УДК 533
ББК 22.333
К 73

Котельников В. А., Котельников М. В., Гидаспов В. Ю.
Математическое моделирование обтекания тел потоками столкновительной и бесстолкновительной плазмы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-1253-6.

Рассматриваются физические, математические и численные модели взаимодействия потоков столкновительной и бесстолкновительной плазмы с внесенными в них телами. Проведены обширные вычислительные эксперименты, в результате которых получены функции распределения заряженных частиц в лобовой, боковой и теневой областях обтекаемых тел; распределения концентраций заряженных частиц; профили самосогласованных электрических полей. Исследовано влияние направленной скорости, внешнего магнитного поля, характерного размера и потенциала тела на электродинамические параметры потока, возмущенного внесенным телом. Среди технических приложений приведены исследования параметров ближнего следа за спутником и гиперзвуком летательным аппаратом, а также методы зондовой диагностики плазменных потоков.

Предназначено научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам в области физики и электродинамики плазменных потоков, вычислительной физики, авиационно-космической техники, зондовой диагностики.

Рецензенты:
д. ф.-м. наук, профессор С. А. Лосев,
д. т. н. Л. Е. Украинский.

ISBN 978-5-9221-1253-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III. **Зондовые методы диагностики плазменных потоков**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящую книгу можно рассматривать как продолжение монографии В. А. Котельникова, С. В. Ульданова, М. В. Котельникова «Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы», выпущенной в издательстве «Наука» в 2004 г. [1]. В новое издание вошли результаты, полученные авторами в последующие пять лет после издания указанной монографии с использованием тех же самых математических и численных моделей, показавших свою высокую эффективность и надежность. Однако, внимание было сосредоточено на более узком вопросе — обтекании тел потоками столкновительной и бесстолкновительной плазмы. Эти исследования актуальны прежде всего для авиационно-космической техники. Подробно рассмотрены возмущенные зоны, возникающие около спутников, движущихся в ионосфере, и гиперзвуковых летательных аппаратов, движущихся в плотных слоях атмосферы. Рассмотрены также отдельные вопросы движения тел в переходном режиме с учетом столкновений типа ион–атом и электрон–атом. Особое внимание уделено методам зондовой диагностики столкновительной и бесстолкновительной плазмы, которые до настоящего времени еще недостаточно разработаны.

Книга появилась в результате сотрудничества в научно-технической области кафедр «Прикладная физика» и «Вычислительная математика и программирование» МАИ и Научного центра нелинейной волновой механики и технологии РАН. Она издана при поддержке РФФИ (проект № 09-08-07-027).

Авторы выражают благодарность заведующему кафедрой «Прикладная физика» МАИ и одновременно директору НЦ НВМТ РАН академику Р. Ф. Ганиеву, и заведующему кафедрой «Вычислительная математика и программирование» МАИ, чл.-корр. РАН У. Г. Пирумову за поддержку и помощь в работе над книгой. Авторы благодарны всем преподавателям, научным сотрудникам, студентам и аспирантам, принимавшим участие в составлении и отладке отдельных программ и проведении численных экспериментов. Авторы признательны также научным сотрудникам ООО «Ника Софтвэр» В. А. Волкову и А. В. Хохлову [2] за предоставленные материалы вычислительных экспериментов по моделированию гиперзвукового обтекания тел воздухом с учетом равновесной диссоциации и ионизации.

По своей структуре книга состоит из трех взаимосвязанных частей. Первая часть посвящена обтеканию тел потоками бесстолкновительной плазмы. Вторая часть — обтеканию тел потоками столкновительной

плазмы. Третья часть — методам зондовой диагностики плазменных потоков. Обсуждение переходного режима обтекания вошло во вторую часть. Все три части объединены единым методическим подходом и едиными численными моделями. Во всех трех частях учитывается самосогласованное электрическое поле. Специалист, заинтересованный результатами в какой-либо одной части, может без особого труда изучать только этот материал.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИНДЕКСЫ, СОКРАЩЕНИЯ

Обозначения

A_k^i — матрица состава (число атомов k-го элемента в i-м веществе)
B — индукция магнитного поля
b — подвижность частиц
c — скорость света в вакууме
C — конденсатор, молярная теплоемкость
$\mathbf{D}$ — вектор электрического смещения
D — коэффициент диффузии
E — напряженность электрического поля, энергия единицы массы
e — модуль заряда электрона
F — свободная энергия
f — функция распределения частиц
G — потенциал Гиббса
H — энтальпия
h — шаг расчетной сетки
I — сила тока
J — якобиан перехода, вращательный момент молекул
j — плотность тока
k — постоянная Больцмана
Kn — число Кнудсена
m — масса частицы
M — число Маха, момент сил, символ молекулы или атома
n — концентрация частиц
N — число химических компонент в системе
N_A — количество элементов сорта A
p — давление, импульс
Pr — число Прандтля
q — заряд частицы
r — размер тела
r_{D} — радиус Дебая
Re — число Рейнольдса
S — площадь, энтропия
Sc — число Шмидта
t — время
T — абсолютная температура, период колебаний
U — напряжение, внутренняя энергия

$\mathbf{v}$ — вектор скорости
v — удельный объем
W — энергия
$W^{(r)}$ — скорость химической реакции
Y — интеграл столкновений
γ — показатель адиабаты
γ_i — мольно-массовая концентрация i-й компоненты
λ — средняя длина свободного пробега
Λ — коэффициент теплопроводности
β — параметр Холла
ε_0 — электрическая постоянная
$\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$ — отношение температур ионов и электронов
μ_0 — магнитная постоянная
μ — коэффициент динамической вязкости, приведенная масса
μ_i — химический потенциал i-й компоненты смеси
ν — частота столкновений
ρ — плотность заряда, плотность газа
σ — сечение элементарного процесса
$\sigma_{k,\varepsilon}$ — константы модели турбулентности
τ — характерное время релаксации, тензор сдвиговых напряжений
φ — потенциал
ω — частота плазменных колебаний
χ — угол рассеяния
δ — толщина пограничного слоя
Δ — оператор Лапласа, толщина слоя объемного заряда
∇ — оператор градиента

Индексы

e — электрон
i — ион, индекс суммирования
a — нейтральный атом, молекула
α — сорт частиц
0 — индекс безразмерной величины
p — индекс поверхности тела (зонда)
∞ — индекс внешней границы расчетной области (возмущенной зоны)

Сокращения

ВАХ — вольт-амперная характеристика
КЛА — космический летательный аппарат
ГЛА — гиперзвуковой летательный аппарат
ПД — плазменный двигатель
СПД — стационарный плазменный двигатель
ДЗДЭ — двигатель с замкнутым дрейфом электронов

ЭВМ — электронно-вычислительная машина
ФР — функция распределения
ФРИ — функция распределения ионов
ФРЭ — функция распределения электронов
МАИ — Московский авиационный институт
НЦ НВМТ РАН — Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН
РАН — Российская академия наук
ИСЗ — искусственный спутник Земли
ДАС — двигатель с анодным слоем
ДЗДЭ — двигатель с замкнутым дрейфом электронов
ПИД — плазменно-ионный двигатель
ЭРД — электроракетный двигатель
ИАЭ — Институт атомной энергии
ЦНИИМАШ — Центральный научно-исследовательский институт машиностроения
ЦИАМ — Центральный институт авиационного машиностроения

Часть I

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКАМИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Глава 1

ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКАМИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Молекулярный режим обтекания внесенных в плазму тел характеризуется условием: число Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda/r_{\mathrm{p}} \to \infty$, где λ — средняя длина свободного пробега частиц, r_{p} — характерный размер задачи. Такой режим встречается при движении летательных аппаратов в ионосфере Земли и за ее пределами; в струях, истекающих из движителей малой тяги; в некоторых типах газового разряда (тлеющий разряд, дуга низкого давления, СВЧ-разряд и др.).

1.1. Кинетическое уравнение Больцмана

Основное уравнение кинетической теории для одночастичной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ было получено Л. Больцманом в 1872 г. [3]:

$$\frac{Df}{Dt} = J^{\mathrm{st}}(f), \tag{1.1}$$

где $J^{\mathrm{st}}(f)$ — интеграл столкновений, D/Dt — субстанциональная производная:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \tag{1.2}$$

$\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и скорость частицы, $\mathbf{F}$ — результирующая сила, отнесенная к единице массы. Уравнение (1.1) определяет процессы переноса в однокомпонентном газе, если учитываются только парные столкновения. Интеграл столкновений может быть записан в виде

$$J^{\mathrm{st}} = \int (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g_{\alpha\beta} b\, db\, d\varphi\, d\mathbf{v}_\beta. \tag{1.3}$$

Здесь $g_{\alpha\beta}$ — относительная скорость сталкивающихся частиц α и β, b — прицельный параметр, φ — азимутальный угол. Интеграл столкновений (1.3) должен удовлетворять законам сохранения. Для случая упругих столкновений в однокомпонентном газе выполняются соотношения:

$$\int J^{\mathrm{st}} \psi_i\, d\mathbf{v} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Здесь ψ_i — инварианты столкновений ($\psi_1 = m$; $\psi_2 = m\mathbf{v}$; $\psi_3 = mv^2/2$). Если умножить почленно уравнение (1.1) на инварианты столкновений и проинтегрировать по всем скоростям частиц, то с учетом (1.4) из уравнения Больцмана можно получить дифференциальные уравнения гидродинамики. Решив уравнение (1.1), можно вычислить моменты функции распределения, например, концентрацию частиц

$$n = \int f\, d\mathbf{v}, \tag{1.5}$$

и температуру

$$\frac{3}{2}kT = 0{,}5m \int f \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2\, d\mathbf{v}. \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{v}_0$ — гидродинамическая скорость течения.

Аналитическое решение уравнения (1.1) удается получить лишь в частных случаях, обзор которых можно найти в работах [4, 5]. Одним из них является распределение Максвелла, пригодное в локально термодинамически равновесном газе в отсутствие внешних сил. Для этого случая выполняется равенство

$$0 = J^{\mathrm{st}}, \tag{1.7}$$

из которого следует распределение Максвелла

$$f^{\mathrm{M}} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \tag{1.8}$$

где v — тепловая скорость молекул. В случае слабоионизованного газа, когда столкновениями между заряженными частицами можно пренебречь ($\nu_{\mathrm{e}} \ll \delta\nu_{\mathrm{ea}}$, где ν_{e} — частота столкновения между заряженными частицами; ν_{ea} — частота столкновений между заряженными и нейтральными частицами; δ — относительное количество энергии, теряемое заряженными частицами за одно столкновение), классическое уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = J_{\alpha\mathrm{a}}, \quad \alpha = \mathrm{i}, \mathrm{e}, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha \mathbf{E}/m_\alpha$ — сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле в расчете на единицу массы, q_α — заряд частицы, индекс i относится к ионам, e — к электронам, a — к нейтральным частицам. Если плазма настолько разрежена, что столкновениями между заряженными частицами можно пренебречь, то интеграл столкновений $J_{\alpha\mathrm{a}} = 0$, и уравнение (1.9) упрощается:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad \alpha = \mathrm{i}, \mathrm{e}. \tag{1.10}$$

Это уравнение известно в литературе, как уравнение Власова.

1.2. Обобщенное уравнение Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана играет огромную роль в физике, особенно в гидродинамике, в теории процессов переноса, в космологии. Однако с момента своего создания и до настоящего времени больцмановская физическая кинетика, основанная на уравнении (1.1), подвергается критике ввиду имеющих место внутренних противоречий. Отметим некоторые из них, основываясь на анализе, проведенным Б. В. Алексеевым [6–8].

1. Уравнение Больцмана справедливо для масштаба времени τ_λ (τ_λ — время между столкновениями частиц) и $\tau_г$ ($\tau_г$ — гидродинамическое время течения), но оно не работает на временах $\tau_в$ ($\tau_в$ — время взаимодействия сталкивающихся частиц). Поэтому ряд физических явлений, в которых существенен масштаб времени $\tau_в$, выпадает из рассмотрения. Это, в частности, касается теоретических основ современных нанотехнологий.

2. Обычно одночастичная функция распределения, входящая в (1.1), нормируется на число частиц в единице объема. Если частицы рассматривать как материальные точки, то такая нормировка возможна. Но при вычислении интеграла столкновений, например, с использованием модели твердых сфер, необходимо знать сечения столкновений, т. е. рассматривать частицы конечного размера. Попадание центра масс частицы в контрольный объем не означает, что вся частица находится в этом объеме. В произвольный момент времени всегда найдутся частицы, которые располагаются частично внутри, а частично снаружи контрольной поверхности, что ведет к флуктуациям массы, а, следовательно, и других гидродинамических величин. Возможность таких флуктуаций уравнение (1.1) не предусматривает.

3. Как показано в п. 1.1, из кинетического уравнения Больцмана вытекают гидродинамические уравнения: уравнение неразрывности, движения и энергии. Последнее при некоторых предположениях может быть сведено к уравнению теплопроводности параболического типа, связывающему первую производную от температуры по времени и вторую производную по координатам. Его решение показывает, что импульс температуры, созданный в источнике, может дать скачок температуры в любой достаточно удаленной точке за бесконечно малый интервал времени. Это означает, что происходит бесконечно быстрое распространение теплоты, что абсурдно с молекулярно-кинетической точки зрения. Физики «исправили» это противоречие, введя в уравнение теплопроводности вторую производную по времени и сведя тем самым его к уравнению гиперболического типа. «Исправленное» уравнение приводит к конечным скоростям тепловых возмущений. Такое «исправление» неизбежно ведет к новой гидродинамической теории, которая в свою очередь должна быть следствием кинетического уравнения, отличающегося от уравнения Больцмана (1.1).

Приведенных примеров достаточно, чтобы обосновать необходимость вывода более общего уравнения, чем уравнение (1.1), которое было бы лишено указанных противоречий. Среди большого числа попыток создания обобщенного уравнения Больцмана [9–14] наиболее последовательное и логически обоснованное с нашей точки зрения принадлежит Б. В. Алексееву [6–8]. Ниже будут изложены основные идеи и выводы, вытекающие из работ Б. В. Алексеева (впервые работа Б. В. Алексеева была доложена на лекциях по физической кинетике, прочитанных для научных сотрудников Софийского университета в 1987 г., а в 1988 г. опубликована в тезисах доклада на седьмом совещании по механике реагирующих сред (Красноярск)). При выводе обобщенного кинетического уравнения были учтены все три характерных масштаба (от масштабов времени перейдем к масштабам длины, умножив масштаб времени на масштаб скорости):

• $r_{\text{в}} = l$ — масштаб взаимодействия (l — длина Ландау, на которой кинетическая энергия теплового движения kT равна потенциальной энергии взаимодействия зарядов: $kT = e^2/(4\pi\varepsilon_0 l) \rightarrow l = e^2/(4\pi\varepsilon_0 kT)$);

• $r_\lambda = \lambda$ — средняя длина свободного пробега;

• $r_{\text{г}} = L$ — гидродинамический масштаб, например, диаметр трубы, в которой течет газ.

Обычно

$$r_{\text{в}} \ll \lambda \ll L. \tag{1.11}$$

Как и в случае классического уравнения Больцмана (1.1), вывод обобщенного уравнения начинается с уравнения Лиувилля для N-частичной функции распределения

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{v}_i} = 0. \tag{1.12}$$

Затем применяется метод Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) [15]. Безразмерные уравнения для S-частичной функции распределения f_S записываются с использованием пространственного масштаба $r_{\text{в}}$. Далее применяется метод многих масштабов [16]. В данном случае имеется три характерных масштаба: $r_{\text{в}} = l$, $r_\lambda = \lambda$, $r_{\text{г}} = L$. В методе многих масштабов $\widehat{f}_S$ представляется в виде асимптотического ряда

$$\widehat{f}_S = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_S^{\,j}\big(\widehat{t}_{\text{в}}, \widehat{\mathbf{r}}_{\text{iв}}, \widehat{\mathbf{v}}_{\text{iв}}; \widehat{t}_\lambda, \widehat{\mathbf{r}}_{\text{i}\lambda}, \widehat{\mathbf{v}}_{\text{i}\lambda}; \widehat{t}_L, \widehat{\mathbf{r}}_{\text{i}L}, \widehat{\mathbf{v}}_{\text{i}L}\big)\varepsilon^j, \tag{1.13}$$

в котором $\widehat{f}_S^{\,j}$ зависит от всех трех групп переменных. Крышка сверху означает безразмерную величину (в дальнейшем будет опускаться). ε^j — малый параметр ($\varepsilon = nr_{\text{в}}^3$ — число частиц в объеме взаимодействия).

Далее осуществляется стандартная процедура перехода к одночастичной функции распределения, в результате чего получается обобщенное уравнение Больцмана для слабоионизованного газа:

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} - \frac{D}{Dt}\left(\tau_{\alpha\mathrm{a}}\frac{Df_\alpha}{Dt}\right) = J_{\alpha\mathrm{a}}, \quad \alpha = \mathrm{i}, \mathrm{e}. \tag{1.14}$$

В уравнении (1.14) $\tau_{\alpha\mathrm{a}}$ — среднее время между столкновениями нейтральных (a) и заряженных (α) частиц. Интеграл столкновений $J_{\alpha\mathrm{a}}$ остается в больцмановской форме (1.3).

Рассмотрим случай максвелловского закона взаимодействия между заряженными и нейтральными частицами, когда сила межмолекулярного взаимодействия обратно пропорциональна пятой степени расстояния:

$$F_{\alpha\mathrm{a}} = \frac{\chi_{\alpha\mathrm{a}}}{r^5}. \tag{1.15}$$

В этом случае $\tau_{\alpha\mathrm{a}}$ может быть вычислено [7]:

$$\tau_{\alpha\mathrm{a}} = \left[0{,}422 \cdot 2\pi\left(\chi\frac{m_\alpha + m_\mathrm{a}}{m_\alpha m_\mathrm{a}}\right)^{1/2} n_\mathrm{a}\right]^{-1}. \tag{1.16}$$

Если ввести

$$\begin{gathered} A = \frac{8}{3}\pi^{1/2}\Gamma(5/2) \cdot 0{,}422(m_\alpha + m_\mathrm{a})^{-1}\left(\frac{\chi}{m_\mathrm{a}M}\right)^{1/2}; \\ M = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\mathrm{a}}, \end{gathered} \tag{1.17}$$

то частота столкновений ν заряженных и нейтральных частиц может быть представлена в виде

$$\nu = n_\mathrm{a}(m_\alpha + m_\mathrm{a})A, \tag{1.18}$$

при этом $\tau_{\alpha\mathrm{a}} = \nu^{-1}$.

Обобщенное уравнение Больцмана в данном случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{F}_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} - \tau_{\alpha\mathrm{a}}\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} + 2\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} : \mathbf{F}_\alpha\mathbf{F}_\alpha\right) = J_{\alpha\mathrm{a}}. \tag{1.19}$$

Здесь двоеточие означает двойное скалярное произведение тензоров.

В общем случае при использовании уравнения (1.14) следует иметь ввиду, что

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{F}_\alpha^\Sigma\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}; \quad \mathbf{F}_\alpha^\Sigma = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_{\alpha\mathrm{a}}, \tag{1.20}$$

где $\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha E/m_\alpha$ — внешняя сила, $\mathbf{F}_{\alpha\mathrm{a}}$ — сила межмолекулярного взаимодействия.

1.3. Система уравнений Максвелла

Внешнее электрическое поле, входящее в уравнения (1.9), (1.19) (а также силы, возникающие в магнитном поле, если оно существует), определяются решением системы дифференциальных уравнений Максвелла [17]:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t;\\ \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}_{\text{пр}}+\partial\mathbf{D}/\partial t;\\ \mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{j}_{\text{пр}}=\sigma\mathbf{E}.\end{gathered} \tag{1.21}$$

В случае использования обобщенного уравнения Больцмана система уравнений Максвелла должна быть модифицирована. Ее традиционная формулировка (1.21) не содержит уравнения неразрывности, однако получена с его использованием:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{пр}}=0, \tag{1.22}$$

где ρ — заряд единицы объема, $\mathbf{j}$ — плотность тока проводимости. Величины ρ и $\mathbf{j}$ получены без учета флуктуаций плотности, возникающих вследствие конечных размеров элементарных зарядов. Если учесть флуктуации, то в уравнениях (1.21) следует писать: $\rho=\rho_{\text{ср}}-\rho^*$; $\mathbf{j}=\mathbf{j}_{\text{ср}}-\mathbf{j}^*$, где ρ^* и $\mathbf{j}^*$ вычисляются в рамках обобщенной больцмановской теории [8].

Как показано в [18], в случае зондовых задач зондовые токи достаточно малы, и их магнитными полями можно пренебречь. В этих условиях процессы переноса заряда определяются электрическим полем, зависящим от потенциала зонда и пристеночного слоя объемного заряда. Поэтому система уравнений Максвелла сводится к уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi=\frac{e(n_{\text{e}}-n_{\text{i}})}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E}=-\nabla\varphi, \tag{1.23}$$

где φ — потенциал самосогласованного электрического поля, n_{i}, n_{e} — концентрации заряженных частиц, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

1.4. Математическая модель задачи

В общем случае задача механики и электродинамики пристеночной плазмы в молекулярном режиме зависит от шести фазовых переменных и времени. С целью сокращения необходимых ресурсов ЭВМ, но в то же время для сохранения достаточной общности задачи были выбраны следующие постановки.

1. Внесенное в разреженную плазму тело имеет форму цилиндра радиуса r_{p}, длины $L_{\text{p}}\gg r_{\text{p}}$ и находится под потенциалом φ_{p}.

Направленная скорость $\mathbf{v}_\infty$ указана на рис. 1.1. Внешнее магнитное поле индукции $\mathbf{B}$ может быть направлено вдоль оси цилиндра.

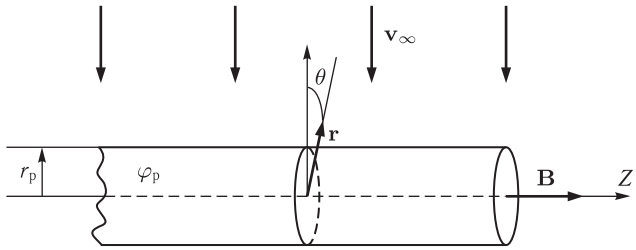


Рис. 1.1. Расположение тела в потоке

В этих условиях с учетом симметрии задачи и условия $L_\text{p} \gg r_\text{p}$ в цилиндрической системе координат $(r, \theta, z, v_r, v_\theta, v_z)$ функции распределения заряженных частиц зависят только от четырех фазовых переменных и времени:

$$f_\alpha = f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t). \tag{1.24}$$

Кинетическое уравнение в классической больцмановской постановке в указанных координатах записывается так [1]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left(\frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}E_r\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}E_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r}\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0. \tag{1.25}$$

Оно дополняется уравнением Пуассона для самосогласованного электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_\alpha n_\alpha; \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \tag{1.26}$$

где

$$n_\alpha(r, \theta, t) = \left(\frac{2kT_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t)\, dv_r\, dv_\theta. \tag{1.27}$$

Плотность тока частиц сорта α на поверхность цилиндра и интегральный ток на цилиндр единичной длины имеют следующий вид:

$$j_\alpha(t, \theta) = \left(\frac{2kT_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} q_\alpha \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(r_\text{p}, \theta, v_r, v_\theta, t) v_r\, dv_r\, dv_\theta, \tag{1.28}$$

$$I_\alpha(t) = r_\text{p} \int\limits_0^{2\pi} j_\alpha(t, \theta)\, d\theta. \tag{1.29}$$

Система начальных и граничных условий будет обсуждена ниже в п. 1.1.5.

Если в окрестности цилиндра существует продольное однородное магнитное поле, то уравнение (1.25) выглядит так:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left(\frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}E_r + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}Bv_\theta\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \\ + \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}E_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}Bv_r\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0. \quad (1.25')$$

2. Рассматривается пластина достаточно большого размера, нормаль к которой перпендикулярна вектору направленной скорости плазмы. На пластине выделим участок в виде удлиненного прямоугольника, электрически изолированный от пластины. Направим ось Y по нормали к пластине, ось X — вдоль вектора скорости, ось Z — вдоль удлиненной стороны прямоугольника (рис. 1.2).

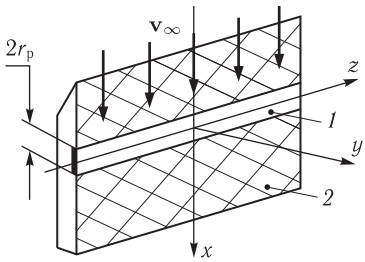


Рис. 1.2. Плоский пристеночный электрод: *1* — активная поверхность электрода; *2* — обтекаемая плазмой пластина

Размер короткой стороны прямоугольника $2r_\text{р}$, его потенциал $\varphi_\text{р}$. Выделенный прямоугольник можно рассматривать как часть боковой поверхности спутника, а в зондовой теории — как пристеночный зонд ленточного типа. Если имеется магнитное поле, то оно должно быть постоянным и направленным вдоль оси Z. В данной постановке задача оказывается четырехмерной в фазовом пространстве и представляется достаточно общей. Запишем систему уравнений Власова–Пуассона для элемента конструкции ленточного типа в декартовой системе координат (X, Y, Z):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(E_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} + E_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y}\right) = 0; \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_\alpha n_\alpha, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi; \quad (1.31)$$

$$n_\alpha = \left(\frac{2kT_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x, y, v_x, v_y, t)\, dv_x\, dv_y; \quad (1.32)$$

$$j_\alpha = \left(\frac{2kT_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} q_\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} f_\alpha(x_\text{р}, y_\text{р}, v_x, v_y, t) v_y\, dv_x\, dv_y. \quad (1.33)$$

Система (1.30)–(1.33) составляет математическую модель данной задачи. (Начальные и граничные условия будут рассмотрены ниже.)

Системы уравнений, приведенные выше, приводились к безразмерному виду. При этом использовалась следующая система масштабов:

масштаб потенциала $$M_\varphi = \frac{kT_\mathrm{i}}{e}; \tag{1.34}$$

масштаб длины $$M_L = \left(\frac{\varepsilon_0 kT_\mathrm{i}}{e^2 n_{\mathrm{i}\infty}}\right)^{1/2}; \tag{1.35}$$

масштаб концентрации $$M_n = n_{\mathrm{i}\infty}; \tag{1.36}$$

масштаб скорости $$M_{v\alpha} = \left(\frac{2kT_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2}, \quad \alpha = \mathrm{i}, \mathrm{e}; \tag{1.37}$$

масштаб функции распределения $$M_{f\alpha} = \frac{M_n}{(M_{v\alpha})^3}; \tag{1.38}$$

масштаб времени $$M_t = \frac{M_L}{M_{v\mathrm{i}}}; \tag{1.39}$$

масштаб напряженности электрического поля $$M_E = \frac{M_\varphi}{M_L}; \tag{1.40}$$

масштаб плотности тока $$M_j = eM_n M_{v\mathrm{i}}; \tag{1.41}$$

масштаб интегрального тока $$M_I = M_j (M_L)^2; \tag{1.42}$$

масштаб магнитной индукции $$M_B = \frac{2M_E}{M_{v\mathrm{i}}}. \tag{1.43}$$

Учитывая приведенные выше масштабы введем следующие обозначения:

$r_0 = r_\mathrm{p}/M_L$ — безразмерный радиус цилиндра или безразмерная полуширина полосы;

$\varphi_0 = \varphi_\mathrm{p}/M_\varphi$ — безразмерный потенциал тела;

$v_0 = v_\infty/M_{v\mathrm{i}}$ — безразмерная направленная скорость плазмы;

$B_0 = B/M_B$ — безразмерная величина магнитной индукции. (1.43′)

Приведем для примера безразмерную систему уравнений (1.25′), (1.26)–(1.29), полученную при использовании масштабов (1.34)–(1.43):

$$\frac{\partial \widehat{f}_\alpha}{\partial \widehat{t}} + \sqrt{\delta_\alpha}\,\widehat{v}_r \frac{\partial \widehat{f}_\alpha}{\partial \widehat{r}} + \sqrt{\delta_\alpha}\,\frac{\widehat{v}_\theta}{\widehat{r}} \frac{\partial \widehat{f}_\alpha}{\partial \widehat{\theta}} + \left(\sqrt{\delta_\alpha}\,\frac{\widehat{v}_\theta^2}{\widehat{r}} + \sqrt{\delta_\alpha}\,\frac{Z_\alpha}{2\varepsilon_\alpha}\widehat{E}_r + \frac{Z_\alpha}{\mu_\alpha}\widehat{B}\widehat{v}_\theta\right)\frac{\partial \widehat{f}_\alpha}{\partial \widehat{v}_r} +$$
$$+ \left(\sqrt{\delta}_\alpha \frac{Z_\alpha}{2\varepsilon_\alpha}\widehat{E}_\theta - \sqrt{\delta_\alpha}\,\frac{\widehat{v}_r \widehat{v}_\theta}{\widehat{r}} - \frac{Z_\alpha}{\mu_\alpha}\widehat{B}\widehat{v}_r\right)\frac{\partial \widehat{f}_\alpha}{\partial \widehat{v}_\theta} = 0; \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{r}^2} + \frac{1}{\widehat{r}}\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{r}} + \frac{1}{\widehat{r}^2}\frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{\theta}^2} = \widehat{n}_\mathrm{e} - \widehat{n}_\mathrm{i}; \tag{1.45}$$

$$\widehat{n}_\alpha(\widehat{r}, \widehat{\theta}, \widehat{t}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_\alpha(\widehat{r}, \widehat{\theta}, \widehat{v}_r, \widehat{v}_\theta, \widehat{t})\, d\widehat{v}_r\, d\widehat{v}_\theta; \tag{1.46}$$

$$|\widehat{j}_\alpha(\widehat{t},\widehat{\theta})| = \sqrt{\delta}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_\alpha(\widehat{r}_0,\widehat{\theta},\widehat{v}_r,\widehat{v}_\theta,\widehat{t})\,\widehat{v}_r\,d\widehat{v}_r\,d\widehat{v}_\theta; \tag{1.47}$$

$$|\widehat{I}_\alpha(\widehat{t})| = \widehat{r}_0\int\limits_{0}^{2\pi}\widehat{j}_\alpha(\widehat{t},\widehat{\theta})\,d\widehat{\theta}; \tag{1.48}$$

$$\varepsilon_\alpha = \mu_\alpha = \delta_\alpha = z_\alpha = 1 \quad \text{при} \quad \alpha = \mathrm{i};$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_\mathrm{i}}, \quad \mu_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_\mathrm{i}}, \quad \delta_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_\mathrm{i}}\frac{m_\mathrm{i}}{m_\alpha}, \quad z_\alpha = -1 \quad \text{при} \quad \alpha = \mathrm{e}.$$

В дальнейшем символ безразмерной величины «$\widehat{\ }$» будем опускать.

1.5. Начальные и граничные условия

Для решения системы дифференциальных уравнений математических моделей, сформулированных в п. 1.1.4, необходимо задать начальные и граничные условия. Для уравнений (1.25), (1.30) необходимо задать начальную функцию распределения для частиц каждого сорта. Кроме того, должно быть задано граничное условие для f_α на границах расчетной области. Для решения уравнения Пуассона (1.26), (1.31) необходимы два граничных условия для потенциала: значение φ при $r = r_\mathrm{p}$ и его значение на внешней границе расчетной области, которое, как правило, считается нулевым. В ряде случаев [19] в качестве начальных распределений частиц выбирают равновесное распределение Максвелла:

$$f_\alpha = n_\infty\left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m_\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty)^2}{2kT_\alpha}\right], \tag{1.49}$$

где n_∞ — концентрация частиц в невозмущенной плазме, T_α — температура компоненты α, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы, $\mathbf{v}_\infty$ — вектор скорости набегающего потока.

Как показали методические исследования, начальное распределение существенно влияет на процесс установления решения, однако стационарное решение от начальной функции распределения зависит мало. Поскольку точное значение начального распределения, как правило, неизвестно, задачу приходится решать дважды. Сначала берется в качестве начального максвелловское распределение. Полученное на этом этапе стационарное решение берется за начальное распределение на втором этапе.

На внешней границе возмущенной зоны используется либо функция распределения Максвелла, либо иное распределение, вычисленное в отдельной задаче. Выпишем выражение (1.49) для случая обтекания цилиндрического тела:

$$f_\alpha(0,r,\theta,v_r,v_\theta) =$$
$$= \frac{n_\infty}{\pi}\left(\frac{m_\alpha}{2kT_\alpha}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m_\alpha\left[(v_r+v_\infty\cos\theta)^2+(v_\theta-v_\infty\sin\theta)^2\right]}{2kT_\alpha}\right\}, \tag{1.50}$$

и участка пластины ленточного типа

$$f_\alpha(0, x, y, v_x, v_y) = \frac{n_\infty}{\pi}\left(\frac{m_\alpha}{2kT_\alpha}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_\alpha\left[(v_x + v_\infty)^2 + v_y^2\right]}{2kT_\alpha}\right\}. \qquad (1.51)$$

Граничные условия на поверхности обтекаемого плазмой тела зависят от физических процессов, которые могут происходить на ней. Для металлической поверхности в простейшем случае ставится условие идеального поглощения, согласно которому электрон, попавший на стенку, пропадает, а ион отдает свой заряд и возвращается в плазму в виде нейтрального атома. При этом отсутствуют потоки заряженных частиц от стенки в плазму.

В реальных условиях вследствии фото-, вторичной или термоэмиссии возможны электронные потоки с поверхности тела, функции распределения которых достаточно хорошо изучены [1, 19, 20].

Глава 2

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКАМИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

2.1. Методы численного решения уравнения Власова

2.1.1. Метод крупных частиц Ю. М. Давыдова. Для решения уравнения Власова удобно использовать явную схему метода крупных частиц Ю. М. Давыдова [21–25], дополненную алгоритмом вычисления на каждом временном слое самосогласованного электрического поля. Метод первоначально был разработан применительно к задачам газовой динамики для расчета сжимаемых течений сплошной среды [21] и в дальнейшем распространен на самый широкий круг задач, в который вошли и задачи расчета пристеночных слоев, возникающих вблизи заряженных тел, обтекаемых плазмой [1, 18, 19].

В соответствии с методом моделируемая среда заменяется системой частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейками эйлеровой сетки. Расчет каждого временного шага разбивается на три этапа. На первом этапе рассматривается изменение за время Δt импульса и энергии крупной частицы, при этом ее граница не смещается относительно начального положения. На втором этапе моделируется движение частиц через границы эйлеровых ячеек и происходит перераспределение частиц по пространству. На третьем этапе рассчитывается перераспределение массы и заряда по пространству.

Выполнение граничных условий задачи обеспечивается введением рядов фиктивных ячеек, шаг по времени удобно выбирать из условия Куранта, хотя оно применимо для линейных систем. Как показано в [108], условие Куранта оказывается слишком жестким для задач механики и электродинамики пристеночной плазмы. Поэтому шаг по времени уточнялся с помощью методических расчетов.

Рассмотрим подробно алгоритм метода крупных частиц для решения уравнения Власова на примере задачи обтекания плазмой неподвижной заряженной сферы [26, 27]. Система уравнений в безразмерном виде имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \gamma v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\gamma E(t,r)}{2}\frac{\partial f}{\partial v} + (1-\gamma)^2\left(\frac{v}{r} + \frac{E(t,r)}{2v}\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right) = 0; \qquad (2.1)$$

$$f|_{t=0} = \pi^{-3/2}\exp(-v^2). \qquad (2.2)$$

Фазовое пространство в данный момент времени разбивается на ячейки с помощью эйлеровой сетки:

$$r_i = r_0 + h_r(i-1), \qquad i = \overline{1, N_r};$$
$$v_j = h_v(j-1), \qquad j = \overline{1, N_v};$$
$$\gamma_k = -1 + h_k(k-1), \quad k = \overline{1, N_\gamma},$$

где $r \in [r_0, r_\infty]$, $v = [0, v_{\max}]$, $\gamma \in [-1, 1]$, $h_{r,v,\gamma}$ — шаги эйлеровой сетки с числом узлов N_r, N_v, N_γ.

Для каждой ячейки сетки Ω_{ijk} вводится величина

$$Q^s_{ijk} = \iiint\limits_{\Omega_{ijk}} f^s J \, dr \, dv \, d\gamma,$$

где s — номер шага по времени, $J \, dr \, dv \, d\gamma$ — элемент объема в фазовом пространстве, $J = 8\pi^2 r^2 \gamma^2$. Таким образом, Q^s_{ijk} — нормированное количество частиц в ячейке Ω_{ijk} в момент времени t^s.

Ввиду неразрывности плотности среды [25], уравнение для $Q = Jf \times \times \Delta r \, \Delta v \, \Delta\gamma$, соответствующее уравнению Власова (2.1), имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + v\gamma \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\gamma E}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} + (1-\gamma^2)\left(\frac{v}{r} + \frac{E}{2v}\right) \frac{\partial Q}{\partial \gamma} = 2\gamma\left(\frac{v}{r} + \frac{E}{2v}\right) Q. \qquad (2.3)$$

В отличии от f величина Q уже не постоянна вдоль траекторий в криволинейном пространстве из-за появления в (2.3) правой части типа источника.

Стационарное решение задачи, если оно существует, получается в результате установления, поэтому весь процесс вычислений сводится к многократному повторению вычислительного алгоритма.

Расчет каждого временного шага в соответствии с общим алгоритмом производится в три этапа.

1. *Эйлеров этап*. Пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением крупных частиц. Потоков массы, заряда, импульса через границы ячеек нет. В соответствии с заданным распределением Q^s_{ijk} находится поле концентраций n^s_i, а затем с помощью численного решения уравнения Пуассона определяется электрическое поле E^s_i.

2. *Лагранжев этап*. На этом этапе вычисляются эффекты переноса, связанные с перемещением центров крупных частиц под действием электрического поля. Перемещение ячейки (i, j, k) на текущем шаге по времени находится с помощью уравнений движения:

$$\dot{r} = \gamma v, \quad \dot{v} = \frac{\gamma E}{2}, \quad \dot{\gamma} = (1-\gamma^2)\left(\frac{v}{r} + \frac{E}{2v}\right)$$

с начальными условиями:

$$r(t^s) = r_1, \quad v(t^s) = v_1, \quad \gamma(t^s) = \gamma_1.$$

При этом используется напряженность электрического поля, вычисленная на эйлеровом этапе.

Величина Q меняется в соответствии с уравнением

$$\dot{Q} = 2\gamma\left(\frac{v}{r} + \frac{E}{2v}\right)Q;$$
$$Q(t^s) = Q^s_{ijk}, \quad t \in [t^s, t^s + \Delta t],$$

тогда лагранжева ячейка будет содержать в момент $t = t^s + \Delta t$ количество частиц $Q^{s+1}_{ijk} = Q(t^s + \Delta t)$. Таким образом, получаем смещенное положение крупных частиц в момент $t^s + \Delta t$.

3. *Заключительный этап*. Величина Q^{s+1}_{ijk} в ячейках исходной эйлеровой сетки определяется суммарным вкладом всех ячеек, наложившихся на данную ячейку в момент $t^s + \Delta t$. По известным распределениям Q^{s+1}_{ijk} вычисляются значения макропараметров в момент $t^s + \Delta t$. Например,

$$(n)^{s+1}_i = \sum_{j,k} Q^{s+1}_{ijk}, \quad (j)^{s+1}_i = \sum_{j,k} Q^{s+1}_{ijk} V_j.$$

Схема метода крупных частиц для уравнения Власова консервативна, что позволяет повысить точность вычислений. Кроме того, в [26] показано, что численная диффузия идет в направлении сноса и слабо зависит от размерности фазового пространства.

Необходимые ресурсы ЭВМ существенно зависят от размера области, на которой располагается эйлерова сетка. Размер области по r уточняется в процессе эволюции из-за появления дрейфа носителей заряда. При этом можно использовать алгоритм плавающей сетки, разработанный в [26], что позволяет существенно снизить размер расчетной сетки в пространстве скоростей.

2.1.2. Метод характеристик. Уравнение Власова принадлежит к числу квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нулевой правой частью. Для решения уравнений такого вида широко применяется численный метод характеристик. Алгоритм метода основан на том, что функция распределения в рассматриваемом случае постоянна вдоль характеристик, которые одновременно являются траекториями движения частиц плазмы в фазовом пространстве координат-скоростей. Этот факт позволяет на любом текущем времени расчета последовательно перебрать все узлы расчетной сетки и для каждого узла проинтегрировать систему уравнений характеристик от текущего момента времени до нуля. Получив решение системы для нулевого момента времени и подставив его в начальное условие для уравнения Власова мы получаем искомое значение функции распределения для рассматриваемого узла расчетной сетки. При этом возможны следующие случаи.

1. В процессе интегрирования решение системы уравнений характеристик попало за внешнюю границу расчетной области r_∞. В этом случае в соответствии с тем, что за пределами расчетной области плазма считается невозмущенной и там отсутствует электрическое поле, значения скоростей, соответствующие данной характеристике, уже не

могут изменится при дальнейшем интегрировании системы, поэтому процесс интегрирования можно продолжать только для тех уравнений характеристик, которые связаны с изменением координат.

2. Решение системы уравнений характеристик попало в область расположения обтекаемого плазмой тела. В этом случае существование рассматриваемой частицы плазмы не имеет физического смысла, так как тело по условию задачи не является источником заряженных частиц. В соответствии с этим прекращаем процесс интегрирования системы уравнений характеристик и функцию распределения соответствующей частицы приравниваем к нулю.

3. Решение системы уравнений характеристик попало за пределы расчетной области в пространстве скоростей, фиксированной для начального момента времени расчета. Если при этом начальным условием для уравнения Власова является сеточная функция распределения, то прекращаем процесс интегрирования системы уравнений характеристик и функцию распределения соответствующей частицы приравниваем к нулю (носитель функции распределения по скоростям изначально должен выбираться так, чтобы за его пределами данная функция была достаточно мала, и можно считать ее равной нулю без ущерба для точности расчета). Если начальным условием является аналитическое выражение (например, распределение Максвелла), то процесс интегрирования можно продолжать, поскольку в этом случае функцию распределения можно вычислить на интервале скоростей от $-\infty$ до $+\infty$.

Теперь рассмотрим более подробно этапы метода характеристик на примере задачи обтекания цилиндра разреженной плазмой. Система уравнений в цилиндрических координатах имеет вид (1.25)–(1.29) с начальным максвелловским распределением (1.50). Уравнению Власова (1.25) соответствует система уравнений характеристик

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr^*}{dt^*} &= V_r^*;\\
\frac{d\theta}{dt^*} &= \frac{V_\theta^*}{r^*};\\
\frac{dV_r^*}{dt^*} &= \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}E_r(t^*, r^*, \theta^*);\\
\frac{dV_\theta^*}{dt^*} &= \frac{q_\alpha}{m_\alpha}E_\theta(t^*, r^*, \theta^*) - \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Условия на текущий момент времени:

$$r^*(t) = r, \quad \theta^*(t) = \theta, \quad V_r^*(t) = V_r, \quad V_\theta^*(t) = V_\theta. \tag{2.5}$$

В качестве ограниченного носителя функции распределения рассмотрим следующий компакт в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} f_\alpha = \big\{(r, \theta, V_r, V_\theta)\colon\ & r \in [r_0, r_\infty],\ \theta \in [0, \pi],\\
& V_r \in [-V_{\max} - V_\infty \cos\theta,\ V_{\max} - V_\infty \cos\theta],\\
& V_\theta \in [-V_{\max} + V_\infty \sin\theta,\ V_{\max} + V_\infty \sin\theta]\big\}.
\end{aligned}$$

Здесь r_0 — радиус цилиндра, r_∞ — условная внешняя граница возмущенной зоны, $V_{\max}$ — граница обрезания «хвоста» максвелловского распределения. По переменной θ используется симметрия возмущенной зоны. В пространстве скоростей носитель сдвинут так, чтобы центр тяжести начальной функции распределения оказался в центре квадрата со стороной $2V_{\max}$.

Шаг по времени выбирается максимально большим при условии приемлемой точности расчета. Для выбора оптимального шага по времени проводятся методические расчеты.

Вводятся сеточные функции $(f_\alpha)_{ijkl}$, $(E_r)^s_{ij}$, $(E_\theta)^s_{ij}$. Индексы s, i, j, k, l соответствуют t, r, θ, V_r, V_θ. Значения $(E_r)^s_{ij}$, $(E_\theta)^s_{ij}$ вычисляются после решения уравнения Пуассона для самосогласованного электрического поля с правой частью, определяемой значениями функции распределения на предыдущем шаге по времени. При расчете нет необходимости хранить значения функций распределения на предыдущих шагах по времени, так как они не используются при интегрировании уравнений характеристик.

Решаем «обратную» задачу Коши для системы (2.4) с условиями (2.5) на отрезке времени $[t_s, 0]$. В итоге значение функции распределения в узле $(r_i, \theta_j, V_{rk}, V_{\theta l})$ будет определятся по формуле

$$(f_\alpha)^s_{ijkl} = f_\alpha(t_s, r_i, \theta_j, V_{rk}, V_{\theta l}) = f^0_\alpha\big(r^*(0), \theta^*(0), V^*_r(0), V_\theta(0)\big).$$

Для выбора оптимального метода интегрирования системы уравнений характеристик проводятся методические расчеты. Метод выбирается из соображений достаточной точности расчета при установлении за приемлемое машинное время. В работе использовался метод Рунге–Кутта–Фельберга [28]. В процессе интегрирования значения E_r, E_θ в неузловых точках вычисляются с помощью интерполяции.

Особенностью метода характеристик является то, что в соответствии с интегрированием системы уравнений характеристик от текущего времени до нуля каждый следующий шаг по времени длиннее предыдущего. Поэтому метод характеристик неудобен в расчетах, когда эволюция интегрального тока имеет затянутый характер, поскольку через некоторое критическое время (определяемое параметрами данной ЭВМ) промежуточные данные математических вычислений процессора не умещаются в оперативной памяти компьютера и на жестком диске начинает формироваться файл подкачки. При этом скорость расчета замедляется в десятки раз.

Метод характеристик имеет общие черты с описанным выше методом крупных частиц Ю. М. Давыдова, которые заключаются в следующем.

- При решении уравнения Власова методом характеристик на каждом шаге по времени решается уравнение Пуассона, что соответствует эйлерову этапу метода крупных частиц (см. п. 2.1).
- В соответствии с алгоритмом метода характеристик на каждом шаге по времени проводится численное интегрирование системы урав-

нений характеристик, которые с физической точки зрения являются уравнениями движения фазовых частиц. Точно такие же уравнения движения численно интегрируются на лагранжевом этапе метода Ю. М. Давыдова для нахождения новых положений центров крупных частиц, переместившихся под действием сил электрического поля.

2.2. Методы численного решения уравнения Пуассона

Ограничимся обсуждением методов решения уравнения Пуассона (1.23), к которому сводится система уравнений Максвелла (1.21) в соответствии с физическими и математическими моделями обсуждаемых в гл. 1 задач.

Для цилиндрических и сферических геометрий обтекаемых плазмой тел удобным для численного решения уравнения Пуассона оказался численно-аналитический метод, основанный на методе разделения переменных Фурье. Он позволяет путем аналитических преобразований перейти от граничной задачи для уравнения Пуассона к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом в отличии от конечноразностных методов решение уравнения Пуассона существенно упрощается, так как указанная выше система обыкновенных дифференциальных уравнений легко решается методом прогонки [29]. В случае плоской геометрии обтекаемых плазмой тел возможно применение конформных преобразований [19], сводящих краевые задачи к цилиндрическим или сферическим.

Рассмотрим алгоритм численно-аналитического метода Фурье на примере решения уравнения Пуассона в окрестности цилиндра. Уравнение Пуассона в этом случае имеет вид (1.26), граничные условия задачи:

$$\varphi(r_0, \theta) = \varphi_0, \quad \varphi(r_\infty, \theta) = 0. \tag{2.6}$$

Правая часть $\sigma(r, \theta)$ уравнения Пуассона является периодической четной функцией по θ:

$$\sigma(r, \theta) = \sigma(r, \theta + 2\pi), \quad \sigma(r, \theta) = \sigma(r, -\theta).$$

Учитывая четность по θ ищем решение в виде разложения по системе косинусов:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) \cos k\theta. \tag{2.7}$$

Для этого разлагаем в ряд по косинусам правую часть:

$$\sigma(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta})\, d\tilde{\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos k\theta}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) \cos k\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}, \tag{2.8}$$

и подставляем (2.6), (2.7) в уравнение и граничные условия. После собирания членов ряда одного порядка задача (1.26), (2.6) сведется к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&a_0'' + \frac{1}{r}a_0' = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sigma(r,\tilde{\theta})\,d\tilde{\theta};\\
&a_k'' + \frac{1}{r}a_k' - \frac{k^2}{r^2}a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sigma(r,\tilde{\theta})\cos k\tilde{\theta}\,d\tilde{\theta};\\
&a_0(r_0) = \varphi_0, \quad a_0(r_\infty) = 0;\\
&a_k(r_0) = 0, \qquad a_k(r_\infty) = 0, \quad k \in N.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Благодаря тому, что тригонометрические ряды быстро сходятся [30], в приближенных расчетах можно ограничиться несколькими первыми членами ряда, обеспечивающими заданную точность.

Для численного решения краевой задачи (2.9) при учете небольшого числа гармоник можно воспользоваться методом прогонки. Запишем конечноразностный аналог (2.9) на дискретном пространстве:

$$r_i = r_0 + (i-1)h_r, \quad \theta_j = jh_\theta - \frac{h_\theta}{2}, \quad i = \overline{1,N_r}, \quad j = \overline{1,N_\theta};$$

$$a_k(r_i) = a_k^i, \quad k = \overline{0,K};$$

$$\frac{a_k^{i+1} - 2a_k^i + a_k^{i-1}}{h_r^2} + \frac{1}{r_k}\frac{a_k^{i+1} - a_k^{i-1}}{2h_r} - \frac{k^2}{r_i^2}\alpha_k^i = s_k^i;$$

$$s_k^i = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_\theta}\sigma(r_i,\theta_j)\,h_\theta, & k = 0;\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_\theta}\sigma(r_i,\theta_j)\cos(k\theta_j)h_\theta, & k \neq 0,\end{cases}$$

или

$$\alpha^i a_k^{i-1} + \beta_k^i a_k^i + \gamma^i a_k^{i+1} = \delta_k^i; \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha^i = r_i(2r_i - h_r), \ \beta_k^i = -2(2r_i^2 + k^2h_r^2), \ \gamma^i = r_i(2r_i + h_r), \ \delta_k^i = 2r_i^2h_r^2s_k^i;\\
&a_k^1 = \begin{cases}\varphi_0, & k = 0;\\ 0, & k \neq 0,\end{cases} \quad a_k^{N_r} = \begin{cases}0, & k = 0;\\ 0, & k \neq 0.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Конечно-разностная система (2.10) с условиями (2.11) решается с помощью формул прямого и обратного хода прогонки [29]:

$$\begin{gathered}
M_k^1 = \frac{\delta_k^1 - \alpha^1 a_k^1}{\beta_k^1}, \quad N_k^1 = \frac{\gamma^1}{\beta_k^1}, \quad M_k^i = \frac{\delta_k^i - \alpha^i M_k^{i-1}}{\beta_k^i + \alpha^i N_k^{i-1}},\\
N_k^i = \frac{\gamma^i}{\beta_k^i + \alpha^i N_k^{i-1}}, \quad i = \overline{2,N_{r-1}};
\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$a_k^i = M_k^i + N_k^i a_k^{i+1}. \tag{2.13}$$

В результате получим решение задачи в виде суммы

$$\varphi(r_i, \theta_j) = \sum_{k=0}^{K} a_k(r_i) \cos k\theta_j.$$

2.3. Алгоритм решения системы уравнений Власова–Пуассона

2.3.1. Программный блок. Разработанный программный блок для расчета параметров пристеночной области при обтекании цилиндрического заряженного тела потоком бесстолкновительной плазмы, написанный на языке программирования TMT Pascal v. 3.50 (аналогичная программа написана на языке программирования C++), состоит из двух частей. Первая часть — это программа непосредственного численного моделирования данной задачи. Исходные данные вводятся в расчетную программу непосредственно в ее тексте. Для этого в программе предусмотрена специальная процедура, которая представлена на рис. 2.1.

```
Procedure Param;
Begin
  CD   := 1;{ПАРАМЕТР ЭКРАНА}
  HT0  := 0.02;{ШАГ ПО ВРЕМЕНИ}
  VB   := 0.5;{направленная скорость потока}
  BM   := 0.0;{индукция магнитного поля, масштаб 2×Масш.E/ион. масш. скор. }
  R0   := 3.0;{РАДИУС ЦИЛИНДРА}
  RB   := 15.0;{РАДИУС РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ}
  FZ0  := -6.0;{ПОТЕНЦИАЛ ЦИЛИНДРА}
  FB   := 0.0;{потенциал на границе расчетной области}
  EPS  := 1.0;{ОТНОШЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОНОВ К ТЕМПЕРАТУРЕ ИОНОВ}
  MU   := 2000.0;{ОТНОШЕНИЕ МАССЫ ИОНА К МАССЕ ЭЛЕКТРОНА}
  VM   := 10.0;{ГРАНИЦА ОБРЕЗАНИЯ ФУНКЦИИ МАКСВЕЛЛА}
  ne0  := 1.0;{невозмущенные концентрации электронов}
  ni0  := 1.0;{невозмущенные концентрации ионов}
  flagFZ0 := 1;{0-плавный рост; 1-скачок потенциала}
  TU   := 5.0;{ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА}
  NG   := 5;{ЧИСЛО ГАРМОНИК В РАЗЛОЖЕНИИ ФУРЬЕ}
End;
```

Рис. 2.1. Процедура ввода исходных данных расчета

Далее программа компилируется и запускается на счет. При этом в процессе работы периодически через наперед заданное время программа формирует типизированный файл, содержащий все результаты численного моделирования для данного шага по времени, а также массив, в котором отражен процесс эволюционного изменения интегрального тока на единицу длины цилиндра. Рабочая директория в итоге работы такой программы представлена на рис. 2.2.

В директории файл dokt01.pas — это исходный текст расчетной программы, файл dokt01.exe — откомпилированная выполняемая программа (компилятор запускается файлом Kompil01.bat), файлы, названные

Имя	Тип	Размер	Дата
[..]		<DIR>	29.08.2007 23:12
1		15 446 088	26.08.2007 15:11
2		15 446 088	26.08.2007 15:17
3		15 446 088	26.08.2007 15:22
4		15 446 088	26.08.2007 15:27
5		15 446 088	26.08.2007 15:32
6		15 446 088	26.08.2007 15:38
7		15 446 088	26.08.2007 15:43
Dokt01	fpd	208 058	26.08.2007 15:06
Dokt01	exe	132 100	26.08.2007 15:06
Dokt01	pas	62 283	26.08.2007 15:06
Dokt01	sym	9 690	26.08.2007 15:06
Kompil01	bat	27	17.08.2007 16:04

Рис. 2.2. Вид рабочей директории после работы первой части программного блока

цифрами с 1 по 7, — это и есть типизированные файлы, в которых хранится информация для последующей графической обработки. Имена этим файлам программа дает автоматически в порядке возрастания времени счета. Остальные файлы связаны с процессом компилляции.

Работа программы предусмотрена в двух режимах.

1. В режиме непосредственного счета, когда экран монитора устанавливается в текстовый режим и для контроля выводится номер шага по времени и значения интегрального тока на тело. При этом скорость счета максимальна.

2. В режиме экрана контроля, когда экран монитора устанавливается в графический режим. При этом заданные зависимости параметров плазмы выводятся на экран в режиме реального времени счета, и вычислитель имеет возможность визуально изучать ход эволюции пристеночной области.

Конфигурация экрана контроля может быть запрограммирована исходя из интересов вычислителя, она может изменятся в соответствии с изменениями условий расчета. На рис. 2.3 представлен экран контроля, который был чаще всего использован при расчетах. На экране вычислитель имеет возможность одновременно наблюдать эволюцию ионного и электронного токов, распределения компонент плазмы и потенциала самосогласованного электрического поля по радиусу, а также эволюцию поля скоростей электронов. Например, данный экран соответствует началу расчета при $B = 0{,}01$, и в соответствии с этим мы наблюдаем вращения электронов в магнитном поле по ларморовским окружностям.

В программе предусмотрена возможность одновременного использования нескольких экранов контроля. Переключение между ними и текстовым режимом организовано с помощью клавиш клавиатуры, для чего в программу вставлен специальный блок.

В программе предусмотрена возможность продолжить счет с любого из файлов 1, 2, 3, и т. д. Программа, установленная в такой режим, загружает значения всех параметров из указанного ей файла, и про-

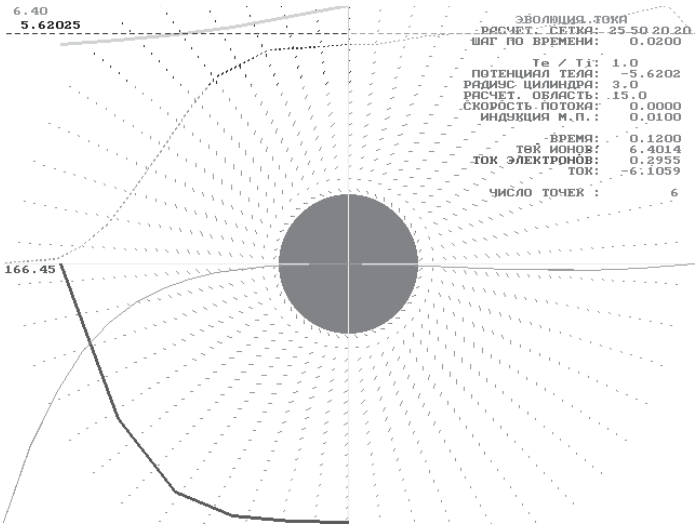


Рис. 2.3. Вид экрана монитора в режиме экрана контроля

должает счет с того момента времени, в который был сформирован указанный файл с результатами расчета.

Вторая часть программного блока — это программа графической обработки полученных результатов. Она помещается в ту же директорию, и исходными данными для нее служат типизированные файлы 1, 2, 3 и т. д. (см. рис. 2.2), сформированные расчетной программой. В момент запуска программы возникает экран, представленный на рис. 2.4.

```
ВВЕДИТЕ НОМЕР ФАЙЛА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ : _

<↵>-Ввод  <Esc>-Выход
```

Рис. 2.4. Экран ввода данных программы графической обработки

Вычислитель имеет возможность ввести номер интересующего его файла, после чего программа загружает информацию из этого файла и переходит в режим листания графиков. Листание возможно в обе стороны и осуществляется с помощью клавиш клавиатуры. Программа написана таким образом, что возможно добавлять графические страницы по мере необходимости или убирать их. При этом возможно вывести практически любую зависимость в любом виде в рамках введенных исходных данных и средств языка программирования. Наиболее часто были использованы в качестве графической визуализации следующие зависимости:

— изменение потенциала, концентраций компонент плазмы, радиальных и азимутальных скоростей вдоль радиуса спереди, сзади и сбоку от тела (рис. 2.5);

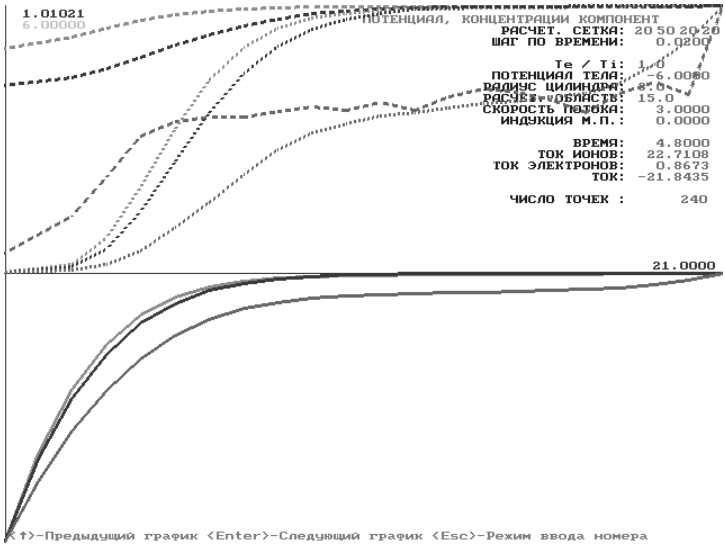


Рис. 2.5. Графическая страница: зависимость потенциала, а также концентраций компонент плазмы по радиусу

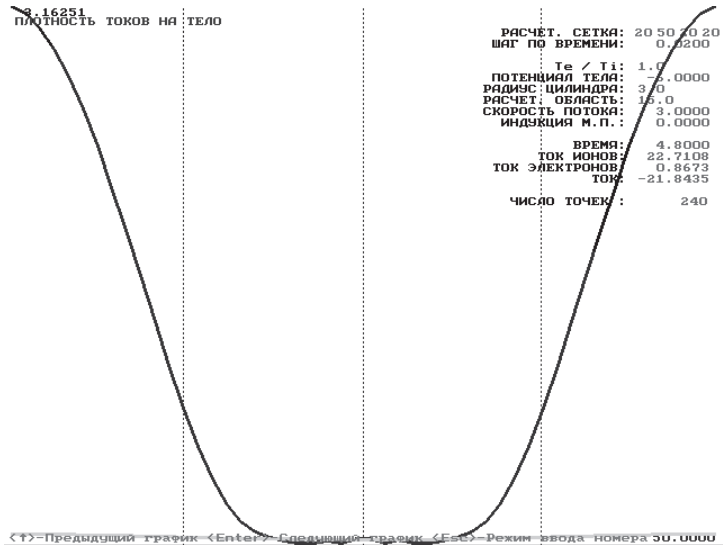


Рис. 2.6. Графическая страница: плотности токов ионов и электронов по обводу цилиндра

— изменение потенциала, концентраций компонент, радиальных и азимутальных скоростей, а также плотностей токов компонент плазмы по обводу тела (рис. 2.6);

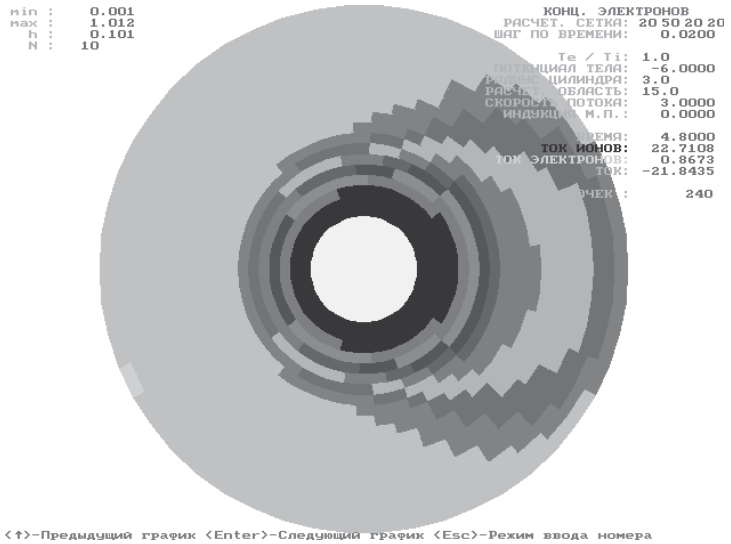


Рис. 2.7. Графическая страница: изолинии поля концентраций электронов

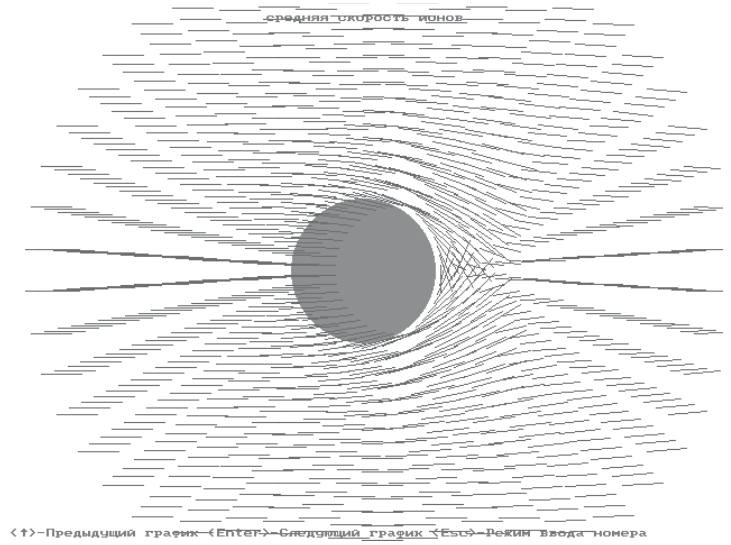


Рис. 2.8. Графическая страница: поле скоростей ионов

— изолинии потенциала, изоконцентрали ионов и электронов (рис. 2.7);

— поля скоростей ионов и электронов (рис. 2.8);

— изменение интегральных токов ионов и электронов по времени (рис. 2.9);

— функции распределения заряженных частиц плазмы (рис. 2.10).

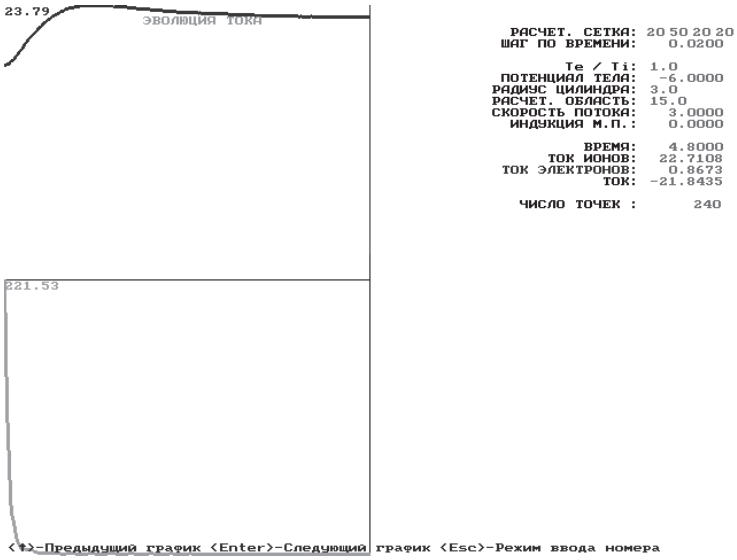


Рис. 2.9. Графическая страница: эволюция интегральных токов ионов и электронов по времени

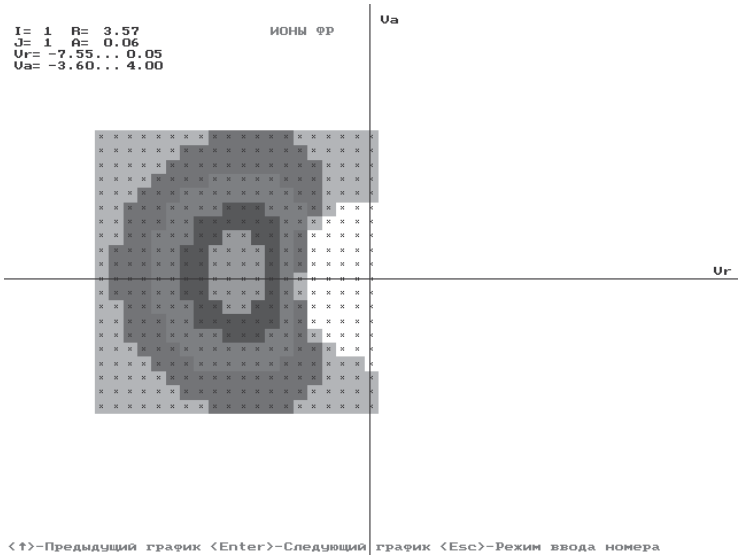


Рис. 2.10. Графическая страница: функция распределения ионов

Если компьютер поддерживает многооконный режим работы, то просмотр графической информации возможен по мере формирования файлов с результатами одновременно с работой расчетной программы.

В программе предусмотрена возможность печати результатов в текстовом виде. Объем печати опять же зависит от желания вычислителя. В соответствующий блок печати можно добавлять операторы печати любой информации в рамках загруженного в память ЭВМ типизированного файла с результатами. Печать такого текстового файла производится путем нажатия соответствующей клавиши, о которой напоминает подсказка в нижней части экрана монитора.

Имя	Тип	Размер	Дата
[..]		<DIR>	29.08.2007 22:21
1		15 446 088	23.08.2007 19:46
2		15 446 088	23.08.2007 19:52
3		15 446 088	23.08.2007 19:59
4		15 446 088	23.08.2007 20:04
5		15 446 088	23.08.2007 20:10
6		15 446 088	23.08.2007 20:15
Dokt_gr	exe	145 460	29.08.2007 22:44
Dokt_gr	fpd	272 440	29.08.2007 22:44
Dokt_gr	pas	78 969	29.08.2007 22:44
Dokt_gr	sym	9 547	29.08.2007 22:44
Dokt01	exe	132 100	23.08.2007 19:41
Dokt01	fpd	208 058	23.08.2007 19:41
Dokt01	pas	62 283	23.08.2007 18:50
Dokt01	sym	9 690	23.08.2007 19:41
Komp_gr	bat	32	13.08.2007 20:00
Kompil01	bat	27	17.08.2007 16:04
Listing		26 483	24.08.2007 13:06

Рис. 2.11. Вид рабочей директории после работы программного блока

Рабочая директория в результате всех описанных выше действий представлена на рис. 2.11. К указанным выше файлам добавилась программа графической обработки (dokt_gr) с файлом ее компиляции (komp_gr) и файл с текстовой информацией (listing).

2.3.2. Алгоритм расчетной программы. Задание основных констант программы:

- m_1 — число шагов по времени;
- n_i — число узлов расчетной сетки по радиусу исключая границы;
- n_j — число узлов расчетной сетки по угловой координате;
- n_k — число узлов расчетной сетки по радиальной скорости;
- n_l — число узлов расчетной сетки по азимутальной скорости;
- t_{pr} — интервал времени, через который программа формирует типизированные файлы с результатом расчета на текущий момент времени;
- ε_0 — малое число, моделирующее абсолютный ноль.

Задание исходных данных расчета:

- C_K — параметр, определяющий вид экрана контроля;
- h_t — шаг по времени;
- V_∞ — значение направленной скорости потока плазмы;
- B_M — значение индукции магнитного поля;
- R_0 — радиус цилиндра;
- R_∞ — радиус расчетной области;

- F_{Z0} — потенциал цилиндра;
- ε — отношение температуры электронов к температуре ионов;
- μ — отношение массы иона к массе электрона;
- v_m — граница обрезания функции Максвелла;
- t_u — время установления потенциала;
- n_g — число гармоник в разложении Фурье.

Объявление основных массивов программы:

- $E_r(1\ldots m_1; 0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив радиальной напряженности;
- $E_\theta(1\ldots m_1; 0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив азимутальной напряженности;
- $F(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив потенциала;
- $N_i(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив концентрации ионов;
- $N_e(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив концентрации электронов;
- $V_{Ri}(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив средних радиальных скоростей ионов;
- $V_{\theta i}(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив средних азимутальных скоростей ионов;
- $V_{Re}(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив средних радиальных скоростей электронов;
- $V_{\theta e}(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массив средних азимутальных скоростей электронов;
- $F_{Ri}(1\ldots n_k; 1\ldots n_l)$ — массив функции распределения ионов;
- $F_{Re}(1\ldots n_k; 1\ldots n_l)$ — массив функции распределения электронов;
- $j_i(1\ldots n_j)$ — массив плотности тока ионов;
- $j_e(1\ldots n_j)$ — массив плотности тока электронов;
- $I_i(1\ldots m_1)$ — массив интегрального тока ионов;
- $I_e(1\ldots m_1)$ — массив интегрального тока электронов;
- $a(1\ldots n_i)$, $b(1\ldots n_i; 0\ldots n_g)$, $c(1\ldots n_i)$ — коэффициенты разностных уравнений для решения уравнения Пуассона;
- $D_1(1\ldots n_i; 0\ldots n_g), D_2(1\ldots n_i; 0\ldots n_g)$ — массив правых частей систем разностных уравнений;
- $P(1\ldots n_i; 0\ldots n_g)$, $Q_1(1\ldots n_i; 0\ldots n_g)$, $Q_2(1\ldots n_i; 0\ldots n_g)$ — массивы прогоночных коэффициентов;
- $X_1(1\ldots n_i; 0\ldots n_g)$, $X_2(1\ldots n_i; 0\ldots n_g)$ — массивы корней системы разностных уравнений;
- $V_{Ri0}(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$; $V_{\theta i0}(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$; $V_{Re0}(0\ldots$ $\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$; $V_{\theta e0}(0\ldots n_i+1; 0\ldots n_j+1)$ — массивы значений для сдвига носителя функции распределения в пространстве скоростей.

Задание начальных значений концентраций ионов и электронов:

$$N_i(i,j) = 0;$$
$$N_e(i,j) = 0, \quad \text{где} \quad i = 0,\ldots,n_i+1,\ j = 0,\ldots,n_j+1.$$

Задание масштабного коэффициента для электронов:

$$\delta = \varepsilon\mu.$$

Вычисление шагов сетки по фазовым переменным:

$$h_i = \frac{R_\infty - R_0}{n_i - 1};$$
$$h_j = \frac{2\pi}{n_j};$$
$$h_k = \frac{2v_m}{n_k};$$
$$h_l = \frac{2v_m}{n_l}.$$

Вычисление массивов значений координат r и θ фазового пространства:

$$r(i) = R_0 + h_i i, \qquad \text{где} \quad i = 0, \ldots, n_i + 1;$$
$$\theta(j) = h_j j - h_j/2, \qquad \text{где} \quad j = 1, \ldots, n_j.$$

Блок загрузки данных с файла продолжения (работает по желанию вычислителя).

Перевод направленной скорости плазмы из ионного в электронный масштаб:

$$V_{\infty e} = \frac{V_\infty}{\delta^{1/2}}.$$

Далее программа работает циклически (цикл по времени, переменная цикла $m = 1, \ldots, m_1$). Критерием окончания счета является установление интегрального тока на тело, что можно увидеть на соответствующем экране контроля (см. рис. 2.9) и прервать работу программы нажатием соответствующей клавишы клавиатуры. Опишем алгоритм расчета на каждом шаге по времени.

Вычисление текущего времени:

$$t_m = h_t m \quad \text{для} \quad m = 1, \ldots, m_1.$$

Вычисление текущего значения нарастающего потенциала цилиндра:

$$F_Z = F_{Z0}[1 - \exp(-2{,}3/t_u t_m)].$$

Задание граничных условий для потенциала:

$$F(i,j) = FZ \quad \text{для} \quad i = 0;\ j = 0, \ldots, n_j + 1;$$
$$F(i,j) = 0 \quad \text{для} \quad i = n_i + 1;\ j = 0, \ldots, n_j + 1.$$

Вычисление коэффициентов разностных уравнений для решения уравнения Пуассона:

$$a(i) = (R_0 + h_i i)[2(R_0 + h_i i) - h_i];$$
$$c(i) = (R_0 + h_i i)[2(R_0 + h_i i) + h_i] \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i.$$
$$b(i,k) = -2\left[2(r(i))^2 + (h_i k)^2\right] \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i;\ k = 1, \ldots, n_g.$$

Задание краевых условий для системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
X_1(i,k) &= FZ \quad \text{для} \quad i=0;\ k=0;\\
X_1(i,k) &= 0 \quad \text{для} \quad i=0;\ k=1,\dots,n_g;\\
X_1(i,k) &= 0 \quad \text{для} \quad i=n_i+1;\ k=0,\dots,n_g;\\
X_2(i) &= 0 \quad \text{для} \quad i=0 \quad \text{и для} \quad i=n_i+1.
\end{aligned}$$

Задание значений начальных прогоночных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
P(i,k) &= 0 \quad \text{для} \quad i=0;\ k=0,\dots,n_g;\\
Q_1(i,k) &= X_1(i,k) \quad \text{для} \quad i=0;\ k=0,\dots,n_g;\\
Q_2(i,k) &= 0 \quad \text{для} \quad i=0;\ k=0,\dots,n_g.
\end{aligned}$$

Вычисление правых частей систем линейных уравнений:

$$D_1(i,k) = \frac{h_j}{\pi}\left[2(r(i))^2 h_i^2\right] \sum_{j=1}^{n_j} [N_e(i,j) - N_i(i,j)] \cos(k\theta(j))$$

$$\text{для} \quad i=1,\dots,n_i;\ k=1,\dots,n_g;$$

$$D_1(i,k) = \frac{1}{2}\frac{h_j}{\pi}\left[2(r(i))^2 h_i^2\right] \sum_{j=1}^{n_j} [N_e(i,j) - N_i(i,j)] \cos(k\theta(j))$$

$$\text{для} \quad i=1,\dots,n_i;\ k=0;$$

$$D_2(i,k) = \frac{h_j}{\pi}\left[2(r(i))^2 h_i^2\right] \sum_{j=1}^{n_j} [N_e(i,j) - N_i(i,j)] \sin(k\theta(j))$$

$$\text{для} \quad i=1,\dots,n_i;\ k=0,\dots,n_g.$$

Вычисление прогоночных коэффициентов (прямой ход прогонки):

$$\begin{aligned}
P(i,k) &= -\frac{c(i)}{a(i)P(i,k)+b(i,k)};\\
Q_1(i,k) &= \frac{D_1(i,k)\ -a(i)Q_1(i-1,k)}{a(i)P(i-1,k)+b(i,k)}; \quad \text{для} \quad i=1,\dots,n_i;\ k=0,\dots,n_g.\\
Q_2(i,k) &= \frac{D_2(i,k)\ -a(i)Q_2(i-1,k)}{a(i)P(i-1,k)+b(i,k)}
\end{aligned}$$

Вычисление корней системы линейных уравнений (обратный ход прогонки):

$$\begin{aligned}
X_1(i,k) &= P(i,k)X_1(i+1,k) + Q_1(i,k);\\
X_2(i,k) &= P(i,k)X_2(i+1,k) + Q_2(i,k)
\end{aligned} \quad \text{для} \quad i=n_i,\dots,1;\ k=0,\dots,n_g.$$

Вычисление значений потенциала:

$$F(i,j) = \sum_{k=0}^{n_g} X_1(i,k)\cos(k\theta(j)) + X_2(i,k)\sin(k\theta(j))$$

для $i=1,\dots,n_i;\ \ j=1,\dots,n_j;\ \ k=0,\dots,n_g.$

Сшивание массива потенциала по угловой координате:

$$F(i,j-1) = F(i,j) \quad \text{для} \quad i = 0,\ldots,n_{i+1};\ j = 1;$$
$$F(i,j+1) = F(i,j) \quad \text{для} \quad i = 0,\ldots,n_{i+1};\ j = n_j.$$

Вычисление радиальной напряженности самосогласованного электрического поля:

$$E_r(m,i,j) = [F(i-1,j) - F(i+1,j)]/2h_i$$
$$\text{для} \quad i = 1,\ldots n_i;\ j = 1,\ldots,n_j;\ m \text{ — номер шага по времени.}$$

Сшивание массива радиальной напряженности по угловой координате:

$$E_r(m,i,j-1) = E_r(m,i,j) \quad \text{для} \quad i = 0,\ldots,n_i+1;\ j = 1;$$
$$E_r(m,i,j+1) = E_r(m,i,j) \quad \text{для} \quad i = 0,\ldots,n_i+1;\ j = n_j.$$

Задание граничных значений массива радиальной напряженности:

$$E_r(m,i,j) = E_r(m,i+1,j) \quad \text{для} \quad i = 0;\ j = 0,\ldots,n_j+1;$$
$$E_r(m,i,j) = 0 \quad \text{для} \quad i = n_i+1;\ j = 0,\ldots,n_j+1.$$

Вычисление азимутальной напряженности самосогласованного электрического поля:

$$E_\theta(m,i,j) = \frac{F(i,j-1) - F(i,j+1)}{2r(i)h_j}$$
$$\text{для} \quad i = 1,\ldots n_i;\ j = 1,\ldots,n_j;\ m \text{ — номер шага по времени.}$$

Сшивание массива азимутальной напряженности по угловой координате:

$$E_\theta(m,i,j-1) = E_\theta(m,i,j) \quad \text{для} \quad i = 0,\ldots,n_i+1;\ j = 1;$$
$$E_\theta(m,i,j+1) = E_\theta(m,i,j) \quad \text{для} \quad i = 0,\ldots,n_i+1;\ j = n_j.$$

Задание граничных значений массива азимутальной напряженности:

$$E_\theta(m,i,j) = E_\theta(m,i+1,j) \quad \text{для} \quad i = 0;\ j = 0,\ldots,n_j+1;$$
$$E_\theta(m,i,j) = 0 \quad \text{для} \quad i = n_i+1;\ j = 0,\ldots,n_j+1.$$

Блок анализа нажатия клавиш клавиатуры для установки соответствующего режима работы программы.

Задание значений сдвига носителя для функции распределения:

$$\left.\begin{aligned} V_{Ri0}(i,j) &= -V_\infty \cos(\theta(j)); \\ V_{\theta i0}(i,j) &= V_\infty \sin(\theta(j)); \\ V_{Re0}(i,j) &= -V_{\infty e} \cos(\theta(j)); \\ V_{\theta e0}(i,j) &= V_{\infty e} \sin(\theta(j)) \end{aligned}\right. \quad \text{для} \quad i = 1,\ldots,n_i;\ j = 1,\ldots,n_j;\ m = 1;$$

$$\left.\begin{aligned} V_{Ri0}(i,j) &= V_{Ri}(i,j); \\ V_{\theta i0}(i,j) &= V_{Ri}(i,j); \\ V_{Re0}(i,j) &= V_{Ri}(i,j); \\ V_{\theta e0}(i,j) &= V_{\theta e}(i,j) \end{aligned}\right. \quad \text{для} \quad i = 1,\ldots,n_i;\ j = 1,\ldots,n_j;\ m = 2,\ldots,m1.$$

Вычисление текущих значений координат радиальной и азимутальной скорости ионов:

$$v_r(i,j,k) = V_{Ri0}(i,j) - v_M + (k-1)h_k + \frac{h_k}{2}$$
$$\text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i;\ j = 1, \ldots, n_j;\ k = 1, \ldots, n_k;$$
$$v_\theta(i,j,l) = V_{Ri0}(i,j) - v_M + (l-1)h_l + \frac{h_l}{2}$$
$$\text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i;\ j = 1, \ldots, n_j;\ l = 1, \ldots, n_l.$$

Интегрирование системы уравнений характеристик для ионов по времени на отрезке времени от текущего момента времени до 0 ($s = m, \ldots, 1$):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r_s - r_{s-1}}{h_t} &= v_{rs};\\
\frac{\theta_s - \theta_{s-1}}{h_t} &= \frac{v_{\theta s}}{r_s};\\
\frac{v_{rs} - v_{rs-1}}{h_t} &= \frac{E_{rs}}{2} + \frac{v_{\theta s}^2}{r_s} + B_M v_{\theta s};\\
\frac{v_{\theta s} - v_{\theta s-1}}{h_t} &= \frac{E_{\theta s}}{2} - \frac{v_{rs} v_{\theta s}}{r_s} - B_M v_{rs}
\end{aligned}\right. \qquad \text{для} \quad s = m, \ldots, 1$$

(используется готовый блок расчета по методу Рунге–Кутта).

При этом для

$$s = m; \quad i = 1, \ldots, n_i; \quad j = 1, \ldots, n_j; \quad k = 1, \ldots, n_k; \quad l = 1, \ldots, n_l$$

выполняются:

$$E_{rs} = E_r(s,i,j), \quad E_{\theta s} = E_\theta(s,i,j);$$
$$r_s = r(i), \quad \theta_s = \theta(j), \quad v_{rs} = v_r(k), \quad v_{\theta s} = v_\theta(l)$$

для $s = m-1, \ldots, 1$, $i = 1, \ldots, n_i$; $j = 1, \ldots, n_j$; $k = 1, \ldots, n_k$; $l = 1, \ldots, n_l$ интерполяция в поле напряженностей:

$$i_E = \left[\frac{r_s - R_0}{h_i}\right]; \quad j_E = \left[\frac{\theta_s - h_j/2}{h_j}\right];$$

$$E_{12} = E_r(s, i_E, j_E) + [E_r(m, i_E+1, j_E) - E_r(m, i_E, j_E)]\frac{r_s - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{34} = E_r(s, i_E, j_E+1) + [E_r(s, i_E+1, j_E+1) - E_r(s, i_E, j_E+1)]\frac{r_m - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{rs} = E_{12} + (E_{34} - E_{12})\frac{\theta_m - (h_j j_E - h_j/2)}{h_j};$$

$$E_{12} = E_\theta(s, i_E, j_E) + [E_\theta(s, i_E+1, j_E) - E_\theta(s, i_E, j_E)]\frac{r_m - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{34} = E_\theta(s, i_E, j_E+1) + [E_\theta(s, i_E+1, j_E+1) - E_\theta(s, i_E, j_E+1)]\frac{r_m - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{\theta m} = E_{12} + (E_{34} - E_{12})\frac{\theta_m - (h_j j_E - h_j/2)}{h_j}.$$

После каждого шага по времени корректируется угловая координата θ в соответствии со своей областью определения ($0 < \theta < 2\pi$).

Условие выхода из блока интегрирования системы уравнений характеристик для ионов — выход характеристики за внутреннюю границу расчетной области:

$$r_0 < R_0 + \frac{h_i}{2}.$$

Блок вычисления функции распределения ионов:

$$F_{Ri}(k,l) = 0 \quad \text{для} \quad r_0 < R_0 + \frac{h_i}{2};$$

$$F_{Ri}(k,l) = \frac{\exp\left[-(v_{r0} + V_\infty \cos\theta_0)^2 - (v_{\theta 0} - V_\infty \sin\theta_0)^2\right]}{\pi} \quad \text{для} \quad r_0 \geq R_0 + \frac{h_i}{2}.$$

Вычисление концентраций ионов:

$$N_i(i,j) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} F_{Ri}(i,j,k,l)\, h_k h_l \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i;\ j = 1, \ldots, n_j.$$

Вычисление плотности тока ионов на поверхность тела:

$$j_i(j) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} |v_r(i,j,k)| F_{Ri}(i,j,k,l)\, h_k h_l$$

$$\text{для} \quad i = 1;\ j = 1, \ldots, n_j;\ v_r(i,j,k) < 0.$$

Вычисление координат центра тяжести функции распределения ионов:

$$V_{Ri}(i,j) = \frac{\sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} v_r(i,j,k) F_{Ri}(i,j,k,l)}{\sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} F_{Ri}(i,j,k,l)} \quad \text{для } i = 1, \ldots, n_i;\ j = 1, \ldots, n_j.$$

Вычисление текущих значений координат радиальной и азимутальной скорости электронов:

$$v_r(i,j,k) = V_{Re0}(i,j) - v_M + (k-1)h_k + \frac{h_k}{2}$$

$$\text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i;\ j = 1, \ldots, n_j;\ k = 1, \ldots, n_k;$$

$$v_\theta(i,j,l) = V_{Re0}(i,j) - v_M + (l-1)h_l + \frac{h_l}{2}$$

$$\text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i;\ j = 1, \ldots, n_j;\ l = 1, \ldots, n_l.$$

Интегрирование системы уравнений характеристик для электронов по времени на отрезке времени от текущего момента времени до 0 ($s = m, \ldots, 1$):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r_s - r_{s-1}}{h_t} &= v_{rs}\sqrt{\delta};\\
\frac{\theta_s - \theta_{s-1}}{h_t} &= \frac{v_{\theta s}}{r_s}\sqrt{\delta};\\
\frac{v_{rs} - v_{rs-1}}{h_t} &= (-E_{rs}/\varepsilon/2 + v_{\theta s}^2/r_s)\sqrt{\delta} - B_M v_{\theta s};\\
\frac{v_{\theta s} - v_{\theta s-1}}{h_t} &= (-E_{\theta s}/\varepsilon/2 - v_{rs} v_{\theta s}/r_s)\sqrt{\delta} + B_M v_{rs}
\end{aligned}\right. \quad \text{для} \quad s = m, \ldots, 1$$

(используется готовый блок расчета по методу Рунге–Кутта).

При этом для $s = m$; $i = 1, \ldots, n_i$; $j = 1, \ldots, n_j$; $k = 1, \ldots, n_k$; $l = 1, \ldots, n_l$

$$E_{rs} = E_r(s, i, j), \quad E_{\theta s} = E_\theta(s, i, j);$$
$$r_s = r(i), \quad \theta_s = \theta(j), \quad v_{rs} = v_r(k), \quad v_{\theta s} = v_\theta(l)$$

для $s = m - 1, \ldots, 1$, $i = 1, \ldots, n_i$; $j = 1, \ldots, n_j$; $k = 1, \ldots, n_k$; $l = 1, \ldots, n_l$ интерполяция в поле напряженностей:

$$i_E = \left[\frac{r_s - R_0}{h_i}\right]; \quad j_E = \left[\frac{\theta_s - h_j/2}{h_j}\right];$$

$$E_{12} = E_r(s, i_E, j_E) + [E_r(m, i_E + 1, j_E) - E_r(m, i_E, j_E)]\frac{r_s - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{34} = E_r(s, i_E, j_E + 1) + [E_r(s, i_E + 1, j_E + 1) - E_r(s, i_E, j_E + 1)]\frac{r_m - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{rs} = E_{12} + (E_{34} - E_{12})\frac{\theta_m - (h_j j_E - h_j/2)}{h_j};$$

$$E_{12} = E_\theta(s, i_E, j_E) + [E_\theta(s, i_E + 1, j_E) - E_\theta(s, i_E, j_E)]\frac{r_m - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{34} = E_\theta(s, i_E, j_E + 1) + [E_\theta(s, i_E + 1, j_E + 1) - E_\theta(s, i_E, j_E + 1)]\frac{r_m - (R_0 + h_i i_E)}{h_i};$$

$$E_{\theta m} = E_{12} + (E_{34} - E_{12})\frac{\theta_m - (h_j j_E - h_j/2)}{h_j}.$$

После каждого шага по времени корректируется угловая координата θ в соответствии со своей областью определения $(0 < \theta < 2\pi)$.

Условие выхода из блока интегрирования системы уравнений характеристик для электронов — выход характеристики за внутреннюю границу расчетной области:

$$r_0 < R_0 + \frac{h_i}{2}.$$

Блок вычисления функции распределения электронов:

$$F_{Re}(k, l) = 0 \quad \text{для} \quad r_0 < R_0 + \frac{h_i}{2};$$

$$F_{Re}(k, l) = \frac{\exp\left[-(v_{r0} + V_{e\infty}\cos\theta_0)^2 - (v_{\theta 0} - V_{e\infty}\sin\theta_0)^2\right]}{\pi} \text{ для } r_0 \geq R_0 + \frac{h_i}{2}.$$

Вычисление концентраций электронов:

$$N_e(i, j) = \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{l=1}^{n_l} F_{Re}(i, j, k, l)\, h_k h_l \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n_i;\ j = 1, \ldots, n_j.$$

Вычисление плотности тока электронов на поверхность тела:

$$j_e(j) = \sqrt{\delta}\sum_{k=1}^{n_k}\sum_{l=1}^{n_l} |v_r(i, j, k)| F_{Re}(i, j, k, l)\, h_k h_l$$
$$\text{для} \quad i = 1;\ j = 1, \ldots, n_j;\ v_r(i, j, k) < 0.$$

Вычисление координат центра тяжести функции распределения электронов:

$$V_{Re}(i,j) = \frac{\sum_{k=1}^{n_k}\sum_{l=1}^{n_l} v_r(i,j,k)F_{Re}(i,j,k,l)}{\sum_{k=1}^{n_k}\sum_{l=1}^{n_l} F_{Re}(i,j,k,l)} \text{ для } i = 1,\ldots,n_i;\ j = 1,\ldots,n_j.$$

Вычисление интегральных токов на цилиндр единичной длины:

$$I_i(m) = R_0 h_j \sum_{j=1}^{n_j} j_i(j);$$

$$I_e(m) = R_0 h_j \sum_{j=1}^{n_j} j_e(j).$$

Блок формирования типизированных файлов с эволюцией тока и значениями всех массивов на данный момент времени счета.

2.4. Методические расчеты и сравнение с результатами работ других авторов

Для описанной выше компьютерной программы проводились тестовые расчеты для сравнения с результатами работ других авторов.

Были проведены расчеты для предельного случая покоящейся плазмы для сравнения с результатами работ Лафрамбуаза [31], которые описаны аппроксимационной формулой Телбота [32]. Данная формула непригодна в предельном случае орбитального движения [31], поэтому расчеты проводились при радиусах цилиндра $r_0 > 5$. Имело место совпадение в пределах 5%.

Для сравнением с результатами, полученными в ранних работах в предельном случае орбитального движения в покоящейся плазме [31], проводились расчеты при относительно небольших радиусах цилиндра ($r_0 < 5$). Соответственная формула, полученная для вышеуказанного случая Ленгмюром и Мотт-Смитом [31], в масштабах (1.34)–(1.43) имеет вид

$$I_{\mathrm{i}} = 2r_0\left\{(-\varphi_0)^{1/2} + 0{,}5\pi^{1/2}\exp(-\varphi_0)\left[1 - \mathrm{erf}(-\varphi_0)^{1/2}\right]\right\}, \qquad (2.14)$$

где $\mathrm{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x \exp(-x^2)\,dx$.

При изменении безразмерного радиуса цилиндра в диапазоне от 5 до 1 значения интегрального ионного тока получались ниже, чем аналогичные значения по формуле (2.14). Разница составляла 10–20%. Этот результат соответствует тому факту, что формула (2.14) получена без учета влияния распределения самосогласованного электрического поля в пристеночной области. При этом, если в плазме не реализуется предельный случай орбитального движения, то значения тока, полученные по этой формуле, можно рассматривать как верхнее предельное значение тока на тело в бесстолкновительном режиме [31]. По мере уменьшения радиуса цилиндра разница между результатами тестового расчета и формулы (2.14) уменьшалась и при $r_0 < 0{,}1$ составила не-

сколько процентов. Этого и следовало ожидать, так как при при $r_0 < 1$ реализуется предельный случай орбитального движения [31].

Тестовые расчеты для движущейся плазмы были ориентированы на другую формулу Ленгмюра и Мотт-Смита, также полученную для предельного случая орбитального движения. В масштабах (1.34), (1.43) она имеет вид

$$I_{\mathrm{i}} = 2r_0 v_0 (1 - \varphi_0/v_0^2)^{1/2}. \tag{2.15}$$

При достаточно больших безразмерных скоростях потока плазмы ($v_0 > 4$) и относительно небольших размерах цилиндра (например, при $r_0 = 3$) получено практически полное совпадение. Это совпадение также следовало ожидать, поскольку фактор направленной скорости потока плазмы при достаточно больших скоростях оказывает доминирующее воздействие на величину интегрального тока на тело. При этом влияние самосогласованного электрического поля в пристеночной области ничтожно мало, поэтому реализуется предельный случай орбитального движения, для которого и получена формула (2.15).

При безразмерных скоростях потока $0 \le v_0 < 2$, $\varphi_0 = -6$ и $r_0 = 3$ значения ионного тока сравнивались с результатами, полученными в работе [33]. Имело место удовлетворительное совпадение.

При уменьшении параметра $\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$, что соответствует приближению к случаю «холодных ионов», был отмечен качественный рост ионного тока, описанный в работе [31].

В ходе тестовых расчетов в покоящейся плазме были получены функции распределения ионов характерной подковообразной формы, описанные в работе [18], а также распределения по радиусу концентраций ионов, электронов и потенциала самосогласованного электрического поля, совпадающее с данными работы [18].

Непосредственно во время расчетов с помощью экранов контроля (см. рисунки 2.5–2.10) визуально контролировались очевидные влияния фактора направленной скорости плазмы:

— наличие симметрии возмущенной зоны относительно плоскости, проходящей через вектор направленной скорости протока и ось симметрии цилиндра (см. рис. 2.7), а также факт формирования области следа в его теневой части;

— появление зависимости параметров возмущенной зоны от угловой координаты θ (см. рисунки 2.5 и 2.6);

— соответствующая заданной направленной скорости потока форма поля скоростей ионов (см. рис. 2.8) и т. д.

Во время тестирования программы при наличии магнитного поля визуально контролировалось ларморовское вращение электронов (см. рис. 2.3), а также поворот скоростей ионов в соответствии с направлением силы Лоренца при достаточно больших значениях величины магнитной индукции.

Для выбора оптимальных вычислительных параметров, таких, как шаг по времени, размерность расчетной сетки, радиус внешней границы расчетной области, граница обрезания «максвелловского хвоста», чис-

ло гармоник в разложении Фурье, проводились методические расчеты. При этом для случая движущейся плазмы удалось достичь приемлемой устойчивости и точности расчета при следующих значениях вышеуказанных параметров (в безразмерном виде, см. (1.34)–(1.43)):

— шаг по времени $h_t \leq 0{,}2$;

— радиус внешней границы расчетной области $R_\infty \geq R_0 + 12$;

— число узлов по радиусу $n_i \geq 20$;

— число узлов по угловой координате $n_j \geq 40$;

— граница обрезания «максвелловского хвоста» $v_M \geq 5$;

— число узлов по радиальной и азимутальной скорости $n_{k,l} \geq 20$;

— число гармоник в разложении Фурье $n_g = 5$.

С ростом параметра φ_0 приходилось увеличивать R_∞, чтобы возмущенная зона умещалась в расчетной области. Того же требовали расчеты при увеличении радиуса цилиндра. Шаг по времени приходилось уменьшать при положительных потенциалах тела, а также при относительно небольших значениях магнитной индукции, когда изучение динамики движения электронов является первоочередной целью расчета. Величина параметра v_M зависит от того, использован ли в программе алгоритм «плавающей сетки» в пространстве скоростей. Однако данный алгоритм оказался недостаточно эффективным при расчетах с безразмерным параметром $v_0 > 3$, поскольку функция распределения в теневой части цилиндра симметрично деформировалась относительно оси радиальной скорости в обе стороны (см. рис. 2.6), оставляя при этом свой центр тяжести не смещенным относительно вышеуказанной оси. Параметр v_M в этих случаях приходилось брать равным 10 и выше.

В ряде работ [34, 35] в последнее время высказывалась идея о необходимости использования однородных и изотропных вычислительных пространств. Если эти условия не выполняются, то могут возникнуть неконтролируемые ошибки в вычислительных экспериментах. Использование цилиндрической системы координат очевидно ведет к неоднородности вычислительного пространства. Чтобы оценить возможные ошибки, связанные с этим, была составлена программа на языке C++ для цилиндрического тела, помещенного в поперечный поток разреженной плазмы, с использованием однородного и изотропного вычислительного пространства (использовалась прямоугольная система координат (x, y, v_x, v_y)). Сравнение результатов расчетов в цилиндрической и прямоугольной системе координат показало хорошее совпадение (расхождение не превышало одного процента). Применение прямоугольной системы координат несколько осложнило программную реализацию граничного условия на поверхности цилиндра и внесло существенные ограничения на увеличение его радиуса: размер расчетной области должен превышать диаметр цилиндра, поэтому с ростом радиуса тела соответственно растет число узлов расчетной сетки, которое ограничено возможностями ЭВМ. В то же время использование прямоугольной системы координат позволило расширить область исследования следа за телом.

Глава 3

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ТЕЛ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1. Функции распределения заряженных частиц

Функции распределения (ФР) заряженных частиц лежат в основе любой информации о параметрах плазмы, используются в качестве начальных и граничных условий в вычислительных экспериментах, поэтому в работе уделяется повышенное внимание особенностям ФР при различных осложняющих факторах (наличие в плазме заряженных тел, электрических и магнитных полей, направленных движений и т. д.).

В ряде работ [18, 33] уделено внимание ФР ионов и электронов в случае покоящейся и движущейся плазмы. В работе [18] исследования ограничены случаем только покоящейся плазмы, а в работе [33] — относительно небольших скоростей ($v_0 \leq 2$), что не позволяет в полной мере исследовать структуру теневой части обтекаемого плазмой тела, так как нет четко выраженного следа. Исследование влияния магнитного поля на ФР в работе [33] ограничено случаем относительно небольших значений магнитной индукции $\mathbf{B}$ ($B_0 \leq 0{,}01$), которая на ионы практически не оказывает никакого воздействия.

Подготовленная для вычислительных экспериментов компьютерная программа позволила охватить достаточно широкий диапазон скоростей потока плазмы и величин магнитной индукции. При этом особое внимание уделялось скоростям порядка первой космической и выше ($v_0 > 2M_{vi}$ для водородной плазмы) и величинам магнитной индукции, при которых имеет место значительный поворот движущихся ионов в пристеночной области тела ($B_0 \geq 0{,}05$).

Для полноты изложения приведем некоторые результаты тестовых расчетов в случае покоящейся плазмы. На рис. 3.1 приведена трехмерная зависимость функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра. Функция распределения вблизи стенки имеет характерный подковообразный вырез, что совпадает с результатами работы [18]. По мере удаления от стенки цилиндра данный эффект уменьшается, подкова смещается в сторону положительных радиальных скоростей и достаточно далеко от стенки цилиндра становится максвелловской (соответствует невозмущенной плазме). По мере приближения к стенке

концентрация ионов падает, и соответственно уменьшается объем под графиком функции распределения ионов (ФРИ). Кроме того, функция смещается в сторону отрицательных радиальных скоростей, так как по мере приближения к стенке частицы ускоряются радиальным электростатическим полем цилиндра, а в направлении оси азимутальной скорости ФР растягивается, что соответствует ускоряющимся ионам, движущимся мимо тела по направлениям, близким к касательной к цилиндру в рассматриваемой точке расчетной области.

На рис. 3.2 приведены функции распределения электронов (ФРЭ) при тех же условиях (в работе [18] данная функция показана только при положительных потенциалах тела). ФР электронов не имеет подковообразного выреза, поскольку в отличии от ионов, которые движутся ускоренно к стенке цилиндра, электроны, движущиеся к цилиндру, замедляются полем и могут пройти через точку разворота. Возникающие при этом положительные радиальные скорости электронов компенсируют тот подковообразный провал, который характерен для ФРИ. В силу понижения концентрации в пристеночной области объем под графиком ФР электронов уменьшается по мере приближения к стенке вплоть до практически нулевого значения.

Обсудим результаты численного моделирования движущейся плазмы. На рис. 3.3 для возможности сравнения приведена ФР ионов, которая использовалась в качестве начальной и граничной на внешней границе расчетной области — ФР Максвелла.

В соответствии с выбранной системой координат (см. рис. 1.1) центр тяжести ФРИ смещен от начала координат ровно на величину скорости потока, и направление смещения зависит от величины угловой координаты θ.

На рис. 3.4 приведена ФРЭ для тех же условий. Ее центр тяжести не имеет практически заметного сдвига относительно начала координат, так как в задаче используются парциальные масштабы для скоростей ионов и электронов. Отношение этих масштабов для водородной плазмы при $\varepsilon = 1$ (1.37)

$$\frac{M_{v_{\mathrm{i}}}}{M_{v_{\mathrm{e}}}} = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{i}}}\frac{m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{e}}}} \approx 42.$$

Отсюда следует, что скорость $v_0 = 5$, используемая в расчете, при переводе в электронный масштаб равна примерно 0,1 и не может оказать какого-либо заметного влияния на ФР электронов.

При обтекании тел потоком плазмы возникает характерное изменение параметров плазмы с теневой части тела (след), которое может протянутся на десятки и даже сотни радиусов Дебая. Следующие графики посвящены особенностям ФРИ в различных точках вышеуказанного следа [36]. На рис. 3.5 приведена зависимость функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра при $\theta = \pi$. Обнаружено разделение ФР ионов в теневой области на две части, причем обе части симметричны относительно оси радиальных скоростей. Существование

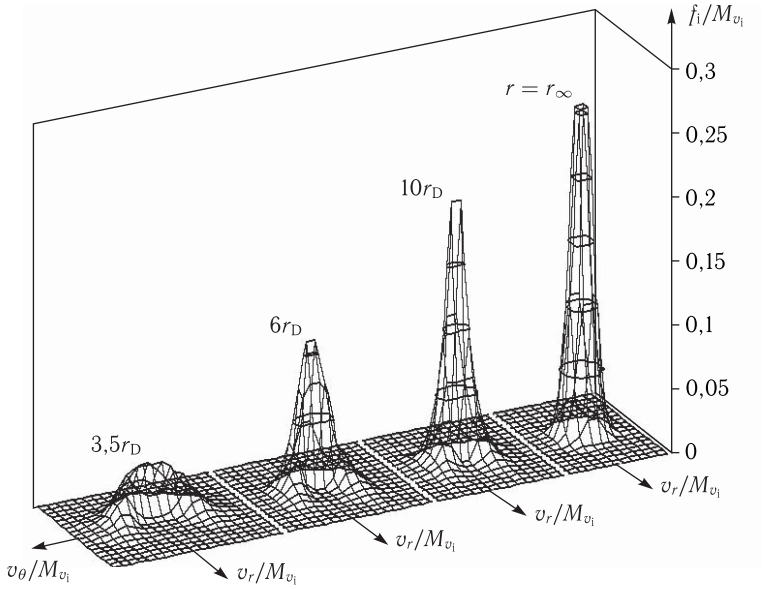


Рис. 3.1. Зависимость ФРИ от расстояния до оси цилиндра ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 0$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

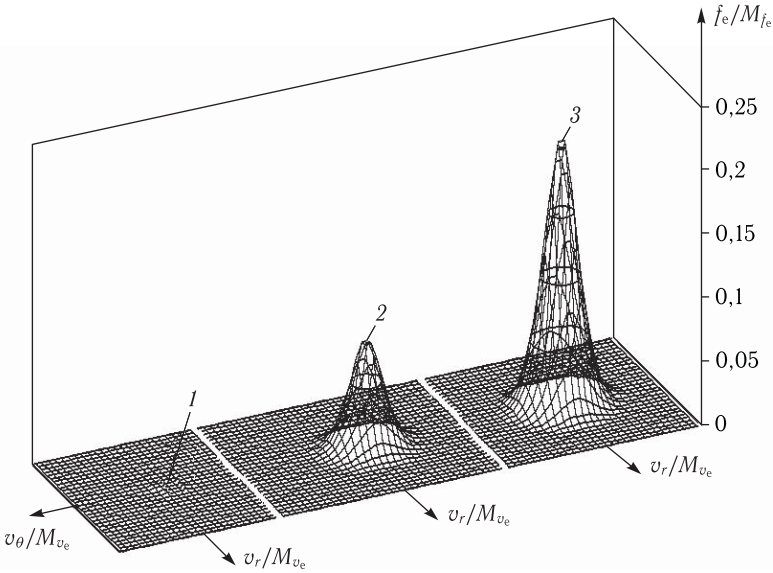


Рис. 3.2. Зависимость ФРЭ от расстояния до оси цилиндра ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 0$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $r = 3{,}3$; *2* — 4,5; *3* — 6

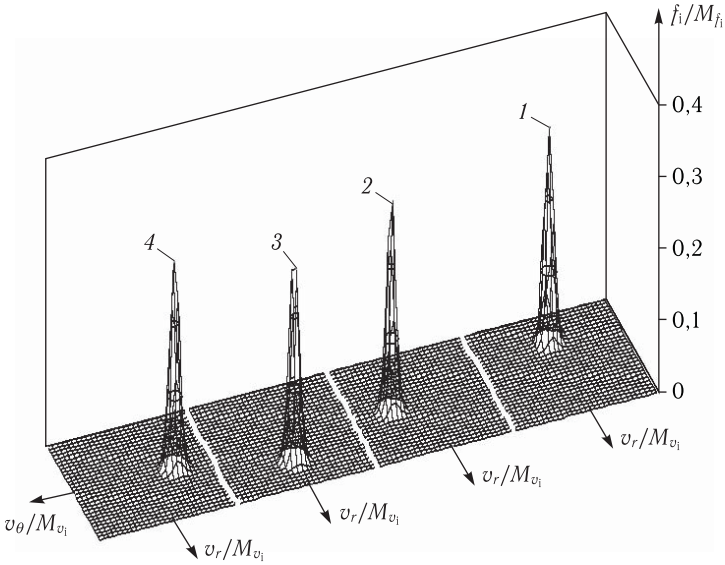


Рис. 3.3. Начальная ФРИ ($v_0 = 5$): *1* — $\theta = 0$; *2* — $\pi/2$; *3* — π; *4* — $3\pi/2$

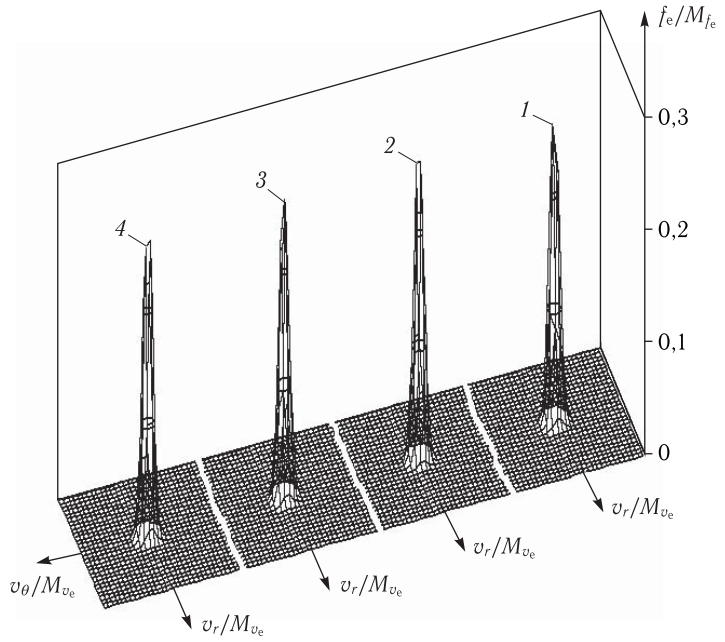


Рис. 3.4. Начальная ФРЭ ($v_0 = 5$): *1* — $\theta = 0$; *2* — $\pi/2$; *3* — π; *4* — $3\pi/2$

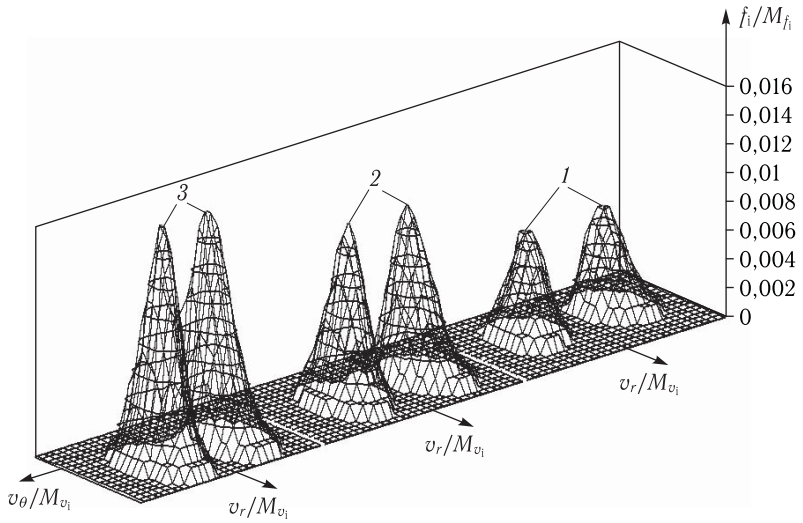


Рис. 3.5. Зависимость ФРИ от расстояния до стенки цилиндра ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $\theta = \pi$): *1* — $r = 4{,}8$; *2* — 8,4; *3* — 13,8

ионов, имеющих координаты в фазовом пространстве, соответствующих области между отдельными частями ФРИ, физически невозможно. Если провести численное интегрирование по времени уравнений движения в сторону нулевого значения временной координаты для некоторой условной положительной частицы, расположенной в фазовом пространстве в точке, соответствующей области между двумя частями ФР ионов в пространстве скоростей, то мы в итоге попадаем в область расположения цилиндра, поэтому такие частицы не имеют физического смысла. Таким образом, наличие в движущейся плазме заряженного тела вызывает возникновение областей в фазовом пространстве (далее будем называть их запрещенными областями), в которых ионы, как фазовые частицы, физически могли бы находится только в том случае, если бы само тело было бы их источником. Сами же горбы соответствуют потокам ионов, которые огибают цилиндр с одной и другой его боковой стороны, в чем тоже можно убедиться, если провести численное интегрирование по времени уравнений движения в сторону нулевого значения временной координаты для положительной частицы, имеющей в фазовом пространстве координаты, соответствующие области горба ФР ионов в пространстве скоростей.

Высота горбов и объем под графиком ФР уменьшаются по мере приближения к стенке цилиндра в соответствии с падением концентрации ионов. Сами горбы при этом смещаются в сторону уменьшения положительной радиальной скорости, поскольку по мере приближения к стенке становятся возможными меньшие положительные радиальные скорости ионов, а у самой стенки могут быть относительно неболь-

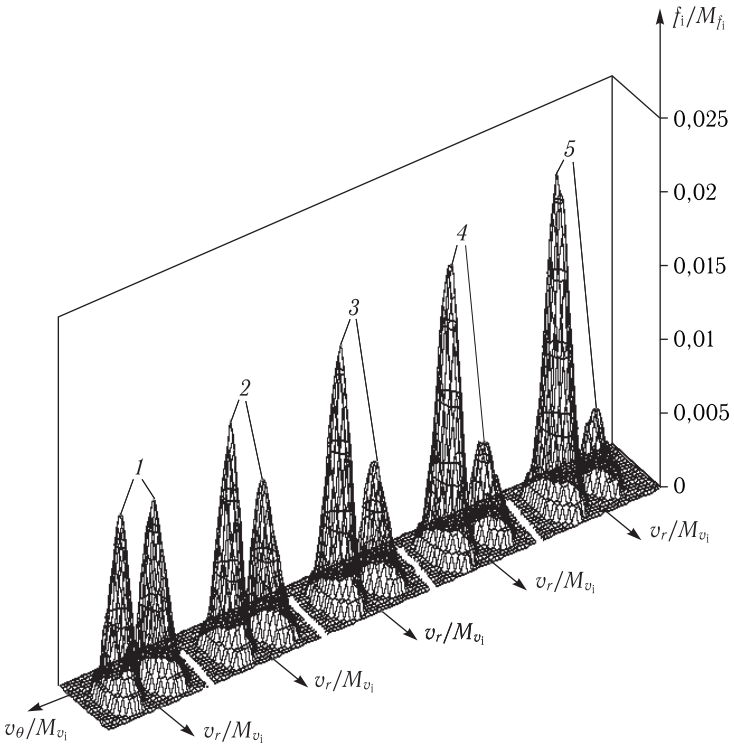


Рис. 3.6. Зависимость ФРИ от θ ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $r = 9r_D$): *1* — $\theta = 180°$; *2* — $172°$; *3* — $164°$; *4* — $156°$; *5* — $148°$

шие по модулю отрицательные радиальные скорости, соответствующие тем ионам, которые в результате электростатического притяжения тела движутся в сторону цилиндра. Расстояние между горбами по мере приближения к стенке растет, так как растет ширина запрещенной области. Данный эффект аналогичен эффекту уменьшения загиба подковы ФР для сферического зонда в покоящейся плазме при увеличении радиальной координаты [18]. Но в отличии от того случая здесь вместо подковообразного возникает сквозной вырез, поскольку ФРИ практически целиком сдвигается в зону положительных радиальных скоростей (см. рис. 3.5), а запрещенная область также находится в этой зоне. ФРИ и запрещенная область накладываются друг на друга, и в результате возникает сквозной вырез и ФР делится на две части.

На рис. 3.6 представлена зависимость функции распределения ионов от θ в теневой облаcт цилиндра. При смещении от фронтальной точки теневой области (ФР 1) в сторону уменьшения (или в силу симметрии увеличения) угловой координаты высота одной из частей ФР растет, другой — уменьшается. В итоге выйдя за границу «следа» мы придем к ФРИ правильной округлой формы (один из горбов исчезнет совсем).

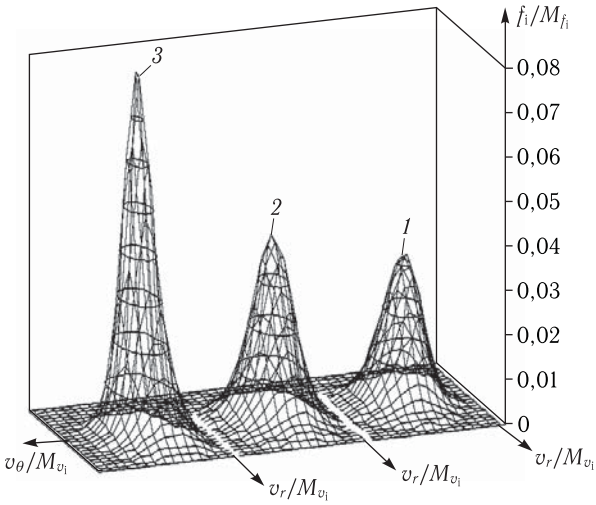


Рис. 3.7. Зависимость ФРИ от расстояния до стенки цилиндра (боковая область) ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $\theta = \pi/2$): *1* — $r = 4{,}8$; *2* — 5,5; *3* — 8

Это явление объясняется тем, что при изменении угловой координаты взаимное расположение запрещенной области и ФРИ изменяется, и степень их наложения друг на друга уменьшается. ФРИ в данном случае смещается в сторону положительных азимутальных скоростей, запрещенная область тоже меняет свое расположение и форму, но в меньшей степени.

При углах, близких к $\pi/2$, в случае достаточно больших скоростей v_0 возможно полное отсутствие наложения ФРИ и запрещенной области друг на друга. На рис. 3.7 представлен соответствующий график зависимости функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра при $\theta = \pi/2$. По мере приближения к стенке цилиндра объем под графиками ФРИ уменьшается в соответствии со снижением концентрации ионов.

В лобовой части цилиндра возникает похожая ситуация, представленная на рис. 3.8. Отличие от рис. 3.7 заключается в том, что ФРИ у стенки имеет больший объем под графиком в силу того, что концентрация в лобовой части выше, чем в боковой.

Кроме того, если ФРИ у стенки на рис. 3.7 несколько растянута по радиальной координате скорости, то соответствующая ФРИ на рис. 3.8 — по азимутальной, что соответствует ускоряющимся под воздействием электростатического поля тела ионам, движущимся мимо тела по направлениям, близким к касательной к цилиндру.

Каких-либо существенных особенностей для ФР электронов вычислительный эксперимент не показал. Соответствующие графики представлены на рисунках 3.9–3.11.

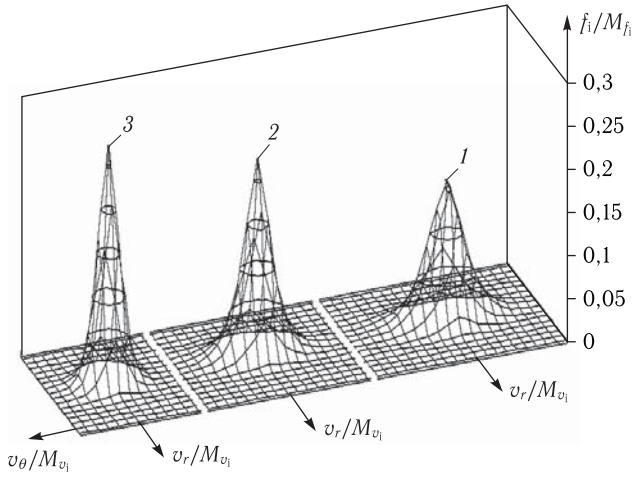


Рис. 3.8. Зависимость ФРИ от расстояния до стенки цилиндра (лобовая область) ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $\theta = 0$): *1* — $r = 4,8$; *2* — 8,4; *3* — 13,8

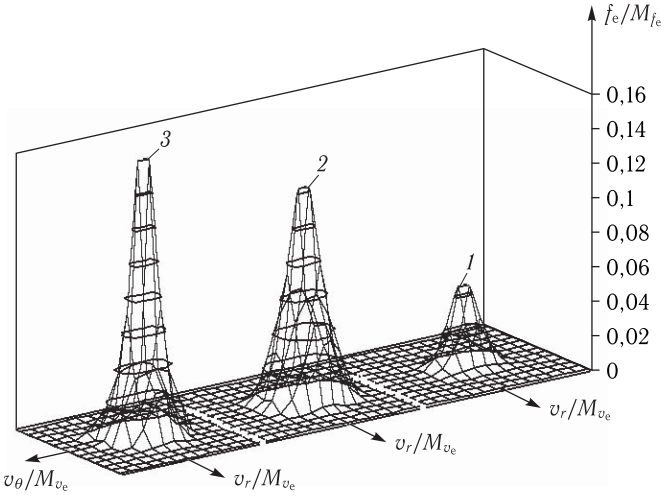


Рис. 3.9. Зависимость ФРЭ от расстояния до стенки цилиндра (лобовая область) ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $\theta = 0$) *1* — $r = 3,8$; *2* — 8,4; *3* — 13,8

Объем под графиками ФРЭ уменьшается, если двигаться по обводу цилиндра от лобовой к теневой части. При $\theta = 0$ он выше, так как там выше концентрация электронов в результате набегания потока плазмы. При $\theta = \pi/2$ концентрация уменьшается, соответственно уменьшается и объем под графиком ФРЭ. При $\theta = \pi$ в теневой области тела он минимален. Для ФРЭ при отрицательных потенциалах тел не характер-

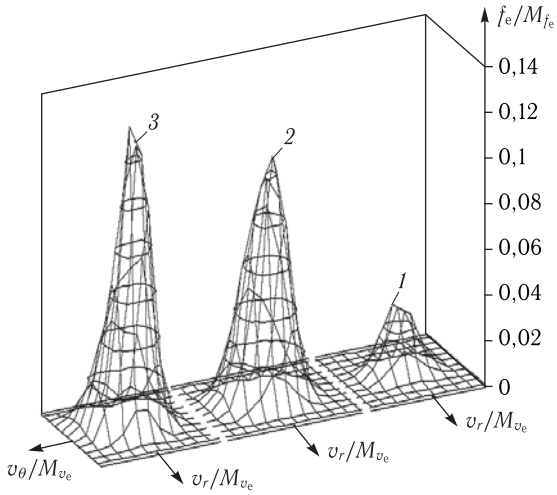


Рис. 3.10. Зависимость ФРЭ от расстояния до стенки цилиндра (боковая область) ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $\theta = \pi/2$): *1* — $r = 4{,}8$; *2* — 8,4; *3* — 13,8

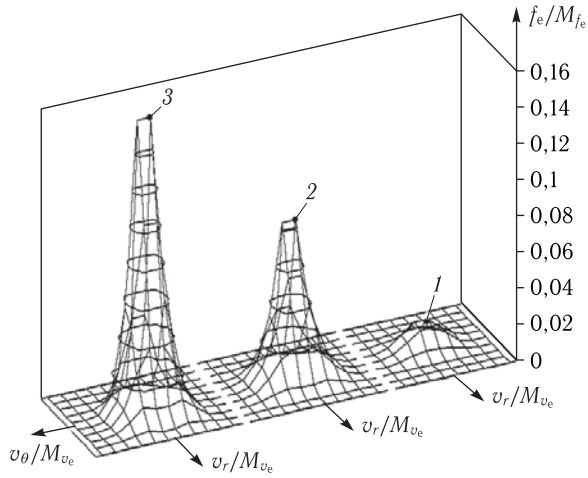


Рис. 3.11. Зависимость ФРЭ от расстояния до стенки цилиндра (теневая область) ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $\theta = \pi$): *1* — $r = 4{,}8$; *2* — 8,4; *3* — 13,8

ны какие-либо вырезы, поскольку в фазовом пространстве отсутствуют ярко выраженные области, в которых электрон, как фазовая частица, физически не может находится. Наличие таких областей всегда было связано с невозможностью существования частиц, летящих от тела с соответствующими скоростями. Но для электронов при отрицательных потенциалах тела такие частицы вполне возможны, так как элек-

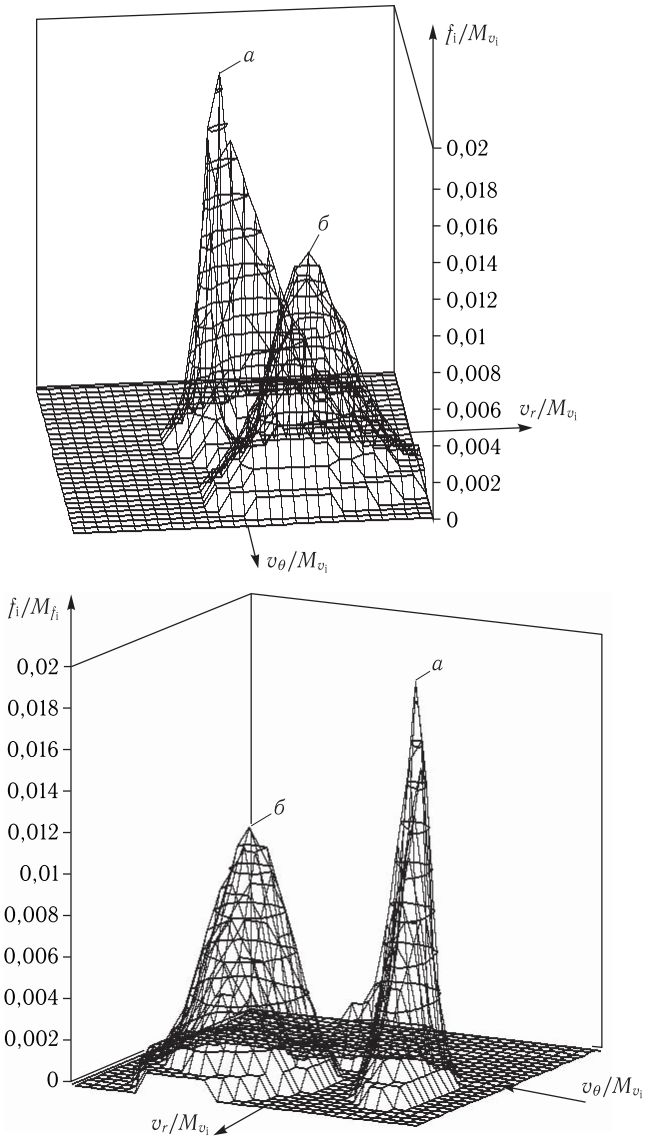


Рис. 3.12. ФРИ ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}5$; $r = 9r_D$; $\theta = \pi/2$)

трон, летящий к телу из бесконечности, тормозится электростатическим полем и может, пройдя через точку разворота, двигаться далее обратно в бесконечность.

Наличие магнитных полей с величиной магнитной индукции $B_0 \geq 0{,}1$ оказывает большое влияние на ФРИ, и ее профиль в пространстве

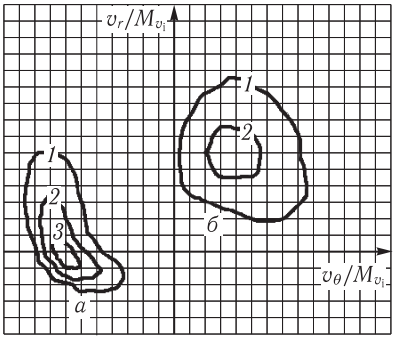


Рис. 3.13. Функции распределения ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0,5$; $r = 9r_D$; $\theta = \pi/2$): *1* — $f_i = 0{,}005$; *2* — 0,01; *3* — 0,015

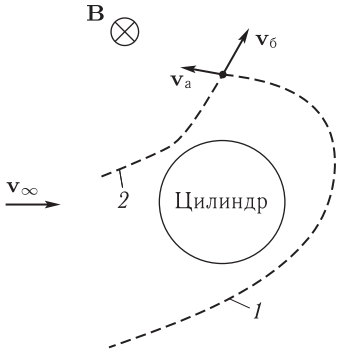


Рис. 3.14. Траектории движения фазовых частиц: *1* — траектория, соответствующая горбу *а*; *2* — траектория, соответствующая горбу *б*

скоростей может геометрически принимать самую причудливую форму [36]. В качестве примера рассмотрим рис. 3.12, на котором представлена ФРИ, соответствующая случаю, показанному на рис. 3.39 в точке, где поток ионов под воздействием силы Лоренца повернул практически на угол 90° относительно направленной скорости плазмы. Это два горба, причем абсолютно несимметричные и разной высоты. Горбы на рисунке обозначены буквами *а* и *б*. Сам рисунок представлен с различных углов зрения, кроме того, на рис. 3.13 представлены изолинии этой ФРИ. Горб *а* расположен в отрицательной области азимутальных скоростей, причем его центр тяжести близок к нулевой радиальной скорости. Горб *б* находится в области положительных радиальной и азимутальной скоростей. Для интерпретации данной ФР было проведено численное интегрирование уравнений движения в сторону нуля по времени для фазовых частиц, соответствующих центрам тяжести горбов *а* и *б*. На рис. 3.14 построены траектории этих фазовых частиц в пространстве (r, θ). Из рисунка следует, что горб *а* соответствует потоку ионов, которые попали в пристеночную область ниже цилиндра (см. рис. 1.1) и под воздействием силы Лоренца и электростатического притяжения тела двигались по дугообразной траектории вокруг цилиндра. Такие ионы попадают в исследуемую точку как раз с отрицательными азимутальными скоростями и очень малыми радиальными. Это в точности соответствует расположению центра тяжести горба *а*. Второй поток ионов попал в расчетную область значительно выше первого и далее начал движение по дугообразной траектории под воздействием силы Лоренца, но при этом электростатическое притяжение цилиндра несколько распрямило эту траекторию. В результате в исследуемой точке ионы приобрели скорости, имеющие положительные радиальную и азимутальную составляющие. При векторном сложении скоростей,

соответствующих этим двум потокам ионов, мы получим скорость, направленную практически под 90° к $\mathbf{v}_\infty$, что соответствует графику поля средних скоростей на рис. 3.39. Те ионы, которые двигались между этими двумя потоками, попали на цилиндр и внесли вклад в интегральный ток. Если продолжить траектории этих попавших на тело частиц, то мы получим ту самую запрещенную область, понятие которой было введено выше. Она, как и ФР, тоже деформируется под воздействием осложняющих условий. В данном случае под воздействием магнитного поля она приобрела дугообразную форму (на рис. 3.12 видна дугообразная форма разреза ФР). С точки зрения эволюции пристеночной области происхождение горбов *а* и *б* различно. Горб *б* сформировался в результате деформации ФР ионов, показанной на рис. 3.3, ФР 2 (ФР Максвелла сдвинута в направлении положительной азимутальной скорости), причем в результате поворота потока ионов под воздействием силы Лоренца ФР дополнительно сдвинулась в сторону положительных радиальных скоростей. Горб *а* сформировался абсолютно независимо от начальной ФР в процессе формирования потока ионов, огибающего цилиндр.

Подведем итоги проведенного анализа ФР. Возможны следующие видоизменения ФР в результате эволюции пристеночной области.

• Сдвиг центра тяжести ФР в результате наличия направленного потока плазмы (см. рис. 3.3) или иных потоков, возникающих в процессе эволюции (например, под воздействием сил магнитного поля (см. рис. 3.13)).

• Деформация (растяжение или сжатие) ФР в определенных направлениях в результате ускорения или замедления частиц плазмы электростатическим полем (см. рис. 3.1, ФР с индексом $3{,}5r_{\mathrm{D}}$).

• Образование вырезов, которые могут быть подковообразной формы (см. рис. 3.1) или сквозными (см. рис. 3.5), причем форма выреза может быть как симметричной (см. рис. 3.5), так и несимметричной формы (см. рис. 3.12). Конфигурация этих вырезов зависит от взаимного расположения в поле скоростей ФР и запрещенной области, т. е. области в пространстве скоростей, скорости которой физически невозможны для соответствующих частиц плазмы. Такие области всегда возникают в фазовом пространстве при внесении в плазму тел с идеально поглощающей поверхностью.

• Образование новых областей ФР соответственно новой конфигурации потоков частиц в пристеночной области под воздействием, например магнитного поля (см. рис. 3.12, область *а*).

• Уменьшение (увеличение) объема под графиком ФР в соответствии со снижением (повышением) концентрации в пристеночной области (см. рис. 3.2).

Полученный набор ФР позволяет исследовать пристеночную область малого тела, находящегося вблизи большого, поскольку в этом случае начальную ФР и ФР на границе расчетной области уже нельзя считать невозмущенными. В этом случае соответствующие ФР можно

получить из предварительного вычислительного эксперимента по исследованию пристеночной области большого тела по приведенной выше методике. С практической точки зрения это актуально для зондовых исследований плазмы вблизи летательных аппаратов в космосе, так как в этом случае электрический зонд всегда находится в плазме, возмущенной данным летательным аппаратом.

3.2. Интегральный ток на единицу длины цилиндра

Численный эксперимент показал, что рост направленной скорости плазмы приводит к уменьшению времени эволюции интегрального тока на тело относительно времени эволюции в покоящейся плазме (будем говорить про ионный ток, так как электронный ток устанавливается значительно быстрее ионного в силу относительно большой подвижности электронов). На рис. 3.15 представлены эволюционные кривые ионного тока при различных скоростях v_0.

При скоростях $0 \le v_0 < 2$ имеет место относительно долгая эволюция тока, превышающая $\tau = 5$ единиц безразмерного времени. Это связано с тем, что в этом интервале скоростей на процесс эволюции доминирующее воздействие оказывает самосогласованное электрическое поле, воздействие которого на ионы, как относительно тяжелые частицы, приводит к затянутому установлению интегрального тока на тело. Однако при бóльших скоростях начинает доминировать фактор направленной скорости, что приводит к уменьшению времени установления интегрального тока.

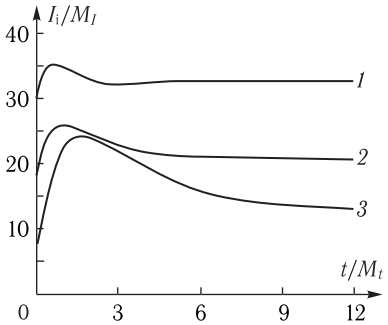


Рис. 3.15. Эволюция интегрального тока ионов ($\varphi_0 = -6$; $r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $v_0 = 1$; *2* — 3; *3* — 5

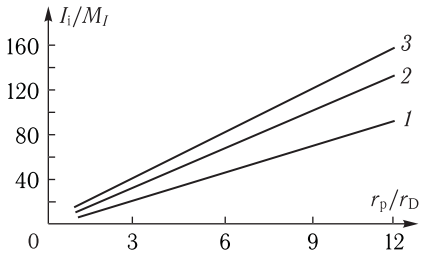


Рис. 3.16. Зависимость интегрального тока ионов от r_0 ($\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $v_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; *2* — $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; *3* — $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -20$

На рис. 3.16 представлена зависимость интегрального тока ионов от радиуса цилиндра при различных значениях потенциала и направленной скорости потока.

С ростом радиуса цилиндра ионный ток растет в соответствии с тем, что увеличивается площадь поглощающей поверхности тела. Зависи-

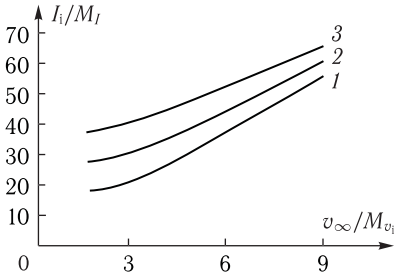


Рис. 3.17. Зависимость интегрального тока ионов от направленной скорости плазмы ($r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $\varphi_0 = -6$; *2* — (-20); *3* — (-40)

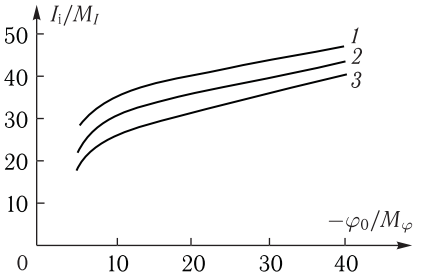


Рис. 3.18. Зависимость интегрального тока ионов от потенциала цилиндра ($r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $v_0 = 5$; *2* — 4; *3* — 3

мость имеет практически линейный вид при скоростях $v_0 > 2$, причем скорость роста (угол наклона прямой) возрастает с ростом скорости потока и абсолютной величины отрицательного потенциала тела. При скоростях $v_0 < 2$ скорость роста ионного тока с увеличением радиуса цилиндра начинает уменьшаться, линия приобретает кривизну. Данный физический эффект был описан в работе [18] для случая покоящейся плазмы: было обнаружено, что с ростом r_0 плотность ионного тока падает, так как уменьшается пристеночное значение напряженности электрического поля. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что при относительно небольших скоростях, когда фактор направленной скорости плазмы еще не доминирует, данный эффект сохраняется, но с ростом скорости его проявление уменьшается, и при достаточно больших скоростях практически не проявляется (см. также рис. 3.21, *а* и *б*).

На рис. 3.17 представлена зависимость интегрального тока ионов от направленной скорости плазмы при различных потенциалах цилиндра. Интегральный ток растет с ростом безразмерных параметров $|\varphi_0|$ и v_0. Кривые имеют относительно большой радиус кривизны, который увеличивается с ростом направленной скорости плазмы v_0.

На рис. 3.18 представлена зависимость интегрального тока ионов от потенциала цилиндра при различных скоростях v_0. Данное семейство кривых можно рассматривать, как вольтамперные характеристики цилиндрического зонда, применяемого для измерений в движущейся плазме, и использовать для зондовой диагностики.

3.3. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра

Наличие даже относительно небольшой скорости потока плазмы приводит к возникновению зависимости плотности ионного тока от угловой координаты θ. На рис. 3.19 представлено распределение плот-

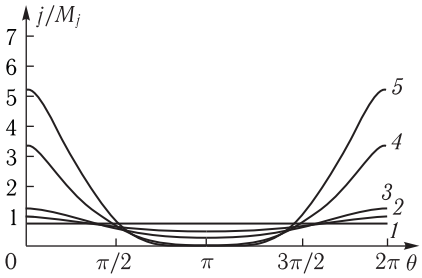


Рис. 3.19. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра при различных значениях v_0 ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $v_0 = 0$; *2* — 0,5; *3* — 1; *4* — 3; *5* — 5

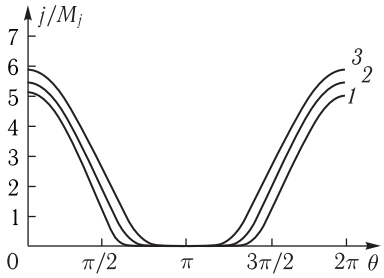


Рис. 3.20. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра при различных значениях φ_0 ($v_0 = 5$; $r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $\varphi_0 = -6$; *2* — (−20); *3* — (−40)

ности ионного тока по обводу цилиндра при различных значениях v_0. По мере увеличения скорости потока плазмы на лобовой части значения плотности тока возрастают, на теневой уменьшаются вплоть до значений, близких к нулю.

С ростом абсолютной величины отрицательного потенциала φ_0 силы электростатического притяжения со стороны цилиндра, действующие на ионы, возрастают, в соответствии с этим кривая сдвигается в сторону больших значений плотности ионного тока (рис. 3.20).

При относительно малых скоростях, как и в случае покоящейся плазмы [18], плотность ионного тока с ростом параметра r_0 уменьшается (рис. 3.21, *а*), поскольку падает пристеночное значение радиальной напряженности электрического поля [18].

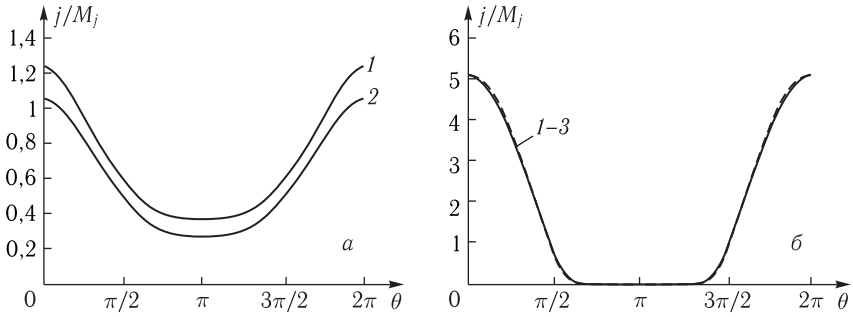


Рис. 3.21. Распределение плотности тока по обводу цилиндра при различных значениях r_0: *а*) $v_0 = 1$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$ (*1* — $r_0 = 10$; *2* — 50); *б*) $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$ (*1* — $r_0 = 3$; *2* — 10; *3* — 50)

При относительно больших скоростях v_0 зависимость незначительна (рис. 3.21, *б*), поскольку в этом случае электрическое поле уже не оказывает доминирующее влияние на параметры пристеночной области.

3.4. Распределение концентраций ионов, электронов и электрического поля

В отличии от случая покоящейся плазмы, где поля концентраций и потенциала имеют осевую симметрию, в нашем случае такая симметрия нарушается, но остается симметрия относительно плоскости, проходящей через ось цилиндра и вектор направленной скорости плазмы. На рисунках 3.22 и 3.23 представлены поля ионов и электронов для $\varphi_0 = -6$. Оба поля обладают вышеуказанной симметрией. В лобовой части цилиндра наблюдается относительно небольшое снижение концентрации ионов в результате поглощения цилиндром, электронами же лобовая область обеднена в значительно большей степени в резуль-

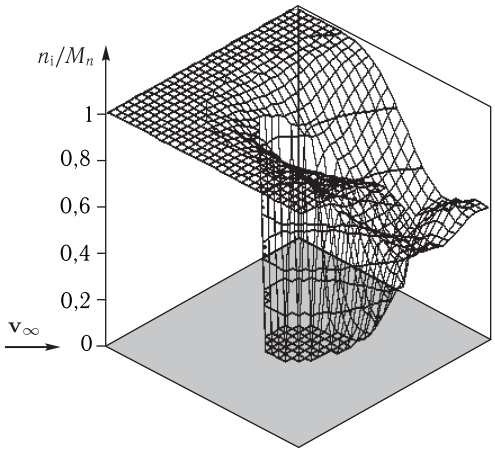


Рис. 3.22. Концентрация ионов ($r_0 = 3$; $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

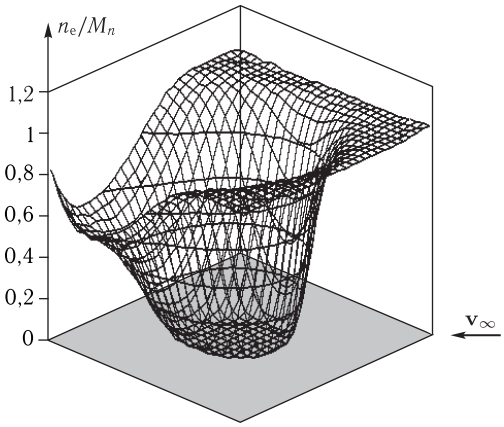


Рис. 3.23. Концентрация электронов ($r_0 = 3$; $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

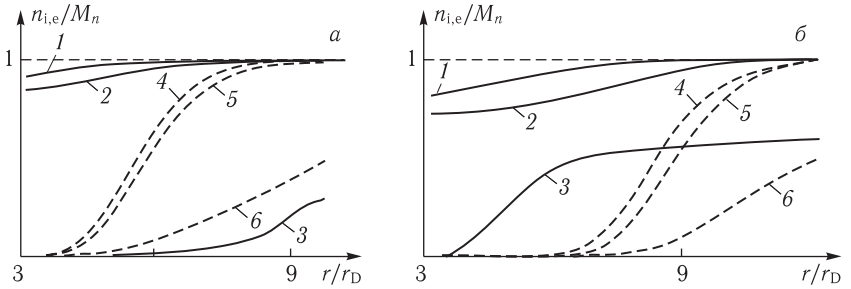


Рис. 3.24. Распределение концентраций ионов и электронов по радиусу: *а*) $r_0 = 3$; $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$ (*1* — ионы, $\theta = 0$; *2* — ионы, $\theta = \pi/2$; *3* — ионы, $\theta = \pi$; *4* — электроны, $\theta = 0$; *5* — электроны, $\theta = \pi/2$; *6* — электроны, $\theta = \pi$); *б*) $r_0 = 3$; $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -20$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$ (*1* — ионы, $\theta = 0$; *2* — ионы, $\theta = \pi/2$; *3* — ионы, $\theta = \pi$; *4* — электроны, $\theta = 0$; *5* — электроны, $\theta = \pi/2$; *6* — электроны, $\theta = \pi$)

тате электростатического отталкивания от цилиндра. В теневой части для обеих составляющих плазмы наблюдается область значительного уменьшения концентрации — след. Однако ионный след имеет несколько иную конфигурацию в сравнении с электронным. Отличие состоит в том, что ионный след у́же электронного, так как, пролетая мимо цилиндра, ионы притягиваются, а электроны отталкиваются поверхностью цилиндра. Кроме того, ионный след длиннее электронного, так как электроны в силу малой массы и большей подвижности значительно меньше ионов подвержены влиянию фактора направленной скорости плазмы и заполняют теневую область уже на относительно небольшом удалении от цилиндра. Влияние направленной скорости на электроны в основном проявляется через самосогласованное электрическое поле.

На рис. 3.24, *а* и *б* представлены распределения концентраций ионов и электронов по радиусу в лобовой, боковой и теневой частях цилиндра для $\varphi_0 = -6$ и -20, которые находятся в полном соответствии с приведенными выше рассуждениями:

— в лобовой части концентрация ионов существенно выше, чем электронов;

— концентрация ионов плавно спадает от лобовой к хвостовой части по обводу;

— след ионов длиннее, чем след электронов.

Отличие рис. 3.24, *б* от 3.24, *а* заключается в том, что при более высоком отрицательном потенциале тела область малых концентраций электронов расширилась, а концентрация ионов в теневой части в непосредственной близости от тела повысилась.

На рис. 3.25 представлено поле потенциала самосогласованного электрического поля для $\varphi_0 = -6$, на рис. 3.26 — распределения потенциала по радиусу в лобовой, боковой и теневой части цилиндра для $\varphi_0 = -6$. Основной особенностью обоих рисунков является то, что

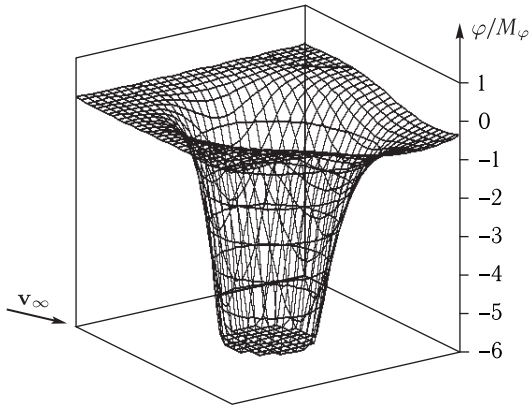


Рис. 3.25. Потенциал самосогласованного электрического поля ($r_0 = 3$; $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

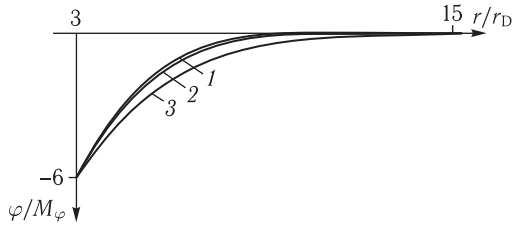


Рис. 3.26. Распределение потенциала по радиусу ($r_0 = 3$; $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$): *1* — $\theta = 0$; *2* — $\pi/2$; *3* — π

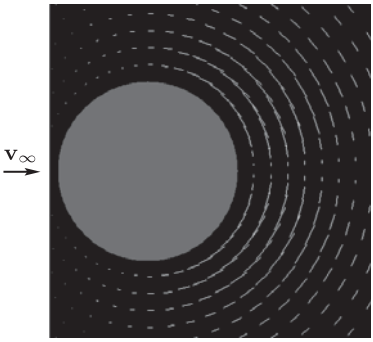


Рис. 3.27. Поле азимутальной напряженности ($v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

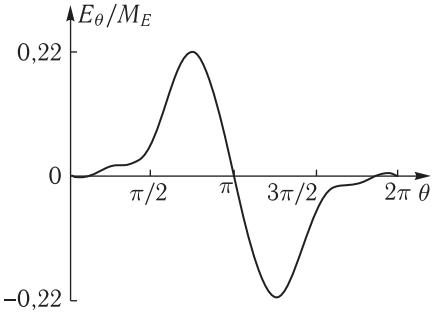


Рис. 3.28. Распределение азимутальной напряженности по обводу цилиндра ($v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

в теневой части потенциал спадает более плавно, чем в лобовой. Это объясняется тем, что концентрация ионов в теневой части существенно ниже, чем в лобовой, поэтому в теневой части электростатическое поле меньше экранируется и соответственно дальше проникает в плазму.

При этом величина отрицательного потенциала спадает по обводу цилиндра от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$, поэтому в пристеночной области возникает азимутальное электростатическое поле (см. рис. 3.27 и рис. 3.28, которое имеет максимум при переходе по обводу от боковой к теневой части цилиндра.

3.5. Поля скоростей ионов

Обсудим поле скоростей ионов, как частиц, наиболее сильно подверженных влиянию фактора направленной скорости плазмы. На рис. 3.29 представлено поле скоростей ионов для случая $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $r_0 = 10$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$. У границ расчетной области, где ФР близка к максвелловской, векторы средних скоростей ионов практически ничем не отличаются от вектора $\mathbf{v}_0$. В непосредственной близости от цилиндра в лобовой и боковой областях, а также в области следа ФР ионов существенно отличается от максвелловской и это влияет на величину и направление средних скоростей ионов.

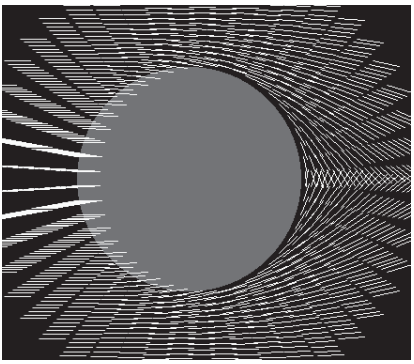


Рис. 3.29. Поле скоростей ионов ($v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $r_0 = 10$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

Направления скоростей в следе наиболее сильно зависят от параметра v_0 и величины отрицательного потенциала цилиндра. На рисунках 3.30 и 3.31 представлены поля скоростей ионов для разных величин направленной скорости плазмы при прочих равных условиях. Если при $v_0 = 1$ электростатическое притяжение тела оказывает заметное влияние на поле скоростей и вызывает наличие отрицательных

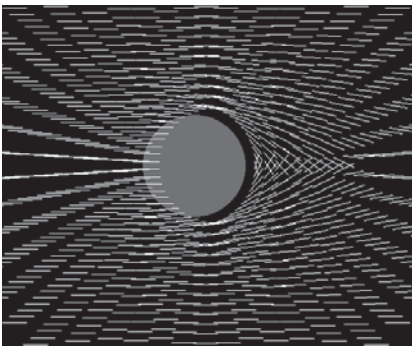


Рис. 3.30. Поле скоростей ионов ($v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

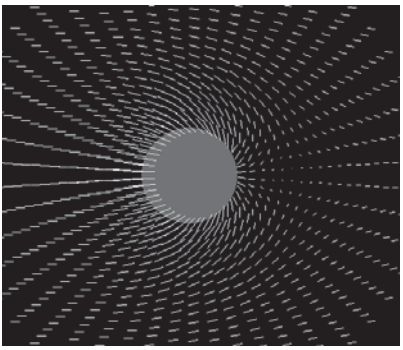


Рис. 3.31. Поле скоростей ионов ($v_0 = 1$; $\varphi_0 = -6$; $r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

радиальных скоростей по всему обводу цилиндра, то при $v_0 = 5$ фактор направленной скорости оказывает значительно большее влияние, и в соответствии с этим все средние скорости ионов в теневой части имеют положительную радиальную составляющую.

3.6. Влияние осевого магнитного поля на структуру возмущенной зоны

Параметры плазмы вблизи летательных аппаратов, движущихся в космическом пространстве, могут существенно меняться при наличии магнитных полей. Это может быть магнитное поле Земли или иной планеты, около которой совершается космический полет. Источником магнитного поля может быть какое-либо техническое устройство.

Для исследования особенностей пристеночной плазмы в этих случаях введем постоянное во времени и пространстве магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, направленное параллельно оси цилиндра (см. рис. 1.1).

Рассмотрим основные результаты численного моделирования по изложенной выше методике на примере расчета при следующих основных параметрах задачи: $r_0 = 3$; $\varphi = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$. При этом величину магнитной индукции будем менять в достаточно широких пределах (до безразмерного значения $B_0 = 0{,}9$, что соответствует 0,018 Тл для водородной плазмы (см. масштаб (1.43)). Расчеты показали, что зависимость интегрального тока на тело от величины магнитной индукции имеет существенно нелинейный характер (рис. 3.32). При этом характер изменения параметров пристеночной области можно разбить на три этапа в зависимости от изменения величины вектора $\mathbf{B}$:

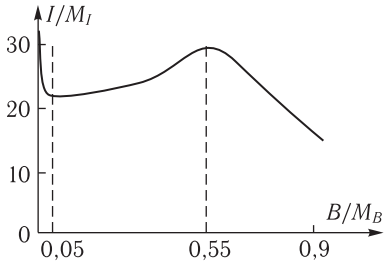


Рис. 3.32. Зависимость интегрального тока от величины магнитной индукции ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$)

- этап 1: $0 < B_0 < 0{,}05$;
- этап 2: $0{,}05 < B_0 < 0{,}55$; (3.1)
- этап 3: $B_0 > 0{,}55$.

На этапе 1 магнитное поле не оказывает прямого воздействия на ионы, но электроны, обладающие значительно меньшей массой по сравнению с ионами, уже начиная с $B_0 = 0{,}001$ начинают заметно менять характер своего движения. Суть этого изменения заключается в том, что на первом этапе пристеночная область практически полностью теряет отрицательно заряженную компоненту плазмы — электроны. Механизм этого процесса можно наблюдать, если визуализировать поле скоростей электронов при нарастающем магнитном поле. Электроны, мгновенно реагируя на появление магнитного поля, начинают движение по ларморовским окружностям,

радиусы которых уменьшаются с ростом величины магнитной индукции. При этом большая часть электронов, которые при отсутствии магнитного поля пролетали мимо цилиндра, теперь попадают на стенку и выбывают из рассмотрения. В соответствии с этим падает концентрация электронов в пристеночной области, растет объемный положительный заряд, который смещает центры ларморовских окружностей электронов ближе к цилиндру, и это вызывает дальнейшее взаимодействие электронов со стенкой и дальнейшее падение концентрации электронов. Проведем сравнение двух графиков: рис. 3.23, где представлено поле концентраций электронов при отсутствии магнитного поля, и рис. 3.33 с полем концентраций электронов при $B_0 = 0{,}012$.

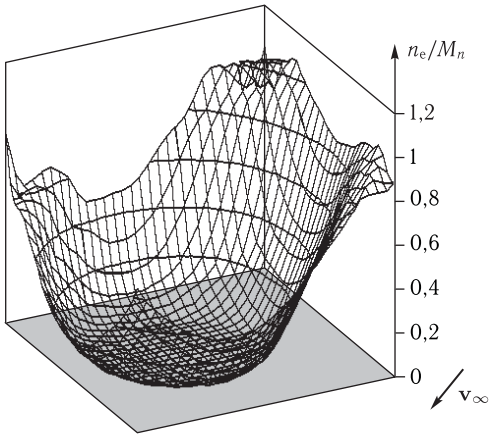


Рис. 3.33. Концентрация электронов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}012$)

На рис. 3.23 падение концентрации электронов около цилиндра обусловлено электростатическим отталкиванием от его стенки. Кроме того, в результате наличия направленной скорости потока плазмы образуется характерный теневой провал концентрации — след. На рис. 3.33 при наличии относительно небольшого магнитного поля и таких же остальных параметрах задачи мы видим значительное обеднение пристеночной области электронами со всех сторон цилиндра.

Через самосогласованное электрическое поле ионы на этапе 1 (см. (3.1)) также подвергаются существенному воздействию. Нарастающий в пристеночной области объемный положительный заряд ослабляет притягивающее ионы электростатическое поле цилиндра, в результате чего ионный ток на этапе 1 падает примерно на десять единиц (рис. 3.32).

На рис. 3.34 представлено распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра при различных значениях магнитной индукции. Линия *1* соответствует началу первого этапа, а линия *2* — его окончанию. На рисунке видно, что линия *2* распределения плотности тока опускает-

ся вниз в лобовой части цилиндра относительно линии *1*, и площадь под графиком уменьшается. Кроме того, максимум ионного тока, приходящийся на переднюю точку цилиндра со стороны набегающего потока в отсутствии магнитного поля, начинает смещаться в сторону угловой координаты $3\pi/2$, так как к концу первого этапа поворот ионов под воздействием силы Лоренца становится визуально заметным.

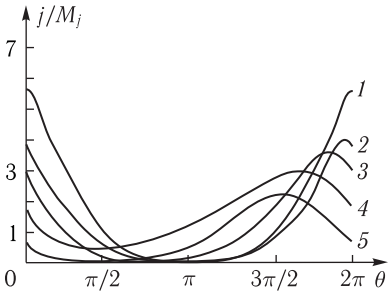


Рис. 3.34. Распределение плотности тока по обводу цилиндра при различных значениях магнитной индукции ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$): *1* — $B_0 = 0$; *2* — 0,05; *3* — 0,3; *4* — 0,6; *5* — 0,9

Этап 2 характеризуется нарастанием угла поворота набегающего потока ионов под воздействием растущей силы Лоренца. На рисунках 3.35–3.39 представлены поля скоростей ионов при нарастании величины магнитной индукции на всем протяжении второго этапа, а также для сравнения поле скоростей ионов в отсутствии магнитного поля при прочих равных условиях. Если при $B_0 = 0{,}1$ (рис. 3.36) поворот потока составил около 15°, то к концу второго этапа поток повернул практически на 90° (рис. 3.39).

Этап 2, несмотря на наличие объемного положительного заряда в пристеночной области, сопровождается ростом ионного тока (см. рис. 3.32) в результате того, что зона охвата набегающим потоком ионов стенки цилиндра становится больше с ростом угла поворота потока (рисунки 3.36–3.39). На рис. 3.34 видно, что максимум плотности тока (см. линию *3*) существенно сместился в сторону угловой координаты $3\pi/2$ в результате поворота потока под воздействием силы Лоренца (рис. 3.37). При этом площадь под графиком несколько возросла по сравнению с линией *2*, соответствующей началу второго этапа.

Помимо этого отметим, что на втором этапе поворот потока плазмы привел к существенному перераспределению концентрации ионов в пристеночной области. На рис. 3.22 представлено поле концентраций ионов в отсутствии магнитного поля. Здесь имеет место небольшое убывание концентрации в лобовой части цилиндра в силу поглощения стенкой, и характерный след в теневой части. На рис. 3.40 при $B_0 = 0{,}1$ и прочих равных условиях мы наблюдаем совсем другую картину. Объемный положительный заряд пристеночной области притормаживает набегающий поток и вызывает накопление ионов в лобовой части около цилиндра. Область следа стала менее выраженной и немного сместилась против часовой стрелки в результате поворота потока под воздействием силы Лоренца.

При повороте потока на 90° (рис. 3.39) достигается максимум ионного тока, а дальнейшее нарастание магнитного поля приводит к его

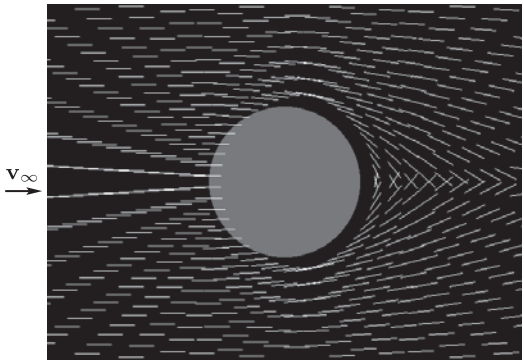


Рис. 3.35. Поле скоростей ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$)

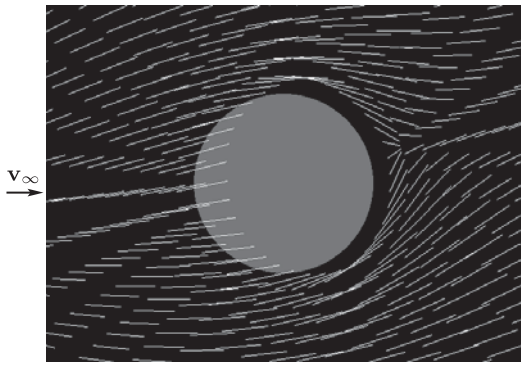


Рис. 3.36. Поле скоростей ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}1$)

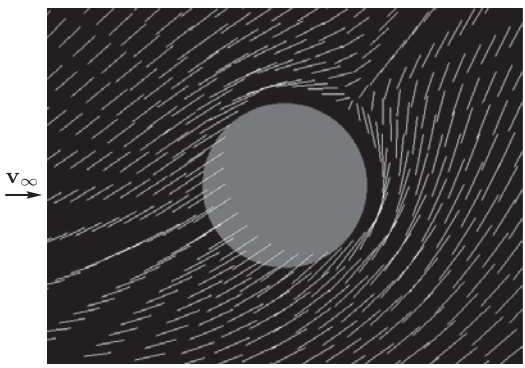


Рис. 3.37. Поле скоростей ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}3$)

падению (см. рис. 3.32). На рисунках 3.41 и 3.42 представлено поле скоростей и концентраций ионов при $B_0 = 0{,}9$. На обоих рисунках выделена область *1*, находящаяся перед цилиндром со стороны набегающего

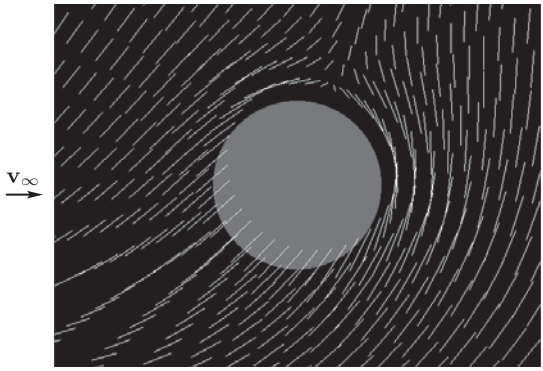


Рис. 3.38. Поле скоростей ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}4$)

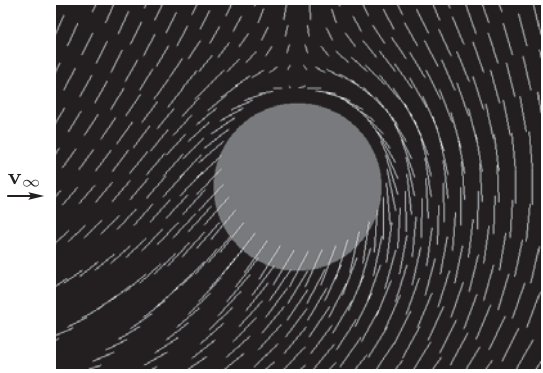


Рис. 3.39. Поле скоростей ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}5$)

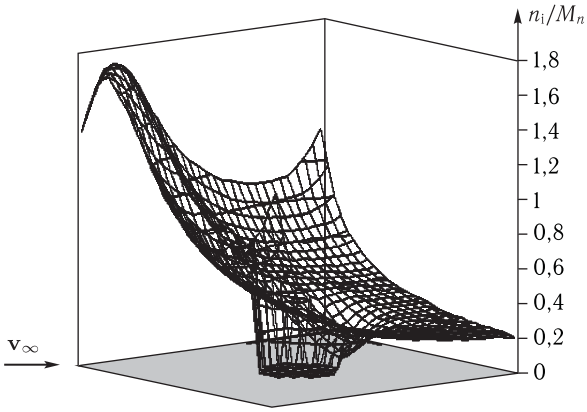


Рис. 3.40. Концентрация ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}1$)

потока плазмы. Поток ионов в области *1* поворачивает практически на 90° (рис. 3.41). На рис. 3.42 соответственно этому видно, что в этой области сосредоточена большая часть движущихся ионов. Следовательно, большая часть ионов набегающего потока успевает совершить поворот, не коснувшись стенки цилиндра. Концентрация ионов перед цилиндром на рис. 3.42 заметно выше в сравнении с рис. 3.40. Рост объемного положительного заряда перед цилиндром еще больше усиливает этот процесс. Проявление описанного физического эффекта усиливается с дальнейшим ростом величины B_0 и это приводит к падению ионного тока. На рис. 3.34 линия *5* ($B_0 = 0{,}9$) в соответствии с вышесказанным заметно ниже линии *4*, соответствующей началу третьего этапа (см. (3.1)).

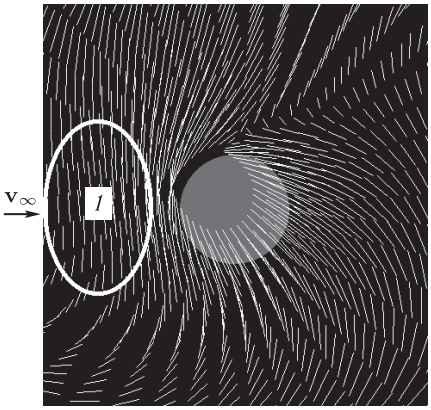


Рис. 3.41. Поле скоростей ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}9$): *1* — область перед цилиндром со стороны набегающего потока плазмы

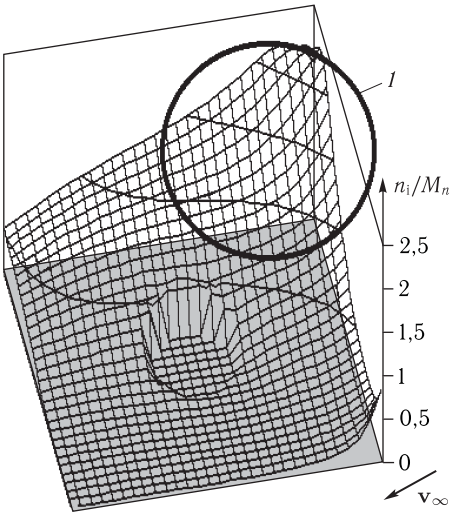


Рис. 3.42. Концентрация ионов ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0{,}9$): *1* — область перед цилиндром со стороны набегающего потока плазмы

Перечислим основные особенности возмущенной зоны при нарастании магнитного поля.

• Начальный этап нарастания магнитного поля приводит к обеднению пристеночной области электронами и соответственно образованию объемного положительного заряда. При этом происходит относительно резкое падение ионного тока.

• Дальнейшее нарастание магнитного поля приводит к постепенному повороту набегающего потока плазмы и ограниченному росту ионного тока.

• Когда угол поворота набегающего потока плазмы достигает 90°, величина ионного тока достигает своего максимального значения. Дальнейшее нарастание магнитного поля приводит к падению ионного тока.

При варьировании параметров v_0 и φ_0 качественные особенности проведенного выше физического анализа сохраняются. Основные отличия заключаются в следующем.

• При увеличении направленной скорости плазмы растет радиус ларморовского вращения ионов. При этом поворот потока плазмы на 90° (см. рис. 3.39) и соответствующий ему максимум ионного тока достигаются при больших значениях B_0. Соответственно при уменьшении v_0 наблюдается обратная зависимость. Однако при относительно небольших скоростях усиливается влияние самосогласованного электрического поля, что приводит к появлению отрицательных радиальных скоростей по всему обводу цилиндра.

• Рост параметра φ_0 также усиливает влияние самосогласованного электрического поля. В результате при достаточно больших по величине значениях отрицательного потенциала в пристеночной области доминирует электростатическое притяжение ионов к цилиндру.

Значения параметра r_0 выбирались таким образом, чтобы выполнялось условие $r_0 < R_л = v_0/B_0$, где $R_л$ — безразмерный радиус ларморовского вращения ионов. Варьирование параметра r_0 при прочих равных условиях в рамках указанного неравенства показало, что описанная выше физическая картина в основном сохраняется.

Глава 4

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ТЕЛ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

На пластине достаточно большого размера, нормаль к которой перпендикулярна вектору направленной скорости плазмы, выделим участок в виде удлиненного прямоугольника, электрически изолированного от пластины. Направим ось Y по нормали к пластине, ось X — вдоль вектора скорости, ось Z — вдоль удлиненной стороны прямоугольника. Размер короткой стороны прямоугольника $2r_{\text{р}}$, его потенциал $\varphi_{\text{р}}$ (см. рис. 1.2).

Математическая модель задачи включает в себя систему уравнений Власова–Пуассона (1.30)–(1.33) с начальными и граничными условиями, описанными в п. 1.5. Уравнения Власова на каждом шаге по времени решались методом характеристик (см. п. 2.1.2), уравнение Пуассона — методом переменных направлений Письмена–Речфорда [37].

Основные закономерности распределения параметров пристеночной области, описанные выше для тела цилиндрической геометрии, в основном повторяются и в случае обтекания плазмой тел других геометрии. Поэтому представим здесь только те результаты вычислительных экспериментов, которые являются особенностью плоской геометрии тела.

4.1. Функции распределения заряженных частиц

Функции распределения ионов вблизи электрода ленточного типа, имеющего отрицательный потенциал, при условии нулевой направленной скорости плазмы приведены на рис. 4.1.

Характерные параметры задачи и координаты точек, в которых получены ФРИ, указаны на рис. 4.1. ФРИ имеют характерный подковообразный вырез, причина появления которого рассмотрена ранее в гл. 3. Однако радиус кривизны «подковы» в данном случае сильно возрастает, что связано с особенностями динамики плазмы вблизи электрода плоской геометрии. Еще одна особенность состоит в том, что ФРИ в точке *1* смещена относительно ФРИ в точке *3* в сторону положительных скоростей v_x. Причина этого заключается в следующем: электрическое поле электрода на краях пластины сгущается и вектор **E** имеет направление

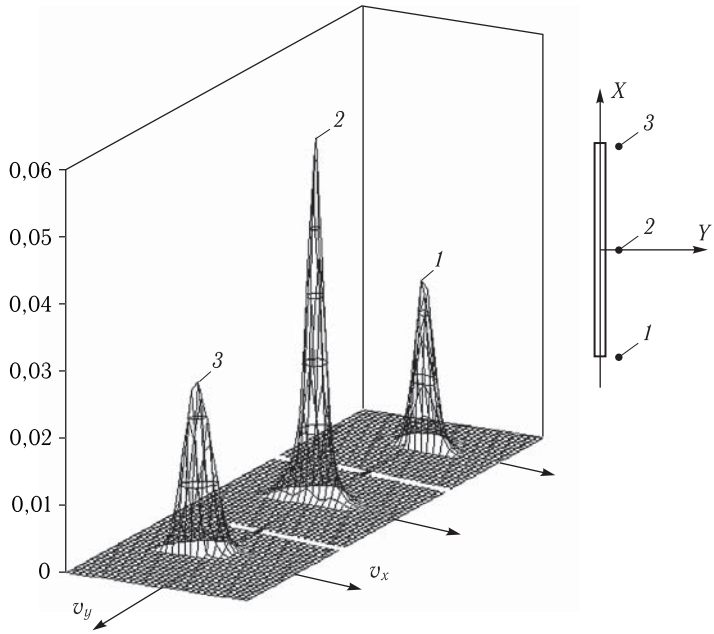


Рис. 4.1. ФРИ ($r_0 = 10$; $\varphi_0 = -10$; $v_0 = 0$; $\varepsilon = 1$)

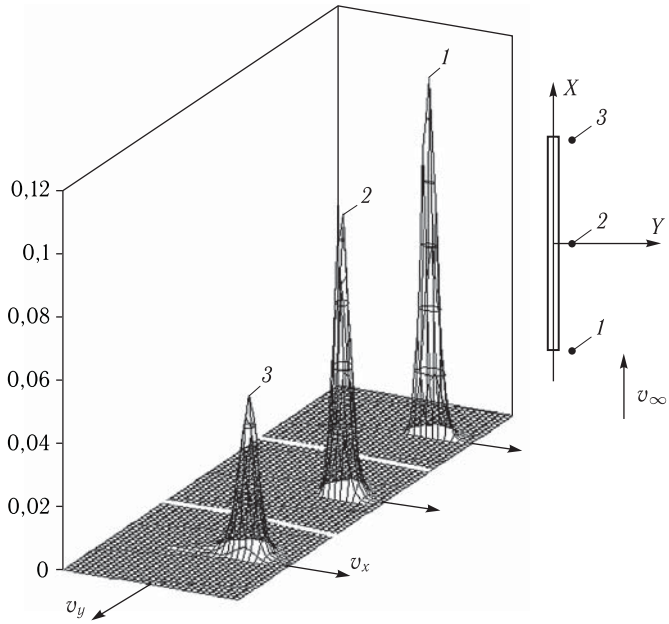


Рис. 4.2. ФРИ ($r_0 = 10$; $\varphi_0 = -10$; $v_0 = 5$; $\varepsilon = 1$)

не только по нормали к пластине (по оси Y), но и по оси X. При этом в точке *1* ионы притягиваются в положительном направлении оси X, а в точке *3* — в обратном. Появление этих противоположно направленных движений по оси X и приводит к смещению центров тяжести ФРИ на противоположных краях пластины.

На рис. 4.2 даны ФРИ при значении направленной скорости плазмы вдоль пластины $v_0 = 5$. (Остальные параметры задачи те же самые, что и на рис. 4.1.)

В отличие от случая обтекания цилиндра здесь ФРИ не имеют двугорбого характера, поскольку нет причины для их появления. Структура купола ФРИ напоминает рис. 4.1. Все приведенные на рис. 4.2. ФРИ сдвинуты по оси v_x на величину $v_0 = 5$. Наполнение купола ФРИ в точке *3* меньше чем в точке *1*, поскольку влияние притягивающего электрического поля по мере движения иона вдоль пластины накаливается и число ионов, попадающих на дальнюю часть пластины (точка *3*) больше чем на переднюю (точка *1*). Соответственно концентрация ионов в точке *1* выше, чем в точке *3*. Этот эффект усиливается с увеличением размера электрода r_0 и его потенциала φ_0.

ФРЭ вблизи отрицательно заряженного электрода ленточного типа не обсуждаются, поскольку концентрации электронов вблизи стенки мала.

4.2. Интегральный ток на плоский пристеночный электрод. Распределение плотности тока

Интегральный ионный ток на единицу длины плоского пристеночного электрода ленточного типа впервые исследовался в [130], где были получены его значения при $v_0 = 0$ в интервале $2 < r_0 < 50$ при потенциалах $-30 \le \varphi_0 \le 10$. Сравнение результатов настоящего исследования при $v_0 = 0$ с данными работы [130] показало хорошее совпадение. Например, при $r_0 = 10$, $\varphi_0 = -10$, $\varepsilon = 1$ отличие по интегральному типу не превышало нескольких процентов.

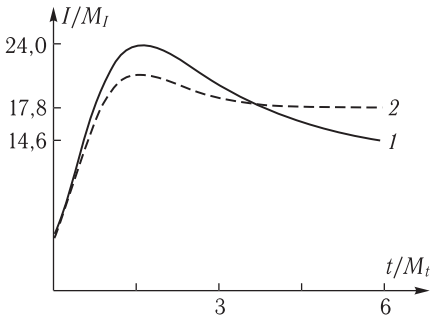


Рис. 4.3. Эволюция ионного тока ($r_0 = 10$; $\varphi_0 = -10$; $\varepsilon = 1$; *1* — $v_0 = 0$; *2* — 5)

На рис. 4.3 приведены кривые эволюции ионного тока после импульсного изменения потенциала электрода при двух значениях скорости направленного движения плазмы $v_0 = 0$ и $v_0 = 5$.

Как и в случае обтекания цилиндрического электрода рост направленной скорости плазмы ведет к сокращению времени эволюции интегрального ионного тока.

С ростом ширины ленты r_0 ионный интегральный ток растет, что связано с увеличением поглощающей поверхности электрода. Как следует из рис. 4.3, с ростом параметра v_0 интегральный ток увеличивается. В [130] наблюдалась обратная зависимость от v_0, что, по-видимому, связано с недостаточно корректным учетом концевого и краевого эффектов. В работе [74], где исследовался интегральный ток в турбулентном режиме обтекания пластины, также отмечено увеличение интегрального тока с ростом направленной скорости. Тот же результат получен в гл. 3 настоящей монографии при обтекании цилиндрического тела поперечным потоком разреженной плазмы.

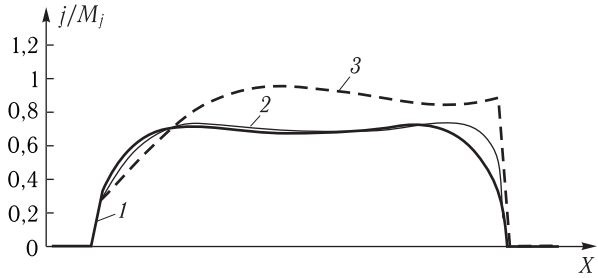


Рис. 4.4. Распределение плотности тока ионов вдоль оси X ($r_0 = 10$, $\varphi_0 = -10$, $\varepsilon = 1$): *1* — $v = 0$; *2* — 1; *3* — 5

На рис. 4.4 представлены распределения плотности тока j_i вдоль поперечного размера пластины (вдоль оси X). Распределения показывают некоторое увеличение j_i на краях пластины (краевой эффект). С уменьшением размера пластины r_0 этот эффект увеличивается. Включение направленной скорости приводит к увеличению плотности тока на дальней стороне пластины (точка *3*), что согласуется с рис. 4.2 и объясняется наличием эффекта, аналогичного концевому [38].

4.3. Распределение концентраций заряженных частиц и электрического поля вблизи стенки плоского электрода

На рис. 4.5, *а* и *б* дано распределение концентраций ионов и электронов вблизи стенки вдоль оси X при двух значениях направленной скорости $v_0 = 0$ и $v_0 = 5$, а на рис. 4.6 представлено распределение ионной концентрации вдоль оси Y (координата X соответствует середине пластины). Из рис. 4.5 следует, что при $\varphi_0 = -10$ концентрация n_e вблизи пластины ничтожно мала, а концентрация n_i несколько возрастает к краям вследствие краевого эффекта. При значении $v_0 = 5$ концентрация n_i растет, кроме того нарушается симметрия относительно плоскости (YZ). В точке *1* вследствие большой направленной скорости вдоль оси X ионы пролетают дальше и не успевают нейтрализоваться на стенке; в области точки *3* под влиянием электрического поля пластины

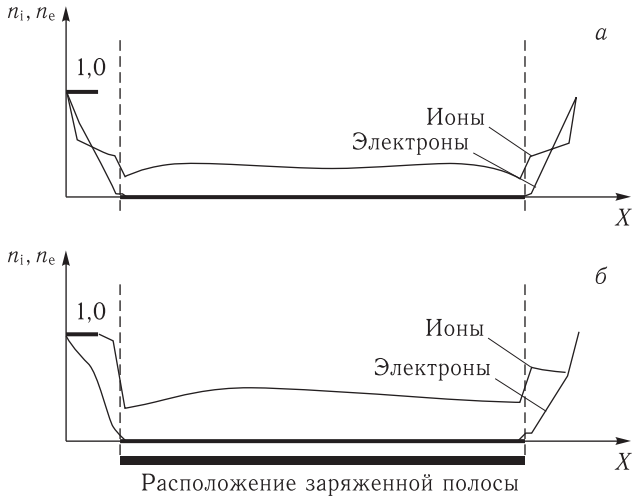


Рис. 4.5. Распределение концентраций ионов и электронов вдоль оси X ($r_0 = 10$, $\varphi_0 = -10$, $\varepsilon = 1$): *а*) $v_0 = 0$; *б*) $v_0 = 5$

ионы с бóльшей вероятностью достигают стенки и нейтрализуются, вследствие чего возрастает ионный ток на стенку. Из рис. 4.6 следует, что концентрация ионов в пристеночной области с ростом v_0 увеличивается, что может служить одной из причин увеличения плотности ионного тока с ростом v_0.

На рис. 4.7 отдельно выделена область слоя объемного заряда вблизи пластины. Эта область имеет масштаб, соизмеримый с размером пластин.

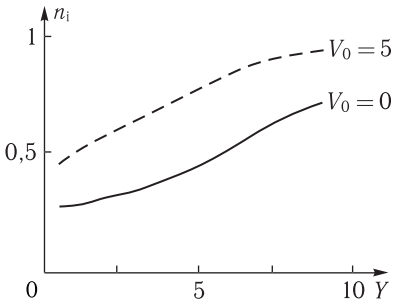


Рис. 4.6. Распределение концентраций ионов и электронов вдоль оси Y ($r_0 = 10$, $\varphi_0 = -10$, $v_0 = 0$, $\varepsilon = 1$)

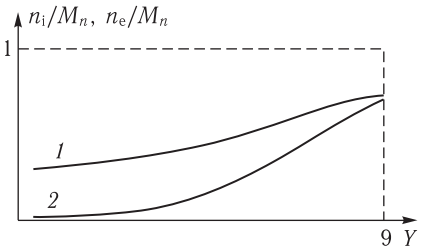


Рис. 4.7. Распределение концентраций ионов (*1*) и электронов (*2*) вдоль оси Y ($r_0 = 10$; $\varphi_0 = -10$; $v_0 = 0$; $\varepsilon = 1$)

Из рисунков 4.5–4.7 следует еще один вывод: концентрация притягивающихся частиц не равна нулю вблизи заряженной поверхности в разреженной плазме при различных значениях направленной скоро-

сти потока. Однако в ряде работ (см. обзор в [31]) авторы полагают $n_{\mathrm{i,e}} = 0$ на стенке как для отталкивающихся, так и для притягивающихся частиц.

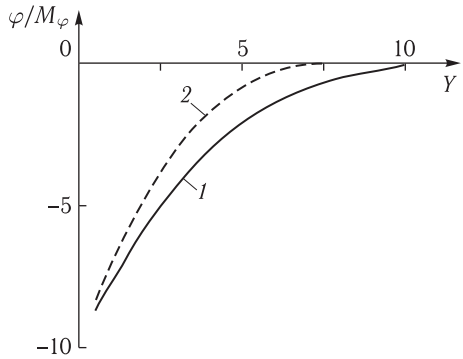


Рис. 4.8. Распределение потенциала вдоль оси Y ($r_0 = 10$; $\varphi_0 = -10$; $v_0 = 0$; $\varepsilon = 1$; координата X соответствует середине пластины; *1* — $v_0 = 0$, *2* — 5)

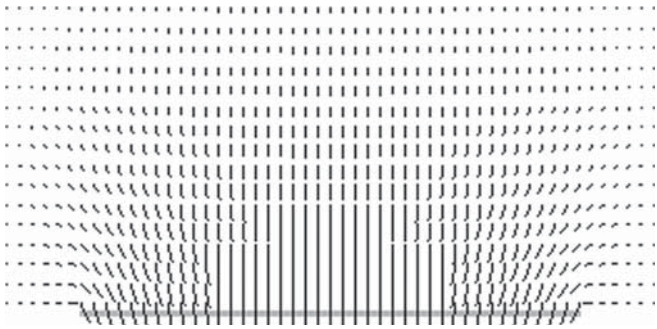
На рис. 4.8 приведена зависимость самосогласованного потенциала φ_0 от координаты Y. С увеличением скорости v_0 кривая распределения потенциала спадает более круто, что согласуется с данными рис. 4.6, согласно которым с ростом v_0 концентрация n_{i} также растет.

4.4. Поля скоростей ионов

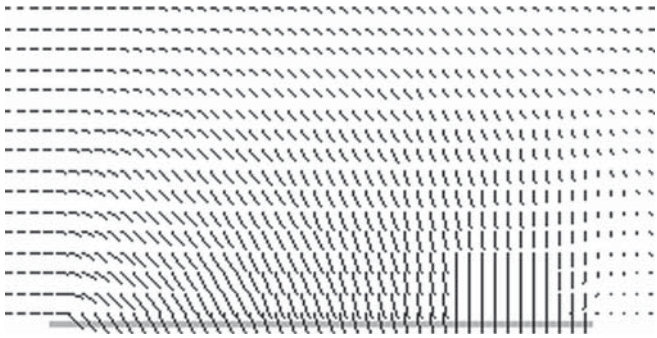
Поле скоростей ионов вблизи заряженной полосы зависит от характерных параметров задачи r_0, φ_0, v_0, ε. На приведенных ниже рисунках 4.9, *а–в* показано влияние скорости потока на поле скоростей ионов при отрицательном потенциале пластины. Если $v_0 = 0$ (рис. 4.9, *а*), то направленные скорости ионов определяются только электрическим полем пластины. Рисунок имеет плоскость симметрии. В центральной части пластины вектор скорости направлен по нормали к стенке. По краям проявляется краевой эффект, благодаря которому ионы притягиваются из соседних с электродом областей.

На рис. 4.9, *в* направленная скорость потока $v_0 = 5$. В этом случае влияние электрического поля на профиль скоростей ионов (параметр $\varphi_0 = -10$) мало по сравнению с влиянием параметра v_0. Ионы могут пролетать вдоль пластины, лишь немного приблизившись к ней под влиянием электрического поля. Вследствие этого концентрация ионов вблизи пластины возрастает, а плотность тока больше вблизи ее удаленного края.

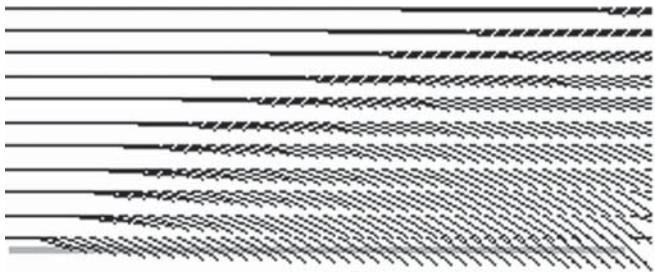
Рисунок 4.9, *б* демонстрирует промежуточный случай, когда влияние электрического поля вблизи пластины и направленной скорости потока плазмы на поле скоростей ионов соизмеримы.



а



б



в

Рис. 4.9. Поле скоростей ионов ($r_0 = 10$; $\varphi_0 = -10$; $\varepsilon = 1$): *а*) $v_0 = 0$; *б*) $v_0 = 1$; *в*) $v_0 = 5$

Глава 5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗОНЫ И «СОБСТВЕННОЙ АТМОСФЕРЫ» ВБЛИЗИ КЛА

Первый космический летательный аппарат (КЛА) был запущен в СССР в 1957 г. В настоящее время ряд стран имеет возможность для запуска КЛА различного назначения. Спутник движется в разреженной ионосферной плазме. Максимальная концентрация заряженных частиц достигается на высотах порядка 300 км от поверхности Земли и составляет $\sim 1{,}6 \cdot 10^{12}$ м$^{-3}$; температура электронов на этой высоте достигает 2000 К, а ионов ~ 1400 К [19]. В этих условиях средний пробег частиц λ составляет ~ 50 м, а дебаевский радиус экранирования $r_{\mathrm{D}} \sim 0{,}1$–$0{,}7$ см. Скорость спутника считается известной: она равна первой космической скорости. Как указывалось в гл. 1, тело, помещенное в разреженную плазму, приобретает «плавающий потенциал», который оказывается отрицательным относительно потенциала пространства. Вследствие этого около тела формируется слой объемного заряда и далее квазинейтральная возмущенная зона. Направленная скорость спутника приводит к зависимости параметров возмущенной зоны не только от радиальной, но и угловой координаты (для спутника кругового сечения). Говорят о лобовой, боковой и теневой частях возмущенной зоны, причем последняя имеет форму удлиненного «следа», тянущегося за спутником. Кроме того, возмущенная зона может осложняться инжекцией в нее потоков различных сортов частиц с поверхности спутника. В этих условиях говорят о «собственной атмосфере», формирующейся вблизи поверхности спутника. Знание параметров возмущенной зоны и собственной атмосферы вблизи спутника необходимо при проведении физических экспериментов на КЛА, при учете взаимодействия спутников с другими телами, при расчете процессов переноса заряда, массы, импульса и энергии из окружающего пространства на поверхности спутника и в других задачах.

Исследование возмущенной зоны и собственной атмосферы вблизи КЛА возможно в физических экспериментах, например, с помощью выносных и пристеночных зондов, однако это требует выполнения специальных достаточно дорогостоящих программ. Поэтому целесообразно предварительно получить необходимую информацию методами математического моделирования [39, 131, 132].

При формулировке математической модели задачи были учтены следующие особенности.

1. Задача исследования возмущенной зоны и собственной атмосферы вблизи КЛА относится к классу зондовых задач в потоке разреженной плазмы. Несущественное отличие состоит лишь в том, что характерный размер спутника может быть много больше характерного размера зонда, кроме того, на зонд подается заданный потенциал относительно пространства, а на спутнике, как правило, поддерживается «плавающий» потенциал. Потенциал спутника может меняться в процессе физических экспериментов, когда, например, с него инжектируется в окружающее пространство поток заряженных частиц одного знака.

2. Моделирование движения сферического спутника (или спутника сложной формы) требует решения шестимерной нестационарной задачи в фазовом пространстве, что невозможно на ЭВМ средней мощности. Поэтому было выбрано тело цилиндрической формы с вектором направленной скорости, расположенным перпендикулярно оси цилиндра. Такое тело можно рассматривать как часть реального спутника, или как элемент его конструкции. В такой постановке сохраняются все особенности возмущенной зоны и в то же время задача становится четырехмерной в фазовом пространстве и для ее решения достаточно ресурсов ЭВМ с процессором типа Pentium 4.

3. Реальный спутник, движущийся в ионосфере, находится в магнитном поле, создаваемым Землей. Чтобы задача осталась четырехмерной в фазовом пространстве при наличии магнитного поля, будем предполагать, что вектор магнитной индукции поля может быть направлен вдоль оси цилиндра.

С учетом данных особенностей система дифференциальных уравнений, а также система начальных и граничных условий, входящих в математическую модель задачи, соответствует системе (1.44)–(1.48).

Если дополнительно имеет место инжекция заряженных частиц с поверхности КЛА, то изменяется граничное условие на поверхности. Оно включает функцию распределения инжектируемых частиц. Последние влияют на распределение объемного заряда в возмущенной зоне, а, следовательно, и на распределение самосогласованного электрического поля.

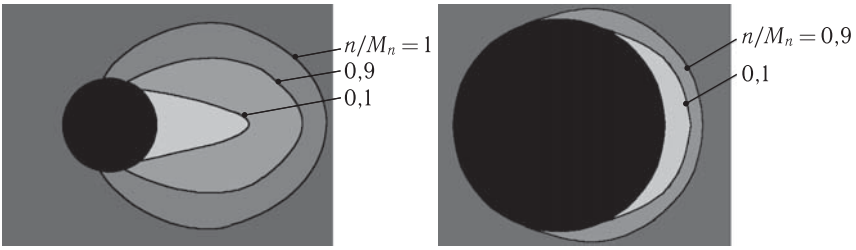
Вычислительная модель задачи полностью соответствует гл. 2.

Вычислительные эксперименты проводились с учетом условий полета спутника цилиндрической формы диаметром несколько десятков сантиметров, обладающего плавающим потенциалом, по орбите на расстоянии 500 км от поверхности Земли [39]. Скорость полета — первая космическая, состав плазмы — атомарный кислород. Кроме того, проводились вычислительные эксперименты при тех же условиях для цилиндра радиусом несколько миллиметров, что можно рассматривать как поперечно расположенную антенну спутника. При этом учет магнитного поля Земли $B \approx 10^{-5}$ Тл ввиду его относительной малости не вносил каких-либо ощутимых изменений в получаемые данные.

Некоторые результаты математического моделирования представлены на рисунках 5.1–5.8. На рисунках 5.1, *а*—5.7, *а* приведены результаты для цилиндрического тела радиусом $r_p = 3r_D$ (r_D — радиус Дебая). Для условий на орбите высотой 500 км $r_D = 0{,}276$ см, следовательно радиус цилиндра $r_p = 0{,}83$ см, что соответствует антенне спутника. На рисунках 5.1, *б*—5.7, *б* для цилиндрического тела радиусом $r_p = 30r_D = 8{,}3$ см, что можно рассматривать как самостоятельный микроспутник цилиндрической геометрии, либо как часть конструкции большого спутника. Расчет проведен для $v_\infty = 7{,}5 \cdot 10^3$ м/с — первой космической скорости для спутника на высоте 500 км. Масштаб скорости для условий на этой высоте $M_{vi} = (2kT_i/m_i)^{1/2} = 1285$ м/с, следовательно, соответствующая безразмерная скорость $v_0 = v_\infty/M_{vi} = 5{,}8$. Остальные безразмерные параметры расчета имели следующие значения: $T_e/T_i = 1{,}6$ ($T_i = 1600$ K, $T_e = 2600$ K); $m_i/m_e = 30000$ (для атомарного кислорода). Значение потенциала плавающего тела подбиралось из методических расчетов и составило $\varphi_p = -6(kT_{i\infty}/e) = -0{,}7$ В.

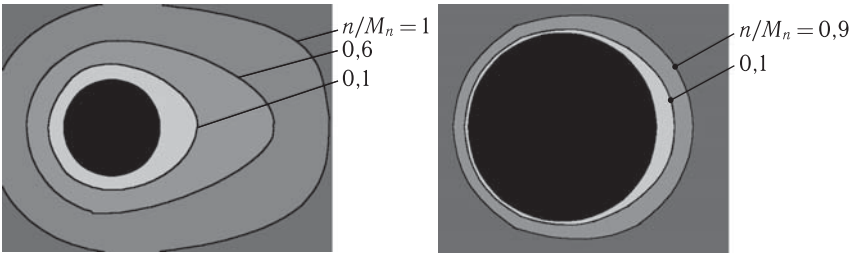
На рисунках 5.1–5.3 даны изолинии концентраций заряженных частиц и потенциала электрического поля. В теневой области отчетливо наблюдается удлиненный «след» за телом. Профили концентраций ионов и электронов в следе представлены на рис. 5.8 для случая $r_0 = 30$. След может протянуться на десятки (и даже сотни) радиусов Дебая. Поэтому расчет продолжался до момента достижения следом границы расчетной области, что составило примерно две единицы безразмерного времени. При этом видимый на графиках след на момент снятия результата еще находился в процессе эволюции. Для ионов формирование следа является следствием направленной скорости плазмы. На электроны фактор направленной скорости оказывает незначительное влияние, однако на рис. 5.2, *а* и *б* мы наблюдаем ярко выраженный электронный след. Причина его возникновения — самосогласованное электрическое поле. Электроны заполняют ионный след, там возникает объемный отрицательный заряд, в результате чего поле меньше экранируется и глубже проникает в плазму в области следа (см. рис. 5.3, след в поле потенциала). Это приводит к падению концентрации электронов в следе, хотя она все равно остается немного выше, чем у ионов. С ростом радиуса цилиндра конфигурация следа становится менее вытянутой. Это связано с тем, что, двигаясь мимо боковой поверхности тела с большим радиусом кривизны, ионы больше времени находятся под воздействием притягивающего поля цилиндра и их траектории в большей степени отклоняются от своего первоначального направления движения.

На рис. 5.4 приведены кривые распределения концентраций ионов, электронов и потенциала по радиусу для лобовой, боковой и теневой областей. Если в лобовой и боковой областях эти функции близки, то в теневой области структура следа оказывается достаточно сложной, в частности, в распределении объемного заряда может меняться



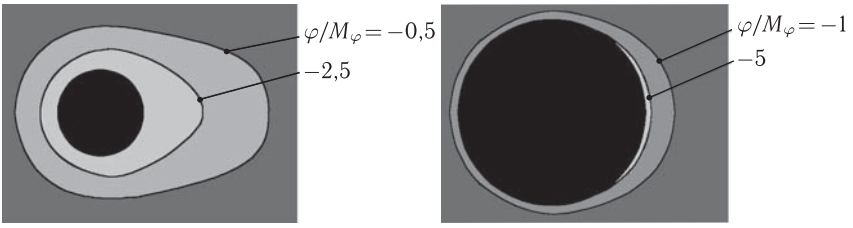
а *б*

Рис. 5.1. Изолинии концентрации ионов ($\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$): *а*) $r_0 = 3$; *б*) $r_0 = 30$



а *б*

Рис. 5.2. Изолинии концентрации электронов ($\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$): *а*) $r_0 = 3$; *б*) $r_0 = 30$



а *б*

Рис. 5.3. Изолинии потенциала самосогласованного электрического поля ($\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$): *а*) $r_0 = 3$; *б*) $r_0 = 30$

его знак. Рисунок 5.5 показывает распределение плотности ионного тока j_i по обводу цилиндра. Если в покоящейся плазме $j_i = \text{const}$, то в движущейся плазме в лобовой области $j_i = j_{i\,\max}$, а в теневой она на несколько порядков меньше (в масштабах рис. 5.5 она равна нулю). При этом в соответствии с плавающим потенциалом спутника площади под графиками плотности тока ионов и электронов равны.

На рис. 5.6 представлено поле скоростей ионов для $r_0 = 3$ и фрагмент поля скоростей в теневой части цилиндра для $r_0 = 30$. Заметно, что ионы входят в «след» благодаря притягивающему потенциалу тела, но практически не попадают на тело вследствие влияния направленной скорости. На рис. 5.7 даны линии напряженности самосогласованного

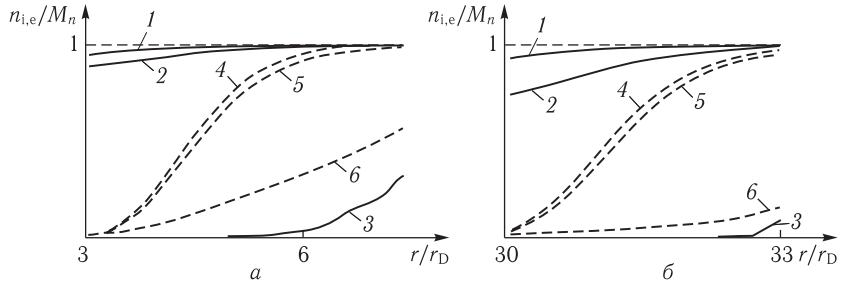


Рис. 5.4. Зависимость концентраций ионов и электронов по радиусу ($\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$) для $r_0 = 3$ (*а*) и $r_0 = 30$ (*б*): *1* — $\theta = 0$; *2* — $\pi/2$; *3* — π; ионы; *4* — $\theta = 0$; *5* — $\pi/2$; *6* — π; электроны

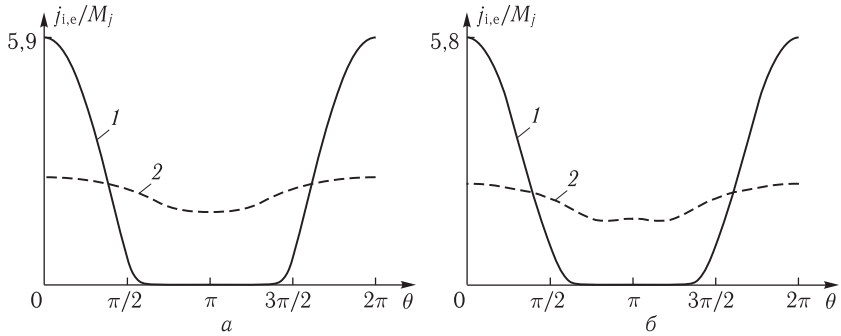
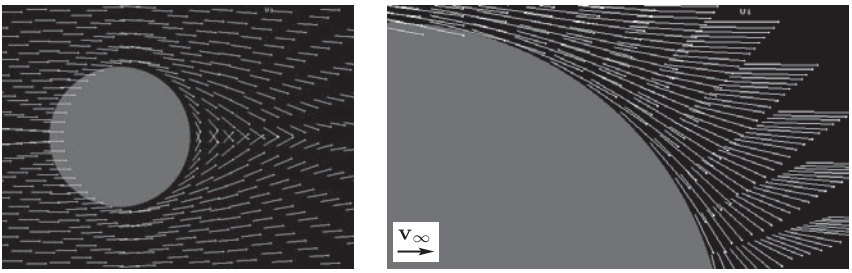


Рис. 5.5. Распределение плотности тока ионов (*1*) и электронов (*2*) по обводу цилиндра ($\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$): *а*) $r_0 = 3$; *б*) $r_0 = 30$

электрического поля. Особенностью рисунка является появление азимутальной составляющей напряженности в задних боковых областях пристеночной зоны, что является следствием влияния направленной скорости плазмы.

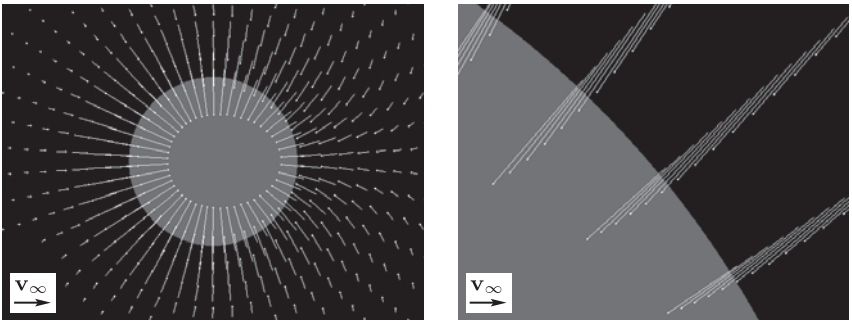
На рис. 5.8 приведены профили концентраций в следе цилиндрического спутника при тех же условиях. Для ионов формирование следа является следствием направленной скорости плазмы. На электроны фактор направленной скорости оказывает незначительное влияние, однако на рис. 5.4, *а* и *б* мы наблюдаем ярко выраженный электронный след. Причина его возникновения — самосогласованное электрическое поле, которое глубоко проникает в след и вытесняет из него электроны.

Особенности функций распределения в пристеночной области и, в частности, в области следа полностью соответствуют гл. 3 монографии. В дополнение к результатам, полученным в рамках первой главы, на рисунках 5.9 и 5.10 представлена зависимость ФР ионов в следе спутника от величины его скорости, а также соответствующие изолинии, так как скорость спутника падает с удалением от центра Земли. Функции получены в теневой области за телом на расстоянии одного шага расчетной сетки от стенки. Как отмечалось ранее, при $v_0 = 0$ имеет



а *б*

Рис. 5.6. Поле скоростей ионов ($\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$): *а*) $r_0 = 3$; *б*) $r_0 = 30$



а *б*

Рис. 5.7. Линии напряженности самосогласованного электрического поля ($\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$): *а*) $r_0 = 3$; *б*) $r_0 = 30$

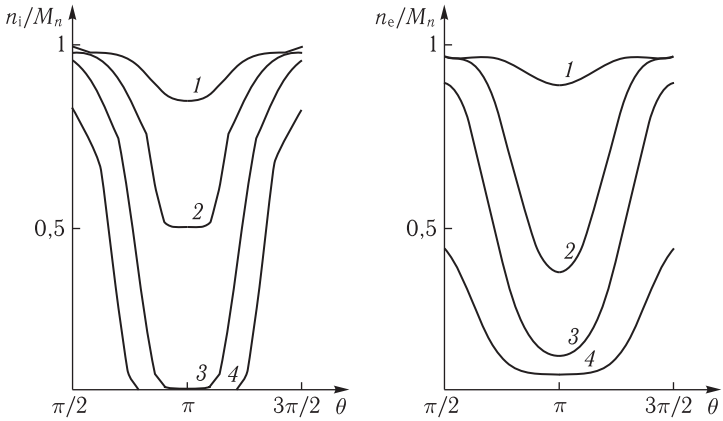


Рис. 5.8. Профили концентраций ионов и электронов в следе цилиндрического спутника ($r_0 = 30$; $\varphi_0 = -6$; $v_0 = 5{,}8$; $T_e/T_i = 1{,}6$; $t/M_t = 2$): *1* — $r/r_D = 11$; *2* — 8,6; *3* — 5,7; *4* — 2,9

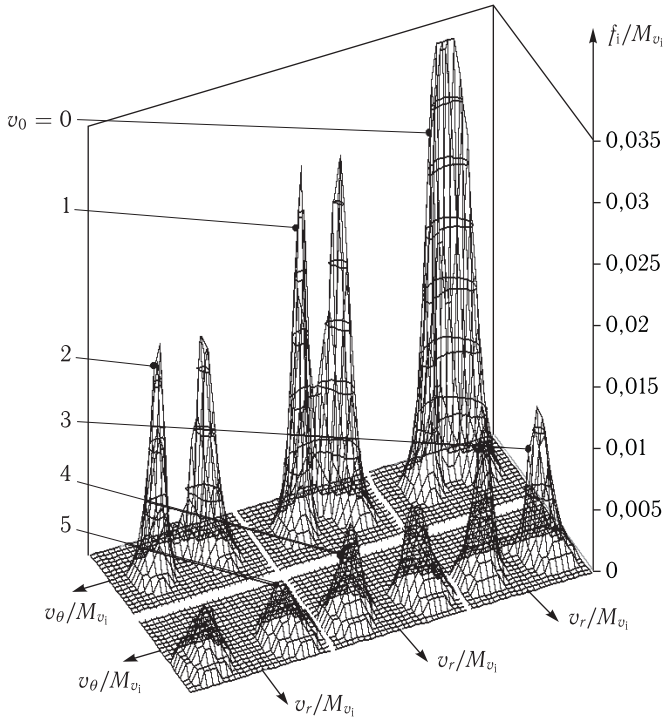


Рис. 5.9. ФРИ при различных значениях v_0 в теневой области за цилиндром ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $r = 3{,}6r_D$; $\theta = \pi$)

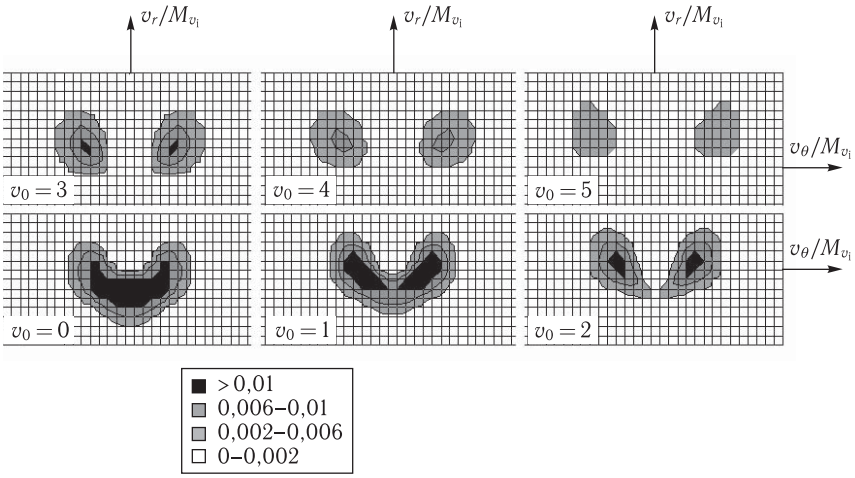


Рис. 5.10. Изолинии ФРИ при различных значениях v_0 в теневой области за цилиндром ($r_0 = 3$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $r = 3{,}6r_D$; $\theta = \pi$)

место подковообразный вырез, который с ростом скорости углубляется и, начиная с $v_0 = 2$, становится сквозным. При дальнейшем увеличении скорости потока раздвоение ФРИ усиливается и расстояние между обеими частями ФРИ увеличивается. Причина раздвоения ФРИ та же самая, что и причина появления подковообразного выреза при $v_0 = 0$. В пространство между обеими частями ФРИ должны были попасть частицы, траектории которых пересекли идеальную каталитическую поверхность цилиндра. Эти частицы, каснувшись стенки, отдали свой заряд и тем самым внесли вклад в интегральный ток на цилиндр из окружающей плазмы. Уменьшение наполнения ФРИ с ростом v_0 вызвано снижением концентрации ионов с ростом скорости цилиндра в теневой части тела, а увеличение расстояния между центрами тяжести обеих частей ФРИ связано с тем, что азимутальная составляющая скоростей каждого из потоков плазмы, огибающих цилиндр с одного и другого бока, увеличивается в теневой части с ростом направленной скорости плазмы.

Исследована также зависимость ФРИ от радиуса цилиндра в неподвижной и движущейся бесстолкновительной плазме. ФРИ в покоящейся плазме в непосредственной близости от стенки цилиндра имеет характерный подковообразный вид, отмеченный в более ранних работах [18]. Подковообразный вырез объясняется отсутствием ионов, которые при относительно небольших азимутальных скоростях имеют положительные радиальные скорости, т. е. движутся от стенки цилиндра. Левый и правый края подковы, уходящие в область положительных радиальных скоростей (см. например, рис. 5.11, $r_0 = 3$), формируются ионами, которые движутся по направлениям, близким к касательной к поверхности цилиндра, т. е. имеют относительно большие азимутальные скорости. Однако с ростом радиуса цилиндра при прочих равных условиях положительная радиальная составляющая скорости таких частиц будет уменьшаться.

Данный эффект нашел свое отражение в проведенных вычислительных экспериментах. Соответствующий график представлен на рис. 5.11. Из рисунка следует, что наполнение краев подковы с ростом радиуса цилиндра уменьшается и ФРИ постепенно теряет свою подковообразную форму. При $r_0 \geq 15$ ФРИ полностью теряет характерные подковообразные края и смещается в область отрицательных радиальных скоростей. Кроме того, с ростом параметра r_0 уменьшается наполнение купола ФРИ в непосредственной близости от стенки, связанное с уменьшением концентрации ионов. Это объясняется тем, что с ростом радиуса цилиндра растет площадь его поглощающей поверхности.

На рис. 5.12 представлена зависимость ФРИ от параметра r_0 для случая движущейся плазмы в области следа. В целом указанные выше особенности повторяются:

— с ростом r_0 ФРИ сдвигается в сторону отрицательных радиальных скоростей;

— с ростом радиуса цилиндра уменьшается наполнение ФРИ.

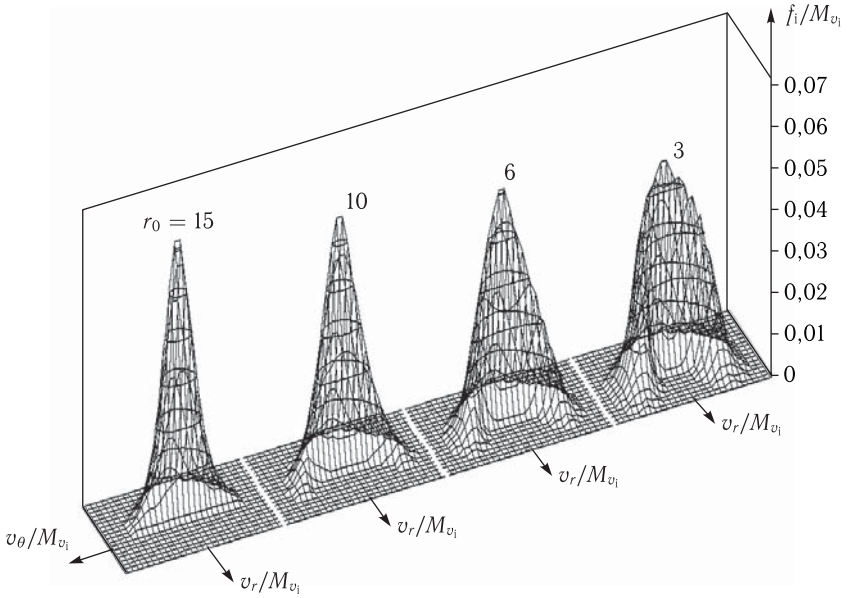


Рис. 5.11. Зависимость ФРИ от r_0 при $v_0 = 0$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $r = 0{,}6r_D$; $\theta = \pi$

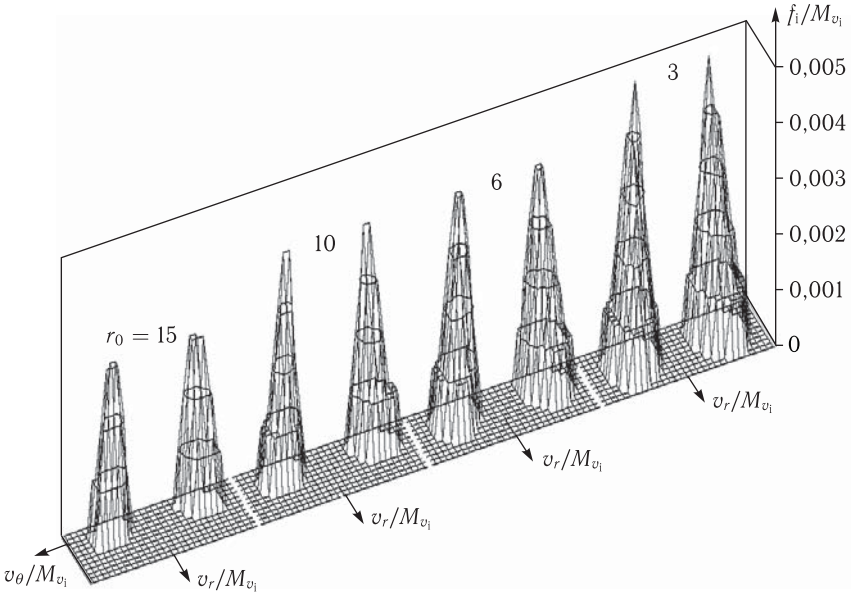


Рис. 5.12. Зависимость ФРИ от r_0 при $v_0 = 5$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $r = 0{,}6r_D$; $\theta = \pi$

Отличие заключается в том, что при этом имеет место не подковообразный, а сквозной вырез ФРИ, характерный для теневой области цилиндра в случае преобладающего фактора направленной скорости плазмы.

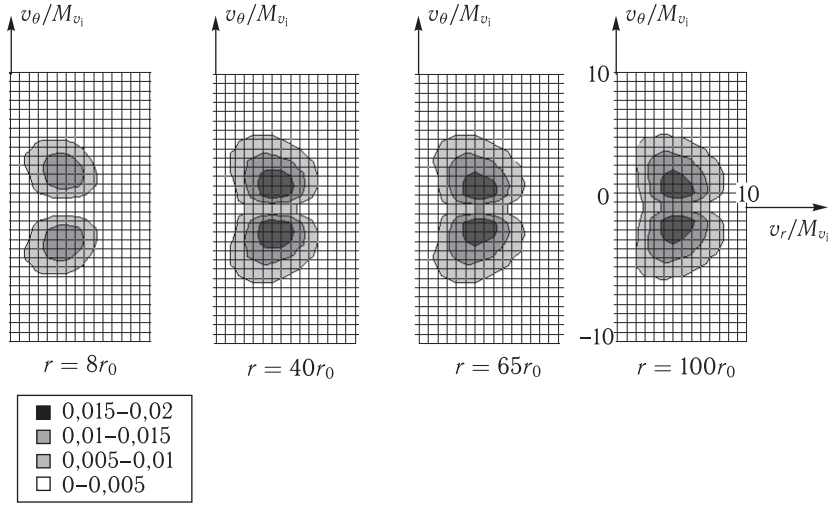


Рис. 5.13. Изолинии ФРИ при различных значениях радиальной координаты r в области следа за цилиндром ($v_0 = 5$; $r_0 = 0,1$; $\varphi_0 = -6$; $\varepsilon = 1$; $B_0 = 0$; $\theta = \pi$)

Исследование области дальнего следа спутника трудно осуществимо, так как след имеет относительно большую длину и заведомо уходит за пределы расчетной области. Однако проведение вычислительных экспериментов с цилиндром малого размера позволяет провести расчет до полного установления в пределах расчетной области следа за цилиндром. На рис. 5.13 представлена ФРИ о области следа для цилиндра радиусом $r_0 = 0{,}1$. При этом расстояние от оси симметрии цилиндра до исследуемых точек выражено в радиусах самого цилиндра. Специфическое для области следа разделение ФРИ на два купола наблюдается вплоть до расстояний, в десятки раз превышающих радиус цилиндра. Начиная с расстояния от оси цилиндра, равного $40r_0$, между куполами возникает перемычка, наполнение которой по мере дальнейшего удаления от стенки цилиндра увеличивается. При этом купола постепенно сближаются и ФРИ становится единой. Однако, небольшой несквозной вырез ФРИ наблюдается на расстояниях, в сто раз превышающих радиус самого цилиндра.

Следующая серия расчетов относится к исследованию структуры возмущенной зоны при наличии эмиссии электронов и инжекции отрицательных ионов с поверхности тела в окружающее пространство. Для упрощения расчетов предполагалось, что скорость испускаемых частиц много больше скорости спутника, поэтому скоростью спутника

пренебрегалось ($v_\infty = 0$). В [20] рассмотрены вопросы взаимодействия пучка с окружающей разреженной плазмой в упрощенной модельной постановке (рис. 5.14). Пучок со скоростью $\mathbf{v}$ распространяется в плазменном фоне параллельно внешнему магнитному полю $\mathbf{B}$. Анализ взаимодействия пучок–плазма проводился на основании системы уравнений Власова–Максвелла (гл. 1) в цилиндрической системе координат. Метод решения аналогичен методу гл. 2. В результате проведенных расчетов показано, что инжекция отрицательно заряженных частиц приводит к образованию отрицательного пространственного заряда. Начиная с некоторого предельного тока инжектора образуется виртуальный катод, который с ростом плотности пучка все ближе приближается к плотности инжекции. Поступающие с поверхности тела новые порции частиц начинают отражаться от области отрицательного потенциала, что в конечном итоге приводит к осцилляционным процессам. Уменьшая инжектируемый ток, можно перейти от режима осцилляций к режиму с полным прохождением тока. На рис. 5.15 приведена

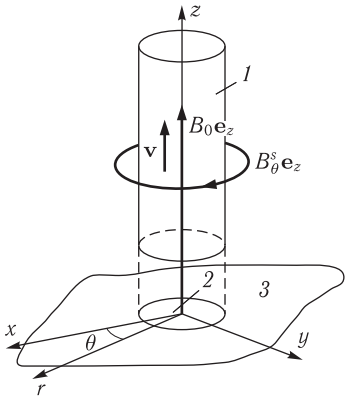


Рис. 5.14. Конфигурация пучково-плазменной системы: *1* — пучково-плазменный столб, *2* — испускающий частицы электрод, *3* — диэлектрическая поверхность

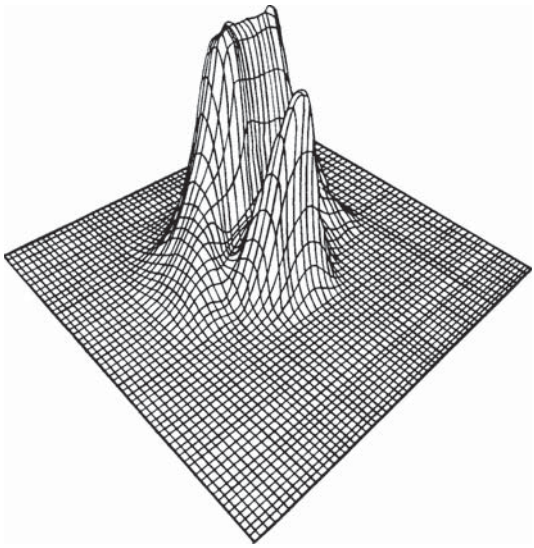


Рис. 5.15. ФРЭ при $j_э < j_{экр}$ ($\varphi_0 = 10$; $r_0 = 7$; $\varepsilon = 1$; $j_э = 5 \cdot 10^{-2}$)

функция распределения электронов на оси симметрии системы пучок–плазма, если плотность инжектируемого пучка меньше ($j_{\text{е эм}} < j_{\text{пр}}$) критической.

Вычислительный эксперимент позволяет отдельно получить функции распределения электронов плазмы и инжектируемого пучка. При $j_{\text{е эм}} > j_{\text{пр}}$ вследствие появления виртуального катода и отражения от него электронов пучка функция распределения частиц пучка существенно отличается от начальной. При $j_{\text{е}} < j_{\text{пр}}$ функция распределения электронов пучка при его полном прохождении деформируется слабо. В результате суммарная ФР имеет два максимума — один в низкоэнергетической области (функция распределения электронов фона), второй — при $V_z \approx v_0$, (v_0 — начальная скорость эмитированного пучка). На основании полученных функций распределения вычисляются все процессы переноса. Более подробно эти вопросы исследованы в работе [20], где имеется достаточно подробный обзор литературы по этому вопросу.

Глава 6

О ВОЗМОЖНОСТИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОМ ТЯГИ ПЛАЗМЕННОГО ДВИЖИТЕЛЯ (ПД)

Освоение космоса показало, что межпланетные полеты и решение практических задач по исследованию и использованию космического пространства лучше осуществлять с помощью ядерных ракетных или электрических ракетных двигателей, основанных на различных типах ускорителей заряженных частиц и плазмы. Электропитание таких двигателей может осуществляться от ядерных энергетических установок, солнечных батарей и других преобразователей энергии. Химические ракетные двигатели имеют вместе с топливом большой вес, работают короткое время — несколько минут — и поэтому не эффективны для дальних космических полетов. Малый вес электрических реактивных двигателей вместе с рабочим телом позволяет взять на космический аппарат больше полезного груза вместо топлива для обычных ракетных двигателей, создать более легкие экспедиционные комплексы, что существенно уменьшит стоимость экспедиций на другие планеты и увеличит их продолжительность.

Среди всего разнообразия электрических ракетных двигателей (их обзор содержится в [40]) представляется целесообразным использовать плазменные двигатели с магнитным полем, которые существенно расширяют функциональные свойства и особенности работы по сравнению с имеющимися двигателями других типов. При этом актуальной задачей является управление направлением плазменного потока, истекающего из ПД. Возможны чисто механические методы управления, когда поворачивается весь двигатель вместе с соплом, однако такие способы управления вектором тяги оказываются достаточно громоздкими и энергоемкими. Более привлекательными являются электромагнитные методы управления, например, с помощью поперечного магнитного поля. Возникающие в этом случае электромагнитные силы отклоняют поток заряженных частиц пернпендикулярно вектору скорости и вектору индукции магнитного поля.

Экспериментально такие опыты были проведены в лаборатории Ю. В. Кубарева в 1963 г. В результате было разработано устройство управления полетом ракеты с плазменным двигателем, отличающееся тем, что для изменения направления полета ракеты путем поворота

струи плазмы в нем установлена магнитная система из 3–4 электромагнитов, симметрично расположенных на кольцевой раме, укрепленной на сопле двигателя. Перемещение магнитов в сторону потока, либо изменение величины или направления магнитных полей вызывает отклонение струи плазмы. Изменение вектора тяги осуществляется без взаимодействия потока плазмы на выходе из двигателя с элементами ракеты. Так как точка приложения силы вращения находится за двигателем, то поворот будет более эффективным. Система управления полетом может сбрасываться.

На рис. 6.1 приведена одна из фотографий по отклонению плазменного потока, истекающего из торцевого холловского двигателя, заимствованная из [40]. Если магнитное поле привести в осевое вращение, то плазменная струя будет описывать коническую поверхность, заполняя тем самым все пространство рабочей камеры.

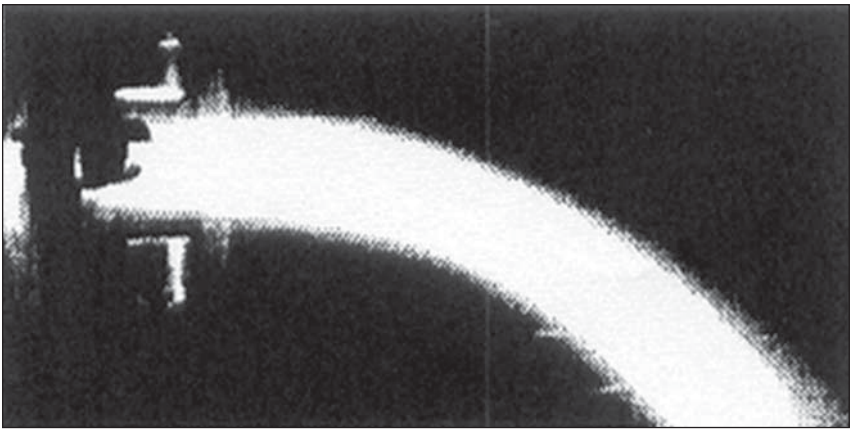


Рис. 6.1. Отклонение потока плазмы поперечным магнитным полем

Работ по математическому моделированию описанного выше процесса управления вектором тяги ПД в литературе найти не удалось. Математические и численные модели, описанные в главах 1 и 2, позволяют решить эту задачу. Чтобы не увеличивать размерность задачи, предлагается рассматривать источник плазмы щелевого типа, направив ось Z вдоль щелевого сопла, а ось X — вдоль вектора скорости потока плазмы. Поперечное магнитное поле также предполагается направить вдоль оси Z. В этом случае электромагнитные силы будут действовать по оси Y. Задача в данном случае оказывается четырехмерной нестационарной в фазовом пространстве. Алгоритм ее решения полностью соответствует гл. 2.

Оценочные данные по управлению вектором тяги можно получить из анализа результатов математического моделирования цилиндрического электрода в поперечном потоке плазмы при наличии продольного

магнитного поля. Возникающий за телом след отклоняется магнитным полем подобно потоку, истекающему из щелевого сопла.

На рисунках 3.35–3.39 приведена серия положений следа (траектории заряженных частиц) в молекулярном режиме при различных значениях индукции осевого магнитного поля B_0. Отчетливо наблюдается увеличение угла отклонения следа с ростом B_0 под действием силы Лоренца. Значения углов отклонения, полученных из рисунках 3.35–3.39 сведены в табл. 6.1 (B_0 записано в безразмерном виде с использованием масштабов (1.43)).

Таблица 6.1

B_0	0	0,1	0,3	0,4	0,5
α, град.	0	15	50	75	90

Данные, приведенные в табл. 6.1, получены при следующих параметрах задачи: $r_0 = 3$, $\varphi_0 = -6$, $v_0 = 5$, $\varepsilon = 1$.

Часть II

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКАМИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Введение к части второй монографии. В настоящее время механика и электродинамика пристеночной плотной плазмы детально изучена лишь в простейших случаях. Первые серьезные работы в этой области появились в начале семидесятых годов прошлого столетия в связи с бурным развитием авиационно-космической техники. Рассмотрение ограничивалось случаем слабоионизованной плазмы, поскольку такие условия создавались вблизи поверхности гиперзвуковых летательных аппаратов. Такое ограничение позволяло разделить газодинамические и электродинамические характеристики течения. Поля скоростей, концентраций и температур нейтрального газа определялись независимо от состояния ионизованных компонент и рассматривались как фон для решения электродинамической части задачи. В конечном итоге рассчитывались поля концентраций, температур и скоростей заряженных частиц, а также самосогласованное электрическое поле в пристеночной плазме.

Процессы переноса в пристеночной плазме определяются влиянием конвекции, диффузии и подвижности, которые в свою очередь зависят от физических процессов в исследуемой области, геометрического фактора, наличия внешних магнитных полей, потенциалов, внесенных в плазму тел, направленных движений и др. Многие из перечисленных факторов можно охарактеризовать с помощью безразмерных комплексов, которые образуются естественным путем в процессе приведения к безразмерному виду системы дифференциальных уравнений, составляющих математическую модель задачи. Например, влияние направленной скорости потока нейтральной компоненты можно охарактеризовать числом Маха M, равным отношению направленной скорости к скорости звука. Конвективное движение заряженных компонент определяется электрическим числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_э$, равным отношению конвективных членов к диффузионным. Оно может быть выражено произведением ионного числа Шмидта на число Рейнольдса потока ($\mathrm{Re\,Sc_i}$). Если электрическое число Рейнольдса велико, то влияние конвекции существенно. При $\mathrm{Re\,Sc_i} \gg 1$ используют приближение пограничного слоя. Случай $\mathrm{Re\,Sc_i} \ll 1$ соответствует покоящейся плазме.

В обоих предельных случаях ($\mathrm{Re\,Sc_i} \gg 1$ и $\mathrm{Re\,Sc_i} \ll 1$) плазма может рассматриваться как несжимаемая с постоянными свойствами и сжимаемая с переменными свойствами. Влияние сжимаемости определяется, главным образом, параметром $\varphi_0^* = \varphi_0(T_0/T_\mathrm{p})^n$, $0 < n \leq 1$, где φ_0 — безразмерный потенциал тела, T_0 и T_p — характерная температура задачи и температура поверхности тела.

Независимо от того, сжимаемая или несжимаемая плазма, она может иметь два предельных термодинамических состояния, определяемых числом Дамкелера $\mathrm{Dm_{i,e}}$. Число $\mathrm{Dm_{i,e}}$ характеризует степень термодинамической и химической неравновесности. Если $\mathrm{Dm_{i,e}} \ll 1$, то состояние считается химически замороженным, а в случае $\mathrm{Dm_{i,e}} \gg 1$ — равновесным. При термодинамическом равновесии в каждом элементарном объеме плазмы над всеми другими процессами преобладает обмен энергии путем столкновений между электронами и тяжелыми

частицами, поэтому $T_e = T_i$. В этом случае уравнение энергии для электронов оказывается лишним. Если же плазма находится в термодинамически неравновесном состоянии, то температура электронов T_e определяется из уравнения энергии для электронов, учитывающего влияние электронной теплопроводности и электрического поля, а также обмен энергией путем столкновений между электронами и тяжелыми частицами. В предельном случае замороженной плазмы, когда влиянием обмена энергией путем столкновений между электронами и тяжелыми частицами можно пренебречь по сравнению с другими процессами, условие $T_e = T_i$ все же не достигается, даже если $T_i = \mathrm{const}$. Поэтому уравнение энергии для электронов необходимо решать. Однако в ряде работ [31] решение проводилось в предположении, что $T_e \neq T_i$, но $T_e/T_i = \varepsilon = \mathrm{const}$, что опять позволяет не учитывать уравнение энергии для электронов. В [31] такие задачи предлагается отличать от задач с термодинамически замороженными состояниями, называя их задачами с постоянным отношением $\varepsilon = T_i/T_e$.

В ряде работ (см. обзор в [41]) используются асимптотические методы решения в предположении, что слой объемного заряда оказывается бесконечно тонким и поэтому процессом подвижности можно пренебречь в сравнение с конвекцией и диффузией. В этом предельном случае удается получить простые расчетные формулы для плотностей тока ионов и электронов на обтекаемое плазмой тело. Однако применимость полученных формул на практике представляется ограниченной.

Для всех перечисленных выше случаев возможны два варианта: внешнее магнитное поле отсутствует или внешнее магнитное поле существенно. В последнем случае по мере увеличения индукции магнитного поля оно сначала начинает влиять на электроны как на частицы с относительно малой массой. Влияние на ионы начинает проявляться при значительно больших полях. Воздействие магнитного поля на пристеночную плазму удобно учитывать с помощью параметра Холла, равного произведению коэффициента подвижности на индукцию магнитного поля $\beta_{i,e} = b_{i,e}B$ ($b_i = e/(\nu_{ia}\mu_{ia}) = eD_i/(kT_i)$; $b_e = e/(\nu_{ea}\mu_{ea}) = eD_e/(kT_e)$; ν — частота столкновений, μ — приведенная масса; D — коэффициент диффузии). Значительное магнитное поле может вызвать дрейфовое движение заряженных частиц со скоростью $\mathbf{v}_D = [\mathbf{E}, \mathbf{B}]/B^2$. Известно, что ионы и электроны в скрещенных электрических и магнитных полях дрейфуют в одну сторону. Проводимость плазмы в магнитном поле оказывается анизотропной величиной (вводится тензор проводимости). Коэффициент диффузии также становится анизотропным. Однако значительного разделения зарядов под действием магнитного поля не должно происходить, поскольку возникающие собственные электрические поля препятствуют этому [42].

Из приведенного обзора следует, что задача обтекания потоками столкновительной плазмы отличается большим количеством предельных случаев, в которых математическая модель упрощается. Однако

на практике часто приходится иметь дело с устройствами, не подчиняющимися упрощенным моделям.

Наиболее детально изучен предельный случай слабого влияния конвекции, если плазма имеет постоянные свойства и замороженные химические реакции, а магнитное поле отсутствует. Первые работы в этой области были выполнены Бойдом (1951 г.) [43] и В. М. Захаровой (1960 г.) [44] применительно к телам цилиндрической и сферической геометрий. Су и Лем (1964 г.) [45] разработали более совершенную модель для сферических тел в случае тонкого слоя объемного заряда. В предельном случае $|\varphi_{\mathrm{p}}|(r_{\mathrm{D}}/r_{\mathrm{p}})^2 \to 0$ точные уравнения слоя объемного заряда для сферических и эллиптических тел численно решены Коэн (1964–1970 гг.) [46, 47]. Работы Су и Лема, а также Коэн послужили основой для многих дальнейших исследований в данном направлении (см. обзор в [31]). Особо следует отметить работу Баума и Чепкиса (1970 г.) [48], которые получили точное численное решение для сферических тел в широком диапазоне изменения их потенциала и величин комплекса $|\varphi_{\mathrm{p}}|(r_{\mathrm{D}}/r_{\mathrm{p}})^2$. Одной из первых работ в плазме с постоянными свойствами при наличии химических реакций является работа Коэн и Швейцера (1968 г.) [49]. Переменные свойства плазмы учитывались в работах [48, 50, 51].

Наиболее значительное число работ по исследованию плотной пристеночной плазмы касается случая сильного влияния конвекции ($\mathrm{Re}\,\mathrm{Sc}_{\mathrm{i}} \gg 1$), что связано с исследованием плазменных струй, истекающих из двигателей малой тяги, а также с исследованием пристеночных слоев вблизи гиперзвуковых летательных аппаратов. Самую первую работу в этой области выполнил Лэм (1964 г.) [52], который разработал общую теорию обтекания произвольного твердого тела с каталитическими поверхностями несжимаемым слабо ионизованным газом. Рассмотрение было ограничено случаем тонкого слоя объемного заряда ($|\varphi_{\mathrm{p}}|(r_{\mathrm{D}}/r_{\mathrm{p}})^2 \ll 1$). В дальнейшем Лэм (1965 г.) [51] и Су (1965 г.) [54] распространили результаты работы [52] на сжимаемые течения. В 1971 г. Стал и Су получили подробные вольтамперные характеристики пристеночного электрода с сильно отрицательным потенциалом в одномерной постановке [55]. В дальнейшем Чан [56], Бурке и Лэм, а также Бурке [57] выполнили обширные исследования пограничных слоев с учетом неравновесной температуры электронов и химических реакций. В [57] были получены экспериментальные данные применительно к пограничному слою на плоской пластине. Наиболее полные теоретические исследования многомерных слоев объемного заряда вблизи обтекаемой плазмой пластины исследовал Руссо (1972 г.) [58]. Для практики зондовых измерений в потоке плазмы важное значение сыграла работа Чана (1964 г.) [59], в которой получено выражение для безразмерной плотности ионного тока насыщения для различных геометрий зондов, если выполняется условие

$$\left(\frac{\delta}{r_{\mathrm{D}}}\right)^2 \geq 10^4, \quad \varepsilon = \frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{i}}} = 1,$$

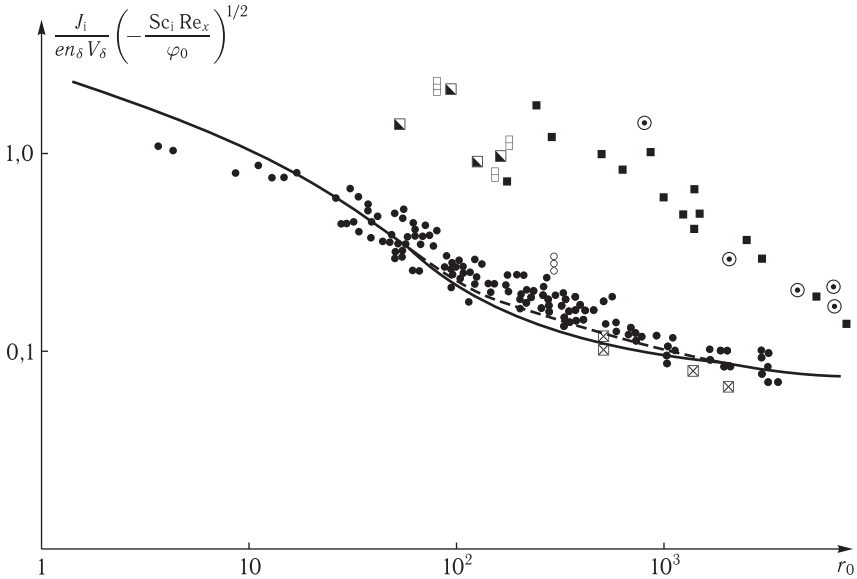


Рис. 7.1. Зависимость плотности тока на стеночный зонд от отношения $r_0 = r_\mathrm{p}/r_\mathrm{D}$: □ — данные Бойера и Туряна [60]; ○ — данные Бурке [57]; ◪ — данные Лидермана и Эвидора [61]; ■ — данные Шерфмена и Бредфелдта [62]; ● — данные Чана, Телбота и Туряна [31]; ⊙ — данные В.А. Горелова [18]; ⊠ — данные В.А. Котельникова [18]; – – – — численное решение Руссо [58]; —— — численное решение В. А. Котельникова с соавторами [1]

где δ — толщина пограничного слоя, r_D — радиус Дебая. Приведенное неравенство означает, что слой объемного заряда тонкий, и можно пренебречь его влиянием на ионный ток насыщения. В дальнейшем ограничения, связанные с этим неравенством, были сняты благодаря работам В. А. Котельникова [18].

Исследованию пристеночных слоев в потоке плазмы уделялось особое внимание, поскольку такие слои возникают вблизи гиперзвуковых летательных аппаратов. Исследование таких слоев необходимо конструкторам авиационно-космической техники, так как в них формируются потоки тепла, импульса, массы, заряда из окружающей среды на элементы конструкции ГЛА. На рис. 7.1 представлены результаты сравнения теоретических исследований плотности ионного тока на плоский пристеночный электрод Руссо [58] и более поздних исследований В. А. Котельникова [1, 18] с экспериментами Бойера и Туряна (1972 г.) [60], Бурке (1968 г.) [57], Лидермана и Эвидора (1971 г.) [61], Шермана и Бредфельда (1970 г.) [62], В. А. Котельникова (1977 г.) [1, 18], В. А. Горелова (1978 г.) [18].

Как следует из рис. 7.1, численный и физический эксперименты находятся в удовлетворительном согласии. Серия точек, находящихся вы-

ше их основной массы, относится к условиям, когда плазма имела достаточно низкое давление и режим не являлся континуальным ($Kn \approx 1$).

Параллельно с американскими исследованиями аналогичные работы проводились в Советском Союзе в ряде институтов РАН, в ведомственных институтах и технических университетах авиационно-космического профиля. На сегодняшний день расчет гиперзвукового обтекания — это достаточно хорошо исследованная задача. Известны расчеты достаточно большого количества вариантов, включая составление соответствующих атласов [63–67]. Есть примеры расчета летательных аппаратов, по конфигурации приближающихся к реальным конструкциям [68, 69]. Однако в большинстве работ использованы приближенные или асимптотические методы, в которых нет анализа совместного влияния конвекции, диффузии и подвижности на процессы переноса вблизи обтекаемых плазмой тел. Не исследовано влияние магнитного поля на поля скоростей, концентраций, потенциалов вблизи обтекаемых плазмой тел. Недостаточно изучены течения в теневой области; параметры пограничного слоя с учетом ударно-волнового воздействия; тепловые потоки на поверхность тела и т. д. Ниже приведем лишь обзор работ авторов монографии в этой области.

Работы начались в семидесятых годах прошлого столетия. В 1963–1964 гг. впервые в мировой практике были проведены систематические зондовые эксперименты в плазменных струях, истекающих из торцевых и холловских плазменных двигателей и сильноточных магнитоплазменных двигателей на стендах кафедры физики МАИ [70]. В 1976–1977 гг. аналогичные эксперименты были проведены уже не в стендовых, а в летных условиях, когда двигатель работал непосредственно в ионосферной плазме (программа «Куст») [18]. Позднее плоские и выносные зонды широко применялись на борту гиперзвуковых летательных аппаратов различных классов с целью измерения радиофизических параметров в пристеночных пограничных слоях [1].

Исследования научной школы МАИ не ограничивались только экспериментальными работами. Был разработан мощный вычислительный алгоритм с использованием идеологии метода крупных частиц, позволяющий эффективно решать практически любые задачи пристеночной плотной плазмы, не ограничиваясь предельными случаями. При этом потеряли смысл такие термины, как «тонкий и толстый слой объемного заряда», «слабое и сильное влияние конвекции», «постоянные и переменные свойства плазмы», «замороженные химические реакции и равновесная плазма», «слабое и сильное магнитное поле» и т. д. Решение осуществлялось практически при любых параметрах задачи на ЭВМ среднего класса. Первые теоретические работы были опубликованы в 1979 г. [71]. Идеология численного метода решения нестационарных задач пристеночной плазмы подробно изложена в монографиях [1, 6, 18, 19].

Заключение к части первой монографии. Как отмечалось в предисловии, вопросы взаимодействия тел с потоками бесстолкновительной плазмы актуальны для космической техники.

В книге впервые систематически исследовано обтекание тел цилиндрической геометрии поперечным потоком и тел плоской геометрии продольным потоком разряженной плазмы. Впервые детально исследованы функции распределения заряженных частиц в возмущенной зоне, в частности, показано, что в теневой области за цилиндром функция распределения ионов имеет двугорбый характер. Рассчитаны интегральные характеристики, такие как профили концентраций заряженных частиц, потоки ионов и электронов, напряженность и потенциал самосогласованных электрических полей. Помимо радиальной составляющей напряженности поля вблизи цилиндра возникает также и азимутальная составляющая. Детально исследована структура ближнего следа за спутником цилиндрической геометрии. Впервые рассмотрены функции распределения вблизи цилиндра при наличии осевого магнитного поля. Они сохраняют в следе свою двугорбую структуру, но эти горбы под действием сил Лоренца становятся не симметричными и имеют разную высоту. Сам след поворачивается, причем угол поворота растет с ростом индукции магнитного поля. Сильно искажаются в магнитном поле интегральные характеристики. Например, кривая зависимости интегрального тока ионов на цилиндр от магнитного поля оказывается существенно нелинейной. Имеют место как участки с положительной производной, так и с отрицательной. Плотность тока по обводу цилиндра в магнитном поле также деформируются.

Авторы надеются, что результаты, полученные в части первой монографии, найдут технические приложения. Одно из таких приложений рассмотрено в части третьей. Работы по исследованию взаимодействия тел с потоками разреженной плазмы продолжаются. Пока недостаточно исследована структура следа за спутником сферической геометрии, а также других более сложных геометрий. Нет законченных работ по математическому моделированию электромагнитного управления вектором тяги плазменных движителей. Недостаточно развиты исследования по расчету самих плазменных движителей и многое другое.

Глава 7

ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКАМИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

7.1. Слабоионизованная ламинарная плазма без магнитного поля

7.1.1. Система уравнений. Рассматриваемые модели максимально обобщены, на сколько это позволяет современный уровень развития методов вычислительной физики и ЭВМ, а также возможность решения поставленных задач исследования с минимальными затратами вычислительных ресурсов. Поэтому для исследования были выбраны физические модели, напоминающие бесстолкновительный случай.

1. Бесконечно длинный цилиндр радиуса r_p и потенциала φ_p, помещенный в поперечный поток слабоионизованной плазмы. Если внешнее магнитное поле имеется, то его индукция направлена параллельно оси цилиндра (см. рис. 1.1). Химические реакции в пристеночной области заморожены. Задача является достаточно общей, поскольку в ней учитываются все три процесса переноса — конвекция, диффузия и подвижность. В вычислительном плане задача оказывается двумерной нестационарной. Она позволяет выявить основные нелинейные эффекты в структуре возмущенной зоны, возникающей вблизи обтекаемых плазмой тел и обнаружить новые, не известные ранее.

2. Плоский пристеночный электрод ленточного типа шириной r_p и потенциала φ_p (см. рис. 1.2), расположенный на диэлектрической поверхности, обтекаемой слабоионизованной плазмой. Эта задача также оказывается двумерной нестационарной, что ведет к экономии необходимых вычислительных ресурсов, и в то же время достаточно общей для выяснения особенностей процессов переноса в пристеночной плазме. Ее решение позволяет уточнить теорию плоского пристеночного зонда, предназначенного для установки на боковой поверхности ГЛА. Кроме того, такой электрод можно рассматривать как элемент конструкции самого летательного аппарата.

При выборе физических моделей решались также и трехмерные нестационарные задачи, однако, никаких новых физических эффектов они не выявили, а расход необходимых ресурсов ЭВМ значительно возрос.

Математические модели задачи включают в себя:

— систему уравнений Эйлера (или Навье–Стокса) для нейтральной компоненты плазмы;

— уравнения неразрывности для заряженных компонент;

— уравнения движения для заряженных компонент;

— систему уравнений Максвелла для самосогласованных электромагнитных полей (в простейшем случае эта система сводилась к уравнению Пуассона).

Уравнение энергии для ионов не использовалось, так как ввиду слабой степени ионизации $T_{\mathrm{i}} = T_{\mathrm{a}}$. Уравнение энергии для электронов заменялось соотношением $\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}} = \mathrm{const}$, причем величина ε варьировалась.

В представленной ниже математической модели для тела цилиндрической формы учтены также следующие допущения:

— химические реакции заморожены;

— вязкостью пренебрегается;

— собственное магнитное поле мало:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{\mathrm{i}}\mathbf{u}_{\mathrm{i}}) = 0;\\
\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{\mathrm{e}}\mathbf{u}_{\mathrm{e}}) = 0;\\
m_{\mathrm{i}}\frac{d\mathbf{u}_{\mathrm{i}}}{dt} = -\frac{kT_{\mathrm{i}}}{n_{\mathrm{i}}}\nabla n_{\mathrm{i}} + Ze\mathbf{E} - \mu_{\mathrm{ia}}\nu_{\mathrm{ia}}(\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{a}});\\
m_{\mathrm{e}}\frac{d\mathbf{u}_{\mathrm{e}}}{dt} = -\frac{kT_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}}\nabla n_{\mathrm{e}} - e\mathbf{E} - \mu_{\mathrm{ea}}\nu_{\mathrm{ea}}(\mathbf{u}_{\mathrm{e}} - \mathbf{u}_{\mathrm{a}});\\
\Delta\varphi = \frac{e(n_{\mathrm{e}} - Zn_{\mathrm{i}})}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi;\\
\frac{\partial \rho_{\mathrm{a}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = 0;\\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = -\nabla P_{\mathrm{a}};\\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}}) = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}}P_{\mathrm{a}});\\
P_{\mathrm{a}} = \left(E_{\mathrm{a}} - \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^2}{2}\right)\rho_{\mathrm{a}}(\gamma - 1); \quad E_{\mathrm{a}} = C_v T_{\mathrm{a}} + \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^2}{2}.
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

В приведенной системе уравнений n, $\mathbf{u}$, T, ρ, P, μ, ν, φ, $\mathbf{E}$ — концентрация, скорость, температура, плотность, давление, приведенная масса, частота столкновений, потенциал и напряженность электрического поля соответственно. Остальные обозначения общепринятые. Индексы i, e, a относятся к ионам, электронам и нейтральным частицам.

Если принять допущение о малости $d\mathbf{u}_{\mathrm{i,e}}/dt$, что равнозначно допущению о малости времени между столкновениями по сравнению со

временем изменения направленной скорости, то систему (7.1) можно преобразовать к виду [1]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}[n_{\mathrm{i}}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \mathbf{a}_{\mathrm{i}})] = 0; \\
\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \operatorname{div}[n_{\mathrm{e}}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \mathbf{a}_{\mathrm{e}})] = 0; \\
\Delta\varphi = \frac{e(n_{\mathrm{e}} - Zn_{\mathrm{i}})}{\varepsilon_0}; \\
\frac{\partial \rho_{\mathrm{a}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = 0; \\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = -\nabla P_{\mathrm{a}};, \\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}}) = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}}P_{\mathrm{a}}); \\
\mathbf{a}_{\mathrm{i}} = -D_{\mathrm{i}}\left(\frac{\nabla n_{\mathrm{i}}}{n_{\mathrm{i}}} + \frac{Z_e}{kT_{\mathrm{i}}}\nabla\varphi\right); \quad \mathbf{a}_{\mathrm{e}} = -D_{\mathrm{e}}\left(\frac{\nabla n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}} - \frac{e}{kT_{\mathrm{e}}}\nabla\varphi\right); \\
D_{\mathrm{i}} = \frac{kT_{\mathrm{i}}}{\mu_{\mathrm{ia}}\nu_{\mathrm{ia}}}, \quad D_{\mathrm{e}} = \frac{kT_{\mathrm{e}}}{\mu_{\mathrm{ea}}\nu_{\mathrm{ea}}}.
\end{gathered}
\tag{7.2}
$$

Математическая модель задачи кроме системы (7.2) включает также систему начальных и граничных условий. На границе втекания задавались параметры плазмы, на границе вытекания ставились условия свободного вытекания. Потенциал на удаленных границах полагался равным нулю, на цилиндре он считался постоянным. На теле ставится условие непротекания для нейтральных частиц и условие абсолютной каталитичности для заряженных компонент плазмы. Более подробно анализ начальных и граничных условий дан в п. 7.1.2.

Перейдем теперь к формулировке математической модели для случая плоского пристеночного электрода ленточного типа. Ширина ленты r_{p} много меньше ее длины, поэтому в математической модели лента считается бесконечно длинной. Электродинамическая часть задач включает уравнения неразрывности для ионов и электронов и уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля. Суммарная скорость заряженных частиц складывается из трех компонент: конвективной, диффузионной и составляющей, связанной с электрическим полем,

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \frac{\partial(n_{\mathrm{i}}u_{\mathrm{i}x})}{\partial x} + \frac{\partial(n_{\mathrm{i}}u_{\mathrm{i}y})}{\partial y} = 0; \\
\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \frac{\partial(n_{\mathrm{e}}u_{\mathrm{e}x})}{\partial x} + \frac{\partial(n_{\mathrm{e}}u_{\mathrm{e}y})}{\partial y} = 0; \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{e(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{i}})}{\varepsilon_0}; \\
\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_D + \mathbf{u}_E,
\end{gathered}
\tag{7.3}
$$

где $u_\infty = u_\infty(y)$ — скорость набегающего потока в пограничном слое, $\mathbf{u}_D = (D_\alpha/n_\alpha)([\partial n_\alpha/\partial x]\mathbf{e}_x + [\partial n_\alpha/\partial y]\mathbf{e}_y)$ — диффузионная составляющая скорости, $\mathbf{u}_E = \mathrm{sign}(-q_\alpha)eD_\alpha([\partial\varphi/\partial x]\mathbf{e}_x + [\partial\varphi/\partial y]\mathbf{e}_y)/(kT_\alpha)$, $\alpha = \mathrm{i, e}$. Функция $u_\infty(y)$ получается решением уравнений пограничного слоя для нейтральной компоненты. Кроме того, сохраняются все предположения, сформулированные для системы (7.1).

7.1.2. Система начальных и граничных условий.

Начальные условия. При внесении проводящего тела в плазму за времена порядка характерного времени релаксации около тела формируется возмущенная зона, состоящая из слоя объемного заряда и прилегающей к нему квазинейтральной области. Если тело изолированно, то оно приобретает «плавающий потенциал», который, как правило, ниже потенциала пространства. В этом случае токи ионов и электронов из плазмы на тело равны. Если на теле с помощью внешней электрической цепи поддерживается постоянный потенциал, отличный от «плавающего», то возмущенная зона будет зависеть от этого потенциала, а токи электронов и ионов оказываются не равны, т. е. на тело будет идти результирующий электрический ток, равный разности ионного и электронного. Этот ток далее замыкается через внешнюю цепь и плазму. В стационарном случае ток должен быть достаточно мал, чтобы не нарушать стационарное состояние плазмы.

В качестве начального распределения концентраций ионов и электронов следует брать установившиеся распределения в возмущенной зоне, однако они заранее неизвестны. Из опыта математического моделирования задач пристеночной плазмы предложены следующие два подхода к выбору начальных условий [1]:

$$n_\mathrm{i}(\mathbf{r}, 0) = n_\mathrm{e}(\mathbf{r}, 0) = n_{\mathrm{i,e}\infty}(\mathbf{r}, 0) = \mathrm{const}\,.$$

Такой выбор заведомо ошибочен и приводит к искажению переходного процесса. Однако численные эксперименты показывают, что установившееся решение близко к истинному. Поэтому такой подход допустим, если нас не интересует переходный процесс, а только установившееся решение.

Для получения реального переходного процесса решение задачи нужно проводить в два этапа. На первом этапе задача решается с произвольными начальными распределениями концентраций. Полученные при этом установившиеся распределения $n_\mathrm{i,e}(\mathbf{r}, t_\text{уст})$ берутся за начальные распределения, на фоне которых развивается новый переходный процесс. В этом случае решение на всем этапе моделирования оказывается близким к реальному.

Начальное распределение электрического потенциала $\varphi(\mathbf{r}_\mathrm{p}, 0)$ получается для первого этапа путем решения уравнения Лапласа при следующих граничных условиях: $\varphi(\mathbf{r}, 0) = \varphi_\mathrm{p0}$, $\varphi(\mathbf{r}_\infty, 0) = 0$, где φ_p0 — потенциал тела, предшествующий его ступенчатому изменению.

На втором этапе используется начальное распределение $\varphi(\mathbf{r}, 0)$ полученное как стационарное решение задачи на первом этапе при следующих граничных условиях: $\varphi(\mathbf{r}, 0) = \varphi_{\mathrm{p}}$, $\varphi(\mathbf{r}_\infty, 0) = 0$, где φ_{p} — новый потенциал тела в результате его ступенчатого изменения.

Начальные распределения для электронных и ионных температур (если они требуются) будут анализироваться при рассмотрении конкретных примеров.

Граничные условия будут рассматриваться более подробно применительно к конкретным примерам. Ниже будут изложены лишь общие соображения.

Расчетная область вблизи заряженного тела должна превышать возмущенную зону, создаваемую телом. Поэтому на внешней границе потенциал принимается равным нулю (относительно потенциала пространства), а концентрации заряженных частиц и их температуры — значениям в невозмущенной плазме:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_\infty, t) &= 0; \\ n_{\mathrm{i,e}}(\mathbf{r}_\infty, t) &= (n_{\mathrm{i,e}})_\infty; \\ T_{\mathrm{i,e}}(\mathbf{r}_\infty, t) &= (T_{\mathrm{i,e}})_\infty. \end{aligned} \tag{7.4}$$

При задании условий на внешней границе расчетной области возможны следующие особенности.

Поскольку температура электронов может существенно превышать температуру ионов ($T_{\mathrm{e}\infty} > T_{\mathrm{i}\infty}$), а масса электронов много меньше массы ионов, то и средний пробег электронов может существенно превышать средний пробег ионов. Отсюда следует, что размер возмущенной зоны для электронов может превосходить соответствующий размер возмущенной зоны для ионов. Если в качестве $\mathbf{r}_\infty$ выбрать максимальное значение, то условие (7.4) выполняется.

Если в плазме имеется направленное движение, то геометрический размер возмущенной зоны вблизи тел оказывается зависящим от угловой координаты. В теневой области развивается «след», размеры которого могут на порядки превышать параметр $\mathbf{r}_\infty$, пригодный для неподвижной плазмы. В этих условиях приходится увеличивать размер расчетной области. Если установление решения успевает произойти раньше того момента, когда след достигает внешней границы, то расчет заканчивается. В противном случае приходится увеличивать $\mathbf{r}_\infty$, что нежелательно, поскольку приводит к росту необходимых ресурсов ЭВМ.

В некоторых случаях в процессе эволюции происходит заметное увеличение размера возмущенной зоны (например в задачах с возникновением «следа»). Необходимые ресурсы ЭВМ можно уменьшить, если на каждом временном слое отслеживать возрастание размера возмущенной зоны и в соответствии с этим увеличивать размер расчетной области $\mathbf{r}_\infty$.

Рассмотрим теперь граничные условия на поверхности тела. Для полностью каталитической и абсорбирующей поверхности тела в большинстве работ [18, 31] полагают:

$$\begin{gathered}\varphi = \varphi_{\mathrm{p}}(r_{\mathrm{p}}, t) \text{ — заданная функция времени;}\\ n_{\mathrm{i,e}}(r_{\mathrm{p}}, t) = 0;\\ n_{\mathrm{e}}\mathbf{u}_{\mathrm{e}}\left(\frac{5}{2}kT_{\mathrm{e}} - e\varphi\right)_{\mathrm{p}} = \chi_{\mathrm{e}}\nabla(T_{\mathrm{e}})_{\mathrm{p}},\end{gathered} \tag{7.5}$$

где p — индекс тела, χ — коэффициент теплопроводности. Остальные обозначения общеприняты. Как отмечено в [31], граничное условие $n_{\mathrm{i,e}}(r_{\mathrm{p}}, t) = 0$ является приемлемым для случая режима сплошной среды, так как концентрации частиц у поверхности оказываются крайне малы по сравнению с их значениями на большом расстоянии от тела. Однако имеется ссылка на работу [72], в которой на основе кинетической теории показано, что существует нижнее предельное значение $n_{\mathrm{i,e}}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}}, t)$ у стенки. Как найти это значение и каково его влияние на решение задач обтекания тел слабоионизованной столкновительной плазмой, в литературе найти не удалось. Поэтому авторами был проведен детальный анализ граничного условия для $n_{\mathrm{i,e}}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}}, t)$ и его влияние на решение задачи. Вначале приведем соображения общего характера.

В задачах обтекания тел плотной плазмой имеется несколько характерных геометрических размеров:

- r_{p} — размер тела, или δ — толщина пограничного слоя;
- λ — средняя длина свободного пробега частиц в плазме;
- r_{D} — радиус Дебая, характеризующий порядок толщины слоя объемного заряда.

Если выполняется неравенство

$$r_{\mathrm{p}} \gg r_{\mathrm{D}} \gg \lambda, \tag{7.6}$$

то режим сплошной среды имеет место как в невозмущенной плазме, так и внутри слоя объемного заряда. В этих условиях с большой вероятностью выполняются равенства $n_{\mathrm{i,e}}(r_{\mathrm{p}}, t) = 0$.

Если выполняется другое неравенство

$$r_{\mathrm{p}} \gg \lambda \gg r_{\mathrm{D}}, \tag{7.7}$$

то режим сплошной среды выполняется в невозмущенной области, а в слое объемного заряда имеет место молекулярный режим.

Как показано в [18], концентрация на границе тел в покоящейся разреженной плазме зависит от трех безразмерных комплексов: $r_0 = r_{\mathrm{p}}/r_{\mathrm{D}}$, $\varphi_0 = e\varphi/kT_{\mathrm{i}}$, $\varepsilon = T_{\mathrm{i}\infty}/T_{\mathrm{e}\infty}$, а также от геометрического фактора и знака потенциала. При $|\varphi_0| > 10$ отталкиваемые частицы имеют пренебрежимо малую концентрацию у поверхности, чего нельзя сказать о притягиваемых частицах. Концентрации вблизи сферических тел в 1,5–2 раза

выше, чем вблизи тел цилиндрической геометрии. Приведем некоторые характерные значения $n_{\mathrm{i}}(r_{\mathrm{p}}, t_{\text{уст}})$ для сферы, взятые из [18]:

$$0{,}2\, n_{\mathrm{i}\infty} \leq n_{\mathrm{i,p}} \leq 1{,}5\, n_{\mathrm{i}\infty} \tag{7.8}$$

(7.8) выполняется, если безразмерные комплексы менялись в пределах:

$$2 \leq r_0 \leq 250;$$
$$-30 \leq \varphi_0 \leq 0;$$
$$\varepsilon = 1.$$

С уменьшением r_0 резко возрастает $n_{\mathrm{i,p}}$ и может в несколько раз превышать значения концентрации $n_{\mathrm{i},\infty}$.

При проведении численных экспериментов в режиме сплошной среды в покоящейся слабоионизованной плазме [18] были получены распределения концентрации ионов и электронов вдоль радиуса вблизи сферического тела. В расчетах использовались граничные условия типа (7.5). Расчеты показали, что при $\varphi_0 < -10$ в процессе самосогласованного решения естественным образом вблизи стенки возникает скачок положительно заряженных частиц несмотря на то, что на границе поддерживается значение $n_{\mathrm{i,p}} = 0$. Переход в ноль наблюдается вблизи самой стенки на расстоянии порядка шага расчетной сетки. Скачок составлял $(0{,}2\text{–}0{,}3)n_{\mathrm{i},\infty}$, что никак не укладывается в предположение, сделанное в [31] о крайне малом значении концентрации у стенки по сравнению с ее значением на больших расстояниях от тела. В [18] приведены результаты численных экспериментов, в которых начальное условие при $r = r_{\mathrm{p}}$ варьировалось в пределах $0 \leq n_{\mathrm{i,p}} \leq 1$. Эксперименты показали влияние граничного условия на структуру возмущенной зоны и характер эволюции, однако величина установившегося значения ионного тока на тело изменялась не сильно. Поэтому в [18] сделан вывод о том, что в задачах обтекания заряженных тел плотной плазмой значение $(n_{\mathrm{i,e}})_{\mathrm{p}}$ мало существенно и можно брать $(n_{\mathrm{i,e}})_{\mathrm{p}} = 0$, если исследуется только стационарные процессы переноса заряда.

Однако, если исследуется распределение концентраций вблизи электрода, или переходный процесс, то модельное условие (7.5) должно быть заменено на более корректное.

Учитывая выше сказанное, в работе предложен следующий способ нахождения граничной концентрации. Рассмотрение проведем на примере тела плоской геометрии, что не уменьшает общности метода. На рис. 7.2, *а* изображен плоский заряженный электрод в виде бесконечной полосы вдоль оси Z с указанием слоев с различными режимами течения.

Если перемещаться от плоскости электрода по нормали, то (рис. 7.2, *а*) вначале имеет место свободномолекулярная область *1*, затем переходная область *2* и после нее континуальная область *3*. Очевидно, что деление на указанные области достаточно условно. В первой области необходимо использовать уравнения для свободномолекулярного

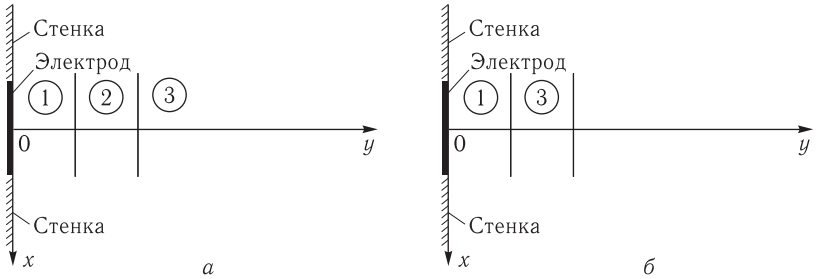


Рис. 7.2. Структура пристеночной области: *1* — свободномолекулярная область ($\mathrm{Kn} \gg 1$); *2* — переходная область ($\mathrm{Kn} \approx 1$); *3* — континуальная область ($\mathrm{Kn} \ll 1$)

режима, во второй области уравнения — для переходного режима, а в третьей области уравнения (7.3) — для режима сплошной среды. На границах областей необходимо проводить сшивание решения.

Для упрощения алгоритма расчета задача (рис. 7.2, *а*) была заменена на задачу, соответствующую рис. 7.2, *б*. Было предположено, что переходная область *2* мала и ею можно пренебречь. Уравнения Власова для ионов и электронов совместно с уравнением Пуассона для области *1* решались по алгоритму, изложенному в части I монографии. Концентрации заряженных частиц на стенке электрода определялись, как моменты функции распределения. Определенные на границе свободномолекулярной области концентрации частиц являются граничными условиями для задачи в следующей континуальной области (область *3* на рис. 7.2, *б*). Уравнения континуальной модели включали уравнения неразрывности, уравнения движения для всех компонент плазмы, а также уравнение Пуассона. Алгоритм решения подробно изложен в гл. 8.

Стыковка двух зон обеспечивается общим электрическим полем для обеих зон и равенством концентраций заряженных частиц на границе в процессе установления. Проверялось также равенство производных $d\varphi/dr$ и $dn_{\mathrm{i,e}}/dr$ на границе зон.

Решение осуществлялось на координатной сетке $N_t \times N_x \times N_y$ в зоне *3* и на сетке $N_t \times N_x \times N_y \times N_{V_x} \times N_{V_y}$ в зоне *1*. Из опыта математического моделирования полагали $N_t = 200$, $N_x = 30$, $N_y = 20$, $N_{V_x} = 10$, $N_{V_y} = 10$.

В численных экспериментах характерные безразмерные комплексы варьировались в следующих диапазонах:

$$5 \le r_0 = \frac{r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{D}}} \le 25;$$

$$-30 \le \varphi_0 = \frac{e\varphi_{\mathrm{p}}}{kT_{\mathrm{i}}} \le 10;$$

$$2 \le \frac{\lambda}{r_{\mathrm{D}}} \le 5.$$

На рис. 7.3 представлены установившиеся распределения концентраций ионов и электронов для случая $r_0 = 10$, $\lambda/r_{\mathrm{D}} = 2$ при трех значениях потенциалов: $\varphi_0 = -9$ (кривая *1*); $\varphi_0 = -6$ (кривая *2*); $\varphi_0 = -3$ (кривая *3*). Кривые проведены вдоль оси y, исходящей из центральной точки электрода ($x = 0$).

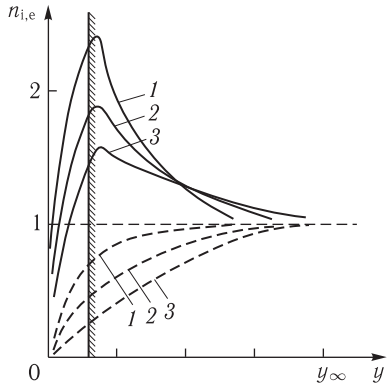


Рис. 7.3. Распределение концентраций ионов и электронов ($r_0 = 10$); *1* — $\varphi_0 = -9$; *2* — (−6); *3* — (−3); —— — n_{i}; - - - — n_{e}; ////// — граница раздела свободномолекулярной и континуальной областей

Из рис. 7.3 следует, что граничные значения для концентраций ионов при отрицательном потенциале тела не нулевые. Они оказались в интервале $0{,}3n_{\mathrm{i}\infty} \le n_{\mathrm{ip}} \le 0{,}75n_{\mathrm{i}\infty}$.

Результаты математического моделирования подтвердили сделанное выше предположение о том, что граничное значение концентрации притягивающихся к телу частиц не может быть равным нулю. Его можно найти предложенным в работе методом.

В заключении отметим, что граничные условия на поверхности тела могут осложняться наличием эмиссии электронов и инжекцией потоков заряженных или нейтральных частиц. Подробное исследование этих эффектов можно найти в работах [1, 18].

7.2. Слабоионизованная ламинарная плазма в магнитном поле

Рассматриваются математические модели, сформулированные в п. 7.1, с добавлением внешнего магнитного поля. Магнитное поле Земли имеет место при движении гиперзвукового летательного аппарата, внешнее магнитное поле используется в плазменных движителях, в системах управления потоками плазмы, при проведении различных физических экспериментов, в МГД-генераторах, в некоторых технологических установках, использующих плазму в качестве рабочего тела.

В случае цилиндрического тела, обтекаемого поперечным потоком слабоионизованной столкновительной плазмы (рис. 1.1), магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$ направим вдоль оси цилиндра. В этом случае сохраняется размерность задачи и проявляются все физические эффекты, связанные с магнитным полем. Собственными магнитными полями будем пренебрегать по сравнению с внешними. Система уравнений в данном случае имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{\mathrm{i}}\mathbf{u}_{\mathrm{i}}) = 0;\\
\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{\mathrm{e}}\mathbf{u}_{\mathrm{e}}) = 0;\\
m_{\mathrm{i}}\frac{d\mathbf{u}_{\mathrm{i}}}{dt} = -\frac{kT_{\mathrm{i}}}{n_{\mathrm{i}}}\nabla n_{\mathrm{i}} + Ze(\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{B}) - \mu_{\mathrm{ia}}\nu_{\mathrm{ia}}(\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{a}});\\
m_{\mathrm{e}}\frac{d\mathbf{u}_{\mathrm{e}}}{dt} = -\frac{kT_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}}\nabla n_{\mathrm{e}} - e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\mathrm{e}} \times \mathbf{B}) - \mu_{\mathrm{ea}}\nu_{\mathrm{ea}}(\mathbf{u}_{\mathrm{e}} - \mathbf{u}_{\mathrm{a}});\\
\Delta\varphi = \frac{e(n_{\mathrm{e}} - Zn_{\mathrm{i}})}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi;\\
\frac{\partial \rho_{\mathrm{a}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = 0;\\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = -\nabla P_{\mathrm{a}};\\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}}) = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}}P_{\mathrm{a}});\\
P_{\mathrm{a}} = \left(E_{\mathrm{a}} - \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^2}{2}\right)\rho_{\mathrm{a}}(\gamma - 1), \quad E_{\mathrm{a}} = C_v T_{\mathrm{a}} + \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{a}}^2}{2}.
\end{gathered} \tag{7.9}$$

Если принять допущение о малости $d\mathbf{u}_{\mathrm{i,e}}/dt$, как это было сделано в п. 7.1, то систему (7.9) можно преобразовать к виду [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left\{\frac{n_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}^2}[\mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \mathbf{a}_{\mathrm{i}} + \beta_{\mathrm{i}}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \mathbf{a}_{\mathrm{i}}) \times \mathbf{e}]\right\} = 0;\\
\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left\{\frac{n_{\mathrm{e}}}{1+\beta_{\mathrm{e}}^2}[\mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \mathbf{a}_{\mathrm{e}} - \beta_{\mathrm{e}}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}} + \mathbf{a}_{\mathrm{e}}) \times \mathbf{e}]\right\} = 0;\\
\Delta\varphi = \frac{e(n_{\mathrm{e}} - Zn_{\mathrm{i}})}{\varepsilon_0};\\
\frac{\partial \rho_{\mathrm{a}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = 0;\\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}) = -\nabla P_{\mathrm{a}};\\
\frac{\partial(\rho_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{a}}\mathbf{u}_{\mathrm{a}}E_{\mathrm{a}}) = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_{\mathrm{a}}P_{\mathrm{a}});\\
\mathbf{a}_{\mathrm{i}} = -D_{\mathrm{i}}\left(\frac{\nabla n_{\mathrm{i}}}{n_{\mathrm{i}}} + \frac{Z_{\mathrm{e}}}{kT_{\mathrm{i}}}\nabla\varphi\right); \quad \mathbf{a}_{\mathrm{e}} = -D_{\mathrm{e}}\left(\frac{\nabla n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}} - \frac{e}{kT_{\mathrm{e}}}\nabla\varphi\right);\\
\beta_{\mathrm{i}} = \frac{2\omega_i}{\nu_{\mathrm{ia}}}, \quad \beta_{\mathrm{e}} = \frac{\omega_e}{\nu_{\mathrm{ea}}}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad D_{\mathrm{i}} = \frac{kT_{\mathrm{i}}}{\mu_{\mathrm{ia}}\nu_{\mathrm{ia}}};\\
D_{\mathrm{e}} = \frac{kT_{\mathrm{e}}}{\mu_{\mathrm{ea}}\nu_{\mathrm{ea}}},
\end{gathered} \tag{7.10}$$

где $\omega_{\mathrm{i,e}}$ — ларморовские частоты вращения ионов и электронов, остальные обозначения соответствуют системе (7.2). Система начальных и граничных условий также сохраняется.

Перейдем теперь к рассмотрению обтекания электрода ленточного типа, расположенного на диэлектрической стенке (см. рис. 1.2). В этом случае масштабированная система уравнений совпадает с системой (7.3) за исключением третьего уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{i}}. \tag{7.11}$$

7.3. Слабоионизованная турбулентная плазма

Турбулентные течения вблизи заряженного тела, обтекаемого потоком слабоионизованной столкновительной плазмы, возникает при достаточно высоких скоростях набегающего потока. Оно характеризуется хаотическими изменениями параметров потока в пространстве и времени вокруг некоторых средних значений. В случае турбулентности с пульсациями небольшой частоты задача моделирования обтекания фактически отличается от ламинарного режима лишь расчетом поля скоростей нейтральной компоненты. Метод расчета в первую очередь зависит от масштабов пульсаций. Для крупномасштабных пульсаций можно проводить прямое численное моделирование, обусловленное слабой зависимостью крупномасштабного движения от мелкомасштабных пульсаций. Для мелкомасштабных процессов возможно использование моделей замыкания и расчет полей усредненных величин. Для пульсаций среднего масштаба надежной теории пока нет, поэтому средством исследования являются натурные эксперименты или численное моделирование. В последние годы разработана строгая теория турбулентности, основанная на идеях нелокальной физики [16–18]. Однако в данной работе результаты этой теории тоже не использовались. В случае обтекания цилиндра поперечным потоком столкновительной плазмы (см. рис. 1.1) при достаточно больших числах Рейнольдса за телом возникает нестационарный вихревой след — дорожка Кармана. Развивающееся в следе вихревое течение не зависит от вида начального возмущения, устойчиво к возмущениям и сохраняется со временем [73, 74]. Для рассматриваемого случая турбулентности нейтральной компоненты с крупномасштабными пульсациями можно использовать систему уравнений Эйлера (7.2) или уравнения Навье–Стокса.

В случае обтекания диэлектрической плоскости с расположенным на ней электродом ленточного типа (см. рис. 1.2) удобно использовать модель турбулентности промежуточного масштаба. Поле скоростей нейтральной компоненты представляется суммой поля средней скорости и поля пульсаций, определяемых экспериментально или с помощью некоторых моделей (например, k–ε-модели). Параметрами модели являются характерный рахзмер вихрей l' и средняя величина пульсационной скорости v'. Характерное время жизни вихря T' определяется

как $l'/\langle u_a \rangle$. В рассматриваемой задаче l' имеет порядок толщины пограничного слоя. Поле пульсаций генерируется стохастически, векторы пульсаций скорости направлены равновероятно по всем направлениям. Через промежутки времени T' задается новое распределение вихрей. В данной задаче поле средней скорости плоскопараллельно и вне пограничного слоя скорость постоянна. Пульсации средней скорости вблизи стенки варьировались около характерных значений $v' = 2$–4% от $v_{\text{ср}}$. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [74].

7.4. Гиперзвуковое обтекание тел с учетом турбулентности и равновесной диссоциации и ионизации

7.4.1. Математическая модель задачи. Математическую модель обтекания тел с учетом турбулентности и равновесной диссоциации и ионизации можно отнести к предельному случаю, когда процесс конвекции существенно превосходит диффузию и подвижность. В этих условиях в ряде работ [41, 75, 76] предлагается рассматривать слой объемного заряда у тела как бесконечно тонкий. Поэтому уравнения Максвелла из системы уравнений выпадают, а граничное условие для концентраций заряженных частиц принимается в виде (7.5). Учет равновесной диссоциации и ионизации воздуха приближает данную задачу к реальным условиям обтекания гиперзвукового летательного аппарата.

Математическая модель стационарных и нестационарных турбулентных течений равновесно диссоциированного газа основывается на методе решения системы осредненных по Фавру (сжимаемых) уравнений Навье–Стокса, уравнений k–ε-модели турбулентности, уравнения переноса полной энергии и необходимого количества уравнений переноса реагирующих компонент. Система замыкается уравнением состояния общего вида $p = f(\rho, U, Y)$, где ρ — плотность, U — внутренняя энергия, Y — концентрация. Для расчета стационарных течений используется метод установления по времени. Система уравнений имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0; \\
\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} + \tau_{ij}^{\text{R}}), \quad i = 1, 2, 3; \\
\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}[u_j(\tau_{ij} + \tau_{ij}^{\text{R}}) + q_i] - \tau_{ij}^{\text{R}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho\varepsilon + Q_H, \\
E = e + \frac{u^2}{2}; \qquad (7.12) \\
\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right] + \tau_{ij}^{\text{R}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho\varepsilon; \\
\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho\varepsilon u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right] + f_1 C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij}^{\text{R}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_2 C_{\varepsilon 2} \frac{\rho\varepsilon^2}{k}, \\
\frac{\partial \rho y_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho y_m u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_{\text{t}}}\right)\frac{\partial y_m}{\partial x_i}, \quad m = 1, 2, \ldots, N_c,
\end{gathered}
$$

где $\tau_{ij} = \mu \mathbf{s}_{ij}$, $\tau_{ij}^R = \mu_t \mathbf{s}_{ij} - (2/3)\rho k \delta_{ij}$; $\mathbf{s}_{ij} = \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i - (2/3)\delta_{ij} \times$ $\times\ \partial u_k/\partial x_k$; C_μ, $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ — константы модели турбулентности; f_μ, f_1, f_2 — функции модели ламинарно-турбулентного перехода; E — полная внутренняя энергия единицы массы; k — кинетическая энергия турбулентности; p — давление, Pr — число Прандтля; $\mathrm{Pr_t}$ — турбулентное число Прандтля; σ_k, σ_ε — константы модели турбулентности; t — время; u_i — компоненты вектора скорости; x_i — декартовы координаты; ε — диссипация кинетической энергии турбулентности; μ — коэффициент динамической вязкости; μ_t — коэффициент турбулентной вязкости; ρ — плотность; τ — тензор сдвиговых напряжений; τ^{R} — тензор напряжений Рейнольдса; y_m — массовая доля m-й компоненты.

7.4.2. Модели термодинамики и химической кинетики. Математическая модель задачи гиперзвукового обтекания тел с учетом турбулентности и равновесной диссоциации и ионизации определяется системой (7.12) и замыкается уравнениями состояния и термодинамического равновесия. Рассмотрим модели термодинамики и химической кинетики, которые позволяют получить эти уравнения в достаточно общем виде, а также вычислить термодинамические параметры.

Основным уравнением термодинамики является первое начало, которое может быть записано в виде

$$dU = T\,dS - P\,dV + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, d\gamma_i. \tag{7.13}$$

Здесь U — внутренняя энергия [Дж/кг], T — температура [К], S — энтропия [Дж/(кг · К)], P — давление [Па], $V = 1/\rho$ — удельный объем [м^3/кг], μ_i — химический потенциал i-й компоненты смеси [Дж/моль].

В состоянии термодинамического равновесия величины, стоящие под дифференциалами в (7.13), не меняются, а следовательно температура, давление и химические потенциалы являются однозначными функциями энтропии, удельного объема и мольно-массовых концентраций химических компонент:

$$T = T(S, V, \boldsymbol{\gamma}), \quad P = P(S, V, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mu_i = \mu_i(S, V, \boldsymbol{\gamma}), \tag{7.14}$$

а следовательно, если исключить из первых двух выражений S, то можно получить связь:

$$F(P, T, V, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{7.15}$$

Зависимость (7.15) является *уравнением состояния*. Термодинамика не позволяет находить вид данной зависимости, но накладывает на него некоторые ограничения. Термодинамически допустимыми являются только такие уравнения состояния, для которых выполняется условие:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,\boldsymbol{\gamma}} < 0. \tag{7.16}$$

Условие (7.16) является условием устойчивости равновесного состояния системы. Первое начало термодинамики описывает состояние термоди-

намического равновесия, но не указывает путь перехода системы из неравновесного состояния в равновесное. Для этого существует *второе начало термодинамики*. Опыты показывают, что при любом неравновесном процессе некоторая часть энергии всегда переходит в тепловую, а следовательно энтропия системы возрастает:

$$dS > 0. \tag{7.17}$$

Кроме перечисленных выше, в термодинамике используется ряд функций состояния системы, которые удобны для анализа поведения системы при различных параметрах состояния. *Энтальпия*: $H = U + PV$, *свободная энергия*: $F = U - TS$, *термодинамический потенциал Гиббса*: $G = U + PV - TS$.

Первое начало термодинамики с использованием введенных термодинамических функций может быть записано в одной из эквивалентных форм. Данные уравнения введены в науку Гиббсом и называются фундаментальными уравнениями Гиббса:

$$\begin{aligned} dH &= T\,dS + V\,dP + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,d\gamma_i; \\ dF &= -S\,dT - P\,dV + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,d\gamma_i; \\ dG &= -S\,dT + V\,dP + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,d\gamma_i. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Функции U, H, F, G в термодинамике носят название *характеристических функций* в переменных $(S, V), (S, P), (T, V), (T, P)$ соответственно. Наиболее часто в практических расчетах используется потенциал Гиббса, так как он представляет из себя характеристическую функцию в наиболее легко измеряемых термодинамических переменных, таких как давление и температура.

Все характеристические функции являются функциями состояния системы, а следовательно выражения (7.13), (7.18) — полные дифференциалы. Если известна, например, зависимость потенциала Гиббса от давления, температуры и концентраций, то остальные термодинамические функции могут быть вычислены как функции давления и температуры путем дифференцирования выражения для потенциала Гиббса, например:

$$\begin{gathered} \rho = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1} = p\Big(RT\sum_{(i)}\gamma_i\Big)^{-1}, \quad S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,\boldsymbol{\gamma}}, \\ U = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,\boldsymbol{\gamma}} - \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,\boldsymbol{\gamma}}, \\ \mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial \gamma_i}\right)_{P,T,\gamma_{j,j\neq i}}. \end{gathered} \tag{7.19}$$

Кроме этого очевидно, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,\boldsymbol{\gamma}} = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,\boldsymbol{\gamma}}. \tag{7.20}$$

Состояние термодинамического равновесия соответствует точке минимума соответствующей характеристической функции. При этом выполняется условие химического равновесия:

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i \, d\gamma_i = 0. \tag{7.21}$$

Будем рассматривать многокомпонентную систему переменного состава. Пусть смесь состоит из N веществ и в ней протекает N_R реакций вида

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nu}_i^{(r)} M_i \underset{\overleftarrow{W}^{(r)}}{\overset{\overrightarrow{W}^{(r)}}{\rightleftharpoons}} \sum_{i=1}^{N} \overleftarrow{\nu}_i^{(r)} M_i, \quad q^{(r)} = \sum_{i=1}^{N} \overset{\rightleftarrows}{\nu}_i^{(r)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N_r. \tag{7.22}$$

Здесь r — номера стадий, $\overset{\rightleftarrows}{\nu}_i^{(r)}$ — стехиометрические коэффициенты, $\overset{\rightleftarrows}{\nu} q^{(r)}$ — порядки соответствующих реакций, M_i — символы молекул или атомов химических компонент. Стехиометрические коэффициенты являются целыми положительными числами в случае реальных химических реакций, при этом $1 \leq \overset{\rightleftarrows}{q}^{(r)} \leq 3$, и могут быть произвольными вещественными числами, в случае брутто реакций, $\overset{\rightleftarrows}{W}^{(r)}$ — скорость r-й химической реакции.

Состояние термодинамического равновесия подразумевает, что в системе может протекать любой набор химических реакций между компонентами смеси. При этом число независимых реакций (реакции, которые нельзя представить виде линейной комбинации других) не может превышать количество веществ в системе. Заведомо удовлетворяющий этому условию набор реакций, например, состоит из реакций образования содержащихся в смеси веществ. В состоянии термодинамического равновесия предполагается, что все химические реакции протекают равновесно, т. е. для каждой химической реакции из (7.22) выполняется условие (7.21) — это формулировка так называемого *принципа постадийного согласования*. В этом случае условие химического равновесия (7.21) может быть записано в виде системы

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\nu}_i^{(r)} - \overleftarrow{\nu}_i^{(r)}\right) \mu_i = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.23}$$

Если в качестве заведомо независимого набора реакций выбраны реакции образования i-го вещества, то система (7.23) может быть записана в виде

$$\mu_i = \sum_{K=1}^{N_A} A_K^i \tilde{\mu}_K, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.24}$$

Здесь N_A — количество элементов, A_K^i — *матрица состава* — число частиц K-го элемента в i-м веществе, $\tilde{\mu}_K$ — химический потенциал к-го элемента, (7.24) справедливо и в случае наличия в газовой смеси ионов. В этом случае к элементам, из которых состоят вещества, необходимо добавить электрон — e. В случае однократно ионизированного воздуха в (7.24) входят 13 веществ: O_2, N_2, NO, O_2^+, N_2^+, NO^+, O^+, N^+, Ar^+, O, N, Ar, e. В качестве элементов, как правило, рассматриваются O, N, Ar, e. Тогда строчка матрицы состава, соответствующая, например шестому веществу из списка NO^+, будет иметь вид A_K^6, $K = 1, \ldots, 4$: $(1, 1, 0, -1)$. Для всех положительных ионов строки матрицы состава будут содержать отрицательные числа, что при численном моделировании не всегда удобно. От этого можно избавиться, если выбрать в качестве элементов не O, N, Ar, e, а O^+, N^+, Ar^+, e. В этом случае строка матрицы состава, соответствующая атомарному кислороду O, будет иметь вид $(1, 0, 0, 1)$, O^+ — $(1, 0, 0, 0)$, N_2 — $(0, 2, 0, 2)$, NO — $(1, 1, 0, 2)$, т. е. соответствующая реакция образования, например для NO, имеет вид $NO = N^+ + O^+ + 2e$. При этом останутся справедливы все расчетные методики, которые будут приведены ниже.

В изолированной системе при отсутствии ядерных превращений сохраняется элементный состав:

$$\sum_{i=1}^{N} A_K^i \gamma_i = \gamma_K^0, \quad K = 1, \ldots, N_A. \tag{7.25}$$

Здесь γ_K^0 — количество молей K-го элемента в смеси. В том случае, если в системе содержатся ионы, то последнее уравнение в (7.25) представляет собой условие электронейтральности:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{N_A}^i \gamma_i = \gamma_{N_A}^0. \tag{7.26}$$

Здесь N_A-й элемент — электрон e, а $\gamma_{N_A}^0 \equiv 0$, если в качестве элементов выбраны O, N, Ar, e; $\gamma_{N_A}^0 \neq 0$, если в качестве элементов выбраны O^+, N^+, Ar^+, e.

Уравнения (7.24) и (7.25) устанавливают зависимость N концентраций и двух термодинамических величин от N_A параметров $\tilde{\mu}_K$. Таким образом, задача расчета равновесного состава при заданных двух термодинамических величинах может быть сведена к решению системы из N_A уравнений (7.25), в которой γ_i рассматриваются как неявно заданные функции $\tilde{\mu}_K$

$$\gamma_i = \gamma_i(\tilde{\mu}_K), \quad K = 1, \ldots, N_A. \tag{7.27}$$

В качестве независимых переменных могут выступать химические потенциалы произвольных веществ, входящих в смесь. При этом необходимо, чтобы получаемая система уравнений типа (7.24) была линейно независимой.

Если ввести понятие *скорости химической реакции* $\overleftrightarrow{W}^{(r)}$ — число (r)-х элементарных реакций происходящих в единицу времени в единице объема, то выражение для числа молей i-го компонента, образующихся в реакциях (7.22) в кубическом метре смеси в единицу времени W_i, имеет следующий вид:

$$W_i = \sum_{(r)} \left(\overleftarrow{\nu}_i^{(r)} - \overrightarrow{\nu}_i^{(r)}\right)\left(\overrightarrow{W}^{(r)} - \overleftarrow{W}^{(r)}\right). \tag{7.28}$$

Очевидно, что в состоянии равновесия все W_i должны равняться нулю. Данный факт указывает на то, что скорости химических реакций не могут быть произвольными, а должны подбираться с учетом выполнения условия (7.23) в состоянии химического равновесия.

Используемые при математическом моделировании термодинамические данные должны представлять собой систему взаимно согласованных величин, включая согласованность термохимических величин и термодинамических функций [77]. Для описания термодинамических свойств веществ достаточно знать:

- $\Delta_f H_i^0(T_0)$ — энтальпия образования i-го вещества при стандартной температуре $T_0 = 298,15$ K и стандартном давлении p_0 из элементов в стандартных состояниях;
- $S_i^0(P_0, T_0)$ — стандартную энтропию;
- $C_{Pi}(T) = (\partial H/\partial T)_P$ — зависимость теплоемкости от температуры;
- уравнение состояния (7.15).

Истинные значения энтальпии (аналогично, как и внутренней энергии) неизвестны. Можно только определить изменение энтальпии в том или ином процессе. Поэтому в современных справочниках термодинамических свойств веществ [77] используется *система отсчета энтальпий*, согласно которой считается, что энтальпии образования простых веществ, находящихся в стандартном состоянии, равны нулю, а всех прочих веществ определяются из реакций образования данного вещества из простых в стандартных условиях. Например, рассмотрим реакцию образования атомарного кислорода: $O_2 = 2O$, $\Delta_f H_{O_2}^0(298{,}15) \equiv 0$ по определению, $\Delta_f H_O^0(298{,}15) = 249{,}170$ кДж/моль, реакция образования иона оксида азота: $NO^+ = N + O - e$, $\Delta_f H_i^0(T_0) = 249{,}170$ кДж/моль.

Из (7.13), (7.18) следует связь между энтропией и теплоемкостью при постоянном давлении:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \frac{C_P}{T}. \tag{7.29}$$

Соотношение (7.29) позволяет по измеренным значениям теплоемкости, используя третье начало термодинамики, получить стандартное значение энтропии:

$$S^0(T_0) = \int_0^{T_0} \frac{C_P}{T}\, dT. \tag{7.30}$$

Из третьего начала термодинамики и (7.29), (7.30) следует, что теплоемкости веществ стремятся к нулю при стремлении к нулю температуры, причем пропорционально T^n, с n больше единицы. В справочных изданиях [77, 137], как правило, приводятся табличные данные и полиномиальные аппроксимации для зависимости теплоемкости от температуры.

Для смеси идеальных газов справедливо уравнение состояния Менделеева–Клайперона:

$$PV = R\sum_{i=1}^{N}\gamma_i T. \tag{7.31}$$

В том случае, если известны энтальпии образования веществ, стандартные энтропии, зависимости теплоемкости от температуры и уравнение состояния, то может быть восстановлен потенциал Гиббса. В случае неизменного химического состава, используя (7.18) и (7.29), можно получить зависимость от парциального давления и температуры молярной энтропии i-го компонента:

$$-\left(\frac{\partial S_i}{\partial P_i}\right)_T = \left(\frac{\partial V_i}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P_i}; \tag{7.32}$$

$$S_i(P,T) = S(P_0,T_0) + \int\limits_{T_0}^{T}\frac{C_P}{T}\,dT - \int\limits_{P_0}^{P_i}\frac{R}{P}\,dP = S_i^0(T) - R\ln\left(\frac{Px_i}{P_0}\right). \tag{7.33}$$

Здесь $P_i = Px_i$, x_i — мольная доля i-го компонента: $x_i = \gamma_i\big/\sum_{j=1}^{N}\gamma_j$.

Из (7.18) следует связь: $(\partial H/\partial P)_T = T(\partial S/\partial P)_T + V$ и, следовательно, с использованием (7.31) можно получить, что для смеси идеальных газов $(\partial H/\partial P)_T \equiv 0$, т. е. энтальпия является функцией только температуры и может быть представлена в виде

$$H_i(T) = \Delta_f H_i^0(T_0) + \int\limits_{T_0}^{T} C_P\,dT. \tag{7.34}$$

Таким образом, для случая смеси идеальных газов с использованием (7.18), (7.33) и (7.34) может быть восстановлено выражение для удельного термодинамического потенциала Гиббса:

$$G(P,T,\vec{\gamma}) = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i[H_i(T) - TS_i(P,T)]. \tag{7.35}$$

После подстановки (7.33) и (7.34) в (7.35) получаем

$$G(P,T,\vec{\gamma}) = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\left[RT\ln\frac{P\gamma_i}{P_0\sum_{j=1}^{N}\gamma_j} + G_i^0(T)\right], \tag{7.36}$$

где $R = 8{,}3144$Дж/(моль $\cdot$ К) — универсальная газовая постоянная, $G_i^0(T)$ — стандартные молярные потенциалы Гиббса отдельных компонент, $S_i^0(T) = -dG_i^0(T)/dT$, $H_i(T) = G_i^0(T) - T(dG_i^0(T)/dT)$. В справочной литературе [77, 78] приводятся полиномиальные аппроксимационные формулы для приведенного стандартного потенциала $\Phi_i^0(T)$, который связан с $G_i^0(T)$ по формуле (7.37):

$$G_i^0(T) = H_i^0(0) - T\Phi_i^0(T), \tag{7.37}$$

где $H_i^0(0)$ — стандартная энтальпия $H_i^0(T)$ при абсолютном нуле.

Для задания $\Phi_i^0(T)$, $x = 10^{-4}T$ применяются полиномы, например, вида [77]:

$$\Phi^0(x) = \varphi_0 + \varphi_{\ln}\ln(x) + \varphi_{-2}x^{-2} + \varphi_{-1}x^{-1} + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \varphi_3 x^3 + \varphi_4 x^4. \tag{7.38}$$

Здесь φ_i, $i = \ln, -2, \ldots, 4$ — числовые коэффициенты, индивидуальные для каждого вещества, которые могут быть рассчитаны, если известны зависимость теплоемкости от температуры и стандартная энтропия. С использованием (7.38) выражения для $S^0(T), C_P(T)$ имеют вид:

$$\begin{gathered} S^0(T) = \varphi_{\ln}(1 + \ln(x)) - \varphi_{-2}x^{-2} + \varphi_0 + 2\varphi_1 x^1 + 3\varphi_2 x^2 + 4\varphi_3 x^3 + 5\varphi_4 x^4; \\ C_P(T) = \varphi_{\ln} + 2\varphi_{-2}x^{-2} + 2\varphi_1 x + 6\varphi_2 x^2 + 12\varphi_3 x^3 + 20\varphi_4 x^4, \quad x = 10^{-4}T. \end{gathered} \tag{7.39}$$

Величина, стоящая в квадратных скобках в выражении (7.33), задается таким образом, чтобы

$$G_i^0(T) = H_i^0(0) - T\Phi_i^0(T). \tag{7.40}$$

Прочие термодинамические величины могут быть выражены через потенциал Гиббса (7.36) и его частные производные, например:

$$\begin{gathered} S(P, T, \vec{\gamma}) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left(S_i^0(T) - R\ln\frac{P\gamma_i}{P_0 \sum_{j=1}^{N}\gamma_i} \right), \quad H(T, \vec{\gamma}) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i H_i(T); \\ C_P(T, \vec{\gamma}) = \frac{\partial H}{\partial T} = \sum_{i=1}^{N} C_{P_i}(T); \\ \mu_i(P, T, \vec{\gamma}) = \left(\frac{\partial G}{\partial \gamma_i}\right)_{P,T,\gamma_{j,j\neq i}} = RT\ln\frac{P\gamma_i}{P_0\sum_{j=1}^{N}\gamma_j} + G_i^0(T). \end{gathered} \tag{7.41}$$

В случае, если рассматриваются газы с постоянной теплоемкостью $C_P = \mathrm{const} = \varphi_{\ln}$, то $\varphi_{-2} = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$.

Скорость химической реакции $\overleftrightarrow{W}^{(r)}$ прямо пропорциональна произведению объемных концентраций участвующих в ней компонент и так называемой *константы скорости реакции*, зависящей от температуры (в общем случае от температуры и давления) [138],

$$\overleftrightarrow{W}^{(r)} = \overleftrightarrow{K}^{(r)}(T)\prod_{i=1}^{N}(\rho\gamma_i)^{\overleftrightarrow{\nu}_i^{(r)}}. \tag{7.42}$$

Для аппроксимации температурной зависимости констант скоростей прямых реакций используется обобщенная формула Аррениуса:

$$\vec{K}(T) = A \exp\left(-\frac{E}{RT} + n \ln T\right). \tag{7.43}$$

Здесь A, n, E — некоторые константы, индивидуальные для каждой реакции.

Как уже отмечалось, в состоянии термодинамического равновесия концентрации всех компонент остаются неизменными и, следовательно, должно выполняться условие:

$$W_i(P, T, \vec{\gamma}) = \sum_{r=1}^{N_r} \left(\overleftarrow{\nu}_i^{(r)} - \vec{\nu}_i^{(r)}\right)\left(\vec{W}^{(r)} - \overleftarrow{W}^{(r)}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.44}$$

В соответствии с принципом постадийного согласования каждое слагаемое суммы (7.44) в состоянии термодинамического равновесия должно равняться нулю. Следовательно, используя (7.42) и (7.44), получаем:

$$\begin{gathered} \vec{K}^{(r)}(T) \prod_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{\vec{\nu}_i^{(r)}} = \overleftarrow{K}^{(r)}(T) \prod_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{\overleftarrow{\nu}_i^{(r)}}; \\ \frac{\overleftarrow{K}^{(r)}(T)}{\vec{K}^{(r)}(T)} = \prod_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{(\overleftarrow{\nu}_i^{(r)} - \vec{\nu}_i^{(r)})}. \end{gathered} \tag{7.45}$$

С другой стороны, в состоянии термодинамического равновесия для каждой реакции из (7.22) выполняется условие (7.23). Подставляем выражение химического потенциала из (7.41) в (7.23), получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\nu}_{\mathrm{i}}^{(r)} - \overleftarrow{\nu}_i^{(r)}\right) \left[RT \ln \frac{P\gamma_i}{P_0 \sum_{j=1}^{N} \gamma_j} + G_i^0(T)\right] = 0. \tag{7.46}$$

Преобразуем (7.46) с использованием (7.31), получим

$$\prod_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{(\overleftarrow{\nu}_i^{(r)} - \vec{\nu}_i^{(r)})} = \left(\frac{RT}{P_0}\right)^{\sum_{i=1}^{N} (\overleftarrow{\nu}_i^{(r)} - \vec{\nu}_i^{(r)})} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \left(\overleftarrow{\nu}_i^{(r)} - \vec{\nu}_i^{(r)}\right) \frac{G_i^0(T)}{RT}\right]. \tag{7.47}$$

Используя (7.45) и (7.47), получаем связь между константами скоростей прямых и обратных реакций:

$$\frac{\overleftarrow{K}^{(r)}(T)}{\vec{K}^{(r)}(T)} = \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \left(\overleftarrow{\nu}_i^{(r)} - \vec{\nu}_i^{(r)}\right) \left(\frac{G_i^0(T)}{RT} + \ln \frac{RT}{P_0}\right)\right]. \tag{7.48}$$

Использование соотношения (7.48), в котором все $G_i^0(T)$ заданы в одной и той же системе начал отсчета термохимических величин, гарантируют заведомую неотрицательность вклада в производство энтропии

от каждой пары реакций (7.22). Тем самым исключается возможность существования у рассматриваемой модели химической кинетики каких-либо нефизических свойств.

7.4.3. Модель молекулярного переноса. Эффективный коэффициент диффузии паров вещества частиц в многокомпонентном газе D_k находился по формуле Уилки [133]:

$$D_k = \sum_{(i\neq k)} \gamma_i \Big[\sum_{(i\neq k)} \gamma_i / D_{ik} \Big]^{-1};$$

$$D_{ik} = \frac{3}{16} \left[\frac{2}{\pi} (RT)^3 \frac{\mu_i + \mu_k}{\mu_i \mu_k} \right]^{1/2} \big[N_A p \sigma_{ik}^2 \Omega_{ik}^{(1,1)^*} \big]^{-1},$$

где $\Omega_{ik}^{(1,1)^*}$, σ_{ik} — интеграл и сечение столкновений соответственно.

Коэффициент вязкости рассчитывался по приближенной формуле Уилки [133], а коэффициент теплопроводности по формуле Массона и Саксена с использованием уточненной корреляции Эйкена [133]:

$$\eta = \sum_{(i)} \eta_i \left(\frac{\gamma_i}{B_i} \right), \quad B_i = \sum_{(j)} A_{ij} \gamma_j;$$

$$A_{ij} = \left[1 + \left(\frac{\eta_i}{\eta_j} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} \right)^{1/4} \right]^2 \left[8 \left(1 + \frac{\mu_i}{\mu_j} \right) \right]^{-1/2};$$

$$\eta_i = \frac{5}{16} \left[\frac{\mu_i RT}{\pi} \right]^{1/2} \big[N_A \sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)^*} \big]^{-1};$$

$$\lambda = \sum_{(i)} \eta_i \left(1{,}32 c_{pi} + 0{,}45 \frac{R}{\mu_i} \right) \left(\frac{\gamma_i}{B_i} \right).$$

Для вычисления интегралов столкновений Штокмайера применялась аппроксимация Брокау [133]:

$$\Omega_{ik}^{(1,1)^*} = \Omega_D(T_{ik}^*) + 0{,}19 \frac{\delta_{ik}}{T_{ik}^*}, \quad T_{ik}^* = \frac{RT}{N_A \varepsilon_{ik}};$$

$$\Omega_i^{(2,2)^*} = \Omega_V(T_i^*) + 0{,}2 \frac{\delta_i}{T_i^*}, \quad T_i^* = \frac{RT}{N_A \varepsilon_i}.$$

Здесь $\Omega_D(T_{ik}^*)$, $\Omega_V(T_i^*)$ — аналогичные интегралы для потенциала Леннарда–Джонса, значения которых вычислялись по их аргументам с использованием аналитических аппроксимаций [133]. Параметры потенциалов взаимодействия одинаковых молекул σ_i, ε_i, δ_i брались из справочника [133].

7.5. Обтекание тел при числах Кнудсена порядка единицы

7.5.1. Учет столкновений типа «ион–нейтрал». Режимы обтекания при числах Кнудсена порядка единицы возникают при движении летательного аппарата на высотах порядка 40–70 км над Землей, когда

средняя длина свободного пробега частиц сравнима с характерным размером задачи.

Рассматривается слабоионизованная плазма, в которой основную роль играют столкновения ионов с нейтральными молекулами. Предполагаем также, что роль тройных столкновений мала, а химические реакции заморожены. В этих условиях функция распределения ионов по скоростям подчиняется кинетическому уравнению Больцмана (1.1)–(1.3):

$$\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathrm{i}} \frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial r} + \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}} \frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial \mathbf{v}} = Y_{\mathrm{ia}}, \tag{7.49}$$

где Y_{ia} — интеграл столкновений ионов с нейтральными частицами сорта «а». В рассматриваемых условиях интеграл столкновений может быть записан в виде

$$Y_{\mathrm{ia}} = \int (f'_{\mathrm{i}} f'_{\mathrm{a}} - f_{\mathrm{i}} f_{\mathrm{a}}) g_{\mathrm{ia}} b \, db \, d\varepsilon \, d\mathbf{V}_{\mathrm{a}}, \tag{7.50}$$

где $f'_{\mathrm{i,a}}$ — функции распределения ионов и нейтральных частиц сорта «а» до столкновения; $f_{\mathrm{i,a}}$ — функции распределения ионов и нейтральных частиц сорта «а» после столкновения; g — относительная скорость сталкивающихся частиц; b — прицельный параметр ε — азимутальный угол; $\mathbf{F}_i = q_i \mathbf{E}$ — сила, действующая на ионы в электрическом поле, возникающем в пристеночной области. Это поле является самосогласованным и вытекает из решения уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} e(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{i}}); \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{7.51}$$

Поскольку столкновением электронов с нейтральными частицами пренебрегаем, функция распределения электронов по скоростям подчиняется уравнению Власова:

$$\frac{\partial f_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \mathbf{V}_{\mathrm{e}} \frac{\partial f_{\mathrm{e}}}{\partial r} + \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}} \frac{\partial f_{\mathrm{e}}}{\partial \mathbf{V}} = 0. \tag{7.52}$$

Система уравнений (7.49)–(7.52) составляет математическую модель задачи взаимодействия заряженных тел с потоками плазмы с учетом столкновений типа «ион–нейтрал». Система начальных и граничных условий стандартна.

7.5.2. Учет столкновений типа «электрон–нейтрал». Как и в п. 7.5.1, рассматривается слабоионизованная плазма, тройными столкновениями пренебрегается, а химические реакции считаются замороженными. Однако в данном разделе будем считать, что основную роль играют столкновения электронов с атомами, а все остальные столкновения несущественны. Такой подход может показать несколько искусственным, однако он позволяет оценить роль столкновений типа «электрон–нейтрал» на процессы переноса в пристеночной плазме, в частности, на перенос заряда. Ввиду малости массы электрона при

столкновении он резко изменяет направление своего движения и частично теряет скорость в направлении электрического поля, которую он приобрел на длине свободного пробега. Будем рассматривать только упругие столкновения. Как правило, скорость электронов много больше скорости атомов и ионов, поэтому положение центра масс совпадает с практически неподвижным атомом.

Математическая модель задачи включает:

— уравнение Власова для ионов:

$$\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \mathbf{V}_{\mathrm{i}} \frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}} \frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial \mathbf{V}} = 0; \tag{7.53}$$

— уравнение Больцмана для электронов:

$$\frac{\partial f_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \mathbf{V}_{\mathrm{e}} \frac{\partial f_{\mathrm{e}}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}} \frac{\partial f_{\mathrm{e}}}{\partial \mathbf{V}} = Y_{\mathrm{e,a}}; \tag{7.54}$$

— уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon} e(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{i}}), \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{7.55}$$

Система начальных и граничных условий аналогична п. 7.5.1.

7.5.3. Учет столкновений типа «ион–ион» и «ион–электрон». Столкновения между заряженными частицами начинают играть существенную роль, если степень ионизации достаточно высокая. На практике столкновения типа «ион–ион» и «ион–электрон» могут играть заметную роль уже при степенях ионизации в несколько процентов. С целью выяснения роли столкновений между заряженными частицами будем предполагать, что роль других типов столкновений мала. Будем также считать, что химические реакции заморожены, а направленные скорости и внешние магнитные поля отсутствуют. Собственные магнитные поля предполагаются достаточно слабыми, так что ими также будем пренебрегать. В сформулированных условиях ион совершает движение в коллективном электрическом поле, образованном всеми остальными заряженными частицами и заряженными макротелами, внесенными в плазму. Математическая модель задачи в данных условиях включает уравнения Фоккера–Планка для ионов и электронов и уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля, а также систему начальных и граничных условий. С учетом кулоновских столкновений эволюция функций распределения ионов и электронов описывается кинетическим уравнением Больцмана со столкновительным оператором Фоккера–Планка [79]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\mathrm{F.P.}}, \quad \alpha = \mathrm{i}, \mathrm{e}, \tag{7.56}$$

где $(\partial f_\alpha / \partial t)_{\mathrm{F.P.}}$ — оператор Фоккера–Планка, определяющий изменения функции распределения за счет кулоновских столкновений. Опе-

ратор столкновений впервые был выведен в работе М. Н. Розенблюта и др. [79]:

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\text{F.P.}} = -\frac{\partial}{\partial V}\left(f_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial V}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial V \partial V} : \left(f_\alpha \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial V\, \partial V}\right), \tag{7.57}$$

где g, h — так называемые потенциалы Розенблюта:

$$g_\alpha(V) = \sum_b \int f_b(V - V')\, dV';$$

$$h_\alpha(V) = \sum_b \frac{m_\alpha + m_b}{m_b} \int \frac{f_b\, dV'}{|V - V'|}; \tag{7.58}$$

$$\Gamma_{\text{a}} = \frac{4\pi e^4}{m_{\text{a}}^2} \ln D_{\text{a}}; \quad D_{\text{a}} = \frac{3kT_{\text{a}}}{2e^2}\left(\frac{\varepsilon_0 k T_{\text{e}}}{n_{\text{e}} e^2}\right)^{1/2} = \frac{2w_{\text{a}} r_{\text{d}}}{e^2},$$

где r_{d} — радиус Дебая; $\ln D_a = \Lambda$ — кулоновский логарифм; w_a — средняя энергия частицы сорта «а».

Если сделать предположение об изотропности потенциалов Розенблюта и разложить функции g и h в ряды по полиномам Лежандра, оставив только нулевые члены, то получим [80]

$$\Gamma_{\text{a}}^{-1}\frac{\partial f_{\text{a}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_{\text{a}}}{\partial V^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial V^2}\right] + \frac{\partial f_{\text{a}}}{\partial V}\left[-\frac{\partial h_{\text{a}}}{\partial V} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial g}{\partial V} + \frac{2}{V}\frac{\partial^2 g}{\partial V^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial V^3}\right] +$$
$$+ f_{\text{a}}\left[-\frac{2}{V}\frac{\partial h_{\text{a}}}{\partial V} - \frac{\partial^2 h_{\text{a}}}{\partial V^2} + \frac{2}{V}\frac{\partial^3 g}{\partial V^3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^4 g}{\partial V^4}\right];$$

$$g_\alpha(v,t) = 4\pi \sum_b \left\{\int_0^v v'^2 v\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v'}{v}\right)^2\right] F_b(v', t)\, dv' + \right.$$
$$\left. + \int_v^\infty v'^3\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{v'}\right)^2\right] F_b(v', t)\, dv'\right\}; \tag{7.59}$$

$$h_\alpha(v,t) = 4\pi \sum_b \frac{m_\alpha + m_b}{m_b}\left[\int_0^v \frac{v'^2}{v} F_b(v', t)\, dv' + \int_v^\infty v' F_b(v', t)\, dv'\right],$$

где $F_b(v) = (1/2)\int_{-1}^{+1} f_b(v', \mu, t)\, d\mu$ — изотропная функция распределения.

Приближение изотропных потенциалов Розенблюта выполняется тем лучше, чем ближе функция распределения к изотропной. Если рассматривается пристеночная плазма, то вблизи поверхности функции распределения притягивающихся частиц за счет поглощения на поверхности имеют подковообразный вырез, т. е. их изотропность нарушается. Она тем более нарушается в теневой области обтекаемого плазмой тела. Функции распределения отталкивающихся частиц могут быть изотропными.

В [80] получено уравнение Фоккера–Планка для двумерных неизотропных задач в сферической системе координат. Переменными в пространстве скоростей могут быть (V_r, V_θ), или $(V, \gamma = \cos\theta)$. Приведем из [80] уравнение для f_{i}:

$$\frac{1}{\Gamma_{\mathrm{i}}}\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{\mathrm{i}}}{dv^2}\frac{d^2 f_{\mathrm{i}}}{dv^2} + \left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g_{\mathrm{i}}}{\partial v\,\partial\theta} - \frac{1}{v^3}\frac{\partial g_{\mathrm{i}}}{d\theta}\right]\frac{\partial^2 f_{\mathrm{i}}}{dv\,d\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_{\mathrm{i}}}{\partial\theta^2} +$$
$$+ \left[\frac{1}{2}\frac{1}{v^3}\frac{\partial^2 g_{\mathrm{i}}}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{2v^3}\frac{\partial g_{\mathrm{i}}}{\partial\theta} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial g_{\mathrm{i}}}{\partial\theta}\right]\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial v} +$$
$$+ \left[\frac{1}{v^4\sin^2\theta}\left(1 - \frac{\cos^2\theta}{2}\right)\frac{\partial g_{\mathrm{i}}}{\partial\theta} - \frac{1}{v^3}\frac{\partial^2 g_{\mathrm{i}}}{\partial v\,\partial\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{2v^3}\frac{\partial g_{\mathrm{i}}}{\partial v}\right]\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial\theta} +$$
$$+ \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial v} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial c}{\partial\theta}\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial\theta} + 4\pi(\gamma_{\mathrm{i}} f_{\mathrm{e}} + f_{\mathrm{i}})f_{\mathrm{i}}, \quad (7.60)$$

где

$$g_{\mathrm{i}}(v,\theta) = \int\limits_0^\infty v'^2\,dv' \int\limits_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\left[f_{\mathrm{e}}(v',\theta' + f_{\mathrm{i}}(v',\theta')\right]\Omega(v',\theta',v,\theta);$$

$$c(v_{\mathrm{i}}\theta) = (1-\gamma)\int\limits_0^\infty v'^2 dV' \int\limits_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\,f_{\mathrm{e}}(v',\theta')\,\Lambda(v',\theta',v,\theta).$$

Функции Λ и Ω определяются через полные эллиптические интегралы:

$$\Lambda = \frac{4}{q}K\left(\frac{p}{q}\right); \quad \Omega = 4qE\left(\frac{p}{q}\right);$$
$$p = (4v'\sin\theta\sin\theta')^{1/2}; \quad (7.61)$$
$$q = \left[v^2 + v'^2 - 2vv'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')\right]^{1/2}.$$

Уравнение (7.60) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial t} = a_1\frac{\partial^2 f_{\mathrm{i}}}{\partial v^2} + a_2\frac{\partial^2 f_{\mathrm{i}}}{\partial v\,\partial\theta} + a_3\frac{\partial^2 f_{\mathrm{i}}}{\partial\theta^2} + b_1\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial v} + b_2\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial\theta} + c f_{\mathrm{i}}. \quad (7.62)$$

Это уравнение параболического типа в двумерном пространстве (v,θ). Аналогично f_{i} записывается уравнение Фоккера–Планка и для f_{e}.

Глава 8

ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКАМИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

8.1. Метод крупных частиц применительно к задачам обтекания тел потоками столкновительной плазмы

Системы уравнений (7.2), (7.3) и (7.10) решались различными численными методами. Наиболее удобным оказался метод последовательных итераций по времени. Согласно этому методу в момент времени $t = 0$ задается импульсное изменение потенциала тела от начального значения φ_{01} до конечного значения φ_{02}. При этом происходит эволюция возмущенной зоны (в том числе и потоков заряженных частиц на тело) от начального до конечного стационарного состояния, которое рассматривается как искомое решение задачи. В случае слабой степени ионизации в начале решается системе уравнений Эйлера для нейтральной компоненты. Она решается с использованием явной схемы метода крупных частиц Давыдова [21–25]. Полученные поля скоростей, концентраций и температур нейтральной компоненты рассматриваются как фон, на котором осуществляется решение электродинамической части задачи. Уравнения неразрывности для ионов и электронов также решаются методом крупных частиц. При этом на каждом временном слое определяется самосогласованное электрическое поле путем решения уравнения Пуассона. Отметим некоторые достоинства метода крупных частиц применительно к задачам обтекания тел слабоионизованной столкновительной плазмой.

1. Метод удобен для решения нестационарных и многомерных задач с учетом различных физических процессов, происходящих в пристеночной плазме и на границе с твердой поверхностью (ионизация, рекомбинация, возбуждение, эмиссия электронов и т. д.).

2. Вычислительная схема метода консервативна, что особенно важно в ионизованных средах. Незначительные погрешности в определении концентраций ионов и электронов, которые входят в правую часть уравнения Пуассона, могут существенно влиять на значение самосогласованного электрического поля, которое на следующем временном шаге входит в уравнение неразрывности для заряженных частиц.

3. Метод удобен для организации параллельного счета. При этом возможны различные виды распараллеливания: алгоритмические, физические, геометрические.

4. Метод позволяет обеспечить однородность вычислительного алгоритма как во внутренних областях расчетной области, так и на границах.

5. Метод естественным образом позволяет рассчитать процессы переноса, а также процессы перемешивания различных компонент под действием конвекции, диффузии и подвижности.

6. Теоретическое обоснование метода и особенности его применения в задачах обтекания заряженных тел столкновительной плазмой достаточно хорошо разработаны [1, 2, 28].

Согласно идеологии метода крупных частиц используется расщепление исходной системы уравнений по физическим процессам. Исследуемое пространство покрывается фиксированной в пространстве (эйлеровой) равномерной ортогональной расчетной сеткой. Каждая ячейка сетки рассматривается как крупная частица. На первом (эйлеровом) этапе определяются параметры внутри ячеек сетки при условии отсутствия конвективных членов. На втором (лагранжевом) этапе вычисляются потоки массы, импульса и энергии через границы эйлеровой сетки. На третьем заключительном этапе проводится пересчет массы, импульса, энергии в ячейках эйлеровой сетки.

Метод с успехом применяется на криволинейных и неоднородных сетках, на адаптивных сетках. Разностное представление дифференциального оператора в общем случае имеет вид

$$\Lambda = \sum_{\alpha=0}^{N} P_\alpha(\Delta\mathbf{r})|(\Delta\mathbf{r})|^\alpha$$

и зависит от сеточного вектора $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{e}_x + \Delta y\,\mathbf{e}_y + \Delta z\,\mathbf{e}_z$.

В работах Ю. М. Давыдова и его учеников [34, 35] обоснована необходимость использования однородных (когда $\Delta\mathbf{r}$ неизменен по величине и направлению во всех точках сетки) и изотропных (когда все компоненты $\Delta\mathbf{r}$ одинаковы) вычислительных пространств.

При применении однородных вычислительных пространств возникает проблема представления границ тел сложной геометрии. В [35] предложен метод дробных ячеек, успешно применяемый для решения сложных задач, например, нестационарного статор-роторного взаимодействия газотурбинного двигателя.

Чтобы не нарушать единообразия вычислений и не применять специальных формул для ячеек на границах расчетной области, предложен метод фиктивных ячеек [35]. В слой ячеек за расчетной областью значения экстраполируются, как правило, линейно. Использование экстраполяции первого порядка практически не сказывается на точности решения при достаточно большом размере расчетной области.

Структура апроксимационной вязкости метода крупных частиц близка к свойствам турбулентной вязкости. Расчеты, проведенные в [34] с использованием уравнений Эйлера, показывают, что частоты Струхаля и ряд других параметров при обтекании цилиндра турбулентным потоком практически совпадают с экспериментальными данными.

Оптимальное число частиц с точки зрения вычислительных ресурсов и точности решения определяются методическими расчетами. Размер расчетной области в задачах динамики пристеночной плазмы заранее не известен, однако он должен быть больше размеров возмущенной зоны и, как правило, определяется также методическими расчетами. Размер расчетной области зависит от геометрии внесенных в плазму тел, их потенциалов, параметров плазмы и других факторов (химических реакций, ионизации, эмиссии электронов, инжекции частиц, наличия внешних полей и др.). На рис. 8.1 приведены характерные размеры возмущенной области Δ, полученные в численных экспериментах, для слабоионизованной покоящейся плазмы с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями для тел кругового сечения.

Как следует из рис. 8.1, размер расчетной области в достаточно широком диапазоне изменения характерных параметров задачи составляет $(100r_{\mathrm{D}}–200r_{\mathrm{D}})$. При $r_{\mathrm{p}}/r_{\mathrm{D}} > 10^3$ сферическое тело становится похожим на плоское с тонким слоем объемного заряда.

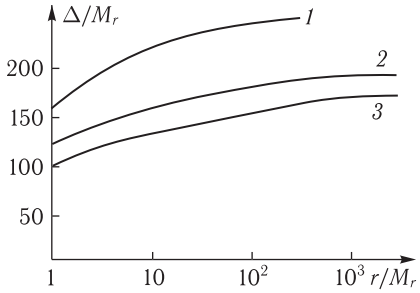


Рис. 8.1. Зависимость размера возмущенной зоны вблизи сферического тела от r/M_r и $\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$: *1* — $\varepsilon = 1$; *2* — 0,5; *3* — 1,0

В интервале изменения параметров задачи, необходимых для практики, Δ достаточно слабо зависит от потенциала тела. Более сильная зависимость проявляется от характерного размера тела r_0 и отношения температур $T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}} = \varepsilon$. Количественная зависимость Δ от величины магнитного поля, эмиссии электронов, инжекции заряженных частиц, направленной скорости, химических реакций и других факторов имеется в [1]. Если возмущенная зона оказывается настолько велика, что не соответствует ресурсам ЭВМ, возникает вопрос о корректной постановке граничных условий на внешней границе расчетной области с учетом возмущения.

Рассмотрим вопрос о выборе шага по времени Δt. Как показано в [3], условие устойчивости Неймана применительно к гиперболическим уравнениям будет выполнятся, если использовать известную схему Лакса [84]. Анализ устойчивости схемы, проведенный в [83] для случая линейных дифференциальных уравнений, приводит к неравенству $|v\Delta t/\Delta x| \leq 1$, где v — физическая скорость среды, Δt — шаг по времени, Δx — шаг по пространственной координате. Отсюда вытекает

Таблица 8.1

N_θ \ N_r	1	2	3	4	5
1	−1,65	−1,51	−1,43	−1,34	−1,27
20	−1,32	−1,26	−1,03	−0,98	−0,85
40	−0,94	−0,51	−0,22	−0,09	0,06
60	−1,68	−1,55	−1,48	−1,39	−1,29

$r_0 = 3$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$

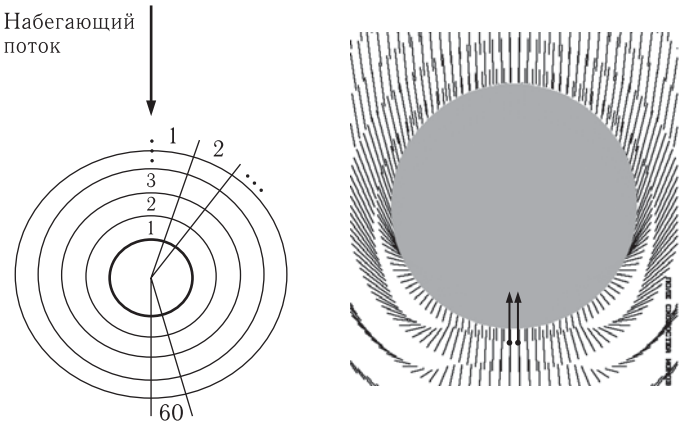


Рис. 8.2. Радиальная скорость ионов в пристеночной области цилиндрического электрода ($r_0 = 3$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

ограничение на шаг по времени $\Delta t \le \Delta x/|v_{\max}|$, где $v_{\max}$ — максимальная скорость крупных частиц. Это условие для шага по времени является примером условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [82] применительно к линейным гиперболическим уравнениям. Полученное неравенство означает, что в явном методе шаг по времени нужно выбирать меньше наименьшего характерного физического времени задачи, которое в случае уравнений переноса есть время, за которое скорость v приводит к переносу на расстояние Δx. Условие Куранта–Фридрихса–Леви включает требование, чтобы физическая скорость v была меньше сеточной скорости $\Delta x/\Delta t$.

Обширные вычислительные эксперименты с нелинейными системами дифференциальных уравнений применительно к пристеночной плазме [1–5] как в молекулярном, так и в континуальном режимах показали, что приведенное ограничение на шаг по времени оказывается слишком жестким. Если потенциал стенки достаточно высок, то кривая распределения потенциала имеет максимальный градиент вблизи поверхности, следовательно, вблизи поверхности максимален перенос, связанный с подвижностью. Во многих задачах вблизи поверхности максимален также и градиент концентрации заряженных

Таблица 8.2

N_θ \ N_r	1	2	3	4	5
1	−2,78	−2,20	−1,76	−1,35	−1,05
20	−2,32	−1,88	−1,36	−1,04	−0,71
40	−1,66	−0,99	−0,47	−0,18	0,08
60	−2,17	−1,87	−1,66	−1,45	−1,26

$r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$

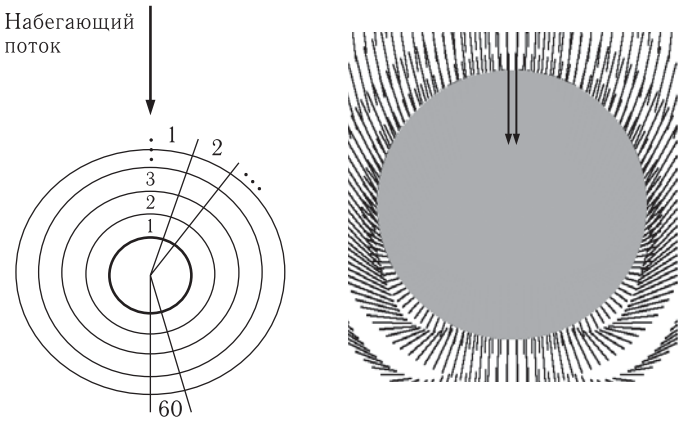


Рис. 8.3. Радиальная скорость ионов в пристеночной области цилиндрического электрода ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

частиц, поэтому максимален перенос, связанный с процессом диффузии. Из сказанного следует, что именно вблизи поверхности находятся самые высокоскоростные частицы среды, которые и влияют на шаг по времени через условие Куранта–Фридрихса–Леви. Для подтверждения сказанного приведем несколько примеров из конкретных вычислительных экспериментов [85]. На рисунках 8.2 и 8.3 рассматривается заряженный цилиндр, помещенный в поперечный поток слабоионизованной столкновительной плазмы. Расчеты проведены при числе Маха $\mathrm{M} = 0{,}6$, электрическом числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_э = 25$, безразмерном потенциале цилиндра $\varphi_0 = \varphi/\mathrm{M}_\varphi = -45$ и двух значениях безразмерного радиуса $r_0 = r/\mathrm{M}_r = 3$ и 10; $\mathrm{M}_\varphi = kT_\mathrm{i}/e$ — масштаб потенциала, $\mathrm{M}_r = r_\mathrm{D} = [\varepsilon_0 kT_\mathrm{i}/(n_{\mathrm{i}\infty}e^2)]^{1/2}$ — масштаб длины. На рисунках 8.2 и 8.3 указана эйлерова сетка по радиусу и угловой координате, а также профиль скоростей ионов. В таблицах 8.1 и 8.2 приведены безразмерные значения радиальной скорости в нескольких характерных ячейках. Из рисунков видно, что максимальная радиальная составляющая физической скорости среды имеет место вблизи стенки. Сгущение линий тока ионов вблизи сороковой ячейки по углу объясняется влиянием конвек-

ции, а достаточно высокая радиальная скорость в теневой области — вихревым движением нейтральной компоненты, которая увлекает за собой ионы.

Эффект возрастания радиальной скорости вблизи поверхности еще более усиливается в случае плоских пристеночных электродов. Плоский электрод всегда имеет край с малым радиусом кривизны. Как известно из электростатики, в точках с малым радиусом кривизны растет напряженность электрического поля (краевой эффект), а следовательно и нормальная составляющая скорости заряженных частиц. В качестве иллюстрации краевого эффекта на рис. 8.4 приведена нормальная составляющая безразмерных скоростей ионов для плоского пристеночного электрода (см. рис. 1.2) в случае континуальной покоящейся плазмы. Численные значения скоростей на рис. 8.4 соответствуют ячейкам эйлеровой сетки, использованной при расчетах.

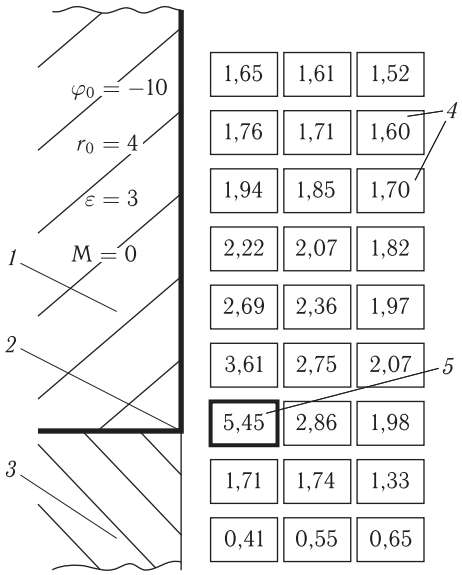


Рис. 8.4. Распределение нормальных составляющих скорости ионов вблизи плоского электрода: *1* — плоский электрод; *2* — край электрода с малым радиусом кривизны; *3* — диэлектрическая пластина, на которой расположен электрод; *4* — ячейки Эйлеровой сетки с указанием величины безразмерной скорости среды; *5* — ячейка с максимальной скоростью

Учитывая каталитические свойства поверхности для заряженных частиц, можно ожидать, что самые высокоскоростные притягивающиеся частицы за несколько шагов по времени поглощаются на электроде и выбывают из рассмотрения. Иными словами, в условие Куранта–Фридрихса–Леви входят скорости очень малого числа короткоживущих частиц, не отражающих динамику всего массива.

Приведенные примеры и другие вычислительные эксперименты позволяют сделать вывод, что шаг по времени как в молекулярном, так и в континуальном, режимах может быть увеличен в 3–5 раз по сравнению с его величиной, вытекающей из условия Куранта–Фридрихса–Леви, без нарушения устойчивости и точности решения. В указанных выше работах шаг по времени определялся из методических расчетов. Поскольку условие Куранта–Фридрихса–Леви, выведенное для линейных уравнений, имеет наглядную физическую интерпретацию, оно использовалось как начальное приближение при проведении методических расчетов.

8.2. Методы решения уравнений Максвелла

В задачах обтекания тел слабоионизованной столкновительной плазмой система уравнений Максвелла сводится к уравнению Пуассона [1–2]. В алгоритме решения задачи обтекания тел столкновительной плазмой, изложенного в разд. 8.1 на каждом временном слое необходимо решать уравнение Пуассона, из которого определяется напряженность и потенциал самосогласованного электрического поля. Методы решения уравнения Пуассона в случае тел кругового сечения достаточно хорошо разработаны [86–88]. Удобно использовать спектральные методы, в которых искомая функция разлагается по собственным функциям дифференциального оператора. Тогда конечно-разностная задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Одно из достоинств такого подхода — точное выполнение граничных условий при соответствующем выборе функции.

При решении задачи можно разлагать входящие в уравнение функции в ряд Фурье как по обоим направлениям, так и по одному. В первом случае получают независимые алгебраические уравнения для определения амплитуд всех гармоник, во втором случае задача сводится к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, для которой существует эффективный метод решения — метод прогонки.

Если расчетная область имеет сложную форму или размерность задачи равна трем, то выгоднее использовать итерационные методы. Общий алгоритм решения линейной системы уравнений

$$Au = w$$

можно записать как решение эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au + w$$

или в разностной форме в виде итерационного алгоритма

$$u^{k+1} = u^k - \delta A u^k + \delta w^k,$$

который будет эффективен, если диагональные элементы матрицы A будут достаточно велики по сравнению с остальными элементами. Условие сходимости для шага δ имеет вид

$$0 \leq \delta \leq 1.$$

Часто скорость сходимости растет, если параметр δ превышает единицу. Тогда метод называется методом верхней релаксации.

Если концентрация электронов, входящая в уравнение Пуассона, подчиняется закону Больцмана $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}0} \exp[-e\varphi/(kT_{\mathrm{e}})]$, то безразмерное уравнение Пуассона принимает вид $\Delta\varphi = \exp\varphi - n_{\mathrm{i}}$. Решение этого нелинейного уравнения достигается итерациями

$$\Delta\varphi^{s+1} = \exp(\varphi^{S})(1 + \varphi^{S+1} - \varphi^{s}) - n_{\mathrm{i}}.$$

Для решения этой системы алгебраических уравнений также удобно применять итерационный метод верхней релаксации.

8.3. Методы решения задач обтекания тел столкновительной плазмой

При расчете гиперзвукового обтекания тел с учетом турбулентности и равновесной диссоциации и ионизации воздуха используется методика, основанная на технологиях программного продукта EFD.Lab фирмы NIKA GmbH, разработанного для решения практических инженерных задач [89–92, 136, 2]. Опыт применения программных продуктов показывает, что расчеты должны быть проведены за весьма ограниченное время, иначе они теряют свою значимость. Соответственно, возникает ограничение на размерность сетки, которую можно применить, а также очень жесткие требования к быстродействию алгоритмов, применяемых для построения уравнения состояния. С другой стороны, грубые сетки не просто снижают точность расчета, но, более того, влияние некоторых физических эффектов остается за пределами «разрешающей способности» метода.

К основным особенностям метода необходимо также отнести использование прямоугольных адаптированных к поверхности сеток и использование сквозного счета, что снижает трудоемкость задания данных в случае произвольных геометрий. Описываемый метод расчета реализован в программах AeroShape-3D и EFD.Lab (NIKA GmbH), которые используются рядом ведущих Российских аэрокосмических фирм.

Используемая методика моделирования гиперзвуковых потоков объединяет в себе методы решения уравнений Навье–Стокса с (k–ε)-моделью турбулентности, расчета пограничного слоя, расчета термодинамических и теплофизических свойств равновесно реагирующего газа, основанные либо на прямом решении задачи расчета термодинамического равновесия в каждой точке дискретного пространства, либо на использовании различного рода аппроксимаций.

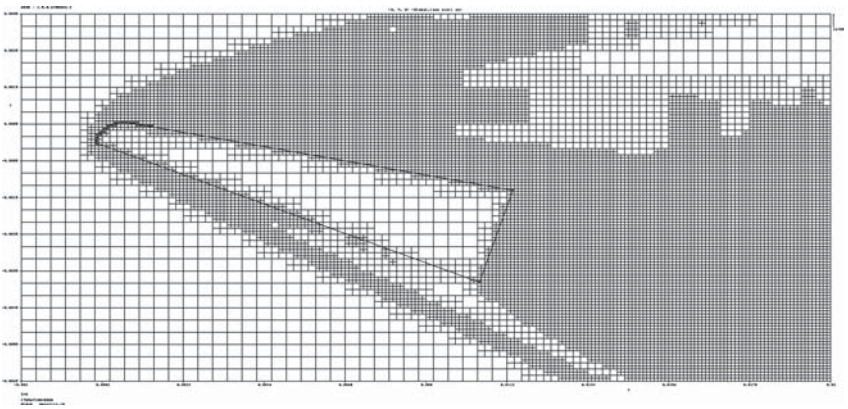


Рис. 8.5. След расчетной сетки

Построение расчетной сетки, применяемой для конечно-разностной дискретизации приведенных уравнений, основывается на технологии прямоугольных локально раздробленных адаптивных сеток, которая обеспечивает возможность автоматического построения сетки для областей со сложной геометрией [89]. При адаптации сетки к поверхности учитываются направление нормали и изменение объема ячейки за счет ее пересечения с поверхностью. В этом смысле сетка становится нерегулярной на поверхности тела, оставаясь регулярной в остальной расчетной области. Поверхность тела в сеточном представлении является набором многогранников, у которых нормаль совпадает с локальной нормалью исходного тела, а грани лежат в базовых плоскостях, параллельных соответствующим осям системы координат. На примере решения большого (несколько тысяч) набора задач показано, что такое представление с достаточной точностью описывает исходную геометрию и обладает сеточной сходимостью к точным решениям при измельчении сетки. Метод построения сеток позволяет автоматически определять геометрические особенности исходной геометрии увеличивать разрешение в местах расположения геометрических особенностей согласно заданным критериям. Адаптация сетки происходит путем локального измельчения контрольных объемов (деления их на 8 частей). Пример такой сетки, использованный для расчета обтекания полуконуса под углом атаки, приведен на рис. 8.5. Используемая сетка может также быть адаптирована к особенностям течения для выделения, например, ударных волн или иных областей с сильными градиентами. Такая адаптация производится, когда особенности течения уже сформировались. Так, начало расчета происходит на грубой сетке, а затем решение уточняется на более подробных сетках с выделением особенностей течения.

Для построения аппроксимаций используется конечно-объемный подход, при этом величины относятся к центрам масс ячеек. Такой подход позволяет построить консервативные разностные схемы [89–92].

Для решения системы уравнений используется явный метод, близкий к методу Годунова [68] и имеющий второй порядок аппроксимации по пространству. Так, для определения потоков на гранях ячеек решается задача о распаде разрыва, а для определения значений слева и справа используются аппроксимации второго порядка с использованием minmod регуляризатора.

Метод ориентирован на использование «грубых» сеток. Так, число ячеек между ударной волной и поверхностью объекта может составлять 3–4 ячейки, и при этом будет достигнута удовлетворительная точность. Возможность расчета на грубых сетках важна для расчета объектов произвольной формы, когда построение адаптированных к поверхности криволинейных сеток является либо трудоемким, либо совсем невозможным. Опыт расчетов показывает, что использование упрощенной задачи о распаде газодинамического разрыва, основанный на линеаризации исходных уравнений по уравнению состояния, дает приемлемую точность до числа $\mathrm{M} = 10$ на данном типе сеток. Далее для получения удовлетворительной точности на таких сетках необходимо использовать нелинейные уравнения, решаемые итерационным методом. Применение нелинейного распадника замедляет скорость расчета примерно в два раза.

Для постановки проточных граничных условий используются соотношения на характеристиках [68], а для непроточных также решается задача о распаде разрыва.

При решении задач сопряженного теплообмена используется уравнение теплопроводности в твердом теле, решаемое неявным методом при фиксированных граничных условиях, определяемых из явного условия сопряжения.

Для вычисления напряжений трения и коэффициента теплоотдачи интегрируются уравнения пограничного слоя с граничными условиями на стенке и его внешней границе. В отличие от традиционных пристеночных функций, вместо алгебраических соотношений осуществляется численное интегрирование уравнения пограничного слоя в каждой рассматриваемой на поверхности точке с учетом предыстории вверх по потоку. В таком подходе не требуется выполнения аналогии Рейнольдса.

8.4. Методы расчета равновесного состава газовых смесей

При численном моделировании гиперзвуковых течений с учетом равновесной диссоциации и ионизации важное место занимает создание методики расчета равновесного состава смеси, а также на ее основе разработка термодинамически непротиворечивых табличных уравнений состояния, позволяющих в несколько раз сократить временны́е затраты.

Пусть задана закрытая система, про которую известно, что в ней остаются неизменными пара термодинамических параметров (например: V, T; V, U; P, T; P, H; S, H и др.) и содержание элементов: γ_K^0, $k = 1, \ldots, N_\mathrm{A}$ [моль/кг] (N_A — число атомов). Требуется найти равновесный

состав, т. е. концентрации γ_i, $i = 1, \ldots, N$ (N — число рассматриваемых веществ), удовлетворяющие условиям термодинамического равновесия.

Если система замкнутая, то количество атомов k-го элемента в системе остается неизменным:

$$\sum_{i=1}^{N} A_K^i \gamma_i = \gamma_K^0, \quad k = 1, \ldots, N_{\text{A}}. \tag{8.1}$$

Пусть система заполнена смесью идеальных газов, тогда, используя (7.41), условия химического равновесия (7.24) примут вид:

$$\mu_i(P, T) = RT \ln(P\gamma_i/P_0 \sum_{(j)} \gamma_j) + G_i^0(T) = \sum_{K=1}^{N_{\text{A}}} A_K^i \tilde{\mu}_K. \tag{8.2}$$

Выразим из (8.2) γ_i с использованием уравнения состояния (7.31):

$$\gamma_i = \frac{P_0 V}{RT} \exp\Big(\sum_{K=1}^{N_{\text{A}}} A_K^i Z_K - \mu_i^0\Big), \tag{8.3}$$

где $Z_K = \tilde{\mu}_K/(RT)$, $\mu_i^0 = G_i^0(T)/(RT)$.

Подставим (8.3) в (8.1) и получим законы сохранения элементного состава в форме

$$\frac{P_0 V}{RT} \sum_{i=1}^{N} A_K^i \exp\Big(\sum_{L=1}^{N_{\text{A}}} A_L^i Z_L - \mu_i^0\Big) = \gamma_K^0, \quad k = 1, \ldots, N_{\text{A}}. \tag{8.4}$$

Система уравнений (8.4) устанавливает связь в состоянии химического равновесия между двумя термодинамическими параметрами V и T и параметрами Z_K, $K = 1, \ldots, N_{\text{A}}$. Если V и T известны, то Z_K могут быть найдены из (8.4), а затем из (8.3) могут быть рассчитаны равновесные концентрации γ_i, $i = 1, \ldots, N$.

В состоянии термодинамического равновесия концентрации γ_i в соответствии с (8.3) являются функциями двух термодинамических параметров V и T. Вычислим производные равновесных концентраций по удельному объему и температуре. Продифференцируем (8.3), получим:

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\partial \gamma_i}{\partial V}\Big)_T = \gamma_i\Big(\sum_{K=1}^{N_{\text{A}}} A_K^i \frac{\partial Z_K}{\partial V} + \frac{1}{V}\Big);\\ \Big(\frac{\partial \gamma_i}{\partial T}\Big)_V = \gamma_i\Big(\sum_{K=1}^{N_{\text{A}}} A_K^i \frac{\partial Z_K}{\partial T} + \frac{U_i^0(T)}{RT^2}\Big).\end{gathered} \tag{8.5}$$

Для нахождения $\partial Z_K/\partial V$ и $\partial Z_K/\partial T$ запишем полный дифференциал от законов сохранения элементного состава, записанного в виде (2.4):

$$\begin{aligned} &d\Big[\sum_{i=1}^{N} A_K^i \gamma_i(V, T, Z_1, \ldots, Z_K)\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{N} A_K^i \gamma_i \frac{dV}{V} + \sum_{i=1}^{N} A_K^i \gamma_i U_i^0 \frac{dT}{RT^2} + \sum_{i=1}^{N} A_K^i \gamma_i \sum_{L=1}^{N_a} A_L^i \, dZ_L = 0, \quad k = 1, \ldots, N_{\text{A}}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

$U_i^0 = H_i^0 - RT$ или в матричной форме:

$$b_V\, dV + b_T\, dT + A\, dZ = 0. \tag{8.7}$$

Здесь b_V — вектор с элементами $b_V^K = (1/V)\sum_{i=1}^N A_K^i \gamma_i$, b_T — вектор с элементами $b_T^K = [1/(RT^2)]\sum_{i=1}^N A_K^i \gamma_i U_i^0$, A — матрица с элементами $A_K^L = \sum_{i=1}^N A_K^i \gamma_i A_L^i$, тогда $(\partial Z/\partial V)_T = -A^{-1} b_V$, $(\partial Z/\partial T)_V = -A^{-1} b_T$.

С использованием уравнения состояния могут быть легко найдены производные:

$$\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \tag{8.8}$$

Уравнение состояния для смеси идеальных газов имеет вид (7.31). Возьмем дифференциал от левой и правой частей:

$$P\, dV + V\, dP = R\sum_{i=1}^N \gamma_i\, dT + RT\sum_{i=1}^N d\gamma_i =$$
$$= R\sum_{i=1}^N \gamma_i\, dT + RT\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial T}\right)_V dT\right]. \tag{8.9}$$

Из (8.9), приведя подобные члены, получим выражения для вычисления производных от удельного объема по температуре и давлению:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{V}{P - RT\sum\limits_{i=1}^N \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial V}\right)_T}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{R\sum\limits_{i=1}^N \left[\gamma_i + T\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial T}\right)_V\right]}{P - RT\sum\limits_{i=1}^N \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial V}\right)_T}. \tag{8.10}$$

С использованием (7.41), (8.5)–(8.10) могут быть вычислены: равновесная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial \sum\limits_{i=1}^N \gamma_i(P,T) H_i(T)}{\partial T}\right)_P = \sum_{i=1}^N \left[\gamma_i \frac{\partial H_i}{\partial T} + H_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial T}\right)_P\right]; \tag{8.11}$$

и равновесная скорость звука

$$a^2 = V^2 \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T - V)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}, \tag{8.12}$$

$$\text{где} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = \sum_{i=1}^N H_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial P}\right)_T.$$

8.4.1. Методы расчета равновесного состава при заданных удельном объеме и температуре. Пусть задана смесь, состоящая из N идеальных газов, с известным удельным объемом (V) или плотностью ($\rho = 1/V$), температурой (T) и элементным составом (γ_K^0 — количество молей k-го атома в килограмме смеси). Необходимо найти состав смеси в состоянии термодинамического равновесия (γ_i, $i = 1, \ldots, N$).

В состоянии термодинамического равновесия выполняются: закон сохранения элементного состава (8.1), условия химического равновесия (7.24), которые для смеси идеальных газов можно переписать в виде (8.2); после алгебраических преобразований получим систему N_A уравнений вида (8.4), неизвестными в которой являются параметры Z_K, $K = 1, \ldots, N_\text{A}$. Система нелинейных уравнений (8.4) может быть решена численно. Искомые концентрации γ_i, $i = 1, \ldots, N$, могут быть найдены по формулам (8.3).

При решении задачи расчета равновесного состава важно достичь конечного результата с минимальными вычислительными затратами. Решения системы (8.4) можно свести к задаче нахождения точки безусловного минимума выпуклой функции [78]

$$f(Z) = \frac{P_0 V}{RT} \sum_{i=1}^{N} \exp\Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i Z_K - \mu_i^0\Big) - \sum_{K=1}^{N_\text{A}} \gamma_K^0 Z_K, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_K). \quad (8.13)$$

Продифференцируем (8.13) по Z_K и приравняем соответствующие производные к нулю. Получим систему нелинейных уравнений, совпадающую с (8.4):

$$\frac{\partial f}{\partial Z_K} = \frac{P_0 V}{RT} \sum_{i=1}^{N} A_K^i \exp\Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i Z_K - \mu_i^0\Big) - \gamma_K^0 = 0, \quad k = 1, \ldots, N_\text{A}.$$

Докажем, что $f(Z)$ всюду выпукла, для этого рассмотрим произвольную прямую в пространстве переменных:

$$Z_K = Z_K^{(n)} + \dot{Z}_K t, \quad k = 1, \ldots, N_\text{A}. \quad (8.14)$$

Здесь $Z_K^{(n)}$ — некоторое начальное приближение переменной Z_K, $\dot{Z}_K$ — тангенс угла наклона прямой, t — параметр. Подставим (8.14) в (8.13) и дважды продифференцируем полученное выражение по параметру t. Получим:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i \dot{Z}_K\Big) - \sum_{K=1}^{N_\text{A}} \gamma_K^0 \dot{Z}_K, \quad (8.15)$$

$$\ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i \dot{Z}_K\Big)^2. \quad (8.16)$$

Вторая производная $\ddot{f}$ по t строго положительна в любом направлении ($\gamma_i > 0$, Z_K — любое число). Следовательно, f — выпукла и имеет единственную точку минимума.

Наличие всюду выпуклого функционала (8.13) существенно упрощает решение задачи расчета равновесного состава при заданных удельном объеме и температуре и позволяет построить эффективные всегда сходящиеся алгоритмы ее решения.

8.4.2. Методы расчета равновесного состава при заданных удельном объеме и внутренней энергии. Пусть задана смесь, состоящая из N идеальных газов, с известным удельным объемом (V) или плотностью ($\rho = 1/V$), внутренней энергией (U) и элементным составом γ_K^0, $k = 1, \ldots, N_\text{A}$. Необходимо найти состав смеси в состоянии термодинамического равновесия (γ_i, $i = 1, \ldots, N$).

В состоянии термодинамического равновесия выполняются: закон сохранения элементного состава (8.1), условия химического равновесия для смеси идеальных газов (2.2) и условие постоянства внутренней энергии смеси

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_i U_i(T) = U. \tag{8.17}$$

После алгебраических преобразований получим систему из $N_\text{A} + 1$ уравнения, а именно, систему (8.4), дополненную уравнением (8.17). Неизвестными являются параметры Z_K, $K = 1, \ldots, N_\text{A}$, и температура T. Система нелинейных уравнений (8.4), (8.17) может быть решена численно. Искомые концентрации γ_i, $i = 1, \ldots, N$, могут быть найдены по формулам (8.3).

Решения системы (8.4), (8.17) можно свести к задаче нахождения точки безусловного минимума выпуклой функции [78]

$$f\Big(Z, \frac{1}{T}\Big) = \frac{P_0 V}{RT} \sum_{i=1}^{N} \exp\Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i Z_K - \mu_i^0\Big) - \sum_{K=1}^{N_\text{A}} \gamma_K^0 Z_K + \frac{U}{RT}. \tag{8.18}$$

Продифференцируем (8.18) по Z_Kи $1/T$ и приравняем соответствующие производные к нулю. Получим систему нелинейных уравнений, совпадающую с (8.4), (8.17),

$$\frac{\partial f}{\partial Z_K} = \frac{P_0 V}{RT} \sum_{i=1}^{N} A_K^i \exp\Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i Z_K - \mu_i^0\Big) - \gamma_K^0, \quad k = 1, \ldots, N_\text{A}, \tag{8.19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial 1/T} = \frac{P_0 V}{RT} \sum_{i=1}^{N} U_i(T) \exp\Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i Z_K - \mu_i^0\Big) - \frac{U}{R}. \tag{8.20}$$

При получении (8.19), (8.20) использовались выражения для мольно-массовых концентраций в состоянии термодинамического равновесия (8.3), соотношения (7.41).

Докажем, что $f(Z, y)$, где $y = T_0/T$ всюду выпукла, для этого рассмотрим произвольную прямую в пространстве переменных:

$$Z_K = Z_K^{(n)} + \dot{Z}_K t, \quad k = 1, \ldots, N_\text{A}, \quad y = y^{(n)} + \dot{y} t, \tag{8.21}$$

тогда

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Big(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i \dot{Z}_K - \frac{U_i(T)}{RT_0} \ddot{y} \Big) - \sum_{K=1}^{N_\text{A}} \gamma_K^0 \dot{Z}_K + \frac{U}{RT_0} \ddot{y}; \tag{8.22}$$

$$\ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left[\left(\sum_{K=1}^{N_\text{A}} A_K^i \dot{Z}_K - \frac{U_i(T)}{RT_0} \ddot{y} \right)^2 + \frac{C_{Vi}}{R} \left(\frac{\ddot{y}}{y} \right)^2 \right] > 0. \tag{8.23}$$

Вторая производная $\ddot{f}$ по t строго положительна в любом направлении ($\gamma_i > 0$, Z_K — любое число, $C_{Vi} = (\partial E_i/\partial T)_V > 0$ — молярные теплоемкости компонентов при постоянном объеме. Следовательно, f — строго выпукла и имеет единственную точку минимума.

8.4.3. Методы расчета равновесного состава при заданных давлении и температуре. Пусть задана смесь, состоящая из N идеальных газов, с известным давлением (P), температурой (T) и элементным составом γ_K^0, $k = 1, \ldots, N_\text{A}$. Необходимо найти состав смеси в состоянии термодинамического равновесия (γ_i, $i = 1, \ldots, N$).

В состоянии термодинамического равновесия выполняются: закон сохранения элементного состава (8.1), условия химического равновесия (8.2) и уравнение состояния для смеси идеальных газов (7.31). После алгебраических преобразований получим систему из $N_\text{A} + 1$ уравнения. В эту систему входят уравнения (8.4) и (7.31), искомыми неизвестными являются параметры Z_K, $K = 1, \ldots, N_\text{A}$, и V. Система нелинейных уравнений (8.4), (7.31) может быть решена численно. Концентрации γ_i, $i = 1, \ldots, N$, могут быть найдены по формулам (8.3).

Уравнения (7.31) совместно с системой (8.4) при заданном элементном составе в состоянии термодинамического равновесия определяют неявную зависимость

$$\gamma_i = \gamma_i(V, T), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8.24}$$

При этом по формулам (8.5)–(8.7) могут быть вычислены производные $(\partial\gamma_i/\partial V)_T$ и $(\partial\gamma_i/\partial T)_V$.

Поэтому уравнение состояния (7.31) можно рассматривать, как неявно заданную зависимость удельного объема от давления и температуры

$$PV - RT \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(V, T) = 0. \tag{8.25}$$

Таким образом, задача расчета равновесного состава при заданном давлении и температуре может быть сведена к решению нелинейного уравнения (8.25), которое может быть решено любым стандартным итерационным методом, на каждой итерации которого необходимо решать задачу нахождения равновесного состава при известных удельном объеме и температуре.

8.4.4. Уравнение состояния в табличной форме. Качество применяемого уравнения состояния и описания термодинамических свойств во многом определяет качество и точность полученного решения. С точки зрения быстродействия табличное уравнение состояния в равновесном случае работает намного быстрее решателя для равновесной диссоциирующей смеси. С другой стороны, такой подход ограничивает область определения уравнения состояния с заранее заданным диапазоном. Решатель, в свою очередь, ограничен с точки зрения применимости реализованных в нем моделей и механизма реакций. Удовлетворительное по точности решение можно получить, если применяемое уравнение состояния удовлетворяет ряду изложенным ниже требованиям.

Рассмотрим физические соображения, которые дают возможность построить физически непротиворечивую систему.

1. Уравнение состояния должно определять связи вида $p = F(\rho, T, Y)$, где Y — вектор состава. В рассматриваемом нами алгоритме основными (переносными) переменными являются ρ, ρu_i, ρE, ρk, $\rho\varepsilon$, ρY_i, соответственно, плотность, компоненты импульса, полная внутренняя энергия, энергия турбулентности и степень ее диссипации и массовая доля компонент. Именно для этих переменных выполняются законы сохранения, а энергия в целом сохраняется, переходя из одного состояния в другое, в рамках системы, описываемой этими переменными. Поэтому в данной конкретной системе выгодно строить термодинамическое замыкание относительно этих переменных. Это зависимости вида: $p = F(\rho, E, Y)$, $T = F(\rho, E, Y)$.

Теплофизические свойства системы выражаются через переносимые величины.

2. Для задания начального состояния системы удобны также зависимости вида: $(\rho, E) = F(P, T, Y)$, $E = F(\rho, T, Y)$, $E = F(\rho, P, Y)$.

В этом случае должна обеспечиваться однозначность преобразований вида: $(\rho, E) = F(p, T_0, Y)$, $T_1 = F(p, E, Y) \Rightarrow T_1 = T_0$.

3. Должны выполняться такие соотношения для зависимых величин, которые определяют термодинамику системы, например основное уравнение термодинамики (7.13).

Рассмотрим построение табличного уравнения состояния для газа, удовлетворяющее упомянутым требованиям.

Возьмем за основу (7.13) и перепишем его для смеси, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, в виде

$$dS = \frac{1}{T}\,dU + \frac{p}{T}\,dV.$$

В качестве табличной зависимости будем хранить $S(U, V)$. Тогда

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V, \quad \frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U.$$

Более подробно вопрос о построении табличного уравнения состояния рассмотрен в работе [134]. Таблица $S(U, V)$ рассчитывается с использованием равновесного решателя, описанного в разделе (8.4.2).

8.4.5. Метод решения задачи о распаде произвольного газодинамического разрыва в равновесно реагирующем газе. Задача о распаде произвольного разрыва является одним из основных элементов численных методов решения уравнений газовой динамики, базирующихся на методе С. К. Годунова. Ее решение приводится в большом количестве монографий и учебников, впервые задача о распаде разрыва была решена Н. Е. Кочиным. Даже в простейших случаях данная задача не имеет аналитического решения и сводится к решению нелинейного уравнения [68]. Использование точного решения задачи о распаде разрыва в многомерных алгоритмах не представляется возможным, поэтому в последнее время появилось большое количество приближенных решателей, охватывающих различные среды с различными уравнениями состояния. Ниже приводится обобщение вычислительного алгоритма точного решения задачи о распаде произвольного разрыва, описанного в [68], на случай равновесно реагирующей смеси идеальных газов [135]. Описанные алгоритмы, в частности, могут быть использованы для тестирования методик многомерного моделирования течений высокотемпературного газа и при разработке приближенных решателей задачи о распаде разрыва.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$, левое полупространство $X < 0$ характеризуется параметрами: $u_{\text{Л}}$, $p_{\text{Л}}$, $T_{\text{Л}}$, $\gamma_{\text{Л},i}$, $i = \overline{1, N}$, а правое — $X > 0$ — $u_{\text{П}}$, $p_{\text{П}}$, $T_{\text{П}}$, $\gamma_{\text{П},i}$, $i = \overline{1, N}$ (рис. 8.6). Здесь и далее u, p, T, γ_i — скорость, давление, температура и мольно-массовые концентрации химических компонент соответственно.

$u_{\text{Л}},\ p_{\text{Л}},\ T_{\text{Л}},\ \gamma_{\text{Л},i}$	$u_{\text{П}},\ p_{\text{П}},\ T_{\text{П}},\ \gamma_{\text{П},i}$

Рис. 8.6. Параметры в левом и правом полупространстве в начальный момент времени

При этом, если параметры слева и справа в начальный момент времени произвольные, то исходный разрыв при $t > 0$ распадается на несколько разрывов, возможные конфигурации которых описаны например в [68] или [85]. Схематически автомодельная картина течения на плоскости $X - t$ при $t > 0$ изображается одной из пяти возможных конфигураций, четыре из которых представлены на рис. 8.7 (УВ — ударная волна, КР — контактный разрыв, ВР — центрированный веер волн разрежения). Слева и справа от разрывов находятся зоны постоянных параметров. Пятая конфигурация представляет собой вырожденную четвертую, а именно давление между веерами волн разрежения равно нулю и контактный разрыв отсутствует.

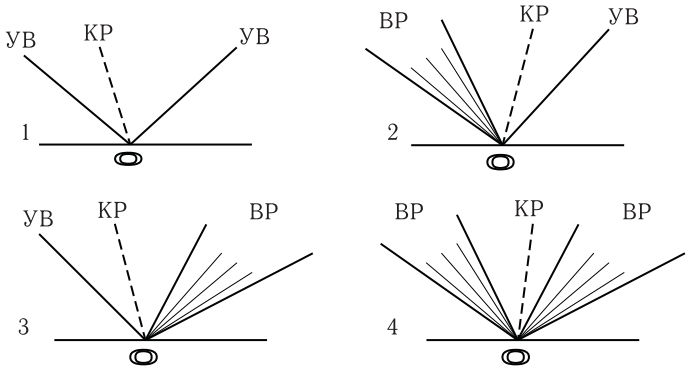


Рис. 8.7. Возможные конфигурации разрывов

При переходе через ударную волну выполняются соотношения Ренкина–Гюгонио [85], которые могут быть записаны в виде:

$$\begin{gathered}\rho_{\text{Д}}(D-u_{\text{Д}})=\rho_{\text{З}}(D-u_{\text{З}});\\ p_{\text{Д}}+\rho_{\text{Д}}(D-u_{\text{Д}})^2=p_{\text{З}}+\rho_{\text{З}}(D-u_{\text{З}})^2;\\ U_{\text{Д}}+\frac{p_{\text{Д}}}{\rho_{\text{Д}}}+\frac{(D-u_{\text{Д}})^2}{2}=U_{\text{З}}+\frac{p_{\text{З}}}{\rho_{\text{З}}}+\frac{(D-u_{\text{З}})^2}{2}.\end{gathered} \tag{8.26}$$

Здесь D — скорость ударной волны, ρ — плотность, U — внутренняя энергия, индексом «Д» помечены параметры до волны, индексом «З» — параметры за волной.

В веере волн разрежения течение непрерывно и выполняются дифференциальные уравнения газовой динамики, например в своей характеристической форме:

$$\begin{gathered}\frac{dX}{dt}=u\pm a,\quad du\pm\frac{1}{\rho a}\,dp=0,\\ \frac{dX}{dt}=u,\quad dS=0.\end{gathered} \tag{8.27}$$

Здесь a — скорость звука, S — энтропия.

Плотность, внутреннюю энергию, скорость звука и энтропию, можно рассматривать как известные функции давления, температуры и концентраций.

В случае, если считается, что химический состав при переходе через ударную волну и в веере волн разрежения не меняется, то к соотношениям (8.27) добавляются условия:

$$\gamma_{\text{З},i}=\gamma_{\text{Д},i},\quad i=1,\ldots,N, \tag{8.28}$$

а к соотношениям, выполняемые вдоль траектории газа, условия:

$$d\gamma_i=0,\quad i=1,\ldots,N. \tag{8.29}$$

Если считается, что смесь газов находится в состоянии термодинамического равновесия, то концентрации химических компонент являются неявно заданными функциями двух термодинамических параметров, например давления и температуры, и атомарного состава слева и справа от исходного разрыва соответственно:

$$\gamma_i = \gamma_i(p, T, \gamma^0_{K,M}), \quad i = 1, \ldots, N, \quad K = 1, \ldots, N_{\text{А}}, \quad M = \text{Л}, \text{П}. \quad (8.30)$$

Здесь $\gamma^0_{K,\text{Л}}$ и $\gamma^0_{K,\text{П}}$ — число молей K-го элемента в килограмме смеси слева и справа от разрыва, соответственно, данные величины остаются неизменными и на ударной волне и в веере волн разрежения.

Решить задачу о распаде разрыва — это значит определить реализуемую при конкретных параметрах конфигурацию, найти параметры течения слева и справа от контактного разрыва (на контактном разрыве, как известно, скорость и давление газа непрерывны, а плотность, температура и концентрации могут претерпевать разрыв) и, если это необходимо, рассчитать параметры внутри веера волн разрежения.

Из соотношений (8.26) можно получить уравнение для ударной адиабаты:

$$U - U_M - \frac{1}{2}(p + p_M)\left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{\rho}\right) = 0, \quad m = \text{Л}, \text{П}, \quad (8.31)$$

соотношение, связывающее перепады скорости, давления и плотности на ударной волне:

— для левой ударной волны $$u - u_{\text{Л}} + \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_{\text{Л}}} - \frac{1}{\rho}\right)(p - p_{\text{Л}})} = 0; \quad (8.32)$$

— для правой ударной волны $$u - u_{\text{П}} - \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_{\text{П}}} - \frac{1}{\rho}\right)(p - p_{\text{П}})} = 0. \quad (8.33)$$

Из (8.27) можно получить соотношения, связывающие параметры до и после веера волн разрежения:

— для левого веера $$u - u_{\text{Л}} + \int\limits_{p_{\text{Л}}}^{p} \frac{dp}{\rho a} = 0; \quad (8.34)$$

— для правого веера $$u - u_{\text{П}} - \int\limits_{p_{\text{П}}}^{p} \frac{dp}{\rho a} = 0. \quad (8.35)$$

В веере волн разрежения сохраняется энтропия

$$S = S_M, \quad M = \text{Л}, \text{П}. \quad (8.36)$$

Соотношения (8.31) и (8.36) совместно с выражениями (8.26) неявно задают температуру, плотность и скорость звука как функции давления: $T = T(p)$, $\rho = \rho(p)$ и $a = a(p)$. Поэтому подкоренные выражения

в (8.32), (8.33) и подинтегральные выражения в (8.34), (8.35) можно рассматривать как функции давления. И, следовательно, решение задачи о распаде произвольного разрыва сводится к решению одного нелинейного уравнения относительно давления на контактном разрыве. Например, для случая, когда слева от контактного разрыва находится веер волн разрежения, а справа — ударная волна, уравнение для определения давления имеет вид

$$u_{\text{П}} - u_{\text{Л}} + \int\limits_{p_{\text{Л}}}^{p} \frac{dp}{\rho a} + \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_{\text{П}}} - \frac{1}{\rho}\right)(p - p_{\text{П}})} = 0, \tag{8.37}$$

причем плотность $\rho = \rho(p)$ и скорость звука $a = a(p)$, входящие в подинтегральное выражение, находятся из уравнения состояния и условия сохранения энтропии в веере волн разрежения (8.36), а плотность, стоящая под радикалом, — из уравнения состояния и ударной адиабаты (8.31). В случае равновесно-реагирующего газа дополнительно используются зависимости (8.30).

В общем случае, если ввести аналогично [68] функцию $f(p, p_M)$:

$$f(p, p_M) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{p_M}^{p} \frac{dp}{\rho a}, & p \le p_M; \\ \sqrt{\left(\dfrac{1}{\rho_M} - \dfrac{1}{\rho}\right)(p - p_M)}, & p > p_M, \end{cases} \qquad M = \text{Л}, \text{П}, \tag{8.38}$$

то решение задачи о распаде произвольного разрыва сводится к решению одного нелинейного уравнения относительно давления:

$$F(p) = u_{\text{П}} - u_{\text{Л}} + f(p, p_{\text{Л}}) + f(p, p_{\text{П}}) = 0. \tag{8.39}$$

С использованием (8.31) можно получить выражение для производной $f(p, p_M)$:

$$\frac{df(p, p_M)}{dp} = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho a}, & p \le p_M; \\ \dfrac{\left(\dfrac{1}{\rho_M} - \dfrac{1}{\rho}\right)\left(U_T - \dfrac{p_M \rho_T}{\rho^2}\right)a^2 + \dfrac{(p - p_M)}{\rho^2}\left(U_T - \dfrac{p\rho_T}{\rho^2}\right)}{2\left(U_T - \dfrac{p + p_M}{2\rho^2}\rho_T\right)\sqrt{\left(\dfrac{1}{\rho_M} - \dfrac{1}{\rho}\right)(p - p_M)}}, & p > p_M, \end{cases}$$

$$M = \text{Л}, \text{П}. \tag{8.40}$$

Здесь использованы обозначения: $\rho_T = (\partial\rho/\partial T)_P$, $U_T = (\partial U/\partial T)_P$. Выражение (8.40) положительно, если

$$U_T > 0, \quad \rho_T < 0, \tag{8.41}$$

следовательно функция $F(p)$ — возрастающая. В этом случае конфигурация в задаче о распаде разрыва может быть определена заранее.

- $F(p_Л) < 0 \;\Rightarrow\; p > p_Л \;\Rightarrow$ влево распространяется ударная волна;
- $F(p_Л) > 0 \;\Rightarrow\; p < p_Л \;\Rightarrow$ влево распространяется веер волн разрежения;
- $F(p_П) < 0 \;\Rightarrow\; p > p_П \;\Rightarrow$ вправо распространяется ударная волна;
- $F(p_П) > 0 \;\Rightarrow\; p < p_П \;\Rightarrow$ вправо распространяется веер волн разрежения.

Искомое давление p находится из (8.39) итерационным методом, например методом Ньютона; при этом интеграл, входящий в (8.38), в общем случае вычисляется численно на каждой итерации. Выражение для определения скорости газа на контактном разрыве с использованием (8.32)–(8.35) и (8.38) имеет вид

$$u = \frac{1}{2}[u_П + u_Л - f(p, p_Л) + f(p, p_П)]. \tag{8.42}$$

Температура газа на контактном разрыве со стороны веера волн разрежения находится из условия изоэнтропичности (8.36), а со стороны ударной волны — из адиабаты Гюгонио (8.31). Параметры внутри веера могут быть вычислены при заданной автомодельной переменной $\xi = dX/dt = u \pm a$, из $\xi \mp a - u_M \mp \int_{P_M}^{P} [1/(\rho a)]\, dp = 0$ (верхний знак берется, если веер образован характеристиками семейства C^+, $m = Л$, нижний — C^-, $M = П$), и условия изоэнтропичности $S = S_M$, $M = Л, П$. При этом для крайних характеристик центрированного веера разрежения $\xi_M = u_M \mp a_M$.

Скорость ударной волны при рассчитанных параметрах на контактном разрыве u и ρ (со стороны ударной волны) находится из (8.26): $D = (\rho u - \rho_M u_M)/(\rho - \rho_M)$.

Данный алгоритм применим для решения задачи о распаде произвольного разрыва в случае произвольных уравнений состояния сред, находящихся слева и справа от первоначального разрыва и удовлетворяющих условиям (8.41).

Будем рассматривать смесь идеальных газов, в этом случае термодинамические свойства смеси описываются заданием потенциала Гиббса вида (7.36). Если рассматривается равновесно-реагирующая смесь, то концентрации γ_i могут быть найдены из законов сохранения атомарного состава, условия электронейтральности (8.1) и условий термодинамического равновесия (8.2).

В веере волн разрежения сохраняется энтропия

$$S = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left[S_i^0(T) - R \ln \frac{P\gamma_i}{P_0 \sum\limits_{j=1}^{N} \gamma_j} \right] = S_M, \quad m = Л, П. \tag{8.43}$$

Плотность $\rho = \rho(P)$, входящая в подинтегральное выражение (8.38), находятся из уравнения (8.43) с использованием уравнения состояния (7.31); плотность под корнем (8.38) — из уравнений состояния (7.19) и ударной адиабаты:

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_i U_i^0(T) - U_M + \frac{1}{2}(p + p_{\text{П}})\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_M}\right) = 0, \quad m = \text{Л}, \text{П}. \qquad (8.44)$$

В случае равновесно реагирующего газа концентрации γ_i являются функциями давления, температуры и элементного состава, и могут быть найдены по методике, описанной в разд. 7.4.3. Равновесные теплоемкости, скорости звука и другие термодинамические характеристики вычисляются по формулам (8.5)–(8.12).

Таким образом, для решения задачи о распаде произвольного разрыва необходимо сделать следующее.

1. Вычислив $F(p_{\text{Л}})$ и $F(p_{\text{П}})$, определить конфигурацию, возникающую после распада разрыва. Далее задать точность расчета ε, диапазон изменения давления (например для конфигурации ВР–УВ, искомое давление удовлетворяет неравенству $p_{\text{Л}} > p > p_{\text{П}}$) и начальное приближение для искомого значения давления p.

2. Вычисляем $F(p)$, причем вычислять температуру из (8.31) или (8.43) необходимо с точностью $\varepsilon_T \leq \varepsilon/5$. Задача расчета равновесных концентраций решается на каждом шаге определения температуры с точностью $\varepsilon_\gamma \leq \varepsilon/10$. Интеграл, входящий в (8.38), также необходимо вычислять с контролем точности (с ошибкой $\varepsilon_I \leq \varepsilon/3$).

Если $|F(p)| \leq \varepsilon$, то переходим к шагу 3. Если $|F(p)| > \varepsilon$, то находим новое приближение значения давления, например методом Ньютона (с проверкой на нахождение значения давления внутри диапазона, определенного на шаге 1) и повторяем шаг 2.

3. Вычисляем скорость контактного разрыва из (8.42), скорости ударных волн и крайних характеристик вееров волн разрежения. Температуры, плотности, теплоемкости, скорости звука и концентрации компонент слева и справа от контактного разрыва уже найдены в шаге 2.

Необходимо отметить, что описанный выше алгоритм позволяет решать задачу о распаде произвольного разрыва для случаев, когда концентрации при переходе через ударную волну или веер волн разрежения не меняются; и когда условиям термодинамического равновесия удовлетворяют только концентрации химических компонент за ударной волной.

Рассмотрим решение задачи о распаде разрыва в высокотемпературном воздухе на модельных примерах. В первом примере предполагается, что концентрации при переходе через веер волн разрежения и ударную волну остаются неизменными. Начальные параметры перед распадом разрыва приведены в табл. 8.3.

В результате расчета реализовалась конфигурация: влево — ударная волна, вправо — веер волн разрежения с параметрами, приведенными

Таблица 8.3

	U, м/с	P, Па	T, К	C_P/C_V	a, м/с	m, г/моль	Начальные концентрации компонент, кг в/кг см
Л	0	$1 \cdot 10^4$	300	1,395	347	28,96	O_2 — 0,2315, N_2 — 0,7556, Ar — 0,0129
П	0	$1 \cdot 10^7$	10000	1,219	1871	28,96	O_2 — 0,2315, N_2 — 0,7556, Ar — 0,0129

в табл. 8.4. Строка в табл. 8.4 соответствует одному варианту расчета. Во втором столбце содержится скорость контактного разрыва (КР), в третьем — давление на КР; в четвертом — температуры, в пятом — отношения теплоемкостей, в шестом — скорости звука слева и справа от КР; в седьмом — скорости крайних характеристик веера волн разрежения, распространяющегося по воздуху, и скорость ударной волны, распространяющейся по горючей смеси.

Таблица 8.4

№	U, м/с	P, Па	T, К	C_P/C_V	a, м/с	Скорость УВ, ВР, м/с
1	−2943	1178950	4951 6592	1,278 1,263	1347 1546	3422 −1396, 1871

Состав в первом расчете считался неизменным.

Во втором примере скорость, давление, температура, а также атомарный состав воздуха, был тем же, что и первом. При этом использовалось предположение, что смесь слева и справа находится в состоянии термодинамического равновесия, но концентрации при переходе через веер волн разрежения и ударную волну остаются неизменными.

Соответствующие начальные данные приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

	U, м/с	P, Па	T, К	C_P/C_V	a, м/с	m, г/моль	Начальные концентрации компонент, кг. в/кг. см
Л	0	10000	300	1,395	347	28,96	O_2 — 0,2315, N_2 — 0,7556, Ar — 0,0129
П	0	$1 \cdot 10^7$	10000	1,359	2568	17,13	O_2 — 0,0004, N_2 — 0,2776, NO — 0,015, N_2^+ — 0,004, NO^+ — 0,0013, O^+ — 0,0003, N^+ — 0,0011, O — 0,2219, N — 0,4677, Ar — 0,0129

В результате расчета реализовалась конфигурация: влево — ударная волна, вправо — веер волн разрежения с параметрами, приведенными в табл. 8.6.

Таблица 8.6

№	U, м/с	P, Па	T, К	C_P/C_V	a, м/с	m, г/моль	Скорость УВ, ВР
1	−3205	1392803	5727 5669	1,272 1,454	1446 2001	28,96 17,13	3715 −1205, 2568

В третьем расчете скорость, давление, температура, а также атомарный состав воздуха, был тем же, что и первом и во втором. Но при этом использовалось предположение, что смесь находится в состоянии термодинамического равновесия. Соответствующие начальные данные приведены в табл. 8.5.

В результате расчета реализовалась конфигурация: влево — ударная волна, вправо — веер волн разрежения, с параметрами, приведенными в табл. 8.7.

Таблица 8.7

№	U, м/с	P, Па	T, К	C_P/C_V	a, м/с	m, г/моль	Скорость УВ, ВР	Концентрации компонент, кг в/кг см
1	−3489	1591173	4590	1,25	1388	25,94	3903	O_2 — 0,0599, N_2 — 0,7158, NO — 0,083, O — 0,1274, N — 0,0011, Ar — 0,0129
			8199	1,27	2245	18,53	−1420, 2405	O_2 — 0,0003, N_2 — 0,4030, NO — 0,0122, N_2^+ — 0,0001, NO^+ — 0,0010, O^+ — 0,0001, N^+ — 0,0002, O — 0,2241, N — 0,3462, Ar — 0,0129

Необходимо отметить, что во втором и третьем расчете начальные скорости, давления, температуры и состав одинаковые (табл. 8.5). В третьем расчете предполагается, что концентрации компонент при переходе через веер волн разрежения и ударную волну находятся в состоянии термодинамического равновесия, во втором — остаются неизменными. Результаты второго и третьего расчета существенно отличаются (таблицы 8.6 и 8.7). Данный факт необходимо учитывать

при исследовании высокотемпературных процессов, а также при разработке вычислительных методов многомерного моделирования, в алгоритме которых используются результаты решения задачи о распаде разрыва.

Как было отмечено выше, использование строгой задачи с полным учетом переменности всех свойств невозможно для практически значимых пространственных задач в силу больших вычислительных затрат. Принимая во внимание грубость сетки в случае трехмерных задач, необходимо построить решатель задачи о распаде разрыва таким образом, чтобы он сочетал необходимое быстродействие с достаточной точностью.

Одним из способов ускоренного решения задачи является использование только «слабых» конфигураций и получение на их основе чисто алгебраических соотношений для определения давления и скорости контактного разрыва [68]. Такие соотношения выведены для линейного (идеальногазового) уравнения состояния, и практический опыт расчетов с использованием этого способа дает хорошие результаты в случае идеального газа [89–92].

С ростом числа Маха набегающего потока, начиная с $M = 6$, реальные свойства воздуха оказывают все большее влияние. Точность вычисления параметров при сквозном счете с использованием линейной задачи падает, особенно при расчете вееров разрежения.

Поэтому для гиперзвуковых течений был применен подход с использованием модельного уравнения состояния. Модельным уравнением состояния будем называть такое, в котором вычисленные с его помощью в опорной точке ρ_0, T_0 значения параметров P_0, e_0, s_0, c_{V0}, γ_0, a_0 совпадают с точными значениями указанных параметров, например вычисленных по алгоритмам, описанным в разделах 7.4, 8.3, 8.4.1 и 8.4.3. Полученное вышеописанным способом модельное уравнение состояния используется в «распадниках», основано на уравнениях состояния идеального газа с выбранными особым образом эффективными значениями теплоемкости, показателя адиабаты и газовой постоянной. Опыт применения данного подхода показывает, что в случае, если численная схема является консервативной и обеспечивает точное выполнение в опорных точках уравнений состояния реального газа, то полученное установившееся решение оказывается «точным» с точки зрения численных методов.

8.4.6. Метод расчета равновесной ударной адиабаты. Ударная адиабата определяет множество возможных решений соотношений Ренкина–Гюгонио (8.26) на плоскости P–V в зависимости от скорости ударной волны D. Если дополнительно делается предположение о том, что газовая смесь находится в состоянии термодинамического равновесия (т. е. выполняется условие (8.30)), то ударная адиабата называется равновесной.

Для расчета равновесной ударной адиабаты необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(V_З, T_З)H_i^0(T_З) - \sum_{i=1}^{N}\gamma_i(V_Д, T_Д)H_i^0(T_Д) - \frac{1}{2}(V_З + V_Д)(p_З - p_Д) = 0. \tag{8.45}$$

Мольно-массовые концентрации γ_i можно рассматривать как неявно-заданные функции удельного объема и температуры, которые рассчитываются по методике, описанной в п. 8.4.1. Давление p удовлетворяет уравнению состояния:

$$p_M = \frac{RT_M\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i(V_M, T_M)}{V_M}, \quad M = Д, З. \tag{8.46}$$

Таким образом, при заданных $V_Д, T_Д$ и известном $T_З$, из (8.45) численно может быть найдено $V_З$, и из (8.46) — $p_З$. На каждой итерации при нахождении $V_З$, по методике, описанной в настоящей главе, вычисляются равновесные мольно-массовые концентрации $\gamma_{З,i} = \gamma_i(V_З, T_З)$ и производные от них по удельному объему.

Приведем результаты расчета равновесной ударной адиабаты для однократно ионизированного воздуха. Давление воздуха перед ударной волной $p_Д$ варьировалось от 10^{-4} до 1 атм (101 325 Па), температура $T_Д$ — принималась равной 298,15 К, массовые концентрации компонент: O_2 — 0,2315; N_2 — 0,7556; Ar — 0,0129.

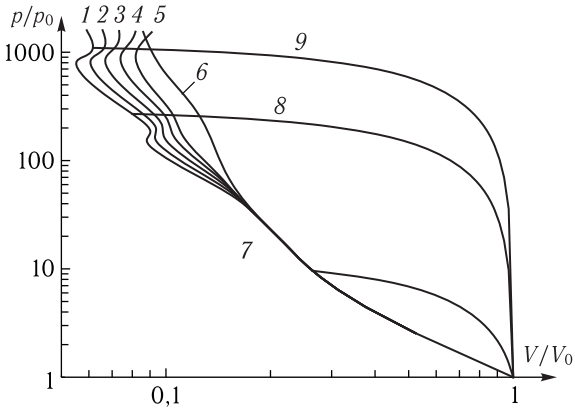


Рис. 8.8. Равновесные ударные адиабаты и прямые Релея для воздуха

На рисунках 8.8 и 8.9 приведены в логарифмическом масштабе равновесные ударные адиабаты воздуха и изменение температуры вдоль них, соответственно, при различных начальных давлениях. Кривая *1* соответствует начальному давлению $p_Д = 10^{-4}$ атм, кривая *2* — 10^{-3} атм, кривая *3* — 0,1 атм, кривая *4* — 0,1 атм, кривая *5* — 1 атм,

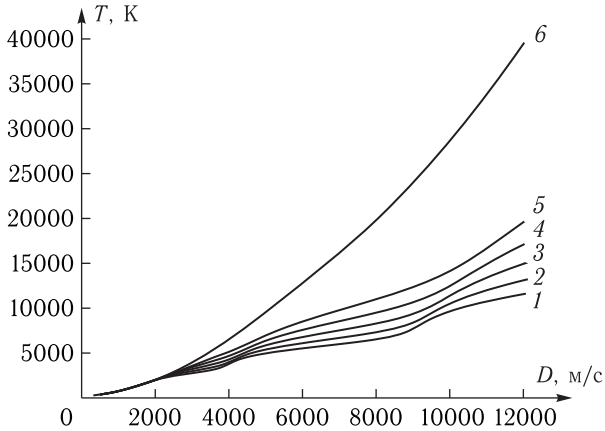


Рис. 8.9. Зависимости температуры воздуха на равновесных ударных адиабатах от скорости ударной волны

кривая *6* соответствует замороженной ударной адиабате воздуха, ее вид не зависит от начального давления. Кривые *7–9* соответствуют прямым Релея при различных значениях скорости ударной волны в покоящемся газе (или, что тоже самое относительной скорости набегающего потока $D - u_Д$), 1000, 5000 и 10000 м/с, соответственно. Уравнение для прямой Релея может быть получено из (8.26):

$$\frac{p_З}{p_Д} = 1 - \frac{(D - u_Д)^2}{p_Д V_Д}\left(1 - \frac{V}{V_Д}\right). \qquad (8.47)$$

Расчет адиабат проводился до достижения скорости ударной волны 12000 м/с, предполагалось наличие равновесия между поступательными, вращательными и колебательными степенями свободы компонент. Из рис. 8.8 следует, что до скорости ударной волны 2100 м/с равновесные ударные адиабаты совпадают с замороженной. Если рассмотреть случай плоской ударной волны, распространяющейся в воздухе с постоянной скоростью, то качественная картина течения имеет следующий вид: состояние перед ударной волной соответствует точке с координатами (1, 1) рис. 8.8; состояние непосредственно за ударной волной соответствует точке пересечения прямой Релея и замороженной ударной адиабаты; далее не зависимо от кинетики протекающих процессов фазовая траектория совпадает с прямой Релея; фазовая траектория заканчивается в точке пересечения прямой Релея и равновесной детонационной адиабаты. Из рисунков 8.8 и 8.9 видно, что при движении по фазовой траектории давление возрастает, а удельный объем и температура уменьшается, при этом, чем меньше давление перед ударной волной, тем больше перепад давлений и меньше температура в точке окончания фазовой траектории — точке пересечения прямой Релея с равновесной ударной адиабатой.

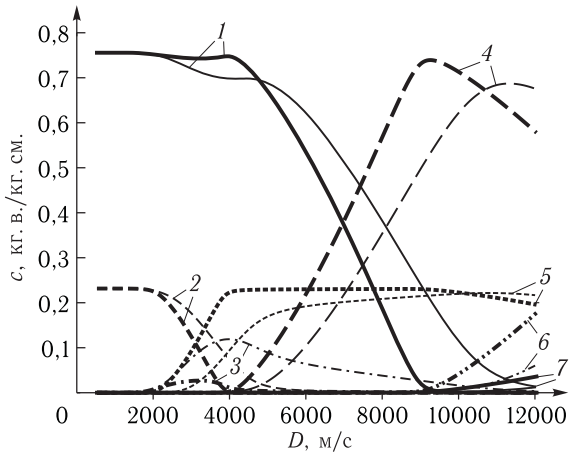


Рис. 8.10. Зависимости массовых концентраций компонент, входящих в равновесный состав воздуха, на ударных адиабатах от скорости ударной волны

На рис. 8.10 представлены зависимости массовых концентраций компонент на равновесной адиабате от скорости ударной волны. Жирные линии соответствуют давлению перед ударной волной 10,1325 Па, тонкие — 101325 Па. Концентрация N_2 — кривые *1*, O_2 — кривые *2*, NO — кривые *3*, N — кривые *4*, O — кривые *5*, N^+ — кривые *6*, O^+ — кривые *7*. Из графиков видно, что не смотря на то, что температура на равновесной адиабате понижается с уменьшением давления перед ударной волной рис. 8.9, процесс диссоциации и образования положительных ионов протекает быстрее. Это связано с сильным влиянием давления на значения равновесных концентраций. Немонотонности на графиках равновесных ударных адиабат и зависимостях температуры от скорости ударной волны связаны с протеканием процессов диссоциации ($D \sim 4000$ м/с) и ионизации ($D \sim 9000$ м/с).

8.5. Методы решения задачи обтекания тел столкновительной плазмой при промежуточных числах Кнудсена

8.5.1. Учет столкновений типа «ион–нейтрал». Предложенная численная модель основана на разбиении траектории движения иона на две части: движение между столкновениями на длине свободного пробега и непосредственно само столкновение. Движение между столкновениями изучается по методике, разработанной в [1] для свободномолекулярного режима. В этом случае динамика функции распределения подчиняется уравнению Власова. Алгоритм его решения основан на методе крупных частиц, либо на методе характеристик. На каждом временном слое уточняется значение самосогласованного электрического поля, определяемого уравнением Пуассона.

Система уравнений приводится к безразмерному виду с помощью стандартной системы масштабов, изложенной в гл. 1. В качестве примера рассмотрим безразмерную систему для тела в виде удлиненного прямоугольника шириной $2r$, находящегося под потенциалом φ_{p} (см. рис. 1.2) В этом случае в фазовом пространстве задача оказывается 4-мерной с координатами (x, y, v_x, v_y) и имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_i}{\partial y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial v_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f_i}{\partial v_y}\right) = 0; \\
\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_e}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{2\mu_e}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f_e}{\partial v_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f_e}{\partial v_y}\right) = 0; \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = n_e - n_i; \\
\mu_e = \frac{m_e}{m_i}; \\
\varepsilon = \frac{T_{\mathrm{i}}}{T_e}.
\end{gathered} \tag{8.48}$$

Система начальных и граничных условий стандартная [1].

Система дополняется формулами для моментов функций распределения:

$$\begin{gathered}
n_\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(x, y, v, v_y)\, dv_x\, dv_y, \\
j_\alpha = \Big|\sum_\alpha q_\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} f_\alpha(x, y, v_x, v_y) v_y\, dv_x\, dv_y\Big|, \\
\alpha = i, e.
\end{gathered} \tag{8.49}$$

Моделируемый объем фазового пространства разбивается на ячейки, размер которых ΔV должен быть таким, чтобы изменение параметров в каждой ячейке было малым. Эволюция возмущенной зоны начинается после импульсного изменения потенциала тела. Временной шаг Δt выбирается малым по сравнению со средним временем между столкновениями частиц.

Число шагов по времени зависит от отношения $\lambda_{ia}/\langle v_i\rangle$, где λ_{ia} — длина пробега иона до столкновения с атомом $\langle v_i\rangle$ — тепловая скорость иона, зависящая от температуры и молярной массы иона. Величина λ_{ia} выбирается статистическими методами.

На втором подшаге вычислительного алгоритма рассматривается процесс столкновений. Существуют различные методы моделирования этого процесса [93]. Из этого многообразия выбираем следующий.

Каждую из компонент плазмы разобьем по скорости на S интервалов (ионам присвоим индекс «i», а атомам «a»). Следовательно, эти индексы пробегают значение от 1 до S.

Например,

$$i = 1 \rightarrow V_x \in [V_{\min x}; V_{\min x} + \Delta V_x];$$
$$V_y[V_{\min y}; V_{\min y} + \Delta V_y];$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$i = S \rightarrow V_x \in [V_{\max x} - \Delta V_x; V_{\max x}];$$
$$V_y \in [V_{\max y} - \Delta V_y; V_{\max y}].$$

Аналогично для атомов (по индексу «а»).

Рассмотрим столкновение между частицей сорта «i» и частицей сорта «a». Будем использовать модель твердых сфер (рис. 8.11). Расчет столкновения проведем в соответствие с работой [93].

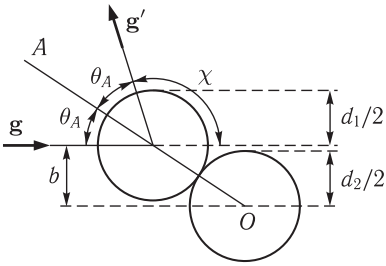


Рис. 8.11. Схема столкновения иона с атомом по модели твердых сфер

Считаются заданными скорости частиц до столкновения $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, диаметры твердых сфер d_1 и d_2 и прицельный параметр b.

Требуется определить скорости частиц после столкновений $\mathbf{V}_1'$ и $\mathbf{V}_2'$. Обозначим буквой $\mathbf{g} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$, а буквой $\mathbf{V}_m$ — скорость центра масс. Из законов сохранения энергии и импульса при абсолютно упругом ударе имеем [93]:

$$\begin{gathered} \mathbf{g} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2; \\ \mathbf{V}_m = \mathbf{V}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{g} = \mathbf{V}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{g}; \\ \chi = \pi - 2\theta_A, \quad \sin\theta_A = \frac{b}{d_1 + d_2} = \frac{b}{2d_{12}}; \\ |g'| = |g|. \end{gathered} \tag{8.50}$$

Из системы (8.50) определяются величины $\mathbf{g}'$, $\mathbf{V}_m$, χ и по ним определяются скорости частиц после столкновения:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1' &= \mathbf{V}_m + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{g}' = \mathbf{V}_m + \frac{1}{2}\mathbf{g}'; \\ \mathbf{V}_2' &= \mathbf{V}_m - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{g}' = \mathbf{V}_m - \frac{1}{2}\mathbf{g}'. \end{aligned} \tag{8.51}$$

Направление вектора $\mathbf{g}'$ относительно $\mathbf{g}$ определяется углом χ.

Полное сечение столкновений $\sigma = \pi d_{12}^2 = \pi(d_1 + d_2)^2/4$, а средняя частота столкновений $\nu_{ia} = n_a\langle\sigma g\rangle = \pi d_{12}^2 n_a\langle g\rangle$.

В случае упругих сфер

$$\langle g\rangle = \left(\frac{2}{\pi^{1/2}}\right)\left(\frac{2kT}{\mu}\right)^{1/2},$$

где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2) = m/2$ — приведенная масса.

Теперь частоту столкновений ионов с атомами можно представить в виде

$$\nu_{ia} = 2\pi^{1/2} d_{12}^2 n_a \left(\frac{4kT}{m}\right)^{1/2}. \tag{8.52}$$

Средняя длина свободного пробега иона равна его тепловой скорости, деленной на частоту столкновений,

$$\lambda_i = \frac{\langle V_i \rangle}{\upsilon_{ia}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{12}^2 n_a}. \tag{8.53}$$

Из физических соображений вводятся ограничения на шаг по времени Δt и размер координатной сетки Δx, Δy. Шаг по времени должен быть выбран таким, чтобы ион претерпел на нем не более одного столкновения:

$$\Delta t < \frac{1}{\nu_{ia}}. \tag{8.54}$$

Размер возмущенной области должен быть таким, чтобы частица, претерпев столкновение, не могла бы за время Δt вылететь за пределы области:

$$x_\infty \geq V_{\max x} \Delta t, \quad y_\infty \geq V_{\max y} \Delta t,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{V_{\max x} \Delta t}{N_x}, \\ \Delta y &\geq \frac{V_{\max y} \Delta t}{N_y}, \end{aligned} \tag{8.55}$$

где N_x, N_y — число шагов расчетной сетки по осям x и y.

Рассчитаем теперь число частиц (в расчете на единицу объема), которые покидают ячейку $[x, x + \Delta x]$, $[y, y + \Delta y]$ за время Δt за счет столкновений:

$$\Delta n_i^{\text{столк}} = n_i \nu_{ia} \Delta t. \tag{8.56}$$

Эти частицы следует изъять из функции распределения ионов и, придав им новые скорости, перераспределить по другим ячейкам. Расчет новых скоростей частиц производится по формулам (8.50), (8.51).

Концентрация частиц, покидающих данную ячейку, определяется соотношением $\Delta n_i^{\text{столк}} = \Delta f_i \, \Delta V_x \, \Delta V_y$.

Новая функция распределения в ячейке (x, y) определяется так:

$$\begin{aligned} f_{i\,\text{новая}} &= f_{i\,\text{старая}} - \Delta f_i; \\ \Delta f_i &= \frac{\nu_{ia}}{N_{v_x}^2 N_{v_y}^2} f_{i\,\text{стар}}. \end{aligned} \tag{8.57}$$

Ушедшие из старой ячейки частицы попадают в новую ячейку с координатами

$$\begin{aligned} x_{\text{нов}} &= x_{\text{стар}} + V_{x\,\text{нов}} \Delta t; \\ y_{\text{нов}} &= y_{\text{стар}} + V_{y\,\text{нов}} \Delta t. \end{aligned} \tag{8.58}$$

В результате прихода ионов в новую ячейку с координатами $(x_{\text{нов}}, y_{\text{нов}})$ функция распределения в ней изменяется:

$$f_{\text{нов}} = f_{\text{стар}} + \Delta f. \tag{8.59}$$

Изменение концентрации ионов в новой ячейке происходит по формуле:

$$n_{i\,\text{нов}} = \int\limits_{v_x}\int\limits_{v_y} f_{i\,\text{нов}}\, dv_x\, dv_y. \tag{8.60}$$

Расчет концентраций следует проводить после розыгрыша столкновений на каждом шаге Δt.

8.5.2. Учет столкновений типа «электрон–нейтрал». Идеология алгоритма расчета пристеночной слабоионизованной плазмы с учетом электрон-нейтральных столкновений близка к изложенной в п. 8.5.1 идеологии расчета с учетом столкновений «ион–нейтрал». Поэтому в этом разделе обратим внимание лишь на отличия и особенности алгоритма.

Первый этап расчета сохраняется полностью. На втором этапе моделируются столкновения между электроном и нейтральным атомом и вносятся изменения в функцию распределения электронов. Для этого электронная и нейтральная компоненты рассматриваются как смеси, состоящие из S сортов. Разбиение осуществляется по скорости. Каждый сорт для электронов отмечается индексом «e» ($e = 1, 2, \ldots, S$), а для нейтральных атомов индексом a ($a = 1, 2, \ldots, S$).

Например,

$$\begin{gathered} e = 1 \rightarrow V_x \in [V_{\min x}; V_{\min x} + \Delta V_x]; \\ V_y \in [V_{\min y}; V_{\min y} + \Delta V_y]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e = S \rightarrow V_x \in [V_{\max x} - \Delta V_x; V_{\max x}]; \\ V_y \in [V_{\max y} - \Delta V_y; V_{\max y}]. \end{gathered}$$

При рассмотрении динамики столкновения между электроном (сорт e) и атомом (сорт a) эффективный диаметр электрона ввиду его малости примем равным нулю. Эффективный диаметр атома обозначим d_a. Полное сечение столкновений будет равно

$$\sigma_{ea} = \frac{\pi d_a^2}{4}.$$

Средняя частота столкновений

$$\nu_{ea} = 2\pi^{1/2} d_a n_a \left(\frac{2kT_e}{m_e}\right)^{1/2}. \tag{8.61}$$

Ограничения на шаг по времени Δt и координаты Δx, Δy аналогичны п. 8.5.1.

Плотность частиц, претерпевших столкновения в данной ячейке $[x, x+\Delta x]$, $[y, y+\Delta y]$ за время Δt, равна

$$\Delta n_e^{\text{столк}} = n_e \nu_{ea} \Delta t. \tag{8.62}$$

Эти частицы вычитаем из функции распределения электронов и, придав им новые скорости, перераспределяем между другими ячейками в расчетной области аналогично п. 8.5.1.

Столкновение между электроном и атомом в рамках модели твердых сфер с учетом неравенства $m_e \ll m_a$ происходит по закону отражения от сферического зеркала (импульс электрона при столкновении изменяется только по направлению, но не по величине, рис. 8.11).

Выразим скорость электрона после столкновения (V'_{ex}, V'_{ey}) через скорость до столкновения (V_{ex}, V_{ey}) и параметр столкновений α. Из рис. 8.12 следует:

$$\begin{aligned} V'_{ex} &= V'_e \cos\delta; \\ V'_{ey} &= V'_e \sin\delta. \end{aligned} \tag{8.63}$$

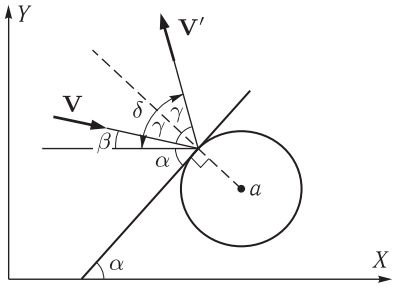


Рис. 8.12. Схема столкновения электрона с атомом по модели твердых сфер

Поскольку модуль скорости электрона при соударении не изменяется, то $V'_e = V_e = \sqrt{V_{ex}^2 + V_{ey}^2}$.

Из рис. 8.12 следует:

$$\delta = \beta + 2\gamma, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{V_{ey}}{V_{ex}}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta. \tag{8.64}$$

Следовательно,

$$\delta = \pi - 2\alpha - \beta = \pi - 2\alpha - \operatorname{arctg}\frac{V_{ey}}{V_{ex}}.$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} V'_{ex} &= -\sqrt{V_{ex}^2 + V_{ey}^2}\cos\left(2\alpha - \operatorname{arctg}\frac{V_{ey}}{V_{ex}}\right); \\ V'_{ey} &= +\sqrt{V_{ex}^2 + V_{ey}^2}\sin\left(2\alpha - \operatorname{arctg}\frac{V_{ey}}{V_{ex}}\right). \end{aligned} \tag{8.65}$$

Значения угла α зависят от места попадания электрона в атом. Поскольку области попадания электрона в атом равновероятны, следует концентрации сталкивающихся частиц распределить равномерно по всем направлениям. Аналогично п. 8.5.1 концентрация покидающих данную ячейку электронов определяется соотношением $\Delta n_e^{\text{столк}} = \Delta f_e \Delta V_x \Delta V_y$. Поэтому изменения функции распределения в старой ячейке

$$f_{e\,\text{нов}} = f_{e\,\text{стар}} - \Delta f_e, \quad \Delta f_e = \frac{\nu_{ea}}{N_{v_x}^2 N_{v_y}^2} f_{e\,\text{стар}}. \tag{8.66}$$

Эти частицы попадают в новую ячейку с координатами

$$\begin{aligned} x_{\text{нов}} &= x_{\text{стар}} + V'_{x\,\text{нов}}\,\Delta t; \\ y_{\text{нов}} &= y_{\text{стар}} + V'_{y\,\text{нов}}\,\Delta t. \end{aligned} \tag{8.67}$$

В результате прихода электронов в новую ячейку функция распределения электронов в ней изменяется:

$$f_{e\,\text{нов}} = f_{e\,\text{стар}} + \Delta f_e.$$

Вычисления концентрации в новой ячейке происходит по формуле:

$$n_e = \int\limits_{V_x}\int\limits_{V_y} f_{e\,\text{нов}}\,dv_x\,dv_y.$$

8.5.3. Учет столкновений типа «ион–ион», «ион–электрон». Учитывая сложность столкновительного оператора Фоккера–Планка, исследование задачи о влиянии ион-ионных и ион-электронных столкновений на процессы переноса в пристеночной плазме начнем с простейшего случая, когда в плазме находится бесконечная плоскость с заданным потенциалом $\varphi_{\text{р}}$. В этом случае функции распределения f_α будет зависеть только от двух фазовых переменных (y, v_y) и времени t (ось y направлена по нормали к поверхности). Математическая модель задачи в этом случае упрощается. Правая часть уравнения Фоккера–Планка для ионов в операторной записи имеет вид [80]:

$$\frac{1}{\Gamma_i}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{\text{FP}} = \frac{1}{2}(\nabla_v\nabla_v g_i(\mathbf{r},\mathbf{v},t)) : (\nabla_v\nabla_v f_i) + \nabla_v C_i(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\nabla_v f_i + 4\pi(\gamma f_e + f_i) f_i, \tag{8.68}$$

где $\nabla_v\nabla_v g_i(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ — ковариантная тензорная производная второго ранга, в которой

$$\begin{aligned} g_i &= \int f_i|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\,d\mathbf{v}' + \frac{1}{x^2}\int f_e|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\,d\mathbf{v}'; \\ C_i &= (1-\gamma)\int \frac{f_e\,d\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}, \quad \gamma = \frac{m_i}{m_e}. \end{aligned} \tag{8.69}$$

Аналогичное выражение имеет место для правой части в операторной форме для электронов:

$$\frac{1}{\Gamma_e}\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{\text{FP}} = \frac{1}{2}(\nabla_v\nabla_v g_e(\mathbf{r},\mathbf{v},t)) : (\nabla_v\nabla_v f_e) + \nabla_v C_e(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\nabla_v f_e + 4\pi\left(\frac{f_i}{\gamma} + f_e\right) f_e, \tag{8.70}$$

$$\begin{aligned} g_e &= \int f_e|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|d\mathbf{v}' + \int f_i|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|d\mathbf{v}', \\ C_e &= \frac{(\gamma-1)}{\gamma}\int \frac{f_i}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}d\mathbf{v}'. \end{aligned} \tag{8.71}$$

Учитывая геометрию задачи, приводящую к зависимости функций распределения только от двух переменных (y, v_y), математическая модель упрощается:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + V_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + \frac{F_\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{dv_y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_y^2}\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_y^2} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y}\frac{\partial c_\alpha}{\partial v_y} + H_\alpha, \quad \alpha = i, e; \tag{8.72}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{e}{\varepsilon_a}(n_i - n_e), \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{8.73}$$

После масштабирования с использованием системы масштабов гл. 1 система (8.72)–(8.73) принимает вид (индекс обезразмеривания опущен)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + A_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + B_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial V_y} = D_\alpha \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial V_y^2} + K_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial V_y} + H_\alpha, \quad \alpha = i, e; \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = n_e - n_i, \quad E = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\
\text{где} \quad A_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha} V_y, \quad B_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha}\frac{1}{2\varepsilon_\alpha}, \quad \delta_\alpha = \frac{\varepsilon_\alpha}{\mu_\alpha}; \\
\varepsilon_\alpha = \frac{T_{\alpha\infty}}{T_{\mathrm{i}\infty}}, \quad \mu_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_i};
\end{gathered} \tag{8.74}$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{\mathrm{i}\infty}}\right)^{1/2} \frac{m_a}{2kT_{a\infty}} \left\{ \frac{n_{\mathrm{i}\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{\mathrm{i}\infty}}{m_i}\right)^{1/2}} + \frac{n_{e\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{e\infty}}{m_e}\right)^{1/2}} \right\} \frac{\partial^2 g_a}{\partial V_y^2};$$

$$K_\alpha = \begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{\mathrm{i}\infty}}\right)^{1/2} \dfrac{n_{e\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{\mathrm{i}\infty}}{m_i}\right)^{1/2}\left(\dfrac{2kT_{e\infty}}{m_e}\right)^{1/2}} \dfrac{\partial C_i}{\partial V_y}, & \alpha = i; \\ \left(\dfrac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{\mathrm{i}\infty}}\right)^{1/2} \dfrac{n_{\mathrm{i}\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{\mathrm{i}\infty}}{m_i}\right)^{1/2}\left(\dfrac{2kT_{e\infty}}{m_e}\right)^{1/2}} \dfrac{\partial C_e}{\partial V_y}, & \alpha = e. \end{cases} \tag{8.75}$$

$$H_\alpha = \begin{cases} 4\pi\left(\dfrac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{\mathrm{i}\infty}}\right)^{1/2} \left(\dfrac{\gamma f_e n_{\mathrm{i}\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{e\infty}}{m_e}\right)^{1/2}} + f_i \dfrac{n_{\mathrm{i}\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{\mathrm{i}\infty}}{m_i}\right)^{1/2}} \right) f_i, & \alpha = i; \\ 4\pi\left(\dfrac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{\mathrm{i}\infty}}\right)^{1/2} \left(\dfrac{1}{\gamma} f_i \dfrac{n_{\mathrm{i}\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{\mathrm{i}\infty}}{m_i}\right)^{1/2}} + f_e \dfrac{n_{\mathrm{i}\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{e\infty}}{m_e}\right)^{1/2}} \right) f_e, & \alpha = e. \end{cases}$$

Для решения уравнения Фоккера–Планка, входящего в систему (8.74), используется метод дробных шагов [37]*. Для этого оператор правой

* Численная модель задачи разработана аспирантом И.В. Кудрявцевой.

части уравнения необходимо представить в виде суммы двух операторов, отвечающих за два физических процесса (перенос и столкновение частиц):

$$Q_1 f_a = -\left(A_a \frac{\partial f_a}{\partial y} + B_a \frac{\partial f_a}{\partial v_y}\right), \quad Q_2 f_a = \left(D_a \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_y^2} + K_a \frac{\partial f_a}{\partial v_y} + H_a\right).$$

Тогда первое уравнение системы в операторной форме запишется в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = Q_1 f_a + Q_2 f_a. \tag{8.76}$$

При этом задача (8.76) разбивается на две вспомогательных задачи введением промежуточного слоя по переменной t, соответствующего значению $t = t^{n+1/2}$, вторая — переходу от слоя $t = t^{n+1/2}$ к слою $t = t^{n+1}$.

Первая задача:

$$\begin{gathered} \frac{\partial w_a(y, v_y, t)}{\partial t} = Q_1 w_a(y, v_y, t), \quad \alpha = i, e; \\ w_a(y, v_y, t^n) = f_a(y, v_y, t^n), \quad n = 0, \ldots, N-1; \\ w_a(0, v_y, t) = 0, \quad w_a(y_\infty, v_y, t) = f_a^{\text{макс в}}. \end{gathered} \tag{8.77}$$

Вторая задача:

$$\begin{gathered} \frac{\partial q_a(y, v_y, t)}{\partial t} = Q_2 q_a(y, v_y, t), \quad \alpha = i, e; \\ q_a(y, v_y, t^{n+1/2}) = w_a(y, v_y, t^{n+1/2}), \quad n = 0, \ldots, N-1. \end{gathered} \tag{8.78}$$

Приведем алгоритм решения задачи (8.34)–(8.35) [94–95].

1. Задать L, J, N — количество шагов по пространственной переменной y, скорости v_y и времени t, ширину возмущенной зоны $y_{\max}$, верхний предел скорости $v_{\max}$, границу $t_{\max}$ интервала времени, на котором ищется решение; начальное значение вектора скорости v_∞. Обычно ширину возмущенной зоны выбирают кратной радиусу Дебая r_{D}, а верхний предел значений модуля вектора скорости находят из соотношения $v_{\max} = 3\sqrt{2kT_{\text{i}\infty}/m_i}$.

2. Найти значения шагов по пространственной переменной, скорости и времени:

$$h_y = \frac{y_{\max}}{L}, \quad h_{v_y} = \frac{2v_{\max}}{J}, \quad \tau = \frac{t_{\max}}{N}.$$

3. Задать разностную сетку:

$$y_l = lh_y, \quad v_y^j = jh_{v_y}, \quad t = n\tau, \quad 0 \le l \le L, \quad 0 \le j \le J, \quad 0 \le n \le N.$$

4. Положить $n = 0$.

5. Вычислить сеточное представление начальных распределений $f_{a_j}^{\text{макс в}}$:

$$f_{i_j}^{\text{макс в}} = \pi^{-1/2} \exp\left[(v_y^j - v_\infty)^2\right], \qquad 0 \le j \le J;$$

$$f_{e_j}^{\text{макс в}} = \pi^{-1/2} \exp\left[\left(\frac{T_{e\infty} m_i}{T_{\text{i}\infty} m_e}\right)^{1/2} (v_y^j - v_\infty)^2\right], \quad 0 \le j \le J.$$

6. Решить уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -(n_i - n_e), \tag{8.79}$$

используя метод сеток [37]. Для этого:

• вычислить правую часть уравнения (8.79):

$$P_l^n = -\left[\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{f_{i_{l,j-1}}^n - f_{e_{l,j-1}}^n}{2} + \frac{f_{i_{l,j}}^n - f_{e_{l,j}}^n}{2}\right)\cdot h_{v_y}\right], \quad 0 \le l \le L,$$

где $P_l^n = -(n_{i,l}^n - n_{e,l}^n)$, $0 \le l \le L$;

• получить конечно-разностный аналог уравнения (8.79)

$$\frac{\varphi_{l+1}^n - 2\varphi_l^n + \varphi_{l-1}^n}{h_y^2} = P_l^n, \quad 0 \le l \le L; \tag{8.80}$$

• составить систему

$$\begin{gathered} \frac{\varphi_{l+1}^n - 2\varphi_l^n + \varphi_{l-1}^n}{h_y^2} = P_l^n, \quad 0 \le l \le L; \\ \varphi_0^n = \varphi_p; \\ \varphi_L^n = 0; \end{gathered} \tag{8.81}$$

• Вычислить φ_l^n, $0 \le l \le L$, решив систему (8.81) методом прогонки [37].

7. вычислить напряженность электрического поля:

$$E_0^n = -\frac{1}{2h_y}(-3\varphi_0^n + 4\varphi_1^n - \varphi_2^n);$$

$$E_l^n = -\frac{\varphi_{l+1}^n - \varphi_{l-1}^n}{2h_y}, \quad 0 < l < L;$$

$$E_L^n = -\frac{1}{2h_y}(\varphi_{L-2}^n - 4\varphi_{L-1}^n + 3\varphi_L^n).$$

8. Решить задачу (8.74), (8.75) методом дробных шагов:

• перейти от задачи (8.74), (8.75) к задаче (8.77), (8.78);

• получить разностную аппроксимацию (8.77), (8.78);

• решить задачи (8.77), (8.78) после получения их разностной аппроксимации методом исключения Гаусса. Получить

$$q_a(y, v_y, t^{n+1}) = f_a(y, v_y, t^{n+1}), \quad a = i, e.$$

9. Вычислить моменты функции распределения $f_a(y, v_y, t^{n+1})$ для $t = t^{n+1}$:

$$n_{a,l}^{n+1} = \sum_{j=0}^{J}\left(\frac{f_{a_{l,j-1}}^{n+1} + f_{a_{l,j}}^{n+1}}{2}\right)h_{v_y}, \quad 0 \le l \le L;$$

$$j_{a,l}^{n+1} = \sqrt{\delta_a}\, q\left[\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{f_{a_{l,j-1}}^{n+1} v_y^{j-1} + f_{a_{l,j}}^{n+1} v_y^{j}}{2}\right)h_{v_y}\right], \quad 0 \le l \le L;$$

$$\delta_a = \frac{\varepsilon_a}{\mu_a}, \quad \varepsilon_a = \frac{T_{a\infty}}{T_{i\infty}}, \quad \mu_a = \frac{m_a}{m_i}, \quad a = i, e.$$

10. Если $n = N$, вычисления завершить. Иначе положить n равным $n = n + 1$ и перейти к п. 6.

8.6. Методические исследования и тестовые задачи в режиме сплошной среды

Методические исследования и решение тестовых задач необходимы для обоснования достоверности полученных результатов вычислительных экспериментов, а также оптимизации вычислительного алгоритма.

С точки зрения оптимизации вычислительного алгоритма размер расчетной области и число крупных частиц нужно уменьшать, а шаг по времени увеличивать. Однако такие действия ограничены условиями устойчивости, сходимости решения и другими особенностями задачи. Поэтому оптимальный размер возмущенной зоны, число крупных частиц и шаг по времени определяются из компромиссных соображений. Для выполнения граничных условий на внешней границе расчетной области $n_{i,e}(r_\infty, t) = 1$ и $\varphi(r_\infty, t) = 0$ необходимо, чтобы размер r_∞ был больше величины возмущенной зоны вблизи заряженного тела. Рекомендации по выбору r_∞, вытекающие из методических расчетов, имеются на рис. 8.1. Исключение составляет теневая область за телом, обтекаемым плазменным потоком. В этих условиях размер возмущенной зоны существенно возрастает. Поэтому необходимо проводить методические расчеты несколько раз, постепенно увеличивая размер r_∞. В каждом расчете вычисляется плотность тока на тело. Увеличение r_∞ производят до тех пор, пока плотность тока не установится.

Оптимальное число узлов расчетной сетки по координатам X, Y в задаче с электродом ленточного типа (см. рис. 1.2) составило $N_x \times N_y = 200 \times 50$. В задаче с обтеканием цилиндрического тела оптимальное число узлов по координатам r и θ составило $N_r \times N_\theta = 160 \times 120$.

Как показано в [85], шаг по времени Δt может быть увеличен в 3–4 по сравнению с его значением, вытекающим из условия Куранта–Фридрихса–Леви [83] без потери устойчивости решения.

В написанной компьютерной программе предусмотрена возможность контролировать результаты расчета и непосредственно сам процесс расчета с помощью специальной графической оболочки. Данная оболочка в процессе расчета переводит монитор в графический режим и позволяет в любой момент визуализировать эволюцию возмущенной зоны по следующим зависимостям:

— изменение потенциала, концентраций компонент плазмы, радиальных и азимутальных скоростей вдоль радиуса спереди, сзади и сбоку от тела;

— изменение потенциала, концентраций компонент, радиальных и азимутальных скоростей, а также плотностей токов компонент плазмы по обводу тела;

— изолинии потенциала, изоконцентрали ионов и электронов и нейтральной компоненты плазмы;

— поля скоростей ионов и электронов и нейтральной компоненты плазмы;

— изменение интегральных токов ионов и электронов по времени.

Вычислитель имеет возможность любую из вышеуказанных зависимостей поставить на визуальный контроль и непосредственно наблюдать за эволюцией возмущенной зоны в рамках изменения выбранного им параметра непосредственно во время расчета. При этом соответствующий график заново перестраивается в конце каждого шага по времени, чем достигается эффект «фильма».

Если возникает необходимость в какой-то момент расчета глобально изучить состояние возмущенной зоны, т. е. возможность путем нажатия соответствующей клавиши войти в режим просмотра графиков. При этом расчет параметров плазмы приостанавливается и вычислитель имеет возможность последовательно пролистать все вышеперечисленные графические зависимости. Путем нажатия соответствующей клавиши клавиатуры можно вернуться в режим расчета и программа продолжит расчет с того момента времени, на котором ее работа была приостановлена.

Специальное управляющее меню, появляющееся на экране в момент запуска программы, позволяет легко менять режимы работы графического экрана.

Графическая часть программы написана таким образом, что легко позволяет добавлять в нее новые графические зависимости или вносить изменения в имеющиеся, если в этом возникает необходимость. Также при необходимости в любой момент расчета графический экран может быть скопирован как графический файл, и после этого сохранен в памяти ЭВМ и распечатан на принтере.

Использование описанной выше графической оболочки позволяет:

— визуально контролировать окончание счета программы с помощью установки на контроль изменения интегральных токов по времени. Контролировать время окончания счета машинным путем достаточно проблематично, так как часто возникают отдельные участки малого изменения интегрального тока, которые программа ошибочно воспринимает, как условие окончания счета;

— существенно ускорить и повысить эффективность отладки программы и анализа результатов, так как данный подход избавляет вычислителя от рутинного труда ручного построения графиков (некоторые графические иллюстрации из-за громоздкости практически невозможно построить вручную).

В процессе отладки программы были проведены сравнения с результатами расчетов других авторов. Если в системе (7.10) положить индукцию магнитного поля равной нулю и, уменьшая скорость потока, экстраполировать результаты на случай $v_\infty = 0$, то мы получим результаты для покоящейся плазмы без магнитного поля, известные по работам [1, 18]. Сравнение показало полное совпадение результатов.

Еще одно сравнение теоретических расчетов для безразмерной плотности тока на плоский пристеночный зонд ленточного типа, полученных авторами монографии по методике из гл. 8, с теоретическими и экспериментальными данными других авторов приведено на рис. 7.1. Данные рис. 7.1 показывают, что результаты численных и физических экспериментов находятся в удовлетворительном согласии.

Заключение к части второй монографии. Исследование обтекания тел столкновительной плазмой актуально прежде всего в авиационно-космической технике: это движение гиперзвуковых летательных аппаратов в атмосфере, это системы вывода на орбиту космических объектов и системы спуска с орбиты на землю. Среди таких объектов Российский корабль «Буран» и американские корабли типа «Шатл», «Колумбия» и другие. Недооценка воздействия околостеночной плазмы на летательный аппарат может привести и неоднократно приводила к катастрофическим последствиям.

Во второй части монографии сформулированы современные математические и численные модели обтекания тел потоками столкновительной плазмы. В частности, рассмотрено обтекание тел слабоионизованной ламинарной и турбулентной плазмой в магнитном поле и без него, гиперзвуковое обтекание с учетом равновесной диссоциации и ионизации, обтекание тел при промежуточных числах Кнудсена и др.

Среди многочисленных результатов вычислительных экспериментов, приведенных в книге, отметим подробное исследование поперечного обтекания цилиндрического тела ламинарной и турбулентной плазмой с учетом осевого магнитного поля, обтекание при умеренных числах Рейнольдса, обтекание полуконуса и сферически затупленного цилиндра турбулентным потоком воздушной плазмы и др. В каждом из перечисленных разделов содержатся новые результаты. Например, несомненный научный интерес представляет изложенная в п. 3.2. подробная структура возмущенной зоны в близи обтекаемого плазмой цилиндра в магнитном поле. Плотность электронного тока на единицу длины цилиндра сложным нелинейным образом зависит от таких параметров как число Маха, число Рейнольдса, параметр Холла и др.

Среди задач, которые еще предстоит решить, отметим следующие:

— обтекание тел сложной геометрии потоками ламинарной и турбулентной плазмы;

— гиперзвуковое обтекание тел с учетом неравновесной диссоциации ионизации;

— обтекание тел при промежуточных числах Кнудсена.

Предстоит осуществить переход к обобщенным уравнениям Навье–Стокса, которые были получены Б. В. Алексеевым, оценить и осмыслить различия между результатами, полученными по классическим и обобщенным уравнениям динамики слабоионизованной плазмы.

Глава 9

РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКОМ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

9.1. Цилиндрическое тело в поперечном потоке ламинарной столкновительной плазмы без магнитного поля

Рассматривается заряженное цилиндрическое тело радиуса $r_{\text{р}}$ и потенциала $\varphi_{\text{р}}$, помещенное в поперечный поток слабоионизованной столкновительной плазмы (см. рис. 1.1). Направленная скорость потока равна v_∞. Математическая модель задачи соответствует разд. 7.1, а численная модель — пунктам 8.1 и 8.2. Система (7.2) приводилась к безразмерному виду с помощью следующей системы масштабов:

$$\begin{aligned}
&\text{масштаб концентрации заряженных частиц} && M_{n_{\text{i,e}}} = n_\infty;\\
&\text{масштаб скорости} && M_u = v_\infty;\\
&\text{масштаб потенциала} && M_\varphi = kT_{\text{i}}/e;\\
&\text{масштаб длины} && M_L = r_{\text{р}};\\
&\text{масштаб плотности нейтрального газа} && M_\rho = \rho_\infty;\\
&\text{масштаб давления} && M_p = M_\rho M_u^2;\\
&\text{масштаб времени} && M_t = M_L/M_u.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Остальные масштабы находятся по формулам размерностей.

В случае применения решения системы (7.2) для исследования процессов подвижности, профиля потенциала электрического поля, концентраций заряженных частиц и переноса электрического заряда на тело предпочтительнее другая система масштабов:

$$\begin{aligned}
&\text{масштаб концентрации заряженных частиц} && M_{n_{\text{i,e}}} = n_\infty;\\
&\text{масштаб длины} && M_L = r_{\text{D}} = [\varepsilon_0 kT_{\text{i}}/(n_{\text{i}\infty}e^2)]^{1/2};\\
&\text{масштаб потенциала} && M_\varphi = kT_{\text{i}\infty}/e;\\
&\text{масштаб времени} && M_t = M_L^2/D_{\text{i}};\\
&\text{масштаб скорости} && M_u = M_L/M_t;\\
&\text{масштаб плотности тока заряженных частиц} && M_j = eM_nM_u = en_{\text{i}\infty}D_i/r_{\text{D}},
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Поскольку для зондовых задач основным параметром является плотность тока заряженных частиц, приведем формулу перехода для плотности тока из системы (9.1) в систему (9.2): $j_{e(9.2)} = j_{e(9.1)}\,\mathrm{Re}_{\text{э}}/(r_{\mathrm{p}}/r_{\mathrm{D}})$.

Безразмерная система уравнений с использованием масштабов (9.1) имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{\mathrm{i}}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_{\mathrm{i}})) = 0;\\
\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{\mathrm{e}}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_{\mathrm{e}})) = 0;\\
\Delta\varphi = \delta(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{i}});\\
\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{u}_0) = 0;\\
\frac{\partial(\rho_0\mathbf{u}_0)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{u}_0\mathbf{u}_0) = -\nabla P_0;\\
\frac{\partial(\rho_0 E_0)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{u}_0 E_0) = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_0 P_0);\\
\mathbf{a}_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{Re}_{\mathrm{i}}}\left(\frac{\nabla n_{\mathrm{i}}}{n_{\mathrm{i}}} + \nabla\varphi\right); \quad \mathbf{a}_{\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{Re}_{\mathrm{e}}}\left(\frac{\nabla n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}} - \varepsilon\nabla\varphi\right);\\
P_0 = \left(E_0 - \frac{\mathbf{u}_0^2}{2}\right)\rho_0(\gamma - 1); \quad E_0 = \frac{\mathbf{u}_0^2}{\gamma(\gamma-1)\,\mathrm{M}_0^2} + \frac{\mathbf{u}_0^2}{2}.
\end{gathered}
\tag{9.3}
$$

Система начальных и граничных условий остается без изменения.

Задача имеет большое количество характерных параметров:

$r_0 = r_{\mathrm{p}}/r_{\mathrm{D}}$ — безразмерный радиус цилиндра (r_{D} — радиус Дебая);

$\varphi_0 = \varphi_{\mathrm{p}}/(kT_{\mathrm{i}}/e)$ — безразмерный потенциал цилиндра;

$\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$ — отношение температур ионов и электронов;

$D = D_{\mathrm{e}}/D_{\mathrm{i}} = (1/\sqrt{2})(m_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{e}})^{1/2}(T_{\mathrm{e}}/T_{\mathrm{i}})^{1/2}$ — отношение коэффициентов диффузии электронов и ионов;

$\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_\infty/(D_{\mathrm{i}}/r_{\mathrm{D}})$ — безразмерная направленная скорость.

Ниже приводятся результаты численных экспериментов на основании системы (9.3) [96].

9.1.1. Профиль скорости нейтральной компоненты. На рисунках 9.1 и 9.2 приведено поле скоростей нейтральной компоненты, полученное по математической модели, приведенной в работе [1], где рассматривалось безвихревое обтекание цилиндра и поле скоростей, полученное на основании численного решения уравнений Эйлера (система (9.3)). На рисунках 9.1 и 9.2 стрелки векторов скоростей опущены. При безвихревом обтекании вихри в теневой области отсутствуют, что приводит к некорректному учету конвективной составляющей в процессах переноса. Согласно модели, предложенной в п. 7.1, получена корректная картина обтекания цилиндра, в частности, в области следа отчетливо прослеживается вихревое движение нейтральных частиц. Характер вихревого движения зависит от чисел Маха M,

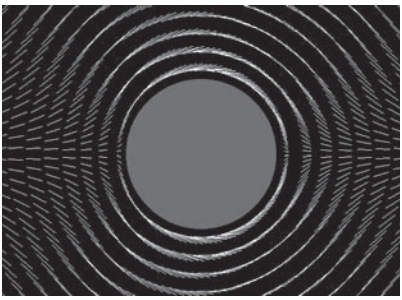


Рис. 9.1. Поле скоростей нейтрального газа (безвихревое обтекание цилиндра)

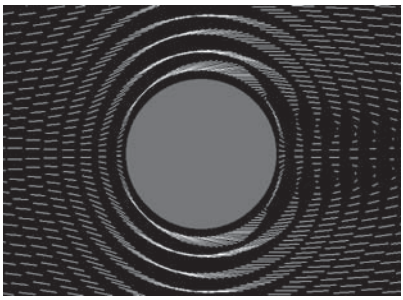


Рис. 9.2. Поле скоростей нейтрального газа (решение системы (9.3))

Рейнольдса Re и других параметров задачи. В условиях слабой степени ионизации нейтральная компонента увлекает за собой заряженные компоненты, что может вызвать рост тока в теневой области. Данный эффект в более ранних работах не изучался.

9.1.2. Поле скоростей электронов и ионов по обводу цилиндра. На рисунках 9.3–9.6 представлены поля скоростей ионов по обводу цилиндра в отсутствии магнитного поля, если его радиус $r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, заряд $\varphi_0 = -45$, число Маха $\text{M} = 0{,}5$, а электрическое число Рейнольдса изменяется в интервале $10 \leq \text{Re}_{\text{э}} \leq 500$. Учитывая симметрию относительно плоскости, проходящей через вектор направленной скорости потока и ось цилиндра, показаны только нижние половины профилей скорости. Графики наглядно демонстрируют сгущение линий тока на боковую поверхность цилиндра в точке, соответствующей значению угловой координаты θ порядка 100° и увлечение ионов вихревым движением нейтральных частиц в теневой области. Соответствующие профили для скоростей электронов даны на рисунках 9.7–9.10, которые в данных условиях являются отталкивающимися от цилиндра частицами.

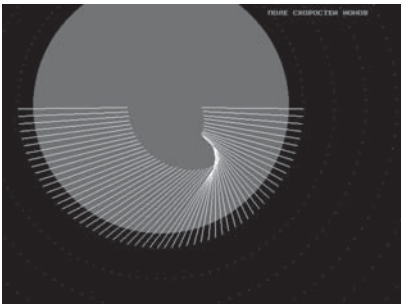


Рис. 9.3. Скорость ионов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 10$)

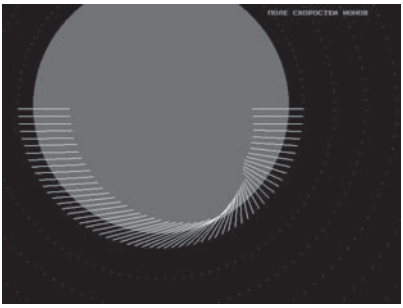


Рис. 9.4. Скорость ионов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 25$)

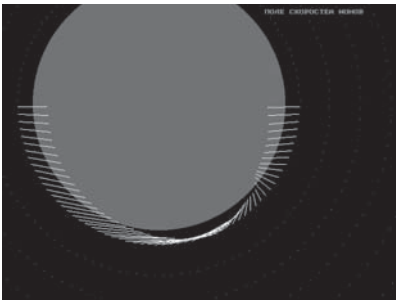


Рис. 9.5. Скорость ионов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 50$)

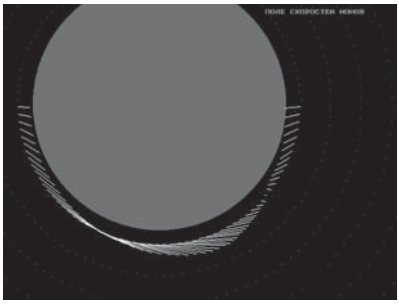


Рис. 9.6. Скорость ионов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 200$)

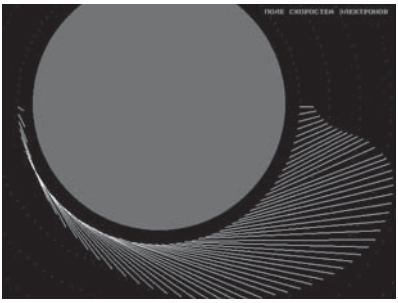


Рис. 9.7. Скорость электронов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 10$)

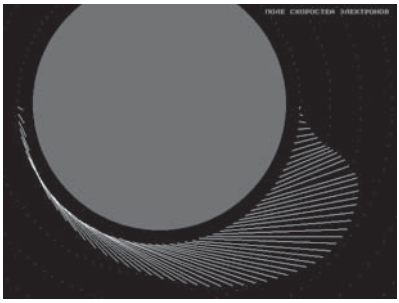


Рис. 9.8. Скорость электронов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 25$)

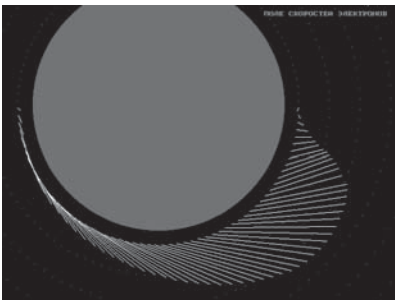


Рис. 9.9. Скорость электронов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 50$)

Рис. 9.10. Скорость электронов по обводу цилиндра ($r_{\text{р}} = 3r_{\text{D}}$, $\varphi_0 = -45$, $\text{M} = 0{,}5$, $\text{Re}_{\text{э}} = 200$)

9.1.3. Поле концентраций заряженных частиц. Примеры изолиний концентраций ионов и электронов вблизи заряженного цилиндра даны на рисунках 9.11 и 9.12 для следующего набора характерных параметров задачи: $\text{M} = 0{,}6$, $\text{Re}_{\text{э}} = 25$, $\varphi_0 = -45$, $r_{\text{р}} = 10r_{\text{D}}$. Значение магнитного поля равнялось нулю.

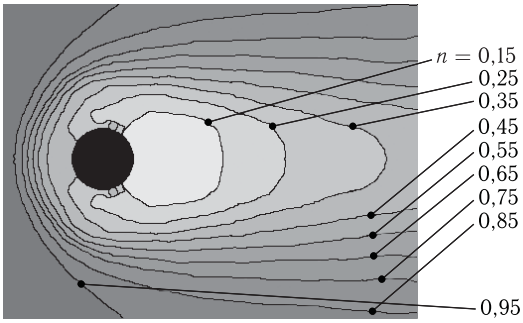


Рис. 9.11. Изолинии концентрации ионов ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

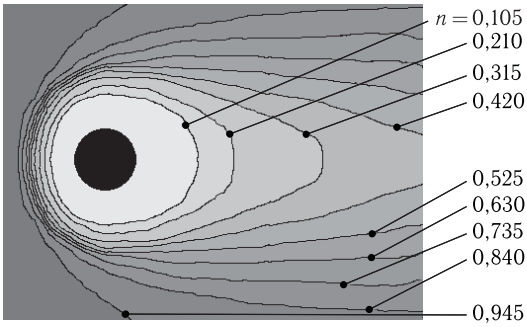


Рис. 9.12. Изолинии концентрации электронов ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

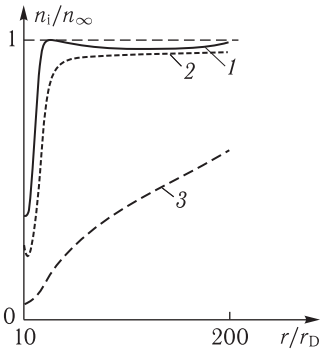


Рис. 9.13. Распределение концентраций ионов вдоль радиуса ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$): *1* — лобовая часть ($\theta = 0°$); *2* — боковая часть ($\theta = 90°$); *3* — теневая часть ($\theta = 180°$)

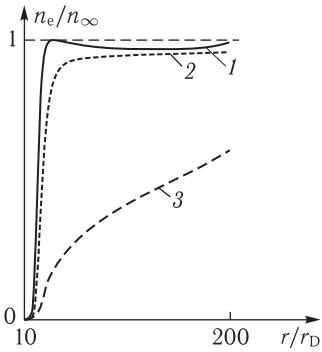


Рис. 9.14. Распределение концентраций электронов вдоль радиуса ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$): *1* — лобовая часть ($\theta = 0°$); *2* — боковая часть ($\theta = 90°$); *3* — теневая часть ($\theta = 180°$)

Рисунки имеют плоскость симметрии, проходящую через вектор направленной скорости и ось цилиндра. Имеет место накопление частиц в лобовой части и их разрежение в теневой, где образуется характерный след. Из рис. 9.12 следует, что наименьшая концентрация $n_i = 0{,}15n_\infty$ наблюдается в теневой области тела. В боковой области при значениях угла θ (см. рис. 1.1) порядка 100° и 260° наблюдается всплеск концентрации ионов. Этот эффект наблюдается впервые. Причина его появления будет объяснена в п. 9.1.4. Для отталкиваемых от тела частиц — электронов такого эффекта не наблюдается. Концентрация вдоль радиуса нарастает монотонно. Кроме того, значение концентрации электронов вблизи тела ниже, чем ионов, что связано с отрицательным потенциалом тела и возникновением около него положительного объемного заряда.

На рисунках 9.13 и 9.14 даны распределения вдоль радиусов концентраций ионов и электронов в лобовой, боковой и теневой областях при тех же параметрах, что и на рисунках 9.11 и 9.12.

9.1.4. Изолинии потенциала и распределение напряженности электрического поля. В случае покоящейся плазмы изолинии потенциала представляют собой концентрические окружности. При достаточно больших отрицательных (или положительных) потенциалах поверхности цилиндра кривая зависимости $\varphi(r)$ имеет монотонный характер, плавно выходя на нулевое граничное значение на расстоянии нескольких десятков (иногда и сотен) радиусов Дебая от поверхности. При потенциалах поверхности, близких к потенциалу плавающего тела, зависимость $\varphi(r)$ может проходить через максимум. Линии напряженности электрического поля направлены вдоль радиуса. Величина граничной напряженности при $r = r_\text{р}$ в зависимости от $\varphi_\text{р}$ и $r_\text{р}$ исследована в [1]. Включение направленной скорости потока нарушает центральную симметрию (рис. 9.15) изолиний потенциала. В отсутствии магнитного поля сохраняется только плоскость симметрии, проходящая через вектор направленной скорости и ось цилиндра. Нарушение центральной симмет-

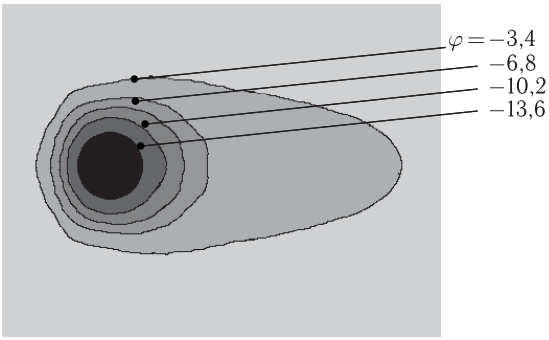


Рис. 9.15. Изолинии потенциала ($r_0 = 10$, $\text{Re}_\text{э} = 25$, $\text{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

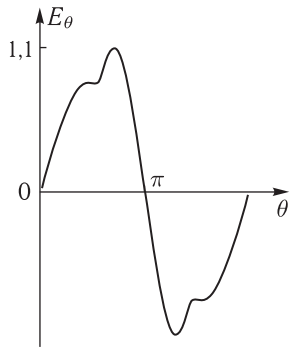


Рис. 9.16. Распределение азимутальной составляющей напряженности электрического поля по обводу цилиндра ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

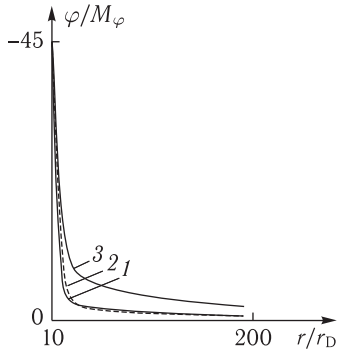


Рис. 9.17. Распределение потенциала электрического поля вдоль радиуса ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$): *1* — лобовая часть ($\theta = 0°$); *2* — боковая часть ($\theta = 90°$); *3* — теневая часть ($\theta = 180°$)

рии приводит к появлению азимутальной составляющей электрического поля. Распределение E_θ по обводу цилиндра приведено на рис. 9.16 для значений: $r_0 = 10$, $\mathrm{Re} = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$. На рис. 9.17 даны распределения потенциала вдоль радиуса в лобовой, боковой и теневой областях при тех же параметрах задачи.

9.1.5. Распределение плотности тока по обводу цилиндра. Плотность тока по обводу цилиндра пропорциональна произведению концентрации заряженных частиц вблизи поверхности на радиальную составляющую их направленной скорости. При больших отрицательных потенциалах тела на него поступает ионный ток. Если направленная скорость относительно невелика (например, число Маха $\mathrm{M} = 0{,}05$), распределение тока по обводу тела имеет монотонный характер. Максимальная плотность наблюдается со стороны лобовой части тела, поскольку на эту часть набегает поток. Минимальная плотность наблюдается с теневой части, поскольку происходит экранировка набегающего потока телом (рис. 9.18). С увеличением числа Маха развивается вихревое течение, вследствие чего в теневой части может появиться всплеск ионного тока. Кроме того в боковой области могут возникнуть локальные максимумы и минимумы (рис. 9.19). Физическую причину появления бокового максимума можно объяснить распределением концентрации ионов и их скорости по обводу цилиндра (см. рисунки 9.4 и 9.11). Из графиков видно, что в областях боковых максимумов имеет место сгущение линий тока ионов и рост концентрации ионов. Физическая причина их возникновения состоит в следующем.

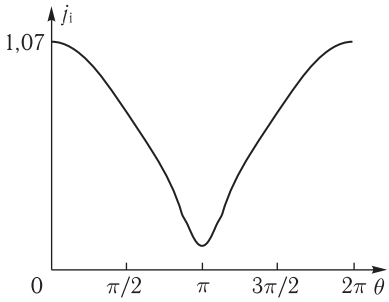


Рис. 9.18. Безразмерная плотность тока ионов по обводу цилиндра ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $M = 0{,}05$, $\varphi_0 = -45$)

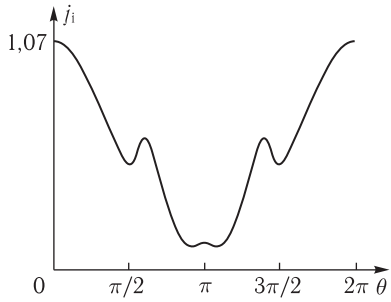


Рис. 9.19. Безразмерная плотность тока по обводу цилиндра ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $M = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

1. Ионы движутся вместе с потоком вдоль боковой поверхности цилиндра и одновременно испытывают электростатические притяжения со стороны тела. В результате их траектории отклоняются в сторону поверхности цилиндра.

2. В теневой области ионы вместе с вихрями приближаются к поверхности цилиндра и за счет притяжения также отклоняются в сторону поверхности.

Эти два потока ионов, накладываясь друг на друга, дают всплеск концентрации и плотности тока, образуя локальные максимумы и минимумы.

Радиальная скорость ионов на боковую поверхность цилиндра может иметь локальный максимум в теневой области, связанный с вихрями. Плотность ионного тока, пропорциональная произведению концентрации на радиальную скорость, в основном, повторяет профиль концентрации ионов.

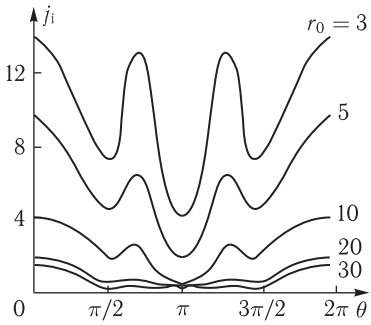


Рис. 9.20. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра ($M = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\varepsilon = 3$)

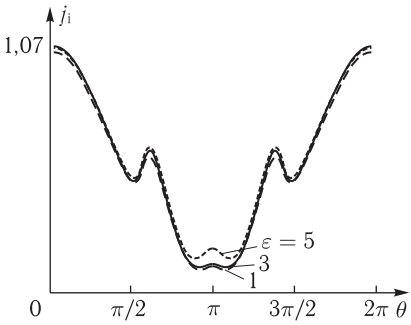


Рис. 9.21. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра ($r_0 = 10$, $M = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$, $\mathrm{Re}_э = 25$)

Появление локального максимума плотности тока на боковой поверхности цилиндра возможно лишь в ограниченном интервале изменения характерных параметров задачи. На рис. 9.20 приведена зависимость плотности ионного тока по обводу цилиндра при различных значениях его радиуса, из которого следует, что при $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\varphi_0 = -45$ и $r_0 > 30$ этот эффект пропадает.

При проведении вычислительных экспериментов исследовалась также зависимость распределения плотности ионного тока по обводу от параметра $\varepsilon = T_\mathrm{i}/T_\mathrm{e}$, результаты которого представлены на рис. 9.21. Из рисунка следует, что в интервале $0,2 < \varepsilon < 1$ влияние ε незначительно.

9.2. Цилиндрическое тело в ламинарном потоке плазмы в магнитном поле

Геометрия заряженного тела и его расположение в потоке плазмы соответствует п. 9.1. Дополнительно добавляется внешнее однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, направленное вдоль оси цилиндра. Математическая модель задачи соответствует п. 7.2, а численная модель — пунктам 8.1 и 8.2. Рассмотрим вначале случай отрицательного потенциала тела, при котором притягивающимися частицами являются ионы, а электроны отталкиваются. Линии тока нейтральной компоненты аналогичны п. 9.1.1, поскольку в условиях слабой степени ионизации движение нейтральной компоненты не зависит от движения заряженных частиц. На рис. 9.22 дано поле скоростей ионов, из которого следует, что симметрия по угловой координате θ пропадает.

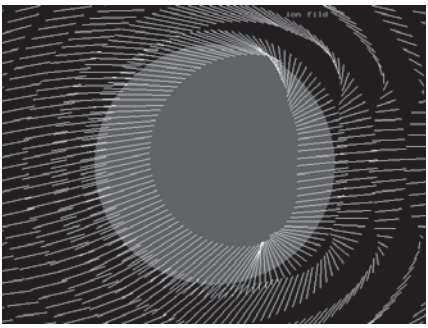


Рис. 9.22. Поле скоростей ионов ($r_0 = 10$, $\varphi_0 = -45$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\beta_\mathrm{i} = 0{,}05$)

На рисунках 9.23–9.25 приведены изолинии концентраций ионов и электронов, а также электрического потенциала при тех же условиях.

На рисунках 9.26 и 9.27 приведены безразмерные плотности тока ионов по обводу цилиндра при двух значениях числа Маха, 0,05 и 0,6, и при различных значениях параметра Холла.

Из рисунков следует, что в боковой области имеют место локальные максимумы и минимумы плотности тока, если число Маха достаточно велико, а безразмерный радиус r_0 меньше некоторого предельного значения. Однако максимумы слева и справа смещаются друг относительно друга тем больше, чем больше параметр Холла.

Влияние осевого магнитного поля на характер обтекания заряженного цилиндра можно физически объяснить, используя графики на

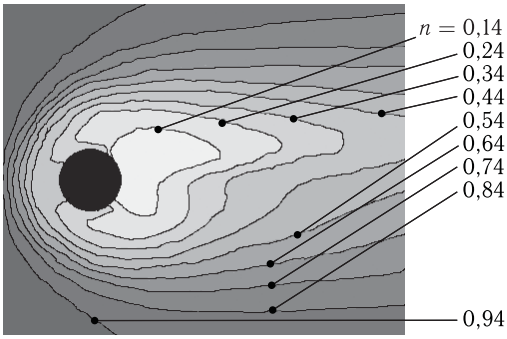


Рис. 9.23. Изолинии концентрации ионов ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$, $\beta = 0{,}05$)

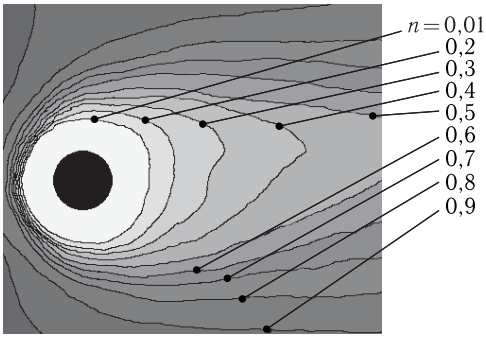


Рис. 9.24. Изолинии концентрации электронов ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$, $\beta = 0{,}05$)

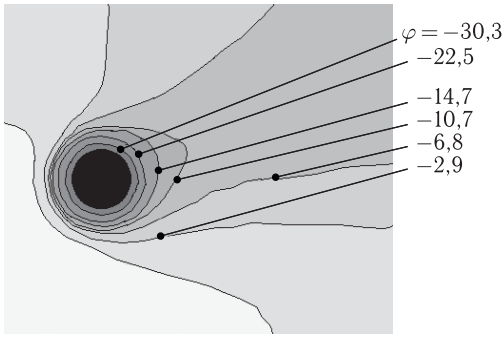


Рис. 9.25. Изолинии потенциала ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$, $\beta = 0{,}05$)

рисунках 9.23–9.27 и учитывая приведенный выше анализ аналогичных графиков без магнитного поля. Как было показано в п. 9.1.4, при наличии направленной скорости потока возникает азимутальное электрическое поле, которое также зависит (в меньшей степени) от ве-

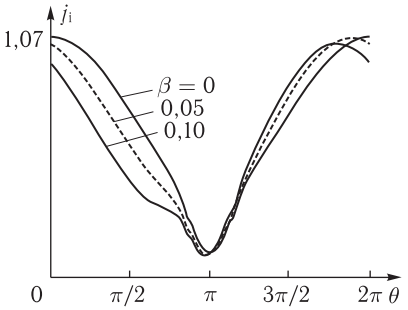


Рис. 9.26. Безразмерная плотность тока ионов по обводу цилиндра ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}05$, $\varphi_0 = -45$)

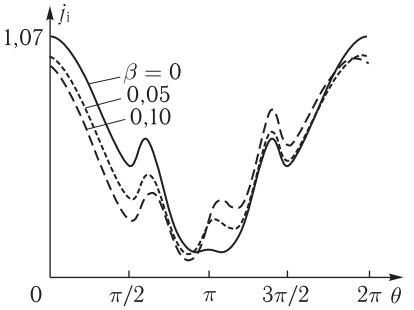


Рис. 9.27. Безразмерная плотность тока ионов по обводу цилиндра ($r_0 = 10$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\mathrm{M} = 0{,}6$, $\varphi_0 = -45$)

личины индукции магнитного поля. В скрещенных полях $\mathbf{E}_\theta$ и $\mathbf{B}_Z$ возникает дрейфовое движение со скоростью $u_д = [\mathbf{E}_\theta, \mathbf{B}_Z]/B_Z^2$. Учитывая, что вектор $\mathbf{E}_\theta$ слева и справа от цилиндра направлен вдоль потока, а вектор $\mathbf{B}$ направлен вдоль оси Z, дрейфовая скорость в интервале $0 \le \theta \le \pi$ направлена по радиусу от цилиндра, а в интервале $\pi \le \theta \le 2\pi$ — по радиусу к цилиндру. Вследствие этого нарушается симметрия в распределении концентрации заряженных частиц и плотности тока. В интервале $0 \le \theta \le \pi$ они уменьшаются, а в интервале $\pi \le \theta \le 2\pi$ — возрастают при включении индукции магнитного поля. Все локальные максимумы и минимумы, имевшие место в отсутствии поля $\mathbf{B}$, сохраняются, но смещаются либо вверх, либо вниз в зависимости от направления скорости дрейфа относительно поверхности цилиндра (рисунки 9.26 и 9.27). Изменяется также положение локального максимума в теневой области, связанного с вихревым движением.

Рассмотрим теперь случай, когда цилиндр заряжен положительно относительно потенциала пространства. В этом случае ток на тело определяется электронами. Основные закономерности, отмеченные выше для ионного тока, сохраняются и для электронного. В частности,

— при наличии направленной скорости возникает азимутальное электрическое поле $\mathbf{E}_\theta$;

— при включении магнитного поля $\mathbf{B}_Z$ возникает дрейфовая скорость, направленная в противоположные стороны с левой и правой стороны цилиндра;

— при $\mathbf{B} = 0$ имеет место плоскость симметрии, проходящая через вектор скорости $\mathbf{u}_н$ и ось цилиндра, а при $\mathbf{B} > 0$ плоскость симметрии отсутствует;

— в теневой области может иметь место локальный максимум, связанный с вихревым движением и др.

Однако следует учесть относительно малую массу электронов и по этой причине высокую скорость их теплового движения. Если в случае

ионов направленная скорость сравнима с хаотической скоростью, то в случае электронов выполняется неравенство

$$v_{\text{напр.}} \ll v_{\text{тепл.}}.$$

Учитывая это неравенство, можно было бы ожидать, что направленная скорость должна играть значительно меньшую роль в процессах переноса электронов в сравнении с ионами. Исследования показали, что это не совсем так. Ионы совместно с электронами образуют в пристеночной области подчиняющееся уравнению Пуассона самосогласованное электрическое поле, которое сильно влияет на электроны. Поэтому электроны через поле подвергаются более существенному влиянию направленной скорости, чем это можно было бы ожидать, учитывая приведенное выше неравенство.

Еще один нелинейный эффект был обнаружен в зависимости средней плотности электронного тока $j_{\text{e ср.}}$ на поверхность цилиндра (и интегрального тока на единицу длины цилиндра) от параметров β и $\text{Re}_{\text{э}}$ при прочих равных условиях (рис. 9.28).

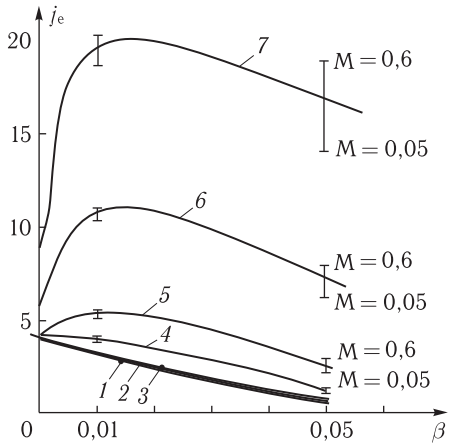


Рис. 9.28. Зависимость средней плотности электронного тока от β ($r_0 = 10$, $\text{M} = 0{,}05$–$0{,}6$, $\varphi_0 = 5$, $\varepsilon = 3$): *1* — $\text{Re}_{\text{э}} = 10$; *2* — 25; *3* — 50; *4* — 100; *5* — 200; *6* — 500; *7* — 1000

При значениях $\text{Re}_{\text{э}} < 100$ средняя плотность электронного тока $j_{e\,\text{ср.}}$ с ростом магнитного поля уменьшается, что согласуется с известным в литературе [42] эффектом уменьшения поперечной диффузии заряженных частиц в магнитном поле. Однако в области $\text{Re}_{\text{э}} > 100$ на участке $\beta_{\text{i}} < 10^{-2} j_{\text{e ср.}}$ растет с ростом индукции B, а при $\beta_{\text{i}} > 10^{-2}$ начинает уменьшаться по тому же закону, что и при $\text{Re}_{\text{э}} < 100$.

Анализ распределений плотности электронного тока j_{e} по обводу цилиндра позволяет объяснить этот эффект. При относительно больших числах Re эффекты, связанные с конвекцией, преобладают над

диффузией и подвижностью. Вследствие этого плотность тока на боковую поверхность тела незначительна (заряженные частицы, участвующие в конвективном движении, пролетают мимо цилиндра). Имеет место ток только на лобовую часть цилиндра и на теневую за счет вихревого движения. При включении магнитного поля возникающие пондеромоторные силы в интервале $0 < \theta < \pi$ приводят к существенному росту тока на боковую поверхность цилиндра, который превышает уменьшение тока на лобовую и теневую области. При дальнейшем росте индукции B ($\beta_{\text{i}} > 10^{-2}$) растет степень замагниченности электронов, и это приводит к уменьшению j_{e} так же, как это имело место при $\text{Re}_{\text{э}} < 100$.

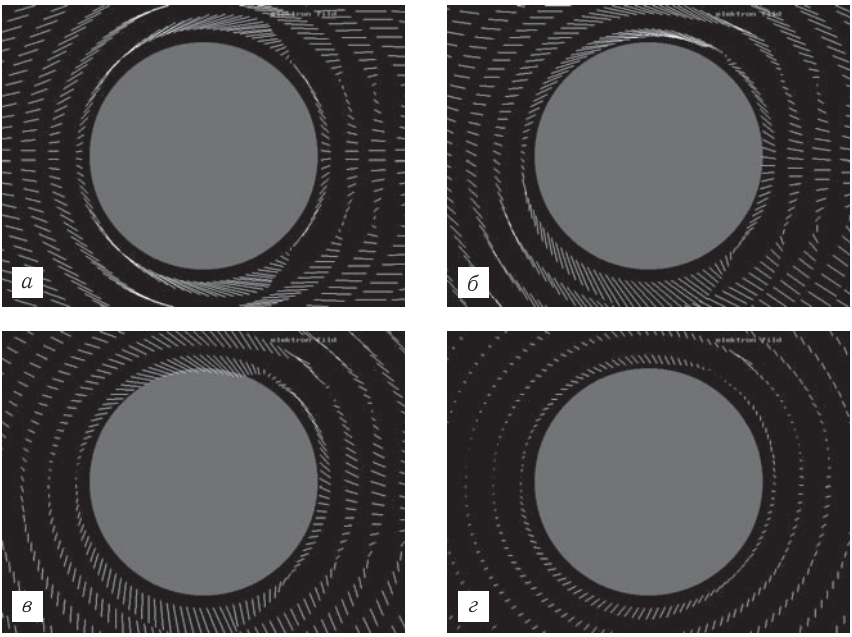


Рис. 9.29. Поле скоростей электронов ($\text{Re}_{\text{э}} = 10^4$; $\text{M} = 0{,}6$; $r_0 = 10$, $\varphi_0 = 5$): *а*) $\beta_{\text{i}} = 0$; *б*) 0,01; *в*) 0,025; *г*) 0,1

Для иллюстрации приведенной физической интерпретации эффекта достижения максимума плотности электронного тока на рис. 9.29 даны линии тока электронов вблизи поверхности цилиндра в области $0 < \theta < \pi$ при значении $\text{Re}_{\text{э}} = 10^4$ и четырех величинах параметра Холла $\beta = 0$; 0,01; 0,025; 0,1. При $\beta = 0$ линии тока электронов почти параллельны вектору скорости потока. При $\beta = 0{,}01$ под действием пондеромоторных сил появляется составляющая вектора скорости электронов, направленная к поверхности цилиндра. При $\beta = 0{,}025$ эта составляющая достигает максимума, а при $\beta = 0{,}1$ она снова уменьшается за счет замагниченности электронов. В области $\pi < \theta < 2\pi$ вектор скорости электронов во всех случаях направлен от тела.

9.3. Цилиндрическое тело в поперечном потоке турбулентной плазмы

Расположение цилиндрического тела в потоке слабоионизованной столкновительной плазмы соответствует рис. 1.1. Магнитное поле может быть направлено вдоль оси Z. Предполагается, что электрическое число Рейнольда $\mathrm{Re}_э$ достаточно велико. Неустойчивость потока к конечным возмущениям при обтекании цилиндра приводит к формированию вихревого следа — дорожек Кармана. Это крупномасштабное вихревое течение обладает свойствами турбулентного потока и вызывает уменьшение плотности тока на тело по сравнению с ламинарным случаем [74]. Дорожка Кармана не зависит от вида возмущения и сохраняется все время счета. Математическая модель задачи соответствует п. 7.3, а численная модель — пунктам 8.1 и 8.2. На рисунках 9.30–9.32 представлены некоторые результаты математического моделирования данной задачи без магнитного поля. На рис. 9.30 приведены линии тока и концентрации нейтральной компоненты при турбулентном обтекании цилиндра. Четко прослеживается устойчивая дорожка Кармана. При уменьшении числа Маха обтекание становится ламинарным и симметричным относительно плоскости, содержащий ось цилиндра и вектор

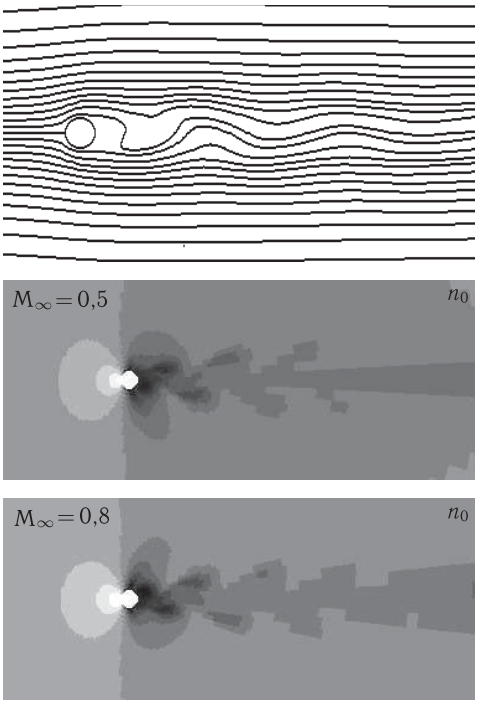


Рис. 9.30. Линии тока и концентрации газа при турбулентном обтекании цилиндра

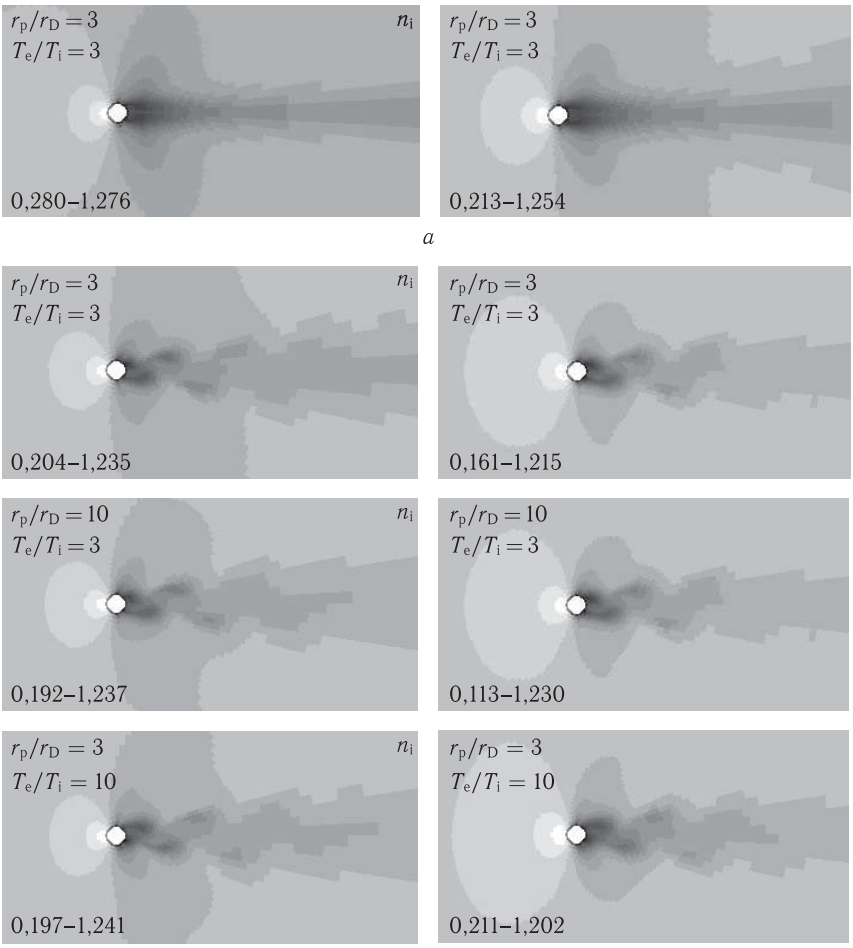


Рис. 9.31. Концентрации заряженных частиц ($\varphi_0 = -30$, $M_0 = 0{,}8$): *а*) ламинарное обтекание; *б*) турбулентное обтекание

скорости потока. Поле концентраций нейтральной компоненты n_0 соответствует профилю линии тока. Двумерные профили распределения концентраций электронов и ионов для различных наборов характерных параметров приведены на рис. 9.31 (9.31, *а* — ламинарный режим; 9.31, *а* — турбулентный режим).

Черный цвет соответствует минимуму концентрации, белый — максимальному. Границы между областями различной плотности являются изолиниями концентрации. Цифры в левом нижнем углу определяют значения $(n_{ie})_{min}$ и $(n_{ie})_{max}$. Основные закономерности в распределении полей концентраций и потенциалов совпадают с закономерностями, от-

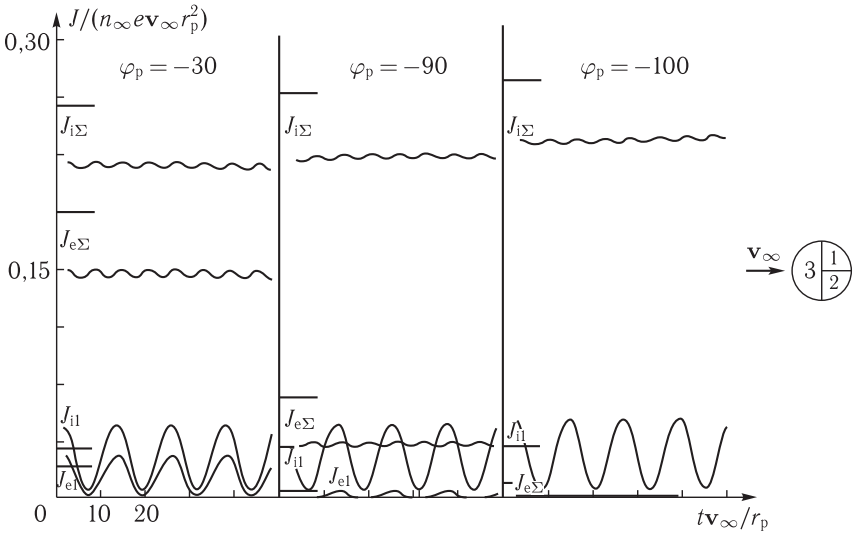


Рис. 9.32. Токи на цилиндрическое тело при ламинарном и турбулентном обтекании ($M = 0{,}5$, $r_p/r_D = 3$, $T_e/T_i = 3$)

меченными для случая ламинарного обтекания. В лобовой части имеет место накопления заряженных частиц, в теневой части — их заметное уменьшение. За телом образуется характерный след, зависящий от набора определяющих параметров задачи. В данном случае след не имеет плоскости симметрии и в определенной степени повторяет профиль линии тока. При турбулентном обтекании для всех исследованных режимов $(n_{ie})_{min}$ снижается по сравнению с его значением в ламинарном режиме; возможно снижение в 2 раза и более. Рост температуры электронов (уменьшение параметра ε) ведет к размыванию слоя объемного заряда как в лобовой, так и в теневой области. Рост отрицательного потенциала φ_0 ведет к вымыванию электронов из области ближнего следа и некоторому росту в нем концентрации ионов.

Концентрации $n_{i,e}$ в ближнем следе уменьшается также с ростом характерного размера тела r_0. На рис. 9.32 даны кривые зависимости плотности токов ионов и электронов на цилиндрический электрод от времени в процессе эволюции после импульсного изменения потенциала. Начальный участок эволюции с характерным максимумом опущен, показаны лишь колебательные процессы, связанные с турбулентностью потока. С целью исследования зависимости токов от угловой координаты θ сечение цилиндра поделено на три сегмента, что позволяет получить информацию о токах на каждый из сегментов. На рис. 9.32 приведены безразмерные усредненные плотности токов $(j_{ie})_\Sigma$ и плотности токов на сегмент №1 $(j_{ie})_1$. На том же рисунке приведены усредненные плотности токов j_{ie} для ламинарного режима обтекания (отрезки прямых линий вблизи оси ординат). Из сравнения кривых следует, что

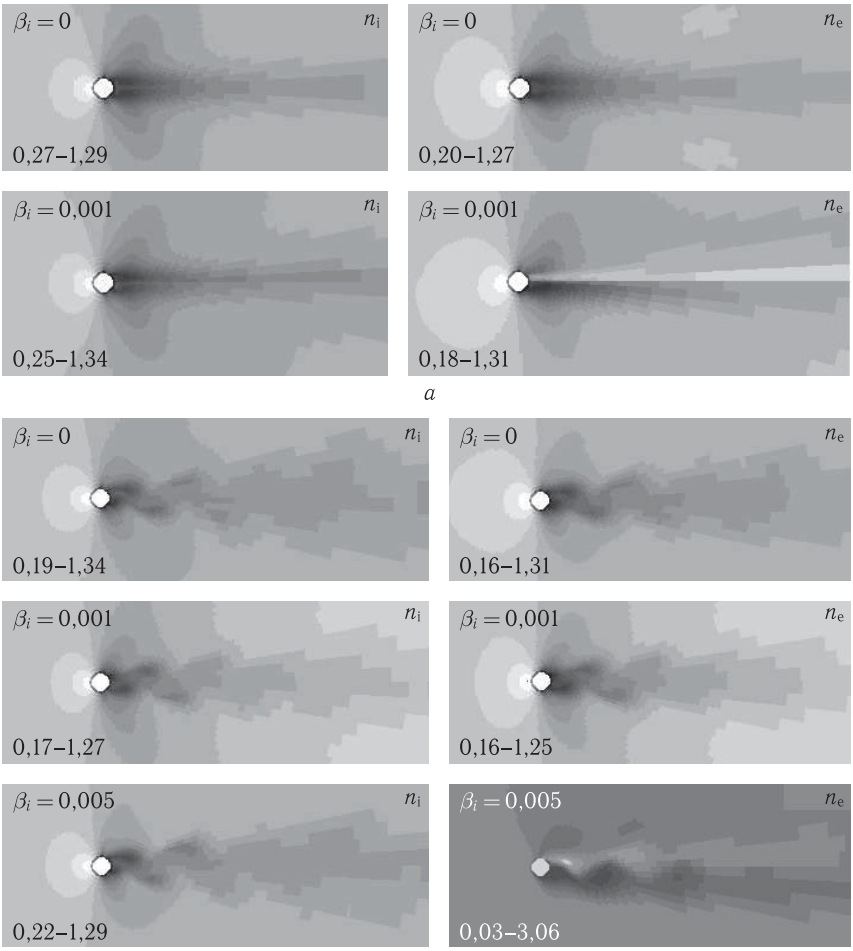


Рис. 9.33. Концентрации заряженных частиц ($\varphi_0 = -30$, $M_0 = 0{,}8$): *а*) ламинарное обтекание; *б*) турбулентное обтекание

влияние крупномасштабных пульсаций ведет к уменьшению плотности токов примерно на 10%, что связано с взаимодействием вихрей со слоем объемного заряда. Амплитуда колебаний суммарного тока вследствие турбулентности потока составляет 6–10% от его среднего значения, причем токи ионов и электронов колеблются в одной фазе. Однако на теневые сегменты цилиндра, где средние значения токов относительно невелики, амплитуда колебаний может достигать 100% и более.

В условиях турбулентного обтекания, когда электрическое число Рейнольда $\mathrm{Re}_э$ достаточно велико, конвективный перенос значительно превосходит эффекты, связанные с диффузией и подвижностью. Поэтому

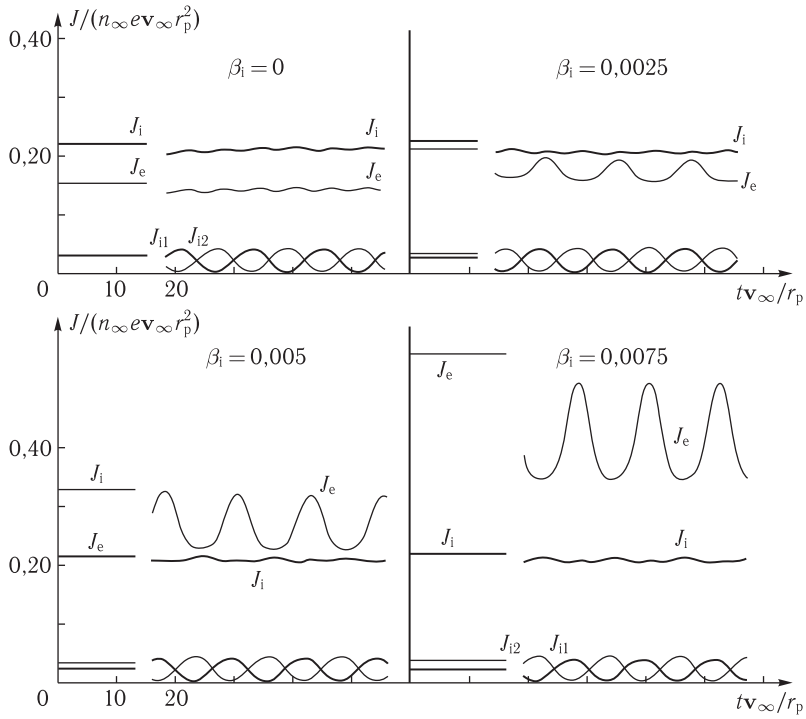


Рис. 9.34. Влияние величины магнитного поля на токи (цилиндр, $r_0 = 3$, $\varphi_0 = -30$, $\mathrm{M}_0 = 0{,}8$)

зависимость суммарной плотности ионного тока от параметров φ_0 и r_0 ослабляется. Этого нельзя сказать о плотности электронного тока, поскольку хаотическая скорость электронов много больше направленной.

На рис. 9.33 представлены профили концентраций ионов и электронов при ламинарном и турбулентном обтекании в магнитном поле.

Белому цвету соответствуем максимум концентрации, черному — минимум. Изолинии концентраций — это границы между областями с различной плотностью почернения. Диапазон изменения безразмерных концентраций указан в левом нижнем углу рисунков. Если в случае $B = 0$ при ламинарном обтекании след за телом симметричен относительно плоскости, содержащей векторы $\mathbf{v}_\infty$ и ось цилиндра, то при $B > 0$ в следе образуются области с несимметричным расположением концентраций, что ведет к появлению аксиального электрического поля. При турбулентном обтекании вследствие перемешивания вихрями указанный эффект несколько смазывается. Асимметрия в профилях концентрации приводит к асимметрии плотности тока по обводу цилиндра. Вторая причина, влияющая на плотность тока — это направленная скорость заряженных частиц, которая определяется процессами конвекции, диффузии и подвижности.

На рис. 9.34 даны плотности токов ионов и электронов при ламинарном и турбулентном обтекании на различие сегменты цилиндра в зависимости от величины магнитного поля. Ламинарный режим отмечен прямыми отрезками вблизи начала координат. Турбулентный режим приводит к колебаниям j_e и j_i по времени.

Из кривых видно, что ионный ток насыщения и в ламинарном, и в турбулентном режимах практически не зависит от параметра β_i (при $\beta_i \leq 0{,}0075$). Это связано с тем обстоятельством, что в указанном интервале изменения магнитного поля ионы не замагничены. Как следует из рис. 9.34, заметная асимметрия в j_i проявляется при более сильных полях. Как и в случае $B = 0$, среднее значение ионного тока в турбулентном режиме ниже его значения в ламинарном режиме. С увеличением отрицательного потенциала зонда j_i незначительно возрастает по величине, что вызвано ростом толщины слоя объемного заряда.

9.4. Плоский электрод в потоке слабоионизованной столкновительной турбулентной плазмы

Расположение плоского электрода на боковой поверхности пластины, обтекаемой ламинарной или турбулентной плазмой, аналогично рис. 1.2. Магнитное поле направлено по оси Z. В случае турбулентной плазмы характерный размер пульсаций l' предполагается порядка толщины пограничного слоя δ. Поля пульсаций генерируются стохатически, причем векторы пульсаций скорости направлены равновероятно по всем направлениям. Время жизни вихрей определяется выражением $T' = l'/u_{\text{н}}$. Через промежуток времени T' задается новое распределение вихрей. Величина пульсаций скорости вблизи стенки $u' \sim (0{,}02\text{–}0{,}04)u_{\text{н}}$.

Динамика пристеночной турбулентной плазмы определяется системой уравнений [74]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial n_{\text{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\frac{n_{\text{i}}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_i + \beta_i(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_i)b)}{1+\beta_i^2}\right] = 0;\\
\mathbf{a}_i = -(D_{\text{i}} + D_T)\frac{\nabla n_{\text{i}}}{n_{\text{i}}} - D_{\text{i}} e \frac{\nabla\varphi}{kT_{\text{i}}};\\
\frac{\partial n_{\text{e}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\frac{n_{\text{e}}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_e - \beta_e(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_e)b)}{1+\beta_e^2}\right] = 0;\\
\mathbf{a}_e = -(D_e + D_T)\frac{\nabla n_{\text{e}}}{n_{\text{e}}} + D_e e \frac{\nabla\varphi}{kT_{\text{e}}};\\
\Delta\varphi = \frac{e(n_{\text{e}} - n_{\text{i}})}{\varepsilon_0};\\
\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_0) = 0;\\
\frac{\partial(\rho_a u_{0x})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_0 u_{0x}) = -\frac{1}{\rho_a M_a^2}\frac{\partial \rho_a}{\partial x};\\
\frac{\partial(\rho_a u_{0y})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_0 u_{0y}) = -\frac{1}{\rho_a M_a^2}\frac{\partial \rho_a}{\partial y},
\end{gathered}
\tag{9.4}
$$

где $r_0 = r_{\text{р}}/r_d$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{\text{н}}/M_u$, $\varepsilon = T_{\text{i}}/T_{\text{e}}$, $M_a = u_{\text{н}}\sqrt{m_a/(kT_\infty)}$, $\text{Re}_{\text{ie}} = r_{\text{р}} u_{\text{н}}/D_{\text{ie}}$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$.

Граничные и начальные условия стандартны [1].

Тензор турбулентной диффузии D_T в пограничном слое определяется через пульсации скорости газа u'_0 и длину пути смешения l' [97];

$$D_{Tkm} = \delta kmlu'_{0k}.$$

Длина пути смешения определяется по формуле Ван-Дриста:

$$l' = 0{,}4y\left[1 - \exp\left(-\frac{yu_\tau}{26u}\right)\right].$$

Профиль средней скорости

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = (0, yu_\tau^2/u, 0), & yu_\tau/u \le 11{,}1; \\ \mathbf{u}_0 = (0, 2{,}5u_\tau \ln(yu_\tau/u) + 5{,}1u_\tau, 0), & yu_\tau/u > 11{,}1, \end{cases}$$

где $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ — характерная скорость, τ_w — напряжение трения на стенке.

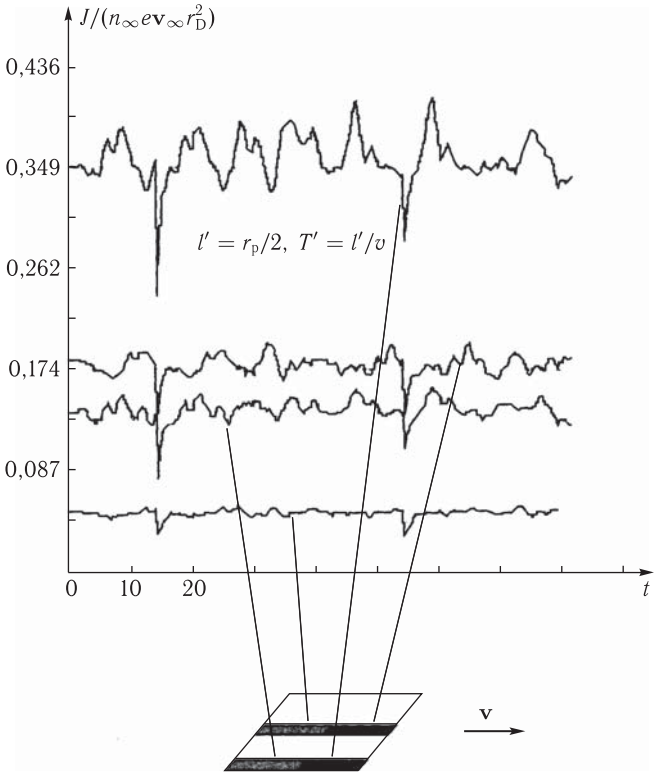


Рис. 9.35. Токи на сегменты плоского электрода ($\varphi_0 = -5$, $M_0 = 0{,}5$, $r_0 = 1$, $\varepsilon = 3$, $\beta_{\text{i,e}} = 0$)

Задача решалась в двумерной постановке (для электрода ленточного типа) и в трехмерной постановке (для электрода в виде прямоугольника). Численная модель задачи соответствовала гл. 8. Результаты некоторых расчетов в трехмерной постановке даны на рис. 9.35.

Различные кривые соответствуют токам на четыре различных сегмента электрода. Точки на сегменты, расположенные сбоку пластины, всегда больше токов на аналогичные центральные сегменты за счет краевого эффекта. Точки на сегменты, примыкающие к передней кромке пластины, всегда меньше аналогичных токов на сегменты, примыкающие к задней стенке пластины. Здесь сказывается влияние концевого эффекта, впервые исследованного в работе И.Б. Берштейна и И. Рабиновича [38]. Краевой и концевой эффекты — это существенно нелинейные эффекты, которые удалось исследовать только методами вычислительной физики [1]. Численные эксперименты с турбулентной плазмой показали:

— с увеличением размера пульсаций скорости несколько возрастают средние значения токов на электрод и амплитуда пульсаций тока;

— пульсации приводят к тому, что появляются электронные токи на тело при его отрицательном потенциале и ионные токи при положительных потенциалах, хотя при ламинарном обтекании этого не наблюдалось;

— при относительно больших значениях потенциала тела влияние пульсаций невелико и отличие тока на нем при ламинарном обтекании и среднего тока при турбулентном обтекании невелико (не превышает 10%). Однако вблизи плавающего потенциала ток может измениться за счет турбулентности существенно ($\sim 50\%$).

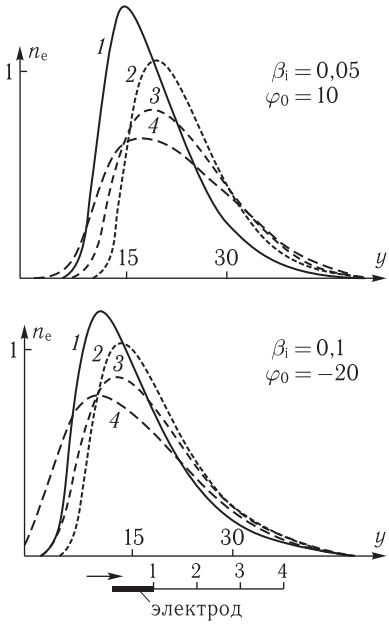


Рис. 9.36. Распределение концентраций электронов вблизи плоского электрода ($r_0 = 5$; $\varepsilon = T_i/T_e = 1/3$); *1–4* — номера сечений $X = \text{const}$

На рис. 9.36 приведены распределения концентраций электронов вблизи плоского электрода в зависимости от координаты y при наличии поперечного магнитного поля. Цифрами *1–4* отмечены кривые для различных сечений $x = \text{const}$, отстоящих одна от другой на расстоянии $\Delta x = r_p$. Первая кривая соответствует сечению $x = r_p/2$. Под влиянием направленной скорости потока сечение с минимальной концентрацией электронов сносится вниз по потоку. Спадающий к нулю участок кри-

вых при возрастании координаты y объясняется тем, что на границе обтекания профиль концентраций имеет вид

$$n_{\mathrm{e}} = n_{\infty} \exp[-(3y/r_{\mathrm{p}})^2],$$

что удовлетворительно согласуется с реальным профилем концентраций вблизи поверхности гиперзвукового летательного аппарата.

Уменьшение n_{e} по действием внешнего магнитного поля можно использовать для управления параметрами пограничного слоя.

9.5. Обтекание цилиндрического тела потоком слабоионизованной столкновительной плазмы при умеренных числах Рейнольдса

Медленно движущаяся столкновительная плазма встречается в ацетиленовых горелках, технологических плазмотронах, в узлах высокотемпературных энергетических установок. Поэтому вопросы обтекания тел такой плазмой являются актуальной задачей. Теоретические исследования процессов переноса вблизи цилиндрического тела радиуса r_{p} и потенциала φ_{p}, помещенного в поток движущейся со скоростью v_{∞} слабоионизованной столкновительной плазмы, проводились М. С. Бениловым, Б. В. Роговым, Г. А. Тирским [98–100], А. В. Кашеваровым [41], В.А. Котельниковым с соавторами [1, 2] и др. В работах [98–101] используется асимптотический подход, когда слой объемного заряда предполагается тонким столкновительным. Это означает, что радиус зонда r_{p} много больше радиуса Дебая r_{D}, который, в свою очередь, много больше среднего пробега заряженных частиц в плазме λ:

$$r_{\mathrm{p}} \gg r_{\mathrm{D}} \gg \lambda. \tag{9.5}$$

В этом случае во всей области вблизи цилиндра за исключением очень тонкого слоя, примыкающего к поверхности, выполняется условие квазинейтральности. В предположении, что $r_{\mathrm{D}}/r_{\mathrm{p}} \to 0$, толщина слоя объемного заряда вблизи зонда $\Delta \to 0$ и можно перенести граничное условие для концентрации заряженных частиц на стенке на условную границу слоя объемного заряда. На этой границе полагают

$$n_{\mathrm{i,e}} = 0. \tag{9.6}$$

При этих предположениях математическая модель задачи упрощается: система уравнений Максвелла сводится к уравнению Лапласа, а в выражениях для плотностей потоков ионов и электронов исключаются члены с градиентом потенциала. В [41] получено выражение для тока насыщения на отрезок цилиндра длиной l:

$$I_{\mathrm{i,e}} = 2\pi e n_{i,e\infty} D_{\mathrm{i,e}} l \cdot \widehat{\mathbf{I}}_{\mathrm{i,e}}, \tag{9.7}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}_{\mathrm{i,e}}$ — безразмерный интегральный ток на единицу длины цилиндра:

$$\widehat{\mathbf{I}}_{\mathrm{i,e}} = (1 + \varepsilon^{\pm 1})^{\alpha} \langle n_0' \rangle. \tag{9.8}$$

Здесь α — известная постоянная, $\varepsilon = T_{\mathrm{i}\infty}/T_{\mathrm{e}\infty}$ — отношение температур ионов и электронов, $\langle n_0' \rangle$ — средняя по обводу цилиндра безразмерная производная от квазинейтральной концентрации заряженных частиц по радиальной координате. В качестве масштаба концентрации взято $n_{\mathrm{i,e}\infty}$, а в качестве масштаба длины — радиус цилиндра r_{p}.

Из вычислительных экспериментов следует [41], что $\langle n_0' \rangle$ хорошо апроксимируется степенной функцией от числа Рейнольдса, которое пропорционально направленной скорости движущейся среды. С ростом скорости v_∞ растет число Рейнольдса и соответственно плотность тока насыщения на зонд:

$$\langle n_0' \rangle = a\,\mathrm{Re}_{\text{э}}^{b}, \tag{9.9}$$

где a, b — известные константы. Подставляя (9.9) в (9.8), получим

$$\widehat{\mathbf{I}}_i = 0{,}58(1 + 1/\varepsilon)^{0{,}6}\,\mathrm{Re}_{\text{э}}^{0{,}4}\,. \tag{9.10}$$

В работах [2, 101, 102] задача решена в достаточно общей постановке, однако она не доведена до практического применения. В [41] сделана попытка экспериментальной проверки формул (9.10). Эксперимент проводился в плазме ацетиленовой горелки, в пламя которой подавались водные растворы солей различных щелочных и щелочноземельных металлов с целью повышения степени ионизации. Измерения проводились с помощью цилиндрических зондов, расположенных поперек потока. Расчет концентраций проводился по формулам (9.10). Зондовые измерения дублировались оптическими измерениями, согласно которым концентрация заряженных частиц составляла $(1{,}8\text{–}3{,}8) \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$, ионная температура $T_{\mathrm{i}} = 2370 \pm 10$ К, скорость направленного движения $v_{\mathrm{i}\infty} = 3\text{–}7$ м/с.

Сравнение зондовых и оптических измерений показало, что имеет место превышение концентраций, полученных с помощью зондов по формулам (9.10), над их значением, полученным оптическим методом: для натрия — в 3,5 раза, для калия — в 2,4 раза, для рубидия — в 1,5 раза. Анализ возможных причин расхождения, проведенный в [41], включал учет образования отрицательных ионов, отсутствие химического равновесия в области расположения зондов, учет охлаждающего действия зонда на плазму и др. Однако всех этих причин оказалось недостаточно для объяснения указанных расхождений. Это стимулировало проведение дополнительных вычислительных экспериментов с цилиндрическими зондами, расположенными поперек потока столкновительной плазмы при умеренных числах Рейнольдса [102] по методике, изложенной в [1]. Учитывались все три процесса переноса: конвекция, диффузия и подвижность. Особое внимание было уделено параметрам плазмы, близким к экспериментальным, приведенным в работе [41].

На рис. 9.37 даны распределения концентраций ионов и электронов вдоль радиуса в лобовой (рис. 9.37, *а*), боковой (рис. 9.37, *б*) и теневой (рис. 9.37, *в*) областях обтекаемого плазмой цилиндра, ес-

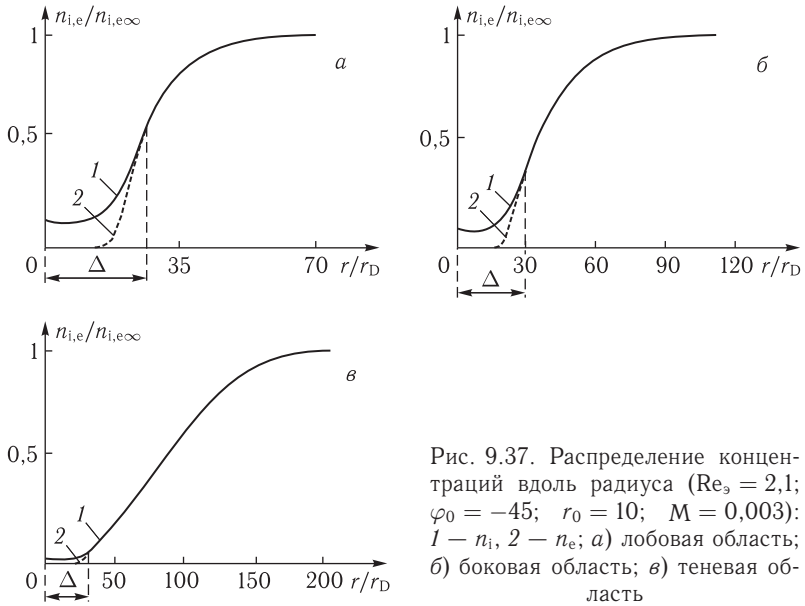


Рис. 9.37. Распределение концентраций вдоль радиуса ($\mathrm{Re}_э = 2{,}1$; $\varphi_0 = -45$; $r_0 = 10$; $M = 0{,}003$): *1* — n_i, *2* — n_e; *а*) лобовая область; *б*) боковая область; *в*) теневая область

ли $\mathrm{Re}_э = 2{,}1$, $\varphi_0 = \varphi_p e/(KT_{i\infty}) = -45$, $r_0 = r_p/r_D = 10$, число Маха $M = 0{,}003$, $\varepsilon = 1$. Из рис. 9.37 следует, что при $\mathrm{Re}_э \sim 2$ и $M \sim 0{,}003$, $r_0 = 10$, $\varphi_0 = -45$ толщина слоя объемного заряда Δ мало меняется по обводу цилиндра. Его среднее значение составляет $\langle\Delta\rangle = 26r_D$. Следовательно, толщина слоя объемного заряда превышает радиус зонда ($r_p = 10r_D$), и его никак нельзя считать бесконечно тонким. Это и послужило основной причиной противоречий между зондовыми и оптическими измерениями, приведенными выше [41]. Из рис. 9.37 также следует, что при достаточно больших потенциалах концентрация притягивающихся частиц на стенке отлична от нуля.

9.6. Обтекание полуконуса турбулентным потоком воздушной плазмы под углом атаки

Обтекаемое плазмой тело изображено на рис. 9.38 и представляет собой половину конуса с углом полураствора 10° и сферическим скруглением в лобовой части. Радиус скругления составляет 0,3 от радиуса основания конуса. Угол атаки α определяется как угол между направлением набегающего потока и осью симметрии конуса.

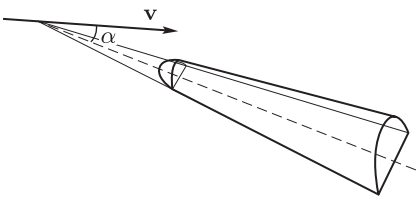


Рис. 9.38. Геометрия обтекаемого тела

Математическая модель задачи соответствует п. 7.4.1, а вычислительная модель — п. 8.3.

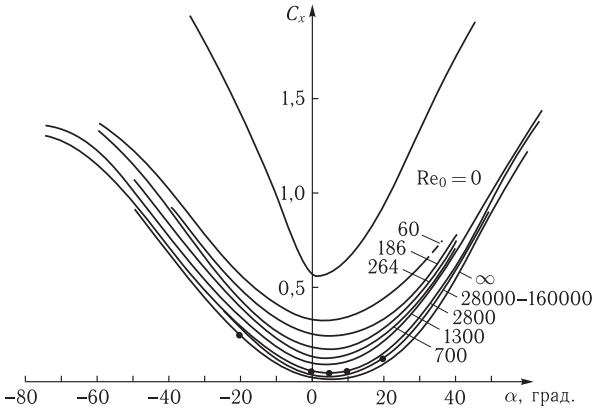


Рис. 9.39. Зависимость коэффициента сопротивления C_x от угла атаки α (• — расчетные данные)

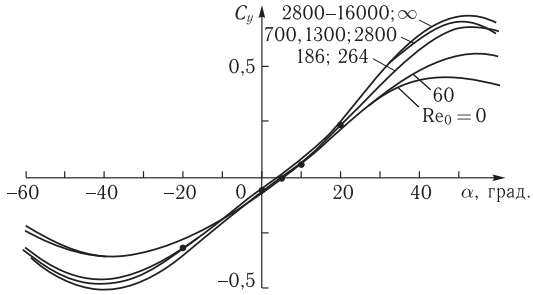


Рис. 9.40. Зависимость коэффициента подъемной силы C_y от угла атаки α (• — расчетные данные)

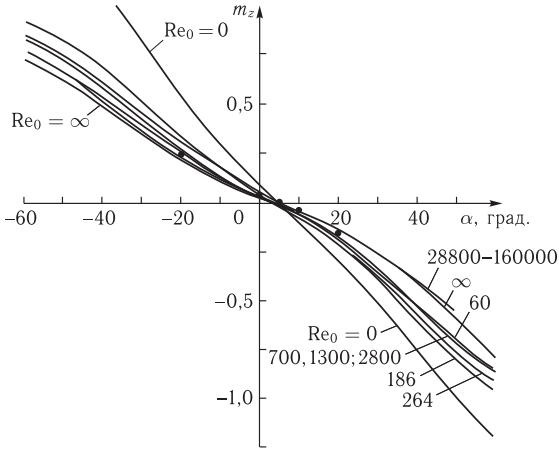


Рис. 9.41. Зависимость коэффициента момента m_z от угла атаки α ($x_т = 0$, $y_т = 0$; • — расчетные данные)

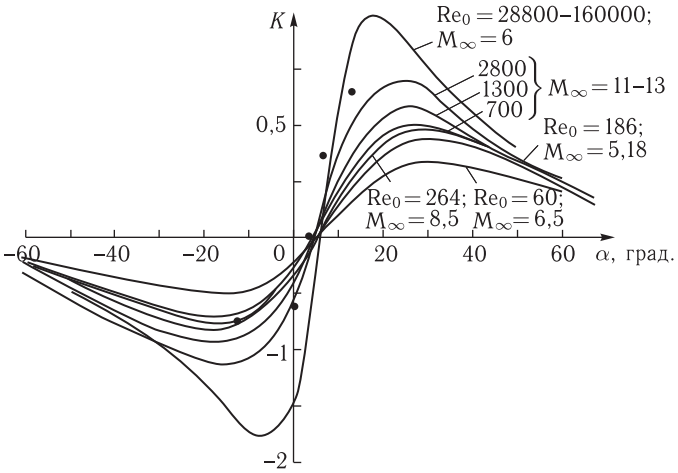


Рис. 9.42. Зависимость аэродинамического качества K от угла атаки α (• — расчетные данные)

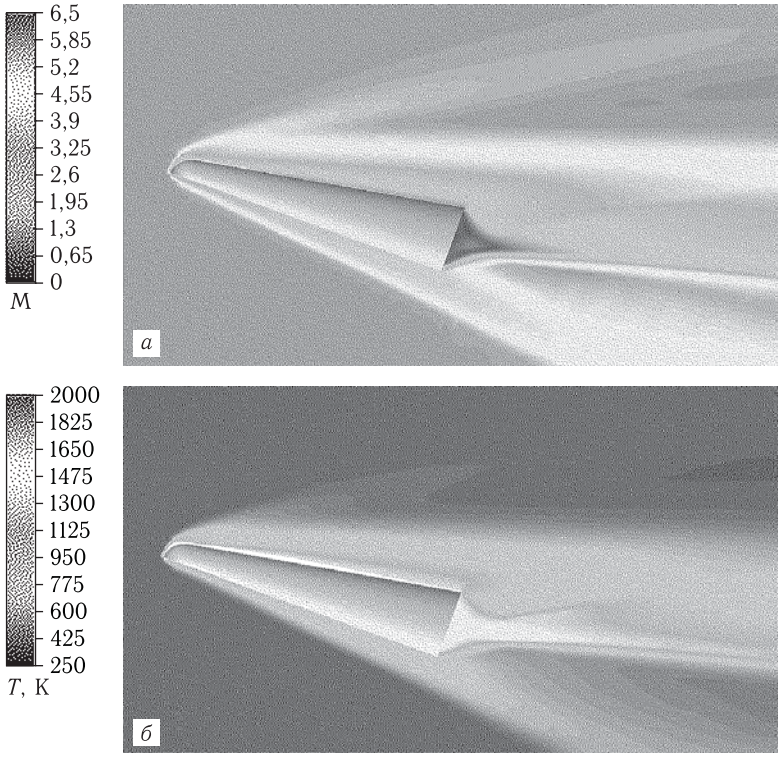


Рис. 9.43. Профиль обтекания полуконуса при угле атаки $\alpha = 20°$: *а*) изолинии скорости; *б*) изолинии температуры

В процессе решения задавались параметры невозмущенного потока и геометрические характеристики полуконуса. Число Рейнольдса полагалось равным $1{,}6 \cdot 10^5$, так что течение было заведомо турбулентным, число Маха $M = 6$. При таких значениях чисел Рейнольдса и Маха результаты вычислительных экспериментов можно было сравнивать с экспериментальными данными, полученными в [103]. На рисунках 9.39–9.42 даны аэродинамические характеристики течения, полученные в вычислительном эксперименте*: коэффициент сопротивления C_x, коэффициент подъемной силы C_y, коэффициент момента m_z и аэродинамическое качество K. Точками на теоретических кривых отмечены экспериментальные данные, заимствованные из [103].

На рис. 9.43 показана структура обтекания полуконуса при угле атаки $\alpha = 20°$. На рис. 9.43, *а* представлены изолинии скорости, а на рис. 9.43, *б* — изолинии температуры.

Серия рисунков 9.39–9.42 показывает хорошее согласование расчетов с экспериментальными данными для всех рассчитанных углов атаки α.

9.7. Обтекание цилиндра со сферическим затуплением турбулентным потоком воздушной плазмы

Рассматривается задача осевого обтекания сферически скругленного цилиндра гиперзвуковым потоком газа. Радиус цилиндра $R = 0{,}038$ м, параметры набегающего потока $M_\infty = 16$, $T_\infty = 52$ К, $p_\infty = 82{,}95$ Па, температура стенки $T_w = 294{,}4$ К. Рассчитывалось поле течения для 1/4 части цилиндра и определялись тепловые потоки на поверхности. В расчете использовалось уравнение состояния на основе алгоритма решения задачи о равновесной диссоциации (см. п. 7.4) и решались уравнения переноса компонент.

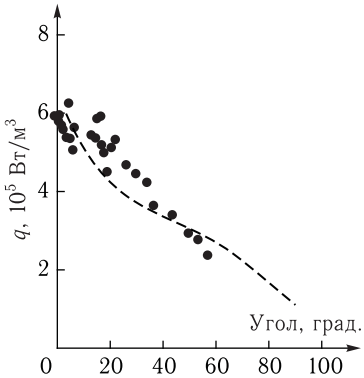


Рис. 9.44. Распределение теплового потока вдоль образующей затупленного цилиндра

При низкой начальной температуре влияние диссоциации и ионизации оказалось не очень значительным, однако разница температуры между расчетом с учетом диссоциации и расчетом для идеального газа составила в точке торможения около 200 К. Результаты расчета неплохо согласуются с экспериментальными данными, при этом сетка является достаточно «грубой» в пристеночной области, а уравнения пограничного слоя интегрируются на подсеточном уровне.

* Задача решена В. А. Волковым и А. В. Хохловым.

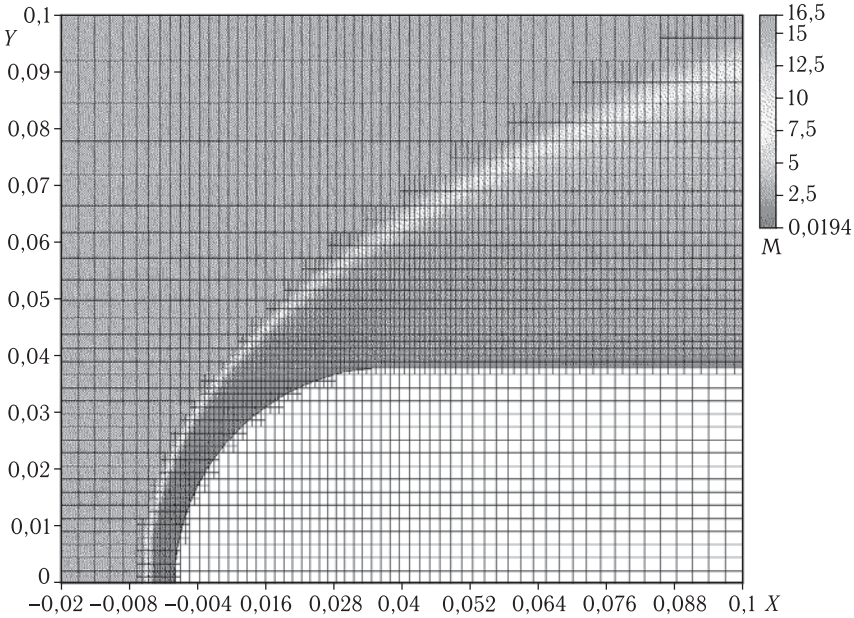


Рис. 9.45. Распределение числа Маха и след сетки в осевом сечении

На рис. 9.44 представлено распределение теплового потока вдоль образующей затупленного цилиндра. Пунктиром обозначена расчетная кривая, точками — экспериментальные данные. На рис. 9.45 показан след сетки в осевом сечении, а также распределение числа Маха. Отчетливо видна отошедшая ударная волна.

Итак, описанный подход позволяет получить приемлемые с инженерной точки зрения результаты на сетках ограниченной размерности. Полученные результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными и данными других расчетов как для расчета интегральных характеристик — сил и моментов, так и при расчете локальных тепловых нагрузок.

9.8. Влияние столкновений на процессы переноса в пристеночной плазме при промежуточных значениях чисел Кнудсена

9.8.1. Влияние столкновений «ион–нейтрал». Прежде чем излагать результаты исследований для случая плоского пристеночного электрода, приведем результаты более раннего исследования для электродов кругового сечения. Безразмерная система уравнений [104] записывалась в координатах (r, v, γ), $\gamma = \cos\alpha$, где α — угол между векторами r и v. Электроны предполагались распределенными по закону Больцмана,

что допустимо при отрицательных потенциалах на электроде и достаточно больших числах Кнудсена [1]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial t}+v\gamma\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial r}+\gamma\frac{E}{2}\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial v}+(1-\gamma^2)\left[\frac{v}{r}+\frac{E}{2v}\right]\frac{\partial f_{\mathrm{i}}}{\partial\gamma}=\mathrm{Kn}^{-1}\int(f_{\mathrm{i}}'f_a'-f_{\mathrm{i}}f_a)g_{\mathrm{ia}}b\,db\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_a;\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{A}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=n_{\mathrm{e}}-n_{\mathrm{i}},\quad E=-\frac{\partial\varphi}{\partial r};\\
n_{\mathrm{i}}(r_{\mathrm{i}}t)=\int f_{\mathrm{i}}J_{\vee}\,dv\,d\gamma;\\
f_a=n_a\pi^{-l/2}\beta^3\exp(-\beta v^2);\\
f_{\mathrm{i}}(r,v,\gamma,0)=\pi^{-l/2}\exp(-v^2);\\
f_{\mathrm{i}}(r_\infty,v,\gamma,t)=\pi^{-l/2}\exp(-v^2+2vv_H\gamma-v_H^2)';\\
n_{\mathrm{e}}=\exp(\varepsilon\varphi);\\
f_{\mathrm{i}}(r_0,v,\gamma,t)=0,\quad\gamma>0;\\
\varphi(r_0,t)=\varphi_0;\\
\varphi(r_\infty,t)=0;\\
\beta=\frac{T_{\mathrm{i}\infty}}{T_{\mathrm{a}}},\quad\varepsilon=\frac{T_{\mathrm{i}\infty}}{T_{\mathrm{e}\infty}},\quad\mathrm{Kn}=(\sigma_{\mathrm{ia}}r_{\mathrm{p}}n_{\mathrm{i}\infty})^{-1}.
\end{gathered}
\tag{9.11}
$$

Параметр $l=3$ для сферы и $l=2$ для цилиндра; $A=2$ для сферы и $A=1$ для цилиндрической геометрии тела; якобиан перехода $J_{\vee}=2\pi v^2$ для сферы и $J_{\vee}=v(1-\gamma^2)^{-1/2}$ — для цилиндра.

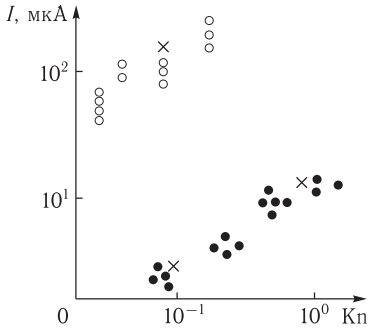


Рис. 9.46. Сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными: ○ — $r_0=10$, эксперимент; ● — $r_0=100$, эксперимент; × — расчетные данные

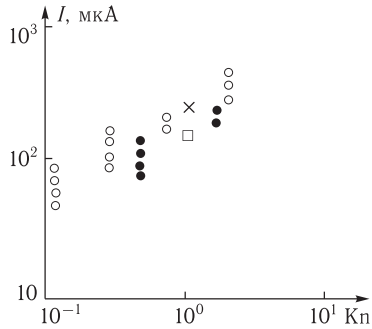


Рис. 9.47. Сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными: ○ — $r_0=10$, $l_0/r_0=40$, эксперимент; ● — $r_0=10$, $l_0/r_0=20$, эксперимент; × — $r_0=10$, $l_0/r_0=40$, расчетные данные; □ — $r_0=10$, $l_0/r_0=20$, расчетные данные

Система (9.11) решалась с использованием статистических методов, близких к изложенному в п. 8.5.1. Результаты численного моделирования для сферических и цилиндрических тел сравнивались с экспериментальными данными [104]. Измерения проводились в гелиевой плазме тлеющего разряда при давлении 133 Па с помощью двойных сферических зондов с безразмерным радиусом $r_0 = 10$ и $r_0 = 100$ при безразмерном потенциале $\varphi_0 = -5$. Результаты сравнения теории и эксперимента приведены на рисунках 9.46 и 9.47, где даны результаты измерений цилиндрическим зондом при $r_0 = 10$ и отношении длины зонда к его радиусу $l/r_0 = 20$ и 40. Во всех экспериментах степень ионизации плазмы была порядка 10^{-6}, что удовлетворяет условию слабой степени ионизации. Сравнение экспериментальных и теоретических данных указывает на их удовлетворительное согласие.

На рис. 9.48 приведены в безразмерном виде эволюционные кривые для плотности ионного тока на сферический электрод с радиусом $r = 20$ и потенциалом $\varphi_0 = -16$, а число Кнудсена менялось в пределах $10 \le \mathrm{Kn} \le 10^4$. Эволюция осуществлялась после импульсного изменения потенциала сферы. На приведенных кривых не указаны плотности токов смещения, которые затухают на безразмерных временах, не превышающих 0,1. Максимумы токов проводимости как и в молекулярном режиме приходятся на момент безразмерного времени $t \sim 2$.

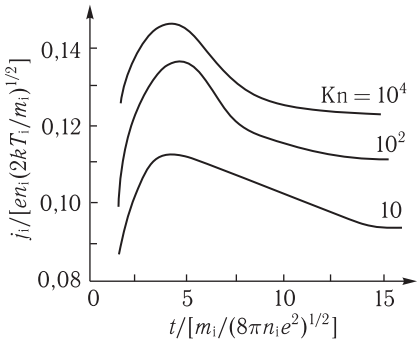


Рис. 9.48. Эволюция ионного тока ($r_0 = 20$, $\varphi_0 = -16$, $\varepsilon = 1$, сфера)

Характерные времена релаксации в плазме под влиянием столкновений ионов с нейтральными атомами растут.

Перейдем теперь к рассмотрению результатов вычислительных экспериментов с плоскими пристеночными электродами в виде удлиненной полосы (ленты) (см. рис. 1.2). Расчет проводился по алгоритму, изложенному в п. 8.5.1. Были получены функции распределения ионов и электронов по скоростям, их моменты (концентрации и плотности токов), потенциал и напряженность электрического поля в возмущенной зоне.

Некоторые результаты представлены на рисунках 9.49–9.52. Результаты получены для значения $r_0 = 2$. Число Кнудсена определяется выражением $\mathrm{Kn} = \lambda_{\mathrm{ia}}/r_{\mathrm{p}} = \langle v_i \rangle/(v_{\mathrm{ia}} r_{\mathrm{p}}) = \sqrt{8kT_{\mathrm{i}}/\pi m_0}/(v_{\mathrm{ia}} r_{\mathrm{p}})$.

Рисунок 9.49 иллюстрирует общий вид функции распределения ионов в момент установления ($t = \tau$) при потенциале электрода $\varphi_0 = -5$ и значении числа Кнудсена $\mathrm{Kn} = 2$. Точка, в которой получена функция распределения, имеет координаты $x = x_0$, $y = y_\infty/10$.

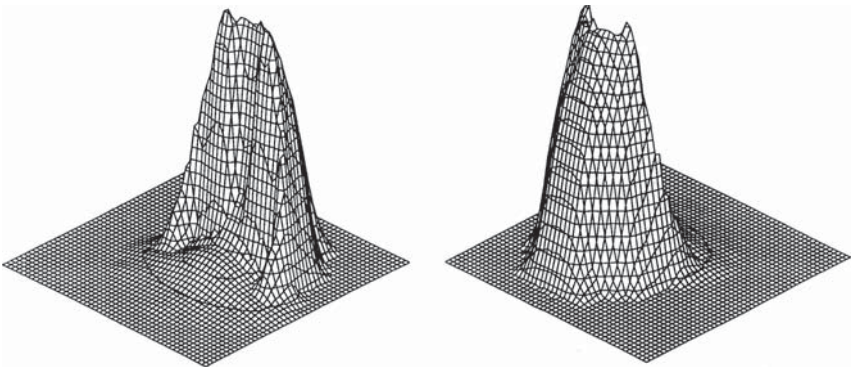


Рис. 9.49. Функция распределения ионов с учетом столкновений типа «ион–нейтрал» ($r_0 = 2$, $\varphi = -5$, $\mathrm{Kn} = 2$)

Функция распределения ионов в данных условиях имеет подковообразный вырез, направленный в сторону положительной оси v_y. Однако в отличие от молекулярного режима имеется некоторое наполнение носителя внутри подковы, что напрямую связано с влиянием столкновений. Часть ионов в результате столкновений замедляет свои скорости, а часть приобретает скорости в направлении, противоположном действию электрического поля.

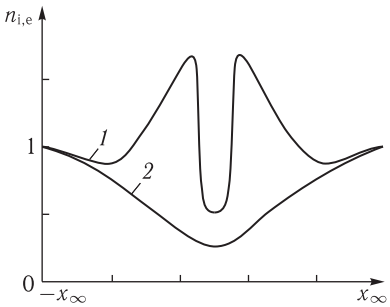


Рис. 9.50. Распределение $n_{\mathrm{i,e}}$ вдоль оси x ($r_0 = 2$, $\varphi_0 = -3$, $\mathrm{Kn} = 0{,}7$): *1* — n_{i}; *2* — n_{e}

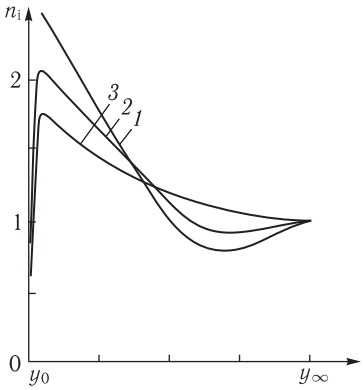


Рис. 9.51. Распределение n_{i} вдоль оси y ($r_0 = 2$, $\mathrm{Kn} = 0{,}7$): *1* — $\varphi_0 = -9$; *2* — (-6); *3* — (-3)

На рис. 9.50 даны кривые распределения вдоль оси x концентраций ионов (*1*) и электронов (*2*) для установившегося режима ($t = \tau$) при потенциале $\varphi_{\mathrm{p}} = -3$ и $\mathrm{Kn} = 0{,}7$. Кривые напоминают аналогичные распределения в молекулярном режиме. Распределение ионов вдоль оси y приведено на рис. 9.51.

Зависимость плотности ионного тока от числа Кнудсена и потенциала для плоского пристеночного электрода ленточного типа при наличии столкновений типа «ион–нейтрал» приведены на рис. 9.52. По вертикальной оси отложена безразмерная плотность ионного тока, по горизонтальной — безразмерный потенциал φ_0.

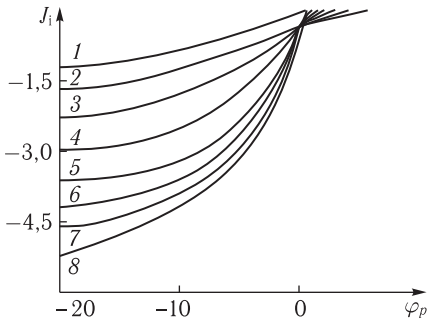


Рис. 9.52. Зависимость плотности ионного тока от числа Кнудсена и потенциала для плоского пристеночного зонда ленточного типа при наличии столкновений типа «ион–нейтрал» ($r_0 = 2$): *1* — Kn = 0; *2* — 0,15; *3* — 0,3; *4* — 0,5; *5* — 0,7; *6* — 0,8; *7* — 1,0; *8* — ∞

Как и в случае зонда сферической геометрии, в данном случае наблюдается существенная зависимость плотности ионного тока от числа Kn. Уменьшение ионного тока с ростом числа Kn вызвано тем, что часть ионов, двигавшихся под действием электрического поля к зонду, изменило направление своего движения вследствие рассеяния на нейтральных атомах. По этой причине средняя скорость направленного движения ионов уменьшается. Чем меньше число Кнудсена, тем чаще происходят такие столкновения и тем меньше ионный ток.

9.8.2. Влияние столкновений «электрон–нейтрал». Рассматривается диэлектрическая стенка, на которой находится электрод в виде удлиненного прямоугольника толщиной r_p и потенциала φ_p (см. рис. 1.2). Математическая модель задачи соответствовала п. 7.5.2, а численная модель п. 8.5.2. В результате расчетов получены функции распределения заряженных компонент, распределения потенциала и напряженности электрического поля, эволюционные кривые электрических токов после импульсного изменения потенциала, а также вольтамперные характеристики стеночного электрода ленточной формы. Некоторые из этих результатов представлены на рисунках 9.53–9.56. Как и в п. 9.8.1, результаты получены для толщины пластины $r_0 = r_\text{p}/r_\text{D} = 2$. Число Кнудсена определялось по формуле:

$$\text{Kn} = \frac{\lambda_\text{ea}}{r_\text{p}} = \frac{\langle v_e \rangle}{v_\text{ea} r_\text{p}} = \frac{\sqrt{8kT_\text{e}/\pi m_\text{e}}}{v_\text{ea} r_\text{p}}.$$

На рис. 9.53 приведен типичный вид функции распределения электронов вблизи заряженного электрода с учетом электрон-атомных столкновений ($x = 0$, $y = 0{,}1y_\text{max}$).

Функция распределения электронов в основном похожа на функцию распределения ионов. В проекции на плоскость (V_x, V_y) она имеет форму подковы со сглаженными углами. С внутренней стороны подковы

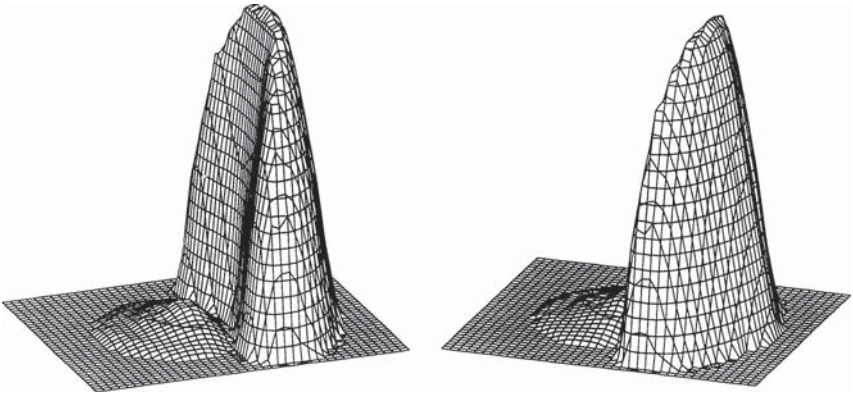


Рис. 9.53. Функция распределения электронов с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал» ($r_0 = 2$)

появился невысокий подъем, которого не наблюдалось в молекулярном режиме. Он формируется электронами, отраженными от атомов после столкновений.

На рисунках 9.54 и 9.55 представлены распределения электронов вдоль оси Y в момент установления при различных потенциалах электрода, указанных на рисунке. Отметим, что концентрация электронов на стенке не равна нулю как при положительных, так и при отрицательных потенциалах, что подтверждает высказанную выше мысль о том, что полагать значение концентрации на стенке равным нулю не всегда корректно.

На рис. 9.56 представлены электронные ветви вольт-амперных характеристик плоского пристеночного электрода ленточного типа с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал». По вертикальной оси отло-

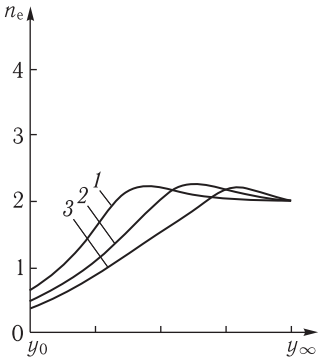


Рис. 9.54. Распределение n_e вдоль оси Y ($r_0 = 2$, $\varepsilon = 1$): *1* — $\varphi_0 = -3$; *2* — (-6); *3* — (-9)

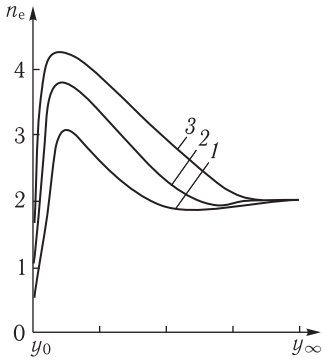


Рис. 9.55. Распределение n_e вдоль оси Y ($r_0 = 2$, $\varepsilon = 1$): *1* — $\varphi_0 = 3$; *2* — 6; *3* — 9

жена безразмерная плотность электронного тока, по горизонтальной — безразмерный потенциал. Расчеты проведены для ленты толщиной $r_0 = 2$ и значение $\varepsilon = 1$. Число Кнудсена варьировалось от 0 до ∞, т. е. от режима сплошной среды до молекулярного режима. Как и для случая ионного тока, при данном потенциале с уменьшением числа Кнудсена ток существенно уменьшается, что связано с влиянием столкновений. В результате столкновений электронов с атомами часть электронов изменяет свои скорости и рассеивается, не достигая зонда, что и ведет к уменьшению электронного тока. При отрицательных потенциалах электрода столкновения, наоборот, могут привести к рассеянию в сторону зонда и тем самым увеличить электронный ток. Таких электронов тем больше, чем больше число Кнудсена.

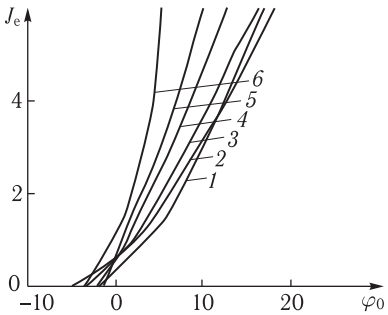


Рис. 9.56. Электронная ветвь ВАХ зонда ленточного типа с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал» ($r_0 = 2$, $\varepsilon = 1$): *1* — Kn = 0; *2* — 0,3; *3* — 0,7; *4* — 0,8; *5* — 1; *6* — ∞

9.8.3. Влияние столкновений «ион–ион» и «ион–электрон». Рассматривается бесконечная плоскость с потенциалом φ_p, помещенная в достаточно сильно ионизованную плазму, в которой основную роль играют столкновения между заряженными частицами. Математическая модель в этом случае соответствует уравнениям (8.71), (8.72) с соответствующими начальными и граничными условиями, а численная модель — п. 8.5.3.

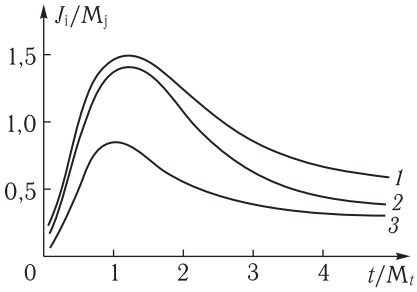


Рис. 9.57. Эволюция плотности ионного тока ($\varphi_0 = -10$; $v_0 = 0$; $\varepsilon = 1$): *1* — $n_D = 10^4$; *2* — 10^3; *3* — 10^2

На рис. 9.57 представлены эволюционные кривые для плотности ионного тока на бесконечную заряженную плоскость при различных значениях числа заряженных частиц в дебаевской сфере $n_D = 10^2$–10^4. Анализ результатов показывает, что столкновения между заряженными частицами ведут к росту взаимного отталкивания ионов, вследствие чего в пристеночной области уменьшается плотность объемного заряда и снижается напряженность электрического поля. Это ведет к уменьшению плотности ионного тока на плоскость с увеличением роли столкновений [94]. В [94] рассмотрены также зонды сферической и цилиндрической геометрии с учетом столкновений заряженных частиц.

Часть III

ЗОНДОВЫЕ МЕТОДЫ ДИАГНОСТИКИ ПЛАЗМЕННЫХ ПОТОКОВ

Глава 10

МЕТОДЫ ЗОНДОВОЙ ДИАГНОСТИКИ ПОТОКОВ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

10.1. Зондовая диагностика покоящейся разреженной плазмы

10.1.1. Случай тонкого слоя объемного заряда. Электрический зонд представляет собой электрод относительно небольшого размера, как правило, цилиндрической, сферической или плоской геометрии, вносимый в заданную точку плазмы. На зонд подается потенциал известной полярности и временной зависимости и измеряется ток, протекающий в зондовой цепи. Полученная таким образом Вольтамперная характеристика зонда (ВАХ) является основным источником информации о параметрах плазмы в точке расположения зонда. Классическая теория зонда в покоящей бесстолкновительной плазме, основанная Ленгмюром в период 1924–1932 гг. [105], была усовершенствована Бомом в 1949 г. [106]. Необходимый для практики набор ВАХ был получен Лафрамбуазом в 1966 г. [107].

Зондовые измерения отличаются простотой конструкции самих датчиков и электронных измерительных схем, локальным характером измерений, многообразием измеряемых параметров. Однако перечень измеряемых параметров, приводимый в классических курсах по зондовой диагностике, можно расширить [1]. В разреженных потоках плазмы с помощью плоских или цилиндрических ориентированных зондов можно измерить направленную скорость ионов $v_н$. С помощью нестационарной методики зондовых измерений удается определить характерное время релаксации в плазме τ, а оно позволяет в свою очередь оценить ионную температуру T_i.

Математические и численные модели зондовых задач в молекулярном режиме сформулированы в главах 2 и 3 настоящей монографии. В [1] предложено проводить решение многомерных нестационарных зондовых задач методом последовательных итераций по времени. Уравнения, входящие в математические модели, предварительно приводятся к безразмерному виду с помощью системы масштабов. Рекомендации по выбору масштабов имеются в гл. 2. В момент времени $t = 0$ на фоне заданного начального распределения концентраций заряженных частиц

и самосогласованных с ними распределений потенциалов осуществляется импульсное изменение потенциала зонда

$$\varphi_{\text{p}} = \varphi_{\text{p}0}[1 - \exp(-\gamma t)].$$

Подбором параметра γ можно обеспечить достаточно крутой фронт нарастания потенциала. Время нарастания потенциала $t_{\text{фр}}$ должно быть мало по сравнению со временем релаксации в плазме τ, в противном случае не удается измерить значение τ в численном эксперименте:

$$t_{\text{фр}} \ll \tau.$$

За время τ осуществляется переход от начального стационарного состояния к конечному стационарному состоянию, соответствующему новому значению потенциала зонда. Вычислительный алгоритм должен обеспечить достоверную информацию об эволюции функций распределения заряженных частиц и потенциала (молекулярный режим), либо об эволюции концентраций ионов и электронов и потенциалов (режим сплошной среды). Рекомендации по выбору размера расчетной области, шага по времени и других параметров имеются в гл. 2.

В современной зондовой теории необходимо учитывать три характерных геометрических размера:

- λ — среднюю длину свободного пробега частиц в плазме;
- r_{p} — размер зонда;
- Δ — толщину слоя объемного заряда. В экспериментальной практике Δ может меняться от нескольких радиусов Дебая (r_{D}) до нескольких сот [1].

Если $\lambda \gg r_{\text{p}}$, то режим работы зонда считается молекулярным, в обратном случае ($\lambda \ll r_{\text{p}}$) зонд работает в режиме сплошной среды. В каждом из режимов можно выделить несколько предельных случаев, в которых зондовой ток вычисляется достаточно просто.

Например, в молекулярном режиме, если выполняется неравенство $\lambda \gg r_{\text{p}} \gg \Delta$, говорят о тонком бесстолкновительном слое объемного заряда. Как показали численные эксперименты [1, 18], в этом предельном случае ионный ток насыщения практически не зависит от потенциала и принимает постоянное значение, которое совпадает с известной формулой Бома [106]. В размерном виде формула Бома записывается так:

$$j_{\text{i}} = aen_{\text{i}\infty}\left(\frac{2kT_{\text{e}}}{m_{\text{i}}}\right)^{1/2}, \tag{10.1}$$

где $a = 0{,}8$ — для сферического зонда; $a = 0{,}4$ — для цилиндрического зонда; $a = 0{,}8$ — для плоского зонда.

Условия, соответствующие тонкому бесстолкновительному слою объемного заряда, часто встречаются на практике, например, в тлеющем разряде и дугах низкого давления, если концентрация заряженных частиц $n_{\text{i,e}} \geq 10^{10}$ см$^{-3}$.

На основании численной модели, приведенной в гл. 2, можно получить строгое решение зондовой задачи и сравнить его с плотностью тока, подсчитанной по формуле Бома.

Такое сравнение было проведено в [109]. Его результаты приведены на рисунках 10.1 и 10.2.

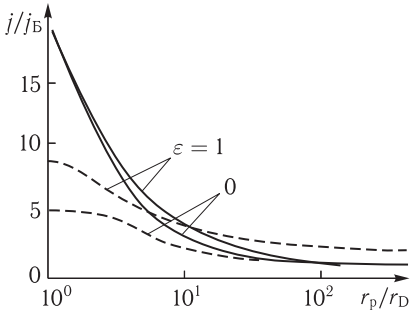


Рис. 10.1. Зависимость $j/j_Б$ от r_p/r_D ($\varphi_0 = -30$): —— — сфера; - - - — цилиндр

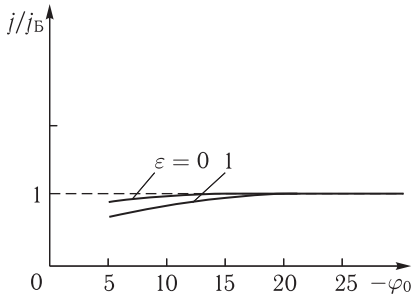


Рис. 10.2. Зависимость $j/j_Б$ от φ_p/M_φ ($r_p/r_D = 100$, сфера)

Из проведенного сравнения следует, что формула Бома может использоваться в экспериментальной практике, если $r_p \geq 10^3 r_D$, $0 \leq \varepsilon = T_i/T_e \leq 1$, $|\varphi_0| = |e\varphi_p/(kT_i)| \geq 20$. Сравнение с другими независимыми методами [1, 18, 108] показало, что погрешность формулы Бома не превышает 10%.

Приведенные в данном разделе простые формулы для вычисления концентраций заряженных частиц могут быть использованы как начальные значения в циклических процедурах, необходимых для построения методики обработки ВАХ в более сложных условиях, например, при наличии направленной скорости в плазме.

10.1.2. Случай произвольного слоя объемного заряда. В работах [110, 111] рассмотрены методы обработки ВАХ в разреженной плазме с использованием электронной ветви характеристики. В данном разделе изложена последовательность обработки, основанная на ионной ветви.

В безразмерном виде решение зондовой задачи зависит от формы зонда (в данном случае — это цилиндрический зонд, расположенный поперек потока (см. рис. 2.1), и безразмерных параметров $r_0, \varphi_0, \varepsilon$ ($r_0 = r_p/M_r$, $\varphi_0 = \varphi_p/M_\varphi$, $\varepsilon = T_{i\infty}/T_{e\infty}$). Параметры плазмы входят в масштабы перечисленных величин ($M_r = \left[\varepsilon_0 k T_{i\infty}/(e^2 n_{i\infty})\right]^{1/2}$, $M_\varphi k T_{i\infty}/e$). Из эксперимента считается известной зависимость тока от потенциала зонда, т. е. ВАХ; кроме того, известен геометрический размер зонда r_p.

Поскольку тепловая скорость электронов, как правило, значительно превосходит скорость направленного движения плазмы, на электронную ветвь зондовой характеристики скорость влияет незначительно.

Поэтому электронную температуру T_e определяют по возрастающему участку электронной ветви характеристики [31]:

$$T_e = \frac{e}{k}\left(\frac{d\ln j_e}{d\varphi_p}\right)^{-1}. \tag{10.2}$$

При нахождении T_e графическим методом удобно отсчитывать электронный ток от прямой линии, касательной к ионному току насыщения. Единицы, в которых измеряется j_e, несущественны, поскольку в расчетную формулу входит логарифмическая производная от j_e. Все остальные единицы берутся в одной системе.

Если исследуемая плазма имеет концентрацию $nj_{ie} \geq 10^{12}$ см$^{-3}$, и направленная скорость $v_н = 0$, то реализуются условия тонкого бесстолкновительного слоя объемного заряда и можно найти nj_{ie} из формулы Бома (10.1). В произвольном случае для нахождения концентрации из ионной ветви характеристики необходимо строить итерационный процесс. Предварительно необходимо оценить температуру ионов $T_{i\infty}$. Ее можно измерить с помощью нестационарного зондового метода (см. п. 10.4), или оценить каким-либо независимым способом. Поскольку масштабы потенциала зависят от $T_{i\infty}$, можно подсчитать $\varphi_0 = \varphi_p/M_\varphi$, и $\varepsilon = T_{i\infty}/T_{e\infty}$. Потенциал зонда φ_p и соответствующий ему ток I_p удобно брать в области ионного тока насыщения при достаточно больших отрицательных потенциалах. Далее строится итерационный процесс.

1. Задается концентрация заряженных частиц n_{i1}. Можно взять, например, значение, полученное по формуле Бома.

2. Вычисляется $M_{r1} = r_{d1} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 k T_{i\infty}}{n_{i1}e^2}}$ и $r_{01} = \dfrac{r_p}{M_{r_1}}$.

3. По безразмерным зависимостям $j_i = j_i(r_0, \varphi_0, \varepsilon)$, полученным в численных экспериментах [18], находится безразмерная плотность тока j_{i1}.

4. Вычисляется масштаб плотности тока $M_j = en_{i2}\sqrt{\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}} = \dfrac{I_p/S_p}{j_{i1}}$, где S_p — площадь цилиндрического зонда.

5. Находится новое значение концентрации ионов $n_{i2} = \dfrac{I_p/S_p}{j_{i1}e(2kT_{i\infty}/m_i)^{1/2}}$.

6. Если $(n_{i2} - n_{i1}) < \delta$, где δ — малое, наперед заданное число, вычисления заканчивается. В противном случае возвращаемся к шагу 1 алгоритма и повторяем процесс до сходимости.

Для реализации итерационного процесса на ЭВМ вместо графических зависимостей $j_i = j_i(r_0, \varphi_0, v_0\varepsilon)$ удобно использовать аппроксимационные формулы, выражающие указанную зависимость в виде полинома. Одна из таких зависимостей была получена Кайлом на основании численных расчетов Лафрамбуаза [107] в случае $v_н = 0$. Для ионного тока на цилиндрический зонд

$$j_i = F(\varepsilon)\left[1 + \frac{f(\varepsilon)}{r_0^{3/4}}(-\varphi_0)\right],$$

где

$$F(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\left(e^{\varphi_s}\mathrm{erf}\sqrt{\varphi_s} + 2\sqrt{\varphi_s\pi}\right);$$
$$\varphi_s = 0{,}693/\varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon \le 1;$$
$$f(\varepsilon) = 2{,}18(1 - 0{,}2\varepsilon^{0{,}35})(1+\varepsilon)^{-1/8};$$
$$j_i = \frac{j_\mathrm{p}}{M_j}.$$

Еще одна аппроксимационная формула при $v_\mathrm{н} = 0$ предложена Тэлботом [18]. Она имеет одинаковый вид как для ионного, так и для электронного токов на цилиндрический зонд ($\varepsilon \le 1$)

$$j_\mathrm{ie} = (\beta + |\varphi_0|)^\alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{a}{\ln r_0 + b} + c\varepsilon^m + d, \quad \beta = e + \varepsilon\left[f + g(\ln r_0)^3 - \frac{l}{r_0}\right] + \ln r_0.$$

Значения входящих в формулы констант сведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Ток	a	b	c	d	e	f	g	l	m
Ионный	2,9	2,3	0,07	−0,34	1,5	0,85	0,13	0	0,75
Электронный	2,9	2,3	0,11	−0,38	2,8	5,2	0,136	2,8	0,65

Точность приведенных формул примерно одинакова. Расхождение с результатами точных расчетов не превышает 3%. Наиболее предпочтительная область применимости определяется неравенством $r_0 \ge 5$.

10.2. Зонд в потоке разреженной плазмы

10.2.1. Цилиндрический зонд в потоке разреженной плазмы. Математическая модель задачи в случае зонда, расположенного поперек потока, сформулирована в гл. 1, а вычислительная модель — в гл. 2. На рис. 10.3 приведен набор ВАХ для данного случая [101].

Из математической модели и рис. 10.3 следует, что средняя плотность ионного тока по обводу цилиндра зависит от следующих безразмерных параметров: $r_0 = r_\mathrm{p}/M_r$, $\varphi_0 = \varphi_\mathrm{p}/M_\varphi$, $v_0 = v_\infty/M_{v_i}$, $\varepsilon = T_{\mathrm{i}\infty}/T_{\mathrm{e}\infty}$. Из кривых рис. 10.3 видно, что с увеличением безразмерной скорости v_0 ВАХ сближаются для различных значений параметра r_0 и постепенно сливаются в одну линию (при $v_0 > 7$). Физически это означает, что при $v_0 > 7$ влияние направленной скорости преобладает над влиянием электрического поля и ток на зонд определяется только направленным движением:

$$I_\mathrm{i} = en_{\mathrm{i}\infty}v_\infty 2r_\mathrm{p}l_\mathrm{p}, \tag{10.3}$$

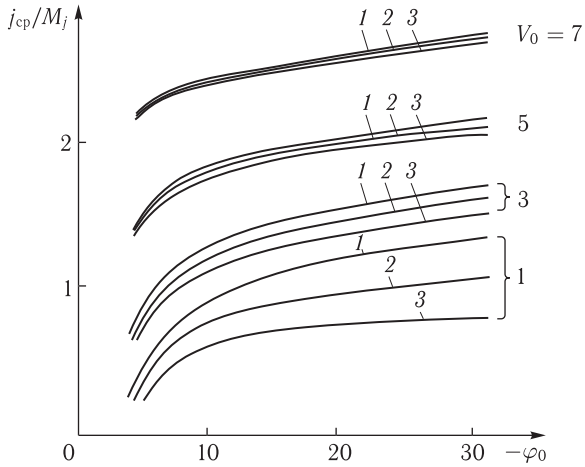


Рис. 10.3. ВАХ цилиндрического зонда в поперечном потоке бесстолкновительной плазмы ($\varepsilon = 1$); *1* — $r_0 = 3$; *2* — 10; *3* — 30

где v_∞ — скорость направленного движения, $2r_p l_p$ — сечение зонда, обращенное перпендикулярно вектору скорости.

Другую физическую интерпретацию привел И. Ленгмюр, который совместно с Мотт-Смиттом предложил формулу для зондового тока в зависимости от параметров плазмы [112]:

$$I_i = en_{i\infty}v_\infty 2r_p l_p \sqrt{1 - \frac{e\varphi_p}{mv_\infty^2/2}}. \qquad (10.4)$$

Вычислительные эксперименты показали, что при относительно больших скоростях выражение (10.4) совпадает с (10.3) и достаточно точно определяет зависимость тока от параметров r_0, v_0, φ_0. В области относительно небольших скоростей ($v_0 < 3$) формула (10.4) дает завышенное значение относительно точного решения системы (2.45)–(2.49), поскольку получена в предельном случае орбитального движения и дает верхнее предельное значение тока на зонд в бесстолкновительном режиме [105].

В другом предельном случае при $v_0 \to 0$ ВАХ, изображенные на рис. 10.3, совпадают с результатами Лафрамбуаза [107] для случая покоящейся бесстолкновительной плазмы.

Рассмотрим теперь цилиндрический зонд, ось симметрии которого направлена параллельно вектору скорости потока. Если r_p выбрать достаточно малым в сравнении с l_p, то вкладом в зондовый ток заряженных частиц, идущих с потоком на торцевую часть цилиндра, можно пренебречь. Если зонд достаточно длинный, то можно пренебречь концевым и краевым эффектами. В этих условиях интегральный ток на зонд будет определяться, в основном, током на его боковую поверхность, который зависит от хаотической скорости частиц в поперечном

направлении и практически не зависит от направленной скорости плазмы. Следовательно, обработку ВАХ такого зонда можно осуществить по методике для покоящейся плазмы (см п. 10.1).

Из сказанного следует, что зондовый эксперимент должен осуществляться двумя цилиндрическими зондами, один из которых расположен вдоль потока, а другой — поперек. Методика обработки может быть следующей:

1. Заданы r_{p}, l_{p}. Из дополнительных соображений оценивается T_{i}. Далее по ВАХ для зондов, ориентированных параллельно потоку, по методике из п. 10.1 находятся T_{e} и $n_{\text{i,e}\infty}$.

2. Выбирается точка $(\varphi_{\text{p}}, I_{\text{i}})$ на ионной ветви ВАХ зонда, расположенного перпендикулярно потоку. Считаются заданными r_{p}, l_{p}, $T_{\text{i}\infty}$ и $T_{\text{e}\infty}$, $n_{\text{i,e}\infty}$. Предположим, что $\varepsilon \sim 1$, поскольку его влияние относительно невелико. Если v_0 достаточно велика ($v_0 > 7$), то справедлива формула (10.4). Используя формулу (8.4), однозначно находим v_∞. Если $v_0 < 7$, то необходимо воспользоваться семейством ВАХ, представленным на рис. 10.3. С целью использования указанного семейства ВАХ вначале вычисляем безразмерные значения r_0, φ_0, $I_{\text{i}0}$ и далее по графику находим v_0, а затем $v_\infty = v_0 M_v$.

Предложенная методика обработки зондового эксперимента пригодна в том случае, когда все заряженные частицы находятся в одном плазменном образовании, движущемся с одной и той же направленной скоростью. Однако, в реальных экспериментальных установках возникают условия, когда разреженный поток плазмы движется сквозь разреженную фоновую плазму, причем соотношение между концентрациями частиц в потоке и фоновой плазме может меняться в достаточно широких пределах. Если электронные температуры потока и фона отличаются, то электронный ток на зонд в зависимости от потенциала в полулогарифмическом масштабе будет иметь два прямолинейных участка, расположенных под углом друг к другу. На рис. 10.4 приведен такой случай, полученный в потоке, истекающем из источника с замкнутым дрейфом электронов [113].

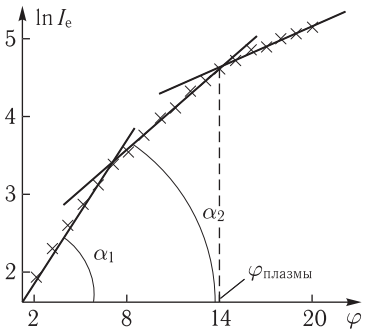


Рис. 10.4. Зависимость электронного тока от потенциала в полулогарифмическом масштабе ($U = 300$ В; $\theta = 30°$)

В этом случае на цилиндрический зонд, ориентированный вдоль скорости потока, поступают частицы как из потока, так и из фоновой плазмы. Поэтому обработка ВАХ этого зонда дает результирующую концентрацию потока и фона. Для нахождения скорости потока по формуле (10.4) необходимо знать концентрацию только в потоке, поэтому для обработки характеристики зонда, расположенного поперек потока, необходимо

иметь набор ВАХ с различным процентом содержания заряженных частиц в потоке и фоне. Исключение составляет случай, когда ток, связанный с потоком на перпендикулярно расположенный зонд, много больше тока, связанного с потоком на параллельно расположенный зонд. Приведем элементарный расчет:

• $I_{\parallel} = I_{\parallel\,\text{фона}} + I_{\parallel\,\text{пучка}}$ — ток на зонд, расположенный параллельно потоку;

• $I_{\perp} = I_{\perp\,\text{фона}} + I_{\perp\,\text{пучка}}$ — ток на зонд, расположенный перпендикулярно потоку;

• $I_{\perp\,\text{фона}} = I_{\parallel\,\text{фона}} = I_{\text{фона}}$;

• $\Delta I = I_{\perp} - I_{\parallel} = I_{\perp\text{пучка}} - I_{\parallel\,\text{пучка}} \approx I_{\perp\,\text{пучка}}$, если $I_{\perp\,\text{пучка}} \gg I_{\parallel\,\text{пучка}}$.

В этом случае значение ΔI входит в левую часть формулы (10.4) и дает дополнительную связь между v_{∞} и $n_{\text{i пучка}}$.

10.2.2. Плоские ориентированные и пристеночные зонды в потоке разреженной плазмы [108]. Методика зондовых измерений с помощью плоских ориентированных зондов аналогична методике с цилиндрическими зондами, изложенной в п. 10.2.1. Она использовалась при измерении в струях, истекающих из плазменных движителей [113]. К сожалению, вычислительная модель плоского зонда требует значительно больших затрат ресурсов ЭВМ, и поэтому расчеты не носят такого систематического характера, как это имеет место для цилиндрических зондов.

Плоские выносные зонды в потоке разряженной плазмы с различной ориентацией относительно вектора скорости потока в принципе позволяют получить информацию не только о концентрации заряженных частиц, но и о локальных значениях направленной скорости ионов.

Учитывая особенности вычислительных и натурных экспериментов, рассмотрим выносной плоский зонд в виде удлиненного прямоугольника (в пределе — бесконечно длинной полосы) шириной $2r_{\text{p}}$. В случае ориентации зонда навстречу потоку угол между нормалью к его активной поверхности и направлением скорости $\theta = 0$. Если нормаль и вектор скорости взаимно перпендикулярны, то $\theta = \pi/2$; если зонд расположен в сторону следа, $\theta = \pi$. Численные эксперименты показали, что плоские зонды в потоке плазмы имеют ряд особенностей, отличающих их от зондов цилиндрической геометрии. Отметим некоторые из них.

1. В связи с тем, что на краях полосы кривизна поверхности резко растет, там увеличивается поверхностная плотность заряда, что ведет к сгущению силовых линий электрического поля, а значит, и плотности зондового тока (краевой эффект). Неоднородность плотности тока может быть существенной. Она растет с уменьшением ширины зонда r_{p} и ростом его потенциала φ_{p}. Краевой эффект зависит от θ и величины направленной скорости.

2. Для плоского зонда, ориентированного параллельно потоку, кроме краевого эффекта наблюдается также «концевой эффект», назван-

ный так по аналогии с концевым эффектом для цилиндрического зонда, ось которого параллельна вектору скорости потока [38].

Рассмотрим суть этого эффекта на примере отрицательно заряженного зонда. На величину ионного тока влияют два конкурирующих фактора: электрическое поле притягивает ионы к зонду, но благодаря скорости, направленной вдоль поверхности, ионы могут пролетать мимо, не дав вклада в зондовый ток. Концевой эффект растет с уменьшением размера $r_{\text{р}}$ и потенциала $\varphi_{\text{р}}$ зонда, а так же с ростом направленной скорости. Влияние концевого эффекта может привести к тому, что при прочих равных условиях с ростом скорости потока плотность тока на боковой зонд может уменьшаться.

На рис. 10.5 приведена зависимость плотности ионного тока на плоский зонд от его ориентации в потоке плазмы и скорости потока.

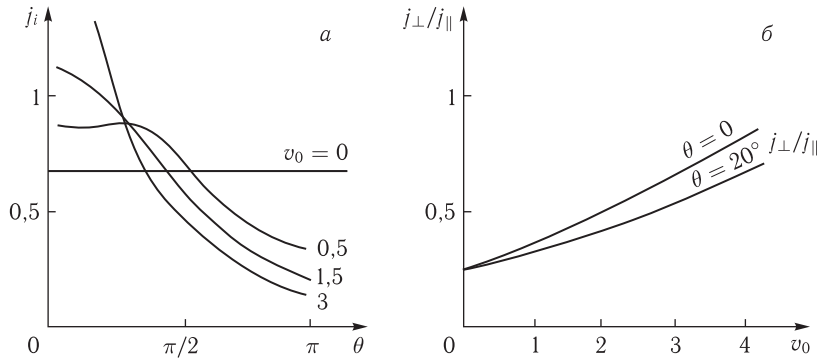


Рис. 10.5. Зависимость j_{i} от θ и v_0 ($r_0 = 3$, $\varphi_0 = -6$, $t = \tau$)

На рис. 10.5, *б* приведена зависимость от v_0 отношения $J_\perp/J_\parallel$ при двух значениях $\theta = 0°$ и $\theta = 20°$. Индексом «$\perp$» отмечен ток на зонд при $\theta = 0$, «$\parallel$» — при $\theta = \pi/2$. Приведено также отношение $j_\perp/j_\parallel$ как функция скорости при двух значениях угла θ. Кривые удобно использовать при построении методики обработки характеристик плоского зонда. Как и в случае цилиндрического зонда, ток на зонд, ориентированный навстречу потоку, увеличивается с ростом скорости. Наоборот, ток на зонд, ориентированный параллельно потоку, уменьшается с ростом скорости (влияние концевого эффекта). То же самое касается и зонда, ориентированного в сторону следа (эффект обеднения пристеночной зоны ионами).

При проведении зондовых измерений в струях, истекающих из плазменных движителей, с помощью плоских ориентированных зондов возникают систематические ошибки, связанные с естественным расширением плазменной струи. Возникает неконтролируемый угол между вектором скорости и нормалью к активной поверхности зонда. С целью оценки возникающей при этом ошибки методами математического

моделирования получена зависимость $J_\perp/J_\parallel$ от скорости при $\theta = 0°$ (расширения струи нет) и $\theta = 20°$ (за счет расширения струи вектор скорости потока отклонен на 20°), приведенная на рис. 10.5, *б*. Возникающая при этом ошибка в определении $j_\perp/j_\parallel$ может достигать 30% и более.

Рассмотрим теперь плоский зонд, расположенный на боковой поверхности большой диэлектрической пластины. Будем предполагать, что он выполнен в виде бесконечно длинной ленты шириной $2r_\text{р}$ (см. рис. 1.2) и имеет потенциал $\varphi_\text{р}$. Вычислительными методами, изложенными в гл. 2, получены ВАХ ленточных зондов при различных $r_0 = r_\text{р}/M_r$ и скоростях набегающего потока $v_0 = v_\text{н}/M_v$ ($M_r = [\varepsilon_0 kT_\text{i}/(e^2 n_{\text{i}\infty})]^{1/2}$; $M_{v_{\text{i,e}}} = (2kT_{\text{i,e}}/m_{\text{i,e}})^{1/2}$, $M_\varphi = kT_{\text{i}\infty}/e$) (рис. 10.6). Поскольку на практике часто используются зонды других геометрий, на рис. 10.6 приведены также данные для зонда в форме диска при $r_0 = 5$.

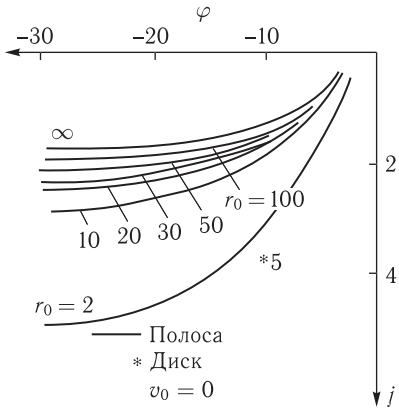


Рис. 10.6. Ионные ветви ВАХ плоских пристеночных зондов

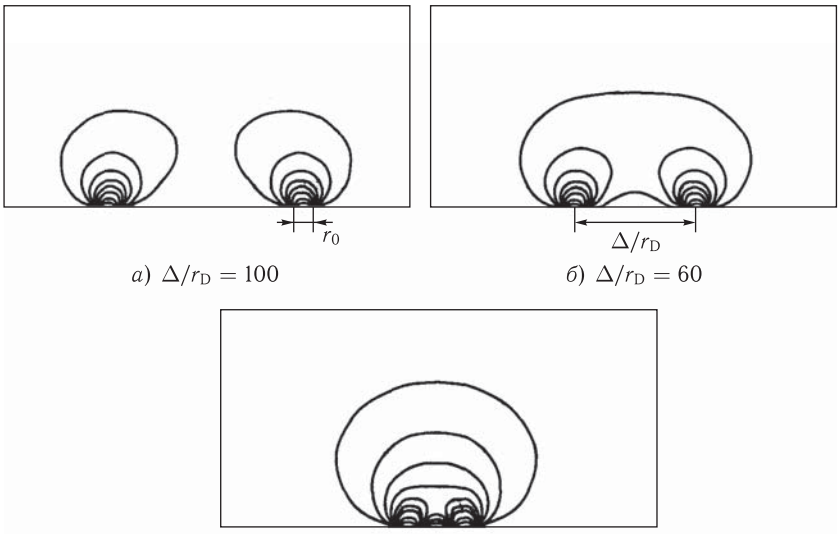
Плотность тока на диск оказалась в 1,5 раза больше, чем на ленточной зонд при тех же условиях. Увеличение тока можно объяснить тем, что у диска больше относительный вклад краевого эффекта.

Плоские пристеночные зонды имеют ряд преимуществ по сравнению с выносными зондами. Основное из них — они меньше подвергаются воздействию тепловых потоков, направленных из плазмы. Поэтому ресурс их работы значительно выше. Такие зонды многократно ставились на боковую поверхность гиперзвуковых летательных аппаратов [1] и позволяли получить информацию о радиофизических параметрах в пограничном слое вблизи поверхности ГЛА. Другое преимущество — они не нарушают аэродинамику ГЛА.

К сожалению, к настоящему времени число ВАХ для плоских пристеночных зондов недостаточно для надежной обработки зондового эксперимента.

10.3. Двойные зонды. Их взаимное влияние

Двойные зонды представляют собой систему из двух зондов одинаковой геометрии, расположенные на некотором расстоянии друг от друга. Выбор оптимального расстояния обсуждается ниже. При потенциалах, близких к потенциалу «плавающего тела» ВАХ двойного зонда напоминает ВАХ одиночного зонда. При достаточно больших значениях



а) $\Delta/r_D = 100$ *б*) $\Delta/r_D = 60$

в) $\Delta/r_D = 20$

Рис. 10.7. Взаимное влияние двух пристеночных плоских зондов ($Kn \ll 1$; $r_0 = 10$; $\varepsilon = 1$; $\Delta\varphi = 10$)

разности потенциалов между зондами величина тока на зонд соответствует ионному току насыщения. Если зонды совершенно одинаковы и потенциал пространства между точками расположения зондов меняется незначительно, то левая и правая ветви ВАХ по модулю абсолютно одинаковы. Среди преимуществ двойных зондов отметим их малую чувствительность к различного рода колебательным и волновым процессам в плазме, поскольку эти возмущения приходят в одной фазе на оба зонда и в зондовой цепи вычитаются. Ток в цепи определяется ионами и поэтому не может возрастать до величины электронных токов. Они также менее чувствительны к влиянию магнитных полей. Недостаток двойных зондов — они не могут измерять потенциал пространства, а следовательно, и распределение электрических полей в геометрическом пространстве.

Перейдем теперь к вопросу о выборе расстояния между зондами [114]. Ставить зонды на большом расстоянии не имеет смысла, поскольку теряется локальность зондового эксперимента и усложняется теория двойного зонда. Сильно уменьшать расстояние между зондами тоже нельзя, так как возникает их взаимное влияние, которое вносит систематическую погрешность в зондовый эксперимент. При проведении зондовых измерений в ионосферной плазме с помощью двойных зондов, устанавливаемых на космических летательных аппаратах (КЛА), проблема расположения двойных зондов еще более обостряется. В космическом приборостроении важно минимизировать весовые и габаритные параметры прибора. Поэтому необходимо располагать

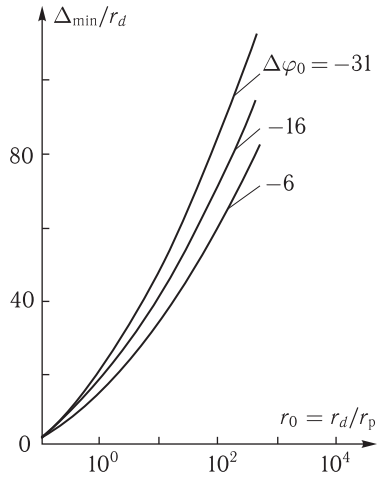


Рис. 10.8. Зависимость минимального расстояния между двойными зондами от r_0, $\Delta\varphi_0$ ($\Delta\varphi_0$ — разность потенциалов между двойными зондами)

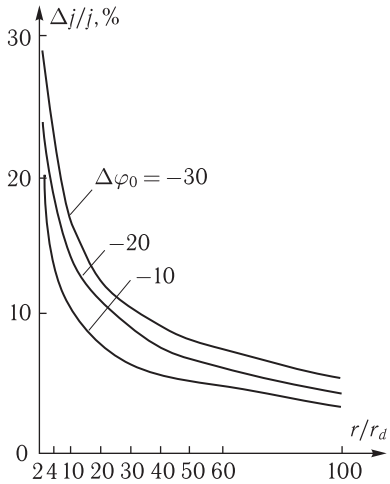


Рис. 10.9. Максимальная систематическая ошибка при измерении двойными зондами, вызванная взаимным влиянием

зонды как можно ближе один к другому. Но так как концентрация заряженных частиц в ионосфере относительно низкая и радиус Дебая достаточно большой, расстояние между зондами может быть значительным.

Ответы на вопросы о минимальном расстоянии между двойными зондами и о возможных погрешностях зондового эксперимента в случае нарушения этого условия можно получить с помощью вычислительного эксперимента, используя математические и численные модели глав 1 и 2. На рис. 10.7 показаны эквипотенциальные поверхности вблизи двух близко расположенных зондов (пристеночные зонды ленточного типа). Рисунок наглядно демонстрирует, как с уменьшением расстояния между зондами деформируется возмущенная зона, и при стремлении этого расстояния к нулю она становится общей. На рисунках 10.8 и 10.9 даны рекомендуемые расстояния между зондами в молекулярном режиме, при которых взаимное влияние отсутствует, а также рассчитаны возможные систематические ошибки, связанные с нарушением этих рекомендаций.

10.4. Нестационарный электрический зонд в разреженной плазме

10.4.1. Алгоритм определения температуры ионов. Электрический зонд будем называть нестационарным, если характерное время изменения потенциала зонда много меньше характерного времени релаксации

в плазме τ. Под временем релаксации будем понимать время, за которое осуществляется переход от неравновесного состояния к равновесному, или от одного равновесного состояния к другому в случае импульсного изменения одного из параметров. Импульсно можно изменять потенциал зонда, индукцию внешнего магнитного поля, давление, степень ионизации и т. д. Будем считать, что изменяется импульсно потенциал зонда и фронт нарастания потенциала бесконечно крутой. В реальных схемах создать такой фронт невозможно. Самая совершенная схема имеет характерное время нарастания импульса $t_ф > 0$. Для целей создания нестационарной зондовой методики оказывается достаточным выполнение неравенства

$$t_ф \ll \tau.$$

На практике достаточным является условие

$$t_ф \leq 0{,}1\tau. \tag{10.5}$$

Если на зонд размером $r_р$, находящийся в разреженной плазме под потенциалом $\varphi_р$, подать прямоугольный импульс потенциала амплитуды $\Delta\varphi_р$, то в возмущенной зоне вблизи зонда развивается переходный процесс от начального стационарного состояния к конечному. Зондовый ток при этом изменяется в соответствии с рис. 10.10. Как отклик на изменение потенциала, при $t = t_1$ наблюдается достаточно резкий максимум тока смещения. Чем круче фронт нарастания потенциала, тем

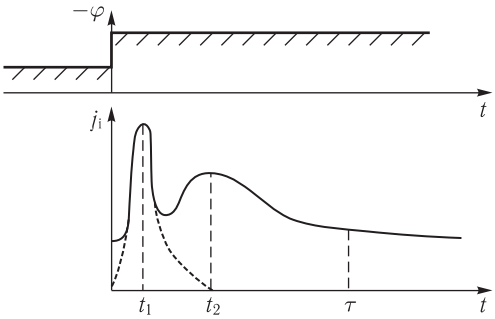


Рис. 10.10. Зависимость от времени потенциала и тока зонда

больше ток смещения. Поскольку время нарастания потенциала t достаточно мало, то и интервал времени $(0–t_1)$ также мал. В дальнейшем потенциал остается постоянным, индукция электрического поля вблизи зонда изменяется слабо и ток смещения затухает.

Второй максимум тока определяется эволюцией тока проводимости. После прохождения через максимум в момент времени t_2 ток проводимости плавно выходит на новое стационарное значение. Эволюция заканчивается за время τ. Поскольку $\tau > t_1$ и $\tau > t_2$, то оно наиболее удобно для измерения. Очевидно, что интервал времени τ может быть

измерен с определенной точностью как в численном, так и в физическом эксперименте. Так как выход эволюционной кривой плотности тока на стационарное значение происходит плавно, то время τ отсчитывается в тот момент, когда отклонение от стационара составляет несколько процентов (~ 3–5%). Возникающая при этом погрешность существенно меньше суммарной погрешности натурных экспериментов зондовых измерений.

Приведем алгоритм расчета температуры ионов в молекулярном режиме для случая $v_0 = 0$.

1. Предварительно проводится эксперимент по классической схеме и определяются $n_{\mathrm{i}\infty}$ и T_{e}.

2. Из дополнительных соображений выбирается $T_{\mathrm{i}1}$ и определяются $\varepsilon_1 = T_{\mathrm{i}1}/T_{\mathrm{e}}$ и $\varphi_{01} = \varphi_{\mathrm{p}}/M_{\varphi 1}$ ($M_{\varphi 1} = (kT_{\mathrm{i}1})/e$).

3. По экспериментально измеренному значению $\tau_{\text{эксп}}$ находится безразмерное значение $\tau_1 = \dfrac{\tau_{\text{эксп}}}{M_t} = \dfrac{\tau_{\text{эксп}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 m_{\mathrm{i}}}{2e^2 n_{\mathrm{i}\infty}}}}$.

4. По параметрам ε_1, φ_{01}, τ_1 из графика рис. 10.11 находится значение $r_{01} = r_{\mathrm{p}}/r_{\mathrm{D}1}$ $\left(r_{\mathrm{D}1} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 k T_{\mathrm{i}1}}{n_{\mathrm{i}\infty} e^2}}\right)$, откуда определяется $T_{\mathrm{i}2} = \dfrac{e^2 n_{\mathrm{i}\infty} r_{\mathrm{p}}^2}{\varepsilon_0 k r_{02}^2}$.

5. Если $(T_{\mathrm{i}2} - T_{\mathrm{i}1}) < \delta$, δ — малое, наперед заданное число, то полагаем $T_{\mathrm{i}1} = T_{\mathrm{i}2}$. В противном случае повторяем счет, начиная с шага 2 до выполнения данного неравенства.

10.4.2. Характерные времена релаксации в разреженной плазме. Как следует из п. 10.4.1, алгоритм обработки характеристик нестационарного зонда зависит от теоретически рассчитанных значений времени релаксации в плазме τ. Значение τ определяется методами математического моделирования, изложенными в главах 1 и 2. Математические модели имеют ряд безразмерных параметров, от которых зависит значение τ:

- $r_0 = r_{\mathrm{p}}/M_L$ — безразмерный радиус цилиндра;
- $\varphi_0 = \varphi_{\mathrm{p}}/M_\varphi$ — безразмерный потенциал тела;
- $v_0 = v_\infty/M_{v\mathrm{i}}$ — безразмерная направленная скорость плазмы;
- $\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$.

Для случая $v_0 = 0$ значение τ получено в [18]. Как показали вычислительные эксперименты, в диапазоне изменения $-30 \le \varphi_0 \le 16$; $0{,}1 \le \varepsilon \le 1$ зависимость τ от φ_0 и ε относительно невелика по сравнению с зависимостью от r_0. На рис. 10.11 показана зависимость τ от r_0, φ_0, ε. Кривые получены для водородной разреженной плазмы.

При $r_0 > 10^3$ величина τ перестает зависеть от r_0, так как в этих условиях толщина слоя объемного заряда у тела становится много меньше размера самого тела.

Зависимость τ от скорости потока v_0 для поперечно расположенного цилиндрического зонда представлена на рис. 10.12 [108]. Из рисун-

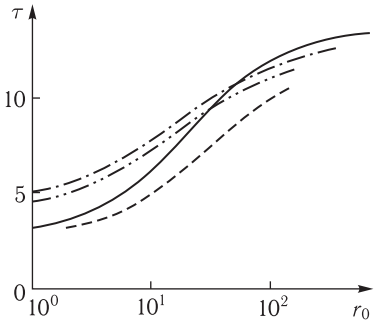


Рис. 10.11. Зависимость τ от r_0, φ_0, ε: —— — $\varepsilon = 1$, сфера; —·— — $\varepsilon = 1$, цилиндр; - - - — $\varepsilon = 0{,}1$, сфера; —··· — $\varepsilon = 0{,}1$, цилиндр

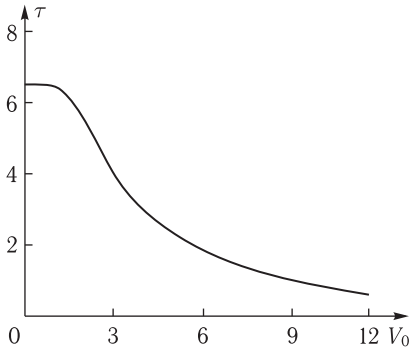


Рис. 10.12. Зависимость времени релаксации от направленной скорости плазмы ($\varphi_0 = -6$; $r_0 = 3$; $\varepsilon = 1$)

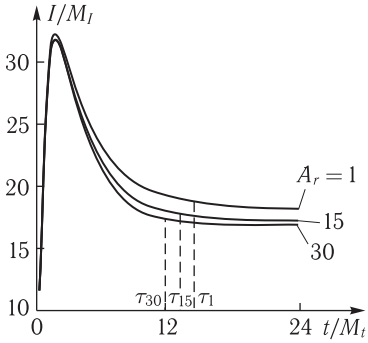


Рис. 10.13. Эволюция интегрального тока при $v_0 = 0$, $\varphi_0 = -10$, $r_0 = 3$. $M_I = kT_{\text{i}}(2\varepsilon_0 n_\infty/m_{\text{i}})^{1/2}$, $M_t = [\varepsilon_0 m_{\text{i}}/(2e^2 n_\infty)]^{1/2}$

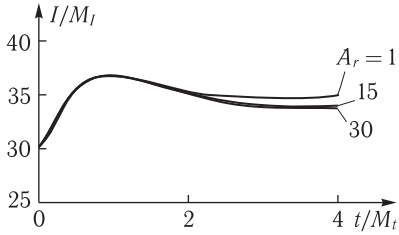


Рис. 10.14. Эволюция интегрального тока при $v_0 = 5$, $\varphi_0 = -10$, $r_0 = 3$. $M_I = kT_{\text{i}}(2\varepsilon_0 n_\infty/m_{\text{i}})^{1/2}$, $M_t = [\varepsilon_0 m_{\text{i}}/(2e^2 n_\infty)]^{1/2}$

ка следует, что с ростом v_0 τ уменьшается, так как снижается роль электрического поля в процессе эволюции плазмы. Начиная с $v_0 > 2$, перенос заряда идет в основном на лобовую часть тела и установление решения происходит достаточно быстро, и тем быстрее, чем больше скорость.

Графики рис. 10.11 и 10.12 получены для водородной плазмы. С ростом массы ионов плазмообразующего вещества время релаксации τ должно увеличиваться, поскольку более тяжелые ионы медленнее эволюционируют. Зависимость τ от относительной массы m_{i}/m_H может быть получена в результате вычислительных экспериментов. На рисунках 10.13 и 10.14 даны эволюционные кривые зависимости ионного тока на единицу длины цилиндра, расположенного поперек потока, от времени после импульсного изменения его потенциала. В качестве мас-

штабов взяты не водородные масштабы (как на рисунках 10.11 и 10.12), а масштабы, соответствующие ионам плазмообразующего вещества. Относительная масса варьировалась в пределах $1 < m_{\text{i}}/m_H < 30$. Как показали вычислительные эксперименты, кривые зависимости тока от времени и величина τ слабо зависит от относительной массы. С ростом m_{i}/m_H наблюдается незначительное снижение стационарного значения тока и величины τ. С увеличением скорости v_0 эта зависимость еще более уменьшается.

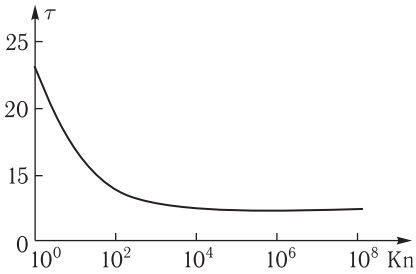


Рис. 10.15. Зависимость τ от Kn

Полученные кривые позволяют вывести приближенную зависимость, используя систему масштабов из гл. 2:

$$M_t\Big|_{\substack{\text{в масштабах}\\ \text{плазмообразующего}\\ \text{газа}}} = \left(\frac{\varepsilon_0 m_H}{2e^2 n_\infty}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{m_i}{m_H}} = M_t\Big|_{\substack{\text{в масштабах}\\ \text{водородной}\\ \text{плазмы}}}\sqrt{\frac{m_i}{m_H}},$$

следовательно,

$$\tau(m_{\text{i}}) \approx \tau(m_H)(m_{\text{i}}/m_H)^{1/2}. \qquad (10.6)$$

Еще один график, полезный для практики зондовых измерений, получен в [18] и дает зависимость τ от числа Кнудсена (рис. 10.15). Расчет проведен для сферического тела радиусом $r_0 = 20$ с потенциалом $\varphi_0 = -16$ при $\varepsilon = 1$.

10.5. Зондовые измерения в потоке разреженной плазмы

В данном разделе приведено несколько примеров практического применения зондовых методик, предложенных в гл. 10, и в значительной степени основанных на результатах математического моделирования взаимодействия тел с потоками разреженной плазмы. Авторам монографии довелось работать с зондами различной геометрии: сферическими, цилиндрическими, плоскими, как выносными, так и пристеночными. Измерения проводились как в стендовых условиях, так и в естественных — в ионосферной плазме. Скорость направленного движения изменялась от нуля (плазма тлеющего разряда) до десятков километров в секунду (плазма, истекающая из плазменных двигателей).

10.5.1. Измерения в струе, истекающей из стационарного плазменного двигателя (СПД)* [121]. Среди плазменных электро-ракетных двигателей (ЭРД) в настоящее время нашли практическое примене-

* Эксперимент проводился на стенде НИИ ПМЭ под руководством В.П. Кима.

ние четыре типа двигателей, которые называются в отечественной литературе: плазменно-ионными двигателями (ПИД), двигателями с замкнутым дрейфом электронов (ДЗДЭ), электродуговыми (ЭДД) и импульсными плазменными двигателями (ИПД).

В СССР и России наибольший прогресс был достигнут в разработке плазменных ДЗДЭ, представленных двумя разновидностями: так называемым двигателем с анодным слоем (ДАС) и стационарным плазменным двигателем (СПД).

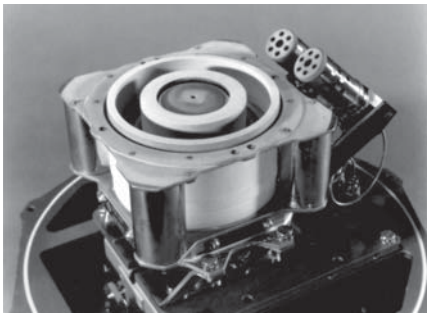
Принципиальная схема двигателя с анодным слоем (ДАС) была предложена в 1961 г. сотрудником ИАЭ А. В. Жариновым и, начиная с 1962 г., разработки ДАС были начаты в Центральном научно-исследовательском институте машиностроения (ЦНИИМАШ), где они продолжаются и по настоящее время [118]. В результате уже к середине 1970-х годов были созданы и испытаны уникальные образцы двухступенчатых ДАС, способные эффективно работать на раздичных рабочих веществах при мощностях до 100 кВт и скоростях истечения до 80 км/с [119, 120].

Описанные разработки были ориентированы на создание мощных маршевых энергосиловых установок для обеспечения энергоемких космических полетов тяжелых космических аппаратов. Однако к середине 1970-х годов стало ясно, что создание таких энергосиловых установок потребует значительных затрат сил, времени и средств. Поэтому в этот период наряду с двухступенчатыми ДАС в ЦНИИМАШ были начаты разработки одноступенчатых ДАС, рассчитанных на работу при мощностях ~ 1 кВт. Один из образцов такого ДАС в конце 1990-х годов успешно прошел летные испытания в составе американского искусственного спутника Земли (ИСЗ) [113]. Но в силу ряда причин разработка летных образцов ДАС отстала от соответствующих разработок ПИД и СПД.

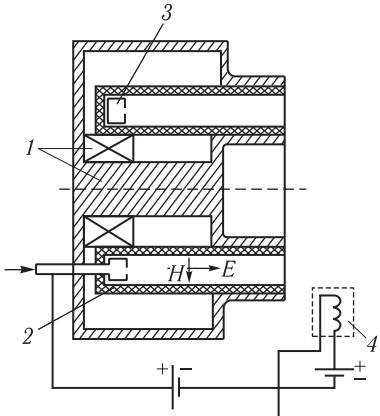
Разработка и исследование первых лабораторных образцов СПД были осуществлены в институте атомной энергии имени И. В. Курчатова (ИАЭ) под руководством профессора А. И. Морозова в первой половине 1960-х годов, а в 1972 г. сотрудниками ИАЭ, ОКБ «Заря», ОКБ «Факел» и ВНИИЭМ были проведены первые и весьма успешные летные испытания этого двигателя на борту ИСЗ «Метеор» [113], продемонстрировавшие эффективность управления движением ИСЗ с помощью этого двигателя и давшие мощный толчок развитию работ в СССР по этому двигателю. Последующая интенсивная работа ИАЭ, ОКБ «Факел», ВНИИЭМ, МАИ, ЦИАМ и ряда других организаций позволила создать летные образцы СПД и двигательных установок на их основе для систем коррекции орбит ИСЗ с достаточно высокими характеристиками, и началось серийное их производство в ОКБ «Факел», ставшим ведущим предприятием в СССР и России по разработке ЭРД и двигательных установок на их основе. Началось также и их регулярное применение в составе отечественных ИСЗ [113]. В последние годы СПД

разработки ОКБ «Факел» начали применяться и в составе зарубежных космических аппаратов [113].

Общий вид серийного двигателя типа СПД-100 разработки ОКБ «Факел» и принципиальная схема СПД представлены на рис. 10.16.



а



б

Рис. 10.16. Общий вид двигателя СПД-100 (*а*) и принципиальная схема СПД (*б*)

Двигатель работает следующим образом. Рабочий газ (ксенон) подается в ускорительный канал двигателя, выполненный в виде кольцевой щели в разрядной камере *2*, через кольцевой анод — газораспределитель. Разрядное напряжение прикладывается между анодом и расположенным вне разрядной камеры катодом *4*. В результате в ускорительном канале создается продольное (от анода к выходу из канала) электрическое поле. В этом же канале с помощью магнитной системы с одной или несколькими катушками намагничивания и магнитопроводящими элементами создается преимущественно радиальное магнитное поле. Таким образом, в потоке рабочего газа, движущегося от анода к выходу из канала, зажигается разряд в скрещенных электрическом и магнитном полях. Величина напряженности магнитного поля и плотность потока рабочего газа подбираются таким образом, чтобы электроны были замагничены, т. е., чтобы ларморовский радиус электронов был существенно меньше продольных размеров (длины) ускорительного канала, а частота столкновений электронов с атомами и ионами была существенно меньше циклотронной частоты электронов. В то же время уровень напряженности магнитного поля в СПД выбирается таким, что ларморовский радиус ионов был значительно больше длины канала, т. е. ионы оказывались незамагниченными. В рассмотренных условиях усредненное движение электронов представляет собой так называемый электрический дрейф, и оно происходит преимущественно в азимутальном (перпендикулярном электрическому и магнитному полям) направ-

лении, создавая почти замкнутый азимутальный (называемым многими «Холловским») ток. Это и объясняет название СПД (и ДАС) как двигателя с замкнутым дрейфом электронов. Под действием электрического поля и в результате столкновений с атомами, ионами и стенками канала, а также вследствие турбулентных возмущений параметров плазмы из-за колебаний дрейфующие электроны постепенно диффундируют к аноду, набирая энергию от электрического поля. Многократно пронизывая поток атомов, они могут достаточно эффективно ионизировать их, а образовавшиеся ионы могут быть ускорены электрическим полем до достаточно больших скоростей. И в результате большого цикла исследований и разработок, выполненных при участии многих организаций, к настоящему времени удалось создать двигатели, обладающие тяговой эффективностью 30–60% в наиболее востребованном в настоящее время диапазоне скоростей истечения 10–30 км/с, и с достаточно большим ресурсом (до 10000 ч и более).

Величина продольного электронного тока при фиксированных остальных параметрах оптимизируется подбором топологии и индукции магнитного поля таким образом, чтобы обеспечивалась достаточно полная ионизация потока рабочего газа при минимально достижимой величине продольного электронного тока. Ионы ускоряются электрическим полем и их скорость определяется пройденной ими разностью потенциалов, как и в ионном двигателе. Однако принципиальным отличием СПД и ДАС от ионного двигателя является то, что ускорение ионов в нем осуществляется электрическим полем в квазинейтральной плазме, т. е. отсутствует ограничение плотности ионного тока пространственным зарядом ионов. Поэтому в СПД (и ДАС) удается реализовать существенно большие плотности тока и тяги по сравнению с ионными двигателями, и при заметно более низких разрядных напряжениях. Так, типичные значения разрядного напряжения в современных СПД составляют 200–1000 В. При работе на ксеноне удается получить плотности тока в ускорительном канале двигателя $\sim 10^3$ А/м^2.

Использовались ориентированные цилиндрические зонды радиусом $r_p = 0{,}75$ мм и длиной 15 мм. Зондовый блок состоял из двух скрещенных под углом 90° цилиндрических зондов. Один из них располагался параллельно вектору скорости потока, другой — перпендикулярно. Блок с зондами мог перемещаться по окружности, центр которой находился на оси струи у среза сопла двигателя. Радиус окружности составлял 0,7 м. С электронной схемы на зонды подавался пилообразный потенциал амплитудой порядка 100 В. Соответственно каждому значению потенциала измерялся зондовый ток, так что в результате снимался двумерный массив токов и напряжений для обеих зондов при различных углах поворота зондового блока относительно оси потока. Ниже приводятся результаты обработки вольтамперных характеристик со ссылками на расчетные формулы и принятые допущения.

1. *Расчет температуры электронов* T_e. Расчет проводился по классической формуле (10.2). Электронная ветвь характеристики в полулогарифмическом масштабе представляла собой прямую линию с изломом в области перехода в электронный ток насыщения. Точка излома в проекции на ось потенциала позволяла найти потенциал пространства. В некоторых случаях прямая отчетливо разбивалась на два прямолинейных участка, что указывало на наличие двух групп электронов с различными температурами (см. рис. 10.4). Одна максвелловская группа связана с потоком, другая — с фоновой плазмой. На рис. 10.17 приведена зависимость T_e для одного из режимов работы СПД от угловой координаты, для которого T_e потока и фона отличались незначительно.

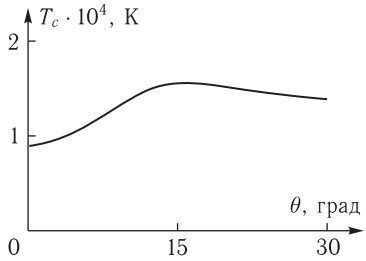


Рис. 10.17. Зависимость температуры электронов от угловой координаты ($U_{\text{разряда}} = 800$ В; $V_\infty = 20$ км/с; $T_i = 5 \cdot 10^3$ К)

Как следует из рис. 10.17, температура электронов в 2–3 раза выше, чем температура ионов. В некоторых режимах работы двигателя отрыв T_e и T_i оказывался более существенным. Характерно, что T_e на оси потока несколько ниже, чем при $\theta = 15°$. Возможно, что это есть следствие конструкции СПД, у которого разрядная камера изготовлена в виде кольца, а в центре располагается один из полюсов магнитной системы. Еще одна особенность состоит в том, что T_e на оси потока слабо зависит от напряжения разряда.

2. *Расчет концентрации заряженных частиц в потоке и фоновой плазме*. В начале рассмотрим ВАХ зонда, расположенного параллельно скорости потока. Оценки показывают, что вклад торцевой поверхности зонда в ионный ток составляет несколько процентов, так что им будем пренебрегать. На боковую поверхность зонда поступают заряженные частицы, участвующие только в хаотическом движении, из фоновой плазмы и потока. Поскольку ионная ветвь имеет наклон относительно оси потенциала (ионный ток не достигает насыщения), слой объемного заряда не является бесконечно тонким и формула Бома не применима. Будем использовать теоретические ВАХ, полученные Лафрамбуазом [107], а точнее их аппроксимацию, выполненную Кайлом (см. п. 10.1.2). Расчетный алгоритм предполагает заданными $r_p, l_p, I_i, \varphi, \varepsilon, m_i$. Для расчета рекомендуется выбирать достаточно высокий отрицательный потенциал и соответствующий ему ионный ток. Параметр ε принят равным 0,5. Отметим, что зависимость расчета от ε достаточно слабая. Результаты расчета с использованием алгоритма п. 10.1.2 представлены на рис. 10.18 (кривая $n_{\text{поток+фон}}$).

Переходим к рассмотрению ВАХ зондов, расположенных перпендикулярно потоку. Скорость потока известна: она составляет 20 км/с

и получена независимым методом с помощью анализа распределения ионов по энергиям. Если оценить скорость теплового движения ионов, то она составляет порядка 1 км/с, следовательно $v_{\text{напр}} \gg v_{\text{тепл}}$. Это означает, что ток, связанный с направленным движением, велик по сравнению с током, связанным с хаотическим движением. Отсюда вытекает (см. п. 10.2.1), что

$$\Delta I = I_{\perp} - I_{\parallel} = I_{\perp\,\text{пучка}} - I_{\parallel\,\text{пучка}}.$$

Все обозначения соответствуют п. 10.2.1.

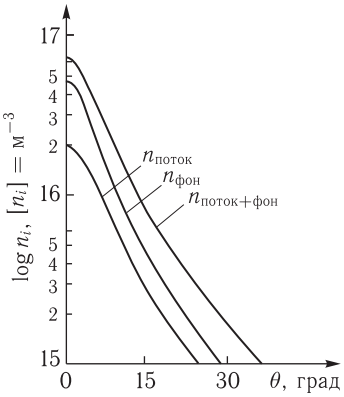


Рис. 10.18. Зависимость концентрации ионов потока и фона от угловой координаты ($U_{\text{разряда}} = 800$ В; $V_{\infty} = 20$ км/с; $T_{\text{i}} = 5 \cdot 10^3$ К)

Как следует из рис. 10.3, в условиях эксперимента влиянием электрического поля можно пренебречь по сравнением с влиянием направленного движения, поэтому справедлива формула (10.4) с левой частью $(I_{\perp} - I_{\parallel})$. При заданном потенциале $I_{\perp}$ и $I_{\parallel}$ измерены на эксперименте, поэтому формула (10.4) позволяет найти концентрацию ионов в потоке. Соответствующий расчет при различных значениях угла θ представлен на рис. 10.18 (кривая $n_{\text{потока}}$). На графике представлена также зависимость $n_{\text{фона}}$ от угла θ ($n_{\text{фон}} = n_{\text{фон+поток}} - n_{\text{поток}}$). Отношение $n_{\text{фон}}/n_{\text{поток}}$ колеблется в интервале 1,3–2,5. При этом самое большое отношение на оси струи.

10.5.2. Измерения с помощью нестационарного зонда*. Плазма создавалась в тлеющем разряде (рис. 10.19) при следующих параметрах:

— напряжение разряда 830 В;

— ток разряда 0,8 мА;

— давление в разряде 3 мм. рт. ст.;

— рабочий газ — неон.

В плазму положительного столба разряда вводился двойной цилиндрический зонд радиусом $r_{\text{р}} = 0{,}5$ мм и длиной $l_{\text{р}} = 7$ мм. Вольтамперная характеристика двойного зонда представлена на рис. 10.20.

Исходными данными для расчета были:

— масса ионов $m_{\text{i}} = 3{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг;

— температура ионов $T_{\text{i}} \sim 400$ К [122];

— радиус зонда $r_{\text{р}} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м;

— длина зонда $l_{\text{р}} = 7 \cdot 10^{-3}$ м.

Расчет проводился по методике, изложенной в п. 10.1.2. В результате расчета были получены следующие данные:

— температура электронов $T_{\text{e}} = 4000$ К;

* Эксперимент проводился на кафедре «Прикладная физика» МАИ.

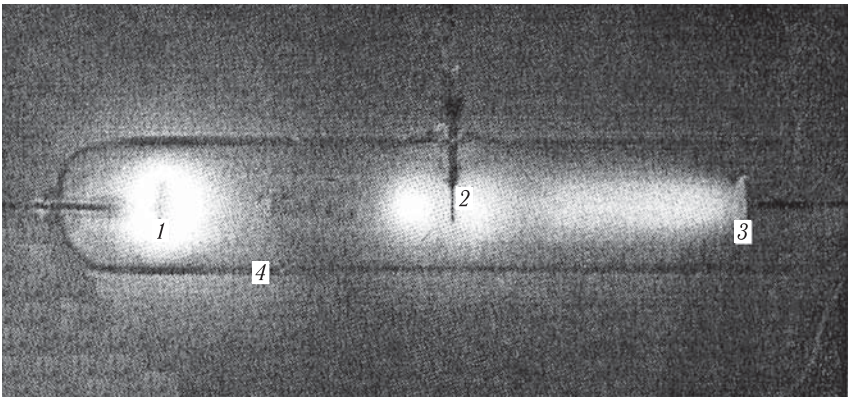


Рис. 10.19. Экспериментальная установка: *1* — катод, *2* — двойной зонд, *3* — анод, *4* — разрядная трубка

— концентрация ионов $n_{\text{i}} = 0{,}4 \cdot 10^{15}$ м$^{-3}$;
— радиус Дебая $r_{\text{D}} = 7 \cdot 10^{-5}$ м;
— безразмерный радиус зонда $r_0 = 7$;
— толщина слоя объемного заряда $\Delta = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ м;
— характерное время релаксации в плазме $\tau_{\text{теор}} = 3 \cdot 10^{-6}$ с.

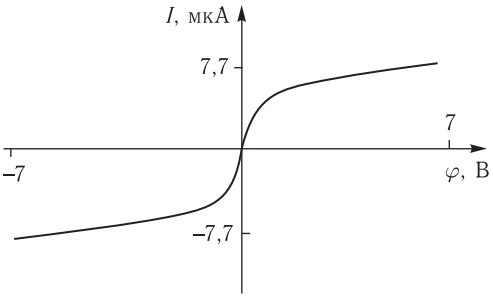


Рис. 10.20. Зондовая характеристика

Данная часть эксперимента и его обработка по классической методике ничего нового в методическом плане не содержит (кроме расчета Δ и $\tau_{\text{теор}}$). Новая информация содержится во второй части эксперимента, в которой использовался нестационарный подход, разработанный авторами и изложенный в п. 10.4. Согласно нестационарной методике на зонд подавался импульс потенциала с достаточно крутым фронтом нарастания. Время нарастания потенциала $t_{\text{ф}}$ выбиралось меньше времени релаксации $\tau_{\text{теор}}$, полученном в первой части эксперимента и равном 3 мкс. Выполнялось и второе условие, сформулированное в п. 10.3 для двойных зондов. Согласно этому условию расстояние между двойными зондами должно быть больше, чем $2\Delta = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ м. Как

отклик на импульс потенциала, зондовый ток эволюционирует, проходя через максимум и выходя на новое стационарное состояние. Теоретический расчет подобной эволюции приведен на рис. 10.13, а экспериментальная зависимость (фотография с экрана осциллографа) представлена на рис. 10.21.

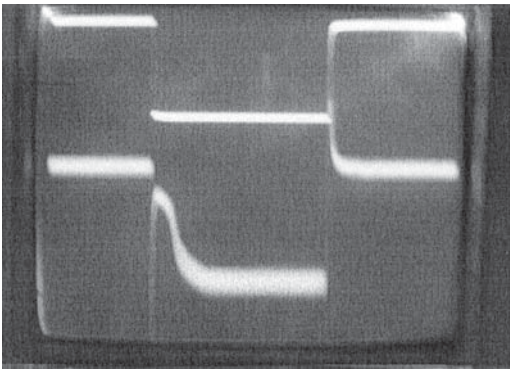


Рис. 10.21. Экспериментально полученная эволюционная кривая для зондового тока

Как следует из сравнения рисунков 10.13 и 10.21, теоретическая и экспериментальная кривые качественно совпадают. Осциллограмма рис. 10.21 позволяет с хорошей точностью определить размерное время релаксации в плазме $\tau_{\text{эксп}}$, которое оказалось равным $6 \cdot 10^{-6}$ с. Дальнейший расчет осуществлялся по алгоритму, изложенному в п. 10.4.1, с использованием данных п. 10.4.2. При обработке учтена зависимость $\tau_{\text{теор}}$ от массы ионов и числа Кнудсена. В результате расчетов в тлеющем разряде значение $T_{\text{i эксп}} \approx 500$ К, что удовлетворительно согласуется с данными работы [122], где T_{i} определялось оптическими методами.

10.6. О зондовых измерениях в возмущенной зоне спутника

Рассматривается большое тело (спутник) цилиндрической формы, обтекаемый потоком бесстолкновительной плазмы (см. рис. 1.1). Вблизи тела возникает достаточно сложная возмущенная зона, причем в теневой области она имеет форму вытянутого следа. Предполагается, что ось цилиндрического зонда параллельна оси спутника, а диаметр зонда много меньше диаметра спутника.

Зондовые измерения, проводимые в возмущенной зоне спутника, должны учитывать следующие особенности:

• ФР заряженных частиц на внешней границе возмущенной зоны зонда не максвелловские. Их вид подробно рассмотрен в гл. 3. Ввиду малости размера зонда и его возмущенной зоны можно считать, что на-

чальная ФР (она же граничная) мало меняется в пределах возмущенной зоны зонда;

• в каждой точке возмущенной зоны спутника имеется своя направленная скорость движения ионов. Она имеет относительно большую зависимость от координат (r, θ), особенно в пределах теневой области;

• в возмущенной зоне спутника имеется определенное распределение потенциала, поэтому потенциал зонда следует отсчитывать не от потенциала пространства вне возмущенной зоны спутника, а от потенциала пространства на внешней границе возмущенной зоны зонда.

Все указанные особенности не обсуждались в литературе, посвященной вопросам зондовой методики.

Классическая методика предполагает, что на внешней границе возмущенной зоны зонда имеет место максвелловское распределение заряженных частиц по скоростям, потенциал равен нулю, направленная скорость тоже равна нулю, либо скорости спутника. Ошибки, связанные с подобным подходом, в литературе не обсуждались. Поэтому зондовые измерения в возмущенной зоне спутника (в частности, в следе) могли проводиться с большими погрешностями.

Методы математического моделирования обтекания тел потоками бесстолкновительной плазмы, изложенные в части 1 настоящего издания, позволяют ответить на поставленные вопросы и заложить основы методики зондовых измерений в возмущенной зоне спутника.

Вычислительный алгоритм зондовой задачи можно разбить на четыре взаимосвязанные части. В части 1 проводится расчет параметров возмущенной области вблизи спутника цилиндрической формы заданного радиуса при наличии поперечной направленной скорости (например первой космической). Потенциал спутника выбирается близким к потенциалу «плавающего» тела. Численная модель задачи аналогична п. 2.3 монографии. В результате работы части 1 программы формируется файл с функциями распределения ионов и электронов в точках предполагаемого расположения зонда.

Вторая часть программного блока в качестве исходных данных использует файл с ФР и формирует начальные и граничные условия для расчета зондовой задачи. При этом предполагается, что ФР заряженных частиц на размере возмущенной области электрического зонда (расчетной области) меняются незначительно. Таким образом, функции распределения, полученные в исследуемой точке вблизи спутника, в которую предполагается поместить зонд, распространяются на всю расчетную область зондовой задачи, включая внешнюю границу. При этом осуществляется пересчет ФР в зависимости от значений угловой координаты и формируется файл с массивом функций распределения, число которых равно числу узлов расчетной сетки по угловой координате.

Третья часть программного блока предназначена для расчета зондовых токов и параметров возмущенной области вблизи цилиндрического зонда, помещенного в возмущенную спутником плазму, что имеет место на практике зондовых измерений. При этом задается радиус зонда,

его потенциал, значение направленной скорости плазмы, потенциал на внешней границе возмущенной зоны зонда. Начальные и граничные ФР берутся из результатов работы программы части 2.

Четвертая часть программного блока — это программа графической обработки полученных результатов. Исходными данными для этой программы являются результаты, полученные в части 3.

При этом иееется возможность вывести практически любую зависимость в любом виде в рамках введенных исходных данных и средств языка программирования. Наиболее часто используются в качестве графической визуализации следующие зависимости:

— изменение потенциала, концентраций компонент плазмы, радиальных и азимутальных скоростей вдоль радиуса в лобовой, боковой и теневой областях тела;

— изменение потенциала, концентраций компонент, радиальных и азимутальных скоростей а также плотностей токов компонент плазмы по обводу тела;

— изолинии потенциала и концентраций ионов и электронов;

— поля скоростей ионов и электронов;

— изменение интегральных токов ионов и электронов на зоне по времени;

— ФР заряженных частиц плазмы.

Разработанный алгоритм был применен для исследования области следа за спутником. Первая серия расчетов была посвящена исследованию следа в радиальном направлении.

При безразмерном радиусе спутника $r_0 = 10$, его потенциале $\varphi_0 = -6$, $\varepsilon = T_\mathrm{i}/T_\mathrm{e} = 1$, $m_\mathrm{i}/m_\mathrm{e} = 1836$ были получены следующие безразмерные результаты для выбранных пяти точек на оси следа (табл. 10.2).

Таблица 10.2

№ точки	1	2	3	4	5
r	10,6	12,9	15,8	18,7	21,5
$U_\mathrm{н}$	0,93	2,56	3,49	4,04	4,4
n_i	0,05	0,15	0,22	0,27	0,3
n_e	0,02	0,07	0,17	0,26	0,34

В таблице r — расстояние от оси цилиндра, $U_\mathrm{н}$ — направленная скорость в точке расположения зонда, $n_\mathrm{i,e}$ — концентрации ионов и электронов. Все параметры указаны в безразмерном виде.

На рис. 10.22 представлены функции распределения ионов f_i, зафиксированные в пяти исследуемых точках.

ФРИ в точке 1 имеет два характерных купола, каждый из которых соответствует своему потоку ионов, движущемуся вдоль боковой поверхности цилиндра. Данный эффект был получен и подробно исследовался в п. 3.1 монографии. По мере удаления от стенки растет наполнение куполов ФРИ (так как растет концентрация ионов), они

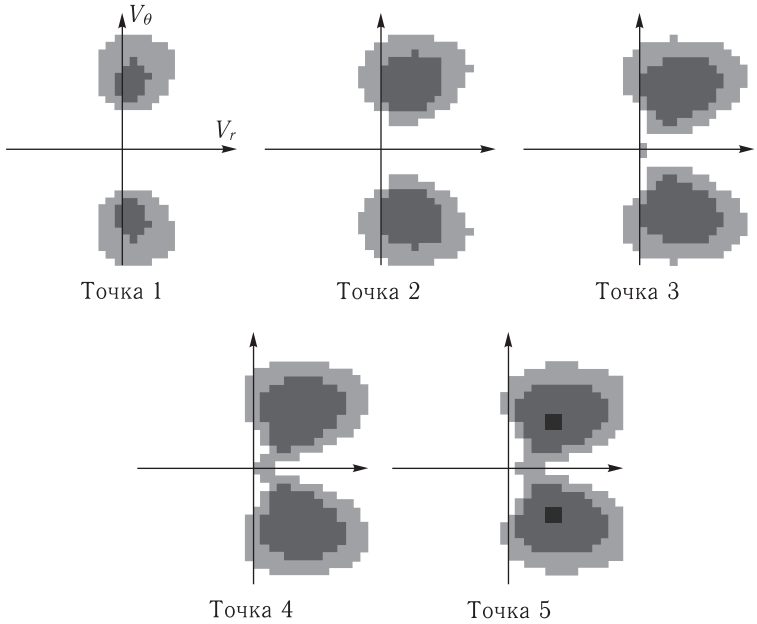


Рис. 10.22. ФРИ в пяти выбранных точках: ■ — f_i = 0,1–0,01; ■ — 0,01–0,001; ■ — 0,001–0,0001

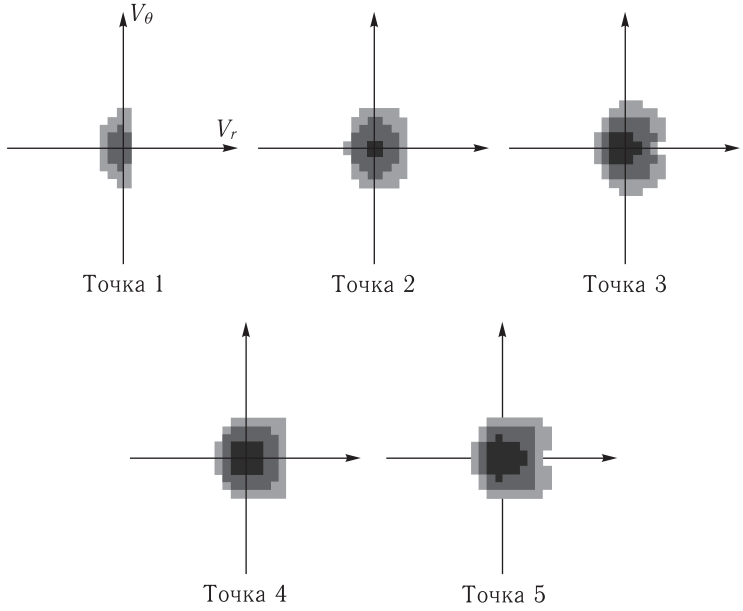


Рис. 10.23. ФРЭ в пяти выбранных точках: ■ — f_e = 0,1–0,01; ■ — 0,01–0,001; ■ — 0,001–0,0001

сближаются и их центры тяжести смещаются в сторону увеличения радиальной координаты.

На рис. 10.23 представлены функции распределения электронов f_e, зафиксированные в пяти исследуемых точках.

ФРЭ не разделяются на два купола, так как тепловая скорость электронов много больше направленной скорости плазмы (первой космической). ФРЭ по мере удаления от стенки сохраняют куполообразную форму, однако растет ее наполнение (так как растет концентрация электронов). Центр тяжести ФРЭ не имеет смещения, так как при отрицательном потенциале спутника присутствуют потоки электронов, движущихся и к стенке, и от стенки (электроны при движении к стенке проходят через точку разворота радиальной скорости).

Дальнейшая серия расчетов проводилась с целью формирования начальных и граничных условий для последующего расчета зондовых задач (часть 2 программного блока). Рисунок 10.24 демонстрирует, как функции распределения ионов и электронов, зафиксированные в точке 1, в результате работы программы части 2 распространяются на всю расчетную область. В нижней части каждого графика указано значение индекса узла расчетной сетки по угловой координате (всего в расчете использовался 41 узел).

Далее в каждой из пяти исследуемых точек была решена зондовая задача (часть 3 программного блока).

Учитывая сформулированное выше условие $r_{\text{зонда}} \ll r_{\text{спутника}}$, был выбран безразмерный радиус зонда $(r_0)_{\text{зонда}} = 0{,}1$; его потенциал $(\varphi_0)_{\text{зонда}} = -15$; $T_i/T_e = 1$; $m_i/m_e = 1836$.

На рис. 10.25 представлена полученная в расчетах зависимость тока на цилиндрический зонд от радиальной координаты точки расположения зонда в следе за цилиндрическим спутником (угловая координата относительно спутника $\theta = \pi$ соответствует оси следа). Кроме того, на графике указана линия, соответствующая фоновой плазме, а также линия, полученная по теории Ленгмюра [29] в предельном случае орбитального движения для движущейся плазмы. Из теории Ленгмюра известно, что ток на зонд относительно небольшого радиуса должен хорошо аппроксимироваться формулами, полученными в предельном случае орбитального движения. Этот факт и был получен в результате расчетов. Из кривых рис. 10.25 следует, что разница между линиями *2* и *3* составляет несколько процентов, что свидетельствует о достоверности полученных результатов. Кроме того, ток, полученный из расчетов в невозмущенной движущейся плазме, несколько ниже, чем рассчитанный по формуле Ленгмюра. Это также говорит о достоверности результатов, так как в теории Ленгмюра показано, что ток, полученный в предельном случая орбитального движения, является верхней границей для зондового тока.

Вторая серия расчетов посвящена исследованию следа в азимутальном направлении. На рис. 10.26 представлена графическая страница, на которой на фоне узлов расчетной сетки указано расположение исследу-

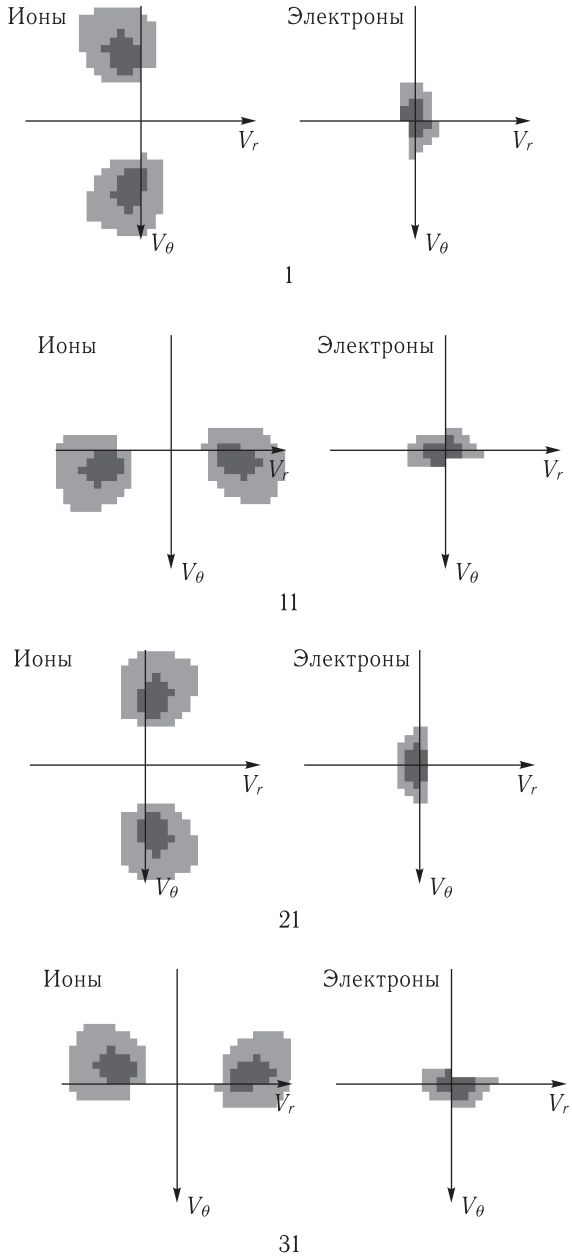


Рис. 10.24. Граничная ФР для зондовой задачи: 1 — лобовая точка относительно зонда; 11, 31 — боковые точки относительно зонда; 21 — теневая точка относительно зонда; ■ — $f_{\mathrm{i,e}} = 0{,}01$–$0{,}001$; ■ — 0,001–0,0001

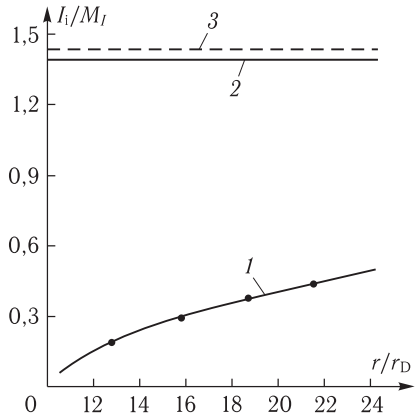


Рис. 10.25. Зависимость тока на цилиндрический зонд от радиальной координаты точки расположения зонда в движущейся бесстолкновительной плазме ($v_0 = 6$; $\varphi_{0\,\text{тепла}} = -6$; $r_{0\,\text{тепла}} = 10$; $\theta = \pi$; $\varepsilon = 1$; $\varphi_{0\,\text{зонда}} = -15$; $r_{0\,\text{зонда}} = 0,1$): *1* — линия, рассчитанная с учетом возмущенного фона; *2* — линия, рассчитанная для невозмущенной плазмы; *3* — линия, рассчитанная по формуле Ленгмюра для движущейся плазмы в предельном случае орбитального движения

емых точек в расчетной области относительно цилиндра. Исследуемые точки выделены черным цветом и пронумерованы.

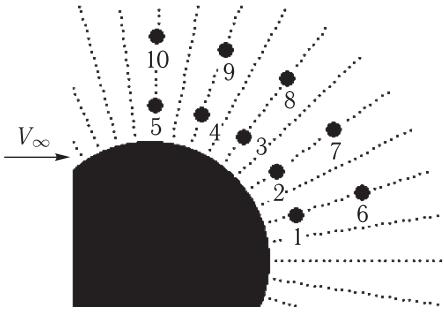


Рис. 10.26. Расположение исследуемых точек в расчетной области относительно цилиндра

В табл. 10.3 приведены данные расчета (часть 1 программного блока) для точек 1–5.

Таблица 10.3

№ точки	1	2	3	4	5
θ	$0,9\pi$	$0,8\pi$	$0,7\pi$	$0,6\pi$	$0,5\pi$
$U_н$	4,34	5,76	6,2	6,25	6,17
n_i	0,18	0,26	0,39	0,54	0,7
n_e	0,09	0,12	0,17	0,26	0,37

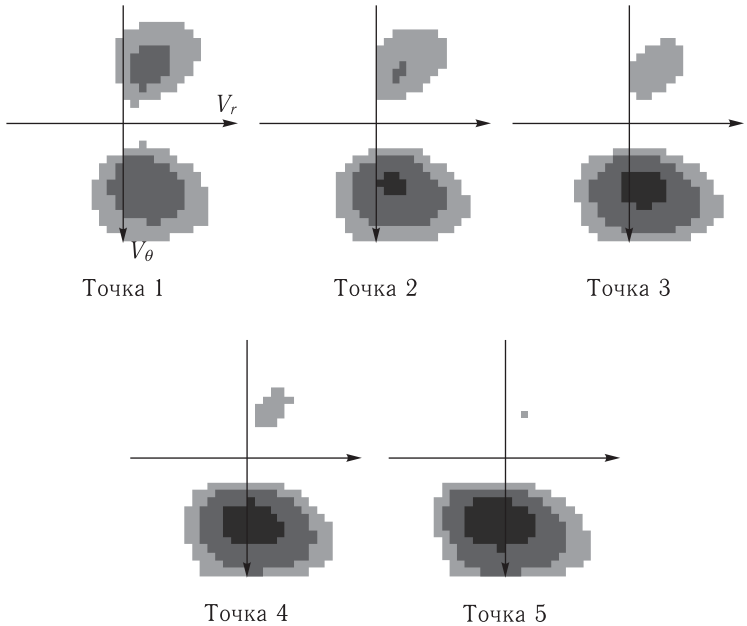


Рис. 10.27. ФРИ в пяти выбранных точках: ■ — $f_i = 0{,}1$–$0{,}01$; ■ — 0,01–0,001; ■ — 0,001–0,0001

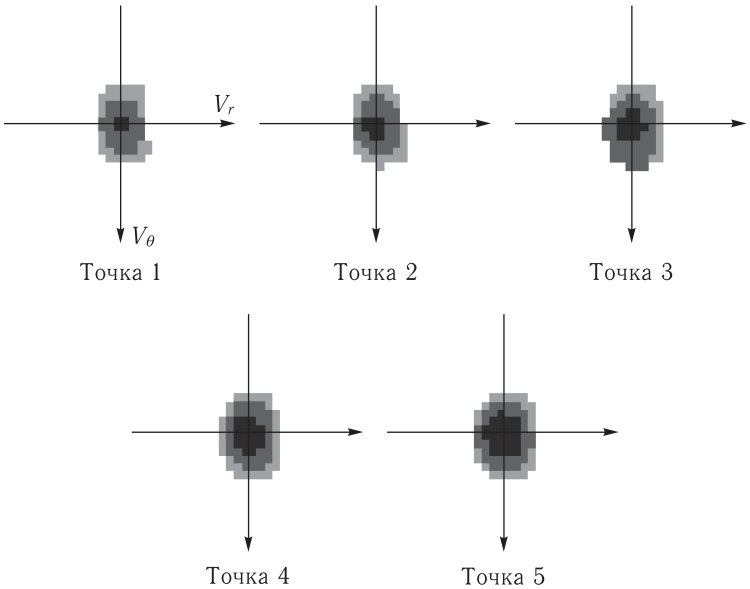


Рис. 10.28. ФРЭ в пяти выбранных точках: ■ — $f_e = 0{,}1$–$0{,}01$; ■ — 0,01–0,001; ■ — 0,001–0,0001

На рисунках 10.27 и 10.28 представлены функции распределения ионов и электронов, зафиксированные в исследуемых точках 1–5.

ФРИ в точке 1 имеет два характерных несимметричных купола, каждый из которых соответствует своему потоку ионов, движущемуся вдоль боковой поверхности спутника. По мере удаления от оси следа растет наполнение одного из куполов ФРИ, наполнение другого уменьшается. ФРЭ сохраняет куполообразную форму, однако с удалением от оси следа растет ее наполнение (так как растет концентрация электронов). Для исследуемых точек 6–10 ситуация аналогичная.

В каждой из исследуемых точек была решена зондовая задача (часть 3 программного блока).

На рис. 10.29 представлена установленная в расчетах зависимость тока на цилиндрический зонд от угловой координаты точки расположения зонда в следе за цилиндрическим спутником. Кроме того, на графике указана линия, соответствующая фоновой плазме, а также линия, полученная по теории Ленгмюра [29] для предельного случая орбитального движения в движущейся плазме.

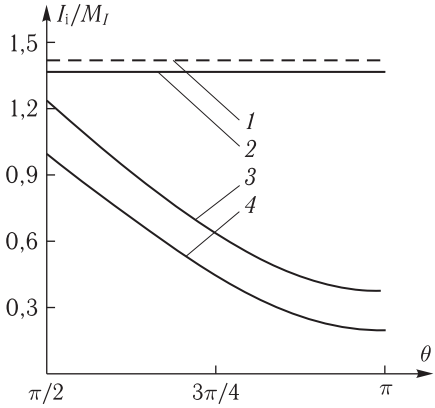


Рис. 10.29. Зависимость тока на цилиндрический зонд от угловой координаты θ точки расположения зонда относительно спутника ($v_0 = 6$; $\varphi_{0\,\text{тепла}} = -6$; $r_{0\,\text{тепла}} = 10$; $\varepsilon = 1$; $\varphi_{0\,\text{зонда}} = -15$; $r_{0\,\text{зонда}} = 0,1$; $\varepsilon = 1$): *1* — линия, рассчитанная по формуле Ленгмюра для движущейся плазмы в предельном случае орбитального движения; *2* — линия, рассчитанная для невозмущенной плазмы; *3* — линия, рассчитанная с учетом возмущенного фона при $r/r_D = 18{,}7$; *4* — линия, рассчитанная с учетом возмущенного фона при $r/r_D = 12{,}9$

На рис. 10.30 показана плотность тока ионов на цилиндрический зонд по обводу (θ_p — угловая координата относительно зонда) в зависимости от угловой координаты точки расположения зонда относительно спутника θ. Установлено, что данная зависимость имеет существенно нелинейный характер. Если линия *1*, соответствующая оси следа, обладает осевой симметрией, то при смещении по азимуту такая симметрия нарушается. Кроме того, если линия *1* рис. 10.30 имеет два симмет-

ричных максимума для угловых координат $\theta_p = \pi/2$ и $\theta_p = 3\pi/2$, то со смещением по азимуту один из максимумов растет и смещается в сторону угловой координаты $\theta_p = 0$, другой максимум уменьшается. В итоге для боковой точки относительно спутника ($\theta = \pi/2$) мы получим линию с одним максимумом. Дадим объяснение обнаруженному физическому явлению. Линия *1* формируется под воздействием двух симметричных потоков, обтекающих спутник с одного и другого бока. С удалением от оси следа (линия *2* и далее) влияние одного из потоков растет, другого — падает, поэтому один максимум растет, другой уменьшается. Кроме того, по мере смещения от оси следа направление более интенсивного потока меняется, что и приводит к смещению максимума тока на зонд от $\pi/2$ до 0.

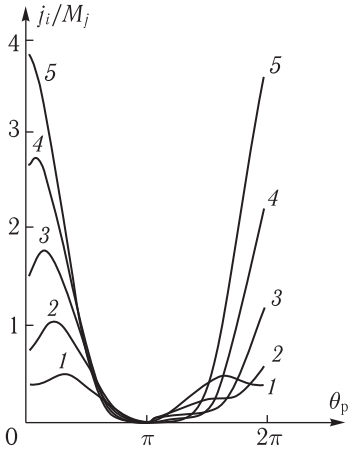


Рис. 10.30. Распределение плотность тока ионов по обводу цилиндрического зонда в зависимости от угловой координаты точки расположения зонда θ ($v_0 = 6$; $\varphi_{0\,\text{тепла}} = -6$; $r_{0\,\text{тепла}} = 10$; $\varepsilon = 1$; $\varphi_{0\,\text{зонда}} = -15$; $r_{0\,\text{зонда}} = 0{,}1$; $r = 13r_D$): *1* — $\theta = \pi$; *2* — $0{,}9\pi$; *3* — $0{,}8\pi$; *4* — $0{,}7\pi$; *5* — $0{,}6\pi$

Функции распределения ионной компоненты в процессе установления зондовых токов также существенно эволюционируют. Для примера рассмотрим расчет зондовой задачи в точке 1, расположенной вблизи спутника на оси следа (параметры, соответствующие точке 1, приведены в табл. 10.2). На рис. 10.31 представлено поле средних скоростей ионов вблизи зонда, помещенного в точку 1. Там же указаны вектора скоростей в каждом узле расчетной сетки, стрелки векторов опущены для всех скоростей, кроме соответствующих боковым точкам *а* и *б* относительно зонда. Эти точки выделены черными кружками. На рис. 10.32 приведены ФРИ, зафиксированные в результате расчета зондовой задачи в точках *а* и *б*, соответствующих угловым координатам относительно зонда $\theta_p = \pi/2$ и $\theta_p = 3\pi/2$. В начальный момент времени расчета ФРИ в расчетной области и соответственно в точках *а* и *б* представлена на рис. 10.22 (точка 1) и состоит из двух куполов, каждый из которых соответствует своему потоку ионов, движущемуся вдоль боковой поверхности спутника. В результате эволюции в каждой из рассмотренных точек наблюдается только один поток (например, потоку в точке *а* соответствует вектор средней скорости, построенный из данной точки и выделенный черным цветом на рис. 10.31) и соответствующий ему купол ФРИ, второй поток экранируется поверхностью зонда и соответствующий ему купол ФРИ пропадает. Таким образом, ФРИ вблизи стенки зонда, изначально состоящая из двух одинаковых куполов, в процессе эволюции может либо частично, либо полностью потерять один из них.

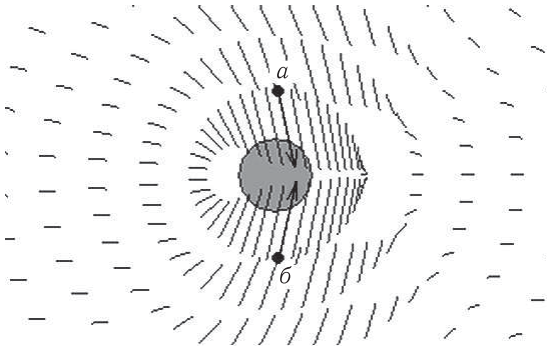
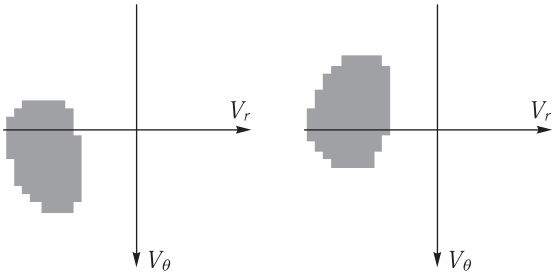


Рис. 10.31. Поле средних скоростей ионов вблизи зонда ($v_0 = 6$; $\varphi_{0\,\text{тепла}} = -6$; $r_{0\,\text{тепла}} = 10$; $\theta = \pi/2$; $r = 10{,}6 r_{\text{D}}$; $\varepsilon = 1$; $\varphi_{0\,\text{зонда}} = -15$; $r_{0\,\text{зонда}} = 0{,}1$)



ФРИ в точке *а* ФРИ в точке *б*

Рис. 10.32. ФРИ в точках *а* и *б*: ■ — $f_{\text{i}} = 0{,}001$–$0{,}0001$

В заключение рассмотрим влияние начальных и граничных ФР на результаты зондовых экспериментов.

Все расчеты зондовых задач, рассматриваемых в работе, дублировались расчетами по теории Ленгмюра. При этом радиус цилиндрического зонда подбирался относительно небольшим ($0{,}1\, r_{\text{D}}$), поскольку ток на зонд относительно небольшого радиуса должен хорошо аппроксимироваться формулами, полученными в предельном случае орбитального движения. Эти формулы приведены ниже для случая покоящейся и движущейся плазмы [29]:

$$I_i = 4 r_p l_p n_\infty e \sqrt{\frac{kT_i}{2m_i}} \left(\sqrt{\frac{e\varphi_p}{kT_i}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{e\varphi_p}{kT_i}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{e\varphi_p}{kT_i}} \right) \right] \right), \quad (10.7)$$

$$I_{\text{i}} = 2 e n_\infty V_\infty r_p l \sqrt{1 - \frac{e\varphi_p}{m_{\text{i}} V_\infty^2/2}}. \quad (10.8)$$

На рис. 10.33 приведены скорости ионов в выбранных точках вблизи спутника. Они использовались для расчетов по формуле (10.8). В левом верхнем углу рисунка представлена скорость набегающего потока.

Рис. 10.33. Скорости ионов в выбранных точках

Результаты сравнения для случая движущейся плазмы, представлены на рисунках 10.34 и 10.35.

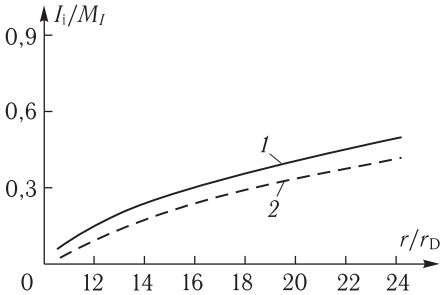


Рис. 10.34. Зависимость тока на цилиндрический зонд от радиальной координаты точки расположения зонда на оси следа ($v_0 = 6$; $\varphi_{0\,\text{тепла}} = -6$; $r_{0\,\text{тепла}} = 10$; $\theta = \pi/2$; $\varepsilon = 1$; $\varphi_{0\,\text{зонда}} = -15$; $r_{0\,\text{зонда}} = 0,1$): *1* — линия, рассчитанная с помощью программного блока, предложенного в монографии; *2* — линия, рассчитанная по теории Ленгмюра

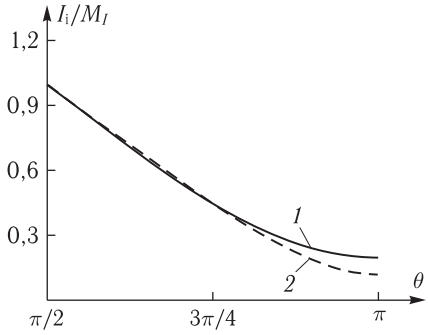


Рис. 10.35. Зависимость тока на цилиндрический зонд от угловой координаты точки расположения зонда θ ($v_0 = 6$; $\varphi_{0\,\text{тепла}} = -6$; $r_{0\,\text{тепла}} = 10$; $r/r_D = 12,9$; $\varepsilon = 1$; $\varphi_{0\,\text{зонда}} = -15$; $r_{0\,\text{зонда}} = 0,1$): *1* — линия, рассчитанная с помощью программного блока, предложенного в монографии; *2* — линия, рассчитанная по теории Ленгмюра

Из рисунков следует, что наибольшее отличие между строгой теорией и теорией Ленгмюра наблюдается в области следа. Расхождение может составлять 50% и более.

Для физического обоснования полученного расхождения в одних и тех же точках следа при одних и тех же концентрациях компонент плазмы, направленных скоростях плазмы, потенциалах и радиусах зонда были проведены следующие сравнительные расчеты.

1. Расчеты по строгой теории, учитывающие два купола ФРИ в точке расположения зонда в следе.

2. Расчеты для ФРИ, состоящей из одного купола со сдвигом на величину направленной скорости плазмы в данной точке. Наполнение купола ФРИ совпадет с общим наполнением обоих куполов в расчете №1 (иначе говоря, в расчетах 1 и 2 использовались одинаковые концентрации ионной компоненты, различной была только форма ФРИ).

3. Расчеты по теории Ленгмюра (формула (10.8)).

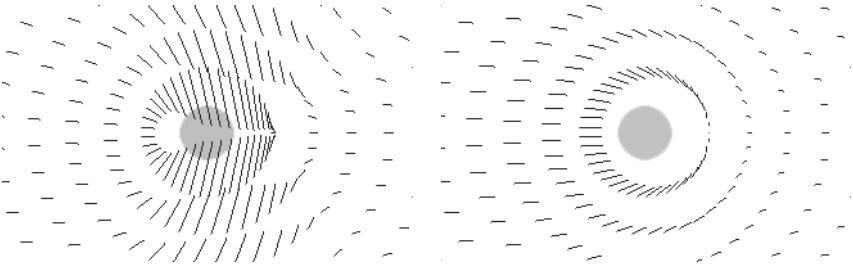
Результаты расчетов для точки 1 в следе спутника вблизи его поверхности сведены в табл. 10.4.

Таблица 10.4

№ расчета	1	2	3
Величина безразмерного ионного тока	0,07	0,04	0,0398

Из таблицы следует, что значение ионного тока, полученное в расчете №2, практически совпало с результатом расчета №3. Из строгого расчета получено значение ионного тока, превышающее результаты расчетов №2 и 3 (разница составляет $\sim 43\%$).

На рис. 10.36, *а* представлено реальное поле скоростей, полученное в расчете №1. Поле скоростей на рис. 10.36, *б* соответствует расчету №2.



а *б*

Рис. 10.36. Поля скоростей ионов ($V_0 = 0{,}93$; $(r_0)_{\text{зонда}} = 0{,}1$): *а*) расчет №1; *б*) расчет №2

Реальное поле скоростей существенно отличается от поля скоростей, полученного в расчете №2. Отметим значительный рост радиаль-

ной скорости ионной компоненты в направлении боковой поверхности зонда в расчете №1 по сравнению с данными расчета №2. Рост скорости приводит к росту зондового тока (на 43%).

Обнаруженное расхождение объясняется тем, что в теории Ленгмюра не мог быть учтен физический эффект разделения ФРИ на два купола в области следа, который обнаружен сравнительно недавно. Пренебрежение формой ФРИ в области следа может привести к ошибкам обработки зондового эксперимента в $\sim 50\%$ и более.

Глава 11

МЕТОДЫ ЗОНДОВОЙ ДИАГНОСТИКИ ПОТОКОВ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

11.1. Зондовая диагностика покоящейся плотной плазмы

11.1.1. Случай тонкого слоя объемного заряда. Рассмотрим случай, когда выполняется следующее неравенство:

$$r_{\mathrm{p}} \gg \Delta \gg \lambda.$$

В этом случае говорят о тонком столкновительном слое объемного заряда. Такое неравенство реализуется на практике при достаточно высокой концентрации заряженных частиц ($n_{\mathrm{i,e}} \geq 10^{10}$ см$^{-3}$) и достаточно высоком давлении ($p \geq 10^3$Па). На рис. 11.1 приведены графики зависимости отношения Δ/r_d и Δ/r_{p} от безразмерного размера зонда $r_0 = r_{\mathrm{p}}/r_d$ и различных $\varphi_0 = e\varphi_{\mathrm{p}}/(kT_{\mathrm{i}})$ и $\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$, полученные в численных экспериментах [18].

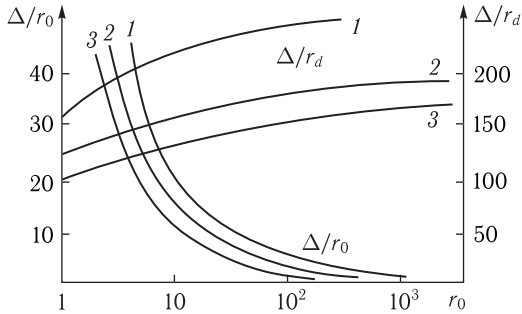


Рис. 11.1. Зависимость Δ/r_{p} и Δ/r_d от r_{p}/r_d: *1* — $\varepsilon = 0{,}1$; *2* — 0,5; *3* — 1,0

Из рисунка следует, что тонкий столкновительный слой объемного заряда возникает при $r_0 \geq 10^3$. Зонд становится практически плоским, поэтому изменение толщины слоя объемного заряда (например, с изменением его потенциала или отношения $T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$) не ведет к заметному изменению плотности зондового тока насыщения. Соответственно ионные ветви зондовых характеристик стремятся к пределу, численное значение которого в безразмерных единицах равно 0,3 для сфериче-

ского зонда и 0,18 для цилиндрического [123]. Переход к размерным единицам с учетом соответствующих масштабов дает

$$j_{\mathrm{i}} = \begin{cases} 0{,}3\, en_{\mathrm{i}\infty} D_{\mathrm{i}}/r_d & \text{— для сферического зонда;} \\ 0{,}18\, en_{\mathrm{i}\infty} D_{\mathrm{i}}/r_d & \text{— для цилиндрического зонда,} \end{cases}$$

где D_{i} — коэффициент диффузии ионов.

Из приведенных формул непосредственно вытекают простые соотношения для вычисления концентраций заряженных частиц в плазме:

$$n_{\mathrm{i}\infty} = \begin{cases} \left(\dfrac{11\varepsilon_0 k T_{\mathrm{i}} j_{\mathrm{i}}^2}{e^4 D_{\mathrm{i}}^2}\right)^{1/2} & \text{— для сферического зонда;} \\ \left(\dfrac{31\varepsilon_0 k T_{\mathrm{i}} j_{\mathrm{i}}^2}{e^4 D_{\mathrm{i}}^2}\right)^{1/2} & \text{— для цилиндрического зонда.} \end{cases}$$

Приведенные формулы можно рассматривать как аналог формулы Бома, но применительно к режиму сплошной среды.

Экспериментальная проверка формул была осуществлена в воздушной слабоионизованной плазме при атмосферном давлении и температуре порядка $6 \cdot 10^3$ К. Концентрация заряженных частиц определялась как зондовым методом с использованием сферических зондов, так и другими независимыми методами, при этом расхождение не превышало 20%.

Приведенные в данном разделе простые формулы для вычисления концентраций заряженных частиц могут быть использованы как начальные значения в циклических процедурах, необходимых для построения методики обработки ВАХ в более сложных условиях, например, при наличии направленной скорости в плазме.

11.1.2. Случай произвольного слоя объемного заряда. Кроме случая тонкого столкновительного слоя объемного заряда, рассмотренного в п. 11.1.1, возможны еще два предельных случая:

— толстый столкновительный слой объемного заряда, если выполняется неравенство $\Delta \gg r_{\mathrm{p}} \gg \lambda$;

— тонкий бесстолкновительный слой объемного заряда в режиме сплошной среды, если $r_{\mathrm{p}} \gg \lambda \gg \Delta$.

Простых аналитических решений или приближенных выражений для плотности тока на зонд в данных предельных случаях не получено. Поэтому можно найти решение с помощью математических и численных моделей, приведенных в п. 1 части 2 монографии, если положить $v_{\mathrm{н}} = B = 0$.

Деление на предельные режимы течения достаточно условно, тем более, что на практике часто возникают условия, не укладывающиеся в рамки приведенных неравенств.

В большинстве практически важных случаев (дуговой разряд высокого давления, технологические плазмотроны, плазменная электро-

ника, пограничный слой гиперзвукового летательного аппарата) плазма оказывается слабоионизованной и можно пренебречь химическими реакциями. В этом случае [18] плотность зондового тока зависит от следующих безразмерных величин:

- $r_0 = r_\mathrm{p}/r_d$ — безразмерного радиуса зонда;
- $\varphi_0 = e\varphi_\mathrm{p}/(kT_{\mathrm{i}\infty})$ — безразмерного потенциала зонда;
- $\varepsilon = T_{\mathrm{i}\infty}/T_{\mathrm{e}\infty}$ — отношения температур ионов и электронов;
- $D = D_\mathrm{i}/D_\mathrm{e} = D_0/\varepsilon^{1/2}$ — отношения коэффициентов диффузии ионов и электронов, где $D_0 = (1/\sqrt{2})(m_\mathrm{i}/m_\mathrm{e})^{1/2}$.

Безразмерная плотность ионного тока $j_{\mathrm{i}0} = \dfrac{j_\mathrm{ip}}{en_{\mathrm{i}\infty}D_\mathrm{i}/r_d} = j_{\mathrm{i}0}\,(r_0, \varphi_0, \varepsilon, D_0)$.

Если плазма достаточно плотная, то, как правило, $T_\mathrm{e} = T_\mathrm{i}$ и $\varepsilon = 1$. Определение температуры электронов T_e в режиме сплошной среды за исключением частных случаев [110] по наклону электронной ветви характеристики невозможно. Условие слабой степени ионизации позволяет считать $T_\mathrm{i} = T_a$. Значение температур $T_\mathrm{i} = T_a$ предполагается известным из нестационарных зондовых измерений или дополнительных соображений.

Вычислительные эксперименты показали [1], что ионный ток от параметра D_0 практически не зависит. Поэтому можно утверждать, что в плотной покоящейся слабоионизованной плазме

$$j_{\mathrm{i}0} = j_{\mathrm{i}0}(r_0, \varphi_0).$$

С использованием численной модели гл. 8 получены ВАХ цилиндрических и сферических зондов в достаточных для практики пределах изменения величин r_0 и φ_0 [1]. Они представлены на рис. 11.2. В случае сферических зондов результаты, аналогичные приведенным на рис. 11.2, получили ранее Чепкис и Баум [47].

Для нахождения концентрации $n_{\mathrm{i}\infty}$ необходимо применить итерационный метод. Считаются известными радиус зонда r_p, температура ионов $T_{\mathrm{i}\infty}$и коэффициент диффузии ионов D_i. Последний определяется по формулам термодинамики, если заданы давление, температура, молярная масса и эффективный диаметр молекул плазмообразующего газа. Расчет осуществляется по следующему циклу.

1. Выбирается точка на экспериментальной ВАХ при достаточно большом отрицательном потенциале (заданы φ_p и j_ip).

2. Задается концентрация ионов $n_{\mathrm{i}\infty 1}$. Она может быть вычислена по формулам п. 4.1.2. для тонкого столкновительного слоя объемного заряда.

3. Вычисляются:

— радиус Дебая $r_{d1} = [\varepsilon_0 kT_{\mathrm{i}\infty}/(n_{\mathrm{i}\infty 1}e^2)]^{1/2}$;

— безразмерный радиус зонда $r_{01} = r_\mathrm{p}/r_{d1}$;

— безразмерный потенциал зонда $\varphi_0 = e\varphi_\mathrm{p}/(kT_{\mathrm{i}\infty})$.

4. С помощью кривых на рис. 11.2 по заданным r_{01}, φ_{01} находится безразмерное значений j_{i01}.

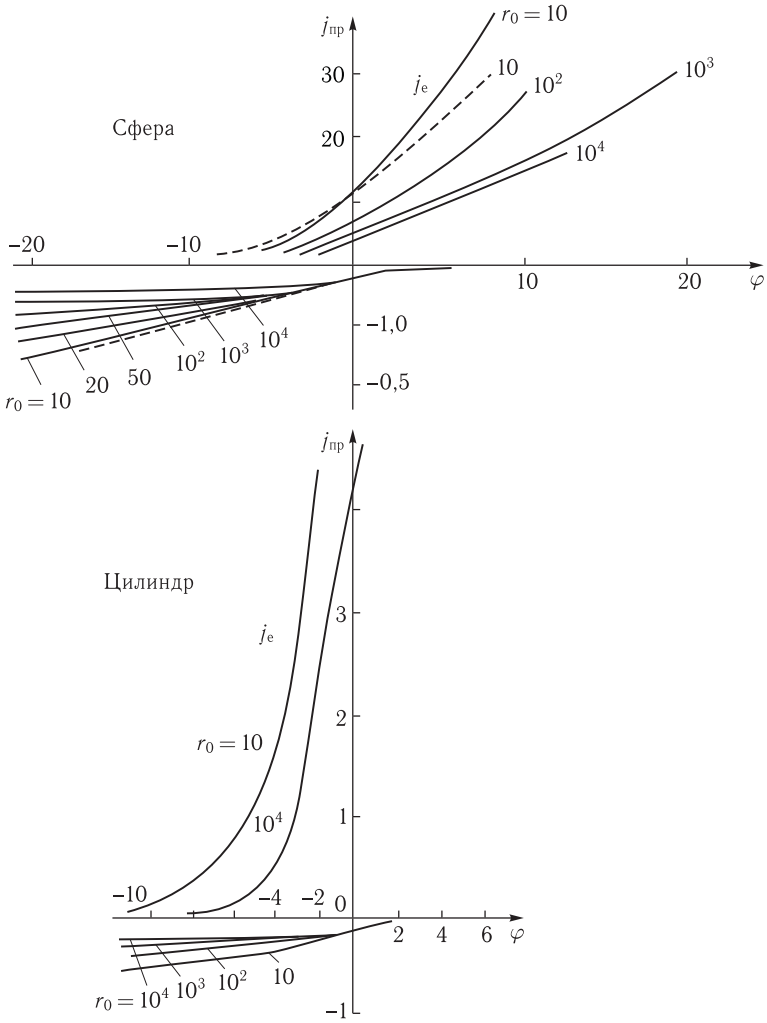


Рис. 11.2. ВАХ сферических и цилиндрических зондов ($D_0 = 100$, $\varepsilon = 1$)

5. Поскольку размерная плотность тока связана с безразмерной плотностью соотношением $(j_{\text{ip}})_{\text{размерн}} = M_j j_{i01}$, где $M_j = en_{\text{i}\infty} D_{\text{i}}/r_{d1}$, находим $M_j = en_{\text{i}\infty 2} D_{\text{i}}/r_{d1} = j_{\text{ip}}/j_{i01}$, откуда $n_{\text{i}\infty 2} = (j_{\text{ip}}/j_{i01}) r_{d1}/(eD_{\text{i}})$.

6. Если $|n_{\text{i}\infty 1} - n_{\text{i}\infty 2}| < \beta$, где β — заданное наперед малое число, то расчет прекращается и полагается $n_{\text{i}\infty} = n_{\text{i}\infty 2}$. В противном случае расчет повторяется, начиная с шага 2, с новым значением концентрации $n_{\text{i}\infty 2}$. Итерационный процесс повторяется до сходимости.

Если снять предположение о постоянных свойствах плазмы, т. е. считать, что плазма обладает переменными свойствами, то математи-

ческая и вычислительная модель зондовой задачи несколько усложняется [1]. На рис. 11.2 штриховой линией показана ВАХ сферического зонда радиуса $r_{\rm p} = 10r_{\rm D}$ для слабоионизованной плазмы с переменными свойствами. Расчет проведен на базе численной модели, изложенной в гл. 8. Из рисунка следует, что ионная ветвь ВАХ изменилась незначительно, вследствие чего приведенный алгоритм расчета $n_{\rm i\infty}$ оказывается пригодным и в этом случае. Дополнительная ошибка не превышает нескольких процентов. Электронная ветвь ВАХ в плазме с переменными свойствами изменяется существенно. Она возрастает с потенциалом более медленно, поскольку в призондовой области наблюдается рост электронной температуры, а нагретые электроны меньше поддаются влиянию электрического поля зонда.

Влияние реакций ионизации и рекомбинации на ВАХ зондов может быть существенным [18].

11.2. Зондовая диагностика плазменных потоков в режиме сплошной среды

11.2.1. Цилиндрический зонд в потоке при умеренных числах Рейнольдса. Случай умеренного влияния конвекции встречается в плазме ацетиленовых пламен, некоторых технологических плазмотронов, которые используются в плазмохимии, в низкотемпературных узлах энергетических установок и др. В предельном случае, когда электрическое число Рейнольда $\mathrm{Re} \sim 1$, а параметры плазмы и зонда таковы, что реализуется случай тонкого столкновительного слоя объемного заряда, в [41] получены удобные расчетные формулы для определения концентрации заряженных частиц по ионному току насыщения на цилиндрический и сферический зонды. В этих условиях зондовый ток стремится к некоторой постоянной величине, не зависящей от потенциала

$$j^*_{\rm i,e} = (1 + \varepsilon^{\mp 1}) \frac{\partial n}{\partial r}\bigg|_{r=r_{\rm p}},$$

где r — радиальная координата, обезразмеренная через радиус зонда $r_{\rm p}$, $j^*_{\rm i,e}$ — безразмерная плотность зондового тока, $\varepsilon = T_{\rm i\infty}/T_{\rm e\infty}$.

Если проинтегрировать полученные выражения по обводу цилиндра, получаем выражение для безразмерного интегрального тока насыщения на единицу длины цилиндра

$$I^*_{\rm i,e} = (1 + \varepsilon^{\mp 1}) \langle n'_{\rm p} \rangle,$$

где $\langle n'_{\rm p} \rangle$ — средняя по обводу цилиндра производная концентрации заряженных частиц. Размерные токи насыщения на отрезок зонда единичной длины определяются путем умножения безразмерного тока на масштаб:

$$I_{\rm i,e} = 2\pi e n_\infty D_{\rm i,e} I^*_{\rm i,e}.$$

Используя результаты вычислительных экспериментов по определению значения $\langle n'_{\mathrm{p}} \rangle$, в [41] предложена зависимость I_{i}^* от электрического числа Рейнольда $\mathrm{Re}_{\text{э}} = v_{\text{н}} r_{\mathrm{p}}/D_{\mathrm{i}}$ для цилиндрического зонда:

$$I_{\mathrm{i}}^* = 0{,}58(1 + 1/\varepsilon)^{0{,}6}\, \mathrm{Re}_{\text{э}}^{0{,}4}\,. \tag{11.1}$$

Аналогичные исследования для случая сферического зонда привели к формуле

$$I_{\mathrm{i}}^* = 1 + \frac{1}{\varepsilon} + 0{,}28\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{0{,}34} \mathrm{Re}_{\text{э}}^{0{,}66}\,. \tag{11.2}$$

Приведенные формулы получены при условии, что химические реакции заморожены. Однако в плазме пламени с легко ионизируемыми присадками существенную роль могут играть реакции ионизации атомов присадки и рекомбинации заряженных частиц

$$\mathrm{A} + \mathrm{M} \rightleftarrows \mathrm{A}^+ + \mathrm{e}^- + \mathrm{M},$$

где A, A^+ — атом и ион присадки, M — любая молекула. В [41] на основании вычислительных экспериментов получены удобные для практики формулы для безразмерного тока насыщения на цилиндрический зонд при наличии химических реакций.

Если на эксперименте выполняются сформулированные выше условия ($\mathrm{Re} \sim 1$, слой объемного заряда тонкий столкновительный), то можно найти значение $n_{\mathrm{i}\infty}$ по следующему алгоритму. Предполагается известными: r_{p}, T_{i}, T_{e}, D_{i}, $v_{\text{н}}$.

1. Выбирается точка на ионной ветви ВАХ при достаточно большом отрицательном потенциале. Для этой точки известны φ_{p}, I_{i} (где I_{i} рассчитывается на единицу длины зонда)

2. Рассчитывается $\mathrm{Re}_{\text{э}} = v_{\text{н}} r_{\mathrm{p}}/D_{\mathrm{i}}$, $\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}}$, $I_{\mathrm{i}}^* = 0{,}58(1+1/\varepsilon)^{0{,}6}\, \mathrm{Re}_{\text{э}}^{0{,}4}$.

3. Находится $n_{\mathrm{i}\infty} = I_{\mathrm{i}}/(2\pi e D_{\mathrm{i}} I_{\mathrm{i}}^*)$.

В п. 11.5 дано обобщение формулы (11.1) на случай произвольного слоя объемного заряда, что расширяет условия применимости этой формулы для расчета концентрации заряженных частиц.

11.2.2. Цилиндрический зонд в потоке при произвольных числах Рейнольдса. Расположение цилиндрического зонда относительно вектора скорости $v_{\text{н}}$ показано на рис. 1.1. Математическая и численная модель задачи соответствуют главам 7 и 8, если положить $B = 0$. Из физических процессов на плотность ионного тока в данном случае влияют конвекция, диффузия и подвижность ионов. Конвекция определяется направленным движением плазмы. Учитывая условие слабой степени ионизации, скорость конвекционного движения в каждой точке призондовой области определяется из решения системы уравнений Эйлера для нейтральной компоненты плазмы. Диффузия в соответствии с законом Фика зависит от коэффициента диффузии ионов и градиента ионной концентрации. Подвижность зависит от коэффициента подвижности и напряженности электрического поля вблизи зонда.

Решение задачи осуществляется в цилиндрической системе координат (r, θ, z), однако для достаточно длинного цилиндрического зонда зависимость от координаты z выпадает. В условиях сильного влияния конвекции плотность зондового тока $j_{\text{ie}} = en_{\text{ie}}(r_p, \theta)\, u_{\text{ie}}(r_{\text{p}}, \theta)$ является функцией угла θ, а полный ток на единицу длины зонда получается интегрированием по углу θ:

$$I_{\text{ie}} = r_{\text{p}} \int\limits_0^{2\pi} j_{\text{ie}}(\theta)\, d\theta.$$

В безразмерном виде ток на единицу длины зонда зависит от следующих безразмерных параметров $r_0 = r_{\text{p}}/M_r$, $\varphi_0 = \varphi_{\text{p}}/M_\varphi$, $\varepsilon = T_{\text{i}}/T_{\text{e}}$, $D = (D_{\text{e}}/D_{\text{i}})(1/\sqrt{2})\sqrt{m_{\text{i}} T_{\text{e}}/(m_{\text{e}} T_{\text{i}})} = D_0 \varepsilon^{-1/2}$, $v_0 = v_{\text{н}}/M_v$. Как и в случае покоящейся плазмы (см. п. 11.1), зависимость j_{i} от ε, D слабая.

На рис. 11.3 представлены ВАХ цилиндрических зондов при различных значениях безразмерных комплексов: $\text{Re}_{\text{э}} = r_{\text{p}} v_{\text{н}}/D_{\text{i}}$ и $\text{M} = v_{\text{н}}\sqrt{m_a/(kT_a)}$ ($\text{Re}_{\text{э}}$ — электрическое число Рейнольда, M — число Маха) [124]. Методы обработки зондовых характеристик, представленных на рис. 11.3, в настоящее время отсутствуют. Однако, имеются надежные формулы при условии умеренных значений электрического числа Рейнольдса (см. п. 11.2.1). Можно предположить, что с увеличением числа Рейнольдса ошибка, связанная с применением этой формулы, будет возрастать. По предварительным оценкам при значениях $\text{Re}_{\text{э}} < 100$ эта ошибка не превысит 30%.

Если плазма турбулентная, то, как показано в п. 9.3, зондовый ток испытывает колебания с частотой, пропорциональной колебаниям концентрации в призондовой области. Там же показано, что среднее значение тока в случае турбулентной плазмы меньше соответствующего значения для ламинарной плазмы примерно на 10%. Поэтому методы зондовой обработки в турбулентной плазме не должны отличаться от методов обработки в ламинарной плазме, при этом дополнительная ошибка в определении концентрации не превысит 10%.

11.2.3. Цилиндрический зонд в потоке в продольном магнитном поле. Расположение зонда относительно вектора скорости потока плазмы $\mathbf{v}_{\text{н}}$ и вектора индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ соответствует рис. 1.1. Математические и вычислительные модели зондовых задач сформированы в главах 7 и 8. На рис. 11.4 приведены вольтамперные характеристики цилиндрического зонда в продольном магнитном поле различной интенсивности ($0 \le \beta_{\text{i}} \le 0{,}05$), если электрическое число Рейнольдса $\text{Re}_{\text{э}} = 25$, число Маха $\text{M} = 0{,}6$, $\varepsilon^{-1} = T_{\text{e}}/T_{\text{i}} = 3$; $r_0 = r_{\text{p}}/r_{\text{D}} = 1$–$10$.

Кривые наглядно демонстрируют для данного набора параметров подавление электронного тока магнитным полем. При больших числах $\text{Re}_{\text{э}}$, когда режим обтекания цилиндра становится турбулентным

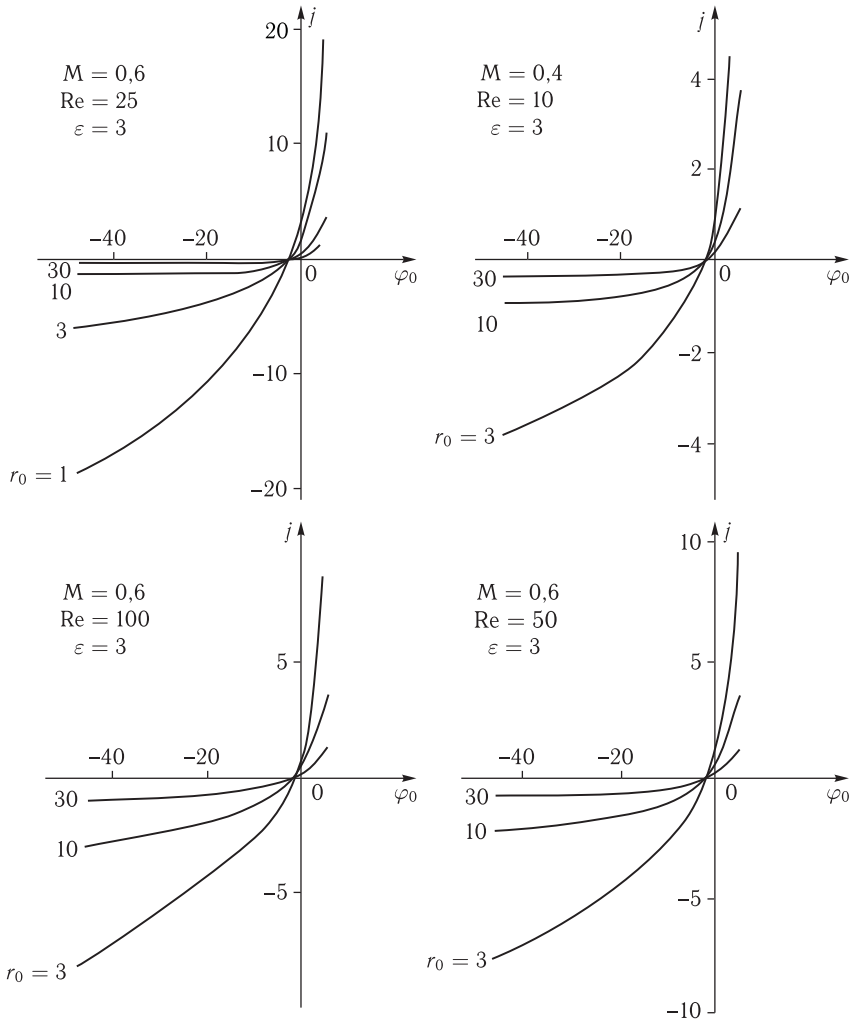


Рис. 11.3. ВАХ цилиндрических зондов в потоке плотной плазмы

и процессы диффузии и подвижности оказываются мало эффективными, может наблюдаться обратное явление: электронный ток с ростом магнитного поля может возрастать.

При определенном наборе параметров задачи возможна аномальная диффузия электронов и в ламинарном режиме (см. п. 9.2). Ионные ветви ВАХ в указанном диапазоне изменения **B** практически не меняются, поскольку ионы оказываются не замагниченными.

Ввиду обилия сложных нелинейных эффектов в рассматриваемой задаче методов обработки зондовых характеристик пока не создано. Та-

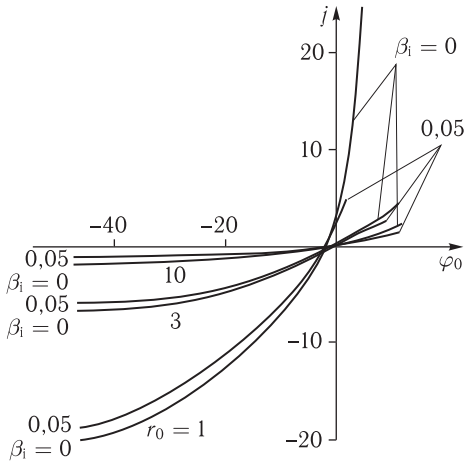


Рис. 11.4. ВАХ цилиндрического зонда в продольном магнитном поле ($M = 0{,}6$, $\mathrm{Re}_э = 25$, $\varepsilon^{-1} = 3$)

кие методы легче создать в предельных случаях. Например, при слабом влиянии конвекции и не очень сильных магнитных полях для оценочных расчетов можно использовать методы, пригодные для обработки ВАХ в покоящейся плотной плазме без магнитного поля (см. п. 11.1).

11.2.4. Плоский пристеночный зонд в потоке столкновительной плазмы. Рассматривается зонд ленточного типа, расположенный на боковой поверхности пластины, обтекаемой потоком слабоионизованной плотной плазмы. Внешнее магнитное поле отсутствует, а собственным можно пренебречь. Расположение зонда относительно вектора скорости потока $v_н$ соответствует рис. 1.2. В таких условиях зонд вместе с возникающим около него слоем объемного заряда оказывается погруженным в пограничный слой, образующийся около пластины.

На практике рассматриваемая задача моделирует зондовые измерения на борту гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА). Такие измерения необходимы для оценки процессов переноса вблизи поверхности ГЛА и многократно проводилось как в Советском Союзе, так и за рубежом [1, 19]. Решение зондовой задачи осуществлялось в соответствие с вычислительной моделью, изложенной в гл. 8. На рис. 11.5 представлены безразмерные вольтамперные характеристики плоских пристеночных зондов при $v_н = 0$ [1].

Предложено несколько вариантов обработки ВАХ плоских пристеночных зондов по величине ионного тока насыщения. Один из них принадлежит американскому исследователю П. Чану [31, 125]. Его метод дает хорошие результаты в предельном случае тонкого столкновительного слоя объемного заряда. В этом случае должно выполнятся неравенство $\delta \sim r_р \gg \Delta \gg \lambda$, где δ — толщина пограничного слоя.

Чан показал, что при относительно большой скорости потока и равенстве температур $T_e = T_i$ слой можно считать тонким и его влиянием на пограничной слой можно пренебречь, если $\delta > 10^2 r_d$. В этом предельном случае безразмерная плотность тока

$$j_i = \frac{0{,}47}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\mathrm{Sc_i}}\right)^{3/2} = \frac{j_{i\,\text{нас}}}{e(n_i v_н)_\delta}\sqrt{\frac{\mathrm{Re_{эх}}}{L}},$$

где $\mathrm{Sc_i}$ — ионное число Шмидта, $\mathrm{Re}_{эx}$ — число Рейнольдса для точки расположения зонда (на расстоянии X от острой передней кромки), $L = \left[(\rho^v)_x/(\rho^v)^*\right]^{0,2}$, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, символом x обозначена точка на поверхности зонда, * — точка, имеющая максимальную температуру в пограничном слое. Предложенная Чаном формула позволяет непосредственно определить концентрацию заряженных частиц на внешней границе пограничного слоя. Она неоднократно подвергалась экспериментальной проверке путем сравнения концентраций, измеренных зондом и другими независимыми методами [18]. Расхождение не превышало 30%.

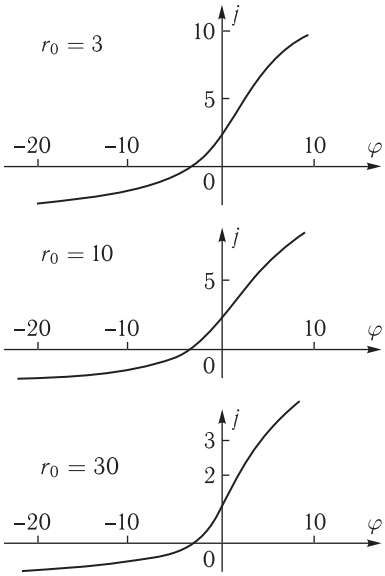


Рис. 11.5. ВАХ плоских пристеночных зондов ($v_0 = 0$)

Еще один способ измерения концентрации заряженных частиц на внешней границе слоя объемного заряда предложен В. А. Котельниковым. Проведенные им численные эксперименты позволили получать зависимость зондового тока от скорости набегающего потока $v_0 = v_н/M_v$, характерного размера зонда $r_0 = r_p/r_d$, его потенциала $\varphi_0 = e\varphi_p/(kT_i)$ и других параметров задачи. Если обозначить через K_v отношение плотности тока на зонд при наличии скорости к плотности тока на тот же зонд в покоящейся плазме, а через K_r — отношение плотности тока на зонд с характерным размером r к плотности тока на зонд очень большого размера, то, разделив экспериментально измеренную плотность тока на $(K_v K_r)$, получим плотность тока на зонд в идеализированных условиях: направленная скорость отсутствует, а размер зонда бесконечно большой. В таких условиях плотность зондового тока зависит от градиента потенциала и градиента концентрации:

$$\frac{\mathbf{j}_{i\text{эксп}}}{K_v K_r} = \mathbf{j}_{i0} = -eD_i\left(\nabla n_i - \frac{en_i}{kT_i}\mathbf{E}\right).$$

Если в этом выражении ввести безразмерную напряженность электрического поля по формуле$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 M_E = \mathbf{E}_0 kT_{\mathrm{i}}/(er_{\mathrm{D}})$, то

$$\frac{\mathbf{j}_{\mathrm{i}0}}{eD_{\mathrm{i}}} = \frac{\mathbf{j}_{i\kappa c}}{eD_{\mathrm{i}}K_v K_r} = -\nabla n_{\mathrm{i}} + \frac{n_{\mathrm{i}}^{3/2}\mathbf{E}_0 e}{\sqrt{\varepsilon_0 kT_{\mathrm{i}}}}.$$

Спроектировав данное выражение на ось y (см. рис. 1.2), получим

$$n_{\mathrm{i}} = \left[\frac{\left(\dfrac{j_{i\kappa c}}{eD_{\mathrm{i}}K_v K_r} + \dfrac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial y}\right)(\varepsilon_0 kT_{\mathrm{i}})^{1/2}}{eE_0}\right]^{2/3}.$$

Коэффициенты K_v и K_r, а также безразмерная величина напряженности электрического поля вблизи стенки E_0, найдены в численных экспериментах и приведены на рис. 11.6.

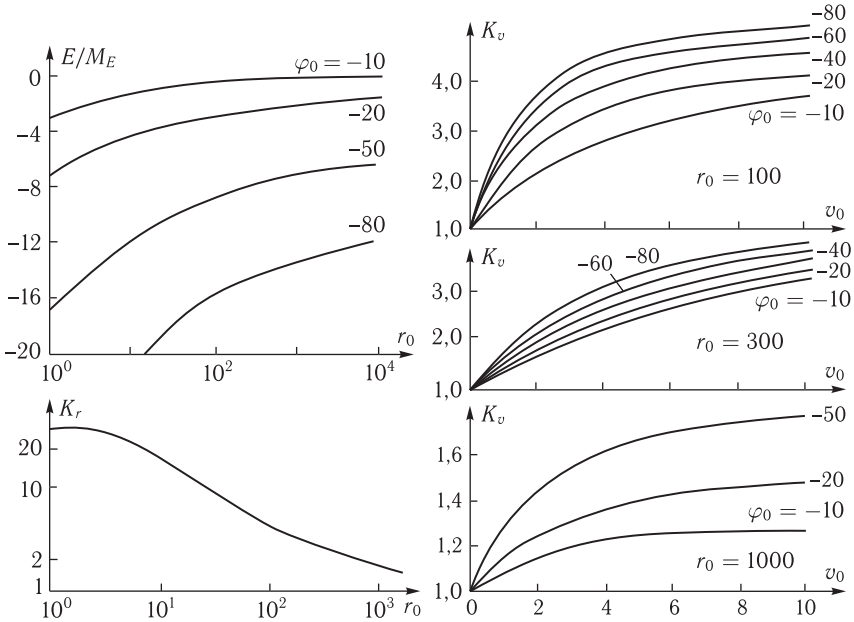


Рис. 11.6. Зависимость $E(r_0, \varphi_0), K_r(r_0, \varphi_0)$, $K_v(v_0, r_0, \varphi_0)$ для плоского зонда

На основании изложенного можно предложить следующие алгоритмы обработки ВАХ зондов ленточного типа, расположенных на поверхности обтекаемой плазмой пластины.

Алгоритм I. Считаются заданными размер зонда r_{p}, температура ионов $T_{\mathrm{i}\infty}$, коэффициент диффузии ионов D_{i} и скорость набегающего потока $v_{\mathrm{н}}$. Расчет осуществляется в следующей последовательности.

1. Выбирается точка на экспериментальной ВАХ при достаточно большом отрицательном потенциале (заданы $\varphi_{\mathrm{p}}, j_{\mathrm{ip}}$).

2. Оценивается концентрация ионов n_{i1}, например, по методике для покоящейся плазмы.

3. Вычисляются r_{d1}, $r_{01} = r_{\text{р}}/r_{d1}$, $\varphi_{01} = e\varphi_{\text{р}}/(kT_{\text{i}\infty})$, $v_{01} = v_{\text{н}}/M_v$, где $M_v = M_r/M_t = D_{\text{i}}/r_{d1}$ — масштаб скорости ионов.

4. По известным значениям r_{01}, φ_{01}, v_{01} из кривых рис. 8 находим K_{v1}, K_{r1}.

5. Вычисляем $j_{i01} = j_{\text{ip}}/(K_{v1}K_{r1})$ и проводим расчет $n_{\text{i}2}$ по методике для покоящейся плазмы до установления.

6. Если $|n_{\text{i}\infty 1} - n_{\text{i}\infty 2}| < \beta$, то расчет прекращается. В противном случае расчет повторяется, начиная с шага 2 с новым значением концентрации $n_{\text{i}2}$.

Алгоритм II. Численный эксперимент позволяет отдельно получить вклад в ионный ток градиента концентрации и градиента потенциала. Во многих практически важных случаях выполняется неравенство $(\nabla n_{\text{i}}) \ll [en_{\text{i}}/(kT_{\text{i}})]E$. В этом случае для приближенного расчета можно воспользоваться формулой

$$n_{\text{i}} = \left(\frac{j_{\text{i эксп}}\sqrt{\varepsilon_0 kT_{\text{i}\infty}}}{e^2 D_{\text{i}} K_v K_r E_0}\right)^{2/3}.$$

Последовательность вычислений по данной формуле следующая (считаются заданными размер зонда $r_{\text{р}}$, температура ионов $T_{\text{i}\infty}$, коэффициент диффузии ионов D_{i}).

1. Выбирается точка на экспериментальной ВАХ при достаточно большом отрицательном потенциале (заданы $\varphi_{\text{р}}, j_{\text{ip}}$).

2. Оценивается концентрация $n_{\text{i}1}$ и направленная скорость потока v_{n1} и рассчитывается r_{d1}, $r_{01} = r_{\text{р}}/r_{d1}$, $\varphi_0 = e\varphi_{\text{р}}/(kT_{\text{i}\infty})$, $v_{01} = v_{\text{н}} r_{d1}/D_{\text{i}}$.

3. Из кривых рис. 11.6 находим K_{v1}, K_{r1}, E_{01}.

4. По формуле $j_{\text{i}01} = j_{\text{ip}}/(K_{v1}K_{r1})$ вычисляется плотность тока в идеализированных условиях и рассчитывается $n_{\text{i}2}$ по алгоритму для покоящейся плазмы.

5. Вычисляются: r_{d2}, $r_{02} = r_{\text{р}}/r_{d2}$, $\varphi_{02} = \varphi_{01}$, K_{r2}, E_2. По приближенной формуле

$$n_{\text{i}2} = \left(\frac{j_{\text{i эксп}}\sqrt{\varepsilon_0 kT_{\text{i}\infty}}}{e^2 D_{\text{i}} K_{v2} K_{r2} E_{02}}\right)^{2/3}$$

определяется коэффициент K_{v2}.

6. Если $|n_{\text{i}\infty 1} - n_{\text{i}\infty 2}| < \beta$ и $|K_{v2} - K_{v1}| < \beta$ — расчет прекращается. В противном случае осуществляется цикл, начиная с шага 2.

7. После сходимости итерационного процесса находим $n_{\text{i}\infty}$ и $v_{\text{н}} = v_0(D_{\text{i}}/r_d)$, где v_0 определяется по графику рис. 11.6 по известным значениям K_v, φ_0, r_0.

Если плазма турбулентная, то среднее значение тока на зонды уменьшается примерно на 10% по сравнению с ламинарным режимом [74]. Поэтому можно сохранить изложенные выше методики обработки для ламинарного режима с добавлением систематической ошибки в 10%.

11.3. Двойные зонды. Их взаимное влияние

Двойные зонды плоской геометрии, расположенные на боковой поверхности гиперзвукового летательного аппарата, являются основным источником информации о радиофизических параметрах плазмы, возникающей вблизи поверхности ГЛА. Такие зонды не нарушают аэродинамику ГЛА и мало подвержены воздействию тепловых потоков со стороны пристеночной плазмы по сравнению с выносными зондами. На рис. 11.7 приведена фотография зондового блока, который использовался на Российских ГЛА различного назначения.

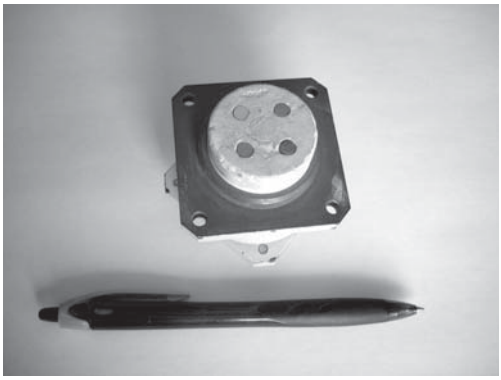


Рис. 11.7. Фотография блока с пристеночными плоскими зондами

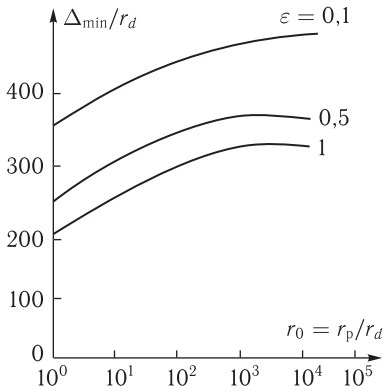


Рис. 11.8. Зависимость минимального расстояния между двойными зондами от r_0, φ_0 (режим сплошной среды)

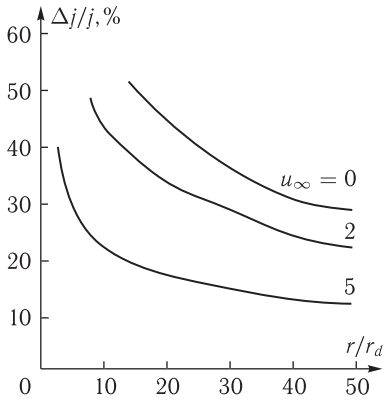


Рис. 11.9. Максимальная систематическая ошибка при измерении двойными зондами, вызванная взаимным влиянием (режим сплошной среды)

Более подробная информация о преимуществах и недостатках двойных зондов изложена в п. 10.3 монографии. В данном разделе приве-

дены рекомендации о расстоянии между зондами в режиме сплошной среды, при которых возмущенные зоны не перекрываются (рис. 11.8). На рис. 11.9 методами математического моделирования рассчитаны возможные систематические ошибки, которые могут возникнуть, если расстояние между двойными зондами окажется меньше рекомендуемого.

11.4. Нестационарный электрический зонд в плотной плазме

11.4.1. Алгоритм определения температуры ионов. Алгоритм определения температуры ионов в плотной плазме предполагает, что на зонд подан импульс потенциала с достаточно крутым фронтом нарастания в форме ступеньки и измерено время релаксации пристеночной плазмы $\tau_{\text{эксп}}$, т. е. время перехода от начального состояния к конечному. Кроме того, предполагаются известными термодинамические параметры пристеночной плазмы (молярный состав, давление и др.), а также концентрации ионов и электронов в плазме, полученные по классической методике (см. пункты 11.1 и 11.2). Для расчета T_{i} строится следующий итерационный процесс:

1. По известным значениям давления, температуры и молярного состава плазмообразующего газа определяется коэффициент диффузии ионов D_{i}.

2. Используя измеренное на эксперименте время релаксации $\tau_{\text{эксп}}$ и формулу (11.4) из п. 11.4.2, находим радиус Дебая ($M_t = M_L^2/D_{\text{i}}$)

$$r_{\text{D}}^2 \simeq \frac{\tau_{\text{эксп}} D_{\text{i}}}{25}.$$

3. Учитывая, что

$$r_{\text{D}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_{\text{i}}}{n_{\text{i}} e^2}},$$

находим

$$T_{\text{i}} = \frac{r_{\text{D}}^2 n_{\text{i}} e^2}{\varepsilon_0 k}, \tag{11.3}$$

где n_{i} определяется по методике стационарного зонда.

Если T_{i}, полученное по формуле (11.3), отличается от T_{i}, входящего в стационарную методику обработки зондовых характеристик, то следует организовать итерационный процесс, в котором определения T_{i} и n_{i} будут согласованы.

11.4.2. Характерные времена релаксации. Приведем результаты математического моделирования по определению характерных времен релаксации в столкновительной плазме. На рис. 11.10 приведены результаты численных экспериментов в случае покоящейся плазмы.

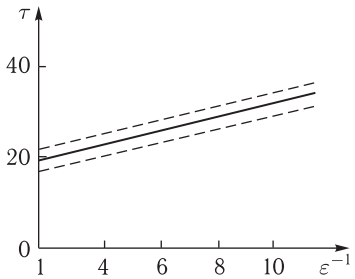


Рис. 11.10. Зависимость τ от параметров плазмы

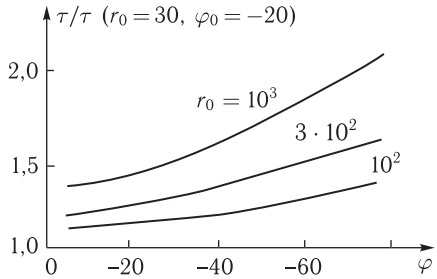


Рис. 11.11. Зависимость τ от параметров плазмы

Численные расчеты проводились для следующих диапазонов изменения определяющих параметров задачи:

$$1 \le r_0 = \frac{r_{\mathrm{p}}}{M_r} \le 10^4;$$

$$-20 \le \varphi_0 = \frac{\varphi_{\mathrm{p}}}{M_\varphi} \le 20;$$

$$0{,}1 \le \varepsilon = \frac{T_{\mathrm{i}}}{T_{\mathrm{e}}} \le 1;$$

$$32 \le D_0 = \frac{D_{\mathrm{e}}}{D_{\mathrm{i}}} \le 166.$$

В указанных пределах изменения параметров время релаксации τ имело значение

$$20 \le \tau \le 30.$$

Это позволяет с погрешностью $\sim 20\%$ считать, что в указанных интервалах изменения характерных параметров задачи

$$\tau \sim 25 = \mathrm{const}\,. \tag{11.4}$$

Расчеты показывают, что τ растет с уменьшением ε и ростом r_0, φ_0, D_0. С физической точки зрения эти тенденции очевидны. С увеличением ε^{-1}, r_0, φ_0 растет размер возмущенной зоны, а большая зона медленнее релаксирует. С ростом D_0 растет масса ионов, что также ведет к увеличению времени релаксации.

Если диапазон изменения параметров задачи оказывается более широким, то условие (11.4) может не соблюдаться. Для примера на рис. 11.11 представлены кривые изменения τ от φ_0 в интервале $(-20 \div -80)$, из которых видна существенная зависимость τ от φ_0.

Кривые рис. 11.11 получены в случае плазмы с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями. Расчеты для плазмы с переменными свойствами показали, что время релаксации изменяется незначительно.

На рис. 11.12 дана зависимость времени релаксации вблизи сферического зонда от числа Кнудсена. Как и следовало ожидать, учет ион-нейтральных и электрон-нейтральных столкновений ведет к затягиванию процесса релаксации.

На рисунках 11.13–11.15 приведены результаты численных экспериментов в столкновительной плазме при наличии дополнительных осложняющих факторов: внешнего магнитного поля, направленной скорости, термоэмиссии с поверхности зонда.

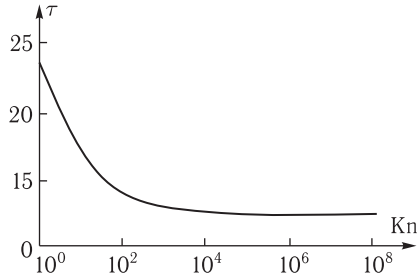


Рис. 11.12. Зависимость $\tau = \tau(\mathrm{Kn})$

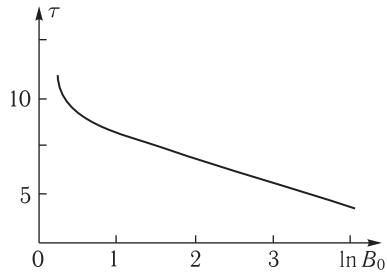


Рис. 11.13. Зависимость $\tau = \tau(B_0)$

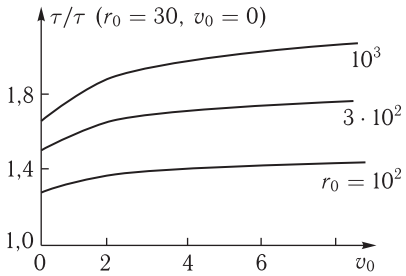


Рис. 11.14. Зависимость $\tau = \tau(v_0)$

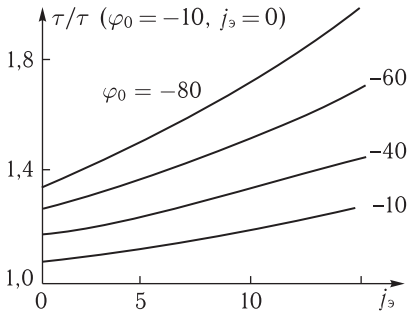


Рис. 11.15. Зависимость $\tau = \tau(j_э, \varphi_0)$

Из приведенных кривых следует:

1. Внешнее магнитное поле способствует стабилизации возмущенной зоны: с ростом индукции B_0 τ уменьшается. На опыте наблюдается почти линейная зависимость τ от $\ln B_0$.

2. Зависимость τ от направленной скорости v_0 изучалась на примере плоского пристеночного зонда, расположенного на большой диэлектрической пластине. Рисунок свидетельствует о достаточно слабом влиянии направленной скорости на время релаксации в режиме сплошной среды.

3. Эмиссия электронов с поверхности зонда или инжекция частиц с его поверхности ведет к росту τ.

11.5. Зондовые измерения в потоке столкновительной плазмы*

Эксперимент проводился на лабораторной установке, созданной на базе плазменного фотометра FLAPHO4 (производство ГДР) в плазме продуктов сгорания смеси ацетилена и воздуха. Горелка состояла из 11 трубочек диаметром 1,5 мм, расположенных по окружности диаметром 15 мм. Конструкция плазменного фотометра обеспечивала хорошую воспроизводимость и стабильность режима горения. Через специальный распылитель в пламя горелки подавались водные растворы солей различных щелочных металлов. Для измерения атомов присадки использовался метод интегрального коэффициента поглощения спектральных линий.

Температура пламени измерялась методом обращения спектральных линий. Скорость направленного движения плазменного потока также измерялась оптическим методом.

По известным значениям концентрации атомов присадки и температуры по формуле Саха определялась концентрация заряженных частиц. На основании оптических измерений были получены следующие результаты (с присадками солей натрия) (табл. 11.1).

Таблица 11.1

	n_a, см$^{-3}$	$n_{\mathrm{i,e}}$, см$^{-3}$	Средняя температура, К	Средняя скорость, м/с
Режим 1	10^{11}	$1{,}8 \cdot 10^{10}$	2370	$4{,}4 \pm 0{,}5$
Режим 2	$1{,}8 \cdot 10^{11}$	$2{,}4 \cdot 10^{10}$	2370	$4{,}4 \pm 0{,}5$
Режим 3	$4{,}3 \cdot 10^{11}$	$3{,}8 \cdot 10^{10}$	2370	$4{,}4 \pm 0{,}5$

Все измерения (оптические и зондовые) проводились на расстоянии 20–25 мм от среза сопла в зоне, где имело место химическое и термодинамическое равновесие. Диаметр струи в этой зоне составлял 20 мм. Зонды цилиндрической геометрии изготавливались из тугоплавкого вольфрам-рениевого сплава. Диаметр зондов изменялся в пределах 0,5–3 мм, длина зондов составляла 9 мм. Одиночный зонд кратковременно (~ 2 с) вводился в струю с помощью специального устройства. Для снятия ВАХ его потенциал варьировался в пределах $-20 \div +20$ В относительно заземленного корпуса горелки. Ток зонда регистрировался с помощью самопишущего потенциометра, большая чувствительность которого позволяла измерять токи до десятых долей мкА.

На рис. 11.16 приведены экспериментально полученные ионные ветви ВАХ цилиндрических зондов в пламени с присадкой натрия при равновесной концентрации электронов $1{,}8 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$ (режим 2 в табл. 11.1).

* Эксперимент проведен в ЦАГИ. Авторы: Егорова З. И., Кашеваров А. В., Фомина Е. М., Цхай Н. С. [41, 126–129].

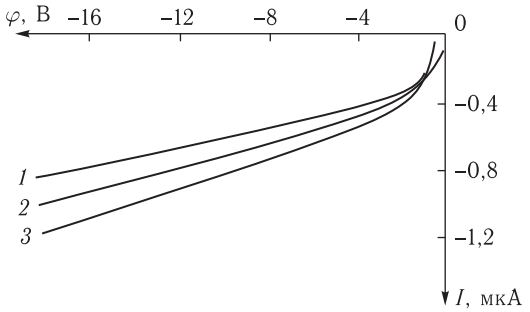


Рис. 11.16. ВАХ цилиндрических зондов: *1* — $d = 0{,}5$ мм; *2* — 0,75; *3* — 1,0

Расчет концентрации заряженных частиц осуществлялся по алгоритму, изложенному в п. 11.2.1. В расчете использовалось значение коэффициента диффузии ионов $D_{\mathrm{i}} = 5{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2/с, значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{э}} = 2{,}1$, отношение температур $\varepsilon = T_{\mathrm{i}}/T_{\mathrm{e}} = 1$. В этих условиях по формуле (11.1)

$$I_{\mathrm{i}}^{*} = 0{,}58(1 + 1/\varepsilon)^{0{,}6}\,\mathrm{Re}_{\text{э}}^{0{,}4} = 1{,}2;$$

$$n_{\mathrm{i,e}} = \frac{I_{\mathrm{i}}}{2\pi e D_{\mathrm{i}} l I_{\mathrm{i}}^{*}} = 8{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{м}^{-3}.$$

Отношение концентрации ионов, измеренных зондом, к концентрации, определенной независимым оптическим методом (см. табл. 11.1) равно

$$\frac{n_{\mathrm{i,e\ зонд}}}{n_{\mathrm{i,e\ оптика}}} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{10}}{2{,}4 \cdot 10^{10}} = 3{,}67.$$

Чтобы объяснить такое различие, следует учесть, что формула (11.1) получена в приближении бесконечно тонкого слоя объемного заряда, и собирающая поверхность для ионов совпадала с геометрической поверхностью зонда. Однако, при достаточно большом отрицательном потенциале собирающей поверхностью можно считать внешнюю границу слоя объемного заряда. Если ион попал на слой, то на него начинает действовать достаточно сильное притягивающее электрическое поле и он с большой вероятностью попадает на зонд. Поэтому плотность тока уменьшается в пропорции $2\pi r_{\mathrm{p}} l/(2\pi(r_{\mathrm{p}} + \Delta)l) = (1 + \Delta/r_{\mathrm{p}})^{-1}$. Уменьшение плотности тока автоматическим ведет к уменьшению концентрации ионов в той же пропорции. Поэтому формулу (11.1) из работы [41] предлагается писать в виде

$$n_{\mathrm{i}} = I_{\mathrm{i}}(2\pi e D_{\mathrm{i}} l \widehat{\mathbf{I}}_{\mathrm{i}})^{-1}(1 + \Delta/r_{\mathrm{p}})^{-1}. \qquad (11.5)$$

В условиях эксперимента с солями натрия $r_{\mathrm{p}} = 10 r_{\mathrm{D}}$, $\Delta = 26 r_{\mathrm{D}}$, следовательно, $(1 + \Delta/r_{\mathrm{p}})^{-1} = 1/(1 + 26/10) = 1/3{,}6$. Полученный коэффициент позволяет согласовать результаты оптических и зондовых экспериментов.

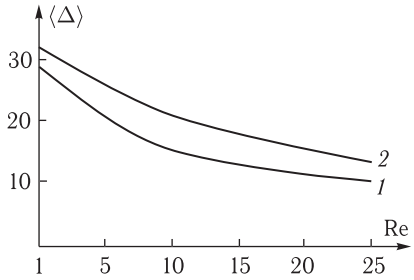


Рис. 11.17. Зависимость $\langle\Delta\rangle$ от $\mathrm{Re}_э$ и r_0 ($\varphi_0 = -45$; $\varepsilon = 1$): *1* — $r_0 = 10$, *2* — $r_0 = 30$

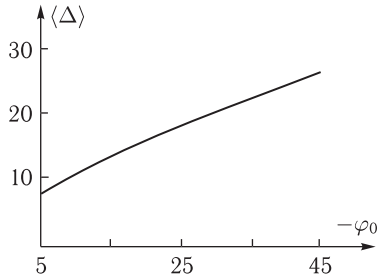


Рис. 11.18. Зависимость $\langle\Delta\rangle$ от φ_0 ($r_0 = 10$; $\mathrm{Re}_э = 2{,}1$; $\varepsilon = 1$)

На рисунках 11.17 и 11.18 представлены некоторые результаты математического моделирования по алгоритму из гл. 2, где даны зависимости толщины слоя объемного заряда $\langle\Delta\rangle$ от электрического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_э$, безразмерного потенциала зонда $\varphi_0 = \varphi_p e/(KT_i)$ и безразмерного радиуса зонда $r_0 = r_p/r_D$. Зависимость от числа Маха оказалась достаточно слабой.

Как следует из рисунков 11.17 и 11.18, $\langle\Delta\rangle$ уменьшается с увеличением $\mathrm{Re}_э$ и уменьшением r_0 и φ_0.

Заключение к части третьей монографии. Часть третья монографии целиком посвящена техническому приложению исследований, проведенных в предыдущих частях — зондовой диагностике плазменных потоков. Авторы проявляют интерес к зондовой диагностике с 70-х годов прошлого столетия. В 1965 г. в Московском авиационном институте была защищена кандидатская диссертация Котельниковом В. А. на тему «Зондовые исследования плазменных потоков». В работе представлен обширный экспериментальный материал по параметрам потоков, истекающих из сильноточных плазменных движителей (СПД), работающих на литии, которые разрабатывались по указанию С. П. Королева. Там же приведены зондовые исследования в потоках, истекающих из магнитоплазмодинамических движителей (МПД) впервые предложенных Ю. В. Кубаревым в 1958 г. Ввиду недостаточного развития зондовой теории в то время эксперименты носили часто интуитивный, скорее качественный чем количественный, характер, однако они правильно отражали физическую картину и процессы, происходящие в движителе и истекающей из него плазме. Эти измерения были проведены впервые в мировой практике. Так же впервые в 80-х годах прошлого столетия были проведены зондовые измерения в натурных условиях в струях, истекающих из МПД в ионосферу (программа «Куст»).

Результаты, полученные в последние годы и изложенные в первых двух частях монографии, кардинально расширили возможности зондового метода, повысили его точность и информативность. Появилась методика цилиндрических ориентированных зондов, методика измерений

в возмущенной зоне спутника, в частности в следе, методика измерения при наличии фоновой плазмы, методика нестационарного зонда, методика измерений в медленно движущейся плотной плазме и многое другое. Обработка зондовых характеристик перестала быть рутинной изнурительной работой, поскольку появились автоматизированные системы управления и обработки зондового эксперимента.

Что касается задач, которые ждут своего решения в теории зондов, то их огромное количество, поскольку нет предела совершенствования зондовой теории и методики. Не случайно один из выдающихся ученых по физике плазмы академик Лев Андреевич Арцимович говорил: «Ленгмюр придумал зонд, чтобы изучать плазму, а теперь физики создают плазму, чтобы изучать зонд».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Котельников В. А.*, *Ульданов С. В.*, *Котельников М. В.* Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. — М.: Наука, 2004. — 422 с.
2. *Котельников В. А.*, *Гидаспов В. Ю.*, *Котельников М. В. и др.* Математическое моделирование обтекания тел слабоионизованной столкновительной плазмой. — М.: Изд-во МАИ, 2008. — 121 с.
3. *Boltzmann L.* Sitzungsber. Kaiserl. Akad/ Wiss. 66 (2) 275. 1872.
4. *Chapman S.* // Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A216. 279 (1916).
5. *Enskog D.* The kinetic Theory of Phenomena in Fairby Rare Gases. — Upsela, 1917.
6. *Алексеев Б. В.* Физические основы обобщенной больцмановской кинетической теории газов // УФН. — 2000. — Т. 170, №6. — С. 649–679.
7. *Алексеев Б. В.* Физические принципы обобщенной кинетической теории ионизованных газов // УФН. — 2003. — Т. 173, №2. — С. 145–174.
8. *Alexeev B. V.* // Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A394. 417 (1994).
9. *Слезкин Н. А.* // ДАН СССР. — 1951. — Т. 79, №1. — С. 33.
10. *Слезкин Н. А.* // ДАН СССР. — 1951. — Т. 77, №2. — С. 205.
11. *Валандер С. В.* // ДАН СССР. — Т. 78, №1. — С. 25.
12. *Терлецкий Я. П.* // ЖЭТФ. — 1952. — Т. 22. — С. 506.
13. *Климантович Ю. Л.* Статистическая теория открытых систем. — М.: ЯНУС-К, 1995.
14. *Климантович Ю. Л.* // УФН. — 1992. — Т. 167. — С. 23.
15. *Алексеев Б. В.* Математическая кинетика реагирующих газов. — М.: Наука, 1982.
16. *Найфе А. Х.* Метод возмущений. — М.: Мир, 1976.
17. *Тамм И. Е.* Электричество. — М.: Академкнига, 1949. — 420 с.
18. *Алексеев Б. В.*, *Котельников В. А.* Зондовый метод диагностики плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 239 с.
19. *Котельников В. А.*, *Гурина Т. А.*, *Демков В. П.*, *Попов Г. А.* Математическое моделирование электродинамики летательного аппарата в пристеночной плазме. — М.: Изд-во Нац. акад. прикл. наук, 1999. — 265 с.
20. *Демков В. П.* Математическое моделирование процессов переноса в плазме с учетом поверхностных эффектов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1989.
21. *Давыдов Ю. М.* Исследование трансзвуковых и сверхзвуковых течений методом крупных частиц // Исследование современных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1974. — С. 83–181.
22. *Давыдов Ю. М.* Численный эксперимент в гидродинамике по исследованию срывных вязких потоков методом крупных частиц // Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979. — С. 227–239.
23. *Давыдов Ю. М.* Дифференциальные приближения и представления разностных схем. — М.: МФТИ, 1981. — 131 с.

24. *Белоцерковский О. М.*, *Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1982. — 392 с.
25. *Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц // Математическая энциклопедия. — М.: Сов. Энциклопедия, 1985. — Т. 3. — С. 125–129.
26. *Новиков В. Н.* Применение методов математического моделирования для решения зондовых задач: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1979. — 117 с.
27. *Алексеев Б. В.*, *Новиков В. Н.* Эволюция параметров плазмы в приэлектродной области сферического зонда // Теплофизика высоких температур. — 1984. — Т. 22, №4. — С. 814–818.
28. *Форсайт Дж.*, *Малькольм М.*, *Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
29. *Бахвалов Н. С.*, *Жидков Н. П.*, *Кобельков Г. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
30. *Колмогоров А. П.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
31. *Чан П.*, *Телбот Л.*, *Турян К.* Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. (Теория и применение). — М.: Мир, 1978. — 202 с.
32. *Петерсон Е.*, *Телбот Л.* Измерение одиночными и двойными электростатическими зондами в бесстолкновительной плазме // Ракетная техника и космонавтика. — 1970. — Т. 8, №12. — С. 126–132.
33. *Гурина Т. А.* Потоки заряженных частиц и структура возмущенной зоны в окрестности заряженных тел, движущихся в плазме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МАИ, 1987. — 158 с.
34. *Давыдов Ю. М.*, *Скотников В. П.* Метод крупных частиц: вопросы аппроксимации, схемной вязкости и устойчивости. — М.: ВЦ АН СССР, 1978. — 71 с.
35. *Давыдов Ю. М.*, *Скотников В. П.* Исследование дробных ячеек в методе крупных частиц. — М.: ВЦ АН СССР, 1978. — 71 с.
36. *Котельников М. В.* Функции распределения заряженных частиц вблизи цилиндрического тела в потоке бесстолкновительной плазмы в магнитном поле // ТВТ. — 2008. — Т. 46, №4. — С. 23–26.
37. *Киреев В. И.*, *Пантелеев А. В.* Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2006. — 376 с.
38. *Hester S. D.*, *Sonin A. A.* // Rarefied gas dynamics: 6-th symposium / Ed. by L. Trilling, Y. Wachman. — V. 11. — New York: Academic Press, 1966. — No. 4. — P. 1659–1670.
39. *Котельников М. В.* Математическое моделирование обтекания космического летательного аппарата бесстолкновительной плазмой // Машиностроение и инженерное образование. — 2008. — №1. — С. 15–20.
40. *Кубарев Ю. В.* Полеты на Марс, электрореактивные двигатели настоящего и будущего // Наука и технологии в промышленности. — 2006. — №2. — С. 19–35.
41. *Кашеваров А. В.* Электрические зонды в медленно движущейся и покоящейся столкновительной плазме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Жуковский, 2005. — 204 с.
42. *Франк–Каменецкий Д. А.* Лекции по физике плазмы. — М.: Атомиздат, 1968. — 286 с.
43. *Boyd R. L. F.* // Proc. Phys. Soc. (London), B64, 795 (1951).

44. *Захарова В. М.*, *Каган Ю. М.*, *Мустафин К. М.*, *Перель В. И.* // ЖТФ. — 1960. — Т. 30, №4. — С. 442–449.
45. *Су*, *Лэм*. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую и топливные элементы // ВИНИТИ, В(25), 21 (1964).
46. *Коэн*. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую и топливные элементы // ВИНИТИ, В(25), 42 (1964).
47. *Коэн*. Ракетная техника и космонавтика, №41, 75, 1967.
48. *Баум*, *Чепкис*. Ракетная техника и космонавтика, №6, 105, (1970).
49. *Коэн*, *Швейтцер*. Ракетная техника и космонавтика, №2, 128, (1968).
50. *Thomas D. L.* // Phys. Fluides. — 1969. — V. 12. — P. 356.
51. *Jou W. H.*, *Cheng S. I.* // Phys. Fluides. — 1971. — V. 14. — P. 2144.
52. *Лем*. // Ракетная техника и космонавтика, №2, 43, 1964.
53. *Lam S. H.* // AIAA Paper №65-543, San Francisco, 1965.
54. *Су*. Ракетная техника и космонавтика, №5, 52, (1965).
55. *Stahl N.*, *Su C. H.* // Phys. Fluides. — 1971. — V. 14. — P. 1366.
56. *Чан*. Ракетная техника и космонавтика, №5, 22, 1965.
57. *Burke A. F.* // AIAA, Paper №68-166, 6th Aerospace Sciences Meeting, New York, 1968.
58. *Russo A. J.* Sandia Laboratories Rep. №SC-RR-72-0111, Albuquerque, New Mexico, 1972.
59. *Chung P. M.* // Phys. Fluides. — 1964. — V. 7. — P. 110.
60. *Бойер*, *Турян*. Ракетная техника и космонавтика, №12, 143, (1972).
61. *Lederman S.*, *Avidor J.* // Izrael J. Tech., 9 (1971).
62. *Шерфман*, *Бредфелдт*. Ракетная техника и космонавтика, №4, 67, (1970).
63. *Давыдов Ю. М.* Исследование трансзвуковых и сверхзвуковых течений методом крупных частиц. // Исследование современных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1974. — С. 83–181.
64. *Давыдов Ю. М.* Численный эксперимент в гидродинамике по исследованию срывных вязких потоков методом крупных частиц // Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979. — С. 227–239.
65. *Белоцерковский О. М.*, *Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике: Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1982. — 392 с.
66. *Дьяконов Ю. Н.*, *Пчелкина Л. В.*, *Сандомирская И. Д.* Сверхзвуковое обтекание затупленных тел / Под ред. Г. С. Рослякова. — М.: Изд. МГУ, 1971.
67. NASA Research and Technology, NASA Ames Research Centre, 1998 Technical Memorandum NASA/TM–1999-208768.
68. *Годунов С. К.*, *Забродин А. В.*, *Иванов М. Я.*, *Крайко А. Н.*, *Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1976. — 400 с.
69. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. — М.: Наука, 1976.
70. *Котельников В. А.* Зондовые исследования плазменных потоков: Дис. ... канд. техн. наук. — М.: МАИ, 1965. — 110 с.
71. *Алексеев Б. В.*, *Котельников В. А.*, *Новиков В. Н.* Математическое моделирование зондовых измерений // Численные методы механики сплошной среды / Под ред. Н. Н. Яненко. — Новосибирск: 1979. — Т. 10, №3. — С. 3–6.

72. *Persson K. B.* // Phys-Fluids. — 1962. — V. 5. — P. 1625.
73. *Бабаков А. В.* О возможности численного моделирования нестационарных вихревых структур в ближнем следе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1988. — Т. 28, №2.
74. *Ульданов С. В.* Математическое моделирование процессов переноса вблизи заряженных тел в турбулентном потоке плазмы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., МАИ, 2001. — 102 с.
75. *Бенилов М. С.*, *Косов В. Ф.*, *Рогов Б. В.*, *Синельщиков В. Д.* Токи насыщения на электрические зонды в потоках химически реагирующей плазмы с разными сортами ионов // ТВТ. — 1987. — Т. 25, №3. — С. 573–981.
76. *Бенилов М. С.* Теория электрических зондов в потоке слабоионизованной плазмы высокого давления // ТВТ. — 1998. — Т. 26, №5. — С. 140.
77. Термодинамические свойства индивидуальных веществ: Справочное издание. В 4-х т. / Л. В. Гурвич, И. В. Вейц, В. А. Медведев и др. — М.: Наука, 1978.
78. *Волков В. А.*, *Мусин В. Р.*, *Прохоров М. Б.* Расчет температуры и равновесного состава продуктов сгорания при заданных плотности и внутренней энергии смеси // Сб. научн. тр. — М.: МАИ, 1983. — С. 62–67.
79. *Rosenbluth M. N.*, *MaDonald W.*, *Judd D.* Fokker-Planck equation for an inverse-square forse // Phys. Rev. — 1957. — V. 107. — P. 1–6.
80. *Полетаев Д. Л.* Разработка кинетических моделей и численный анализ малорадиоактивного амбиполярного реактора: Дис. ... канд. техн. наук. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1991. — 184 с.
81. *Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц для задач газовой динамики: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: 1970. — 183 с.
82. *Давыдов Ю. М.* Дифференциальные приближения и представления разностных схем. — М.: МФТИ, 1981. — 131 с.
83. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 329 с.
84. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
85. *Пирумов У. Г.*, *Росляков Г. С.* Газовая динамика сопел. — М.: Наука, 1990. — 386 с.
86. *Самарский А. А.*, *Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1977.
87. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.
88. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994. — 526 с.
89. *Gavriliok V. N.*, *Denisov O. P.*, *Nakonechny V. P.*, *Odintsov E. V.*, *Sergienko A. A.*, *Sobachkin A. A.* Numerical Similation of Working Processes in Rocket Engine Combustion Chamber // IAF-93-S.463, October, 1993, Graz, Austria.
90. *Krulle G.*, *Gavriliouk V.*, *Schley C.-A.*, *Sobachkin A.* Numerical simulation technology of aerodynamic processes and its applications in rocket engine problems // 45th Congress of the Int. Astronautical Federation, Jerusalem, Israel, October 9–14, 1994, IAF-94-S2.414. — P. 1–12.
91. *Hagemann G.*, *Schley C.-A.*, *Odintsov E.*, *Sobatchkine A.* Nozzle flow field analysis with particular regard to 3D-plug-claster configurations. // 32nd

AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf., Lake Buena Vista, FL, July 1–3, 1996, AIAA-96-2954. — P. 1–16.

92. *Schley C.-A.*, *Deplanque J.*, *Merkle C.*, *Duthoit V.*, *Gavriliouk V.* Fundamental and technological aspects of combustion chamber modelling // Proc. 3rd Int. Symp. Space Propulsion, Beijing, China, August 11–13, 1997. — P. 1–15.
93. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. — М.: Мир, 1981. — 319 с.
94. *Кудрявцева И. А.*, *Пантелеев А. В.* Применение метода крупных частиц для анализа поведения двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений между заряженными частицами // Научный Вестник МГТУ ГА. Сер. Математика и физика. — М: МГТУ ГА. — №114. — С. 67–74.
95. *Кудрявцева И. А.* Применение метода Монте-Карло для решения задачи зондовой диагностики плазмы в случае сферического зонда // Материалы VII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2008), 24–31 мая 2008 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2008. — С. 255–256.
96. *Котельников В. А.*, *Котельников М. В.* Цилиндрический электрод в потоке слабо ионизованного столкновительного газа в магнитном поле // ДАН. — 2007. — Т. 14, №6. — С. 1–5.
97. *Монин А. С.*, *Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1965. — Т. 1. — 640 с.
98. *Бенилов М. С.*, *Рогов Б. В.*, *Тирский Г. А.* Теоретическое определение ионного тока насыщения на электрические зонды в дозвуковых потоках плазмы // ТВТ. — 1981. — Т. 19, №5. — С. 1031–1039.
99. *Бенилов М. С.*, *Рогов Б. В.*, *Тирский Г. А.* Об ионном токе насыщения на электрический зонд в медленно движущейся плазме // ПМТФ. — 1982. — №3. — С. 5–13.
100. *Кашеваров А. В.* Вольт-амперная характеристика цилиндрического зонда Леигмюра в плазме с присадкой // ТВТ. — 1994. — Т. 32, №1. — С. 12–15.
101. *Котельников М. В.* Вольт-амперные характеристики цилиндрического зонда в потоке столкновительной и бесстолкновительной плазмы // ТВТ. — 2008. — Т. 46, №5. — С. 28–33.
102. *Котельников М. В.*, *Котельников В. А.* Цилиндрический зонд в потоке медленно движущейся столкновительной плазмы // ТВТ. — 2008. — Т. 46, №3. — С. 65–71.
103. *Крюкова С. Г.* Некоторые особенности обтекания затупленного полуконуса и полуконуса с крыльями в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. — 1981. — Вып. 2111.
104. *Черепанов В. В.* Математическое моделирование динамики ионизованного газа в окрестности заряженных тел: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МАИ, 1984. — 161 с.
105. *Langmuir I.* Collected Works of Irwing Langmuir // Phys. review. — 1926. — V. 26. — P. 727.
106. *Bohm D.*, *Burhop P. H. E.*, *Massey H. S. M.* The characteristics of electrical discharges in magnetic fields / Ed. by A. Guthrie, R. K. Wakerling. Mebianetull. — 1949. — Chap. 2, No. 4. — P. 360–366.

107. *Laframboise J. G.* Theory of cylindrical and spherical Langmuir probes in collisionless plasma at rest // Rarefied Gas Danamics. — 1966. — V. 11, No. 4. — P. 22.
108. *Котельников М. В.* Механика и электродинамика пристеночной плазмы: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — М.: Изд-во МАИ, 2008. — 276 с.
109. *Котельников В. А.* О пределах применимости формулы Бома // Инж.-физ. журн. — 1984. — Т. 47, №4. — С. 639–642.
110. *Демидов В. И.*, *Колоколов Н. Б.*, *Кудрявцев А. А.* Зондовые методы исследования низкотемпературной плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 239 с.
111. *Иванов Ю. А.*, *Лебедев Ю. А.*, *Полак Л. С.* Методы контактной диагностики в неравновесной плазме. — М.: Наука, 1981. — 192 с.
112. *Langmuir I.*, *Mott-Smith H. M.* // Phys. Rev. — 1926. — V. 28. — P. 727.
113. *Козубский К. Н.*, *Мурашко В. М.*, *Рылов Ю. П.*, *Трифонов Ю. В.*, *Ходненко В. П.*, *Ким В.*, *Попов Г. А.*, *Обухов В. А.* СПД работают в космосе // Физика плазмы. — 2003. — Т. 29, №3. — С. 277–292.
114. *Котельников М. В.*, *Гаранин С. Б.* Взаимное влияние плоских пристеночных электродов, обтекаемых плазмой // Мат. моделирование. — 2003. — Т. 15. — С. 64–68.
115. *Котельников М. В.*, *Прокопьев Т. В.* Нестационарный электрический зонд: теория и применение // Тезисы докладов 34-й Международной конференции по физике плазмы и УТС, Звенигород, 2007 г. — С. 199.
116. *Котельников М. В.*, *Кубарев Ю. В.* Зондовый метод диагностики нестационарной плазмы // Изв. Вузов. Электроника. — 1997. — №1. — С. 103–106.
117. *Котельников М. В.*, *Котельников В. А.*, *Кубарев Ю. В.* Применение плоского зонда для диагностики потоков плазмы // Изв. Вузов. Электроника. — 1998. — №4. — С. 346–349.
118. *Crofton M.* A Comprehensive Test and Evaluation Program for the UK-10 Ion Engine // Proceedings of the 23rd International electric Propulsion Conference, Seattle, 1993. — P. 956–963.
119. *Kim V.*, *Kozubsky K. N.*, *Murashko V. M.*, *Semenkin A. V.* History of the Hall Thrusters Development in USSR — paper IEPC-2007-142 // 30th International Electric Propulsion Conference, September 17–20, 2007, Florence, Italy.
120. *Абдюханов М. А.*, *Гришин С. Д.*, *Ерофеев В. С. и др.* Ионные ускорители с анодным слоем. Обзор. — М.: ГОНТИ №1, 1975. — С. 5–181.
121. *Котельников М. В.*, *Ким В. П.*, *Сидоренко Е. К.* Зондовые измерения в потоке разреженной плазмы, истекающей из стационарного плазменного двигателя // Материалы XVI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009), 25–31 мая 2009 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. — С. 112–114.
122. *Гордеев О. А.*, *Шахатов В. А.* Исследование плазмы тлеющего и контрагированного разряда в азоте методами спектроскопии КАРС, оптической интерферометрии и численного моделирования // ЖТФ. — 2005. — Т. 75. — Вып. 12. — С. 64–68.

123. *Котельников В. А.* К расчету плотности ионного тока на зонд в плотной слабоионизованной плазмы при условии тонкого столкновительного слоя объемного заряда // Инж.-физ. журн. — 1984. — Т. 47, №2. — С. 322–323.
124. *Котельников М. В.*, *Гаранин С. Б.* Вольт-амперные характеристики цилиндрического зонда в поперечном потоке плотной слабоионизованной плазмы // Электронный журнал МАИ. Сер. Механика. — 2007.
125. *Чан.* // Ракетная техника и космонавтика, №5, 22, 1965.
126. *Егорова З. М.*, *Кашеваров А. В.*, *Фомина Е. М.*, *Цхай Н. С.* Об измерении концентрации заряженных частиц цилиндрическим зондом Ленгмюра в плазме пламени // ТВТ. — 1988. — Т. 26, №3. — С. 577–581.
127. *Егорова З. М.*, *Кашеваров А. В.*, *Цхай Н. С.* Об ионном токе насыщения на электрические зонды в плазме пламени со щелочной присадкой // ТВТ. — 1992. — Т. 30, №3. — С. 448–456.
128. *Кашеваров А. В.* Вольт-амперная характеристика цилиндрического зонда Ленгмюра в плазме с присадкой // ТВТ. — 1994. — Т. 32, №1. — С. 12.
129. *Кашеваров А. В.* О зондовых измерениях в плазме пламени // ТВТ. — 1992. — Т. 30, №6. — С. 1220–1223.
130. *Шаньков А. В.* Математическое моделирование процессов переноса вблизи плоских пристеночных зондов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МАИ, 1955. — 218 с.
131. *Kotel'nikov M. V.* Cylindrical body in a collisionless plasma flow // Technical Physics. — 2009. — V. 54, No. 3. — P. 428–430.
132. *Kotel'nikov M. V.* Cylindrical body in a collisionless plasma flow. — MAIK Nauka/Interperiodica distributed exclusively by Springer Science + Business Media LLC, 2009.
133. *Рид Р.*, *Праусниц Дж.*, *Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. — Л.: Химия, 1982. — 592 с.
134. *Прокопов Г. П.* Аппроксимация табличных уравнений состояния для расчета газодинамических задач. — Препринт / ИПМ. №80. — М., 2004.
135. *Гидаспов В. Ю.* Вычислительный алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва в равновесно-реагирующем газе // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, №8. — С. 64–76.
136. *Волков В. А.*, *Гаврилюк В. Н.*, *Гидаспов В. Ю.*, *Хохлов А. В.* Численное моделирование гиперзвукового обтекания тел воздухом с учетом равновесной диссоциации // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, №12. — С. 70–80.
137. *Рябин В. А.*, *Остроумов М. А.*, *Свит Т. Ф.* Термодинамические свойства веществ. Справочник. — Л.: Химия, 1977. — 392 с.
138. Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник. Т. 2: Физико-химическая кинетика и термодинамика / Под ред. Г. Г. Черного и С. А. Лосева. — М.: Научно-издательский центр механики, 2002. — 368 с.

Научное издание

КОТЕЛЬНИКОВ Вадим Алексеевич
КОТЕЛЬНИКОВ Михаил Вадимович
ГИДАСПОВ Владимир Юрьевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКАМИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ И БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Редактор *О.В. Максимова*
Оригинал-макет: *А.А. Пярнпуу*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 03.09.10. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж 100 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-1253-6