и при каких-то ещё дополнительных условиях. Определим эти условия.

Итак, $\frac{dP}{dx}=0,\quad T=T(u),\quad T_{\text{u}}=\frac{dT}{du}$.

В этом случае уравнение переноса тепла можно представить в виде

$$\rho g C_{\text{р}} T_{\text{u}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda T_{\text{u}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 .$$

Подставив сюда уравнение для определения скорости, получим

$$g C_{\text{р}} T_{\text{u}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = T_{\text{u}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(T_{\text{uu}} \lambda + \mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 .$$

Подставив число Прандтля $\Pr = \mu g C_{\text{р}} / \lambda$,

получим $T_{\text{u}} \left(1 - \frac{1}{\Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{g C_{\text{р}}} \left(T_{\text{uu}} \lambda + \mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 .$

Для выполнения условия $T = T(u)$ необходимо, чтобы в приведённом соотношении

$$T_{\text{uu}} = -\frac{\mu}{\lambda}; \Pr = \frac{\mu g C_{\text{р}}}{\lambda} = 1 .$$

В этом случае для распределения температуры имеем простое соотношение

$$T_{\text{uu}} = -\frac{1}{g C_{\text{р}}} ,$$

проинтегрировав которое, получим

$$T(u) = -\frac{u^2}{2 g C_{\text{р}}} + C_1 u + C_2 .$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий в соответствии с постановкой задачи.

Далее будут рассмотрены: 1. Задача о термометре. 2. Задача о распределении температуры вблизи стенки.

Задача о термометре

Задача о термометре возникла из необходимости получения ответа на вопрос, какую температуру имеет датчик термометра, помещённый в поток, и как она соотносится с температурой потока.

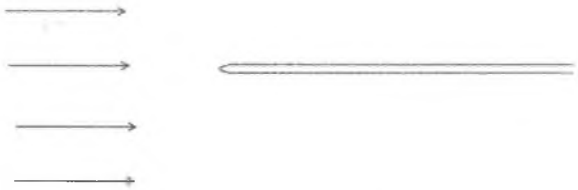


Рис. 10.1. Тонкое плоское тело, обтекаемое потоком

Итак, рассмотрим следующую ситуацию: помещённый в поток датчик предназначен для измерения температуры потока (рис. 10.1). Этим датчиком является некоторое тело, которое: 1) не должно возмущать тепловое состояние потока; 2) приобретает в потоке температуру, которую можно измерить (например, по какому-то электрическому сигналу).

Первое условие означает, что тело (датчик) должно быть теплоизолировано. В этом случае на поверхности тела вследствие условия прилипания $u = 0$ его температура должна совпадать с температурой торможения T^*. Однако этого может не быть из-за того, что $T^* > T_\infty$, вследствие чего происходит теплопередача от нагретых частей потока к более холодным. Кроме того, при торможении потока проявляются эффекты вязкой диссипации, которые могут приводить к другим изменениям температуры вблизи тела.

Применим полученные соотношения, связывающие распределения скорости и температуры, для решения задачи определения температуры теплоизолированного плоского тела в потоке.

На теплоизолированной стенке выполняются следующие граничные условия:

$$y = 0,\ \ u = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0,\ \ \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \text{т.е.}\ \frac{dT}{du} = 0\,;$$

$$y = \infty,\ \ u = u_\infty,\quad T = T_\infty\,.$$

Отсюда следует, что в соответствии с ранее полученной связью скорости и температуры

$$T = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2C_\text{p}}\left(1 - \frac{u^2}{U_\infty^2}\right).$$

На стенке $u = 0$ и

$$T_w = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2C_p},$$

т.е. температура стенки совпадает с температурой торможения

$$T_w = T^*.$$

Если рассматривать высокоскоростной поток, то условие равенства температуры стенки температуре торможения будет

$$T_w = T_\infty \left(1 + \frac{æ\text{-}1}{2} M^2\right).$$

Здесь $M = U_\infty / c;\ c = \left[(æ\text{-}1) C_p T_\infty\right]^{1/2}$; æ – отношение удельных теплоёмкостей.

Теперь необходимо обратиться к условиям, когда справедливы полученные соотношения.

Основным условием было совпадение значений коэффициентов вязкости и теплопроводности

$$\Pr = 1,$$

т.е. при $\Pr = 1$ температура термометра должна совпадать с температурой торможения потока.

Если $\Pr \neq 1$, то это условие не выполняется. Брайнерд и Эммонс получили решение задачи при $\Pr < 1$, но при условии $\Pr \approx 1$.

В этом случае температура стенки (термометра) будет

$$T_w = T_\infty \left(1 + \sqrt{\Pr}\, \frac{æ\text{-}1}{2} M^2\right),$$

т.е. температура, измеряемая термометром, несколько ниже температуры торможения. Для описания этого эффекта используется понятие коэффициента восстановления r и температуры восстановления T_e

$$T_e = T_\infty \left(1 + r\, \frac{æ\text{-}1}{2} M^2\right).$$

В рассмотренном случае

$$r = \sqrt{\Pr} \quad \text{и} \quad T_w = T_e.$$

Проведенный анализ показал, что при ламинарном обтекании плоской теплоизолированной стенки её температура равна температуре восстановления T_e при коэффициенте восстановления $r = \sqrt{\Pr}$. Проводились специальные эксперименты по проверке этого соотношения. На рис. 10.2 показаны результаты соответствующих измерений коэффициента восстановления r при изменении числа Рейнольдса. Видно, что при $\mathrm{Re} < 10^5$ данные экспериментов согласуются со значением $r \approx \Pr^{1/2}$. При $\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^5$ происходит изменение коэффициента r и при $\mathrm{Re} > 10^6$ $r \approx 0.9$.

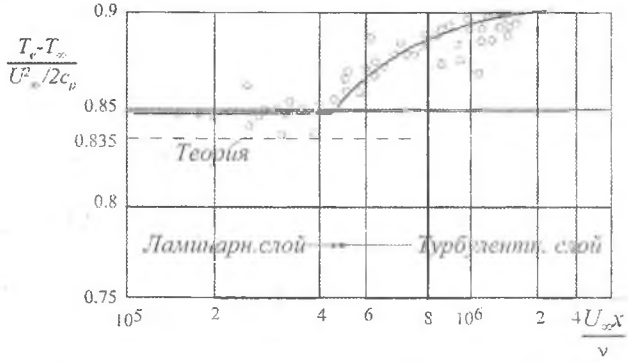


Рис. 10.2. Результаты экспериментального определения температуры теплоизолированной стенки

Это можно объяснить переходом ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное при $\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^5$. Величины коэффициента восстановления, полученные при большом числе Рейнольдса, иногда связывают с «турбулентным» числом Прандтля $\Pr \approx 0.8$. При этом имеется в виду отношение так называемых «турбулентных» значений коэффициентов вязкости и теплопроводности.

Нетеплоизолированная стенка

Рассмотрим задачу распределения температуры вблизи стенки, когда её температура задана. В этом случае граничные условия будут такими:

$$y = 0,\ u = 0,\ T = T_w; \quad y = \infty,\ u = U_\infty,\ T = T_\infty.$$

Связь температуры и скорости при числе Pr = 1 в этом случае имеет вид

$$\frac{T-T_{\mathrm{w}}}{T_{\infty}}=\left(1-\frac{T_{\mathrm{w}}}{T_{\infty}}\right)\frac{u}{U_{\infty}}+\frac{æ-1}{2}\mathrm{M}^{2}\frac{u}{U_{\infty}}\left(1-\frac{u}{U_{\infty}}\right).$$

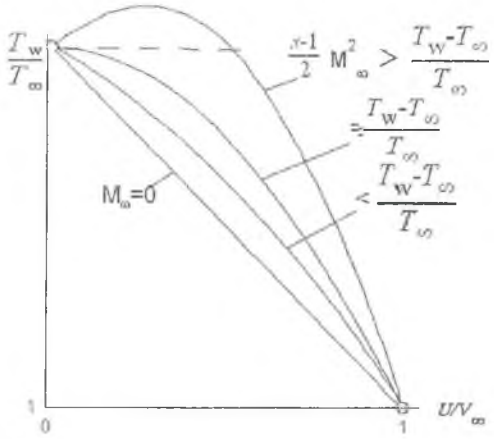


Рис. 10.3. Изменение температуры вблизи нагретой стенки при разных значениях скорости потока

На рис. 10.3 проиллюстрированы зависимости распределения температуры как функции скорости в координатах T/T_{∞} и u/U_{∞}.

На стенке T/T_{w}, $u = 0$; $u/U_{\infty} = 1$ соответствует границе пограничного слоя. Задаётся такое значение T_{w}, при котором $T_{\mathrm{w}} < T_{\infty}$.

В этом случае при M = 0 изменение температуры следует за изменением скорости. При больших величинах числа Маха температура внутри пограничного слоя превышает значение T_{w} из-за подвода энергии от потока.

Знак производной dT/dy на стенке совпадает со знаком производной dT/du, которая меньше нуля при малых скоростях потока и больше нуля при больших скоростях. «Равновесие»

$$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{\mathrm{w}}\sim\left.\frac{dT}{du}\right|_{\mathrm{w}}=0$$

устанавливается в том случае, когда температура торможения потока близка к температуре стенки.

Продифференцировав соотношения для T, получаем

$$\frac{U_\infty}{T_\infty}\left(\frac{dT}{du}\right)_w = 1 - \frac{T_w}{T_\infty} = \frac{U_\infty^2}{2C_p T_\infty}.$$

Знак dT/du определяет направление теплового потока:

$$\frac{dT}{du} = 0 \text{ при } \frac{T_w}{T_\infty} = \frac{U_\infty^2}{2C_p T_\infty}, \text{ т.е. при } T_w = T^*.$$

Этот результат справедлив при значении числа Прандтля

$$\mathrm{Pr} = 1.$$

На практике «равновесие» устанавливается при скорости потока, соответствующей условию, при котором температура стенки совпадает с температурой восстановления T_e,

$$\text{т.е. } \frac{dT}{dy} \approx 0 \text{ при } T_w \approx T_t.$$

• *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с немец. – М.: Наука, 1974.*

11.ТЕПЛООБМЕН ПРИ ОБТЕКАНИИ ЦИЛИНДРА

Поперечное обтекание цилиндра

Цилиндры, расположенные в поперечном и продольном направлении потока, часто используются в теплообменниках, т.е. в устройствах, предназначенных для передачи тепла от одной жидкой или газовой среды к другой. Поперечно-обтекаемый цилиндр является распространённым элементом трубчатого теплообменника.

В зависимости от различных условий обтекание поперечно расположенных трубок может быть как при весьма низких скоростях, так и при значительных. Трубчатые элементы могут иметь разную размерность, т.е. диапазон значений числа Рейнольдса поперечного обтекания трубок в различных теплообменниках велик.

Структура течения при обтекании цилиндра поперечным потоком зависит от значения числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty d}{\nu}.$$

При $\mathrm{Re} \le 1$ реализуется так называемый «стоксовский» режим обтекания, когда положение линий тока со стороны набегающего потока и за цилиндром практически совпадает (рис.11.1а).

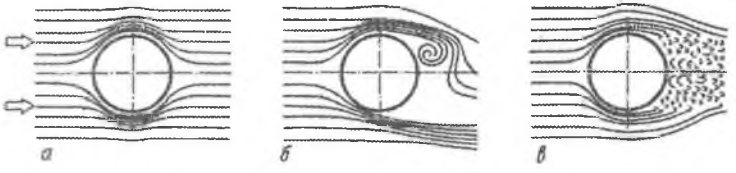


Рис. 11.1. Различные режимы обтекания цилиндра (*а, б, в*)

При $\mathrm{Re} \cong 2\ldots10$ возникает переходный режим обтекания, а при $\mathrm{Re} \ge 10$ за цилиндром наблюдается отрыв потока, который до $\mathrm{Re} \approx$ ≈ 40 стабилен. При $\mathrm{Re} \ge 40$ область отрыва совершает периодические

движения по задней поверхности цилиндра, перемещаясь то вверх, то вниз по отношению к оси симметрии. В результате в следе за цилиндром возникает так называемая «дорожка Кармана», которая чётко проявляется при Re ≥ 300…400 (рис.11.1б).

При Re ≤ $3 \cdot 10^5$ отрывное течение за цилиндром возникает вследствие отрыва ламинарного пограничного слоя (рис. 11.1в).

При Re ≤ $3 \cdot 10^5$ в пограничном слое на поверхности цилиндра происходит переход к турбулентности и отрывное течение за цилиндром формируется вследствие отрыва турбулентного пограничного слоя, т.е. при Re ≈ $3 \cdot 10^5$ происходит перестройка структуры течения. Вследствие турбулизации потока в пограничном слое на цилиндре размер области отрыва за цилиндром уменьшается и происходит снижение коэффициента сопротивления цилиндра. Это явление называется «кризисом сопротивления».

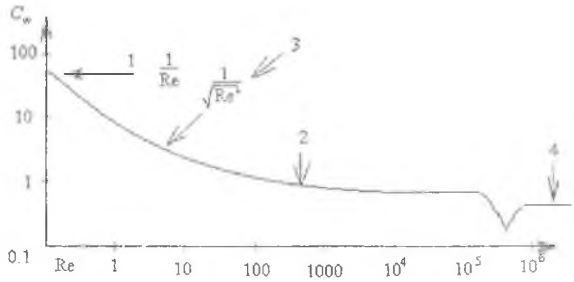


Рис. 11.2. Зависимость коэффициента сопротивления цилиндра в поперечном потоке от числа Рейнольдса

На рис. 11.2. показана зависимость коэффициента сопротивления цилиндра от числа Рейнольдса.

Условно можно считать, что существуют следующие режимы обтекания цилиндра несжимаемой жидкостью (1-4):

1. Стоксовский, когда линии тока перед цилиндром и за ним похожи и отрыв потока отсутствует. В этом случае сопротивление связано только с трением и

$$C_w \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

2. Режим с образованием развитого отрыва ламинарного пограничного слоя, когда из-за колебаний области отрыва образуется дорожка Кармана, и в этом случае

$$C_w \approx const, \quad \mathrm{Re} \geq 200 .$$

3. Промежуточный режим между режимами 1 и 2 при $\mathrm{Re} \approx \approx 10 \ldots 200$. В этом случае изменение сопротивления при варьировании числа Рейнольдса можно аппроксимировать зависимостью

$$C_w \sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}} .$$

4. Режим с образованием отрыва турбулентного пограничного слоя.

Рис. 11.3. Отрыв пограничного слоя при обтекании цилиндра: *а* – ламинарного, *б* – турбулентного

Рис. 11.3 иллюстрирует разницу в положении начала зоны отрыва для ламинарного и турбулентного пограничного слоя. Турбулентный пограничный слой более устойчив. В связи с этим при турбулентном режиме течения в пограничном слое начало зоны отрыва располагается ниже по потоку, чем при ламинарном режиме, и область отрыва за цилиндром имеет меньшие размеры.

Измерение характеристик теплообмена на поверхности цилиндра

Вдоль поверхности цилиндра, если двигаться от лобовой точки натекания потока, можно видеть, что структура течения претерпевает существенные изменения и зависит от угла φ, положения рассматриваемой области. При $\varphi = 0$ – это критическая точка, где скорость потока равна нулю, далее с увеличением φ вблизи поверхности цилиндра скорость нарастает, но на

поверхности образуется пограничный слой. При $\varphi = \pi/2$ скорость на границе пограничного слоя максимальна. Затем течение вблизи цилиндра тормозится и появляется отрыв. Это обозначает, что при обтекании цилиндра локальные характеристики теплообмена будут зависеть от угла φ, а эти зависимости будут определяться значениями чисел Re и M (в дальнейшем влияние числа M рассматриваться не будет).

Существует значительное число экспериментальных данных о характеристиках теплообмена на поверхности цилиндра. Определены локальные значения числа Nu в виде зависимостей $Nu(\varphi)$ при различных значениях числа Рейнольдса. Определены также зависимости Nu для суммарного потока тепла с поверхности цилиндра от числа Re.

Примером проведения таких исследований являются измерения тепловых потоков с небольшой площадки на цилиндрической трубе.

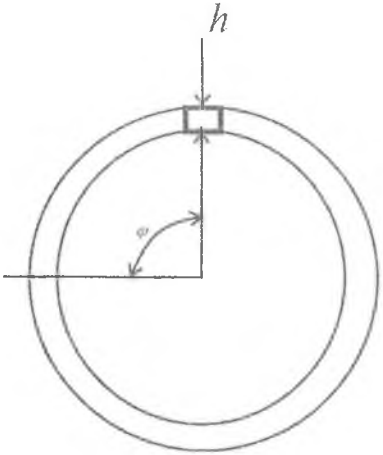


Рис. 11.4. Схема модели для исследования теплообмена на поверхности цилиндра

На рис. 11.4 показана схема модели для проведения исследований. На стенке трубы выделяется теплоизолированный элемент, на котором с внешней и внутренней стороны устанавливаются датчики температуры (например, термопары). Через трубу пропускается жидкость или газ, температура которых

регистрируется на входе в трубу и выходе из неё. С помощью датчиков температуры определяется величина теплового потока:

$$q_w = -k\frac{dT}{dn} \simeq -k\frac{T_н - T_{вн}}{h}.$$

Здесь $T_н$ – температура, фиксируемая датчиком, расположенным на стенке трубы снаружи, а $T_{вн}$ – датчиком, расположенным на внутренней стенке трубы; k – теплопроводность материала.

Коэффициент теплопередачи определяется по соотношению

$$\alpha = \frac{q_w}{T_\infty - T_w}, \mathrm{Nu} = \frac{\alpha l}{k}.$$

Здесь $T_w = T_н$; T_∞ – температура потока; k – коэффициент теплопроводности среды, обтекающей цилиндр.

Поворачивая трубу вокруг оси, можно определить зависимость $\alpha(\varphi)$ и локальные значения числа Нуссельта как функции угла.

Интегрированием теплового потока по всей окружности цилиндра можно определить значение коэффициента теплопередачи для цилиндра в целом. Для контроля этой величины используется условие теплового баланса по результатам измерений температуры среды на входе в трубу и выходе из неё.

Трение и теплообмен на поверхности цилиндра

Пограничный слой, образующийся на поверхности цилиндра, можно сопоставить с пограничным слоем на стенке канала при наличии продольного градиента давления, например, на стенке диффузора или суживающегося сопла. На рис. 11.5 показано изменение скорости на границе погранслоя U_δ вдоль стенки разных каналов.

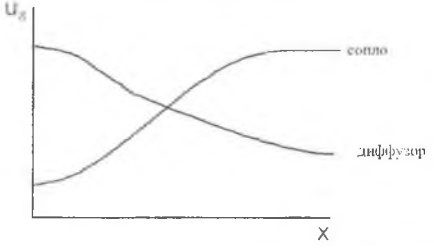


Рис. 11.5. Примеры изменения скорости на границе пограничного слоя

Изменение скорости на границе пограничного слоя при обтекании цилиндра может быть получено из решения задачи о невязком обтекании цилиндра. Значения скорости на поверхности цилиндра, получаемые в таком решении, можно в первом приближении отождествлять со значениями скорости на границе погранслоя при вязком обтекании. Это значит, что, если по аналогии Рейнольдса тепловой поток на плоской поверхности

$$q_w = \tau_w \frac{k}{\mu} \frac{T_\infty - T_w}{U_\infty},$$

то это соотношение для стенки, обтекаемой потоком с изменением скорости на границе пограничного слоя, будет

$$q_w = \tau_w \frac{k}{\mu} \frac{T_\delta - T_w}{U_\delta}.$$

В лобовой точке взаимодействия потока и цилиндра значения трения τ_w и скорости U_δ равны нулю, однако их отношение имеет конечное значение. Это следует из известных решений задачи обтекания цилиндра. На рис.11.6 показана зависимость $\tau(\varphi)$, полученная Блазиусом; при $\varphi \to 0$ $\tau \sim \varphi$.

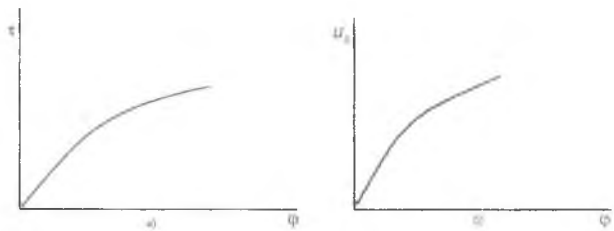


Рис. 11.6. Изменение величин трения (а) и скорости на границе пограничного слоя (б) вдоль поверхности цилиндра; $\varphi = 0$, что соответствует критической точке

В то же время закономерность изменения скорости на границе пограничного слоя, полученная Блазиусом,

$$U_\delta = U_\infty \sin\varphi \text{ (при малых } \varphi).$$

Отсюда следует, что в лобовой части цилиндра

$$\frac{\tau_w}{U_\delta} \approx const.$$

Или, согласно соотношению для q_w,

$$\alpha(\varphi) = const \quad \text{при малых} \quad \varphi .$$

В точке отрыва потока при $\varphi > 90°$ также одновременно имеют нулевые значения τ_w и U_δ, что соответствует конечному значению α.

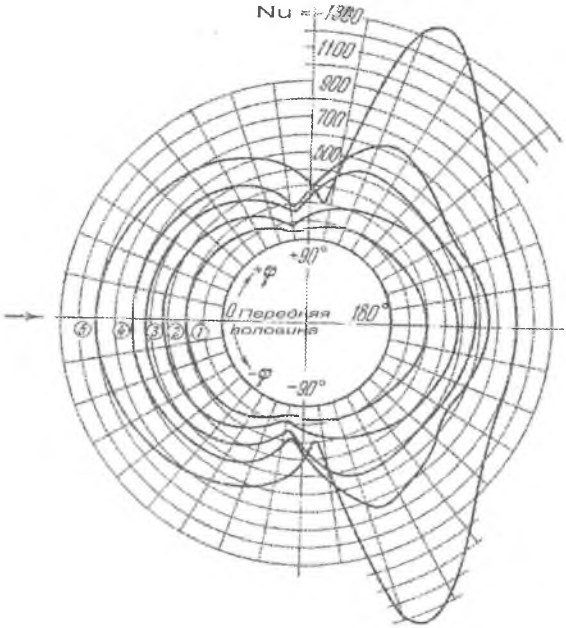


Рис. 11.7. Результаты измерений локальных значений числа Нуссельта на поверхности цилиндра при различных режимах обтекания

На рис. 11.7 показаны результаты измерений распределения значений коэффициента теплопередачи α на поверхности цилиндра в виде зависимостей числа Nu от угла φ при различных значениях числа Re: 1 – $4 \cdot 10^4$; 2 – $1 \cdot 10^5$; 3 – $2 \cdot 10^5$; 4 – $2.6 \cdot 10^5$; 5 – $4.3 \cdot 10^5$.

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha R}{k},$$

где R – радиус цилиндра.

Видно, что теплообмен интенсифицируется с ростом числа Re. Зависимость числа Nu(φ) «отслеживает» особенности обтекания цилиндра.

Эпюра распределения Nu(φ) выглядит как «бабочка». Наблюдается локальное уменьшение числа Nu в точке отрыва пограничного слоя и смещение этой точки при увеличении числа Re до значений $Re > Re_{кр}$. За точкой отрыва в области отрывного течения за цилиндром наблюдаются максимальные значения числа Nu.

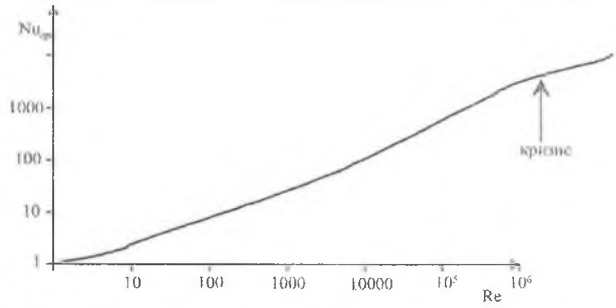


Рис. 11.8. Зависимость числа Нуссельта для всей поверхности от числа Рейнольдса

На рис. 11.8 показана зависимость числа $Nu_{ср}$, которое характеризует суммарный тепловой поток с поверхности цилиндра, от числа Рейнольдса обтекания цилиндра. При $Re > 100$ $Nu_{ср} \sim Re$ с небольшим отклонением от этой закономерности при $Re \approx Re_{кр}$.

В соответствии с аналогией Рейнольдса

$$q_{w_{ср}} \sim \frac{k}{\mu}\frac{T_w - T_\infty}{U_\infty}\tau_{w_{ср}}.$$

Среднее значение трения можно выразить через коэффициент сопротивления цилиндра

$$\tau_{w_{ср}} = C_f \frac{\rho U_\infty^2}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$q_{w_{ср}} = \frac{k}{\mu}\frac{T_\infty - T_w}{U_\infty}\cdot C_f \frac{\rho U_\infty^2}{2}$$

или при $Pr \approx 1$

$$\mathrm{Nu}_{\text{ср}} = \frac{C_f}{r}\frac{\rho R U_\infty}{\mu} = \frac{C_f}{2}\mathrm{Re}\,.$$

Это соответствует закономерностям на рис. 11.2 и 11.8 при $\mathrm{Re} \geq 100$.

Однако такая закономерность не выполняется при $\mathrm{Re} < 10$. В этом случае (см. рис. 11.2)

$$C_f \sim \frac{1}{\mathrm{Re}},$$

т.е. значение коэффициента теплопередачи должно было бы быть приблизительно постоянным. Однако при $1 < \mathrm{Re} < 10$, согласно данным рис. 11.8, значение числа Nu увеличивается с ростом Re, т.е. очевидно нарушение аналогии Рейнольдса. Это нарушение обусловлено тем, что аналогия Рейнольдса предусматривает наличие некоторого слоя, в котором происходят потери на трение и теплообмен, а при малых значениях числа Re структура течения при обтекании цилиндра не имеет пограничного слоя в обычном представлении. Размеры области течения с существенным проявлением вязкости превышают размеры цилиндра.

Об эффектах, обуславливающих отдельные особенности теплообмена

При анализе теплопередачи в условиях обтекания цилиндра приходится рассматривать ряд сложных процессов, сопутствующих обтеканию и теплообмену на поверхности цилиндра. К ним относятся: процессы в критических точках торможения, в точках отрыва и в областях отрывного течения, а также при переходе к турбулентности.

Задача о теплообмене в критической точке решается путём раскрытия неопределённости

$$\frac{\tau_w}{U_\delta} \text{ при } \tau_w \to 0 \text{ и } U_\delta \to 0\,,$$

если есть аналогия между динамическими и тепловыми процессами. Одним из источников нарушения этой аналогии является $\mathrm{Pr} \neq 1$.

В случае ламинарного течения значение числа Pr определяется по справочным данным о физических свойствах среды.

В случае турбулентного течения могут использоваться понятия турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности, т.е. подразумевается возможность определения «турбулентного» числа Прандтля Pr_T.

При турбулентном течении уравнения движения и переноса тепла в приближении пограничного слоя аналогичны этим уравнениям для ламинарного движения:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu_T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}=a_T\frac{\partial^2 h}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad \frac{\nu_T}{\alpha_T}=Pr_T.$$

Принципиальная трудность заключается в том, что турбулентная вязкость и теплопроводность формируются течением и "apriori" неизвестны.

Если обратиться к ранее рассмотренной задаче о термометре, то можно сделать некоторые выводы о значении турбулентного числа Прандтля при обтекании пластины.

Согласно результатам анализа, изложенным ранее, температура теплоизолированной пластины в потоке при $T=T_\infty$ и $u=U_\infty$ будет равна температуре торможения с поправкой на коэффициент восстановления, который равен $Pr^{1/2}$,

$$T_e=T_\infty+\sqrt{Pr}\,\frac{U_\infty^2}{2C_p}.$$

Эксперименты, проведенные с использованием воздуха, показали, что наблюдается зависимость температуры восстановления от числа Re, представленная ранее на рис. 10.2.

Итак, по результатам измерений при значениях числа Рейнольдса, бо́льших $Re_{кр}$, коэффициент восстановления несколько повышается и принимает значение, близкое к 0.9. Это даёт основание считать, что при турбулентном обтекании пластины число $Pr_T \approx 0.8$.

В общем случае число Pr_T не должно зависеть от молекулярных свойств. Однако эксперименты показывают, что данные для воздуха на рис. 10.2 отличаются от данных, полученных для других газов.

Это свидетельствует о необходимости более тщательного анализа теплопередачи в турбулентном пограничном слое.

- *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с немец. – М.: Наука, 1974.*
- *Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982.*

12. ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Результаты экспериментального исследования структуры турбулентного пограничного слоя

В отличие от процессов переноса в ламинарном пограничном слое, где динамические параметры могут быть легко определены, а по аналогии с ними и тепловые, турбулентный пограничный слой имеет сложную структуру, где есть и ламинарное, и турбулентное течение.

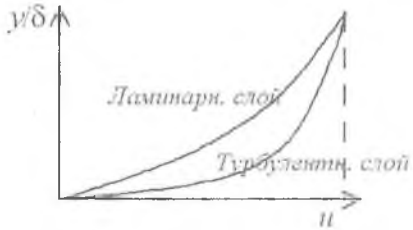


Рис. 12.1. Распределение скорости в ламинарном и турбулентном пограничном слое

На рис. 12.1 изображено распределение скорости вблизи стенки для случая ламинарного течения и течения с турбулентным пограничным слоем (δ – толщина пограничного слоя). В турбулентном пограничном слое профиль скорости значительно более наполнен и область низких скоростей очень тонкая.

Общепринятые представления о турбулентном пограничном слое заключаются в следующем.

Распределение скорости в поперечном направлении слоя состоит из трёх участков. Для их наглядного представления используют полулогарифмические координаты для изображения зависимости скорости потока от поперечной координаты. На рис.12.2 представлены в таком виде результаты экспериментального определения распределения скорости в турбулентном пограничном слое.

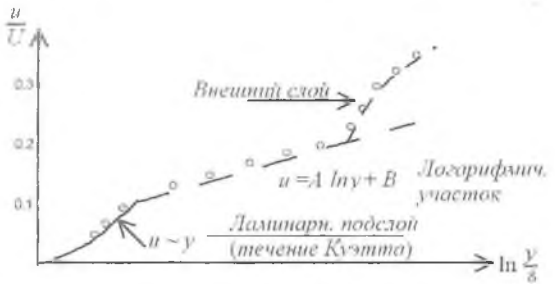


Рис. 12.2. Распределение скорости в турбулентном пограничном слое, представленное в полулогарифмических координатах

Вблизи стенки находится так называемый ламинарный подслой, скорость в котором изменяется линейно по y от нуля на стенке до некоторого значения, начиная с которого распределение скорости представляется линейной зависимостью от логарифма y. Эта часть профиля скорости обозначается как «логарифмический профиль».

Далее закономерность распределения скорости отклоняется от логарифмической – это «внешняя» часть пограничного слоя.

Исходя из этих экспериментальных данных можно заключить, что только во «внешней» части пограничного слоя течение является полностью турбулентным, в ламинарном подслое оно ламинарное из-за воздействия стенки, а на логарифмическом участке наблюдаются эффекты турбулизации, однако одновременно должны проявляться и молекулярные свойства среды. Отсюда следует, что процессы теплообмена в турбулентном пограничном слое будут в значительной мере зависеть от молекулярных свойств среды.

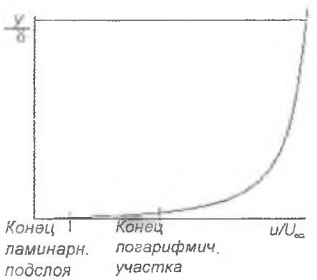


Рис. 12.3. Распределение относительной скорости в турбулентном пограничном слое по его толщине

На рис. 12.3 показаны границы областей по соответствующим распределениям скорости. Видно, что ламинарный подслой очень тонкий – он едва различим на профиле скорости в обычных координатах. Толщина логарифмического участка профиля также невелика. Это, в своё время, создало значительные трудности для исследователей-экспериментаторов.

На основании многочисленных экспериментов установлена «универсальная» структура течения в турбулентном пограничном слое. Для описания распределения скорости в погранслое используются безразмерные параметры, с помощью которых профили скорости, полученные в различных экспериментах, описываются единой зависимостью. Для этого используется параметр, который имеет размерность скорости и называется скоростью трения u_*. Этот параметр может быть получен в результате следующего анализа распределения скорости в пограничном слое:

Напряжение трения в ламинарном подслое

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = const = \tau_w ,$$

поскольку в подслое

$$\frac{du}{dy} = const .$$

Отсюда следует

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y .$$

Обозначив величину, имеющую размерность скорости

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} ,$$

получим

$$u = \frac{u_*^2 y}{\nu} \qquad (\nu = \mu/\rho) .$$

В ламинарном подслое закономерность изменения скорости будет

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}.$$

Величина u_* называется динамической скоростью или скоростью трения.

С помощью этого параметра обезразмеривается поперечная координата

$$y^+ = \frac{y u_*}{\nu}.$$

Эта величина y^+ обозначается так же, как число Рейнольдса, по расстоянию от стенки

$$\mathrm{Re}_{y,u_*} = y^+ = \frac{y u_*}{\nu}.$$

Представленные параметры являются координатами подобия для профиля скорости в пограничном слое.

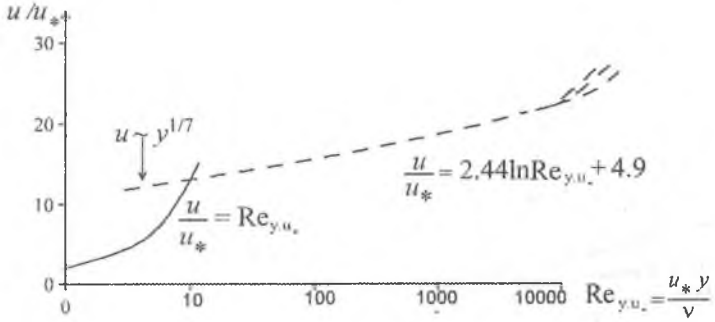


Рис. 12.4. Универсальный вид распределения скорости в турбулентном пограничном слое

На рис. 12.4 изображён универсальный профиль скорости в координатах (u/u_*, Re_{y,u_*}). По оси абсцисс – шкала логарифмическая.

На основании многочисленных экспериментальных данных установлена универсальная зависимость для логарифмического участка профиля скорости

$$\frac{u}{u_*} = 2.44 \ln \mathrm{Re}_{y,u_*} + 4.9 = A \ln \mathrm{Re}_{y,u_*} + B.$$

По результатам совокупности экспериментов получены значения констант A и B, однако их величины нельзя считать установленными абсолютно точно.

Возможности использования обобщённых данных о распределении скорости в пограничном слое

Для определения распределения скорости в пограничном слое в конкретном случае необходимо знать значение скорости трения.

Величина u_* зависит от конкретных условий течения, но для её оценки можно принять величину, определённую в известных экспериментах.

Так, исследования установившихся турбулентных течений в трубах при стабилизации профиля скорости показывают, что скорость вблизи стенки в логарифмическом участке распределена по закону

$$\frac{u}{u_*} = 2.5 \ln \frac{u_* y}{\nu} + 5.5$$

и величина $u_* \simeq 0.035 u_\alpha$, где u_α – скорость на оси, слабо зависящая от числа Рейнольдса, т.е. значение $u_* \simeq (0.03 \ldots 0.04) u_\infty$ можно принимать при оценках распределения скорости.

Для более точного определения величины u_* можно использовать известные данные о величине трения на стенке τ_w, по которой вычисляется u_* ($u_* = (\tau_w / \rho)^{1/2}$).

В случае плоской стенки имеется связь между коэффициентом сопротивления и трением на стенке:

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \quad \text{или}$$

$$C_f = 2 \left(\frac{u_*}{U_\infty} \right)^2, \text{ т.е.}$$

величину u_* можно определить по коэффициенту сопротивления.

На практике коэффициент сопротивления или трение определяются по измерениям силы, действующей на пластину, которая может быть либо непосредственно измерена, либо вычислена по изменению потока импульса.

Для этого нужно обратиться к понятиям толщины потери импульса и толщины вытеснения в пограничном слое.

Толщина вытеснения

$$\delta^* = (\int_0^\delta (\rho_\infty u_\infty - \rho u) dy) / \rho_\infty u_\infty = \delta \int_0^1 (1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty u_\infty}) d\frac{y}{\delta}.$$

Толщина потери импульса

$$\delta^{**} = (\int_0^\delta [\rho u (u_\infty - u)] dy) / \rho_\infty u_\infty^2 = \delta \int_0^1 (1 - \frac{u}{u_\infty}) \frac{\rho u}{\rho_\infty u_\infty} d\frac{y}{\delta}.$$

Действующие силы могут быть выражены через изменение этих параметров

$$\tau_w = \frac{d\delta^{**}}{dx} \rho_\infty u_\infty, \quad C_f = 2\frac{d\delta^{**}}{dx}.$$

Зависимость C_f пластины от числа Re связана с изменением δ^* и δ^{**} (толщины вытеснения и толщины потери импульса) по x. Измерив или вычислив C_f, можно найти величину u_*.

Для гладкой пластины установлены также эмпирические соотношения, которые можно использовать для оценки величины u_*,

$$C_f \approx 0.246 \cdot 10^{-0.678H} \cdot \left(\frac{u_\infty \delta^*}{\nu} \right)^{-0.268}, \qquad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}.$$

Это соотношение трудно использовать и поэтому предлагается его менее точный, но упрощённый вариант

$$C_f \approx 0.03 \cdot \left(\frac{u_\infty \delta^*}{\nu} \right)^{-0.268}, \qquad H \approx 1.36.$$

Величина H называется формпараметром и зависит от «наполненности» пограничного слоя, которая, в свою очередь, зависит от свойств течения и в первую очередь от числа Re. В инженерной практике используется степенная аппроксимация распределения скорости в пограничном слое

$$\left(\frac{u}{u_\infty} \right) = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n}.$$

На практике значение n в показателе степени изменяется в интервале 4…14. Наиболее употребимое в инженерной практике значение параметра $n = 7$. На рис.12.4 штриховой линией показана

зависимость величины скорости от поперечной координаты, соответствующая этой закономерности.

Для определения величин формпараметров при использовании степенной зависимости для распределения скорости имеются простые соотношения

$$\frac{\delta^{**}}{\delta}=\frac{n}{(n+1)(n+2)},\quad \frac{\delta^{*}}{\delta}=\frac{1}{n+1},\quad \frac{\delta^{*}}{\delta^{**}}=\frac{n+2}{n}.$$

Теплообмен в турбулентном пограничном слое

Процессы переноса в турбулентном пограничном слое оказываются очень сложными. Перенос тепла между стенкой и потоком в соответствии с описанной схемой течения проходит через три зоны течения, которые можно считать тремя последовательными тепловыми сопротивлениями. Если тепло идёт от потока к стенке, то сначала оно проходит через внешнюю часть погранслоя, затем через ту её часть, где реализуется логарифмический профиль скорости, и потом через ламинарный подслой к стенке. При этом, очевидно, что при переносе тепла через два последних слоя должны проявляться молекулярные свойства веществ.

Примером сильного влияния молекулярных свойств вещества являются данные о теплообмене при обтекании цилиндра потоком веществ с разными молекулярными свойствами.

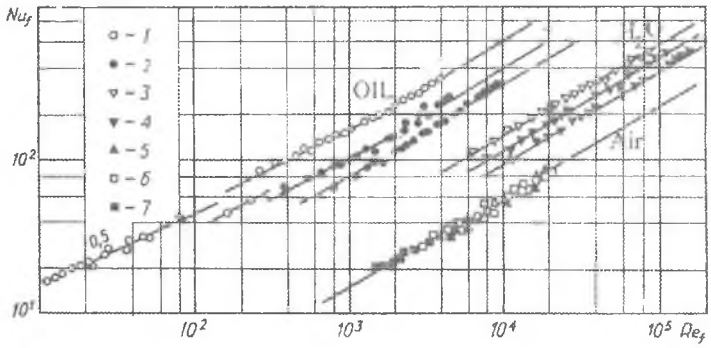


Рис. 12.5. Результаты экспериментов по определению числа Нуссельта при обтекании цилиндра в различных жидкостях и газах

На рис. 12.5 показаны зависимости числа Нуссельта от числа Рейнольдса обтекания цилиндра для разных веществ: масло – Pr ≈ ≈ 1000, вода – Pr ≈ 6.75, воздух – Pr ≈ 0.733.

При ламинарном режиме течения влияние числа Pr соответствует ранее приведённым зависимостям

$$(\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Re}^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}).$$

При сверхкритических значениях числа Re, когда режим обтекания становится турбулентным, зависимости Nu(Re) для разных веществ сближаются, но не объединяются. Такое же различие в значениях коэффициентов теплопередачи наблюдается при обтекании пластины.

В турбулентном пограничном слое на пластине, согласно данным экспериментов, наблюдается распределение температуры, аналогичное распределению скорости, показаному на рис.12.6.

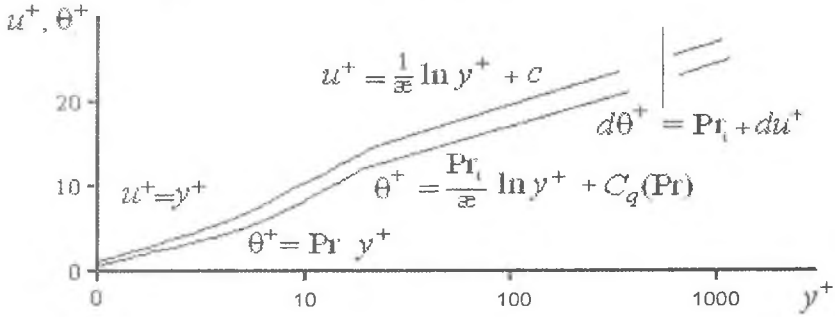


Рис. 12.6. Универсальный вид распределения скорости и температуры в турбулентном пограничном слое

Обозначения на рисунке соответствуют следующим параметрам:

$$æ = \frac{1}{A}, y^+ = \frac{u_* y}{\nu}, u^+ = \frac{u}{u_*}, \quad \theta^+ = \frac{\theta}{\theta_*}, \theta_* = \frac{q_w}{\rho C_p u_*}, q_w = k\left.\frac{dT}{dy}\right|_w.$$

Новые параметры: турбулентное число Прандтля Pr_t и $C_q(\mathrm{Pr})$ определяются по экспериментальным данным.

Для турбулентнго числа Прандтля Pr_t установлено эмпирическое соотношение

$$\mathrm{Pr}_t = 0.9 + 0.2(\psi - 1), \psi = T_w / T_f,$$

в случае нагретой стенки $T_f \approx T_\infty$.

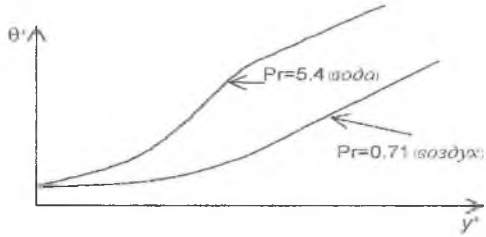


Рис. 12.7. Распределение температуры в ламинарном подслое при различных значениях числа Прандтля

Эксперименты с водой подтверждают существенную зависимость распределения температуры от молекулярного числа Pr. На рис.12.7 приведены для сравнения результаты измерения распределений температуры в турбулентном пограничном слое для воды и воздуха. Эти данные показывают, что в ламинарном подслое соотношение между профилем температуры и скорости соответствует рис.12.6,

$$\frac{u}{u_*} = y^+, \frac{\theta}{\theta_*} = \mathrm{Pr}\, y^+.$$

Зависимости $u^+(y^+)$ одинаковы для воды и воздуха при близких значениях числа Re.

Картина распределения параметров в турбулентном пограничном слое позволяет объяснить данные экспериментальных исследований воздействия на теплообмен изменения внешней турбулентности и шероховатости стенки.

Эксперименты продемонстрировали относительно слабое влияние внешней турбулентности на характеристики теплообмена в развитом турбулентном пограничном слое. Это обусловлено тем, что внешняя турбулентность воздействует только на внешнюю часть пограничного слоя и изменяет в первом приближении тепловое сопротивление только этой его части, которое приблизительно составляет третью часть всего теплового сопротивления пограничного слоя.

Шероховатость срезает ламинарный подслой, т.е. приводит к снижению влияния числа Прандтля а также к частичному снижению теплового сопротивления.

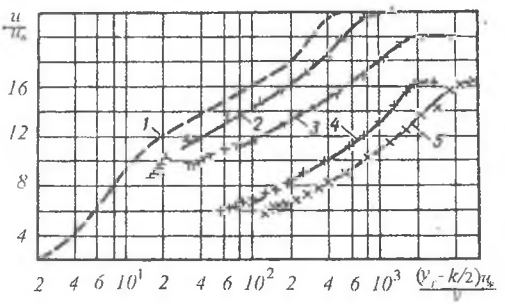


Рис. 12.8. Влияние шероховатости на распределение скорости (2...5 соответствуют увеличению шероховатости)

Простейшая схема шероховатости показана на рис. 9.1 в р. 9 (внизу справа). Высота выступов k, координата y отсчитывается от вершин выступов. При таком представлении зависимость распределения температуры от поперечной координаты остается универсальной (рис. 12.9). Однако при различных высотах шероховатости эта зависимость начинается с разных значений θ^+, т.е. слой теплового сопротивления с молекулярной теплопроводностью уменьшается.

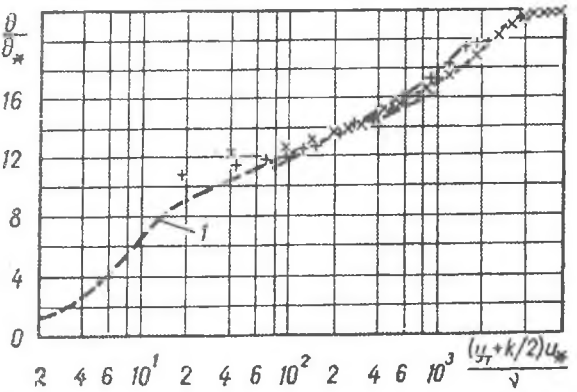


Рис. 12.9. Влияние шероховатости на распределение температуры

Приведенные данные соответствуют сильно упрощённой модели шероховатости. На практике шероховатость может иметь самые

различные конфигурации и описание её воздействия на теплообмен оказывается чрезвычайно трудным.

Критериальные зависимости для определения характеристик теплообмена в пограничном слое

Для определения этих характеристик на плоской поверхности на практике применяются достаточно простые критериальные соотношения. Эти соотношения, в определённой степени, позволяют учитывать различные сложные эффекты, проявляющиеся в процессе теплообмена из-за различных особенностей гидродинамики течения.

Для выявления отдельных эффектов, описываемых этими критериальными соотношениями, целесообразно рассмотреть их в последовательности – от более простых к более сложным.

Ранее было получено для локального значения числа Nu при ламинарном течении на пластине

$$\text{при } \mathrm{Pr}=1 \quad q_w \sim \tau_w \quad \text{и}$$

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \text{ а}$$

при учёте отличия числа Pr от единицы

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}.$$

Эти соотношения получены на основании аналитических решений для ламинарного пограничного слоя на пластине.

Для инженерной практики нужны соотношения, которые учитывают практические особенности теплопереноса. Для ламинарного течения – это учёт конечных размеров пластины и зависимости числа Прандтля от температуры

$$\mathrm{Nu}_x = 0.33\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}_\infty^{1/3}(\mathrm{Pr}_\infty/\mathrm{Pr}_w)^{1/4}.$$

Здесь введена эмпирическая поправка к аналитической формуле. Индекс «∞» соответствует исходным свойствам движущейся среды, а индекс «w» – свойствам этой среды, если она имеет температуру стенки.

При конечных размерах пластины можно выполнить приближённое интегрирование по x и получить соотношение для определения суммарного коэффициента теплопередачи

$$Nu = 0.66\,Re^{1/2}\,Pr_{\infty}^{1/3}(Pr_{\infty}/Pr_{w})^{1/4}.$$

Такие же эффекты наблюдаются при турбулентном течении в пограничном слое.

Соотношение для локального числа Nu в этом случае получено на основании экспериментов при измерении величины тепловых потоков при различных значениях температуры и числа Рейнольдса:

$$Nu_{x} = 0.0296\,Re_{x}^{0.8}\,Pr_{\infty}^{0.43}(Pr_{\infty}/Pr_{w})^{0.25}.$$

Видно, что это соотношение во многом отличается от аналогичного соотношения для ламинарного течения. Влияние значений чисел Re и Pr оказывается более сильным. Это кажется неким противоречием представлению о турбулентном течении, свойства которого, как правило, в меньшей степени зависят от значений Re и Pr, чем при ламинарном течении.

Для объяснения этого эффекта необходимо обратиться к условиям измерения характеристик теплообмена на пластине.

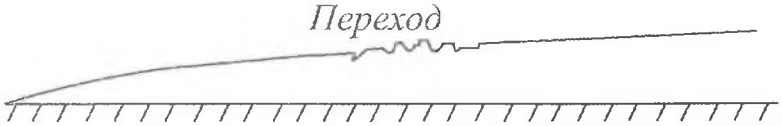


Рис. 12.10. Иллюстрация нарастания пограничного слоя на пластине

На рис. 12.10 показана схема нарастания пограничного слоя на пластине. В начале пластины пограничный слой ламинарный, затем происходит переход и на удалениях, где $Re_{x} > Re_{кр}$, течение в пограничном слое является турбулентным.

Если результаты измерений коэффициентов теплопередачи, полученные для различных сред, обработать в виде зависимостей, соответствующих ламинарному течению, то проявляется особенность, которая свидетельствует о влиянии числа Pr на характеристики теплообмена при переходе от ламинарного течения к турбулентному. На рис.12.11 представлены результаты измерений Nu_{x} в разных средах при значениях числа Pr = 0.7; 6.6 и 109.

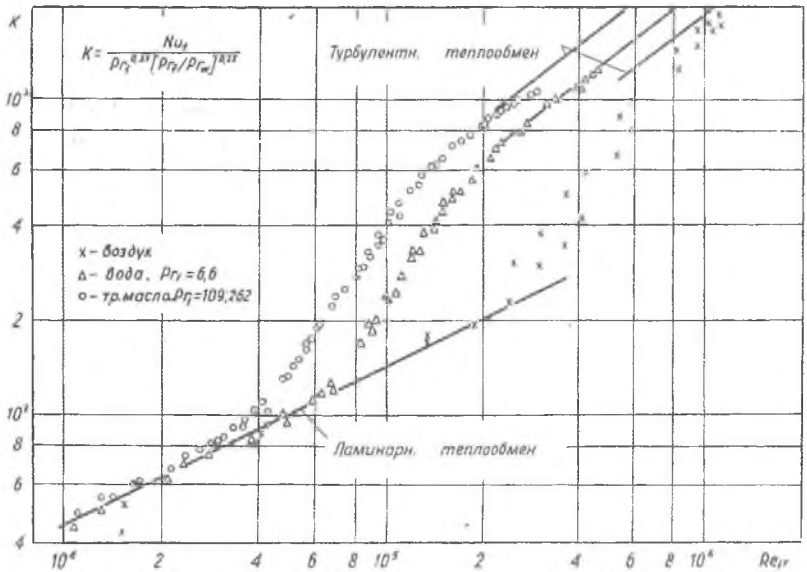


Рис. 12.11. Результаты определения влияния свойств жидкости и газа на зависимость коэффициента теплопередачи от числа Рейнольдса

Видно, что переход к турбулентному режиму теплообмена зависит от числа Pr_∞. Полученные данные можно аппроксимировать зависимостью

$$Re_{кр} / Re_{кр0} = 1.25\, Pr_\infty^{-0/45}.$$

Представленное соотношение характеризует разный темп нарастания интенсивности теплообмена при переходе к турбулентности: в средах с низкой теплопроводностью теплоперенос интенсифицируется сильнее и заметное повышение коэффициента теплоотдачи проявляется при увеличении числа Re быстрее.

Этот экспериментальный результат позволяет трансформировать соотношение Nu_x (Re, Pr) для пограничного слоя, в котором произошел переход от ламинарного режима к турбулентному, к виду, который в большей мере соответствует полученным ранее данным для ламинарного пограничного слоя,

$$Nu_x = 0.45\, Re_{кр}^{-0.9}\, Re_x^{1.4}\, Pr_\infty^{0.33} (Pr_\infty / Pr_w)^{0.25}.$$

Появление в соотношении для характеристик теплообмена величины $Re_{кр}$ позволяет также учесть влияние турбулентности внешнего потока.

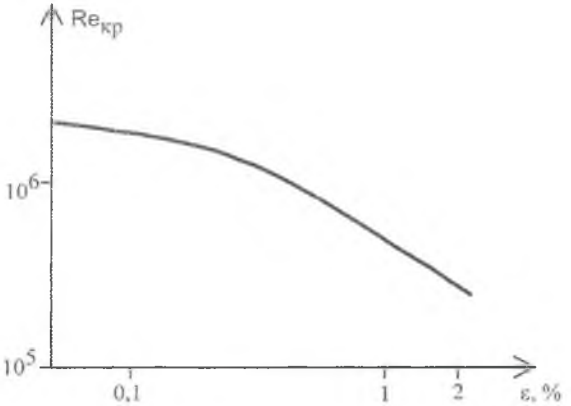


Рис. 12.12. Влияние интенсивности турбулентных пульсаций на критическое число Рейнольдса для пластины

На рис. 12.12 приведены результаты определения зависимости $Re_{кр}$ от интенсивности турбулентных пульсаций ε по экспериментальным данным соответствующих исследований. Видно, что при увеличении интенсивности турбулентных пульсаций скорости во внешнем потоке до 1...2% критическое значение числа Re уменьшается на порядок.

Итоговой зависимостью при малых ε будет та же, которая приводилась ранее,

$$Nu_x = 0.0296\, Re_x^{0.8}\, Pr_\infty^{0.43} (Pr_\infty / Pr_w)^{0.25}.$$

На практике наиболее употребимым оказывается соотношение для определения суммарного значения числа Nu

$$Nu = 0.037\, Re^{0.8} Pr_\infty^{0.43} (Pr_\infty / Pr_w)^{0.25}.$$

Учёт реальных условий течения имеет и другие варианты. Так, для того чтобы учесть влияние шероховатости и турбулентности на теплообмен, используются эмпирические поправки, которые исходят из аналогии Рейнольдса.

Если использовать число St как параметр, характеризующий теплообмен, то

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{StRePr} \quad \text{или} \quad \mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{RePr}}, \ \mathrm{St} = \frac{\alpha}{C_p \rho u_\infty}.$$

Из аналогии Рейнольдса для гладкой пластины следует

$$\mathrm{St} \sim C_f \cdot f(\mathrm{Pr}).$$

Для шероховатой пластины Яглом и Кадер на основании обобщения многочисленных экспериментальных данных получили соотношение

$$\mathrm{St} = \frac{\sqrt{C_f / 2}}{2.12 \ln(\delta^* / k) + 0.55\sqrt{k^+}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 0.2) + 9},$$

где k - высота шероховатости, $k^+ = ku_* / \nu$.

Это соотношение справедливо при режиме так называемого «развитого воздействия шероховатости».

Для учёта воздействия шероховатости на теплообмен могут быть использованы и другие эмпирические соотношения.

Для определения числа Стантона используется также поправка, позволяющая учитывать турбулентные пульсации,

$$\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{St}_0} = 1 + 0.41 th(0.2\varepsilon); \ \left([\varepsilon], \%\right).$$

• *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с немец. – М.: Наука, 1974.*

• *Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982.*

13. О ПРАКТИЧЕСКОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ДАННЫХ О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТЕПЛООБМЕНА

Рассмотренные характеристики теплообмена относятся к простейшим случаям течений с теплообменом. Тем не менее, в реальных задачах анализа особенности теплообмена изложенные данные позволяют получить основные представления о передаче тепла. Использование свойств теплообмена на поверхности плоской стенки применимо для анализа теплового состояния значительной части элементов ВРД, стенок каналов, экранов и т.п.

Трудности возникают при анализе теплообмена на поверхности обтекаемого тела, когда имеются эффекты непостоянства давления, ускорение и замедление потока. С этими эффектами приходится сталкиваться, рассматривая обтекание цилиндра, когда возникает неопределённость при определении характеристик в двух критических точках. Для этих точек характерна особенность: и трение, и скорость равны нулю.

Если исходить из аналогии тепловых и динамических процессов

$$q_w \approx \frac{(T_\delta - T_w)\tau_w}{U_\delta}\frac{k}{\mu},$$

то можно отметить её наличие в этих критических точках, поскольку одновременно $\tau_w \to 0$ и $U_\delta \to 0$ и значение q_w оказывается конечным.

Значение α в критической точке можно найти, не используя аналогии, а решая тепловую задачу, например, исходя из того, что решение динамической задачи известно. При этом решается задача о переносе тепла при заданных значениях компонент скорости. Для лобовой критической точки ($\varphi = 0$) можно найти решение тепловой задачи, интерполируя решения, полученные для ненулевых углов φ.

При ориентировочном анализе характеристик теплообмена на профиле (рис. 13.1а) можно абстрагироваться от рассмотрения его кривизны (рис. 13.1б).

Рис. 13.1. Аэродинамический профиль как объект анализа теплообмена

Лобовая часть профиля (цилиндр при $\varphi \leq 90°$) обтекается ламинарно.

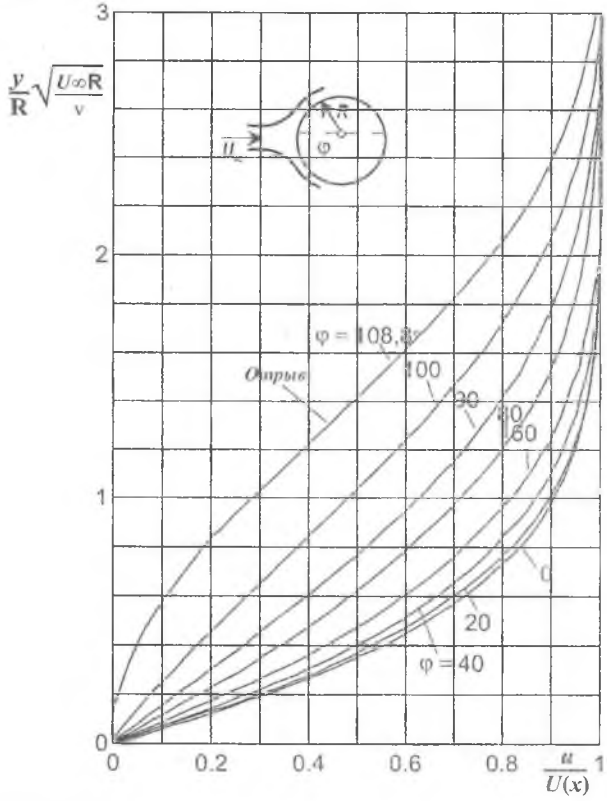


Рис. 13.2. Распределение скорости по радиальным направлениям при обтекании цилиндра

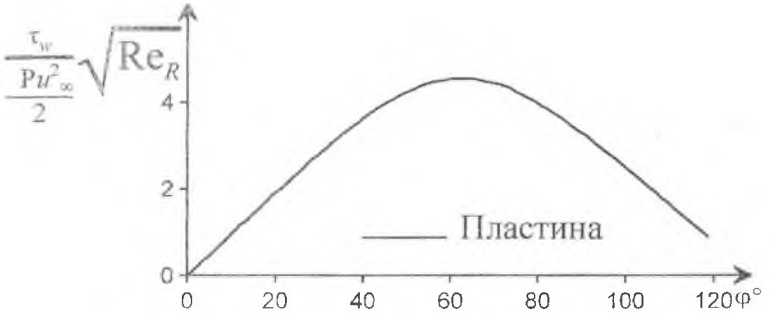


Рис. 13.3. Распределение трения на поверхности цилиндра

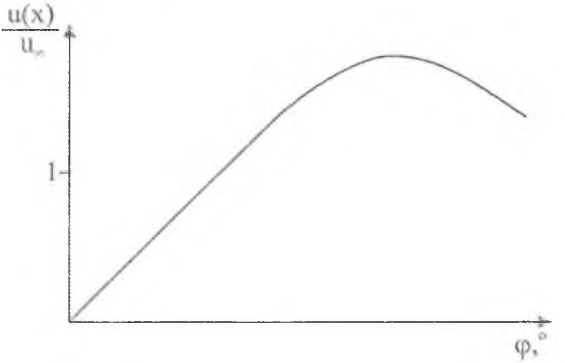


Рис. 13.4. Зависимость скорости на границе пограничного слоя от угловой координаты

Для динамической задачи обтекания цилиндра при $\varphi \le 90°$ справедливо решение Блазиуса. На рис. 13.2 представлены распределения скорости по радиальным направлениям с отсчётом от поверхности цилиндра. На рис. 13.3 показана зависимость трения на поверхности цилиндра от угла φ, а на рис. 13.4 – зависимость скорости на границе вязкого слоя вдоль поверхности цилиндра от угла φ.

Известно решение для пластины

$$\tau_w = 1.328 \frac{\rho u_\infty^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}.$$

Сопоставляя это значение τ с данными на рис. 13.3, можно отметить, что трение на поверхности цилиндра в несколько раз

больше, однако в соответствии с данными рис.13.4 и скорость выше. Поскольку

$$q_w \sim \frac{\Delta T}{U_\delta} \tau_w ,$$

превышение теплового потока на поверхности цилиндра над тепловым потоком на пластине не так велико.

Из решения Блазиуса получено значение α для цилиндра при $\varphi \le 90°$

$$\frac{\alpha R}{\lambda} \approx 0.5\sqrt{2\,\mathrm{Re}_R} \approx 0.75\sqrt{\mathrm{Re}_R} ,$$

что соответствует при $\varphi \approx 90°$

$$\mathrm{Nu}_x \approx 0.57\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.35} .$$

На поверхности пластины при ламинарном течении

$$\mathrm{Nu}_x = 0.33\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\mathrm{Pr}^{1/3} .$$

Отсюда следует, что интенсивность теплообмена на лобовой части профиля в 1.5…2 раза выше, чем на протяжённой, до тех пор, пока режим течения ламинарный.

При переходе к турбулентности

$$\mathrm{Nu}_x \sim \mathrm{Re}^{0.8} ,$$

т.е. при больших значениях числа Рейнольдса будет происходить значительная интенсификация теплообмена. В соответствии с ранее полученным результатом

$$\mathrm{Nu}_x = 0.0296\,\mathrm{Re}_x^{0.8} \cdot \mathrm{Pr}^{0.43} (\mathrm{Pr}_\infty / \mathrm{Pr}_w)^{0.25} .$$

Таким образом, в отношении теплообмена на профиле можно сделать вывод о том, что в лобовой части профиля теплообмен интенсивнее в 1.5…2 раза, чем на профиле до перехода к турбулентному режиму.

Следовательно, в первую очередь, необходимо охлаждать лобовую часть профиля и хвостовую, если есть переход к турбулентному режиму течения в погранслое.

• *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с немец. – М.: Наука, 1974.*

• *Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982.*

14. ЗАГРАДИТЕЛЬНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ

Общие свойства и примеры заградительного охлаждения

В задачах об охлаждении рассматривается стандартная ситуация (рис.14.1), при которой с одной (верхней) стороны стенка обтекается горячим потоком ($T_г$), а с другой (нижней) – холодным ($T_х$).

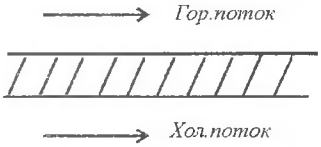


Рис. 14.1. Пояснение к задаче охлаждения стенки

Более раннее рассмотрение теплообмена между стенкой и потоком позволяет определить значения коэффициентов теплоотдачи α с каждой из сторон стенки. В стационарных условиях, когда тепловые потоки с обеих сторон стенки равны, можно определить её температуру из балансного соотношения

$$\alpha_в\left(T_г - T_w\right) = \alpha_н\left(T_w - T_х\right)$$

(индексы обозначают верхнюю и нижнюю сторону стенки).

Если α зависит от температуры, то это будет более сложное уравнение, но с одним неизвестным T_w. В простейшем случае

$$T_w = \frac{\alpha_в}{\alpha_в + \alpha_н} T_г + \frac{\alpha_н}{\alpha_в + \alpha_н} T_х = \frac{\overline{\alpha}_в T_г + T_х}{1 + \overline{\alpha}_в},$$

$$\overline{\alpha}_в = \frac{\alpha_в}{\alpha_н}.$$

Эта схема охлаждения называется конвективной. Её возможности, раскрытые приведёнными соотношениями, показывают, что для снижения температуры стенки нужно повышать значение $\alpha_н$ и понижать значение $\alpha_в$. В соответствии с этим для повышения

эффективности охлаждения (снижения значения T_w) при прочих равных условиях используется возможность образования защитного слоя из холодного потока. На рис. 14.2 и 14.3 приведены примеры реализации такого течения.

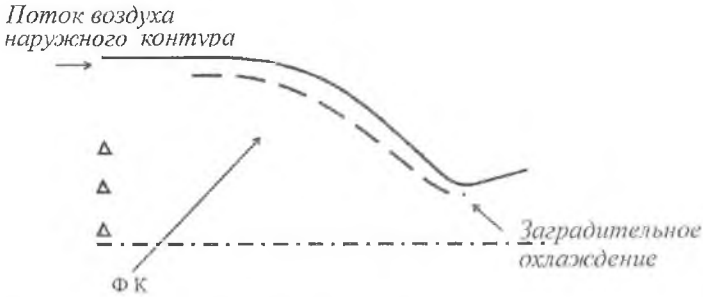


Рис. 14.2. Пример заградительного охлаждения в форсажной камере

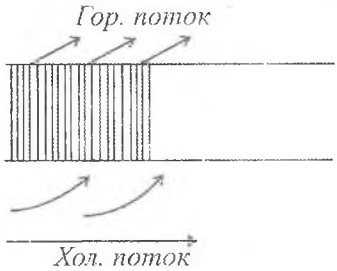


Рис. 14.3. Пример заградительного охлаждения проницаемой стенки

Наиболее наглядным примером заградительного охлаждения является струйное заградительное охлаждение экрана стенки форсажной камеры, показанное на рис. 14.2. Экран состоит из секций, которые разделены щелями, расположенными таким образом, чтобы охлаждающий воздух, выходя из щели, распространялся вдоль поверхности следующей секции, загораживая её от горячего потока.

Другим видом заградительного охлаждения является охлаждение путём выдува холодного газа в горячий через пористую стенку, которая при этом и охлаждается (рис. 14.3). Этот способ подходит для лопаток турбины и называется конвективно-плёночным охлаждением. При этом выдуваемый газ после прохождения через пористую или перфорированную стенку теряет значительную часть своего напора. Поток этого газа прижимается наружным те-

чением к стенке и создает защитную «плёнку». В связи с этим такое течение можно считать течением с вдувом в пограничный слой (см. рис. 14.3). Такой режим течения будет рассмотрен далее при анализе эффектов теплообмена при вдуве с пористой поверхности в пограничный слой.

Эффективность охлаждения при вдуве охлаждающего воздуха в пограничный слой

На рис.14.3 видно, что при вдуве через пористую стенку холодный воздух проходит через поры, достигая температуры, равной температуре стенки, и создаёт дополнительный тонкий слой в пристеночной части пограничного слоя. В этом случае уравнение теплового баланса имеет вид

$$\alpha_{в}(T_{г} - T_{w}) = \alpha_{н}(T_{w} - T_{х}) + GC_{р}(T_{w} - T_{х}).$$

Член $GC_{р}(T_{w} - T_{х})$ характеризует количество тепла, снятое со стенки воздухом, проходящим через поры (G – его расход, $C_{р}$ – теплоёмкость), что эквивалентно повышению коэффициента теплоотдачи со стороны холодного потока

$$\alpha_{нэкв.} = \alpha_{н} + GC_{р},$$

т.е. это – существенный фактор охлаждения стенки.

Однако к этому прибавляется ещё один эффект – увеличение теплового сопротивления со стороны горячего газа, т.е. уменьшение величины $a_{в}$. В зависимости от режима течения в пограничном слое горячего потока – ламинарного или турбулентного – эффективность этого фактора будет различаться.

1. Турбулентный пограничный слой

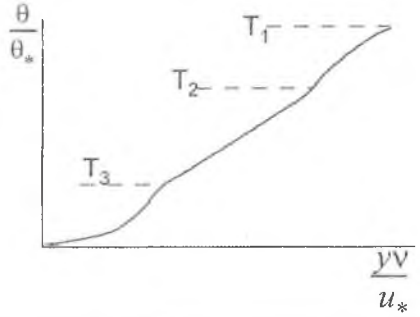


Рис. 14.4. Характерный профиль температуры для турбулентного пограничного слоя в полулогарифмических координатах

На рис. 14.4 показано распределение температуры (профиль температуры) в турбулентном пограничном слое. По вертикали в пограничном слое можно обозначить три области: ламинарный подслой, логарифмический участок и внешнюю часть пограничного слоя. Каждая из них создаёт сопротивление $R_{\text{тепл}}$ для теплового потока от горячего газа к стенке. Общее сопротивление равно сумме этих трёх сопротивлений. Обозначим (см. рис. 14.4) граничные значения температуры трёх рассмотренных зон: $T_1 = T_\infty$ – температура на границе внешней части пограничного слоя, T_2 – на границе между логарифмическим участком и внешней частью пограничного слоя и T_3 – на границе между ламинарным подслоем и логарифмическим участком.

Соответственно, тепловые сопротивления будут следующими: $R_{\text{Т}1}$ – для внешней части погранслоя; $R_{\text{Т}2}$ – для логарифмического участка; $R_{\text{Т}3}$ – для ламинарного подслоя

$$R_{\text{Т}1} + R_{\text{Т}2} + R_{\text{Т}3} = R_{\text{тепл}}.$$

Суммарная величина $R_{\text{тепл}}$ определяется из соотношения

$$q_w = (T_\infty - T_w)\alpha = (T_1 - T_w)\frac{1}{R_{\text{тепл}}}.$$

Поток тепла через все выделенные части погранслоя одинаков, т.е.

$$q_w = (T_1 - T_2)\frac{1}{R_{\text{Т}1}} = (T_2 - T_3)\frac{1}{R_{\text{Т}2}} = (T_3 - T_w)\frac{1}{R_{\text{Т}3}}.$$

Здесь уместно провести аналогию с электрическим током, сопротивлением и падением напряжения (рис. 14.5).

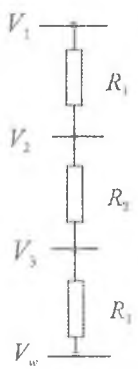


Рис. 14.5. К аналогии между электрическим и тепловым сопротивлением

Общее падение напряжения $V_1 - V_w$ определяется суммой составляющих:

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_w) = V_1 - V_w.$$

При этом

$$V_1 - V_2 = iR_1, \quad V_2 - V_3 = iR_2, \quad V_3 - V_w = iR_3,$$

где i – ток, одинаковый для всех элементов цепи.

В случае теплового потока

$$T_1 - T_2 = qR_{T1}, \quad T_2 - T_3 = qR_{T2}, \quad T_3 - T_w = qR_{T3}.$$

Отсюда следует, что R_{T3} может быть определено по разности значений температур T_3 и T_w, а доля R_{T3} в общем тепловом сопротивлении составит

$$\frac{R_{T3}}{R_{тепл}} = \frac{T_3 - T_w}{T_1 - T_w}.$$

При изменении R_{T3} на величину ΔR_{T3} общее изменение теплового сопротивления будет

$$\Delta R_{тепл} = \Delta R_{T3}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\Delta R_{T3}}{R_{T3}} = \frac{\Delta R_{тепл}}{R_{тепл}} \cdot \frac{T_1 - T_w}{T_3 - T_w}.$$

Возвращаясь к изменению величины коэффициента теплоотдачи α, имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{R_{тепл}}{R_{тепл} + \Delta R_{тепл}} \quad \text{или}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \Delta\alpha} = \frac{\alpha_0}{1 + \dfrac{\Delta R_{тепл}}{R_{тепл}}} = \frac{\alpha_0}{1 + \dfrac{\Delta R_{T3}}{R_{T3}} \cdot \dfrac{T_3 - T_w}{T_1 - T_w}}.$$

Эти соотношения показывают, что при изменении теплового сопротивления в одной части пограничного слоя эффект воздействия на общее тепловое сопротивление пограничного слоя пропорционален отношению разницы температур на границах этой части слоя к суммарной разности значений температур во всём пограничном слое

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} \sim \frac{\Delta T_{гр}}{T_\infty - T_w},$$

где $\Delta T_{гр} = T_3 - T_w$ для ламинарного подслоя или соответствующая разность значений температур для других слоёв.

Для определения изменения теплового сопротивления при вдуве охлаждающего газа в пограничный слой с охлаждаемой стенки рассмотрим следующие схемы течения (рис. 14.6).

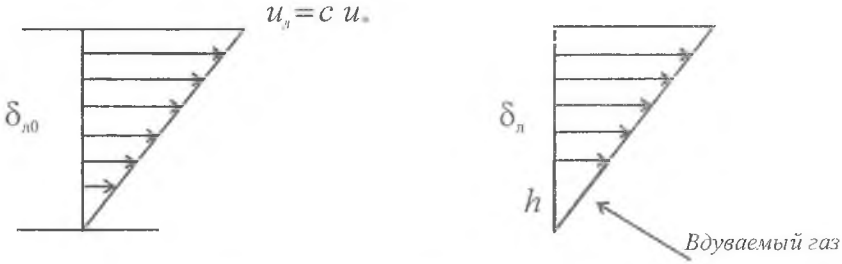


Рис. 14.6. Схемы течения в ламинарном подслое без вдува и с вдувом газа

В ламинарном подслое скорость и температура распределены по линейному закону. Будем считать, что при вдуве это распределение не нарушается, т.е. вдув очень слабый и не меняет структуры течения в пограничном слое. Вследствие вдува вблизи стенки появляется дополнительный поток с расходом $G_{вд}$. Поскольку скорость распределена по линейному закону, высота этого потока

$$h = 2\frac{G_{вд}}{u_h},$$

где u_h – скорость на границе потока вдуваемого газа. При толщине ламинарного подслоя $\delta_л$ значение u_h будет

$$u_h = \frac{u_л}{\delta_л} h,$$

где $u_л$ – значение скорости на границе ламинарного подслоя.

Поскольку принимается, что структура течения при вдуве не изменяется, h является величиной, на которую возрастает толщина ламинарного подслоя; при этом $h \ll \delta_л$.

В этом случае справедливо соотношение

$$G_{вд} = \frac{h}{2} \cdot u_h \cong \frac{u_л h^2}{2\delta_л}.$$

Расход в ламинарном подслое

$$G_л = 2\frac{u_л}{\delta_л}, \text{ т.е.}$$

$$G_{вд} = G_л \frac{h^2}{\delta_л^2} \quad \text{или} \quad \frac{h}{\delta_л} = \sqrt{\frac{G_{вд}}{G_л}}.$$

В ламинарном подслое температура распределена по линейному закону, т.е. величина теплового сопротивления вблизи стенки

$$R_{тепл} = const \cdot y$$

и изменение теплового сопротивления ламинарного подслоя

$$\frac{\Delta R_з}{R_з} = \frac{h}{\delta_л}.$$

В соответствии с изложенными представлениями о влиянии изменения теплового сопротивления в отдельной части пограничного слоя на коэффициент теплопередачи через пограничный слой, получаем

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{h}{\delta_л}\frac{T_з - T_w}{T_1 - T_w}} = \frac{\alpha_0}{1 + \theta_з\sqrt{\frac{G_{вд}}{G_л}}}.$$

Величина $h/\delta_л$ выражается через отношение расхода вдува к расходу в ламинарном подслое. Величина параметра

$$\theta_з = \frac{T_з - T_w}{T_1 - T_w}$$

может быть оценена на основании данных о структуре течения в пограничном слое.

При значениях числа Прандтля, близких к единице, имеется аналогия

$$\frac{T_з - T_w}{T_\infty - T_w} \cong \frac{u_з}{u_\infty},$$

где $u_з$ – значение скорости на границе ламинарного подслоя.

В соответствии с данными экспериментов переход от ламинарного закона изменения скорости к логарифмическому происходит при $u_з \approx (10\ldots12)u_*$.

Поскольку для развитого турбулентного течения значение u_* близко к $0.03u_\infty$,

$$\theta_з \approx 0.3.$$

Отсюда следует что для изменения коэффициента теплопередачи при вдуве в турбулентный пограничный слой получается

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1+0.3\sqrt{\frac{G_{вд}}{G_л}}}.$$

Для более наглядной связи значения α с параметрами течения можно обратиться к соотношениям, связывающим расход в ламинарном подслое с расходом во всём пограничном слое G_δ,

$$G_\delta \approx (0.8\ldots0.9)u_\infty\delta,$$

$$G_л = \frac{u_*}{2}\delta_л\cdot(10\ldots12).$$

Можно принять, что толщина ламинарного подслоя $\delta_л \approx 10^{-2}\delta$, тогда

$$G_л \approx \frac{0.3u_\infty}{2}10^{-2}\delta$$

и $$\frac{G_л}{G_\delta} = 10^{-2}\cdot0.15.$$

Следовательно, для изменения коэффициента теплопередачи получаем

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1+0.3\sqrt{\frac{1}{0.15\cdot10^{-2}}}\sqrt{\frac{G_{вд}}{G_\delta}}} \approx \frac{\alpha_0}{1+10\sqrt{\frac{G_{вд}}{G_\delta}}}.$$

Если вернуться к понятию теплового сопротивления, то его изменение соответствует закономерности

$$\frac{\Delta R_{\text{тепл}}}{R_{\text{тепл}}} \cong 10\sqrt{\frac{G_{\text{вд}}}{G_{\delta}}}.$$

Однако применимость этого соотношения обусловлена серьёзными ограничениями. С начала анализа было сделано предположение о малости расхода вдува по сравнению с расходом в ламинарном подслое. Следовательно, это соотношение определяет производную от теплового сопротивления по параметру вдува $(G_{\text{вд}}/G_{\delta})^{1/2}$ в начале координат.

2. Ламинарный пограничный слой

Так же, как при анализе теплообмена в турбулентном пограничном слое, примем, что течение несжимаемое, $M \approx 0$ и $\Pr \approx 1$. В этом случае распределения скорости и температуры совпадают:

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{u}{u_\infty}.$$

Для распределения скорости можно воспользоваться решением Блазиуса, которое приведено на рис. 14.7.

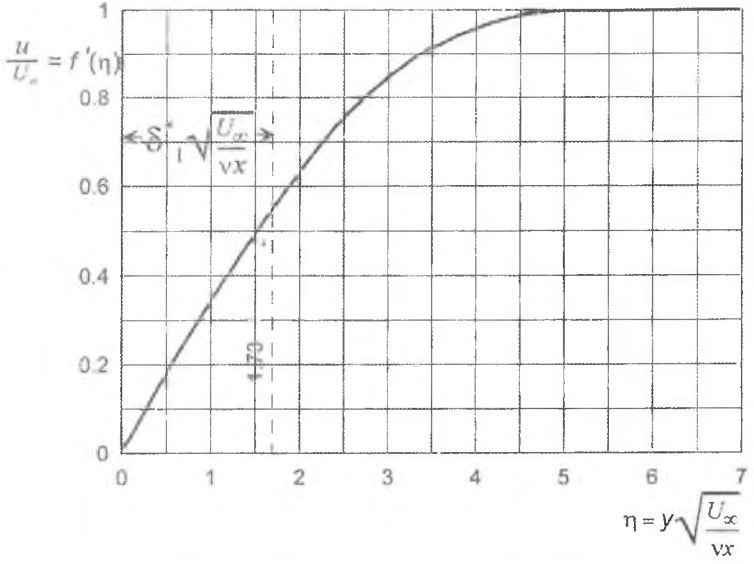


Рис. 14.7. Распределение скорости в ламинарном пограничном слое

Выделим линейную часть профиля, которая соответствует $\delta_1 = 1.73\eta$ при общей толщине пограничного слоя

$$\delta \cong 5\eta .$$

В этой части профиля

$$\Delta R_{\text{тепл}} \sim \Delta\delta .$$

Значение скорости на выбранной границе линейного участка профиля

$$u_1 \cong 0.5 u_\infty .$$

Так же, как для ламинарного подслоя,

$$\Delta \mathrm{Re} = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{G_{\text{вд}}}{G_1}},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{2} R_{\text{тепл}}.$$

Отсюда так же, как для турбулентного пограничного слоя, получаем

$$\alpha \approx \frac{\alpha_0}{1 + 0.5\sqrt{\frac{G_{\text{вд}}}{G_1}}}.$$

Интегрируя профиль Блазиуса, получаем

$$G_1 \approx \frac{1}{4} G_\delta \quad \text{или}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \sqrt{\frac{G_{\text{вд}}}{G_\delta}}}.$$

На рис. 14.8 показаны зависимости теплового сопротивления, полученные в изложенных расчётах для турбулентного и ламинарного пограничного слоёв, от относительного расхода вдуваемого газа.

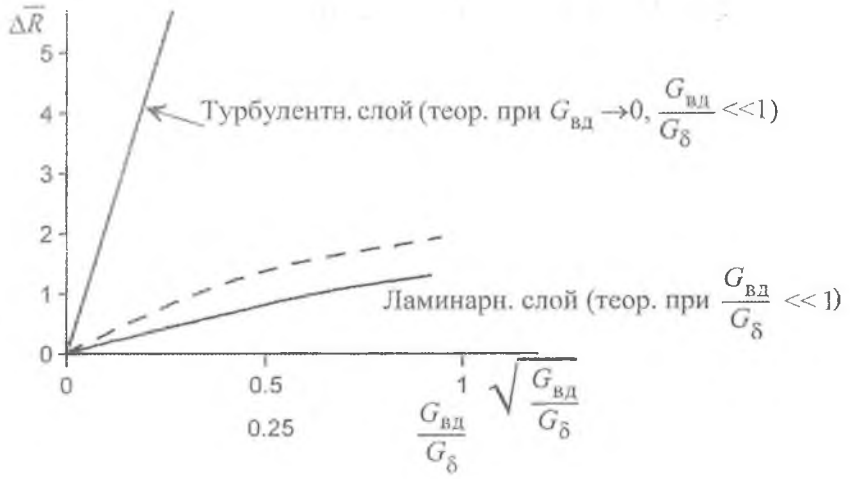


Рис. 14.8. Изменение теплового сопротивления при вдуве газа в пограничный слой со стенки

Видно, что вдув в турбулентный пограничный слой может приводить к более сильному изменению относительного теплового сопротивления, чем вдув в ламинарный пограничный слой. Однако следует помнить об ограничениях применимости полученных соотношений. В реальных условиях относительное изменение теплового сопротивления для турбулентного течения невелико. Данные некоторых экспериментов показаны штриховой линией и соответствуют изменению теплового сопротивления в 1.5…2.5 раза.

- *Абрамович Г.Н. и др. Теория турбулентных струй. – М.: Наука, 1984.*
- *Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М.. Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. /Под ред. А.В. Лыкова. – М.: Госэнергоиздат, 1961.*

15. СТРУЙНОЕ ЗАГРАДИТЕЛЬНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ

Общие свойства и схема течения

На рис.15.1 показана упрощённая схема течения, возникающего при реализации заградительного охлаждения с помощью вдува струи охлаждающего газа вблизи стенки. Предполагается, что течение можно считать плоским (двумерным). Через щель высотой h вытекает охлаждающий газ со скоростью u_1 и температурой T_1; в наружном (горячем) потоке скорость u_2 и температура T_2.

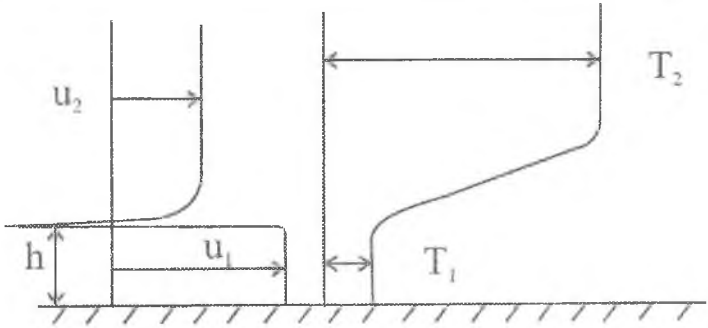


Рис. 15.1. Схема течения при струйном заградительном охлаждении

На рис. 15.1 показано также распределение скорости и температуры в потоке в сечении среза щели ($x = 0$). Хотя на стенке нарастает пограничный слой и скорость на стенке $u = 0$, можно представить, что в начальном сечении вблизи стенки $u = u_1$, а $T = T_1$. Далее по потоку скорость u_a и температура T_a вблизи стенки (вне пограничного слоя) сохраняют свои значения до некоторого удаления, на котором начинает проявляться наличие внешнего потока. Схематично изменение характерных значений скорости и температуры вблизи стенки представлено на рис.15.2. Значение продольной координаты, при котором проявляется воздействие внешнего потока, зависит от многих условий, но в первом приближении можно считать, что порядок значения продольной координаты при этом $x \approx 10h$.

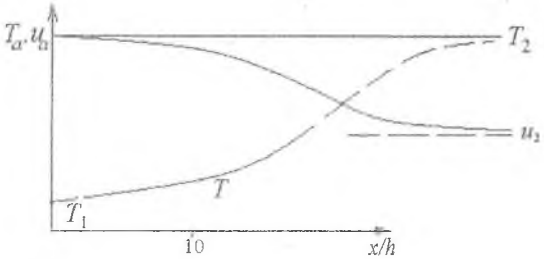


Рис. 15.2. Изменение характерных значений скорости и температуры вдоль охлаждаемой стенки

Рассматриваемое течение относится к так называемому «слаборасширяющемуся» типу и может быть описано при использовании приближения пограничного слоя, т.е. в качестве уравнений движения может быть использована система уравнений Прандтля. Эта система уравнений получается из системы уравнений Рейнольдса, если воспользоваться обычными приближениями теории пограничного слоя,

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = (\nu_T + \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = (a_T + a) \frac{\partial^2 i}{\partial y^2};$$

$$div \rho \overline{U} = 0.$$

Здесь i – избыточная энтальпия и для решения задачи необходимо определить связь $\rho(i)$. В простейшем случае можно считать, что $i = T + const$. В этой системе уравнений имеются так называемые турбулентные вязкость ν_T и температуропроводность a_T. Если их значения могут быть определены, то рассмотренная система может быть легко решена численно (она относится к так называемой «параболической» системе, для решения которой известны достаточно простые эффективные методы). При этом задаются параметры течения при $x = 0$, условия на стенке и в о внешнем течении. Однако, задавая условия на стенке, нельзя получить решение задачи, поскольку тепловой поток должен определяться при одновременном решении полной задачи теплообмена на обеих сторонах стенки.

Поэтому можно использовать более простой подход: определить температуру стенки исходя из условия равновесия

$$q_w = 0 = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_w .$$

Поскольку для решения этой задачи используются значительные упрощения, возможно обращение к её более простой постановке – к задаче о распределении температуры на оси плоской турбулентной струи.

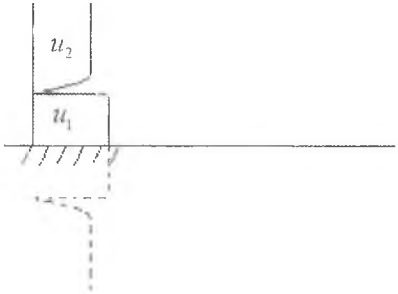


Рис. 15.3. Схема начального распределения параметров при распространении плоской турбулентной струи в спутном потоке

На рис. 15.3 представлена схема течения при распространении плоской турбулентной струи в спутном потоке, соответствующая рассматриваемой задаче о распространении пристеночной плоской струи.

Схема течения образуется, если пристроить к исходной схеме (см. рис. 15.1) её зеркальное отражение относительно плоской поверхности (см. рис. 15.3). В этом случае роль плоской поверхности выполняет плоскость симметрии новой схемы течения. Можно ожидать, что распределение температуры вдоль оси этого течения будет близко к распределению температуры вдоль стенки для исходного течения (в случае теплоизолированной стенки). Параметры на оси рассматриваемого течения могут, условно, быть приняты в качестве параметров на границе пограничного слоя на стенке.

В результате рассматривается следующая схема течения (см. рис. 15.3): струя из плоского сопла размером $2h$ и параметрами u_1 и T_1 распространяется в спутном потоке, имеющем параметры $u_2 = u_\infty$

и $T_2 = T_\infty$. В результате решения задачи должны быть найдены значения скорости u_a и температуры T_a на оси воображаемой струи, которые в дальнейшем могут быть использованы для определения теплового состояния стенки. В оценочном приближении можно считать, что значение T_a соответствует значению температуры стенки T_w.

Такая постановка задачи равноценна задаче о распространении плоской турбулентной струи из сопла размером $2h$ в спутном потоке при характерном значении основных определяющих параметров течения $m = u_2/u_1$ и $n = \rho^2 / \rho_1$.

Решение задачи о распространении плоской турбулентной струи

В теории турбулентных струй рассматриваются различные турбулентные струйные течения, которые описываются на основе определённой схематизации картины течения. Схема рассматриваемого течения приведена на рис.15.4.

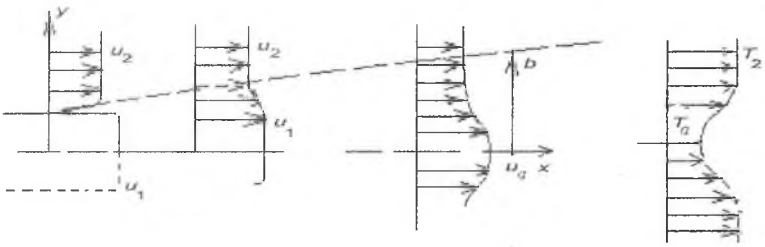


Рис. 15.4. Схема течения в плоской турбулентной струе

В дальнейшем будет рассматриваться ось x как ось симметрии, а ось y – как нормальная по отношению к оси x координата, отсчитываемая от оси. Течение в струе аналогично течению в пограничном слое и при этом предполагается, что все процессы переноса сосредоточены внутри слоя смешения толщиной b, аналогичного обычному пограничному слою, толщина которого обозначается δ.

Рис. 15.4 иллюстрирует последовательность изменения структуры течения вдоль оси x. В исходном сечении (так же, как на рис. 15.1) имеется начальное распределение скорости и температуры

в потоке. Во внешней части и скорость u_2, и температура T_2 постоянны вдоль всего течения. Во внутренней части течения, за щелью (или плоским соплом) сначала значения скорости и температуры равны u_1 и T_1 и постоянны по высоте щели. Затем по координате x происходит трансформация распределений скорости и температуры. Между струёй, вытекающей из щели, и внешним потоком возникает слой смешения, который нарастает по x. Сначала этот слой смешения не доходит до оси струи и на оси (см. рис.15.2) значения параметров течения сохраняются, затем слой смешения захватывает всю область струйного течения и параметры течения на оси начинают монотонно приближаться к их значениям во внешней части течения (см. также рис.15.2). В терминологии теории струй та часть течения, где начальные значения параметров на оси струи сохраняются, называется начальным участком струи. Та часть течения, где вся струя является слоем смешения и закономерность её распространения соответствует большим значениям x/h, называется основным участком струи. Между ними имеется переходный участок.

Если скорость наружного течения $u_2 = 0$, то закономерности нарастания толщины зоны смешения или ширины струи b линейны. При наличии спутного потока граница струи в переходном и основном участке искривляется и в основном участке $b \sim \sqrt{x}$.

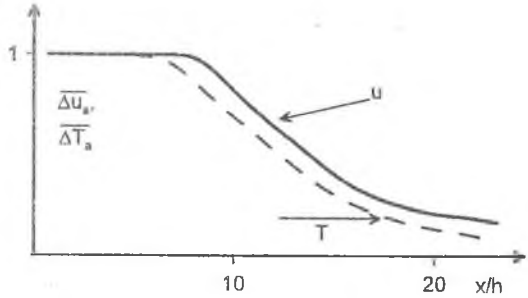
Для описания течения в струе используются безразмерные параметры.

Для описания параметров на оси струи используются следующие представления:

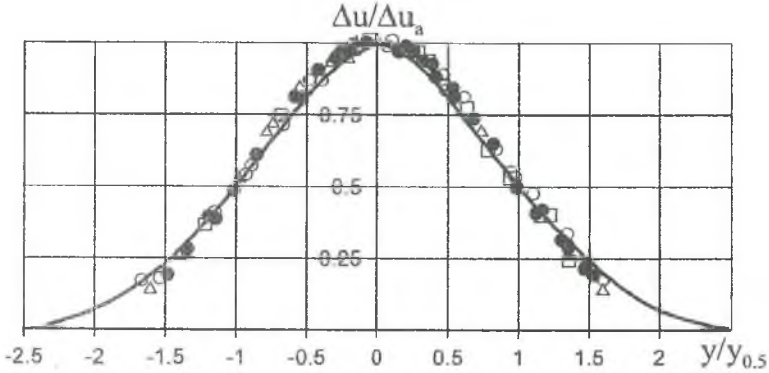
$$\overline{\Delta u_a} = \frac{u_a - u_2}{u_1 - u_2}, \quad \overline{\Delta T_a} = \frac{T_a - T_2}{T_1 - T_2}.$$

На рис.15.5*а* приведен пример изменения этих параметров по координате $x^o = x/h$.

Так же, как и для рассмотренных ранее течений, перенос тепла более интенсивен, чем перенос импульса, и снижение значения относительной безразмерной температуры вдоль оси происходит быстрее, чем аналогичного значения скорости.



а)



б)

Рис.15.5. Изменение параметров вдоль оси струи (а) и в её поперечном сечении (б)

Важным свойством течения в основном участке струи является так называемая автомодельность профилей параметров. Под этим подразумевается определённая универсальность распределений скорости, температуры и концентрации примеси по координате y в различных сечениях струи. Эксперименты показывают, что если построить распределения этих параметров в определённых координатах, то распределения не будут зависеть от x. Такими координатами являются

$$\Delta u = \frac{u - u_a}{u_a - u_2}, \quad \Delta T = \frac{T - T_a}{T_a - T_2}, \quad \Delta C = \frac{C - C_a}{C_a - C_2} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

На рис. 15.5б приведены эти профили, полученные по результатам экспериментов (C – концентрация вещества струи; уравнение для C такое же, как для i).

Универсальность профилей параметров позволяет составить соотношения, описывающие характеристики турбулентных струй: на основе условий сохранения потока импульса, потока тепла и потока массы примеси, исходя из условий, что первоначальные импульс струи, поток количества тепла и вещества на выходе из щели (сопла) сохраняются. Эти условия могут быть получены интегрированием приведённых ранее уравнений движения:

$$\int_0^b [\rho u(u-u_2)+p]dy = J_0;$$

$$\int_0^b \rho i u dy = I_0;$$

$$\int_0^b \rho C u dy = Q_0$$

(здесь принято, что $i_2 = C_2 = 0$).

Если давление $p = const$, то

$$\int_0^b \rho u(u-u_2)dy = J_0.$$

Рассмотрим два предельных случая распространения струи: затопленная струя, когда $u_2 = 0$, и струя в виде возмущения основного потока.

1. Затопленная струя

Затопленной струёй называется турбулентное течение, которое возникает при распространении струи в неподвижном окружающем пространстве.

В этом случае интегральные условия сохранения имеют вид

$$J_0 = \int_0^b \rho u^2 dy = b u_a^2 \int_0^1 \rho \left(\frac{u}{u_a}\right)^2 d\eta,$$

$$Q_0 = \int_0^b \rho C u dy = b C_a u_0 \int_0^1 \rho \frac{u}{u_a}\frac{C}{C_a} d\eta.$$

На основном участке струи, который находится на больших удалениях от источника струи (щели, сопла), значение плотности в потоке струи приближается к значению плотности в окружающей среде из-за происшедшего перемешивания. Из этого следует, что для значения ρ, стоящего под интегралом, можно принять

$$\rho \cong \rho_2.$$

В этом случае условия сохранения будут иметь вид

$$J_0 = b\rho_2 u_a^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_a}\right)^2 d\eta,$$

$$Q_0 = b\rho_2 C_a \int_0^1 \left(\frac{u}{u_a}\right)\left(\frac{C}{C_a}\right) d\eta.$$

Значения интегралов вычисляются по профилям (см. рис. 15.5б) и имеют конкретные цифровые значения

$$\int_0^1 \left(\frac{u}{u_a}\right)^2 dy \cong 0.27, \quad \int_0^1 \left(\frac{u}{u_a}\right)\left(\frac{C}{C_a}\right) d\eta \cong 0.36.$$

Значения сохраняющихся параметров вычисляются, исходя из условий истечения струи

$$J_0 = hu_1^2\rho_1,$$

$$Q_0 = hu_1\rho_1$$

(значение концентрации вещества на срезе щели C_1=1).

Отсюда

$$hu_1^2\rho_1 = b\rho_2 u_a^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_a}\right)^2 d\eta.$$

Здесь известны все параметры, кроме b. Значение ширины струи (толщины слоя смешения) определяется свойствами турбулентности в струйном течении и так же, как в исходных уравнениях, турбулентная вязкость и турбулентная теплопроводность (турбулентный коэффициент диффузии) должны быть определены на основании каких-то дополнительных условий или соображений. Для затопленной струи, согласно многочисленным экспериментальным данным, закон изменения величины b по x в основном участке универсален и имеет вид

$$b = (0.2 \ldots 0.22)x.$$

Подставляя это соотношение в условие сохранения импульса, получаем

$$\frac{u_a}{u_1} \cong \sqrt{\frac{14}{nx^0}}, \quad \text{где} \quad n = \frac{\rho_2}{\rho_1}, x^{\cdot} = \frac{x}{h}.$$

Температура и концентрация изменяются быстрее –

$$\frac{T_a - T_2}{T_1 - T_2} \approx \frac{i_a}{i_1} \approx C_a \cong \sqrt{\frac{11}{nx^0}}.$$

2. Струя в спутном потоке

При распространении струи в спутном потоке в основном участке струи не только $\rho \cong \rho_2$, но и $u \cong u_2$. В этом случае для описания свойств течения удобнее воспользоваться законом сохранения потока массы примеси

$$Q_0 = \int_0^b \rho u C dy \cong b\rho_2 u_2 C_a \int_0^1 \frac{C}{C_a} d\eta,$$

$$Q_0 = \rho_1 u_1 C_1 h, \qquad C_1 = 1.$$

Отсюда следует соотношение, связывающее закономерность изменения концентрации на оси струи с закономерностью её расширения,

$$C_a = \frac{1}{mne_1 b / h}, \qquad e_1 = \int_0^1 \frac{C}{C_a} d\eta.$$

Так же, как для затопленной струи, для решения задачи необходимо определить зависимость $b(x)$. Для основного участка струи в спутном потоке зависимость $b(x)$ определяется на основе решения задачи о точечном источнике.

Рис. 15.6. Схема течения с точечным источником

На рис. 15.6 приведена схема течения для точечного источника в однородном турбулентном потоке. За точечным источником возникает область, в которой в результате диффузии распределена примесь, поступающая в поток из источника. Характерная ширина этой области называется дисперсией, а её величина Y определяется интенсивностью турбулентного переноса и профилем распределения концентрации примеси. Следует отметить, что профиль распределения концентрации примеси оказывается таким же или очень близким к профилю концентрации для турбулентной струи (см. Рис. 15.5б). В этом случае величина интеграла e_1 может быть вычислена и составит 0.6. Для определения величины Y есть соотношение

$$Y^2 = \frac{\int_0^\infty Cy^2 dy}{\int_0^\infty C dy}.$$

Если сопоставлять полную ширину профиля концентрации, которая определена как толщина струи b, с дисперсией Y, то в зависимости от профиля концентрации их взаимосвязь может несколько различаться. Для струйных течений можно считать, что профили достаточно хорошо определены (рис. 15.5б). Для этих профилей

$$Y^2 \cong 0.14b^2.$$

Из известного решения задачи о точечном источнике примеси определена связь коэффициента диффузии и интенсивности расширения области с примесью, поступающей из источника,

$$Y^2 = 2\frac{D}{u}x$$

(это соотношение можно также рассматривать как определение коэффициента диффузии D).

Используя связи C_a и b, b и Y, получаем

$$C_a = (3.68 \cdot m \cdot n \cdot D^\circ x^\circ)^{-1/2}, \quad D^\circ = \frac{D}{hu_2}, \quad x^\circ = \frac{x}{h}.$$

Таким образом, как и в системе исходных уравнений, для решения задачи необходимы данные о коэффициентах переноса, но, несмотря на их отсутствие, полученные соотношения могут быть использованы для оценок.

Использование полученных решений для оценки длины области с допустимым значением температуры

Полученные решения задачи о распространении плоской струи как в случае неподвижной окружающей среды, так и в случае струи в спутном потоке, показывают, что закон затухания неоднородности в плоской струе соответствует $x^{-1/2}$. Отсюда следует, что для определения величин неоднородности скорости и неоднородности скалярных параметров имеется зависимость

$$\Delta u_a \sim i_a \sim C_a \sim \Delta T_a \sim x^{-1/2}.$$

Это означает, что каждая из этих зависимостей может быть представлена в виде

$$\Delta \mathrm{M}_a = (x_\mathrm{M} / x)^{1/2}.$$

Здесь M_a – некая осевая неоднородность, индекс a соответствует различным неоднородностям. Координата x_M – переходная координата.

Если обратиться к закону изменения температуры на оси струи (рис. 15.2), то его можно представить в виде зависимостей, приведённых на рис. 15.7а, б и в.

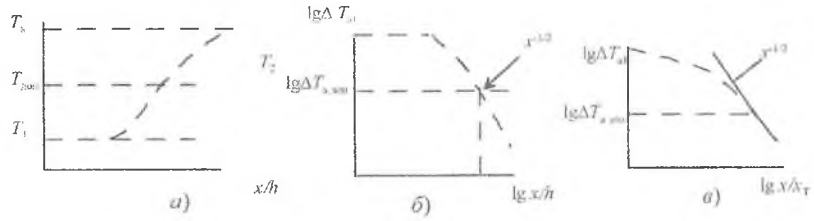


Рис. 15.7. Закономерности изменения температуры вдоль оси струи в обычных (а) и логарифмических (б, в) координатах

Они последовательно показывают возможность представления данных о затухании неоднородности (в данном случае температуры) в виде зависимости

$$\Delta T_a = \left(\frac{x_{\text{Т}}}{x}\right)^{1/2}.$$

Для определения допустимого значения длины $x_{\text{доп}}$, на которой температура повышается до значения $T_{a,\ \text{доп}}$, достаточно оценить величину $x_{\text{Т}}$.

Величина $x_{\text{Т}}$ так же, как $x_{\text{С}}$ и $x_{\text{ц}}$, может быть достаточно аккуратно определена при распространении затопленной струи. В этом случае можно считать, что (в соответствии с приведёнными ранее соотношениями)

$$x_{\text{Т}} \cong x_{\text{С}} \cong 10h/\sqrt{n}.$$

При наличии спутного потока, как правило, величины параметров $x_{\text{М}}$ возрастают. На рис. 15.8 показано, как (по данным экспериментов и анализа на основе полученных ранее соотношений) меняется значение переходной координаты при наличии спутного потока с различной скоростью u_2 для случая $n = 1$. На этом же рисунке показано влияние различных параметров на величину переходной координаты, фактически, на так называемую «дальнобойность» струи.

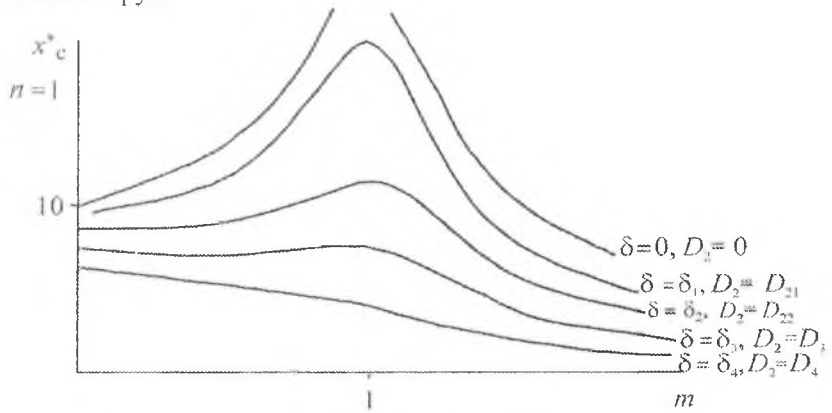


Рис. 15.8. Зависимости переходной координаты от отношения скоростей спутного потока и струи при различных условиях истечения

Параметрами, оказывающими существенное влияние, являются: толщина пограничных слоёв внутри щели (сопла) δ_1 и снаружи δ_2, значение коэффициента турбулентного переноса (диффузии) во внешнем потоке D_2. Увеличение индекса (см. рис. 15.8) соответствует повышению значения. При сближении скоростей потоков и отсутствии возмущающих факторов «дальнобойность» струи могла бы неограниченно возрастать. Однако в реальной ситуации экспериментальным данным лучше соответствует средняя кривая.

Анализ данных на рис. 15.8 показывает, что в большинстве случаев для оценки допустимой длины области струйной защиты с определённым запасом можно использовать соотношения для затопленной струи. Однако в тех случаях, когда можно оценить значение коэффициента турбулентного переноса D, соотношения, полученные для струи в спутном потоке, позволяют сделать эту оценку более аккуратно.

• *Абрамович Г.Н. и др. Теория турбулентных струй. – М.: Наука, 1984.*
• *Эккерт Э.Р., Р.М. Дрейк. Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. /Под ред. А.В. Лыкова, – М.: Госэнергоиздат, 1961.*

16. ТРУБЧАТЫЕ ТЕПЛООБМЕННИКИ

Решётки или пучки труб

Одним из наиболее распространённых типов теплообменников являются трубчатые теплообменники с поперечным обтеканием труб круглого сечения. Теплообмен происходит между потоком, обтекающим трубы, и средой, движущейся внутри труб. Рассмотрим характеристики теплообмена между трубами и потоком.

Трубы в поперечном потоке, в основном, располагаются двумя способами (рис. 16.1): коридорный и шахматный. При шахматном расположении труб они, в среднем, обтекаются более скоростным и менее возмущённым потоком, чем при коридорном.

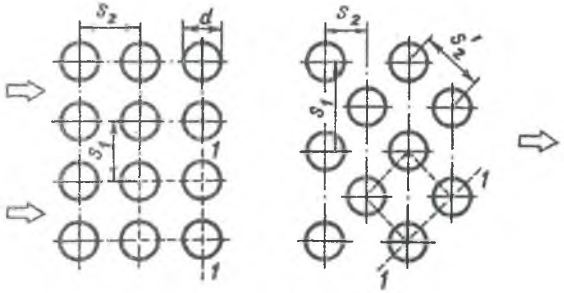


Рис. 16.1. Коридорное и шахматное расположение труб в поперечном потоке

Обтекание каждой трубы несколько отличается от обтекания отдельного цилиндра, хотя, практически, имеет те же особенности. Основные же отличия – это увеличение скорости, эквивалентной u_∞ из-за загромождения, и повышенный уровень возмущений в потоке, обтекающем не первые ряды труб. В результате увеличивается сила сопротивления и может интенсифицироваться теплообмен.

На рис. 16.2 приведена картина распределения трения на поверхности трубы в пучке, качественно такая же, как и для одиночного цилиндра

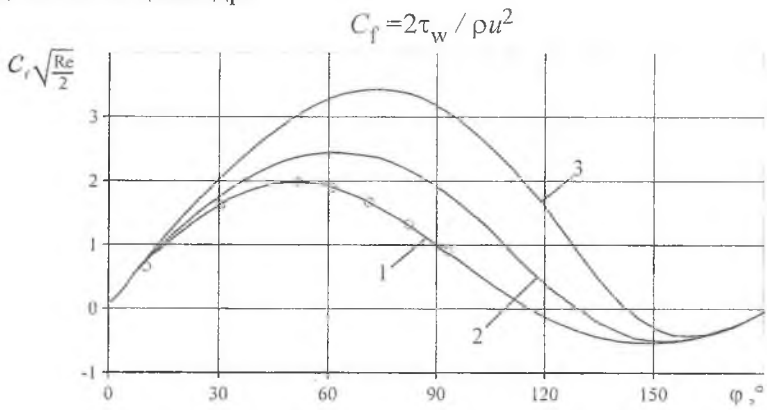


Рис. 16.2. Распределение трения на поверхности трубы в различных пучках (1...3)

Коэффициент сопротивления несколько выше и зависит от расположения труб. На рис. 16.3 приведены результаты измерения коэффициента сопротивления C_w, определяемого по распределению давления при шахматном и коридорном расположении труб,

$$C_w = 2F_x / \rho u^2 A,$$

где F_x – проекция интеграла сил давления, A – лобовая площадь.

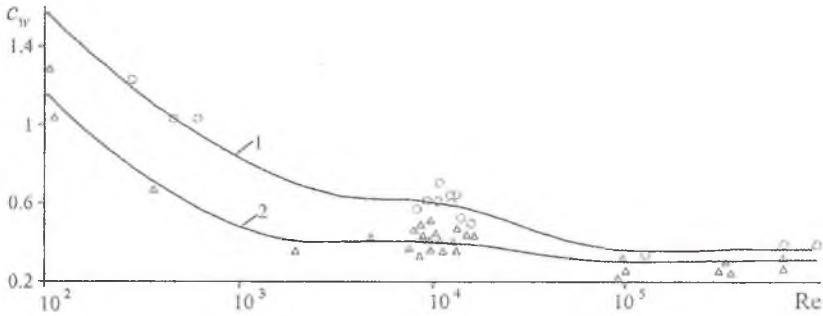


Рис. 16.3. Зависимости коэффициентов сопротивления труб от числа Рейнольдса при шахматном (1) и коридорном (2) расположении

Сопротивление пучков труб характеризует, с одной стороны, потери в теплообменнике, с другой – интенсивность теплообмена.

Гидравлические потери в теплообменнике зачастую являются второстепенной характеристикой. И если с ростом потерь повышается интенсивность теплообмена, то это можно использовать для улучшения удельных характеристик теплообмена, например, для снижения габаритных размеров теплообменника.

Предшествующий анализ показал, что между трением и теплообменом имеется аналогия. И если какая-то базовая схема теплообменника трансформируется в небольших пределах, то об изменении интенсивности теплообмена можно судить по изменению гидравлических характеристик. Гидравлические характеристики определяются значительно легче; существует значительное количество эмпирических данных для оценки гидравлических потерь в теплообменниках. По аналогии могут быть оценены и характеристики теплообмена, исходя из условия для числа Стантона

$$\mathrm{St} \sim C_f \text{ или } \mathrm{St} \sim \xi,$$

где ξ – коэффициент гидравлического сопротивления.

Пример используемых на практике экспериментальных данных о гидравлических потерях в трубчатых теплообменниках приведён на рис. 16.4. Эти данные получены при коридорном расположении труб; a и b – расстояния между центрами, отнесённые к радиусу трубы, χ – вспомогательный параметр для обобщения экспериментальных данных.

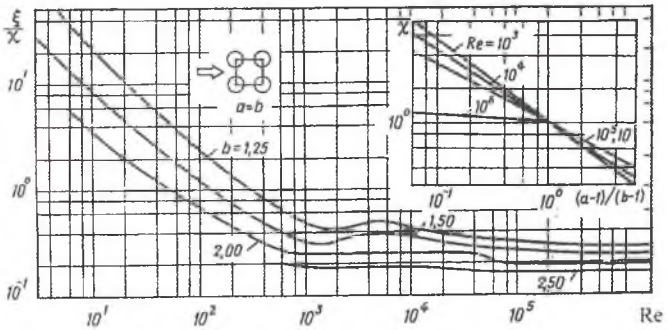


Рис. 16.4. Обобщённые зависимости, характеризующие гидравлические потери для различных пучков труб

Данные о теплообмене при коридорном расположении труб удовлетворительно соответствуют данным для одиночного цилиндра.

Для одиночного цилиндра

$$\mathrm{St} \sim C_f, \quad \mathrm{Nu} = \mathrm{St} \cdot \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}.$$

Зависимость числа Nu от Re по данным раздела 12

$$\mathrm{Nu} = C_f \, \mathrm{Re} \, \mathrm{Pr}^{-1/3}.$$

На рис. 16.5 приведены результаты экспериментального определения зависимости параметра K_f от числа Рейнольдса при коридорном расположении труб для разных расстояний между трубами. Величина

$$K_f = \mathrm{Nu} \, \mathrm{Pr}^{-0.33} (\mathrm{Pr}_\infty / \mathrm{Pr}_w)^{-0.25}.$$

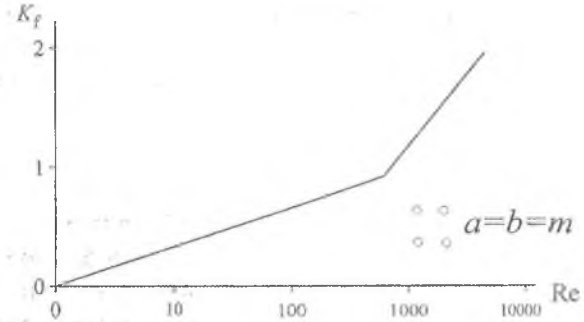


Рис. 16.5. Данные экспериментального определения характеристик теплопередачи для коридорного пучка труб

Видно, что, как и для одиночного цилиндра, наблюдаются две области зависимости Nu от Re. По данным рис. 16.5

$$K_f \sim \mathrm{Re}^{0.5} \text{ при } \mathrm{Re} \le 1000 \text{ и } K_f \sim \mathrm{Re} \text{ при } \mathrm{Re} \ge 1000.$$

На практике для описания аналогичных зависимостей используются инженерные аппроксимации с $\mathrm{Re}^{0.6...0.8}$.

Теплоотдача оребрённых труб

Очень важным конструктивным параметром теплообменных устройств является площадь поверхности, на которой реализуется процесс теплообмена. Если тепловой поток с единицы поверхности

$$q = \alpha \Delta T,$$

то суммарный тепловой поток от некоторого элемента теплообменника

$$Q \sim \alpha \Delta T F ,$$

где F – площадь рассматриваемого элемента.

В связи с этим распространён способ увеличения площади поверхности трубчатого теплообменника посредством оребрения (рис. 16.6).

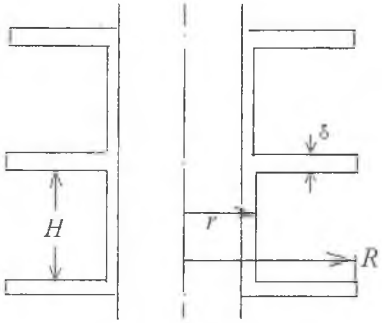


Рис. 16.6. Схема оребрённой трубы

Если труба имеет рёбра с некоторой периодичностью из материала с достаточно большой теплопроводностью, то тепловой поток от элемента трубы будет

$$Q = \alpha_{тр} \Delta T F_{тр} + \alpha_{реб} \Delta T F_{р},$$

а удельный тепловой поток, например, с единицы длины

$$q = \alpha_{тр} \Delta T + \alpha_{реб} \Delta T \frac{F_{р}}{F_{тр}} \quad \text{или}$$

$$q = (\alpha_{тр} + \alpha_{реб} \frac{E_{р}}{F_{тр}}) \Delta T.$$

Следовательно, тепловой поток определяется коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{эф}$, который превышает исходное значение $\alpha_{тр}$,

$$\alpha_{эф} = \alpha_{тр} + \alpha_{реб} \frac{F_{р}}{F_{тр}}$$

(конечно, это соотношение является достаточно точным только при условии высокой теплопроводности материала ребра и при ограниченных его размерах). Подразумевается, что наличие ребра не влияет на обтекание трубы и это условие удовлетворительно выполняется при поперечном обтекании трубы, приведённой на рис.16.6.

В этом случае $\alpha_{тр}$ – коэффициент теплоотдачи трубы в поперечном потоке – приблизительно в 1.7 раза больше коэффициента теплоотдачи пластины при том же числе Re. Однако ребро может иметь достаточно большие размеры и тепловой поток от ребра сравнивается с тепловым потоком от трубы и может быть даже больше. Большое же ребро не может иметь температуру трубы, что ограничивает его эффективность.

Таким образом, при умеренных размерах рёбер ($F_р \leq 5F_{тр}$) повышение эффективности теплообмена в результате оребрения может быть оценено по представленному соотношению и приблизительно соответствует росту сопротивления.

Исключением является теплообменник (радиатор), в котором используется естественная конвекция. Если нагретая труба расположена горизонтально, а рёбра – вертикально, то, в соответствии с рассмотренной ранее задачей о конвективном течении вблизи стенки, они дополнительно разгоняют восходящий поток и интенсифицируют теплообмен.

При принудительном теплообмене рёбра на трубах могут устанавливаться не только как дополнительные поверхности теплообмена, но и как интенсификаторы, создающие возмущения в потоке. На рис. 16.7 показаны различные варианты таких интенсификаторов: α – рёбра вдоль трубы и поперёк потока; *б* – шайбы; *в д;* – штыри; *г* – мембраны; *е* – петельки из хорошо проводящего материала.

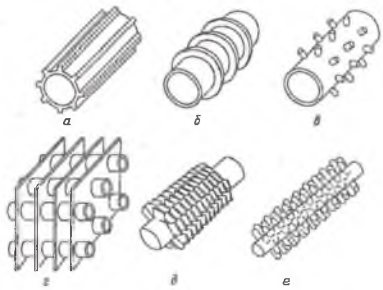


Рис. 16.7. Трубы теплообменников с интенсификаторами теплообмена

Для расчёта теплообменников с такими трубами нужны экспериментальные данные, полученные при условиях, достаточно близких к эксплуатационным, особенно при использовании пучков труб. Для оребрённых труб различие теплообмена в рядах последовательно расположенных труб более велико, чем для неоребрённых. На рис.16.8 показаны зависимости числа Нуссельта от числа Рейнольдса при использовании оребрённых труб для первого и пятого ряда. Видно, что большие возмущения потока приводят к значительной интенсификации теплообмена.

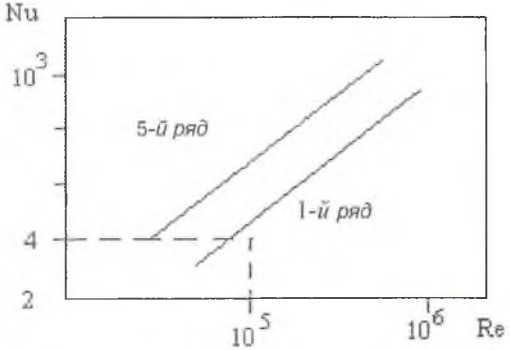


Рис. 16.8. Влияние положения трубы в пучке на интенсивность теплообмена

На рис. 16.9 и 16.10 приведены результаты экспериментального исследования гидравлических и теплообменных характеристик теплообменника с шахматным расположением труб при изменении шага между рёбрами (шайбами) s и высоты рёбер (шайб); a и $в$ – относительные расстояния между трубами.

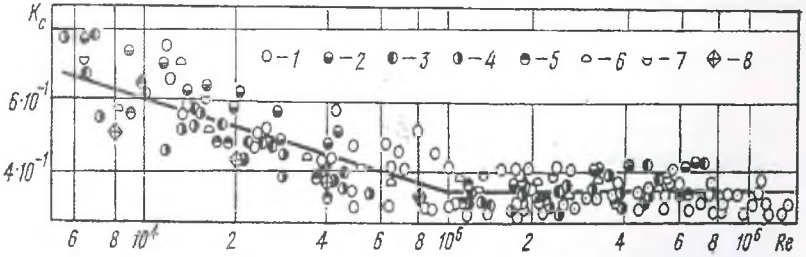


Рис. 16.9. Результаты определения гидравлического сопротивления пучка труб: 1...8 – соответствие различным значениям s и h

На рис. 16.9 приведена зависимость от числа Re параметра, характеризующего гидравлическое сопротивление,

$$K_c = \xi a^{0.55} в^{0.5} (1 - h/d)^{1.4} (1 - s/d)^{-1.8}.$$

На рис. 16.10 дана зависимость от Re параметра, характеризующего теплообмен,

$$K = \mathrm{Nu}(a/в)^{-0.2} \cdot (s/d)^{-0.18} (\frac{h}{d})^{0.14}.$$

В этом сложном случае течения с теплообменом прослеживается аналогия между гидравлическим сопротивлением и теплообменом.

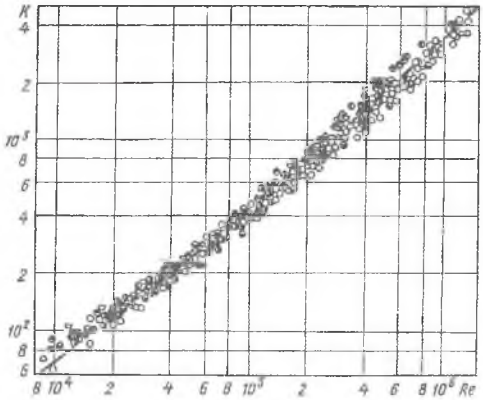


Рис. 16.10. Результаты определения характеристик теплоотдачи пучка труб

• *Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. /Под ред. А.В. Лыкова, – М.: Госэнергоиздат, 1961.*

• *Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982.*

17. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Общие свойства теплового излучения

Примером передачи большого количества энергии тепловым излучением является получение нашей планетой (Землёй) энергии, которая излучается с поверхности солнца.

Без учёта поглощения атмосферой (которое составляет 35 % и более) земная поверхность получает от солнца 0.133 Вт/см^2, или 1140 ккал м^2/ч. Для сравнения можно отметить, что один килограмм углеводородного топлива имеет теплотворную способность около 10000 ккал.

Тепловое излучение – это электромагнитные волны. По принятой классификации по длинам волн:

0.05 мкмк – космическое излучение;

0.5…10 мкмк – γ - излучение;

1 мкмк…20 ммк – рентгеновское излучение;

20 ммк…0.4 мк – ультрафиолетовое световое излучение;

0.4…0.8 мк – видимый свет;

0.8 мк…0.8 мм – тепловое или инфракрасное излучение;

0.2 мм и выше до км – радиоволны.

Свет отражается, поглощается, рассеивается. Характеристики этих процессов связаны со свойствами той среды, через которую он проходит. Такими характеристиками являются:

A – поглощательная способность;

R – отражательная область;

D – пропускная способность.

Для этих характеристик очевидны связывающие их соотношения

$$A + R + D = 1.$$

Для непрозрачных тел

$$A+R = 1, \text{ т.е. } D = 0.$$

Для газов

$$A + D = 1, \text{ т.е. } R = 0.$$

Отражение может быть зеркальным и диффузионным.

При прохождении излучения через какую-либо среду оно поглощается. Поглощательная способность среды пропорциональна длине пути прохождения излучения x. Показатель поглощения δ определяет изменение интенсивности излучения J на данной длине волны λ

$$dJ_{\lambda_0} = -\delta_\lambda J_\lambda dx.$$

Если J_{λ_0} – интенсивность излучения, падающего на слой среды при $x = 0$, то при $x = s$ излучение будет иметь интенсивность

$$J_\lambda = J_{\lambda_0} e^{-\delta_\lambda s}.$$

Количество энергии, поглощённой слоем s, будет

$$\Delta J = J_{\lambda_0}\left(1 - e^{-\delta_\lambda s}\right).$$

Излучение с поверхности тела

Если представить излучение с поверхности (как показано на рис. 17.1) с интенсивностью излучения по нормали к поверхности $J_{\lambda n}$, то поток энергии внутри телесного угла Ω под углом к нормали к поверхности φ (рис.17.2) будет

$$dE_\lambda = J_{\lambda n} \cdot d\lambda \cdot \cos\varphi \cdot dF,$$

где dF – элемент площади излучающей поверхности.

Это соотношение представляет собой закономерность, определяемую как «закон Ламберта».

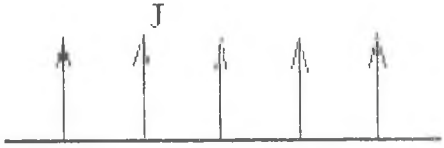


Рис. 17.1. Излучение с поверхности

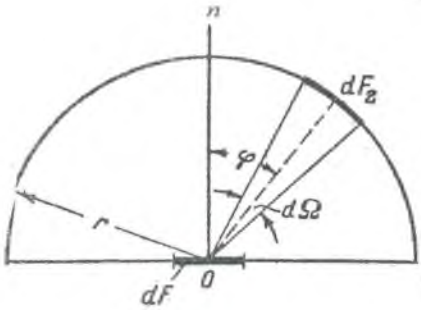


Рис. 17.2. К вычислению потока лучистой энергии от поверхности тела

Рассмотрим излучение внутри телесного угла $d\Omega$ (обозначения см. на рис. 17.3)

$$d\Omega = \frac{df}{r^2} = d\varphi d\psi.$$

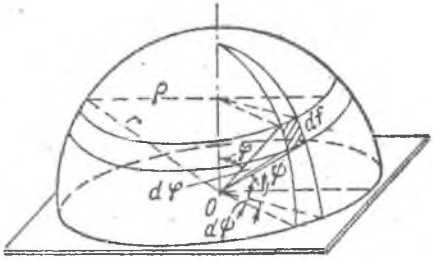


Рис.17.3. Система координат и обозначения для вычисления потока лучистой энергии

Суммарное излучение для телесного угла может быть получено интегрированием.

В этом случае излучение в полупространство, ограниченное плоской поверхностью, будет

$$E_\lambda = J_{\lambda n} d\lambda dF \int_o^{2\pi} d\psi \int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \pi J_{\lambda n} d\lambda dF.$$

Если рассматривать излучение по нормали, то оно будет

$$E_{\lambda n} = J_{\lambda n} d\lambda dF.$$

Мощности, излучаемые по нормали и в полупространство, отличаются в π раз.

Из изложенного материала следует, что для определения основных характеристик теплообмена необходимо знать величину интенсивности излучения единицы поверхности J_λ. Интеграл от этой величины по спектру длин волн, отнесенный к элементу телесного угла, называется угловой плотностью излучения для рассматриваемой поверхности i. Этот параметр характеризует яркость излучения с поверхности

$$b = \frac{i}{dF_n},$$

где dF_n – проекция площадки dF на плоскость, перпендикулярную направлению излучения.

С использованием представленных соотношений получена величина, характеризующая поток солнечной энергии на землю, упомянутая в начале раздела.

Законы теплового излучения

Излучение поверхности нагретого тела по нормали к поверхности описывается законом излучения Планка. Он выражается следующим соотношением для определения интенсивности излучения J_λ:

$$J_\lambda = C_1 \frac{\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}.$$

Здесь $C_1 = 2C_0^2 h, \quad c_2 = C_0 \dfrac{h}{k}$.

Мировые константы: C_0 – скорость света в пустоте; h – постоянная Планка; k – постоянная Больцмана.

Для полусферического излучения значение константы

$$C_1 = 2\pi C_0^2 h.$$

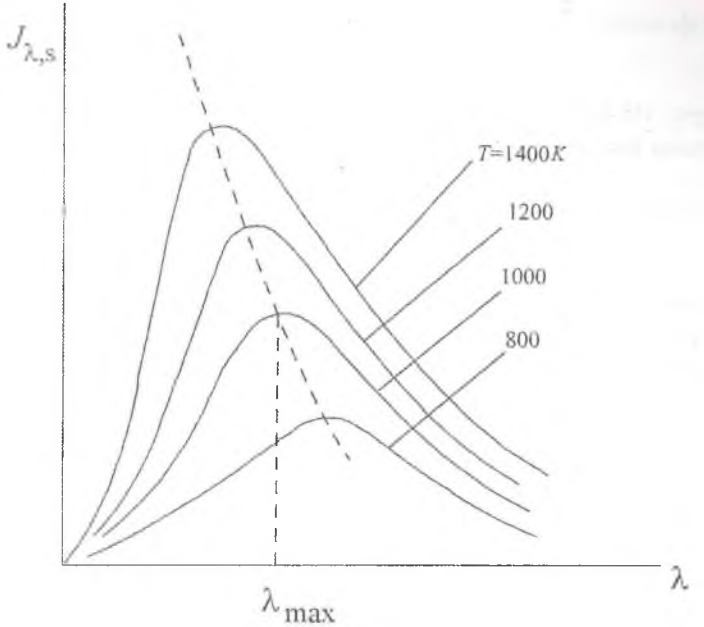


Рис. 17.4. Интенсивность излучения поверхности тела в зависимости от длины волны при разных температурах поверхности

На рис. 17.4 приведены зависимости интенсивности излучения поверхности тела от длины волны излучения при различных температурах тела.

Видно, что интенсивность излучения повышается с ростом температуры и значение длины волны, на которое приходится максимум излучения с возрастанием температуры, сдвигается в область более коротких волн.

Закономерность, определённая Планком, включает в себя три известных закона теплового излучения.

Эффект смещения максимума излучения в сторону более коротких волн при повышении температуры называется законом смещения Вина. Он легко иллюстрируется таким примером: если нагревать металлический предмет (кусок железа), то сначала он нагревается до красна, а затем, при большем нагреве, становится оранжево-жёлтым, т.е. длина волны излучения уменьшается.

Из формулы Планка при условии

$$e^{c_2/\lambda T} >> 1,$$

т.е. при малых λ, следует закон Стефана-Больцмана, более известный как закон T^4,

$$E_\Sigma = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} J_\lambda d\lambda \cong \sigma_3\ T^4, \quad \sigma_3 = \frac{2\pi^5 k^4}{15 C_0^2 h^3}.$$

Отсюда следует, что тепловое излучение пропорционально температуре в четвёртой степени. Это соответствует пропорциональности передачи энергии излучением от одной поверхности к другой разности четвёртых степеней значений абсолютной температуры.

Если суммарное тепловое излучение пропорционально T^4, то максимум в спектре излучения растёт быстрее с повышением температуры. Согласно закону излучения Вина

$$J_{\lambda max} = c_3 T^5.$$

Все эти законы дают верхнюю границу интенсивности излучения любого тела. Они справедливы для так называемого абсолютно чёрного тела. В характеристику излучения природа вносит некоторые поправки. Это – поправка на степень черноты и на селективность излучения.

Степень черноты характеризуется коэффициентом ε. В этом случае эффективная интенсивность излучения

$$J_{\lambda эф.} = \varepsilon J_\lambda.$$

Примеры значений степени черноты ε :

Алюминий, латунь	0.05…0.06.
Платина полированная	0.05…0.1.
Серебро, медь полированные	0.02…0.03.
Медь окисленная	0.6…0.7.
Кирпич красный	0.93.
Сажа, свечная копоть	0.95.

Селективность излучения обозначает, что излучение реализуется в определённых полосах частот и это явление характерно для газов. На рис.17.5 иллюстрируются оба упомянутых эффекта.

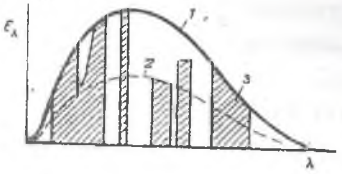


Рис.17.5. Иллюстрация влияния степени черноты излучающей поверхности на интенсивность излучения в разных полосах частот: 1 – ε = 1; 2 – ε < 1; 3 – ε = 1 для селективного излучения

Тепловое излучение газа

При тепловом излучении газов важной характеристикой является селективность излучения, т.е. свойство газов излучать в определённых диапазонах длин волн (частот). Характеристики такого излучения следуют закону Кирхгофа: «Отношение испускательной способности тела при определённой длине волны к его поглощательной способности при той же длине волн для всех тел одинаково и является функцией только длины волны и температуры».

Следовательно, если тело на какой-то длине волны не поглощает, то оно и не излучает на этой длине волны, и наоборот. Это – важнейшая особенность теплообмена излучением в газах и пламёнах.

Для излучения газов характерно и понятие степени черноты. На рис. 17.6 приведён пример результатов экспериментального определения степени черноты для смеси углекислого газа (CO_2) с неизлучающим газом, обозначенной ω.

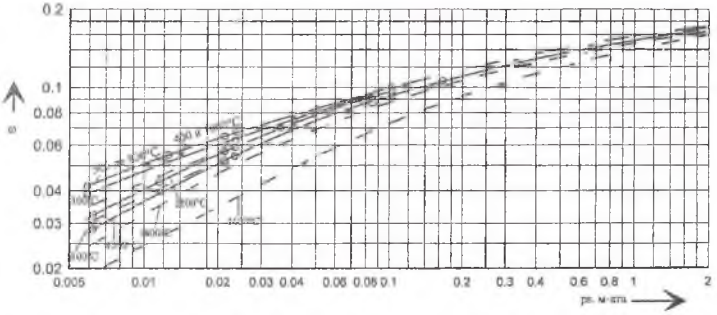


Рис. 17.6. Значения степени черноты излучающего газа при изменении давления и температуры

Степень черноты возрастает при росте толщины слоя газа S и давления p. Оказывается, что при фиксированном значении пара-

метра pS с ростом температуры степень черноты уменьшается. Это происходит из-за уменьшения плотности среды ρ.

О лучистом теплообмене в элементах ВРД

К явлениям лучистого теплообмена в авиационных двигателях приходится обращаться, в основном, при анализе теплового состояния стенок и элементов камер сгорания: это, прежде всего, жаровая труба основной камеры сгорания, экраны и стабилизаторы форсажной камеры (рис. 17.7).

Рис. 17.7. Схемы основной (а) и форсажной (б) камер сгорания

При анализе теплового состояния турбины также может возникнуть необходимость учёта лучистых тепловых потоков. Нагретые поверхности турбины могут излучать до нескольких киловатт на стерадиан. Однако при излучении с поверхностей в замкнутом пространстве возникает состояние, близкое к равновесию, и, если разница температур поверхностей невелика, то внутренние лучистые тепловые потоки малы.

Лучистый теплообмен между нагретыми телами подчиняется закону Стеерана-Больцмана: каждое тело излучает в соответствии с законом T^4, а тепловой баланс определяется разностью этих независимых потоков тепла. Примером может быть соотношение для суммарного теплового потока при взаимодействии двух поверхностей

$$q_{1-2} = \varepsilon C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]; \qquad \varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1};$$

$$C_0 = 4.9\, ккал / м^2 \cdot ч \cdot K^4.$$

Известно, что спектр излучения газа имеет линейчатый характер и определяется излучением в отдельных полосах частот.

Полосы излучения газа определяются составом. В продуктах сгорания основное излучение создаётся углекислым газом CO_2 и водяным паром H_2O; другие компоненты, безусловно, также вносят свою долю. Значительную долю в тепловые потоки может вносить излучение сажевых частиц.

Излучение, которое приходит от горячего газа на стенки, может быть объёмным и поверхностным, что связано с поглощением излучения газом.

Спектр излучения газа, в соответствии с законом Кирхгофа, практически совпадает со спектром поглощения. На рис.17.8 приведен пример части спектра поглощения CO_2 в полосе 15 мкм при T=1000 K. Эксперимент показывает, что до η = 700 см$^{-1}$ излучение слабое, затем идёт полоса с линейчатой структурой до $\eta \approx 710$ см$^{-1}$ ($\eta = 1/\lambda$).

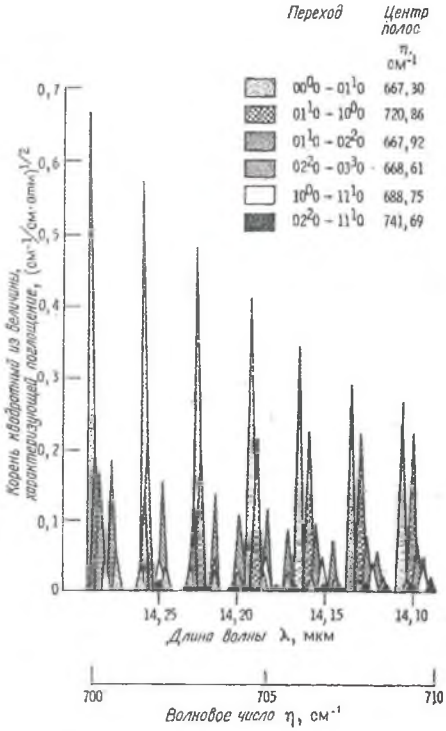


Рис. 17.8. Часть спектра поглощения углекислого газа в полосе 15 мкм при T=1000K

Этот спектр показывает внутреннюю структуру полосы, а полосы спектра выглядят так же, как на рис. 17.9, где приведены спектры поглощения углекислого газа и водяного пара при $T = 1000$ K.

Приблизительно также выглядят спектры излучения.

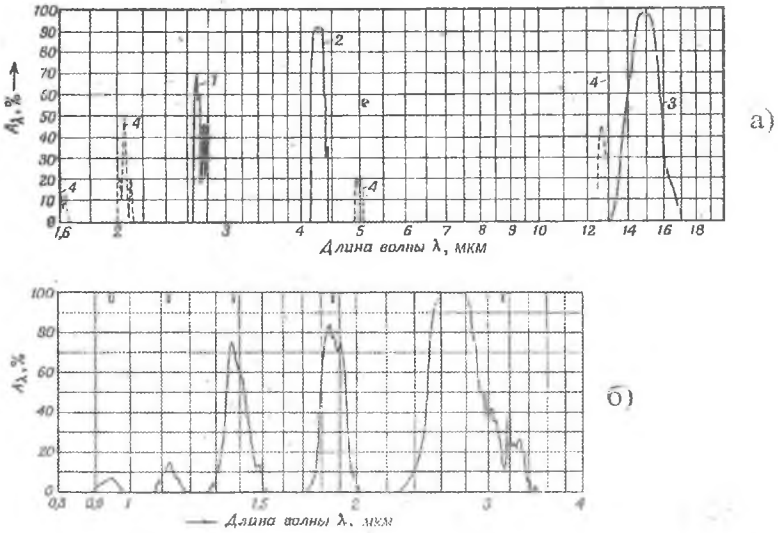


Рис. 17.9. Зависимости поглощательной пособности углекислоты (а) и водяного пара (б) от длины волны излучения

Таким образом, газ довольно интенсивно поглощает создаваемое им же излучение, т.е. для температурно-однородного газа характерно почти полное поглощение (запирание) собственного излучения на некоторой длине. Эта длина характеризуется понятием пути свободного пробега излучения l, т.е. расстояния, на котором интенсивность излучения уменьшается в несколько раз. При давлении на уровне атмосферного и $T \cong 1000$ K $l \approx 10...100$ *см*.

Очевидно, что $l \sim \dfrac{1}{p}$.

С повышением температуры прозрачность газа также уменьшается, поэтому в основной камере сгорания современного двигателя $l << L_{кам}$ (т.е. $l \sim см$, $L \sim дм$). Это облегчает проблему теплового состояния стенок, так как излучение заперто внутри объёма и на стенки камеры попадает излучение только от близлежащего слоя.

Катастрофа может произойти, если в камере по каким-то причинам появляются частицы сажи. Спектр излучения этих частиц – сплошной и их излучение проходит через нагретый газ.

Аналогичная ситуация наблюдается в форсажной камере. Давление в ней меньше, чем в основной камере сгорания, но размер больше (здесь $l \sim дм$, $L \sim м$).

- *Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло-и массообмена. Пер. с англ. /Под ред. А.В. Лыкова. – М.: Госэнергоиздат, 1961.*
- *Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. Пер. с англ. /Под. ред. Б.А. Хрусталёва. – М.: Мир, 1975.*
- *Авдуевский В.С. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. – М.: Оборонгиз, 1960.*