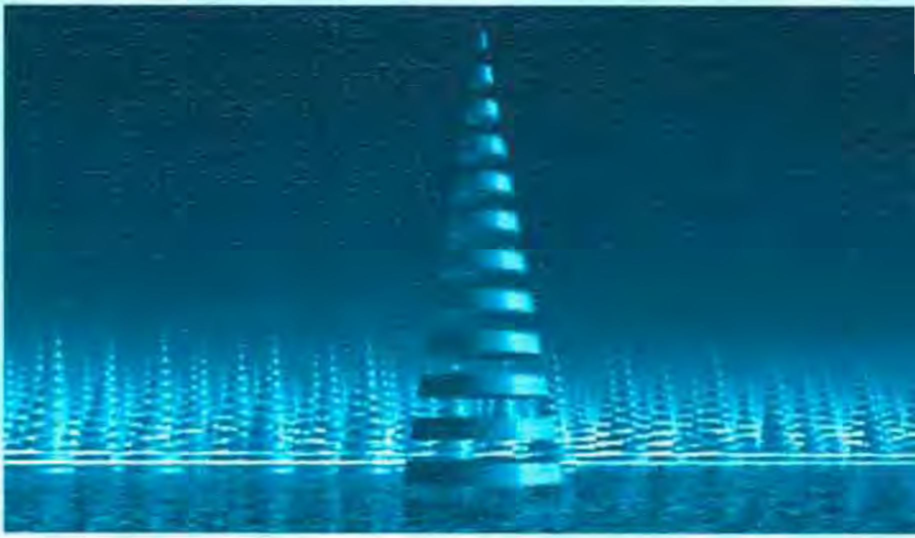
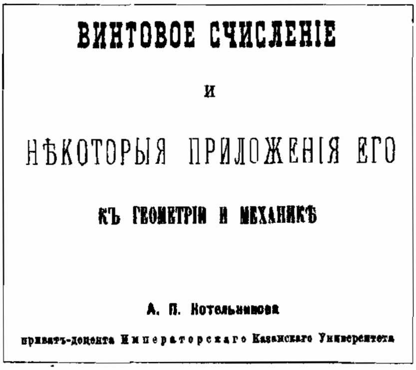
А. П. Котельников

ВИНТОВОЕ СЧИСЛЕНИЕ

И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЕГО К ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ



URSS



ВИНТОВОЕ СЧИСЛЕНІЕ

и

НѢКОТОРЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ЕГО

КЪ ГЕОМЕТРІИ И МЕХАНИКѢ

А. П. Котельникова

приватъ-доцента Императорскаго Казанскаго Университета

А. П. Котельников

ВИНТОВОЕ СЧИСЛЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЕГО К ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ

Издание второе, стереотипное

URSS
МОСКВА

ББК 22.21 22.151.4

Котельников Александр Петрович

Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике.
Изд. 2, стереотипное. — М.: КомКнига, 2006. — 224 с.

Автор настоящей книги — известный российский математик А. П. Котельников (1865–1944) — ввел понятие векторов особого рода, так называемых «винтов», тесно связанных с комплексными числами. В книге описан математический аппарат винтового исчисления, аналогичный векторному, что позволило обосновать исходные положения механики независимо от типа неевклидова пространства и найти важные геометрические приложения.

Книга будет интересна математикам и механикам — научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам естественных вузов.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Бумага типографская. Печ. л. 14.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:
ISBN 5–484–00657–0
Соотв. 13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:
ISBN 978–5–484–00657–1

422406 ID 39574
9785484006571

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Нѣкоторые типы комплексныхъ чиселъ тѣсно связаны съ геометрическими построеніями, играющими важную роль въ механикѣ. Къ такого рода типамъ принадлежатъ комплексныя числа, введенныя впервые въ науку англійскимъ математикомъ Clifford'омъ,—числа, основныя операціи надъ которыми соотвѣтствуютъ основнымъ построеніямъ теоріи винтовъ Ball'я. Наша задача—развить полнѣе, чѣмъ это было сдѣлано до сихъ поръ, связь, существующую между числами Clifford'а съ одной стороны и теоріей Ball'я—съ другой, и воспользоваться ей для доказательства нѣкоторыхъ теоремъ геометріи и механики.

Теорія винтовъ, подготовленная работами Poinsot, Chasles'я, Möbius'а, Plücker'а и др. (историческій очеркъ ея развитія см. И. Занчевскій „Теорія винтовъ", Зап. Мат. Отд. Нов. Общ. Ест., IX) и возведенная на степень стройнаго ученія Ball'емъ, обязана своимъ успѣхомъ, главнымъ образомъ, введенію въ механику твердаго тѣла понятія о винтѣ. Методъ, которымъ пользуется Ball въ своей теоріи (систематическое изложеніе работъ Ball'я см. H. Gravelius „Theoretische Mechanik starrer Systeme") основывается на слѣдующихъ 4-хъ построеніяхъ.

1. Сложеніе динамъ (винтовъ).

2. Построеніе относительнаго момента двухъ динамъ—величины пропорціональной работѣ, которую производитъ система силъ, характеризуемая одной изъ динамъ при безконечно маломъ перемѣщеніи, опредѣляемомъ другой динамой.

3. Увеличеніе параметра динамы на постоянную величину.

4. Умноженіе интенсивности (главнаго вектора) динамы на постоянную величину.

Важная роль первыхъ двухъ построеній обусловливается уже тѣмъ, что они служатъ для рѣшенія двухъ основныхъ вопросовъ кинематики и динамики твердаго тѣла. Помимо этого они обладаютъ, однако, нѣкоторыми замѣчательными свойствами, которыхъ однихъ уже было бы достаточно для того, чтобы можно было напередъ предвидѣть ихъ важное значеніе для всей теоріи винтовъ. Дѣйствительно, первая операція коммутативна и ассоціативна, т. е., если мы назовемъ слагаемыя динамы черезъ α, β, γ, то $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ и $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

Что касается второй, то, означивъ черезъ $[\alpha,\beta]$ относительный моментъ динамъ α и β, мы будемъ имѣть:

$$[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha],\quad [(\alpha+\beta),\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma] \text{ и }$$
$$[\alpha,(\beta+\gamma)]=[\alpha,\beta]+[\alpha,\gamma],$$

откуда видимъ, что относительный моментъ обладаетъ свойствомъ произведенія и операція его построенія — свойствомъ операціи умноженія: она коммутативна и по отношенію къ операціи сложенія дистрибутивна.

Подобнымъ же образомъ, если a есть нѣкоторая величина, и символомъ $[\alpha,a]$ мы означимъ динаму, параметръ которой болѣе параметра α на величину a, то одну изъ теоремъ Ball'я (Transactions of the Royal Irish Academy, XXV, § 82) мы можемъ выразить равенствомъ $[(\alpha+\beta),a]=[\alpha,a]+[\beta,a]$, изъ котораго слѣдуетъ, что операція увеличенія параметра динамы на нѣкоторую величину носитъ характеръ умноженія динамы на постоянную. Такой же характеръ имѣетъ, наконецъ, и четвертая операція.

Т. о. *сущность всего метода Ball'я составляютъ четыре операціи, изъ которыхъ одна аналогична сложенію, а три остальныхъ умноженію динамъ*: одну на другую, или динамы на число. Однако Ball, на сколько намъ извѣстно, нигдѣ не указываетъ аналогіи построеній 2-го и 3-го съ операціей умноженія и нигдѣ не задается вопросомъ о разысканіи общаго вида операцій такого характера.

Дальнѣйшій шагъ въ вопросѣ объ основныхъ операціяхъ надъ динамами (винтами) дѣлаетъ Clifford въ небольшомъ, но весьма богатомъ новыми идеями мемуарѣ „Preliminary Sketh of Biquaternions“ (1873). Первые два параграфа этого мемуара Clifford посвящаетъ операціи дѣленія двухъ моторовъ, при чемъ моторомъ онъ называетъ совокупность геометрическихъ величинъ, помощью которыхъ мы можемъ характеризовать систему силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, т. е. ту совокупность, которую Ball называетъ динамой, заимствуя этотъ терминъ у Plucker'а [1]). Clifford показываетъ, что подобно тому, какъ частное отъ дѣленія двухъ векторовъ выражается кватерніономъ, такъ *изученіе операціи дѣленія двухъ моторовъ приводитъ насъ къ коплексному выраженію* $q+\omega r$, *гдѣ* q *и* r *суть кватерніоны, а символъ* ω *обладаетъ свойствомъ* $\omega^2=0$, выраженію, которое онъ и называетъ бикватерніономъ.

Формулировавъ этотъ результатъ, Clifford оставляетъ его безъ дальнѣйшаго развитія и въ слѣдующихъ 3-хъ параграфахъ переходитъ къ эллиптическому пространству. Въ сжатомъ очеркѣ, нѣсколькими основными построеніями и теоремами, замѣчательными по своему изяществу и симметріи, онъ кладетъ основаніе геометріи и механикѣ твердаго тѣла (теоріи винтовъ) для эллиптическаго пространства. Онъ показываетъ между прочимъ, что *частное отъ дѣленія двухъ моторовъ для этого пространства выразится бикватерніономъ* $q+\omega r$, *гдѣ* ω *есть символъ, обладающій свойствомъ* $\omega^2=1$.

Къ вопросамъ, затронутымъ въ этомъ мемуарѣ, Clifford возвращается снова и посвящаетъ имъ еще пять небольшихъ замѣтокъ „Motion of a Solid in Elliptic Space“, „Further Note on Biquaternions“, „Notes on Biquaternions“, „On the Theory of Screws in a space of Constant Positive Curvature“, „Notes“, (Papers p. 642). Всѣ онѣ относятся къ геометріи и механикѣ эллиптическаго пространства. Вторая, четвертая и пятая служатъ поясненіемъ къ его первому мемуару, въ первой выводятся диф. ур. движенія твердаго тѣла, и наконецъ въ третьей рѣшаются задачи: построить ось мотора и сложить два мотора съ различными параметрами и, пересѣкающимися подъ прямымъ угломъ, осями. Т. о. Clifford сосредоточиваетъ все свое вниманіе на развитіи второй части „Preliminary Sketh“—механики и геометріи эллиптическаго пространства и совершенно оставляетъ въ сторонѣ развитіе первой части и вопроса объ основныхъ операціяхъ надъ винтами параболическаго или эллиптическаго пространствъ.

---

[1]) Въ чисто геометрическомъ изложеніи теоріи винтовъ намъ кажется удобнѣе вмѣсто терминовъ «динама» или «моторъ» употреблять терминъ «бивекторъ», введенный Hamilton'омъ.

Къ неевклидовымъ же пространствамъ относятся и работы другихъ двухъ математиковъ, занимавшихся теоріей бикватерніоновъ: H. Cox'а и A. Buchheim'а. Т. к. въ нашу задачу не входитъ разсмотрѣніе теоріи винтовъ для неевклидовыхъ пространствъ, то мы и упомянемъ объ этихъ работахъ лишь по стольку по сколько авторы касаются въ нихъ теоріи бикватерніоновъ. H. Cox (Transactions of the Cambridge Phil. S. XIII, 1883, „On the Application of Quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of Uniform Space“), пользуясь методомъ Grassmmann'а, дополняетъ изслѣдованія Clifford'а, распространяя ихъ на пространство Лобачевскаго, и показываетъ, что *частное отъ дѣленія двухъ моторовъ для этого пространства должно выражаться бикватерніономъ* $q+\omega r$, *гдѣ* $\omega^2=-1$, т. е. такимъ бикватерніономъ, который съ чисто аналитической стороны безъ всякаго отношенія его къ геометріи Лобачевскаго разсматривалъ уже Hamilton (Elements of Quaternions, p. 218, 219). Изъ изслѣдованій H. Cox'а и Clifford'а обнаруживается т. о. замѣчательная связь между тремя типами пространствъ съ постоянной кривизной и тремя типами бикватерніоновъ $q+\omega r$. Для эллиптическаго пространства $\omega^2=1$, для параболическаго $\omega^2=0$ и для гиперболическаго $\omega^2=-1$, соотвѣтственно чему и бикватерніоны этихъ типовъ мы назовемъ эллиптическимъ, параболическимъ и гиперболическимъ.

A. Buchheim въ мемуарѣ „A memoir on Biquaternions“ (Am. Journal, VII, 1885) задается цѣлью *развить теорію бикватерніоновъ всѣхъ трехъ типовъ*. Въ первой части онъ занимается аналитической теоріей бикватерніоновъ и даетъ рядъ формулъ, которыя одинаково приложимы ко всѣмъ тремъ типамъ. Онъ вводитъ нѣсколько новыхъ символовъ и понятій, связанныхъ съ понятіемъ о бикватерніонѣ; одному изъ нихъ—символу e онъ придаетъ особо важное значеніе: „этотъ символъ опредѣляется ур. $\omega^2=e^2$, въ эллиптическомъ пространствѣ $e=1$, въ параболическомъ $e=o$, и въ гиперболическомъ $e=\sqrt{-1}$; эта величина въ дѣйствительности обратна радіусу кривизны пространствъ: она равняется величинѣ $1/k$, которая встрѣчается въ формулахъ Лобачевскаго; только благодаря введенію этой скаларной величины формулы становятся приложимыми къ пространствамъ всѣхъ трехъ типовъ". Во второй части онъ переходитъ къ геометрическимъ приложеніямъ бикватерніоновъ. Онъ даетъ сначала нѣсколько формулъ метрической геометріи для неевклидовыхъ пространствъ, рѣшаетъ нѣсколько основныхъ задачъ (черезъ двѣ точки провести прямую линію, найти линію пересѣченія двухъ плоскостей, условіе пересѣченія двухъ линій и пр.), причемъ, пользуясь однородными координатами, бикватерніономъ $q+\omega q'$ онъ представляетъ точку, если $Vq=Sq'=0$.—плоскость, если $Sq=Vq'=0$ и винтъ (прямую), если $Sq=Sq'=0$, затѣмъ выводитъ ур. цилиндроида, и наконецъ переходитъ къ развитію теоріи параллельныхъ Clifford'а.

Въ четырехъ замѣткахъ „Theory of Screws in Elliptic Space" (Proceedings of the London Math. Society. Vol. XV, XVI, XVII, XVIII; 1884, 85, 86 и 87) A. Buchheim доказываетъ теоремы Clifford'а и изучаетъ безконечно малыя и конечныя перемѣщенія твердаго тѣла для неевклидовыхъ пространствъ, пользуясь отчасти методомъ Grassmann'а, отчасти бикватерніонами.

Наконецъ намъ остается еще упомянуть о мемуарѣ Study „Von Bewegungen und Umlegungen" (M. A., XXXIX Band., 1891), въ которомъ авторъ указываетъ на *связь параболическаго бикватерніона съ группой движеній эвклидова пространства* и пользуется этой связью для изученія конечныхъ перемѣщеній и отраженій точекъ, прямыхъ и плоскостей.

Изъ приведеннаго краткаго историческаго обзора явствуетъ, что литература по теоріи бикватерніоновъ и вопросу объ основныхъ операціяхъ надъ винтами не велика и что теорія бикватерніоновъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ требуетъ дальнѣйшей разработки и улучшеній.

Дѣйствительно, въ теоріи бикватерніоновъ нужно различать двѣ стороны: одну—аналитическую, другую—геометрическую. Что касается послѣдней, то, слѣдуя примѣру Ball'я, который, создавая теорію винтовъ, представляющую первый шагъ въ обобщеніи теоріи векторовъ, постоянно имѣлъ передъ собой прекрасный мемуаръ Poinsot (Theorie nouvelle....), мы должны при развитіи теоріи бикватерніоновъ—обобщенія теоріи кватерніоновъ—имѣть въ виду классическія работы Hamilton'а. Но на первомъ планѣ своей теоріи Hamilton ставитъ понятіе о векторѣ, основныя операціи надъ векторами и основательное изученіе ихъ геометрическихъ свойствъ. Совершенно также, въ основаніе всей теоріи бикватерніоновъ должно быть положено детальное изученіе основныхъ операцій: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія бивекторовъ и ихъ геометрическихъ свойствъ. Между тѣмъ, въ выше упомянутыхъ работахъ, исключая мемуара „Preliminary Sketh“, замѣтокъ, служащихъ къ его поясненію, и работы H. Cox‘а эти вопросы совершенно игнорируются.

Точно также и аналитическая сторона требуетъ по нашему мнѣнію дальнѣйшей обработки. Въ этомъ отношеніи введеніе въ теорію бикватерніоновъ понятія о функціяхъ комплексныхъ чиселъ вида $a+\omega b$, гдѣ $\omega^2=1$, или 0, или—1, должно существенно упростить аналитическую теорію, сведя нѣкоторые отдѣлы ея на теорію кватерніоновъ съ одной стороны и теорію функцій отъ комплексныхъ чиселъ упомянутыхъ типовъ—съ другой.

Сдѣлать указанныя дополненія въ теоріи параболическаго бикватерніона, тѣснѣе связавъ ее съ теоріей винтовъ Ball‘я и составляетъ главную задачу первой части этой работы. Къ понятію о параболическомъ бикватерніонѣ мы были приведены независимо отъ выше указанныхъ работъ Clifford‘a, Buchheim‘a, Cox‘a и Study, причемъ для насъ исходной точной служилъ анализъ операціи умноженія, а не операція дѣленія, какъ для Clifford‘a. Обобщая умноженіе векторовъ на случай бивекторовъ, мы руководимся принципомъ Hankel‘я: устойчивости формальныхъ законовъ операцій (Princip der Permanenz formaler Gesetze, Hankel „Theorie der Complexen Zahlensysteme“) и приходимъ къ заключенію, что произведеніе двухъ бивекторовъ выражается бикватерніономъ.

Анализъ операціи умноженія и составляетъ содержаніе первой главы. Изъ нея мы видимъ между прочимъ, что операцій умноженія, подчиняющихся извѣстнымъ условіямъ, существуетъ безчисленное множество, но результаты ихъ легко получаются изъ тѣхъ результатовъ, которые выражаются биквартерніономъ.

Во второй главѣ мы развиваемъ аналитическую теорію параболическаго бикватерніона, разсматривая его какъ кватерніонъ, у котораго коэффиціентами служатъ комплексныя числа $a+\omega b, \omega^2=0$. Весьма существеннымъ для теоріи параболическаго бикватерніона намъ кажется введеніе понятія о функціи комплексныхъ чиселъ этого вида. Только благодаря ему мы имѣемъ возможность представить формулы теоріи бикватерніоновъ съ желаемой простотой и изяществомъ въ видѣ тожественномъ съ формулами теоріи кватерніоновъ и т. о. формулировать общее положеніе: всѣ безъ исключенія формулы теоріи кватерніоновъ могутъ быть разсматриваемы какъ формулы теоріи бикватерніоновъ.

Третья глава посвящена болѣе подробному изученію геом. свойствъ операціи умноженія и дѣленія бивекторовъ и бикватерніоновъ. Параграфы, въ которыхъ идетъ рѣчь о дѣленіи бивекторовъ представляютъ развитіе первыхъ двухъ §§ „Preliminary Sketh“ въ духѣ „Elements of Quaternions“ Hamilton'a.

Изъ тожества формулъ теоріи кватерніоновъ съ формулами теоріи бикватерніоновъ и возможности интепретировать эти послѣднія какъ формулы винтоваго счисленія вытекаетъ весьма общая теорема, формулированная нами въ началѣ первой главы второй части; изъ нея между прочимъ слѣдуетъ, что когда мы будемъ въ формулахъ геометріи или механики эвклидова пространства, элементомъ котораго служитъ точка, считать всѣ числа коплексными вида $a + \omega b (\omega^2 = 0)$, то всѣ эти формулы могутъ быть интепретированы какъ формулы геометріи или механики пространства шести измѣреній, элементомъ котораго служитъ бивекторъ. Развитіе этого положенія и составляетъ первую главу второй части.

Во второй главѣ мы переходимъ къ приложенію винтоваго счисленія къ изученію группъ винтовъ (въ смыслѣ Ball'я) и показываемъ связь бикватерніоновъ съ группой (въ смыслѣ S. Lie) эвклидовыхъ движеній.

Наконецъ въ третьей главѣ мы излагаемъ свойства винтовыхъ интеграловъ ур. механики и изслѣдуемъ отношеніе ихъ къ подгруппамъ движеній эвклидова пространства.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Глава I.

1. Движенiе твердаго тѣла въ теченiи безконечно малаго промежутка времени есть винтовое движенiе, такъ что мы можемъ воспроизвести его, если свяжемъ тѣло неизмѣняемо съ гайкой нѣкотораго винта и сообщимъ этой послѣдней опредѣленную угловую скорость. Характеръ движенiя гайки по винту не зависитъ ни отъ радiуса того цилиндра, на которомъ расположены нарѣзки винта, ни отъ формы этихъ послѣднихъ, ни отъ положенiя гайки на винтѣ, а только отъ отношенiя между одновременными поступательнымъ и вращательнымъ перемѣщенiями гайки, отношенiя, которое называется параметромъ винта и связано съ шагомъ винта ур.: шагъ $= 2\pi \times$ параметръ. Для насъ, слѣдовательно, винтъ вполнѣ характеризуется его параметромъ. Положенiе винта мы можемъ опредѣлить положенiемъ его оси, а угловую скорость движенiя гайки—задать векторомъ R, равнымъ угловой скорости, лежащимъ на оси винта и направленнымъ такъ, что для глаза, помѣщеннаго въ концѣ вектора и смотрящаго на его начало, вращенiе гайки кажется происходящимъ по часовой стрѣлкѣ. Итакъ движенiе твердаго тѣла во всякiй моментъ опредѣляется нѣкоторымъ винтомъ σ (его осью и параметромъ $P\sigma$) и векторомъ R, лежащимъ на оси винта.

Съ другой стороны движенiе твердаго тѣла вполнѣ опредѣляется угловой скоростью Ω вращенiя тѣла вокругъ какой нибудь точки O и скоростью V этой точки. Мы имѣемъ, слѣдовательно, два способа опредѣлять движенiе твердаго тѣла во всякiй моментъ и понятно, что возможенъ переходъ отъ одного способа къ другому, такъ что по данной точкѣ O и векторамъ Ω и V, мы можемъ построить винтъ и векторъ R, и наоборотъ.

Если векторы Ω и V заданы проэкціями ихъ на прямоугольныя оси x, y, z, имѣющія начало въ точкѣ O: векторъ Ω—проэкціями p, q, r, векторъ V—проэкціями—a, b, c, то винтъ σ строится т. о.: его параметръ $P\sigma$, равняется:

$$P\sigma = \frac{pa+qb+rc}{\Omega^2}, \tag{1}$$

его ось проходитъ черезъ точку, координаты которой суть

$$x_0 = \frac{qc-rb}{\Omega^2}, \quad y_0 = \frac{ra-pc}{\Omega^2}, \quad z_0 = \frac{pb-qa}{\Omega^2}\text{; гдѣ } \Omega^2 = p^2+q^2+r^2 \tag{2}$$

и параллельна вектору Ω. Что же касается вектора R, то онъ равенъ и параллеленъ вектору Ω.

Величины p,q,r,a,b,c опредѣляютъ винтъ σ; мы будемъ называть ихъ Plücker'овыми координатами. Но нетрудно видѣть, что для построенія винта мы должны знать 5 величинъ: 4 величины, чтобы опредѣлить положеніе прямой—его оси, и пятую—его параметръ, а потому между 6 Plücker'овыми координатами одна должна быть лишней. И дѣйствительно, изъ предъидущихъ формулъ ясно видно, что винтъ σ зависитъ не отъ величинъ p,q,r,a,b,c, а только отъ ихъ отношеній, такъ что Plücker'овы координиты суть однородныя координаты винта.

Когда намъ данъ винтъ σ и векторъ R, лежащій на его оси, то векторы Ω и V для точки O опредѣляются т. о: векторъ Ω равенъ и параллеленъ вектору R, векторъ же V есть скорость, которую будетъ имѣть точка O, если мы свяжемъ ее съ гайкой винта σ и сообщимъ этой послѣдней угловую скорость R.

Совокупность векторовъ Ω и V мы будемъ наз. *бивекторомъ.* Векторъ Ω его главнымъ векторомъ или главною частью, векторъ V—его моментомъ, точку O—его точкой приведенія, и наконецъ величины p,q,r,a,b,c его Plucker'овыми координатами. Ось и параметръ винта σ, опредѣляемаго бивекторомъ, мы назовемъ осью и параметромъ бивектора (Ω, V). Про бивекторъ (Ω, V) мы будемъ говорить, что онъ лежитъ на винтѣ σ или дѣйствуетъ по винту σ.

2. *Формулы преобразованія координатъ бивектора (винта).* Проведемъ черезъ точку O новую систему координатъ (x', y', z') и означимъ черезъ $p', q', r', a'. b', c'$ проэкціи векторовъ Ω и V на новыя оси. Если положеніе новой системы координатъ относительно старой опредѣляется схемой

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x' & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ y' & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ z' & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{array}$$

то между p', q', r', a', b', c' и p, q, r, a, b, c будутъ существовать соотношенія

$$\begin{aligned} p' &= p\lambda_1 + q\mu_1 + r\nu_1 & a' &= a\lambda_1 + b\mu_1 + c\nu_1 \\ q' &= p\lambda_2 + q\mu_2 + r\nu_2 & b' &= a\lambda_2 + b\mu_2 + c\nu_2 \\ r' &= p\lambda_3 + q\mu_3 + r\nu_3 & c' &= a\lambda_3 + b\mu_3 + c\nu_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, что величины p', q', r', a', b', c' суть координаты бивектора (Ω, V) (винта σ) относительно новой системы координатъ, и предъидущія формулы мы можемъ разсматривать какъ формулы преобразованія координатъ бивектора (Ω, V) (винта σ), когда начало координатъ остается прежнимъ и измѣняется только направленіе осей.

Если новая система координатъ будетъ безконечно близка къ старой, то новыя координаты будутъ безконечно мало отличаться отъ старыхъ, и помощью извѣстныхъ формулъ кинематики мы найдемъ, что безконечно малыя приращенія координатъ $\delta p, \delta q, \delta r, \delta a, \delta b, \delta c$ будутъ:

$$\begin{aligned} \delta p &= q\delta\mathfrak{c} - r\delta\mathfrak{b} & \delta a &= b\delta\mathfrak{c} - c\delta\mathfrak{b} \\ \delta q &= r\delta\mathfrak{a} - p\delta\mathfrak{c} & \delta b &= c\delta\mathfrak{a} - a\delta\mathfrak{c} \\ \delta r &= p\delta\mathfrak{b} - q\delta\mathfrak{a} & \delta c &= a\delta\mathfrak{b} - b\delta\mathfrak{a} \end{aligned}$$

гдѣ $\delta\mathfrak{a}, \delta\mathfrak{b}, \delta\mathfrak{c}$, суть составляющія по осямъ координатъ безконечно малаго вращенія, переводящаго старую систему координатъ въ новое положеніе.

Зная p,q,r,a,b,c мы можемъ найти скорость V' какой нибудь точки O' тѣла и угловую скорость вращенія тѣла—Ω' вокругъ точки O'. Означивъ черезъ p',q',r',a',b',c' соотвѣтственно проэкціи Ω' и V' на оси координатъ $O(x.y,z)$, черезъ l,m,n координаты точки O' относительно той же системы координатъ, мы имѣемъ слѣд. формулы кинематики:

$$\begin{aligned} p'&=p & a'&=a+qn-rm \\ q'&=q & b'&=b+rl-pn \\ r'&=r & c'&=c+pm-ql \end{aligned} \tag{4}$$

Замѣтимъ, что величины p',q',r',a',b',c' мы можемъ разсматривать какъ проэкціи Ω' и V' на оси (x',y',z'), имѣющія начало въ O' и соотвѣтственно параллельныя осямъ $x.y,z$ и, слѣд., считать эти величины координатами бивектора (Ω', V').

Бивекторомъ $(\Omega,'V')$ мы также хорошо можемъ опредѣлить движеніе тѣла, какъ и бивекторомъ (Ω, V), и т. к. оба они относятся къ одному и тому же движенію, то винтъ σ', который мы можемъ построить помощью бивектора (Ω', V') также, какъ раньше мы строили винтъ σ помощью бивектора (Ω, V), долженъ быть тожественъ съ этимъ послѣднимъ: оси σ и σ' должны совпадать и параметры ихъ должны быть одинаковы. Т. о. p,q,r,a,b,c и p',q',r',a',b',c' будутъ Plücker'овыми координатами одного и тогоже винта σ. Первая система опредѣляетъ винтъ относительно осей $O(x,y,z)$, а вторая—относительно осей $O'(x',y',z')$ и формулы (4) представляютъ формулы преобразованія однородныхъ координатъ винта σ, когда мы, не измѣняя направленія осей, перемѣщаемъ начало координатъ (точку приведенія). Сравнивая бивекторъ (Ω', V') съ (Ω, V), мы видимъ, что векторъ Ω' равенъ и параллеленъ вектору Ω. Кромѣ того, т. к. ось и параметръ σ' служатъ осью и параметромъ бивектора (Ω', V'), то изъ предъидущаго мы заключаемъ: главные векторы бивекторовъ (Ω', V') и (Ω, V) равны и параллельны, оси ихъ совпадаютъ и параметры ихъ одинаковы. Вслѣдствіе этого свойства бивекторовъ (Ω, V) и (Ω',V') мы можемъ считать ихъ тожественными, мы можемъ считать ихъ однимъ и тѣмъ же бивекторомъ. Назовемъ его α; въ первомъ случаѣ точкой приведенія α служитъ точка O и бивекторъ характеризуется двумя векторами Ω и V, во второмъ—точкой приведенія служитъ O' и α характеризуется двумя векторами $\Omega' = \Omega$ и V'. Координаты бивектора α относительно осей $O(x,y,z)$ суть p,q,r,a,b,c; координаты того же бивектора относительно осей $O'(x',y',z')$, суть p',q',r',a',b',c', и формулы (4) мы можемъ разсматривать какъ формулы преобразованія координатъ бивектора, когда мы перемѣщаемъ начало координатъ (точку приведенія), не измѣняя направленія осей. Винтъ, опредѣляемый бивекторомъ α, который до сихъ поръ мы означали буквой σ, будемъ означать теперь тою же буквой α.

При безконечно маломъ перемѣщеніи начала $(\delta l, \delta m, \delta n)$, мы изъ формулъ (4) получаемъ для безконечно малыхъ приращеній координатъ выраженія:

$$\begin{array}{ll} \delta p = 0 & \delta a = q\delta n - r\delta m \\ \delta q = 0 & \delta b = r\delta l - p\delta n \\ \delta r = 0 & \delta c = p\delta m - q\delta l \end{array}$$

Формулы для общаго случая преобразованія, когда измѣняется какъ начало координатъ, такъ и направленія осей, найдутся помощью (3) и (4). Если новая система осей безконечно близка къ старой, то безконечно малыя приращенія координатъ мы найдемъ, складывая приращенія, получаемыя ими при перемѣщеніи начала съ приращеніями—при поворотѣ осей:

$$\begin{array}{ll} \delta p = q\delta\mathfrak{c} - r\delta\mathfrak{b} & \delta a = b\delta\mathfrak{c} - c\delta\mathfrak{b} - r\delta m + q\delta n \\ \delta q = r\delta\mathfrak{a} - p\delta\mathfrak{c} & \delta b = c\delta\mathfrak{a} - a\delta\mathfrak{c} - p\delta n + r\delta l \\ \delta r = p\delta\mathfrak{b} - q\delta\mathfrak{a} & \delta c = a\delta\mathfrak{b} - b\delta\mathfrak{a} - q\delta l + p\delta m \end{array} \qquad (5)$$

Резюмируя теперь все вышесказанное, мы приходимъ къ такому результату: каждый бивекторъ опредѣляетъ нѣкоторый винтъ и векторъ лежащій на оси винта. Обратно, винтъ и векторъ, лежащій на его оси опредѣляетъ нѣкоторый бивекторъ. Формулы (3), (4) и (5) представляютъ формулы преобразованія координатъ бивектора (винта), первыя—при измѣненіи направленія осей, вторыя—при перемѣнѣ точки приведенія и третьи—въ общемъ случаѣ безконечно малаго перемѣщенія системы координатъ.

Т. к. p,q,r,a,b,c суть однородныя координаты винта α, то понятно, что по данному винту α опредѣляется только отношенія между p,q,r,a,b,c и, слѣд., каждому винту α отвѣчаетъ ∞^1 бивекторовъ α, лежащихъ на винтѣ α. Если же мы поставимъ условіемъ, чтобы $\Omega^2=1$, то данному винту α будетъ отвѣчать опредѣленный бивекторъ и въ этомъ смыслѣ бивекторъ (Ω, V), причемъ длина $\Omega=1$, можетъ быть названъ также винтомъ α.

3. *Частные случаи.* Если мы возьмемъ точку O' на оси бивектора (напр. возьмемъ за точку O' точку (x_0,y_0,z_0)), то видъ бивектора значительно упростится: оба вектора Ω и V' будутъ лежать на оси бивектора и отношеніе $V':\Omega=\pm P\alpha$, смотря по тому, будутъ ли векторы V' и Ω имѣть одинаковое или прямо противоположное направленіе. Если, при постоянномъ V', Ω будетъ уменьшаться, то $P\alpha$ будетъ рости и, при $\Omega=0$ сдѣлается $=\infty$. Тогда для всѣхъ точекъ приведенія $\Omega=0$ и V' остается однимъ и тѣмъ же векторомъ: тѣло будетъ имѣть поступательное движеніе и для оси бивектора будетъ опредѣленно только направленіе—совпадающее съ направленіемъ вектора V, положеніе же оси будетъ неопредѣленно.

Итакъ, когда $p=q=r=0$, величины же a,b,c не всѣ равны нулю, то параметръ бивектора $=\infty$, положеніе его оси неопредѣленно, а направленіе ея опредѣляется векторомъ V. Винтъ безконечно большаго параметра опредѣляется вполнѣ направленіемъ.

Когда $pa+qb+rc=0$, причемъ не всѣ величины p,q,r равны нулю, то параметръ винта α равенъ 0 и движеніе тѣла есть вращательное движеніе вокругъ оси α. Если мы возьмемъ точку приведенія на оси, то $V'=0$ и бивекторъ будетъ характеризоваться векторомъ Ω, лежащимъ на оси; винтъ же параметра нуль вполнѣ опредѣляется его осью или векторомъ $\Omega=1$, лежащимъ на оси.

4. До сихъ поръ бивектору (Ω, V) мы придавали кинематическій смыслъ. Но Poinsot показалъ, что подобно тому, какъ движеніе твердаго тѣла характеризуется бивекторомъ Ω, V и точкой приведенія O, такъ всякая система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу эквивалетна одной силѣ R, приложенной къ какой нибудь точкѣ O тѣла и парѣ силъ, опредѣляемой ея линейнымъ моментомъ G, и слѣд., характеризуется также *бивекторомъ* (R, G) и точкой приведенія. Poinsot своими работами оказалъ величайшую услугу механикѣ, выяснивъ тожество геометрическихъ построеній, которыя мы

употребляемъ въ кинематикѣ при сложеніи и разложеніи угловыхъ и поступательныхъ скоростей съ подобными же построеніями динамики при сложеніи и разложеніи силъ и паръ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. Изъ его работъ слѣдуетъ, что законъ по которому мѣняется бивекторъ R, G съ измѣненіемъ точки приведенія O, тожественъ съ закономъ измѣненія бивектора (Ω, V) (форм. 4), что бивекторъ (R, G) также можетъ служить для построенія нѣкотораго винта, какъ и бивекторъ (Ω, V), что какъ тотъ, такъ и другой бивекторы принимаютъ простѣйшій видъ, если точка приведенія будетъ взята на оси винта, словомъ, что геометрическія свойства бивекторовъ (Ω, V) и (R, G) тожественны. Итакъ, съ геометрической точки зрѣнія безразлично, опредѣляетъ ли данный бивекторъ движеніе твердаго тѣла или характеризуетъ систему силъ, къ нему приложенныхъ.

5. *Сложеніе и вычитаніе бивекторовъ* (*винтовъ*). Пусть мы имѣемъ два бивектора $\alpha(p,b,r,a,b,c)$ и $\beta(p_1 q_{,1},r_1,a_1,b_1,c_1)$. Суммой бивекторовъ α и β называютъ бивекторъ γ, координаты котораго суть $(p+p_1,+{}_1q,r+r_1,a+a_1,b+b_1q,c+c_1)$. Бивекторъ γ наз. также сложнымъ бивекторомъ, бивекторы же α и β—слагающими. Зависимость между α, β и γ выражается равенствомъ $\gamma=\alpha+\beta$. Винтъ, опредѣляемый бивекторомъ γ наз. суммой винтовъ α и β, а эти послѣдніе слагающими винтами. Операція сложенія бивекторовъ хорошо изслѣдована. Не входя въ подробности, мы замѣтимъ только, что сложеніе бивекторовъ можетъ быть сведено къ построенію цилиндроида—поверхности, представляющей собой алгебраическій коноидъ третьяго порядка, что эта операція коммутативна и ассоціативна и что бивекторъ $\gamma=\alpha+\beta$ остается однимъ и тѣмъ же бивекторомъ, къ какой бы координатной системѣ ни были отнесены бивекторы α и β.

Вычитаніе бивекторовъ опредѣляется какъ операція обратная сложенію.

6. *Умноженіе.* Подъ операціей умноженія бивекторовъ мы будемъ подразумѣвать операцію, обладающую слѣд. свойствами:

А. Она должна быть двояко дистрибутивной („distributiv in seinen beiden Theilen“, Hankel, l. c., p. 31) по отношенію къ операціи сложенія, т. е., если мы означимъ черезъ α, β, γ три бивектора, символомъ $\varphi(\alpha.\beta)$ произведеніе бивектора β на α, то

$$\varphi(\alpha,\beta+\gamma)=\varphi(\alpha,\beta)+\varphi(\alpha,\gamma)$$
$$\varphi(\alpha+\gamma,\beta)=\varphi(\alpha,\beta)+\varphi(\gamma,\beta)$$

B. Она не должна зависить отъ выбора системы координатъ, къ которой мы относимъ данные бивекторы (винты), т. е. при однихъ и тѣхъ же множителяхъ результатъ умноженія долженъ быть одинъ и тотъ же, какова бы ни была координатная система осей.

Мы пояснимъ ниже точнѣе смыслъ этихъ требованій на каждомъ изъ тѣхъ случаевъ, которые намъ придется разсматривать. Какъ въ теоріи кватерніоновъ разсматриваютъ трехъ типовъ произведеніе векторовъ: скаларное произведеніе, равное взятому со знакомъ—такъ наз. геометрическому произведенію двухъ векторовъ, векторное произведеніе и, наконецъ, произведеніе третьяго типа, которое наз. просто произведеніемъ и выражается квартерніономъ, такъ и мы будемъ различать три типа операціи умноженія бивекторовъ, аналогичныхъ указаннымъ типамъ умноженія векторовъ.

7. *Скаларное произведеніе.* Пусть мы имѣемъ два бивектора $\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ и $\beta(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)$. Скаларнымъ произведеніемъ бивектора β на бивекторъ α—будемъ означать его знакомъ $S\alpha\beta$—мы назовемъ функцію координатъ бивекторовъ α и β: $\varphi(x_1,x_2,\ldots x_6;y_1,y_2,\ldots y_6)=\varphi(x,y)$, обладающую свойствами A и B. Разсмотримъ отдѣльно эти свойства.

Свойство A. Если $\gamma(y_1'y_2'y_3'y_4'y_5'y_6')$ есть какой нибудь бивекторъ, то свойство A выразится равенствами:

$$S\alpha(\beta+\gamma)=S\alpha\beta+S\alpha\gamma$$
$$S(\alpha+\gamma)\beta=S\alpha\beta+S\gamma\beta$$

Замѣчая, что координаты бивектора $\beta+\gamma$ суть $y_1+y_1',\ldots$ $\ldots\ y_6+y_6'$, и что

$$S\alpha(\beta+\gamma)=\varphi(x_1,x_2,\ldots x_6;\ y_1+y_1',y_2+y_2',\ldots y_6+y_6'),$$
$$S\alpha\gamma=\varphi(x_1,x_2,\ldots x_6;\ y_1',y_2',\ldots y_6'),$$

мы можемъ представить первое равенство такъ:

$$\varphi(x_1,\ldots x_6;\ y_1'+y_1,\ldots y_6+y_6')=$$
$$=\varphi(x_1,\ldots x_6;\ y_1,\ldots y_6)+\varphi(x_1,\ldots x_6;\ y_1',\ldots y_6'),$$

или короче:

$$\varphi(x,y+y')=\varphi(x,y)+\varphi(x,y').$$

Подобнымъ же образомъ второе равенство приметъ видъ:

$$\varphi(x+y',y)=\varphi(x,y)+\varphi(y',y).$$

Эти равенства должны имѣть мѣсто, каковы бы ни были x,y,y'. Дифференцируя первое по y_1 и полагая $y_1=y_2=y_3=$ $=y_4=y_5=y_6=0$, мы получаемъ равенство

$$\varphi'_{y_1}(x_1,\ldots x_6;\ y_1',\ldots y_6')=\varphi'_{y_1}(x_1,\ldots x_6;\ 0,\ldots 0)$$

справедливое при всякихъ y', изъ котораго мы видимъ, что φ'_{y_1} не зависитъ отъ аргументовъ $y_1,y_2,\ldots y_6$. Функція φ будетъ, слѣд., линейной функціей отъ y_1: $\varphi=M_1y_1+L_1$, гдѣ M_1 зависитъ только отъ x, а L_1, отъ x и $y_2,y_3,\ldots y_6$. Также докажемъ, что и $\varphi'_{y_2}=\frac{\partial L_1}{\partial y_2}$ не зависитъ отъ $y_1,y_2,\ldots y_6$, откуда, припоминая, что L_1 не содержитъ y_1, найдемъ $L_1=M_2y_2+$ L_2, гдѣ M_2 есть функція только аргументовъ x, а L_2 отъ аргументовъ x и y_3,y_4,y_5,y_6. Продолжая далѣе эти разсужденія, убѣдимся въ концѣ концовъ, что функція φ есть функція линейная относительно $y_1,y_2,\ldots y_6$. Совершенно также, исходя изъ втораго равенства, мы найдемъ, что φ есть линейная функція также и отъ $x_1,x_2,\ldots x_6$, и слѣд.,

$$\varphi=M+\sum_i l_ix_i+\sum_k m_ky_k+\sum_{i,k}s_{ik}x_iy_k,$$

гдѣ M, l_i, m_k, s_{ik} $(i,k=1,2,3,4,5,6)$ суть величины постоянныя. Если положимъ $y_1=y_2=\ldots y_6=0$, $y_1'=y_2'=\ldots y_6'=0$—въ равенствѣ первомъ и $x_1=x_2=\ldots x_6=0$, $y_1'=y_2',=\ldots y_6'=0$—въ равенствѣ второмъ, то они примутъ видъ:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,\ldots x_6;\ 0,\ldots 0)&=2\varphi(x_1,\ldots x_6;\ 0,\ldots 0)\\ \varphi(0,\ldots 0;\ y_1,\ldots y_6)&=2\varphi(0,\ldots 0;\ y_1,\ldots y_6),\end{aligned}$$

откуда заключаемъ, что скаларное произведеніе обращается въ нуль, если одинъ изъ бивекторовъ исчезаетъ. Чтобы удовлетворить этому свойству функціи φ, мы должны коэффиціенты M, l_i, m_k положить равными нулю. Т. о. мы окончательно находимъ, что φ должна быть билинейной однородной функціей отъ x и y:

$$\varphi = \Sigma s_{ik} x_i y_k.$$

8. Свойство B. Означая $x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', x_6'; y_1', y'_2, y_3', y_4', y_5', y_6'$ новыя координаты тѣхъ же бивекторовъ α и β, отнесенныхъ къ новой системѣ координатъ, мы должны на основаніи условія B имѣть равенство $\varphi(x', y') = \varphi(x, y)$, которое должно сдѣлаться тожествомъ, какова бы ни была новая система координатъ, если мы выразимъ новыя координаты x', y' черезъ старыя x и y. Предполагая, что новая система координатъ лежитъ безконечно близко къ старой, мы будемъ имѣть $x'_i = x_i + \delta x_i$, $y'_k = y_k + \delta y_k$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $\varphi(x', y') = \varphi(x, y) + \delta\varphi(x, y)$, и условіе B приметъ видъ $\varphi(x, y) + \delta\varphi(x, y) = \varphi(x, y)$, откуда $\delta\varphi(x, y) = 0$.

Развернемъ выраженіе $\delta\varphi(x, y)$. Безконечно малыя приращенія δx и δy, получаемыя координатами при безконечно маломъ перемѣщеніи системы осей опредѣляются формулами (5), которыя при новыхъ обозначеніяхъ принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned}
\delta x_1 &= x_2 \delta\mathfrak{c} - x_3 \delta\mathfrak{b} \\
\delta x_2 &= x_3 \delta\mathfrak{a} - x_1 \delta\mathfrak{c} \\
\delta x_3 &= x_1 \delta\mathfrak{b} - x_2 \delta\mathfrak{a} \qquad ; \\
\delta x_4 &= x_5 \delta\mathfrak{c} - x_6 \delta\mathfrak{b} + x_2 \delta n - x_3 \delta m \\
\delta x_5 &= x_6 \delta\mathfrak{a} - x_4 \delta\mathfrak{c} + x_3 \delta l - x_1 \delta n \\
\delta x_6 &= x_4 \delta\mathfrak{b} - x_5 \delta\mathfrak{a} + x_1 \delta m - x_2 \delta l
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Такими же формулами выразятся и приращенія δy. Подставивъ δx и δy въ $\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \delta x_i + \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial y_k} \delta y_k$, мы будемъ имѣть

$$\delta\varphi = L\delta l + M\delta m + N\delta n + \mathfrak{A}\delta\mathfrak{a} + \mathfrak{B}\delta\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\delta\mathfrak{c},$$

гдѣ

$$L=\frac{\partial\varphi}{\partial x_5}x_3-\frac{\partial\varphi}{\partial x_6}x_2+\frac{\partial\varphi}{\partial y_5}y_3-\frac{\partial\varphi}{\partial y_6}y_2$$

$$\mathfrak{A}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}x_3-\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}x_2+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}y_3-\frac{\partial\varphi}{\partial y_3}y_2+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x_5}x_6-\frac{\partial\varphi}{\partial x_6}x_5+\frac{\partial\varphi}{\partial y_5}y_6-\frac{\partial\varphi}{\partial y_6}y_5$$

и M, N получаются изъ L, а $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ изъ $\mathfrak{A}$ круговой перестановкой буквъ x_1,x_2,x_3; y_1,y_2,y_3; x_4,x_5,x_6; y_4,y_5,y_6. Члены $L\delta l+M\delta m+N\delta n$ въ $\delta\varphi$ выражаютъ приращенiе, которое зависитъ только отъ перемѣщенiя начала координатъ, а члены $\mathfrak{A}\delta\mathfrak{a}+\mathfrak{B}\delta\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\delta\mathfrak{c}$—отъ перемѣны направленiя осей.

9. Т. к. $\delta l,\delta m,\delta n,\delta\mathfrak{a},\delta\mathfrak{b},\delta\mathfrak{c}$ совершенно произвольны и между собой независимы, то условiе $\delta\varphi=0$ распадается на шесть

$$L=0,\ M=0,\ N=0 \tag{a}$$

$$\mathfrak{A}=0,\ \mathfrak{B}=0,\ \mathfrak{C}=0, \tag{b}$$

которыя должны быть удовлетворены каковы бы ни были x и y, такъ что коэффецiенты этихъ ур. при различныхъ x и y должны быть равны нулю. Первая система ур. представляетъ условiя, чтобы функцiя φ не мѣнялась при перемѣщенiи начала координатъ, а вторая—при измѣненiи направленiя осей. Изъ первыхъ трехъ ур. мы находимъ, что

$$s_{14}=s_{25}=s_{36}=s_{41}=s_{52}=s_{63}=-k,\text{ скажемъ,}$$

и что всѣ остальные коэффицiенты, у которыхъ хотя одинъ изъ значковъ >3, равны нулю, такъ что

$$\varphi(x,y)=-k(x_1y_4+x_2y_5+x_3y_6+x_4y_1+x_5y_2+x_6y_3)+\sum_1^3 s_{ik}x_iy_k$$

Для всякой функцiи, которая при измѣненiи направленiя осей координатъ не мѣняется, совокупность членовъ $\mathfrak{A}\delta\mathfrak{a}+\mathfrak{B}\delta\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\delta\mathfrak{c}$ равняется нулю, и функцiя тожественно удовлетворяетъ ур. (b). Такую функцiю представляетъ первая часть $\varphi(x,y)$:

—$k(x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3)$, ибо она равняется произведенію—k на сумму двухъ геометрическихъ произведеній: вектора (x_1, x_2, x_3) на векторъ $(y_4, y_5 \cdot y_6)$ и вектора (x_4, x_5, x_6) на векторъ (y_1, y_2, y_3); эта функція удовлетворяетъ, слѣд., ур. (b), а т. к. эти ур. линейны, то и вторая часть φ, взятая отдѣльно, должна удовлетворять тѣмъ же ур..

Подставивъ $\sum\limits_1^3 s_{ik}x_iy_k$ въ ур. (b) и приравнявъ нулю коэффиціенты при различныхъ x и y, мы найдемъ $s_{11} = s_{22} = s_{33} = -k_1$, $s_{12} = s_{21} = s_{23} = s_{32} = s_{31} = s_{13} = 0$ и т. о. для φ окончательно получимъ выраженіе:

$$\varphi(x,y) = -k_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) -$$
$$-k(x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3)$$

10. Каковы бы ни были коэффиціенты k и k_1 функція φ не мѣняется не только при безконечно малыхъ, но и при конечныхъ перемѣщеніяхъ системы координатъ; она будетъ, слѣд., удовлетворять всѣмъ выше поставленнымъ условіямъ. Т. к. коэффиціенты k и k_1 остаются неопредѣленными, то существуетъ безчисленное множество функцій, изъ которыхъ каждая можетъ быть названа, согласно нашему опредѣленію, скалярнымъ произведеніемъ бивекторовъ α и β; функція φ представляетъ ихъ общій видъ.

Не нарушая существенно общности вида фунціи φ, мы моможемъ одному изъ коэффиціентовъ k или k_1 дать нѣкоторое вполнѣ опредѣленное (отличное отъ нуля) значеніе; положимъ $k_1 = 1$. Считать $k_1 = 1$ заставляетъ насъ то соображеніе, что въ частномъ случаѣ, когда бивекторы обратятся въ векторы, имѣющіе общее начало, т. е. $x_4 = x_5 = x_6 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$, скаларное произведеніе бивекторовъ должно обратиться въ скаларное произведеніе векторовъ (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), т. е. въ—$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$, и, слѣд., $k_1 = 1$. Что же касается до коэффиціента k, то мы оставимъ его неопредѣленнымъ; мы увидимъ далѣе, что подъ k мы должны будемъ подразумѣвать не количество, а нѣкоторый символъ, смыслъ и свойство котораго опредѣлятся ниже.

Итакъ, употребляя болѣе обычное обозначеніе координатъ бивекторовъ α и β буквами p, q, r, a, b, c, скаларнымъ произведеніемъ двухъ бивекторовъ α на β мы будемъ называть выраженіе:

$$S\alpha\beta=-(pp_1+qq_1+rr_1)-k(pa_1+qb_1+rc_1+p_1a+q_1b+r_1c) \quad (7)$$

гдѣ p,q,r,a,b,c суть координаты бивектора α, а p_1,q_1,r_1,a_1,b_1,c_1— бивектора β.

11. *Векторное произведеніе.* Векторнымъ произведеніемъ бивектора β на бивекторъ α—будемъ означать его символомъ $V\alpha\beta$—мы назовемъ бивекторъ, обладающій свойствами A и B. Координаты бивектора $V\alpha\beta$: z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6 должны быть нѣкоторыми функціями отъ координатъ бивекторовъ α и β:

$$z_i=\varphi_i(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6;\ y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6) \qquad i=1,2,3,4,5,6.$$

Посмотримъ, что мы можемъ судить о видѣ этихъ функкій на основаніи свойствъ A и B бивектора $V\alpha\beta$.

Свойство A. Свойство дистрибутивности векторнаго умноженія выражается равенствами:

$$V\alpha(\beta+\gamma)=V\alpha\beta+V\alpha\gamma$$

$$V(\alpha+\gamma)\beta=V\alpha\beta+V\gamma\beta$$

Понятно, что каждое изъ нихъ равносильно шести равенствамъ между координатами бивектора, стоящаго въ лѣвой части, и одноименными координатами бивектора правой части:

$$\varphi_i(x_1....x_6;\ y_1+y'_1,...y_6+y'_6)=$$
$$\varphi_i(x_1...x_6;\ y_1...y_6)+\varphi_i(x_1,...x_6;\ y_1{}'...y_6{}')$$
$$i=1,2,3,4,5,6.$$
$$\varphi_i(x_1+y'_1,...x_6+y'_6;\ y_1...y_6)=$$
$$\varphi_i(x_1...x_6;y_1,...y_6)+\varphi_i(y'_1...y'_6;\ y_1...y_6).$$

Изъ этихъ равенствъ мы видимъ, что каждая изъ функцій φ_i должна тожественно удовлетворять тѣмъ двумъ равенствамъ, которымъ въ § 7 удовлетворяла функція φ. Отсюда прямо слѣдуетъ, что функціи φ_i должны быть билинейными однородными функціями координатъ x и y:

$$z_1 = \varphi_1(x,y) = \Sigma p_{ik} x_i y_k$$
$$z_4 = \varphi_4(x,y) = \Sigma a_{ik} x_i y_k$$

Выраженій для другихъ функцій мы не выписываемъ, ибо сейчасъ увидимъ, что они весьма просто получаются изъ φ_1 и φ_4 на основаніи свойства B, къ анализу котораго мы теперь и переходимъ.

12. Свойство B. Это свойство предъявляетъ къ φ_i слѣдующее требованіе: къ какимъ бы координатнымъ осямъ ни были отнесены бивекторы α и β, функціи φ_i должны служить координатами одно и того же бивектора, отнесеннаго къ тѣмъ же осямъ, точнѣе говоря, если x', y' суть координаты бивекторовъ α и β отнесенныхъ къ новымъ осямъ, то бивекторъ, координаты котораго относительно новыхъ осей суть $z'_i = \varphi_i(x', y')$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ долженъ быть тожественъ съ бивекторомъ $V\alpha\beta$, старыми кооординатами котораго служатъ функціи $z_i = \varphi_i(x,y)$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ и, слѣд., между функціями $z_i' = \varphi_i(x',y')$ и $z_i = \varphi_i(x,y)$ должны существовать такія же соотношенія, какія существуютъ между координатами одного и того же бивектора, отнесеннаго къ различнымъ осямъ, соотношенія, которыя выражаются формулами преобразованія координатъ. Эти соотношенія должны обратиться въ тожества, если мы x', y' выразимъ черезъ x, y. Постараемся теперь опредѣлить функціи φ_i такъ, чтобы онѣ удовлетворяли поставленнымъ условіямъ при слѣдующихъ преобразованіяхъ координатъ.

I. Измѣнимъ направленіе осей такъ, чтобы ось x' совпала съ y, ось y' съ z, ось z' съ x. Припоминая геометрическій смыслъ координатъ бивектора, легко видѣть, что

$$x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, x'_3 = x_1;\ x'_4 = x_5, x'_5 = x_6, x'_6 = x_4.$$

Подобныя же соотношенія будутъ между y' и y, z' и z. Изъ нихъ между прочимъ слѣдуетъ:

$$z'_1 = \varphi_1(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6;\ y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6) =$$
$$= \varphi_1(x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4;\ y_2, y_3, y_1, y_5, y_6, y_4);$$

съ другой стороны

$$z'_1 = z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6;\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6),$$

и, слѣд.,

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6;\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) =$$
$$= \varphi_1(x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4;\ y_2, y_3, y_1, y_5, y_6, y_4),$$

т. е. подстановка

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 \\ x_2 x_3 x_1 x_5 x_6 x_4 y_2 y_3 y_1 y_5 y_6 y_4 \end{pmatrix} = (x_1 x_2 x_3)(x_4 x_5 x_6)(y_1 y_2 y_3)(y_4 y_5 y_6). \text{ (S)}$$

переводитъ функцію φ_1 въ φ_2. Такимъ же образомъ найдемъ, что таже подстановка переводитъ φ_2 въ φ_3, φ_3 въ φ_1 и далѣе φ_4 въ φ_5, φ_5 въ φ_6 и φ_6 въ φ_4. Мы видимъ т. о., что функціи φ_i разбиваются на двѣ группы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$; первыя легко получаются изъ φ_1, а вторыя изъ φ_4.

II. Измѣняемъ безконечно мало систему координатъ; тогда, на основаніи вышесказаннаго, безконечно малыя приращенія функцій $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ должны выразиться формулами, которыя мы получимъ, замѣняя въ (6) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ соотвѣтственно черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Изъ шести ур., такимъ образомъ полученныхъ, мы выпишемъ только первое и четвертое:

$$\delta\varphi_1 = \varphi_3\,\delta\mathfrak{c} - \varphi_2\,\delta\mathfrak{b}$$
$$\delta\varphi_4 = \varphi_5\,\delta\mathfrak{c} - \varphi_6\,\delta\mathfrak{b} + \varphi_2\,\delta n - \varphi_3\,\delta m$$

Съ другой стороны приращенія $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_4$ выразятся т. о.

$$\delta\varphi_1 = L_1\,\delta l + M_1\,\delta m + N_1\,\delta n + \mathfrak{A}_1\,\delta\mathfrak{a} + \mathfrak{B}_1\,\delta\mathfrak{b} + \mathfrak{C}_1\,\delta\mathfrak{c}$$
$$\delta\varphi_4 = L_4\,\delta l + M_4\,\delta m + N_4\,\delta n + \mathfrak{A}_4\,\delta\mathfrak{a} + \mathfrak{B}_4\,\delta\mathfrak{b} + \mathfrak{C}_4\,\delta\mathfrak{c}$$

гдѣ $L_1, M_1, N_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1;\ L_4, M_4, N_4, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{C}_4$ получаются изъ выраженій для $L, M, N, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, данныхъ въ § 8 замѣной φ одинъ разъ черезъ φ_1, а въ другой — черезъ φ_4. Сравнивая выраженія для $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_4$ мы получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} L_1=0, M_1=\quad 0\ , N_1=0 \\ \mathfrak{A}_1=0, \mathfrak{B}_1=-\varphi_3, \mathfrak{C}_1=\varphi_2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} (c) \\ (d) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} L_4=0, M_4=-\varphi_3, N_4=\varphi_2 \\ \mathfrak{A}_4=0, \mathfrak{B}_4=-\varphi_6, \mathfrak{C}_4=\varphi_5 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} (e) \\ (f) \end{array}$$

13. Изъ первой группы шести ур, въ которыя входятъ только $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$, эти послѣднія могутъ быть опредѣлены. Ур. $L_1=M_1=N_1=0$, тожественныя по виду съ ур. $L=M=N=0$, которымъ въ § 9 должна была удовлетворять функція φ, даютъ намъ тѣ же соотношенія между коэффиціентами p_{ik}, которыя раньше мы имѣли между коэффеціентами s_{ik}: $p_{14}=p_{25}=p_{36}=p_{41}=p_{52}=p_{63}=u$ и всѣ остальные коэффиціенты, имѣющіе хотя одинъ значекъ >3, равны нулю. Т. о. ур. (c) даютъ для φ_1 выраженіе

$$\varphi_1=u(x_1y_4+x_2y_5+x_3y_6+x_4y_1+x_5y_2+x_6y_3)+\sum_1^3 p_{ik}x_iy_k \quad (g)$$

Составивъ функціи φ_2 и φ_3 изъ φ_1 подстановкой (S), вносимъ теперь выраженія φ_1, φ_2 и φ_3 въ ур. (d) и сравниваемъ коэффиціенты при одинаковыхъ x и y; мы находимъ тогда

$$p_{12}=p_{21}=p_{13}=p_{31}=0;$$

$$p_{23}+p_{32}=0$$

$$p_{11}=p_{22}=p_{33}=u=0$$

такъ что, обозначая p_{23} черезъ v, мы имѣемъ

$$\varphi_1=v(x_2y_3-x_3y_2)$$

$$\varphi_2=v(x_3y_1-x_1y_3)$$

$$\varphi_3=v(x_1y_2-x_2y_1)$$

при чемъ φ_2 и φ_3 получаются изъ φ_1 подстановкой (S). Вотъ общій видъ функцій φ_1, φ_2, φ_3, удовлетворяющихъ ур. (c) и (d).

Опредѣливъ функціи $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, обращаемся ко второй группѣ ур. (e) и (f). Изъ ур. (e), сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ x и y, мы находимъ

$$a_{51} = a_{54} = a_{55} = a_{56} = 0$$

$$a_{61} = a_{64} = a_{65} = a_{66} = 0$$

$$a_{15} = a_{45} = a_{55} = a_{65} = 0 \qquad a_{26} = -a_{62} = v$$

$$a_{16} = a_{46} = a_{56} = a_{66} = 0 \qquad a_{53} = -a_{35} = v$$

$$a_{14} = a_{25} = a_{36} = a_{41} = a_{52} = a_{63} = s$$

$$a_{24} = a_{42} = a_{34} = a_{43} = 0,$$

и слѣд.

$$\varphi_4 = s(x_1 y_4 + x_2 y_5 + x_3 y_6 + x_4 y_1 + x_5 y_2 + x_6 y_3) + \sum_1^3 a_{ik} x_i y_k$$
$$+ v(x_2 y_6 - x_3 y_5 - y_2 x_6 + y_3 x_5)$$

Отсюда подстановкой (S) получимъ φ_5 и φ_6. Оставшіеся неопредѣленными коэффиціенты этихъ функцій мы должны подобрать т. о., чтобы функціи $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ удовлетворяли ур. (f). Съ этою цѣлью мы должны были бы подставить φ_4, φ_5, φ_6 въ ур. (f) и затѣмъ сравнить коэффиціенты при одинаковыхъ x и y. Мы можемъ, однако, упростить вычисленіе, если разобьемъ каждую изъ функцій $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ на сумму двухъ: $\varphi_{i+3} = \psi_{i+3} + \chi_{i+3}$ $(i = 1,2,3)$, гдѣ χ_{i+3} означаютъ члены, имѣющіе коэффиціентомъ v, и ψ_{i+3} всѣ остальные члены. Легко убѣдиться, что функціи χ_{i+3} тожественно удовлетворяютъ ур. (f), а потому уравненія (f), благодаря ихъ линейному виду, будутъ удовлетворены функціями φ_{i+3}, если имъ будутъ удовлетворять функціи ψ_{i+3}. Но функціи ψ_{i+3} тожественны по виду съ выраженіями, полученными нами выше для функцій φ_1, φ_2, φ_3 (g), и ур. (f), которымъ должны теперь удовлетворять ψ_4, ψ_5, ψ_6, тожественны съ ур. (d), которымъ должны были удовлетворять функціи $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; отсюда прямо слѣдуетъ, что ψ_4 должно имѣть одинаковый видъ съ φ_1: $\psi_4 = v_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2)$, гдѣ $v_1 = a_{23}$

и т. о.

$$\varphi_4 = v(x_2 y_6 - x_3 y_5 - y_2 x_6 + y_3 x_5) + v_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2)$$
$$\varphi_5 = v(x_3 y_4 - x_1 y_6 - y_3 x_4 + y_1 x_6) + v_1 (x_3 y_1 - x_1 y_3)$$
$$\varphi_6 = v(x_1 y_5 - x_2 y_4 - y_1 x_5 + y_2 x_4) + v_1 (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

при чемъ φ_5 и φ_6 найдутся подстановкой (S).

14. Опредѣляя видъ функцій $\varphi_1 ;\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6$, мы пользовались только нѣкоторыми равенствами, которымъ должны были удовлетворять эти функціи. Поэтому мы можемъ пока только утверждать, что функцій, удовлетворяющихъ условіямъ *A* и *B* болѣе общаго вида, чѣмъ найденныя нами функціи φ, не существуютъ, но остается еще провѣрить дѣйствительно ли эти функціи удовлетворяютъ условіямъ *B* при всякихъ преобразованіяхъ координатъ. Сдѣлать эту повѣрку не трудно, а потому мы на ней останавливаться не будемъ.

Мы видимъ, что функціи φ содержатъ два остающихся неопредѣленными коэффиціента v и v_1. Каждой системѣ ихъ значеній отвѣчаетъ одинъ опредѣленный бивекторъ и опредѣленная операція построенія бивектора; каждый изъ этихъ бивекторовъ мы можемъ назвать произведеніемъ и каждую изъ соотвѣтствующихъ операцій—умноженіемъ. Изъ нихъ мы выдѣлимъ, однако, одинъ бивекторъ, отвѣчающій значеніямъ $v_1 = 0, v = 1$ и будемъ называть его векторнымъ произведеніемъ бивектора β на α. Выдѣлить именно этотъ бивекторъ заставляетъ насъ то соображеніе, что бивекторы, отвѣчающіе другимъ значеніямъ v и v_1 имѣютъ съ нимъ общую ось и получаются изъ него весьма просто, если мы увеличимъ его параметръ на $\frac{v_1}{v}$ и умножимъ главный векторъ на v. Кромѣ того, считать $v_1 = 0$, $v = 1$ мы должны еще и по той причинѣ' что въ частномъ случаѣ, когда бивекторы обратятся въ векторы, имѣющіе общее начало т. е. $x_4 = x_5 = x_6 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$ векторное произведеніе бивекторовъ должно обратиться въ векторное произведеніе векторовъ $(x_1 x_2 x_3)$ и $(y_1 y_2 y_3)$, и, слѣд.,

$$z_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \qquad z_4 = 0$$
$$z_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \qquad z_5 = 0$$
$$z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \qquad z_6 = 0,$$

откуда $v=1$, $v_1=0$.

Итакъ, возвращаясь къ прежнимъ обозначеніямъ координатъ бивектора буквами p,q,r,a,b,c, мы *будемъ называть векторнымъ произведеніемъ β на α бивекторъ $V\alpha\beta$, координаты котораго суть:*

$$
\begin{aligned}
P&=qr_1-qr_1 \qquad & A&=qc_1-rb_1-(q_1c-r_1b)\\
Q&=rp_1-r_1p & B&=ra_1-pc_1-(r_1a-p_1c)\\
R&=pq_1-p_1q & C&=pb_1-qa_1-(p_1b-q_1a)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

При этихъ обозначеніяхъ бивекторъ самаго общаго вида, удовлетворяющій условіямъ A и B, имѣетъ такія координаты:

$$vP, \qquad vQ, \qquad vR$$

$$vA+v_1P,\ vB+v_1Q,\ vC+v_1R.$$

15. Анализъ операціи умноженія бивектора на бивекторъ, произведенный нами въ предъидущихъ параграфахъ, можетъ быть безъ существенныхъ измѣненій приложенъ къ разысканію самаго общаго вида операціи умноженія бивектора на постоянное число и постояннаго числа на бивекторъ. Опредѣляя эти операціи какъ операціи двояко дистрибутивныя по отношенію къ сложенію, дающія результатъ независимый отъ системы координатъ, мы пришли бы къ слѣдующимъ заключеніямъ: обѣ операціи тожественны, скалярное произведеніе бивектора α на постоянное число s всегда $=0$, векторное произведеніе есть бивекторъ, координаты котораго суть:

$$vsp, \qquad vsq, \qquad vsr$$

$$vsa+v_1sp,\ vsb+v_1sq,\ vsc+v_1sr.$$

Мы не будемъ, однако, останавливаться на этомъ анализѣ, т. к. далѣе мы встрѣтимся съ операціей болѣе общаго вида умноженія бивектора на нѣкоторое комплексное число.

16. *Произведеніе. Символъ ω.* Примемъ опредѣленную точку O за точку приведенія всѣхъ бивекторовъ, которые мы разсматриваемъ, и нѣкоторую систему трехъ взаимно перпенди-

кулярныхъ прямыхъ за координатную систему. Начало каждаго вектора мы помѣщаемъ въ точкѣ O и всякій векторъ опредѣляемъ проэкціями на координатныя оси. Условимся надъ векторами, имѣющими начало въ точкѣ O, производить операціи по тѣмъ законамъ, по которымъ мы производимъ операціи подъ векторами въ теоріи кватерніоновъ, иначе говоря условимся представлять всякій векторъ (l,m,n) комплекснымъ числомъ вида:

$$li+mj+nk$$

гдѣ i, j, k—извѣстные символы теоріи кватерніоновъ, для которыхъ слѣдующая таблица

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ i & -1 & k & -j \\ j & -k & -1 & i \\ k & j & -i & -1 \end{array} \tag{9}$$

служитъ таблицей умноженія.

Всякій бивекторъ (p,q,r,a,b,c) мы характеризуемъ двумя векторами $\Omega(p,q,r)$ и $V(a,b,c)$. Однако въ частныхъ случаяхъ для опредѣленія бивектора намъ достаточно знать одинъ векторъ. Такъ, бивекторъ безконечно большаго параметра $(0,0,0,a,b,c)$ опредѣляется однимъ векторомъ $V(a,b,c)$, для него $\Omega=0$; бивекторъ $(p,q,r,0,0,0)$ параметра нуль опредѣляется однимъ векторомъ Ω; для него $V=0$. Имѣя, слѣдовательно, нѣкоторый векторъ $\beta(l,m,n)$, мы можемъ характеризовать имъ два существенно различныхъ бивектора: бивекторъ безконечно большаго параметра $(0,0,0,l,m,n)$ и бивекторъ параметра нуль $(l,m,n,0,0,0)$. Мы должны, поэтому, имѣть какое нибудь средство, чтобы различать оба эти бивектора, опредѣляемые однимъ и тѣмъ же векторомъ. Съ этою цѣлью условимся бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$ характеризовать тѣмъ же символомъ (буквой, комплекснымъ числомъ), которымъ мы характеризуемъ векторъ (l,m,n), а для обозначенія бивектора $(0,0,0,l,m,n)$ употреблять тотъ же символъ, сопровождая его факторомъ ω. Т. о., если β есть векторъ (l,m,n), то той же буквой β мы означаемъ и бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$, произведеніемъ же $\omega\beta$ — бивекторъ $(0,0,0,l,m,n)$.

Знаку β мы придаемъ, слѣд., двоякій смыслъ, мы разсматриваемъ или его какъ символъ, характеризующій нѣкоторый векторъ (l,m,n), или какъ символъ, характеризующій бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$. Соотвѣтственно этимъ двумъ значеніямъ β и символу ω мы должны приписать двоякое значеніе. Если β есть векторъ (l,m,n), то ω есть символъ, который являясь факторомъ β приписываетъ этому вектору опредѣленный смыслъ, заставляетъ насъ принимать его за векторъ, опредѣляющій бивекторъ $(0,0,0,l,m,n)$ безконечно большаго параметра. Если подъ β мы подразумѣваемъ бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$, то умножая его на символъ ω, мы получимъ бивекторъ $\omega\beta$ $(0,0,0,l,m,n)$, такъ что символъ ω, являясь множителемъ бивектора параметра нуль, преобразуетъ его въ бивекторъ безконечно большаго параметра.

Пусть мы имѣемъ два вектора $\alpha_0(p,q,r)$ и $\alpha_1(a,b,c)$; бивекторы α_0, и $\omega\alpha_1$ имѣютъ своими координатами величины $(p,q,r,0,0,0)$ и $(0,0,0,a,b,c)$. Бивекторъ α (p,q,r,a,b,c) мы можемъ разсматривать какъ сумму бивекторовъ α_0 и $\omega\alpha_1$:

$$\alpha=\alpha_0+\omega\alpha_1 \tag{10}$$

Выражая векторы комплексными числами: $\alpha_0=pi+qj+rk$, $\alpha_1=ai+bj+ck$, мы можемъ бивекторъ α представить комплекснымъ числомъ

$$\alpha=pi+qj+rk+\omega(ai+bj+ck) \tag{11}$$

Итакъ каждый бивекторъ α мы можемъ представить или въ видѣ суммы $\alpha_0+\omega\alpha_1$ двухъ векторовъ, изъ которыхъ второй умноженъ на символъ ω, или въ видѣ комплекснаго числа $pi+qj+rk+\omega(ai+bj+ck)$, у котораго коэффиціентами при комплексныхъ единицахъ служатъ координаты бивектора.

17. Съ цѣлью раскрыть свойства символа ω, умножимъ выраженіе $\beta_0+\omega\beta_1=p_1i+q_1j+r_1k+\omega(a_1i+b_1j+c_1k)$ представляющее бивекторъ β, на выраженіе $\alpha_0+\omega\alpha_1$ такъ, какъ если бы символъ ω былъ нѣкоторой неопредѣленной величиной и, опираясь на наши изслѣдованія въ §§ (6—15), посмотримъ

какія свойства мы должны приписать символу ω, чтобы полученное выраженіе мы могли назвать произведеніемъ β на α. Мы будемъ имѣть:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_0+\omega\alpha_1)(\beta_0+\omega\beta_1)=\alpha_0\beta_0+\omega(\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1)+\omega^2\alpha_1\beta_1\\
&=-(pp_1+qq_1+rr_1)-\omega(pa_1+qb_1+rc_1+p_1a+q_1b+r_1c)\\
&\qquad+Pi+Qj+R\text{к}+\omega(Ai+Bj+Ck) \qquad\qquad (12)\\
&\omega^2[-(aa_1+bb_1+cc_1)+i(bc_1-b_1c)+j(ca_1-c_1a)+k(ac_1-a_1b)]
\end{aligned}
$$

гдѣ P,Q,R,A,B,C суть координаты бивектора $V\alpha\beta$ (форм. 8). Разсматривая это выраженіе, мы видимъ прежде всего, что должны нѣсколько расширить значеніе символа ω, который пока имѣетъ только смыслъ какъ факторъ вектора или бивектора, теперь же, во второмъ членѣ, является множителемъ нѣкоторой скаларной величины. Припишемъ, поэтому, символу ω еще одно значеніе: будемъ считать его нѣкоторой комплексной единицей, такъ что первая строка предъидущаго выраженія будетъ представлять для насъ комплексное число вида $S_0+\omega S_1$. Сравнивая его съ выраженіемъ (7), мы видимъ, что оно отличается отъ $S\alpha\beta$ только тѣмъ, что вмѣсто k въ немъ стоитъ символъ ω; k означало у насъ неопредѣленную величину, будемъ считать теперь это k за символъ ω и сообразно съ этимъ видоизмѣнимъ опредѣленіе скаларнаго произведенія бивекторовъ β на α т. о.:

Скаларнымъ произведеніемъ бивектора β на бивекторъ α, мы будемъ наз. комплексное число

$$S\alpha\beta=-(pp_1+qq_1+rr_1)-\omega(pa_1+qb_1+rc_1+p_1a+q_1b+r_1c) \quad 13.$$

Итакъ первая строка предъидущаго выраженія, взятая отдѣльно, есть $S\alpha\beta$.

Вторая строка представляетъ комплексное число, опредѣляющее $V\alpha\beta$ и слѣд. первыя двѣ строки мы можемъ представить въ видѣ $S\alpha\beta+V\alpha\beta$.

Если мы возьмемъ новую точку приведенія и составимъ изъ новыхъ координатъ бивекторовъ α и β выраженіе (12), то изъ §§ 8 и 12 будетъ слѣдовать, что первая строка новаго выраженія по прежнему будетъ представляться $S\alpha\beta$, что вторая строка будетъ комплекснымъ числомъ, опредѣляющимъ тотъ же бивекторъ $V\alpha\beta$ относительно новой системы координатъ, такъ что первыя двѣ *строки будутъ имѣть для насъ* прежнее значеніе $S\alpha\beta + V\alpha\beta$. Что же касается до кватерніона, на который умножается ω^2, то съ перемѣной точки приведенія онъ будетъ измѣняться. Поэтому, если мы хотимъ выраженіе (12) назвать произведеніемъ β на α и хотимъ, чтобы оно удовлетворяло условію B, то мы должны совершенно отбросить членъ $\omega^2\alpha_1\beta_1$, иначе говоря должны символу ω приписать еще одно свойство:

Всякое выраженіе, будучи дважды умножено на символъ ω, исчезаетъ, или $\omega^2 = 0$.

При этомъ условіи, какова бы ни была координатная система, къ которой мы относимъ бивекторы α и β, предъидущее выраженіе имѣетъ видъ $S\alpha\beta + V\alpha\beta$. Если мы означимъ его буквами α и β, поставивъ ихъ рядомъ, и условимся складывать такія выраженія такъ, какъ если бы ω было не опредѣленной величиной, то легко видѣть, что

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma; \quad (\alpha+\gamma)\beta = \alpha\beta + \gamma\beta,$$

гдѣ γ есть какой либо бивекторъ. Т. о. выраженіе $\alpha\beta$ будетъ удовлетворяетъ и требованію A, и мы можемъ назвать его произведеніемъ β на α. Группируя иначе члены $\alpha\beta$ имѣемъ:

$$\alpha\beta = \alpha_0\beta_0 + \omega(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)$$

или

$$\alpha\beta = \mathrm{q} = \mathrm{q}_0 + \omega\mathrm{q}_1, \tag{14}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \mathrm{q}_0 &= -(pp_1 + qq_1 + rr_1) + Pi + Qj + Rk \\ \mathrm{q}_1 &= -(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c) + Ai + Bj + Ck \end{aligned} \tag{15}$$

Выраженіе вида (14) было названо Clifford'омъ бикватерніономъ (Preliminary Sketh of Biquaternions). Часть его, состоящая изъ членовъ, не умноженныхъ на символы i, j, k, наз. скаларною частью, и означается буквой S, остальная же часть векторною частью и означается буквой V.

Итакъ мы можемъ резюмировать результаты настоящей главы слѣдующимъ образомъ:

Произведеніе бивектора β на бивекторъ α есть бикватерніонъ $q=q_0+\omega q_1$, гдѣ q_0 и q_1 суть кватерніоны, опредѣляемые формулами (15), а символъ ω—комплексная единица, обладающая слѣдующими свойствами:

I. *умножая на ω бивекторъ параметра нуль, мы получаемъ бивекторъ безконечно большаго параметра,*

II. *квадратъ ω равенъ нулю: $\omega^2=0$.*

Какова бы ни была координатная система, къ которой мы относимъ бивекторы α и β, скалярная часть q не измѣняется, векторная же часть всегда представляетъ комплексное число, опредѣляющее одинъ и тотъ же бивекторъ, отнесенный къ соотвѣтствующей системѣ координатъ.

Скалярная часть бикватерніона q есть скалярное произведеніе, векторная часть опредѣляетъ векторное произведеніе β на α.

Глава II.

18. *Комплексныя числа вида $a_0+\omega a_1, \omega^2=0$.* Чтобы установить законы операцій надъ бикватерніонами, мы обратимся прежде всего къ изученію комплексныхъ чиселъ вида $a_0+\omega a_1$, гдѣ a_0 и a_1 суть нѣкоторыя дѣйствительныя, или мнимыя числа $c+d\sqrt{-1}$, а ω комплексная единица, обладающая свойствомъ $\omega^2=0$. Означая комплексное число $a_0+\omega a_1$ одной буквой a, будемъ наз. a_0 *главною частью*, a_1 *моментомъ* и отношеніе $a_1:a_0$ *параметромъ* числа a; этотъ послѣдній мы будемъ означать буквой P, ставя ее передъ a, такъ что $Pa=a_1:a_0$. Условимся говорить, что число a становится вещественнымъ, когда a_1 обращается въ нуль. Числа a_0 и ωa_1 неприводимы одно къ другому, а потому $a=0$ тогда и только тогда, когда $a_0=a_1=0$ и два числа $a=a_0+\omega a_1$, $b=b_0+\omega b_1$ равны только при $a_0=b_0$ и $a_1=b_1$.

Сумму чиселъ a и b мы опредѣлимъ формулой:

$$a+b=a_0+b_0+\omega(a_1+b_1), \tag{1}$$

изъ которой видимъ, что $a+b=b+a, a+(b+c)=(a+b)+c$, т. е. что сложеніе коммутативно и ассоціативно.

Въ силу свойства $\omega^2=0$, произведеніе b на a выразится комплекснымъ числомъ такого же типа:

$$ab=a_0b_0+\omega(a_1b_0+a_0b_1),$$

отсюда имѣемъ:

$$ab=ba\,,\quad a(bc)=(ab)c \tag{2}$$

$$a(b+c)=ab+ac,(a+c)b=ab+cb,$$

т. е. система чиселъ вида $a_0+\omega a_1$ есть замкнутая система, операція умноженія коммутативна, ассоціативна и по отношенію къ сложенію дистрибутивна.

Опредѣляя операціи вычитанія, дѣленія и извлеченія корня, какъ операціи обратныя сложенію, умноженію и возвышенію въ степень, имѣемъ:

$$a-b=a_0-b_0+\omega(a_1-b_1)$$

$$\frac{b}{a}=\frac{b_0}{a_0}+\frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_0^2}\omega \tag{3}$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{a_0}\,\left(1+\frac{a_1}{2a_0}\omega\right)$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

I. Основныя операціи подъ числами вида $a_0+\omega a_1$ производятся такъ, какъ если бы ω было безконечно малой величиной, квадратами и высшими степенями которой мы пренебрегаемъ.

II. Операціи надъ числами вида $a_0+\omega a_1$ подчиняются законамъ обыкновенной алгебры.

Замѣтимъ, однако, что разсматриваемыя комплексныя числа представляютъ нѣкоторыя особенности, когда главныя части ихъ обращаются въ нуль.

Укажемъ здѣсь слѣдующія:

I. Произведеніе двухъ, или нѣсколькихъ чиселъ обращается въ нуль, или когда одинъ изъ множителей равенъ нулю, или когда главныя части двухъ множителей равны нулю (или, что все равно, параметры двухъ множителей равны безконечности).

II. Параметръ произведенія двухъ, или нѣсколькихъ чиселъ равняется безконечности, когда параметръ *только одного* множителя обращается въ безконечность.

III. Когда $a_0=b_0=0$, то частное $\frac{b}{a}=\frac{b_1}{a_1}+k\omega$, гдѣ k неопредѣленно.

IV. По опредѣленію корня квадратнаго, $\sqrt{0}$ есть неопредѣленное число вида $k\omega$; число k опредѣляется, если въ выраженіи $\sqrt{a}$ извѣстенъ законъ по которому a_0 и a_1 приближаются нулю.

19. *Функціи отъ комплексныхъ чиселъ вида* $a=a_0+\omega a_1$. Всякое выраженіе вида $f(a_0,a_1)+\omega f_1(a_0,a_1)$, гдѣ $f(a_0a_1)$ и $f_1(a_0,a_1)$ суть нѣкоторыя функціи отъ a_0,a_1, есть комплексное число, принадлежащее къ области разсматриваемыхъ здѣсь чиселъ и зависитъ отъ $a=a_0+\omega a_1$. Слѣдуя за G. Scheffers'омъ (Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhlichen complexen Functionen, Berichte der Sächsischen Gesellschaft, 1893 и 94), такое выраженіе мы только тогда будемъ называть функціей отъ комплекснаго перемѣннаго $a=a_0+\omega a_1$, когда отношеніе его безконечно малаго приращенія къ соотвѣтствующему приращенію перемѣннаго независимаго $da=da_0+\omega da_1$:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}+\frac{\partial f}{\partial a_1}\,\frac{da_1}{da_0}+\omega\left[\frac{\partial f_1}{\partial a_0}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial a_1}-\frac{\partial f}{\partial a_0}\right)\frac{da_1}{da_0}-\frac{\partial f}{\partial a_1}\left(\frac{da_1}{da_0}\right)^2\right]$$

не зависитъ отъ отношенія $da_1 : da_0$, каковы бы ни были a_0 и a_1. Легко видѣть, что при такомъ опредѣленіи самый общій видъ функціи отъ a будетъ:

$$f(a_0)+\omega[a_1f'(a_0)+f_1(a_0)] \tag{4}$$

гдѣ $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$—произвольныя функціи отъ a_0.

Подобнымъ же образомъ, опредѣляя функцію отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ $a=a_0+\omega a_1$, $b=b_0+\omega b_1$, $c=c_0+\omega c_1,\ldots$ какъ выраженіе $f(a_0,a_1,b_0,b_1,\ldots)+\omega f_1(a_0,b_0,a_1,b_1,\ldots)$, которое было бы функціей каждаго изъ перемѣнныхъ, взятаго въ отдѣльности, мы найдемъ, что самый общій видъ функціи отъ $a,b,c,\ldots$ таковъ:

$$f(a_0,b_0,c_0,\ldots)+\omega\left[a_1\,\frac{\partial f}{\partial a_0}+b_1\,\frac{\partial f}{\partial b_0}+c_1\,\frac{\partial f}{\partial c_0}+\ldots+f_1(a_0,b_0,c_0,\ldots)\right] \tag{5}$$

гдѣ f и f_1—произвольныя функціи отъ $a_0,b_0,c_0,\ldots$

Разсматривая функцію отъ одной независимой перемѣнной, мы видимъ, что функція, вообще говоря, не дѣлается вещественной, когда перемѣнное $a=a_0+\omega a_1$ становится вещественнымъ, т. е. когда $a_1=0$, такъ что въ области комплексныхъ чиселъ разсматриваемаго типа всякое выраженіе $F(a_0)=f(a_0)+\omega f_1(a_0)$, мы должны считать функціей отъ a_0. Понятно, что производной этой функціи будетъ $F'(a_0)=f'(a_0)+\omega f_1'(a_0)$ и интеграломъ — $F^{-1}(a_0)=f^{-1}(a_0)+\omega f_1^{-1}(a_0)+C$, гдѣ $f^{-1}(a_0)$ и $f_1^{-1}(a_0)$ суть интегралы отъ $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$ и C—произвольная постоянная.

Изъ формулы (4) слѣдуетъ далѣе, что функція отъ a вполнѣ опредѣляется двумя функціями $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$. Но функція отъ a принимаетъ видъ $f(a_0)+\omega f_1(a_0)$, когда перемѣнная становится вещественною, и потому функціи $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$ будутъ намъ извѣстны, если извѣстны значенія функціи отъ $a=a_0+\omega a_1$ при вещественныхъ значеніяхъ комплексной перемѣнной. Итакъ *функція отъ комплексной перемѣнной вполнѣ опредѣляется, если намъ даны ея значенія для вещественныхъ значеній перемѣнной независимой.*

Чтобы по данному значенію функціи отъ вещественнаго перемѣннаго $F(a_0)=f(a_0)+\omega f_1(a_0)$ получить ея выраженіе $F(a)$, когда перемѣнная становится комплексной, мы должны къ $F(a_0)$ присоединить членъ $\omega a_1 f'(a_0)=\omega a_1 F'(a_0)$ (см. форм. 4), и слѣд.:

$$F(a)=F(a_0)+\omega a_1 F'(a_0). \qquad (6)$$

Сказанное относительно функціи отъ одной независимой перемѣнной справедливо и для функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ: функція $F(a_0,b_0,c_0,...)=f(a_0,b_0,c_0,...)+\omega f_1(a_0,b_0,c_0,...)$ отъ вещественныхъ перемѣнныхъ, когда перемѣнныя остановятся комплексными, принимаетъ видъ

$$F(a,b,c,...)=F(a_0b_0c_0,...)+\omega\left[a_1\frac{\partial F}{\partial a_0}+b_1\frac{\partial F}{\partial b_0}+c_1\frac{\partial F}{\partial c_0}+\dots\right] \qquad (7)$$

Формулы, опредѣляющія $F(a)$ и $F(a,b,c,...)$, мы очевидно получаемъ, если въ выраженіяхъ функцій. $F(a_0)$ и $F(a_0,b_0,c_0,...)$ вмѣсто $a_0,b_0c_0,...$ подставимъ $a,b,c,...$ и затѣмъ, принявъ ω за безконечно малую величину, разложимъ функціи

F въ строку по степенямъ ω и ограничимся первою степенью ω.

Изъ формулъ (4) и (5), или (6) и (7) вытекаютъ слѣдующія свойства функцій отъ комплексныхъ перемѣнныхъ.

I. Если $b=b_0+\omega b_1$ есть функція отъ $a=a_0+\omega a_1$, то обратно a есть функція отъ b.

II. Если $c=c_0+\omega c_1$ есть функція отъ b, и b—функція отъ a, то c будетъ функціей отъ a.

III. Если комплексныя перемѣнныя a и b связаны между собой ур. $F(a,b)=0$, гдѣ $F(a,b)$ есть функція отъ a и b, то b будетъ функціей отъ a и a—функціей отъ b.

Опредѣляя производную отъ $F(a)$ какъ отношеніе приращенія, получаемаго функціей $F(a)$ при безконечно маломъ приращеніи a: $da=da_0+da_1$, къ этому послѣднему, не трудно показать, что

$$F'(a)=F'(a_0)+\omega a F''(a_0)=f'(a_0)+\omega[a_1 f''(a_0)+f_1{}'(a_0)].$$

Производная, какъ видимъ, есть также функція отъ a.

Если интенграломъ функціи $F(a)$ мы назовемъ такую функцію отъ a, означимъ ее черезъ $F^{-1}(a)$, что ея производная равняется $F(a)$, то

$$F^{-1}(a)=F^{-1}(a_0)+\omega a_1 F(a_0)+C=$$
$$=f^{-1}(a_0)+\omega[a_1 f(a_0)+f^{-1}(a_0)]+C,$$

гдѣ $C=C_0+\omega C_1$ есть произвольная постоянная.

Въ дальнѣйшемъ для насъ особенно важны будутъ тѣ функціи, которыя при $a=a_0$ ($a_1=0$) становятся вещественными. Изъ предъидущаго ясно, что каждой вещественной функціи отъ одной, или нѣсколькихъ вещественныхъ перемѣнныхъ $f(a_0)$, или $f(a_0,b_0,c_0,\ldots)$ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная функція, когда перемѣнныя становятся комплексными, а именно:

$$f(a)=f(a_0)+\omega a_1 f'(a_0)$$

$$f(a,b,c,\ldots)=f(a_0,b_0,c_0,\ldots)+\omega\left[a_1\frac{\partial f}{\partial a_0}+b_1\frac{\partial f}{\partial b_0}+c_1\frac{\partial f}{\partial c_0}+\ldots\right],$$

отсюда $Pf(a,b,c,\ldots)=a_1\dfrac{\partial lgf}{\partial a_0}+b_1\dfrac{\partial lgf}{\partial b_0}+c_1\dfrac{\partial lgf}{\partial c_0}+\ldots$

Изъ предъидущихъ формулъ мы получимъ слѣдующія выраженія для косинуса, синуса, логариѳма и т. д. отъ комплексныхъ перемѣнныхъ $a,b,c,\ldots$:

$$
\begin{array}{ll}
csa=csa_0-\omega a_1\,sna_0 & Pcsa=-a_1\,tga_0\\
sna=sna_0+\omega a_1\,csa_0 & Psna=\;\;a_1\,ctga_0\\
tga=\dfrac{sna}{csa}=tga_0+\;\omega\,\dfrac{a_1}{cs^2a_0} & Ptga=\dfrac{2a_1}{sn2a_0}\\
lga=lga_0+\;\omega\,\dfrac{a_1}{a_0}=lga_0+\omega Pa & Plga=\dfrac{Pa}{lga_0}\\
a^b=a_0{}^{b_0}[1+\omega(Pa.b_0+lga_0b_1)] & Pa^b=b_0(Pa+lga_0Fb)
\end{array}
\tag{8}
$$

Отсюда имѣемъ рядъ соотношеній:

$$cs^2a+sn^2a=1;\; sn(a+b)=sna\,csb+csa\,snb$$

$$(a^b)^c=a^{bc},\; a^ba^c=a^{b+c} \text{ и т. д., и т. д.}$$

$$\frac{dsna}{da}=csa;\; \frac{dcsa}{da}=-sna;\; \frac{dlga}{da}=\frac{1}{a} \text{ и т. д., и т. д.}$$

20. *Бикватерніоны. Сложеніе и вычитаніе. Скалярная и векторная части бикватерніона.* Опредѣлимъ бикватерніонъ какъ комплексное число вида

$$
\begin{aligned}
\mathrm{q}&=w+ix+jy+kz=\\
&=w_0+\omega w_1+(x_0+\omega x_1)i+(y_0+\omega y_1)j+(z_0+\omega z_1)k
\end{aligned}
\tag{9}
$$

гдѣ i,j,k суть извѣстные Hamilton'овы символы—комплексныя единицы, для которыхъ таблицей умноженія служитъ таблица (9), гл. I. Мы опредѣляемъ т. о. бикватерніонъ какъ кватерніонъ, у котораго коэффиціентами при i,j,k и свободный членъ суть комплексныя числа вышеразсмотрѣннаго типа.

Сумму и разность бикватерніона q и

$$\mathrm{q}'=w'+x'i+y'j+z'k,$$

гдѣ w',x',y',z' суть комплексныя числа, мы опредѣлимъ формулами:

$$\mathrm{q}\pm\mathrm{q}'=w\pm w'+(x\pm x')i+(y\pm y')j+(z\pm z')k \tag{10}$$

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

I. Бикватерніонъ q мы можемъ разсматривать какъ сумму комплексныхъ чиселъ w и $xi+yj+zk$, такъ что, называя w скалярною частью, а $xi+yj+zk$ векторною частью бикватерніона q и означая ихъ соотвѣтственно Sq и Vq, имѣемъ:

$$Sq=w \qquad Vq=xi+yj+zk$$

$$q=Sq+Vq. \tag{11}$$

Бикватерніонъ есть сумма своихъ частей: скалярной и векторной.

Векторную часть, Vq, мы будемъ означать также одной буквой греческаго алфавита,. напр. α, тогда

$$q=w+\alpha \tag{12}$$

II. Принимая во вниманіе слѣдствія изъ формулы (1), находимъ

$$q+q'=q'+q$$

$$q+(q'+q'')=(q+q')+q'',$$

гдѣ q'' какой либо третій бикватерніонъ. Т. о. сложеніе бикватерніоновъ коммутативно и ассоціативно.

21. *Умноженіе. Главная часть и моментъ бикватерніона.* Произведеніемъ бикватерніона q' на q мы называемъ бикватерніонъ, который получится, если мы перемножимъ выраженія q и q' такъ, какъ если бы $i.j,k$ были неопредѣленными величинами (причемъ будемъ обращать вниманіе на порядокъ множителей i,j,k) и затѣмъ воспользуемся таблицей (9) гл. I; тогда мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} qq' = {} & (ww'-xx'-yy'-zz') \\ & +(wx'+w'x+yz'-y'z)i \\ & +(wy'+w'y+zx'-z'x)j \\ & +(wz'+w'z+xy'-x'y)k \end{aligned} \tag{13}$$

Бикватерніонъ q мы будемъ называть множителемъ, а бикватерніонъ q'—множимымъ; слѣдовательно, означая произведенiе q' на q черезъ qq' мы ставимъ множитель передъ множимымъ.

Изъ формулы (13) слѣдуетъ:

I.
$$qq' \neq q'q$$
$$q(q'+q'') = qq' + qq''; \quad (q'+q'')q = q'q + q''q \tag{14}$$
$$q(q'q'') = (qq')q''$$

т. е. операцiя умноженiя бикватернiоновъ дистрибутивна по отношенiю къ сложенiю, ассоцiативна и вообще говоря не коммутативна.

II. Сопоставляя формулы, опредѣляющiя умноженiе и сложенiе бикватернiоновъ, легко видѣть, что члены, изъ которыхъ составляется бикватернiонъ, мы можемъ группировать какъ угодно и т. о. данный бикватернiонъ представлять въ различныхъ формахъ; укажемъ нѣкоторыя, чаще всего нами употребляемыя.

a. Соединяя отдѣльно члены, умноженные на i, j, k, мы имѣемъ бикватерiновъ въ формѣ, употребляемой нами выше (9).

b. Соединяя же вмѣстѣ члены, умноженные на ω, получаемъ:

$$q = q_0 + \omega q_1 = w_0 + x_0 i + y_0 j + z_0 k + \omega(w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k).$$

q_0 будемъ называть главною частью, а q_1—моментомъ бикватернiона q.

c. Написавъ $q = Sq + Vq$ и означивъ главныя части Sq и Vq черезъ $S_0 q$ и $V_0 q$, ихъ моменты черезъ $S_1 q$ и $V_1 q$, имѣемъ:

$$Sq = S_0 q + \omega S_1 q = Sq_0 + \omega Sq_1; Vq = V_0 q + \omega V_1 q = Vq_0 + \omega Vq_1$$
$$q = S_0 q + \omega S_1 q + V_0 q + \omega V_1 q = w_0 + \omega w_1 + \alpha_0 + \omega \alpha_1$$

22. *Дѣленiе. Бикватернiоны сопряженный и обратный. Норма бикватернiона.* Такъ какъ умноженiе не коммутативно, то дѣленiе—операцiя обратная умноженiю—можетъ двухъ типовъ: мы опредѣляемъ дѣленiемъ или множитель по даннымъ множимому и произведенiю, или множимое по даннымъ множителю и произведенiю.

Разсмотримъ сначала частный случай, когда одинъ изъ данныхъ множителей есть скаларное число $a = a_0 + \omega a_1$. Пусть q' данное произведеніе и q'' другой, искомый, множитель. Такъ какъ $aq'' = q''a$, то оба ур. $q''a = q'$ и $aq'' = q'$ имѣютъ одно и то же рѣшеніе, и двѣ вышеупомянутыя операціи становятся тожественными. Слѣдовательно, не боясь недоразумѣній, мы можемъ писать $q'' = q':a = q'/a$, причемъ очевидно, что

$$q'' = \frac{q'}{a} = \frac{w'}{a} + \frac{x'}{a} i + \frac{y'}{b} j + \frac{z'}{c} k.$$

Чтобы къ только что разсмотрѣнному частному случаю привести общій, мы введемъ нѣсколько новыхъ понятій, встрѣчающихся въ теоріи квартеніоновъ.

Бикватерніонъ $Sq - Vq$ будемъ называть сопряженнымъ съ даннымъ $q = Sq + Vq$ и будемъ означать его черезъ Kq, такъ что

$$Kq = Sq - Vq = w - xi - yj - zk. \tag{15}$$

Нормой бикватерніона q—будемъ означать ее черезъ Nq—назовемъ комплексное число, опредѣляемое формулой:

$$Nq = qKq = (Sq + Vq)(Sq - Vq) = (Sq)^2 - (Vq)^2,$$

или

$$Nq = qKq = w^2 + x^2 + y^2 + z^2. \tag{16}$$

Легко видѣть, что $Nq = NKq$.

Бикватерніонъ $Kq:Nq$ будемъ называть обратнымъ къ q; означая его черезъ q^{-1}, имѣемъ:

$$q^{-1} = \frac{Kq}{Nq}. \tag{17}$$

Обозначеніе q^{-1} оправдывается слѣдующими свойствами обратнаго бикватерніона:

$$qq^{-1} = q\frac{Kq}{Nq} = \frac{qKq}{Nq} = 1,$$

$$q^{-1}q = \frac{Kq}{Nq}q = \frac{Kq.q}{Nq} = 1,$$

благодаря которымъ мы можемъ писать $q^{-1} = 1:q = 1/q$.

Пользуясь понятіемъ обратнаго бикватерніона, легко уже рѣшить относительно q'' какъ ур. $q''q = q'$ такъ и ур. $qq'' = q'$. Чтобы опредѣлить q'' изъ перваго ур., мы множимъ на него почленно тожество $q^{-1} = q^{-1}$; получаемъ:

$$q''qq^{-1} = q'q^{-1}, \text{ или } q'' = q'q^{-1} = \frac{q'Kq}{Nq} \qquad (18)$$

Если же мы хотимъ опредѣлить q'' изъ ур. $qq'' = q'$, то множимъ обѣ его части на q^{-1}; тогда мы находимъ:

$$q^{-1}qq'' = q^{-1}q', \text{ или } q'' = q^{-1}q' = \frac{Kq.q'}{Nq} \qquad (19)$$

Замѣтимъ, что q'', опредѣленное какъ неизвѣстный множитель изъ перваго ур. $q''q = q'$, называется обыкновенно частнымъ отъ дѣленія q' на q и означается черезъ $q'/q = \frac{q'}{q}$. Пользуясь этимъ обозначеніемъ мы имѣемъ такія соотношенія:

$$\frac{q'}{q}q = (q'/q)q = q', \text{ но } q\frac{q'}{q} = q(q'/q) \neq q'$$

Что же касается до множимаго q'', опредѣляемаго изъ ур. $qq'' = q'$, то для него не существуетъ особеннаго названія.

23. *Формулы развернутыя и неразвернутыя.* Разсмотрѣвъ основныя операціи надъ бикватерніонами, мы введемъ теперь нѣкоторыя новыя понятія, связанныя съ бикватерніономъ.

Замѣтимъ при этомъ, что многія формулы теоріи бикватерніоновъ мы можемъ писать двояко: или обозначая комплексныя числа, въ нихъ входящія, одною буквой, или вводя въ формулы явнымъ образомъ символъ ω и представляя ихъ въ видѣ $q_0 + \omega q_1$, гдѣ q_0 и q_1 суть, вообще говоря, нѣкоторые кватерніоны. Формулы въ первомъ видѣ, которыя, какъ это мы увидимъ ниже, ничѣмъ не отличаются отъ формулъ теоріи кватерніоновъ, мы будемъ называть неразвернутыми, а во второмъ—развернутыми. Послѣднія легко выводятся изъ первыхъ, если мы вмѣсто комплексныхъ чиселъ $a,b,c,\ldots$, въ нихъ входящихъ, напишемъ $a_0 + \omega a_1, b_0 + \omega b_1, c_0 + \omega c_1,\ldots$ и затѣмъ, принявъ ω за безконечно малую величину, разложимъ полученныя выраженія по степенямъ ω и ограничимся его первой степенью. Въ развернутыхъ формулахъ мы обыкновенно будемъ означать членъ свободный отъ ω значкомъ $_0$, а коэффиціентъ при ω—значкомъ $_1$. Такими обозначеніями мы уже неоднократно пользовались; такъ, бикватерніонъ q, комплексное число a, векторную часть бикватерніона α, Sq и Vq мы писали въ видѣ $q=q_0+\omega q_1$, $a=a_0+\omega a_1$, $\alpha=\alpha_0+\omega\alpha_1$, $Sq=S_0q+\omega S_1q$, $Vq=V_0q+\omega V_1q$.

24. *Параметръ и инваріантъ бикватерніона.* Параметромъ бикватерніона q—будемъ означать его черезъ Pq—мы назовемъ вещественное число, опредѣляемое формулой:

$$Pq=S\frac{q_1}{q_0}=S\frac{q_1Kq_0}{Nq_0}=\frac{Sq_1Sq_0-SVq_1Vq_0}{Nq_0}=\frac{w_0w_1-S\alpha_0\alpha_1}{w_0^2-\alpha_0^2}, \qquad (20)$$

или

$$Pq=\frac{w_0w_1+x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1}{w_0^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2}. \qquad (21)$$

Отсюда имѣемъ формулы для параметровъ скалярной и векторной частей бикватерніона:

$$PSq=\frac{S_1q}{S_0q}, \text{ или } \quad Pw=\frac{w_1}{w_0}. \qquad (22)$$

$$PVq=\frac{SV_0qV_1q}{(V_0q)^2}, \text{ или } P\alpha=\frac{S\alpha_0\alpha_1}{\alpha_0^2}. \qquad (23)$$

Формулы для Pw и $P\alpha$ мы можемъ разсматривать какъ частные случаи формулы (20),—первую, когда $Vq=\alpha=0$,—вторую, когда $Sq=w=0$. Въ первомъ случаѣ бикватерніонъ обращается въ комплексное число $w=w_0+\omega w_1$, и мы видимъ изъ формулы (22), что опредѣленіе параметра бикватерніона не противорѣчитъ опредѣленію параметра комплекснаго числа w [см. § 18], а содержитъ это послѣднее какъ частный случай. Помощью формулъ (22) и (23) мы можемъ представить (20) въ видѣ:

$$Pq=\frac{w_0^2Pw-\alpha_0^2P\alpha}{w_0^2-\alpha_0^2}. \qquad (24)$$

Выраженіе, стоящее въ числителѣ Pq, мы будемъ называть инваріантомъ бикватерніона q. Если инваріантъ бикватерніона равняется нулю, но главная часть, q_0, не равна нулю, то $Pq=0$; если главная часть бикватерніона, $q_0=0$, но моментъ его, $q_1 \neq 0$, то $Pq=\infty$.

25. *Тензоръ и верзоръ бикватерніона.* Тензоромъ бикватерніона q—будемъ означать его черезъ Tq—назовемъ комплесное число, опредѣляемое формулой:

$$Tq=\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}, \tag{25}$$

гдѣ корень берется со знакомъ $+$, формулой, которая, будучи развернута по правиламъ § 18, принимаетъ видъ:

$$Tq=\sqrt{w_0{}^2+x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}\left(1+\omega\,\frac{w_0w_1+x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1}{w_0{}^2+x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}\right), \tag{26}$$

или, такъ какъ $Tq_0=\sqrt{w_0{}^2+x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}$,

$$Tq=T_0q+\omega T_1q=Tq_0(1+\omega Pq), \tag{27}$$

откуда $T_0q=Tq_0,\quad T_1q=Tq_0Pq,$

$$PTq=\frac{T_1q}{T_0q}=Pq. \tag{28}$$

Такимъ образомъ, *тензоръ бикватерніона есть комплексное число, главная часть котораго = тензору главной части бикватерніона, а параметръ = параметру бикватерніона* [1].

Изъ формулы (27) мы имѣемъ:

$$TSq=Tw=T_0w+\omega T_1w=Tw_0(1+\omega Pw) \tag{29}$$

$$TVq=Ta=T_0a+\omega T_1a=Ta_0(1+\omega Pa) \tag{30}$$

По формулѣ (25), опредѣляющей Tq, $Tw_0=\sqrt{w_0{}^2}$, т. е. равняется абсолютной величинѣ w_0, а потому изъ формулы (29) слѣдуетъ, что $Tw=w$, если главная часть числа w положительна, и $Tw=-w$, если она отрицательна.

---

[1] Наше опредѣленіе тензора бикватерніона не совпадаетъ съ опредѣленіемъ A. Buchheim'a (A memoir, § 2).

Замѣчая, что по формуламъ (29) и (30) $(T_0 a)^2 = (T a_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = -a_0^2$ и $(T_0 w)^2 = (T w_0)^2 = w_0^2$, мы можемъ формулу (24) представить въ видѣ:

$$Pq = \frac{T_0 w T_1 w + T_0 a T_1 a}{(T_0 w)^2 + (T_0 a)^2} \tag{31}$$

Сравнивая ур., опредѣляющее Nq (16) съ ур. (25), мы находимъ:

$$Nq = (Tq)^2, \tag{32}$$

или, возвышая обѣ части равенства (27) въ квадратъ и замѣчая, что $(Tq_0)^2 = Nq_0$,

$$Nq = N_0 q + \omega N_1 q = Nq_0 (1 + 2Pq), \tag{33}$$

откуда

$$PNq = 2Pq \tag{34}$$

Такимъ образомъ, *норма бикватерніона есть комплексное число, главная часть котораго = нормѣ главной части бикватерніона, а параметръ = двойному параметру бикватерніона.*

Верзоромъ бикватерніона q—будемъ означать его черезъ Uq—мы будемъ называть бикватерніонъ, опредѣляемый формулой:

$$Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + ix + jy + kz}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{35}$$

изъ которой имѣемъ

$$q = Tq . Uq, \tag{36}$$

т. е. *всякій бикватерніонъ разлагается на произведеніе его тензора и верзора.*

26. *Уголъ, поворотъ и шагъ бикватерніона.* Если числа $a = a_0 + \omega a_1$ и $t = t_0 + \omega t_1$ связаны между собой уравненіемъ $a^2 + t^2 = 1$, то всегда можно подыскать такое комплексное число $\theta = \theta_0 + \omega\theta_1$, что $cs\theta = a$ и $sin\theta = t$. Дѣйствительно, эти два ур. эквивалентны четыремъ ур. [см. § 19, (8)]:

$$cs\theta_0 = a_0, -\theta_1 sn\theta_0 = a_1$$

$$sn\theta_0 = t_0, \quad \theta_1 cs\theta_0 = t_1,$$

которыя вслѣдствіе условія $a^2+t^2=1$, распадающагося на два: $a_0{}^2+t_0{}^2=1$ и $a_0a_1+t_0t_1=0$, совмѣстны и, слѣдовательно, допускаютъ рѣшеніе. Такъ какъ θ_0 опредѣляется по синусу и косинусу, то это рѣшеніе будетъ вполнѣ опредѣленнымъ, если мы потребуемъ, чтобы θ_0 заключалось въ предѣлахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$.

Два комплексныхъ числа $w: T\mathrm{q}=a$ и $\sqrt{x^2+y^2+z^2}: T\mathrm{q}=t$ очевидно удовлетворяютъ условію $a^2+t^2=1$, а потому мы можемъ опредѣлить $\theta=\theta_0+\omega\theta_1$ такъ, что

$$T\mathrm{q}cs\theta=w \tag{37}$$

$$T\mathrm{q}sn\theta=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Комплексное число θ, опредѣляемое этими формулами, мы будемъ называть угломъ бикватерніона и означать черезъ $\angle\,\mathrm{q}$; его главную часть, θ_0, назывемъ поворотомъ, а моментъ θ_1—шагомъ бикватерніона.

Чтобы ввести уголъ θ въ выраженіе бикватерніона, положимъ

$$\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\varepsilon; \tag{38}$$

тогда мы будемъ имѣть $T\varepsilon=1$, $\varepsilon^2=-1$ и

$$U\mathrm{q}=cs\theta+\varepsilon sn\theta \tag{39}$$

$$\mathrm{q}=T\mathrm{q}(cs\theta+\varepsilon sn\theta) \tag{40}$$

27. *Основныя формулы теоріи бикватерніоновъ.* Выраженіе (9) для бикватерніона q представляетъ его въ видѣ кватерніона, у котораго коэффиціентами служатъ комплексныя числа вида $a_0+\omega a_1$. Основныя операціи надъ бикватерніонами и знаки S, V, K, N, q^{-1}, T, U, $\angle\,\mathrm{q}$, мы опредѣляемъ формулами (10, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 25, 35, 37), которыя по внѣшнему виду тожественны съ формулами, опредѣляющими соотвѣтствующія операціи и знаки въ теоріи кватерніоновъ. Все различіе между формулами теоріи кватерніоновъ и нашими заключается только въ томъ значеніи, которое мы приписываемъ буквамъ w,x,y,z,w',x',y',z': въ теоріи кватерніоновъ

эти буквы означаютъ вещественныя числа, теперь же мы подъ ними должны подразумѣвать числа комплексныя вида $a_0 + \omega a_1$. Но операціи надъ этими послѣдними подчиняются, какъ это мы видѣли [см. § 18], тѣмъ же основнымъ законамъ, какъ и операціи надъ числами вещественными, а потому всѣ формулы теоріи кватерніоновъ, представляющія слѣдствія вышеуказанныхъ, всѣ формулы, въ которыхъ входятъ основныя дѣйствія, знаки S, V, K, N, q^{-1}, T, U будутъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если мы подъ вещественными числами и кватерніонами будемъ подразумѣвать комплексныя числа и бикватерніоны.

Кромѣ знаковъ $S, V, K, N, q^{-1} T, U$ мы ввели еще знакъ P, которому нѣтъ соотвѣтствующаго въ теоріи кватерніоновъ, ибо параметръ кватерніона равенъ нулю. Поэтому къ тѣмъ формуламъ, о которыхъ мы только что говорили, мы должны, въ теоріи бикватерніоновъ присоединить еще цѣлый рядъ, въ которыхъ вышеуказанные знаки и операціи комбинируются со знакомъ P. Выведемъ нѣкоторыя наиболѣе важныя изъ нихъ, доказавъ предварительно нѣкоторыя изъ формулъ теоріи кватерніоновъ.

По опредѣленію сопряженнаго бикватерніона [§ 22], мы имѣемъ:

$$K(qq') = S(qq') - V(qq') = ww' + Saa' - wa' - w'a - Vaa',$$

далѣе,

$$Kq'.Kq = (w' - a')(w - a) = ww' + Sa'a - wa' - w'a + Va'a,$$

но $Saa' = Sa'a$, $Vaa' = -Va'a$, слѣдовательно,

$$Kqq' = Kq'Kq, \tag{41}$$

т. е. *бикватерніонъ, сопряженный съ произведеніемъ двухъ бикватерніоновъ, равняется произведенію сопряженныхъ бикватерніоновъ, взятыхъ въ обратномъ порядкѣ.*

По опредѣленію нормы [§ 22], $Nqq' = qq'K(qq')$. Отсюда по предъидущей формулѣ

$$Nqq' = qq'Kq'Kq' = qNq'Kq = NqNq', \tag{42}$$

т. е. *норма произведенія равняется произведенію нормъ.* Извлекая изъ обѣихъ частей послѣдняго равенства корень крадратный, по (32) имѣемъ:

$$Tqq' = TqTq', \tag{43}$$

т. е. *тензоръ произведенія равняется произведенію тензоровъ.* Развернувъ это равенство, мы находимъ по (27):

$$T_0(qq')[1+\omega P(qq')] = T_0q(1+\omega Pq)T_0q'(1+\omega Pq'),$$

откуда, сравнивая члены свободные отъ ω и коэффиціенты при ω въ обѣихъ частяхъ, получаемъ:

$$Pqq' = Pq + Pq' \tag{44}$$

т. е. *параметръ произведенія равняется суммѣ параметровъ.* Наконецъ изъ (36) имѣемъ:

$$qq' = T(qq')U(qq') = TqUqTq'Uq' = TqTq'UqUq',$$

но $Tqq' = TqTq'$, а потому

$$Uqq' = UqUq', \tag{45}$$

т. е. *верзоръ произведенія равняется произведенію верзоровъ.*

Изъ формулъ (42, 43, 44, 45) легко находимъ:

$$N\frac{q'}{q} = Nq':Nq, \quad (46) \qquad T\frac{q'}{q} = Tq':Tq, \tag{47}$$

$$P\frac{q'}{q} = Pq' - Pq, \quad (48) \qquad U\frac{q'}{q} = Uq':Uq. \tag{49}$$

Пользуясь формулой (48) и припоминая, что $q^{-1} = 1: q$, $q^{-1} = Kq:Nq, PNq = 2Pq$, мы находимъ:

$$Pq^{-1} = -Pq, \quad (50) \qquad PKq = Pq \tag{51}$$

Выраженіе (40) для бикватерніона даетъ намъ $Sq = Tqcs\theta$, $Vq = Tqsn\theta\varepsilon$, откуда помощью формулъ (44, 28, 8), замѣчая, что изъ равенства $T\varepsilon = 1$ слѣдуетъ $P\varepsilon = 0$, мы получаемъ:

$$PSq = Pq - \theta_1 tg\theta_0 \quad (52) \qquad PVq = Pq + \theta_1 ctg\theta_0, \tag{53}$$

гдѣ θ_0 есть поворотъ и θ_1 шагъ бикватерніона q. Изъ этихъ формулъ легко вывести, что $P\mathrm{q}$ *заключается между* $PS\mathrm{q}$ *и* $PV\mathrm{q}$ и что *шагъ бикватерніона*, θ_1, *обращается въ нуль* (*при конечныхъ* $PS\mathrm{q}$ *и* $PV\mathrm{q}$) *тогда и только тогда, когда* $PS\mathrm{q}=PV\mathrm{q}$.

Изъ (35 и 47) имѣемъ: $TU\mathrm{q}=T\mathrm{q}:T(T\mathrm{q})$, но $T(T\mathrm{q})=T\mathrm{q}$ [см. замѣчаніе къ (29)], а потому

$$TU\mathrm{q}=1, \qquad (54)$$

или, развернувъ первую часть,

$$T_0U\mathrm{q}(1+\omega PU\mathrm{q})=1,$$

откуда

$$T_0U\mathrm{q}=1,\ PU\mathrm{q}=0 \qquad (55)$$

28. *Степень и лагариѳмъ бикватерніона.* До сихъ поръ мы не разсматривали показательной, степенной и логариѳмической функцій отъ бикватерніона. Теперь, на основаніи вышеизложеннаго, ввести понятіе объ этихъ функціяхъ уже не трудно: мы должны только въ тѣхъ формулахъ теоріи кватерніоновъ, которыя опредѣляютъ упомянутыя функціи, вмѣсто кватерніона, его угла, тензора и верзора подразумѣвать бикватерніонъ и его уголъ, тензоръ и верзоръ, чтобы имѣть формулы, опредѣляющія соотвѣтствующія функціи отъ бикватерніона. Пояснимъ сказанное примѣрами.

На страницѣ 364 „Elements of Quaternions“ Hamilton даетъ такое опредѣленіе степени α^t „произвольнаго вектора основанія α съ произвольнымъ скалярнымъ показателемъ t“. „Степень“ говоритъ Hamilton„ есть, вообще говоря, кватерніонъ, который можетъ быть разложенъ на два множителя, тензоръ и верзоръ такимъ образомъ:

$$\alpha^t=T\alpha^t.U\alpha^t; \qquad \text{I.}$$

причемъ $T\alpha^t$ означаетъ ариѳметическое значеніе степени t положительнаго числа $T\alpha$, представляющаго (какъ обыкновенно) длину линіи-основанія α; а $U\alpha^t$ означаетъ верзоръ, который всякую линію ρ перпендикулярную къ α поворачиваетъ вокругъ этой послѣдней, какъ вокругъ оси, на t прямыхъ угловъ, или квадрантовъ, въ положительномъ или отрицательномъ направленіи, смотря по тому, будетъ ли скалярный показатель t положительнымъ или отрицательнымъ числомъ". Короче говоря, $U\alpha^t$ опредѣляется формулой (l. c., VII, p. 365):

$$U\alpha^t = cs\frac{t\pi}{2} + U\alpha sn\frac{t\pi}{2} \qquad \text{VII.}$$

Совершенно такими же двумя формулами (I и VII) мы можемъ опредѣлить степень α^t, имѣющую показателемъ комплексное число $t = t_0 + \omega t_1$, а основаніемъ бикватерніонъ $\alpha = a_0 + \omega \alpha_1$, скалярная часть котораго равняется нулю. При этомъ степень $T\alpha^t$ найдется по одной изъ формулъ (8) § 19, а $U\alpha^t$ будемъ представлять нѣкоторый верзоръ. Изъ формулы (I) слѣдуетъ, что всякій бикватерніонъ $q = Tq(cs\theta + \varepsilon sn\theta)$ можетъ быть представленъ въ видѣ $q = \alpha^t$: мы должны только опредѣлить t и α по формуламъ:

$$t = \frac{2\theta}{\pi},\ T\alpha = (Tq)^{1/t}, U\alpha = \varepsilon, \alpha = T\alpha . U\alpha.$$

Подобнымъ же образомъ логариѳмъ бикватерніона q и его степень съ показателемъ $t = t_0 + \omega t_1$ могутъ быть опредѣлены двумя формулами:

$$lgq = lgTq + \angle q . Uq, \qquad \text{III.}$$

и

$$q^t = (Tq)^t . (cst\angle q + UVq . snt\angle q). \qquad \text{XXIII.}$$

гдѣ $lgTq$ найдется по одной изъ формулъ (8) § 19, тожественными съ тѣми, помощью которыхъ Hamilton (l. c; III, p. 385; XXIII, p. 386) опредѣляетъ логафиѳмъ и степень кватерніона.

29. *Неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ.* Всѣ формулы теоріи кватерніоновъ представляютъ слѣдствія тѣхъ основныхъ, которыя, какъ мы видѣли, имѣютъ мѣсто и въ теоріи бикватерніоновъ, или нѣкоторыхъ новыхъ, опредѣляющихъ новыя, еще неразсмотрѣнныя нами, понятія, связанныя съ кватерніономъ. Поэтому, если мы, встрѣчаясь съ новымъ понятіемъ теоріи кватерніоновъ (напр. дифференціалъ функціи кватерніона) и формулой, его опредѣляющей, будемъ всякій разъ вводить соотвѣтствующее понятіе въ теорію бик-

ватерніоновъ помощью той же самой формулы подобно тому, какъ это было сдѣлано въ выше данныхъ примѣрахъ относительно $\alpha^t, lg q, q^t$, то тѣ формулы, которыя получатся изъ этихъ новыхъ путемъ ихъ комбинацій между собой и съ ранѣе выведенными, будутъ тожественны съ соотвѣтствующими формулами теоріи кватерніоновъ.

Итакъ, всѣ безъ исключенія формулы теоріи кватерніоновъ представляютъ неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ.

Глава III.

30. *Бивекторъ, его точка приведенія и ось.* Во второй главѣ мы разсматривали бикватерніонъ какъ комплексное число, не связывая съ нимъ никакихъ геометрическихъ представленій. Мы перейдемъ теперь къ изученію той связи, которая существуетъ между бикватерніонами съ одной стороны и бивекторами съ другой. Начнемъ съ того, что разсмотримъ геометрическое значеніе нѣкоторыхъ знаковъ, введенныхъ въ предъидущей главѣ, и перенесемъ нѣкоторыя понятія, связанныя съ бивекторами, на комплексныя числа вышеразсмотрѣннаго типа.

Возьмемъ нѣкоторую опредѣленную точку O за начало прямоугольной системы координатъ и будетъ комплексное число:

$$\gamma = li + mj + nk$$

изображать векторомъ, назовемъ его γ, котораго начало находится въ точкѣ O и проэкціи суть l, m, n; комплексное же число:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1 = pi + qj + rk + \omega(ai + bj + ck) \qquad (1)$$

будемъ изображать бивекторомъ, назовемъ его α, для котораго точка O служитъ точкой приведенія и величины p, q, r, a, b, c Plücker'овыми координатами. Комплексное число (1) мы называемъ также бивекторомъ и точку O его точкой приведенія.

Если мы за точку приведенія бивектора α возьмемъ точку O', которая находится въ концѣ вектора γ, и проведемъ черезъ нее оси соотвѣтственно параллельныя старымъ осямъ, то бивекторъ α относительно новой системы координатъ будетъ опредѣляться комплексным числомъ:

$$p'i+q'j+r'k+\omega(a'i+b'j+c'k),$$

гдѣ p',q',r',a',b',c' связаны со старыми координатами бивектора α формулами (4) § 2, пользуясь которыми мы можемъ представить это число въ видѣ:

$$pi+qj+rk+$$
$$+\omega[(ai+bj+rk)+(qn—rm)i+(rl—pn)j+(pm—ql)k]$$

или

$$\alpha_0+\omega(\alpha_1+V\alpha_0\gamma).$$

Оба числа $\alpha_0+\omega\alpha_1$ и $\alpha_0+\omega(\alpha_1+V\alpha_0\gamma)$ опредѣляютъ одинъ и тотъ же бивекторъ α, а потому оба мы можемъ означить одной и той же буквой α, помня, что для перваго точкой приведенія служитъ точка O, а для втораго—точка O'. Такимъ образомъ

$\alpha=\alpha_0+\omega\alpha_1,$ точка приведенія O, (2)

$\alpha=\alpha_0+\omega(\alpha_1+V\alpha_0\gamma),$ точка приведенія O'. $[OO'=\gamma]$

Ось бивектора α мы назовемъ осью комплекснаго числа (1), опредѣляющаго бивекторъ. Ось $\alpha=\alpha_0+\omega\alpha_1$, какъ мы знаемъ [см. § 1], параллельна вектору α_0 и проходитъ черезъ точку $(x_0y_0z_0)$ [см. формулы (2) § 1], т. е. черезъ конецъ вектора

$$\chi=x_0i+y_0j+z_0k=\frac{1}{\alpha_0^2}[(rb—qc)i+(pc—ra)j+(qa—pb)k]$$

или

$$\chi=\frac{V\alpha_1\alpha_0}{\alpha_0^2}=V\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \tag{3}$$

который, какъ легко видѣть, перпендикуляренъ къ оси бивектора (ибо $V\alpha_1\alpha_0$ перпендикуляренъ къ каждому изъ множителей) и представляетъ, слѣдовательно, перпендикуляръ, опущенный изъ точки приведенія на ось бивектора.

31. *Тензоръ и параметръ бивектора.* Параметръ бивектора α мы опредѣлили формулой (1) § 1, которая можетъ быть представлена въ видѣ:

$$P\alpha = \frac{S\alpha_1\alpha_0}{\alpha_0^2} = S\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\,. \tag{4}$$

Эта формула тожественна съ [(23) § 24] и, слѣдовательно, параметръ бивектора α=параметру комплекснаго числа, опредѣляющаго бивекторъ.

Замѣтимъ, что мы можемъ соединить формулы (3) и (4) въ одну:

$$P\alpha + \chi = \alpha_1/\alpha_0. \tag{5}$$

Такъ какъ по формулѣ [(25) § 25], $T\alpha_0 = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$ есть длина вектора α_0, то формулу [(30), § 25]:

$$T\alpha = T\alpha_0(1+\omega P\alpha)$$

мы можемъ прочитать такъ: *тензоръ бивектора есть комплексное число, главная часть котораго=длинѣ главнаго вектора бивектора, а параметръ=параметру бивектора.*

Припоминая (§ 3), что произведеніе $T\alpha_0.P\alpha$ есть длина момента бивектора α, когда точка приведенія находится на его оси, взятая со знакомъ +, если моментъ и главный векторъ одинаково направлены, и со знакомъ — въ противномъ случаѣ, мы можемъ также сказать, что тензоръ бивектора есть комплесное число $R+\omega G$, главная часть котораго, R=длинѣ главнаго вектора, а моментъ G=длинѣ момента бивектора для точки приведенія на оси его, длинѣ, взятой съ надлежащимъ знакомъ. Въ частномъ случаѣ, когда бивекторъ α будетъ параметра нуль, $T\alpha = T\alpha_0 = R$, когда параметръ бивектора равенъ безконечности, $T\alpha = \omega T\alpha_1 = \omega G$.

32. *Бикватерніонъ, его ось и точка приведенія.* Всякій бикватерніонъ q мы можемъ представить въ видѣ:

$$q = w + \alpha = w_0 + \omega w_1 + \alpha_0 + \omega\alpha_1$$

Если мы возьмемъ какую нибудь точку O за точку приведенія, то векторная часть бикватерніона, α, будетъ опредѣлять нѣкоторый бивекторъ α и, слѣдовательно, бикватерніонъ q опредѣляетъ нѣкоторую совокупность числа w и бивектора α и выражается ихъ суммой. Точку приведенія O и ось бивектора α мы будемъ называть точкой приведенія и осью бикватерніона q. Если мы примемъ за точку приведенія точку $O'(OO'=\gamma)$, то $\alpha=\alpha_0+\omega(\alpha_1+V\alpha_0\gamma)$ и бикватерніонъ $q'=w+\alpha_0+\omega(\alpha_1+V\alpha_0\gamma)$ будетъ опредѣлять совокупность того же числа w и того же бивектора α, отнесеннаго къ новой точкѣ приведенія. Поэтому мы можемъ считать бикватерніоны q и q' однимъ и тѣмъ же бикватерніономъ q: онъ принимаетъ видъ

$$q=w_0+\omega w_1+\alpha_0+\omega\alpha_1, \tag{6}$$

когда точкой приведенія служитъ точка O, и видъ

$$q=w_0+\omega w_1+\alpha_0+\omega(\alpha_1+V\alpha_0\gamma), \tag{7}$$

когда точкой приведенія служитъ точка O'.

33. *Умноженіе. Умноженіе бивектора на комплексное число* $a=a_0+\omega a_1$. Прежде чѣмъ приступить къ изслѣдованію геометрическихъ свойствъ операціи умноженія двухъ бивекторовъ, разсмотримъ подробнѣе операцію умноженія бивектора $\alpha=\alpha_0+\omega\alpha_1$ на комплексное число $a=a_0+\omega a_1$. Перемножая α и a, мы получаемъ бивекторъ:

$$a\alpha=a_0\alpha_0+\omega(a_0\alpha_1+a_1\alpha_0).$$

Его главный векторъ$=a_0\alpha_0$, его параметръ опредѣлится формулой (4):

$$Pa\alpha=\frac{Sa_0\alpha_0(a_0\alpha_1+a_1\alpha_0)}{a_0{}^2\alpha_0{}^2}=\frac{a_0{}^2S\alpha_0\alpha_1+a_0a_1S\alpha_0{}^2}{a_0{}^2\alpha_0{}^2},$$

или, такъ какъ $S\alpha_0{}^2=\alpha_0{}^2$,

$$Pa\alpha=\frac{S\alpha_0\alpha_1}{\alpha_0{}^2}+\frac{a_1}{a_0}=P\alpha+Pa.$$

Послѣдняя формула получается также прямо изъ формулы [(44) § 27], полагая въ ней $q=a$ и $q'=\alpha$. Что касается до оси $a\alpha$, то она параллельна $a_0\alpha_0$, а слѣдовательно, и оси бивектора α и проходитъ черезъ точку, находящуюся въ концѣ вектора

$$\chi=\frac{V(a_0\alpha_1+a_1\alpha_0)a_0\alpha_0}{a_0^2\alpha_0^2}=\frac{a_0^2V\alpha_1\alpha_0+a_0a_1V\alpha_0^2}{a_0^2\alpha_0^2}. \quad \text{[см. форм. (3)]}$$

Но α_0^2 есть скаларное число, $V\alpha_0^2=0$ и $\chi=V\alpha_1\alpha_0:\alpha_0^2$, т. е. χ тотъ же векторъ, который опредѣляетъ и положеніе оси α [см. форм. (3)]. Оси бивекторовъ α и $a\alpha$, какъ параллельныя, проходящія черезъ одну точку, совпадаютъ.

Итакъ *бивекторы* α *и* $a\alpha$ *имѣютъ общую ось, главная часть* $a\alpha$=*произведенію главныхъ частей,* a_0 *и* α_0, *параметръ* $a\alpha$=*суммѣ параметровъ множителей,* $Pa+P\alpha$.

Изъ этой теоремы и предъидущихъ формулъ вытекаютъ такія слѣдствія:

I. Самый общій видъ бивектора, который по § 15 мы можемъ назвать произведеніемъ бивектора α на число s, есть $(v+\omega v_1)s\alpha$.

II. Такъ какъ дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію, то оси бивекторовъ α и $\alpha:a$ совпадаютъ, главна часть $\alpha:a$= частному отъ дѣленія главныхъ частей, $\alpha_0:a_0$, а параметръ $\alpha:a$=разности параметровъ дѣлимаго и дѣлителя, $P\alpha-Pa$.

III. Изъ формулы $U\alpha=\alpha:T\alpha$ слѣдуетъ, что $U\alpha$ *есть винтъ параметра нуль, имѣющій общую ось съ* α. *Всякій бивекторъ* α=*произведенію его тензора на винтъ параметра нуль, имѣющій съ нимъ общую ось,* $\alpha=T\alpha.U\alpha$.

IV. Бивекторъ сопряженный съ α, $K\alpha=-\alpha$, имѣетъ съ α общую ось, одинаковый параметръ и одинаковый по длинѣ главный векторъ и отличается отъ α только направленіемъ оси.

V. Ось бивектора, обратнаго данному, $1:\alpha=-\alpha:N\alpha$, совпадая съ осью α, отличается отъ нея направленіемъ; параметръ обратнаго бивектора=$-P\alpha$, а длина его главнаго вектора= величинѣ обратной къ длинѣ главнаго вектора α,α_0.

VI. Оси бикватерніоновъ $q=w+\alpha$ и $aq=aw+a\alpha$ совпадаютъ, ибо осью перваго служитъ ось бивектора α, а втораго совпадающая съ ней ось бивектора $a\alpha$.

VII. Бикватерніонъ q и его верзоръ Uq имѣютъ общую ось.

34. *Умноженіе бивектора на бивекторъ. Общія формулы.* Пусть мы имѣемъ два бивектора:

$$\alpha=\alpha_0+\omega\alpha_1=pi+qj+rk+\omega(ai+bj+ck)$$
$$\beta=\beta_0+\omega\beta_1=p_1i+q_1j+r_1k+\omega(a_1i+b_1j+c_1k),$$

или
$$\alpha=xi+yj+zk$$
$$\beta=x'i+y'j+z'k,$$

гдѣ
$$x=p+\omega a, y=q+\omega b, z=r+\omega c$$
$$x'=p_1+\omega a_1, y'=q_1+\omega b_1, z'=r_1+\omega c_1,$$

Перемножая ихъ, мы имѣемъ:

$$\alpha\beta=S\alpha\beta+V\alpha\beta \qquad (8)$$
$$\alpha\beta=-(xx'+yy'+zz')+(yz'-y'z)i+(zx'-z'x)j+(xy'-x'y)k \qquad (9)$$
$$\alpha\beta=\alpha_0\beta_0+\omega(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0) \qquad (10)$$
$$\alpha\beta=\mathrm{q}_0+\omega\mathrm{q}_1, \qquad (11)$$

гдѣ
$$\mathrm{q}_0=-(pp_1+qq_1+rr_1)+Pi+Qj+Rk \qquad (12)$$
$$\mathrm{q}_1=-(pa_1+qb_1+rc_1+p_1a+q_1b+r_1c)+Ai+Bj+Ck \qquad (13)$$

и P,Q,R,A,B,C опредѣляются формулами [(8) § 14].

35. *Скаларное произведеніе. Основныя формулы.* Скаларное произведеніе мы можемъ представить въ различныхъ формахъ:

$$S\alpha\beta=-(xx'+yy'+zz') \qquad (14)$$
$$S\alpha\beta=S\alpha_0\beta_0+\omega S(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0) \qquad (15)$$
$$S\alpha\beta=-(pp_1+qq_1+rr_1)-\omega(pa_1+qb_1+rc_1+p_1a+q_1b+r_1c), \; 16$$

откуда
$$S_0\alpha\beta=S\alpha_0\beta_0=-(pp_1+qq_1+rr_1) \qquad (17)$$
$$S_1\alpha\beta=S\alpha_0\beta_1+S\alpha_1\beta_0=-(pa_1+qb_1+rc_1+p_1a+q_1b+r_1c) \qquad (18)$$

Изъ формулы (16) мы видимъ, что $S\alpha\beta$ *есть комплексное число, главная часть котораго=геометрическому произве-*

денію главныхъ векторовъ, взятому со знакомъ —, а моментъ =относительному моменту бивекторовъ также со знакомъ—.

Если мы умножимъ $S\alpha\beta$ на число $k+\omega k_1$, то въ произведеніи коэффиціентомъ при ω будетъ функція $\varphi(x,y)$ [см. § 9], которая представляетъ самый общій видъ функцій, удовлетворяющей условіямъ A и B [см. §§ 6 и 7].

36. *Комплексный уголъ между двумя прямыми въ пространствѣ.* Мы дадимъ еще одно выраженіе для $S\alpha\beta$, введя въ него уголъ φ и кратчайшее разстояніе d между осями α и β, причемъ условимся углу и кратчайшему разстоянію между двумя прямыми въ пространствѣ приписывать опредѣленный знакъ, руководясь однимъ изъ слѣдующихъ правилъ.

a. Пусть мы имѣемъ двѣ прямыя α и β, которымъ мы приписываемъ опредѣленное направленіе. Проведемъ линію кратчайшаго разстоянія между ними, пересѣкающую ихъ въ точкахъ O_α и O_β соотвѣтственно и представимъ себѣ наблюдателя, который стоитъ въ одной изъ точекъ O_α, или O_β, напр. въ O_α, и, прислонившись спиной къ α такъ, что направленіе α идетъ отъ его ногъ къ головѣ, смотритъ вдоль прямой $O_\alpha O_\beta$. Тогда, если для наблюдателя направленіе β будетъ идти справа налѣво, мы будемъ считать уголъ между α и β положительнымъ, а если слѣва направо—отрицательнымъ. Легко видѣть, что наблюдатель нашелъ бы для угла тотъ же знакъ, если бы онъ прислонился къ β и опредѣлилъ бы знакъ по направленію α. Опредѣляя по этому правилу знакъ угла между α и β, кратчайшее разстояніе между ними будемъ всегда считать положительнымъ.

b. Припишемъ линіи $O_\alpha O_\beta$, которую означимъ черезъ ε, одно изъ возможныхъ для нея направленій, напримѣръ будемъ считать ее направленною отъ O_α къ O_β. Представимъ себѣ наблюдателя, прислонившагося спиной къ ε такъ, чтобы направленіе ε шло отъ его ногъ къ головѣ; тогда уголъ между α и β мы будемъ считать положительнымъ, если наблюдатель, смотря по положительному направленію первой прямой, т. е. α, видитъ направленіе β идущимъ слѣва направо и отрицательнымъ—въ противномъ случаѣ. Понятно, что уголъ между β и α будетъ $-\varphi$, если уголъ между α и β есть φ. Кратчайшее разстояніе между α и β мы считаемъ положительнымъ, когда направленіе отъ точки пресѣченія ε съ первымъ бивекторомъ, O_α, къ точкѣ пересѣченія со вторымъ, O_β, савпадаетъ, и отрицательнымъ, когда оно противоположно направленію ε. Если d есть кратчайшее разстояніе между α и β, то $-d$ будетъ кратчайшимъ разстояніемъ между β и α. Если мы измѣнимъ направленіе ε на прямо противоположное, то знаки угла и кратчайшаго разстоянія между α и β измѣнятся и потому знаки, опредѣленные по второму правилу, мы будемъ называть знаками относительно направленія ε.

Опредѣливъ знаки φ и d по тому или другому правилу, мы будемъ называть комплексное число $\theta=\varphi+\omega d$ комплекснымъ угломъ между α и β. Если знаки φ и d опредѣлены по второму правилу, то θ будетъ комплекснымъ угломъ между α и β относительно направленія ε. *Комплексный уголъ между* β и α относительно того же направленія будетъ $=-\theta$, и уголъ между α и β относительно направленія противоположнаго ε также $=-\theta$.

По формуламъ [(8) § 19] мы имѣемъ:

$$cs\theta=cs\varphi-\omega d sn\varphi \qquad Pcs\theta=-d tg\varphi \tag{19}$$

$$sn\theta=sn\varphi+\omega d cs\varphi \qquad Psn\theta= d ctg\varphi$$

Отсюда заключаемъ:

I. $cs\theta=0$ только тогда, когда прямыя α и β пересѣкаются между собой подъ прямымъ угломъ $(\varphi=\frac{1}{2}\pi, d=0)$; $Pcs\theta=\infty$, когда прямыя не пересѣкаются, но направленія ихъ взаимно перпендикулярны.

II. $sn\theta=0$ только тогда, когда прямыя α и β совпадаютъ, причемъ безразлично, имѣютъ ли онѣ одинаковое направленіе $(\varphi=0, d=0)$ или прямо противоположное $(\varphi=\pi, d=0)$; $Psn\theta=\infty$, если прямыя параллельны, но не совпадаютъ.

37. *Формула* $S\alpha\beta=-T\alpha T\beta cs\theta$. Пусть $\theta=\varphi+\omega d$ есть комплексный уголъ между осями бивекторовъ α и β. Введемъ его въ выраженіе $S\alpha\beta$. Такъ какъ длины главныхъ векторовъ α_0 и β_0 суть $T\alpha_0$ и $T\beta_0$, и уголъ между α_0 и β_0 есть φ, то для выраженій (17) и (18), мы имѣемъ:

$$S_0\alpha\beta= \qquad S\alpha_0\beta_0=-T\alpha_0 T\beta_0 cs\varphi \tag{20}$$

$$S_1\alpha\beta=S(\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1)=-T\alpha_0 T\beta_0[(P\alpha+P\beta)cs\varphi-d sn\varphi] \tag{21}$$

Первая изъ этихъ формулъ есть извѣстная формула теоріи кватерніоновъ, а вторая—основная формула теоріи винтовъ. Пользуясь ими, мы можемъ представить $S\alpha\beta$ въ видѣ:

$$S\alpha\beta = -T\alpha_0 T\beta_0 (cs\varphi + \omega[(P\alpha + P\beta)cs\varphi - dsn\varphi]) \tag{22}$$

Но легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ разлагается на произведеніе трехъ множителей:

$$S\alpha\beta = -T\alpha_0 T\beta_0 (1 + \omega P\alpha)(1 + \omega P\beta)(cs\varphi - \omega dsn\varphi). \tag{23}$$

Слѣдовательно, замѣчая, что $T\alpha = T\alpha_0(1 + \omega P\alpha), T\beta = T\beta_0(1 + P\beta), cs\theta = cs\varphi - \omega dsn\varphi$, мы получаемъ:

$$S\alpha\beta = -T\alpha T\beta cs\theta, \tag{24}$$

формулу весьма важную и вполнѣ тожественную по виду съ извѣстной формулой теоріи кватерніоновъ. Развертывая ее и идя обратнымъ путемъ, получаемъ изъ нея (20) и (21).

Изъ (22) мы имѣемъ формулу:

$$PS\alpha\beta = P\alpha + P\beta - dtg\varphi, \tag{25}$$

которая также выводится прямо изъ равенства (24), если мы возьмемъ параметры отъ обѣихъ частей его и припомнимъ, что параметръ произведенія=суммѣ параметровъ множителей [(44) § 27], что $PT = P$ [(28) § 25] и что $Pcs\theta = -dtg\varphi$ [(19) § 36].

38. *Случаи, когда* $S\alpha\beta = 0$. Разсмотримъ, когда $S\alpha\beta$, или одинъ изъ его членовъ обращается въ нуль.

Изъ (20) видно, что главная часть $S\alpha\beta$ обращается въ нуль 1) когда оси бивекторовъ взаимно перпендикулярны и 2) когда параметръ одного изъ бивекторовъ$=\infty$($T\alpha_0$, или $T\beta_0$ равны безконечности).

Моментъ $S\alpha\beta$ обращается въ нуль, когда бивекторы α и β взаимны.

Припоминая, что произведеніе двухъ, или нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ вида $a_0 + \omega a_1$ обращается въ нуль только тогда, когда хотя одинъ изъ множителей равенъ нулю, или параметры двухъ множителей равны безконечности [§ 18, I], изъ формулы (24) видимъ, что $S\alpha\beta=0$ въ слѣдующихъ случаяхъ.

1) если $cs\theta=0$, т. е. если оси бивекторовъ α и β пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. 2) если $PT\alpha=P\alpha=\infty$ (или $P\beta=\infty$) и $Pcs\theta=-dtg\varphi=\infty$, т. е. если параметръ одного изъ бивекторовъ $=\infty$ и направленія ихъ осей взаимно перпендикулярны. Такъ какъ $P\alpha=\infty$ и $\alpha_0=0$, то направленіе оси α будетъ опредѣляться векторомъ α_1, положеніе же ея будетъ неопредѣленнымъ; мы можемъ поэтому считать, что она пересѣкаетъ ось β и такимъ образомъ можемъ разсматривать второй случай какъ частный случай перваго. 3) если $T\alpha=0$ (или $T\beta=0$), т. е. если одинъ изъ множителей α, или β обращается въ нуль. 4) если $PT\alpha=P\alpha=\infty$ и $PT\beta=P\beta=\infty$.

Итакъ $S\alpha\beta=0$ *1) если оси бивекторовъ α и β пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, 2) если параметры обоихъ бивекторовъ безконечно велики и 3) если хотя одинъ изъ бивекторовъ α, или β исчезаетъ.*

39. *Векторное произведеніе бивекторовъ. Основныя формулы.* Изъ формулъ (9), (10) и (11) мы находимъ:

$$V\alpha\beta=(yz'-y'z)i+(zx'-z'x)j+(xy'-x'y)k \tag{26}$$

$$V\alpha\beta=V\alpha_0\beta_0+\omega V(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0) \tag{27}$$

$$V\alpha\beta=Pi+Qj+Rk+\omega(Ai+Bj+Ck) \tag{28}$$

гдѣ P,Q,R,A,B,C опредѣляются формулами [(8) § 14].

Если мы умножимъ бивекторъ $V\alpha\beta$ на число $v+\omega v_1$, то получимъ бивекторъ съ координатами $vP, vQ, vR, vA+v_1P$, $vB+v_1Q, vC+v_1R$; слѣдовательно, самый общій видъ бивектора, удовлетворяющаго условіямъ A и B § 6, есть произведеніе бивектора $V\alpha\beta$ на число $v+\omega v_1$, $(v+\omega v_1)V\alpha\beta$ [см. § 14].

40. *Тензоръ и параметръ $V\alpha\beta$.* Опредѣляя тензоръ и параметръ $V\alpha\beta$, мы разсмотримъ два случая I, когда $V\alpha_0\beta_0\neq0$ и II, когда $V\alpha\beta=0$.

I. $V\alpha_0\beta_0\neq0$.

Если $V\alpha_0\beta_0\neq0$, то $\alpha_0\neq0$, $\beta_0\neq0$ и $\alpha_0\neq a_0\beta_0$, гдѣ a_0 вещественное число: оси бивекторовъ α и β не параллельны и параметры ихъ, равно какъ и параметръ $V\alpha\beta$, конечны. По формуламъ [(25) § 25] и (26) мы имѣемъ:

$$TV\alpha\beta = \sqrt{(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2}, \qquad (29)$$

или

$$TV\alpha\beta = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2},$$

откуда по [(25) § 25], [(14) § 35] и [(24) § 37], получаемъ:

$$TV\alpha\beta = T\alpha T\beta sn\theta, \qquad (30)$$

формулу тожественную съ формулой теоріи кватерніоновъ. Замѣняя во второй части $T\alpha$ и $T\beta$ по [(30 § 25] и $sn\theta$ по [(19) § 36] и развертывая ее, находимъ:

$$TV\alpha\beta = T\alpha_0 T\beta_0 (sn\varphi + \omega[(P\alpha+P\beta)sn\varphi + dcs\varphi]), \qquad (31)$$

откуда

$$T_0 V\alpha\beta = T\alpha_0 T\beta_0 sn\varphi \qquad (32)$$

$$PV\alpha\beta = P\alpha + P\beta + dctg\varphi, \qquad (33)$$

т. е. *главная часть* $TV\alpha\beta$ *(длина главнаго вектора* $V\alpha\beta$*)* = *площади параллелограмма, построеннаго на главныхъ векторахъ* α *и* β, *а* $PV\alpha\beta$ = *суммѣ параметровъ множителей, сложенной съ произведеніемъ кратчайшаго разстоянія между осями* α *и* β *на котангенсъ угла между ними.*

Формула (33) легко получается прямо изъ (30), если мы припомнимъ, что параметръ произведенія = суммѣ параметровъ множителей, что $PT = P$ и $Psn\theta = dctg\varphi$.

II. $V\alpha_0\beta_0 = 0$.

Когда $V\alpha_0\beta_0 = 0$, то подкоренное число въ (29) обращается въ нуль и относительно справедливости формулъ (30) и (31) можетъ возникнуть сомнѣніе. Мы покажемъ теперь, что эти формулы, каковы бы ни были бивекторы α и β, всегда имѣютъ мѣсто, причемъ, желая ими пользоваться и въ тѣхъ случаяхъ, когда параметры бивекторовъ безконечно велики, мы должны помнить, что для бивектора α безконечно большаго параметра $T\alpha_0 = 0$, $P\alpha = \infty$, произведеніе $T\alpha_0 . P\alpha$, вообще говоря, конечно и равняется длинѣ момента α_1, и $T\alpha = \omega T\alpha_1$ [см. §§ 3 и 31].

$V\alpha_0\beta_0=0$ въ слѣдующихъ случаяхъ.

a. Если $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, но $\beta_0 = a_0\alpha_0$, гдѣ a есть вещественное число, т. е. если параметры α и β конечны и оси ихъ параллельны (или совпадаютъ).

b. Если $\alpha_0=0$, $\beta_0 \neq 0$, т. е. если параметръ одного изъ бивекторовъ $=\infty$.

c. Если $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$, т. е. если оба бивектора имѣютъ безконечно большой параметръ.

Разсмотримъ какой видъ имѣетъ $TV\alpha\beta$ въ этихъ случаяхъ.

a. Въ первомъ случаѣ $V\alpha\beta=\omega(V\alpha_0\beta_1+V\alpha_1\beta_0)$ въ силу равенствъ $\beta_0=a_0\alpha_0$ и $V\beta_0\beta_1=-V\beta_1\beta_0$ можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$V\alpha\beta=-\omega a_0\alpha_0{}^2(V\beta_1\beta_0/\beta_0{}^2-V\alpha_1\alpha_0/\alpha_0{}^2)$$

Векторы $V\beta_1\beta_0:\beta_0{}^2$ и $V\alpha_1\alpha_0:\alpha_0{}^2$ суть перпендикуляры, опущенные изъ точки приведенія на оси α и β [см. (3) § 30], а разность ихъ, вслѣдствіе параллельности осей α и β, есть векторъ параллельный плоскости осей и перпендикулярный къ ихъ общему направленію. Длина его равняется разстоянію между осями α и β, и слѣдовательно

$$TV\alpha\beta=\omega T\alpha_0 T\beta_0 d.$$

b. Во второмъ случаѣ $V\alpha\beta=\omega V\alpha_1\beta_0$, и слѣдовательно

$$TV\alpha\beta=\omega T\alpha_1 T\beta_0 sn\varphi$$

c. Въ третьемъ случаѣ $V\alpha\beta=0$ и $TV\alpha\beta=0$.

Такіе же результаты даетъ и формула (31) или (30), если мы положимъ въ ней въ первомъ случаѣ $\theta=\omega d(\varphi=0)$, во второмъ $T\alpha_0=0$, $T\alpha=\omega\, T\alpha_0.P\alpha=\omega T\alpha_1$ и въ третьемъ $T\alpha_0=T\beta_0=0$. Итакъ формула (30) или (31) есть формула общая

41. *Случаи, когда* $PV\alpha\beta=\infty$, *или* $V\alpha\beta=0$. Бивекторъ и его тензоръ одновременно обращаются въ нуль и одновременно имѣютъ безконечно большой параметръ. Поэтому, если мы припомнимъ условія, при которыхъ произведеніе нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ имѣетъ безконечно большой пара-

метръ, или обращается въ нуль [см. § 18, I и II], то изъ формулы (30) легко найдемъ тѣ случаи, когда $PV\alpha\beta=\infty$, или $V\alpha\beta=0$.

$PV\alpha\beta=\infty$, 1) когда $P\alpha=\infty$, но $P\beta\neq\infty$ и $Psn\theta\neq\infty$, т. е. *когда оси бивекторовъ α и β не параллельны и парамотръ одного изъ нихъ безконечно великъ*, 2) когда $P\alpha$ и $P\beta$ конечны и $Psn\theta=\infty$, т. е. *когда оси бивекторовъ параллельны (не совпадаютъ) и параметры ихъ конечны.*

$V\alpha\beta=0$, 1) если $T\alpha=0$ (или $T\beta=0$), т. е. если одинъ изъ множитель α, или β обращается въ нуль. 2) если $sn\theta=0$, т. е. если оси α и β совпадаютъ. 3) если $P\alpha=\infty$ и $Psn\theta=\infty$, т. е. если параметръ α безконечно великъ и оси α и β параллельны. Ось бивектора α опредѣленна только по направленію, положеніе же ея можетъ быть какое угодно, и мы можемъ считать ее совпадающею съ осью β и, такимъ образомъ, разсматривать случай третій какъ частный случай предъидущаго. 4) если $P\alpha=P\beta=\infty$. Итакъ

$V\alpha\beta=0$, *1) когда оси бивекторовъ α и β совпадаютъ, 2) когда параметры ихъ безконечно велики и въ 3) когда хотя одинъ изъ бивекторовъ α, или β исчезаетъ.*

Сопоставляя эту теорему съ теоремой § 38, мы видимъ, что $\alpha\beta=0$, 1) когда хотя одинъ изъ множителей$=0$ и 2) когда $P\alpha=P\beta=\infty$.

42. *Ось* $V\alpha\beta$.

Ось бивектора Vαβ идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β.

При доказательствѣ этой теоремы мы разсмотримъ два случая I, когда $V\alpha_0\beta_0\neq0$ и II, когда $V\alpha_0\beta_0=0$.

I. Чтобы доказать теорему въ первомъ случаѣ, мы воспользуемся равенствами $S\alpha V\alpha\beta=S\beta V\alpha\beta=0$, которыя имѣютъ мѣсто каковы бы ни были бивекторы α и β и легко выводятся изъ [(26) § 39] и [(14) § 35], если въ послѣдней замѣнимъ сначала β, а потомъ α черезъ $V\alpha\beta$. Такъ какъ параметры α,β и $V\alpha\beta$ конечны, то эти равенства означаютъ [см. § 38], что ось $V\alpha\beta$ пересѣкаетъ какъ ось α, такъ и ось β подъ прямымъ угломъ, иначе говоря, что ось $V\alpha\beta$ идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β.

II. $V\alpha_0\beta_0=0$, какъ видѣли въ § 40, въ трехъ случаяхъ. Эти случаи мы разсмотримъ отдѣльно.

a. $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0, \beta_0 = a_0\alpha_0$. Оси α и β параллельны, или совпадаютъ. Если оси параллельны, то существуетъ ∞^1 линій кратчайшихъ разстояній между ними, совокупность которыхъ образуетъ пучекъ параллельныхъ прямыхъ, лежащихъ въ плоскости осей α и β и къ нимъ перпендикулярныхъ. Параметръ $V\alpha\beta$ безконечно великъ [см. § 40] и направленіе его оси будетъ опредѣляться векторомъ $V\beta_1\beta_0 : \beta_0^2 - V\alpha_1\alpha_0 : \alpha_0^2$ [см. § 40], который параллеленъ линіямъ кратчайшихъ разстояній между осями α и β. Такъ какъ положеніе оси $V\alpha\beta$ неопредѣленно, то мы можемъ считать ее совпадающею съ любой изъ этихъ линій и, слѣдовательно, считать теорему справедливою и въ этомъ случаѣ. Если оси α и β совпадаютъ, то всякую прямую, пересѣкающую общую ось подъ прямымъ угломъ, мы можемъ разсматривать какъ линію кратчайшаго разстоянія между осями α и β; такихъ линій существуетъ ∞^2. Въ этомъ случаѣ $V\alpha\beta = 0$ [см. § 41] и рѣчи объ положеніи оси $V\alpha\beta$ быть не можетъ.

b. $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$. Такъ какъ для оси α будетъ опредѣленно только направленіе, совпадающее съ направленіемъ вектора α_1, то всякую прямую перпендикулярную къ направленію α_1 и пересѣкающую подъ прямымъ угломъ ось β, мы можемъ считать линіей кратчайшаго разстоянія. Эти линіи образуютъ пучекъ параллельныхъ прямыхъ. Ось $V\alpha\beta = \omega V\alpha_1\beta_0$ будетъ параллельна вектору $V\alpha_1\beta_0$, который перпендикуляренъ къ векторамъ α_1 и β_0 и, слѣдовательно, параллеленъ съ линіями кратчайшихъ разстояній. Съ любой изъ этихъ линій мы можемъ совмѣстить ось $V\alpha\beta$, ибо положеніе оси бивектора $V\alpha\beta$ неопредѣленно.

c. $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$. Опредѣленны только направленія осей α и β. Линіи кратчайшаго разстоянія, будучи перпендикулярны къ направленіямъ осей, не имѣютъ опредѣленнаго положенія и образуютъ связку параллельныхъ прямыхъ. Въ этомъ случаѣ $V\alpha\beta = 0$ и мы не можемъ говорить объ положеніи оси $V\alpha\beta$.

Итакъ теорема доказана.

Что касается до направленія оси бивектора $V\alpha\beta$, то оно опредѣляется векторомъ $V\alpha_0\beta_0$; легко видѣть, что относительно этого направленія уголъ между осями α и β будетъ положительнымъ.

Сопоставляя теорему этого параграфа съ изслѣдованіями предъидущаго, мы приходимъ еще къ такой теоремѣ.

Если есть только одна линія кратчайшаго разстоянія между осями бивекторовъ α и β, то $PV\alpha\beta$ конеченъ; если для линіи кратчайшаго разстоянія существуетъ ∞^1 положеній, $PV\alpha\beta=\infty$; наконецъ, если для нея существуетъ ∞^2, или болѣе, положеній, то $V\alpha\beta=0$.

43. *Формула $V\alpha\beta=T\alpha T\beta sn\theta\varepsilon$.* Разложивъ $V\alpha\beta$ на произведеніе $TV\alpha\beta$. $UV\alpha\beta$ [см. § 33, III], замѣнимъ $TV\alpha\beta$ по формулѣ (30) и означимъ для краткости винтъ параметра нуль, $UV\alpha\beta$, черезъ ε ($T\varepsilon=1$); тогда мы будемъ имѣть $V\alpha\beta=T\alpha T\beta sn\theta\varepsilon$.

Ось ε идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β и имѣетъ такое направленіе, относительно котораго уголъ φ между осями α и β положителенъ. Если ε' есть винтъ параметра нуль, у котораго ось совпадаетъ съ осью ε, но имѣетъ прямо противоположное направленіе, то $\varepsilon'=-\varepsilon$, и уголъ θ' между осями α и β относительно направленія ε' равенъ $-\theta$. Слѣдовательно, мы можемъ $V\alpha\beta$ представить также въ видѣ $V\alpha\beta=T\alpha T\beta sn\theta'\varepsilon'$. Итакъ мы можемъ резюмировать всѣ результаты §§ 40—42 слѣдующимъ образомъ.

Векторное произведеніе бивектора β на бивекторъ α мы всегда можемъ представить въ видѣ:

$$V\alpha\beta=T\alpha T\beta sn\theta\varepsilon, \tag{34}$$

гдѣ ε есть винтъ параметра нуль ($T\varepsilon=1$), у котораго осью служитъ линія кратчайшаго разстоянія между осями множителя α и множимаго β, и θ—комплексный уголъ между ними относительно положительнаго направленія оси ε.

Пользуясь формулами (8, 24, 34), мы имѣемъ:

$$\alpha\beta=T\alpha T\beta(-cs\theta+\varepsilon sn\theta), \tag{35}$$

формулу тожественную съ формулой теоріи кватерніановъ для произведенія двухъ векторовъ.

44. *Дѣленіе. Путь Clifford-Hamilton'а.* Исходной точкой нашихъ изслѣдованій послужило изученіе операціи умноженія двухъ бивекторовъ, которое и привело насъ къ понятію о бикватерніонѣ. Излагая винтовое счисленіе, мы могли бы избрать, однако, другой путь, путь намѣченный Clifford'омъ, который разсматриваетъ бикватерніонъ, какъ результатъ, про-

исходящій отъ дѣленія двухъ бивекторовъ (моторовъ, по терминологіи Clifford'a). Исходя изъ этого опредѣленія и установивъ a priori, по принципу устойчивости, нѣкоторые законы операціи дѣленія, можно развить всю теорію бикватерніоновъ, шагъ за шагомъ слѣдуя за Hamilton'омъ, который въ своихъ трактатахъ „Elements of Quaternions“ и „Lectures“ опредѣляетъ кватерніонъ какъ частное отъ дѣленія двухъ векторовъ, имѣющихъ общее начало, и путемъ геометрическихъ соображеній выводитъ основныя свойства кватерніоновъ. Посвящая конецъ этой главы операціи дѣленія и разсматривая бикватерніонъ какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, мы не имѣемъ, однако, въ виду показать, какимъ образомъ, анализируя операцію дѣленія, мы можемъ придти къ понятію о бикватерніонѣ. Читатель найдетъ это у Clifford'a. Наша задача заключается скорѣе въ томъ, чтобы, пользуясь уже извѣстными намъ результатами, геометрически интерпретировать бикватерніонъ и его основныя свойства, а также въ общихъ чертахъ познакомиться съ тѣмъ характеромъ, который приняло бы изложеніе теоріи бикватерніоновъ, если бы мы пошли по пути Clifford-Hamilton'a. Мы увидимъ, что ту роль, которую въ теоріи кватерніоновъ играютъ вещественныя числа и конечныя вращенія вокругъ пересѣкающихся осей, въ теоріи бикватерніоновъ играютъ числа комплексныя вида $a_0+\omega a_1$ и конечныя винтовыя перемѣщенія вокругъ осей пересѣкающихся, или непересѣкающихся.

45. *Основныя формулы.* Разсмотримъ какой видъ имѣетъ бикватерніонъ $\mathrm{q}=\beta/\alpha$, гдѣ α и β суть два бивектора. Пусть, какъ и въ предъидущихъ параграфахъ, ϵ означаетъ винтъ нараметра нуль ($T\varepsilon=1$), идущій по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β и $\theta=\varphi+\omega d$ комплексный уголъ между ними относительно направленія ε. Дѣля β на α, мы получаемъ [(18) § 22] $\beta:\alpha=(\beta K\alpha):N\alpha$, но $K\alpha=-\alpha$[(15) § 22], слѣдовательно $\beta:\alpha=-(\beta\alpha):\ N\alpha=-(S\beta\alpha+V\beta\alpha):\ N\alpha=(-S\alpha\beta+V\alpha\beta):N\alpha$, или, пользуясь формулами (34) и (24),

$$\mathrm{q}=\beta/\alpha=(T\beta/T\alpha)(cs\theta+\varepsilon sn\theta) \qquad (36)$$

Итакъ, частное, происходящее отъ дѣленія β на α есть бикватерніонъ, у котораго тензоръ = частному отъ дѣленія тензора дѣлимаго, β, на тензора дѣлителя, α, ось идетъ по *линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β и угломъ служитъ комплексный уголъ между ними.*

Изъ предъидущей формулы мы получаемъ:

$$S\frac{\beta}{\alpha}=(T\beta|T\alpha)cs\theta \quad (37) \qquad V\frac{\beta}{\alpha}=(T\beta|\Gamma\alpha)sn\theta\varepsilon \qquad (38)$$

$$TV\frac{\beta}{\alpha}=(T\beta|T\alpha)sn\theta \qquad (39)$$

Припоминая, что параметръ произведенія = суммѣ параметровъ множителей и параметръ частнаго = разности параметровъ дѣлимаго и дѣлителя [(44), (48) § 27], изъ формулъ (37) и (39) легко находимъ:

$$PS\frac{\beta}{\alpha}=P\beta—P\alpha—dtg\varphi \qquad (40)$$

$$PV\frac{\beta}{\alpha}=P\beta-P\alpha+dctg\varphi \qquad (41)$$

$$S\frac{\beta}{\alpha}=(T\beta_0/T\alpha_0)(cs\varphi+\omega[(P\beta—P\alpha)cs\varphi—dsn\varphi]) \qquad (42)$$

$$TV\frac{\beta}{\alpha}=(T\beta_0/T\alpha_0)(sn\varphi+\omega[(P\beta—P\alpha)sn\varphi+dcs\varphi]) \qquad (43)$$

Частное отъ дѣленія β на α получаетъ другой замѣчательный видъ, если мы во вторую часть (36) вмѣсто $cs\theta$, $sn\theta$, $T\alpha$, $T\beta$ подставимъ ихъ развернутыя выраженія [(30) § 25] и [(19) § 36] и примемъ во вниманіе, что $\varepsilon^2=—1$; мы получимъ тогда:

$$\beta/\alpha=[T\beta_0/T\alpha_0][1+\omega(P\beta—P\alpha)][cs\varphi+\varepsilon sn\varphi][1+\omega d\varepsilon] \quad (44)$$

Такимъ образомъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ разлагается на произведеніе четырехъ множителей, порядокъ которыхъ мы можемъ мѣнять какъ угодно.

46. *Бикватерніонъ, какъ частное.* Для даннаго бикватерніона $\mathrm{q}=T\mathrm{q}(cs\theta+\varepsilon sn\theta)$ мы всегда можемъ подобрать два бивектора α и β такъ, чтобы $\beta/\alpha=\mathrm{q}$. Дѣйствительно, изъ тео-

ремы предъидущаго параграфа видно, что бивекторы α и β будутъ удовлетворять равенству $\beta/\alpha = \mathrm{q}$, если ихъ оси пересѣкаютъ ось q подъ прямымъ угломъ, если комплексный уголъ между осями = углу бикватерніона q, θ, и если, наконецъ, $T\beta/T\alpha = T\mathrm{q}$. Эти условія, не опредѣляя вполнѣ бивекторовъ α и β, даютъ только относительное положеніе осей α и β и отношеніе ихъ тензоровъ, такъ что одинъ изъ бивекторовъ α, или β мы можемъ выбрать произвольно, лишь бы ось его пересѣкала ось q подъ прямымъ угломъ, и только тогда другой изъ нихъ опредѣлится. Такъ какъ существуетъ ∞^4 бивекторовъ, оси которыхъ пересѣкаютъ ось q подъ прямымъ угломъ и которые могутъ быть приняты или за α, или за β, то существуетъ ∞^4 паръ бивекторовъ, удовлетворяющихъ условію $\beta/\alpha = \mathrm{q}$.

Итакъ, *всякій бикватерніонъ* q *мы можемъ разсматривать какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ* β *на* α. *Всякій бивекторъ, ось котораго пересѣкаетъ ось* q *подъ прямымъ угломъ, мы можетъ принять или за бивекторъ* α, *или за бивекторъ* β *и въ первомъ случаѣ подобрать бивекторъ* β, *а во второмъ бивекторъ* α *такъ, чтобы* $\beta/\alpha = \mathrm{q}$.

Имѣя возможность представить бикватерніонъ q въ видѣ β/α мы можемъ геометрически изобразить его совокупностью бивекторовъ α, β и винта ε параметра нуль, ось котораго идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β и имѣетъ такое направленіе, относительно котораго уголъ между дѣлителемъ α и дѣлимымъ β положителенъ. Благодаря послѣднему условію, мы всегда можемъ по направленію оси ε опредѣлить, который изъ бивекторовъ α и β есть дѣлитель и который—дѣлимое. Если, впрочемъ, это намъ извѣстно, то намъ не надо знать направленія оси ε, и бикватерніонъ q мы можемъ задать только двумя бивекторами α и β. Когда бикватерніонъ задачъ геометрически, не трудно выразить его и комплекснымъ числомъ.

Понятно, что при геометрическомъ изображеніи бикватерніона его свойствамъ будутъ соотвѣтствовать свойства трехъ бивекторовъ α, β и ε и операціямъ надъ бикватерніонами нѣкоторыя геометрическія построенія. Къ разсмотрѣнію геометрическихъ интепретацій свойствъ бикватерніоновъ и изученію геометрическихъ построеній, отвѣчающихъ операціямъ надъ ними, мы теперь и переходимъ.

47. *Приведеніе бикватерніоновъ къ одному знаменателю, или числителю. Щетка. Однощеточные или коллинеарные бикватерніоны.* Пусть мы имѣемъ два бикватерніона q и q$'$. Построимъ линію кратчайшаго разстоянія между осями q и q$'$ и примемъ ее за ось бивектора β съ произвольнымъ тензоромъ. Ось бивектора β будетъ пересѣкать какъ ось q$'$, такъ и ось q, подъ прямымъ угломъ, а потому, на основаніи предъидущаго параграфа, мы всегда можемъ подобрать бивекторы α, α', γ, γ' такъ, что $q=\beta/\alpha=\alpha'/\beta$ и $q'=\gamma/\beta=\beta/\gamma'$. Итакъ мы приходимъ къ слѣдующему результату.

Если мы имѣемъ какіе либо два бикватерніона q *и* q$'$, *то мы всегда можемъ представить ихъ*

I. *въ видѣ двухъ дробей,* $q=\beta/\alpha$ *и* $q'=\beta/\gamma'$, *у которыхъ числители одинаковы;*

II. *въ видѣ двухъ дробей* $q=\alpha'/\beta$ *и* $q'=\gamma/\beta$, *у которыхъ знаменатели одинаковы;*

III. *въ видѣ такихъ дробей* $q=\beta/\alpha$, $q'=\gamma/\beta$, *что числитель одной равенъ знаменателю другой.*

Когда мы имѣемъ три, или болѣе, бикватерніоновъ q,q$'$,q$''$..., то, вообще говоря, мы не можемъ сдѣлать у всѣхъ числители, или знаменатели одинаковыми и не можемъ общій числитель нѣкоторыхъ сдѣлать общимъ знаменателемъ у остальныхъ. Очевидно это будетъ возможно только тогда, когда оси данныхъ бикватерніоновъ имѣютъ общую линію кратчайшаго разстоянія и, слѣдовательно, всѣ пересѣкаютъ одну и ту же прямую подъ прямымъ угломъ. Въ дальнѣйшемъ мы весьма часто будемъ встрѣчаться съ геометрической формой, которую образуетъ совокупность прямыхъ, пересѣкающихъ одну и ту же прямую подъ прямымъ угломъ, мы будемъ называть эту форму щеткой. Такимъ образомъ, оси данныхъ бикватерніоновъ должны принадлежать къ одной и той же щеткѣ. Бикватерніоны, удовлетворяющіе этому условію, мы можемъ назвать, поэтому, однощеточными бикватерніонами.

Замѣтимъ, что однощеточные бикватерніоны аналогичны по своимъ свойствамъ съ коллинеарными кватерніонами [Hamilton, Elements, § 209], оси которыхъ перпендикулярны къ одной и той же прямой; поэтому мы можемъ назвать ихъ также коллинеарными бикватерніонами.

Итакъ, *для того, чтобы три, или болѣе, бикватерніоновъ мы могли представить въ видѣ дробей, у которыхъ или чис-*

лители одинаковы, или знаменатели одинаковы, или общій числитель однихъ служитъ общимъ знаменателемъ другихъ, необходимо и достаточно, чтобы данные бикватерніоны были однощеточными или коллинеарными бикватерніонами.

48. *Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе бикватерніоновъ.* Желая сложить два данныхъ бикватерніона q и q', мы представимъ ихъ въ видѣ дробей, у которыхъ знаменатели одинаковы: $q = \alpha'/\beta$ и $q' = \gamma/\beta$ [см. предъидущій параграфъ]. Умножая сумму $q + q'$ на β, мы получаемъ $(q + q')\beta = (\alpha'/\beta + \gamma/\beta)\beta = (\alpha'/\beta)\beta + (\gamma/\beta)\beta = \alpha' + \gamma$, откуда

$$q + q' = \alpha'/\beta + \gamma/\beta = (\alpha' + \gamma):\beta. \tag{45}$$

Такимъ образомъ, сумма $q + q'$ геометрически будетъ изображаться совокупностью двухъ бивекторовъ $\alpha' + \gamma$ и β, изъ которыхъ второй намъ извѣстенъ, а первый, $\alpha' + \gamma$, строится по извѣстнымъ правиламъ помощью цилиндроида. Подобнымъ же образомъ строится и разность двухъ бикватерніоновъ:

$$q - q' = \alpha'/\beta - \gamma/\beta = (\alpha' - \gamma);\beta \tag{46}$$

Если мы хотимъ построить бикватерніонъ $q'.q$, то изображаемъ q и q' дробями такъ, чтобы знаменатель множителя = числителю множимаго: $q = \beta/\alpha$ и $q' = \gamma/\beta$. Умножая произведеніе $q'.q$ на α, мы имѣемъ: $(q'q)\alpha = \left(\frac{\gamma}{\beta} . \frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha = \frac{\gamma}{\beta} . \left(\frac{\beta}{\alpha}\alpha\right) = \frac{\gamma}{\beta}\beta = \gamma$, откуда

$$q'q = \frac{\gamma}{\beta} . \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}. \tag{47}$$

Такимъ образомъ, произведеніе будетъ изображаться бивекторами α и γ. Замѣтимъ, что фигура, которую образуютъ оси бивекторовъ α, β, γ и оси бикватерніоновъ q, q' и $q'q$, представляетъ косой шестиугольникъ, всѣ углы котораго прямые.

Наконецъ, чтобы построить частное $q':q$ представимъ q и q' въ видѣ дробей съ одинаковыми знаменателями: $q = \alpha'/\beta$ и $q' = \gamma/\beta$. Мы увидимъ далѣе [см. § 55], что бикватерніонъ обратный къ q, $q^{-1} = \beta/\alpha'$, а потому, означая частное $q':q$ черезъ q'', мы будемъ имѣть

$$q'' = q'/q = q'.q^{-1} = (\gamma/\beta):(\alpha'/\beta) = (\gamma/\beta).(\beta/\alpha') = \gamma/\alpha' \tag{48}$$

Частное, слѣдовательно, будетъ изображаться совокупностью бивекторовъ α' и γ.

49. *Разложеніе бикватерніона на сумму двухъ. Геометрическое значеніе знаковъ S и V и ихъ основного свойства.* Если въ бикватерніонѣ $q=\beta/\alpha$ мы разложимъ числитель, бивекторъ β, на сумму двухъ, $\beta'+\beta''$, то и бикватерніонъ q разложится на сумму двухъ: $q=q'+q''$, гдѣ $q'=\beta'/\alpha$ и $q''=\beta''/\alpha$. Одно изъ этихъ разложеній, соотвѣтствующее разложенію бикватерніона на его скалярную и векторную части, особенно важно. Его мы теперь и разсмотримъ.

Построимъ винтъ ε параметра нуль, которому осью служитъ линія кратчайшаго разстоянія между осями α и β, и черезъ точку пересѣченія осей α и ε, означимъ ее черезъ O, проведемъ линію α', перпендикулярную къ плоскости прямыхъ α и ε. Если мы примемъ точку O за точку приведенія бивектора β, то онъ будетъ характеризоваться двумя векторами β_0 и β_1, которые будутъ лежать въ плоскости осей α и α', ибо первый есть главный векторъ и параллеленъ оси β, а второй есть скорость точки O при винтовомъ движеніи, опредѣляемомъ бивекторомъ β, и перпендикуляренъ къ линіи кратчайшаго разстоянія, т. е. къ оси ε. Каждый изъ векторовъ β_0 и β_1 мы можемъ, слѣдовательно, разложить на два по направленіямъ осей α и α', тогда и бивекторъ β разложится на сумму двухъ бивекторовъ β' и β'', изъ которыхъ одинъ имѣетъ своею осью ось α, а другой прямую α'. Легко опредѣлить тензоры этихъ бивекторовъ. Векторъ β_0 образуетъ съ осью α уголъ φ=углу между осями α и β и его проэкціи на ось α и прямую α' будутъ $T\beta_0 cs\varphi$ и $T\beta_0 sn\varphi$. Векторъ β_1, слагаясь изъ двухъ: скорости поступательной, равной произведенію $P\beta.\beta_0$, и скорости вращательной, равной $T\beta_0.d$, гдѣ d есть кратчайшее разстояніе между осями α и β, и перпендикулярной къ направленію β_0, будетъ имѣть по осямъ α и α' составляющія $T\beta_0(P\beta.cs\varphi-dsn\varphi)$ и $T\beta_0(P\beta sn\varphi+dcs\varphi)$. Слѣдовательно,

$$T\beta'=T\beta_0[cs\varphi+\omega(P\beta.cs\varphi-dsn\varphi)]$$

$$=T\beta_0(1+\omega P\beta)(cs\varphi-\omega dsn\varphi)=T\beta cs\theta$$

$$T\beta''=T\beta_0[sn\varphi+\omega(P\beta.sn\varphi+dcs\varphi)]$$

$$=T\beta_0(1+\omega P\beta)(sn\varphi+\omega dcs\varphi)=T\beta sn\theta,$$

гдѣ $\theta=\varphi+\omega d$ есть комплексный уголъ между осями α и β. Пользуясь теоремой § 45, мы находимъ, что $\beta'/\alpha=(T\beta cs\theta):T\alpha$ и $\beta''/\alpha=(T\beta sn\theta\varepsilon):T\alpha$ и, слѣдовательно,

$$\beta'/\alpha=S\frac{\beta}{\alpha}=S\mathrm{q};\ \beta''/\alpha=V\frac{\beta}{\alpha}=V\mathrm{q} \tag{49}$$

$$\mathrm{q}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta'}{\alpha}+\frac{\beta''}{\alpha}=S\frac{\beta}{\alpha}+V\frac{\beta}{\alpha}=S\mathrm{q}+V\mathrm{q} \tag{50}$$

Итакъ, *если мы, представивъ бикватерніонъ* q *въ видѣ* β/α, *разложимъ бивекторъ* β *на сумму двухъ,* $\beta'+\beta''$, *изъ которыхъ первый имѣетъ своею осью ось* α, *а второй прямую, пересѣкающую ось* α *въ точкѣ ея встрѣчи съ линіей кратчайшаго разстоянія между осями* α *и* β *и перпендикулярную къ этой линіи и къ оси* α, *то бикватерніонъ разложится на сумму двухъ:* $\mathrm{q}'=\beta'/\alpha$ *и* $\mathrm{q}''=\beta''/\alpha$; *первый изъ нихъ будетъ скалярнымъ числомъ,* $S\mathrm{q}$, *а второй—бивекторомъ,* $V\mathrm{q}$.

Главное свойство знаковъ S и V выражается равенствами

$$S(\mathrm{q}+\mathrm{q}')=S\mathrm{q}+S\mathrm{q}', \tag{51}$$

$$V(\mathrm{q}+\mathrm{q}')=V\mathrm{q}'+V\mathrm{q}', \tag{52}$$

которыя очевидны, пока мы разсматриваемъ бикватерніоны какъ комплексныя числа, и представляютъ двѣ теоремы теоріи винтовъ, если мы будемъ разсматривать бикватерніонъ какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ и интепретировать скалярную и векторную части бикватерніона такъ, какъ только что было указано. Не трудно показать, что эти теоремы равносильны тѣмъ, которыя выражаютъ собой свойство дистрибутивности скалярнаго и векторнаго умноженія бивекторовъ. Дѣйствительно, представивъ бикватерніоны q и q' въ видѣ $\mathrm{q}=\alpha'/\beta$ и $\mathrm{q}'=\gamma/\beta$, мы по § 45 имѣемъ формулы

$$S\mathrm{q}=-S\alpha'\beta:N\beta\quad S\mathrm{q}'=-S\gamma\beta:N\beta,$$

$$S(\mathrm{q}+\mathrm{q}')=S[(\alpha'+\gamma):\beta]=-[S(\alpha'+\gamma)\beta]:N\beta$$

изъ которыхъ видимъ, что равенство $S(\alpha'+\gamma)\beta=S\alpha'\beta+S\gamma\beta$ влечетъ за собой $S(\mathrm{q}+\mathrm{q}')=S\mathrm{q}+S\mathrm{q}'$ и обратно изъ равенства втораго слѣдуетъ первое. Также докажемъ, что равенство $V(\mathrm{q}+\mathrm{q}')=V\mathrm{q}+V\mathrm{q}'$ равносильно равенству $V(\alpha'+\gamma)\beta=V\alpha'\beta+V\gamma\beta$. Мы ограничимся здѣсь этими указаніями, отлагая до слѣдующей главы разсмотрѣніе геометрическаго смысла свойствъ дистрибутивности скаларнаго и векторнаго умноженія бивекторовъ, а слѣдовательно и формулъ (51) и (52).

50. *Случаи, когда* $S\beta/\alpha=0$, $PS\beta/\alpha=\infty$, $V\beta/\alpha=0$, $PV\beta/\alpha=\infty$. *Прямой бикватерніонъ.* Такъ какъ въ числителѣ $S\beta/\alpha$ стоитъ $T\beta.cs\theta$ [см. (49) или (37)] то

$PS\beta/\alpha=\infty$, 1) если $P\beta=\infty$; но $Pcs\theta\neq\infty$ и 2) если $Pcs\theta=\infty$, но $P\beta\neq\infty$;

$S\beta/\alpha=0$, 1) если $T\beta=0$, 2) если $cs\theta=0$ и въ 3) если $P\beta=\infty$ и $Pcs\theta=\infty$; вслѣдствіе неопредѣленности положенія оси β мы можемъ разсматривать этотъ случай какъ частный случай предъидущаго [см. разсужденія § 38].

Итакъ, $PS\beta/\alpha=\infty$, *1) когда параметръ дѣлимаго*$=\infty$ *и направленія осей α и β не перпендикулярны и 2) когда* $P\beta\neq\infty$ *и оси, не пересѣкаясь, взаимно перпендикулярны;*

$S\beta/\alpha=0$, 1) *когда числитель* $\beta=0$ *и 2) когда оси α и β пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.*

Такъ какъ въ числителѣ $TV\beta/\alpha$ стоитъ $T\beta sn\theta$ [см. (49) или (38)], то

$PV\beta/\alpha=\infty$, 1) если $P\beta=\infty$, но $Psn\theta\neq\infty$ и 2) если $Psn\theta=\infty$, но $P\beta\neq\infty$;

$V\beta/\alpha=0$, 1) если $T\beta=0$, 2) если $sn\theta=0$ и въ 3) если $P\beta=\infty$ и $Psn\theta=\infty$; вслѣдствіе неопредѣленности положенія оси мы можемъ разсматривать этотъ случай,. какъ частный случай предъидущаго [см. разсужденія § 41]

Итакъ, $PV\beta/\alpha=\infty$, *1) когда параметръ дѣлимаго*$=\infty$ *и оси α и β не параллельны и 2) когда* $P\beta\neq\infty$ *и оси, не совпадая, параллельны;*

$V\beta/\alpha=0$, *1) когда числитель* $\beta=0$ *и 2) когда оси α и β совпадаютъ.*

Изъ предъидущихъ теоремъ слѣдуетъ.

I. $\beta/\alpha=0$ только тогда, когда $\beta=0$.

II. Если дѣлимое $\beta\neq0$, то частное β/α только тогда будетъ скаларнымъ числомъ, когда оси β и α совпадаютъ, и только тогда будетъ бивекторомъ, когда оси α и β пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

III. Бивекторъ δ мы можемъ разсматривать какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, оси которыхъ взаимно перпендикулярны и пересѣкаютъ ось δ подъ прямымъ угломъ въ одной и той же точкѣ. Въ этомъ смыслѣ всякій бивекторъ мы можемъ назвать прямымъ бикватерніономъ.

51. *Бикватерніонъ, какъ факторъ.* Изъ самаго опредѣленія операціи дѣленія слѣдуетъ, что β/α есть такой бикватерніонъ q, что $\beta = q\alpha$. Бикватерніонъ q, разсматриваемый какъ факторъ, преобразуетъ, слѣдовательно, бивекторъ α въ бивекторъ β, онъ эквивалентенъ, стало быть, совокупности нѣкоторыхъ геометрическихъ операцій, помощью которыхъ бивекторъ α переводится въ бивекторъ β. Если мы примемъ точку приведенія бивектора α на его оси, то онъ будетъ опредѣляться совокупностью двухъ векторовъ α_0 и α_1, лежащихъ на оси α, или совокупностью вектора α_0 и $P\alpha = \alpha_1/\alpha_0$; точно также бивекторъ β опредѣляется двумя векторами β_0 и β_1, лежащими на его оси, или же векторомъ β_0 и параметромъ $P\beta = \beta_1/\beta_0$. Такимъ образомъ, бивекторы β и α отличаются одинъ отъ другаго положеніемъ ихъ осей, длиною векторовъ β_0 и α_0 и величиной ихъ параметровъ, $P\beta$ и $P\alpha$, и для того, чтобы преобразовать бивекторъ α въ бивекторъ β, мы должны перемѣстить ось α до совпаденія ея съ осью β и превратить векторъ α_0 въ β_0 и $P\alpha$ въ $P\beta$. Преобразованіе бивектора α въ бивекторъ β можетъ быть разсматриваемо, слѣдовательно, какъ нѣкоторая сложная операція, которую мы можемъ разложить на четыре части.

I. При первомъ преобразованіи оставляемъ неизмѣнными положеніе и направленіе оси α, но измѣняемъ главную часть α, α_0, такъ, чтобы α_0 сдѣлался по длинѣ равнымъ вектору β_0; съ этою цѣлью мы должны α_0 умножить на отношеніе длинъ векторовъ β_0 и α_0, т. е. на $T\beta_0/T\alpha_0$. Мы получаемъ тогда бивекторъ β', который имѣетъ общую ось съ α, и тензоръ котораго $T\beta' = T\beta_0(1+\omega P\alpha)$.

II. Не измѣняя оси бивектора β', совпадающей съ осью α, и его главнаго вектора, измѣнимъ $P\beta' = P\alpha$ такъ, чтобы онъ сдѣлался равнымъ $P\beta$; для этого мы должны къ параметру $P\alpha$ прибавить разность $P\beta - P\alpha$. Мы получимъ тогда бивекторъ β'', имѣющій общую ось съ α и тензоръ котораго $T\beta'' = T\beta_0(1+\omega P\beta) = T\beta$.

III. Построимъ линію кратчайшаго разстоянія между осями α и β и означимъ черезъ ε винтъ параметра нуль, имѣющій эту прямую своею осью. Третье преобразованіе состоитъ въ томъ, что мы, не измѣняя $T\beta''=T\beta$, измѣняемъ направленіе оси β'' (оси α) такъ, чтобы она сдѣлалась параллельной *оси* бивектора β, для чего поворачиваемъ ось β'' (ось α) вокругъ оси ε на уголъ φ въ направленіи, опредѣляемомъ знакомъ φ. Мы получимъ тогда бивекторъ β''', ось котораго пересѣкаетъ ось ε и параллельна оси β, и тензоръ котораго $T\beta'''=T\beta_0(1+\omega P\beta)=T\beta$.

IV. Наконецъ, не измѣняя тензора бивектора β''' и направленія его оси, переносимъ послѣднюю поступательно по направленію оси ε на величину d такъ, чтобы она изъ положенія β''' перешла окончательно въ положеніе оси β. Тогда мы получимъ бивекторъ β.

Чтобы выполнить первыя двѣ операціи мы должны знать два числа: отношеніе $T\beta_0{:}T\alpha_0$ и разность $P\beta-P\alpha$; для третьей операціи намъ должны быть даны: прямая ε, положеніе которой опредѣляется четырьмя величинами и уголъ поворота= углу между *осями* α и β; наконецъ, для совершенія четвертой операціи мы должны знать разстояніе d. Такимъ образомъ сложная операція преобразованія бивектора α въ β можетъ быть задана 8 величинами, и бикватерніонъ $q=\beta/\alpha$, который характеризуетъ эти операціи, долженъ содержать 8 величинъ, что, какъ намъ извѣстно, дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

Каждую изъ указанныхъ операцій мы будемъ называть элементарной операціей. Такимъ образомъ, *бикватерніонъ* q, *разсматриваемый какъ факторъ, эквивалентенъ, вообще говоря, четыремъ элементарнымъ операціямъ.* Двѣ изъ нихъ мѣняютъ тензоръ бивектора α, оставляя неизмѣнной его ось, двѣ другія мѣняютъ положеніе оси α, оставляя неизмѣннымъ его тензоръ.

52. *Элементарные бикватерніоны.* Въ частныхъ случаяхъ при преобразованіи бивектора α въ бивекторъ β можетъ отсутствовать та, или другая, операція; можетъ также случиться, что достаточно будетъ выполнить только одну изъ этихъ операцій. Такъ, если *оси* α и β совпадаютъ, то для преобразованія α въ β достаточно выполнить только первую операцію, когда $P\alpha=P\beta$ и только вторую, когда $T\alpha_0=T\beta_0$. Если $T\alpha=T\beta$, то достаточно повернуть ось α на нѣкоторый уголъ, т. е.

выполнить третью операцію, когда оси α и β пересѣкаются и сообщить оси α только поступательное перемѣщеніе, т. е. выполнить четвертую операцію, когда оси α и β параллельны. Въ этихъ случаяхъ бикватерніонъ $q=\beta/\alpha$ будетъ эквивалентенъ одной изъ элементарныхъ операцій, и мы будемъ называть его элементарнымъ бикватерніономъ. Элементарные бикватерніоны могутъ быть, слѣдовательно, четырехъ типовъ; разсмотримъ ихъ.

I. Пусть оси α и β совпадаютъ и $P\alpha=P\beta$; тогда $\theta=\varphi+\omega d=0$ и формула (36) намъ даетъ:

$$\beta:\alpha=T\beta_0:T\alpha_0, \tag{53}$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, имѣющихъ общую ось и одинаковый параметръ, есть вещественное число=частному отъ дѣленія длины главныхъ векторовъ. Итакъ, *элементарный бикватерніонъ перваго типа есть вещественное число.*

II. Пусть оси α и β совпадаютъ и $\alpha_0=\beta_0$; тогда $T\alpha_0=T\beta_0$, $\theta=\varphi+\omega d=0$ и формула (36) даетъ:

$$\beta:\alpha=1+\omega(P\beta-I\alpha), \tag{54}$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, имѣющихъ общую ось и одинаковый главный векторъ, есть комплексное число, главная часть котораго=единицѣ и параметръ$=P\beta-P\alpha$. Итакъ, *элементарный бикватерніонъ второго типа есть комплесное число вида* $a_0+\omega a_1$, *у котораго главная часть,* $a_0=$ *единицѣ.*

III. Пусть оси α и β пересѣкаются и $T\alpha=T\beta$; тогда $\theta=\varphi$ ($d=0$) и мы получаемъ (36):

$$\beta:\alpha=cs\varphi+\varepsilon sn\varphi, \tag{55}$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, у которыхъ оси пересѣкаются и тензоры одинаковы,=косинусу угла между осями+винтъ параметра нуль, ось котораго проходитъ черезъ точку пересѣченія осей и къ нимъ перпендикулярна, умноженный на синусъ того же угла. Умножая бивекторъ α на $cs\varphi+\varepsilon sn\varphi$, мы получаемъ бивекторъ β; слѣдовательно, бикватерніонъ $cs\varphi+\varepsilon sn\varphi$, разсматриваемый какъ факторъ, поворачиваетъ ось

α на уголъ φ вокругъ оси ε, и мы можемъ назвать его вращающимъ бикватерніономъ. Итакъ, *бикватерніонъ третьяго типа, вращающій бикватерніонъ, равняется косинусу нѣкотораго угла + винтъ параметра нуль, умноженный на синусъ того же угла.*

IV. Пусть оси α и β параллельны и $T\alpha = T\beta$; тогда $\theta = \omega d (\varphi = 0)$ и мы получаемъ (36):

$$\beta : \alpha = 1 + \omega d \varepsilon \tag{56}$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, имѣющихъ оси одинаковаго направленія и одинаковые тензоры, = единицѣ + винтъ произвольнаго параметра, ось котораго перпендикулярна къ осямъ бивекторовъ α и β и параллельна ихъ плоскости, умноженный на ωd, гдѣ d есть разстояніе между осями α и β. Умножая α на $1 + \omega\varepsilon d$, мы получаемъ β; слѣдовательно, бикватерніонъ $1 + \omega\varepsilon d$, разсматриваемый какъ факторъ, сообщаетъ оси α поступательное перемѣщеніе, не измѣняя его тензора, и мы можемъ назвать его поступательнымъ бикватерніономъ. Итакъ, *элементарный бикватерніонъ четвертаго типа, поступательный бикватерніонъ, равенъ единицѣ + бивекторъ безконечно большаго параметра.*

53. *Разложеніе бикватерніона на множители.* Всякій неэлементарный бикватерніонъ, получающійся при дѣленіи β на α, эквивалентенъ совокупности двухъ, или трехъ, или четырехъ элементарныхъ операцій и соотвѣтственно этому можетъ быть разложенъ на произведеніе двухъ, трехъ, или четырехъ элементарныхъ бикватерніоновъ. Въ самомъ дѣлѣ, обратимся къ общему случаю, когда бикватерніонъ эквивалентенъ четыремъ элементарнымъ операціямъ. Бикватерніонъ β'/α, гдѣ β' есть бивекторъ, въ который первая операція преобразуетъ бивекторъ α [см. § 51] есть элементарный бикватерніонъ перваго типа; означая его черезъ q', мы имѣемъ:

$$\mathrm{q}' = T\beta_0 T\alpha_0 \quad \text{и} \quad \beta' = \mathrm{q}'\alpha.$$

Бикватерніонъ $\mathrm{q}'' = \beta''/\beta'$, гдѣ β'' есть бивекторъ, въ который вторая операція преобразуетъ бивекторъ β', есть элементарный бикватерніонъ втораго типа; мы имѣемъ:

$$\mathrm{q}' = \beta'' : \beta' = 1 + \omega(P\beta - P\alpha) \text{ и } \beta'' = \mathrm{q}''\beta' = \mathrm{q}''\mathrm{q}'\alpha.$$

Далѣе, бикватерніонъ $q''' = \beta'''/\beta''$, гдѣ β''' есть бивекторъ, въ который третья операція преобразуетъ бивекторъ β'', есть вращающій бикватерніонъ, и слѣдовательно

$$q''' = \beta''' : \beta'' = cs\varphi + \varepsilon sn\varphi \quad \text{и} \quad \beta''' = q'''\beta'' = q'''q''q'\,\alpha$$

Наконецъ, бикватерніонъ $q'''' = \beta/\beta'''$ есть бикватерніонъ поступательный, и слѣдовательно

$$q'''' = \beta : \beta''' = 1 + \omega d\varepsilon \quad \text{и} \quad \beta = q''''\beta''' = q''''q'''q''q'\,\alpha,$$

откуда

$$q = \beta : \alpha = q''''q'''q''q',$$

что и доказываетъ наше положеніе. Такимъ образомъ, мы приходимъ снова путемъ геометрическихъ соображеній къ формулѣ [(44) § 45]. Всякій разъ, когда въ преобразованіи бивектора α въ β будетъ отсутствовать какая нибудь изъ элементарныхъ операцій, соотвѣтствующій этой операціи элементарный бикватерніонъ обращается въ единицу. Такъ напримѣръ, если оси α и β параллельны и одинаково направлены, то для преобразованія α въ β нѣтъ надобности поворачивать оси α; слѣдовательно, операція третья будетъ отсутствовать, и вращающій бикватерніонъ $cs\varphi + \varepsilon sn\varphi = 1$. Итакъ

Бикватерніонъ β/α разлагается на произведеніе, вообще говоря, четырехъ элементарныхъ бикватерніоновъ; причемъ каждой изъ элементарныхъ операцій, послѣдсвательнымъ примѣненіемъ которыхъ мы можемъ бивекторъ α преобразовать въ бивекторъ β, соотвѣтствуетъ свой опредѣленный множитель, который обращается всякій разъ въ единицу, когда въ преобразованіи α въ β отсутствуетъ соотвѣтствующая ему операція.

Такъ какъ всякій бикватерніонъ q мы можемъ разсматривать какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, то изъ предъидущей теоремы слѣдуетъ, что *всякій бикватерніонъ q мы можемъ разложить на произведеніе четырехъ элементарныхъ бикватерніоновъ.* Дѣйствительно, представивъ q въ видѣ $q = Tq(cs\theta + \varepsilon sn\theta)$, гдѣ $\theta = \varphi + \omega d$ есть уголъ бикватерніона [см. § 26], развертывая $Tq, cs\theta$ и $sn\theta$ по формуламъ [(27) § 25] и [(19) § 36] и замѣчая, что $\varepsilon^2 = -1$, мы получаемъ:

$$q = Tq_0(1 + \omega Pq)(cs\varphi + \varepsilon sn\varphi)(1 + \omega d\varepsilon) \tag{57}$$

54. *Тензоръ и верзоръ бикватерніона и ихъ главное свойство.* Въ предъидущемъ параграфѣ мы разложили бикватерніонъ q на произведеніе четырехъ элементарныхъ бикватерніоновъ. Произведеніе двухъ изъ нихъ даетъ намъ тензоръ q, произведеніе двухъ другихъ его верзоръ:

$$Tq = Tq_0(1+\omega Pq)$$

$$Uq = (cs\varphi + \varepsilon sn\varphi)(1+\omega d\varepsilon)$$

$$q = Tq\,.\,Uq. \tag{58}$$

Если бы мы представили бикватерніонъ q въ видѣ $q = \beta/\alpha$, то

$$Tq = T\beta : T\alpha \tag{59}$$

$$Uq = U\beta : U\alpha. \tag{60}$$

Первая изъ этихъ формулъ была доказана уже въ § 45 [форм. (36)]. Вторая слѣдуетъ изъ той же формулы (36), которая даетъ намъ $U\beta : U\alpha = cs\theta + \varepsilon sn\theta$, если мы припомнимъ, что $U\alpha$ и $U\beta$ суть винты, оси которыхъ совпадаютъ соотвѣтственно съ осями α и β и параметры которыхъ равны нулю, такъ что $TU\alpha = 1$ и $TU\beta = 1$.

Изъ (59) и (60) легко выводятся формулы (43) и (45) § 27. Мы должны только представить бикватерніоны q и q' въ видѣ β/α и γ/β; тогда пользуясь [(47) § 48], мы будемъ имѣть

$$Tq'q = T(\gamma:\alpha) = T\gamma:T\alpha = (T\gamma:T\beta)(T\beta:T\alpha) = Tq'Tq \tag{61}$$

$$Uq'q = U(\gamma:\alpha) = U\gamma:U\alpha = (U\gamma:U\beta)(U\beta:U\alpha) = Uq'Uq. \tag{62}$$

55. *Бикватерніоны, связанные съ даннымъ.* Имѣя нѣкоторый бикватерніонъ

$$q = \beta:\alpha = Tq_0(1+\omega Pq)(cs\varphi + \varepsilon sn\varphi)(1+\omega d\varepsilon),$$

гдѣ $Pq = P\beta - P\alpha$ и $Tq_0 = T\beta_0 : T\alpha_0$, мы можемъ получить изъ него цѣлый рядъ другихъ, если измѣнимъ знакъ у одного, двухъ, или у всѣхъ трехъ чиселъ Pq, φ, d и оставимъ въ то же время множитель Tq_0 безъ измѣненія, или замѣнимъ его величиной обратной. Мы будемъ имѣть такимъ образомъ всего 16 бикватерніоновъ, включая въ ихъ число и данный. Четыре мы получимъ, если сдѣлаемъ одну изъ указанныхъ перемѣнъ, т. е. измѣнимъ знакъ у одного изъ чиселъ $P\mathrm{q}$, φ, d, оставляя неизмѣннымъ множитель $T\mathrm{q}_0$, или замѣнимъ $T\mathrm{q}_0$ величиной ему обратной, сохраняя знаки $P\mathrm{q}$, φ и d. Шесть получимъ, сдѣлавъ двѣ перемѣны, четыре—три перемѣны, и наконецъ одинъ—четыре перемѣны. Разсмотримъ нѣкоторые изъ этихъ бикватерпіоновъ.

Проведемъ черезъ ось α двѣ плоскости, изъ которыхъ одна, плоскость первая, перпендикулярна къ оси q и, слѣдовательно, параллельна оси β, а другая, плоскость вторая, проходитъ черезъ ось q, т. е. линію кратчайшаго разстоянія между осями α и β. Построимъ затѣмъ отраженія оси β въ этихъ плоскостяхъ, β'—отраженіе въ первой плоскости и β''—во второй. Очевидно, что отраженія: β' во второй плоскости и β'' въ первой совпадутъ съ одной и той же прямой β''', которая будетъ симметрична съ осью β относительно оси α. Мы будемъ имѣть, такимъ образомъ, четыре прямыхъ, которыя попарно: ось β и β'', β' и β''' лежатъ въ двухъ, параллельныхъ между собой и перпендикулярныхъ къ оси ε, плоскостяхъ, и всѣ пересѣкаютъ ось ε. Легко видѣть, что комплексные углы относительно направленія ε между осью α и β', β'', β''' будутъ попорядку $\varphi-\omega d, -\varphi+\omega d, -\varphi-\omega d$; слѣдовательно, если мы построимъ бивекторъ α', β', β'', β''', которые имѣютъ своими осями ось α и прямыя β', β'', β''' и своими тензорами соотвѣтственно числа $T\alpha'=T\alpha_0(1-\omega P\alpha)$, $T\beta'=T\beta_0(1-\omega P\beta)$, $T\beta''=T\beta_0(1-\omega P\beta)$, $T\beta'''=T\beta$, то

$$q'=\beta':\alpha'=T\mathrm{q}_0(1-\omega P\mathrm{q})(cs\varphi+\varepsilon sn\varphi)(1-\omega d\varepsilon) \tag{63}$$

$$q''=\beta'':\alpha'=T\mathrm{q}_0(1-\omega P\mathrm{q})(cs\varphi-\varepsilon sn\varphi)(1+\omega d\varepsilon) \tag{64}$$

$$q'''=\beta''':\alpha=T\mathrm{q}_0(1+\omega P\mathrm{q})(cs\varphi-\varepsilon sn\varphi)(1-\omega d\varepsilon). \tag{65}$$

Бивекторы—β' и—β'' мы можемъ назвать отраженіями бивектора β въ построенныхъ нами плоскостяхъ, бивекторъ—β' въ нормальной къ оси ε плоскости, бивекторъ—β'' въ плоскости, проходящей черезъ ось, ибо безконечно малыя винтовыя движенія, опредѣляемыя бивекторами—β' и—β'' суть отраженія въ указанныхъ плоскостяхъ винтоваго движенія, опредѣляемаго бивекторомъ β; бивекторъ—α' будетъ отраженіемъ бивектора α какъ той, такъ и въ другой плоскости. Вслѣдствіе этого бикватерніоны q' и q'' мы можемъ назвать отраженіями бикватерніона q, первый—нормальнымъ, второй—параллельнымъ. Бикватерніонъ q''' есть бикватерніонъ дважды отраженный; такъ какъ онъ получается изъ q, если мы измѣнимъ знакъ у ε, то $q'''=Kq$ [см. (15) § 22].

Построенія, подобныя предъидущимъ, даютъ возможность получить и остальныя изъ упомянутыхъ нами 16 бикватерніоновъ. Бикватерніонъ обратный данному принадлежитъ къ ихъ числу, ибо изъ равенства $(\alpha/\beta)(\beta/\alpha)=1$, слѣдуетъ, что

$$q^{-1}=\alpha:\beta=(1:Tq_0)(1—\omega Pq)(cs\varphi—\varepsilon sn\varphi)(1—\omega d\varepsilon). \qquad (66)$$

Умножая данный бикватерніонъ q на его отраженія, мы получаемъ интересныя формулы:

$$q'q=(Tq_0)^2(cs2\varphi+\varepsilon sn2\varphi) \qquad (67)$$

$$q''q=(Tq_0)^2(1+\omega 2d\varepsilon) \qquad (68)$$

$$q'''q=(Tq_0)^2(1+\omega 2Pq). \qquad (69)$$

Замѣтимъ, что вообще произведеніе даннаго бикватерніона на бикватеріонъ, который получается изъ него путемъ n указанныхъ нами перемѣнъ ($n \overset{=}{<} 4$), разлагается на произведеніе $4—n$ элементарныхъ бикватерніоновъ.

56. *Умноженіе бивектора* α *на бикватерніонъ* q, *ось которато пересѣкаетъ ось* α *подъ прямымъ угломъ.*

Произведеніе бивектора α *на бикватерніонъ* $q=Tq(cs\theta+\varepsilon sn\theta)$, *ось котораго пересѣкаетъ ось* α *подъ прямымъ угломъ, есть бивекторъ* β, *тензоръ котораго* $=Tq.T\alpha$ *и ось котораго мы получимъ, если сообщимъ оси* α *два движенія: перемѣстимъ ее поступательно на величину* d *по направленію оси* ε, *если* $d>0$, *и въ обратномъ направленіи, если* $d<0$, *и затѣмъ повернемъ ее вокругъ оси* ε *на уголъ* φ *по часовой стрѣлкѣ, если* $\varphi>0$, *и въ обратную сторону, если* $\varphi<0$. *Вмѣсто того, чтобы сообщать оси* α *два перемѣщенія, мы можемъ сообщить ей одно—винтовое, которое имѣетъ ось* ε *своею осью и опредѣляется угломъ поворота,* $=$ *повороту бикватерніона* q, φ, *и величиной поступательнаго пемѣщенія,* $=$ *шагу бикватерніона* q, d, *или, короче, угломъ* $\theta=\varphi+\omega d$ *бикватерніона* q.

Въ самомъ дѣлѣ, при такомъ построеніи оси β комплексный уголъ между осями α и β будетъ $\theta=\varphi+\omega d$ относительно направтенія ε и по теоремѣ § 45, мы будемъ имѣть

$\beta/\alpha = T\beta/T\alpha\ (cs\theta + \varepsilon sn\theta)$, или, такъ какъ $T\beta = T\mathrm{q}T\alpha$, то

$$\beta{:}\alpha = T\mathrm{q}(cs\theta + \varepsilon sn\theta) = \mathrm{q},$$

откуда $\beta = \mathrm{q}\alpha$, что и доказываетъ нашу теорему. Очевидно, что ось β будетъ пересѣкать ось ε также подъ прямымъ угломъ. Изъ теоремы вытекаютъ такія слѣдствія.

I. Умножая бивекторъ α на множителя $T\mathrm{q}_0$, или $1 + \omega P\mathrm{q}$, мы не измѣняемъ положенія его оси; въ первомъ случаѣ мы преобразуемъ главный векторъ α_0 въ $T\mathrm{q}_0 . \alpha_0$, а во второмъ измѣняемъ $P\alpha$ въ $P\alpha + P\mathrm{q}$.

II. Умножая бивекторъ α, ось котораго пересѣкаетъ ось ε подъ прямымъ угломъ, на $cs\varphi + \varepsilon sn\varphi$, или на $1 + \omega d\varepsilon$, мы не мѣняемъ $T\alpha$, но измѣняемъ ось α; въ первомъ случаѣ поворачиваемъ ее вокругъ оси ε на уголъ φ, а во второмъ—сообщаемъ ей поступательное перемѣщеніе, равное d, по направленію ε.

III. Умножая α на комплекное число $T\mathrm{q} = T\mathrm{q}_0(1 + \omega P\mathrm{q})$, мы получаемъ бивекторъ $T\mathrm{q} . \alpha$, имѣющій общую ось съ α и тензоръ котораго $= T\mathrm{q} . T\alpha$.

IV. Умножая α на $(cs\varphi + \varepsilon sn\varphi)(1 + \omega d\varepsilon)$, мы не мѣняемъ $T\alpha$, но сообщаемъ ось α винтовое перемѣщеніе вокругъ оси ε, опредѣляемое комплексным угломъ $\theta = \varphi + \omega d$. Такъ какъ $U\mathrm{q}$ всегда можно представить въ видѣ $cs\theta + \varepsilon sn\theta$, то верзоръ всякаго бикватерніана, разсматриваемый какъ факторъ, опредѣляетъ нѣкоторое винтовое перемѣщеніе.

57. *Законы коммутативности и ассоціативности сложенія и дистрибутивности сложенія и умноженія.* Разсматривая во второй главѣ бикватерніоны, какъ комплексныя числа, мы опредѣлили операціи сложенія и умноженія формулами (10) § 20 и (13) § 21, изъ которыхъ просто вытекаютъ основныя законы этихъ операцій. Если же мы будемъ разсматривать бикватерніонъ какъ частное [см. § 46], то операціямъ надъ бикватерніонами будутъ соотвѣтствовать нѣкоторыя геометрическія построянія [см. § 48] и основныя законы операцій будутъ выражать собой нѣкоторыя свойства этихъ построеній. Слѣдовательно, доказавъ послѣднія путемъ геометрическихъ соображеній, мы вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ и основные законы операцій надъ бикватерніонами. По поводу этихъ доказательствъ мы теперь и сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній.

Въ § 49 мы видѣли, что бикватерніонъ q разлагается на сумму $Sq+Vq$. Если, затѣмъ, мы докажемъ геометрически формулы (51) и (52) того же параграфа, то мы разложимъ операцію сложенія бикватерніоновъ на двѣ: на сложеніе скалярныхъ чиселъ вида $a_0+\omega a_1$ и на сложеніе бивекторовъ, и законы коммутативности и ассоціативности сложенія бикватерніоновъ будутъ слѣдовать изъ соотвѣтствующихъ законовъ сложенія чиселъ вида $a_0+\omega a_1$ и бивекторовъ.

Чтобы доказать геометрически законъ дистрибутивности умноженія и сложенія, мы должны, слѣдуя за Hamilton'омъ, доказать справедливость его сначала для частныхъ случаевъ коллинеарныхъ [см. § 47] и прямыхъ бикватерніоновъ [см. § 50], и тогда доказательство въ общемъ случаѣ уже не представляетъ затрудненій [см. §§ 209, 210 и 211 „Elements of Quaternions"]

58. *Законъ ассоціативности умноженія.* Подобно тому какъ формулы [(50); (51), (52) § 49] разлагаютъ операцію сложенія бикватерніоновъ на сложеніе скалярныхъ чиселъ и бивекторовъ, такъ формулы [(58), (61), (62) § 54] позволяютъ раздѣлить операцію умноженія бикватерніоновъ на двѣ: на умноженіе ихъ тензоровъ, которые суть числа вида $a_0+\omega a_1$, и ихъ верзоровъ. Законъ ассоціативности умноженія бикватерніоновъ будетъ очевидно слѣдствіемъ соотвѣтствующихъ законовъ умноженія чиселъ вида $a_0+\omega a_1$ и верзоровъ.

Обращаясь къ закону ассоціативности умноженія верзоровъ, разсмотримъ нѣсколько подробнѣе, чѣмъ это было сдѣлано въ § 48, геометрическія построенія, соотвѣтствующія умноженію бикватерніоновъ въ томъ частномъ случаѣ, когда они будутъ верзорами.

Пусть бикватерніонъ q есть нѣкоторый верзоръ, такъ что $Tq=1$. Желая представить q въ видѣ β/α, мы должны въ силу условія $T\beta{:}T\alpha=Tq=1$ сдѣлать $T\alpha=T\beta$, напримѣръ положить $T\alpha=T\beta=1$ и за бивекторы α и β принять винты параметра нуль. Но винтъ параметра нуль вполнѣ опредѣляется его осью, т. е. прямой, которой мы приписываемъ опредѣленное направленіе, а потому всякій верзоръ можетъ быть заданъ двумя прямыми α и β, къ которымъ мы можемъ присоединить еще линію кратчайшаго разстоянія между ними, указывающую своимъ направленіемъ дѣлителя и дѣлимое [см. § 46]. Прямыя α и β пересѣкаютъ ось q подъ прямымъ угломъ и комплексный уголъ между ними равенъ углу верзора q.

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ два верзора q и q'. Чтобы построить q'q, проведемъ линію β кратчайшаго разстоянія между осями q и q' и построимъ двѣ прямыхъ α и γ, изъ которыхъ первая, α, пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ ось q и винтовымъ перемѣщеніемъ, опредѣляемымъ q [см. § 56] совмѣщается съ β, а вторая, γ, пересѣкаетъ ось q' и есть та прямая, въ которую переходитъ β при винтовомъ движеніи, опредѣляемомъ q'. Линія кратчайшаго разстоянія между α и γ будетъ осью q'q, а комплексный уголъ между α и γ—угломъ q'q, ибо комплексные углы между прямыми α и β, β и γ будутъ равны соотвѣтственно $\angle$q и $\angle$q' и слѣдовательно, если мы примемъ прямыя α, β, γ за оси винтовъ параметра нуль, которые мы означимъ соотвѣтственно тѣми же буквами α, β и γ, то

$$q=\beta:\alpha,\quad q'=\gamma:\beta$$

и

$$q'q=\gamma:\alpha \qquad [\text{см. } (47)\ \S\ 48].$$

Фигура, которую образуютъ прямыя α, β, γ и оси q, q', q'q представляетъ косой шестиугольникъ, всѣ углы котораго прямые. Такимъ образомъ, операція умноженія верзоровъ-кватерніоновъ, которая, какъ извѣстно, эквивалентна сложенію дугъ большихъ круговъ сферы, преобразуется въ теоріи бикватерніоновъ въ операцію построенія нѣкотораго шестиугольника съ прямыми углами, благодаря чему мы теперь уже можемъ предвидѣть аналогію между геометріей такого шестиугольника съ одной стороны и геометріей сферическаго треугольника съ другой.

Въ теоріи кватерніоновъ законъ ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ выражаетъ собой, какъ показалъ Hamilton, слѣдующую теорему сферической геометріи [см. „Elements of Quaternions“ § 264; Möbius „Neuer Beweis des in Hamilton's Lectures on Quaternions aufgestellten associativen Princips bei der Zusammensetzung von Bögen grösster Kreise einer Kugelfläche“, Werke, Bd. 2].

Если мы имѣемъ сферическій шестиугольникъ (*DAB GJF*), обладающій тѣмъ свойствомъ, что изъ его первой, третьей и пятой сторонъ (*DA*,*BG*,*JF*), перемѣщая ихъ вдоль большихъ круговъ, на которыхъ онѣ лежатъ, мы можемъ составить треугольникъ, то подобнымъ же образомъ можемъ составить треугольникъ и изъ второй, четвертой и шестой сторонъ (AB,GJ,FD) шестиугольника.

Болѣе сложную теорему выражаетъ законъ ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ. Мы приходимъ къ этой теоремѣ, если, взявъ какіе либо три верзора q,q',q'', построимъ сначала (такъ, какъ выше указано) верзоръ $q''(q'q)$, а потомъ, равный ему по закону ассоціативности, верзоръ $(q''q')q$. Мы получаемъ тогда довольно сложную фигуру, состоящую изъ 18 прямыхъ линій, пересѣкающихся между собой подъ прямыми углами, и законъ ассоціативности даетъ намъ нѣкоторое свойство этой фигуры. Чтобы яснѣе представить себѣ фигуру, о которой идетъ рѣчь, мы замѣтимъ, что всѣ ея 18 линій мы можемъ раздѣлить на три группы по шести линій въ каждой. Пусть $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6$ суть линіи первой группы; тогда линіи $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6$, второй группы, будутъ линіями кратчайшихъ разстояній между $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6$, и линіи $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6$, третьей группы, — линіями кратчайшихъ разстояній между $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6$, а именно:

ε_1—между δ_1 и δ_2, ε_2—между δ_2 и δ_3, ε_3—между δ_3 и δ_4,
ε_4— — δ_4 и δ_5, ε_5— — δ_5 и δ_6, ε_6— — δ_6 и δ_1,
ζ_1— — ε_6 и ε_2, ζ_3— — ε_2 и ε_4, ζ_5— — ε_4 и ε_6,
ζ_2— — ε_1 и ε_3, ζ_4— — ε_3 и ε_5, ζ_6— — ε_5 и ε_1.

Если мы условимся комплексный уголъ между двумя прямыми α и β означать черезъ $(\alpha\ \beta)$, то законъ ассоціативности будетъ выражать слѣдующее свойство этой фигуры: если

$$(\zeta_2\zeta_4)=(\delta_3\delta_4),(\zeta_4\zeta_6)=(\delta_5\delta_6),(\zeta_6\zeta_2)=(\delta_1\delta_2),$$

то
$$(\zeta_1\zeta_3)=(\delta_2\delta_3),(\zeta_3\zeta_5)=(\delta_4\delta_5),(\zeta_5\zeta_1)=(\delta_6\delta_1).$$

Въ томъ, что вышеуказанная теорема сферической геометріи преобразуется въ теоріи бикватерніановъ въ только что приведенную теорему, читатель убѣдится въ слѣдующей главѣ.

Самъ Hamilton даетъ нѣсколько геометрическихъ доказательствъ закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ. Одно изъ нихъ, наиболѣе изящное и естественное, основано на свойствахъ сфероконическаго сѣченія, открытыхъ Chasles'емъ, которыя мы можемъ разсматривать также какъ свойства конуса втораго порядка. Не менѣе изящно доказательство, предложенное Möbius'омъ (l. c.). Онъ замѣчаетъ, что извѣстная теорема Hamilton'а, по которой умноженіе двухъ верзоровъ-кватерніоновъ эквивалентно сложенію двухъ конечныхъ вращательныхъ перемѣщеній неизмѣняемой системы вокругъ пересѣкающихся осей, легко можетъ быть доказана геометрически. Если же эта теорема доказана, то законъ ассоціативности умноженія слѣдуетъ изъ ассоціативности сложенія трехъ конечныхъ вращеній вокругъ пересѣкающихся осей.

Каждое изъ доказательствъ закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ, будучи надлежащимъ образомъ обобщено, даетъ намъ доказательство закона ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ, а слѣдовательно и вышеприведенной теоремы относительно 18 прямыхъ. Такъ напримѣръ, въ слѣдующей главѣ мы увидимъ, что конусу втораго порядка аналогична нѣкоторая конгруэнція, и что вышеупомянутымъ свойствамъ сфероконическаго сѣченія соотвѣтствуютъ нѣкоторыя свойства этой конгруэнціи, которыми мы и могли бы воспользоваться для доказательства нашей теоремы. Подобнымъ же образомъ можетъ быть обобщено и доказательство Möbius'а. Достаточно только показать, что построеніе $q'q$ эквивалентно сложенію двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній, и тогда законъ ассоціативности умноженія будетъ вытекать изъ ассоціативности сложенія трехъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній. На этомъ распространеніи доказательства Möbius'а мы остановимся подробнѣе въ слѣдующей главѣ.

59. *Одноосные бикватерніоны. Алгебра щетки.* Бикватерніоны, имѣющіе общую ось мы будемъ называть одноосными бикватерніонами. Перемножая одноосные бикватерніоны

$$\mathrm{q}=T\mathrm{q}(cs\theta+\varepsilon sn\theta) \text{ и } \mathrm{q}'=T\mathrm{q}'(cs\theta'+\varepsilon sn\theta')$$

мы получаемъ бикватерніонъ

$$\mathrm{q}'\mathrm{q}=T\mathrm{q}.T\mathrm{q}'[cs(\theta+\theta')+\varepsilon sn(\theta+\theta')] \tag{70}$$

одноосный съ множителями q и q′. Операція умноженія одноосныхъ бикватерніановъ коммутативна, это видно изъ предъидущей формулы, а потому дѣленіе одноосныхъ бикватерніоновъ можетъ быть только одного типа, а именно:

$$\mathrm{q}':\mathrm{q}=(T\mathrm{q}':T\mathrm{q})[cs(\theta'—\theta)+\varepsilon sn(\theta'—\theta)]. \tag{71}$$

Частное, какъ видимъ, есть бикватерніонъ одноосный съ q и q′. Одноосными съ q и q′ будутъ также и бикватерніоны q′+q и q′—q. Такимъ образомъ, совокупность одноосныхъ бикватерніоновъ образуетъ замкнутую область комплексныхъ чиселъ, такъ что основныя операціи надъ числами этой области даютъ числа, принадлежащія къ той же области.

Пользуясь изслѣдованіями §§ 46 и 48, мы весьма просто можемъ геометрически изображать одноосные бикватеріоны и интепретировать основныя операціи надъ ними. Дѣйствительно, построимъ винтъ η параметра нуль ($T\eta=1$), ось котораго пересѣкаетъ ось ε подъ прямымъ угломъ. Тогда произвольно выбранный бикватерніонъ $\mathrm{q}=T(cs\theta+\varepsilon sn\theta)$, имѣющій ось ε свою осью мы можемъ представить въ видѣ $\mathrm{q}=\alpha/\eta$, гдѣ α есть бивекторъ, тензоръ котораго $=Tq$ и ось котораго пересѣкаетъ ось ε подъ прямымъ угломъ и образуетъ съ осью η относительно направленія ε комплексный уголъ θ. Если, слѣдовательно, винтъ η будетъ нами выбранъ разъ на всегда, то бикватерніанъ q будетъ вполнѣ опредѣлять бивекторъ α, и обратно, бивекторъ α будетъ вполнѣ опредѣлять бикватерніанъ q. Итакъ бикватерніанъ q мы можемъ изобразить однимъ бивекторомъ α, ось котораго пересѣкаетъ ось ε подъ прямымъ угломъ.

Складывая два одноосныхъ бикватерніановъ $\mathrm{q}=\alpha/\eta$ и $\mathrm{q}'=\beta/\eta$, мы получаемъ бикватерніонъ $\mathrm{q}'+\mathrm{q}=(\alpha+\beta)/\eta$ который будетъ одноосным съ q и q′ и будетъ изображаться суммой бивекторовъ α и β, изображающихъ бикватерніоны q и q′. Точно также найдемъ, что бикватерніанъ q′—q изобразится бивекторомъ $\beta-\alpha$.

Чтобы получить произведеніе q′q, или частное q′/q, мы должны ось бивектора β повернуть вокругъ оси ε на комплексный уголъ θ въ положительномъ направленіи въ первомъ случаѣ и въ отрицательномъ—во второмъ и умножить $T\beta$ на $T\alpha$—въ первомъ случаѣ и раздѣлить $T\beta{:}T\alpha$—во второмъ. Эти построенія вытекаютъ изъ формулъ (70) и (71); ихъ можно получить также путемъ геометрическихъ соображеній изъ изслѣдованіи § 48. Замѣтимъ, что умноженіе бикватерніана q, изображаемаго бивекторомъ α, на $\varepsilon^{a_0+\omega a_1}$ [см. § 28] эквивалетно винтовому перемѣщенію оси α на комплексный уголъ $a_0+\omega a_1$, благодаря чему

$$\varepsilon^{a_0+\omega a_1}$$

мы можемъ назвать винтящимъ факторомъ.

Оси бивекторовъ, которыми мы изображаемъ одноосные бикватерніаны, всѣ пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ ось ε и образуютъ, слѣдовательно щетку, [см. § 47]. Такимъ образомъ алгебра одноосныхъ бикватерніоновъ есть алгебра щетки.

Что касается аналитической теоріи одноосныхъ бикватерніоновъ, то мы замѣтимъ, что при операціяхъ надъ ними ε играетъ роль символа, коммутативнаго съ символомъ ω и обладающаго свойствомъ $\varepsilon^2=-1$. Мы можемъ, поэтому, нисколько не измѣняя аналитической теоріи, замѣнить ε черезъ $\sqrt{-1}=i$ и представить бикватерніонъ $q=Tq(cs\theta+\varepsilon sn\theta)$ въ видѣ

$$q=Tq(cs\theta+isn\theta), \tag{72}$$

или, полагая

$$Tqcs\theta=a=a_0+\omega a_1, Tqsn\theta=b=b_0+\omega b_1, \tag{73}$$

въ видѣ
$$q=a+bi=a_0+\omega a_1+i(b_0+\omega b_1). \tag{74}$$

Оставаясь, слѣдовательно, въ области одноосныхъ бикватерніоновъ, мы можемъ разсматривать бикватерніонъ какъ обыкновенное комплексное число $a+bi$, у котораго коэффиціентъ при i и вещественная часть суть коплексныя числа $a_0+\omega a_1$ и $b_0+\omega b_1$ $(\omega^2=0)$. Тензоръ бикватерніона q и его уголъ, опредѣляясь формулами (73), будутъ соотвѣтственно модулемъ и аргументомъ числа $a+bi$.

Пока числа a и b остаются вещественными, мы изображаемъ комплексное число $a+bi$ точками плоскости, или, лучше, векторами плоскости, имѣющими общее начало. Алгебра обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ есть алгебра пучка векторовъ. Когда же числа a и b въ свою очередь становятся комплексными: a обращается въ $a_0+\omega a_1$, b—въ $b_0+\omega b_1$, то числа $a+bi$ обращаются въ числа $a_0+\omega a_1+i(b_0+\omega b_1)$, которыя мы можемъ разсматривать какъ одноосные бикватерніоны и изображать бивекторами, оси которыхъ образуютъ щетку. Алгебра такихъ чиселъ есть алгебра щетки.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что между двумя геометрическими формами, пучкомъ и щеткой, должна существовать нѣкоторая аналогія; это заключеніе мы подтвердимъ, дѣйствительно, съ слѣдующей главѣ.

Числа $a_0+\omega a_1+i(b_0+\omega b_1)$ мы можемъ представить также въ видѣ:

$$q=a_0+ib_0+\omega(a_1+ib_1). \tag{75}$$

Въ такой формѣ не трудно узнать въ нихъ тѣ числа, аналитическая теорія которыхъ дана нами въ §§ 18 и 19, ибо въ самомъ началѣ § 18 мы обращали уже вниманіе на то, что въ числахъ вида $c_0+\omega c_1$ c_0 и c_1 могутъ быть обыкновенными комплексными числами, $c_0=a_0+ib_0, c_1=a_1+ib_1$. Мы можемъ слѣдовательно сказать, что аналитическая теорія одноосныхъ бикватерніоновъ дана нами въ §§ 18 и 19.

Наконецъ, мы можемъ разсматривать одноосные бикватерніоны какъ комплексныя числа съ четырьмя единицами:

$$q=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3, \tag{76}$$

если положимъ $e_0=1, e_1=i, e_2=\omega, e_3=\omega i$. Таблицей умноженія для комплексныхъ единицъ e_0, e_1, e_2, e_3 будетъ служить таблица:

$$\begin{array}{c|cccc} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_0 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_3 & -e_2 & 0 & 0 \end{array} \qquad (77)$$

Итакъ мы можемъ резюмировать сказанное въ этомъ параграфѣ слѣдующимъ образомъ:

Аналитическая теорія комплексныхъ чиселъ вида (74), или (75), или (76) дана нами въ §§ 18 и 19; алгебра этихъ чиселъ есть алгебра щетки бивекторовъ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Глава I.

60. *Методъ перенесенія или раздвиганія.* Во второй главѣ первой части мы видѣли, что всѣ формулы теоріи кватерніоновъ мы можемъ разсматривать какъ неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ.

Въ третьей главѣ мы показали, что бикватерніоны и основныя операціи надъ ними могутъ быть интерпретированы помощью теоріи винтовъ подобно тому, какъ кватерніоны интерпретируются помощью теоріи векторовъ.

Изъ этихъ положеній вытекаетъ весьма важное и плодотворное, по своимъ результатамъ, слѣдствіе.

Пусть мы имѣемъ нѣкоторую теорему геометріи или механики, которая можетъ быть доказана помощью теоріи кватерніоновъ. Такая теорема выразится однимъ или нѣсколькими равенствами между кватерніонами, и доказать ее это значитъ получить послѣднія изъ основныхъ формулъ теоріи кватерніоновъ помощью нѣкоторыхъ преобразованій. Но формулы теоріи кватерніоновъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ и формулы теоріи бикватерніоновъ и послѣднія преобразуются совершенно также какъ и первыя, а потому равенства, выражающія собой разсматриваемую теорему будутъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если мы замѣнимъ въ нихъ кватерніоны бикватерніонами. Слѣдовательно, наша теорема даетъ намъ нѣкоторыя равенства между бикватерніонами. Интерпретируя ихъ геометрически, мы получаемъ новую теорему, представляющую обобщеніе первоначально данной.

Итакъ, каждая теорема геометріи или механики, которая можетъ быть доказана помощью теоріи кватерніоновъ допускаетъ обобщеніе въ извѣстномъ направленіи. Мы при-

ходимъ къ желаемому обобщенію, если выразимъ теорему въ видѣ равенствъ между кватерніонами и затѣмъ, замѣнивъ кватерніоны бикватерніонами, будетъ интерпретировать ихъ помощью теоріи винтовъ.

Эта весьма общая теорема позволяетъ намъ устанавливать аналогіи между нѣкоторыми фигурами и движеніями и фигурами и движеніями болѣе общаго вида и даетъ, такимъ образомъ, методъ переносить свойства первыхъ, обобщая ихъ надлежащимъ образомъ, на послѣднія. Въ виду важнаго значенія этого метода мы позволимъ себѣ дать ему особое названіе метода перенесенія или раздвиганія. Поводъ къ такому названію мы увидимъ впослѣдствіи, когда ближе познакомимся съ результатами, къ которымъ приводитъ нашъ методъ.

Посвящая эту главу выясненію метода перенесенія, мы по необходимости, чтобы не увеличивать слишкомъ ея размѣровъ, ограничимся лишь нѣкоторыми его приложеніями, причемъ мы остановимся на болѣе простыхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе важныхъ формулахъ и теоремахъ, съ цѣлью положить, такимъ образомъ, основанія для дальнѣйшихъ изслѣдованій.

61. *Преобразованіе теоремъ и формулъ геометріи съ элементомъ точка въ формулы и теоремы геометріи съ элементомъ бивекторъ.* Отмѣтимъ прежде всего важное слѣдствіе теоремы предъидущаго параграфа.

Пусть мы имѣемъ прямоугольную систему координатъ съ началомъ въ точкѣ O, которую мы принимаемъ за точку приведенія, и два бивектора

$$\alpha = xi + yj + zk,$$
$$\beta = x'i + y'j + z'k,$$

гдѣ $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$, $z = r + \omega c$; $x' = p_1 + \omega a_1 . y' = q_1 + \omega b_1$, $z' = r_1 + \omega c_1$ и p, q, r, a, b, c; $p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1$ суть Plücker'овы координаты бивекторовъ α и β.

Пользуясь формулой [(25) § 25],

$$T\alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{1}$$

мы получимъ для $T(\beta - \alpha)$ выраженіе

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \tag{2}$$

Далѣе, если означимъ черезъ $\theta=\varphi+\omega d$ комплексный уголъ между осями α и β, то формулы [(14) § 35] и [(24) § 37] даютъ намъ равенство:

$$T\alpha T\beta cs\theta=xx'+yy'+zz', \tag{3}$$

дѣля которое на $T\alpha.T\beta$, мы имѣемъ:

$$cs\theta=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \tag{4}$$

формулу для опредѣленія комплекснаго угла между двумя прямыми въ пространствѣ.

Обратимъ вниманіе на формулы (2) и (4).

Если x,y,z и x',y',z' будутъ вещественными числами, и мы примемъ ихъ за координаты двухъ точекъ, то формулы (2) и (4) будутъ основными формулами геометріи: первая опредѣлитъ разстояніе между точками (x,y,z) и (x',y',z'), а вторая—уголъ между ихъ радіусами векторами.

Если же числа x,y,z, и x',y',z' сдѣлаются комплексными, они опредѣлятъ два бивектора α и β, и формула (2) дастъ намъ $T(\beta-\alpha)$, а (4)—комплексный уголъ между осями α и β.

Такимъ образомъ, двѣ основныя формулы геометріи эвклидова пространства обращаются въ двѣ основныя формулы теоріи бивекторовъ, тоже эвклидова пространства, если координаты точекъ становятся комплексными числами вида $a_0+\omega a_1$. Но въ такомъ случаѣ мы можемъ быть увѣрены, что взявъ произвольную формулу геометріи и замѣнивъ всѣ числа, въ нее входящія, комплексными вида $a_0+\omega a_1$, мы преобразуемъ ее въ формулу, которая будетъ имѣть вполнѣ опредѣленный смыслъ въ теоріи бивекторовъ.

Понятно, что при такихъ преобразованіяхъ линіямъ и поверхностямъ будутъ соотвѣтствовать нѣкоторыя многообразія бивекторовъ и подобно тому, какъ въ нѣкоторыхъ геометрическихъ теоріяхъ линіи и поверхности принимаются за элементы, такъ и многообразія бивекторовъ могутъ быть приняты за индивидуумы болѣе сложныхъ пространствъ. Такъ напримѣръ, теорія винтовъ можетъ быть разсматриваема какъ теорія пространства, элементомъ котораго служитъ линейный комплексъ. Линейному комплексу обыкновеннаго пространства будетъ отвѣчать въ пространствѣ бивекторовъ нѣкоторое многообразіе бивекторовъ, принимая которое въ свою очередь за элементъ мы имѣемъ средство обобщить въ извѣстномъ направленіи и самую теорію винтовъ помощью того же метода перенесенія. Мы должны только шесть Plücker'овыхъ координатъ считать комплексными числами вида $a_0 + \omega a_1$. Очевино, что такого рода обобщенія мы можемъ продолжать какъ угодно далеко.

Итакъ, когда координаты точки становятся комплексными числами, онѣ опредѣляютъ бивекторъ, и всѣ формулы и уравненія геометріи пространства трехъ измѣреній, основнымъ (исходнымъ) элементомъ котораго служитъ точка, преобразуются въ формулы и уравненія пространства шести измѣреній, основнымъ (исходнымъ) элементомъ котораго служитъ бивекторъ.

62. *Преобразованіе геометріи связки векторовъ въ теорію бивекторовъ.* На предъидущую теорему мы можемъ установить иную точку зрѣнія, которая во многихъ случаяхъ позволяетъ намъ съ бóльшимъ удобствомъ пользоваться методомъ перенесенія, чѣмъ точка зрѣнія предъидущаго параграфа.

Вещественныя числа x,y,z; x',y',z', которыя мы принимали за координаты двухъ точекъ, отнесенныхъ къ прямоугольной системѣ координатъ, суть проэкціи радіусовъ векторовъ этихъ точекъ съ общимъ началомъ въ точкѣ O, а потому формулы геометріи съ элементомъ точка могутъ быть разсматриваемы какъ формулы геометріи связки векторовъ.

Когда же числа x,y,z; $x'.y,'z'$ становятся комплексными, они опредѣляютъ два бивектора, и двѣ основныя формулы геометріи связки, (1) и (4), которыя даютъ намъ длину вектора и уголъ между двумя векторами, преобразуются въ двѣ основныя формулы теоріи бивекторовъ.

Итакъ, когда проэкціи вектора на оси координатъ становятся комплексными числами, векторъ преобразуется въ бивекторъ, и формулы связки векторовъ—въ формулы теоріи бивекторовъ, причемъ, какъ видно изъ (1) и (4), длина вектора преобразуется въ тензоръ бивектора, а уголъ между векторами—въ комплексный уголъ между осями бивекторовъ.

Перейдемъ теперь къ приложеніямъ этой теоремы.

63. *Проэкція винта и бивектора на ось.* Пусть мы имѣемъ винтъ ε параметра нуль и бивекторъ $\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1$, точка приведенія котораго, предположимъ, находится на оси ε. Какъ извѣстно изъ кинематики, проэкціи векторовъ α_0 и α_1 на ось ε будутъ однѣ и тѣ же, гдѣ бы на оси ε ни находилась точка приведенія бивектора α. Комплексное число:

$$[\text{проэкція } \alpha_0]_\varepsilon + \omega[\text{проэкція } \alpha_1]_\varepsilon$$

мы будемъ называть алгебраической проэкціей бивектора α, а произведеніе

$$\varepsilon \times [\text{алгебраическая проэкція } \alpha]$$

—геометрической проэкціей бивектора α на ось ε. Въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ алгебраической или геометрической проэкціи, ту и другую, безразлично, будемъ называть просто проэкціей.

Винтъ, опредѣляемый геометрической проэкціей α будемъ называть проэкціей винта, опредѣляемаго бивекторомъ α.

Если $\gamma = \alpha + \beta$, то $\gamma_0 = \alpha_0 + \beta_0$ и $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; слѣдовательно, предположивъ, что точка приведенія бивекторовъ α, β и γ находится на оси ε, проэктируя векторы $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ на ось мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Проэкція суммы бивекторовъ на какую нибудь ось равняется суммѣ проэкцій слагаемыхъ бивекторовъ на ту же ось.

Всего проще опредѣлится проэкція бивектора α, если мы за точку приведенія примемъ точку встрѣчи оси ε съ линіей кратчайшаго разстоянія между осями α и ε. Повторивъ разсужденія § 49, мы найдемъ, что проэкціей α на ε будетъ

$$T\alpha cs(\alpha\varepsilon) = T\alpha cs\theta = T\alpha_0[cs\varphi + \omega(P\alpha cs\varphi - dsn\varphi)] \qquad (5)$$

и ея параметромъ

$$P\alpha - dtg\varphi, \qquad (6)$$

гдѣ $(\alpha\varepsilon) = \theta = \varphi + \omega d$ есть комплексный уголъ между осями α и ε.

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

I. Проэкція $a\alpha = a \times$[проэкція α].

II. Параметръ проэкціи α будетъ безконечно великъ 1) если $P\alpha = \infty$, и 2) если ось α, не пересѣкая оси ε, къ ней перпендикулярна.

III. Проэкція α равняется нулю 1) если $\alpha = 0$ и 2) если ось α пересѣкаетъ ось ε подъ прямымъ угломъ.

IV. Для винтовъ α, проэкціи которыхъ на данную ось ε имѣютъ одинъ и тотъ же параметръ u, удовлетворяется условіе:

$$(P\alpha - u) cs\varphi - d sin\varphi = 0.$$

Слѣдовательно, всѣ винты α взаимны съ винтомъ $\varepsilon(1 - \omega u)$ и образуютъ пятичленную группу.

64. *Прямоугольныя комплексныя координаты бивектора; координатные винты.* Комплексныя числа $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$, $z = r + \omega c$ будемъ называть комплексными прямоугольными координатами бивектора, а винты i, j, k параметра нуль, имѣющіе своими осями оси координатъ—координатными винтами.

Припоминая, что p, q, r суть проэкціи главнаго вектора, α_0, а a, b, c проэкціи момента бивектора, α_1, для точки приведенія въ началѣ координатъ, легко видѣть, что $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$, $z = r + \omega c$ будутъ ничто иное какъ проэкціи бивектора на координатныя оси.

Итакъ, *прямоугольныя комплексныя координаты бивектора равны его соотвѣтствующимъ проэкціямъ на оси координатъ.*

Изъ этой теоремы слѣдуетъ:

I. Всякій бивекторъ разлагается на сумму трехъ его проэкцій на координатныя оси: $\alpha = xi + yj + zk$.

II. Если ось бивектора α пересѣкаетъ ось z подъ прямымъ угломъ, то, какъ видно изъ слѣдствія III предъидущаго параграфа, $z = 0$ и $\alpha = xi + yj$. Означимъ чрезъ θ комплексный уголъ между осями x и α относительно направленія оси z; тогда уголъ между α и y будетъ $\theta - \pi/2$ и по формулѣ (5) $\alpha = T\alpha(cs\theta i + sn\theta j)$. Такимъ образомъ *бивекторъ α, ось котораго пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ одну изъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ, имѣющихъ общую точку, линій, можетъ быть разложенъ на сумму его проэкцій на двѣ другія линіи.*

III. Пусть $\theta_1 = \varphi_1 + \omega d_1$, $\theta_2 = \varphi_2 + \omega d_2$, $\theta_3 = \varphi_3 + \omega d_3$ суть комплексные углы, которые ось α образуетъ съ осями координатъ; по формулѣ (5), мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} x &= T\alpha cs\theta_1, \\ y &= T\alpha cs\theta_2, \\ z &= T\alpha cs\theta_3, \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда, пользуясь формулой

$$T\alpha = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \text{ получимъ } \begin{aligned} cs\theta_1 &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ cs\theta_2 &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ cs\theta_3 &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Формулы (7) даютъ намъ возможность по даннымъ $T\alpha$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ опредѣлить прямоугольныя и Plücker'овы координаты бивектора, формулы (8) — обратно отъ Plücker'овыхъ или прямоугольныхъ координатъ перейти къ $T\alpha$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Практически, при рѣшеніи этихъ задачъ мы должны будемъ пользоваться развернутыми формулами (7):

$$\begin{aligned} p &= T\alpha_0 cs\varphi_1, & Px &= a:p = P\alpha - d_1 tg\varphi_1, \\ q &= T\alpha_0 cs\varphi_2, & Py &= b:q = P\alpha - d_2 tg\varphi_2, \\ r &= T\alpha_0 cs\varphi_3, & Pz &= c:r = P\alpha - d_3 tg\varphi_3. \end{aligned} \tag{9}$$

IV. Координаты винта параметра нуль суть ничто иное какъ косинусы комплексныхъ угловъ между его осью и осями координатъ. Это видно изъ формулъ (7), если мы положимъ въ нихъ $T\alpha = 1$.

Предъидущія формулы ($P\alpha = 0$) даютъ намъ возможность опредѣлять положеніе прямой комплексными углами, которые она образуетъ съ осями координатъ. Эти углы не могутъ быть выбраны совершенно произвольно, они связаны между собой соотношеніемъ

$$cs^2\theta_1 + cs^2\theta_2 + cs^2\theta_3 = 1, \tag{10}$$

которое вытекаетъ формулъ (8) и, будучи развернуто, распадается на два равенства:

$$cs^2\varphi_1 + cs^2\varphi_2 + cs^2\varphi_3 = 1,$$
$$d_1 sn2\varphi_1 + d_2 sn2\varphi_2 + d_3 sn2\varphi_3 = 0. \tag{11}$$

Первое изъ нихъ представляетъ хорошо извѣстное равенство аналитической геометріи; второе даетъ любопытную зависимость между тремя углами, которые какая нибудь прямая образуетъ съ осями координатъ и тремя кратчайшими разстояніями ея отъ координатныхъ осей. Изъ шести величинъ φ_1, $\varphi_2, \varphi_3, d_1, d_2, d_3$, опредѣляющихъ *положеніе прямой* независимы такимъ образомъ только 4, и слѣдовательно всѣ онѣ могутъ быть выражены въ функціи четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ. Мы покажемъ въ § 67, что подобно тому, какъ въ аналитической геометріи направленіе прямой опредѣляется двумя полярными координатами, такъ и положеніе прямой въ пространствѣ можетъ быть опредѣлено двумя комплексными углами, посредствомъ которыхъ углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ выражаются такъ, что уравненія (11), или эквивалентное имъ (10), тожественно удовлетворяются.

V. Предполагая, что $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ суть комплексные углы, которые ось бикватерніона $q = Tq(cs\theta + \varepsilon sn\theta)$ образуетъ съ осями координатъ, мы получаемъ для q выраженіе

$$q = Tq[cs\theta + (ics\theta_1 + jcs\theta_2 + kcs\theta_3)sn\theta], \tag{12}$$

сравнивая которое съ выраженіемъ $q = w + ix + jy + kz = w_0 + \omega w_1 + (x_0 + \omega x_1)\, i + (y_0 + \omega y_1) j + (z_0 + \omega z_1) k$ мы приходимъ къ слѣдующимъ формуламъ:

$$\begin{aligned} x &= Tq sn\theta cs\theta_1, \\ y &= Tq sn\theta cs\theta_2, \quad w = Tq cs\theta, \\ z &= Tq sn\theta cs\theta_3, \end{aligned} \tag{13}$$

или, въ развернутомъ видѣ,

$$\begin{aligned} x_0 &= Tq_0 sn\varphi cs\varphi_1, & x_1 : x_0 &= Pq + dctg\varphi — d_1 tg\varphi_1, \\ y_0 &= Tq_0 sn\varphi cs\varphi_2, & y_1 : y_0 &= Pq + dctg\varphi — d_2 tg\varphi_2, \end{aligned} \tag{14}$$

$$z_0 = Tq_0 sn\varphi cs\varphi_3, \qquad z_1 : z_0 = Pq + dctg\varphi - d_3 tg\varphi_3, \qquad (14)$$
$$w_0 = Tq_0 sn\varphi, \qquad w_1 : w_0 = Pq - d\, tg\varphi .$$

Эти формулы даютъ возможность по даннымъ w, x, y, z, опредѣлить $Tq, \theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ и наоборотъ. Въ частномъ случаѣ $d = 0, \varphi = \pi/2$ онѣ обращаются въ (9).

65. *Геометрическое произведеніе двухъ бивекторовъ. Законъ дистрибутивности скалярнаго умноженія.* Въ виду важнаго для насъ значенія формулы (3) мы покажемъ теперь, какимъ образомъ она можетъ быть получена, если мы воспользуемся понятіемъ проэкціи и формулами предъидущаго параграфа.

Комплексное число $T\alpha T\beta cs\theta$ мы будемъ называть геометрическимъ произведеніемъ бивекторовъ α и β; изъ формулы (24) § 37 видно, что скалярное произведеніе равняется геометрическому произведенію, взятому со знакомъ минусъ.

Геометрическое произведеніе мы можемъ разсматривать какъ произведеніе $T\beta$ на проэкцію α на ось β, или какъ произведеніе $T\alpha$ на проэкцію β на ось α. Такъ какъ бивекторъ $\beta = x'i + y'j + z'k$ есть сумма трехъ бивекторовъ $x'i, y'j, z'k$, то по теоремѣ § 63 мы имѣемъ для проэкціи β на ось α:

$$T\beta cs\theta = x'cs\theta_1 + y'cs\theta_2 + z'cs\theta_3; \qquad (15)$$

откуда, умноживъ обѣ части на $T\alpha$ и пользуясь формулами (7), находимъ

$$T\alpha T\beta cs\theta = xx' + yy' + zz'. \qquad (3)$$

Эта формула будучи развернута даетъ намъ двѣ формулы

$$T\alpha_0 T\beta_0 cs\varphi = pp_1 + qq_1 + rr_1, \qquad (16)$$

$$T\alpha_0 T\beta_0 [(P\alpha + P\beta) cs\varphi - dsn\varphi] =$$
$$= pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1 a + q_1 b + r_1 c, \qquad (17)$$

изъ которыхъ первая есть основная формула аналитической геометріи, а вторая—теоріи винтовъ.

Если мы означимъ комплексные углы оси β съ осями координатъ черезъ $\theta_1' = \varphi_1' + \omega d_1'$, $\theta_2' = \varphi_2' + \omega d_2'$, $\theta_3' = \varphi_3' +$

$\omega d_3'$, то изъ (3), мы получимъ равенство

$$cs\theta = cs\theta_1 cs\theta_1' + cs\theta_2 cs\theta_2' + cs\theta_3 cs\theta_3', \tag{18}$$

развернувъ которое, будемъ имѣть

$$cs\varphi = cs\varphi_1 cs\varphi_1' + cs\varphi_2 cs\varphi_2' + cs\varphi_3 cs\varphi_3', \tag{19}$$

$$\begin{aligned} d\,sn\varphi = d_1\, sn\varphi_1 cs\varphi_1' + d_2 sn\varphi_2 cs\varphi_2' + d_3\, sn\varphi_3 cs\varphi_3' \\ + d_1' sn\varphi_1' cs\varphi_1 + d_2' sn\varphi_2' cs\varphi_2 + d_3' sn\varphi_3' cs\varphi_3, \end{aligned} \tag{20}$$

формулы для опредѣленія угла и кратчайшаго разстоянія между двумя прямыми, осями бивекторовъ α и β, по даннымъ комплекснымъ угламъ, которые эти прямыя образуютъ съ осями координатъ. Пользуясь ими, мы получаемъ для возможнаго коэффиціента винтовъ α и β [такъ называется выраженіе, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ въ лѣвой части формулы (17)] такое выраженіе:

$$\begin{aligned} 2\omega_{\alpha\beta} = cs\varphi_1 cs\varphi_1'(P\alpha + P\beta - d_1 tg\varphi_1 - d_1' tg\varphi_1') \\ + cs\varphi_2 cs\varphi_2'(P\alpha + P\beta - d_2 tg\varphi_2 - d_2' tg\varphi_2') \\ + cs\varphi_3 cs\varphi_3'(P\alpha + P\beta - d_3 tg\varphi_3 - d_3' tg\varphi_3'), \end{aligned} \tag{21}$$

т. е. возможный коэффиціентъ двухъ бивекторовъ (винтовъ) равняется суммѣ произведеній косинусовъ угловъ, которые ихъ оси образуютъ съ осями координатъ, умноженныхъ на суммы параметровъ проэкцій бивекторовъ на соотвѣтствующія оси.

Проэктируя бивекторъ $\gamma = \alpha + \beta$ на ось бивектора δ, мы получаемъ, по теоремѣ § 63 и формулѣ (5), равенство

$$T\gamma cs(\gamma\delta) = T\alpha cs(\alpha\delta) + T\beta cs(\beta\delta),$$

которое, по умноженіи на $T\delta$, даетъ

$$S\gamma\delta = S(\alpha + \beta)\delta = S\alpha\delta + S\beta\delta,$$

законъ дистрибутивности скалярнаго умноженія. Итакъ

законъ дистрибутивности скалярнаго умноженія выра-

жаетъ то же самое, что и теорема § 63 относительно проэкціи суммы бивекторовъ на ось.

Мы видимъ теперь, какимъ образомъ можетъ быть доказана геометрически формула (51) § 49.

66. *Щетка и ея ось, ортогональная проэкція бивектора на щетку. Законъ дистрибутивности векторнаго умноженія и обобщеніе теоремы Varignon'а.* Напомнимъ, что щеткой [§ 47] мы условились называть геометрическую форму, которую образуетъ совокупность прямыхъ, пересѣкающихъ одну и ту же прямую ε подъ прямымъ угломъ. Прямую ε, которой мы будемъ приписывать опредѣленное направленіе, принимая ее за ось винта ε параметра нуль, будемъ называть осью щетки.

Построимъ два винта параметра нуль, $\alpha_{\prime}$ и $\alpha_{\prime\prime}$. Ось перваго есть линія кратчайшаго разстоянія между осями α и ε и направлена отъ точки O' пересѣченія ея съ осью ε къ точкѣ пересѣченія съ осью α. Ось втораго проходитъ черезъ O', перпендикулярна къ осямъ $\alpha_{\prime}$ и ε и имѣетъ такое направленіе, относительно котораго уголъ между $\alpha_{\prime}$ и ε равенъ $+\pi/2$. По слѣдствію II § 64 бивекторъ α разложится на сумму двухъ бивекторовъ:

$$\alpha = Tacs(\alpha\varepsilon)\varepsilon + Tasn(\alpha\varepsilon)\alpha_{\prime\prime} = \alpha' + \alpha''. \tag{22}$$

Бивекторъ α'', ось котораго принадлежитъ щеткѣ ε будемъ называть ортогональной проэкціей бивектора α на щетку ε. Бивекторъ α' есть проэкція α на ось ε; слѣдовательно, *всякій бивекторъ разлагается на сумму двухъ его проэкцій: на щетку и на ея ось.*

Докажемъ слѣдующее свойство проэкцій на щетку.

Проэкція суммы бпвекторовъ на щетку равняется суммѣ проэкцій слагаемыхъ бпвекторовъ на ту же щетку.

Дѣйствительно, пусть $\gamma=\alpha+\beta$. По предъидущему, означивъ проэкціи бивекторовъ α,β,γ на ось ε черезъ α',β',γ' и проэкціи ихъ на щетку ε черезъ $\alpha'',\beta'',\gamma''$, мы будемъ имѣть $\alpha=\alpha'+\alpha''$, $\beta=\beta'+\beta''$, $\gamma=\gamma'+\gamma''$ и, въ силу предположенія $\gamma=\alpha+\beta$,

$$\gamma'+\gamma''=\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''.$$

Но, по теоремѣ § 63, $\gamma'=\alpha'+\beta'$, а потому

$$\gamma'' = \alpha'' + \beta'',$$

что и требовалось доказать.

Если мы повернемъ оси бивекторовъ $\alpha''.\beta'',\gamma''$, не измѣняя ихъ тензоровъ, вокругъ оси ε на прямой уголъ, то получимъ бивекторы $T\alpha sn(\alpha\varepsilon)\alpha_{,} = V\alpha\varepsilon, T\beta sn(\beta\varepsilon)\beta_{,} = V\beta\varepsilon$, и $T\gamma sn(\gamma\varepsilon)\gamma_{,} = V\gamma\varepsilon$, причемъ, такъ какъ относительное положеніе осей $\alpha_{,,}\beta_{,,}\gamma_{,}$ таково же какъ и осей $\alpha_{,,,}\beta_{,,,}\gamma_{,,,}$ изъ равенства $\gamma'' = \alpha'' + \beta''$ будетъ слѣдовать:

$$T\gamma sn(\gamma\varepsilon)\gamma_{,} = T\alpha sn(\alpha\varepsilon)\alpha_{,} + T\beta sn(\beta\varepsilon)\beta_{,}.$$

Отсюда, умноживъ обѣ части на какое нибудь число $a = a_0 + \omega a_1$ и положивъ $\delta = a\varepsilon$, приходимъ къ равенству:

$$V\gamma\delta = V(\alpha + \beta)\delta = V\alpha\delta + V\beta\delta,$$

выражающему законъ дистрибутивности векторнаго умноженія. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, геометрическое доказательство этого закона, а слѣдовательно и формулы (52) § 49 и видимъ, что

законъ дистрибутивности векторнаго умноженія выражаетъ то же самое, что и вышеданная теорема относительно проэкціи суммы бивекторовъ на щетку.

Если мы припомнимъ извѣстное обобщеніе теоремы Varignon'а: моментъ относительно точки суммы векторовъ съ общимъ началомъ равняется суммѣ моментовъ слагаемыхъ векторовъ относительно той же точки, то легко будетъ видѣть, что

законъ дистрибутивности векторнаго умноженія мы можемъ разсматривать какъ дальнѣйшее обобщеніе теоремы Varignon'а.

67. *Полярныя координаты бивектора.* Если $\vartheta = \vartheta_0 + \omega\vartheta_1$ есть комплексный уголъ между осями α и k, то по предъидущему параграфу $\alpha = T\alpha(kcs\vartheta + i'sn\vartheta)$, гдѣ $T\alpha sn\vartheta i'$ есть проэкція α на щетку k, а $T\alpha cs\theta k$ проэкція α на ея ось. Означивъ, далѣе, черезъ $\psi = \psi_0 + \omega\psi_1$ комплексный уголъ между i и i' относительно направленія k по слѣдствію II § 64 разложимъ i' на сумму $ics\psi + jsn\psi$ и будемъ имѣть

$$\alpha = T\alpha(isn\vartheta cs\psi + jsn\vartheta sn\psi + kcs\psi),$$

и
$$x = Ta sn\vartheta cs\psi,\qquad cs\theta_1 = sn\vartheta cs\psi,$$
$$y = Ta sn\vartheta sn\psi,\quad (23)\qquad cs\theta_2 = sn\vartheta sn\psi,\quad (24)$$
$$z = Ta cs\vartheta,\qquad cs\theta_3 = cs\vartheta.$$

Первая группа формулъ вполнѣ аналогична съ хорошо извѣстными формулами преобразованіе полярныхъ координатъ въ прямоугольныя и показываютъ намъ, что бивекторъ α можетъ быть опредѣленъ тремя комплексными числами, его тензоромъ и двумя комплексными углами ϑ и ψ, числами, которыя мы можемъ назвать его полярными координатами. Развернувъ эти формулы, мы имѣемъ:

$$p = T\alpha_0 sn\vartheta_0 cs\psi_0,\qquad a{:}p = Pa + \vartheta_1 ctg\vartheta_0 - \psi_1\ tg\psi_0,$$
$$q = T\alpha_0 sn\vartheta_0 sn\psi_0,\qquad b{:}q = Pa + \vartheta_1 ctg\vartheta_0 + \psi_1 ctg\psi_0,\quad (25)$$
$$r = T\alpha_0 cs\vartheta_0,\qquad c{:}r = Pa - \vartheta_1\ tg\vartheta_0.$$

Этими формулами мы должны пользоваться практически, если захотимъ отъ прямоугольныхъ, или Plücker'овыхъ координатъ перейти къ полярнымъ и наоборотъ отъ полярныхъ къ прямоугольнымъ.

68. *Формулы преобразованія прямоугольныхъ координатъ.* Возьмемъ какихъ либо три винта i', j', k' параметра нуль, оси которыхъ пересѣкаются въ одной точкѣ O' подъ прямыми углами и выберемъ направленія ихъ такимъ образомъ, чтобы $j'k' = i'$, $k'i' = j'$, $i'j' = k'$. Пусть координаты винтовъ i', j', k', равныя какъ мы знаемъ косинусамъ комплексныхъ угловъ, которые оси i', j', k' образуютъ съ осями i, j, k даются слѣдующей таблицей:

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ i' & l_1 = \lambda_1 + \omega\xi_1 & m_1 = \mu_1 + \omega\eta_1 & n_1 = \nu_1 + \omega\zeta_1 \\ j' & l_2 = \lambda_2 + \omega\xi_2 & m_2 = \mu_2 + \omega\eta_2 & n_2 = \nu_2 + \omega\zeta_2 \\ k' & l_3 = \lambda_3 + \omega\xi_3 & m_3 = \mu_3 + \omega\eta_3 & n_3 = \nu_3 + \omega\zeta_3 \end{array}\qquad (26)$$

Такъ какъ $Ti' = Tj' = Tk' = 1$, и оси $i'.j', k'$ пересѣкаются подъ прямыми углами, то между ними будутъ существовать соотношенія [см. (1) и (3) § 61]:

$$l_s^2+m_s^2+n_s^2=1,$$
$$l_sl_u+m_sm_u+n_sn_u=0, \quad (s,u=1,2,3;s\neq u) \qquad (27)$$

и еще цѣлый рядъ другихъ $l_1^2+l_2^2+l_3^2=1$, $l_1=m_2n_3-m_3n_2$, и т. д., аналогичныхъ извѣстнымъ соотношеніямъ аналитической геометріи между косинусами угловъ, образуемыхъ старыми и новыми осями.

Означимъ новыя координаты бивектора α относительно координатныхъ винтовъ i',j',k' черезъ $x'=p'+\omega a'$, $y'=q'+\omega b'$, $z'=r'+\omega c'$ и найдемъ зависимость между ними и старыми координатами x,y,z. По § 64 x',y',z' суть проэкціи бивектора α на оси новыхъ координатныхъ винтовъ; поэтому, пользуясь формулой (3) § 65, мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} x'&=xl_1+ym_1+zn_1,\\ y'&=xl_2+ym_2+zn_2, \qquad (28)\\ z'&=xl_3+ym_3+zn_3. \end{aligned}$$

Отсюда, при помощи соотношеній (27), легко найдемъ формулы для обратнаго перехода отъ $x',y,'z'$ къ x,y,z. Формулы (27) и (28) аналогичны формуламъ преобразованія Декартовыхъ координатъ. Развертывая ихъ, получаемъ:

$$\lambda_s^2+\mu_s^2+\nu_s^2=1,$$
$$\lambda_s\xi_s+\mu_s\eta_s+\nu_s\zeta_s=0,$$
$$\lambda_s\lambda_u+\mu_s\mu_u+\nu_s\nu_u=0, \quad (s,u=1,2,3;s\neq u) \qquad (29)$$
$$\lambda_s\xi_u+\mu_s\eta_u+\nu_s\zeta_u+\lambda_u\xi_s+\mu_u\eta_s+\nu_u\zeta_s=0;$$

$$\begin{aligned} p'&=p\lambda_1+q\mu_1+r\nu_1, & a'&=p\xi_1+q\eta_1+r\zeta_1+a\lambda_1+b\mu_1+c\nu_1,\\ q'&=p\lambda_2+q\mu_2+r\nu_2, & b'&=p\xi_2+q\eta_2+r\zeta_2+a\lambda_2+b\mu_2+c\nu_2, \quad (30)\\ r'&=p\lambda_3+q\mu_3+r\nu_3, & c'&=p\xi_3+q\eta_3+r\zeta_3+a\lambda_3+b\mu_3+c\nu_3. \end{aligned}$$

Мы предполагали, что положеніе новой системы координатъ задано координатами винтовъ i',j',k'. Обыкновенно, однако, оно предѣляется координатами новаго начала O' (l,m,n) и косинусами угловъ между старыми и новыми осями. Но отъ этихъ данныхъ легко перейти къ предъидущимъ, ибо величины

λ_s, μ_s, ν_s, $(s=1,2,3)$ суть косинусы угловъ между старыми и новыми осями, величины же ξ_s, η_s, ζ_s—моменты векторовъ, по длинѣ равныхъ единицѣ и лежащихъ на новыхъ осяхъ координатъ, относительно старыхъ осей и слѣдовательно

$$\xi_s = m\nu_s - n\mu_s, \quad \eta_s = n\lambda_s - l\nu_s, \quad \zeta_s = m\lambda_s - l\mu_s. \tag{31}$$

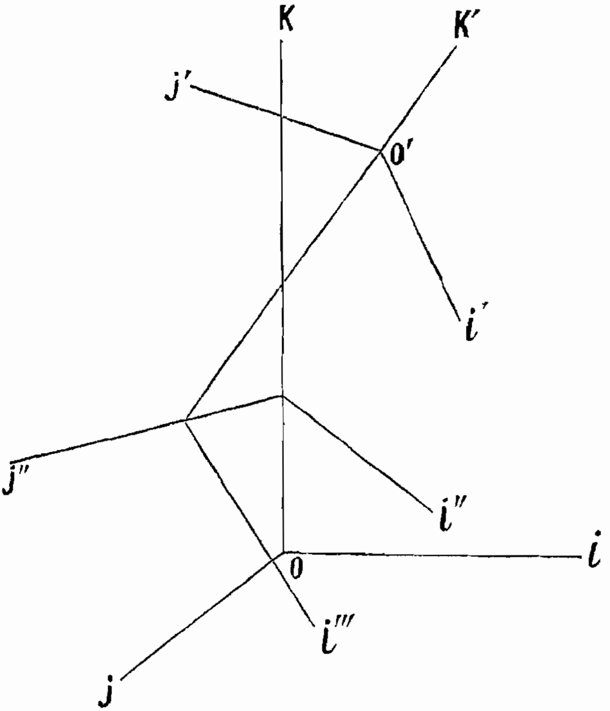
Если мы внесемъ эти значенія ξ_s, η_s, ζ_s, въ формулы (30), то онѣ обратятся въ тѣ формулы для общаго случая преобразованія Plücker'овыхъ координатъ, которыя, какъ мы указывали, получаются комбинаціей формулъ (3) и (4) § 2.

Въ силу 12 соотношеній (29) между 18 координатами $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$, $(s=1,2,3)$, эти послѣднія могутъ быть выражены безчисленнымъ множествомъ способовъ въ функціи 6 независимыхъ перемѣнныхъ. Между прочимъ, мы получаемъ для нихъ такія выраженія, если за независимыя перемѣнныя примемъ три координаты новаго начала и какіе либо три параметра, помощью которыхъ выражаются косинусы угловъ λ_s, μ_s, ν_s $(s=1,2,3)$, напримѣръ три Euler'овыхъ угла или три параметра формулъ Rodrigues-Euler'а, и затѣмъ воспользуемся соотношеніями (31).

Мы приходимъ, однако, къ формуламъ болѣе интереснымъ, если обратимъ вниманіе на то, что девять комплексныхъ чиселъ l^s, m_s, n_s $(s=1,2,3)$ связаны между собой шестью уравненіями (27) и слѣдовательно могутъ быть выражены въ функціи трехъ изъ нихъ, или въ функціи трехъ независимыхъ между собой комплексныхъ чиселъ такъ, что уравненія (27), или эквивалентныя имъ (29), будутъ тожественно удовлетворены. Вслѣдствіе аналогіи уравненій (27) съ извѣстными уравненіями аналитической геометріи, мы можемъ составить такія выраженія для l_s, m_s, n_s $(s=1,2,3)$ двухъ типовъ: или выраженія аналогичныя формуламъ Euler'а, или—формуламъ Rodrigues-Euler'а.

69. *Обобщеніе формулъ Euler'а.* Чтобы получить обобщенныя формулы Euler'а, построимъ сначала линію j'' кратчайшаго разстоянія между осями k и k', а потомъ прямыя i'' и i''', изъ которыхъ первая пересѣкаетъ подъ прямыми углами j'' и k, а вторая j'' и k'. Тогда легко будетъ видѣть, что положеніе системы i', j', k' можетъ быть опредѣлено тремя комплексными углами: угломъ $\psi = \psi_0 + \omega\psi_1$ между осями i и i'',

угломъ $\vartheta=\vartheta_0+\omega\vartheta_1$ между осями k и k' и наконецъ угломъ $\varphi=\varphi_0+\omega\varphi_1$ между осями i''' и i'.



Означимъ винты параметра нуль, которые имѣютъ своими осями $i''.j'',i'''$ соотвѣтственно тѣми же буквами; тогда, по слѣдствію II § 64, мы будемъ имѣть равенства:

$$i''=\ icს\psi+jsn\psi,\quad i'''=i''cs\vartheta-ksn\vartheta,\quad i'=\ i'''cs\varphi+j''sn\varphi,$$

$$j''=-isn\psi+jcs\psi,\quad k'=i''sn\vartheta+kcs\vartheta,\quad j'=-i'''sn\varphi+j''cs\varphi. \quad (32)$$

Исключая изъ нихъ послѣдовательной подстановкой i'', j'',i''' мы выразимъ i',j',k' линейно черезъ i,j,k, причемъ коэффиціентами при послѣднихъ и будутъ искомые косинусы комплексныхъ угловъ между старыми и новыми осями. Изъ девяти, полученныхъ такимъ образомъ выраженій для l_s,m_s,n_s $(s=1,2,3)$, мы выпишемъ только три:

$$\begin{aligned} l_1 &= -sn\varphi sn\psi + cs\varphi cs\psi cs\vartheta\,, \\ m_1 &= \quad sn\varphi cs\psi + cs\varphi sn\psi cs\vartheta, \\ n_1 &= -cs\varphi sn\vartheta\,, \end{aligned} \tag{33}$$

или, въ развернутомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -sn\varphi_0 sn\psi_0 + cs\varphi_0 cs\psi_0 cs\vartheta_0, \\ \mu_1 &= \quad sn\varphi_0 cs\psi_0 + cs\varphi_0 sn\psi_0 cs\vartheta_0, \\ \nu_1 &= -cs\varphi_0 sn\vartheta_0, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 = &-\varphi_1(cs\varphi_0\, sn\psi_0 + sn\varphi_0 cs\psi_0 cs\vartheta_0) \\ &-\psi_1(sn\varphi_0 cs\psi_0 + cs\varphi_0 sn\psi_0 cs\vartheta_0) - \vartheta_1 cs\varphi_0 cs\psi_0 sn\vartheta_0, \\ \eta_1 = &\quad \varphi_1(cs\varphi_0\, cs\psi_0 - sn\varphi_0 sn\psi_0 cs\vartheta_0) \\ &-\psi_1(sn\varphi_0 sn\psi_0 - cs\varphi_0 cs\psi_0 cs\vartheta_0) - \vartheta_1 cs\varphi_0 sn\psi_0 sn\vartheta_0, \\ \zeta_1 = &\quad \varphi_1 sn\varphi_0 sn\vartheta_0 - \quad \vartheta_1 cs\varphi_0 cs\vartheta_0, \end{aligned} \tag{35}$$

замѣчая, что формулы для l_2, m_2, n_2; $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ получаются изъ нихъ, если φ замѣнимъ черезъ $\varphi + 90°$, и формулы для l_3, m_3, n_3; $\lambda_3, \mu_3, \nu_3, \xi_3, \eta_3, \zeta_3$,—если ϑ и φ замѣнимъ черезъ $\vartheta - 90°$ и 0. Формулы для ξ_s, η_s, ζ_s мы можемъ представить короче въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1\lambda_2 - \psi_1\mu_1 - \vartheta_1 cs\varphi_0\lambda_3\,, & \xi_2 &= -\varphi_1\lambda_1 - \psi_1\mu_2 + \vartheta_1 sn\varphi_0\lambda_3, \\ \eta_1 &= \varphi_1\mu_2 + \psi_1\lambda_1 - \vartheta_1 cs\varphi_0\mu_3, & \eta_2 &= -\varphi_1\mu_1 + \psi_1\lambda_2 + \vartheta_1 sn\varphi_0\mu_3, \\ \zeta_1 &= \varphi_1\nu_2 \qquad\quad - \vartheta_1 cs\varphi_0\nu_3, & \zeta_2 &= -\varphi_1\nu_1 \qquad\quad + \vartheta_1 sn\varphi_0\nu_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 &= -\psi_1\mu_3 + \vartheta_1 cs\vartheta_0 cs\psi_0, \\ \eta_3 &= \quad \psi_1\lambda_3 + \vartheta_1 cs\vartheta_0 sn\psi_0, \\ \zeta_3 &= \qquad\quad -\vartheta_1 sn\vartheta_0. \end{aligned} \tag{36}$$

Чтобы по даннымъ $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$ $(s = 1,2,3)$ найти комплексные Euler'овы углы, мы должны найти сначала изъ формулъ для λ_s, μ_s, ν_s $(s = 1,2,3)$ углы φ_0, ψ_0 и ϑ_0, а затѣмъ, внеся ихъ значенія въ формулы (36), мы будемъ имѣть 9 уравненій, которыми мы можемъ воспользоваться для опредѣленія φ_1, ϑ_1 и ψ_1, комбинируя ихъ между собой различнымъ образомъ. Такъ напримѣръ, мы получаемъ изъ нихъ такія формулы:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 sn\,\vartheta_0 &= -\zeta_3 \\ \psi_1 sn^2\vartheta_0 &= \lambda_3\eta_3 - \mu_3\xi_3 \\ \varphi_1 + \psi_1 cs\,\vartheta_0 &= \lambda_2\xi_1 + \mu_2\eta_1 + \nu_2\zeta_1 \end{aligned} \tag{37}$$

Если $\vartheta_0 = 0$, то выраженія для $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$ $(s = 1,2,3)$ принимыютъ видъ

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = cs\,(\varphi_0 + \psi_0) & \lambda_2 = -sn(\varphi_0 + \psi_0) & \lambda_3 = 0 \\ \mu_1 = sn(\varphi_0 + \psi_0) & \mu_2 = \quad cs\,(\varphi_0 + \psi_0) & \mu_3 = 0 \\ \nu_1 = 0 & \nu_2 = \quad 0 & \nu_3 = 1 \end{array} \tag{38}$$

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = -(\varphi_1 + \psi_1) sn(\varphi_0 + \psi_0) & \xi_2 = -(\varphi_1 + \psi_1) cs(\varphi_0 + \psi_0) \\ \eta_1 = \quad (\varphi_1 + \psi_1) cs(\varphi_0 + \psi_0) & \eta_2 = -(\varphi_1 + \psi_1) sn(\varphi_0 + \psi_0) \\ \zeta_1 = -\vartheta_1\, cs\varphi_0 & \zeta_2 = \quad \vartheta_1 sn\,\varphi_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \vartheta_1 cs\psi_0 \\ \eta_3 &= \vartheta_1 sn\psi_0 \\ \zeta_3 &= 0, \end{aligned} \tag{39}$$

Въ этомъ случаѣ, какъ видимъ, перемѣнныя φ_1 и ψ_1 сливаются въ одну $\varphi_1 + \psi_1$: такъ оно и должно быть, ибо при $\vartheta_0 = 0$ положеніе новой системы координатъ вполнѣ опредѣляется четырьмя величинами. Почему именно φ_1 и ψ_1, а не какія нибудь другія изъ перемѣнныхъ $\varphi_0, \psi_0, \vartheta_0, \varphi_1, \psi_1, \vartheta_1$ сливаются сдѣлается понятнымъ, если мы припомнимъ геометрическое значеніе угловъ φ и ψ.

Наконецъ, если $\vartheta = \vartheta_0 + \omega\vartheta_1 = 0$ и оси k и k' совпадаютъ, то λ_s, μ_s, ν_s $(s = 1,2,3)$ будутъ опредѣляться прежними формулами (38), формулы же (39) обратятся въ слѣдующія:

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = -(\varphi_1 + \psi_1) sn(\varphi_0 + \psi_0) & \xi_2 = -(\varphi_1 + \psi_1) cs\,(\varphi_0 + \psi_0) \\ \eta_1 = \quad (\varphi_1 + \psi_1) cs\,(\varphi_0 + \psi_0) & \eta_2 = -(\varphi_1 + \psi_1) sn(\varphi_0 + \psi_0) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \zeta_1 = 0 \\ \eta_3 &= \zeta_2 = 0 = \zeta_3 \end{aligned} \tag{40}$$

Въ этомъ случаѣ въ формулы входятъ только $\varphi_1+\psi_1$ и $\varphi_0+\psi_0$, ибо положеніе новой системы координатъ опредѣляется комплекснымъ угломъ $\varphi+\psi$ между осями i и i'.

Предположимъ теперь, что бивекторъ α принадлежитъ щеткѣ k. Тогда его координата z, а если ось k' совпадаетъ съ осью k, то и координата z' будутъ равны нулю. Поэтому, означивъ комплексный уголъ между осями i' и i, которымъ опредѣлится положеніе новой системы координатъ, черезъ ψ, мы будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned} x' &= \quad xcs\psi+ysn\psi, \\ y' &= -xsn\psi+ycs\psi, \end{aligned} \tag{41}$$

преобразованія координатъ бивектора α щетки k, въ томъ предположеніи, что какъ старыя, такъ и новыя оси координатъ $i.j$ и i',j' принадлежатъ той же щеткѣ. Онѣ вполнѣ аналогичны формуламъ преобразованія Декартовыхъ координатъ на плоскости.

Предоставляемъ читателю самому развернуть послѣднія формулы, а также убѣдиться, что данныя наши выраженія для $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$ $(s=1,2,3)$ тождественно удовлетворяютъ соотношеніямъ (29) § 68.

70. *Операція* $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$. Прежде чѣмъ мы обратимся къ выводу обобщенныхъ формулъ Rodrigues-Euler'а, мы познакомимся съ операціей $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$, которая аналогична операціи, играющей важную роль въ теоріи кватерніоновъ.

Пусть мы имѣемъ бикватерніоны $\mathrm{q}=T\mathrm{q}(cs\theta+\varepsilon sn\theta)$ и r. Разсматривая зависимость между r и $\mathrm{r}'=\mathrm{q}\mathrm{r}\mathrm{q}^{-1}$, операцію, которая преобразуетъ бикватерніонъ r въ r', будемъ означать символомъ $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$.

Препоможимъ сначала, что бикватерніонъ r есть бивекторъ ϱ. Разложивъ ϱ на сумму его проэкцій на щетку ε и на ея ось, $\varrho=\varrho''+\varrho'$, мы будемъ имѣть

$$\mathrm{q}\varrho\mathrm{q}^{-1}=\mathrm{q}(\varrho'+\varrho'')\mathrm{q}^{-1}=\mathrm{q}\varrho'\mathrm{q}^{-1}+\mathrm{q}\varrho''\mathrm{q}^{-1}.$$

Такъ какъ винтъ ε и бивекторъ ϱ' имѣютъ общую ось, то $\varrho'=T\varrho'\varepsilon$, а потому, замѣчая, что

$$\mathrm{q}^{-1}=\frac{K\mathrm{q}}{N\mathrm{q}}=(T\mathrm{q})^{-1}(cs\theta-\varepsilon sn\theta),$$

получимъ $\quad q\rho'q^{-1}=\rho',$

$$q\rho''q^{-1}=\rho''cs^2\theta-\varepsilon\rho''\varepsilon sn^2\theta+(\varepsilon\rho''-\rho''\varepsilon)sn\theta cs\theta.$$

Но оси ε и ρ'' пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, слѣдовательно $S\varepsilon\rho''=0$, $\varepsilon\rho''=V\varepsilon\rho''=-V\rho''\varepsilon=-\rho''\varepsilon$, $\varepsilon\rho''\varepsilon=$ $=\rho''$, и

$$q\rho q^{-1}=\rho'+(cs2\theta+\varepsilon sn2\theta)\rho''.$$

Если мы свяжемъ неизмѣняемо оси бивекторовъ ρ,ρ',ρ'' и ихъ совокупности сообщимъ какое нибудь перемѣщеніе, сохраняя при этомъ ихъ тензоры, назовемъ бивекторы ρ,ρ',ρ'', въ ихъ новыхъ положеніяхъ черезъ σ,σ',σ'', то относительное положеніе осей σ,σ',σ'' будетъ таково же, какъ и относительное положеніе ρ',ρ',ρ'' и $T\sigma,T\sigma',T\sigma''$ будутъ соотвѣтственно равны $T\rho,T\rho',T\rho''$, а потому изъ равенства $\rho=\rho'+\rho''$ будетъ слѣдовать $\sigma=\sigma'+\sigma''$. Предположимъ теперь, что то перемѣщеніе, о которомъ у насъ идетъ рѣчь, есть винтовое перемѣщеніе, имѣющее осью ε и опредѣляемое комплекснымъ угломъ 2θ. Тогда, такъ какъ ось ρ' совпадаетъ съ осью ε, бивекторъ ρ' будетъ скользить вдоль своей оси и $\sigma'=\rho'$; такъ какъ ось ρ'' пересѣкаетъ ось ε подъ прямымъ угломъ, винтовое перемѣщеніе будетъ эквивалентно умноженію ρ'' на верзоръ $cs2\theta+$ $\varepsilon sn2\theta$ [см. § 56], и слѣдовательно $\sigma''=(cs2\theta+\varepsilon sn2\theta)\rho''$. Такимъ образомъ, на основаніи равенства $\sigma=\sigma'+\sigma''$, бивекторъ ρ при разсматриваемомъ перемѣщеніи обратится въ $\sigma=\sigma'+\sigma''$ $=\rho'+(cs2\theta+\varepsilon sn2\theta)\rho''=q\rho q^{-1}$. Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема I. *Операція* $q(\rho)q^{-1}$ *не мѣняетъ тензора бивектора* ρ *и сообщаетъ его оси винтовое перемѣщеніе вокругъ оси бикватерніона* q, *опредѣляемое его удвоеннымъ угломъ, т. е. поворачиваетъ ось* ρ *вокругъ оси* q *на уголъ равный двойному повороту* q, 2φ, *и сообщаетъ ей поступательное перемѣщеніе по направленію этой оси равное двойному шагу* q, $2d$.

Пользуясь этой теоремой не трудно опредѣлить, во что преобразуетъ операція $q(\quad)q^{-1}$ какой либо бикватерніонъ $r=w+\rho$, гдѣ w есть комплексное число $w_0+\omega w_1$. Примѣняя къ r операцію $q(\quad)q^{-1}$, мы получаемъ:

$$r'=q(w+\rho)q^{-1}=qwq^{-1}+q\rho q^{-1}=w+\sigma.$$

Тензоры и комплексные углы ϑ и ϑ' бикватерніоновъ r и r' опредѣляются по формуламъ:

$$T\mathrm{r}cs\vartheta = w, \qquad T\mathrm{r}'cs\vartheta' = w, \qquad \text{[см. (37) § 26]}$$

$$T\mathrm{r}sn\vartheta = T\rho, \qquad T\mathrm{r}'sn\vartheta' = T\sigma.$$

Но на основаніи только что доказанной теоремы $T\sigma = T\rho$, а потому изъ этихъ равенствъ мы заключаемъ, что $T\mathrm{r}' = T\mathrm{r}$ и $\vartheta' = \vartheta$. Кромѣ того, такъ какъ осью r' служитъ ось σ, то мы приходимъ къ такой теоремѣ:

Теорема II. *Операція* $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$ *къ какому бы бикватерніону* r *она ни была примѣнена не мѣняетъ ни тензора ни угла его и сообщаетъ только его оси винтовое перемѣщеніе вокругъ оси* q, *опредѣляемое двойнымъ угломъ бикватерніона* q.

$T\mathrm{q}$, какъ видимъ, никакой роли въ операціи $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$ не играетъ: она вполнѣ характеризуется положеніемъ оси q и его угломъ.

Мы видѣли [см. § 28], что степень бивектора α, имѣющая показателемъ $t = t_0 + \omega t_1$ есть бикватерніонъ

$$\mathrm{q} = (T\alpha)^t\left(cs\frac{t\pi}{2} + U\alpha sn\frac{t\pi}{2}\right) = \alpha^t.$$

Очевидно, что $T\mathrm{q} = (T\alpha)^t$ и $U\mathrm{q} = cs(t\pi/2) + \varepsilon sn(t\pi/2)$, что осью q служитъ ось α и наконецъ что уголъ $\mathrm{q} = t\pi/2$. Вычисляя q^{-1}, мы получаемъ:

$$\mathrm{q}^{-1} = \frac{1}{(T\alpha)^t}\left(cs\frac{t\pi}{2} - U\alpha sn\frac{t\pi}{2}\right), \qquad \text{[см. (17) § 22]}$$

но $(T\alpha)^{-1} = \dfrac{1}{(T\alpha)^t}$, а потому

$$\mathrm{q}^{-1} = (\alpha^t)^{-1} = (T\alpha)^{-1}\left(cs\frac{t\pi}{2} - U\alpha sn\frac{t\pi}{2}\right) = \alpha^{-t}. \tag{42}$$

Вторая теорема можетъ быть, слѣдовательно, формулирована такимъ образомъ:

Операція $\alpha^t(\quad)\alpha^{-t}$ *къ какому бы бикватерніону* r *она ни была примѣнена не мѣняетъ ни тензора ни угла его,* *но сообщаетъ только его оси винтовое перемѣщеніе вокругъ оси a, опредѣляемое угломъ $t\pi$.*

Теоремы этого параграфа представляютъ двѣ весьма важныя теоремы теоріи бикватерніоновъ. Онѣ получаются у насъ какъ примѣръ приложенія метода перенесенія. Первую изъ нихъ мы встрѣчаемъ у г. Study въ его мемуарѣ „Von den Bewegungen und Umlegungen“ (M. A. B. XXXIX), гдѣ онъ даетъ ея доказательство, исходя изъ соображеній, основанныхъ на теоріи группъ (въ смыслѣ S. Lie), и формулируетъ ее на языкѣ этой теоріи. Она служитъ основной теоремой всей второй половины упомянутаго мемуара.

71. *Обобщеніе формулъ Rodrigues-Euler'a, формулы Study.* Возвращаемся теперь къ задачѣ, поставленной въ концѣ § 68.

Систему координатныхъ винтовъ i,j,k мы можемъ совмѣстить съ системой i',j',k' нѣкоторымъ винтовымъ перемѣщеніемъ. Пусть ε есть винтъ параметра нуль, имѣющій своею осью ось перемѣщенія и $2\theta = 2\varphi + \omega 2d$ комплексный уголъ, перемѣщеніе опредѣляющій. Винтомъ ε и угломъ 2θ мы можемъ задать положеніе системы i',j',k' относительно осей i,j,k.

Если $\mathfrak{q} = t(cs\theta + \varepsilon sn\theta) = w + ix + jy + kz$, гдѣ $w = w_0 + \omega w_1$, $x = x_0 + \omega x_1$, $y = y_0 + \omega y_1$, $z = z_0 + \omega z_1$ и $t = T\mathfrak{q}$, то операція $\mathfrak{q}(\ \ )\mathfrak{q}^{-1}$ будетъ операціей, которая систему осей i,j,k совмѣститъ съ системой i',j',k', и слѣдовательно

$$i' = \mathfrak{q}i\mathfrak{q}^{-1},\ j' = \mathfrak{q}j\mathfrak{q}^{-1},\ k' = \mathfrak{q}k\mathfrak{q}^{-1}$$

Такъ какъ $N\mathfrak{q} = (T\mathfrak{q})^2 = t^2$, то

$$\mathfrak{q}^{-1} = \frac{K\mathfrak{q}}{N\mathfrak{q}} = (w - ix - jy - kz) : t^2,$$

$$i' = \mathfrak{q}i\mathfrak{q}^{-1} = [i(w^2 + x^2 - y^2 - z^2) + j2(wz + xy) + \kappa 2(-wy + zx)] : t^2$$

Коэффиціенты при $i,j.k$ суть косинусы l_1, m_1, n_1 комплексныхъ угловъ, которые ось i' образуетъ съ осями i,j,k. Подобнымъ же образомъ, вычисляя $\mathfrak{q}j\mathfrak{q}^{-1}$ и $\mathfrak{q}k\mathfrak{q}^{-1}$ мы найдемъ выраженія и для l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 и составимъ слѣдующую таблицу формулъ:

$$\begin{aligned} l_1 &= (w^2 + x^2 - y^2 - z^2) : t^2, \\ m_2 &= (w^2 - x^2 + y^2 - z^2) : t^2, \qquad (43) \\ n_3 &= (w^2 - x^2 - y^2 + z^2) : t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2&=2(yz+wx):t^2, & m_3&=2(yz-wx):t^2,\\ l_3&=2(zx+wy):t^2, & n_1&=2(zx-wy):t^2, \qquad (43)\\ m_1&=2(xy+wz):t^2, & l_2&=2(xy-wz):t^2,\\ & & t^2&=w^2+x^2+y^2+z^2. \end{aligned}$$

Это формулы Rodrigues-Euler'а, представленныя въ однородномъ видѣ. Развертывая ихъ. мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \lambda_1&=(w_0^2+x_0^2-y_0^2-z_0^2):t_0^2,\\ \mu_2&=(w_0^2-x_0^2+y_0^2-z_0^2):t_0^2, \qquad (44)\\ \nu_3&=(w_0^2-x_0^2-y_0^2+z_0^2):t_0^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_2&=2(y_0z_0+w_0x_0):t_0^2, & \mu_3&=2(y_0z_0-w_0x_0):t_0^2,\\ \lambda_3&=2(z_0x_0+w_0y_0):t_0^2, & \nu_1&=2(z_0x_0-w_0y_0):t_0^2, \qquad (44)\\ \mu_1&=2(x_0y_0+w_0z_0):t_0^2, & \lambda_2&=2(x_0y_0-w_0z_0):t_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_1&=2(w_0w_1+x_0x_1-y_0y_1-z_0z_1):t_0^2-2\lambda_1Pt,\\ \eta_2&=2(w_0w_1-x_0x_1+y_0y_1-z_0z_1):t_0^2-2\mu_2Pt, \qquad (45)\\ \zeta_3&=2(w_0w_1-x_0x_1-y_0y_1+z_0z_1):t_0^2-2\nu_3Pt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2&=2(y_0z_1+y_1z_0+w_0x_1+w_1x_0):t_0^2-2\nu_2Pt,\\ \xi_3&=2(z_0x_1+z_1x_0+w_0y_1+w_1y_0):t_0^2-2\lambda_3Pt, \qquad (45)\\ \eta_1&=2(x_0y_1+x_1y_0+w_0z_1+w_1z_0):t_0^2-2\mu_1Pt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_3&=2(y_0z_1+y_1z_0-w_0x_1-w_1x_0):t_0^2-2\mu_3Pt,\\ \zeta_1&=2(z_0x_1+z_1x_0-w_0y_1-w_1y_0):t_0^2-2\nu_1Pt, \qquad (45)\\ \xi_2&=2(x_0y_1+x_1y_0-w_0z_1-w_1z_0):t_0^2-2\lambda_2Pt, \end{aligned}$$

$$t_0^2=w_0^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2,\ t_0t_1=w_0w_1+x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1.$$

Если бы въ этихъ формулахъ мы измѣнили обозначенія, то получили бы формулы г. Study [l. c., (4) и (6), стр. 537]. Такимъ образомъ формулы г Study можно разсматривать, какъ развернутыя формулы Rodrigues-Euler'a преобразованія точечныхъ координатъ, когда какъ координаты точки, такъ и параметры, опредѣляющіе положеніе новой системы координатъ становятся комплексными числами вида $a_0+\omega a_1$.

Что касается геометрическаго значенія параметровъ $w_0,x_0,y_0,z_0,w_1,x_1,y_1,z_1$, то оно видно изъ формулъ (14) § 64.

Такъ какъ $Гq=t$ не вліяетъ на операцію $q(\quad)q^{-1}$, то мы можемъ упростить предъидущія формулы, не уменьшая ихъ общности, положивъ $t_0=1$ и $t_0t_1=w_0w_1+x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=0$.

Чтобы по даннымъ $\lambda_s,\mu_s,\nu_s,\xi_s,\eta_s,\zeta_s$, $(s=1,2,3)$ найти $w_0,w_1,x_0,x_1,y_0,y_1,z_0,z_1$, мы должны рѣшить ур. (45) и (44) относительно послѣднихъ. Съ этою цѣлью рѣшимъ сначала ур. (43) относительно w,x,y,z и, выразивъ w,x,y,z черезъ l_s,m_s,n_s $(s=1,2,3)$, полученныя выраженія развернемъ. Тогда будемъ имѣть формулы:

$$\begin{aligned}
1+\lambda_1+\mu_2+\nu_2&=4(w_0:t_0)^2,\\
1+\lambda_1-\mu_2-\nu_3&=4(x_0:t_0)^2,\\
1-\lambda_1+\mu_2-\nu_3&=4(y_0:t_0)^2,\\
1-\lambda_1-\mu_2+\nu_3&=4(z_0:t_0)^2,
\end{aligned}\tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\nu_2-\mu_3&=4(w_0:t_0)(x_0:t_0), & \nu_2+\mu_3&=4(y_0:t_0)(z_0:t_0),\\
\lambda_3-\nu_1&=4(w_0:t_0)(y_0:t_0), & \lambda_3+\nu_1&=4(z_0:t_0)(x_0:t_0),\\
\mu_1-\lambda_2&=4(w_0:t_0)(z_0:t_0), & \mu_1+\lambda_2&=4(x_0:t_0)(y_0:t_0),
\end{aligned}\tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1+\eta_2+\zeta_3&=2(Pw-Pt)(1+\lambda_1+\mu_2+\nu_3),\\
\xi_1-\eta_2-\zeta_3&=2(Px-Pt)(1+\lambda_1-\mu_2-\nu_3),\\
-\xi_1+\eta_2-\zeta_3&=2(Py-Pt)(1-\lambda_1+\mu_2-\nu_3),\\
-\xi_1-\eta_2+\zeta_3&=2(Pz-Pt)(1-\lambda_1-\mu_2+\nu_3),
\end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2-\eta_3&=(Pw+Px-2Pt)(\nu_2-\mu_3),\\
\xi_3-\zeta_1&=(Pw+Py-2Pt)(\lambda_3-\nu_1),\\
\eta_1-\lambda_2&=(Pw+Pz-2Pt)(\mu_1-\lambda_2),
\end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2+\eta_3&=(Py+Pz-2Pt)(\nu_2+\mu_3),\\
\xi_3+\zeta_1&=(Pz+Px-2Pt)(\lambda_3+\nu_1),\\
\eta_1+\xi_2&=(Px+Py-2Pt)(\mu_1+\lambda_2),
\end{aligned}\tag{47}$$

изъ которыхъ, какъ видимъ, опредѣляются только отношенія $w_0:t_0, x_0:t_0, y_0:t_0, z_0:t_0$ и разности $Pw-Pt, Px-Pt, Py-Pt, Pz-Pt$, величины же t_0 и Pt остаются неопредѣленными, и мы ихъ можемъ выбрать совершенно произвольно, что и понятно, такъ какъ операція $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$, а слѣдовательно и положеніе новыхъ осей не зависятъ отъ $T\mathrm{q}=t=t_0(1+\omega Pt)$, и по данному положенію осей найти t_0 и Pt нельзя.

72. *Соотношенія между параметрами обобщенныхъ формулъ Euler'а и Rodrigues-Euler'а.* Совмѣстить систему осей i,j,k съ системой i',j',k' мы можемъ, сообщивъ первой три послѣдовательныхъ винтовыхъ перемѣщенія: 1) винтовое перемѣщеніе вокругъ оси k, опредѣляемое комплекснымъ угломъ ψ, тогда оси i и j совмѣстятся съ i'' и j'' [см. чертежъ § 69], 2) винтовое перемѣщеніе вокругъ оси j'', опредѣляемое угломъ ϑ, тогда оси i,j,k совпадутъ съ i''',j'',k' и въ 3) винтовое перемѣщеніе вокругъ оси k', опредѣляемое угломъ φ, тогда окончательно оси i,j,k совпадутъ съ осями i',j',k'.

Операція эквивалетная первому перемѣщенію будетъ $k^{\frac{\psi}{\pi}}(\quad)k^{-\frac{\psi}{\pi}}$ [см. § 70], второму $j''^{\frac{\vartheta}{\pi}}(\quad)j''^{-\frac{\vartheta}{\pi}}$ и третьему $k'^{\frac{\varphi}{\pi}}(\quad)k'^{-\frac{\varphi}{\pi}}$, а операція эквивалентная всѣмъ тремъ перемѣщеніямъ будетъ $k'^{\frac{\varphi}{\pi}}j''^{\frac{\vartheta}{\pi}}k^{\frac{\psi}{\pi}}(\quad)\ k^{-\frac{\psi}{\pi}}j''^{-\frac{\vartheta}{\pi}}k'^{-\frac{\varphi}{\pi}}$. Если мы означимъ черезъ r бикватерніонъ

$$\mathrm{r}=k'^{\frac{\varphi}{\pi}}j''^{\frac{\vartheta}{\pi}}k^{\frac{\psi}{\pi}},$$

то, пользуясь формулой 42 § 70 и извѣстнымъ равенствомъ теоріи кватерніоновъ:

$$(\mathrm{qrs})^{-1}=\mathrm{s}^{-1}\mathrm{r}^{-1}\mathrm{q}^{-1}, \tag{47$_0$}$$

гдѣ q,r,s какіе либо бикватерніоны, равенствомъ, которое выводится изъ формулъ [(17) § 22, (41) и (42) § 27], легко будетъ видѣть, что

$$\mathrm{r}^{-1}=k^{-\frac{\psi}{\pi}}j''^{-\frac{\vartheta}{\pi}}k'^{-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Такимъ образомъ, совокупность трехъ винтовыхъ перемѣщеній будетъ эквивалентна операціи r( )r^{-1}, или, если положимъ q$=t$r, гдѣ t какое нибудь комплексное число, операціи q( )q^{-1}. Бикватерніонъ q будетъ, слѣдовательно, тѣмъ бикватерніономъ, который мы употребляли въ предъидущемъ параграфѣ, и операція q( )q^{-1} опредѣлитъ то винтовое перемѣщеніе, которое переводитъ систему i,j,k въ i',j',κ'.

Вычисляя помощью формулъ (32) § 69 бикватерніонъ r, мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \mathrm{r}=\mathrm{q}:t=cs{}^1/_2(\varphi+\psi)cs{}^1/_2\vartheta+isn{}^1/_2(\varphi-\psi)sn{}^1/_2\vartheta \\ +jcs{}^1/_2(\varphi-\psi)sn{}^1/_2\vartheta+ksn{}^1/_2(\varphi+\psi)cs{}^1/_2\vartheta \quad (48) \end{aligned}$$

[См. Tait. Traité élémentaire des Quaternions, traduit par Plarr, Paris, 1882 et 84, Second partie, p. 100], и слѣдовательно:

$$\begin{aligned} x:t&=sn{}^1/_2(\varphi-\psi)sn{}^1/_2\vartheta, & z:t&=sn{}^1/_2(\varphi+\psi)cs{}^1/_2\vartheta, \\ y:t&=cs{}^1/_2(\varphi-\psi)sn{}^1/_2\vartheta, & w:t&=cs{}^1/_2(\varphi+\psi)cs{}^1/_2\vartheta. \quad (49) \end{aligned}$$

Эти формулы и даютъ соотношенія между параметрами обобщенныхъ формулъ Euler'а и формулъ Rodrigues-Euler'а. Развертывая ихъ, мы получаемъ:

$$\begin{aligned} x_0:t_0&=sn{}^1/_2(\varphi_0-\psi_0)sn{}^1/_2\vartheta_0, & z_0:t_0&=sn{}^1/_2(\varphi_0+\psi_0)cs{}^1/_2\vartheta_0, \\ y_0:t_0&=cs{}^1/_2(\varphi_0-\psi_0)sn{}^1/_2\vartheta_0, & w_0:t_0&=cs{}^1/_2(\varphi_0+\psi_0)cs{}^1/_2\vartheta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Px-Pt&=\ {}^1/_2(\varphi_1-\psi_1)ctg{}^1/_2(\varphi_0-\psi_0)+{}^1/_2\vartheta_1 ctg{}^1/_2\vartheta_0, \quad (50) \\ Py-Pt&=-{}^1/_2(\varphi_1-\psi_1)\ tg{}^1/_2(\varphi_0-\psi_0)+{}^1/_2\vartheta_1 ctg{}^1/_2\vartheta_0, \\ Pz-Pt&=\ {}^1/_2(\varphi_1+\psi_1)ctg{}^1/_2(\varphi_0+\psi_0)-{}^1/_2\vartheta_1 tg{}^1/_2\vartheta_0, \\ Pw-Pt&=-{}^1/_2(\varphi_1+\psi_1)\ tg{}^1/_2(\varphi_0+\psi_0)-{}^1/_2\vartheta_1 tg{}^1/_2\vartheta_0, \end{aligned}$$

формулы для опредѣленія $w_0,x_0,y_0,z_0,w_1,x_1,y_1,z_1$ по даннымъ $\psi_0,\vartheta_0,\varphi_0,\psi_1,\vartheta_1,\varphi_1$. Чтобы обратно, по даннымъ $w_0,x_0,\ldots y_1,z_1$, найти комплексные Euler'овы углы, мы рѣшаемъ ур. (49) относительно $\vartheta,\varphi+\psi,\varphi-\psi$ и, полученныя для нихъ выраженія, развертываемъ. Мы получаемъ тогда формулы, которыя для опредѣленія ϑ_0, ψ_0, φ_0, ψ_1, ϑ_1, φ_1 можемъ комбинировать между собой различнымъ образомъ. Мы выпишемъ слѣдующія формулы:

$$cs\vartheta_0 = (w_0{}^2 + x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2) : t_0{}^2,$$

$$\vartheta_1 sn\vartheta_0 = -2(w_0 w_1 + x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1) : t_0{}^2 + 2cs\vartheta_0 Pt, \qquad (51)$$

$$tg\,{}^1\!/_2(\varphi_0 - \psi_0) = x_0 : y_0, \quad tg\,{}^1\!/_2(\varphi_0 + \psi_0) = z_0 : w_0,$$

$$\varphi_1 - \psi_1 = 2\frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_0{}^2 + y_0{}^2}, \quad \varphi_1 + \psi_1 = 2\,\frac{z_1 w_0 - z_0 w_1}{z_0{}^2 + w_0{}^2}.$$

Вопросъ объ томъ въ какихъ четвертяхъ мы должны выбрать углы $\varphi_0, \vartheta_0, \psi_0$, рѣшимъ въ каждомъ частомъ случаѣ, если обратимъ вниманіе на знаки первыхъ частей формулъ (50).

Если $\vartheta_0 = 0$, то формулы (50) принимаютъ видъ:

$$x_0 = 0, \; y_0 = 0, \; z_0 : t_0 = sn\,{}^1\!/_2(\varphi_0 +{}_0\psi), w_0 : t_0 = cs\,{}^1\!/_2(\varphi_0 + \psi_0),$$

$$\begin{aligned} x_1 : t_0 &= {}^1\!/_2\vartheta_1 sn\,{}^1\!/_2(\varphi_0 - \psi_0), \\ y_1 : t_0 &= {}^1\!/_2\vartheta_1 cs\,{}^1\!/_2(\varphi_0 - \psi_0), \\ Pz - Pt &= \;\; {}^1\!/_2(\varphi_1 + \psi_1) ctg\,{}^1\!/_2(\varphi + \psi_0), \\ Pw - Pt &= -{}^1\!/_2(\varphi_1 + \psi_1)\; lg\,{}^1\!/_2(\varphi + \psi_0), \end{aligned} \qquad (52)$$

откуда $\quad tg\,{}^1\!/_2(\varphi_0 - \psi_0) = x_1 : y_1$ и $\vartheta_1{}^2 = 4(x_1 + y_1) : t_0{}^2$.

и для $tg(\varphi_0 + \psi_0)$ и $\varphi_1 + \psi_1$ имѣемъ прежнія значенія; разность же $\varphi_1 - \psi_1$ остается неопредѣленной.

73. *Новое начало координатъ.* Въ параграфахъ 68, 69 и 71 мы опредѣляли положеніе новой системы координатъ косинусами комплексныхъ угловъ между старыми и новыми осями въ первомъ изъ нихъ, комплексными Euler'овыми углами во второмъ, и нѣкоторымъ бикватерніономъ въ третьемъ. Интересно изслѣдовать, какъ въ тѣхъ, или другихъ изъ этихъ данныхъ выражаются координаты новаго начала.

Въ первомъ случаѣ мы опредѣлимъ ихъ по извѣстнымъ формуламъ, разсматривая новое начало O', какъ точку пересѣченія или осей i' и j', или осей j' и k', или осей, k' и i'. Такимъ образомъ, означая l,m,n координаты O' будемъ имѣть:

$$l : m : n : 1 = \tag{54}$$

$$\eta_s\zeta_u-\eta_u\zeta_s : \zeta_s\xi_u-\zeta_u\xi_s : \xi_s\eta_u-\xi_u\eta_s : \lambda_u\xi_s+\mu_u\eta_s+\nu_u\zeta_s . (s,u=1,2,3)$$

Чтобы опредѣлить координаты O' въ третьемъ случаѣ, когда положеніе новой системы координатъ задано бикватерніономъ, мы постараемся раскрыть, въ какомъ отношеніи къ операціи $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$, гдѣ $\mathrm{q}=\mathrm{q}_0+\omega\mathrm{q}_1$, находится векторъ $V(\mathrm{q}_1/\mathrm{q}_0)$.

Замѣтимъ, что бивекторы, оси которыхъ образуютъ связку съ центромъ O_1 преобразуются операціей $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$ въ бивекторы также нѣкоторой связки съ центромъ O_1', причемъ очевидно, что точка O_1' есть та точка, въ которую переходитъ O_1 при винтовомъ перемѣщеніи, опредѣляемомъ операціей $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$. Такимъ образомъ мы можемъ говорить о преобразованіи точекъ пространства операціей $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$.

Чтобы опредѣлить ту точку O', въ которую переходитъ точка O приведенія бикватерніона q, мы разматриваемъ ее какъ центръ связки бивекторовъ $\varrho=\varrho_0$ параметра нуль. Точка O' будетъ тогда центромъ связки бивекторовъ:

$$\sigma=\mathrm{q}(\varrho_0)\mathrm{q}^{-1}.$$

Такъ какъ операція $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$ не зависитъ отъ $T\mathrm{q}=t$, то для упрощенія мы можемъ замѣнить бикватерніонъ q его верзоромъ, который мы означимъ черезъ $\mathrm{r}=\mathrm{r}_0+\omega\mathrm{r}_1=U\mathrm{q}$. Тогда

$$\sigma=\mathrm{r}(\varrho_0)\mathrm{r}^{-1},$$

или, такъ какъ $(T\mathrm{r})^2=N\mathrm{r}=N\mathrm{r}_0=1$, и слѣдовательно $\mathrm{r}^{-1}=K\mathrm{r}_0+\omega K\mathrm{r}_1$,

$$\sigma=(\mathrm{r}_0+\omega\mathrm{r}_1)\varrho_0(K\mathrm{r}_0+\omega K\mathrm{r}_1)=\mathrm{r}_0\varrho_0K\mathrm{r}_0+\omega(\mathrm{r}_0\varrho_0K\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_1\varrho_0K\mathrm{r}_0),$$

или, наконецъ, если воспользуемся формулами: $s-Ks=2Vs$, гдѣ s какой либо бикватерніонъ, и (41) § 27,

$$\sigma=\mathrm{r}_0\varrho_0K\mathrm{r}_0+2\omega V(\mathrm{r}_1\varrho_0K\mathrm{r}_0).$$

Означимъ черезъ 2χ векторъ OO' и примемъ точку O' за точку приведенія бивектора σ; тогда онъ приметъ видъ [см. (2) § 30]:

$$\mathrm{r}_0\varrho_0 K\mathrm{r}_0 + 2\omega[V(\mathrm{r}_1\varrho_0 K\mathrm{r}_0) - V(\chi.\mathrm{r}_0\varrho_0 K\mathrm{r}_0)],$$

Но параметръ бивектора σ равенъ нулю и точка O' находится на его оси, слѣдовательно моментъ σ для точки O' долженъ обратиться въ нуль и

$$V(\chi.\mathrm{r}_0\varrho_0 K\mathrm{r}_0) = V(\mathrm{r}_1\varrho_0 K\mathrm{r}_0),$$

каковъ бы ни былъ векторъ ϱ_0. Обратно, если нѣкоторый векторъ χ будетъ удовлетворять этому уравненію при произвольномъ ϱ_0, то 2χ будетъ векторомъ OO'. Не трудно показать, что уравненію удовлствоpяетъ при всякомъ ϱ_0 векторъ $V(\mathrm{r}_1:\mathrm{r}_0)$. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе преположенія, что r есть верзоръ и стало быть $P\mathrm{r} = S(\mathrm{r}_1:\mathrm{r}_0) = 0$, $V(\mathrm{r}_1:\mathrm{r}_0) = \mathrm{r}_1:\mathrm{r}_0 = \mathrm{r}_1 K\mathrm{r}_0$, внося $V(\mathrm{r}_1:\mathrm{r}_0)$ вмѣсто χ въ первую часть предъидущаго уравненія, мы получаемъ:

$$V(\mathrm{r}_1 K\mathrm{r}_0.\mathrm{r}_0\varrho_0 K\mathrm{r}_0) = V(\mathrm{r}_1(K\mathrm{r}_0\mathrm{r}_0)\varrho_0 K\mathrm{r}_0) = V(\mathrm{r}_1\varrho_0 K\mathrm{r}_0),$$

ибо $K\mathrm{r}_0.\mathrm{r}_0 = N\mathrm{r}_0 = 1$.

Итакъ $\chi = V(\mathrm{r}_1:\mathrm{r}_0) = \mathrm{r}_1:\mathrm{r}_0$; но $\mathrm{q} = t\mathrm{r} = t_0\mathrm{r}_0 + \omega(t_0\mathrm{r}_1 + t_1\mathrm{r}_0)$, а потому

$$P\mathrm{q} + \chi = \mathrm{q}_1/\mathrm{q}_0, \tag{55}$$

откуда $\chi = V(\mathrm{q}_1:\mathrm{q}_0)$. Мы находимъ такимъ образомъ значеніе вектора $V(\mathrm{q}_1:\mathrm{q}_0)$ и формула (55), представляющая обобщеніе формулы (5) § 31, даетъ намъ слѣдующую теорему:

Частное отъ дѣленія момента бикватерніона q *на его главную часть*, $\mathrm{q}_1/\mathrm{q}_0$, *есть кватерніонъ, скаларная часть котораго равняется параметру бикватерніона*, $P\mathrm{q}$, *а векторная—половинѣ вектора, соединяющаго точку O приведенія* q *съ точкой O', въ которую она переходитъ при винтовомъ перемѣщеніи, опредѣляемомъ операціей* $\mathrm{q}(\ \ )\mathrm{q}^{-1}$.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что точка, находящаяся въ концѣ вектора γ, операціей $\mathrm{q}(\ \ )\mathrm{q}^{-1}$ переводится въ точку въ концѣ вектора

$$2\chi + \mathrm{q}_0 \gamma \mathrm{q}_0^{-1}$$

Если q будетъ бикватерніономъ, опредѣляющимъ положеніе новой системы координатъ $O'(i',j',k')$ относительно старой $O(i\,j,k)$, то операція $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$ будетъ переводить старую систему координатъ въ новое положеніе и точку O въ O'. Поэтому векторъ $OO' = 2\chi = 2V(\mathrm{q}_1 : \mathrm{q}_0) = 2V(\mathrm{q}_1 K \mathrm{q}_0) : t_0^2$. Вычисливъ его, мы находимъ для координатъ точки O' выраженія

$$\begin{aligned} l &= 2(w_0 x_1 - w_1 x_0 + y_0 z_1 - y_1 z_0) : t_0^2, \\ m &= 2(w_0 y_1 - w_1 y_0 + z_0 x_1 - z_1 x_0) : t_0^2; \\ n &= 2\,(w_0 z_1 - w_1 z_0 + x_0 y_1 - x_1 y_0) : t_0^2. \end{aligned} \tag{56}$$

Это формулы г. Study [l. c. форм. (5) стр. 528]. Внося въ нихъ вмѣсто $w_0, x_0, \ldots$ ихъ выраженія въ функціи частей комплексныхъ Euler'овыхъ угловъ, получаемъ:

$$\begin{aligned} l &= \varphi_1 sn\vartheta_0 cs\psi_0 - \vartheta_1 sn\psi_0, \\ m &= \varphi_1 sn\vartheta_0 sn\psi_0 + \vartheta_1 cs\psi_0, \\ n &= \varphi_1 cs\vartheta_0 \qquad + \psi_1. \end{aligned} \tag{57}$$

Эти формулы легко выводятся также геометрически изъ чертежа § 69.

74. *Сложеніе конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній. Средній бивекторъ.* Двѣ послѣдовательныя операціи $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$ и $\mathrm{q}'(\quad)\mathrm{q}'^{-1}$, гдѣ q и q' какіе нибудь бикватерніоны будутъ эквивалентны операціи $\mathrm{q}'\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}\mathrm{q}'^{-1}$.

Если означимъ произведеніе q'q черезъ Q, то, по формулѣ (47_0) § 72, $\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{q}^{-1}\mathrm{q}'^{-1}$ и

$$\mathrm{q}'\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}\mathrm{q}'^{-1} = \mathrm{Q}(\quad)\mathrm{Q}^{-1}.$$

Такимъ образомъ двѣ операціи $\mathrm{q}(\quad)\mathrm{q}^{-1}$ и $\mathrm{q}'(\quad)\mathrm{q}'^{-1}$ будутъ эквивалентны одной операціи такого же типа, $\mathrm{Q}(\quad)\mathrm{Q}^{-1}$, и мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Два послѣдовательныхъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщенія, первое вокругъ оси бикватерніона q *на удвоенный его уголъ,* $2\angle\mathrm{q}$, *второе вокругъ оси бикватерніона* q', *на его удвоенный уголъ,* $2\angle\mathrm{q}'$, *эквивалентно одному винтовому перемѣщенію вокругъ оси бикватерніона* $\mathrm{Q} = \mathrm{q}'\mathrm{q}$ *на удвоенный уголъ* Q, $2\angle\mathrm{Q}$.

Эта теорема сводитъ задачу сложенія и разложенія конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній на умноженіе и дѣленіе бикватерніоновъ и даетъ возможность рѣшить ее или геометрическими построеніями, или путемъ вычисленій.

Пусть намъ даны два конечныхъ винтовыхъ перемѣщенія, одно вокругъ оси ε на комплексный уголъ $\vartheta=\vartheta_0+\omega\vartheta_1$, другое вокругъ оси ε' на уголъ $\vartheta'=\vartheta'_0+\omega\vartheta_1{}'$. Если положимъ $\mathrm{q}=cs^1/_2\vartheta+\varepsilon sn^1/_2\vartheta$ и $\mathrm{q}'=cs^1/_2\vartheta'+\varepsilon' sn^1/_2\vartheta'$, то сложное винтовое перемѣщеніе будетъ имѣть своею осью и комплексным угломъ ось и двойной уголъ бикватерніона $\mathrm{Q}=cs^1/_2\Theta+Esn^1/_2\Theta=\mathrm{q}'\mathrm{q}$.

Поэтому, припомнивъ построеніе произведенія двухъ верзоровъ-бикватерніоновъ [см § 58], мы приходимъ къ слѣдующему правилу сложенія двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній.

Построимъ сначала ось β, которая идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями ε и ε', а потомъ двѣ линіи α и γ такъ, чтобы первая пересѣкала подъ прямымъ угломъ ось ε и съ осью β относительно направленія ε образовала бы комплексный уголъ $^1/_2\vartheta$, а вторая встрѣчала бы ось ε' и комплесный уголъ между осью β и ею относительно направленія ε' былъ $^1/_2\vartheta'$. Тогда линія кратчайшаго разстоянія между осями α и γ будетъ осью сложнаго перемѣщенія, а удвоенный комплексный уголъ между α и γ будетъ равенъ комплексному углу перемѣщенія, Θ.

Чтобы найти зависимость между положеніями осей ε,ε' и E и углами ϑ,ϑ и Θ, означимъ уголъ между осями ε и ε' черезъ $v=v_0+\omega v_1$. Перемножая q' и q и замѣчая, что $\varepsilon'\varepsilon=-csv+V\varepsilon'\varepsilon$ получимъ

$$cs^1/_2\Theta=cs^1/_2\vartheta\, cs^1/_2\vartheta'-sn^1/_2\vartheta\, sn^1/_2\vartheta' csv, \tag{58}$$

$$\begin{aligned}Esn^1/_2\Theta=&\ \varepsilon sn^1/_2\vartheta\, cs^1/_2\vartheta'+\varepsilon' sn^1/_2\vartheta' cs^1/_2\vartheta\\ &+V\varepsilon'\varepsilon sn^1/_2\vartheta\, sn^1/_2\vartheta'.\end{aligned} \tag{59}$$

Эти формулы вполнѣ опредѣляютъ сложное перемѣщеніе. Первая даетъ возможность опредѣлить комплексный уголъ Θ; развернувъ ее мы имѣемъ:

$$cs^1/_2\Theta_0=cs^1/_2\vartheta_0 cs^1/_2\vartheta_0{}'-sn^1/_2\vartheta_0 sn^1/_2\vartheta_0{}' csv_0, \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\Theta_1 sn\,{}^1/_2\Theta_0 = {} & \vartheta_1(sn\,{}^1/_2\vartheta_0 cs\,{}^1/_2\vartheta_0{}' + cs\,{}^1/_2\vartheta_0 sn\,{}^1/_2\vartheta_0{}' csv_0) \\ & + \vartheta_1{}'(cs\,{}^1/_2\vartheta_0 sn\,{}^1/_2\vartheta_0{}' + sn\,{}^1/_2\vartheta_0 cs\,{}^1/_2\vartheta_0{}' csv_0) \\ & - 2v_1 sn\,{}^1/_2\vartheta_0 sn\,{}^1/_2\vartheta_0{}' snv_0.\end{aligned} \tag{61}$$

Вторая, представляя $Esn\,{}^1/_2\Theta$ въ видѣ суммы трехъ бивекторовъ, показываетъ, какимъ образомъ бивекторъ $Esn\,{}^1/_2\Theta$ можетъ быть построенъ. Изъ нея мы можемъ получить различныя формулы для опредѣленія *положенія* оси E и угла Θ. Такъ, предполагая, что оси ε и ε' заданы комплексными углами, $g=g_0+\omega g_0$, $h=h_0+\omega h_1$, $l=l_0+\omega l_1$ и g', h', l', которые они образуютъ съ осями координатъ, мы можемъ вычислить координаты $Esn\,{}^1/_2\Theta$. Проэктируя его на ось i, по теоремѣ § 63 находимъ

$$\begin{aligned}sn\,{}^1/_2\Theta csG = {} & sn\,{}^1/_2\vartheta cs\,{}^1/_2\vartheta' csg + sn\,{}^1/_2\vartheta' cs\,{}^1/_2\vartheta csg' \\ & + sn\,{}^1/_2\vartheta sn\,{}^1/_2\vartheta'(csh'csl - cshcsl'),\end{aligned} \tag{62}$$

гдѣ G комплексный уголъ между осями E и i. Подобныя же формулы получимъ и для проэкцій $Esn\,{}^1/_2\Theta$ на оси j и k.

Формулы (58) и (62) для вещественныхъ ϑ, ϑ', v, и т. д. принадлежатъ Rodrigues'у. [Des lois géométriques qui régissent les déplacements..... Journ. de Math., V, 1840, p. 408]. Мы видимъ теперь, что онѣ имѣютъ вполнѣ опредѣленный смыслъ и въ томъ случаѣ, когда числа, въ нихъ входящія, становятся комплексными. Изъ (61) при $\vartheta_1=\vartheta_1{}'=0$ получается извѣстная теорема Rodrigues'а [l. c. p. 396].

Проэктируя бивекторъ $Esn\,{}^1/_2\Theta$ на оси ε, ε' и $V\varepsilon'\varepsilon$, получаемъ формулы болѣе простыя:

$$\begin{aligned}sn\,{}^1/_2\Theta csf_1 &= sn\,{}^1/_2\vartheta\, cs\,{}^1/_2\vartheta' + cs\,{}^1/_2\vartheta sn\,{}^1/_2\vartheta' csv, \\ sn\,{}^1/_2\Theta csf_2 &= sn\,{}^1/_2\vartheta' cs\,{}^1/_2\vartheta + sn\,{}^1/_2\vartheta cs\,{}^1/_2\vartheta' csv, \\ sn\,{}^1/_2\Theta csf_3 &= sn\,{}^1/_2\vartheta sn\,{}^1/_2\vartheta' snv,\end{aligned} \tag{63}$$

гдѣ $f_1=f_{10}+\omega f_{11}$, $f_2=f_{20}+\omega f_{21}$, $f_3=f_{30}+\omega f_{31}$ суть комплексные углы, которыя ось E образуетъ съ осями $\varepsilon, \varepsilon'$ и $V\varepsilon'\varepsilon$.

По этимъ проэкціямъ мы можемъ опредѣлить бивекторъ $Esn\,{}^1/_2\Theta$, ибо, какъ покажемъ въ § 80, всякій бивекторъ можетъ быть построенъ по тремъ проэкціямъ на три, не принадлежащія одной щеткѣ, линіи.

Развернувъ формулы (63), мы можемъ помощью ихъ представить равенство (61), по раздѣленіи его на $sn^1/_2\Theta_0$, въ видѣ:

$$\Theta_1 = \vartheta_1 csf_{10} + \vartheta_1' csf_{20} - 2v_1 f_{30}, \qquad (64)$$

Эта формула, которая, замѣтимъ кстати, весьма просто выводится геометрически, позволяетъ вычислить Θ_1, если f_{10}, f_{20}, f_{30} будутъ извѣстны.

Послѣдней изъ формулъ (63) можно дать весьма простое толкованіе, если мы введемъ понятіе о среднемъ бивекторѣ конечнаго винтоваго перемѣщенія. Такъ мы назовемъ бивекторъ, которому осью служитъ ось ε перемѣщенія и тензоромъ $sn^1/_2\vartheta$, гдѣ ϑ комплексный уголъ, перемѣщеніе опредѣляющій. Кинематическое значеніе средняго бивектора видѣть не трудно. Пусть точки A_1, A_2,.... при разсматриваемомъ перемѣщеніи переходятъ въ точки A_1', A_2',.... Раздѣливъ хорды A_1A_1', A_2A_2'.... въ точкахъ M_1, M_2,.... пополамъ, будемъ имѣть векторы M_1A_1', M_2A_2',..., которые будутъ скоростями нѣкотораго движенія неизмѣняемой системы точекъ M_1, M_2,.... Осью и параметромъ этого движенія будутъ ε и $Psn^1/_2\vartheta = {}^1/_2\vartheta_1 ctg^1/_2\vartheta_0$, т. е. ось и параметръ средняго бивектора.

Мы можемъ теперь истолковать формулу, о которой говорили, слѣдующимъ образомъ:

Векторное произведеніе среднихъ бивекторовъ слагаемыхъ перемѣщеній равняется проэкціи средняго бивектора сложнаго перемѣщенія на линію кратчайшаго разстоянія между осями слагаемыхъ перемѣщеній.

75. *Нѣкоторыя слѣдствія изъ основной теоремы предъидущаго параграфа.* Чтобы имѣть возможность удобнѣе формулировать слѣдующія теоремы мы введемъ знакъ $[\alpha\beta]$. Такъ мы будемъ означать винтовое перемѣщеніе, которое имѣетъ осью линію кратчайшаго разстоянія между осями α и β и опредѣляется комплекснымъ угломъ между этими осями относительно положительнаго направленія линіи кратчайшаго разстонія, перемѣщеніе, которое, очевидно, совмѣщаетъ α съ β. Понятно, что $2[\alpha\beta]$ будетъ перемѣщеніемъ на удвоенный комплексный уголъ $(\alpha\beta)$ вокругъ той же оси, что перемѣщеніе $[\alpha\beta]$ прямо противоположно $[\beta\alpha]$ и $[\alpha\beta]+[\beta\alpha]=0$.

Легко видѣть, что теорема предъидущаго параграфа допускаетъ такое обобщеніе: конечныя винтовыя перемѣщенія вокругъ осей бикватерніоновъ $q, q', q'', \dots$ на ихъ удвоенные углы слагаются въ одно перемѣщеніе, которому осью и угломъ служатъ ось и удвоенный уголъ бикватерніона $Q = \dots q''q'q$.

Если бы случилось, что Q равняется скаларному числу, то сложное перемѣщеніе исчезнетъ и слагаемыя перемѣщенія взаимно уничтожатся.

Пусть мы имѣемъ нѣсколько винтовъ параметра нуль, $\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta, \vartheta$ какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ. Бикватерніоны β/α, $\gamma/\beta, \dots$ ϑ/η, α/ϑ имѣютъ своими осями и углами линіи кратчайшихъ разстояній и комплексные углы между α и β, β и $\gamma, \dots$ η и ϑ, ϑ и α. Произведеніе

$$(\alpha/\vartheta)(\vartheta/\eta)\dots\ (\gamma/\beta)(\beta/\alpha) = 1,$$

а потому мы приходимъ къ такой теоремѣ:

Теорема I. *Если имѣемъ нѣсколько осей* $\alpha . \beta . \gamma, \dots \eta, \vartheta$ *какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ, то послѣдовательныя винтовыя перемѣщенія* $2[\alpha\beta]$, $2[\beta\gamma], \dots$ $2[\eta\vartheta]$, $2[\vartheta\alpha]$, *слагаясь, взаимно уничтожаются.*

Припомнимъ ту фигуру изъ 18 прямыхъ, съ которой мы встрѣчались въ § 58 и ея свойство, выражающее законъ ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ. Сопоставляя это свойство съ предъидущей теоремой увидимъ, что законъ ассоціативности будетъ эквивалентенъ слѣдующей теоремѣ:

Теорема II. *Пусть* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$ *шесть, какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ, имѣющихъ опредѣленное направленіе, осей. Построимъ линіи* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ *кратчайшихъ разстояній:* ε_1 *между* δ_1 *и* δ_2, ε_2 *между* δ_2 *и* $\delta_3, \dots$ ε_6 *между* δ_6 *и* δ_1. *Тогда, если три винтовыхъ перемѣщенія вокругъ первой, третьей и пятой изъ линій* ε,—$\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$—*на удвоенные комплексные углы между* δ_1 *и* δ_2, δ_3 *и* δ_4, δ_5 *и* δ_6 *отъ* δ_1 *къ* δ_2, *отъ* δ_3 *къ* δ_4, *отъ* δ_5 *къ* δ_6 *взаимно уничтожаются, то три винтовыхъ перемѣщенія вокругъ второй, четвертой и шестой изъ линій* ε,—$\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6$ —*на удвоенные комплексные углы между* δ_2 *и* δ_3, δ_4 *и* δ_5, δ_6 *и* δ_1 *отъ* δ_2 *къ* δ_3, *отъ* δ_4 *къ* δ_5, *отъ* δ_6 *къ* δ_1 *также взаимно уничтожатся.*

Эта теорема можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ. Если мы имѣемъ $2n$ осей $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_{2n}$ и вращенія $2[\delta_1\delta_2]$, $2[\delta_3\delta_4], \dots 2[\delta_{2n-1}\delta_{2n}]$, слагаясь, взаимно уничтожаются, т. е.

$$2[\delta_1\delta_2]+2[\delta_3\delta_4]+\dots\ +2[\delta_{2n-1}\delta_{2n}]=0,$$

то послѣдовательныя вращенія $2[\delta_2\delta_3]$, $2[\delta_4\delta_5], \dots\ 2[\delta_{2n}\delta_1]$ также взаимно уничтожатся, т. е.

$$2[\delta_2\delta_3]+2[\delta_4\delta_5]+\dots\ +2[\delta_{2n}\delta_1]=0.$$

Какимъ образомъ можетъ быть доказана эта теорема, покажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

76. *Обобщеніе доказательства Möbius'а закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ.* Мы видѣли въ § 74, что умноженіе двухъ верзоровъ-бикватерніоновъ и сложеніе двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній двѣ операціи тожественныя. Мы воспользовались этимъ обстоятельствомъ, чтобы помощью извѣстныхъ намъ свойствъ операціи умноженія изучить законъ сложенія конечныхъ перемѣщеній. Но мы можемъ воспользоваться имъ иначе: изслѣдовавъ независимо отъ операціи $q(\ \ )q^{-1}$ законъ сложенія конечныхъ перемѣщеній и доказавъ, такимъ образомъ, его тожество съ умноженіемъ верзоровъ, мы можемъ помощью свойствъ операціи сложенія перемѣщеній изучать свойства операціи умноженія.

Подобнымъ образомъ, какъ мы упоминали въ § 58, Möbius въ своей замѣткѣ „Neuer Beweis....“ [Werke B. 2] далъ весьма простое доказательство закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ, показавъ, что эта послѣдняя операція эквивалентна сложенію двухъ вращеній вокругъ пересѣкающихся осей. Мы покажемъ теперь, какъ доказательство Möbius'а распространяется на бикватерніоны.

Означая вращеніе вокругъ положительнаго направленія оси α на π черезъ $[\alpha]$, докажемъ сначала слѣдующую теорему [Wiener, Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen gu einer einzigen. Berichte der Sächs. Ges. 1890]:

Два послѣдовательныя вращенія $[\alpha]$ *и* $[\beta]$ *слагаются въ одно винтовое перемѣщеніе* $2[\alpha\beta]$.

Въ самомъ дѣлѣ, линія кратчайшаго разстоянія между осями α и β послѣ вращеній $[\alpha]$ и $[\beta]$ приходитъ въ первоначальное положеніе и имѣетъ первоначальное направленіе. Слѣдовательно, винтовое движеніе, сложное изъ $[\alpha]$ и $[\beta]$, не будетъ мѣнять ни положенія, ни направленія линіи кратчайшаго разстоянія, и потому эта линія будетъ служить его осью. Взявъ затѣмъ какую нибудь прямую, пересѣкающую линію кратчайшаго разстоянія подъ прямымъ угломъ, и отмѣтивъ ея положенія до перемѣщенія $[\alpha]$, послѣ этого перемѣщенія и наконецъ послѣ перемѣщенія $[\beta]$, увидимъ, что комплексный уголъ между ея первоначальнымъ положеніемъ и положеніемъ послѣ перемѣщеній будетъ $2(\alpha\beta)$. Этимъ угломъ и будетъ опредѣляться сложное перемѣщеніе.

Такимъ образомъ теорема доказана.

Легко видѣть, что два вращенія $[\alpha]$ и $[\alpha]$ приводятъ неизмѣняемую систему въ ея первоначальное положеніе. Поэтому, въ результатѣ послѣдовательныхъ вращеній $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\gamma]$, $[\alpha]$, гдѣ γ какая нибудь третья ось, система своего положенія не измѣнитъ. Эти шесть вращеній взаимно уничтожатся и мы можемъ написать:

$$[\alpha]+[\beta]+[\beta]+[\gamma]+[\gamma]+[\alpha]=0.$$

Но сложеніе конечныхъ перемѣщеній есть операція ассоціативная, и мы можемъ, сгруппировавъ вращенія по два, представить предъидущее равенство въ видѣ:

$$([\alpha]+[\beta])+([\beta]+[\gamma])+([\gamma]+[\alpha])=0.$$

И тогда, по только что доказанной теоремѣ, будемъ имѣть равенство:

$$2[\alpha\beta]+2[\beta\gamma]+2[\gamma\alpha]=0,$$

выражающее частный случай теоремы I предъидущаго параграфа. Изъ него имѣемъ:

$$2[\alpha\beta]+2[\beta\gamma]=2[\alpha\gamma].$$

Это равенство и приводитъ насъ къ правилу сложенія конечныхъ перемѣщеніи, данному въ § 74 и показываетъ, слѣдовательно, что построеніе, съ которымъ мы имѣемъ дѣло при умноженіи верзоровъ-бикватерніоновъ тожественно съ построеніемъ, которое должны выполнить при сложеніи двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній.

Такимъ образомъ, если A, A', A'' будутъ какіе либо три конечныхъ винтовыхъ перемѣщенія и q, q', q'' три верзора-бикватерніона, которые по порядку имѣютъ своими осями оси перемѣщеній A, A', A'' и углами половины комплексныхъ угловъ перемѣщенія опредѣляющія, то построеніе сложнаго перемѣщенія:

$$(A+A')+A''$$

будетъ эквивалентно построенію верзора-бикватерніона $q''(q'q)$. Построеніе же перемѣщенія:

$$A+(A'+A'')$$

—построенію бикватерніона $(q''q')q$. Но операція сложенія конечныхъ перемѣщеній есть операція ассоціативная: $(A+A')+A''=A+(A'+A)$, а потому и $q''(q'q)=(q''q')q$.

Итакъ законъ ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ и эквивалентная этому закону теорема о 18 прямыхъ доказаны.

Предъидущее доказательство можно видоизмѣнить еще такимъ образомъ. Мы видѣли, что теорема о 18 прямыхъ эквивалентна теоремѣ II § 75. Слѣдовательно, доказавъ эту послѣднюю, мы докажемъ и теорему о 18 прямыхъ и законъ ассоціативности умноженія верзоровъ.

Но теорему II мы можемъ формулировать такъ: если

$$2[\delta_1\delta_2]+2[\delta_3\delta_4]+2[\delta_5\delta_6]=0, \tag{65}$$

то

$$2[\delta_2\delta_3]+2[\delta_4\delta_5]+2[\delta_6\delta_1]=0; \tag{66}$$

и доказать ее это значитъ доказать, что отъ равенства (65) мы можемъ перейти къ равенству (66). Равенство же (65) по теоремѣ этого параграфа можно представить въ видѣ:

$$[\delta_1]+[\delta_2]+[\delta_3]+[\delta_4]+[\delta_5]+[\delta_6]=0,$$

или, по той же теоремѣ и закону ассоціативности сложенія перемѣщеній, въ видѣ:

$$[\delta_1]+2[\delta_2\delta_3]+2[\delta_4\delta_5]+[\delta_6]=0.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ вращеніе $[\delta_1]$, будемъ имѣть

$$[\delta_1]+2[\delta_2\delta_3]+2[\delta_4\delta_5]+2[\delta_6\delta_1]=[\delta_1],$$

откуда и слѣдуетъ равенство (66).

Обобщеніе теоремы II § 75 можетъ быть доказано подобнымъ же образомъ.

77. *Выводъ нѣкоторыхъ формулъ теоріи кватерніоновъ.* Выведемъ теперь нѣсколько формулъ теоріи кватерніоновъ, которыя, какъ мы знаемъ, будутъ примѣнимы и въ винтовомъ счисленіи и понадобятся намъ въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Пусть $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, какіе нибудь бивекторы. Изъ формулъ для $S\alpha\beta$ и $V\alpha\beta$ [см. §§ 35 и 39], мы имѣемъ

$$S\alpha\beta=S\beta\alpha,\quad V\alpha\beta=-V\beta\alpha. \tag{67}$$

Поэтому, $\alpha\beta=S\alpha\beta+V\alpha\beta,\quad \beta\alpha=S\alpha\beta-V\alpha\beta,$

$$2S\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\alpha,\quad 2V\alpha\beta=\alpha\beta-\beta\alpha. \tag{68}$$

Далѣе, $\alpha(\beta\gamma)=\alpha(S\beta\gamma+V\beta\gamma)=\alpha S\beta\gamma+\alpha V\beta\gamma$; но $\alpha S\beta\gamma$ есть бивекторъ, слѣдовательно

$$S\alpha\beta\gamma=S\alpha V\beta\gamma. \tag{69}$$

Также докажемъ, что $S\alpha\beta\gamma=SV\alpha\beta.\gamma$. (70)

Замѣняя въ (68) β черезъ $V\beta\gamma$, имѣемъ:

$$2V\alpha V\beta\gamma=\alpha V\beta\gamma-V\beta\gamma.\alpha.$$

Складывая это равенство съ тожествомъ $0=\alpha S\beta\gamma-S\beta\gamma.\alpha$, получаемъ:

$$2V\alpha V\beta\gamma=\alpha(S\beta\gamma+V\beta\gamma)-(S\beta\gamma+V\beta\gamma)\alpha=\alpha\beta\gamma-\beta\gamma\alpha$$
$$=(\alpha\beta+\beta\alpha)\gamma-\beta(\gamma\alpha+\alpha\gamma)=2S\alpha\beta.\gamma-2\beta S\gamma\alpha,$$

откуда

$$V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma, \tag{71}$$

равенство весьма важное при вычисленіяхъ. Сложивъ его съ тожествомъ

$$V\alpha S\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma,$$

находимъ

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta. \tag{72}$$

Замѣнивъ въ (71) сначала $\alpha.\beta,\gamma$, черезъ $V\alpha\beta,\gamma,\delta$ а затѣмъ α,β,γ черезъ β,γ,δ получаемъ два равенства.:

$$V(V\alpha\beta.V\gamma\delta) = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta, \tag{73}$$

$$V\beta V\gamma\delta = \delta S\beta\gamma - \gamma S\beta\delta,$$

изъ которыхъ второе, послѣ того какъ умножимъ его на α, сравнимъ скаларныя части обѣихъ частей и замѣтимъ, что $S\alpha V\beta V\gamma\delta = S\alpha\beta V\gamma\delta = SV\alpha\beta V\gamma\delta$, даетъ

$$S(V\alpha\beta.V\gamma\delta) = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta. \tag{74}$$

78. *Различныя выраженія для $S\alpha\beta\gamma$.* Пусть $\alpha = xi + yj + zk$, $\beta = x'i + y'j + z'k$ и $\gamma = x''i + y''j + z''k$, гдѣ $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$, $z = r + \omega c$; $x' = p_1 + \omega a_1$, $y' = q_1 + \omega b_1$, $z' = r_1 + \omega c_1$; $x'' = p_2 + \omega a_2$, $y'' = q_2 + \omega b_2$, $z'' = r_2 + \omega c_2$. Составляя помощью формулы (69) $S\alpha\beta\gamma$, находимъ

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \tag{75}$$

откуда видимъ, что $S\alpha\beta\gamma$ мѣняетъ знакъ всякій разъ, когда мы переставляемъ два множителя, такъ что

$$S\alpha\beta\gamma = -S\alpha\gamma\beta = S\gamma\alpha\beta = -S\gamma\beta\alpha = S\beta\gamma\alpha = -S\beta\alpha\gamma.$$

Пользуясь соотношеніемъ $S\alpha\beta\gamma = SV\alpha\beta.\gamma$, въ которомъ, замѣняемъ сначала $V\alpha\beta$ черезъ $T\alpha T\beta sn\theta\varepsilon$, гдѣ $\theta = \theta_0 + \omega\theta_1$ комплексный уголъ между осями α и β, а потомъ $S\varepsilon\gamma$ черезъ—$T\gamma cs\psi$, гдѣ $\psi=\psi_0+\omega\psi_1$ комплексный уголъ между ε и γ, получаемъ для $S\alpha\beta\gamma$ другое выраженіе:

$$S\alpha\beta\gamma=-T\alpha T\beta T\gamma sn\theta cs\psi. \tag{76}$$

Наконецъ, если возвысимъ равенство (72) почленно въ квадратъ и припомнимъ, что $(Sq)^2=(Tq)^2+(Vq)^2$ [см. (16) § 21], получимъ для $S\alpha\beta\gamma$ третье выраженіе:

$$\begin{gathered}S^2\alpha\beta\gamma=T^2\alpha T^2\beta T^2\gamma+\alpha^2S^2\beta\gamma+\\ \beta^2S^2\gamma\alpha+\gamma^2S^2\alpha\beta-2S\beta\gamma S\gamma\alpha S\alpha\beta.\end{gathered} \tag{77}$$

Первое изъ выраженій для $S\alpha\beta\gamma$, (75), даетъ возможность вычислить $S\alpha\beta\gamma$, когда даны прямоугольныя координаты бивекторовъ α, β и γ; изъ втораго, (76), найдемъ $S\alpha\beta\gamma$, если будутъ извѣстны $T\alpha$, $T\beta$, $T\gamma$ и углы θ и ψ; наконецъ третье, (77), дастъ $S\alpha\beta\gamma$, если будемъ знать $T\alpha$, $T\beta$, $T\gamma$ и комплексные углы между осями α,β и γ. Развернувъ (75) и (77) и предположивъ въ послѣдней для простоты $T\alpha=T\beta=T\gamma=1$, получаемъ:

$$S_0\alpha\beta\gamma=-\begin{vmatrix}p & q & r\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}, \tag{78}$$

$$S_1\alpha\beta\gamma=-\begin{vmatrix}a & b & c\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}p & q & r\\ a_1 & b_1 & c_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}p & q & r\\ p_1 & q_1 & r_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}, \tag{79}$$

$$\begin{gathered}S_0{}^2\alpha\beta\gamma=1-cs^2(\beta\gamma)_0-cs^2(\gamma\alpha)_0-cs^2(\alpha\beta)_0\\ +2cs(\beta\gamma)_0cs(\gamma\alpha)_0cs(\alpha\beta)_0,\end{gathered} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}S_0\alpha\beta\gamma.S_1\alpha\beta\gamma=&(\beta\gamma)_1sn(\beta\gamma)_0[cs(\beta\gamma)_0-cs(\gamma\alpha)_0cs(\alpha\beta)_0]\\ &+(\gamma\alpha)_1sn(\gamma\alpha)_0[cs(\gamma\alpha)_0-cs(\alpha\beta)_0cs(\beta\gamma)_0]\\ &+(\alpha\beta)_1sn(\alpha\beta)_0[cs(\alpha\beta)_0-cs(\beta\gamma)_0cs(\gamma\alpha)_0],\end{aligned} \tag{81}$$

гдѣ $S_0\alpha\beta\gamma$ есть главная часть, а $S_1\alpha\beta\gamma$—моментъ $S\alpha\beta\gamma$, такъ что $S\alpha\beta\gamma=S_0\alpha\beta\gamma+\omega S_1\alpha\beta\gamma$, и $(\alpha\beta)=(\alpha\beta)_0+\omega(\alpha\beta)_1$ и т. д. суть комплексные углы между осями α и β, и т. д..

Но изъ формулъ (85) параграфа 80 видно, что выраженія, стоящія въ скобкахъ [ ], будутъ по порядку $-sn(\gamma\alpha)_0 \times sn(\alpha\beta)_0 cs(\beta'\gamma')_0$, $-sn(\alpha\beta)_0 sn(\beta\gamma)_0 cs(\gamma'\alpha')_0$, $-sn(\beta\gamma)_0 sn(\gamma\alpha)_0 \times cs(\alpha'\beta')_0$, и потому

$$S_0\alpha\beta\gamma S_1\alpha\beta\gamma = -sn(\beta\gamma)_0 sn(\gamma\alpha)_0 sn(\alpha\beta)_0 \times$$
$$[(\beta\gamma)_1 cs(\beta'\gamma')_0 + (\gamma\alpha)_1 cs(\gamma'\alpha')_0 + (\alpha\beta)_1 cs(\alpha'\beta')_0]. \qquad (82)$$

Равенства (76) развертывать не будемъ, но, взявъ параметры отъ обѣихъ частей его, выведемъ выраженіе для $PS\alpha\beta\gamma$:

$$PS\alpha\beta\gamma = P\alpha + P\beta + P\gamma + \theta_1 ctg\theta_0 - \psi_1 tg\psi_0. \qquad (83)$$

79. *Случаи, когда $S\alpha\beta\gamma = 0$, или $PS\alpha\beta\gamma = \infty$.* Изъ формулы (76) легко выводятся условія, при которыхъ $PS\alpha\beta\gamma = \infty$, или $S\alpha\beta\gamma = 0$.

Для того, чтобы P произведенія нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ обратился въ безконечность, необходимо и достаточно, чтобы параметръ одного и только одного множителя былъ равенъ ∞.

Поэтому $PS\alpha\beta\gamma = \infty$, 1) если $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, $Pcs\psi$ конечны и $Psn\theta = \infty$, т. е. если оси бивекторовъ параллельны одной плоскости, но не принадлежатъ одной щеткѣ; 2) если $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, $Psn\theta$ конечны, но $Pcs\psi = \infty$, т. е. если опять оси α, β, γ, будучи параллельны одной плоскости, не лежатъ на одной щеткѣ; этотъ случай тожественъ съ предъидущимъ; 3) если P одного изъ бивекторовъ безконечно великъ, но $Psn\theta$ и $Pcs\psi$ конечны, т. е. если оси α, β, γ не параллельны одной плоскости и параметръ одного изъ нихъ безконечно великъ.

Итакъ, $PS\alpha\beta\gamma = \infty$ въ двухъ случаяхъ 1) если $P\alpha, P\beta, P\gamma$ конечны и оси $\alpha.\beta.\gamma$, будучи параллельны одной плоскости, не лежатъ на одной и той же щеткѣ и 2) если одинъ изъ параметровъ $P\alpha, P\beta, P\gamma$ безконечно великъ, и оси α, β, γ не параллельны одной плоскости.

Для того, чтобы произведеніе нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ обратилось въ нуль необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ нулю, или чтобы параметры хотя двухъ множителей были равны безконечности. Поэтому, если мы предположимъ сначала, что ни одинъ изъ бивекторовъ не имѣетъ безконечно большаго параметра, то

$S\alpha\beta\gamma$ можетъ обратиться въ нуль въ трехъ случаяхъ, 1) когда $cs\psi = 0$, т. е. когда ось γ пересѣкаетъ ε подъ прямымъ угломъ; 2) когда $sn\theta = 0$, т. е. оси α и β совпадаютъ и въ 3) когда $Pcs\psi = Psn\theta = \infty$ т. е. когда оси α и β параллельны и ось γ перпендикулярна къ направленію линій кратчайшихъ разстояній между осями α и β.

Легко видѣть, что во всѣхъ трехъ случаяхъ оси бивекторовъ $\alpha.\beta,\gamma$ принадлежатъ одной и той же щеткѣ, ибо, когда онѣ параллельны между собой, что возможно въ случаѣ третьемъ, мы можемъ *считать ихъ также принадлежащими одной* щеткѣ съ безконечно удаленной осью. Обратно, когда оси имѣютъ общую линію кратчайшаго разстоянія, или параллельны, т. е. принадлежатъ одной и той же щеткѣ, то имѣетъ мѣсто одинъ изъ вышеуказанныхъ случаевъ и $S\alpha\beta\gamma = 0$.

Положимъ, что параметръ одного изъ бивекторовъ α,β,γ, напримѣръ γ, безконечно великъ; тогда $S\alpha\beta\gamma$ обращается въ нуль въ двухъ случаяхъ, 1) когда $Pcs\psi = \infty$, т. е. направленіе оси γ перпендикулярно къ линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β; вслѣдствіе неопредѣленности положенія оси γ, мы можемъ считать, что оси α,β,γ принадлежатъ одной щеткѣ; 2) когда $Psn\theta = \infty$, т. е. когда оси α и β параллельны.

Наконецъ, когда параметры двухъ или трехъ изъ бивекторовъ α,β,γ безконечно велики, или хотя одинъ изъ бивекторовъ $\alpha.\beta,\gamma$ исчезаетъ, то $S\alpha\beta\gamma = 0$. Исключая послѣдній случай, мы приходимъ, слѣдовательно, къ такому заключенію:

$S\alpha\beta\gamma = 0$, *1) если $P\alpha, P\beta, P\gamma$ конечны и оси $\alpha.\beta,\gamma$ принадлежатъ одной и той же щеткѣ, 2) если параметръ одного изъ бивекторовъ безконечно великъ и оси двухъ другихъ параллельны и въ 3) если параметры хотя двухъ изъ $\alpha.\beta,\gamma$ безконечно велики.*

Изъ предъидущихъ двухъ теоремъ заключаемъ:

Если параметры бивекторовъ $\alpha.\beta.\gamma$ конечны, то $S\alpha\beta\gamma = 0$ только тогда, когда оси ихъ принадлежатъ одной и той же щеткѣ и $PS\alpha\beta\gamma = \infty$ только тогда, когда оси параллельны одной и той же плоскости, но не имѣютъ общей линіи кратчайшаго разстоянія.

80. *Косыя координаты бивектора и его составляющія; дополнительная координатная система. Зависимость между проэкціями и составляющими бивектора.* Если мы имѣемъ

три бивектора α,β,γ и три комплексныхъ числа a,b,c то бивекторъ $\varrho=a\alpha+b\beta+c\gamma$ можетъ быть нами построенъ. Обратно, мы сейчасъ покажемъ, что при условіи $S\alpha\beta\gamma\neq 0$ и $PS\alpha\beta\gamma\neq\infty$, каковъ бы ни былъ бивекторъ ϱ, мы всегда можемъ опредѣлить такихъ три комплексныхъ числа a, b, c что $\varrho=a\alpha+b\beta+c\gamma$. Для доказательства замѣнимъ въ формулѣ (73) одинъ разъ β,γ,δ черезъ $\varrho.\beta,\gamma$, а въ другой $\alpha.\beta,\gamma,\delta$ черезъ $\beta,\gamma,\alpha,\varrho$; тогда будемъ имѣть два равенства

$$V.V\alpha\varrho V\beta\gamma=\gamma S\alpha\varrho\beta-\beta S\alpha\varrho\gamma,$$

$$V.V\beta\gamma V\alpha\varrho=\varrho S\beta\gamma\alpha-\alpha S\beta\gamma\varrho,$$

изъ которыхъ, замѣчая, что $V.V\alpha\varrho.V\beta\gamma=-V.V\beta\gamma.V\alpha\varrho$, получаемъ:

$$\varrho S\alpha\beta\gamma=\alpha S\beta\gamma\varrho+\beta S\gamma\alpha\varrho+\gamma S\alpha\beta\varrho. \tag{84}$$

Вслѣдствіе предположенія, сдѣланнаго относительно $S\alpha\beta\gamma$, числа:

$$a=\frac{S\beta\gamma\varrho}{S\alpha\beta\gamma},\ b=\frac{S\gamma\alpha\varrho}{S\alpha\beta\gamma},\ c=\frac{S\alpha\beta\varrho}{S\alpha\beta\gamma},$$

будутъ вполнѣ опредѣленны, и теорема такимъ образомъ доказана.

Итакъ по даннымъ a,b,c можно построить бивекторъ ϱ, и обратно по данному бивектору ϱ вполнѣ опредѣляются числа a,b,c и притомъ однозначно. Три числа a,b,c будемъ называть косыми координатами бивектора ϱ; бивекторы α,β,γ координатными бивекторами, а ихъ совокупность координатной системой; бивекторы $a\alpha,b\beta,c\gamma$—геометрическими и числа $aT\alpha,bT\beta,cT\gamma$—алгебраическими составляющими бивектора ϱ по осямъ α,β,γ. Когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ алгебраическихъ, или геометрическихъ составляющихъ, тѣ и другія, безразлично, будемъ называть просто составляющими.

Систему бивекторовъ $\alpha'=V\beta\gamma$, $\beta'=V\gamma\alpha$, $\gamma'=V\alpha\beta$ будемъ называть дополнительной системой. Когда намъ даны бивекторы α,β,γ, то легко построимъ дополнительную систему и вычислимъ $S\alpha'\beta'\gamma'$, $PS\alpha'\beta'\gamma'$ и комплексные углы, которые оси α', β', γ' образуютъ между собой и съ осями α, β, γ, пользуясь слѣдующими формулами:

$$\begin{aligned} S\beta'\gamma' &= \alpha^2 S\beta\gamma - S\gamma\alpha S\alpha\beta, & S\alpha\alpha' &= S\alpha\beta\gamma, \\ S\gamma'\alpha' &= \beta^2 S\gamma\alpha - S\alpha\beta S\beta\gamma, \quad (85) & S\beta\beta' &= S\alpha\beta\gamma, \quad (86) \\ S\alpha'\beta' &= \gamma^2 S\alpha\beta - S\beta\gamma S\gamma\alpha, & S\gamma\gamma' &= S\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\alpha'\beta'\gamma' &= SV\alpha'\beta' V\alpha\beta = -S^2\alpha\beta\gamma, \qquad (87) \\ PS\alpha'\beta'\gamma' &= 2PS\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

которыя легко выводятся помощью формулы (74).

Изъ послѣднихъ двухъ формулъ слѣдуетъ, что условія $S\alpha\beta\gamma \neq 0$ и $PS\alpha\beta\gamma \neq \infty$ влекутъ за собой неравенства $S\alpha'\beta'\gamma' \neq 0$ и $PS\alpha'\beta'\gamma' \neq \infty$. Мы можемъ, поэтому, бивекторы α', β', γ' принять за координатную систему бивекторовъ и относительно ихъ опредѣлить координаты u, v, w бивектора ρ. По формулѣ (84) мы имѣемъ

$$\rho S\alpha'\beta'\gamma' = \alpha' S\beta'\gamma'\rho + \beta' S\gamma'\alpha'\rho + \gamma' S\alpha'\beta'\rho$$

Но по формулѣ (74), $S\beta'\gamma'\rho = SV\gamma\alpha . V\gamma'\rho = -S\alpha\rho . S\alpha\beta\gamma$; подобнымъ же образомъ найдемъ $S\gamma'\alpha'\rho = -S\beta\rho . S\alpha\beta\gamma$ и $S\alpha'\beta'\rho = -S\gamma\rho . S\alpha\beta\gamma$, и слѣдовательно

$$\rho S\alpha\beta\gamma = \alpha' S\alpha\rho + \beta' S\beta\rho + \gamma' S\gamma\rho, \qquad (88)$$

откуда видно, что координаты бивектора ρ относительно α', β', γ' будутъ

$$u = \frac{S\alpha\rho}{S\alpha\beta\gamma}, \quad v = \frac{S\beta\rho}{S\alpha\beta\gamma}, \quad w = \frac{S\gamma\rho}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Пользуясь дополнительной системой координатъ, мы можемъ представить въ весьма простомъ видѣ составляющія $aT\alpha$, $bT\beta$, $cT\gamma$ бивектора ρ на осяхъ α, β, γ. Въ самомъ дѣлѣ, составивъ по (76) § 78 выраженія для $S\alpha\beta\gamma$ и $S\alpha\beta\rho$:

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma &= -T\alpha T\beta T\gamma sn(\beta\gamma) cs(\alpha\alpha'), \\ S\beta\gamma\rho &= -T\beta T\gamma T\rho sn(\beta\gamma) cs(\alpha'\rho), \end{aligned}$$

получаетъ первую изъ формулъ:

$$\begin{aligned} aT\alpha &= T\varrho cs(\alpha'\varrho):cs(\alpha\alpha'), \\ bT\beta &= T\varrho cs(\beta'\varrho):cs(\beta\beta'), \\ cT\gamma &= T\varrho cs(\gamma'\varrho):cs(\gamma\gamma'). \end{aligned} \tag{89}$$

Двѣ другія формулы найдутся подобнымъ же образомъ. Эти формулы легко выводятся помощью теоремы § 63 (Ср. Сомовъ, Кинематика, стр. 150).

Чтобы по даннымъ a,b,c найти u,v,w и наоборотъ, умножимъ равенство $\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ послѣдовательно на α,β,γ, и равенство $\varrho = u\alpha' + v\beta' + w\gamma'$ на $\alpha'.\beta',\gamma'$ и возьмемъ скаларныя части полученныхъ равенствъ. Тогда будемъ имѣть уравненія:

$$\begin{aligned} S\alpha\varrho &= a\alpha^2 + bS\alpha\beta + cS\gamma\alpha, \\ S\beta\varrho &= aS\alpha\beta + b\beta^2 + cS\beta\gamma, \\ S\gamma\varrho &= aS\gamma\alpha + bS\beta\gamma + c\gamma^2, \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} S\beta\gamma\varrho &= S\alpha'\varrho = u\alpha'^2 + vS\alpha'\beta' + wS\gamma'\alpha', \\ S\gamma\alpha\varrho &= S\beta'\varrho = uS\alpha'\beta' + v\beta'^2 + wS\beta'\gamma', \\ S\alpha\beta\varrho &= S\gamma'\varrho = uS\gamma'\alpha' + vS\beta'\gamma' + w\gamma'^2, \end{aligned} \tag{91}$$

которыя стоитъ только раздѣлить на $S\alpha\beta\gamma$, чтобы имѣть искомыя соотношенія. Вторую группу получаемъ изъ первой, рѣшая ее относительно a,b,c. Если въ эти уравненія введемъ составляющія бивектора ϱ по осямъ α,β,γ и его проэкціи на эти оси, то увидимъ полное тожество уравненій (90) и (91) съ извѣстными соотношеніями между проэкціями и составляющими вектора (Сомовъ, l. c., глава VIII).

Если $\varrho = a\alpha + b\beta$, и слѣдовательно координата $c = S\alpha\beta\varrho = 0$, то оси бивекторовъ $\alpha.\beta,\varrho$ по теоремѣ предъидущаго параграфа будутъ принадлежать одной и той же щеткѣ, осью которой служитъ ось γ'. Обратно, если ось бивектора ϱ принадлежитъ щеткѣ γ', то $c = S\alpha\beta\varrho = 0$ и $\varrho = a\alpha + b\beta$. Такимъ образомъ, если числамъ a и b мы будемъ давать какіе угодно значенія, всѣ бивекторы $\varrho = a\alpha + b\beta$ будутъ принадлежать одной и той же щеткѣ, и всякій бивекторъ этой щетки мы получимъ, если выберемъ для чиселъ a и b надлежащія значенія.

81. *Векторное и скаларное произведенія и относительный моментъ двухъ бивекторовъ въ косыхъ координатахъ.* Пусть кромѣ бивектора $\underset{\smile}{\rho}$ мы имѣемъ бивекторъ $\underset{\smile}{\rho}'=a'\alpha+b'\beta+c'\gamma$. Возвышая $\underset{\smile}{\rho}$ въ квадратъ и перемножая $\underset{\smile}{\rho}$ и $\underset{\smile}{\rho}'$, находимъ:

$$\underset{\smile}{\rho}^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2+2bcS\beta\gamma+2caS\gamma\alpha+2abS\alpha\beta, \quad (92)$$

$$S\underset{\smile}{\rho}\underset{\smile}{\rho}'=aa'\alpha^2+bb'\beta^2+cc'\gamma^2+(bc'+b'c)S\beta\gamma+(ca'+c'a)S\gamma\alpha+$$
$$+(ab'+a'b)S\alpha\beta, \quad (93)$$

$$V\underset{\smile}{\rho}\underset{\smile}{\rho}'=(bc'--b'c)V\beta\gamma+(ca'-c'a)V\gamma\alpha+(ab'-a'b)V\alpha\beta, \quad (94)$$

изъ которыхъ первыя двѣ аналогичны формуламъ аналитической геометріи, помощью которыхъ опредѣляются длина вектора и геометрическое произведеніе двухъ векторовъ, а послѣдняя даетъ координаты $V\underset{\smile}{\rho}\underset{\smile}{\rho}'$ относительно дополнительной системы Положивъ для простоты въ (93) $T\alpha=T\beta=T\gamma=1$ и означивъ углы $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$ соотвѣтственно черезъ $\varphi_1+\omega d_1$, $\varphi_2+\omega d_2$, $\varphi_3+\omega d_3$, мы получаемъ для относительнаго момента бивекторовъ $\underset{\smile}{\rho}$ и $\underset{\smile}{\rho}'$ (коффиціентъ при—ω въ $S\underset{\smile}{\rho}\underset{\smile}{\rho}'$) такое выраженіе:

$$\begin{gathered}
a_0a_1'+b_0b_1'+c_0c_1'+a_1a_0'+b_1b_0'+c_1c_0' \\
+cs\varphi_1(b_0c_1'+c_0b_1'+b_0'c_1+c_0'b_1) \\
+cs\varphi_2(c_0a_1'+a_0c_1'+c_0'a_1+a_0'c_1) \\
+cs\varphi_3(a_0b_1'+b_0a_1'+a_0'b_1+b_0'b_1) \\
-(b_0c_0'+c_0b_0')d_1sn\varphi_1-(c_0a_0'+a_0c_0')d_2sn\varphi_2 \\
-(a_0b_0'+b_0a_0')d_3sn\varphi_3.
\end{gathered}$$

Для $S\underset{\smile}{\rho}\sigma$ и относительнаго момента двухъ бивекторовъ $\underset{\smile}{\rho}$ и σ получаются весьма простыя выраженія, если мы одинъ нихъ опредѣлимъ составляющими, а другой проэкціями на координатныя оси $\alpha.\beta,\gamma$, иначе говоря, если одинъ изъ нихъ отнесемъ къ системѣ $\alpha.\beta,\gamma$, а другой къ дополнительной $\alpha',\beta'.\gamma'$. Дѣйствительно, перемножая равенства

$$\begin{aligned}
\underset{\smile}{\rho}S\alpha\beta\gamma&=\alpha S\beta\gamma\underset{\smile}{\rho}+\beta S\gamma\alpha\underset{\smile}{\rho}+\gamma S\alpha\beta\underset{\smile}{\rho}, \\
\sigma S\alpha\beta\gamma&=\alpha'S\alpha\sigma+\beta'S\beta\sigma+\gamma'S\gamma\sigma, \qquad (95)
\end{aligned}$$

и сравнивая скалярныя части обѣихъ частей, имѣемъ:

$$S\rho\sigma S\alpha\beta\gamma = S\alpha\sigma S\beta\gamma\rho + S\beta\sigma S\gamma\alpha\rho + S\gamma\sigma S\alpha\beta\rho \qquad (96)$$

или, припоминая значеніе a,b,c,

$$S\rho\sigma = aS\alpha\sigma + bS\beta\sigma + cS\gamma\sigma, \qquad (97)$$

или, наконецъ, означая $S\alpha\sigma$, $S\beta\sigma$, $\gamma\sigma$, черезъ x,y,z,

$$S\rho\sigma = ax + by + cz. \qquad (98)$$

Развертывая это равенство, получаемъ для относительнаго момента такое весьма простое выраженіе:

$$-(a_0x_1 + b_0y_1 + c_0z_1 + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0). \qquad (99)$$

Представивъ равенство (97) въ видѣ:

$$S\rho\sigma = -[aT\alpha][T\sigma cs(\alpha\sigma)] - [bT\beta][T\sigma cs(\beta\sigma)] - [cT\gamma][T\sigma cs(\gamma\sigma)]$$

видимъ, что геометрическое произведеніе двухъ бивекторовъ равняется суммѣ произведеній составляющихъ одного бивектора, умноженныхъ на соотвѣтствующія проэкціи другаго [ср. Сомовъ, l. c.].

Изъ предъидущихъ формулъ можно получить еще нѣсколько выраженій для относительнаго момента бивекторовъ ρ и σ, если введемъ углы и кратчайшія разстоянія между осями α,β,γ, $\alpha'.\beta',\gamma'$, ρ и σ.

82. *Преобразованіе геометріи связки въ геометрію линейчатаго пространства.* До сихъ поръ мы старались выяснить какой смыслъ имѣютъ прямоугольныя, косоугольныя и полярныя координаты точки, проэкціи и составляющія вектора, когда они становятся комплексными числами вида $a_0 + \omega a_1$. Мы показали, что формулы преобразованія Декартовыхъ координатъ точки при комплексныхъ параметрахъ, опредѣляющихъ положеніе новой системы координатъ, переходятъ въ формулы преобразованія Plucker'овыхъ или прямоугольныхъ координатъ бивектора Попутно мы изучили операцію $q(\quad)q^{-1}$ и коснулись вопроса о конечныхъ винтовыхъ перемѣщеніяхъ,

тѣсно связаннаго съ формулами преобразованія координатъ, причемъ мы видѣли, что вращенія вокругъ пересѣкающихся осей переходятъ въ конечныя винтовыя перемѣщенія, когда параметры, вращенія опредѣляющія, становятся комплексными.

Мы перейдемъ теперь къ приложеніямъ иного характера, а именно къ изученію помощью метода перенесенія нѣкоторыхъ геометрическихъ фигуръ и формъ, составленныхъ изъ конечнаго или безконечнаго числа бивекторовъ, при чемъ мы остановимся на простѣйшихъ, какъ то на тѣхъ фигурахъ и формахъ, въ которыя преобразуются прямая, плоскость, связка, пучекъ и т. п..

Три вещественныхъ числа x,y,z, которыя мы принимали выше или за координаты точки, или за проэкціи вектора мы можемъ разсматривать какъ однородныя координаты луча связки, имѣющей начало координатъ своимъ центромъ. Плоскость связки будетъ многообразіемъ лучей, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію $ux+vy+wz=0$; u,v,w суть координаты плоскости.

Пусть теперь x,y,z становятся комплексными числами; они опредѣлятъ нѣкоторый бивекторъ α, имѣющій прямую α' своею осью. Для всѣхъ бивекторовъ, которые имѣютъ своими координатами ax,ay,az, гдѣ $a=a_0+\omega a_1$, осью будетъ служить та же прямая α', а потому x,y,z мы можемъ разсматривать какъ однородныя комплексныя координаты луча α' въ пространствѣ.

Многообразіе лучей α' пространства, однородныя координаты которыхъ удовлетворяютъ ур. $ux+vy+wz=0$, гдѣ $u=u_0+\omega u_1$, $v=v_0+\omega v_1$, $w=w_0+\omega w_1$, образуютъ щетку, осью которой служитъ лучъ β' съ координатами u,v,w. Дѣйствительно, если β и α суть два бивектора, имѣющіе своими координатами u,v,w и x,y,z соотвѣтственно, то уравненіе $ux+vy+wz=0$ можемъ представить въ видѣ $S\beta\alpha=0$, и изъ теоремы § 38 будетъ слѣдовать, что ось бивектора α, т. е. лучъ α' пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ ось бивектора β, т. е. лучъ β'. Обратно, если лучъ α' встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ лучъ β', то $S\beta\alpha=ux+vy+wz=0$.

Такимъ образомъ, уравненіе вида $ux+vy+wz=0$ опредѣляетъ щетку и три комплексныхъ числа u,v,w, которыя служатъ однородными координатами луча β'—оси щетки, мы можемъ назвать однородными координатами щетки.

Углы θ и ϑ между двумя лучами $\alpha'(x,y,z)$ и $\alpha''(x',y',z')$ и двумя поскостями $\beta'(u,v,w)$ и $\beta''(u',v',w')$ связки опредѣляются формулами: (4) § 61 и

$$cs\vartheta = \frac{uu'+vv'+ww'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\ \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}. \tag{100}$$

Если же x,y,z; x',y',z'; u,v,w; u',v',w' сдѣлаются комплексными, то формула (4) § 61 опредѣлитъ комплексный уголъ между лучами $\alpha'(x,y,z)$ и $\alpha''(x'y'z')$ пространства, а формула (100) комплексный уголъ между осями β' и β'' щетокъ $\beta'(u,v,w)$ и $\beta''(u'v'w')$. Итакъ, мы можемъ резюмировать сказанное слѣдующимъ образомъ.

Когда однородныя координаты луча и плоскости связки становятся комплексными, лучъ связки преобразуется въ лучъ пространства, плоскость связки—въ щетку, уголъ между двумя лучами связки—въ комплексный уголъ между лучами въ пространствѣ, а уголъ между плоскостями—въ комплексный уголъ между осями щетокъ. Методомъ раздвиганія теоремы геометріи связки преобразуется въ теоремы геометріи линейчатаго пространства.

Къ этой теоремѣ мы приходимъ также путемъ нѣсколько другихъ соображеній.

Представимъ себѣ связку, т. е. совокупность прямыхъ и плоскостей, проходящихъ черезъ нѣкоторую точку, центръ связки. Пусть α есть какой нибудь векторъ, имѣющій центръ связки своимъ началомъ. Этотъ векторъ, равно какъ и всѣ векторы $a\alpha$, гдѣ a какое нибудь вещественное число опредѣлятъ одинъ и тотъ же лучъ, на которомъ они всѣ лежатъ, и который мы назовемъ „лучъ α“, или „прямая α“, или „ось α“.

Бивекторъ α опредѣлитъ нѣкоторую прямую въ пространствѣ—ось бивектора α, которую мы будемъ называть „лучъ α“, или „ось α“, или „прямая α“. Всѣ бивекторы $a\alpha$, гдѣ a есть какое угодно комплексное число имѣютъ общую ось и, слѣдовательно, всѣ они опредѣляютъ одну и ту же прямую α.

Пусть α и β два вектора связки. Если двумъ вещественнымъ числамъ a и b будемъ давать всѣвозможныя значенія, то совокупность лучей $\rho = a\alpha + b\beta$ образуетъ пучекъ лучей. Всѣ они лежатъ въ плоскости (α,β); прямая связки, перпендикулярная къ плоскости, т. е. лучъ $V\alpha\beta$ служитъ осью плоскости.

Если α и β два бивектора то лучи $\rho = a\alpha + b\beta$, гдѣ a и b какіе угодно комплексные числа образуютъ щетку [см. § 80], осью которой служитъ лучъ $V\alpha\beta$, т. е. линія кратчайшаго разстоянія между осями α и β.

Такимъ образомъ мы снова приходимъ къ тому заключенію, что методомъ перенесенія лучи связки преобразуются въ лучи пространства, а пучки прямыхъ и плоскости, въ которыхъ они лежатъ, въ щетки.

Щетка, какъ видимъ, должна быть аналогична по своимъ свойствамъ съ одной стороны съ пучкомъ лучей, а съ другой — съ плоскостью. Разсмотримъ сначала щетку, какъ геометрическую форму, аналогичную пучку.

83. *Геометрія щетки, ангармоническое отношеніе четырехъ лучей щетки.* Представимъ себѣ безчисленное множество пучковъ, наложенныхъ одинъ на другой такимъ образомъ, что центры ихъ совпадаютъ; они составятъ тогда одинъ пучекъ. Отдѣлимъ эти пучки одинъ отъ другаго и раздвинемъ ихъ по направленію перпендикулярному къ ихъ общей плоскости. Тогда мы получимъ щетку. Такимъ образомъ, щетку, если угодно, мы можемъ назвать раздвинутымъ пучкомъ.

Съ однимъ изъ основыхъ понятій геометріи щетки, съ понятіемъ объ комплексномъ углѣ между двумя лучами щетки мы уже знакомы. Введемъ теперь другое основное понятіе, понятіе объ ангармоническомъ отношеніи четырехъ лучей щетки

Пусть мы имѣемъ четыре луча $\alpha\ \beta, \gamma, \delta$ нѣкоторой щетки. Припишемъ оси щетки опредѣленное направленіе и означимъ черезъ $(\alpha\gamma)$, $(\gamma\beta)$, $(\alpha\delta)$ и $(\delta\beta)$ комплексные углы между лучами α и γ, γ и β, α и δ, δ и β относительно этого направленія. Комплекное число

$$g = \frac{sn(\alpha\gamma)}{sn(\gamma\beta)} : \frac{sn(\alpha\delta)}{sn(\delta\beta)} \tag{101}$$

будемъ называть ангармоническимъ отношеніемъ лучей $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и означать черезъ $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Если условимся, кромѣ того, углы между осями α и γ, γ и β, α и δ, δ и β означить черезъ $(\alpha\gamma)_0$, $(\gamma\beta)_0$, $(\alpha\delta)_0$, $(\delta\beta)_0$, точки пересѣченія лучей $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

съ осью щетки черезъ A,B,C,D, то легко будетъ видѣть, что главною частью ангармоническаго отношенія $(\alpha\beta\gamma\delta)$ будетъ:

$$g_0 = (\alpha\beta\gamma\delta)_0 = \frac{sn(\alpha\gamma)_0}{sn(\gamma\beta)_0} : \frac{sn(\alpha\delta)_0}{sn(\delta\beta)_0}, \qquad (102)$$

а параметромъ

$$Pg = P(\alpha\beta\gamma\delta) = [ACctg(\alpha\gamma)_0 - CBctg(\gamma\beta_0)] - [ADctg(\alpha\delta)_0 - DBctg(\delta\beta)_0] \qquad (103)$$

Если мы проведемъ плоскость перпендикулярную къ оси щетки и спроэкцируемъ на нее лучи $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ то углы между проэкціями α и γ, γ и β, α и δ, δ и β, очевидно будутъ $(\alpha\gamma)_0$, $(\gamma\beta)_0$, $(\alpha\delta)_0$, $(\delta\beta)_0$; слѣдовательно, главная часть ангармоническаго отношенія лучей $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ будетъ ангармоническимъ отношеніемъ соотвѣтствующихъ ихъ проэкцій на плоскость перпендикулярную къ оси щетки.

Въ частномъ случаѣ, когда лучи $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ будутъ параллельны, главною частью $(\alpha\beta\gamma\delta)$ будетъ:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

т е. ангармоническое отношеніе $(ABCD)$ четырехъ точекъ A, B,C,D, а моментъ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ будетъ неопредѣленнымъ. Въ томъ же случаѣ, когда всѣ лучи $\alpha.\beta,\gamma,\delta$ лежатъ въ одной плоскости перпендикулярной къ оси, мы получаемъ

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{sn(\alpha\gamma)_0}{sn(\gamma\beta)_0} : \frac{sn(\alpha\delta)_0}{sn(\delta\beta)_0},$$

и слѣдовательно моментъ ангармоническаго отношенія обращается въ нуль.

Если намъ даны три луча α,β,γ и ангармоническое отношеніе $(\alpha\beta\gamma\delta)$, то можно построить лучъ δ. Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненій: (102) и $(\alpha\delta)_0 + (\delta\beta)_0 = (\alpha\beta)_0$ мы можемъ опредѣлить углы $(\alpha\delta)_0$ и $(\delta\beta)_0$; уравненіе же (103) вмѣстѣ съ $AD + DB = AB$ даетъ намъ AD и DB. Величины AD и $(\alpha\delta)_0$ вполнѣ опредѣляютъ положеніе луча δ

Ангармоническое отношеніе можетъ быть представлено въ другой весьма удобной формѣ. Означивъ черезъ η винтъ параметра нуль, которому осью служитъ ось щетки, имѣемъ $V\alpha\gamma = T\alpha T\gamma sn(\alpha\gamma)\eta$, $V\gamma\beta = T\gamma T\beta sn(\gamma\beta)\eta$, $V\alpha\delta = T\alpha T\delta \times sn(\alpha\delta)\eta$, $V\delta\beta = T\delta T\beta sn(\delta\beta)\eta$ и слѣдовательно

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{V\alpha\gamma}{V\gamma\beta} : \frac{V\alpha\delta}{V\delta\beta}. \qquad (104)$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ прежде всего, что выраженіе $(V\alpha\gamma/V\gamma\beta) : (V\alpha\delta/V\delta\beta)$ не зависитъ отъ тензоровъ бивекторовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, а зависитъ только отъ относительнаго положенія ихъ осей. Вовторыхъ, она даетъ намъ выраженіе ангармоническаго отношенія черезъ косыя координаты бивекторовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, отнесенныхъ къ какимъ нибудь двумъ координатнымъ бивекторамъ σ и ρ, оси которыхъ принадлежатъ щеткѣ.

Если оси трехъ бивекторовъ α, ρ и σ принадлежатъ одной и той же щеткѣ, то, какъ мы видѣли въ концѣ § 80, всегда можно подыскать такихъ два комплексныхъ числа a и b, что $\alpha = a\rho + b\sigma$. Числа a и b будутъ косыми комплексными координатами бивектора α; мы можемъ считать ихъ также за однородныя координаты луча α, ибо числа ua и ub, гдѣ $u = u_0 + \omega u_1$ будутъ координатами бивектора $u\alpha = ua\rho + ub\sigma$, имѣющаго общую ось съ α.

Пусть, теперь, однородныя координаты лучей β, γ, δ будутъ соотвѣтственно a', b'; a'', b''; a''', b''', такъ что $\beta = a'\rho + b'\sigma$, $\gamma = a''\rho + b''\sigma$, $\delta = a'''\rho + b'''\sigma$. Подставляя эти выраженія въ предъидущую формулу, получаемъ:

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{ab'' - ba''}{a'b'' - b'a'} : \frac{ab'' - ba'''}{a'b''' - b'a'''}. \qquad (105)$$

Если за координатные бивекторы примемъ бивекторы α и β и если $\gamma = a\alpha + b\beta$ и $\delta = a'\alpha + b'\beta$, то

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{b}{a} : \frac{b'}{a'}. \qquad (106)$$

Послѣдняя формула даетъ намъ возможность доказать слѣдующія теоремы:

Теорема I. *Есла лучи $\alpha.\beta,\gamma,\delta$ лежатъ на цилиндроидѣ то ихъ ангармоническое отношеніе $(\alpha\beta\gamma\delta)$ есть число вещественное (моментъ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ равенъ нулю).*

Въ самомъ дѣлѣ, если лучи $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ лежатъ на цилиндроидѣ, то мы всегда можемъ предполагать параметры винтовъ $\alpha.\beta,\gamma,\delta$ такими, что эти винты принадлежатъ двучленной группѣ [см. главу II], и тогда, принявъ винты α и β за основные винты, мы будемъ имѣть $\gamma = a\alpha + b\beta$, $\delta = a'\alpha + b'\beta$, гдѣ a,b, a',b' будутъ вещественными числами. Ангармоническое отношеніе $g = (b/a)$: (b'/a') будетъ, слѣдовательно, также числомъ вещественнымъ.

Теорема II. *Если ангармоническое отношеніе четырехъ лучей $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ число вещественное, то лучи $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ лежатъ на одномъ цилиндроидѣ.*

Изъ равенства $g = (b/a):(b'/a')$ имѣемъ $b' = (ba'):(ag)$ и

$$\delta = \frac{a'}{ag}\,(ga\alpha + b\beta)$$

Такъ какъ g есть число вещественное, то винты $\alpha' = a\alpha$, $\beta' = b\beta$, $\gamma' = \alpha' + \beta'$ и $\delta' = g\alpha' + \beta'$ принадлежатъ двучленной группѣ и оси ихъ лежатъ на цилиндроидѣ. Но лучи $\alpha,\beta,\gamma = \gamma'$, $\delta = (\alpha'/ag)\delta'$ совпадаютъ съ осями $\alpha',\beta',\gamma',\delta'$, и теорема такимъ образомъ доказана.

Такъ какъ условіе: „$g =$ вещественному числу“ равносильно условію: „$Pg = 0$“, то на основаніи формулы (103) предъидущія двѣ теоремы мы можемъ формулировать такимъ образомъ:

Теорема III. *Для того, чтобы четыре луча $\alpha.\beta,\gamma,\delta$ лежали на одномъ цилиндроидѣ необходимо и достаточно, чтобы*

$$ACctg(\alpha\gamma)_0 - CBctg(\gamma\beta)_0 = ADctg(\alpha\delta)_0 - DBctg(\delta\beta)_0.$$

Мы видѣли, что когда намъ даны три луча $\alpha.\beta,\gamma$ и ангармоническое отношеніе $(\alpha\beta\gamma\delta)$, то лучъ δ вполнѣ опредѣляется. Равенство $\delta' = g\alpha' + \beta'$ показываетъ намъ, что всѣ лучи δ' (или δ), отвѣчающіе различнымъ значеніямъ

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \text{вещественному числу}$$

лежатъ на одномъ и томъ же цилиндроидѣ, который проходитъ черезъ лучи $\alpha(g=\infty), \beta(g=0)$ и $\gamma(g=1)$. Такимъ образомъ мы имѣемъ теорему:

Теорема IV. *Черезъ три луча щетки, $\alpha.\beta,\gamma$, всегда можно провести одинъ и только одинъ цилиндроидъ. Онъ служитъ геометрическимъ мѣстомъ лучей δ, для которыхъ ангармоническое отношеніе $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = вещественному числу $[Pg=P(\alpha\beta\gamma\delta)=0]$.*

Представивъ бивекторъ $\delta'=g\alpha'+\beta'$ въ видѣ $\delta'=g_0(1+\omega Pg)\alpha'+\beta'$, видимъ, что всѣ лучи δ (или δ'), для которыхъ Pg есть одна и та же величина лежатъ на цилиндроидѣ опредѣляемомъ винтами $(1+\omega Pg)\alpha'$ и β'; цилиндроидъ этотъ проходитъ черезъ лучи α и β. Итакъ, имѣемъ слѣдующую теорему:

Теорема V. *Геометрическое мѣсто лучей δ, для которыхъ $Pg=P(\alpha\beta\gamma\delta)=const.$, есть цилиндроидъ, проходящій через лучи α и β.*

Обратная теорема также справедлива:

Таорема VI. *Для всѣхъ лучей δ одного и того же цилиндроида, проходящаго черезъ лучи α и β, $Pg=P(\alpha\beta\gamma\delta)$, гдѣ γ есть какой нибудь лучъ щетки, есть величина постоянная.*

Дѣйствительно, такъ какъ лучи δ лежатъ на цилиндроидѣ, проходящемъ черезъ α и β, то мы можемъ предположить параметры винтовъ α и β таковыми, что числа a' и b' въ выраженіи δ черезъ α и β, $\delta=a'\alpha+b'\beta$, будутъ вещественными и $Pa'=Pb'=0$. Тогда становится очевиднымъ, что

$$Pg=P(\alpha\beta\gamma\delta)=Pb-Pa$$

будетъ величиной постоянной для всѣхъ лучей δ.

Если мы проведемъ черезъ лучи α и β цилиндроидъ, для всѣхъ образующихъ δ_1 котораго $P(\alpha\beta\gamma\delta_1)$ есть одна и таже постоянная Pg_1, то, пользуясь этимъ цилиндроидомъ, мы можемъ дать для $P(\alpha\beta\gamma\delta)=Pg$ весьма простое выраженіе. Дѣйствительно, проведемъ черезъ лучъ δ и ось щетки плоскость, которая пересѣчетъ построенный цилиндроидъ по нѣкоторому лучу δ_1. Если D_1 есть точка встрѣчи луча δ_1 съ осью щетки, то

$$Pg_1=ACctg(\alpha\gamma)_0-CBctg(\gamma\beta)_0-[AD_1ctg(\alpha\delta)_0-D_1Bctg(\delta\beta)_0],$$

ибо $(\alpha\delta_1)_0=(\alpha\delta)_0$ и $(\delta_1\beta)=(\delta\beta)_0$. Вычитая Pg_1 изъ Pg (103), послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, получаемъ искомое выраженіе:

$$Pg = Pg_1 + DD_1 \frac{sn(\alpha\beta)_0}{sn(\alpha\delta)_0 \, sn(\delta\beta)_0} . \tag{107}$$

Если примемъ Pg и Pg_1 за постоянныя, то это уравненіе. связывающее разстояніе DD_1 съ углами $(\alpha\delta)_0$ и $(\delta\beta)_0=(\alpha\beta)_0-(\alpha\delta)_0$, будетъ уравненіемъ цилиндроида, проходящаго черезъ лучи α и β.

Четыре луча $\alpha.\beta,\gamma,\delta$ · для которыхъ $(\alpha\beta\gamma\delta)=-1$ назовемъ гармоническими лучами; лучи γ и δ—гармонично-сопряженными съ лучами α и β. Такъ какъ -1 есть число вещественное, то изъ предъидущихъ теоремъ слѣдуетъ, что четыре гармоническихъ луча лежатъ на одномъ цилиндроидѣ и что проэкціи ихъ на плоскость перпендикулярную къ оси будутъ гармоническими лучами пучка. Четыре луча $\alpha\,\beta,\gamma=a\alpha+b\beta$ и $\delta=a\alpha-b\beta$ будутъ гармоническими лучами.

Этимъ опредѣленіемъ мы и закончимъ геометрію щетки, оставляя въ сторонѣ изученіе нѣкоторыхъ интересныхъ вопросовъ этой геометріи, какъ напр , изученіе инволюціи лучей щетки.

84 *Преобразованіе теоремъ проэктивной геометріи связки въ теоремы линейчатаго пространства. **Нѣкоторыя опредѣленія.*** Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію фигуръ и теоремъ, въ которыхъ щетка играетъ роль аналогичную плоскости связки. Разсмотримъ сначала наиболѣе простыя теоремы.

I. Два луча α и β связки опредѣляютъ плоскость (α,β), черезъ нихъ проходящую; осью плоскости служитъ лучъ $V\alpha\beta$.	*I. Два луча α и β пространства опредѣляютъ щетку (α,β), черезъ нихъ проходящую; осью щетки служитъ лучъ $V\alpha\beta$.*
II. Двѣ плоскости съ осями α и β пересѣкаются по прямой (имѣютъ общую прямую), по лучу $V\alpha\beta$.	*II. Двѣ щетки съ осями α и β пересѣкаются по лучу $V\alpha\beta$ (имѣютъ общій лучъ), который служитъ линіей кратчайшаго разстоянія между осями α и β.*

Эти сопоставленія вмѣстѣ съ теоремой § 82 показываютъ намъ, что изъ теоремъ геометріи связки, въ которыхъ идетъ дѣло только о пересѣченіи плоскостей и о проведеніи плоскостей черезъ два луча, т. е. изъ теоремъ проэктивной геометріи, мы получимъ новыя теоремы, если слово „плоскость“ замѣнимъ словомъ „щетка“.

Каждая такая теорема можетъ быть формулирована, какъ увидимъ въ слѣдующихъ примѣрахъ, въ другой формѣ, если мы будемъ щетку характеризовать ея осью и вмѣсто того, чтобы строить щетку, проходящую черезъ два луча, будемъ строить ось этой щетки—линію кратчайшаго разстоянія между лучами. Въ дальнѣйшемъ мы не будемъ всякій разъ указывать изъ какой теоремы получается наша и будемъ каждую изъ теоремъ формулировать только въ одномъ видѣ, предоставляя читателю найти другую форму теоремы.

Такъ какъ для теоремъ проэктивной геометріи связки имѣетъ мѣсто принципъ двойственности, то понятно, что этотъ принципъ долженъ имѣть мѣсто и въ области тѣхъ теоремъ, въ которыя онѣ преобразуются методомъ перенесенія, при чемъ, очевидно, элементомъ дуалистическимъ съ лучемъ будетъ щетка. Если же мы будемъ формулировать теоремы, характеризуя щетку ея осью, то двѣ теоремы, соотвѣтствующія по принципу двойственности, становятся тожественными. Въ этомъ можно убѣдиться, разсматривая нижеданныя примѣры.

Итакъ мы приходимъ къ такому результату:

Замѣняя въ теоремахъ проэктивной геометріи связки слово „плоскость“ словомъ „щетка“, мы преобразуемъ ихъ въ теоремы линейчатаго пространства. Въ области этихъ теоремъ имѣетъ мѣсто принципъ двойственности, причемъ элементомъ дуалистичнымъ лучу будетъ щетка.

Трегранный уголъ состоящій изъ трехъ лучей и трехъ, проходящихъ черезъ нихъ, плоскостей есть простѣйшая фигура геометріи связки. Этой фигурѣ должна соотвѣтствовать фигура, состоящая изъ трехъ лучей α, β, γ пространства и трехъ, проходящихъ черезъ нихъ, щетокъ, осями которымъ служатъ оси $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$. Эту фигуру мы назовемъ раздвинутымъ треграннымъ угломъ. Лучъ α и щетку $V\beta\gamma$, лучъ β и щетку $V\gamma\alpha$, лучъ γ и щетку $V\alpha\beta$ будемъ называть противолежащими. Фигура вполнѣ опредѣляется тремя лучами α, β, γ и тремя осями $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$, совокупность которыхъ образуетъ косой шестиугольникъ. Его стороны идутъ въ такомъ порядкѣ: лучъ α, ось $V\alpha\beta$, лучъ β, ось $V\beta\gamma$, лучъ γ, ось $V\gamma\alpha$; углы его всѣ прямые. Такимъ образомъ:

трегранный уголъ методомъ перенесенія преобразуется въ раздвинутый трегранный уголъ, или, если будемъ характеризовать щетки ихъ осями, въ косой шестиугольникъ всѣ углы котораго прямые.

Четырехребернику будетъ соотвѣтствовать фигура, состоящая изъ четырехъ лучей $\alpha.\beta.\gamma,\delta$, и шести, проходящихъ черезъ нихъ, щетокъ съ осями $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\delta$, $V\delta\alpha$, $V\alpha\gamma$, $V\beta\delta$, фигура, которую будемъ называть раздвинутымъ четырехреберникомъ. Четырегранникъ преобразуется въ фигуру, которая состоитъ изъ четырехъ щетокъ съ осями $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ и шести лучей $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\delta$, $V\delta\alpha$, $V\alpha\gamma$, $V\beta\delta$, по которымъ эти щетки пересѣкаются. Эгу фигуру назовемъ раздвинутымъ четырегранникомъ. Если щетки будемъ характеризовать ихъ осями, то, очевидно, четырехребернику и четыреграннику будетъ соотвѣтствовать одна и таже фигура изъ 10 прямыхъ, изъ которыхъ шесть служатъ линіями кратчайшихъ разстояній между остальными четырьмя.

85. *Обобщеніе теоремъ Desargues'а.* Чтобы пояснить общія разсужденія предъидущаго параграфа, остановимся подробнѣе на теоремахъ, которыя получаются методомъ проэкцированія изъ теоремъ *Desargues'а.* Въ лѣвой колоннѣ мы приводимъ двѣ теоремы, соотвѣтствующія одна другой по принципу двойственности, а въ правой, теоремы, въ которыя они преобразуются методомъ перенесенія.

I. Если два, отнесенныхъ одинъ къ другому, трегранныхъ угла расположены такимъ образомъ, что соотвѣтствующія ихъ грани пересѣкаются по прямымъ, которыя всѣ лежатъ въ одной плоскости, то плоскости, проходящія черезъ соотвѣтствующія ребра, всѣ прохоядтъ черезъ одну и ту же прямую.	*I. Если два, отнесенныхъ одинъ къ другому, раздвинутыхъ трегранныхъ угла расположены такимъ образомъ, что соотвѣтствующія щетки пересѣкаются по прямымъ, которыя всѣ лежатъ на одной щеткѣ, то щетки, проходящія черезъ соотвѣтствующія ребра, всѣ проходятъ черезъ одну и ту же прямую.*

II. Если два, отнесенныхъ одинъ къ другому, трегранныхъ угла связки расположены такимъ образомъ, что плоскости, проходящія черезъ соотвѣтствующія ребра всѣ проходятъ черезъ одну прямую, то линіи пересѣченія соотвѣтствующихъ граней всѣ лежатъ въ одной плоскости.

II. Если два, отнесенныхъ одинъ къ другому, раздвинутыхъ трегранныхъ угла расположены такимъ образомъ, что щетки, проходящія черезъ соотвѣтствующія ребра всѣ проходятъ черезъ одну прямую, то линіи пересѣченія соотвѣтствующихъ щетокъ всѣ лежатъ на одной щеткѣ.

Ребра и оси щетокъ перваго трегранного угла образуютъ шестиугольникъ съ прямыми углами $\alpha, V\alpha\beta . \beta, V\beta\gamma, \gamma, V\gamma\alpha$, а ребра и оси щетокъ втораго—шестиугольникъ $\alpha', V\alpha'\beta' . \beta', V\beta'\gamma'$, $\gamma', V\gamma'\alpha'$. Оси щетокъ, проходящихъ черезъ соотвѣтствующія ребра, суть линіи кратчайшихъ разстояній между α и α', β и β', γ и γ', лучи же, по которымъ пересѣкаются соотвѣтствующія щетки— линіи кратчайшихъ разстояній между осями $V\alpha\beta$ и $V\alpha'\beta'$, $V\beta\gamma$ и $V\beta'\gamma'$, $V\gamma\alpha$ и $V\gamma'\alpha'$, а потому теорема II можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ:

Если мы имѣемъ два косыхъ шестиугольника $\alpha, V\alpha\beta . \beta$, $V\beta\gamma, \gamma, V\gamma\alpha$ *и* $\alpha', V\alpha'\beta' . \beta', V\beta'\gamma', \gamma', V\gamma'\alpha'$, *которые расположены такимъ образомъ, что линіи кратчайшихъ разстояній между соотвѣтствующими сторонами* α и $\alpha' . \beta$ *и* β', γ *и* γ' *принадлежатъ одной щеткѣ, то и линіи кратчайшихъ разстояній между осями* $V\alpha\beta$ *и* $V\alpha'\beta'$, $V\beta\gamma$ *и* $V\beta'\gamma'$, $V\gamma\alpha$ *и* $V\gamma'\alpha$ *также принадлежатъ одной щеткѣ.*

Подобнымъ же образомъ можетъ быть формулирована теорема I, и мы видимъ на этихъ примѣрахъ, что двѣ теоремы, отвѣчающія одна другой по принципу двойственности, становятся тожественными, если мы будемъ щетку характеризовать ея осью. Чтобы доказать теоремы I и II достаточно доказать теорему II въ томъ видѣ, какъ только что мы ее формулировали.

По предположенію существуетъ прямая, которая пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ линіи кратчайшихъ разстояній между α и α', β и β', γ и γ'; означимъ черезъ δ бивекторъ, имѣющій эту прямую своею осью. Тогда, такъ какъ оси $\alpha . \alpha'$ и δ принадлежатъ одной и той же щеткѣ, существуетъ такихъ два комплексныхъ числа a и d, что $\alpha' = a\alpha + d\delta$; подобнымъ же образомъ $\beta' = \alpha'\beta + d'\delta$ и $\gamma' = a''\beta + d'\delta$. Замѣчая, что β'

и $\beta'(d/d')$, γ' и $\gamma'(d/d'')$ опредѣляютъ соотвѣтственно одни и тѣ же лучи, мы можемъ за β' и γ' принять бивекторы $\beta'(d/d')$ и $\gamma'(d/d'')$. такъ что будемъ имѣть $\alpha' = a\alpha + d\delta$, $\beta' = b\beta + d\delta$ $\gamma' = c\gamma + d\delta$ Линіями кратчайшаго разстоянія между соотвѣтствующими осями $V\alpha\beta$ и $V\alpha\beta'$ и т. д. будутъ служить лучи $V(V\alpha\beta\, V\alpha'\beta)$. $V(V\beta\gamma\, V\beta'\gamma')$, $V(V\gamma\alpha\, V\gamma'\alpha')$. Линіями кратчайшихъ разстояній между этими послѣдними служатъ оси $V(V(V\alpha\beta\, V\alpha'\beta')\, V(V\beta\gamma\, V\beta'\gamma))$ и т. д.; эти то оси на основаніи теоремы и должны совпадать. Чтобы это доказать мы вычислимъ ихъ, пользуясь выраженіями для $\alpha'.\beta'.\gamma'$. Прежде всего мы находимъ $V\alpha'\beta' = abV\alpha\beta + adV\alpha\delta + dbV\delta\beta$, $V\beta'\gamma' = bcV\beta\gamma + bdV\beta\delta + dcV\delta\gamma$ и $V\gamma'\alpha' = caV\gamma\alpha + cdV\gamma\delta + daV\delta\alpha$. Далѣе, пользуясь формулой (73) § 77, находимъ

$$\underset{\smile}{\rho}_1 = V.V\alpha\beta.V\alpha'\beta' = dS\alpha\beta\delta(-a\alpha + b\beta),$$
$$\underset{\smile}{\rho}_2 = V.V\beta\gamma.V\beta'\gamma' = dS\beta\gamma\delta(-b\beta + c\gamma),$$
$$\underset{\smile}{\rho}_3 = V.V\gamma\alpha.V\gamma'\alpha' = dS\gamma\alpha\delta(-c\gamma + a\alpha),$$

и наконецъ

$$V\underset{\smile}{\rho}_2\underset{\smile}{\rho}_3 = d^2S\beta\gamma\delta.S\gamma\alpha\delta.\ \sigma,$$
$$V\underset{\smile}{\rho}_3\underset{\smile}{\rho}_1 = d^2S\gamma\alpha\delta.S\alpha\beta\delta.\ \sigma,$$
$$V\underset{\smile}{\rho}_1\underset{\smile}{\rho}_2 = d^2S\alpha\beta\delta.S\beta\gamma\delta.\ \sigma,$$

гдѣ $\sigma = bcV\beta\gamma + caV\gamma\alpha + abV\alpha\beta$, откуда и слѣдуетъ, что три оси $V\underset{\smile}{\rho}_2\underset{\smile}{\rho}_3$, $V\underset{\smile}{\rho}_3\underset{\smile}{\rho}_1$, $V\underset{\smile}{\rho}_1\underset{\smile}{\rho}_2$ совпадаютъ, ибо бивекторы $V\underset{\smile}{\rho}_2\underset{\smile}{\rho}_3$, $V\underset{\smile}{\rho}_3\underset{\smile}{\rho}_1$, $V\underset{\smile}{\rho}_1\underset{\smile}{\rho}_2$ получаются отъ умноженія одного и того же бивектора σ на различныя комплексныя числа.

Отмѣтимъ одно слѣдствіе, вытекающее изъ предъидущихъ теоремъ и аналогичное извѣстному свойству двухъ, отнесенныхъ одинъ къ другому, четыререберниковъ.

Если мы имѣемъ два раздвинутыхъ четыререберника съ ребрами $\alpha.\beta.\gamma,\delta$ *и* $\alpha'.\beta',\gamma',\delta'$, *которые расположены такимъ образомъ, что пять соотвѣтствующихъ щетокъ* $(\alpha.\beta)$ *и* $(\alpha'\beta')$, $(\beta\gamma)$ *и* $(\beta'\gamma')$, (γ,δ) *и* (γ',δ'), $(\delta;\alpha)$ *и* $(\delta';\alpha')$, (α,γ) *и* (α',γ) *пересѣкаются по лучамъ, принадлежащимъ къ одной и той же щеткѣ, то къ той же щеткѣ принадлежитъ и лучъ пересѣченія шестой пары соотвѣтствующихъ щетокъ* (β,δ) *и* $(\beta';\delta')$.

Предоставляемъ читателю самому найти какой видъ приметъ эта теорема, если щетку будемъ характеризовать ея осью.

86. *Построенiе по тремъ даннымъ лучамъ щетки четвертаго гармоничнаго съ ними.*

Теорема. *Если черезъ два луча α и β по которымъ пересѣкаются двѣ пары противоположныхъ щетокъ $(\sigma_1\sigma_2)$ и (σ_3,σ_4), (σ_2,σ_3) и $(\sigma_1\sigma_4)$ раздвинутаго четыререберника съ ребрами $\sigma_1, \sigma_2. \sigma_3, \sigma_4$ проведемъ щетку (α,β), то два луча γ и δ пересѣченiя этой послѣдней съ двумя остальными щетками четыререберника (σ_1, σ_3) и (σ_2, σ_4) будутъ гармонично-сопряженными лучами съ α и β.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ суть оси щетокъ $(\sigma_1,\sigma_2), (\sigma_2,\sigma_3), (\sigma_3,\sigma_4), (\sigma_4,\sigma_1)$, (σ_1,σ_3) и (σ_2,σ_4) четыреребернинка.

Построивъ сначала прямыя $\alpha = V\rho_1\rho_3$ и $\beta = V\rho_2\rho_4$ пересѣченiя щетокъ (σ_1,σ_2) и (σ_3,σ_4), (σ_2,σ_3) и (σ_4,σ_1) и означивъ черезъ ε ось щетки $(\alpha.\beta)$, строимъ затѣмъ лучи $\gamma = V\varepsilon\rho_5$ и $\delta = V\varepsilon\rho_6$, по которымъ щетка $(\alpha.\beta)$ пересѣкается со щетками (σ_1,σ_3) и (σ_2,σ_4). Пользуясь формулой (71) и условiями $S\varepsilon\alpha = S\varepsilon\beta = 0$, получаемъ:

$$V\alpha\gamma = -\varepsilon S\alpha\rho_5, V\gamma\beta = \varepsilon S\beta\rho_5,$$
$$V\alpha\delta = -\varepsilon S\alpha\rho_6, V\delta\beta = \varepsilon V\beta\rho_6$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{V\alpha\gamma}{V\gamma\beta} : \frac{V\alpha\delta}{V\delta\beta} = \frac{S\alpha\rho_5}{S\beta\rho_5} : \frac{S\alpha\rho_6}{S\beta\rho_6}.$$

Но $\alpha = V\rho_1\rho_3 = V.V\sigma_1\sigma_2.V\sigma_3\sigma_4 = \sigma_4 S\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3 S\sigma_1\sigma_2\sigma_4$, слѣдовательно $S\alpha\rho_5 = S\alpha V\sigma_1\sigma_3 = S\sigma_4\sigma_1\sigma_3 S\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Подобнымъ же образомъ $S\beta\rho_5 = -S\sigma_1\sigma_2\sigma_3 S\sigma_3\sigma_4\sigma_1, S\alpha\rho_6 = -S\sigma_3\sigma_2\sigma_4 S\sigma_1\sigma_2\sigma_4, S\beta\rho_6 = S\sigma_1\sigma_2\sigma_4 S\sigma_2\sigma_3\sigma_4$,

и

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = -1,$$

что и требовалось доказать.

Предъидущая теорема даетъ намъ возможность по тремъ даннымъ лучамъ α,β,γ щетки построить лучъ δ гармонично-сопряженный съ γ относительно α и β. Нужно только построить четыререберникъ $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ такъ, чтобы двѣ противоположныя щетки (σ_1,σ_2) и (σ_3,σ_4) проходили бы черезъ лучъ α, двѣ противулежащія щетки $(\sigma_2\sigma_3)$ и $(\sigma_1\sigma_4)$ черезъ лучъ β, и наконецъ щетка (σ_1,σ_3) черезъ γ; тогда пересѣченіе щетки, къ которой принадлежатъ лучи α,β,γ со щеткой $(\sigma_2\sigma_4)$ и даетъ намъ искомый лучъ δ.

Лучъ δ гармонично-сопряженный съ α и β относительно γ лежитъ на цилиндроидѣ, опредѣляемомъ лучами α,β,γ. Такимъ образомъ предъидущее построеніе даетъ намъ средство по тремъ образующимъ цилиндроида построить четвертую. Подобнымъ же образомъ построимъ пятую образующую ε гармонично-сопряженную съ β относительно γ и δ. Затѣмъ построимъ шестую, седьмую и вообще какое угодно число образующихъ цилиндроида.

Итакъ, умѣя строить прямую линію, прямой уголъ и линію кратчайшаго разстоянія между двумя прямыми, можемъ построить цилиндроидъ, который проходитъ черезъ три произвольно выбранныхъ луча щетки.

87. *Проэктивныя и перспективныя щетки.* Двѣ щетки будемъ называть проэктивными, если онѣ отнесены одна къ другой такимъ образомъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно взятыхъ, элементовъ одной равняется ангармоническому отношенію соотвѣтствующихъ четырехъ элементовъ другой.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ.

I. Если въ двухъ щеткахъ $\rho=a\alpha+b\beta$ и $\rho'=a\alpha'+b\beta'$ будемъ считать соотвѣтствующими лучи ρ и ρ', опредѣляемые одной парой чиселъ a и b, то щетки ρ и ρ' будутъ проэктивны, потому что ангармоническое отношеніе какихъ либо четырехъ лучей

$$\rho_1=a_1\alpha+b_1\beta,\quad \rho_2=a_2\alpha+b_2\beta,\quad \rho_3=a_3\alpha+b_3\beta,\quad \rho_4=a_4\alpha+b_4\beta$$

первой щетки,

$$(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)=\frac{a_1b_3-b_1a_3}{a_2b_3-b_2a_3}:\frac{a_1b_4-b_1a_4}{a_2b_4-b_2a_4} \tag{108}$$

будетъ равняться ангармоническому отношенію соотвѣтствующихъ лучей

$$\varrho_1' = a_1\alpha' + b_1\beta', \varrho_2' = a_2\alpha' + b_2\beta'; \varrho_3' = a_3\alpha' + b_3\beta', \varrho_4' = a_4\alpha' + b_4\beta'$$

второй (см. § 83).

II. Такъ какъ по даннымъ тремъ лучамъ щетки, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ и ангармоническому отношенію ихъ къ четвертому лучу ϱ_4, $(\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4)$, лучъ ϱ_4 можетъ быть построенъ (см. § 83), то три пары соотвѣтствующихъ элементовъ вполнѣ опредѣляютъ проэктивную зависимость двухъ щетокъ.

III. Двѣ щетки, проэктивныя третьей, проэктивны между собой.

IV. Параллельнымъ лучамъ одной изъ проэктивныхъ щетокъ соотвѣтствуютъ параллельные лучи другой. .

V. Лучамъ первой щетки, которые служатъ образующими какого либо цилиндроида, во второй щеткѣ будутъ соотвѣтствовать лучи, которые также лежатъ на одномъ и томъ же цилиндроидѣ, такъ что каждому цилиндроиду первой щетки будетъ соотвѣтствовать цилиндроидъ второй щетки. Четыремъ гармоническимъ лучамъ первой щетки будутъ соотвѣтствовать четыре гармоническихъ луча второй.

Теорема I. *Ангрaмоническое отношеніе четырехъ лучей щетки равняется ангармоническому отношенію четырехъ линій кратчайшаго разстоянія между этими лучами и произвольно взятымъ лучемъ пространства.*

Въ самомъ дѣлѣ ангармоническія отношенія лучей

$$\varrho_1 = a_1\alpha + b_1\beta, \ \varrho_2 = a_2\alpha + b_2\beta, \ \varrho_3 = a_3\alpha + b_3\beta, \ \varrho_4 = a_4\alpha + b_4\beta$$

и линій кратчайшихъ разстояній между ними и осью ε, линій, которыя служатъ осями для бивекторовъ $V\varrho_1\varepsilon = a_1\alpha' + b_1\beta'$, $V\varrho_2\varepsilon = a_2\alpha' + b_2\beta'$, $V\varrho_3\varepsilon = a_3\alpha' + b_3\beta'$, $V\varrho_1\varepsilon = a_4\alpha' + b_4\beta'$, гдѣ $\alpha' = V\alpha\varepsilon$ и $\beta' = V\beta\varepsilon$, опредѣляются одной и той же формулой (108).

Отсюда слѣдуетъ:

I. Строя линіи кратчайшихъ разстояній между осью ε и лучами щетки ϱ, мы получимъ щетку ϱ' съ осью ε, которая будетъ проэктивна щеткѣ ϱ, если соотвѣтствующими лучами щетокъ $\underset{\smile}{o}$ и $\underset{\smile}{o}'$ будемъ считать лучи, пересѣкающіеся подъ прямымъ угломъ. Двѣ проэктивныя щетки, отнесенныя одна къ другой такимъ образомъ, что соотвѣтствующіе лучи ихъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ назовемъ разноименно-перспективными.

II. Двѣ проэктивныя щетки будутъ разноименно-перспективны, если три пары соотвѣтствующихъ лучей будутъ пересѣкаться подъ прямыми углами. (См. слѣдствіе II основнаго опредѣленія).

Двѣ щетки $\underset{\smile}{o}$ и $\underset{\smile}{o}'$, изъ которыхъ каждая разноименно-перспективна съ одной и той же щеткой σ, будемъ называть одноименно-перспективными. Соотвѣтствующіе лучи щетокъ $\underset{\smile}{o}$ и $\underset{\smile}{o}'$ пересѣкаютъ одинъ и тотъ же лучъ щетки σ, который будетъ линіей кратчайшаго разстоянія между ними. Итакъ, *линіи кратчайшаго разстоянія между соотвѣтствующими лучами двухъ одноименно-перспективныхъ щетокъ образуютъ щетку.*

Двѣ одноименно-перспективныхъ щетки имѣютъ одинъ соединенный элементъ—лучъ, по которому онѣ пересѣкаются.

Теорема II. *Если двѣ проэктивныя щетки $\underset{\smile}{o}$ и $\underset{\smile}{o}'$ имѣютъ соединенный общій лучъ, то онѣ одноименно-перспективны.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α, лучъ пересѣченія щетокъ $\underset{\smile}{o}$ и $\underset{\smile}{o}'$, есть соединенный лучъ и пусть лучамъ β и γ щетки $\underset{\smile}{o}$ соотвѣтствуютъ лучи β' и γ' щетки $\underset{\smile}{o}'$. Построимъ лучи $V\beta\beta'$ и $V\gamma\gamma'$ и проведемъ черезъ нихъ щетку σ. Означая черезъ ε лучъ щетки σ, пересѣкающій α подъ прямымъ угломъ, отнесемъ щетки $\underset{\smile}{o}$ и $\underset{\smile}{o}'$ къ σ такъ, чтобы лучамъ $\varepsilon, V\beta\beta', V\gamma\gamma'$ щетки σ соотвѣтствовали въ щеткѣ $\underset{\smile}{o}$ лучи α, β, γ, а въ щеткѣ $\underset{\smile}{o}'$—лучи α', β', γ'. Такъ какъ лучи α, β, γ и α', β', γ' пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ соотвѣтственно лучи $\varepsilon, V\beta\beta', V\gamma\gamma'$, то щетка σ будетъ разноименно-перспективна какъ со щеткой $\underset{\smile}{o}$, такъ и со щеткой $\underset{\smile}{o}'$ (слѣдствіе II, теорема I), а слѣдовательно щетки $\underset{\smile}{o}$ и $\underset{\smile}{o}'$ будутъ одноименно-перспективны.

Изъ этой теоремы и опредѣленія одноименно-перспективныхъ щетокъ слѣдуетъ:

Если двѣ проэктивныя щетки имѣютъ соединенный элементъ, то линіи кратчайшихъ разстояній между соотвѣтствующими лучами образуютъ щетку.

88. *Конгруэнція, аналогичная конусу втораго порядка.* Когда двѣ проэктивныя щетки ρ и ρ' соединеннаго элемента не имѣютъ, то линіи кратчайшаго разстоянія между соотвѣтствующими лучами образуютъ форму болѣе сложную нежели щетка. Эта совокупность представляетъ конгруэнцію, потомучто каждому лучу α щетки ρ соотвѣтствуетъ одинъ вполнѣ опредѣленный лучъ α' щетки ρ' и вполнѣ опредѣленная линія кратчайшаго разстоянія между α и α'; положеніе же луча α щетки ρ зависитъ отъ двухъ параметровъ. Конгруэнція эта обладаетъ интересными свойствами. Перечислимъ нѣкоторые изъ нихъ, причемъ не будетъ останавливаться на подробномъ ихъ изученіи и доказательствѣ.

Всякая щетка пересѣкается съ конгруэнціей, *вообще* говоря, по двумъ лучамъ.

Всѣ лучи конгруэнціи параллельны образующимъ конуса втораго порядка.

Лучи безконечно близкіе къ какому нибудь лучу σ конгруэнціи образуютъ щетку, которую можно назвать щеткой касательной къ конгруэнціи вдоль луча σ.

Совокупность осей касательныхъ щетокъ образуетъ конгруэнцію такого же типа.

Далѣе, мы можемъ провести полную аналогію между свойствами конуса втораго порядка и свойствами конгруэнціи. При этомъ образующимъ конуса будутъ соотвѣтствовать лучи конгруэнціи, плоскостямъ, касательнымъ къ конусу,—щетки касательныя къ конгруэнціи. Укажемъ нѣкоторыя изъ этихъ свойствъ.

Пять лучей вполнѣ опредѣляютъ конгруэнцію. По пяти лучамъ конгруэнція можетъ быть построена аналогично тому, какъ по пяти образующимъ строится конусъ втораго порядка.

Теоремѣ Паскаля будетъ соотвѣтствовать слѣдующая:

Если мы возьмемъ шесть лучей конгруэнціи въ какомъ нибудь опредѣленномъ порядкѣ, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$, *затѣмъ построимъ линіи кратчайшихъ разстояній:* τ_1 *между* σ_1 *и* σ_2, τ_2 *между* σ_2 *и* $\sigma_3, \ldots$ *и* τ_6 *между* σ_6 *и* σ_1, *то линіи кратчайшихъ разстояній между противолежащими лучами:* τ_1 *и* τ_4, τ_2 *и* τ_5, τ_3 *и* τ_6 *будутъ пересѣкать подъ прямымъ угломъ одну и ту же прямую.*

Изъ этой теоремы вытекаетъ рядъ интересныхъ слѣдствій. Не останавливаясь на тѣхъ, которыя вполнѣ аналогичны со слѣдствіями изъ теоремы Паскаля, мы отмѣтимъ здѣсь слѣдующее.

Представимъ себѣ какую нибудь линію (s) въ пространствѣ. Лучи конгруэнціи, пересѣкающіе линію, образуютъ, очевидно, нѣкоторую линейчатую поверхность (S). Такъ какъ въ предъидущей теоремѣ лучи $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6$ могутъ быть какими угодно лучами конгруэнціи, то мы можемъ принять за нихъ какія либо шесть образующихъ поверхности (S).

Итакъ, если мы возьмемъ какія либо шесть образующихъ $\sigma_1,\ldots\sigma_6$ поверхности (S), то эти образующія обладаютъ свойствомъ, которое выражается предъидущей теоремой.

Вслѣдствіе неопредѣленности кривой (s) поверхностей (S), обладающихъ этимъ свойствомъ существуетъ безчисленное множество. Можно показать, что къ числу ихъ принадлежатъ нѣкоторая алгебраическая поверхность шестаго порядка (такая поверхность получится, если будемъ строить линіи кратчайшихъ разстояній между соотвѣтствующими лучами двухъ проэктивныхъ цилиндроидовъ) а также поверхности втораго порядка причемъ лучи $\sigma_1,\ldots\sigma_6$ должны быть образующими одного и того же рода.

Роль аналогичную циклическимъ плоскостямъ конуса играютъ двѣ щетки, которыя мы можемъ назвать циклическими щетками. Отмѣтимъ здѣсь слѣдующія свойства циклическихъ щетокъ.

I. По тремъ даннымъ лучамъ конгруэнціи, не принадлежащимъ одной щеткѣ, и данной циклической щеткѣ можно построить конгруэнцію.

II. Если проведемъ какую нибудь щетку и опредѣлимъ лучи ρ' и ρ''; σ' и σ'', по которымъ она пересѣкается съ двумя циклическими щетками и съ конгруэнціей соотвѣтственно, то комплексный уголъ между σ' и ρ' будетъ равняться комплексному углу между σ'' и ρ''.

III. Проведемъ черезъ какіе нибудь три луча конгруэнціи $\sigma',\sigma'',\sigma''$ двѣ щетки (σ',σ''') и (σ'',σ'') и опредѣлимъ пересѣченія ρ' и ρ'' ихъ съ одной изъ циклическихъ щетокъ. Если мы, не измѣняя лучей σ' и σ'', будемъ двигать лучъ σ''' такъ, чтобы онъ всегда принадлежалъ конгруэнціи, то лучи

ρ' и ρ'' такъ будутъ перемѣщаться по циклической щеткѣ, что комплексный уголъ между ρ' и ρ'' будетъ оставаться постояннымъ.

Эти свойства являются результатомъ приложенія не только теоремы § 84, но и теоремы § 82, ибо въ нихъ идетъ дѣло о комплексныхъ углахъ. Мы привели ихъ здѣсь для того, чтобы показать, что свойствами конгруэнціи мы можемъ воспользоваться для доказательства закона ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ, подобно тому, какъ Hamilton (Elements, §§ 269 и 270) пользуется аналогичными свойствами конуса втораго порядка для доказательства закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ.

Теоремами этого параграфа мы закончимъ приложенія общей теоремы § 84. Мы думаемъ, что достаточно выяснили характеръ тѣхъ теоремъ, въ которыя преобразуются методомъ перенесенія теоремы проэктивной геометріи связки, а потому мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности относительно того преобразованія линейчатаго пространства, къ которому приводятъ насъ предъидущія изслѣдованія и которое соотвѣтствуетъ линейному преобразованію однородныхъ комплексныхъ координатъ прямой; къ этому преобразованію мы предполагаемъ еще вернуться впослѣдствіи.

89. *Прямолинейное, плоское и сферическое многообразія бивекторовъ.* Разсмотримъ теперь въ какія многообразія бивекторовъ преобразуются прямая и плоскость, не проходящія черезъ начало координатъ, и сфера съ центромъ въ началѣ координатъ

Прямая линія опредѣляется уравненіями:

$$x = a + a't,\ y = b + b't,\ z = c + c't, \tag{109}$$

въ которыхъ a,b,c суть координаты какой нибудь точки прямой, a',b',c' проекціи вектора, параллельнаго прямой, и t перемѣнный параметръ. Если означимъ черезъ α векторъ $ai+bj+ck$, черезъ β—векторъ $a'i+b'j+c'k$ и черезъ ρ—векторъ $xi+yj+zk$, въ концѣ котораго находится перемѣнная точка прямой, то всѣ три уравненія мы можемъ соединить въ одно:

$$\rho = \alpha + \beta t. \tag{110}$$

Если числа a,b,c,a',b',c',t,x,y,z сдѣлаются комплексными, то уравненія (109) или эквивалентное имъ ур. (110) опредѣлятъ нѣкоторое—прямолинейное—многообразіе; мы получимъ всѣ его бивекторы, если комплексному числу t будетъ давать всѣвозможныя значенія. Когда $P\alpha$ и $P\beta$ конечны и оси α и β не параллельны, то винты, опредѣляемые бивекторами многообразія образуютъ по нашей терминологіи трехчленную *двуосную группу*, а потому доказательство нѣкоторыхъ изъ свойствъ многообразія, которыя мы сейчасъ перечислимъ, мы дадимъ въ слѣдующей главѣ, посвященной теоріи группъ.

I. Оси бивекторовъ ϱ образуютъ щетку (ϱ), при чемъ каждый лучъ щетки служитъ осью одного и только одного бивектора. Исключеніе составляетъ только ось β, служащая осью безчисленнаго множества бивекторовъ, у которыхъ главные векторы безконечно велики, а параметры имѣютъ всѣвозможныя знеченія.

II. Бивекторы, оси которыхъ параллельны оси β, имѣютъ безконечно большой параметръ и безконечно большой главный векторъ.

III. Оси бивекторовъ съ однимъ и тѣмъ же параметромъ образуютъ гиперболическій параболоидъ, у котораго производящія одного рода принадлежатъ щеткѣ (ϱ), а другаго — щеткѣ съ осью β. Всѣ параболоиды проходятъ черезъ ось β и ось щетки (ϱ). Для нѣкотораго параметра параболоидъ распадается на двѣ плоскости: одна перпендикулярна оси β, а другая проходитъ черезъ эту ось.

IV. Если за точку приведенія для каждаго бивектора возьмемъ точку пересѣченія его оси съ осью щетки, то концы главныхъ векторовъ будутъ лежать въ плоскости параллельной осямъ β и щетки (ϱ).

Плоскость опредѣляется или трема уравненіями:

$$
\begin{aligned}
x &= a + a'u + a''v \\
y &= b + b'u + b''v \\
z &= c + c'u + c''v,
\end{aligned}
\qquad (111)
$$

въ которыхъ a,b,c суть координаты какой нибудь точки плоскости, $a',b'c';a'',b'',c''$ проэкціи двухъ векторовъ параллельныхъ плоскости, а u и v перемѣнные параметры, уравненіями, которыя мы можемъ соединить въ одно

$$\rho=\alpha+\beta u+\gamma v, \tag{112}$$

положивъ $\rho=xi+yj+zk$, $\alpha=ai+bj+ck$, $\beta=a'i+b'j+c'k$, $\gamma=a''i+b''j+c''k$, или же однимъ уравненіямъ вида:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{113}$$

Когда $a,b,c, \ldots A,B,C,D,x,y,z$ становятся комплексными, ур. (112) или эквивалентныя ему ур. (111) опредѣлятъ нѣкоторое многообразіе бивекторовъ—плоское многообразіе. Изъ ур. (113) прямо видно, что многообразіе есть совокупность бивекторовъ, которые проэктируются на ось (A,B,C) однимъ и тѣмъ же бивекторомъ съ тензоромъ:

$$-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

То же видно и изъ ур. (112), ибо умноживъ его на $V\beta\gamma$, получимъ ур.:

$$S\rho V\beta\gamma=S\alpha\beta\gamma,$$

которое показываетъ, что проэкціи всѣхъ бивекторовъ ρ на ось $V\beta\gamma$ одинаковы. Припомнивъ свойства проэкціи бивектора на ось [см. § 63] легко видѣть, что проэкціи главныхъ векторовъ бивекторовъ многообразія на направленіе $V\beta\gamma$ будутъ одинаковы и что оси бивекторовъ одного и того же параметра будутъ лучами конгруэнціи двухъ линейныхъ комплексовъ.

Сфера радіуса R съ центромъ въ началѣ координатъ имѣетъ своимъ уравненіемъ

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Если R сдѣлается комплекснымъ, то координаты всякаго бивектора, тензоръ котораго есть $R=R_0+\omega R_1$, будутъ удовлетворять этому уравненію. Такимъ образомъ, методомъ перенесенія сфера преобразуются въ многообразіе бивекторовъ, у которыхъ тензоры одинаковы, а осями могутъ служить всѣвозможныя прямыя пространства. Въ частномъ случаѣ, когда $R=1$, бивекторы многообразія обратятся въ винты параметра нуль. Но винтъ параметра нуль вполнѣ опредѣляется его осью и ея направленіемъ. Поэтому, если прямую, которой мы приписываемъ опредѣленное направленіе, назовемъ осью, а совокупность всѣхъ осей—осевымъ пространствомъ, то будемъ имѣемъ такую теорему:

Методомъ перенесенія сфера преобразуется въ осевое пространство; геометрія сферы въ геометрію осеваго пространства.

Замѣтимъ, что между линейчатымъ пространствомъ, въ которое, какъ было показано, преобразуется связка, когда мы будемъ числа x,y,z считать комплексными однородными координатами луча, и осевымъ пространствомъ, въ которое преобразуется сфера радіуса единица, существуетъ нѣкоторое различіе. Въ линейчатомъ пространствѣ каждая прямая служитъ *однимъ* отдѣльнымъ элементомъ пространства. Въ осевомъ же пространствѣ каждая прямая *несетъ два элемента*, отвѣчающіе двумъ направленіямъ, которыя можно приписать этой прямой.

Изъ нашихъ изслѣдованій въ § 82 легко будетъ видѣть, что большому кругу сферы будетъ отвѣчать оси принадлежащія одной и той же щеткѣ; длинѣ дуги, соединяющей двѣ точки сферы,—комплексный уголъ между осями, сферическому углу—комплексный уголъ между осями щетокъ. Сферическому треугольнику будетъ соотвѣтствовать совокупность трехъ осей и трехъ, проходящихъ черезъ нихъ, щетокъ, или, если будемъ щетки характеризовать ихъ осями, совокупность шести осей, которыя, пересѣкаясь между собой, образуютъ шестиугольникъ съ прямыми углами. Между частями такого шестиугольника должны существовать соотношенія аналогичныя формуламъ сферической тригонометріи.

90. *Преобразованіе геометріи сферическаго треугольника въ геометрію косаго шестиугольника съ прямыми углами.* Въ самомъ дѣлѣ означимъ черезъ $a=a_0+\omega a_1$, $b=b_0+\omega b_1$, $c=c_0+\omega c_1$, комплексные углы между тремя осями $\alpha.\beta$ и γ и черезъ $A=A_0+\omega A_1$, $B=B_0+\omega B_1$, $C=C_0+\omega C_1$ комплексные углы между осями $V\gamma\alpha$ и $V\alpha\beta$, $V\alpha\beta$ и $V\beta\gamma$, $V\beta\gamma$ и $V\gamma\alpha$. Углы a,b,c будутъ соотвѣтствовать сторонамъ сферическаго

треугольника, а углы A, B, C—угламъ треугольника, или, точнѣе, сторонамъ полярнаго треугольника. Такъ какъ $T\alpha = T\beta = T\gamma = 1$, то

$$\begin{aligned} S\beta\gamma &= -csa, \quad & S\gamma\beta &= -csb, \quad & S\alpha\beta &= -csc, \\ TV\beta\gamma &= \quad sna, & TV\gamma\alpha &= \quad snb, & TV\alpha\beta &= \quad snc, \end{aligned}$$

и потому формула (74): $SV\gamma\alpha\, V\alpha\beta = -S\gamma\alpha\, S\alpha\beta + \alpha^2 S\beta\gamma$ приметъ видъ

$$csa = csb\, csc - snb\, snc\, csA\,.$$

Изъ этой формулы аналогичной основной формулѣ сферической тригонометріи, понятно, могутъ быть выведены и другія формулы аналогичныя формуламъ тригонометріи.

Развернувъ ее, имѣемъ

$$\begin{aligned} csa_0 &= csb_0 csc_0 - snb_0 snc_0 csA_0, \\ b_1 sna_0 &= b_1 (snb_0 csc_0 + csb_0 snc_0 csA_0) \\ &\quad + c_1 (csb_0 snc_0 + snb_0 csc_0 csA_0) \\ &\quad - A_1 snb_0 snc_0 csA_0. \end{aligned}$$

Выведемъ еще одну формулу, которая намъ сейчасъ понадобится. Означая комплексные углы между осями α, β, γ, и осями противолежащихъ щетокъ черезъ l, m, n изъ равенствъ

$$S\alpha\beta\gamma = SV\alpha\beta.\gamma = SV\gamma\alpha.\beta = SV\beta\gamma.\alpha$$

получаемъ

$$snc.csn = snb.csm = sna.csl. \qquad (114)$$

Такъ какъ сферическому углу соотвѣтствуетъ комплексный уголъ между осями щетокъ, то взаимно перпендикулярнымъ дугамъ будутъ соотвѣтствовать взаимно перпендикулярныя щетки, оси которыхъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Это замѣчаніе позволяетъ намъ найти теорему, соотвѣтствующую элементарной теоремѣ сферической тригонометріи: высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ. Этой теоремѣ должна соотвѣтствовать такая: щетки, проходящія черезъ оси $\alpha.\beta,\gamma$ и перпендикулярныя къ противоположнымъ щеткамъ, будутъ имѣть общій лучъ.

Оси α,β,γ, $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$ образуютъ шестиугольникъ съ прямыми углами. Оси щетокъ, которыя перпендикулярны къ щеткамъ $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$ и проходятъ черезъ противоположныя этимъ щеткамъ лучи $\alpha.\beta,\gamma$ суть линіи кратчайшихъ разстояній между противоположными сторонами этого шестиугольника, а потому предъидущая теорема можетъ быть формулирована еще такимъ образомъ: линіи кратчайшихъ разстояній между противолежащими сторонами шестиугольника съ прямыми углами пересѣкаютъ одну и туже прямую подъ прямымъ угломъ. Эту теорему мы можемъ доказать слѣдующимъ образомъ. Формула (71) даетъ намъ три равенства:

$$\begin{aligned} V\alpha V\beta\gamma &= \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha, \\ V\beta V\gamma\alpha &= \alpha S\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta, \\ V\gamma V\alpha\beta &= \beta S\gamma\alpha - \alpha S\beta\gamma, \end{aligned}$$

складывая которыя, получимъ:

$$V\alpha V\beta\gamma + V\beta V\gamma\alpha + V\gamma V\alpha\beta = 0. \qquad (115)$$

Это равенство и доказываетъ теорему: три бивектора $V\alpha V\beta\gamma$, $V\beta V\gamma\alpha$, $V\gamma V\alpha\beta$ взаимно уничтожаются, слѣдовательно ихъ оси, которыя, очевидно, суть линіи кратчайшихъ разстояній между противоположными сторонами шестиугольника, всѣ пересѣкаютъ одну и ту же прямую подъ прямымъ угломъ. Предъидущее равенство, которое имѣетъ мѣсто, каковы бы ни были α,β,γ, даетъ намъ болѣе того, что выражаетъ теорема, оно даетъ намъ тензоры трехъ бивекторовъ, которые, имѣя своими осями линіи кратчайшихъ разстояній, взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned} TV\alpha V\beta\gamma &= T\alpha T\beta T\gamma \,\mathrm{sn}a\, \mathrm{sn}l, \\ TV\beta V\gamma\alpha &= T\alpha T\beta T\gamma \,\mathrm{sn}b\, \mathrm{sn}m, \\ TV\gamma V\alpha\beta &= T\alpha T\beta T\gamma \,\mathrm{sn}c\, \mathrm{sn}n. \end{aligned}$$

Но, умноживъ взаимно уничтожающіеся бивекторы на одно и то же число, получимъ бивекторы, которые также будутъ взаимно уничтожаться, а потому, если мы умножимъ бивекторы $V\alpha V\beta\gamma$, $V\beta V\gamma\alpha$, $V\gamma V\alpha\beta$ на (s: $T\alpha T\beta T\gamma\, sn\alpha\, csl$) и воспользуемся формулами (114), то получимъ слудующую теорему.

Три бивектора, осями которымъ служатъ линіи кратчайшихъ разстояній между противоположными сторонами шестиугольника съ прямыми углами и тензоры которыхъ соотвѣтственно суть $stgl$, $stgm$, $stgn$, *гдѣ* s *совершенно произвольное комплексное число и* l, m, n *комплексные углы между соотвѣтствующими противоположными сторонами шестиугольника, слагаясь, взаимно уничтожаются.*

91. *Механика бивектора и системы бивекторовъ.* Общая теорема, формулированная нами въ § 61, весьма естественно приводитъ къ механикѣ бивектора. Понятно, что, желая сохранить аналогію съ механикой точки, мы должны назвать скоростью бивектора α, координаты котораго x,y,z суть нѣкоторыя функціи времени—вещественнаго перемѣннаго t_0, или комплекснаго перемѣннаго $t = t_0 + \omega t_1$, бивекторъ β, имѣющій своими координатами:

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt},$$

ускореніемъ—бивекторовъ β' съ координатами:

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

силой приложенной къ α—произведеніе $m\beta'$, гдѣ m есть нѣкоторое постоянное, независящее отъ t, комплексное число $m_0 + \omega m_1$—масса бивектора α.

Скорость бивектора α характеризуетъ съ точность до величинъ безконечно малыхъ перваго порядка движеніе его въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени $\tau = \tau_0 + \omega\tau_1$. Такъ, $S(\beta/\alpha)$ опредѣляетъ измѣненіе $T\alpha$:

$$\frac{1}{T\alpha}\,\frac{dT\alpha}{dt} = S\frac{\beta}{\alpha};$$

бивекторъ же $V(\beta/\alpha)$ характеризуетъ перемѣщеніе оси α. Движеніе оси α будетъ таково, какъ если бы она принадлежала неизмѣняемой системѣ, перемѣщеніе которой въ теченіи безконечно малаго промежутка τ_0 опредѣляется бивекторомъ $\tau V(\beta/\alpha)$. Подобнымъ же образомъ ускореніе перваго и слѣдующихъ порядковъ опредѣляютъ движеніе бивектора въ теченіи промежутка времени τ съ точностью до величинъ втораго и слѣдующихъ порядковъ.

Введя и изслѣдовавъ эти понятія, мы[1] будемъ имѣть возможность извѣстнымъ образомъ интерпретировать уравненія и теоремы механики точки или системы точекъ, когда какъ координаты точекъ, такъ и массы, силы и время становятся комплексными числами. Такъ напримѣръ, законъ площадей центральнаго движенія точки при такомъ толкованіи принимаетъ видъ:

Если бивекторъ α и его ускореніе β' имѣютъ общую ось, то векторное произведеніе бивектора α и его скорости β будетъ во все время движенія постоянно. Слѣдовательно, бивекторъ α и его скорость β будутъ принадлежать одной и той же щеткѣ, и сумма параметровъ главныхъ винтовъ цилиндроида, построеннаго на α и β будетъ постоянна.

Понятіе о скорости и ускореніи бивектора могутъ быть весьма полезны въ нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Такъ, если мы будемъ разсматривать неизмѣняемую систему, какъ совокупность бивекторовъ связанныхъ между собой, бивекторовъ, тензоры которыхъ постоянны, то методомъ перенесенія кинематика твердаго тѣла, вращающагося вокругъ точки преобразуется въ кинематику общаго случая движенія. Мы приходимъ такимъ образомъ къ обобщенію теоремы Coriolis'а, формулы Savary и нѣкоторымъ другимъ интереснымъ результатамъ.

Мы не будемъ однако останавливаться на этихъ результатахъ, ибо думаемъ, что уже достаточно пояснили въ предъидущихъ §§ методъ перенесенія и достигли такимъ образомъ цѣли, которую имѣли въ виду въ этой главѣ. Кромѣ того, изложеніе упомянутыхъ результатовъ заняло бы слишкомъ много мѣста, такъ какъ ради него мы должны были бы войти въ нѣкоторыя подробности кинематики твердаго тѣла и теоріи линейчатыхъ поверхностей.

Вопросамъ, намѣченнымъ въ этомъ параграфѣ, а также затронутымъ въ другихъ мѣстахъ этой главы, мы предполагаемъ посвятить особую работу.

Глава II.

92. *Основныя опредѣленія и теоремы теоріи группъ винтовъ.* Эту главу мы посвящаемъ изученію тѣхъ многообразій бивекторовъ, которыя опредѣляются линейными, однородными относительно Plücker'овыхъ координатъ, уравненіями и называются группами винтовъ. Если $\underset{\smile}{\rho}$ есть одинъ изъ бивекторовъ многообразія, то въ силу однородности уравненій, всѣ бивекторы вида $a\underset{\smile}{\rho}$ (гдѣ a какое угодно вещественное число) которые, отличаясь отъ $\underset{\smile}{\rho}$ только длиною главнаго вектора, лежатъ на одномъ и томъ же винтѣ $\underset{\smile}{\rho}$, будутъ принадлежать многообразію; поэтому, при изученіи группъ, мы должны обращать наше вниманіе главнымъ образомъ на винты, опредѣляемые бивекторами многообразія, а не на самые бивекторы.

Винты $\underset{\smile}{\rho}_1, \underset{\smile}{\rho}_2, \ldots \underset{\smile}{\rho}_n$ (винты, опредѣляемые бивекторами $\underset{\smile}{\rho}_1$, $\underset{\smile}{\rho}_2, \ldots \underset{\smile}{\rho}_n$) называются зависимыми, если существуютъ такія вещественныя числа e_1, e_2, $e_3, \ldots e_n$, что

$$e_1\underset{\smile}{\rho}_1 + e_2\underset{\smile}{\rho}_2 + \ldots + e_n\underset{\smile}{\rho}_n = 0, \tag{1}$$

и независимыми въ противномъ случаѣ. Очевидно, что уравненіе (1) эквивалентно шести линейнымъ, однороднымъ относительно $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$, уравненіямъ, которыя получатся, если, представивъ бивекторы $\underset{\smile}{\rho}$ комплексными числами

$$\underset{\smile}{\rho}_s = p_s i + q_s j + r_s k + \omega\,(a_s i + b_s j + c_s k), \quad s = 1,2 \ldots n.$$

приравняемъ нулю коэффиціенты при комплексныхъ единицахъ $i, j, k, \omega i, \omega j, \omega k$ въ уравненіи (1). Когда эти шесть уравненій могутъ быть удовлетворены хотя одной системой значеній e_1, $e_2, \ldots e_n$, будетъ имѣть мѣсто ур. (1) и винты $\underset{\smile}{\rho}$ будутъ зависимы; когда же уравненія будутъ несовмѣстны, то винты ϱ будутъ независимы. При $n>6$ упомянутыя шесть уравненій всегда могутъ быть удовлетворены; слѣдовательно семь и большее число винтовъ всегда зависимы.

Пусть винты $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ независимы. Умноживъ ихъ на какіе нибудь вещественныя числа $a_1, a_2, \ldots a_n$, построимъ винтъ ϱ, опредѣляемый бивекторомъ

$$\varrho = a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + \ldots. + a_n\varrho_n. \tag{2}$$

Если вещественнымъ числамъ $a_1, a_2, \ldots a_n$ будемъ давать всевозможныя значенія, то получимъ безчисленное множество винтовъ ϱ, совокупность которыхъ и называется n—членной группой винтовъ. Винты $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ называются основными винтами группы, а числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ винтовыми координатами или координатами Ball'я винта ϱ группы. Такъ какъ винты ϱ и $a\varrho = aa_1\varrho_1 + aa_2\varrho_2 + \ldots.$тожественны, то координаты Ball'я суть однородныя координаты. Очевидно, что основные винты группы, $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$, принадлежатъ группѣ.

Теорема I. *Если винты* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ *независимы, то для того, чтобы* m *винтовъ* $m \leq n$

$$\sigma_l = a_{l_1}\varrho_1 + a_{l_2}\varrho_2 + \ldots. a_{l_n}\varrho_n \qquad (l = 1,2,\ldots m) \tag{3}$$

были независимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя одинъ изъ опредѣлителей матрицы

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \tag{4}$$

былъ отличенъ отъ нуля.

Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ опредѣлители равны нулю, то существуетъ m величинъ $b_1, b_2, \ldots b_m$ такихъ, что

$$a_{1s}b_1 + a_{2s}b_2 + \ldots. a_{ms}b_s = 0, \qquad s = 1,2,\ldots n.$$

и потому, умножая ур. (3) b_l и суммируя по l, получаемъ

$$b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + \ldots + b_m\sigma_m = 0, \tag{5}$$

откуда слѣдуетъ, что винты σ зависимы. Обратно, если винты σ зависимы, то между ними существуетъ соотношеніе вида (5), изъ котораго, если выразимъ σ черезъ ρ [ур. (3)], имѣемъ:

$$c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + \ldots. + c_n\rho_n = 0,$$

гдѣ $c_s = a_{1s}b_1 + a_{2s}b_2 + \ldots + a_{ms}b_m$ $(s = 1,2,\ldots n)$. Всѣ величины c_s должны быть равны нулю, ибо, если бы хотя одна изъ нихъ была отлична отъ нуля, то послѣднее равенство противорѣчило бы предположенію, что винты ρ независимы. Изъ равенствъ же $c_s = 0$ слѣдуетъ, что всѣ опредѣлители (4) обращаются въ нуль.

Теорема II. *За основные винты группы можно принять какіе угодно n независимыхъ винтовъ, входящихъ въ группу.*

Возьмемъ n винтовъ $\sigma_1,\ldots\sigma_n$ группы (2), опредѣляемыхъ равенствами (3), въ которыхъ полагаемъ $m = n$, и предположимъ, что они независимы, и слѣдовательно $|a_{st}| \neq 0$. Это послѣднее условіе позволяетъ намъ рѣшить ур. (3) относительно σ и выразить такимъ образомъ ρ черезъ σ:

$$\rho_s = b_{s_1}\sigma_1 + b_{s_2}\sigma_2 + \ldots. + b_{sn}\sigma_n \quad (s = 1,2\ldots n). \tag{6}$$

Чтобы доказать теорему нужно только показать, что всякій винтъ ρ группы (ρ), опредѣляемой винтами ρ_1, $\rho_2, \ldots \rho_n$ [ур. (2)], можетъ быть представленъ въ видѣ $\rho = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + \ldots. + B_n\sigma_n$, (7), гдѣ B_1, $B_2, \ldots. B_n$ вещественныя числа, и, слѣдовательно, принадлежитъ группѣ (σ), опредѣляемой винтами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots. \sigma_n$, и что обратно всякій винтъ $\sigma = b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + \ldots. b_n\sigma_m$, (8), группы ($\sigma$) можно представить въ видѣ $\sigma = A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + \ldots. + A_n\rho_n$, (9), гдѣ A_1, $A_1, \ldots A_n$ нѣкоторыя вещественныя числа, и, слѣдовательно, можно разсматривать какъ винтъ группы (ρ). Доказательство не представляетъ никакихъ затрудненій, стоитъ только въ равенствѣ (2) выразить ρ_s черезъ σ_s $(s = 1,2,\ldots n)$, пользуясь уравненіями (6), и мы получимъ равенство (7), въ равенствѣ же (8) выразить σ_s черезъ ρ_s посредствомъ ур. (3), и мы получимъ (9).

Теорема III. *Если параметры основныхъ винтовъ группы увеличимъ на одну и ту же величину Pc, то параметры всѣхъ винтовъ группы увеличатся на ту же величину.*

Для доказательства нужно умножить ур. (2) на $c_0(1 + \omega Pc)$.

93. *Классификація группъ; каноническій видъ группы.* Для удобства дальнѣйшаго изложенія условимся говорить, что комплексное перемѣнное число $a=a_0+\omega a_1$ одночленно, если оно при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ или остается вещественнымъ $(a_1=0)$, или всегда имѣетъ видъ $\omega a_1 (a_0=0)$. Въ первомъ случаѣ оно будетъ одночленнымъ числомъ параметра нуль, во второмъ—одночленнымъ числомъ безконечно большаго параметра. Если же комплексное число можетъ получать всевозможныя значенія, такъ что a_0 и a_1 могутъ быть и не равны нулю, то будемъ называть его двучленнымъ.

Пусть имѣемъ три бивектвра α, β, γ, у которыхъ параметры конечны, а оси не параллельны одной плоскости, такъ что $a_0\neq 0$, $\beta_0\neq 0$, $\gamma_0\neq 0$ и $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ не лежатъ въ одной плоскости. При этихъ условіяхъ $S\alpha\beta\gamma\neq 0$ и $PS\alpha\beta\gamma\neq\infty$ [см. § 79], и нельзя найти ни вещественныхъ, ни комплексныхъ чиселъ a,b,c такихъ, чтобы $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что выборъ такихъ чиселъ возможенъ и что по крайней мѣрѣ одно изъ нихъ, a, отлично отъ нуля, умноживъ обѣ части равенства $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ на $V\beta\gamma$ и взявъ скаларныя части произведенія, въ силу тожествъ $S\beta V\beta\gamma=S\gamma V\beta\gamma=0$, получимъ равенство $aS\alpha\beta\gamma=0$, которое при $a\neq 0$ возможно было бы только въ двухъ предположеніяхъ: или, когда $S\alpha\beta\gamma=0$, или, когда $PS\alpha\beta\gamma=\infty$, противорѣчащихъ условіямъ относительно α,β,γ.

Развернувъ первую часть неравенства $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$, имѣемъ неравенство $a_0\alpha+b_0\beta+c_0\gamma+a_1(\omega\alpha)+b_1(\omega\alpha)+c_1(\omega\gamma)\neq 0$, которое влечетъ за собой цѣлый рядъ другихъ неравенствъ, если положимъ нѣкоторые изъ чиселъ $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$ равными нулю:

$$\begin{array}{rr} \alpha\neq 0, & (a_1=0,\ b=c=0) \\ \omega\alpha\neq 0, & (a_0=0,\ b=c=0) \\ a_0\alpha+a_1(\omega\alpha)\neq 0, & (b=c=0) \end{array}$$

и т. д., и т. д..

Изъ этихъ неравенствъ заключаемъ, что винты каждой изъ слѣдующихъ системъ:

I $(b=c=0)$

1) α 2) $\omega\alpha$

3) $\alpha,\omega\alpha$

II $(c=0)$

1) α,β 2) $\alpha,\omega\beta$ 3) $\omega\alpha,\omega\beta$

4) $\alpha,\beta,\omega\beta$ 5) $\omega\alpha.\beta,\omega\beta$

6) $\alpha,\beta,\omega\alpha,\omega\beta$

III

1) α,β,γ 2) $\alpha,\beta,\omega\gamma$ 3) $\alpha,\omega\beta,\omega\gamma$ 4) $\omega\alpha,\omega\beta,\omega\gamma$

5) $\alpha.\beta,\gamma,\omega\gamma$ 6) $\alpha,\omega\beta,\gamma,\omega\beta$ 7) $\omega\alpha,\omega\beta,\gamma,\omega\gamma$

8) $\alpha,\beta,\omega\beta,\gamma,\omega\gamma$ 9) $\omega\alpha,\beta,\omega\beta,\gamma,\omega\gamma$

10) $\alpha,\omega\alpha.\beta,\omega\beta,\gamma,\omega\gamma$.

между собой независимы. Поэтому помощью бивекторовъ α,β,γ мы можемъ составить слѣдующія группы.

(1,I,0) Одночленную $\varrho=a_0\alpha$
(1,I,1) Одночленную $\varrho=a_1(\omega\alpha)$
(2,I,1) Двучленную $\varrho=a_0\alpha+a_1(\omega\alpha)=a\alpha$

(2,II,0) Двучленную $\varrho=a_0\alpha+b_0\beta$
(2,II,1) Двучленную $\varrho=a_0\alpha+b_1(\omega\beta)=a_0\alpha+\omega b_1\beta$
(2,II,2) Двучленную $\varrho=a_1(\omega\alpha)+b_1(\omega\beta)=\omega a_1\alpha+\omega b_1\beta$.
(3,II,1) Трехчленную $\varrho=a_0\alpha+b\beta_0+b_1(\omega\beta)=a_0\alpha+b\beta$.
(3,II,2) Трехчленную $\varrho=a_1(\omega\alpha)+b_0\beta+b_1(\omega\beta)=\omega a_1\alpha+b\beta$.
(4,II,2) Четырехчленную $\varrho=a_0\alpha+a_1(\omega\alpha)+b_0\beta+b_1(\omega\beta)=a\alpha+$ $+b\beta$.

(3,III,0) Трехчленную $\varrho=a_0\alpha+b_0\beta+c_0\gamma$.
(3,III,1) Трехчленную $\varrho=a_0\alpha+b_0\beta+c_1(\omega\gamma)=a_0\alpha+b_0\beta+\omega c_1\gamma$.
(3,III,2) Трехчленную $\varrho=a_0\alpha+b_1(\omega\beta)+c_1(\omega\gamma)=a_0\alpha+\omega b_1\beta+$ $+\omega c_1\gamma$.
(3,III,3) Трехчленную $\varrho=a_1(\omega\alpha)+b_1(\omega\beta)+c_1(\omega\gamma)=\omega a_1\alpha+$ $\omega b_1\beta+\omega c_1\gamma$
(4,III,1) Четырехчленную $\varrho=a_0\alpha+b_0\beta+c_0\gamma+c_1(\omega\gamma)=a_0\alpha+$ $+b_0\beta+c\gamma$.
(4,III,2) Четырехчленную $\varrho=a_0\alpha+b_1(\omega\beta)+c_0\gamma+c_1(\omega\gamma)=a_0\alpha+$ $+\omega b_1\beta+c\gamma$.

(4,III,3) Четырехчленную $$\rho = a_1(\omega\alpha) + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = \omega a_1\alpha + \omega b_1\beta + c\gamma.$$

(5,III,2) Пятичленную $$\rho = a_0\alpha + b_0\beta + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = a_0\alpha + b\beta + c\gamma.$$

(5,III,3) Пятичленную $$\rho = a_1(\omega\alpha) + b_0\beta + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = \omega a_1\alpha + b\beta + c\gamma.$$

(6,III,3) Шестичленную $$\rho = a_0\alpha + a_1(\omega\alpha) + b_0\beta + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Такъ какъ для построенія первыхъ трехъ группъ достаточно знать одинъ бивекторъ α, то мы назовемъ ихъ одноосными группами. Для построенія слѣдующихъ шести группъ надо имѣть два бивектора α и β, а потому эти шесть группъ мы назовемъ двуосными. Наконецъ остальныя десять группъ, которыя опредѣляются тремя бивекторами α, β, γ, назовемъ трехъосными группами.

Что касается до трехъ, поставленныхъ въ скобкахъ цифръ, которыми мы означаемъ группу, то онѣ имѣютъ слѣдующія значенія. Первая означаетъ число членовъ группы, вторая, римская, число ея осей, наконецъ третья число независимыхъ винтовъ безконечно большаго параметра, входящихъ въ группу.

Всѣ перечисленныя группы, получаются, если мы будемъ строить винты $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$, ограничивая всякій разъ выборъ чиселъ a, b, c особыми условіями.

Если два изъ чиселъ a, b, c, напр. b и c, будутъ равны нулю, то мы получаемъ одноосныя группы, а именно: когда a будетъ одночленнымъ числомъ параметра нуль $(a = a_0)$, будемъ имѣть группу (1,I,0), когда a будетъ безконечно большаго параметра $(a = \omega a_1)$, получаемъ групу (1,I,1), наконецъ когда a будетъ двучленнымъ, имѣемъ группу (2,I,1).

Если одно изъ чиселъ a, b, c, напр. c, будетъ равно нулю, то мы получаемъ группы двуосныя. При томъ, если a, b будутъ одночленными, то имѣемъ двучленныя группы указанныхъ типовъ: когда $Pa = Pb = 0$, имѣемъ группу (2,II,0), когда $Pa = 0$, $Pb = \infty$,—группу (2,II,1), когда $Pa = Pb = \infty$—группу (2,II,2). Если одно изъ чиселъ a, b будетъ двучленнымъ, а другое одночленнымъ, напр. a—одночленнымъ, а b—двучленнымъ, то имѣемъ группы трехчленныя: когда $Pa = 0$,—группу (3,II,1), когда $Pa = \infty$,—группу (3,II,2). Наконецъ, если оба числа a и b двучленны имѣемъ группу четырехчленную (4,II,2).

Если ни одно изъ чиселъ a,b,c не равно нулю, то мы получаемъ группы трехъосныя. Если a,b,c будутъ одночленны, то имѣемъ группы трехчленныя: когда $Pa=Pb=Pc=0$,—группу (3,III,0); когда $Pa=Pb=0$, $Pc=\infty$,—группу (3,III,1); когда $Pa=0$, $Pb=Pc=\infty$,—группу (3,III,2); когда $Pa=Pb=Pc=\infty$ группу (3,III,3). Если одно изъ чиселъ a,b,c, напр. c, будетъ двучленнымъ, а остальные одночленными, то имѣемъ группы четырехчленныя: когда $Pa=Pb=0$,—группу (4,III,1); когда $Pa=0$, $Pb=\infty$,—группу (4,III,2); когда $Pa=Pb=\infty$,—группу (4,III,3). Если два изъ чиселъ a,b,c, напр. b и c, двучленны, то имѣемъ группы пятичленныя: когда $Pa=0$,—группу (5,III,2), когда $Pa=\infty$,—группу (5,III,3). Наконецъ когда всѣ три числа a,b,c двучленны имѣемъ группу шестичленную.

Теорема. *Измѣняя основные винты группы [§ 92, теор. II], можемъ всякую группу привести къ одному изъ вышеуказанныхъ типовъ.*

Доказательство этой теоремы требуетъ разсмотрѣнія довольно большаго числа частныхъ случаевъ и потому мы не будемъ его здѣсь приводить. Замѣтимъ только, что теорема доказывается уже легко для четырех- и пяти-членныхъ группъ, если она доказана для дву- и трехчленныхъ группъ: стоитъ только показать, что въ составъ четырехчленной группы входитъ по крайней мѣрѣ одна двучленная одноосная группа типа (2,I,1), а въ составъ пятичленной группы такихъ группъ входитъ двѣ. Вышеуказанныя формы группъ назовемъ каноническими формами. Слѣдовательно, всякую группу можно привести къ каноническому виду.

94. *Группы одноосныя.* Свойства группъ различныхъ типовъ хорошо изслѣдованы. (Въ русской литературѣ см. И. Занчевскій, l. c.; Д. Зейлигеръ, „Механика подобно-измѣняемой системы“. Зап. Мат. Отд. Нов. Общ. Ест., Томы XI и XIII). Поэтому мы не будемъ на нихъ подробно останавливаться, перечислимъ только нѣкоторыя отчасти, чтобы показать, какимъ образомъ къ изученію свойствъ группъ прилагается винтовое счисленіе, отчасти, съ цѣлью воспользоваться ими въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Группа (1,I,0) $\varrho=a_0\alpha$ состоитъ изъ одного винта конечнаго параметра.

Группа (1,I,1) $\varrho=\omega a_1\alpha$ состоитъ изъ одного винта безконечно большаго параметра.

Группа (2,I,1) $\underset{\smile}{\rho} = a\alpha$. Всѣ винты группы имѣютъ общую ось съ α. Параметры винтовъ могутъ быть какіе угодно, ибо $P\underset{\smile}{\rho} = Pa + P\alpha$ и Pa совершенно произволенъ.

95. *Группы двуосныя.* Пусть намъ дана двуосная группа $\underset{\smile}{\rho} = a\alpha + b\beta$. Взявъ какіе нибудь два винта группы, $\underset{\smile}{\rho}' = a'\alpha + b'\beta$ и $\underset{\smile}{\rho}'' = a''\alpha + b''\beta$, имѣемъ

$$V\underset{\smile}{\rho}'\underset{\smile}{\rho}'' = (a'b'' - a''b')\ V\alpha\beta, \tag{10}$$

откуда, замѣчая, что осью $V\underset{\smile}{\rho}'\underset{\smile}{\rho}''$ служитъ линія кратчайшаго разстоянія между осями $\underset{\smile}{\rho}'$ и $\underset{\smile}{\rho}''$, заключаемъ, что оси всѣхъ винтовъ группы имѣютъ общую линію кратчайшаго разстоянія, ось $V\alpha\beta$. Такимъ образомъ имѣемъ теорему:

Теорема I. *Оси винтовъ двуосной группы принадлежатъ одной и той же щеткѣ.*

Беря параметры отъ обѣихъ частей предъидущаго равенства, получаемъ:

$$PV\underset{\smile}{\rho}'\underset{\smile}{\rho}' = P(a'b'' - a''b') + PV\alpha\beta,$$

или, означая комплексный уголъ между осями $\underset{\smile}{\rho}'$ и $\underset{\smile}{\rho}''$ черезъ $\theta = \theta_0 + \omega\theta_1$,

$$P\underset{\smile}{\rho}' + P\underset{\smile}{\rho}'' + \theta_1 ctg\theta_0 = P(a'b'' - a''b') + PV\alpha\beta. \tag{11}$$

Эта формула общая для всѣхъ двуосныхъ группъ.

Разсмотримъ нѣкоторыя общія свойства двучленныхъ группъ. Для двучленныхъ группъ числа $a, b, a', b', a'' b''$ одночленны, одночленно будетъ также и число $(a'b'' - a''b')$ и потому изъ равенства (10) слѣдуетъ

Теорема II. *Векторное умноженіе двухъ произвольно взятыхъ винтовъ двучленной группы даетъ всегда одинъ и тотъ же винтъ.*

Такимъ образомъ, если три винта, опредѣляемыхъ бивекторами $\alpha.\beta, \gamma$, принадлежатъ двучленной группѣ, то бивекторы $V\beta\gamma, V\gamma\alpha, V\alpha\beta$ имѣютъ общую ось и одинаковый параметръ, и слѣдовательно существуетъ такихъ три вещественныхъ числа a_0, b_0, c_0, что $a_0 V\beta\gamma = b_0 V\gamma\alpha = c_0 V\alpha\beta$. Докажемъ, что положеніе обратное также справедливо.

Теорема III. *Если три бивектора α, β, γ удовлетворяютъ соотношенію:*

$$a_0 V\beta\gamma = b_0 V\gamma\alpha = c_0 V\alpha\beta, \tag{12}$$

гдѣ a_0, b_0, c_0 *отличны отъ нуля, то винты* $\alpha.\beta,\gamma$ *зависимы и, слѣдовательно, принадлежатъ двучленной группѣ.*

Теорема очевидна, если оси α и β совпадаютъ. Тогда $V\alpha\beta = V\beta\gamma = V\gamma\alpha = 0$, а это значитъ, что ось γ совпадаетъ съ осями α и β и стало быть винты α,β,γ зависимы.

Предположимъ, поэтому, что оси α и β не совпадаютъ. Изъ равенства $b_0 V\gamma\alpha = c_0 V\alpha\beta$, имѣемъ $V(b_0\gamma + c_0\beta)\alpha = 0$, откуда заключаемъ, что бивекторы $b_0\gamma + c_0\beta$ и α имѣютъ общую ось, такъ что $b_0\gamma + c_0\beta$ можемъ получить, если α умножимъ на нѣкоторое комплексное, надлежащимъ образомъ опредѣленное, число $e_0 + \omega e_1$:

$$b_0\gamma + c_0\beta = (e_0 + \omega e_1)\alpha.$$

Также изъ равенства $c_0 V\alpha\beta = a_0 V\beta\gamma$ находимъ

$$c_0\alpha + a_0\gamma = (f_0 + \omega f_1)\beta.$$

Исключая изъ этихъ равенствъ γ, имѣемъ:

$$(a_0 c_0 + b_0 f_0 + \omega b_0 f_1)\beta = (b_0 c_0 + a_0 e_0 + \omega a_0 e_1)\alpha$$

Такъ какъ оси α и β не совпадаютъ, то коэффиціенты при нихъ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} a_0 c_0 + b_0 f_0 = 0, &\quad b_0 f_1 = 0, \\ b_0 c_0 + a_0 e_0 = 0, &\quad a_0 e_1 = 0, \end{aligned}$$

откуда $e_1 = f_1 = 0$, $f_0 = -(a_0 c_0) : b_0$, $e_0 = -(b_0 c_0) : a_0$ и слѣдовательно

$$b_0 c_0 \alpha + c_0 a_0 \beta + a_0 b_0 \gamma = 0,$$

что и доказываетъ справедливость теоремы.

Изъ предъидущихъ теоремъ вытекаютъ такія слѣдствія.

I. Оси $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$ должны совпадать и параметры ихъ должны быть одинаковы для того, чтобы можно было подыскать такіе числа a_0, b_0, c_0, которые удовлетворяли бы равенству (12). Поэтому, если мы означимъ комплексные углы между осями $\alpha.\beta,\gamma$ черезъ $\varphi_3 + \omega d_3$, $\varphi_1 + \omega d_1$, $\varphi_2 + \omega d_2$, то предъидущія двѣ теоремы можно соединить въ одну

Для того, чтобы три винта α, β, γ были зависимы необходимо и достаточно, чтобы оси ихъ принадлежали одной щеткѣ и

$$P\beta + P\gamma + d_1 ctg\varphi_1 = P\gamma + P\alpha + d_2 ctg\varphi_2 = P\alpha + P\beta + d_3 ctg\varphi_3$$

II. Если $a_0 = b_0 = —1$, $c_0 = 1$, то $\gamma = \alpha + \beta$, $V\gamma\beta = V\alpha\gamma = V\alpha\beta$, откуда

$$\frac{T\alpha}{sn(\gamma\beta)} = \frac{T\beta}{sn(\alpha\gamma)} = \frac{T\gamma}{sn(\alpha\beta)}.$$

Такимъ образомъ, когда $\gamma = \alpha + \beta$, между $T\alpha$, $T\beta$, $T\gamma$ и углами $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\alpha\gamma)$ существуютъ соотношенія, аналогичныя формуламъ плоской тригонометріи.

Группа (2,II,0) $\varrho = a_0\alpha + b_0\beta$. Въ группѣ нѣтъ винтовъ безконечно большаго параметра, ибо $a_0\alpha_0 + b_0\beta_0 \neq 0$. Такъ какъ положеніе оси ϱ зависитъ только отъ отношенія b_0/a_0, то оси винтовъ группы располагаются на поверхности, которая и называется цилиндроидомъ. Въ группѣ есть два винта, оси которыхъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Въ самомъ дѣлѣ условіе, чтобы оси винтовъ $\varrho' = a_0'\alpha + b_0'\beta$ и $\varrho'' = a_0''\alpha + b_0''\beta$ пересѣкались подъ прямымъ угломъ выразится равенствомъ

$$S\varrho'\varrho'' = a_0'a_0''\alpha^2 + (a_0'b_0'' + a_0''b_0')S\alpha\beta + b_0'b_0''\beta^2 = 0,$$

которое, если положимъ для простоты $a_0^2 = \beta_0^2 = —1$ и замѣнимъ $\alpha^2 . \beta^2$, $S\alpha\beta$ черезъ $—(1 + 2P\alpha.\omega)$, $—(1 + 2P\beta.\omega)$, $S_0\alpha\beta + \omega S_1\alpha\beta$, распадается на два:

$$a_0'a''_0 — (a_0'b_0'' + a_0''b_0')S_0\alpha\beta + b_0'b_0'' = 0,$$

$$2P\alpha a_0'a_0'' — (a_0'b'' + a_0''b_0')S_1\alpha\beta + 2P\beta b_0'b_0'' = 0.$$

Проведемъ въ плоскости координатныя оси, образующія уголъ равный углу φ между осями α и β и будемъ считать величины a_0 и b_0 координатами точки въ этой плоскости. Тогда задача объ опредѣленіи величинъ a_0', b_0', a_0'', b_0'', удовлетворяющихъ предъидущимъ двумъ уравненіямъ, очевидно, будетъ тожественна съ задачей нахожденія двухъ діаметровъ, которые были бы одновременно сопряженными въ двухъ коническихъ сѣченіяхъ

$$a_0{}^2+2a_0b_0cs\varphi+b_0{}^2=const.,$$
$$P\alpha a_0{}^2-a_0b_0S_1\alpha\beta+P\beta b_0{}^2=const.,$$

изъ которыхъ первое представляетъ кругъ. Такъ какъ сопряженные діаметры круга взаимно перпендикулярны, то задача приводится къ опредѣленію главныхъ діаметровъ второй кривой. Найдя ихъ, будемъ знать числа $a_0{}',b_0{}',a_0{}'',b_0{}''$ и винты ϱ' ϱ'', оси которыхъ встрѣчаются подъ прямымъ угломъ. Эти винты называются главными винтами группы. Принявъ ихъ за основные винты α и β группы, будемъ имѣть $S\alpha\beta=0$, такъ что, возвышая $\varrho=a_0\alpha+b_0\beta$ въ квадратъ, получимъ $\varrho^2=a_0{}^2\alpha^2+b_0{}^2\beta^2$, откуда

$$-\varrho_0{}^2=a_0{}^2+b_0{}^2,$$

$$P\varrho=\frac{a_0{}^2P\alpha+b_0{}^2P\beta}{a_0{}^2+b_0{}^2}$$

—основная формула для параметра винта двучленной группы. Если за точку приведенія примемъ точку пересѣченія осей главныхъ винтовъ, то $\alpha_1=\alpha_0P\alpha, \beta_1=\beta_0P\beta, \varrho_0=a_0\alpha_0+b_0\beta_0, \varrho_1=a_0\alpha_0P\alpha+b_0\beta_0P\beta$, и для перпендикуляра, опущеннаго на ось винта ϱ, получимъ формулу [(3) § 30]:

$$\chi=\frac{V\varrho_1\varrho_0}{\varrho_0{}^2}=\frac{a_0b_0}{a_0{}^2+b_0{}^2}(P\beta-P\alpha)V\alpha_0\beta_0.$$

Это другая основная формула двучленной группы, изъ которой легко выводится уравненіе цилиндроида въ прямоугольныхъ координатахъ.

Изъ формулы (11), въ которой въ случаѣ двучленной группы $P(a'b''-a''b')=0$, вытекаетъ такая теорема.

Теорема IV. *Какую бы пару винтовъ* ϱ',ϱ'' *двучленной группы мы ни взяли, сумма* $P\varrho'+P\varrho''+\theta_1ctg\theta_0$ *остается величиной постоянной равной суммѣ параметровъ главныхъ винтовъ* $P\alpha+P\beta$.

Цилиндроидъ поверхность линейчатая. Каждой образующей линейчатой поверхности соотвѣтствуетъ опредѣленное число—параметръ образующей, предѣлъ отношенія кратчайшаго разстоянія между разсматриваемой образующей и образующей къ ней безконечно близкой къ углу между ними, или, что въ предѣлѣ все равно, къ тангенсу этого угла. Предъидущая теорема даетъ весьма простое средство опредѣлить параметръ каждой образующей цилиндроида. Съ этой цѣлью предположимъ, что оси винтовъ ρ' и ρ'' безконечно близки; тогда $\theta_1 ctg\theta_0$ будетъ отличаться на безконечно малую величину отъ параметра той образующей, которая служитъ осью винта ρ'; $P\rho''$ будетъ отличаться на безконечно малую величину отъ $P\rho'$ и въ предѣлѣ будемъ имѣть:

$$2P\rho' + lim.\theta_1 ctg\theta_0 = P\alpha + P\beta,$$

или

$$lim\theta_1 ctg\theta_0 = \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2 + b_0^2}(P\beta - P\alpha)$$

что даетъ теорему:

Теорема V. *Сумма удвоеннаго параметра какого либо винта двучленной группы и параметра образующей цилиндроида, которая служитъ для этого винта осью, есть величина постоянная, равная суммѣ параметровъ главныхъ винтовъ.*

Группа (2, II, 1) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta$. Въ группѣ одинъ винтъ безконечно большаго параметра $(\omega\beta_0)$. Оси винтовъ конечнаго параметра параллельны оси α и, слѣдовательно, лежатъ въ одной плоскости, образуя пучекъ параллельныхъ прямыхъ. Параметръ винта ρ

$$P\rho = \frac{Sa_0\alpha_0(a_0\alpha_1 + b_1\beta_0)}{a_0^2\alpha_0^2} = P\alpha + \frac{b_1}{a_0}\frac{S\alpha_0\beta_0}{\alpha_0^2}$$

есть линейная функція отъ b_1/a_0. Когда $S\alpha_0\beta_0 \neq 0$, то въ группѣ есть винтъ параметра нуль. Если примемъ его за основной винтъ, то $P\alpha = 0$ и $P\rho$ будетъ пропорціоналенъ b_1/a_0. Когда оси α и β перпендикулярны, то $S\alpha_0\beta_0 = 0$ и всѣ винты конечнаго параметра имѣютъ параметръ одинаковый. Принявъ точку приведенія на оси α, получимъ для перпендикуляра, опущеннаго на ось ρ выраженіе:

$$\chi = \frac{b_1}{a_0} \frac{V a_0 \beta_0}{\alpha_0^{2}},$$

изъ котораго, благодаря перемѣнной величинѣ b_1/a_0, слѣдуетъ, что всякая прямая вышеупомянутаго пучка служитъ осью одного и только одного винта группы.

Группа (2, II, 2) $\rho = \omega a_1 \alpha + \omega b_1 \beta$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Всѣ винты имѣютъ безконечно большой параметръ; оси ихъ параллельны плоскости $(\alpha_0 . \beta_0)$.

Группа (3, II, 1) $\rho = a_0 \alpha + b\beta$. Въ группу входитъ одинъ винтъ безконечно большаго параметра $(\omega\beta)$. Винты этой группы опредѣляются прямолинейнымъ многообразіемъ бивекторовъ $(a_0 = 1)$ [см. § 89, (110)].

Безчисленное множество винтовъ имѣютъ общую ось съ $\beta (a_0 = 0)$; параметры ихъ могутъ быть какіе угодно. Всякій другой лучъ щетки $(\alpha . \beta)$ служитъ осью одного и только одного винта группы. Въ самомъ дѣлѣ, если онъ параллеленъ оси β $(a_0 = 0)$, то параметръ ему отвѣчающій безконечно великъ, если же онъ оси β не параллеленъ, то, взявъ какой нибудь бивекторъ σ, который имѣетъ его своею осью, по § 80 будемъ имѣть $\sigma = a\alpha + b\beta$, при чемъ $a_0 \neq 0$ (въ противномъ случаѣ оси σ и β были бы параллельны). Поэтому можно раздѣлить σ на a; мы получимъ тогда винтъ $\sigma / a = \alpha + (b : a)\beta$, который имѣетъ ось σ своею осью и принадлежитъ группѣ. Другаго винта съ тою же осью быть не можетъ, ибо такіе два винта отличались бы одинъ отъ другаго комплекснымъ множителемъ вида $f = f_0 + \omega f_1$ $(f_1 \neq 0)$, чего быть не можетъ.

Группѣ навѣрное принадлежитъ винтъ, ось котораго пересѣкаетъ ось β подъ прямымъ угломъ. Принявъ его за основной винтъ α группы, совмѣстимъ съ нимъ ось x, ось y направимъ по оси β, а ось щетки $(\alpha . \beta)$ возьмемъ за ось z. Пусть x, y, z суть координаты какой либо точки на оси винта ρ' группы. Если въ формулѣ (11) примемъ ρ'' за β, то $a'' = 0$, $b'' = 1$, $P(a'b'' - a''b') = Pa'b'' = 0$, $\theta_1 = z$, $ctg\theta_0 = y : x$ и мы получаемъ уравненіе

$$(P\rho' - P\alpha)x + yz = 0$$

гиперболическаго параболоида, образующія котораго служатъ осями винтовъ одного и того же параметра $P\rho'$. Для $P\rho'=Pa$ гиперболоидъ распадается на двѣ плоскости $y=0$, $z=0$. Оси y, z принадлежатъ всѣмъ гиперболоидамъ.

Группа (3, II, 2) $\rho=\omega a_1\alpha+b\beta$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра.

Оси винтовъ безконечно большаго параметра параллельны плоскости (α_0,β_0). Оси винтовъ конечнаго параметра параллельны оси β и, слѣдовательно, образуютъ пучекъ параллельныхъ прямыхъ. Совершенно такъ же, какъ въ случаѣ группы (2, II, 1), покажемъ, что всякая прямая этого пучка служитъ осью винта группы.

Умноживъ $\rho=\omega a_1\alpha+b\beta$ на $f=f_0+\omega f_1$ получимъ винтъ $\sigma=f\rho=\omega f_0 a_1\alpha+bf\beta$, который очевидно также принадлежитъ группѣ. Такъ какъ σ и ρ имѣютъ общую ось и $P\sigma=P\rho+Pf$, то ось винта конечнаго параметра служитъ осью безчисленнаго множества винтовъ всевозможныхъ параметровъ.

Группа (4, II, 2) $\rho=a\alpha+b\beta$. Въ группѣ два независимыхъ винта винта безконечно большаго параметра. Каждый лучъ щетки (α,β) служитъ осью безчисленнаго множества винтовъ какого угодно параметра.

96. *Группы трехъосныя.* $\rho=a\alpha+b\beta+c\gamma$. Возьмемъ три винта группы:

$$\rho'=a'\alpha+b'\beta+c'\gamma,\ \rho''=a''\alpha+b\beta+c''\gamma,\ \rho'''=a'''\alpha+b'''\beta+c'''\gamma.$$

Перемножая ихъ и беря скаларныя части произведенія, получаемъ

$$S\rho'\rho''\rho'''=\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} S\alpha\beta\gamma,$$

откуда, беря параметры обѣихъ частей,

$$PS\rho'\rho''\rho'''=P\Sigma(\pm a'b''c''')+PS\alpha\beta\gamma, \tag{13}$$

или, означивъ комплексный уголъ между осями ρ' и ρ'' черезъ $\theta=\theta_0+\omega\theta_1$ и комплексный уголъ между осью ρ''' и линіей кратчайшаго разстоянія между ρ' и ρ'' черезъ $\psi=\psi_0+\omega\psi_1$,

$$P\rho'+P\rho''+P\rho'''+\theta_1 ctg\theta_0-\psi_1 tg\psi_0=P\Sigma(\pm a'b''c''')+PS\alpha\beta\gamma.$$

Это формула общая для всѣхъ трехъосныхъ группъ.

Группа (3, III, 0) $\varrho = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma$. Въ группѣ нѣтъ винтовъ безконечно большаго параметра, ибо $a_0\alpha_0 + b_0\beta_0 + c_0\gamma_0 \neq 0$. Въ группѣ есть три винта, оси которыхъ пересѣкаются въ одной точкѣ подъ прямымъ угломъ. Въ самомъ дѣлѣ, условіе, чтобы оси винтовъ $\varrho' = a'_0\alpha + b'_0\beta + c'_0\gamma$ и $\varrho'' = a''_0\alpha + b_0''\beta + c_0''\gamma$ пересѣкались подъ прямымъ угломъ выразится равенствомъ:

$$S\varrho'\varrho'' = a_0'a_0''\alpha^2 + b'_0b''_0\beta^2 + c'_0c''_0\gamma^2 + S\beta\gamma(b'_0c''_0 + b''_0c'_0) +$$
$$S\gamma\alpha(c_0'a_0'' + c_0'a_0'') + S\alpha\beta(a'_0b''_0 + a''_0b'_0),$$

которое, если предположимъ для простоты $\alpha_0^2 = \beta_0^2 = \gamma_0^2 = -1$, будучи развернуто, распадается на два

$$a_0'a_0'' + b_0'b_0'' + c'_0c_0'' - S_0\beta\gamma(b_0'c_0'' + b_0''c_0') -$$
$$S_0\gamma\alpha(c_0'a_0'' + c_0''a_0') - S_0\alpha\beta(a_0'b_0'' + a_0''b_0') = 0, \qquad (14)$$

$$2a_0'a_0''P\alpha + 2b_0'b_0''P\beta + 2c_0'c_0''P\gamma - S_1\beta\gamma(b_0'c_0'' + b_0''c_0') -$$
$$S_1\gamma\alpha(c_0'a_0'' + c_0''a_0') - S_1\alpha\beta(a_0'b_0'' + a_0''b_0') = 0. \qquad (15)$$

Если черезъ какую нибудь точку проведемъ оси параллельныя осямъ α, β, γ и будемъ считать a_0, b_0, c_0 за координаты точки, отнесенной къ этимъ осямъ, то задача опредѣленія a'_0, b'_0, c'_0; a_0'', b_0'', c_0'', удовлетворяющихъ предъидущимъ уравненіямъ сведется, очевидно, къ задачѣ опредѣленія общихъ сопряженныхъ діаметровъ двухъ поверхностей

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + 2b_0c_0cs\varphi_1 + 2c_0a_0cs\varphi_2 + 2a_0b_0cs\varphi_3 = const.,$$

$$a_0^2P\alpha + b_0^2P\beta + c_0^2P\gamma - S_1\beta\gamma.b_0c_0 -$$
$$S_1\gamma\alpha.c_0a_0 - S_1\alpha\beta.a_0b_0 = const.,$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ углы между осями α, β, γ. Первая поверхность есть сфера. Такъ какъ сопряженные діаметры сферы взаимно перпендикулярны, то задача приводится къ опредѣленію взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ второй поверхности. Она имѣетъ три главныхъ діаметра, а потому можно найти три такихъ системы чиселъ a_0', b_0', c_0'; a_0'', b_0'', c_0''; a_0''', b_0''', c_0''', которыя будутъ удовлетворять ур. (14) и (15) и еще четыремъ, получающимся изъ нихъ круговой перестановкой значковъ $', '', '''$, у буквъ a, b, c. Три винта $\varrho', \varrho'', \varrho'''$ будутъ обладать тѣмъ свойствомъ, что ось каждаго пересѣкаетъ оси двухъ другихъ подъ прямымъ угломъ, такъ что оси $\rho'\rho''\rho'''$ будутъ пересѣкаться въ одной точкѣ. Эти три винта называются главными винтами группы. Если мы приемемъ ихъ за основные винты α,β,γ, то $S\beta\gamma=S\gamma\alpha=S\alpha\beta=0$.

Взявъ точку приведенія въ точкѣ пересѣченія осей α,β,γ, будемъ имѣть $\rho_0=\alpha_0 a_0+b_0\beta_0+c_0\gamma_0$, $\rho_1=a_0\alpha_0 P\alpha+b_0\beta_0 P\beta+c_0\gamma_0 P\gamma$ и для $P\rho$ и перпендикуляра χ получимъ:

$$P\rho=\frac{a_0{}^2P\alpha+b_0{}^2P\beta+c_0{}^2P\gamma}{a_0{}^2+b_0{}^2+c_0{}^2},$$

$$\chi=\frac{b_0c_0(P\gamma-P\beta)\alpha_0+c_0a_0(P\alpha-P\gamma)\beta_0+a_0b_0(P\beta-P\alpha)\gamma_0}{a_0{}^2+b_0{}^2+c_0{}^2}$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что при $P\alpha=P\beta=P\gamma$, $P\rho=P\alpha$ и $\chi=0$, т. е. когда параметры главныхъ винтовъ равны, то и параметры всѣхъ винтовъ группы равны, а оси ихъ образуютъ связку.

Примѣняя формулу (13) къ разсматриваемой группѣ, мы должны положить $P\Sigma(\pm a'b''c''')=0$, ибо числа a,b,c одночленны параметра нуль. Такимъ образомъ приходимъ къ теоремѣ.

Теорема. *Сумма* $P\rho'+P\rho''+P\rho'''+\theta_1 ctg\theta_0-\psi_1 tg\psi_0$ *есть величина постоянная для каждыхъ трехъ винтовъ* ρ',ρ'',ρ''' *трехчленной группы и равняется суммѣ параметровъ главныхъ винтовъ.*

Отсюда слѣдуетъ:

I. Сумма параметровъ каждыхъ трехъ винтовъ, оси которыхъ пересѣкаются въ одной точкѣ, есть величина постоянная.

II. Сумма параметровъ каждыхъ трехъ винтовъ, направленія осей которыхъ взаимно перпендикулярны, есть величина постоянная.

Ибо въ обоихъ указанныхъ случаяхъ $\theta_1 ctg\theta_0-\psi_1 tg\psi_0=0$.

Группа (3, III, 1) $\rho=a_0\alpha+b_0\beta+\omega c_1\gamma$. Въ группѣ одинъ винтъ безконечно большаго параметра $(\omega\gamma)$.

Группа (3, III, 2) $\rho=a_0\alpha+\omega b_1\beta+\omega c_1\gamma$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра $(\omega\beta,\omega\gamma)$. Оси винтовъ конечнаго параметра параллельны оси α. Принимая точку приведенія на оси α, получимъ для $P\rho$ и χ выраженія

$$P\rho = P\alpha + \frac{b_1}{a_0}\,\frac{S\alpha_0\beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{c_1}{a_0}\,\frac{S\alpha_0\gamma_0}{\alpha_0^2} \qquad (16)$$

$$\chi = \frac{b_1}{a_0}\,\frac{V\alpha_0\beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{c_1}{a_0}\,\frac{V\alpha_0\gamma_0}{\alpha_0^2} \qquad (17)$$

Векторы χ всѣ лежатъ въ одной плоскости, опредѣляемой векторами $V\alpha_0\beta_0$ и $V\alpha_0\gamma_0$, перпендикулярной къ оси α. Выбирая надлежащимъ образомъ отношенія b_1/a_0 и c_1/a_0 можемъ достигнуть того, что концемъ вектора χ будетъ произвольно выбранная точка этой плоскости; черезъ каждую ея точку проходитъ, слѣдовательно, ось одного изъ винтовъ группы. Такимъ образомъ: совокупность осей винтовъ конечнаго параметра образуютъ связку параллельныхъ прямыхъ. Каждой прямой отвѣчаетъ одинъ опредѣленный параметръ.

Если исключимъ изъ равенствъ (16) и (17) отношеніе c_1/a_0, то для χ получится линейное выраженіе относительно b_1/a_0, откуда слѣдуетъ, что концы векторовъ χ, соотвѣтствующихъ одному и тому же $P\rho$, лежатъ на одной прямой и, слѣдовательно, оси винтовъ одинаковаго параметра лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ.

Если плоскость винтовъ безконечно большаго параметра перпендикулярна къ оси α, то $S\alpha_0\beta_0 = S\alpha_0\gamma_0 = 0$ и $P\rho = P\alpha$, т. е. всѣ винты конечнаго параметра имѣютъ параметръ одинаковый.

Группа (3, III, 3) $\rho = \omega a_1\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\chi$. Въ группѣ три независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Группу образуетъ совокупность всѣхъ винтовъ безконечно большаго параметра.

Группа (4, III, 1) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + c\gamma$. Въ группу входитъ одинъ винтъ безконечно большаго параметра ($\omega\gamma$) и одна одноосная двучленная группа ($a_0 = b_0 = 0$).

Группа (4, III, 2) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta + c\gamma$. Въ группу входятъ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра и одна одноосная двучленная группа.

Группа (4, III, 3) $\rho = \omega a_1\alpha + \omega b_1\beta + c\gamma$. Въ группу входятъ три независимыхъ винта безконечно большаго параметра и одна одноосная двучленная группа.

Всѣ винты безконечно большаго параметра входятъ въ группу. Легко показать, что оси винтовъ конечнаго параметра образуютъ связку параллельныхъ (оси γ) прямыхъ; причемъ каждая изъ прямыхъ связки служитъ осью безчисленнаго множества винтовъ всевозможныхъ параметровъ.

Группа (5, III, 2) $\rho = a_0\alpha + b\beta + c\gamma$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Въ нее входитъ группа (4, II, 2).

Группа (5, III, 3) $\rho = \omega a_1\alpha + b\beta + c\gamma$. Въ группѣ три независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Всѣ винты безконечно большаго параметра входятъ въ группу.

Группа (6, III, 3) $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ есть совокупность всѣхъ винтовъ.

97. *Группы взаимныя.* Два винта ρ и σ называются взаимными, если ихъ относительный моментъ $S_1\rho\sigma = 0$, иначе говоря, если $S\rho\sigma$ есть вещественное число.

Теорема I. *Совокупность винтовъ взаимныхъ съ винтами n-членной группы образуютъ группу 6—n-членную.*

Докажемъ эту теорему для двухъ частныхъ случаевъ, напр. для группъ (3, III, 1) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + \omega c_1\gamma$ и (3, II, 1) $\rho = a_0\alpha + b\beta$. Такъ какъ въ первомъ случаѣ $a_1 = b_1 = c_0 = 0$, то условіе взаимности винта ρ съ винтомъ σ, который опредѣляется равенствомъ [см. (95) § 81]:

$$\sigma S\alpha\beta\gamma = x\alpha' + y\beta' + z\gamma',$$

гдѣ $\alpha' = V\beta\gamma$, $\beta' = V\gamma\alpha$, $\gamma' = V\alpha\beta$, будетъ [см. (99) § 81]

$$a_0x_1 + b_0y_1 + c_1z_0 = 0.$$

Для взаимности винта σ, со всѣми винтами группы $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + \omega c_1\gamma$ необходимо и достаточно, чтобы $x_1 = y_1 = z_0 = 0$ и, слѣдовательно,

$$\sigma S\alpha\beta\gamma = x_0\alpha' + y_0\beta' + \omega z_1\gamma'.$$

Такъ какъ величины x_0, y_0, z_1 могутъ быть совершенно произвольны, то винтовъ σ, которые взаимны со всѣми винтами группы ρ существуетъ безчисленное множество и ихъ совокупность представляетъ, очевидно, группу типа (3, III, 1), опредѣляемую предъидущимъ равенствомъ.

Совершенно также докажемъ, что совокупность винтовъ σ взаимныхъ съ винтами группы $\rho = a_0\alpha + b\beta$ образуетъ также трехчленную группу, которая опредѣлится равенствомъ

$$\sigma S\alpha\beta\gamma = x_0\alpha' + z\gamma'.$$

Разсматривая эти примѣры, мы видимъ, что группа взаимная съ $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ опредѣляется равенствомъ $\sigma S\alpha\beta\gamma = x\alpha' + y\beta' + z\gamma'$, при чемъ, если числа a и x, b и y, c и z назовемъ соотвѣтствующими, то, когда въ группѣ $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ числа a,b,c одночленны, въ группѣ взаимной $\sigma S\alpha\beta\gamma = x\alpha' + y\beta' + z\gamma'$ соотвѣтствующія имъ числа x,y,z также одночленны и параметры каждой пары соотвѣтствующихъ чиселъ или равны нулю, или безконечно велики. Такъ, въ первомъ примѣрѣ, $a = a_0$ и $x = x_0$, $c = \omega c_1$ и $z = \omega z_1$. Если же какое нибудь изъ чиселъ a,b,c, равно нулю, или двучленно, то соотвѣтствующее ему между x,y,z двучленно, или равно нулю. Такъ, во второмъ примѣрѣ, $c = 0$ и $z = z_0 + \omega z_1$, $b = b_0 + \omega b_1$ и $y = 0$. Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующую теорему:

Теорема II. *Группа взаимная съ* $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ *опредѣляется равенствомъ*

$$\sigma S\alpha\beta\gamma = x\alpha' + y\beta' + z\gamma'.$$

Если числа a, b, c одночленны, то одночленны и числа x,y,z причемъ параметры какой либо пары чиселъ или равны нулю, или безконечно велики. Если же какое нибудь изъ чиселъ a, b, c двучленно, то соотвѣтствующее между x, y, z равно нулю; если же какое нибудь изъ чиселъ a,b,c равно нулю, соотвѣтствующее между x,y,z будетъ двучленнымъ.

Эта теорема даетъ возможность по данной группѣ, когда она приведена къ каноническому виду, тотчасъ же построить группу взаимную.

98. *Группы дополнительныя.* Пусть имѣемъ n-членную группу $\rho = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \ldots + a_n\rho_n$. Взявъ какихъ нибудь два винта этой группы, $\rho' = a_1'\rho_1 + a_2'\rho_2 + \ldots a_n'\rho_n$ и $\rho'' = a_1''\rho_1 + a_2''\rho_2 + \ldots + a_n''\rho_n$ и построивъ $V\rho'\rho''$, получаемъ винтъ

$$\tau = V\rho'\rho'' = (a_1'a_2'' - a_1''a_2')V\rho_1\rho_2 + (a_1'a_3'' - a_1''a_3')V\rho_1\rho_3 + \ldots$$

Комбинируя подобнымъ же образомъ каждый винтъ группы ρ съ каждымъ другимъ винтомъ той же группы и строя для каждой такой пары векторное произведеніе, мы получимъ безчисленное множество винтовъ, которые, очевидно, принадлежать группѣ

$$\tau = b_{12} V\varrho_1\varrho_2 + b_{13} V\varrho_1\varrho_3 + \ldots$$

Обратно, какой бы винтъ τ этой группы мы ни взяли, т. е. каковы бы ни были числа $b_{12}, b_{13}, \ldots$ всегда можно подобрать $a_1', a_2', \ldots a_n'$; $a_1'', a_2'', \ldots a_n''$ такъ, чтобы $a_1'a_2'' — a_1''a_2 = b_{12}$, $a_1'a_3'' — a_1''a_3' = b_{13}, \ldots$; слѣдовательно, каждый винтъ группы τ будетъ векторнымъ произведеніемъ какихъ либо двухъ винтовъ группы ϱ. Группу τ назовемъ дополнительной къ группѣ ϱ. Когда $V\varrho_1\varrho_2 = V\varrho_1\varrho_3 = \ldots = 0$, будемъ говорить, что дополнительная группа исчезаетъ.

Разсмотримъ нѣкоторыя свойства дополнительной группы. Докажемъ сначала слѣдующую теорему:

Теорема I. *Если каждый изъ винтовъ* α, β *взаименъ съ каждымъ изъ винтовъ* γ, δ, *то винтъ* $V\alpha\beta$ *взаименъ съ винтомъ* $V\gamma\delta$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу взаимности винтовъ α и β съ γ и δ, $S\alpha\gamma$, $S\alpha\delta$, $S\beta\gamma$, $S\beta\delta$ будутъ вещественными числами; слѣдовательно, по формулѣ (74) § 77 будетъ также вещественнымъ числомъ и $SV\alpha\beta V\gamma\delta$ и винты $V\alpha\beta$ и $V\gamma\delta$ будутъ взаимны. Изъ этой теоремы вытекаетъ

Теорема II. *Если группы* ϱ *и* σ *взаимны, то всѣ винты группы дополнительной къ* ϱ *будутъ взаимны съ винтами группы дополнительной къ* σ.

Разсмотримъ сколько членовъ въ дополнительной группѣ. Основныхъ винтовъ группы τ, $V\varrho_1\varrho_2$, $V\varrho_1\varrho_3, \ldots$, будетъ $n(n—1)/2$. Слѣдовательно дополнительная группа τ будетъ или $n(n—1)/2$-членной, если винты $V\varrho_1\varrho_2$, $V\varrho_1\varrho_3, \ldots$ независимы, или, если они зависимы, то будетъ содержать меньше чѣмъ $n(n—1)/2$ членовъ. Во всякомъ случаѣ число ея членовъ не можетъ быть больше $n(n—1)/2$.

Чтобы точнѣе опредѣлить типъ и число членовъ дополнительной группы въ каждомъ частномъ случаѣ, приведемъ данную группу къ ея каноническому виду $\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma$, гдѣ числа a, b, c, смотря по типу группы, могутъ быть равны нулю или быть одно-или дву-членными. Взявъ два винта группы, $\varrho' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$ и $\varrho'' = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma$, строимъ винтъ

$$\tau = (b'c'' — b''c')V\beta\gamma + (c'a'' — c''a')V\gamma\alpha + (a'b'' — a''b')V\alpha\beta \quad (18)$$

или, положиьъ

$$f=b'c''—b''c',\ g=c'a''—c''a',\ h=a'b''—a''b',$$
$$\alpha'=V\beta\gamma,\ \beta'=V\gamma\alpha,\ \gamma'=V\alpha\beta;$$
$$\tau=f\alpha'+g\beta'+h\gamma' \qquad (19)$$

Мы получимъ всѣ винты дополнительной группы, если числамъ a',b',c',a'',b'',c'' будемъ давать всѣ возможныя для нихъ значенія, т. е. будемъ измѣнять эти числа такъ, чтобы винты ρ' и ρ'' принадлежали къ данной группѣ, и, слѣдовательно, a' и a'', b' и b'', c' и c'' были бы одинаковаго типа соотвѣтственно съ a,b,c. Это значитъ, что числа a' и a'' должны пробѣгать, оставаясь вещественными, всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, если въ группѣ ρ число a одночленно параметра нуль; числа a' и a'' должны быть вида $a_1'\omega$ и $a_1''\omega$, причемъ a_1' и a_1'' должны мѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$, если a одночленно безконечно большаго параметра; числа a' и a'' должны быть какими угодно числами вида $a_0'+\omega a_1'$ и $a_0''+\omega a_1''$, если число a двучленно, и наконецъ $a'=a''=0$, если $a=0$. Такова же связь между числами b', b'' и b; c', c'' и c. Такимъ образомъ формулы (18) и (19) опредѣляютъ дополнительную группу во всѣхъ случаяхъ.

Опредѣлимъ, напримѣръ, группу дополнительную къ группѣ (4, III, 1) $\rho = a_0\alpha+b_0\beta+c\gamma$. Въ этомъ случаѣ числа a,a',a'',b,b',b'' одночленны параметра нуль, числа же c,c',c'' двучленны; поэтому число $h=a'b''—a''b'$ будетъ одночленнымъ, h_0, числа же $f=b'c''—b''c'$ и $g=c'a''—c''a'$ двучленными и группа дополнительная будетъ $\tau=f\alpha'+g\beta'+h_0\gamma'$,—пятичленной типа (5, III, 2). Пользуясь формулой (19), легко показать, что, вообще говоря, группа дополнительная къ одноосной исчезаетъ, къ двуосной—одноосна, къ трехъосной —трехъосна; группа дополнительная къ одночленной исчезаетъ, къ двучленной—одночленна, къ трехчленной—трехчленна, къ четырехчленной пятичленна, къ пятичленной—шестичленна

Въ частныхъ случаяхъ число членовъ дополнительной группы можетъ быть и менѣе указанныхъ высшихъ предѣловъ.

99. *Группы замкнутыя и разомкнутыя.* Раздѣлимъ группы на два класса. Если всѣ винты группы дополнительной къ данной, принадлежатъ къ этой послѣдней, или исчезаютъ, то данную группу будемъ называть замкнутой. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда это условіе невыполнено, будемъ группу на-

зывать не замкнутой, или разомкнутой. Если произведенія $V\rho_1\rho_2$, $V\rho_1\rho_3 \ldots$, каждыхъ двухъ винтовъ ρ_1, $\rho_2, \ldots \rho_n$, которыя служатъ основными винтами группы τ, дополнительной къ $\rho = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \ldots + a_n\rho_n$, всѣ принадлежатъ группѣ ρ, то и всѣ винты группы τ принадлежатъ группѣ ρ и группа ρ замкнута; когда хотя одно изъ произведеній $V_1\rho_2\rho$, $V\rho_1\rho_3, \ldots$ въ составъ группы ρ не входитъ, она разомкнута.

Опредѣлимъ типы замкнутыхъ группъ.

Такъ какъ группа τ, дополнительная одноосной группѣ, исчезаетъ, то изъ опредѣленія дополнительной группы слѣдуетъ, что всѣ одноосныя группы замкнуты.

Группа дополнительная къ двуосной $\rho = a\alpha + b\beta$ есть группа одноосная, $\tau = h\gamma'$. Винты группы τ имѣютъ осью ось γ', винты же группы ρ пересѣкаютъ ось γ' подъ прямымъ угломъ. Поэтому ни одинъ изъ винтовъ группы τ не можетъ принадлежать группѣ ρ и двуосная группа можетъ быть замкнутой только тогда, когда $h = a'b'' - a''b' = 0$, для чего должно быть $a = \omega a_1$ и $b = \omega b_1$ и $\rho = \omega a_1\alpha + \omega b_1\beta$. Итакъ изъ двуосныхъ группъ замкнута только двучленная группа винтовъ безконечно большаго параметра.

Чтобы опредѣлить, какія изъ трехъосныхъ группъ замкнуты, разсмотримъ послѣдовательно группы трехчленныя, четырехчленныя и пятичленныя.

Группа (3, III, 0). Дополнительная группа $\tau = f_0\alpha' + g_0\beta' + h_0\gamma'$. Если за основые винты α, β, γ группы ρ взяты главные винты этой группы, то основные винты дополнительной группы, α', β', γ', будуть имѣть своими осями оси α, β, γ и параметрами суммы $P\beta + P\gamma, P\gamma + P\alpha, P\alpha + P\beta$ соотвѣтственно. Поэтому, чтобы група ρ могла быть замкнута, необходимо существованіе равенствъ $P\beta + P\gamma = P\alpha, P\gamma + P\alpha = P\beta$, $P\alpha + P\beta = P\gamma$, изъ которыхъ слѣдуетъ $P\alpha = P\beta - P\gamma = 0$. Соблюденіе этого условія вполнѣ достаточно, ибо когда параметры главныхъ винтовъ равны нулю, то параметры и всѣхъ винтовъ группы равны нулю, и оси ихъ образуютъ связку. Въ такомъ случаѣ очевидно, что группа τ винтовъ дополнительныхъ къ ρ будетъ тожественна съ этой послѣдней; слѣдовательно группа ρ будетъ замкнута.

Група (3,III,1) не можетъ быть замкнутой. Въ самомъ дѣлѣ, группа дополнительная имѣетъ видъ $\tau = \omega f_1\alpha' + \omega g_1\beta' + h_0\gamma'$. Она содержитъ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра, въ группу же ρ входитъ только одинъ такой винтъ. Слѣдовательно не всѣ винты группы τ принадлежатъ ρ и группа ρ разомкнута.

Группа (3,III,2). Группой дополнительной служитъ двучленная группа $\tau=\omega g_1\beta'+\omega h_1\gamma'$ винтовъ безконечно большаго параметра, оси которыхъ параллельны плоскости, опредѣляемой векторами $V\gamma_0\alpha_0$ и $V\alpha_0\beta_0$, перпендикулярной оси α. Группѣ ρ также принадлежитъ двучленная группа винтовъ безконечно большого параметра $(a_0=0)$, оси которыхъ параллельные плоскости (β_0,γ_0). Поэтому, чтобы всѣ винты группы τ принадлежали группѣ ρ плоскость (β_0,γ_0) и оси β,γ должны быть перпендикулярны оси α. Итакъ группа будетъ замкнутой только тогда, когда всѣ винты конечнаго параметра, оси которыхъ образуютъ связку параллельныхъ прямыхъ, имѣютъ одинаковый параметръ.

Группа (3, III, 3). Дополнительная группа исчезаетъ, $\tau=0$. Группа ρ замкнута.

Группы четырехчленныя. Желая построить группу дополнительную къ четырехчленной, должны числа $a',a'',b'b''$ считать одночленными. а числа c' и c'' двучленными.

Группа (4, III, 1) разомкнута, ибо группа дополнительная къ ней, $\tau=f\alpha'+g\beta'+h_0\gamma'$, пятичленна.

Группа (4, III, 2). Группа дополнительная, $\tau=\omega f_1\alpha'+g\beta'+\omega h_1\gamma'$, четырехчленна и содержитъ три независимыхъ винта безконечно большаго параметра; въ группу же ρ такихъ винта входитъ только два : группа ρ разомкнута.

Группа (4, III, 3). Дополнительной группой служитъ двучленная, $\tau=\omega f_1\alpha'+\omega g_1\beta'$, винтовъ безконечно большаго параметра. Такъ какъ всѣ винты безконечно большаго параметра входятъ въ группу ρ, то группа ρ замкнута.

Группы пятичленныя. Для пятичленныхъ группъ числа b',b'',c',c'' двучленны, а числа a',a'' одночленны.

Группа (5, III, 2) не можетъ быть замкнутой, ибо группа къ ней дополнительная, $\tau=f\alpha'+g\beta'+h\gamma'$, шестичленна.

Группа (5, III, 3). Группа дополнительная имѣетъ видъ $\tau=f\alpha'+\omega g_1\beta'+\omega h_1\gamma'$. Оси всѣхъ ея винтовъ конечнаго параметра параллельны оси α'; между тѣмъ оси винтовъ конечнаго параметра группы ρ параллельны плоскости (β_0,γ_0) и, слѣдовательно, перпендикулярны оси α'. Группа ρ разомкнута.

Группа шестичленная. Эта группа замкнута, такъ какъ она представляетъ совокупность всѣхъ винтовъ.

Результаты предъидущихъ изслѣдованій мы резюмируемъ слѣдующей таблицей, на лѣвой сторонѣ которой перечислены всѣ типы замкнутыхъ группъ, а на правой приведены группы съ ними взаимныя. Послѣднія получены по правиламъ § 97.

Группы замкнутыя.	**Группы съ ними взаимныя.**
Одночленныя.	Пятичленная.
Всѣ одночленныя группы замкнуты.	Пятичленныя всѣхъ типовъ.
Двучленныя.	Четырехчленныя.
1. (2, I, 1) Одноосная группа $\rho=a\alpha$. Совокупность винтовъ, которые имѣютъ общую ось съ α.	1. (4, II, 2). Двуосная группа $\sigma S\alpha\beta\gamma=y\beta'+z\gamma'$. Совокупность винтовъ, оси которыхъ образуютъ щетку съ осью α.
2. (2, II, 2). Группа $\rho=\omega a_1\alpha+\omega b_1\beta$ винтовъ безконечно большаго параметра.	2. (4, III, 3). Группа $\rho S\alpha\beta\gamma=\omega x_1\alpha'+\omega y_1\beta'+z\gamma'$ съ тремя независимыми винтами безконечно большаго параметра.
Трехчленныя.	Трехчленныя.
1. (3, III, 0). Группа $\rho=a_0\alpha+b_0\beta+c_0\gamma$, при чемъ оси винтовъ образуютъ связку и параметры ихъ равны нулю.	1. (3, III, 0). Группа $\sigma S\alpha\beta\gamma=x_0\alpha'+y_0\beta'+z_0\gamma'$ тожественная съ взаимной съ ней группой ρ.
2 (3, III, 2). Группа $\rho=a_0\alpha+\omega b_1\beta+\omega c_1\gamma$ причемъ оси β и γ перпендикулярны къ оси α. Группа состоитъ изъ винтовъ безконечно большаго параметра, оси которыхъ перпендикулярны оси α и, винтовъ одинаковаго параметра $P\alpha$, оси которыхъ образуютъ связку прямыхъ параллельныхъ оси α.	2. (3, III, 2). Группа $\sigma S\alpha\beta\gamma=x_0\alpha'+\omega y_1\beta'+\omega z_1\gamma'$. Группа состоитъ изъ винтовъ безконечно большаго параметра, оси которыхъ перпендикулярны оси α, и винтовъ параметра—$P\alpha$, оси которыхъ образуютъ связку прямыхъ параллельныхъ оси α.
3. (3, III, 3). Группа $\rho=\omega(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma)$ винтовъ безконечно большаго параметра.	3. (3, III, 3). Группа $\sigma S\alpha\beta\gamma=\omega(x_1\alpha'+y\beta'+z\gamma')$ винтовъ безконечно большаго параметра.
Четырехчленныя.	Двучленныя.
1. (4, III, 3). Группа $\rho=\omega a_1\alpha+\omega b_1\beta+c\gamma$ съ тремя независимыми винтами безконечно большаго параметра.	1. (2, II, 2). Группа $\sigma S\alpha\beta\gamma=\omega(x_1\alpha'+y\beta')$ винтовъ безконечно большаго параметра.
Шестичленная.	Исчезающая.
1. Шестичленная группа.	

100. *Задача: построить замкнутую группу, исходя отъ двухъ, или трехъ, данныхъ винтовъ.* Пусть намъ даны два винта ρ_1 и ρ_2, которые опредѣляютъ двучленную группу. Группа дополнительная къ ней состоитъ изъ одного винта $\rho_3=V\rho_1\rho_2$. Если $\rho_3\neq0$, то винты ρ_1,ρ_2,ρ_3 будутъ независимы и будутъ опредѣлять трехчленную группу $\rho=a_1\rho_1+a_2\rho_2+a_2\rho_3$, которая можетъ быть замкнутой, или разомкнутой. Въ первомъ случаѣ, какую бы пару винтовъ ρ',ρ'' группы мы ни взяли,

строя $V\rho'\rho''$, не получимъ новыхъ винтовъ. Во второмъ навѣрное есть въ группѣ хотя одна пара винтовъ ρ'_1, ρ'', для которыхъ винтъ $\rho_4 = V\rho'\rho''$ не принадлежитъ группѣ, такъ что четыре винта $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ будутъ независимы и опредѣлятъ четырехчленную группу $\rho = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + a_3\rho_3 + a_4\rho_4$. Если эта группа замкнутая, то векторныя произведенія ея винтовъ не дадутъ намъ новыхъ винтовъ. Если же она разомкнута, то въ ней найдемъ такихъ два винта ρ' и ρ'', что $\rho_5 = V\rho'\rho''$ не будетъ принадлежать группѣ, и независимые винты $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ опредѣлятъ пятичленную группу. Пятичленныя группы разомкнуты, а потому навѣрное въ группѣ найдемъ два винта ρ', ρ'' для которыхъ $\rho_6 = V\rho'\rho''$ не будетъ принадлежать группѣ. Винты $\rho_1, \ldots \rho_6$ будутъ независимы и опредѣлятъ шестичленную группу.

Такимъ образомъ, исходя отъ двухъ винтовъ ρ_1 и ρ_2, или какихъ нибудь другихъ двухъ винтовъ двучленной группы, ими опредѣляемой, и поступая такъ, какъ только что было указано, непремѣнно придемъ или къ шестичленной, или къ какой нибудь другой замкнутой группѣ. Спрашивается, каждая ли замкнутая группа можетъ быть получена указаннымъ способомъ и каковы должны быть винты ρ_1 и ρ_2, или, лучше, двучленная группа ими опредѣляемая, чтобы придти къ той, или другой замкнутой группѣ? Для рѣшенія этого вопроса дѣлаемъ всѣ возможныя относительны группы $\rho = \alpha_1\rho_1 + a_2\rho_2$ предположенія и разсматриваемъ къ какой замкнутой группѣ мы приходимъ въ каждомъ частномъ случаѣ. Такъ какъ эти изслѣдованія просты, то мы не будемъ входить въ подробности и приведемъ только результаты.

А. 1. Винты ρ_1 и ρ_2 имѣютъ безконечно большой параметръ и опредѣляютъ двучленную группу винтовъ безконечно большаго параметра. Какую бы пару винтовъ ρ' и ρ'' этой группы ни взяли, $V\rho'\rho'' = 0$ и мы не получимъ новыхъ винтовъ.

2. Если данные винты ρ_1 и ρ_2 имѣютъ общую ось, или параметръ одного изъ нихъ безконечно великъ и оси параллельны, то они опредѣляютъ одноосную группу $\rho = a\alpha$. И въ этомъ случаѣ $V\rho'\rho''$ для какихъ либо двухъ винтовъ группы $= 0$.

В. Если винты ρ_1 и ρ_2 имѣютъ конечный параметръ, но оси ихъ параллельны, или, если параметръ одного изъ нихъ безконечно великъ, но оси не параллельны, то они опредѣляютъ двучленную группу типа (2, II, 1) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta$. Эта группа даетъ различные результаты, смотря по тому, будетъ ли ось α перпендикулярна къ оси β, или нѣтъ.

1. Когда $\alpha_0 \perp \beta_0$, приходимъ къ замкнутой группѣ типа (3, III, 2) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$, причемъ $\alpha_0 \perp \gamma_0$, такъ что всѣ винты конечнаго параметра имѣютъ одинаковый параметръ.

2. Когда оси α и β не перпендикулярны, приходимъ къ замкнутой четырехчленной группѣ (4, III, 3) $\rho = a\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$ съ тремя независимыми винтами безконечно большаго параметра

C. Если оси винтовъ ρ_1 и ρ_2 не параллельны и параметры ихъ не безконечно велики, то они опредѣляютъ группу типа (2, II, 0) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta$. При этомъ можетъ быть два случая.

1. Когда $P\rho_1 = P\rho_2 = 0$ и оси ρ_1 и ρ_2 пересѣкаются, то вышеуказанными построеніями приходимъ къ замкнутой группѣ типа (3, III, 0) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma$ винтовъ параметра нуль.

2. Въ другихъ случаяхъ приходимъ къ шестичленной группѣ.

Такимъ образомъ всѣ замкнутыя группы, кромѣ трехчленной группы винтовъ безконечно большаго параметра могутъ быть получены вышеуказанныхъ путемъ, исходя отъ винтовъ двучленной группы.

Если мы, поступая подобно предъидущему, начнемъ построенія съ винтовъ трехчленной группы, то можетъ представиться три случая.

1. Данная трехчленная группа замкнута. Тогда векторное произведеніе какихъ либо двухъ винтовъ группы снова принадлежитъ группѣ.

2. Если данная группа принадлежитъ къ типу (3, III, 2) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$, при чемъ оси β и γ не перпендикулярны къ оси α, то приходимъ замкнутой четырехчленной группѣ (4, III, 3) $\rho = a\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$ съ тремя независимыми винтами безконечно большаго параметра.

3. Въ остальныхъ случаяхъ получаемъ шестичленную группу.

101. *Замкнутыя группы винтовъ и группы движеній.* Такъ какъ всякій винтъ опредѣляетъ ∞^1 движеній неизмѣ-

няемой системы, а именно движенія, которыя получатся, если, связавъ систему съ гайкой винта будемъ поворачивать гайку на всѣ возможные углы отъ $-\infty$ до $+\infty$, то n—членная группа ∞^{n-1} винтовъ опредѣлитъ ∞^n движеній. Эта совокупность движеній называется группой, если два послѣдовательныя движенія совокупности, слагаясь, будутъ эквивалентны одному движенію той же совокупности. Въ противномъ случаѣ совокупность движеній группы не образуетъ. Мы покажемъ теперь, что только замкнутыя группы винтовъ опредѣляютъ группы движеній. Съ этою цѣлью обратимся къ рѣшенію слѣдующей задачи.

Имѣемъ два винта α и β съ соотвѣтствующими имъ гайками и нѣкоторую неизмѣняемую систему, занимающую положеніе P_0. Сообщимъ гайкамъ послѣдовательныя безконечно малыя перемѣщенія въ такомъ порядкѣ: 1) перемѣстимъ первую гайку винта α, 2) перемѣстимъ вторую гайку винта β, 3) вернемъ первую гайку въ ея первоначальное положеніе и 4) вернемъ вторую гайку въ ея первоначальное положеніе, и представимъ себѣ, что неизмѣняемая система связана поочередно то съ первой, то со второй гайкой, всякій разъ съ той изъ нихъ, которой мы сообщаемъ перемѣщеніе, сначала съ первой, потомъ со второй, затѣмъ снова съ первой и снова со второй. Неизмѣняемая система получитъ такимъ образомъ четыре перемѣщенія: первая гайка переведетъ ее изъ положенія P_0 въ (1), вторая изъ (1) во (2), затѣмъ снова первая изъ (2) въ (3) и наконецъ вторая изъ (3) въ P_1. Въ результатѣ этихъ перемѣщеній гайки придутъ въ ихъ первоначальное положеніе, а неизмѣняемая система придетъ изъ положенія P_0 въ безконечно близкое положеніе P_1, которое, вообще говоря, будетъ отлично отъ положенія P_0. Но мы можемъ перевести неизмѣняемую систему изъ P_0 въ P_1 сразу, однимъ винтовымъ движеніемъ. Постараемся опредѣлить винтъ, это движеніе опредѣляющій. Мы достигнемъ этого, если найдемъ безконечно малыя приращенія, которыя получаютъ координаты какой либо точки M неизмѣняемой системы при переходѣ ея изъ положенія P_0 въ P_1 черезъ положенія (1), (2), (3), и съ этою цѣлью зададимся вопросомъ болѣе общимъ, опредѣлить приращеніе, получаемое какой либо функціей отъ координатъ этой точки, при сказанныхъ перемѣщеніяхъ. Означимъ черезъ x, y, z координаты точки M безъ значковъ въ ея положеніи P_0

со значками 1,2,3,4 въ положеніяхъ (1), (2), (3) и P_1, и пусть (x,y,z) какая нибудь функція Означимъ черезъ p,q,r,a,b,c; p_1,q_1,r_1,a_1,b_1,c_1 координаты бивекторовъ α и β. При равномѣрномъ движеніи первой гайки координаты точки M и ихъ функція f становятся функціями времени; и легко видѣть, что первой производной отъ $f(x,y,z)$ по времени будетъ

$$Xf=(a+qz-ry)\frac{\partial f}{\partial x}+(b+rx-pz)\frac{\partial f}{\partial y}+(c+py-qx)\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Второй производной отъ $f(x,y,z)$ будетъ XXf, третьей $XXXf$ и т. д.. Поэтому, если τ есть безконечно малый промежутокъ времени, въ теченіи котораго происходитъ движеніе первой гайки, то

$$f_1=f+\tau Xf+\frac{1}{2}\tau^2 XXf+\ldots, \tag{20}$$

гдѣ $f_1=f(x_1,y_1,z_1)$. Означивъ черезъ X_1f выраженіе, въ которое переходитъ Xf, если при буквахъ p,q,r,a,b,c поставимъ значекъ 1, черезъ τ_1—безконечно малый промежутокъ времени движенія второй гайки, черезъ f_2—$f(x_2,y_2,z_2)$, найдемъ, что

$$f_2=f_1+\tau_1X_1f_1+\frac{1}{2}\tau_1{}^2X_1X_1f_1+\ldots,$$

или, замѣняя по формулѣ (20) X_1f_1, черезъ $X_1f+\tau XX_1f+\ldots$, $X_1X_1f_1$—черезъ $X_1X_1f+\ldots$,

$$f_2=f+(\tau X+\tau_1X_1)f+\frac{1}{2}(\tau^2XX+2\tau\tau_1X_1X+\tau_1{}^2X_1X_1)f+.,\tag{21}$$

Далѣе, значеніе функціи $f(x,y,z)$, когда первая гайка вернется въ первоначальное положеніе, $f(x_3,y_3,z_3)=f_3$, будетъ

$$f_3=f_2-\tau Xf_2+\frac{1}{2}\tau^2XXf_2-\ldots,$$

но по формулѣ (21) $Xf_2=Xf+(\tau X+\tau_1X_1)Xf+\ldots$, $XXf_2=$ $=XXf+\ldots$, слѣдовательно

$$f_3=f+\tau_1X_1f+\tau\tau_1(X_1X-XX_1)f+\frac{1}{2}\tau_1X_1X_1f+\ldots$$

Наконецъ, когда вторая гайка вернется въ свое первоначальное положенiе, $f(x,y,z)$ обратится въ

$$f_4 = f_3 - \tau_1 X_1 f_3 + \frac{1}{2}\tau_1{}^2 X_1 X_1 f_3 - \ldots\,,$$

или, замѣняя f_3 его выраженiемъ по предъидущей формулѣ и ограничиваясь членами втораго порядка,

$$f_4 = f + \tau\tau_1 (X_1 X - X X_1) f = f + \tau\tau_1 (X_1 X) f,$$

гдѣ

$$(X_1 X) f = (A + Qz - Ry)\frac{\partial f}{\partial x} + (B + Rx - Pz)\frac{\partial f}{\partial y} + \\ + (C + Py - Qx)\frac{\partial f}{\partial z}\,, \qquad (22)$$

и P,Q,R,A,B,C опредѣляются формулами (8) § 14. Чтобы опредѣлить теперь приращенiя, получаемыя координатами точки M при переходѣ изъ положенiя P_0 въ P, нужно только положить $f(x,y,z)$ попорядку $= x$, потомъ $= y$, и наконецъ $= z$; тогда получимъ формулы

$$x_4 - x = \delta x = (A + Qz - Ry)\eta,$$
$$y_4 - y = \delta y = (B + Rx - Pz)\eta,$$
$$z_4 - z = \delta z = (C + Py - Qx)\eta,$$

гдѣ $\eta = \tau\tau_1$, изъ которыхъ вытекаетъ

Теорема I. ***Винтъ, опредѣляющiй перемѣщенiе изъ P_0 въ P_1, есть векторное произведенiе винтовъ α и β, $V\alpha\beta$.***

Допустимъ, что α и β два винта нѣкоторой группы винтовъ ϱ, которая опредѣляетъ группу движенiй; тогда всѣ движенiя: переводящее систему изъ положенiя P_0 въ (1), изъ (2) въ (3), изъ (3) въ P_1, а слѣдовательно и движенiе, которое переводитъ систему изъ P_0 въ P_1 и опредѣляется винтомъ $V\alpha\beta$, должно принадлежать группѣ движенiй. Поэтому винтъ $V\alpha\beta$ долженъ входить въ составъ группы ϱ, а такъ какъ α и β могутъ быть какими угодно винтами группы ϱ, то векторное произведенiе двухъ произвольно взятыхъ винтовъ группы ϱ должно принадлежать группѣ ϱ, и группа ϱ должна быть замкнутой. Такимъ образомъ замкнутость группы винтовъ является условіемъ необходимымъ для того, чтобы она могла опредѣлять группу движеній. Это условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая замкнутыя группы, перечисленныя въ § 99, легко видѣть, что движенія, которыя опредѣляются винтами какой нибудь изъ нихъ, слагаясь, всегда даютъ движеніе, опредѣляемое однимъ изъ винтовъ той же группы. Итакъ мы имѣемъ теорему:

Теорема II. *Только замкнутыя группы винтовъ опредѣляютъ группы движеній. Движенія же, опредѣляемыя разомкнутой группой винтовъ, группы не образуютъ.*

Сдѣлаемъ еще замѣчаніе по поводу формулы (22). Скобки $(X_1 X)f$, составленныя изъ двухъ выраженій Xf и $X_1 f$, отвѣчающихъ бивекторамъ α и β, представляютъ выраженіе подобное Xf и $X_1 f$, отвѣчающее бивектору $V\alpha\beta$. Поэтому, если мы означимъ черезъ $X_2 f$ результатъ замѣны въ $X_1 f$ значковъ 1 у буквъ p,q,r,a,b,c значками 2, черезъ γ бивекторъ съ координатами $p_2, q_2, r_2, a_2, b_2, c_2$, то выраженіе $(X_2(XX_1))f$ будетъ подобно Xf, $X_1 f$ и $X_2 f$ и будетъ соотвѣтствовать бивектору $V\gamma V\alpha\beta$, и тожество Jacobi:

$$(X(X_1 X_2)) + (X_1(X_3 X)) + (X_2(XX_1)) = 0$$

будетъ эквивалентно тожеству

$$V\alpha V\beta\gamma + V\beta V\gamma\alpha + V\gamma V\alpha\beta = 0,$$

которое мы разсматривали въ § 90. Такимъ образомъ теорема, формулированная нами въ концѣ § 90 есть геометрическое толкованіе тожества Jacobi для указаннаго частнаго вида выраженій Xf, $X_1 f$, $X_2 f$.

Глава III.

102. *Опредѣленія.* Лагранжъ въ своемъ классическомъ трактатѣ Mécanique Analytique ясно формулировать условія, которымъ должны удовлетворять связи системы матерьяльныхъ точекъ, чтобы имѣлъ мѣсто законъ движенія центра тяжести,

или момента количествъ движенія. Центръ тяжести системы будетъ двигаться въ нѣкоторомъ направленіи какъ матерьяльная точка, къ которой приложены всѣ силы системы и въ которой сосредоточена вся масса системы, если связи позволяютъ сообщить системѣ во всякомъ ея положеніи поступательное перемѣщеніе по этому направленію. Для того, чтобы имѣлъ мѣсто законъ моментовъ количествъ движенія относительно какой нибудь оси, нужно, чтобы систему точекъ во всякомъ ея положеніи можно было повернуть вокругъ этой оси. Итакъ Лагранжъ предполагаетъ, что можно, не измѣняя относительнаго расположенія точекъ системы, сообщить ей въ первомъ случаѣ поступательное перемѣщеніе, во второмъ—вращательное. Но оба эти перемѣщенія представляютъ лишь частный случай самаго общаго, на которое способно твердое тѣло,—перемѣщенія винтового, а потому весьма естественно задаться вопросомъ, что дастъ намъ принципъ D'Alembert'a въ соединеніи съ принципомъ возможныхъ перемѣщеній, если связи позволяютъ сообщить системѣ во всякомъ ея положеніи винтовое перемѣщеніе. Этотъ вопросъ приводитъ насъ къ винтовымъ интеграламъ, свойства которыхъ, какъ увидимъ, тѣсно связаны съ результатами предъидущей главы. На существованіе винтовыхъ интеграловъ было указано впервые г. Cerruti („Nuova theorema generale di meccanica". Atti della R. Acad. dei Lincei (3), II; „Intorno ad una generalizzazione ad alcuni theoremi di meccanica", Collectanea math. in mem. G. Chelini). Мои изслѣдованія, относящіяся къ винтовымъ интеграламъ, которыя составятъ содержаніе этой главы, служили предметомъ двухъ сообщеній (Изв. Каз. Ф. М. Общ. (2), IV, протоколъ 35 зас; Дневникъ IX съѣзда Р. Ест. и Вр., №=6) и замѣтки, помѣщенной въ Comptes Rendus (C.R. 1894, CXVIII, p. 129).

Условимся предварительно въ нѣкоторыхъ терминахъ.

I. Если связи системы таковы, что можемъ, не измѣняя относительнаго расположенія точекъ, сообщить всей системѣ, во всякомъ ея положеніи, нѣкоторое винтовое перемѣщеніе, то будемъ говорить, что для системы возможенъ кинематическій винтъ. Бивекторъ и винтъ, опредѣляющіе возможное винтовое перемѣщеніе, будемъ называть возможными. Группу винтовъ будемъ называть возможной, если всѣ винты группы возможны.

II. Сложимъ всѣ силы, приложенныя къ точкамъ системы по правилу Poinsot, т. е. такъ, какъ если бы онѣ дѣйствовали на твердое тѣло. Мы получимъ одну силу и одну пару. Бивекторъ, характеризующій эту совокупность назовемъ бивекторомъ силъ, а винтъ, на которомъ онъ лежитъ силовымъ винтомъ.

III. Изобразимъ количество движенія каждой точки системы векторомъ и сложимъ всѣ векторы такъ, какъ если бы они изображали собой силы, приложенныя къ точкамъ твердаго тѣла,—получимъ главный векторъ и пару. Бивекторъ, характеризующій эту систему, назовемъ бивекторомъ количествъ движенія, а винтъ, на которомъ онъ лежитъ, винтомъ количествъ движенія.

103. **Возможные винты.** *Голономныя системы.* Пусть имѣемъ систему, состоящую изъ n точекъ (x_i, y_i, z_i) $(i=1,2,..n)$, возможныя перемѣщенія которыхъ, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, связаны между собой s уравненіями

$$\sum_i (A_{ki}\delta x_i + B_{ki}\delta y_i + C_{ki}\delta z_i) = 0, \qquad k=1,2,...s \qquad (1)$$

гдѣ A_{ki}, B_{ki}, C_{ki} суть нѣкоторыя функціи отъ координатъ точекъ системы и могутъ зависѣть также отъ времени. Систему точекъ будемъ называть голономной *), если система ур. (1), разсматриваемая какъ система ур. въ полныхъ дифференціалахъ, интегрируема и стало быть эквивалентна s конечнымъ уравненіямъ вида

$$f_k = C_k, \qquad k=1,2,...s \qquad (2)$$

гдѣ f_k суть нѣкоторыя функціи отъ координатъ точекъ (и времени) и C_k постоянныя, и неголономными—въ противномъ случаѣ. Для голономныхъ системъ функціи f_k будемъ называть функціями связей.

Если для системы возможенъ кинематическій винтъ α_1 $(p_1,q_1,r_1,a_1.b_1,c_1,)$, то мы можемъ точкамъ системы, въ каждомъ положеніи ея, занять которое допускаютъ связи, сообщить безконечно малыя перемѣщенія $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, опредѣляемыя формулами

$$\begin{aligned} \delta x_i &= (a_1 + q_1 z_i — r_1 y_i)\varepsilon, \\ \delta y_i &= (b_1 + r_1 x_i — p_1 z_i)\varepsilon, \qquad i=1,2...n \qquad (3) \\ \delta z_i &= (c_1 + p_1 y_i — q_1 x_i)\varepsilon, \end{aligned}$$

---

*) Терминъ заимствуемъ у Hertz'a, Mechanik, p. 91.

гдѣ ε есть величина безконечно малая одинаковая для всѣхъ точекъ системы. Эти перемѣщенія, какъ перемѣщенія возможныя, должны удовлетворять ур. (1), и потому для всѣхъ положеній, занять которыя позволяютъ связи,

$$a_1\sum_i A_{ki}+b_1\sum_i B_{ki}+c_1\sum_i C_{ki}+p_1\sum_i(y_iC_{ki}-z_iB_{ki})$$
$$+q_1\sum_i(z_iA_{ki}-x_iC_{ki})+r_1\sum_i(x_iB_{ki}-y_iA_{ki})=0. \quad k=1,2,\ldots s \quad (4)$$

Таковы необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы винта α_1 былъ возможенъ. Благодаря линейному и однородному виду послѣднихъ ур. относительно координатъ винта α_1, легко показать, что винтъ $e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+\ldots$, гдѣ $e_1, e_2, \ldots$ суть нѣкоторыя вещественныя числа, будетъ возможнымъ, если винты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ возможны. Такимъ образомъ мы имѣемъ теорему:

Теорема I. *Если винты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ возможны, то возможна и группа, ими опредѣляемая.*

Отсюда слѣдуетъ, что совокупность всѣхъ возможныхъ для данныхъ связей винтовъ образуетъ непремѣнно группу винтовъ.

Предъидущая теорема справедлива будетъ ли система голономной или нѣтъ. Напротивъ, слѣдующія теоремы, которыя мы докажемъ въ этомъ параграфѣ, имѣютъ мѣсто только въ томъ случаѣ, когда связи могутъ быть выражены ур. (2), и, слѣдовательно, система голономна. Разсмотримъ, какъ въ этомъ случаѣ выразятся условія возможности винта α_1. Теперь ур. (1) мы можемъ замѣнить имъ эквивалентными ур.

$$\Sigma\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f_k}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f_k}{\partial z}\delta z\right)=0,$$

а ур. (4) замѣнятся системой ур., которыя будутъ выражать, что каждая изъ функцій f_k связей удовлетворяетъ ур.

$$X_1 f=0,$$

гдѣ

$$X_1 f=a_1\Sigma\frac{\partial f}{\partial x}+b_1\Sigma\frac{\partial f}{\partial y}+c_1\Sigma\frac{\partial f}{\partial z}+$$
$$+p_1\Sigma\left(y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y}\right)+q_1\Sigma\left(z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z}\right)+r_1\Sigma\left(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}\right). \qquad (5)$$

Такимъ образомъ, для того, чтобы винтъ α_1 былъ возможенъ, необходимо и достаточно, чтобы всѣ функціи связей въ каждомъ положеніи системы удовлетворяли предъидущему ур.. Такъ какъ для точекъ системы возможны только такія положенія, которыя допускаютъ связи, то нѣтъ необходимости, чтобы функціи f_k удовлетворяли ур. $X_1f=0$ тожественно, вполнѣ достаточно, если онѣ будутъ удовлетворять ему въ силу соотношенія $f_k=C_k$.

Допустимъ теперь, что кромѣ возможнаго винта α_1 существуетъ еще возможный винтъ $\alpha_2(p_2,q_2,r_2,a_2,b_2,c_2)$, такъ что функціи связей удовлетворяютъ не только ур. $X_1f=0$, но и ур. $X_2f=0$, гдѣ X_2f получается изъ X_1f замѣной у буквъ p,q,r,a,b,c значка 1 значкомъ 2. Функціи связей, удовлетворяя въ силу какихъ либо соотношеній между перемѣнными двумъ ур. $X_1f=0$ и $X_2f=0$, на основаніи извѣстной теоремы, будутъ удовлетворять въ силу тѣхъ же соотношеній и ур. $X_2X_1f-X_1X_2f=(X_2X_1)f=0$. Но вычисляя $(X_2X_1)f$, мы получаемъ для него выраженіе, которое отличается отъ X_1f только тѣмъ, что въ немъ вмѣсто p_1,q_1,r_1,a_1,b_1,c_1 стоятъ соотвѣтственно координаты P,Q,R,A,B,C бивектора $V\alpha_1\alpha_2$, а потому изъ ур. $(X_2X_1)f_k=0$ $(k=1,2,..s)$ будетъ слѣдовать, что винтъ $V\alpha_1\alpha_2$ также возможенъ. Итакъ имѣемъ теорему:

Теорема II. *Если для голономной системы винты α_1 и α_2 возможны, та возможенъ и винтъ $V\alpha_1\alpha_2$.*

Изъ теоремъ I и II вытекаеть слѣдующая.

Теорема III. *Совокупность всѣхъ возможныхъ винтовъ образуетъ для голономной системы замкнутую группу.*

Предположимъ, что система голономна, и пусть Γ есть группа всѣхъ возможныхъ винтовъ, такъ что нѣтъ ни одного возможнаго винта, который не принадлежалъ бы группѣ Γ. Группа Γ будетъ замкнутой (§ 99). Въ самомъ дѣлѣ, если она не замкнута, то мы могли бы найти такихъ два винта группы, α' и α'', что $V\alpha'\alpha''$ къ группѣ не принадлежитъ. Этотъ винтъ по теоремѣ II будетъ возможнымъ, такъ что будемъ имѣть новый возможный винтъ, не принадлежащій группѣ, Γ, что противорѣчитъ предположенію, что всѣ возможные винты входятъ въ группу Γ.

Такимъ образомъ между голономными и неголономными системами есть существенная разница. Тогда какъ, какую бы группу винтовъ Γ мы ни взяли, всегда можемъ построить неголономную систему, для которой эта группа была бы возможной, группа $\varGamma$ должна быть необходимо замкнутой, чтобы она могла быть совокупностью всѣхъ возможныхъ для голономной системы винтовъ. Докажемъ, что это условіе не только необходимо но и достаточно.

Теорема IV. *Существуютъ голономныя системы, для которыхъ данная s-членная замкнутая группа $\varGamma$ будетъ совокупностью всѣхъ возможныхъ винтовъ.*

Примемъ какіе нибудь s независимыхъ винтовъ $\alpha_1, \alpha_2,\ldots$ группы $\varGamma$ за основные винты. По теоремѣ I группа $\varGamma$ будетъ возможной, если винты $\alpha_1, \alpha_2\ldots$, возможны, для чего, въ свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы функціи связей f_k удовлетворяли ур.

$$X_kf=0, \qquad k=1,2,\ldots s \qquad (6)$$

гдѣ X_kf получается изъ X_1f (5) замѣной у буквъ p,q,r,a,b,c значка 1 значкомъ k, и величины p_k,q_k,r_k,a_k,b_k,c_k суть координаты винта α_k. Нужно, слѣдовательно, доказать, что система диф. ур. (6) допускаетъ рѣшеніе.

Въ выраженіи $(X_2X_1)f$ величины P,Q,R,A,B,C суть координаты винта $V\alpha_1\alpha_2$. Такъ какъ, по предположенію, группа $\varGamma$ замкнута, то $V\alpha_1\alpha_2$ принадлежитъ группѣ: $V\alpha_1\alpha_2=e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+\ldots+e_s\alpha_s$, гдѣ $e_1,e_2,\ldots e_s$ нѣкоторыя вещественныя числа, и

$$P=e_1p_1+e_sp_s+\ldots \quad +e_sp_s,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A=e_1a_1+e_sa_s+\ldots \quad +e_sa_s,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда имѣемъ $(X_2X_1)f=e_1X_1f+\ldots+e_2X_2f$. Также докажемъ, что и всѣ выраженія $(X_iX_k)f$ $(i,k=1, 2,\ldots s)$ суть линейныя функціи отъ X_kf. Такимъ образомъ система ур. (6) есть система полная и функціи, удовлетворяющія ей, существуютъ.

Замѣтимъ при этомъ, что вслѣдствіе независимости винтовъ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$ выраженія $X_1f_1,X_2f,\ldots X_sf$ между собой также независимы, такъ что система ур. (6) есть полная система, состоящая изъ s независимыхъ ур.. Поэтому существуетъ $3n-s$ независимыхъ между собой функціи $\varphi_1,\varphi_2,\ldots \varphi_{3n-s}$, удовлетворяющихъ ур. (6), и ихъ общимъ интеграломъ будетъ произвольная функція отъ φ. Функціи связей будутъ функціями отъ φ.

Припоминая зависимость между замкнутыми группами винтовъ и группами движеній, можемъ теоремы III и IV формулировать такимъ образомъ:

Теорема V. *Совокупность винтовыхъ движеній, возможныхъ для голономной системы, образуютъ группу движеній. Обратно, каждая группа движеній возможна для нѣкоторой голономной системы.*

104. *Связи для замкнутыхъ возможныхъ группъ.* Разсмотримъ послѣдовательно всѣ типы замкнутыхъ группъ въ томъ порядкѣ, какъ онѣ перечислены въ § 99 и покажемъ для нихъ видъ $3n-s$ независимыхъ интеграловъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{3n-s}$ ур. (6). Желая въ каждомъ частномъ случаѣ опредѣлить функціи φ, мы можемъ выбирать независимые основные винты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ данной замкнутой группы такъ, чтобы ур. $X_k f = 0$ по возможности упрощались.

Группа (1, I, 0) $\varrho = a_0 \alpha$. Принимая ось винта α за ось z, полагая $\alpha = \alpha_1$, имѣемъ $p_1 = q_1 = a_1 = b_1 = 0$, $c_1 = c, r_1 = 1$, гдѣ c есть параметръ винта $\alpha = \alpha_1$, и

$$X_1 f = \Sigma\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + c\Sigma\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Легко провѣрить, что это ур. имѣетъ слѣдующіе $3n-1$ независимые интегралы:

$$\left.\begin{array}{l} x_i\, cs\dfrac{z_1}{c} + y_i\, sn\,\dfrac{z_1}{c}, \\[2ex] x_i\, sn\dfrac{z_1}{c} - y_i\, cs\,\dfrac{z_1}{c}, \end{array}\right\} i = 1, 2, \ldots n$$

$$z_i - z_1. \qquad\qquad i = 2, 3, \ldots . n.$$

Группа (1,I,1) $\varrho = \omega a_1 \alpha$. Разсматривая этотъ случай какъ частный случай предъидущаго ($c = \infty$), имѣемъ:

$$X_1 f = \Sigma\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

и интегралы

$$\begin{array}{ll} x_i, y_i & \qquad i = 1, 2, \ldots . n \\ z_i - z_1 & \qquad i = 2, 3, \ldots n. \end{array}$$

Группа (2,I,1) $\varrho = a\alpha$. Совмѣстимъ ось z съ осью α и примемъ за основные винты α_1 и α_2 группы винтъ безконечно большого параметра и винтъ параметра нуль. Тогда имѣемъ $p_1 = q_1 = r_1 = a_1 = b_1 = 0, c_1 = 1$; $p_2 = q_2 = a_2 = b_2 = c_2 = 0, r_2 = 1$, и

$$X_1 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z} = 0; \; X_2 f = \Sigma \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \; \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0\,.$$

Эти ур. имѣютъ слѣдующіе интегралы

$$\begin{array}{ll} z_i - z_1, & i = 2,3,\ldots n \\ x_i^2 + y_i^2, & i = 1,2,\ldots n \\ x_i x_k + y_i y_k. & i,\kappa = 1;2,\ldots . n; i \neq \kappa \end{array}$$

Замѣтимъ, что между функціями $x_i x_k + y_i y_k$ независимыхъ между собой и отъ функцій $x_i^2 + y_i^2$ столько, сколько независимыхъ угловъ между n радіусами векторами на плоскости, т. е. $n-1$; слѣдовательно между предъидущими функціями $3n-2$ независимыхъ.

Группа (2,II,2) $\varrho = \omega a_1 \alpha + \omega b_1 \beta$. Плоскость, которой параллельны оси винтовъ, примемъ за плоскость xy, а за винты α_1, α_2 возьмемъ винты, которые имѣютъ своими осями оси x и y. Тогда $p_1 = q_1 = r_1 = b_1 = c_1 = 0, a_1 = 1$; $p_2 = q_2 = r_2 = a_2 = c_2 = 0, b_2 = 1$ и

$$X_1 f = \Sigma \; \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \; X_2 f = \Sigma \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$3n-2$ независимыхъ интеграла таковы

$$\begin{array}{ll} x_i - x_1, \; y_i - y_1 & i = 2,3,\ldots n \\ z_i & i = 1,2,\ldots n \end{array}$$

Группа (3,III,2) $\varrho = \omega a_1 \alpha + \omega b_1 \beta + c_0 \gamma$, при чемъ оси α и β перпендикулярны къ оси γ. Примемъ какой либо винтъ группы конечнаго параметра за α_0 и совмѣстимъ съ его осью ось z; за винты α_1 и α_2 возьмемъ винты безконечно большого параметра, имѣющіе своими осями оси x и y. Тогда $a_1 = 1, b_2 = 1$, $r_3 = 1, c_3 = c$, остальныя координаты винтовъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равны нулю, и

$$X_1 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad X_2 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$X_3 f = \Sigma \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \, \frac{\partial f}{\partial x}\right) + c \Sigma \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Эти ур. имѣютъ слѣдующіе $3n-3$ независимые интегралы:

$$\left.\begin{array}{l}(x_i-x_1)cs\frac{z_1}{c}+(y_i-y_1)sn\frac{z_1}{c}\\ (x_i-x_1)sn\frac{z_1}{c}-(y_i-y_1)cs\frac{z_1}{c}\end{array}\right\} i=2,3,\ldots n$$

$$z_i-z_1$$

Группа (3,III,0)$\varrho=\alpha_0\alpha+b_0\beta+c_0\gamma$, при чемъ оси винтовъ α,β,γ всѣ пересѣкаются въ одной точкѣ и параметры ихъ равны нулю. Примемъ центръ связки за начало координатъ и за винты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ возьмемъ винты, имѣющіе своими осями оси координатъ. Тогда $p_1=1,q_2=1,r_3=1$, остальныя координаты равны нулю, и

$$X_1f=\Sigma(y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y})=0,\ X_2f=\Sigma(z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z})=0$$

$$X_3f=\Sigma(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}).$$

Эта система имѣетъ слѣдующіе интегралы:

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2, \qquad i=1,2,\,..n$$

$$x_ix_k+y_iy_k+z_iz_k. \qquad i,k=1,2,\ldots n;\ i\neq k.$$

Функцій $x_ix_k+y_iy_k+z_iz_k$ независимыхъ между собой и отъ функцій $x_i^2+y_i^2+z_i^2$ столько, сколько независимыхъ угловъ между n радіусами векторами, т. е. $2n-3$; слѣдовательно, указанныя функціи образуютъ систему $3n-3$ независимыхъ интеграловъ.

Группа (4,III,3) $\varrho=\omega a_1\alpha+\omega b_1\beta+c\gamma$. Примемъ ось γ за ось z, за винты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ возьмемъ винты безконечно большого параметра, осями которымъ служатъ оси координатъ, а за винтъ α_4 винтъ параметра нуль, имѣющій осью ось z. Тогда $a_1=b_2=c_3=r_4=1$, остальныя координаты винтовъ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ равны нулю, и

$$X_1f=\Sigma\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad X_2f=\Sigma\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad X_3f=\Sigma\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

$$X_4f=\Sigma(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x})=0$$

$3n-4$ независимые интегралы этихъ ур. таковы:

$$\left.\begin{array}{c} z_i-z_1 \\ (x_i-x_1)^2+(y_i-y_1) \end{array}\right\} \qquad i=2,3\ldots n$$

$$(x_i-x)(x_k-x_1)+(y_i-y_1)(y_k-y_1). \qquad i,k=2,3\ldots n;\ i\neq k.$$

Группа (6.III,3) $\rho=a\alpha+b\beta+c\gamma$. Примемъ за винты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ винты безконечно большого параметра и за винты $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$—винты параметра нуль, имѣющіе своими осями оси координатъ. Тогда $a_1=b_2=c_3=p_4=q_5=r_6=1$, остальныя координаты равны нулю и

$$X_1f=\Sigma\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad X_2f=\Sigma\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad X_3f=\Sigma\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

$$X_4f=\Sigma(y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y})=0,\quad X_5f=\Sigma(z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z})=0,$$

$$X_6f=\Sigma(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x})=0.$$

Независимые $3n-6$ интеграловъ этихъ ур. таковы:

$$(x_i-x_1)^2+(y_i-y_1)^2+(z_i-z_1)^2,\quad i=2,3,\ldots n$$

$$(x_i-x_1)(x_k-x_1)+(y_i-y_1)(y_k-y_1)+$$
$$+(z_k-z_1)(z_i-z_1).\ i,k=2,3,\ldots n;\ i\neq k.$$

105. **Силовые винты**. Пусть къ точкамъ системы приложены силы $(X_i, Y_i, Z_i)(i=1,2,\ldots n)$ при чемъ X_i, Y_i, Z_i суть нѣкоторыя функціи отъ координатъ точекъ системы и могутъ зависѣть также отъ времени и скоростей точекъ.

Координаты силового бивектора будутъ

$$X=\Sigma X,\qquad Y=ZY,\qquad Z=\Sigma Z$$

$$L=\Sigma(yZ-zY),\quad M=\Sigma(zX-xZ),\quad N=\Sigma(xY-yX)$$

Если для всѣхъ возможныхъ положеній системы силовой бивекторъ будетъ взаименъ съ винтомъ $\alpha_1(p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1)$, то

$$a_1X+b_1Y+c_1Z+p_1L+q_1M+r_1N=0 \tag{7}$$

для всѣхъ возможныхъ значеній координатъ x_i, y_i, z_i. Изъ приведеннаго условія взаимности винтовъ α_1 и силового легко выводится слѣдующая извѣстная

Теорема I. *Если винтъ (X,Y,Z,L,M,N) взаименъ съ s винтами $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$, то онъ взаименъ и со всѣми винтами группы, ими опредѣляемой.*

Эта теорема справедлива, будутъ ли силы, приложенныя къ точкамъ системы. обладать потенціаломъ или нѣтъ. Напротивъ, слѣдующія теоремы имѣютъ мѣсто только тогда, когда силы обладаютъ потенціаломъ U, такъ что

$$X_i=\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i=\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i=\frac{\partial U}{\partial z_i} \qquad i=1,2,...n$$

Въ этомъ случаѣ условіе взаимности (7) винта α_1 съ силовымъ приметъ видъ $X_1U=0$, гдѣ X_1U есть выраженіе, въ которое обращается X_1f (5), когда функцію f замѣнимъ черезъ U.

Допустимъ, что силовой винтъ для всѣхъ возможныхъ положеній системы взаименъ не только съ α_1, но и съ винтомъ $\alpha_2(p_2,q_2,r_2,a_2,b_2,c_2,)$. Тогда функція силъ будетъ удовлетворять двумъ ур $X_1U=0$ и $X_2U=0$, гдѣ X_2U получается изъ X_1U замѣной у буквъ p,q,r,a,b,c значковъ 1 значками 2. Функція U будетъ удовлетворять, слѣдовательно, и ур. $(X_1X_2)U=0$, такъ что припоминая выраженіе (X_1X_2), имѣемъ теорему:

Теорема II. *Если силы обладаютъ потенціаломъ и для всѣхъ возможныхъ положеній точекъ системы силовые винты взаимны съ винтами α_1 и α_2, то для тѣхъ же положеній они будутъ взаимны и съ винтомъ $V\alpha_1\alpha_2$.*

Подобно тому, какъ изъ теоремы II § 103 была получена теорема III § 103, такъ теперь изъ теоремы II вытекаетъ

Теорема III. *Если силы обладаютъ потенціаломъ, то совокупность всѣхъ винтовъ, взаимныхъ съ силовыми, образуютъ замкнутую группу.*

Отсюда слѣдуетъ, что силовые винты для консервативной системы могутъ образовать только группу взаимную съ замкнутой, т. е. группу одного изъ тѣхъ типовъ, которые приведены въ правой половинѣ таблицы § 99.

Теорема IV. *Всегда можно подобрать такую функцію силъ, чтобы совокупностью всѣхъ винтовъ, взаимныхъ съ силовыми винтами, была данная замкнутая группа.*

Дѣйствительно, пусть независимые винты $\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_s$ опредѣляютъ замкнутую s-членную группу и пусть U есть искомая функція силъ. Для того, чтобы силовые винты были взаимны съ данной группой необходимо и достаточно, чтобы U удовлетворяла ур.

$$X_kU=0 \qquad (k=1,2,...s) \tag{8}$$

тожественнымъ съ ур. (6) предыдущаго параграфа. При доказательствѣ теоремы IV § 103 мы видѣли, что система ур. (6) [или (8)] совмѣстна и имѣетъ $3n-s$ независимыхъ интеграловъ. Наша теорема такимъ образомъ доказана. Въ § 104 мы проинтегрировали ур. (6), поэтому мы можемъ воспользоваться результатами этого §, чтобы для каждой данной замкнутой группы написать общій видъ функціи силъ.

Припоминая механическое значеніе условія взаимности двухъ винтовъ, мы можемъ теоремы III и IV соединить въ одну:

Теорема V. *Если силы обладаютъ потенціаломъ, то совокупность винтовыхъ движеній, при которыхъ работа силъ равна нулю образуетъ группу движеній. Обратно, какую бы группу движеній мы ни взяли, всегда можно подобрать такую функцію силъ, что силы при всѣхъ движеніяхъ группы работы производить не будутъ.*

Сдѣлаемъ теперь нѣсколько замѣчаній по поводу теоремы III.

I. Если, изслѣдуя силовые винты, мы найдемъ, что совокупность всѣхъ винтовъ, взаимныхъ съ силовыми винтами, соотвѣтствующими всѣмъ возможнымъ положеніямъ системы, образуютъ разомкнутую группу, то силы, приложенныя къ точкамъ системы, не имѣютъ потенціала. Такъ напримѣръ, если силовой винтъ для всѣхъ положеній системы одинъ и тотъ же, или всѣ силовые винты имѣютъ общую ось, то силы потенціаломъ не обладаютъ.

II. Пусть мы имѣемъ конгруэнцію двухъ линейныхъ комплексовъ. Она опредѣлится нѣкоторой двучленной группой и можетъ быть разсматриваема какъ совокупность винтовъ параметра нуль взаимныхъ съ этой послѣдней. Предположимъ, что силы, приложенныя къ точкамъ системы, дѣйствуютъ по лучамъ конгруэнціи и разсмотримъ какой видъ должна имѣть конгруэнція для того, чтобы силы могли обладать потенціаломъ. Каждую изъ силъ, приложенныхъ къ отдѣльной точкѣ системы, можемъ разсматривать какъ бивекторъ параметра нуль, а силовой бивекторъ для всей системы какъ сумму такихъ бивекторовъ. Каждый изъ нихъ взаименъ съ группой, опредѣляющей конгруэнцію, съ этой группой будетъ взаименъ слѣдовательно и силовой винтъ всей системы. Поэтому, чтобы силы могли обладать потенціаломъ, группа, опредѣляющая конгруэнцію, должна быть замкнутой. Но обращаясь къ таблицѣ замкнутыхъ группъ, видимъ, что существуетъ только двѣ двучленныя замкнутыя группы: одноосная и группа винтовъ безконечно большого параметра. Въ первомъ случаѣ конгруэнція будетъ щеткой, во второмъ связкой параллельныхъ прямыхъ.

Замѣтимъ, что когда силы, приложенныя къ точкамъ системы будутъ центральными съ общимъ центромъ, то и силовой винтъ всей системы будетъ имѣть параметръ равный нулю и ось его будетъ проходить черезъ центръ силъ. Силовые винты образуютъ, слѣдовательно, группу взаимную съ замкнутой группой типа (3,III,0) и силы могутъ обладать потенціаломъ. Лучи связки можемъ разсматривать какъ конгруэнцію двухъ линейныхъ комплексовъ (точнѣе, какъ часть конгруэнціи); такимъ образомъ имѣемъ теорему:

Теорема VI. *Если силы, приложенныя къ точкамъ, дѣйствуютъ по лучамъ конгруэнціи двухъ линейныхъ комплексовъ, то онѣ могутъ обладать потенціаломъ только тогда, когда конгруэнція будетъ или щеткой, или связкой, съ центромъ на конечномъ, или безконечномъ, разстояніи.*

Эта теорема будетъ справедлива, конечно, и въ томъ случаѣ, когда система состоитъ изъ одной точки. Теорема показываетъ намъ тогда, что три примѣра на опредѣленіе потенціала силы, приложенной къ точкѣ, которые даетъ г. P. Appell въ своемъ курсѣ (Traité de Mécanique, T. I, p. 107). представляютъ единственные случаи, когда сила, приложенная къ точкѣ, дѣйствуя по лучамъ конгруэнціи двухъ линейныхъ комплексовъ, имѣетъ потенціалъ. Разсматривая систему, состоящую только изъ одной точки, можемъ, очевидно, формулировать предъидущую теорему такимъ образомъ.

Поверхности ортогональныя къ лучамъ конгруэнціи двухъ линейныхъ комплексовъ существуютъ только тогда, когда конгруэнція будетъ или связкой, или щеткой.

Въ первомъ случаѣ поверхности будутъ концентрическія сферы (система параллельныхъ плоскостей), а во второмъ круговые цилиндры съ общею осью.

106. **Винтъ количествъ движенія.** *Законъ моментовъ бивектора количествъ движенія.* Если m_i $(i=1, 2, \ldots n)$ суть массы точекъ системы, то бивекторъ количествъ движенія будетъ имѣть своими координатами выраженія:

$$\Sigma mx', \qquad \Sigma my', \qquad \Sigma mz'$$

$$\Sigma m(yz'-zy'), \ \Sigma m(zx'-xz'), \ \Sigma m(xy'-yx'),$$

гдѣ x_i', y_i', z_i' $(i=1, 2, \ldots n)$ суть производныя по времени отъ координатъ точекъ системы.

Теорема. *Если для системы возможенъ кинематическій винтъ, то производная по времени отъ момента бивектора количествъ движенія относительно возможнаго винта равняется моменту силового бивектора относительно того же винта.*

Если α_1 $(p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1)$ возможный винтъ, то перемѣщенія, опредѣляемыя формулами (3) § 103 будутъ возможными перемѣщеніями. Внося ихъ въ формулу, выражающую принципъ D'Alembert'а, получаемъ

$$\frac{dS_1}{dt}=a_1X+b_1Y+c_1Z+p_1L+q_1M+r_1N\,, \tag{9}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1\Sigma mx'+b_1\Sigma my'+c_1\Sigma mz' \\ &+p_1\Sigma m(yz'-zy')+q_1\Sigma m(zx'-xz')+r_1\Sigma m(xy'-yx'). \end{aligned} \tag{10}$$

Равенство (9) и выражаетъ теорему

Если для системы возможна s-членная группа, то будемъ имѣть s независимыхъ ур. вида (9), совокупность которыхъ можно назвать закономъ моментовъ бивектора количествъ движенія относительно возможныхъ винтовъ. Въ частномъ случаѣ, когда возможная группа будетъ типа (3, III, 3) эти ур. обратятся въ ур., выражающія законъ движенія центра тяжести, когда возможная группа будетъ типа (3, III, 0) и параметры всѣхъ винтовъ будутъ равны нулю, то ур. будутъ выражать законъ моментовъ количествъ движенія.

107. *Винтовой интегралъ.* Если силовой винтъ будетъ взаименъ съ возможнымъ винтомъ, то вторая часть ур. (9) обратится въ нуль и мы получаемъ интегралъ

$$S_1 = const.$$

Интегралы такого вида будемъ называть винтовыми интегралами; винтъ α_1, его ось и параметъ—винтомъ, осью и параметромъ интеграла. Такимъ образомъ имѣемъ теорему:

Теорема. *Если силовой винтъ взаименъ съ винтомъ возможнымъ, то существуетъ винтовой интегралъ для возможнаго винта.*

Винтовой интегралъ, въ частномъ случаѣ, когда параметръ его безконечно великъ, $P\alpha_1 = \infty$, обращается въ интегралъ, который выражаетъ законъ сохраненія движенія центра тяжести по направленію оси α_1 и можетъ быть названъ поступательнымъ интеграломъ. Если же $P\alpha_1 = 0$, то винтовой интегралъ обращается въ интегралъ площадей для плоскости съ осью α_1 и можетъ быть названъ вращательнымъ интеграломъ. Принявъ ось α_1 за ось z, мы видимъ, что винтовой интегралъ

$$S_1 = \Sigma m(xy' - yx') + P\alpha_1 . \Sigma mz' = const. \tag{11}$$

имѣетъ слѣдующій смыслъ: сумма произведеній массъ точекъ на площади, которыя описываютъ проэкціи радіусовъ векторовъ, проведенныхъ отъ точекъ на оси интеграла къ точкамъ системы, на плоскость перпендикулярную къ оси, сложенная съ разстояніемъ центра тяжести системы отъ этой плоскости, умноженнымъ на массу системы и на параметръ, растетъ пропорціонально времени

Интегралъ (11) можемъ представить еще въ двухъ различныхъ формахъ. Вообразимъ вокругъ оси интеграла круговой цилиндръ съ радіусомъ равнымъ по абсолютной величинѣ (для простоты) параметру интеграла и проведемъ на немъ винтовую линію съ шагомѣ $2\pi P\alpha_1$. Помѣстимъ на этой линіи двѣ точки $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ съ массами M и M_1 и заставимъ ихъ двигаться по ней такъ, чтобы

$$M_1(\xi_1 \eta'_1 - \eta_1 \xi'_1) = \Sigma m(xy' - yx'),$$

$$M\zeta = \Sigma mz.$$

Тогда интегралъ (11) можемъ представить или въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}(\Sigma mz + M_1\zeta_1) = const.,$$

или въ видѣ:

$$\Sigma m(xy'-yx') + M(\xi\eta'-\eta\xi') = const.$$

такъ что винтовой интегралъ можно разсматривать или какъ интегралъ, выражающій законъ сохраненія центра тяжести, если въ систему включимъ точку M_1, или какъ интегралъ площадей, если въ систему включимъ точку M.

108. *Системы винтовыхъ интеграловъ* Означимъ черезъ $p_i, q_i, r_i, a_i, b_i, c_i$ координаты бивектора α_i и черезъ S_i выраженіе, въ которое переходитъ (10), если у буквъ p,q,r,a,b,c значекъ 1 замѣнимъ значкомъ i. Если винты $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$ будутъ между собой независимы, то и винтовые интегралы $S_i = const.$ $(i=1,2,..s)$ будутъ независимы, ибо предположеніе, что между ними существуетъ соотношеніе вида $\Sigma e_iS_i = 0$, гдѣ $e_i (i=1,2,\ldots s)$ нѣкоторыя постоянныя числа, влечетъ за собой равенства:

$$e_1a_1 + e_2a_2 + \ldots e_sa_s = 0.$$

. . . .

$$e_1p_1 + e_2p_2 + \ldots e_sp_s = 0,$$

. . . .

невозможныя вслѣдствіе независимости винтовъ $\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_s$.

Легко видѣть, что винтовой интегралъ $\Sigma e_iS_i = const.$ соотвѣтствуетъ винту $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + \ldots e_s\alpha_s$; слѣдовательно, выбирая надлежащимъ образомъ числа e, мы можемъ линейной комбинаціей интеграловъ, соотвѣтствующихъ винтамъ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ составить интегралъ для каждаго винта группы, ими опредѣляемой. Итакъ имѣемъ теорему:

Теорема I. *Если винты $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ независимы, то винтовые интегралы, отвѣчающіе имъ, также независимы. Линейной комбинаціей этихъ интеграловъ можно составить интегралъ для каждаго винта группы, опредѣляемой винтами $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$*

Эта теорема даетъ возможность геометрическія свойства группъ винтовъ толковать извѣстнымъ образомъ какъ свойства системъ винтовыхъ интеграловъ. Такъ, легко показать слѣдующее.

1. Линейной комбинаціей двухъ винтовыхъ интеграловъ можно составить два независимыхъ между собой интеграла одинаковаго параметра, напр., два интеграла площадей.

2. Изъ трехъ винтовыхъ интеграловъ можно составить ∞^1 интеграловъ одинаковаго параметра. Оси ихъ будутъ образующими одного рода линейчатой поверхности второго порядка.

3. Изъ четырехъ интеграловъ можно составить ∞^2 интеграловъ одинаковаго параметра. Оси ихъ будутъ лучами конгруэнціи двухъ линейныхъ комплексовъ. Такъ какъ въ четырехчленную группу винтовъ входитъ по крайней мѣрѣ одинъ винтъ безконечно большого параметра, то изъ четырехъ интеграловъ можно составить по крайней мѣрѣ одинъ поступательный интегралъ.

4. Линейными комбинаціями пяти интеграловъ можно составить ∞^3 интеграловъ одинаковаго параметра. Оси ихъ образуютъ линейный комплексъ. Въ этомъ случаѣ можно получить по крайней мѣрѣ два независимыхъ между собой поступательныхъ интеграла.

5. Изъ шести независимыхъ винтовыхъ интеграловъ можно составить какой угодно винтовой интегралъ.

Изъ послѣдней теоремы и теоремы предъидущаго параграфа вытекаетъ слѣдующая.

Теорема I_0. *Если для системы возможна s-членная группа и силовые винты принадлежатъ къ группѣ взаимной, то будемъ имѣть ∞^{s-1} винтовыхъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ возможнымъ винтамъ. Между ними можно найти s независимыхъ, остальные получаются линейной комбинаціей этихъ послѣднихъ* *).

Предъидущія теоремы имѣютъ мѣсто независимо отъ того, будетъ ли система голономна и консервативна, или нѣтъ. Мы перейдемъ теперь къ изученію винтовыхъ интеграловъ

---

*) Эта теорема, а также теорема предъидущаго параграфа, принадлежатъ г. V. Cerruti (l. c.). Онѣ были получены мной независимо въ декабрѣ 1893 г. Тогда же, не зная о работахъ г. Cerruti, я послалъ замѣтку о винтовыхъ интегралахъ въ Comptes Rendus (l. c.).

въ предположеніи, что система голономна, а силы, приложенныя къ точкамъ системы, обладаютъ потенціаломъ.

Пусть α_1 и α_2 два возможныхъ винта и путь силовые винты съ ними взаимны. Мы будемъ имѣть тогда два винтовыхъ интеграла:

$$S_1 = const., \quad S_2 = const..$$

Говоря о возможныхъ винтахъ, мы видѣли, что въ случаѣ голономной системы винтъ $V\alpha_1\alpha_2$ будетъ также возможнымъ (теор. II § 103). Кромѣ того, когда силы обладаютъ потенціаломъ, силовой винтъ будетъ взаименъ съ винтомъ $V\alpha_1\alpha_2$ (теор. II § 105). Такимъ образомъ винтъ $V\alpha_1\alpha_2$ будетъ возможнымъ винтомъ взаимнымъ съ силовыми винтами, а потому по теоремѣ § 107 кромѣ двухъ предъидущихъ интеграловъ мы будемъ имѣть еще одинъ винтовой интегралъ

$$S_3 = const.$$

для винта $V\alpha_1\alpha_2$. Итакъ мы приходимъ къ теоремѣ:

Теорема II. *Если система голономна и консервативна и уравненія движенія имѣютъ два винтовыхъ интеграла для винтовъ* α_1 *и* α_2, *то они имѣютъ и третій винтовой интегралъ для винта* $V\alpha_1\alpha_2$.

Нетрудно показать, что эта теорема представляетъ теорему Poisson'а въ примѣненіи къ винтовымъ интеграламъ и есть частный случай слѣдующей болѣе общей.

Теорема II$_0$. *Если* $S_1 = const.$ *есть винтовой интегралъ и* $F = const.$ *какой либо другой интегралъ ур. движенія, то* $(S_1, F) = const.$, *гдѣ* (S_1, F) *скобки Poisson'а, также будетъ интеграломъ ур. движенія.*

Пусть $f_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots s)$ суть условныя ур., стѣсняющія свободу перемѣщенія точекъ, при чемъ функціи f_k зависятъ отъ координатъ точекъ системы и могутъ зависѣть также и отъ времени. На основаніи извѣстной теоремы: „если $\varphi = const.$ и $\psi = const.$ суть два интеграла ур. механики, если φ не зависитъ отъ времени и удовлетворяетъ ур. $(\varphi_1, f_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots s)$, то $(\varphi, \psi) = const.$ будетъ интеграломъ тѣхъ же уравненій“ *), для доказательства теоремы достаточно пока-

---

*) И. В. Мещерскій. «О теоремѣ Пуассона при существованіи условныхъ уравненій». VIII съѣздъ Русскихъ Ест. и Вр.

зать, что $(S_1,f_k)=0(k=1,2,\dots s)$. Развивая подробнѣе эти равенства, получаемъ

$$(S_1,f_k)=X_1f_k=0\quad(k=1,2,\dots s),$$

гдѣ X_1f есть выраженіе (5) § 102; такимъ образомъ уравн. $(S_1.f_k)=0$ $(k=1,2,\dots s)$ представляютъ условія необходимыя и достаточныя, чтобы винтъ α_1 винтового интеграла $S_1=const.$ былъ возможенъ, условія, которыя удовлетворены уже въ силу того предположенія, что $S_1=const.$ интегралъ ур. движенія. Итакъ теорема доказана.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ: если имѣемъ два винтовыхъ интеграла, $S_1=const.$, $S_2=const.$, для винтовъ α_1 и α_2, то $(S_1,S_2)=const.$ будетъ также интеграломъ. Выполнивъ вычисленіе скобокъ (S_1,S_2) на самомъ дѣлѣ, увидимъ, что $(S_1,S_2)=const.$ есть винтовой интегралъ, отвѣчающій винту $V\alpha_1\alpha_2$. Такимъ образомъ снова приходимъ къ теоремѣ II. Изъ теоремы II слѣдуетъ:

Теорема III. *Если система галономна и консервативна, то совокупность винтовъ, для которыхъ существуютъ винтовые интегралы, образуютъ замкнутую группу.*

Теорема доказывается совершенно также, какъ и теорема III § 103.

Теорема IV. *Существуютъ такія голономныя консервативныя системы, у которыхъ всѣ винтовые интегралы соотвѣтствуютъ винтамъ данной замкнутой группы винтовъ.*

Теорема слѣдуетъ изъ теоремъ IV § 103 и IV § 105.

Теорема V. *Совокупность движеній, опредѣляемыхъ винтами винтовыхъ интеграловъ для голономной консервативной системы, образуетъ группу движеній.*

Теорема слѣдуетъ изъ теоремы III и теоремы II § 101.

109. *Опредѣленіе всѣхъ винтовыхъ интеграловъ по двумъ, или нѣсколькимъ, даннымъ.*

Въ предъидущемъ § было показано, что мы имѣемъ два средства по двумъ или нѣсколькимъ винтовымъ интеграламъ получать еще другіе винтовые интегралы: или комбинируя данные интегралы линейно, или комбинируя ихъ помощью скобокъ Poisson'a. Первый пріемъ не даетъ намъ новыхъ интеграловъ, независимыхъ отъ данныхъ. и можетъ служить только для того, чтобы между возможными для данной системы винтовыми интегралами выбрать наиболѣе простыя, изъ которыхъ другіе получались бы линейными комбинаціями. Напротивъ, составляя изъ данныхъ винтовыхъ интеграловъ новые помощью скобокъ Poisson'a, можемъ получить интегралы, независимые отъ данныхъ. Если припомнимъ, что $V\alpha_1\alpha_2$ обращается въ нуль только въ двухъ случаяхъ: 1) когда оси α_1 и α_2 совпадаютъ и 2) когда параметры обоихъ бивекторовъ безконечно велики (§ 41), что во всѣхъ остальныхъ случаяхъ $V\alpha_1\alpha_2$ независимъ отъ α_1 и α_2, то будетъ ясно, что скобки Poisson'a обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:

Теорема. *Если оси винтовыхъ интеграловъ $S_1 = const.$ и $S_2 = const.$ совпадаютъ, или оба интеграла поступательны, то скобки Poisson'a, (S_1, S_2), тожественно обращаются въ нуль и не даютъ новыхъ интеграловъ. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ уравненіе $(S_1, S_2) = const.$ не будетъ тожествомъ, а винтовымъ интеграломъ независимымъ отъ интеграловъ $S_1 = const.$ и $S_2 = const.$.*

Такимъ образомъ, имѣя два винтовыхъ интеграла $S_1 = const.$ и $S_2 = const$, можемъ составить новый независимый отъ нихъ винтовой интегралъ $S_3 = (S_1, S_2) = const.$ для винта $\alpha_3 = V\alpha_1\alpha_2$, интегралъ, который, вообще говоря, не будетъ тожествомъ. По тремъ интеграламъ $S_1 = const.$, $S_2 = const.$, $S_3 = const.$, комбинируя ихъ линейно, получимъ всевозможные интегралы для винтовъ группы $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3$. Если эта группа замкнута, то какую бы пару ея винтовъ α', α'' мы ни взяли векторное произведеніе $V\alpha'\alpha''$ будетъ принадлежать группѣ α, а потому, какую бы пару изъ всей совокупности полученныхъ винтовыхъ интеграловъ мы ни комбинировали помощью скобокъ Poisson'a, мы не найдемъ новыхъ интеграловъ, не принадлежащихъ той же совокупности и независимыхъ отъ трехъ $S_1 = const.$, $S_2 = const.$, $S_3 = const.$ Если же группа $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3$ разомкнута, то въ ней будутъ два винта α', α'' такихъ, что $\alpha_4 = V\alpha'\alpha''$ группѣ не принадлежитъ Винтовой интегралъ $S_4 = const.$, отвѣчающій винту α_4, интегралъ, который получимъ, комбинируя помощью скобокъ Poisson'a интегралы съ винтами α' и α'', будетъ поэтому независимъ отъ интеграловъ $S_i = const. (i = 1, 2, 3)$, такъ что будемъ имѣть четыре независимыхъ винтовыхъ интеграла. Ихъ линейными комбинаціями составимъ интегралы для всѣхъ винтовъ четырехчленной группы $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4$. Если эта группа замкнута, то какую бы пару ея винтовъ α',α'' ни взяли, $V\alpha'\alpha''$ будетъ принадлежать той же группѣ α, а потому и комбинаціи вышеполученныхъ винтовыхъ интеграловъ помощью скобокъ Poisson'a не дадутъ намъ новыхъ, независимыхъ отъ четырехъ $S_i = const.$ $(i=1,2,3,4)$ интеграловъ Если же группа разомкнута, то получимъ пятый интегралъ $S_5 = const.$ независимый отъ предъидущихъ. Такъ какъ пятичленная группы всѣ разомкнуты, то комбинируя между собой помощью скобокъ Poisson'a пять интеграловъ $S_i = const.$ $(i=1,2,3,4,5)$, навѣрное получимъ еще одинъ винтовой интегралъ независимый отъ предъидущихъ, такъ что будемъ имѣть шесть винтовыхъ интеграловъ. Очевидно, что болѣе шести независимыхъ винтовыхъ интеграловъ быть не можетъ.

Итакъ, если система голономна и консервативна и мы имѣемъ два винтовыхъ интеграла, то строя помощью скобокъ Poisson'a все новые и новые интегралы. придемъ непремѣнно къ системѣ интеграловъ, винты которыхъ опредѣляютъ какую нибудь замкнутую группу. Интересно задаться вопросомъ, какія именно системы интеграловъ получатся такимъ путемъ въ *каждомъ частномъ случаѣ*. Эта задача, очевидно, вполнѣ аналогична задачѣ § 100. Пользуясь, поэтому, результатами § 100, придемъ къ такимъ заключеніямъ.

А. 1. Если винтовые интегралы $S_1=const.$ и $S_2=const.$ поступательны, то скобки Poisson'a обращаются въ нуль, и новыхъ интеграловъ мы не получимъ. Проекція центра тяжести на плоскость параллельную осямъ итеграловъ будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

2. Если оси интеграловъ $S_1 = const.$ и $S_2 = const.$ совпадаютъ, то скобки Poisson'a тожественно обращаются въ нуль, и новыхъ интеграловъ не получимъ. Линейной комбинаціей данныхъ можемъ составить одинъ поступательный и одинъ вращательный интегралы. Проэкція центра тяжести системы на общую ось интеграловъ будетъ двигаться равномѣрно.

В. Если параметры двухъ данныхъ интеграловъ конечны и оси ихъ параллельны, или, если параметръ одного изъ интеграловъ безконечно великъ и оси не параллельны, то винты интеграловъ опредѣлятъ группу типа (2,II,1) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta$. Въ этомъ случаѣ результаты получаются различные, смотря по тому, будутъ ли оси α и β перпендикулярны или нѣтъ.

1. Когда параметры интеграловъ равны, или параметръ одного, напр. второго, $S_2=const.$, безконечно великъ и ось его перпендикулярна къ оси перваго, то оси α и β будутъ перпендикулярны и скобки Poisson'а дадутъ намъ еще только одинъ винтовой интегралъ $S_3=const.$ независимый отъ данныхъ. Винты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ интеграловъ $S_i=const.$ $(i=1,2,3)$ опредѣлятъ замкнутую группу типа (3,Ш,2). Такъ какъ въ ней два независимыхъ винта безконечно большого параметра, то линейной комбинаціей трехъ интеграловъ можемъ составить два независимыхъ между собой поступательныхъ интеграла. Третій независимый отъ этихъ двухъ будетъ $S_1=const.$ съ конечнымъ параметромъ $P\alpha_1$. Проэкція центра тяжести системы на плоскость перпендикулярную оси α_1 будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

2. Когда параметры интеграловъ не равны, или параметръ одного, напр. второго, $S_2=const.$, безконечно великъ и ось его не параллельна и не перпендикулярна къ оси перваго, то оси α и β не будутъ взаимно перпендикулярны, и, комбинируя интегралы помощью скобокъ Poisson'а, получимъ еще два интеграла, $S_3=const.$ и $S_4=const$, независимыхъ отъ данныхъ. Винты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ интеграловъ $S_i=const.$ $(i=1,2,3,4)$ опредѣлятъ замкнутую группу типа (4,Ш,3). Такъ какъ въ группѣ три независимыхъ винта безконечно большого параметра и одинъ независимый отъ нихъ винтъ параметра нуль, то линейной комбинаціей этихъ четырехъ интеграловъ, можно составить четыре независимыхъ между собой интеграла, между которыми три поступательныхъ и одинъ вращательный. Центръ тяжести будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

C. Если параметры данныхъ интеграловъ, $P\alpha_1$, $P\alpha_2$ конечны и оси не параллельны, то можетъ быть два случая.

1. Когда интегралы будутъ вращательными, и оси ихъ пересѣкаются, то скобки Poisson'а даютъ намъ еще одинъ вращательный интегралъ $S_3=const.$ Винты интеграловъ $S_i=const.$ $(i=1,2,3)$ опредѣлятъ замкнутую группу типа (3,Ш,0) винтовъ параметра нуль. Какъ бы эти три интеграла мы ни комбинировали между собой, линейно, или помощью скобокъ Poisson'а, будемъ получать только интегралы площадей отъ нихъ зависимыя. Это случай Jacobi.

2. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ изъ двухъ винтовыхъ интеграловъ помощью скобокъ Posson'а получимъ еще четыре независимыхъ отъ нихъ интеграла, винты которыхъ, вмѣстѣ съ винтами данныхъ, опредѣлятъ шестичленную группу, такъ что линейной комбинаціей всѣхъ шести интеграловъ можемъ составить всѣ возможные винтовые интегралы. Между ними можно взять за независимые три поступательныхъ и три вращательныхъ. Центръ тяжести системы будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

Предположимъ, что данная голономная консервативная система имѣетъ три винтовыхъ интеграла $S_i = const.$ $(i = 1,2,3)$. Если будемъ комбинировать ихъ между собой линейно, или помощью скобокъ Poisson'а, то можетъ представиться три случая [см. § 100].

1. Когда винты интеграловъ опредѣляютъ замкнутую трехчленную группу, указанными построеніями не получимъ новыхъ интеграловъ, независимыхъ отъ данныхъ. Таковъ, напр., случай трехъ независимыхъ поступательныхъ интеграловъ.

2. Когда винты интеграловъ опредѣляютъ трехчленную группу типа (3.III,2) $\rho = a_0 \alpha + \omega b_1 \beta + \omega c_1 \gamma$, при чемъ оси β и γ перпендикулярны къ оси α, то скобки Poisson'а дадутъ еще одинъ независимый винтовой интегралъ $S_4 = const.$ Система $S_i = const.$ $(i = 1,2,3,4)$ будетъ такого же типа, какъ и въ случаѣ B,2.

3. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ будемъ имѣть шесть винтовыхъ интеграловъ.

Если для данной голономной консервативной системы имѣемъ четыре винтовыхъ интеграла $S_i = const.$ $(i = 1,2,3,4)$, то можетъ быть два случая.

1. Когда винты интеграловъ опредѣляютъ замкнутую группу (4,III,3), новыхъ интеграловъ не получимъ.

2. Въ остальныхъ случаяхъ скобки Poisson'а дадутъ еще два независимыхъ интеграла.

Если для данной голономной консервативной системы имѣемъ пять винтовыхъ интеграловъ $S_i = const.$ $(i = 1,2,3,4,5)$, то комбинируя ихъ помощью скобокъ Poisson'а, получимъ непремѣнно и шестой винтовой интегралъ, отъ нихъ независимый.

* * *

СОДЕРЖАНІЕ.

Стр.

Предисловіе . . . . 1.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Глава I. Анализъ операціи умноженія бивекторовъ.

1. Бивекторъ и винтъ. 2. Формулы преобразованія координатъ бивектора. 3. Частные случаи. 4. Бивекторы кинематическіе и динамическіе. 5. Сложеніе и вычитаніе бивекторовъ. . . . . 10.

6. Умноженіе. 7—10. Скаларное произведеніе. 11—14. Векторное произведеніе. 15. Умноженіе бивектора на число. 16. Произведеніе. Символъ ω. 17 Свойства символа ω. . . . . 16.

Глава II. Аналитическая теорія бикватерніоновъ.

18. Комплексныя числа вида $a_0+\omega a_1, \omega^2=0$. 19. Функціи отъ комплексныхъ чиселъ вида $a_0+\omega a_1$ . . . . 33.

20. Бикватерніоны. Сложеніе и вычитаніе. Скаларная и векторная части бикватерніона. 21. Умноженіе. Главная часть и моментъ бикватерніона. 22. Дѣленіе. Бикватерніоны сопряженный и обратный. Норма бикватерніона. 23. Формулы развернутыя и неразвернутыя. 24. Параметръ и инваріантъ бикватерніона. 25. Тензоръ и верзоръ бикватерніона. 26. Уголъ, поворотъ и шагъ бикватерніона. 27. Основныя формулы теоріи бикватерніоновъ. 28. Степень и логариѳмъ бикватерніона. 29. Неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ . . 38.

Глава III. Геометрическая теорія бикватерніоновъ.

30. Бивекторъ, его точка приведенія и ось. 31. Тензоръ и параметръ бивектора. 32. Бикватерніонъ, его ось и точка приведенія. 33. Умноженіе. Умноженіе бивектора на комплексное число $a=a_0+\omega a_1$. 34. Умноженіе бивектора на бивекторъ. Общія формулы. 35. Скалар-

Стр.

ное произведеніе. Основныя формулы. 36. Комплексный уголъ между двумя прямыми въ пространствѣ 37. Формула $S\alpha\beta = -T\alpha T\beta cs\theta$. 38. Случаи, когда $S\alpha\beta = 0$. 39. Векторное произведеніе бивекторовъ. Основныя формулы. 40. Тензоръ и параметръ $V\alpha\beta$. 41. Случаи, когда $PV\alpha\beta = \infty$, или $V\alpha\beta = 0$. 42. Ось $V\alpha\beta$. 43. Формула $V\alpha\beta = T\alpha T\beta sn\theta\varepsilon$. . . 51.

44. Дѣленіе. Путь Clifford-Hamilton'а. 45. Основныя формулы. 46. Бикватерніонъ, какъ частное. 47. Приведеніе бикватерніоновъ къ одному знаменателю, или числителю. Щетка. Однощеточные или коллинеарное бикватерніоны. 48. Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе бикватерніоновъ. 49. Разложеніе бикватерніоновъ на сумму двухъ. Геометрическое значеніе знаковъ S и V и ихъ основного свойства. 50. Случаи, когда $S\beta/\alpha = 0$, $PS\beta/\alpha = \infty$, $V\beta/\alpha = 0$, $PV\beta/\alpha = \infty$. Прямой бикватерніонъ. 51. Бикватерніонъ, какъ факторъ. 52. Элементарные бикватерніоны. 53. Разложеніе бикватерніона на множители. 54. Тензоръ и верзоръ бикватерніона и ихъ главное свойство. 55. Бикватерніоны, связанные съ даннымъ. 56. Умноженіе бивектора α на бикватерніонъ q, ось котораго пересѣкаетъ ось α подъ прямымъ угломъ. 57. Законъ коммутативности и ассоціативности сложенія и дистрибутивности сложенія и вычитанія. 58. Законъ ассоціативности умноженія. 59. Одноосные бикватерніоны. Алгебра щетки. . . . . 65.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Глава I. Методъ перенесенія.

60. Методъ перенесенія или раздвиганія. 61. Преобразованіе теоремъ и формулъ геометріи съ элементомъ точка въ формулы и теоремы геометріи съ элементомъ бивекторъ. 62. Преобразованіе геометріи связки векторовъ въ теорію бивекторовъ. 63. Проэкція винта и бивектора на ось. 64. Прямоугольныя комплексныя координаты бивектора; координатные винты. 65. Геометрическое произведеніе двухъ бивекторовъ. Законъ дистрибутивности скалярнаго умноженія. 66. Щетка и ея ось. Ортогональная проэкція бивектора на щетку. Законъ дистрибутивности векторнаго умноженія и обобщеніе теоремы Varignon'а. 67. Полярныя координаты бивектора. 68. Формулы преобразованія координатъ. 69. Обобщеніе формулъ Euler'а. 70. Операція $q(\ )q^{-1}$. 71. Обобщеніе формулъ Rodrigues-Euler'а, формулы Study. 72. Соотношенія между параметрами обобщенныхъ формулъ Euler'а и Rodrigues-Euler'а. 73. Новое начало координатъ. 74. Сложеніе конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній. 75. Нѣкоторыя слѣдствія изъ основной теоремы предыдущаго параграфа. 76. Обобщеніе доказательства Möbius'а закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ. 77. Выводъ нѣкоторыхъ формулъ теоріи кватерніоновъ. 78. Различныя выраженія для $S\alpha\beta\gamma$. 79. Случаи, когда $S\alpha\beta\gamma = 0$, или $PS\alpha\beta\gamma = \infty$.

Стр.

80. Косыя координаты бивектора и его составляющія; дополнительная координатная система. Зависимость между проэкціями и составляющими бивектора. 81. Векторное и скаларное произведенія и относительный моментъ двухъ бивекторовъ въ косыхъ координатахъ. . . . 91.

82. Преобразованіе геометріи связки въ геометрію линейчатаго пространства. 83. Геометрія щетки, ангармоническое отношеніе четырехъ лучей щетки. 84. Преобразованіе теоремъ проэктивной геометріи связки въ теоремы линейчатаго пространства. Нѣкоторыя опредѣленія. 85. Обобщеніе теоремъ Desargues'a. 86. Построеніе по тремъ даннымъ лучамъ щетки четвертаго гармоничнаго съ ними. 87. Проэктивныя и перспективныя щетки. 88. Конгруэнція, аналогичная конусу второго порядка. 89. Прямолинейное, плоское и сферическое многообразія бивекторовъ. 90. Преобразованіе геометріи сферическаго треугольника въ геометрію косого шестиугольника съ прямыми углами. 91. Механика бивектора и системы бивекторовъ. . . . . 137.

Глава II. Группы винтовъ.

92. Основныя опредѣленія и теоремы теоріи группъ винтовъ. 93. Классификація группъ: каноническій видъ группы. 94. Группы одноосныя. 95. Группы двуосныя. 96. Группы трехъосныя. 97. Группы взаимныя 98. Группы дополнительныя. 99. Группы замкнутыя и разомкнутыя. 100. Задача: построить замкнутую группу, исходя отъ двухъ, или трехъ, данныхъ винтовъ. 101. Замкнутыя группы винтовъ и группы движеній . . . . 164.

Глава III. Винтовые интегралы.

102. Опредѣленія 103. Возможные винты. Голономныя системы. 104. Связи для замкнутыхъ возможныхъ группъ. 105. Силовые винты. 106. Винтъ количествъ движенія. Законъ моментовъ бивектора количествъ движенія. 107. Винтовой интегралъ. 108. Системы винтовыхъ интеграловъ. 109. Опредѣленіе всѣхъ винтовыхъ интеграловъ по двумъ, или нѣсколькимъ, даннымъ . . . . 193.

Александр Петрович КОТЕЛЬНИКОВ

(1865–1944)

Выдающийся отечественный математик и механик, один из основоположников неевклидовой механики и геометрии пространства-времени. Закончил Казанский университет. Ученик крупных казанских математиков Ф. М. Суворова и А. В. Васильева. С 1888 по 1914 гг. преподавал в Казанском университете, где защитил магистерскую и докторскую диссертации. С 1924 по 1944 гг. руководил кафедрой теоретической механики Московского высшего технического училища (ныне МГТУ им. Н. Э. Баумана). Заслуженный деятель науки и техники РСФСР, лауреат Государственной премии.

А. П. Котельников заложил основы для построения векторного исчисления и механики в неевклидовых пространствах, а также исследовал связи геометрии Лобачевского с теорией относительности. Разработанный им математический аппарат винтового исчисления позволил обосновать исходные положения механики независимо от типа неевклидова пространства и найти важные геометрические приложения. Также им написаны работы по вопросам кинематики и динамики твердого тела, по теории гироскопов. Его труды оказали значительное влияние на развитие геометрии и теоретической механики.

422406 ID 39574

9785484006571

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7 (495) 135–42–16
Тел./факс: 7 (495) 135–42–46

URSS

E-mail:
URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Интернете:
http://URSS.ru