P. Kranz

SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE

П. Кранц

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Перевод с немецкого
А. Цейтлина

Под редакцией
профессора *Я. Н. Шпильрейна*

Издание второе

МОСКВА

URSS

ББК 22.130 22.151

Кранц П.

Сферическая тригонометрия: Пер. с нем. / Под ред. Я. Н. Шпильрейна. Изд. 2-е. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 96 с.

В предлагаемой читателю книге подробно рассматриваются те особенные свойства сферического треугольника, которые отличают его от плоскостного треугольника, и применения этого треугольника, особенно в геодезии и астрономии. Последнее осуществлено посредством подробно объясненных и решенных примеров. Из многочисленных формул сферической тригонометрии разобраны только важнейшие. В большинстве случаев указано, какие формулы плоскостной тригонометрии им соответствуют, для того чтобы ясно показать, что плоский треугольник представляет только частный случай сферического.

Книга будет полезна математикам, механикам, астрономам, геодезикам. Может быть использована в качестве справочника по тригонометрии.

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 6. Зак. № 954.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–382–00146–3

4841 ID 51339

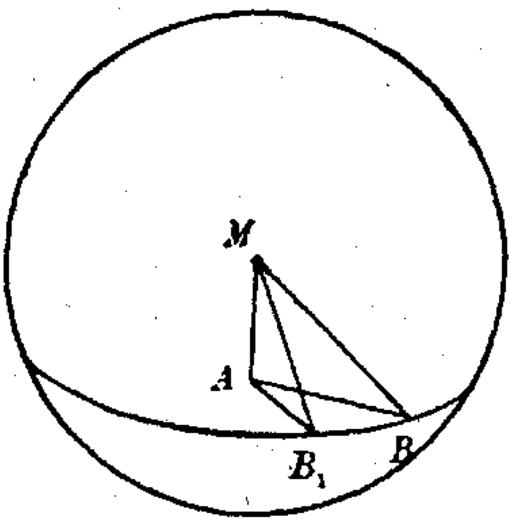
9 785382 001463

ЧАСТЬ I.*

СФЕРИЧЕСКИЕ ДВУУГОЛЬНИКИ И СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

§ 1. БОЛЬШИЕ И МАЛЫЕ КРУГИ.

1. Всякая сфера сечется плоскостью по окружности. Чтобы доказать это, опускают из центра M сферы (фиг. 1) на секущую плоскость перпендикуляр MA и выбирают на линии пересечения плоскости со сферой две произвольные точки B и B_1. Если точки B и B_1 соединить с A и M, то полученные треугольники конгруэнтны по четвертому постулату конгруэнтности. Отсюда следует, что $AB = AB_1$. Произвольно выбранные точки B и B_1 лежат, следовательно, на равном расстоянии от A. Что справедливо для произвольных точек, то справедливо для всех точек. Линия пересечения есть, следовательно, окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость. Обозначив длину этого перпендикуляра через d, радиус окружности пересечения через ϱ и радиус сферы через r, получаем уравнение:



Фиг. 1

$$\varrho^2 = r^2 - d^2.$$

Уравнение это показывает, что для той-же самой сферы, т. е. при постоянном r, величина радиуса окружности пересечения зависит от расстояния секущей плоскости от центра сферы. Окружность пересечения тем больше, чем меньше d.

* Уважаемые читатели! По техническим причинам в настоящем издании пагинация книги приводится со страницы 7.

Из всех линий, проходящих на поверхности шара, дуга большого круга представляет собою кратчайшее соединение двух точек, лежащих на сфере.

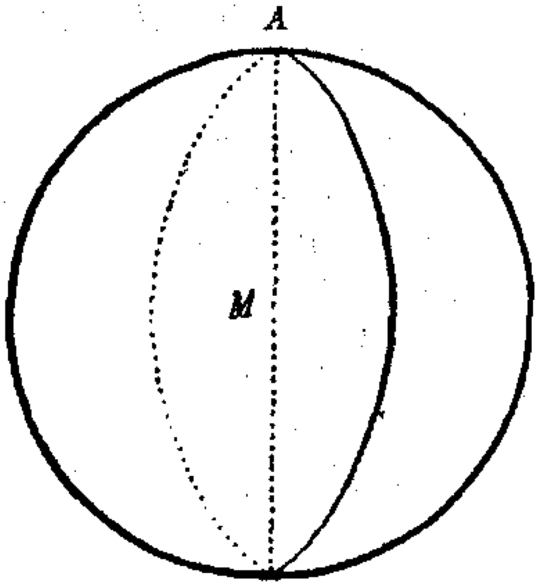
Большой круг играет таким образом на сфере роль прямой на плоскости.

Только в одном случае отличается большой круг от прямой на плоскости. На плоскости между двумя точками возможна всегда только одна прямая, на сфере же через две точки, если они представляют собою концы одного диаметра, проходит бесконечно много кругов. Таким образом на сфере возможно ограничить поверхность уже двумя дугами большого круга, в то время как на плоскости для ограничения какой-либо части ее необходимо по крайней мере три прямых.

§ 2. СФЕРИЧЕСКИЙ ДВУУГОЛЬНИК.

1. Определение 1. *Сферическим двуугольником*[1]) называется часть поверхности сферы, ограниченная двумя большими кругами (фиг. 4).

Обе плоскости больших кругов пересекаются постоянно по диаметру шара, так как они оба проходят через центр шара и, следовательно, прямая их пересечения также должна проходить через эту точку.



Фиг. 4

2. Определение 2. Под *углом сферического двуугольника* понимают линейный угол двугранного угла, между плоскостями больших кругов, образующих сферический двуугольник.

Так как линейный угол двугранного угла между двумя плоскостями образуется двумя прямыми, которые лежат в обоих плоскостях и перпендикулярны линии их пересечения в одной и той-же точке, то мы можем определить угол сферического двуугольника, как угол между двумя

[1]) От греческого ἡ σφαῖρα — шар.

касательными к обоим большим кругам двуугольника, проходящими через вершину двуугольника.

На основании этих определений легко доказывается:

Теорема 1. На одной и той же сфере сферические двуугольники с равными углами имеют равные площади.

С помощью этой теоремы доказывается:

Теорема 2. Площади двух сферических двуугольников относятся, как их углы.

Доказательство. Пусть углы обоих двуугольников будут α_1 и α_2, их площади z_1 и z_2. Если угол β есть общая мера углов обоих двуугольников и, следователно, площадь z_3 соответствующего углу β двуугольника — общая мера площадей z_1 и z_2 первых двуугольников, то существуют следующие равенства:

$$\alpha_1 = n_1\beta;\ \alpha_2 = n_2\beta;\ z_1 = n_1 z_3 \text{ и } z_2 = n_2 z_3,$$

где n_1 и n_2 — числа, обозначающие сколько раз общая мера, β или z_3, содержится в данных величинах α_1, α_2, z_1, z_2. Отсюда следует $\alpha_1 : \alpha_2 = n_1 : n_2$ и $z_1 : z_2 = n_1 : n_2$, а из этих двух равенств $z_1 : z_2 = \alpha_1 : \alpha_2$.

Теорема 3. *Площадь сферического двуугольника* с углом α, на сфере, радиус которой равен r, определяется формулой

$$z_\alpha = 2r^2\alpha.$$

Доказательство. Мы можем рассматривать всю поверхность шара, как двуугольник, угол которого равен четырем прямым или, в дуговых единицах, 2π[1]). Если, поэтому, z_α обозначает площадь двуугольника, угол которого, выражен-

[1]) Если описать из вершины угла, как из центра, круги разных радиусов, то отношение длины дуг, стягивающих угол, к их радиусу постоянно для всех кругов. Отношение меняется в зависимости от угла. Число, выражающее отношение дуги к радиусу или, что то-же, длину дуги, если за единицу принят радиус, употребляют потому для выражения величины угла. Так как для угла в 180°, дуга которого равна полуокружности, дуговая мера равна π, то можно отсюда вычислить для всякого угла его дуговую меру и перечислить таким образом величину угла, данную в градусах, минутах и секундах, в дуговые единицы. В большинстве таблиц логарифмов находятся соответствующие таблицы. Дуга, длина которой равна радиусу, называется радианом. В градусах она равна 57°17′44,806″.

ный в дуговых единицах, равен α, и r — радиус сферы, то по теореме 2 существует следующее равенство:

$$\frac{z_\alpha}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ или } z_\alpha = 2r^2\alpha.$$

Задача. Угол двуугольника на сфере, радиус которой $r = 7{,}5$ см., равен $\alpha = 28^0 37'$. Вычислить площадь этого двуугольника.

Решение. В дуговых единицах $\alpha = 0{,}49945$.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ 2\log r &= 1{,}75012 \\ \log \alpha &= 0{,}69849 - 1 \\ \hline \log z &= 1{,}74964, \quad z = 56{,}188 \text{ кв. см.} \end{aligned}$$

Примечание. Два больших круга образуют на сфере всегда четыре двуугольника, из которых два противолежащих равны, так как их углы, как вертикальные, равны между собою (теорема 1).

§ 3. СФЕРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

Большой круг играет на сфере ту-же роль, что прямая на плоскости. Как на плоскости треугольником называется фигура, образованная отрезками трех прямых, так на сфере треугольником называется фигура, ограниченная дугами трех больших кругов. В отличие от треугольника на плоскости такой треугольник называется **сферическим** или **шаровым**.

Определение: *Сферическим треугольником* называется фигура, лежащая на сфере и ограниченная дугами трех больших кругов (фиг. 5 $\triangle ABC$).

Точки, соединенные дугами больших кругов, называются вершинами треугольника. Как и въ плоском треугольнике, в сферическом различают стороны и углы.

Под *углами сферического треугольника* понимают линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями, дающими в пересечении со сферой сферический треугольник. Они обозначаются, как и у плоского треугольника, через α, β и γ, если вершины обозначены через A, B и C.

Ново и непривычно то, что понимается под сторонами сферического треугольника. Сначала хочется понимать под этим термином длины дуг больших кругов, соединяющих вершины треугольника. Если эти длины не могут быть найдены непосредственным измерением, то они могли бы быть выражены через длину радиуса сферы и через центральные углы, образованные радиусами идущими в вершины треугольника. По известной формуле длина дуги равна произведению из длины радиуса на соответствующий центральный угол. Сферический треугольник употребляется главным образом в астрономии для расчетов треугольников на небесной сфере. Измерение длины дуг здесь невозможно; исключена также возможность воспользоваться величиной радиуса для вычисления, так как и радиус небесной сферы не является определенной величиной. Здесь лежит причина для следующего определения: под *стороной сферического треугольника* понимают центральный угол, образованный двумя радиусами, идущими в вершины треугольника.

Эти центральные углы обозначаются также как стороны плоского треугольника через a, b и c, в соответствии с противоположными вершинами.

Обозначив длины дуг, соединяющих вершины треугольника, через a_1, b_1 и c_1, получаем следующие уравнения:

$$a_1 = ra,\ b_1 = rb,\ c_1 = rc.$$

§ 4. СМЕЖНЫЕ И СИММЕТРИЧНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

Два больших круга образуют на сфере четыре сферических двуугольника. Каждый из этих двуугольников делится третьим большим кругом, необходимым для образования сферического треугольника, на два сферических треугольника. Таким образом, три больших круга образуют на сфере восемь сферических треугольников. Три из этих восьми треугольников расположены так, что имеют с треугольником ABC (фиг. 5) по одной общей стороне. Эти треугольники A_1BC, C_1AB и лежащии на задней стороне фигуры треугольник B_1AC. Эти треугольники называются *треугольниками, смежными* с треугольником ABC. Их стороны, не общие с треугольником ABC представляют собою дополнения до 180° его сторон, **лежащих на одном с ними** большом круге. Углы, прилегающие к общей стороне, точно также дополняют соседние углы треугольника ABC до двух прямых.

Оба конца одного и того же диаметра сферы называются соответственными точками. Восемь треугольников, о которых говорилось выше, расположены так, что вершины каждых двух из них попарно, представляют соответственные точки, например ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, ΔA_1BC и ΔAB_1C_1, и т. д. Такие треугольники называются *соответственными или симметричными треугольниками.* Для них справедлива

Теорема: Симметричные треугольники попарно равновелики.

Доказательство. Углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, так как все линейные углы одного и того же двугранного угла равны между собой. Стороны их, как вертикальные углы, равны.

Никогда невозможно сферический треугольник совместить с ему симметричным посредством передвижения по сфере, хотя отдельные элементы их тождественны. Как известно два плоских симметричных треугольника тоже не могут быть совмещены посредством передвижения их в плоскости, хотя они составлены из тождественных совместимых элементов. В этом можно легко убедиться, если вырезать из двух положенных один на другой листов бумаги два равных треугольника, расположить их симметрично в плоскости и передвигать один из этих треугольников. Если хотят совместить эти треугольники, то необходимо перевернуть один из них и после этого снова поместить в плоскости; только тогда достигается, посредством передвижения в плоскости, полное совпадение всех элементов. Треугольники, таким образом, конгруэнтны, т. е. они могут быть приведены к совмещению. Со сферическими треугольниками следовало бы поступить аналогично. В этом случае однако перевернутый треугольник не улегся бы более на сфере, как это имело место с плоским треугольником на плоскости. Ни в коем случае невозможно, следовательно, совмещение симметричных сферических треугольников. Нельзя поэтому сферический треугольник и ему симметричный называть конгруэнтными, можно только считать их равновеликими.

§ 5. ПЛОЩАДЬ И СУММА УГЛОВ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

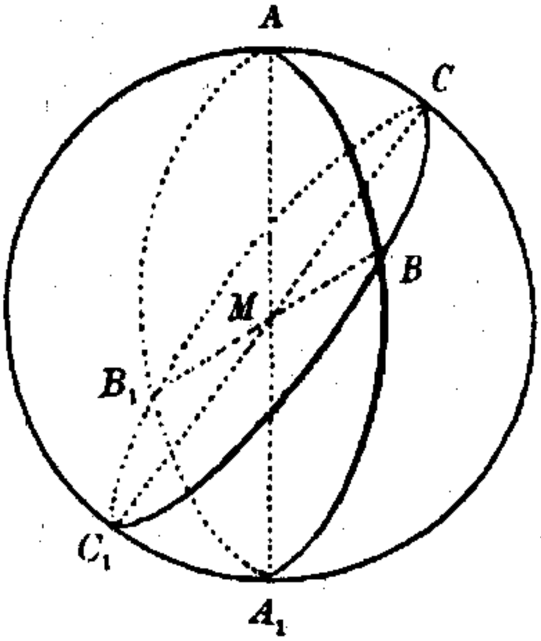
1. *Площадь сферического треугольника.* С помощью формулы для определения площади сферического двуугольника можно определить площадь сферического треугольника. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Площадь сферического треугольника* на сфере радиуса r, определяется формулой

$$f = r^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

где α, β и γ суть углы треугольника, выраженные в дуговых единицах.

Доказательство (фиг. 5). Сферический треугольник дополняется любым из смежных с ним треугольников до сферического двуугольника. Углы образующихся двуугольников равны одному из углов основного треугольника. На фиг. 5 ясно видны двуугольники с углом α и γ. Они лежат на полушарии, выступающем над плоскостью книги. Часть двуугольника с углом β, — именно треугольник ACB_1, — лежит на другом полушарии под плоскостью чертежа; это треугольник симметричный лежащему сверху треугольнику A_1C_1B. Для площадей трех двуугольников получаем по теореме 3 § 2:



Фиг. 5

$$\measuredangle ABC + \measuredangle A_1BC = 2r^2\alpha,$$
$$\measuredangle ABC + \measuredangle B_1AC = 2r^2\beta,$$
$$\measuredangle ABC + \measuredangle C_1AB = 2r^2\gamma.$$

После сложения всех трех равенств, получаем:

$$2\Delta ABC + (\Delta ABC + \Delta A_1BC + \Delta B_1AC + \Delta C_1AB) = \\ = 2r^2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Если в скобках в левой части этого равенства заменить треугольник B_1AC равным ему соответственным треугольником BA_1C, то мы увидим, что сумма, стоящая в скобках, равна поверхности полушария и потому величина ее равна $2\pi r^2$. Таким образом

$$2\Delta ABC + 2\pi r^2 = 2r^2(\alpha + \beta + \gamma) \text{ или}$$

$$\Delta ABC = f = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

2. *Сумма углов сферического треугольника.* Из только что найденной формулы для площади сферического треугольника находим

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{f}{r^2}.$$

Так как α, β и γ измерены в дуговых единицах и π представляет в тех же единицах угол равный двум прямым, так как, далее, f и r^2 могут принимать различные значения, которые однако всегда должны быть положительны, то из последнего равенства легко заключить

Теорему: *Сумма углов сферического треугольника больше двух прямых.*

Этим свойством сферический треугольник сильно отличается от треугольника плоского. Величина, на которую сумма углов сферического треугольника превосходит два прямых, называется сферическим избытком и обозначается через ε.

Так как $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, то формула п. 1 для площади треугольника принимает более простой вид:

$$f = r^2\varepsilon.$$

Из равенства $\varepsilon = \frac{f}{r^2}$ видно, что сферический избыток величина переменная и, что, следовательно, сумма углов у различных треугольников имеет разную величину. Если мы имеем дело с треугольниками одной сферы (r постоянно), то избыток меняется прямо пропорционально площади — чем больше площадь, тем больше избыток. Наибольшим тр-ком на сфере считается тот, площадь которого равна $2\pi r^2$. Для этого тр-ка избыток равен 2π и сумма углов равна 3π. Сумма углов сферического треугольника больше двух и меньше 6 прямых.

Если рассматривать тр-ки той-же площади (f постоянно) на различных сферах, то избыток обратно пропорционален квадрату радиуса сферы. Когда радиус сферы становится бесконечно велик и таким образом поверхность сферы переходит в плоскость, а сферический треугольник в плоский, то, при конечной площади треугольника, избыток равен нулю. Получается известное положение, что в плоском тр-ке сумма углов постоянна и равна двум прямым.

3. *Вычисление площади треугольника.*

Задача. Углы сферического тр-ка на сфере радиуса $r = 7{,}5$ см., равны $\alpha = 87^0 45{,}4'$, $\beta = 120^0 23{,}5'$ и $\gamma = 98^0 53{,}7'$. Как велика площадь тр-ка?

Решение. Сферический избыток ε равен $127^0 2{,}6'$ или в дуговых единицах 2,21735.

$$\begin{aligned} 2\log r &= 1{,}75012 \\ \underline{\log \varepsilon} &\underline{= 0{,}34583} \\ \log f &= 2{,}09595;\ f = 124{,}72 \text{ см.} \end{aligned}$$

ЧАСТЬ II.

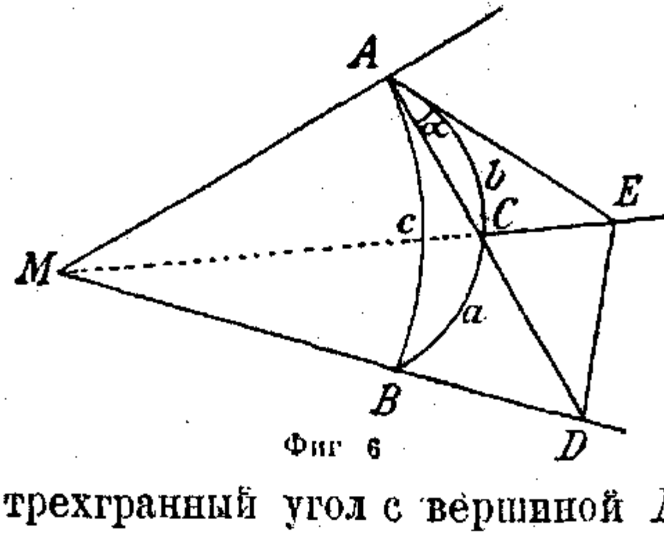
ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕРУГОЛЬНИКОВ.

§ 6. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ ДЛЯ СТОРОН СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

1. В плоскостной тригонометрии показывается как по трем данным элементам плоского тр-ка находятся при помощи вычисления остальные элементы. Для этой цели решаются четыре основные задачи: решить тр-к, если даны 1. две стороны и угол между ними, 2. сторона и два угла, 3. три стороны, 4. две стороны и угол против одной из них. Сферическая тригонометрия имеет такую же задачу — показать,

как по трем данным элементам сферического тр-ка находятся при помощи вычисления остальные элементы. Углы одни уже вполне определяют величину элементов сферического треугольника, как это ясно из формулы для площади треугольника, выведенной в предыдущих параграфах; число основных задач поэтому в сферической тригонометрии больше, чем в плоскостной. Прежде всего прибавляется задача решить треугольник по трем данным углам. Кроме того, вторая задача плоскостной тригонометрии — решение тр-ка по стороне и двум углам, распадается на две: приходится различать, даны ли оба прилежащие или один прилежащий и один противолежащий угол, т. к. в сферическом тр-ке два угла не определяют третьего. Вместо четырех основных задач тригонометрии на плоскости, в сферической появляются шесть. В этих шести основных задачах дается решение тр-ка по данным: 1. a, b, γ; 2. a, β, γ; 3. a, β, α; 4. a, b, c; 5. a, b, α; 6. α, β, γ. Число формул сферической тригонометрии больше, чем плоскостной, и формулы эти труднее удерживаются в памяти. В этом отделе, поэтому, будут выведены сначала только важнейшие формулы, которые позволяют решить большинство прикладных задач, хотя пользование этими формулами, при логарифмировании, представляет некоторые трудности.

2. *Теорема косинусов.* Если несколько плоскостей пересекаются так, что линии их пересечения проходят все через одну точку, то образуется телесный или многогранный угол. Он называется по числу пересекающихся плоскостей трех, четырех . . . n-гранным углом. Точка пересечения ребер называется вершиной угла. Три плоскости больших кругов, дающие в пересечении со сферой тр-к, образуют трехгранный угол, вершина которого совпадает с центром сферы. Фигура 6 представляет подобный трехгранный угол с вершиной M; ABC есть определяемый



Фиг 6

им на сфере тр-к, так что MA, MB и MC, как радиусы сферы, равны между собою. В тр-ке ABC сторона a равна $\angle BMC$, сторона b равна $\angle AMC$ и сторона c равна $\angle AMB$. Восставив к прямой MA в точке A перпендикуляры AD и AE, лежащие в обоих плоскостях, образующих двугранный угол с ребром MA, получаем угол DAE, который представляет собою линейный угол данного двугранного угла и равен, следовательно, углу α сферического тр-ка. Проведем еще прямую DE; в тр-ке DEA по теореме Пифагора:

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2\,AE \cdot AD \cos\alpha.$$

По той же теореме в треугольнике DEM

$$DE^2 = ME^2 + MD^2 - 2\,ME \cdot MD \cos a.$$

Левые части этих двух равенств равны; отсюда следует, что

$$AE^2 + AD^2 - 2\,AE \cdot AD \cos\alpha = ME^2 =$$
$$+ MD^2 - 2\,ME \cdot MD \cos a$$

или $2\,MD \cdot ME \cos a = ME^2 - AE^2 + MD^2 - AD^2 +$
$$+ 2\,AE \cdot AD \cos\alpha$$

Из треугольников MAE и MAD видно, что каждую из разностей в правой части равенства можно заменить через MA^2, их сумму, следовательно, через $2\,MA^2$. После деления равенства на $2\,ME \cdot MD$, получаем

$$\cos a = \frac{MA}{ME} \cdot \frac{MA}{MD} + \frac{AE}{ME} \cdot \frac{AD}{MD} \cos\alpha$$

и, после замены отношений сторон соответственными тригонометрическими функциями,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Эта формула называется *теоремой косинусов* сферического тр-ка.[1])

---

[1]) Для лиц, знакомых с векторной алгеброй ясно, что теорема косинусов есть прямое следствие простой формулы для произведения четырех векторов. В самом деле, обозначим, по величине и по направлению, отрезки MA, MB, MC, векторами $\bar r_a$, $\bar r_b$, $\bar r_c$, $\bar r_a{}^2 = \bar r_b{}^2 = \bar r_c{}^2 = r^2$. Из тождества

$$[\bar r_a \bar r_b]\,[\bar r_a \bar r_c] = r_a{}^2 \cdot \bar r_b \bar r_c - \bar r_a \bar r_c \cdot \bar r_b \bar r_c$$

следует:

$$r^2 \sin c \sin b \cos\alpha = r^2 \cos a - r^2 \cos b \cos c. \qquad \text{(Ред.).}$$

Аналогично построены и формулы для $\cos b$ и $\cos c$. Как и выведенные ниже формулы для других элементов треугольника, эти формулы легче запоминаются, если уяснить себе, как выражается данная формула в словах. Теорема косинусов гласит: косинус стороны сферического тр-ка равен сумме произведения косинусов двух других сторон и произведения их синусов и косинуса угла, противолежащего первой стороне. Уяснив себе таким образом содержание этой формулы, легко написать ее при любом обозначении элементов.

Примечание. Полученная формула, как видно из фигуры, выведена для того случая, когда b и c суть острые углы, и, следовательно, справедлива только для этого частного случая. Можно однако показать, что она действительна и тогда, когда углы b и c, или один их них, тупые, т. е. другими словами, что она справедлива для самого общего случая. Если, например, в тр-ке ABC углы b и c тупые, то достаточно рассмотреть прилежащий к стороне BC смежный тр-к A_1BC. В нем стороны, прилегающие к вершине A суть острые углы и (по § 4) равны $180^0 - b$ и $180^0 - c$.

Для них по предыдущему доказательству справедлива формула:

$$\cos a = \cos(180^0 - b)\cos(180^0 - c) + \\ + \sin(180^0 - b)\sin(180^0 - c)\cos\alpha.$$

Эта формула однако тождественна с выписанной формулой, так как

$$\cos(180^0 - b) = -\cos b \text{ и } \cos(180^0 - c) = -\cos c,$$

и далее:

$$\sin(180^0 - b) = +\sin b \text{ и } \sin(180^0 - c) = +\sin c.$$

3. *Теорема косинусов в плоскостной тригонометрии.* Для того, чтобы определить, какая формула или какое положение плоскостной тригонометрии соответствует найденной формуле сферической тригонометрии, поступают следующим образом. Оставляют неизменными функции углов α, β и γ. Для центральных углов a, b и c вводят дуговую меру, т. е. заменяют a через $\frac{a_1}{r}$, b через $\frac{b_1}{r}$ и т. д., где a_1, b_1, c_1 — длины дуг больших кругов, стягивающих соответственные

углы и r радиус сферы. Наконец заменяют встречающиеся в формулах косинусы сторон синусами, согласно уравнения $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Затем предполагают, что вершины тр-ка неподвижны и начинают удалять центр шара от треугольника, увеличивая таким образом радиус шара. Дуги больших кругов, образующие тр-к, приближаются при этом все больше и больше к отрезкам прямых, соединяющим вершины, в то время, как центральные углы, которые представляют собою стороны сферического тр-ка, все уменьшаются. Для очень малых углов, измеренных в дуговых мерах, синус равен дуге. Можно поэтому, если при удалении центра радиус сферы сделался очень большим, заменить встречающиеся в формуле синусы соответственными дугами и умножить полученное равенство на знаменателя, содержащего низшую степень r. Если отодвинуть теперь центр сферы в бесконечность, т. е. положить $r = \infty$, то сферический тр-к перейдет в плоский, дроби, содержащие еще в знаменателе r, исчезнут и исследуемая формула переходит в соответственную формулу плоскостной тригонометрии.

Из теоремы косинусов сферического тр-ка получается, после выражения сторон в дуговых мерах и замены косинусов синусами, по формуле $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$:

$$1 - 2\sin^2\frac{a_1}{2r} = \left(1 - 2\sin^2\frac{b_1}{2r}\right)\left(1 - 2\sin^2\frac{c_1}{2r}\right) +$$
$$+ \sin\frac{b_1}{r}\sin\frac{c_1}{r}\cos\alpha.$$

Мы можем считать, если r становится очень большим, что, напр.

$$2\sin^2\frac{a_1}{2r} = 2\frac{a_1^2}{4r^2} = \frac{a_1^2}{2r^2};$$

отсюда следует, что

$$1 - \frac{a_1^2}{2r^2} = \left(1 - \frac{b_1^2}{2r^2}\right)\left(1 - \frac{c_1^2}{2r^2}\right) + \frac{b_1}{r}\cdot\frac{c_1}{r}\cdot\cos\alpha$$

или, после раскрытия скобок и умножения равенства на $-2r^2$

$$a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - \frac{b_1^2c_1^2}{2r^2} - 2b_1c_1\cos a.$$

Переходя от сферического тр-ка к плоскому, т. е. предполагая r бесконечно большим, мы должны опустить третий член правой части равенства и получаем, таким образом, обычную теорему Пифагора плоскостной тригонометрии в общем виде. Эта теорема, следовательно, представляет частный случай теоремы косинусов сферического тр-ка.

4. *Применения теоремы косинусов.* Теорема косинусов употребляется для определения сторон сферического треугольника по двум другим его сторонам и углу между ними. Эта формула облегчает также определение углов сферического тр-ка, стороны которого даны, а именно

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Задача 1. Известны две стороны сферического тр-ка $a = 38^0 27'$ и $b = 50^0 17'$, а также и угол $\gamma = 47^0 20'$, заключенный между ними. Определить третью сторону тр-ка.

Решение. Для решения пользуются формулой $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$.

$\log\cos a = \ \ 9{,}89385 - 10$	$\log\sin a = \ \ 9{,}79367 - 10$
$\log\cos b = \ \ 9{,}80550 - 10$	$\log\sin b = \ \ 9{,}88605 - 10$
$\log \quad S_1 = 19{,}69935 - 20$	$\log\cos\gamma = \ \ 9{,}83106 - 10$
	$\log \quad S_2 = 29{,}51078 - 30$

$$S_1 = 0{,}50044$$
$$S_2 = 0{,}32418$$

$\cos c = 0{,}82462$; $\log\cos c = 9{,}91625 - 10$; $c = 34^0 27{,}0'$.

Задача 2. Стороны сферического тр-ка равны $a = 136^0 20'$; $b = 76^0 35'$ и $c = 86^0 37'$. Как велик угол α, противолежащий стороне a.

Решение. Из теоремы косинусов получаем равенство:

$$\cos\alpha \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$\cos a = \cos 136^0 20' = -\cos 43^0 40'$, $\log\cos 43^0 40' = 9{,}85936 - 10$, значит

$$\cos a = -0{,}72337.$$

Далее $$\cos b \cos c = 0{,}013694.$$

Таким образом для $\cos\alpha$ получается величина

$$\cos\alpha = -\frac{0{,}137064}{\sin b \sin c}, \text{ откуда } \cos(180-\alpha) = \frac{0{,}737064}{\sin b \sin c}.$$

Вычисление дает $\alpha = 139^0 23'$.

§ 7. СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ.

Для более легкого усвоения следующих параграфов необходимо остановиться на некоторых определениях и теоремах из стереометрии.

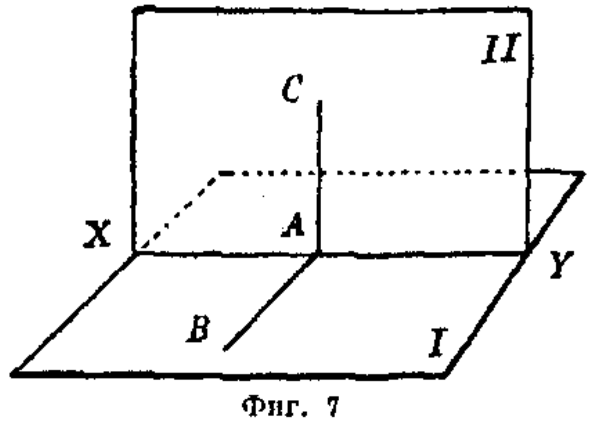
Как уже указано в § 2, под *углом между двумя плоскостями* понимается угол, образованный двумя перпендикулярами восставленными к ребру пересечения плоскостей в одной точке и лежащими каждый в одной из этих плоскостей. Если этот угол прямой, то плоскости называются взаимно-перпендикулярными, нормальными плоскостями.

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым, лежащим в плоскости и проходящим через точку пересечения прямой с плоскостью. Известно, что о том, что прямая перпендикулярна к плоскости можно заключить уже из того, что она перпендикулярна к двум прямым, проведенным в плоскости через основание первой прямой.

На основании этого соображения доказывается

Теорема 1. Плоскость, проходящая через перпендикуляр к какой нибудь плоскости, перпендикулярна к ней.

Доказательство. Проведем через основание данного перпендикуляра в данной плоскости перпендикуляр к ребру пересечения обоих плоскостей. Угол между этими обоими перпендикулярами, представляющий собою линейную меру угла между плоскостями, прямой, и таким образом обе плоскости взаимно-перпендикулярны.

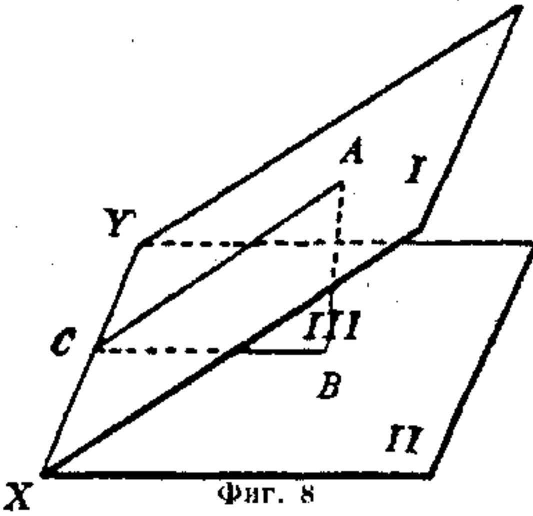


Фиг. 7

Теорема 2. Если в одной из двух взаимно-перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную к ребру пересечения их, то эта прямая будет перпендикулярна ко второй плоскости.

Доказательство. Плоскости I и II фиг. 7 взаимно-перпендикулярны. Прямая AB, лежащая в плоскости I, перпендикулярна к XY. Если в плоскости II провести перпендикуляр AC к ребру XY, то $< CAB$ есть угол между обоими перпендикулярными плоскостями и потому равен прямому. AC, следовательно, перпендикулярно к двум прямым плоскости I и представляет собою потому перпендикуляр к этой плоскости.

Теорема 3. Если из какой-либо точки одной из двух пересекающихся плоскостей опустить перпендикуляр на вторую плоскость, и из той-же точки опустить перпендикуляр на ребро пересечения обоих плоскостей, а затем соединить основания этих перпендикуляров, то образованный при этом угол, вершина которого лежит на ребре пересечения, есть линейный угол двугранного угла между плоскостям.



Фиг. 8

Доказательство. (фиг. 8). Пусть AB перпендикулярно к плоскости II и AC к ребру XY. Если через эти два перпендикуляра провести плоскость III, то эта плоскость по теореме I будет перпендикулярна к плоскости II. Так как прямая XY перпендикулярна к AC по построению, то по теореме 2, XY представляет также перпендикуляр к плоскости III, т. е. прямая CB перпендикулярна к XY. Отсюда угол ACB есть угол между обоими плоскостями.

§ 8. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

1. Прямоугольным называется сферический, как и плоский, тр-к тогда, когда один из его углов прямой. Точно также

сторона, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой, прилегающие к нему стороны катетами. Так как однако в сферическом тр-ке сумма углов больше двух прямых, то углы прилегающие к гипотенузе тоже могут быть прямыми, или, даже, тупыми.

2. Формулы сферической тригонометрии представляют более простой вид, если один из углов тр-ка прямой. Так прежде всего из теоремы косинусов $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$, следует, если гипотенузу обозначим через c, а катеты через a и b, что $\cos \gamma = 0$, а потому

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

или словами: косинус гипотенузы всякого сферического прямоугольного тр-ка равен произведению косинусов его катетов.

Если полученное уравнение возвысить в квадрат, заменить квадраты косинусов синусами по формуле $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, то получается

$$1 - \sin^2 c = (1 - \sin^2 a)\ (1 - \sin^2 b).$$

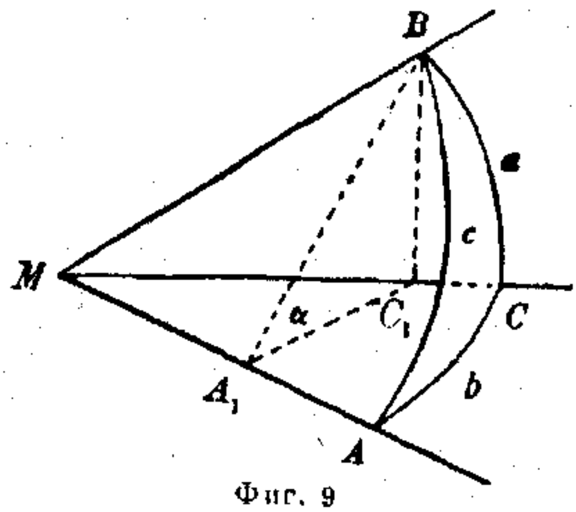
После замены углов дугами по формуле $a_1 = ar$ и раскрытия скобок, отсюда следует, при очень большом r, после умножения уравнения на $(-r^2)$

$$c_1{}^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2 - \frac{a_1{}^2 b_1{}^2}{r^2}.$$

Если, увеличивая r до $r = \infty$, мы заменим сферический тр-к плоским, то последний член правой стороны равенства исчезнет и останется равенство $c_1{}^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2$. Вышенайденная формула заменяет таким образом в сферической тригонометрии теорему Пифагора.

3. Кроме только что найденной формулы, необходимо вывести еще три других формулы для прямоугольного сферического тр-ка.

Треугольник ABC фиг. 9, лежащий на сфере с центром в точке M, представляет собою прямоугольный при точке C сферический тр-к. Плоскости BMC и AMC, таким образом, взаимно перпендикулярны. Перпендикуляр BC_1, опущенный из точки B на ребро MC должен по теореме 2 § 7



Фиг. 9

быть перпендикулярным и к плоскости CMA. Опустим далее из точки B, лежащей в плоскости BMA, перпендикуляр BA_1 на ребро MA и соединим A_1 с C_1. Угол BA_1C_1 должен по теореме 3 § 7 быть линейным углом двугранного угла между плоскостями CMA и BMA, т. е. угол BA_1C_1 должен быть равен углу α сферического тр-ка ABC.

В тр-ке A_1C_1B

$$\sin\alpha = \frac{BC_1}{BA_1} = \frac{MB\sin a}{MB\sin c} = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{MA_1\operatorname{tg} b}{MA_1\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC_1}{A_1C_1} = \frac{MC_1}{MC_1}\cdot\frac{\operatorname{tg} a}{\sin b} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

Мы получаем, следовательно, три формулы

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

Для очень малых углов, выраженных в дуговых мерах, тангенс как и синус может быть заменен самой дугой. Отсюда ясно, что этим трем формулам сферической тригонометрии, в плоскостной соответствуют те, которыми определяются функции синус, косинус и тангенс.

4. Примеры. Задача 1. Катеты прямоугольного сферического тр-ка равны $a = 47^0\,15'$ и $b = 56^0\,25'$. Определить величину гипотенузы и углов, противолежащих катетам. ($c = 67^0\,56{,}8'$, $\alpha = 52^0\,24{,}1'$, $\beta = 64^0\,0{,}5'$).

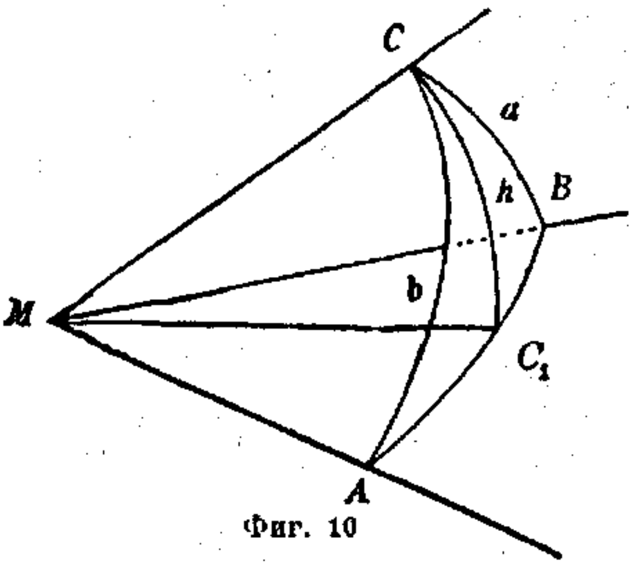
Задача 2. Катет прямоугольного тр-ка равен $a = 38^0\,29'$. Противолежащий угол $\alpha = 55^0\,34'$. Определить гипотенузу, второй катет и угол, ему противолежащий. ($c = 48^0\,58{,}8'$, $b = 33^0\,1{,}4'$, $\beta = 46^0\,14{,}8'$).

§ 9. ТЕОРЕМА СИНУСОВ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Теорема синусов. Синусы сторон сферического тр-ка относятся как синусы противолежащих им углов,

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{или} \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Доказательство[1]). Проведем через вершину C сферического тр-ка ABC (фиг. 10) большой круг, перпендикулярный к AB. При этом образуются два прямоугольных сферических тр-ка, с прямыми углами при C_1. Обозначив угол CMC_1 через h, получаем, по первой из трех формул пункта 3 § 8, равенства



Фиг. 10

$$\sin \alpha = \frac{\sin h}{\sin b} \quad \text{и} \quad \sin \beta = \frac{\sin h}{\sin a}.$$

Разделив одно равенство на другое, получаем формулу, которую требуется доказать.

Легко показать, что теорема синусов сферического тр-ка соответствует теореме синусов плоского тр-ка.

---

1) И эту теорему легко доказать с помощью векторов $\bar{r}_a$, $\bar{r}_b$, $\bar{r}_c$ (ср. стр. . . .). Для этого достаточно заметить, что векторы

$$\left[[\bar{r}_a \bar{r}_b] [\bar{r}_b \bar{r}_c]\right], \left[[\bar{r}_b \bar{r}_c] [\bar{r}_c \bar{r}_a]\right], \left[[\bar{r}_c \bar{r}_a] [\bar{r}_a \bar{r}_b]\right]$$

имеют одинаковую длину, равную $r\ (\bar{r}_a \bar{r}_b \bar{r}_c)$.

Поэтому

$$r^4 \sin c \sin \alpha \sin \beta = r^4 \sin a \sin b \sin \gamma = r^4 \sin b \sin c \sin \alpha$$

или, разделивши на $r^4 \sin a \sin b \sin c$,

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin a}.$$

(Ред.)

Задача. Известны две стороны сферического тр-ка $a = 70^0 14'$, $b = 62^0 10'$ и угол $\alpha = 80^0 20'$. Определить угол β.

Решение. Из уравнения $\sin \beta = \frac{\sin \alpha \sin b}{\sin a}$ находим $\log \sin \beta = 9{,}96676 - 10$ и отсюда, по таблицам $\beta = 67^0 52'$. Так как синус какого-либо угла равняется синусу угла, дополняющего его до 180^0, то можно было бы считать $\beta = 112^0 8'$. Но второй ответ невозможен, ибо дано, что $b < a$, а в сферическом тр-ке, как и в плоском, против большей стороны лежит больший угол. Простое доказательство этой теоремы находится в примечанаии § 26.

ЧАСТЬ III.

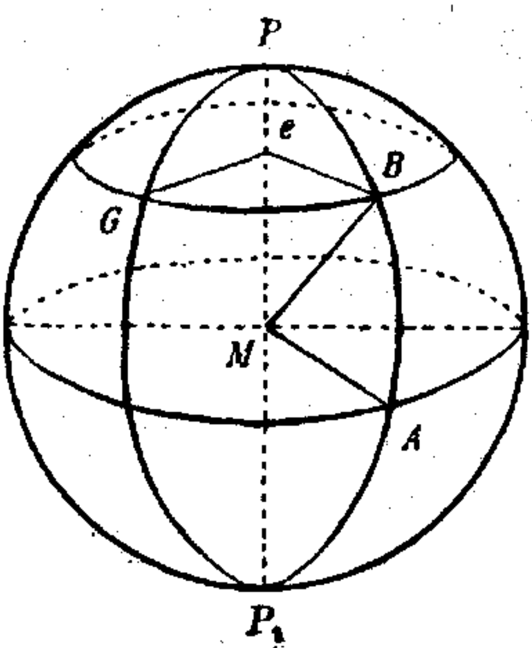
ПРИМЕНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ В ГЕОДЕЗИИ И АСТРОНОМИИ.

§ 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА СФЕРЕ.

Положение точки на плоскости определяется, как известно, системой прямоугольных координат, состоящих из двух пучков бесконечно большого числа прямых, взаимно перпендикулярных друг к другу. Точка однозначно определяется как место пересечения двух прямых, принадлежащих к разным пучкам. Сами прямые задаются их расстояниями от двух определенных прямых разных пучков, называемых осью абсцисс и осью ординат.

На сфере положение точки определлется двумя пучками, состоящими из бесконечно большого числа кругов. Один пучок образуется бесконечно большим числом кругов, которые можно провести через какой-либо определенный диаметр сферы. Концы этого диаметра называются полюсами. Все эти круги суть большие круги. Другой пучек образуется бесконечно большим числом кругов, перпендикулярных вышеуказанному диаметру. Только один из них есть большой круг, именно тот, который проходит через центр сферы. Он называется экватором (от латинского aequare = равнять), потому что делит сферу на две равные части. Остальные круги — все малые и называются параллельными кругами. Так как два круга пересекаются всегда в двух точках, то всегда выбирают для определения местоположения точки на сфере точку пересечения параллельного круга с одной полуокружностью проходящего через основной диаметр большого круга.

Параллельный круг отмечается углом, образованным радиусом, проведенным в какую либо точку на его окружности, с плоскостью экватора ($\angle BMA$ фиг. 11). Для точек, лежащих по одну сторону экватора, угол этот обозначается знаком $+$, а для точек по другую сторону экватора знаком $-$. Плюс и минус в этом случае не знаки действия, сложения или вычитания, а знаки, указывающие направление.



Фиг. 11

Чтобы обозначить полуокружность, проходящую через данную точку, необходимо какую-либо, произвольно выбранную полуокружность принять за нулевую. (полуокружность PgP_1 фиг. 11). Полукруг, проходящий через данную точку, определяется затем углом между его плоскостью и плоскостью нулевого полукруга ($\angle BCg$ фиг. 11). Угол этот отсчитывается обычно от 0 до 180° и обозначается по условию, как и выше, в одном направлении как положительный, в обратном — как отрицательный. Таким образом производится однозначное определение положения точки.

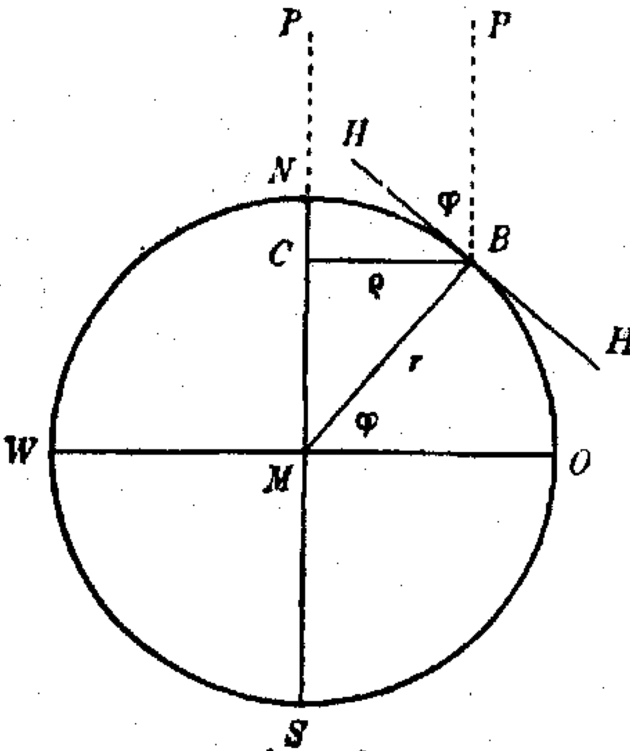
В следующих параграфах будет изложено как выбирается для земного шара и для видимой небесной сферы диаметр, через который проводятся большие круги и как называются в различных системах элементы, определяющие точки.

§ 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ НА ЗЕМНОМ ШАРЕ.

Земная ось, концами которой являются северный и южный полюс, выбирается диаметром, через который проводятся большие круги. Ввиду того, что полуокружности этих больших кругов идут с севера на юг или полдень, они называются *меридианами* (от латинского meridies = полдень).

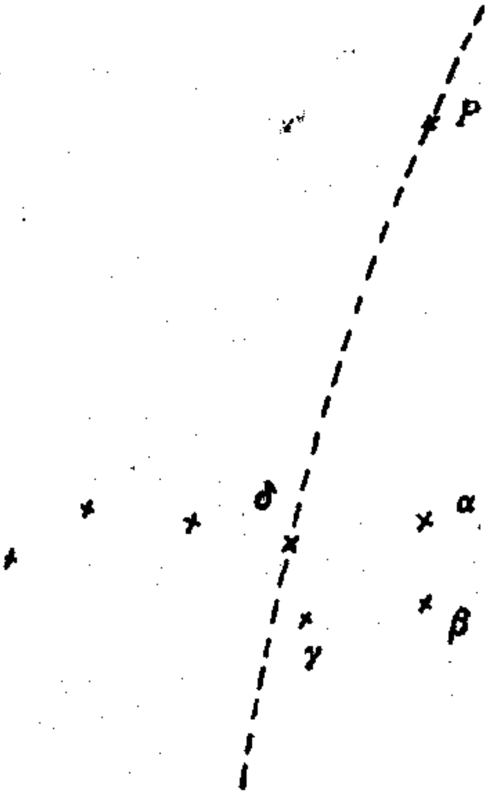
Круги, перпендикулярные к земной оси называются *параллельными кругами*, единственный из них большой круг — *земным экватором*. Угол, определяющий параллельный круг, называется географической широтой места и обозначается через φ. Под *географической широтой* места понимают угол между земным радиусом, идущим в данную точку земли и плоскостью экватора (фиг. 11 $\angle AMB = \varphi$).

Широта отсчитывается от 0° до 90°. Различают северную или положительную широту и южную, считающуюся отрицательной.



Фиг. 12

Определение географической широты может быть произведено следующим образом. На фиг. 12 $\angle BMO$ представляет собою географическую широту точки B; NS — земную ось, WO — экватор. Представим себе, что через точку B проведена касательно к земле горизонтальная плоскость HH_1, и через ту-же точку B — прямая BP, параллельная земной оси. $\angle HBP = \angle BMO = \varphi$, как углы со взаимноперпендикулярными сторонами. Направление, параллельное земной оси, определяется на основании следующих соображений. Продолжение земной оси над северным полюсом проходит приблизительно через полярную звезду. Эта звезда находится на продолжении линии, соединяющей звезды α и β созвездия Большой Медведицы (фиг. 13), от α на расстоянии приблизительно в пять раз превышающем расстояние между α и β. Ввиду колоссальности расстояния земли от полярной звезды, направление подзорной трубы, установленной в какой-либо точке северного полушария и направленной на полярную звезду, будет всегда параллельно земной оси SN. Определение широты можно, следовательно, всегда произвести, установив в дан-



Фиг. 13

ной точке трубу, направив её на полярную звезду и определив затем угол между осью трубы и плоскостью горизонта. Этот угол и есть географическая широта места.

Для того, чтобы иметь возможность обозначить перпендикуляр данного места, считают по соглашению начальным или **нулевым меридианом** меридиан Гринвича, предместья Лондона. Угол, служащий для определения меридиана данного места, называется **географической долготой** и обозначается через λ.

Под *географической долготой* **какого-либо места понимается угол, образованный плоскостью меридиана данного места с плоскостью Гринвичского меридиана** (Фиг. 11, угол $\angle gCB = \lambda$).

Долгота отсчитывается от 0^0 до 180^0. Различают **западную** или положительную и **восточную** или отрицательную долготу.

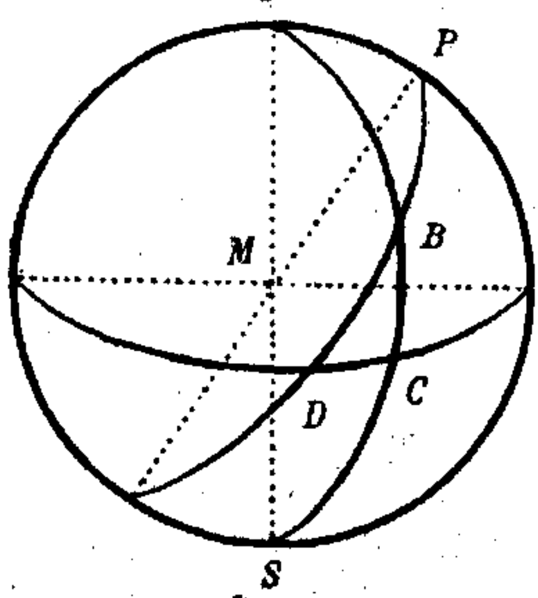
Определение географической долготы производится посредством часов, показывающих Гринвичское время. Земля движется с равномерной скоростью с запада на восток и поворачивается в течение 24 часов один раз около своей оси или на 360^0, т. е. в час на 15^0 или в одну минуту на $15'$. Если в каком-либо месте, долготу которого требуется определить, как раз полдень в тот момент, когда часы, показывающие Гринвичское время, показывают 2 часа 3 минуты пополудни, то это значит, что место это лежит на $30^\circ 45'$ западной долготы. Если Гринвичские часы показывают 10 часов 58 минут утра, то место это лежит на $15^\circ 30'$ восточной долготы.

Примечание 1. В прежнее время за нулевой меридиан принимали меридиан Ферро. Почти вся известная тогда часть земли лежала восточнее этого меридиана. Со времени открытия Америки обстоятельства изменились. Меридиан Гринвича выбран начальным для того, чтобы избежать по возможности прохождения границы, разделяющей места с разными числами (месяца), через населенные места.

Примечание 2. Часть земли, известная древним географам, имела приблизительно форму прямоугольника, более длинная сторона которого тянулась с запада на восток, более короткая — с севера на юг. Отсюда происходят названия долгота и широта для углов, определяющих положение места на земле.

§ 12. ЗАДАЧИ ПО ГЕОДЕЗИИ.

Задача 1. Берлин расположен на $\varphi = 52^\circ 30{,}3'$ северной широты и $\lambda = 13^\circ 18{,}4'$ восточной долготы, Петербург — на $\varphi_1 = 59^\circ 56{,}5'$ северной широты и $\lambda_1 = 30^\circ 18{,}4'$ восточной долготы. Определить кратчайшее расстояние между Берлином и Петербургом.



Фиг. 14

Решение. Кратчайшим расстоянием между Берлином и Петербургом является длина дуги большого круга, проходящего через обе точки (§ 1, 4). Обозначим Берлин через B, Петербург — через P, а северный полюс через N. Тогда (фиг. 14) меридианы NB и NP, проходящие через B и P, и большой круг, проходящий через обе точки, образуют сферический тр-к NBP. Сторона NB этого треугольника известна, как дополнение широты Берлина, сторона NP, как дополнение широты Петербурга до 90^0. Угол BNP представляет собою разницы долгот этих мест. Отсюда по теореме косинусов определяется $BP = a$.

$$\cos a = \cos (90^0 - \varphi) \cos (90^0 - \varphi_1) + \\ + \sin (90^0 - \varphi) \sin (90^0 - \varphi_1) \cos (\lambda_1 - \lambda)$$

или $$\cos a = \sin \varphi \sin \varphi_1 + \cos \varphi \cos \varphi_1 \cos (\lambda_1 - \lambda)$$

$$\begin{array}{rlrl} \log \sin \varphi = & 9{,}89950 - 10 & \log \cos \varphi = & 9{,}78440 - 10 \\ \log \sin \varphi_1 = & 9{,}93728 - 10 & \log \cos \varphi_1 = & 9{,}69973 - 10 \\ \hline \log S_1 = & 19{,}83678 - 20 & \log \cos (\lambda_1 - \lambda) = & 9{,}98080 - 10 \\ & & \hline \log S_2 = & 29{,}46493 - 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S_1 = 0{,}68672 \\ S_2 = 0{,}29169 \\ \hline \cos a = 0{,}97841 \quad \log \cos a = 9{,}99052 - 10 \quad a = 11^0 55{,}7' \end{array}$$

Значение, найденное для a, дает, как известно, величину центрального угла, соответствующего дуге BP. Длина большого круга земли по определению метра равна 40.000 км.; центральному углу в 1^0 соответствует, таким образом, дуга длиною в 111 км.. Дуга BP равна поэтому 1324,2 клм. Дугу BP можно вычислить также и по формуле $BP = ra$, выразив a в радианах и зная, что земной радиус равняется 6370 км. Этот расчет дает $BP = 1326{,}2$ клм.

Задача 2. Неаполь лежит на $\lambda = 14^0 15'$ восточной долготы, Нью-Иорк на $\lambda_1 = 71^0 29'$ западной долготы. Оба места лежат приблизительно на $\varphi = 40^0 51{,}8'$ северной широты. На сколько дуга параллельного круга между обоими местами длиннее дуги большого круга, проходящего через те-же точки.

Решение. Длина дуги большого круга определяется, как в задаче № 1, необходимо только обратить внимание на то, что угол у полюса равен $\lambda + \lambda_1$, так как долгота Неаполя восточная, а Нью-Иорка — западная. Вычисление дает 6873,9 клм. Длина дуги параллельного круга равняется $\varrho(\lambda + \lambda_1)$, где ϱ обозначает радиус соответственного параллельного круга. ϱ находится из равенства $\varrho = r \cos \varphi$, где r — радиус земли. Длина дуги параллельного круга равна следовательно 7204,2 клм. Дуга параллельного круга, таким образом, на 330,3 клм. длиннее дуги большого круга.

Задача 3. Где лежит точка пересечения экватора с большим кругом, проходящим через Берлин и Петербург?

Решение (фиг. 14). Сначала определяется, как в задаче 1, сторона BP, затем из тр-ка BNP по теореме косинусов или по теореме синусов находится угол $NBP = \beta$. $\beta = 44^0 49{,}5'$. В прямоугольном при C тр-ке BCD известны теперь во-первых угол $CBD = \beta$ и во-вторых сторона $CD = \varphi$. Затем можно определить DC из уравнения $\operatorname{tg} CD = \operatorname{tg} \beta \sin \varphi$ (§ 8, 3). Вычисление дает $CD = 38^0 15{,}5'$. Так как Берлин лежит на $13^0 23{,}7'$ восточной долготы, то, следовательно, искомая точка пересечения большого круга с экватором, которая легко находится вычитанием, лежит на $24^0 51{,}8'$ западной долготы.

Задача 4. Корабль из Лиссабона ($\varphi = 38^0 42{,}5'$ северной широты, $\lambda = 9^0 11{,}5'$ восточной долготы) плывет по дуге большого круга к экватору, держа курс $S\,22^0 47'\,W$.[1]) Где и под каким курсом он пересечет экватор? Сколько ему плыть до экватора?

Решение (фиг. 14). В тр-ке BCD, прямоугольном при C, известны угол $CBD = \beta = 22^0 47'$ и сторона $BC = \varphi = 38^0 42{,}5'$. CD определяют как в задаче 3 и находят долготу точки $D = 5^0 31{,}8'$ западной долготы. Затем вычисляют угол $BDC = \delta$ по формуле для $\operatorname{tg} \delta$ и находят, что $\delta = 72^0 42{,}7'$. Угол, образованный направлением корабля в точке D с меридианом, проходящим через D, есть дополнение δ до 90^0. Курс корабля в D, следовательно, $S\,17^0 35{,}3'\,W$. Для того, чтобы, наконец, определить длину пути от B до D, лучше всего воспользоваться формулой для $\cos \beta$ (§ 8, 3), по которой $\operatorname{ctg} BD = \cos\beta \cos\varphi$. Длина пути равна 4548,78 клм.

Задача 5. Два места, лежащие на разных восточных долготах, лежат на $\varphi = 23^0 30'$, и $\varphi_1 = 42^0 17'$ северной широты. Кратчайшее расстояние между ними $a = 4079{,}25$ клм. Который час по местному времени в месте, лежащем восточнее, когда в западном 11 часов 25 минут утра?

---

1) $S\,22^0 47'\,W$ означает уклонение на $22^0 47'$ от южного направления к западу.

Решение. Мы можем с помощью *a*, если P и B (фиг. 14) данные места, определить сторону PB, а затем с помощью теоремы косинусов найти разность долгот этих мест. Каждому градусу разности долготы соответствует разность во времени на четыре минуты, так как в течение 24 часов земля поворачивается на 360°. Разность долгот определяется в 38°13,6′, а искомое время восточного места в 1 час 57,9 минут пополудни, ибо, при вращении земли с запада на восток, в восточном месте время дня должно быть позднее, чем в западном.

§ 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НА НЕБЕСНОЙ СФЕРЕ ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМЫ ГОРИЗОНТА.

Если мы находимся в поле, то земная поверхность кажется нам плоским кругом, в центре которого стоим мы. Небо представляется нам в виде полушария, опирающегося на этот круг и касающегося его на его периферии. Линия соприкасания небесной сферы и земной поверхности называется *видимым горизонтом* (греч. ὁρίζειν = ограничивать). Прямая, проходящая через точку, на которой стоит наблюдатель, перпендикулярно к плоскости видимого горизонта, называется *отвесной или вертикальной линией* (лат. vertex = вершина). Точка пересечения ее с небесной сферой над наблюдателем называется *зенитом*, а точка пересечения с небесной сферой под наблюдателем — *надиром*. Вертикальная линия есть диаметр небесной сферы, так как она проходит через центр земли, являющийся также и центром небесной сферы. Для определения точек на небесной сфере служат большие круги, проходящие через этот диаметр и называемые *вертикальными кругами*. Плоскости, перпендикулярные вертикальной линии, параллельны плоскости, на которой стоит наблюдатель. Они пересекают небесную сферу по кругам, называемым *параллельными кругами высоты*. Из них большой круг, проходящий через центр земли, называется *истинным горизонтом*. Вследствие колоссального расстояния небесной сферы от земли, истинный горизонт при астрономических наблюдениях совпадает с видимым.

Круги высоты и вертикальные круги образуют *систему горизонта* для определения точек на небесной сфере.

Угол, служащий для определения параллельного круга, называется высотой.

Под *высотой* (h) какой-либо точки на небе понимают угол с плоскостью истинного горизонта, образованный радиусом, идущим в данную точку.

Этот угол равен углу между прямой, идущей из точки наблюдения в данную точку на небе, и плоскостью видимого горизонта, так как небесная сфера чрезвычайно далека от земли. На каждой половине небесной сферы высоту считают от 0^0 до 90^0 и считают высоты точек, лежащих на видимой половине небесной сферы, положительными, а на невидимой половине — отрицательными.

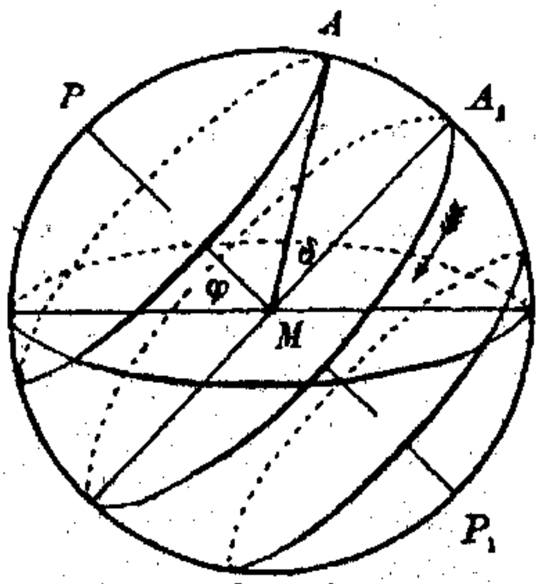
Чтобы определить вертикальный круг, проходящий через звезду, принимают за нулевой круг тот, который рассекает земную поверхность в точке наблюдения, по направлению с севера на юг, по *полуденной линии.* Угол, служащий для определения вертикального круга, называется азимутом.

Под *азимутом* (a) какой-либо точки на небе понимают угол, образованный плоскостью вертикального круга, проходящего через данную точку с плоскостью нулевого круга.

Азимут считают от 0^0 до 180^0 и различают западный или положительный и восточный или отрицательный.

§ 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА НЕБЕСНОЙ СФЕРЕ ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМЫ ЭКВАТОРА.

Внимательное наблюдение звездного неба показывает нам, что звезды постоянно меняют свою высоту и свой азимут. Они движутся по кругам различной величины, плоскости которых параллельны одна другой. Только одна полярная звезда (ср. § 11) стоит неподвижно. Ее неизменная высота, равная географической широте пункта наблюдения, называется *высотой полюса* (фиг. 15). На прямой, соединяющей полярную звезду с центром земли, лежат центры всех круго-



Фиг. 15

вых орбит звезд. Поэтому создается представление, как будто весь небесный свод вращается вокруг этой прямой. Эту прямую называют поэтому *осью мира* (фиг. 15, PP_1). Ее концы суть *северный и южный небесные полюса.* Осью мира пользуются для создания новой системы определения точки на небе. Плоскости больших кругов, проходящие через ось мира, пересекают небесную сферу по *небесным меридианам*, плоскости, перпендикулярные к мировой оси, образуют на небе *небесные параллельные круги.* Параллельный круг, плоскость которого проходит через центр земли, называется *небесным экватором.* Небесные меридианы и параллельные круги образуют *систему экватора.* Угол, определяющий параллельный круг какой либо звезды, называется склонением этой звезды.

Под *склонением* (δ) какой либо точки на небе, понимают угол, образуемый радиусом небесной сферы, идущим в данную точку, с плоскостью небесного экватора ($\angle AMA_1 = \delta$, фиг. 15).

Склонение считают от 0^0 до 90^0 и говорят о северном или положительном и южном или отрицательном склонении.

Склонение звезд есть величина постоянная. Солнце постоянно меняет свое склонение между $+23^1/_2{}^0$ и $-23^1/_2{}^0$. Солнце не только меняет свое склонение, но и движется через все меридианы по направлению с запада на восток, т. е. в направлении, обратном кажущемуся движению небесной сферы. Оно описывает при этом на небе большой круг, называемый *эклиптикой.* Эклиптика пересекает небесный экватор в двух точках, которые солнце проходит 21 марта и 23 сентября. В эти оба дня склонение солнца равна 0^0. Точка, в которой солнце 21 марта пересекает небесный экватор, переходя с южной половины небесной сферы на северную, называется *точкой весеннего равноденствия.* Меридиан, проходящий через точку весеннего равноденствия, считают нулевым и называют *колюром равноденствий.* Угол, которым при помощи этого колюра определяют меридианы отдельных звезд, называется прямым восхождением.

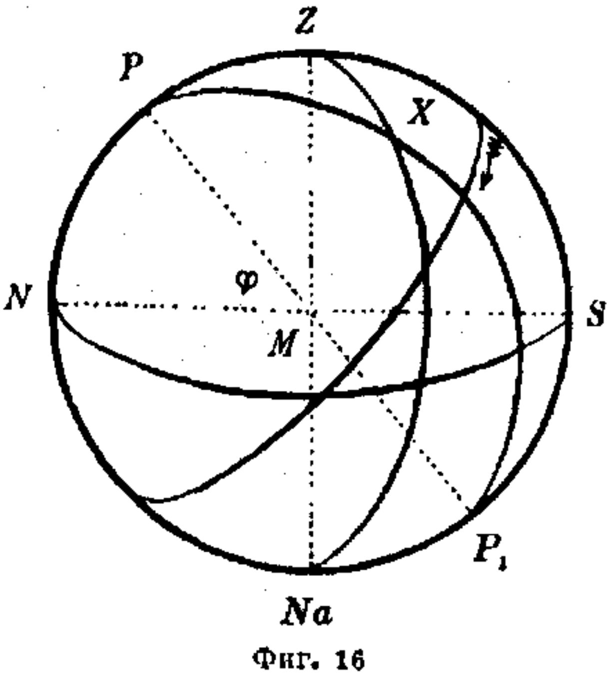
Под *прямым восхождением* α какого либо светила понимают угол между плоскостью меридиана данной звезды и плоскостью меридиана точки весеннего равноденствия.

Прямое восхождение считается через юг на восток по направлению собственного движения солнца от 0^0 до 360^0.

Примечание. Слово колюр взято из греческого и значит „отрубающий хвост". Колюр проходит через полярную звезду и звезду δ Большой Медведицы (фиг. 13), отделяя таким образом в этом созвездии хвост от тела. Отсюда и происходит его название.

§ 15. ПАРАЛЛАКТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

Система горизонта с ее вертикальными и параллельными кругами представляется наблюдателю в какой либо точке земли вполне неподвижной. Система же экватора с ее меридианами и параллелями постоянно вращается вокруг оси мира PP_1 (фиг. 16) в направлении с востока на запад. При этом вращении всегда один и только один меридиан совпадает с нулевым вертикальным кругом PZ, фиг. 16. Все другие меридианы пересекаются в это время всеми вертикальными кругами. Пусть меридиан какой либо звезды X занимает указанное на фигуре положение PXP_1, причем через точку X проходит вертикальный круг $ZXNa$. Рассматривая наш чертеж, мы заметим образованный на небе



Фиг. 16

сферический тр-к ZPX, вершины которого представляют зенит Z данного места, полюс мира P и звезда X. Этот тр-к называется *параллактическим треугольником*. Стороны его и два угла легко определяются.

Сторона PZ есть дополнение до 90^0 широты места наблюдения, т. е. сторона PZ равна $90^0 - \varphi$, и представляет таким образом для данного места неизменную величину.

Сторона PX есть дополнение до 90^0 склонения звезды X, т. е. сторона PX равна $90^0 - \delta$ и, таким образом, есть для всех мест неизменная величина.

Сторона ZX есть дополнение до 90^0 высоты звезды X, т. е. сторона ZX равна $90^0 - h$, и, следовательно, с движением звезды непрерывно меняется.

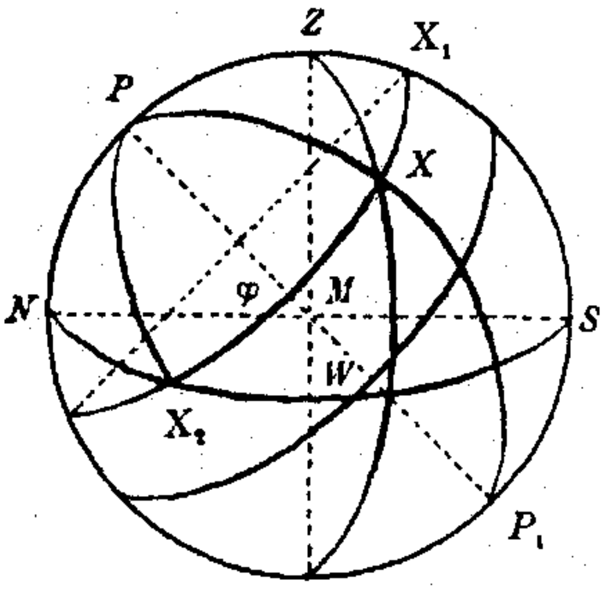
Угол PZX есть дополнение до 180^0 азимута звезды X, т. е. $\angle PZX = 180^0 - a$, и, следовательно, тоже непрерывно меняется с движением звезды.

Угол ZPX называется часовым углом и обозначается через σ. Он тоже постоянно меняется с движением звезды, так как он представляет тот угол, на который, после своего прохождения через нулевой вертикальный круг, повернулся меридиан звезды. Так как вся система экватора, вращаясь около оси мира с равномерной скоростью, совершает 1 оборот в 24 часа, то, следовательно, каждый меридиан поворачивается в течение одного часа на угол $360^0 : 24 = 15^0$. Таким образом, по времени, прошедшему с момента прохождения звезды через меридиан места или нулевой вертикальный круг, можно определить величину угла σ в градусах и минутах. Нужно только умножить время, выраженное в числах, на 15. Если прошло 3 часа, то $\sigma = 45^0$; если прошло 3 часа 17 минут, то $\sigma = 49^0 15'$. Обратно: по известному углу σ, можно определить время, прошедшее со времени прохождения светила через нулевой вертикальный круг или, как говорят, со времени его верхней кульминации. Это обстоятельство об'ясняет, почему угол σ назван часовым углом.

Параллактический тр-к употребляется для астрономических вычислений, которые описаны в следующих параграфах.

§ 16. ЗАДАЧИ ИЗ АСТРОНОМИИ.

Задача 1. 18-го мая склонение солнца $\delta = +19^0 30'$. Где находится оно в этот день через 3 часа 15 минут, после его верхней кульминации в Мюнхене ($\varphi = 48^0 8{,}8'$ сев. шир.)?



Фиг. 17

Решение. Солнце находится в верхней кульминации, когда его меридиан совпадает с нулевым вертикальным кругом. Оно находится тогда в точке X_1 (фиг. 17) и в месте наблюдения тогда полдень. Солнце движется дальше на запад и его часовой угол в 3 часа 15 минут дня, когда оно находится в точке X, определяется умножением времени на 15. Вычисленный часовой угол $\delta = 48^0 45'$. В параллакт. тр-ке ZPX, кроме угла δ известны еще сторона $PZ = 90^0 - \varphi$ и сторона $PX = 90^0 - \delta$. Для указания положения солнца надо найти его высоту и азимут. Возможность определения высоты дается теоремой косинусов. Высота определяется по формуле

$$\cos(90^0 - h) = \cos(90^0 - \varphi)\cos(90^0 - \delta) +$$
$$+ \sin(90^0 - \varphi)\sin(90^0 - \delta)\cos\sigma$$

$$\text{или} \quad \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\sigma$$

$$\begin{array}{ll} \log\sin\varphi = 9{,}87207 - 10 & \log\cos\varphi = 9{,}82427 - 10 \\ \log\sin\delta = 9{,}52350 - 10 & \log\cos\delta = 9{,}97435 - 10 \\ \hline \log S_1 = 19{,}39557 - 20 & \log\cos\sigma = 9{,}81911 - 10 \\ & \hline \log S_2 = 29{,}61773 - 30 \end{array}$$

$$S_1 = 0{,}24864$$
$$\underline{S_2 = 0{,}41470}$$
$$\sin h = 0{,}66334, \quad \log\sin h = 9{,}82174 - 10$$
$$h = 41^0 33{,}3'.$$

Высота солнца, следовательно $41^0 33{,}3'$. Тупой угол для h, который был бы возможен при том же синусе, не годится, ибо высота всегда лежит в пределах между -90^0 и $+90^0$.

После определения высоты, может быть определен, при помощи теоремы косинусов, и азимут солнца:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h + \cos\varphi \cos h \cos(180^0 - a).$$

Из этого уравнения следует

$$\cos(180^0 - a) = \frac{\sin\delta - \sin\varphi \sin h}{\cos\varphi \cos h}.$$

Вычислением находим, что $\sin\varphi \sin h = 0{,}49410$. С другой стороны $\sin\delta = 0{,}33381$. Мы получаем, таким образом, в числителе отрицательную величину $-0{,}16029$ и, так как знаменатель во всяком случае положителен, отрицательную величину для $\cos(180^0 - a)$. Чтобы устранить знак минус, мы заменяем $\cos(180^0 - a)$ через $-\cos a$ и получаем

$$\cos a = \frac{0{,}16029}{\cos\varphi \cos h}$$

$$\begin{array}{rl} \log\cos\varphi = & 9{,}82427 - 10 \\ \log\cos h = & 9{,}87411 - 10 \\ \hline \log N = & 19{,}69838 - 20 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log Z = & 29{,}20490 - 30 \\ \log N = & 19{,}69838 - 20 \\ \hline \log\cos a = & 9{,}50652 - 10 \end{array}$$

$$a = 71^0 16{,}6'.$$

Азимут солнца равен $71^0 16{,}6'$; оно находится, следовательно, в направлении W $18^0 43{,}4'$ S[1]).

[1]) Прим. переводчика. Проделаем ту-же задачу для Москвы ($\varphi_1 = 55^0 45{,}3'$). Величина часового угла σ для 3 час. 15 мин. пополудни остается той-же: $\sigma = 48^0 15'$, так как она не зависит от широты места; сторона морского треугольника $PX = 90^0 - \delta$ не изменится, так как δ тоже не зависит от широты места; сторона-же $PZ = 90^0 - \varphi_1$. Высоту h_1 находим из уравнения

$$\sin h_1 = \sin\varphi_1 \sin\delta + \cos\varphi_1 \cos\delta \cos\sigma$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin\varphi_1 = & 9{,}91732 - 10 \\ \log\sin\delta = & 9{,}52350 - 10 \\ \hline \log S_1 = & 19{,}44082 - 20 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log\cos\varphi_1 = & 9{,}75030 - 10 \\ \log\cos\delta = & 9{,}97435 - 10 \\ \log\cos\sigma = & 9{,}81911 - 10 \\ \hline \log S_2 = & 29{,}54376 - 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} S_1 = & 0{,}27594 \\ S_2 = & 0{,}34975 \\ \hline \sin h_1 = & 0{,}62569 \\ h_1 = & 38^0 44{,}0'. \end{array} \qquad \log\sin h_1 = 9{,}79636 - 10$$

Задача 2. 25 апреля склонение солнца $\delta = +13^0 7{,}2'$. В котором часу заходит оно в этот день в Берлине

$$(\varphi = 52^0 30{,}3' \text{ сев. шир.})?$$

Решение. Нам даны три стороны параллактического тр-ка. Так как нам надо определить время, когда солнце находится на высоте горизонта, то $h = 0^0$ и, следовательно, по фиг. 17, $ZX_2 = 90^0$. Надо найти часовой угол X_2PZ, соответствующий этому положению. Он находится при помощи уравнения

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \sigma.$$

Если в это уравнение вставить $h = 0^0$, т. е. $\sin h = 0$, то мы получим

$$\cos \sigma = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

Так как $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{tg} \delta$ в нашем случае положительны, то σ — тупой угол. Заменяя σ его острым дополнительным углом, получаем

$$\cos (180^0 - \sigma) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

откуда найдем, что $\sigma = 107^0 40{,}6'$.

Превращая этот угол в часы и минуты, мы делим его градусную величину на 15^0 и получаем

7 часов 10,7 минуты.

Солнце заходит, следовательно, через 7 часов 10,7 минуты после своей верхней кульминации, т. е. после полудня. Оно должно было бы поэтому зайти в 7 часов 10,7 минуты пополудни.

Найденное время однако не есть время, показываемое Берлинскими часами. Это доказывают следующие рассуждения.

Звезды вращаются с постоянной скоростью с востока на запад вокруг оси мира. Время одного такого оборота называется *звездными сутками*. Разделим эти сутки на 24 часа. Задавая время какого либо события в часах и минутах этих суток, говорят, что задано *звездное время*. Найденное выше время 7 часов 10,7 минуты и есть звездное время. Хотя

Азимут a_1 определяется из уравнения

$$\cos (180^0 - a_1) = \frac{\sin \delta - \sin \varphi_1 \sin h_1}{\cos \varphi_1 \cos h_1}$$

$$a_1 = 65^0 17{,}8'.$$

Солнце находится в направлении W $24^0 42{,}2'$ S.

солнце и вращается вместе со звездным небом, но после одного оборота оно проходит через нулевой вертикальный круг (меридиан места) не одновременно с теми звездами, с которыми оно прошло через этот меридиан накануне, а в среднем на 4 минуты позже. Отсюда следует,что солнце имеет собственное движение по небу с запада на восток. Благодаря собственному движению солнце описывает на небе большой круг, эклиптику, в течение одного года. Время от одной солнечной кульминации до другой называется *истинными солнечными сутками.* Истинные солнечные сутки, как было указано выше, переменной длины; мы не можем, поэтому, вести по ним счет времени. Однако и неизменные звездные сутки не годятся для этого, так как их начало передвигалось бы постепенно через все времена дня. Поэтому время считают условно по солнцу, двигающемуся равномерно по небесному экватору с запада на восток и совершающему один оборот по экватору в то-же время, в какое истинное солнце совершает один оборот по эклиптике. Время от одной кульминации этого воображаемого или среднего солнца до другой называют *средними солнечными сутками.* Это среднее солнечное время мы и употребляем в житейском обиходе; $\frac{1}{24}$ часть этих суток есть час, показываемый нашими часами. Время 7 часов 10,7 минуты, найденное в звездном времени, необходимо поэтому привести к среднему солнечному. Мы рассуждаем при этом следующим образом. Среднее солнце отстает от звезд, оно должно поэтому ежедневно удаляться по отношению к звезде, одновременно с которой оно сегодня кульминирует, все более с запада на восток. Так как однако траектория представляет замкнутую линию (окружность), то удаление с одной стороны влечет за собою приближение с другой стороны. Поэтому, если среднее солнце через год опять встречается с той-же звездой, оно должно сделать на один оборот меньше вокруг земли, чем звезда. Наблюдения показывают, что от одной одновременной кульминации истинного солнца с какой-либо звездой до следующей проходит 366 звездных суток. Так как время оборота среднего солнца принято равным времени оборота истинного солнца, то время оборота среднего солнца тоже равно 366 звездным суткам. Но в это время оно сделало на один оборот вокруг земли меньше, чем звезда. Следовательно

366 звездных суток = 365 средним солнечным суткам.

Отсюда 1 звездные сутки равны $\frac{365}{366}$ средних солнечных. Чтобы перевести звездное время в среднее солнечное, достаточно, следовательно, умножить звездное время на $\frac{365}{366}$. Для упрощения этого умножения, множитель $\frac{365}{366}$ представляют в виде:
$$\frac{365}{366} = \frac{366-1}{366} = 1 - \frac{1}{366} = 1 - 0{,}00273.$$

Отсюда следует, что для получения среднего солнечного времени надо звездное время умножить на 0,00273 и полученное произведение отнять от данного звездного времени. В нашем случае 7 часов 10,7 минуты = 430,7 минуты, после умножения на 0,00273 с точностью до 0,1, дают 1,2 минуты, и таким образом 7 часов 10,7 минут звездного времени равны 7 часам 9,5 минуты среднего солнечного. Солнце заходит, следовательно, через 7 часов 9,4 мин. среднего солнечного времени после своей верхней кульминации. Если бы солнце кульминировало в 12 часов, то оно зашло бы в 7 часов 9,5 мин. Но наши часы показывают 12 часов во время кульминации среднего солнца. Мы должны поэтому для определения времени захода истинного солнца знать разницу во времени между кульминацией истинного и среднего солнц. Эту разницу, даваемую в особых таблицах на каждый день года, называют *уравнением времени*.

Под уравнением времени понимают число минут и секунд, которые надо прибавить к истинному солнечному времени, чтобы получить среднее.

Для 25-го апреля уравнение времени равно — 2,0 минуты, т. е. истинное солнце кульминирует по среднему солнечному времени в 11 час. 58 мин. Так как заход солнца происходит через 7 час. 9,5 мин. после верхней кульминации, то оно заходит в 7 час. 7,5 минут.

Однако берлинские часы указывают при заходе солнца совсем не это время. Очевидно, что одинаковое время имеют только те места, которые лежат на одном меридиане, ибо солнце кульминирует одновременно только в таких местах. В большинстве мест будет поэтому существовать разница в показании часов, которая будет тем больше, чем больше расстояние между местами в направлении с запада на восток. Это привело, в особенности с введения железнодорожного сообщения и телеграфа, ко многим неудобствам. Поэтому всю земную поверхность разбили на 24 равных сферических двуугольника, которые ограничены меридианами и углы которых равны 15^0. Кроме того условлено, что все места каждого двуугольника имеют одно и то-же время — местное время среднего меридиана. Первым из этих двуугольников выбран тот, средний меридиан которого проходит через Гринвич. Время этого двуугольника называется западно-европейским временем. Следующий двуугольник, средний меридиан которого проходит через Старгард и Горлиц, имеет *средне-европейское время*, а затем идет двуугольник с восточно-европейским временем. Разница во времени, показываемом часами двух смежных двуугольников, всегда равна одному часу. Для всякого места, лежащего внутри двуугольника, для перевода местного времени во время среднего меридиана производится сначала определение разности долгот меридиана данного места и среднего меридиана. Затем эта разница, выраженная в градусах и минутах, делится на 15 и таким образом переводится в звездное время. После умножения звездного времени на (1 — 0,00273), получаем среднее солнечное время. Найденное таким образом среднее солнечное время называется часовой долготой места; для получения времени среднего меридиана в местах, лежащих на запад от среднего меридиана, оно прибавляется к местному времени, в местах более восточных, — отнимается от местного времени.

Берлин лежит в двуугольнике со средне-европейским временем, средний меридиан которого лежит на 15^0 восточн. долг. от Гринвича. Так как Берлин лежит на $13^0 23{,}7'$ вост. долг., то разница в долготах Берлина и среднего меридиана $= 1^0 36{,}3' = 96{,}3'$. Делением на 15 находим разницу в 6,42 минуты звездного времени. Умножив звездное время на (1 — 0,00273), мы получим 6,40 минут среднего солнечного времени. Так как Берлин лежит на запад от среднего меридиана, то часовая долгота Берлина $l = + 6{,}4$ мин. 25 апреля солнце заходит в Берлине в 7 час. 13,9 мин. по среднеевропейскому времени.[1])

Задача 3. 21-го декабря склонение солнца $\delta = -23^0 30'$. В какой точке горизонта заходит в этот день солнце в Мюнхене ($\varphi = 48^0 9'$ сев. шир.)?

Решение. Из параллакт. тр-ка PZX (фиг. 17) мы получаем уравнение

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h + \cos\varphi \cos h \cos(180^0 - a).$$

Отсюда следует, что, так как для времени захода солнца $h = 0^0$,

$$\cos(180^0 - a) = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \quad \text{или} \quad \cos a = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

21-го декабря склонение δ отрицательно. По формуле

---

1) Та-же задача для Москвы.

$$\cos\sigma_1 = -\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\delta = -\operatorname{tg} 55^0 45,3' \operatorname{tg} 13^0 7,2'$$

$$\sigma_1 = 110^0 43'$$

Солнце заходит через 7 часов 20,0 минут звездного времени после своей верхней кульминации. Переводя это время в среднее солнечное, т. е. умножая 7 час. 20 мин. на $\frac{365}{366} = 1 - 0{,}00273$, получим, что в Москве 25 апреля солнце заходит через 7 часов 18,8 минуты среднего солнечного времени после своей верхней кульминации. Так как величина уравнения времени не зависит от точки наблюдения, то и для Москвы уравнение времени равно 25 апреля — 2 мин. и, следовательно, солнце заходит в 7 часов 16,8 минуты местного времени.

До 1920 года общероссийским временем считалось Пулковское время, т. е. местное время Пулковской Обсерватории ($\varphi = 59^0 56{,}5'$ сев. шир., $\lambda = 30^0 18{,}4'$ вост. долг.) Москва лежит на $37^0 34{,}3'$ вост. долг. Разница в долготе равна, следовательно, $7^0 15{,}9'$, а во времени на $\frac{7}{15}$ часа $\frac{15{,}9}{15}$ минуты $= 29{,}1$ минуты звездного или 29 минут среднего солнечного времени. По пулковскому времени солнце зашло бы в Москве в 6 часов 47,8 минуты пополудни. (Так как Пулково лежит западнее Москвы, то московское время опережает пулковское.)

С 1920 года в России введено восточно-европейское время (время, соответствующее двуугольнику, средний меридиан которого проходит на 30^0 восточнее Гринвича). Разница в долготе Москвы и 30-го меридиана: $7^0 34{,}3'$, а во времени в 28,4 минуты звездного или 28,3 среднего солнечного времени. 25-го апреля солнце заходит в Москве в 6 часов 48,5 минуты пополудни по восточно-европейскому времени. (Прим. перев.).

$\sin(-\delta) = -\sin\delta$ мы получаем для правой стороны нашего уравнения положительную величину; $\cos a$, следовательно, положителен и азимут a есть острый угол. Вычисляя, получаем, что $a = 53^0 17{,}8'$. После вычитания полученного угла из 90^0, мы находим, что солнце заходит в этот день в направлении $W\,36^0 42{,}2'\,S$.[1])

Для определения точки захода солнца, годится также и прямоугольный при N сферический тр-к PNX_2 (фиг. 17). В этом тр-ке катет $PN = \varphi$ и гипотенуза $PX_2 = 90^0 - \delta$. По § 8 между тремя сторонами этого тр-ка существует зависимость $\cos(90^0 - \delta) = \cos\varphi \cos NX_2$. Откуда следует, что

$$\cos NX_2 = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

После вычисления, получаем $NX_2 = 126^0 42{,}2'$, т. е. X_2 лежит на $36^0 42{,}2'$ южнее точки запада, как и найдено выше. Угловое расстояние точки захода какой-либо звезды от точки запада называется **амплитудой заката** этой звезды. Угловое расстояние точки восхода звезды от точки востока называется соответственно **амплитудой восхода**.

Задача 4. Склонение солнца δ равно 4-го мая $+ 15^0 0{,}7'$. Наблюдения показали, что в этот день солнце зашло через 7 часов 25 минут звездного времени после своей верхней кульминации. Какова географическая широта места наблюдения?

Решение. К стороне Zx (фиг. 17) применяют теорему косинусов и получают, что, так как $h = 0^0$, $\cos\sigma = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$; откуда следует уравнение, пригодное для нахождения φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\cos\sigma \operatorname{ctg}\delta.$$

---

1) Сделаем расчет для Петрограда: $\varphi_1 = 59^0 56{,}5'$

$$\cos a_1 = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi_1} = -\frac{\sin - 23^0 30'}{\cos 59^0 56{,}5'} = +\frac{\sin 23^0 30'}{\cos 19^0 56{,}5'} =$$

$$= 0{,}7961 = \cos 37^0 15{,}5'$$

$$a_1 = 37^0 15{,}5'.$$

Вычитаем из 90^0 и находим, что солнце заходит в этот день в Петрограде в направлении $W\,52^0 44{,}5'\,S$. (Прим. перев.).

Величину часового угла σ получают после умножения времени на 15, $\sigma = 111^0 15'$. Так как $\cos 111^0 15' = -\cos 68^0 45'$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos 68^0 45' \operatorname{ctg} \delta,$$

$$\varphi = 52^0 30{,}2'.$$

Задача 5. В точке северного полушария, широту которой надо определить, установлен вертикально стержень, длиною $l = 2{,}5$ метров. Через 3 часа 40 минут звездного времени после верхней кульминации солнца, он отбрасывает на горизонтальную плоскость тень, длиною $l_1 = 3{,}831$ м. Какова географическая широта места, если склонение солнца в день наблюдения $\delta = +15^0 20'$.

Решение. Вертикально установленный стержень и его тень суть катеты прямоугольного тр-ка, направление гипотенузы которого определяет высоту солнца на небе.

Вычисляя высоту солнца по формуле

$$\operatorname{tg} h = \frac{l}{l_1},$$

мы найдем, что $h = 33^0 7{,}6'$.

Часовой угол, получаемый умножением времени на 15, равен $\sigma = 55^0$.

На основании теоремы косинусов мы можем написать уравнение

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \sigma,$$

из которого можно найти φ. Если бы мы заменили в этом уравнении одну функцию φ другой, например $\sin \varphi$ через $\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$, то решение представило бы большие трудности. Гораздо быстрее приводят к цели следующие преобразования. Сначала делят все уравнение на коэффициент при $\sin \varphi$ и получают

$$\frac{\sin h}{\sin \delta} = \sin \varphi + \operatorname{ctg} \delta \cos \sigma \cos \varphi.$$

Сделаем теперь подстановку $\operatorname{ctg} \delta \cos \sigma = \operatorname{tg} \psi$, что всегда возможно, так как тангенс угла может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Получаем:

$$\frac{\sin h}{\sin \delta} = \sin \varphi + \operatorname{tg} \psi \cos \varphi.$$

Умножив обе части равенства на $\cos\psi$ и применив формулу разложения синуса суммы, мы найдем, что

$$\sin(\varphi+\psi)=\frac{\sin h\cos\varphi}{\sin\delta}.$$

Вычисление дает для ψ величину $\psi=64^\circ 27{,}0'$. Для $\varphi+\psi$ получаются два значения, $(\varphi+\psi)_1=63^\circ\,2{,}5'$ и $(\varphi+\psi)_2=116^\circ\,57{,}5'$. Точка наблюдения лежит на северном полушарии; мы можем, поэтому, воспользоваться только вторым ответом, так как только он даст нам положительное значение для широты. Широта у точки наблюдения равна $52^\circ\,30'$.

Задача 6. При высоте $h=42^\circ\,40'$ солнце находится в Дрездене (сев. шир. $\varphi=+51^\circ\,2{,}3'$) как раз на юго-западе. Как велико склонение солнца в день наблюдения?

Решение. Указание, что солнце находится на юго-западе, определяет азимут солнца: $a=45^\circ$. Склонение определяется при помощи теоремы косинусов. Вычисление дает $\delta=11^\circ\,32{,}5'$.

Задача 7. Берлин лежит на $\varphi=52^\circ\,30{,}3'$, с. ш., а Неаполь на $\varphi_1=40^\circ\,51{,}8'$ сев. шир. На сколько самый длинный день в Неаполе короче, чем в Берлине, если в этот день склонение солнца $\delta=+23^\circ\,30'$? (1 час 39,4 минуты).

Задача 8. Солнце заходит в Берлине в один из весенних дней через 7 часов 10 минут после своей верхней кульминации. Как велико в этот день его склонение δ и каков азимут точки захода, если Берлин лежит на $\varphi=52^\circ\,30'$ сев. шир.? ($\delta=12^\circ\,59{,}6'$, $a=111^\circ\,40{,}51'$).

Задача 9. 21 июня склонение солнца $\delta=23^\circ\,30'$. На какой широте день в эти сутки равен только трем часам? ($\varphi=-64^\circ\,47{,}8'$).

Задача 10. 30-го мая склонение солнца $\delta=+21^\circ\,46'$. На сколько градусов точка захода солнца лежит севернее в Стокгольме ($\varphi=59^\circ\,21'$ сев. шир.), чем в Вене ($\varphi_1=48^\circ\,13'$ сев. шир.)? (На $12^\circ\,51{,}2'$).

Задача 11. 16-го сентября склонение солнца $\delta=+2^\circ\,44'$. В какой точке неба находится оно в Берлине ($\varphi=52^\circ\,30'$ сев. шир.) через 4 ч. 30 мин. после своей верхней кульмиминации? ($h=15^\circ\,41{,}8'$, $a=106^\circ\,32{,}7'$).

Задача 12. Страсбург лежит на $\varphi = 48^\circ 35'$ сев. шир. Определить длину тени, бросаемой мюнстерской башней 13-го июня в 4 часа 20 мин. пополудни, если высота башни $h_1 = 142$ метра, а склонение солнца в этот день $\delta = +23^\circ 13'$? (214,18 м.).

Задача 13. Через сколько времени после своей верхней кульминации солнце находится на высоте $h = 35^\circ$ 13-го июня в Кельне ($\varphi = 50^\circ 56{,}3'$ сев. шир.), если склонение солнца в этот день равно $\delta = +23^\circ 12{,}3'$? (4 часа 9,9 мин.).

Задача 14. Точка наблюдения лежит на $\varphi = 52^\circ 30'$ сев. шир. Через 3 часа 40 мин. после своей верхней кульминации солнце находится на высоте $h = 33^\circ 8'$. Каков азимут солнца a в момент наблюдения, и как велико склонение солнца δ в этот день? ($\delta = 15^\circ 20{,}3'$, $a = 70^\circ 37{,}5'$).

Задача 15. Через сколько времени после своей верхней кульминации находится солнце в Вене ($\varphi = 48^\circ 12'$ сев. шир.) во время самого длинного дня ($\delta = 23^\circ 30'$) прямо на западе? На какой высоте находится солнце в этот момент? Сколько часов остается еще до захода солнца (4 часа 28,3 минуты, $h = 32^\circ 20{,}2'$, 3 часа 28,1 мин.).

§ 17. СИСТЕМА ЭКЛИПТИКИ.

1. *Система эклиптики.* Для определения положения точки на небесной сфере употребляют, кроме системы горизонта и экватора, еще *систему эклиптики.* Ось этой системы, через которую проходят большие круги, есть тот диаметр солнца, который перпендикулярен к плоскости эклиптики, т. е. к плоскости того круга, который солнце описывает при собственном своем движении. Концы этого диаметра называются *полюсами* эклиптики, а полукруги больших кругов, стягиваемые этим диаметром, называются *эклиптическими меридианами или меридианами эклиптики.* Круги, образованные плоскостями, перпендикулярными к оси эклиптики, называются *эклиптическими параллелями или параллельными кругами системы эклиптики.* Единственный большой круг между ними есть сама эклиптика. Плоскость эклиптики наклонна к плоскости небесного эква-

тора под углом $\varepsilon = 23^{0}30'$; тот же угол образует также и ось системы эклиптики с перпендикулярной небесному экватору мировой осью. Угол ε называется *наклоном эклиптики*. Угол, которым определяется параллельный круг, проходящий через звезду, называется астрономической широтой.

Под *астрономической широтой* (b) какой либо звезды понимают угол, образуемый радиусом, идущим к данной звезде, с плоскостью эклиптики.

Астрономическую широту считают от 0^{0} до 90^{0} и различают северную или положительную и южную или отрицательную.

За нулевой меридиан, с помощью которого определяется положение звезды на параллельном кругу, принимается в системе эклиптики меридиан, проходящий через одну из точек пересечения эклиптики и небесного экватора — через точку весеннего равноденствия. Угол, которым определяется положение звезды на параллельном круге, называется *астрономической долготой*.

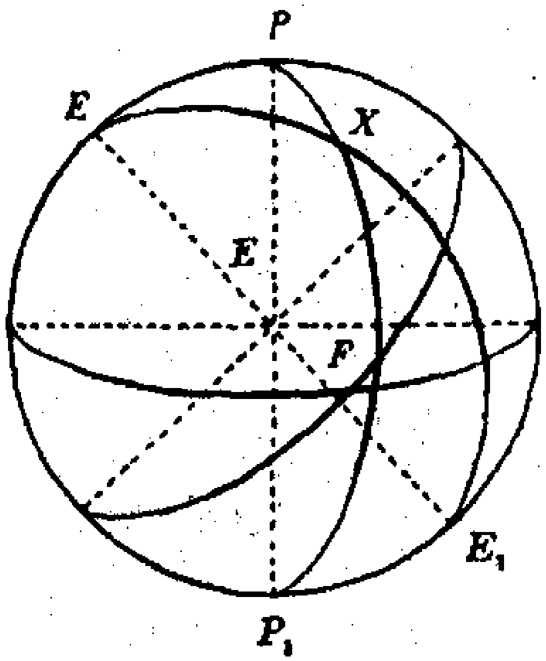
Под астрономической долготой какого либо светила понимают угол, образованный плоскостью эклиптического меридиана, проходящего через данную звезду, с плоскостью эклиптического меридиана, проходящего через точку весеннего равноденствия.

Астрономическая долгота считается также, как прямое восхождение: с запада через юг на восток, от 0^{0} до 360^{0}.

Астрономическая долгота и астрономическая широта — величины неизменные для каждой звезды.

Система эклиптики применяется главным образом в задачах, касающихся солнца: так как солнце движется в эклиптике, то его астрономическая широта всегда равна 0^{0}.

2. *Астрономический треугольник*. Как параллакт. тр-к получился от соединения системы экватора и горизонта, так от соединения систем экватора и эклиптики возникает астрономический треугольник ($\triangle EPX$ фиг. 18). Вершинами этого тр-ка являются полюс эклиптики E, полюс мира P



Фиг. 18

и звезда X. Как видно из чертежа, в этот тр-к входят следующие величины:

Сторона $EP = \varepsilon$ наклон эклиптики.

Сторона $PX = 90^0 - \delta$ дополнение до 90^0 склонения звезды.

Сторона $EX = 90^0 - b$ дополнение до 90^0 астрономической широты звезды.

$\angle XEP = 90 - l$ дополнение до 90^0 астрономической долготы звезды, ибо EFE_1 есть нулевой меридиан системы эклиптики, $\angle EPX = 90^0 + \alpha$ прямое восхождение звезды, увеличенное на 90^0, ибо PFP_1 есть колюр точки весеннего равноденствия.

Меридианы EPE_1 и PEP_1 не указаны на чертеже.

3. Задача 1. 28-го апреля склонение солнца $\delta = +14^0 5{,}0'$. Как велики в этот день прямое восхождение и астрономическая долгота его?

Решение. Применяя теорему косинусов, мы можем написать

$$\cos(90^0 - b) = \cos\varepsilon\cos(90^0 - \delta) + \sin\varepsilon\sin(90^0 - \delta)\cos(90^0 + \alpha).$$

Так как для солнца $b = 0^0$, то $\cos(90^0 - b) = 0$, далее $\cos(90^0 + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Получаем уравнение

$$0 = \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,$$

из которого следует $\sin\alpha = \operatorname{tg}\delta\operatorname{ctg}\varepsilon$

вычисление дает для α два значения: $\alpha_1 = 35^0 14{,}2'$ и $\alpha_2 = 144^0 45.8'$.

Для нахождения астрономической долготы применяют уравнение

$$\cos(90^0 - \delta) = \cos\varepsilon\cos(90^0 - h) + \sin\varepsilon\sin(90^0 - b)\cos(90^0 - l).$$

Отсюда следует, что, так как $b = 0$, $\sin\delta = \sin\varepsilon\sin l$, а отсюда

$$\sin l = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}.$$

Получаем для l два значения $l_1 = 37°36,4'$ и $l_2 = 142°23,6'$. Значения α_1 и l_1 определяют прямое восхождение и астрономическую долготу солнца для 28 апреля, α_2 и l_2 суть прямое восхождение и астрономическая долгота солнца для того дня, когда солнце при обратном движении с северного небесного полушария на южное опять имеет склонение $\delta = +14°5,0'$. Этот день, который можно найти в таблицах склонения солнца есть 16-ое августа.

Задача 2. Склонение звезды Альдебаран $\delta = 16°18,5'$, а прямое восхождение $\alpha = 67°32,5'$. Как велики его астрономические широта и долгота?

Решение. По формуле $\sin b = \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha$ (ср. зад. 1), получаем, $\sin b = -0{,}09616$, откуда $\sin(-b) = 0{,}09616$. Дальнейшие вычисления дают для астрономической широты значение $b = -5°31,1'$. Астрономическая долгота может быть теперь найдена с помощью теоремы синусов. По этой формуле

$$\frac{\sin(90° - l)}{\sin(90° - \delta)} = \frac{\sin(90° + \alpha)}{\sin(90° - b)} \text{ или } \frac{\cos l}{\cos\delta} = \frac{\cos\alpha}{\cos b}.$$

l можно теперь определить из уравнения $\cos l = \dfrac{\cos\alpha\cos\delta}{\cos b}$ отсюда следует $l = 68°23,3'$.

ЧАСТЬ IV.

РЕШЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ ПОМОЩИ ЕГО УГЛОВ.

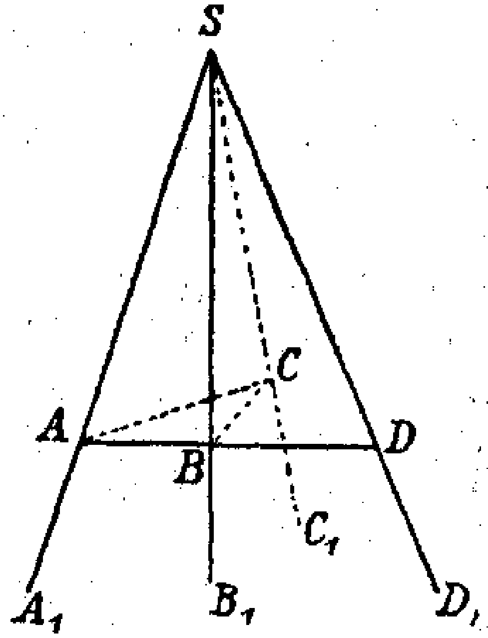
§ 18. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МНОГОГРАННЫЙ УГОЛ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

1. *Многогранный угол.* Многогранный телесный угол *образуется при пересечении* нескольких плоскостей, если ребра их пересечения проходят все через одну точку. Эта точка называется вершиной угла. Линейные углы двугранных углов, образованных его плоскостями, называют **линейными** углами многогранного угла, а углы, образованные двумя соседними ребрами, **плоскими** углами многогранного угла.

При пересечении трех плоскостей возникает трехгранный угол. Для него справедлива

Теорема 1. В трехгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего.

Доказательство. (фиг. 19). Будем вращать грань B_1SC_1 около ребра SB_1 до тех пор, пока она совпадет с плоскостью грани A_1SB_1 и примет положение B_1SD. Проведем в плоскости грани A_1SB_1 произвольную прямую ABD. Отложим на SC_1 отрезок $SC = SD$. Соединим точку C с A и B. $\triangle SBD \cong SBC$ по первому постулату конгруэнтности (они имеют по равному углу, заключенному между равными сторонами), следовательно, $BD = BC$. Поэтому должно быть $AD > AC$, так как и $AB + BC > AC$. Таким образом в тр-ках SAD и SAC, имеющих по две равные стороны, третьи стороны AD и AC не равны, а следовательно не равны противолежащие им углы, т. е. $\angle ASD > \angle ASC$ или $ASB + BSC > ASC$.



Фиг. 19

Применив только что доказанную теорему к углам, вершины которых лежат в точках A, B и C, мы увидим, что сумма шести плоских углов, лежащих на гранях угла S, должна быть больше чем сумма трех углов, образующих тр-к ABC; т. е. больше двух прямых. Эти шесть плоских углов вместе с плоскими углами у вершины трехгранного угла S образуют сумму углов тр-ков SAB, SBC и SAC. Так как эта сумма равна шести прямым, а сумма вышеназванных шести углов больше двух прямых, то сумма $\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < 4$ прямых. Отсюда следует:

Теорема 2. В трехгранном угле сумма плоских углов меньше четырех прямых.

2. *Дополнительный угол.* Определение. Опустим из какой-либо точки, лежащей внутри трехгранного угла, три перпендикуляра на его грани и проведем через три различных пары из этих перпендикуля-

ров три плоскости; мы получим новый трехгранный угол, называемый *дополнительным* для первого.

Угол с вершиной в S_1 (фиг. 20) есть дополнительный для угла с вершиной в S.

Для лучшего уяснения понятия о дополнительных многогранных углах, мы предпошлем дальнейшему

Теорему 1. Если плоскость пересекается двумя перпендикулярными к ней плоскостями II и III, то ребро пересечения этих последних перпендикулярно первой плоскости.

Эта теорема справедлива по следующим соображениям. Восставим в точке пересечения всех трех плоскостей перпендикуляр к ребру пересечения плоскостей I и II, так чтобы он лежал в плоскости II. Этот перпендикуляр к ребру пересечения, перпендикулярен вместе с тем, по теореме 2 § 7, всей плоскости I. Повторив то-же построение на ребре пересечения плоскостей I и III, в той-же точке пересечения всех трех плоскостей, мы получим опять перпендикуляр к плоскости I, только лежащий в плоскости III. Так как в одной точке можно восставить только один перпендикуляр к плоскости, то оба эти перпендикуляра должны совпадать, а это возможно только тогда, если ребро пересечения плоскостей II и III перпендикулярно плоскости I.

Следующая теорема говорит о дополнительных углах:

Теорема 2. Каждый многогранный угол есть дополнительный угол для своего дополнительного угла.

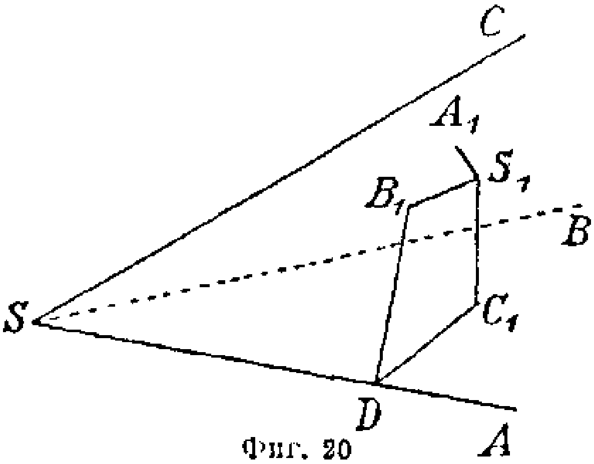
Доказательство. (фиг. 20). Грань $B_1 S_1 C_1$ дополнительного угла перпендикулярна к грани BSA, так как она содержит перпендикуляр на эту грань (теорема 1, § 7). На том же основании она перпендикулярна к грани CSA. Поэтому, по только что доказанной теореме 1, ребро SA перпендикулярно грани $C_1 S_1 B_1$ дополнительного угла. Точно так же можно доказать, что ребро SC перпендикулярно к грани $B_1 S_1 A_1$ и SB перпендикулярно к грани $C_1 S_1 A_1$. Таким образом, согласно с определением дополнительного угла, теорема доказана.[1])

---

1) Читатель, знакомый с векторной алгеброй, легко выведет эту теорему из формулы $[[a_1\ a_2][a_3\ a_2]] = a_2 \cdot a_3\, a_2\, a_1$. (Ред.)

С помощью последней теоремы доказывают две следующие.

Теорема 3. Плоские углы дополнительного многогранного угла дополняют линейные углы основного многогранного угла до 180^0.



Фиг. 20

Доказательство (фиг. 20). Углы $\angle C_1$ и $\angle B_1$ четыреугольника $S_1C_1DB_1$ прямые по построению. Следовательно: сумма $\angle C_1S_1B_1 + \angle C_1DB_1$ должна равняться двум прямым. Угол $C_1S_1B_1$ есть плоский угол дополнительного угла, а угол C_1DB_1 есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями CSA и BSA, ибо, как выше было доказано, прямая SA перпендикулярна к плоскости $S_1C_1DB_1$. $\angle C_1DB_1$ есть, следовательно, один из линейных углов многогранного угла с вершиной в точке S. Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 4. Линейные углы дополнительного многогранного угла дополняют плоские углы основного многогранного угла до 180^0.

Доказательство. Так как по теореме 2 основной многогранный угол можно считать дополнительным для его дополнительного, то справедливость этой теоремы следует из теоремы 3.

3. *Дополнительный или полярный треугольник.* Опишем вокруг трехгранного угла сферу, центр которой совпадает с вершиной угла. На поверхности этой сферы трехгранный угол образует сферический тр-к ABC. Если a, b и c суть грани, а α, β и γ — линейные углы трехгранного угла, то стороны и углы сферического тр-ка будут равны соответственным элементам трехгранного угла. Построим при какой либо точке S_1 внутри нашего трехгранного угла его дополнительный угол. По п. 2 его плоские углы равны $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$ и $180^0 - \gamma$, а линейные: $180^0 - a$, $180^0 - b$, $180^0 - c$. Будем передвигать этот дополнительный угол так, чтобы его ребра оставались параллельными самим себе, до тех пор, пока

его вершина S_1 не совпадет с центром сферы. Углы остаются при перемещении неизменными. Дополнительный трехгранный угол очертит, следовательно, на сфере сферический тр-к со сторонами $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$ и $180^0-\gamma$ и с углами 180^0-a, 180^0-b и 180^0-c. Этот тр-к называется *дополнительным или полярным* для первого, так как его вершины представляют полюсы больших кругов, образующих данный тр-к.

§ 19. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ ДЛЯ УГЛОВ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Уже при выводе формулы, выражающей величину площади сферического тр-ка, обращает на себя внимание то обстоятельство, что площади сферических тр-ков, лежащих на одной сфере, зависят только от величины углов. В отличие от условий планиметрии, углы сферического тр-ка не только определяют его форму, как углы плоского тр-ка, но определяют и его *величину*. Можно поэтому вывести формулы для определения всех элементов сферического тр-ка по его углам. Применение полярного тр-ка значительно облегчает вывод этих формул. Само собою разумеется, что мы можем применить найденную нами в § 6 теорему косинусов к тр-ку полярному для данного тр-ка со сторонами a, b и c и углами α, β и γ. Для полярного тр-ка мы получим:

$$\cos(180^0-\alpha)=\cos(180^0-\beta)\cos(180^0-\gamma)$$
$$+\sin(180^0-\beta)\sin(180^0-\gamma)\cos(180^0-a)$$

или

$$-\cos\alpha=+\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\sin a.$$

После умножения на (-1), имеем

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin a.$$

Эта формула называется *теоремой косинусов для углов сферического треугольника*. При помощи ее можно вычислить третий угол сферического тр-ка по данным двум другим углам и стороне между ними. Эта же формула применяется и для вычисления сторон тр-ка по трем данным углам.

Для этого ее переписывают в виде

$$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Для того, чтобы уяснить себе, какой формуле плоскостной тригонометрии соответствует только-что выведенная формула, надо заменить $\cos a$ через $1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$. Введя затем, вместо a, величину $\frac{a_1}{r}$, получаем $1 - 2\sin^2\frac{a_1}{2r}$. Вычитаемое этого выражения делается, при достаточно большом r равным $\frac{a_1^2}{2r^2}$ и приближается к нулю с увеличением r до $r = \infty$. Разность $1 - 2\sin^2\frac{a_1}{2r}$ принимает тогда значение 1. Мы получаем, таким образом, для плоского тр-ка, как следствие из теоремы косинусов для углов сферического тр-ка, выражение

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

или

$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$$

Правая часть этого равенства равна, по теореме сложения тригонометрических функций, $\cos(\beta + \gamma)$. Отсюда получается, что $\cos(\beta + \gamma) = -\cos\alpha$. Из этого равенства следует, что α есть дополнение до 180^0 суммы $\beta + \gamma$, т. е. что в плоском тр-ке сумма углов равна двум прямым.

§ 20. ДАЛЬНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Из найденной в предыдущем параграфе теоремы косинусов для углов сферического тр-ка можно вывести две формулы для прямоугольного тр-ка. Эти формулы дают возможность вычислить катеты и гипотенузу прямоугольного тр-ка по данным углам.

Вставив в формулу, представляющую теорему косинусов, для γ величину $\gamma = 90^0$, мы получим $\cos\alpha = \sin\beta\cos a$ и отсюда

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

При помощи этой формулы по углам прямоугольного сферического тр-ка вычисляются его катеты.

Написав формулу теоремы косинусов для γ: $\cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos c$ и подставив $\gamma = 90^0$, найдем

$$\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

По этой формуле вычисляется гипотенуза по данным углам тр-ка.

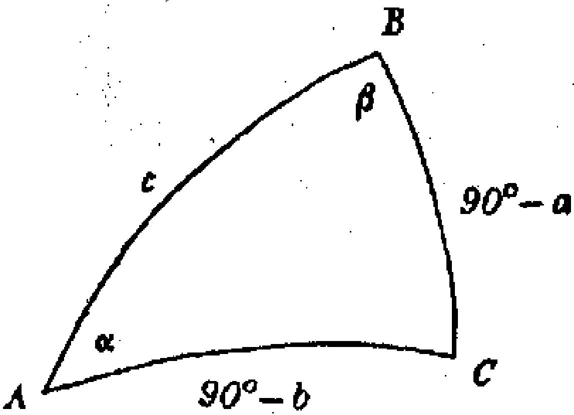
Переходя обычным путем (§ 19) к плоскому тр-ку, получаем $\cos a = 1$ и точно также $\cos c = 1$. Обе найденные формулы переходят в следующие:

$$\cos\alpha = \sin\beta \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = 1.$$

Обе формулы говорят, что $\beta = 90^0 - \alpha$, т. е. что в плоском прямоугольном тр-ке сумма острых углов равна 90^0.

Мы имеем теперь всего, вместе с формулами, найденными в § 8, шесть формул для прямоугольного сферического треугольника. Для облегчения запоминания этих довольно сложных формул употребляют

Правило Непера: Если мы, рассматривая прямоугольный сферический тр-к, заменим катеты их дополнениями до 90^0 и не будем принимать во внимание прямой угол, то косинус каждого элемента равен произведению котангенсов прилежащих к нему элементов и произведению синусов не прилежащих элементов.



Фиг. 21

Начертим прямоугольный сферический тр-к (фиг. 21). По нашему правилу

$$\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$$

$$\cos c = \sin(90^0 - a)\sin(90^0 - b) = \cos a \cos b$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}(90 - b)\operatorname{ctg} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta \sin(90 - a) = \sin\beta \cos a \qquad \text{или}$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \quad \text{и т. д.}$$

Задача. Углы прямоугольного сферического тр-ка, прилежащие к гипотенузе, равны $\alpha = 65^0\,17'$ и $\beta = 58^0\,25'$. Как велики стороны тр-ка? ($a = 60^0\,36{,}5'$ $b = 54^0\,47{,}6'$ $c = 73^0\,33{,}7'$).

§ 21. ШЕСТЬ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

1. С помощью четырех формул для прямоугольного тр-ка, найденных в §§ 8, 2 и 3 и двух формул § 20, решаются для частного случая прямоугольного сферического тр-ка все шесть основцых задач, указанные в п. 1 § 6. Ход решения отдельных задач, указанный ниже, не есть единственно-возможный. Легко найти и другие способы решения. Мы будем применять в дальнейшем только такие формулы, которые позволяют определять неизвестные элементы только по данным задачи, без пользования вычисленными элементами. Этим достигается большая точность, так как неизбежные ошибки при вычислении неизвестных элементов увеличивались бы при применении этих элементов для дальнейших вычислений.

2. Когда какой либо элемент находится по его косинусу, тангенсу или котангенсу, решение всегда однозначно, так как эти функции положительны для острых и отрицательны для тупых углов. Иначе при определении величины элемента по его синусу. Мы получаем при этом всегда два ответа, так как синусы углов, дополняющих друг друга до 180^0, равны между собою, так что в качестве ответа может быть взят не только острый угол, помещенный в таблицах, но и его тупое дополнение до 180^0, ибо, по п. 1 § 8, не прямые углы прямоугольного сферического тр-ка могут быть не только острыми, но и тупыми. Почти всегда сомнения могут быть разрешены на основании одной из следующих теорем.

Теорема 1. Катет прямоугольного сферического тр-ка и противолежащий ему угол всегда или оба тупые или оба острые углы.

Доказательство. Из формулы для $\operatorname{tg}\alpha$ (§ 8, п. 3) следует, что $\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg}\alpha$. Так как $\sin b$ всегда положителен, независимо от того острый или тупой угол b, то и произведение $\operatorname{tg} a \operatorname{ctg} \alpha$ должно быть всегда положительно. Это возможно только тогда, когда функции или обе положительны, т. е. a и α — оба острые углы, или обе отрицательны, т. е. когда a и α тупые углы.

Теорема 2. Если в прямоугольном сферическом тр-ке оба катета оба острые или оба тупые углы, то гипотенуза — острый угол, если же один из катетов острый, а другой тупой угол, то гипотенуза — тупой угол.

Доказательство. Из формулы $\cos c = \cos a \cos b$ следует, что в случае одинаковых знаков $\cos a$ и $\cos b$, т. е. если a и b оба тупые или оба острые углы, $\cos c$ должен быть положителен; c, следовательно, есть острый угол. Если же $\cos a$ и $\cos b$ разного знака, т. е. один из них есть острый угол, а другой тупой, то $\cos c$ отрицателен и c тупой угол.

3. *Шесть основных задач.*

Задача 1. Решить прямоугольный сферический тр-к по данным катетам (даны a и b).

Решение. Вычисление ведется по формулам

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

Решение однозначно.

Задача 2. Решить прямоугольный сферический тр-к по данным гипотенузе и катету (даны c и a).

Решение. Из уравнения $\cos c = \cos a \cos b$ определяют $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$. Угол α определяется по формуле $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$. Эта формула дает один ответ для α, так как по теореме 1 п. 2 α должен быть одновременно с a или острым или тупым. Угол β вычисляется по формуле $\cos \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$. Решение однозначно.

Задача 3. Решить прямоугольный сферический тр-к по данным гипотенузе и прилежащему углу (даны c и α).

Решение. Из формулы для $\cos \alpha$ (§ 8, п. 3) получаем $\operatorname{tg} b = \cos \alpha \operatorname{tg} c$. Сторона a находится по $\sin a$ из уравнения $\sin a = \sin c \sin \alpha$, причем, как и в задаче 2, мы получаем только один ответ. Формула для определения β следует из уравнения $\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$ и гласит $\operatorname{ctg}\beta = \cos c \operatorname{tg}\alpha$.

Задача 4. Решить прямоугольный тр-к по катету и противолежащему углу (даны a и α).

Решение. Формула $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$ дает возможность вычислить b из уравнения $\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg}\alpha$. Правая часть этого равенства, по теореме 1 п. 2-му, всегда положительна. Мы встречаемся здесь впервые со случаем двойного решения. Как тупой, так и острый углы, получаемые в ответ, годятся для b. Сторона c вычисляется из уравнения $\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$. И это уравнение дает два ответа для c. Таким образом получается как будто четыре различных решения задачи, так как каждый ответ для c можно сочетать с каждым ответом для β. Это однако не так. По теореме 2 п. 2-му, если $a < 90^0$ и мы выбираем для b острый угол, то и c должен быть острым углом; наоборот, если мы будем считат b тупым углом, c должно быть тупым. К аналогичному выводу приходим мы, если $a > 90^0$.

Угол β определяется по формуле $\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}$ (§ 20).

Задача допускает два ответа. Может однако случиться, что решение вообще невозможно. Именно: если a больше α, то правые части уравнений, из которых определяются $\sin c$ и $\sin b$, становятся больше единицы и решение, следовательно, невозможно.

Задача 5. Решить прямоугольный сферический тр-к по катету и прилежащему углу (даны a и β).

Решение. Из формулы $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$ получаем служащее для определения b уравнение $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg}\beta$. Из формулы $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$ находим $\operatorname{ctg} c = \cos\beta \operatorname{ctg} a$, и, наконец, из $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ получаем для α уравнение $\cos\alpha = \cos a \sin\beta$. Решение однозначно.

Задача 6. Решить прямоугольный сферический тр-к по обоим прилегающим к гипотенузе углам (даны α и β).

Решение. Неизвестные элементы вычисляются по формулам: $\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$; $\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ и $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$. Решение однозначно.

§ 22. ШЕСТЬ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Шесть основных задач для общего случая сферического тр-ка перечислены в п. 1 §6. Они требуют решение тр-ка по следующим элементам.

1. a, b, γ; 2. a, β, γ; 3. a, β, α; 4. a, b, c; 5. a, b, α; 6. α, β, γ.

Все эти задачи могуть быть решены посредством обоих теорем косинусов (§ 6 п. 2 и § 19) и теоремы синусов для сферического тр-ка. Задачи 1, 2, 4 и 6 лучше всего решаются применением теорем косинусов. Хотя в этом случае логарифмические вычисления несколько затрудняются, все таки этот ход решения предпочтителен, так как при нем углы определяются однозначно; теорема же синусов дает нам два значения для углов, из которых годное должно быть выбрано на основании особых соображений. В задаче 3 и 5 применение теоремы синусов неизбежно, так как в них нужно сначала вычислить по теореме синусов еще один элемент треугольника, прежде чем перейти к определению остальных элементов при помощи теорем косинусов.

Так в задаче 3 необходимо вычислить сначала b из уравнения $\sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$. Из этого уравнения получаем для b два ответа. Оба ответа годятся, если дано $\alpha < \beta$, так как тогда и a должно быть меньше b по теореме, что в сферическом треугольнике бо́льшей стороне противолежит бо́льший угол и бо́льшему углу — бо́льшая сторона (примеч. к § 26). Мы получаем поэтому, если $\alpha < \beta$, два различных тр-ка. Если же $\alpha > \beta$, то существует только одно решение, так как тогда и a должно быть больше b. Затруднения представляет вычисление c по формуле $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$, так как эта формула содержит синус и косинус неизвестного c. Ход решения следующий. Уравнение делят на $\cos b$ и получают

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \operatorname{tg} b \cos \alpha \sin c,$$

после чего вводят вспомогательный угол φ, определяемый из уравнения: $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} b \cos \alpha$. Это всегда возможно, так как тангенс может принимать все значения от 0 до ∞. Уравнение гласит, после перестановки сторон

$$\cos c + \operatorname{tg} \varphi \sin c = \frac{\cos a}{\cos b}$$

и, после умножения на $\cos \varphi$

$$\cos c \cos \varphi + \sin c \sin \varphi = \frac{\cos a}{\cos b} \cos \varphi.$$

Применяя формулу сложения тригонометрических функций, находим, что

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a}{\cos b} \cos \varphi.$$

Из этого уравнения можно определить c, после чего по теореме косинусов можно вычислить и γ.

Совершенно аналогично решается задача 5. Сначала определяется β по теореме синусов. Из значений, получаемых для β, годятся оба, если дано, что $a < b$. В этом случае мы получаем в ответе два разных тр-ка. Если-же $a > b$, то существует только одно решение, так как тогда α должно быть больше β. Затем определяем γ посредством теоремы косинусов для углов, при чем решение опять таки облегчается введением вспомогательного угла. Наконец c определяется по теореме косинусов для сторон.

В § 28 будут указаны пути, упрощающие логарифмические вычисления при решении вышеописанных задач.

§ 23. СФЕРИЧЕСКИЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

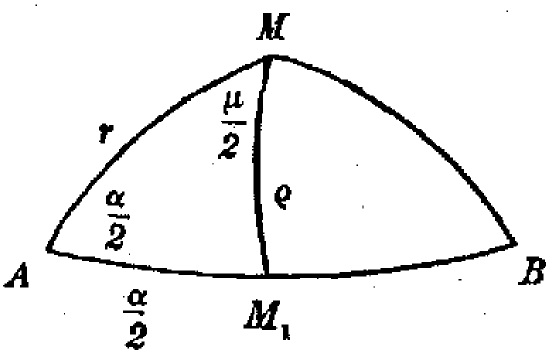
1. Фигуры на поверхности сферы могут быть образованы и посредством более чем трех кругов. Эти фигуры называются *сферическими многоугольниками* или, по числу углов, сферическими *n-угольниками*. Углы этих многоугольников, как и в треугольниках, суть углы между плоскостями больших кругов, а их стороны — центральные углы, опираю-

щиеся на соответственные дуги. Мы рассмотрим только правильные многоугольники.

Определение. Под *правильным сферическим n-угольником* понимают n-угольник с равными сторонами и равными углами.

Плоскости больших кругов, образующие эти многоугольники, пересекаются все между собою в центре сферы и образуют правильный n-гранный угол, вершина которого совпадает с центром сферы. Вокруг такого n-гранного угла можно всегда описать конус вращения, боковая поверхность которого проходит через все ребра угла. Боковая поверхность конуса проходит также через все вершины сферического n-угольника и очерчивает на поверхности шара круг, описанный около n-угольника. Ось конуса проходит через центр n-угольника и угол, образуемый осью конуса с образующей, называется *сферическим радиусом круга, описанного около n-угольника.* Этот радиус обозначается буквой r.

Существует также конус, касающийся всех граней n-гранного угла. Этот конус называется конусом, *вписанным в угол.* Боковая поверхность его очерчивает на поверхности шара круг, касающийся всех сторон правильного n-угольника. Этот круг есть круг, вписанный в n-угольник. Ось вписанного конуса совпадает с осью описанного; она, следовательно, тоже проходит через центр n-угольника. Угол между осью и образующей вписанного конуса называется *сферическим радиусом вписанного круга:* обозначается он буквой ϱ.



Фиг 22

Соединим центр правильного n-угольника дугами больших кругов с вершинами n-угольника и с серединами дуг, соединяющих их. Весь многоугольник разобьется при этом на $2n$ прямоугольных сферических тр-ков, равных друг другу ($\Delta\, AMM_1$, фиг. 22). В тр-ке AMM_1, прямоугольном при M_1, сторона $AM = r$, сторона $MM_1 = \varrho$, сторона $AM_1 = \frac{\alpha}{2}$, если сторона n-угольника равна a; $\angle AMM_1 = \frac{\mu}{2} = \frac{360^0}{2n}$ и $\angle MAM_1 = \frac{\alpha}{2}$, т. е. половине угла многоугольника. С помощью этого тр-ка решаются все задачи о правильных n-гранных углах. Примером может послужить определение величины двугранного угла правильного многогранника.

Определение. Под многогранником понимают тело, ограниченное со всех сторон плоскостями; под *правильным многогранником* — многогранник, грани которого суть равные правильные многоугольники и в каждой вершине которого сходится равное число этих многоугольников.

Существует только пять правильных многогранников. 1) *Тетраедр* с трегранными углами, ограниченный четырьмя равносторонними треугольниками. 2) *Октаедр* с четырехгранными углами, ограниченный восемью равносторонними треугольниками. 3) *Икосаедр* с пятигранными углами, ограниченный двадцатью равносторонними тр-ками. 4) *Экаедр* или куб с трехгранными углами, поверхность которого составлена из шести квадратов, и 5) *Додекаедр* с трехгранными углами, ограниченный двенадцатью правильными пятиугольниками.

Задача 1. Определить величину угла образуемого двумя соседними гранями икосаедра.

Решение. Опишем сферу с центром в какой либо вершине икосаедра. Пять граней, сходящихся в этой вершине, образуют в пересечении со сферой правильный пятиугольник, сторона которого $a = 60^0$. Угол μ треугольника AMB (фиг. 22) равен $360^0 : 5 = 72^0$. Между a, μ и α, существует по § 20 зависимость:

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{\mu}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

по которой можно найти α. Вычисляя, находим: $\alpha = 138^0 11{,}6'$.

Задача 2. Определить величину угла, образованного двумя соседними гранями додекаэдра.

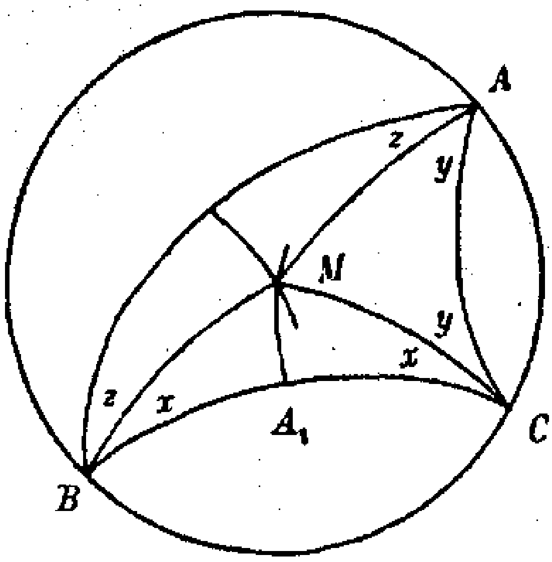
Решение. Трехгранный угол додекаэдра образует в пересечении со сферой, описанной из вершины этого угла, как из центра, правильный треугольник. Плоские углы трехгранного угла додекаэдра равны углам правильного пятиугольника, т. е. $a = 108^0$. Угол μ равен 120^0. По этим данным находят $\alpha = 116^0 33{,}8'$.

Те-же задачи для остальных правильных тел решаются аналогично.

Для вычисления сферических радиусов описанного и вписанного круга правильного n-гранного угла применяют формулы (фиг. 22):

$$\sin r = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{\mu}{2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varrho = \sin \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

2. *Круг, описанный около произвольного сферического треугольника; круг, вписанный в произвольный сферический треугольник.* Около произвольного n-гранного угла нельзя, вообще говоря, описать конус; точно также нельзя и вписать конус в произвольный n-гранный угол. Однако, всегда можно описать около трехгранного угла, и вписать в него конус; только оси вписанного и описанного конусов не совпадают, если мы имеем дело не с правильным трехгранным углом. Конус, описанный около трехгранного угла, пересекает поверхность сферы, с центром в вершине угла, по кругу, проходящему через вершины тр-ка, образованного пересечением трехгранного угла со сферой. Все три угла, образуемые осью описанного конуса с ребрами трехгранного угла, проходящими через вершины тр-ка, равны между собою. Величина этих углов называется сферическим радиусом круга, описанного около тр-ка и обозначается буквой r. Точка пересечения оси описанного конуса с поверхностью сферы есть (фиг. 23) центр описанного круга. Проведем через M и через вершины тр-ка дуги больших кругов. Мы получим три равнобедренных тр-ка, у которых



Фиг. 23

боковые стороны равны между собою и равны r. Проведем еще через M большие круги, перпендикулярные большим кругам, образующим сферический тр-к. Эти перпендикуляры разделят круги, образующие тр-к, на две равные части $\left(BA_1 = CA_1 = \frac{a}{2}\right)$. Обозначим углы при основании равнобедренных тр-ков через x, y и z. Тогда, как видно из фигуры:

$$2x + 2y + 2z = \alpha + \beta + \gamma$$

Или, если сумму углов треугольника обозначить через 2σ:

$$x + y + z = \sigma.$$

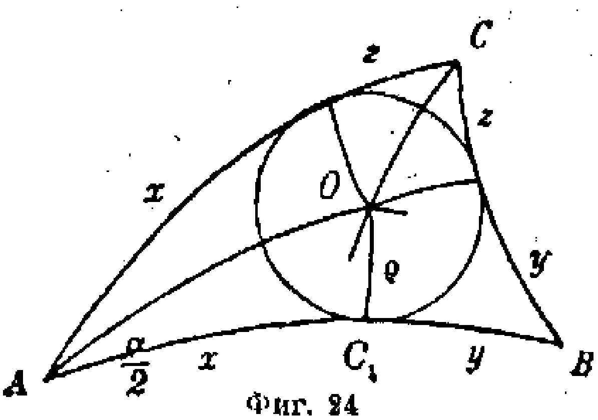
Отсюда следует: $x = \sigma - (y + z)$ или $x = \sigma - \alpha$; аналогично получаем $y = \sigma - \beta$, $z = \sigma - \gamma$. В прямоугольном сферическом тр-ке MA_1B

$$\cos(\sigma - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} r}.$$

Мы получаем *формулу для сферического радиуса круга, описанного около сферического треугольника:*

$$\operatorname{ctg} r = \cos(\sigma - \alpha) \operatorname{ctg}\frac{a}{2}.$$

Конус, вписанный в трехгранный угол, пересекает поверхность сферы с центром в вершине трехгранного угла по кругу, вписанному в сферический тр-к, образованный пересечением трехгранного угла со сферой. Углы, образуемые осью этого конуса с образующими, проходящими через точки касания конуса и трехгранного угла, равны между собою. Величина этого угла называется *сферическим радиусом круга, вписанного в треугольник.* Угол этот обозначается буквой ϱ. Точка O (фиг. 24) пересечения оси конуса с поверхностью сферы есть центр круга, вписанного в тр-к. Если через O и вершины тр-ка провести дуги больших кругов, то они разделят углы тр-ка пополам. Большие круги, проведенные через O и точки касания вписанного круга и больших кругов, образующих тр-к, перпендикулярны сто-



Фиг. 24

ронам треугольника и дуги O до точки касания равны ϱ. Каждую из двух дуг больших кругов, идущих из одной вершины тр-ка до точек касания со вписанным кругом, мы можем обозначить той-же буквой, что и другую, так как они равны между собою. Обозначим их (попарно) буквами x, y и z. Как видно из фигуры

$$2x + 2y + 2z = a + b + c$$

или, обозначая сумму сторон тр-ка через $2s$: $x + y + z = s$. Отсюда следует $x = s - a$, $y = s - b$ и $z = s - c$. В прямоугольном треугольнике AOC_1

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(s-a)}.$$

Мы получаем отсюда формулу для сферического радиуса круга, вписанного в сферический треугольник

$$\operatorname{tg}\varrho = \sin(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

ЧАСТЬ V.

ФОРМУЛЫ, УДОБНЫЕ ДЛЯ ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ.

§ 24. S-ФОРМУЛЫ.

Из теоремы косинусов для сторон сферического тр-ка (§ 6) можно вывести новые формулы, значительно упрощающие логарифмические вычисления. Эти формулы приобретают особенно простой вид, если, как и в предыдущих параграфах, положить $a + b + c = 2S$. Тогда $b + c - a = 2(S - a)$, $a - b + c = 2(S - b)$ и $a + b - c = 2(S - c)$. Благодаря этому обозначению эти формулы и называются S-формулами.

Заменив в равенстве $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$ угол α половинным углом по формуле $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, получим, раскрыв скобки, следующее равенство

$$\cos a = \cos b \cos c + 2\sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin b \sin c$$

или, сложив первый и третий член правой части,

$$\cos a = \cos(b+c) + 2\sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда следует

$$-2\sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos(b+c) - \cos a =$$

$$= -2\sin\frac{b+c+a}{2}\sin\frac{b+c-a}{2} =$$

$$= -2\sin S\cdot\sin(S-a),$$

и следовательно

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin S\cdot\sin(S-a)}{\sin b\sin c}}.$$

Если в теореме косинусов замену произвести по формуле $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, то мы получим после раскрытия скобок

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c - 2\sin b\sin c\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \cos(b-c) - 2\sin b\sin c\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

Откуда

$$-2\sin b\sin c\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos a - \cos(b-c) =$$

$$= -2\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2} =$$

$$= -2\sin(S-b)\sin(S-c).$$

Таким образом

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin b\sin c}}.$$

Разделив формулы для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ одну на другую, получим очень удобную для определения углов тр-ка по данным сторонам формулу для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin S\sin(S-a)}}$$

Мы можем вынести $\sin(S-a)$ из под корня, если помножить числителя на $\sin(S-a)$. Формула принимает тогда следующий вид

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin(S-a)}\sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin S}}.$$

При сравнении этой формулы с формулой, найденной в конце предыдущего параграфа для $\operatorname{tg}\varrho$, $\operatorname{tg}\varrho = \sin(S-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, сразу видно, что

$$\operatorname{tg}\varrho = \sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin S}}$$

Формулы для определения углов тр-ка по его сторонам приобретают очень простой вид

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(S-a)}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(S-b)}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(S-c)}.$$

Легко показать, что эти формулы аналогичны соответственным формулам плоскостной тригонометрии.

§ 25. σ-ФОРМУЛЫ.

Так же, как предыдущие формулы были выведены из теоремы косинусов для с т о р о н сферического тр-ка, так новые формулы выводятся из теоремы косинусов для у г л о в. Эти формулы называются σ-формулами, так как в них сумма углов $\alpha + \beta + \gamma$ принимается равной 2σ: $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$, а отсюда $\beta + \gamma - \alpha = 2(\sigma - \alpha)$, $\alpha - \beta + \gamma = 2(\sigma - \beta)$, $\alpha + \beta - \gamma = 2(\sigma - \gamma)$.

Формулы выводятся из теоремы косинусов посредством замены $\cos a$ через функции половинного угла. Вывод аналогичен выводу § 24 и поэтому здесь не повторен.

В результате получается

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\,\sin\gamma}},$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,\sin\gamma}}.$$

Знак минус подкоренного выражения последней формулы необходим для того, чтобы подкоренное выражение было положительным, а самый корень действительним числом: σ — тупой угол, так как сумма углов сферического тр-ка 2σ больше двух прямых и, следовательно, $\cos\sigma$ отрицателен. Из полученных равенств можно вывести формулу для $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

§ 26. ГАУССОВЫ ФОРМУЛЫ И НЕПЕРОВЫ АНАЛОГИИ.

1. Пользуясь формулой сложения для синуса и косинуса полусуммы и полуразности углов α и β, можно вывести новые формулы, подставляя вместо функций в правой части этих формул их значения из S-формул. Равенства, получаемые таким образом, называют *формулами Гаусса* или *формулами Мольвейде.* Мы приводим здесь сводку S-формул для синусов и косинусов половинных углов тр-ка

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin b\sin c}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin S\sin(S-a)}{\sin b\sin c}},$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-c)}{\sin a\sin c}},\quad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin S\sin(S-b)}{\sin a\sin c}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)}{\sin a\sin b}},\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin S\sin(S-c)}{\sin a\sin b}}.$$

2. Формула разложения для $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ гласит

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Введя в нее вышенаписанные значения, получим

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin(S-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin S\sin(S-c)}{\sin a\sin b}}+$$

$$+\frac{\sin(S-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin S\sin(S-c)}{\sin a\sin b}}.$$

Дважды повторяющийся в правой части формулы радикал представляет собою $\cos\frac{\gamma}{2}$. Вынося за скобку общие члены, имеем

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin c}\Big[\sin(S-b)+\sin(S-a)\Big]=$$

$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cdot 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

Сокращая на $2\sin\frac{c}{2}$, получаем *первую формулу Гаусса*

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Исходя из разложения $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, мы получим аналогичную формулу, с той разницей что в правой части, между обоими членами разложения, будет стоять не знак $+$, а $-$. Мы получим в результате *вторую Гауссову формулу*.

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Первая и вторая Гауссовы формулы могут быть употреблены для того, чтобы по стороне, противолежащему углу и разности двух других сторон сферического тр-ка определить два остальные угла. В отличие от плоскостной тригонометрии, для этого нужны два уравнения: сумма углов сферического тр-ка больше двух прямых и при данном угле γ, сумма углов α и β еще не дана.

Примечание. Вторая Гауссова формула позволяет очень легко доказать теорему: В сферическом тр-ке против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол и против бо́льшего угла — бо́льшая сторона. Так как c и γ всегда меньше 180^0, то $\cos\frac{\gamma}{2}$ и $\sin\frac{c}{2}$ всегда положительны, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ и $\sin\frac{a-b}{2}$ должны, таким образом, быть всегда одного знака, т. е., если $a>b$, то и $\alpha>\beta$.

3. Формула разложения косинуса полусуммы углов a и b гласит

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Подставляя сюда значения из S-формул, получим

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin S}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)}{\sin a\sin b}}-$$

$$-\frac{\sin(S-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)}{\sin a\sin b}}=$$

$$= \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin c}\left[\sin S - \sin(S-c)\right] = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cdot 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

Отсюда получается, после сокращения на $2\sin\frac{c}{2}$, *третья Гауссова формула:*

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Формула разложения для косинуса полуразности двух углов опять таки отличается от формулы разложения для косинуса полусуммы только знаком между обоими членами разложения. После преобразований, сходных с вышенаписанными, получается *четвертая формула Гаусса.*

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Третья и четвертая Гауссовы формулы применяются для определения двух углов тр-ка по третьему углу, противолежащей ему стороне и сумме прилежащих ему сторон.

Гауссовы формулы применяются для решения и других вопросов. Так можно, например, определить при помощи первой и третьей формул две стороны тр-ка, если дана третья сторона, угол, ей противолежащий, и сумма прилежащих углов.

4. Разделив вторую Гауссову формулу на четвертую и первую на третью, получают *Неперовы аналогии:*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Обе аналогии соответствуют теореме тангенсов плоскостной тригонометрии, в которую первая формула и переходит, если сферический тр-к превратить в плоский. Вторая формула превращается в равенство $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, говорящее, что в плоском тр-ке углы $\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$ дополняют друг друга до 90^0. Получить это выражение можно, заменив a и b соответственно, через $\frac{a_1}{r}$ и $\frac{b_1}{r}$ (ср. § 6, п. 3). Мы получим, таким образом, $\cos\frac{a_1-b_1}{2r}$ и $\cos\frac{a_1+b_1}{2r}$, а эти косинусы принимают, при $r=\infty$ значение 1 (§ 31,2).

Неперовы аналогии употребляются для определения двух углов сферического тр-ка по третьему углу и прилежащим к нему сторонам. Две формулы сферической тригонометрии заменяют одну формулу плоскостной по причине, указанной выше.

Разделив вторую Гауссову формулу на первую и четвертую на третью, получим *вторую пару Неперовых аналогий*

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Эти формулы применяются, если даны два угла и сторона между ними. Они облегчают нахождение двух других сторон.

§ 27. ФОРМУЛА Л'ЮИЛЬЕРА.

Из равенства $\alpha+\beta+\gamma-\pi=\varepsilon$ (§ 5,2) следует, что $\alpha+\beta=\pi+\varepsilon-\gamma=\pi-(\gamma-\varepsilon)$ и отсюда

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma-\varepsilon}{2}.$$

Если в первую Гауссову формулу подставить это выражение и разделить обе части равенства на $\cos\frac{\gamma}{2}$, то мы получим, так как $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$,

$$\frac{\cos\frac{\gamma-\varepsilon}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Применим к этому выражению теорему о пропорциях: Если две дроби равны, то равны и частные от деления разности числителя и знаменателя каждой дроби на сумму тех же величин. Получаем

$$\frac{\cos\frac{\gamma-\varepsilon}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma-\varepsilon}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}}.$$

Заменяя, по известным формулам, суммы и разности произведениями, получаем

$$\frac{-2\sin\left(-\frac{\varepsilon}{4}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{2\cos\frac{\varepsilon}{4}\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}=\frac{-2\sin\frac{a-b+c}{4}\sin\frac{a-b-c}{4}}{2\cos\frac{a-b+c}{4}\cos\frac{a-b-c}{4}}$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{4}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{S-b}{2}\operatorname{tg}\frac{S-a}{2}.$$

Подставив вышеполученное значение для $\frac{\alpha+\beta}{2}$ в третью Гауссову формулу и разделив на $\sin\frac{\gamma}{2}$, мы получим

$$\frac{\sin\frac{\gamma-\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Как и выше, отсюда следует

$$\frac{\sin\frac{\gamma-\varepsilon}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma-\varepsilon}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{-2\sin\frac{\varepsilon}{4}\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{2\cos\frac{\varepsilon}{4}\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}=\frac{-2\sin\frac{a+b+c}{4}\sin\frac{a+b-c}{4}}{2\cos\frac{a+b+c}{4}\cos\frac{a+b-c}{4}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{S}{2}\operatorname{tg}\frac{S-c}{2}.$$

После перемножения обоих полученных равенств, находим, что

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{4}=\operatorname{tg}\frac{S}{2}\operatorname{tg}\frac{S-a}{2}\operatorname{tg}\frac{S-b}{2}\operatorname{tg}\frac{S-c}{2}$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{S}{2}\operatorname{tg}\frac{S-a}{2}\operatorname{tg}\frac{S-b}{2}\operatorname{tg}\frac{S-c}{2}}.$$

Это и есть *формула ЛґЮильера*, которая дает возможность вычислить по сторонам сферического тр-ка его сферический избыток. Она соотвествует Героновой формуле плоскостной тригонометрии. Это легко показать, заменив ε его значением из формулы (§ 5,2) $\varepsilon=\frac{f}{r^2}$, и подставив в выражения для сторон, вместо углов, длины дуг. При увеличении r можно вместо тангенсов углов подставить самые углы, и таким образом получить Геронову формулу.

§ 28. ПРОСТОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Новые формулы §§ 24—27 открывают новые пути для решения шести основных задач для общего случая сферического тр-ка; пути, отличные от предложенных в § 22. Здесь по возможности избегается употребление теоремы синусов, так как по функции синуса угол определяется не однозначно. Для лучшего запоминания хода решений шести основных задач, они разбиты на группы по две в каждой.

Первая группа. Для решения тр-ка даны три однородных элемента, т. е. три стороны или три угла.

Задача 1. Даны a, b и c. Задача 2. Даны α, β, γ. Остальные элементы находятся при помощи s-формул в случае задачи 1 и σ-формул в случае задачи 2.

Вторая группа. Решить тр-к по двум однородным элементам и элементу, лежащему между ними, т. е. по двум сторонам и углу между ними или по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Задача 1. Даны a, b, γ. Задача 2. Даны α, β, c.

Эти задачи решаются посредством Неперовых аналогий.

Задача 1. Посредством первой пары аналогий (§ 26), вычисляют сначала оба неизвестных угла α и β. Для определения неизвестной стороны c употребляют затем одну из обоих формул второй пары, например первую, которую приводят к виду

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

В задаче 2 сначала по второй паре аналогий (§ 26) вычисляют обе неизвестные стороны a и b. Для вычисления неизвестного угла γ употребляют одну из обоих формул первой пары, например первую, приводя ее к виду:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Третья группа. Решить треугольник по данным двум однородным элементам и элементу, противолежащему одному из них, т. е. по двум сторонам и углу против одной из них или по двум углам и стороне против одного из них.

Задача 1. Даны a, b, α. Задача 2. Даны α, β, a.

Решение требует применения теоремы синусов. С ее помощью определяется в задаче 1 угол β, в задаче 2 — сторона b. Соображения, которыми надо руководиться при решении вопроса о пригодности обоих или одного ответа, изложены в § 22. Остальные элементы, т. е. в обоих задачах c и γ, вычисляются затем при помощи формул, полученных из Неперовых аналогий и указанных в задачах второй группы.

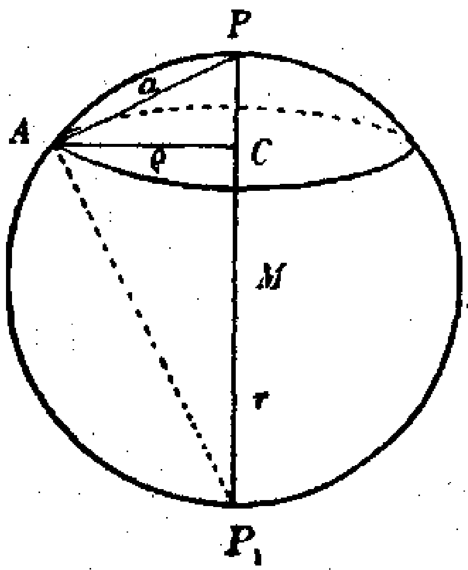
ЧАСТЬ VI.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СФЕРИЧ. ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПОСРЕДСТВОМ ПОСТРОЕНИЯ.

§ 29. ПОСТРОЕНИЯ НА СФЕРЕ.

В предыдущих параграфах было показано, как решаются посредством **вычисления** по трем данным элементам сферического треугольника те-же задачи, которые в плоскостной тригонометрии решали для плоского треугольника. В планиметрии, еще до того как были описаны методы вычисления треугольников, мы указали, как по трем данным элементам можно построить тр-к и как, таким образом, можно посредством построения и последующего измерения найти неизвестные элементы тр-ка. Эти построения приводили в четырех случаях, где было возможно только одно решение, к так называемым теоремам конгруентности. В дальнейшем будет доказано, что и в случае сферического тр-ка посредством **построения и последующего измерения** можно по трем данным определить неизвестные элементы. С самого начала надо заметить, что элементы сферического тр-ка всегда задаются углами и что искомый тр-к должен быть начерчен на сфере. Величина сферы, на поверхности которой происходит построение, совершенно произвольна; поэтому совершенно ясно, что даже в случае однозначного решения мы получим, при тех же данных, треугольники различной величины, в зависимости от выбора сферы, на которой выполняется чертеж. Величины углов, определяющих элементы этих тр-ков, будут, конечно, во всех тр-ках равны, но о покрывании или совмещении одного тр-ка с другим, т. е. о конгруентности, не может быт и речи. Последнее возможно только при условии выполнения всех построений на одной и той-же сфере, или на сферах равного радиуса. Однако и в этом случае совмещение не всегда возможно. В примечании § 4 было показано, что сферический тр-к не может быть совмещен с ему симметричным, хотя все элементы их и равны. В симметричное положение могут быть приведены все тр-ки, лежащие на одной сфере и расположенные при этом так, что при обведении в определенном направлении периметра одного тр-ка, надо обвести периметр второго в обратном направлении, чтобы обойти все его элементы в той-же последовательности, что и элементы первого. Тр-ки совместимы или конгруентны только тогда, когда обведение их периметров может быть совершено в одном направлении. В случае сферических тр-ков, элементы которых соответственро равны, не говорят поэтому о конгруентности, а только о равенстве (формы).

2. Вопросу о способах построения сферического тр-ка по трем данным элементам предпошлем следующее.



Фиг. 25

Поставим острие одной ножки циркуля в какой нибудь точке на сфере, например в точке P (фиг. 25). Мы можем описать циркулем на сфере круг. Точка P, в которой находится неподвижная ножка циркуля, называется *полюсом этого круга.* Расстояние PA между концами обоих ножек циркуля называется *сферическим радиусом* круга на сфере, а собственно-радиус этого круга ($CA = \varrho$) называется *плоским радиусом* круга. В то время, как сферический радиус дается непосредственно величиной растворения циркуля, плоский радиус должен быть найден посредством построения.

Задача 1. Определить посредством построения плоский радиус круга, начерченного на сфере.

Решение. Выбираем на круге три произвольных точки A, B и C и измеряем циркулем расстояния AB, BC и AC. Строим на плоскости тр-к по трем сторонам AB, BC и AC и описываем около этого тр-ка круг. Радиус этого круга есть искомый плоский радиус круга на сфере.

С помощью этой задачи решается

Задача 2. Построить радиус данной сферы.

Решение (фиг. 25). Опишем произвольным сферическим радиусом a на сфере круг и найдем, согласно задачи 1, плоский радиус ϱ. Построим на плоскости прямоугольный тр-к, один катет которого равен a, а высота, опущенная на гипотенузу, равна ϱ. Гипотенуза этого треугольника равна диаметру нашей сферы.

После построения радиуса сферы, можно решить следующую задачу.

Задача 3. Построить полюс данного круга на сфере.

Решение. Найдем сначала плоский радиус нашего круга (зад. 1) и радиус сферы (зад. 2). Построим затем прямоугольный тр-к, гипотенуза которого равна диаметру сферы, высота, опущенная на гипотенузу, — плоскому радиусу нашего круга. Меньший катет (PA на фиг. 25) этого тр-ка равен сферическому радиусу нашего круга. Опишем этим радиусом из двух произвольных точек данного круга на сфере круги. Точка пересечения этих двух кругов есть искомый полюс.

Если требуется найти построением полюс какого либо большого круга, то сразу видно, что сферический радиус любого большого круга одной сферы равен гипотенузе равнобедренного прямоугольного тр-ка, катеты которого равны радиусу сферы.

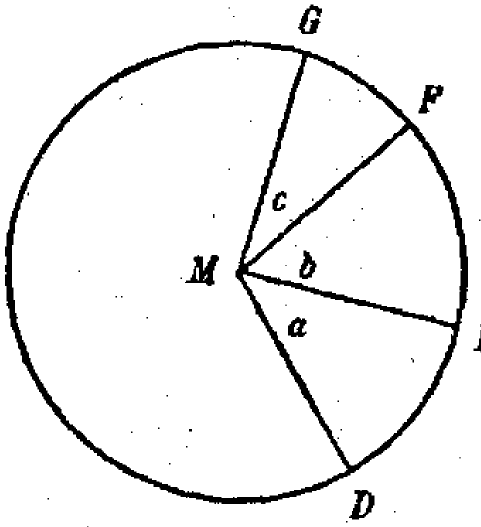
Задача 4. Построить большой круг, проходящий через две данные на поверхности сферы точки.

Решение. Находим радиус сферы и строим равнобедренный прямоугольный тр-к, катеты которого равны этому радиусу. Гипотенузой этого тр-ка описываем вокруг данных точек круги. Точки пересечения этих кругов суть полюсы искомого большого круга. Круг, описанный из одной из этих точек, радиусом, равным гипотенузе построенного равнобедренного прямоугольного тр-ка, есть искомый большой круг.

§ 30. ПОСТРОЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Задача 1. Построить на сфере треугольник по трем данным сторонам ($\triangle$ по a, b, c).

Решение. Находим сначала по задаче 2 § 29 радиус данной сферы и описываем на плоскости круг этим радиусом (фиг. 26). Этот круг есть большой круг нашей сферы.



Фиг. 26

Начертим в этом кругу наши три данные стороны a, b и c, как центральные углы. Отмерим циркулем хорду GF, определяемую центральным углом c и отметим на сфере две точки A и B, расстояние между которыми равно GF.

Дуга большого круга, соединяющая A и B, есть сторона сферического треугольника, равная c, так как равным хордам одного круга соответствуют равные углы. Опишем затем на сфере сферическим радиусом, равным FE, круг из центра A и сферическим радиусом DE круг из центра B. Пусть эти круги пересекаются в точках C и C_1. Если теперь через A, B и C, или A, B и C_1, провести большие круги, то мы получим два сферических тр-ка ABC и ABC_1, которые удовлетворяют условиям задачи. Элементы обоих тр-ков попарно равны. Тр-ки расположены однако симметрично и не могут быть поэтому совмещены.

Задача 2. **Построить на данной сфере тр-к по данным двум сторонам и углу между ними** ($\triangle$ по a, b, γ).

Решение. Определяем радиус сферы и строим круг этого радиуса. Строим при центре этого круга центральные углы, равные a, b и γ. Отмечаем на сфере две точки X и Y, расстояние между которыми по прямой линии, равно хорде, соответствующей углу γ. Опишем затем сферическим радиусом большого круга ($r\sqrt{2}$) круги из X и Y, как из центров. Эти круги пересекаются в точке C. Проведем большие круги через точку C и через точки X и Y. Угол между плоскостями этих больших кругов измеряется линейным углом, равным γ. Опишем из C, как из центра, круг радиусом равным хорде соответствующей углу b. Этот круг пересечет большие круги проходящие через X и Y в точках A и A_1. Повторим тоже построение для угла a. Точка пересечения с X будет B_1, с Y — B. Если мы соединим дугами большого круга A и B и A_1 и B_1, то мы получим тр-ки ABC и A_1B_1C, удовлетворяющие условиям задачи.

Элементы обоих тр-ков тождественны, расположены-же тр-ки симметрично.

Задача. 3. Построить на данной сфере тр-к по трем данным углам (Δ по α, β, γ).

Решение. Если α, β, и γ суть углы искомого тр-ка ABC, то по п. 2 § 18 дополнения этих углов до 180^0 суть стороны полярного для первого тр-ка $A_1B_1C_1$. Строим этот тр-к $A_1B_1C_1$ согласно указаниям задачи 1 по сторонам $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$ и $180^0-\gamma$ и строим затем полярный для $A_1B_1C_1$ треугольник ABC. ABC есть искомый тр-к. Вершину A найдем, строя полюсы большого круга, проходящего через B_1 и C_1, причем выбираем тот полюс, который не лежит на том же полушарии, что и A. Точно также выбираем B и C.

Задача 4. Построить на данной сфере тр-к по данным двум углам и стороне между ними.

Решение. Строим, согласно задачи 2, тр-к со сторонами $180^0-\beta$ и $180^0-\gamma$ с углом $180^0-\alpha$ между ними. Тр-к, полярный для построенного, есть искомый.

Примечания. Каждая из четырех решенных задач приводит к треугольникам, элементы которых тождественны. Сами же тр-ки расположены симметрично и не могут быть поэтому совмещены. Если бы мы повторили построение в каком либо ином месте сферы, мы получили бы конечно опять два симметричных тр-ка; однако, из этих двух тр-ков каждый можно было бы совместить с одним из тр-ков, полученных при первом построении. Тр-ки первого и второго построения, следовательно, попарно конгруентны: конгруентны именно те тр-ки, которые надо обойти в одном направлении, чтобы встретить элементы в той-же последовательности. Данные четыре задачи обусловливают, таким образом, или симметрию или конгруентность. Мы получаем на основании этих задач

Четыре теоремы о равновеликости сферических треугольников.

Теорема 1. Два сферических тр-ка равны, если три стороны одного тр-ка соответственно равны трем сторонам другого тр-ка.

Теорема 2. Два сферических тр-ка равны, если три угла одного тр-ка соответственно равны трем углам другого тр-ка.

Теорема 3. Два сферических тр-ка равны, если две стороны и угол, заключенный между ними, одного тр-ка, соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого тр-ка.

Теорема 4. Два сферических тр-ка равны, если два угла и сторона между ними одного тр-ка соответственно равны двум углам и стороне между ними другого тр-ка.

Задача 5. Построить на данной сфере тр-к по данным двум сторонам и углу против одной из них ($\triangle$ по a, b, α),

Решение. После построения большого круга сферы (зад. 1), строим при его центре центральные углы a, b и α, Затем строим, как в задаче 2, два больших круга, пересекающихся в A под углом α, и описываем затем радиусом, равным хорде, соответствующей углу b, круг с центром в A. Этот круг пересекает один из больших кругов, проходящих через A, в C. Для сокращения мы не будем рассматривать пересечения этого круга с другим большим кругом, проходящим через A. Этот второй случай дает симметричное решение. Опишем затем радиусом, равным хорде угла a, круг центром в C. Этот круг может: 1) вообще не пересечь второй большой круг, проходящий через A, 2) коснуться его в одной точке B, 3) пересечь его в двух точках B и B_1. Во втором случае мы получаем прямоугольный тр-к, у которого по п. 3 § 8 $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin b}$. Этот случай, следовательно, наступает, если $\sin a = \sin b \sin\alpha$. Если $\sin a < \sin b \sin\alpha$, то наступает первый случай. При $\sin a > \sin b \sin\alpha$ мы имеем дело с третьим случаем. Если в последнем случае, кроме того, $\sin a < \sin b$, то, несмотря на две точки пересечения, мы получим только один ответ, так как тогда обе точки пересечения лежат по разные стороны от точки A. Мы получаем тогда только один тр-к с углом α, другой-же имеет угол $180^0 - \alpha$. Неравенство $\sin a > \sin b$ влечет за собою и неравенство $a > b$. Тр-к, следовательно, определен однозначно тогда, когда даны две стороны и угол против большей из них.

Задача 6. Построить на данной сфере тр-к по данной стороне, углу, к ней прилежащему, и углу ей противолежащему ($\triangle$ по a, β и α).

Решение. Эта задача приводится к задаче 5, построением полярного тр-ка со сторонами $180^0 - \alpha$ и $180^0 - \beta$ и углом $180^0 - a$. Этим самым предрешается уже, что при решении задачи могут наступить различные случаи. Однозначное решение возможно только тогда, когда дано, что $180^0 - \alpha > 180^0 - \beta$, т. е. что $\alpha < \beta$.

ЧАСТЬ VII.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 31. СИНУС И КОСИНУС ОЧЕНЬ МАЛЫХ УГЛОВ.

1. *Синус очень малого угла.* Опишем произвольным радиусом r из вершины A угла α (фиг. 27) круг, пересекающий стороны угла в точках B и C. Опустим затем из точки B перпендикуляр BB_1 на прямую AC, а из C восставим перпендикуляр CC_1 к AC, который пересечет другую сторону угла в точке C_1. CC_1 будет тогда касательной к окружности, описанной из A радиусом r. Из чертежа сейчас-же видно, что

$$\triangle AB_1B < \text{площади сектора } CAB < \triangle ACC_1.$$

По формуле $f = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

$$\triangle AB_1B = \frac{1}{2} AB \cdot AB_1 \sin \alpha =$$
$$= \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha \cos \alpha, \text{ так как } AB = r \text{ и } AB_1 = r \cos \alpha.$$

Далее

$$\triangle ACC_1 = \frac{1}{2} AC \cdot CC_1 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \alpha, \text{ ибо } AC = r \text{ и } CC_1 = r \operatorname{tg} \alpha.$$

Для определения площади сектора пользуются формулой, по которой площади секторов одного и того же круга относятся, как соответственные центральные углы. Из этой формулы, если рассматривать целый круг как сектор в 360^0, следует пропорция $\frac{\text{сектор } CAB}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360}$.

Если угол определен в радианах, т. е. если α есть отношение дуги к радиусу, то 360^0 должны быть заменены 2π.

Получаем сектор $CAB = \frac{1}{2} r^2 \alpha$.

Подставив все полученные значения в начальное неравенство, получим

$$\tfrac{1}{2} r^2 \sin\alpha \cos\alpha < \tfrac{1}{2} r^2 \alpha < \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{tg}\alpha$$

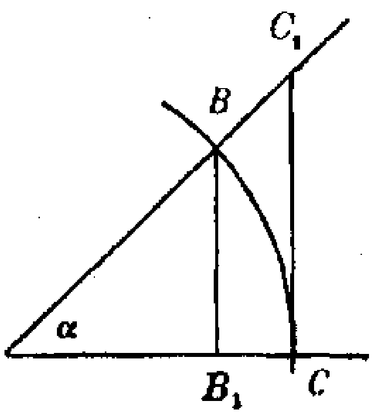
Необходимо заметить, что это неравенство и все вытекающие из него следствия, действительны только тогда, если угол α выражен в радианах, ибо только в этом случае справедлива вышеуказанная формула для сектора.

Разделив все члены последнего неравенства на $\frac{1}{2} r^2 \sin\alpha$, получим

$$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Если α все уменьшается, приближаясь к нулю, то $\cos\alpha$ все растет, оставаясь однако все время меньше единицы, если даже разность в конце концов делается бесконечно малой. Дробь $\frac{1}{\cos\alpha}$ одновременно уменьшается, так как знаменатель ее растет, остается однако всегда больше единицы. Дробь $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$, лежащая между обоими знаменателями, может поэтому равняться только единице. Таким образом доказывается

Теорема. Если α обозначает величину угла, выраженную в радианах, то для очень малых значений α, приближающихся к нулю, можно принять $\sin\alpha = \alpha$.



Фиг. 27

Полученный результат можно уяснить себе на фиг. 27. При постоянном уменьшении угла α, отрезок BB_1, представляющий линию синуса угла α, будет все меньше отличаться от дуги BC, длина которой равна αr.

2. *Косинус бесконечно малого угла.* По известной формуле:

$$\cos\frac{\alpha}{n} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{n}}$$

Если n очень велико, и $\frac{\alpha}{n}$, следовательно, очень мало, можно по 1 заменить $\sin\frac{\alpha}{n}$ через $\frac{\alpha}{n}$, а $\sin^2\frac{\alpha}{n}=\left(\sin\frac{\alpha}{n}\right)^2$ через $\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$. Получаем

$$\cos\frac{\alpha}{n}=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}.$$

Если n очень велико, то $\frac{\alpha^2}{n^2}$ приближается в пределе к нулю, а права' часть равенства к единице. Косинус бесконечно малого угла можно, следовательно, считать равным единице с точностью до величин второго порядка.

3. *Степень косинуса бесконечно малого угла.* Хотя косинус очень малого угла и близок к единице, он все-же представляет всегда правильную дробь. Так как при возвышении в степень правильной дроби мы получаем всегда новую правильную дробь, меньшую начальной, то может возникнуть предположение, что даже для случая $n=\infty$ и $\cos\frac{\alpha}{n}=1$, высокая степень от $\cos\frac{\alpha}{n}$ все таки представляет величину, меньшую единицы. Можно однако доказать, что это предположение не верно. Для доказательства пользуются формулой Ньютона для степени бинома:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\dots+\binom{n}{n}b^n.$$

В этой формуле

$$\binom{n}{1}=\frac{n}{1},\quad \binom{n}{2}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},\quad \binom{n}{3}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\ \text{и т. д.}$$

Возвысив найденное в п. 2 уравнение для определения $\cos\frac{\alpha}{n}$ в n-ую степень, получим при помощи бинома Ньютона

$$\cos^n\frac{\alpha}{n}=\sqrt{1-\frac{n}{1}\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\alpha^4}{n^4}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{\alpha^6}{n^6}+\dots},$$

или, разделив числителя каждой из дробей на n

$$\cos^n\frac{\alpha}{n}=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\alpha^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{\alpha^2}{n}\right)^3+\dots}$$

При большом увеличении n и, следовательно, большом уменьшении $\frac{\alpha}{n}$, все члены подкоренного выражения, за исключением первого, приближаются к нулю; вся правая часть равенства, таким образом, приближается к единице. (В этом случае с точностью до величин первого порядка. Ред.) Отсюда следует, что даже бесконечно высокая степень косинуса бесконечно малого угла равна единице, а тем более всякая другая степень.

§ 32. РЯДЫ ДЛЯ $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Степень комплексного числа, формы $\cos\alpha + i\sin\alpha$, определяется по формуле Муавра[1])

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Из нее следует, что

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

С другой стороны, возвышая в степень по биному Ньютона и принимая во внимание, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ и т. д., получаем

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos^n\frac{\alpha}{n} + i\frac{n}{1}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha}{n} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cos^{n-2}\frac{\alpha}{n}\sin^2\frac{\alpha}{n} - i\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cos^{n-3}\frac{\alpha}{n}\sin^3\frac{\alpha}{n} + \cdots$$

Так как левые части этих выражений тождественны, то и правые должны быть равны:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos^n\frac{\alpha}{n} + i\frac{n}{1}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha}{n} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cos^{n-2}\frac{\alpha}{n}\sin^2\frac{\alpha}{n} - i\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cos^{n-3}\frac{\alpha}{n}\sin^3\frac{\alpha}{n} + \cdots$$

Если n в последнем равенстве очень велико и $\frac{\alpha}{n}$, следовательно, очень мало, то $\sin\frac{\alpha}{n}$ можно заменить через $\frac{\alpha}{n}$ и равенство примет вид:

1) См. Арифметика и алгебра ч. II.

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=\cos^n\frac{\alpha}{n}+i\frac{n}{1}\cdot\frac{\alpha}{n}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{n}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}\cos^{n-2}\frac{\alpha}{n}-$$
$$-i\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{\alpha^3}{n^3}\cos^{n-3}\frac{\alpha}{n}+\ldots=$$
$$=\cos^n\frac{\alpha}{n}+i\frac{\alpha}{1}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\frac{\alpha}{n}-$$
$$-i\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\frac{\alpha}{n}+\ldots$$

При увеличении n до бесконечности можно все степени $\cos\frac{\alpha}{n}$ заменить единицей; кроме того все разности, заключенные в скобки, тоже становятся равными единице. Равенство принимает следующий вид:

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=1+i\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}-i\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\alpha^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

Произведение всех чисел натурального ряда от 1 до n обозначается $n!$ (факториал n). С помощью этого обозначения можно вместо последнего равенства написать

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=1+i\frac{\alpha}{1!}-\frac{\alpha^2}{2!}-i\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots=$$
$$=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\cdots+i\left(\frac{\alpha}{1!}-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\ldots\right).$$

На основании теоремы, что „у равных комплексных чисел вещественные и мнимые части порознь равны“, следует, что

$$\sin\alpha=\frac{\alpha}{1!}-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\ldots,$$
$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots$$

Обе эти формулы позволяют вычислить для любого значения α, выраженного в радианах, величину $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Результат находится тем скорее, чем меньше α.

§ 33. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

После того, как углы выражены в дуговых единицах, вычисление тригонометрических функций при помощи формул, найденных в предыдущих параграфах, сводится к перемножению десятичных дробей с большим числом десятичных знаков. Применение сокращенных способов умножения представляет в этом случае большое преимущество. Мы остановимся, поэтому, сначала на нескольких примерах сокращенного умножения и деления.

Сокращенное умножение. Вычислить произведение $0{,}00275643 \cdot 325{,}468$ с точностью до трех десятичных знаков.

Запятая множителя переставляется так, чтобы перед ней стояли только единицы; множитель приобретает, следовательно, вид 3,25468. Эта перестановка запятой на два знака влево равносильна делению на сто. Для того, чтобы произведение не изменилось, необходимо умножить множимое на сто, т. е. передвинуть во множимом запятую на два знака вправо. Таким образом получают равное прежнему произведение $0{,}275643 \cdot 3{,}25468$. Во множимом оставляют после запятой на один знак больше, чем должно иметь произведение, и зачеркивают остальные цифры. Так как наше произведение должно быть вычислено с точностью до третьего знака, то во множимом надо зачеркнуть 4 и 3. Затем умножают множимое на первую цифру множителя, обращая внимание и на первую зачеркнутую цифру, и ставят в произведении запятую там, где она стоит во множимом. После этого зачеркивают последнюю незачеркнутую цифру множимого (6) и умножают оставшееся число, опять таки обращая внимание на только что зачеркнутую цифру, на вторую цифру множителя. Произведение пишут под цифрами первого произведения, начиная справа, потом опять зачеркивают последнюю цифру множимого и умножают на третью цифру множителя и так далее, пока не зачеркнут всех цифр множимого. Вычисление располагается следующим образом

$$
\begin{array}{r}
0{,}2756\cancel{4}\cancel{3} \cdot 3{,}25468 \\
\hline
0{,}8269 \\
551 \\
137 \\
10 \\
1 \\
\hline
0{,}8968
\end{array}
$$

Произведение, вычисленное с точностью до трех знаков, равно, следовательно, 0,897.

Другой пример. Вычислить с точностью до четырех знаков произведение 52,7386 · 0,0043578.

$$
\begin{array}{l}
\underline{0,0527386 \cdot 4,3578} \\
0,21095 \\
1581 \\
263 \\
36 \\
\underline{4} \\
0,22979 \quad \text{Произведение равно } 0,2298.
\end{array}
$$

Сокращенное деление. Если хотят определить частное от деления двух десятичных дробей с точностью до определенного десятичного знака и желают применить метод сокращенного деления, то необходимо сначала, как и при обыкновенном делении, сделать делителя целым числом. Затем определяют положение запятой в частном и отмечают точками за запятой еще неизвестные, отличные от нуля, цифры; при этом берут после запятой на одну точку больше, чем следовало бы по предположенному числу десятичных знаков частного. Если необходимо, например, определить частное 36,78454 : 5,9283 с точностью до двух десятичных знаков, то пишут сначала

$$367845,4 : 59283 = \ldots\ldots$$

В делителе оставляют столько цифр, сколько точек в частном, а в делимом, посредством приписывания нулей или зачеркивания цифр, столько, чтобы можно было произвести деление один раз. После первого деления зачеркивают последнюю оставшуюся цифру делителя, обращая однако на нее внимание во время умножения, следующего за вторым делением. Так продолжают при каждом следующем делении. Вычисление располагается следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
3678\cancel{4}\cancel{5},\cancel{4} \cdot 59\dot{2}\dot{8}\dot{3} = 6,205 \\
\underline{35569} \\
1215 \\
\underline{1185} \\
30 \\
\underline{30}
\end{array}
$$

Частное, вычисленное с точностью до двух десятичных знаков, равно 6,21.

2. Задача. Задача 1. Вычислить с точностью до пяти десятичных знаков $\sin 10^0 15'$.

Решение. Синус вычисляется до шестого знака, чтобы получить пятый знак вполне точно. Сначала величина угла $10^0 15'$ перечисляется в дуговые единицы (ср. примеч. к теор. 3 § 2); получаем 0,178896. Дальнейший расчет по формуле:

$$\sin 10^0 15' = 0{,}178896 - \frac{1}{3!}\cdot 0{,}178896^3 + \frac{1}{5!}\cdot 0{,}178896^5 - \ldots$$

Для вычисления достаточно найти два первых члена ряда, определяемых сокращенным умножением.

$$\begin{array}{r} \alpha = 0{,}178896 \\ \dfrac{\alpha^3}{3!} = 0{,}000954 \\ \hline \sin 10^0 15' = 0{,}177942 \end{array}$$

Задача 2. Вычислить $\cos 24^0 30'$ с точностью до пяти десятичных знаков.

Решение. Дуговая мера угла в $24^0 30'$ равна 0,427606. Вычисление ведется по формуле:

$$\cos 24^0 30' = 1 - \frac{1}{2!}\cdot 0{,}427606^2 + \frac{1}{4!}\cdot 0{,}427606^4 - \frac{1}{6!}\cdot 0{,}427606^6 + \ldots$$

Положительные слагаемые	Отрицательные слагаемые
$1 = 1{,}000000$	$\dfrac{\alpha^2}{2!} = 0{,}091422$
$\dfrac{\alpha^4}{4!} = 0{,}001393$	$\dfrac{\alpha^6}{6!} = 0{,}000008$
$S_1 = 1{,}001393$	$S_2 = 0{,}091430$

$$\begin{array}{r} S_1 = 1{,}001393 \\ S_2 = 0{,}091430 \\ \hline \cos 24^0 30' = 0{,}909963 \end{array}$$

3. *Вычисление тангенса.* По формуле $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ можно определить тангенс угла, если вышеуказанными спо-

собами найдены синус и косинус. При вычислении $\sin 24^0 30'$ мы получили бы значение 0,414693. В п. 2 мы нашли, что $\cos 24^0 30' = 0,909963$.

Отсюда $\operatorname{tg} 24^0 30' = \frac{0,414693}{0,909963}$. Деление производится по сокращенному методу.

$$
\begin{array}{r l}
4146930 : 909963 = 0,455725 & \\
\underline{3639852} & \\
507078 & \\
\underline{454981} & \\
52097 & \\
\underline{45498} & \\
6599 & \\
\underline{6369} & \\
230 & \\
\underline{181} & \\
49 &
\end{array}
$$

Таким образом $\operatorname{tg} 24^0 30' = 0,455725$.

ОГЛАВЛЕНИЕ.