

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Тульский государственный университет

Ю.Н.КОЛМАКОВ, Ю.А.ПЕКАР

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Задачи и методы их решения

Учебное пособие

Тула 1997

УДК 537(07)

Электричество и магнетизм. Задачи и методы их решения: Учеб. пособие/ Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар; Тул.гос.ун-т, Тула, 1997. 131 с.

ISBN 5 - 7679 - 0074 - 4

Подробно рассмотрены методы решения задач по различным темам раздела "Электричество и магнетизм" курса общей физики. Кроме этого, приведены тексты свыше 260 задач различной степени сложности по этим темам.

Предназначено для проведения семинарских и практических занятий со студентами всех специальностей физического и инженерно-технического профиля. Пособие также может быть использовано студентами в процессе самостоятельной подготовки к этим занятиям, и как сборник индивидуальных заданий.

Ил. 160. Библиогр.: 12 назв.

Начатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета.

Рецензент: Ю.Ф.Головнев, проф., декан физического ф-та ТГПУ.

ISBN 5 - 7679 - 0074 - 4

К $\frac{1604050000}{76П(03)} - 16$ 6 - 97

© Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар, 1997
© Тульский государственный
университет, 1997

ПРЕДИСЛОВИЕ

Главной целью изучения курса общей физики для студентов физических и инженерно-технических специальностей в соответствии с современными требованиями, предъявляемыми к высшей школе, остается приобретение способности применять полученные знания к решению любой практической проблемы, которая может появиться перед специалистом в его будущей профессиональной деятельности. В связи с этим возрастает роль практических и семинарских занятий, на которых студент должен овладеть не столько навыками решения простых стандартизованных задач, иллюстрирующих тот или иной физический закон, сколько научиться самостоятельно оценивать возможности применения различных методов для решения более трудных, приближенных к практической деятельности специальных задач, уметь выбрать наиболее подходящий алгоритм решения, выразить условия задачи в виде математических уравнений и решить их наиболее эффективным способом.

Целью данного пособия является изложение таких специальных методов решения задач по различным темам раздела курса физики "Электричество и магнетизм". Оно содержит также тексты задач различной степени трудности по этим темам.

Пособие предназначено для проведения практических занятий и семинаров по физике со студентами всех направлений ТулГУ, для использования в качестве источника индивидуальных заданий, контрольных и экзаменационных задач.

Первая часть (главы 1 – 3) включает объяснение способов решения основных типов задач по электростатике, законам постоянного тока и магнетизма. В ней подробно описываются различные методы и специальные приемы использования законов физики для решения подобных

задач. Знание этих методов позволяет решить любую из задач, предлагаемых для самостоятельной работы. Необходимый для работы теоретический материал можно найти в литературе [1 – 4]. В частности, большое внимание удалено задачам, в которых исследуются системы с распределенными электрическими зарядами или токами, свойства квазистационарного тока, свойства электрического и магнитного полей в средах.

Вторая часть (глава 4) содержит тексты задач, предназначенных для всех форм индивидуальной работы со студентами. При их подборе были использованы различные пособия [4 – 12], причем главными критериями выбора было четкое соответствие содержания задачи иллюстрируемому ею физическому закону и связь условий задачи с возможным практическим применением изучаемых закономерностей. Для удобства использования все тексты задач структурированы по различным темам курса; к ним прилагается список тематического содержания, в котором указаны основные законы, используемые при решении задачи, а также обозначена степень ее трудности, отражающая, в первую очередь, объем и уровень сложности применяемого при решении математического аппарата, а также нестандартность подхода при использовании исходных физических законов. Как правило, решение всех предлагаемых задач предусматривает применение методов высшей математики.

Глава 1

Электростатика

Поле точечного заряда

Задача 1.1

Точечные заряды $q_1 = 2,7 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -6,4 \cdot 10^{-8}$ Кл закреплены на противоположных концах диаметра окружности радиуса $R = 15$ м. Найти минимальное значение величины напряженности электрического поля, созданного зарядами в точках на этой окружности.

Решение

В произвольной точке А на окружности напряженности полей $E_1 = q_1/4\pi\epsilon_0 x^2$ и $E_2 = q_2/4\pi\epsilon_0 y^2$, созданных каждым из точечных зарядов, складываются векторно (рис.1.1). Треугольник, образованный точечными зарядами и точкой А, – прямоугольный. Для упрощения математических выкладок удобнее перейти к угловой переменной: $x = 2R \cos \varphi$, $y = 2R \sin \varphi = 2R\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$. Тогда квадрат результирующей величины напряженности в точке А принимает вид

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 = \frac{1}{(16\pi\epsilon_0 R^2)^2} \left(\frac{q_1^2}{\cos^4 \varphi} + \frac{q_2^2}{(1 - \cos^2 \varphi)^2} \right). \quad (1.1)$$

Для определения минимума этого выражения возьмем производную от E^2 по переменной $\cos^2 \varphi$ и приравняем ее нулю. Это дает

$$\cos^2 \varphi = q_1^{2/3} / (q_1^{2/3} + q_2^{2/3}). \quad (1.2)$$

Нетрудно убедиться, что величина напряженности E стремится к бесконечности при приближении точки А к любому из точечных зарядов. Поэтому полученное условие экстремума (1.2) соответствует минимуму величины E . Подставляя (1.2) в выражение (1.1), находим

$$E_{\min} = (q_1^{2/3} + q_2^{2/3})^{3/2} / 16\pi\epsilon_0 R^2 = 1,25 \text{ В/м}.$$

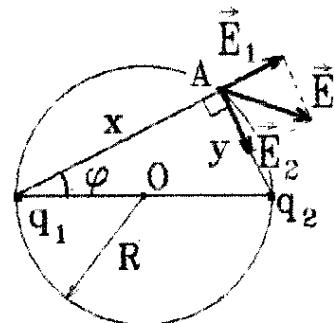


Рис.1.1

Поле непрерывно распределенного в пространстве заряда

Задача 1.2

Система состоит из тонкого равномерно заряженного кольца радиуса R и очень длинной равномерно заряженной тонкой нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Заряд кольца равен q , а на единицу длины нити приходится заряд ρ . Найти силу взаимодействия кольца и нити.

Решение

Разобьем кольцо и нить на бесконечно малые участки, каждый из которых можно считать точечным зарядом, и для которых можно применять закон Кулона. Заряд dq на кольце создает в точке А на оси кольца на расстоянии $OA = x$ от его центра (рис.1.2) поле с напряженностью $dE = dq/4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)$. Вследствие симметричного распределения заряда результирующий вектор напряженности, созданный кольцом в точке А, направлен вдоль оси кольца и равен по величине

$$E(x) = \int dE \cos \varphi = \frac{q \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (1.3)$$

В результате поле кольца действует на заряженный участок нити длиной dx в точке А с кулоновской силой

$$dF = \rho dx \cdot E(x).$$

Чтобы найти силу взаимодействия всей нити с кольцом, надо сложить силы, действующие на все подобные участки, т.е. взять интеграл по длине нити:

$$F_{вз} = \int E(x) \cdot \rho dx = \frac{q\rho}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\rho q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Задача 1.3

Половина шара радиуса R равномерно заряжена с плотностью заряда ρ . Какую работу против электрических сил надо совершить, чтобы перенести точечный заряд q из удаленной точки в центр шара?

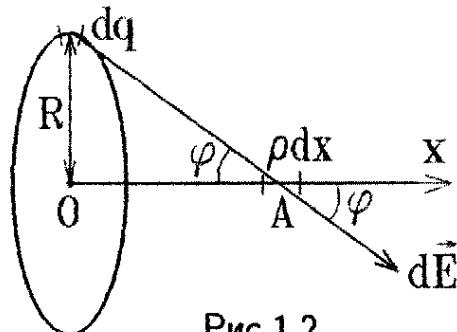


Рис.1.2

Решение

На бесконечном удалении потенциал поля, создаваемого заряженной половиной шара, равен нулю. Поэтому для определения работы по переносу точечного заряда q ,

$$A = q(\varphi_0 - 0),$$

надо вычислить потенциал φ_0 в центре шара O . Для этого разобьем половину шара на тонкие слои с радиусом r , толщиной dr и объемом $2\pi r^2 dr$, как показано на рис.1.3. Все точки такого слоя расположены на одинаковом расстоянии r от центра O , и заряд $dq = \rho \cdot 2\pi r^2 dr$, распределенный по слою, создает в точке O потенциал $d\varphi = dq / 4\pi\epsilon_0 r$. Суммируя вклады слоев, получаем потенциал, созданный в точке O всем зарядом

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R r dr = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}.$$

Отсюда, искомая работа $A = q\rho R^2 / 4\epsilon_0$.

Теорема Гаусса для электростатического поля

Задача 1.4

Бесконечно длинный цилиндр радиуса R равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ . Найти разность потенциалов между точками, одна из которых находится на оси цилиндра, а другая – на расстоянии $r = 2R$ от оси.

Решение

Поле заряженного цилиндра симметрично относительно его оси. Окружим участок цилиндра длины l замкнутой цилиндрической поверхностью с радиусом r (рис.1.4). При $r \leq R$ внутри такой поверхности находится заряд $q = \rho\pi r^2 l$, а линии напряженности электрического поля пересекают под прямым углом боковую часть поверхности. В соответствии с теоремой Гаусса для вектора E запишем

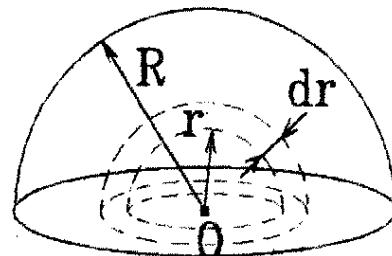


Рис.1.3

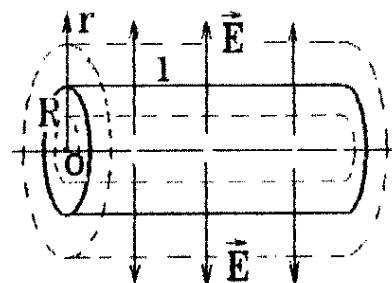


Рис.1.4

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r l = q/\epsilon_0 = \rho \pi r^2 l / \epsilon_0,$$

или

$$E(r) = \rho r / 2\epsilon_0 \quad \text{при } r \leq R.$$

Получив эту зависимость, можно найти разность потенциалов между осью цилиндра и его поверхностью, используя соотношение

$$\varphi(0) - \varphi(R) = \int_0^R \mathbf{E}(r) \cdot dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R r dr = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}. \quad (1.4)$$

Аналогично внутри поверхности с радиусом $r \geq R$ (рис.1.4) заключен заряд $q = \rho \pi R^2 l$, и теорема Гаусса дает

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r l = \pi \rho R^2 l / \epsilon_0 \quad \text{или} \quad E(r) = \rho R^2 / 2\epsilon_0 r \quad \text{при } r \geq R.$$

Отсюда при $r \geq R$ находим

$$\varphi(R) - \varphi(r = 2R) = \int_R^{2R} \mathbf{E}(r) dr = \int_R^{2R} \frac{\rho R^2 dr}{2\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln 2. \quad (1.5)$$

Искомую разность потенциалов получим из формул (1.4),(1.5):

$$\varphi(R) - \varphi(2R) = \rho R^2 (1 + 2 \ln 2) / 4\epsilon_0.$$

Задача 1.5

В однородное электрическое поле с напряженностью E_0 вносят незаряженный проводящий шар. Найти точку на поверхности шара, в которой величина напряженности поля не изменится.

Решение

Теорема Гаусса позволяет определить напряженность поля внутри шара на расстоянии r от его центра, если шар равномерно заряжен с плотностью заряда ρ . Если выбрать замкнутую сферическую поверхность радиуса r с центром в центре шара (рис.1.5), то внутри нее находится заряд $q = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3$, и в силу симметрии поля имеем

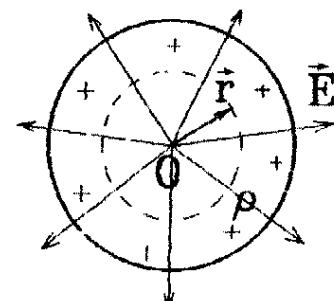


Рис.1.5

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = E \cdot \oint dS = E \cdot 4\pi r^2 = q/\epsilon_0,$$

или

$$\mathbf{E}(r) = \rho r / 3\epsilon_0. \quad (1.6)$$

При внесении незаряженного проводящего шара во внешнее поле \mathbf{E}_0 свободные заряды на нем смеются вдоль линий напряженности \mathbf{E}_0 (явление электрической индукции). Проводящий шар можно представить как два равномерно заряженных шара с положительной и отрицательной плотностью заряда $+\rho$ и $-\rho$. Во внешнем поле центры этих шаров сдвинуты на некоторое расстояние l (рис.1.6). Смешанные заряды создают в любой точке А шара поле, которое можно определить, складывая поля положительно и отрицательно заряженных шаров. Согласно формуле (1.6) получим

$$\mathbf{E} = \frac{+\rho \mathbf{r}_+}{3\epsilon_0} + \frac{(-\rho) \mathbf{r}_-}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho l}{3\epsilon_0}.$$

Так как внутри проводника поле должно отсутствовать, то поле смешанных зарядов компенсирует внешнее поле:

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho l}{3\epsilon_0} = -\mathbf{E}_0. \quad (1.7)$$

Смещение l центров шаров очень мало. Поэтому смешанные заряды образуют очень тонкий слой индуцированного заряда на поверхности шара. Из рис.1.7 видно, что толщину этого слоя Δh можно определить из геометрического соотношения

$$(R + \Delta h)^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cdot \cos(\pi - \theta).$$

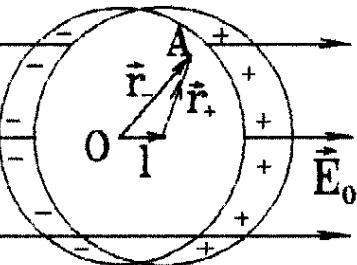


Рис.1.6

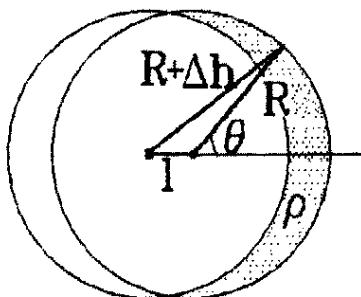


Рис.1.7

С учетом малости величин l и Δh получим в первом приближении

$$\Delta h \approx l \cdot \cos \theta.$$

Участок на поверхности шара площадью ΔS имеет заряд $\Delta q = \rho \Delta h \Delta S$. Поэтому поверхностная плотность индуцированного заряда

принимает вид $\sigma = \Delta q / \Delta S = \rho \Delta h = \rho l \cos \theta$. Используя выражение (1.7), находим

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Вне шара, вблизи его поверхности, вектор напряженности направлен вдоль радиуса шара (ортогонально к эквипотенциальной поверхности проводника). Величина этого поля определяется плотностью заряда, распределенного по поверхности:

$$E_{\text{пов}} = \sigma / \epsilon_0 = 3E_0 \cos \theta.$$

Поэтому искомая точка на поверхности шара (где $E_{\text{пов}} = E_0$) видна из центра шара под углом $\theta = \arccos(1/3)$ к направлению внешнего поля E_0 .

Задача 1.6

Распределенный в пространстве заряд создает сферически симметричное электростатическое поле с напряженностью $E = \alpha r / r^2$, где α – положительная константа. Чему равен заряд, заключенный внутри сферической поверхности с радиусом $r = R$?

Решение

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, определим вначале плотность распределенного заряда: $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}$. Для вычисления дивергенции перейдем в декартову систему координат, где $\mathbf{E} = \alpha(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) / (x^2 + y^2 + z^2)$. Вычисляя производные, находим

$$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{\epsilon_0 \alpha}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\epsilon_0 \alpha}{r^2}.$$

Заряд распределен в пространстве неоднородно, но сферически симметрично. Поэтому разобьем пространство на тонкие сферические слои с радиусом r и толщиной dr , имеющие объем $dV = 4\pi r^2 dr$ и заряд $dq = \rho dV$. Тогда получим искомый заряд области, ограниченной сферой радиуса R ,

$$q = \int dq = \int_0^R \frac{\epsilon_0 \alpha}{r^2} 4\pi r^2 dr = 4\pi \epsilon_0 \alpha R.$$

Задача 1.7

Найти распределение заряда, создающего электростатическое поле с напряженностью $E = \alpha(i x + j y) / (x^2 + y^2)$, где α – положительная константа.

Решение

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, нетрудно вычислить, что объемная плотность заряда, создающего данное поле, равна нулю:

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = \epsilon_0 \alpha \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Но каким-то зарядом поле создано. Заметим, что $E \rightarrow \infty$ при $x, y \rightarrow \infty$. Это позволяет предположить, что заряд распределен вдоль прямой линии $x = y = 0$ (рис.1.8), а так как функция E не зависит от переменной z , то можно считать, что заряд распределен равномерно с линейной плотностью λ . Окружим участок прямой (оси Oz) цилиндрической замкнутой поверхностью длины l с радиусом $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и используем теорему Гаусса:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = \frac{q_{\text{вн}}}{\epsilon_0}.$$

Подставляя в это выражение площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}} = 2\pi r l$, величину охватываемого поверхностью заряда $q_{\text{вн}} = \lambda l$, и сравнивая с данной в условии величиной напряженности, получим

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\alpha}{r}, \quad (1.8)$$

т.е. искомый заряд равномерно распределен по оси Oz с линейной плотностью $\lambda = 2\pi\epsilon_0\alpha$.

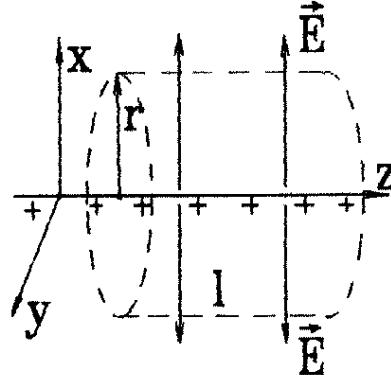


Рис.1.8

Метод изображений в электростатике

Задача 1.8

Точечный заряд q находится на расстоянии l от безграничной проводящей плоскости. Найти заряд, индуцированный на плоскости в круге радиуса R с центром в точке, расстояние от которой до заряда q минимально. Какую работу надо совершить, чтобы медленно отодвинуть точечный заряд от плоскости на очень большое расстояние?

Решение

Подставим выражение для напряженности электростатического поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ в теорему Гаусса в дифференциальной форме $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Полученное дифференциальное уравнение (уравнение Пуассона)

$$\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (1.9)$$

имеет **единственное решение**, если заданы определенные граничные условия. Если поднести точечный заряд q к безграничной проводящей плоскости (рис.1.9), то на плоскости возникает индуцированный заряд противоположного знака с поверхностной плотностью $\sigma(r)$ (где r – расстояние от точки О). Граничным условием в нашей задаче будет равенство нулю потенциала во всех точках безграничной проводящей плоскости.

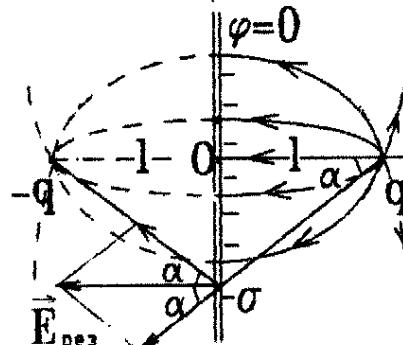


Рис.1.9

По системе из двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных зеркально-симметрично относительно той же плоскости, также создает во всех точках плоскости нулевой потенциал. Поэтому в силу единственности решения уравнения (1.9) поле двух зеркально расположенных точечных зарядов $+q$ и $-q$ обязано совпасть в правой части рис.1.9 с полем точечного заряда $+q$ и заряда, индуцированного на бесконечной плоской поверхности проводника. Подобная замена поля индуцированного заряда с плотностью $\sigma(r)$ на поле зеркально расположенного точечного заряда $-q$ называется методом изображений в электростатике.

В результате такой замены сила взаимодействия удаленного на расстояние x от проводящей плоскости точечного заряда q с зарядом, индуцированным на этой плоскости, совпадает с кулоновской силой взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии $2x$. Работу по удалению заряда от плоскости найдем по формуле

$$A = \int F_{\text{кул}} dx = \int_1^{\infty} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} dx = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$$

Вычислить работу по формуле $A = q(\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{конеч}})$ здесь нельзя, так как эта формула справедлива для движения заряда в электростатическом поле, когда все остальные заряды, создающие потенциал φ , покоятся. В нашем случае при удалении заряда q индуцированный заряд начнет перераспределяться.

На удалении r от центральной точки O (рис.1.9) зеркально расположенные точечные заряды создают поле с результирующей напряженностью

$$E_{\text{рез}} = \frac{2q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)}, \quad \text{где } \cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}.$$

С другой стороны, это поле должно совпасть с полем вблизи плоской поверхности заряженного проводника $E_{\text{рез}} = \sigma/\epsilon_0$, т.е. индуцированный заряд распределен по плоскости с поверхностной плотностью

$$\sigma(r) = \frac{-ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}}.$$

В круге радиуса R на плоскости индуцируется заряд

$$q_{\text{инд}} = \int \sigma \cdot dS = \int_0^R \sigma \cdot 2\pi r dr = -q \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right).$$

При $R \rightarrow \infty$ получаем $q_{\text{инд}} = -q$, т.е. все силовые линии поля, созданного точечным зарядом q , обязаны заканчиваться на проводящей плоскости

Задача 1.9

Точечный заряд q помещен на расстоянии $r/3$ от центра полой тонкостенной металлической изолированной сферы радиуса r , на которой

помещен заряд $-2q$. Найти поверхностную плотность заряда на внутренней и внешней поверхности сферы в точках, наиболее удаленных от заряда q . Как изменится результат, если сферу заземлить?

Решение

Используем метод изображений для заряда, индуцированного на сфере. Если проводящая сфера заземлена, то потенциал во всех ее точках должен быть равен нулю. Такое значение потенциала для сферы радиуса R с центром в точке О можно создать с помощью двух точечных зарядов q и q' , расположенных на одной прямой, проходящей через точку О, на расстояниях соответственно h и $b = r^2/h$ от точки О (рис.1.10). Из теоремы косинусов нетрудно увидеть, что расстояния x и y от этих зарядов до произвольной точки А на поверхности сферы связаны соотношением

$$y = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} = \frac{r}{h} \sqrt{h^2 + r^2 - 2rh \cos \theta} = \frac{Rx}{h}.$$

Поэтому потенциал поля, созданного зарядами q и q' , обращается в нуль в любой точке А на поверхности сферы

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x} \left(\frac{h}{r} q + q' \right) = 0,$$

если заряд $q' = -qh/r$.

Единственность решения уравнения (1.9) для граничных условий $\varphi_A = 0$ позволяет нам заменить внутри сферы поле точечного заряда q и заряда, индуцированного на сфере, на поле двух точечных зарядов q и $q' = -qh/r$ (рис.1.10).

Если проводящую сферу не заземлять, а поместить на нее заряд Q , то на внутренней поверхности сферы по-прежнему окажется индуцированный заряд $-q$. Замкнутая проводящая поверхность экранирует электрическое поле, и внутри проводника $E = 0$, т.е. все силовые линии поля, выходящие из положительного точечного заряда q , должны заканчиваться на таком же по величине отрицательном индуцированном заряде $-q$ (рис.1.11). Вне сферы поле также экранировано и не зависит от положения заряда q внутри сферы.

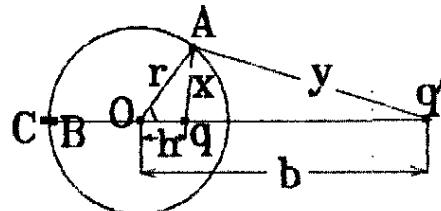


Рис.1.10

Остающийся заряд $Q + q$ распределится по внешней поверхности металлической сферы равномерно с поверхностной плотностью

$$\sigma_c = (Q + q) / 4\pi r^2.$$

Если сферу заземлить, то заряд $Q + q$ полностью стекает с ее внешней поверхности на землю, и она остается незаряженной ($\varphi_a = \varphi_k = 0$, $E'_c = 0$). Но внутренняя полость сферы экранирована: электрическое поле внутри сферы и распределение индуцированного на внутренней поверхности заряда не изменятся. Заменяя это поле на поле двух точечных зарядов q и q' , как описано выше, получаем величину напряженности в точке В, наиболее удаленной от заряда q (рис.1.10) :

$$E_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r+h)^2} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(r+b)^2}.$$

Плотность заряда на внутренней поверхности заряженного проводника связана с величиной напряженности соотношением $|\sigma_B| = \epsilon_0 E_B$. Подставляя заданные в условии величины $Q = -2q$; $h = r/3$; $b = r^2/h = 3r$; $q' = -qh/r = -3q$, получаем в итоге:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_B = -\frac{3q}{32\pi r^2}; & \sigma_c = -\frac{q}{4\pi r^2} \\ \sigma'_B = \sigma_B; & \sigma'_c = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{— до заземления,} \\ \text{— после заземления.} \end{array}$$

Поле электрического диполя

Задача 1.10

Два одинаковых незаряженных проводящих шара радиуса R помещают в однородное электрическое поле напряженностью E_0 так, чтобы центры шаров находились на расстоянии l друг от друга ($l \gg R$). Линия, соединяющая центры шаров, перпендикулярна вектору E_0 . Вычислить величину и направление силы электрического взаимодействия между шарами.

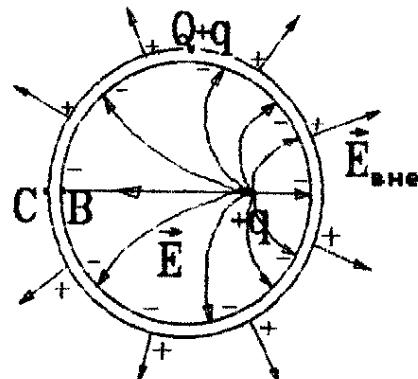


Рис.1.11

Решение

Как показано в решении задачи 1.5., проводящий шар, внесенный во внешнее поле с напряженностью E_0 , можно представить в виде двух шаров, равномерно заряженных с положительной и отрицательной плотностью $+\rho$ и $-\rho$, центры которых смешены на малое расстояние l (рис.1.6). Вне равномерно заряженного шара его поле совпадает с полем точечного заряда $q = \rho \cdot 4\pi R^3/3$, помещенного в центр шара. Таким образом, индуцированные заряды, возникающие во внешнем электрическом поле E_0 на поверхности незаряженного проводящего шара или сферы, создают поле электрического диполя с электрическим моментом $p_e = ql = 4\pi R^3 \rho l / 3$. Подставляя из формулы (1.7) $\rho l = 3\epsilon_0 E_0$, находим

$$p_e = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0. \quad (1.10)$$

Потенциал поля электрического диполя, созданного в точке А (рис.1.12), имеет вид

$$\varphi = p_e \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2,$$

где r – расстояние от диполя до точки наблюдения А.

Напряженность поля, создаваемого диполем в этой точке, определим в полярной системе координат (e_r и e_θ – единичные орты) :

$$E_A = -\text{grad} \varphi_A \equiv \left(e_r \frac{\partial \varphi_A}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_A}{\partial \theta} \right) = e_r \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + e_\theta \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.11)$$

Второй шар (диполь) находится в точке с координатами $r = l$, $\theta = \pi/2$ (рис.1.12) и обладает потенциальной энергией взаимодействия с первым диполем :

$$W = -p_e \cdot E_{\text{дип}} \Big|_{\theta = \pi/2} = \frac{p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ где } r = l.$$

Силу взаимодействия между диполями (шарами) определяем по формуле

$$F = -\text{grad} W = -e_r \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=l} = e_r \frac{3p_e^2}{4\pi\epsilon_0 l^4}.$$

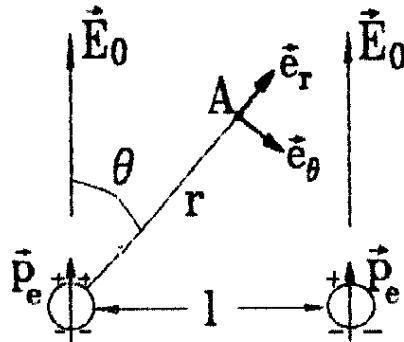


Рис.1.12

Подставляя выражение (1.10), находим

$$F_r = \frac{12\pi\epsilon_0 R^6 E_0^2}{l^4} > 0, \quad \text{т.е. шары отталкиваются.}$$

Электрическое поле в диэлектриках

Задача 1.11

Найти диэлектрическую проницаемость ϵ "идеального газа", состоящего из большого числа проводящих шариков радиуса R . Концентрация шариков n мала ($n \cdot R^3 \ll 1$).

Решение

Пусть газ из шариков находится в электрическом поле с напряженностью E . Как показано в решении предыдущей задачи 1.10, каждый шарик приобретает в этом поле индуцированный заряд и становится электрическим диполем с моментом, вычисляемым по формуле (1.10). По определению, векторная сумма электрических моментов таких диполей в единице объема является вектором поляризованности среды:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_e = n \cdot \mathbf{p}_e = 4\pi\epsilon_0 n R^3 \mathbf{E}.$$

Используя связь векторов поляризованности и напряженности

$$\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.12)$$

находим величину диэлектрической проницаемости газа из крохотных проводящих шариков (аналог среды из неполярных молекул) :

$$\epsilon = 1 + 4\pi R^3 n.$$

Задача 1.12

Точечный заряд q помещен в начало координат и окружен непроводящей средой с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \alpha r^n$, где α , n – постоянные, r – расстояние от начала координат. Какой заряд заключен в шаре радиуса R с центром в начале координат и при каком показателе степени n объемный связанный заряд распределен в среде с постоянной плотностью ?

Решение

Вместо точечного заряда q рассмотрим тот же заряд q , распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = q/4\pi r_0^2$ на проводящем шарике радиуса r_0 (рис.1.13). Это сделано для того, чтобы избежать бесконечных значений поля вблизи точечного заряда. В конечном результате достаточно устремить $r_0 \rightarrow 0$.

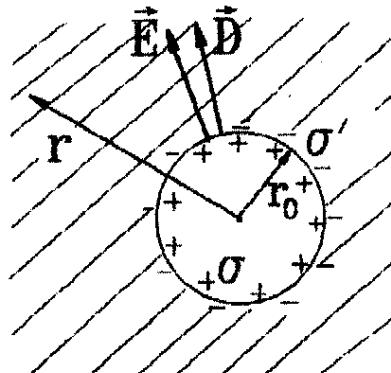


Рис.1.13

Диэлектрик вблизи шарика поляризуется, и на его поверхности оказывается связанный заряд σ' . Поэтому напряженность электрического поля вблизи заряженной с результирующей плотностью $\sigma + \sigma'$ поверхности проводника принимает вид $E = (\sigma + \sigma')/\epsilon_0$. С другой стороны, в данном случае величина вектора индукции электрического поля в той же точке определяется согласно теореме Гаусса только распределением свободного заряда q :

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r_0^2 = q = \sigma \cdot 4\pi r_0^2, \quad \text{т.е.} \quad D = \sigma.$$

Используя связь $D = \epsilon\epsilon_0 E$, находим $\epsilon(\sigma + \sigma') = \sigma$ или

$$\sigma' = \frac{(1 - \epsilon)\sigma}{\epsilon}. \quad (1.13)$$

Напомни, что с учетом поляризации диэлектрика величина заряда на поверхности шарика оказывается равной не q , а

$$q_{\text{п}} = (\sigma + \sigma') \cdot 4\pi r_0^2 = \frac{q}{\epsilon(r_0)}. \quad (1.14)$$

Вычислим теперь величину объемного связанных заряда в диэлектрической среде. Эту плотность ρ' можно непосредственно получить для вектора поляризованности среды $\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$ из теоремы Гаусса в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho'$$

или, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения,

$$\nabla((\epsilon - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}) \equiv \nabla\epsilon \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} + (\epsilon - 1)\epsilon_0 \cdot \nabla \mathbf{E} = -\rho'.$$

Вне шара свободных зарядов нет и $\nabla \mathbf{E} \equiv \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho' / \epsilon_0$. Тогда легко найти

$$\rho' = -\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}}{\epsilon} \cdot \nabla \epsilon = -\frac{\mathbf{D}}{\epsilon^2} \nabla \epsilon. \quad (1.15)$$

Рассматриваемая среда имеет сферическую симметрию и величина индукции электрического поля в ней не зависит от связанного заряда. Поэтому $\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \cdot q / 4\pi r^2$, $\nabla \epsilon = \mathbf{e}_r \cdot d\epsilon / dr$, а (1.15) принимает вид

$$\rho' = -\frac{q}{4\pi r^2 \epsilon^2} \cdot \frac{d\epsilon}{dr}. \quad (1.16)$$

С учетом $\epsilon = \alpha r^n$ выражение (1.16) дает

$$\rho' = -q n r^{-n-3} / 4\pi \alpha,$$

т.е. плотность объемного связанного заряда в среде постоянна при $n = -3$ (заметим, что объемный связанный заряд в среде не возникает при $\epsilon = \text{const}$).

В соответствии с (1.16) внутри шара с радиусом R будет находиться объемный заряд

$$q' = \int \rho' dV = \int_{r_0}^R \rho' \cdot 4\pi r^2 dr = - \int_{r_0}^R \frac{q}{\epsilon^2} d\epsilon = \frac{q}{\epsilon} \Big|_{r_0}^R = \frac{q}{\epsilon(R)} - \frac{q}{\epsilon(r_0)}.$$

Складывая это выражение с зарядом $q_{\text{п}}$, находящимся на поверхности проводящего шарика, определяем искомый полный электрический заряд

$$q = q' + q_{\text{п}} = q / \alpha R^n$$

(этот заряд не меняется при $r_0 \rightarrow 0$).

Задача 1.13

Шар радиуса R из однородного диэлектрика с проницаемостью ϵ вносят в однородное поле с напряженностью E_0 (рис.1.14). Вычислить суммарный положительный связанный заряд q'_+ , появляющийся на правой половине поверхности шара. Найти напряженность поля в точках А и В вблизи поверхности диэлектрика.

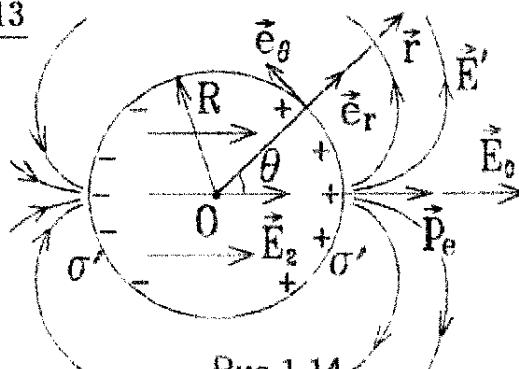


Рис.1.14

Решение

Напряженность поля внутри диэлектрика нельзя считать равной E_0/ϵ , поскольку внешняя поверхность шара не совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля E_0 . Так как диэлектрик однороден, то связанный заряд образуется с поверхностью плотностью σ' только на поверхности шара. Результирующее поле вне шара E_1 складывается из исходного поля E_0 и поля E' , созданного связанными зарядами:

$$E_1 = -\operatorname{grad} \varphi_1 = E_0 + E' = -\operatorname{grad} \varphi_0 - \operatorname{grad} \varphi'.$$

Легко проверить, что потенциал однородного поля $E_0 = \text{const}$ имеет вид $\varphi_0 = -E_0 \cdot r$ (начало радиус-вектора r совмещаем с центром О шара). Образовавшийся под действием однородного внешнего поля связанный заряд σ' создает вне диэлектрика такое же поле диполя, как и индуцированный заряд на поверхности металлического шара в задаче 1.5, причем дипольный момент p_e направлен по внешнему полю, а его величина пропорциональна величине E_0 :

$$\varphi' = \frac{p_e \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ где } p_e = AE_0, A \text{ -- некоторая постоянная.} \quad (1.17)$$

Далее воспользуемся следующим приемом: потенциал внутри шара не может быть бесконечным в точке $r = 0$. Поэтому приемлемым конечным решением уравнений электростатики внутри шара оказывается постоянное поле с напряженностью $E_2 = -\operatorname{grad} \varphi_2$, пропорциональной напряженности внешнего поля E_0 , потенциал которого $\varphi_2 = -BE_0 \cdot r$, где B -- некоторая постоянная. В аналогичной задаче 1.5 поле внутри металлического шара также было постоянным, но равным нулю.

Если для записанного решения из граничных условий сохранения на поверхности диэлектрика нормальных составляющих вектора индукции и касательных составляющих вектора напряженности (см.рис.1.14) :

$$D_{1r} = \epsilon_0 E_{1r} = D_{2r} = \epsilon_0 \epsilon E_{2r}, E_{1\theta} = E_{2\theta} \quad (1.18)$$

однозначно можно определить неизвестные постоянные A и B , то в силу единственности решений уравнений электростатики с данными граничными условиями будет получено верное решение задачи.

Как видно из рис.1.14, нормальная и касательная к поверхности шара составляющие вектора E направлены по ортам e_r и e_θ соответственно, а напряженность поля диполя имеет вид (1.11). С учетом этого и с приведенными выше выражениями для потенциалов φ_1 и φ_2 граничные условия (1.18) при $r = R$ принимают вид:

$$E_0 \cos \theta + \frac{2AE_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \epsilon BE_0 \cos \theta \text{ и } -E_0 \sin \theta + \frac{AE_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -BE_0 \sin \theta,$$

откуда легко найти постоянные

$$A = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \text{ и } B = \frac{3}{\epsilon + 2}.$$

Величину напряженности поля в точках М и Н вне и внутри шара при $r = R$ и $\theta = 0$ вычисляем по формулам:

$$E_M = -\operatorname{grad} \varphi_1 = \frac{3\epsilon}{\epsilon + 2} E_0, E_N = -\operatorname{grad} \varphi_2 = \frac{3}{\epsilon + 2} E_0.$$

С учетом полученного выражения для A , дипольный момент (1.17) связанного заряда имеет вид $\mathbf{p}_e = 4\pi\epsilon_0 R^3 (\epsilon - 1) \mathbf{E}_0 / (\epsilon + 2)$. Но в задачах 1.10 и 1.5 (см. формулу (1.10)) было найдено, что индуцированный заряд с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{инд}} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ на металлическом шаре, находящемся во внешнем однородном поле \mathbf{E}_0 , создает вне шара поле с дипольным моментом $\mathbf{p}_{\text{инд}} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0$. Аналогично найденный выше дипольный момент создаст связанный заряд с пропорциональной поверхностной плотностью

$$\sigma' = \sigma_{\text{инд}} \left| \frac{\mathbf{p}_e}{\mathbf{p}_{\text{инд}}} \right| = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \cos \theta. \quad (1.19)$$

Чтобы найти полный связанный положительный заряд, выделим на поверхности шара узкую кольцевую полоску с радиусом $r = R \sin \theta$, шириной $dl = Rd\theta$ (рис. 1.15), на которой находится заряд $dq' = \sigma' \cdot 2\pi r dl$. Подставляя сюда выражение (1.19) и интегрируя по правой половине шара, найдем

$$dq' = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sigma' \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \\ = \frac{6\pi\epsilon_0(\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} R^2 E_0 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 3\pi\epsilon_0 R^2 E_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}.$$

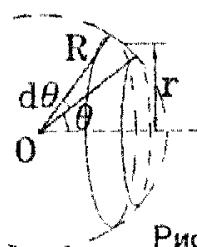


Рис. 1.15

Системы заряженных проводников. Вычисление электрической емкости

Задача 1.14

Система состоит из двух концентрических проводящих сфер, причем на внутренней сфере радиуса R_1 помещен заряд q_1 . Какой заряд q_2 следует поместить на внешнюю сферу радиуса R_2 , чтобы потенциал внутренней сферы стал равен нулю?

Решение

Внешняя проводящая сфера полностью экранирует электростатическое поле, созданное зарядом на внутренней сфере. По внутренней поверхности сферы радиуса R_2 будет равномерно распределен противоположный по знаку заряд $-q_1$, и все силовые линии поля \mathbf{E} , ограничены пространством между сферами (рис. 1.16). Эта система образует сферический конденсатор с емкостью $C_k = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ и с зарядом q_1 . Поэтому разность потенциалов между сферами составит

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_1}{C_k} = \frac{q_1(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}. \quad (1.20)$$

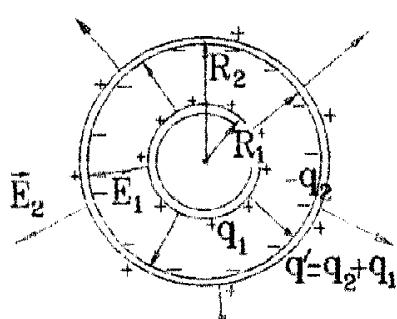


Рис. 1.16

По внешней поверхности сферы радиуса R_2 равномерно распределится оставшийся заряд $q' = q_1 + q_2$ (суммарный заряд на обеих поверхностях сферы равен q_2). Поле E_2 вне этой сферы совпадает с полем заряженного проводящего шара емкостью $C_{\text{ш}} = 4\pi\epsilon_0 R_2$. Потенциал такого шара (точнее – разность потенциалов между шаром и точкой, удаленной в бесконечность)

$$\varphi_2 = \frac{q'}{C_{\text{ш}}} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (1.21)$$

Из выражений (1.20), (1.21) получаем условие равенства нулю потенциала внутренней сферы относительно бесконечно удаленной точки:

$$\varphi_1 = \frac{q_1(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2} + \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0,$$

откуда находим искомый заряд $q_2 = -q_1 R_2 / R_1$.

Задача 1.15

Сферический конденсатор с радиусом внутренней обкладки R_0 и радиусом внешней обкладки $R = 5R_0/3$ заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого изменяется с расстоянием r от центра конденсатора по закону $\epsilon = r/R_0$. Найти емкость такого конденсатора.

Решение

Пусть на внутренней обкладке находится заряд q . Окружив ее сферической поверхностью радиуса r и используя теорему Гаусса для вектора электрической индукции D , легко найти, что $D = q/4\pi r^2$. Так как ϵ зависит только от r (случай сферической симметрии), то напряженность поля вычисляется по формуле $E = D/\epsilon\epsilon_0$. Тогда разность потенциалов между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_0}^R E dr = \int_{R_0}^R \frac{qR_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^3} = \frac{2q}{25\pi\epsilon_0 R_0}.$$

Отсюда емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{25\pi\epsilon_0 R_0}{2}.$$

Задача 1.16

Определить взаимную емкость системы, которая состоит из металлического шарика радиуса R и безграничной проводящей плоскости, отстоящей от центра шарика на расстояние b , где $b \gg R$.

Решение

При значительном удалении шарика от плоскости можно считать, что заряды на его поверхности распределены равномерно, т.е. поле шарика с зарядом q практически совпадает с полем точечного заряда q . Метод изображений позволяет заменить заряд, расположенным отрицательным точечным зарядом $-q$ (рис.1.17).

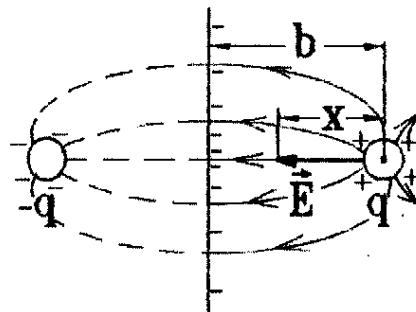


Рис.1.17

Вектор напряженности созданного обоими зарядами электрического поля направлен вдоль соединяющей их линии. В удаленной на расстояние x от центра шарика О точке он имеет величину

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (2b-x)^2}.$$

Разность потенциалов между шариком и плоскостью вычисляется по формуле

$$\Delta\varphi = \int_R^b E dx = \frac{2q(b-R)}{4\pi\epsilon_0 R(2b-R)}.$$

Учитывая, что $\Delta\varphi = q/C$ и $b \gg R$, находим искомую емкость (она практически совпадает с емкостью единственного шарика) :

$$C \approx 4\pi\epsilon_0 R.$$

Задача 1.17

Плоский конденсатор опустили в горизонтальном положении в воду, которая заполнила зазор ширины $d = 1$ мм между пластинами. Затем конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения $U = 500$ В. Найти приращение давления воды в зазоре при таком подключении. Диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon = 81$.

Решение

При подключении конденсатора к источнику напряжения U на его пластинах появляется сторонний заряд с поверхностной плотностью σ , и возникает поле с напряженностью

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (1.22)$$

Это поле создано зарядами на обеих пластинах. Но на заряд $q = \sigma S$ одной из пластин действует только поле $E' = E/2$, созданное зарядом на другой пластине. Электрическая сила, притягивающая пластины друг к другу, имеет величину $F = qE' = \sigma SU/2d = \sigma^2 S/2\epsilon\epsilon_0$. Здесь S – площадь одной пластины.

Если диэлектрик убрать, а на пластинах конденсатора оставить тот же заряд σ , то величина силы притяжения возрастет до $F_0 = \sigma^2 S/2\epsilon_0$. Разность сил $F_D = F_0 - F$ – это сила, с которой связанный заряд с плотностью σ' , возникающий на поверхности диэлектрика, отталкивает заряженную пластину конденсатора (рис.1.18). С той же величине силой пластина будет действовать на диэлектрик, создавая в нем дополнительное к гидростатическому давление

$$\Delta p = \frac{F_D}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right).$$

Подставляя плотность заряда σ , задаваемую условием (1.22), получим

$$\Delta p = \epsilon(\epsilon - 1)\epsilon_0 U^2 / 2d^2 = 7,17 \text{ кПа.}$$

Задача 1.18

Заряженный и отключенный от источника напряжения цилиндрический конденсатор с длиной h и радиусами обкладок r_1 и r_2 погружают, как показано на рис.1.19, в жидкий однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ . Диэлектрик заполняет ровно половину пространства между обкладками. При

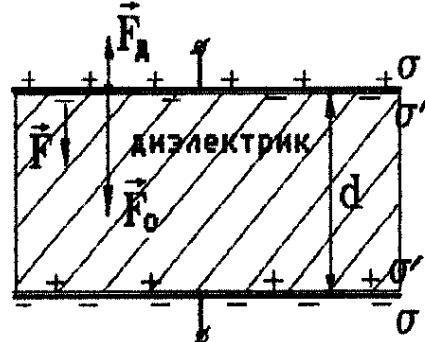


Рис.1.18

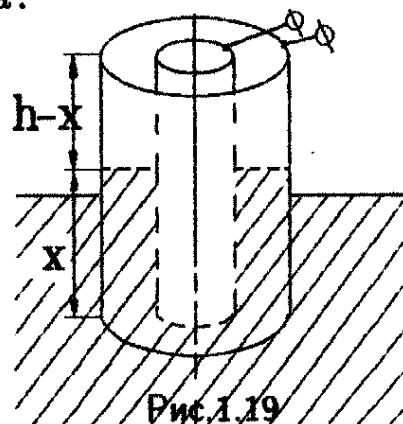


Рис.1.19

этом электрическая сила, втягивающая диэлектрик в конденсатор, равна F . Найти заряд q на обкладках конденсатора, если $r_2 \ll h$, $r_1 < r_2$.

Решение

Вычислим вначале емкость цилиндрического конденсатора длины h , не заполненного диэлектриком. Заряд q равномерно распределен по внутренней обкладке радиуса r_1 с поверхностной плотностью $\sigma = q/2\pi r_1 h$ (рис.1.20). Окружив эту обкладку замкнутой коаксиальной цилиндрической поверхностью с радиусом r , где $r_1 < r < r_2$, и взяв интеграл по этой поверхности от вектора напряженности E , получим из теоремы Гаусса для E

$$\oint E \cdot dS = E \cdot 2\pi rh = \frac{\sigma \cdot 2\pi r_1 h}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

или

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 hr}. \quad (1.23)$$

Разность потенциалов между обкладками найдем из выражения

$$\Delta\varphi = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тогда емкость цилиндрического конденсатора имеет вид

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (1.24)$$

Система на рис.1.19 состоит из двух параллельно соединенных цилиндрических конденсаторов: 1) длины $h - x$ (без диэлектрика); 2) длины x (с диэлектриком; поле в таком конденсаторе уменьшается в ϵ раз). Согласно (1.24) получим общую емкость этой системы:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0(h-x)}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 x}{\ln(r_2/r_1)}.$$

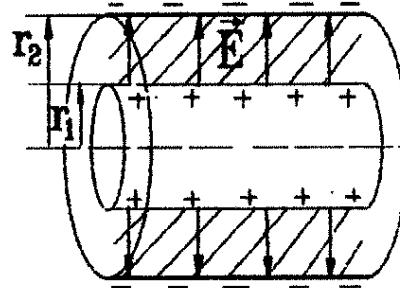


Рис.1.20

Электрическая энергия системы

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 \ln(r_2/r_1)}{4\pi\epsilon_0((\epsilon - 1)x + h)} \quad (1.25)$$

зависит от величины x , и электрическая сила, втягивающая диэлектрик, определяется формулой

$$F = \left| -\text{grad } W \right| = \left| -\frac{\partial W}{\partial x} \right|.$$

Вычисляя производную от выражения (1.25) и учитывая условие $x = h/2$, находим

$$q = (\epsilon + 1)h \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 F}{(\epsilon - 1) \ln(r_2/r_1)}}.$$

Энергия электростатического поля

Задача 1.19

Заряд распределен по объему единичного шара радиуса R с объемной плотностью ρ , зависящей от расстояния r до центра шара по степенному закону $\rho = \rho_0(r/R)^n$, где $\rho_0 = \text{const}$. Какая доля энергии электростатического поля сосредоточена внутри шара при равномерном распределении заряда ($n = 0$)? При каком показателе n внутри шара сосредоточено 50% энергии поля? Диэлектрическая проницаемость шара $\epsilon = 1$.

Решение

Электрическое поле заряда сферически симметрично. При его равномерном распределении по объему шара $\rho = \rho_0$ теорема Гаусса позволяет найти, как это сделано в (1.6), величину напряженности внутри и вне шара, где поле совпадает с полем точечного заряда $q = \rho_0 \cdot 4\pi R^3/3$:

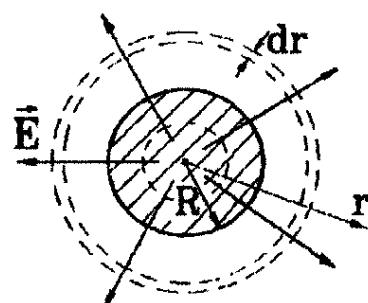


Рис.1.21

$$E_{\text{внутр}} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \text{ при } r \leq R; \quad E_{\text{вне}} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \text{ при } r \geq R.$$

Используя выражение для плотности энергии электрического поля $w = \epsilon\epsilon_0 E^2/2$, где $\epsilon = 1$, и выбирая при интегрировании в качестве

элемента объема тонкий сферический слой радиуса r и толщины dr (рис.1.21), равный $dV = 4\pi r^2 dr$, находим энергию поля внутри и вне шара :

$$W_{\text{внутр}} = \int w dV = \int_0^R \frac{\epsilon_0 E_{\text{внутр}}^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{45\epsilon_0};$$

$$W_{\text{вне}} = \int_R^\infty \frac{\epsilon_0 E_{\text{вне}}^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = 5W_{\text{внутр}},$$

т.е. при равномерном распределении заряда независимо от радиуса шара в нем всегда локализовано

$$\frac{W_{\text{внутр}}}{W_{\text{внутр}} + W_{\text{вне}}} = 16,7\%$$

энергии электрического поля.

Если объемная плотность заряда на шаре изменяется по заданному в условии степенному закону, то внутри любой сферической поверхности радиуса $r < R$ (рис.1.21) находится заряд

$$q(r) = \int \rho dV = \int_0^r \frac{\rho_0 r^n}{R^n} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0 r^{n+3}}{(n+3)R^n}.$$

Теорема Гаусса дает следующее выражение для напряженности электрического поля внутри и вне шара :

$$E_{\text{внутр}} = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 r^{n+1}}{\epsilon_0(n+3)R^n}, \text{ при } r < R;$$

$$E_{\text{вне}} = \frac{q(R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0(n+3)r^2}, \text{ при } r > R.$$

В этом случае энергия электрического поля внутри и вне шара

$$W_{\text{внутр}} = \int_0^R \frac{\epsilon_0 E_{\text{внутр}}^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{\epsilon_0(n+3)^2(2n+5)},$$

$$W_{\text{вне}} = \int_R^\infty \frac{\epsilon_0 E_{\text{вне}}^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{\epsilon_0(n+3)^2}$$

будет одинаковой, если $2n+5=1$, откуда находим

$$n = -2.$$

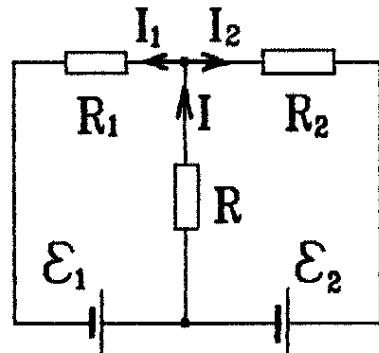
Глава 2

Законы постоянного тока

Правила Кирхгофа

Задача 2.1

Сопротивления R_1 и R_2 и величины постоянных э.д.с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 на схеме (рис.2.1) заданы. Внутренними сопротивлениями источников э.д.с. можно пренебречь. При какой величине сопротивления R выделяемое на нем тепло будет максимальным?



Решение

Рис.2.1

Запишем правила Кирхгофа (направления токов указаны на рис.2.1, обход контуров производим по часовой стрелке):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{узел :} & I = I_1 + I_2, \\ \text{левый контур :} & -I_1 R_2 - IR = -\mathcal{E}_1, \\ \text{правый контур :} & I_2 R_2 + IR = -\mathcal{E}_2. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Решая систему уравнений (2.1), находим величину тока, текущего через сопротивление R :

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R}.$$

Максимум тепловой мощности $P = I^2 R$, выделяемой на сопротивлении R , определяем из условия $dP/dR = 0$. Этому условию удовлетворяет сопротивление с величиной

$$R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2),$$

на котором выделяется максимальная тепловая мощность

$$P_{\max} = I^2 R = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1)^2}{4 R_1 R_2 (R_1 + R_2)}.$$

Вычисление сопротивления системы проводников

Задача 2.2

К центрам противоположных торцов тонкостенной цилиндрической банки диаметра D и высоты h припаяны провода диаметром d (рис.2.2). Определить сопротивление банки R , если она сделана из жести толщиной δ с удельной проводимостью σ , причем $\delta \ll d$.

Решение

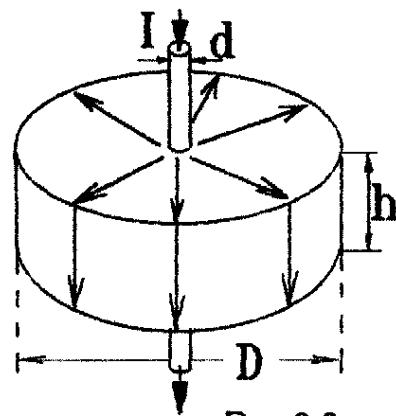


Рис.2.2

Ток последовательно протекает по верхнему основанию, боковой поверхности и нижнему основанию банки, поэтому ее сопротивление

$$R = R_{\text{осн}} + R_{\text{бок}} + R_{\text{осн}}. \quad (2.2)$$

Боковая поверхность имеет поперечное сечение $S = \pi D \cdot \delta$, длину $l = h$ (рис.2.3) и удельное сопротивление $\rho = 1/\sigma$, вследствие чего ее сопротивление определяется выражением

$$R_{\text{бок}} = \rho l / S = h / \pi \sigma D \delta. \quad (2.3)$$

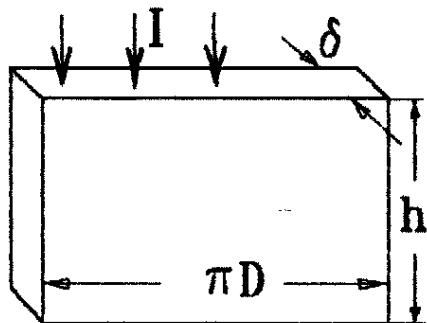


Рис.2.3



Рис.2.4

Основания разбиваем на узенькие кольца с радиусом r и шириной dr (рис.2.4.), которые имеют сопротивление

$$dR = \rho dr / 2\pi r \delta.$$

Ток протекает через такие кольца последовательно, поэтому сопротивление основания банки можно вычислить по формуле

$$R_{\text{осн}} = \int dR = \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{\sigma \cdot 2\pi r \delta} = \frac{\ln(D/d)}{2\pi\sigma\delta}. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2), находим искомое сопротивление банки

$$R = \frac{1}{\pi\sigma\delta} \left(\frac{h}{D} + \ln \frac{D}{d} \right).$$

Задача 2.3

Заземление проводов длинной телеграфной линии осуществлено посредством металлических шаров с радиусами r_1 и r_2 , глубоко заложенных в землю. Удельная проводимость грунта вблизи шаров равна σ_1 и σ_2 , причем в окрестности каждого шара, на расстояниях, значительно больших радиуса шара, грунт можно считать однородным. Найти сопротивление земли между шарами.

Решение

Из-за удаленности шаров от поверхности земли и друг от друга с достаточной точностью можно считать, что каждый шар окружен очень большим участком однородного по своим электропроводным свойствам грунта. В этом случае линии тока вблизи каждого шара будут расходиться (или сходиться) по радиальным линиям (рис. 2.5). Окружим каждый шар сферическим слоем радиуса r и толщины dr , имеющим сопротивление

$$dR = \rho \cdot dr / S_{\text{слоя}} = dr / 4\pi r^2 \sigma.$$

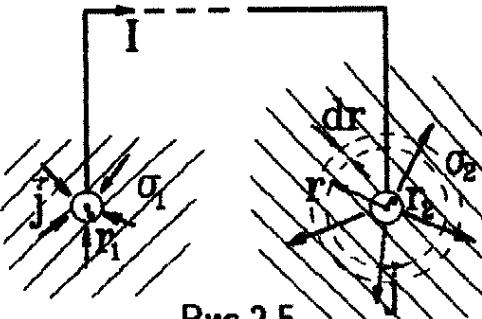


Рис. 2.5

Тогда сопротивление грунта вокруг шара с радиусом r_i имеет вид

$$R_i \approx \int_{r_i}^{\infty} \frac{1}{\sigma_i} \cdot \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma_i r_i}.$$

Вдали от шаров линии тока сильно расходятся, сечение участка, который они пересекают, становится очень большим и поэтому его сопротивлением можно пренебречь. В результате находим приблизительную величину сопротивления земли между шарами

$$R_{\text{земли}} \approx R_1 + R_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sigma_1 r_1} + \frac{1}{\sigma_2 r_2} \right).$$

Использование закона Ома в локальной форме

Задача 2.4

Два длинных параллельных провода находятся в слабо проводящей среде с удельным сопротивлением ρ . Расстояние между осями проводов L , радиус сечения провода b , причем можно считать, что $b \ll L$. Найти сопротивление среды, приходящееся на единицу длины проводов.

Решение

В отличие от предыдущей задачи 2.3 провода нельзя считать раздвинутыми на бесконечное расстояние ($L \rightarrow \infty$). Поэтому, используя методы электростатики, определим вначале разность потенциалов (падение напряжения) между проводами. Предположим, что по тонким проводам равномерно распределен сторонний заряд с линейными плотностями $+\lambda$ и $-\lambda$ (рис.2.6). Напряженность электрического поля, создаваемого каждым из заряженных проводов в точке А на соединяющей центры проводов линии, можно вычислить, пользуясь теоремой Гаусса, как сделано в (1.8), откуда следует

$$E(x) = E_+ + E_- = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(L-x)},$$

где x - расстояние от оси положительно заряженного провода. Тогда разность потенциалов между проводами

$$U = \int_b^{L-b} E(x) \cdot dx = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L-b}{b} \right) \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L}{b} \right). \quad (2.5)$$

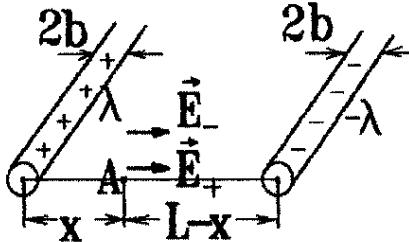


Рис.2.6

Аналогично, используя теорему Гаусса, можно определить напряженность стороннего электрического поля в любой точке В, равноудаленной на расстояние r от оси каждого из проводов (рис.2.7) :

$$E_B = |E_+ + E_-| = 2 \cos \varphi \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

где

$$r = \sqrt{(L/2)^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = L/2r,$$

$y = OB$ – расстояние от точки В до центра О линии, соединяющей оси проводов, т.е. $E_B = \lambda L / 2\pi\epsilon_0 r^2$.

Это поле ориентировано вдоль линий тока, пересекающих плоскость симметрии между проводами по нормали. Используя закон Ома в локальной форме и выражая плотность сторонних зарядов λ из формулы (2.5) через падение напряжения между проводами U , находим величину плотности тока в точке В :

$$j_B = \sigma E_B = \frac{2UL}{\rho(L^2 + 4y^2) \ln(L/b)}. \quad (2.6)$$

Ток, проходящий через центральную плоскость симметрии и приходящийся на единицу длины проводов $l = 1 \text{ м}$, вычисляем по формуле

$$I_1 = \int j_B dS,$$

где $dS = l \cdot dy$ (рис.2.8). Подставляя (2.6) и интегрируя по всем значениям координаты y , находим полный ток, текущий от одного провода к другому:

$$I_1 = 2 \int_0^\infty j_B \cdot 1 \cdot dy = \frac{\pi U}{\rho \ln(L/b)}.$$

Согласно закону Ома сопротивление среды между проводами

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{\rho \ln(L/b)}{\pi} \quad (\text{на единицу длины проводов}).$$

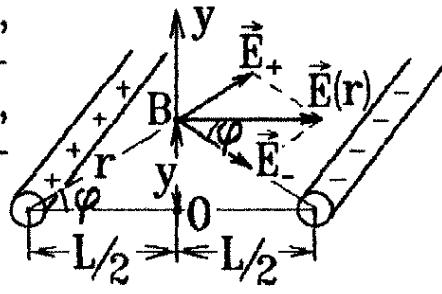


Рис.2.7

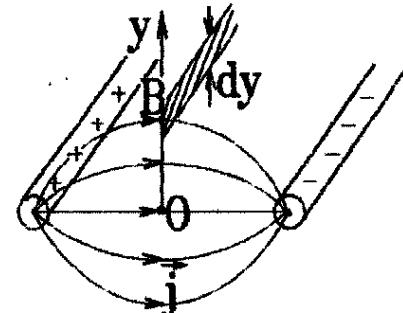


Рис.2.8

Неоднородный проводник

Задача 2.5

В неоднородном цилиндрическом проводнике радиуса b удельное сопротивление изменяется с расстоянием r от оси проводника по закону $\rho = \rho_0 \cdot \sqrt{r/b}$, где $\rho_0 = \text{const}$. По проводнику течет ток I_0 . Найти напряженность стороннего поля E внутри проводника, сопротивление R_1 единицы длины проводника и тепло Q_1 , выделяющееся за время t в отрезке проводника единичной длины.

Решение

Выделим в проводнике бесконечно тонкий цилиндрический слой радиуса r и толщины dr с площадью поперечного сечения $dS = 2\pi r \cdot dr$ (рис.2.9). Ток, текущий в пределах этого слоя, имеет величину

$$dI = j \cdot dS,$$

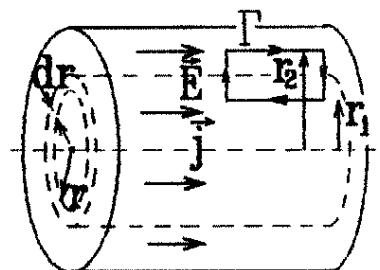


Рис.2.9

где плотность тока j определяется законом Ома в локальной форме $j = E/\rho$, т.е.

$$dI = 2\pi Er dr / \rho. \quad (2.7)$$

Теорема о циркуляции для вектора E по любому контуру Γ прямоугольной формы, изображенному на рис.2.9,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(r_2) \cdot l - E(r_1) \cdot l = 0,$$

позволяет сделать вывод об однородности электрического поля внутри проводника: $E = \text{const}$. Величина E связана с током, текущим по проводнику,

$$I_0 = \int dI = \int_0^b \frac{2\pi E}{\rho} r dr = \frac{2\pi E \sqrt{b}}{\rho_0} \cdot \int_0^b \sqrt{r} dr = \frac{4\pi b^2 E}{3\rho_0}$$

или

$$E = \frac{3\rho_0 I_0}{4\pi b^2}. \quad (2.8)$$

Зная напряженность стороннего поля E , легко вычислить падение напряжения на участке проводника единичной длины $l = 1 \text{ м}$:

$$U_1 = \Delta\varphi = \int E dx = El.$$

Сопротивление участка проводника единичной длины находим из закона Ома, используя (2.8) :

$$R_1 = \frac{U_1}{I_0} = \frac{3\rho_0}{4\pi b^2}.$$

За время τ на этом участке выделяется тепло

$$Q_1 = I_0^2 R_1 \tau = \frac{3\rho_0 \tau I_0^2}{4\pi b^2}.$$

Этот же результат можно получить, находя тепло, выделяемое в тонком цилиндрическом слое, обозначенном на рис.2.9 и имеющем сопротивление

$$R_{\text{слоя}} = \rho \cdot l / dS = \rho l / 2\pi r dr,$$

при протекании по слою тока (2.7) :

$$dQ_1 = (dI)^2 \cdot R_{\text{слоя}} \cdot \tau. \quad (2.9)$$

Затем надо проинтегрировать выражение (2.9) по всей толщине проводника в пределах от $r = 0$ до $r = b$.

Концентрация носителей тока

Задача 2.6

Электронная пушка создает однородный цилиндрический пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U и образующих ток I . Найти разность потенциалов между поверхностью и осью пучка.

Решение

Электроны, проходящие разность потенциалов U , приобретают кинетическую энергию $mv^2/2 = eU$ и имеют скорость

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

где e , m – заряд и масса электрона.

Ток в пучке радиуса R (рис.2.10) определяется выражением $I = nevS$, где $n = \text{const}$ – концентрация носителей тока в однородном пучке, v – их скорость, $S = \pi R^2$ – площадь поперечного сечения пучка. Отсюда находим

$$ne = \frac{I}{\pi R^2} \sqrt{\frac{m}{2eU}}. \quad (2.10)$$

Теперь вычислим напряженность E поперечного электрического поля, созданного зарядом носителей тока внутри пучка. Выделим замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса r внутри пучка (рис.2.10). Она имеет площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = 2\pi rl$ и объем $V = \pi r^2 l$, т.е. внутри нее находятся электроны с общим зарядом $q = neV$. Применяя теорему Гаусса для этой замкнутой поверхности, получим

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ или } E(r) = \frac{ner}{2\epsilon_0}.$$

Подставляя сюда найденную величину концентрации (2.10) и производя интегрирование по r , определяем разность потенциалов $\Delta\varphi$ между осью и боковой поверхностью пучка

$$\Delta\varphi = \int_0^R E(r) \cdot dr = \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eU}}.$$

Квазистационарный ток. Переходные процессы

Задача 2.7

В схеме, изображенной на рис.2.11, заданы емкость конденсатора C и величины э.д.с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Ключ K переводят из положения 1 в положение 2, отключая источник э.д.с. \mathcal{E}_2 . Какое количество тепла выделится после такого переключения в цепи?

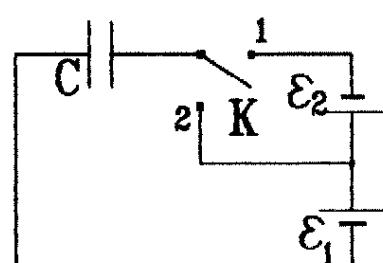


Рис.2.11

Решение

До переключения ток в цепи отсутствовал, и падение напряжения на конденсаторе было равно сумме э.д.с. :

$$U_{C_0} = \frac{q_0}{C} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (2.11)$$

После отключения источника \mathcal{E}_2 в момент $t = 0$ по цепи потечет квазистационарный ток I , и можно записать закон Ома :

$$U_C + IR = \mathcal{E}_1, \quad (2.12)$$

где R – сопротивление цепи (включая внутреннее сопротивление источника \mathcal{E}_1).

Заряд q на конденсаторе будет возрастать. Текущий по цепи ток связан с этим зарядом соотношением $I = dq/dt$. Уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}_1.$$

Разделяем переменные и интегрируем :

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{\mathcal{E}_1 C - q} = \int_0^t \frac{dt}{RC}.$$

Подставляя начальную величину заряда q_0 из условия (2.11), находим зависимость заряда на конденсаторе от времени :

$$q(t) = \mathcal{E}_1 C - \mathcal{E}_2 C \cdot \exp(-t/RC).$$

Тогда текущий по цепи ток изменяется со временем по закону

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}_2}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

и за все время перезарядки конденсатора выделится тепло

$$Q(t) = \int_0^\infty I^2 R dt = \frac{C \mathcal{E}_2^2}{2}.$$

Примечательно, что результат не зависит от величины э.д.с. \mathcal{E}_1 .

Задача 2.8

Постоянная времени разрядки заполненного маслом с диэлектрической проницаемостью ϵ плоского конденсатора через некоторое сопротивление была равна τ_0 . После того, как масло в конденсаторе отсырело, постоянная времени разрядки через это же сопротивление уменьшилась в два раза. Определить удельное сопротивление ρ отсыревшего масла (ϵ не изменилось).

Решение

Пока заполняющий конденсатор диэлектрик был идеален, цепь разрядки конденсатора имела вид, изображенный на рис.2.12. Для такой цепи

$$U_C = \frac{q}{C} = IR. \quad (2.13)$$

Подставляя $I = -dq/dt$ (заряд на конденсаторе убывает) и решая уравнение (2.13), находим закон разрядки конденсатора:

$$q = q_0 \cdot \exp(-t/RC).$$

Постоянная времени разрядки конденсатора – это время, за которое заряд (или напряжение) на конденсаторе уменьшается в $e \approx 2,72$ раз :

$$\tau_0 = RC. \quad (2.14)$$

Отсыревшее масло становится слабо проводящей средой, т.е. среда, заполняющая плоский конденсатор, приобретет сопротивление $R_C = \rho d/S$, где d – расстояние между пластинами, S – площадь пластин. Емкость такого конденсатора $C = \epsilon \epsilon_0 S/d$, откуда

$$R_C = \rho \epsilon \epsilon_0 / C. \quad (2.15)$$

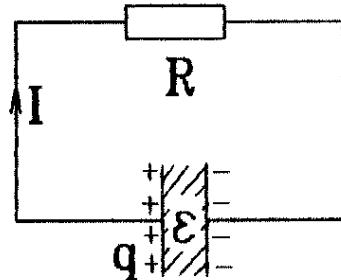


Рис.2.12

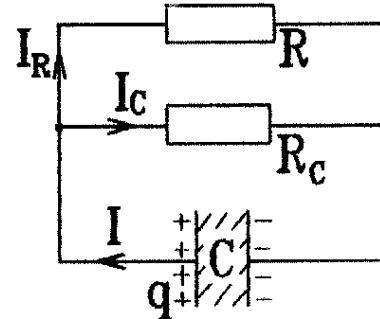


Рис.2.13

Ток потечет и через это добавочное сопротивление, из-за чего цепь разрядки конденсатора примет вид, изображенный на рис.2.13. Это разветвленная цепь, для которой следует записать правила Кирхгофа:

$$I = I_R + I_C; \quad I_R R = I_C R_C = U_C = q/C. \quad (2.16)$$

Используя (2.14) и (2.15), выражаем неизвестные токи I_R и I_C через величину заряда q :

$$I_R = \frac{q}{RC} = \frac{q}{\tau_0}; \quad I_C = I_R \frac{R}{R_C} = \frac{q}{\rho \epsilon \epsilon_0}.$$

Тогда из первого уравнения (2.16) имеем

$$I = -\frac{dq}{dt} = q \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\rho \epsilon \epsilon_0} \right).$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим новый закон разрядки конденсатора :

$$q = q_0 \exp \left[- \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\rho \epsilon \epsilon_0} \right) t \right].$$

По условию новая постоянная разрядки вдвое меньше прежней

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\rho \epsilon \epsilon_0} = \frac{2}{\tau_0},$$

откуда находим искомое удельное сопротивление масла : $\rho = \tau_0 / \epsilon \epsilon_0$.

Глава 3

Магнитное поле

Суперпозиция магнитных полей

Задача 3.1

К двум точкам проволочного кольца радиуса r подсоединенны два параллельных очень длинных проводника, соединенных с удаленным источником тока (рис.3.1). По прямому проводнику течет ток I . Найти индукцию магнитного поля в центре кольца.

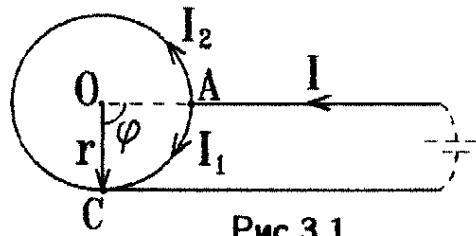


Рис.3.1

Решение

Текущий по радиальному проводнику ток I не создает магнитного поля в центре О. В точке соединения А этот ток разделяется на токи I_1 и I_2 , обтекающие точку О по дугам в противоположных направлениях (рис.3.1).

Падение напряжения на обеих дугах одинаково (они подсоединены в точках А и С параллельно), а сопротивления дуг пропорциональны их длинам l_1 и l_2 , т.е.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{2\pi - \varphi}{\varphi}. \quad (3.1)$$

Текущий по кольцу радиуса r ток I создает в центре кольца магнитное поле с индукцией $B_{\text{кольца}} = \mu_0 I / 2r$. Если ток течет по части кольца, т.е. по дуге с углом φ , то индукция пропорциональна длине этой дуги: $B_{\text{дуги}} / B_{\text{кольца}} = \varphi / 2\pi$. Поэтому для полей B_1 и B_2 , созданных в точке О токами I_1 и I_2 (рис.3.1), можно записать с учетом (3.1)

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{I_1 \varphi}{I_2 (2\pi - \varphi)} = 1,$$

т.е. поля B_1 и B_2 равны по величине, направлены противоположно и в сумме равны нулю. Поле в точке О создается только током, текущим по нижнему полубесконечному прямому проводнику :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.$$

Расчет магнитного поля с помощью закона Био-Савара-Лапласа

Задача 3.2

Сolenoid длины $b = 20$ см имеет равномерно намотанные витки радиуса $R = 10$ см, по которым течет постоянный ток. Во сколько раз индукция поля в центре соленоида больше индукции поля на его краю ?

Решение

Пусть ток течет по кольцу радиуса R (рис.3.2). Элемент тока длины dl создает в точке А на оси кольца магнитное поле с индукцией

$$dB = \frac{\mu_0 I [dl, r]}{4\pi r^3}. \quad (3.2)$$

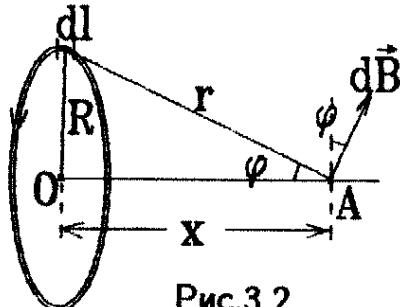


Рис.3.2

Результирующее поле, созданное всем кольцом в точке А, будет направлено вдоль его оси :

$$B_{\text{кольца}} = \int dB \cdot \sin \varphi,$$

где $\sin \varphi = R/r$, $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, x – расстояние до центра кольца О. Интегрируя, получаем

$$B_{\text{кольца}} = \frac{\mu_0 I \sin \varphi}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (3.3)$$

Разобьем теперь соленоид на узкие кольца толщины dx (рис.3.3), где x – расстояние от центра кольца до центра соленоида О. Такое кольцо содержит $dN = N \cdot (dx/b)$ витков,

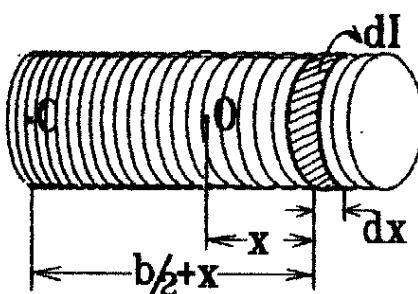


Рис.3.3

т.е. по кольцу течет ток $dI = I dN = IN dx / b$. В центре соленоида О кольцо создает поле, определяемое выражением (3.3). Суммируя вклады всех колец, т.е. взяв интеграл вдоль всей длины соленоида, получим

$$B_0 = \int_{x=-b/2}^{x=b/2} \frac{\mu_0 dI \cdot R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2\sqrt{R^2 + b^2/4}}. \quad (3.4)$$

При интегрировании была использована формула

$$\int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (3.5)$$

В точке С на краю соленоида поле вычисляется аналогично, меняется только расстояние от выделенного кольца (рис.3.3), поэтому

$$B_C = \int_{x=-b/2}^{x=b/2} \frac{\mu_0 dI \cdot R^2}{2((x + b/2)^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2\sqrt{R^2 + b^2}}.$$

В результате находим

$$B_0 / B_C = \sqrt{(R^2 + b^2) / (R^2 + b^2/4)} \approx 1,58.$$

Задача 3.3

Эбонитовый шар радиуса r заряжен равномерно распределенным поверхностным зарядом, имеющим плотность σ . Шар вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти напряженность магнитного поля H в центре шара.

Решение

Разобьем поверхность шара на бесконечно узкие кольца радиуса $y = r \sin \theta$ и толщины $rd\theta$ (рис.3.4). Заряд на поверхности такого кольца получим из определения

$$dq = \sigma \times \text{площадь кольца} = \sigma \cdot 2\pi y r d\theta = 2\pi\sigma r^2 \sin \theta d\theta.$$

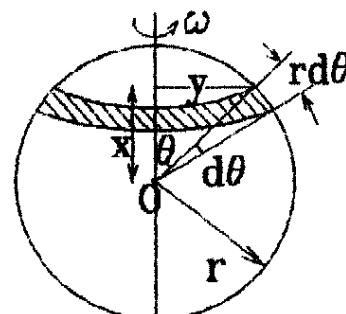


Рис.3.4

Он совершает полный оборот за время $\Delta t = T = 2\pi/\omega$, т.е. образует ток

$$dI = dq/\Delta t = \omega \sigma r^2 \sin \theta \, d\theta.$$

В центре шара O , на оси кольца, на расстоянии $x = r \cos \theta$ от центра кольца этот ток создает магнитное поле, вычисляемое по формуле (3.3). Интегрируя по поверхности всего шара, находим результирующее поле в точке O :

$$H_O = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{dI \cdot y^2}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\omega \sigma r}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{2}{3} \omega \sigma r.$$

Теорема о циркуляции

Задача 3.4

На тонкий тороид (баранку) из немагнитного материала равномерно намотана катушка из $N = 3140$ витков (рис.3.5). Найти отношение индукции магнитного поля на оси такой катушки к индукции в центре тороида O , если по катушке пропускают постоянный ток.

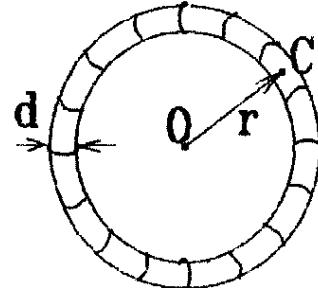


Рис.3.5

Решение

Внутри катушки линии индукции образуют замкнутые кольца. Выбрав контур интегрирования, совпадающий с таким кольцом (с осью катушки) и охватывающий все N витков с током I , получим из теоремы о циркуляции

$$\oint \mathbf{B}_C \, d\mathbf{l} = 2\pi r \cdot B_C = \mu_0 N I \quad \text{или} \quad B_C = \mu_0 N I / 2\pi r.$$

Но, если диаметр витков достаточно мал ($d \ll r$), то можно считать, что тот же ток I обтекает центр тороида O практически по круговому контуру радиуса r и создает в точке O поле $B_O \approx \mu_0 I / 2r$ (поле кругового тока). Это можно показать, используя закон Био-Савара. В итоге

$$B_C / B_O \approx N / \pi \approx 1000.$$

Задача 3.5

По оси длинного полого цилиндра натянута нить, заряженная равномерно, с линейной плотностью λ . Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Определить индукцию магнитного поля в материале цилиндра, вне его и внутри полости (вдали от торцов цилиндра), если цилиндр: а) металлический и немагнитный; б) непроводящий с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Решение

а) Вырежем участок полого цилиндра длины l (рис.3.6). На внутренней поверхности проводящего цилиндра радиуса r_1 появляется отрицательный индуцированный заряд с поверхностной плотностью σ_1 , а на внешней поверхности радиуса r_2 – положительный индуцированный заряд с плотностью σ_2 . Величина этих зарядов совпадает с величиной заряда на соответствующем отрезке нити длины l :

$$q = -\sigma_1 \cdot 2\pi r_1 l = \sigma_2 \cdot 2\pi r_2 l = \lambda l.$$

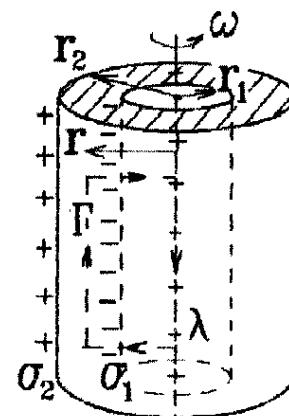


Рис.3.6

При вращении цилиндра заряды на его поверхности образуют круговые замкнутые токи, текущие в противоположные стороны из-за разного знака зарядов

$$I_2 = -I_1 = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi} = \frac{\lambda l \omega}{2\pi}. \quad (3.6)$$

Линии индукции \mathbf{B} магнитного поля, созданного этими токами, будут направлены вдоль оси цилиндра. Выберем прямоугольный контур интегрирования Γ длины l и ширины r , одна из сторон которого совпадает с осью цилиндра, как показано на рис.3.6. Циркуляция вектора \mathbf{B} по этому контуру определяется формулой

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = B \cdot l = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_1; \\ \mu_0 I_1 & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2; \\ \mu_0 (I_1 + I_2) = 0 & \text{при } r > r_2, \end{cases}$$

т.е. магнитное поле существует только внутри материала цилиндра и имеет величину $B = \mu_0 \lambda \omega / 2\pi$.

б) На внутренней и внешней поверхностях цилиндра появятся не индуцированные, а связанные заряды σ'_1 и σ'_2 . Индукция электрического поля на расстоянии r от заряженной нити $D = \lambda/2\pi r$, и внутри однородного диэлектрика вектор поляризованности имеет величину $P = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E_{диэл} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 D/\epsilon\epsilon_0 = (\epsilon - 1)\lambda/2\pi\epsilon r$. Этот вектор направлен вдоль радиальных линий, т.е. нормально к поверхности диэлектрика, поэтому поверхностная плотность связанного заряда $\sigma' = P$. Величина полного связанного заряда и на внутренней, и внешней поверхностях цилиндра определяется формулой

$$q' = -\sigma'_1 \cdot 2\pi r_1 l = \sigma'_2 \cdot 2\pi r_2 l = (\epsilon - 1)\lambda l / \epsilon.$$

Подставляя это выражение в (3.6), опять находим, что магнитное поле существует только внутри материала цилиндра :

$$B' = \mu_0(\epsilon - 1)\lambda\omega / 2\pi\epsilon.$$

Задача 3.6

Система состоит из двух параллельных друг другу плоскостей с поверхностными токами, которые всюду между плоскостями создают однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-3}$ Тл. Вне этой области магнитное поле отсутствует. Найти давление на каждую плоскость, создаваемое действием магнитных сил.

Решение

Охватим участок верхней плоскости с током, имеющим поверхностную плотность i_1 , узким прямоугольным контуром Γ длины l (рис.3.7). Направление вектора индукции определяется направлением тока i_1 и совпадает с направлением обхода контура Γ . Теорема о циркуляции вектора \vec{B}_1 по этому контуру дает

$$\oint \vec{B}_1 dl = 2B_1 l = \mu_0 i_1 l,$$

где $i_1 l$ – охватываемый контуром ток. Отсюда

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2}. \quad (3.7)$$

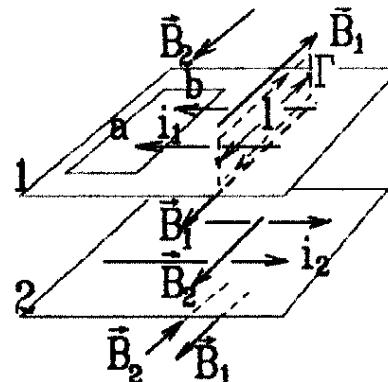


Рис.3.7

Для того, чтобы выполнялось условие задачи, по второй плоскости должен течь ток такой же величины $i_2 = i_1$, но в противоположном направлении. Тогда $B_1 = B_2$, и вне области между плоскостями магнитные поля токов направлены в разные стороны и компенсируют друг друга, как показано на рис.3.7. Между плоскостями

$$B = B_1 + B_2 = 2B_1 = \mu_0 i_1. \quad (3.8)$$

Выделим теперь на верхней плоскости участок ширины a и длины b (рис.3.7). На ток $i_1 a$, текущий по этому участку, действует только магнитное поле, созданное током на второй плоскости. Разделив действующую силу Ампера на площадь участка $a \cdot b$ и используя связь (3.8), получаем искомое давление

$$p = \frac{F_{\text{амп}}}{ab} = \frac{i_1 a \cdot B_2 \cdot b}{ab} = \frac{B^2}{2\mu_0} = 1,59 \text{ Па.}$$

Магнитный момент контура с током

Задача 3.7

Равномерно заряженный с поверхностной плотностью σ диэлектрический диск радиуса R вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Определить его магнитный момент.

Решение

Разбиваем диск на бесконечно узкие кольца радиуса r и толщины dr (рис.3.8). Заряд на таком кольце $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$ при вращении диска делает один оборот за время $\Delta t = 2\pi/\omega$ и образует круговой ток $dI = dq/\Delta t = \sigma \omega r dr$. Магнитный момент этого тока направлен вдоль оси диска и равен $dp_m = dI \cdot S$, где $S = \pi r^2$ – площадь, охватываемая током dI .

Складывая магнитные моменты всех колец, т.е. интегрируя по r , получаем магнитный момент всего диска

$$p_m = \int \pi r^2 dI = \pi \sigma \omega \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}.$$

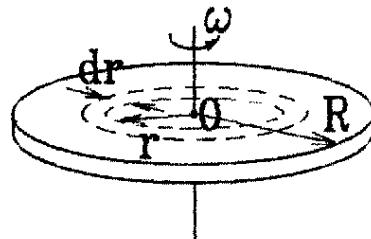


Рис.3.8

*Силы и моменты сил, действующие
на проводник и контур с током в магнитном поле*

Задача 3.8

Пучок электронов образует в вакууме цилиндрический шнур радиуса $R = 1 \text{ см}$ с концентрацией электронов вблизи поверхности $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$. По такому шннуру течет ток $I = 10^6 \text{ А}$. Используя приближение идеального газа, определить температуру электронного газа в шнуре.

Решение

Давление электронного газа в шнуре должно меняться с изменением расстояния r от оси пучка. Магнитные силы будут сжимать пучок, препятствуя разлету электронов в радиальных направлениях. Линии магнитной индукции образуют замкнутые концентрические окружности вокруг линий тока (летящих электронов, рис.3.9). Применяя теорему о циркуляции \mathbf{B} к контуру радиуса r , охватывающему ток $j\pi r^2$ (здесь однородная плотность тока $j = I/\pi R^2$), получаем зависимость индукции B от расстояния r :

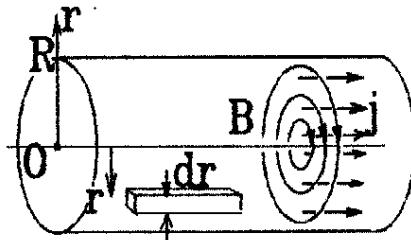


Рис.3.9

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}$$

или

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}. \quad (3.9)$$

Чтобы рассмотреть условие равновесия электронного газа, выделим из пучка узкий элемент длины l , толщины dr и ширины Δx на расстоянии r от оси пучка О (рис.3.10), по которому течет ток $dI = j\Delta x dr$. Магнитное поле (3.9) притягивает этот элемент к оси пучка с силой Ампера

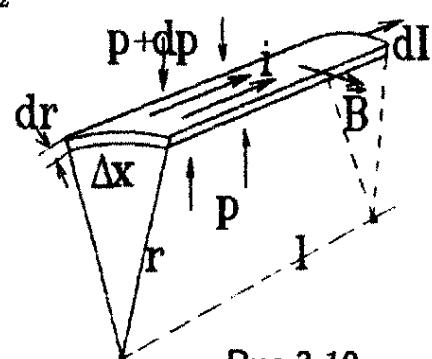


Рис.3.10

$$dF_A = dI \cdot Bl = \frac{\mu_0 I^2 l \Delta x r dr}{2\pi^2 R^4}.$$

Эту силу уравновешивает сила давления газа, выталкивающая элемент с поперечной площадью $l \cdot \Delta x$ из пучка (рис.3.10).

$$p \cdot l \Delta x - (p + dp)l \Delta x = dF_A,$$

откуда

$$dp = -\frac{dF_A}{l \Delta x} = -\frac{\mu_0 I^2 r dr}{2\pi^2 R^4}.$$

Давление падает с удалением от оси пучка и достигает нуля на его поверхности. Поэтому давление на оси пучка вычисляем по формуле

$$p = \int_{r=R}^{r=0} dp = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}.$$

В приближении идеального газа $p = nkT$, т.е. температура электронного газа в пучке

$$T = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 n k R^2} = 2,31 \cdot 10^6 \text{ К.}$$

Задача 3.9

Деревянный шар массой $m = 1 \text{ кг}$ подведен на нити. В вертикальной плоскости вокруг шара сделана узкая обмотка из $N = 10$ витков. Плоскость обмотки ориентирована вдоль направления магнитного меридиана (рис.3.11). Определить величину горизонтальной составляющей B_r индукции магнитного поля Земли, если после протекания через обмотку заряда $q = 2816 \text{ Кл}$ при очень быстром разряде батареи (рис.3.11) шар начал вращаться вокруг нити подвеса с угловой скоростью $\omega = 5 \text{ рад/с.}$

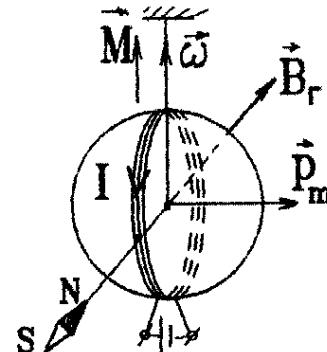


Рис.3.11

Решение

Через обмотку течет ток $I = dq/dt$, создающий в витках обмотки радиуса r (радиус шара) магнитный момент

$$p_m = NIS = NI\pi r^2.$$

За малое время разряда шар практически не успеет заметно повернуться, т.е. на шар вместе с обмоткой будет действовать момент сил

$$M = p_m B_\Gamma \cdot \sin 90^\circ = N\pi r^2 B_\Gamma \frac{dq}{dt}.$$

Подставляя это выражение в уравнение динамики вращательного движения

$$dL = d(I\omega) = M dt,$$

где $I = 2mr^2/5$ – момент инерции шара, получим

$$\frac{2}{5}mr^2 d\omega = N\pi r^2 B_\Gamma dq.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$B_\Gamma = \frac{2m\omega}{5\pi Nq} = 2,26 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

Работа по перемещению контура с током в магнитном поле

Задача 3.10

Маленький постоянный магнит с магнитным моментом p_m перемещают из центра закрепленного витка радиуса R с током I вдоль оси витка в точку С, в которой магнитная сила взаимодействия магнита с витком максимальна (рис.3.12). Найти работу по перемещению магнита в точку С, если его ориентация при перемещении не меняется.

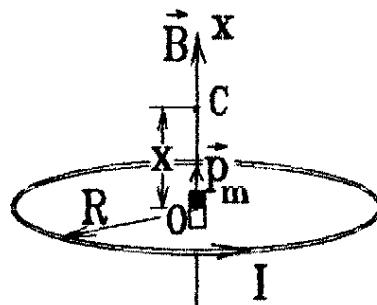


Рис.3.12

Решение

Силу взаимодействия магнита с витком можно найти из соотношения

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} W = -\mathbf{i} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (3.10)$$

где энергию взаимодействия

$$W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B} \quad (3.11)$$

определим, используя выражение (3.3) для индукции магнитного поля на оси витка с током. В результате получим

$$F_x = p_m \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) = -\frac{3\mu_0 p_m I R^2 x}{2(x^2 + R^2)^{5/2}}. \quad (3.12)$$

Эта сила направлена против оси Ox к центру витка О. Координату x_C точки С находим из условия максимума силы

$$\frac{dF_x}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_C,$$

откуда следует $x_C = R/2$.

Работу по перемещению магнита можно вычислить, интегрируя выражение силы (3.12) по x :

$$A = \left| \int_0^{x_C} F_x \, dx \right|.$$

Можно также найти эту работу, используя выражение для энергии (3.11):

$$A = |\Delta W| = p_m B|_{x=0} - p_m B|_{x=x_C},$$

Но поступим другим образом. Заменим постоянный магнит маленьким соленоидом из N витков с площадью поперечного сечения S и с током I_c . Магнитный момент такого соленоида

$$p_m = NI_c S, \quad (3.13)$$

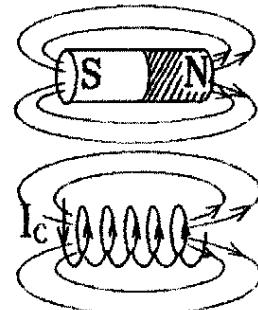


Рис.3.13

а магнитные поля, создаваемые соленоидом и постоянным магнитом, имеют одинаковый вид (рис.3.13). Работа по перемещению контура с постоянным током I_c (соленоида) в магнитном поле определяется формулой

$$A = I_c \Delta \Phi, \quad (3.14)$$

где $\Phi = BNS$ – поток, создаваемый током I в N витках соленоида. Подставляя выражение (3.3) в (3.14) и учитывая связь (3.13), находим

$$A = \left| I_c NS \left(B|_{x=x_C} - B|_{x=0} \right) \right| = 0,142 \frac{\mu_0 I p_m}{R}.$$

Магнитное поле в магнетиках. Поле постоянных магнитов

Задача 3.11

По обмотке электромагнита, имеющего N витков, протекает ток I . Геометрические размеры ферромагнитного сердечника указаны на рис.3.14. Определить индукцию магнитного поля B_3 в зазоре, если все участки сердечника имеют одинаковые сечения, а магнитная проницаемость его материала равна μ . Рассеянием магнитного потока в зазоре пренебречь.

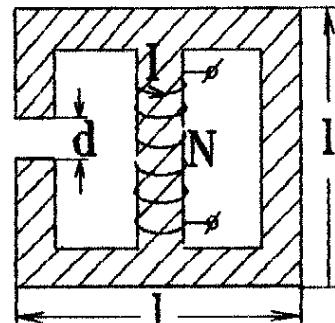


Рис.3.14

Решение

Замкнутые линии B , а вместе с ними и линии напряженности H располагаются внутри ферромагнитного сердечника (рис.3.15). В однородной среде линии H , как и линии B , не могут прерываться. Поэтому в месте их разветвления условие сохранения магнитного потока может быть записано в виде

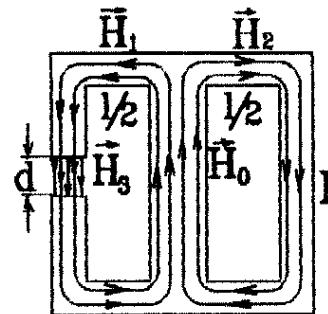


Рис.3.15

$$\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2 \quad \text{или} \quad H_0 = H_1 + H_2 \quad (3.15)$$

(поперечные сечения S сердечника всюду одинаковы). Чтобы не учитывать возникающие токи намагничивания, используем теорему о циркуляции вектора H для левого и правого замкнутых контуров (рис.3.15), проходящих внутри сердечника и охватывающих суммарный ток IN , протекающий по виткам электромагнита

$$\oint H dl = H_0 l + H_1(2l - d) + H_3 d = IN, \quad \oint H dl = H_0 l + H_2 2l = IN. \quad (3.16)$$

Уравнения (3.15) и (3.16) являются аналогом правил Кирхгофа для разветвленных магнитных цепей. Линии магнитной индукции всюду замкнуты, поэтому в зазоре сердечника индукция поля не должна измениться: $B_3 = B_1$. Отсюда следует, что напряженность магнитного поля на границе двух сред меняется скачком

$$1 \cdot \mu_0 H_3 = \mu \cdot \mu_0 H_1 \quad \text{или} \quad H_3 = \mu H_1 \quad (3.17)$$

(граничные условия для нормальной составляющей H). Решая совместно систему уравнений (3.15), (3.16) и (3.17), получаем величину индукции поля в зазоре сердечника:

$$B_3 = \mu_0 H_3 = \frac{2\mu\mu_0 IN}{8l + 3(\mu - 1)d}.$$

Задача 3.12

Определить период малых колебаний свободно подвешенного за середину тонкого однородного цилиндрического намагниченного стального стержня длины $l = 1$ см в магнитном поле Земли с горизонтальной составляющей индукции $B_\Gamma = 2,26 \cdot 10^{-5}$ Тл. Остаточная индукция стали $B_0 = 1$ Тл, плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³.

Решение

Вначале обсудим характер поля в таком постоянном магните. Кольцевые молекулярные токи намагничивания, изображенные на рис.3.16, компенсируют друг друга внутри объема магнита и образуют нескомпенсированный ток с поверхностной плотностью i' , обтекающий его боковую поверхность. Охватим участок боковой поверхности вдали от торцов стержня очень узким прямоугольным контуром Γ длины l (рис.3.16). Вне магнита намагниченность J отсутствует. Теорема о циркуляции J по контуру Γ дает

$$\oint J dI = J_{\text{внутр}} l - J_{\text{внеш}} l = i' l \quad (\text{охватываемый ток намагничивания})$$

или

$$J = i'. \quad (3.18)$$

С другой стороны, если магнит достаточно длинный, то индукция магнитного поля вне магнита вдали от его торцов практически равна нулю. Из теоремы о циркуляции B по тому же контуру Γ получим

$$\oint B dI = B_0 l = \mu_0 \sum I_{\text{охват}} = \mu_0 i' l \quad \text{или} \quad B_0 = \mu_0 i' = \mu_0 J, \quad (3.19)$$

где B_0 – остаточная индукция магнитного поля внутри тонкого маг-

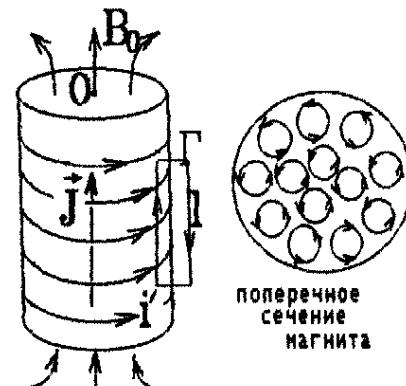


Рис.3.16

нита вдали от его торцов.

Теперь переходим к решению задачи. Длинный магнит с магнитным моментом p_m можно заменить длинным соленоидом с током I_c (рис.3.13), где $p_m = I_c NS$ (N – число витков соленоида, S – площадь его сечения). Ток I_c создает внутри соленоида вдали от его торцов поле $B_o = \mu_0 I_c N / l$, где l – длина соленоида или магнита. Учитывая (3.19) и (3.13), получим магнитный момент тонкого длинного постоянного магнита

$$p_m = \frac{B_o l S}{\mu_0} = \frac{B_o V}{\mu_0} = JV. \quad (3.20)$$

Объем $V = lS$ магнита можно выразить через его массу m и плотность ρ . Тогда

$$p_m = \frac{m B_o}{\rho \mu_0}. \quad (3.21)$$

На горизонтально подвешенный магнит во внешнем магнитном поле \vec{B}_T действует момент сил, имеющий величину

$$M = |[p_m, \vec{B}_T]| = p_m B_T \sin \varphi,$$

стремящийся развернуть магнит вдоль линий \vec{B}_T (рис.3.17). Уравнение динамики вращательного движения относительно вертикальной оси подвеса

$$\mathcal{I} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -p_m B_T \sin \varphi,$$

где $\mathcal{I} = ml^2 / 12$ – момент инерции тонкого стержня, является при малых отклонениях от положения равновесия ($\sin \varphi \approx \varphi$) уравнением гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{12p_m B_T}{ml^2} \varphi = 0.$$

Отсюда, используя (3.21), находим частоту и период этих колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12p_m B_T}{ml^2}} \quad \text{и} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi l \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{3B_o B_T}} \approx 3,37 \text{ с.}$$

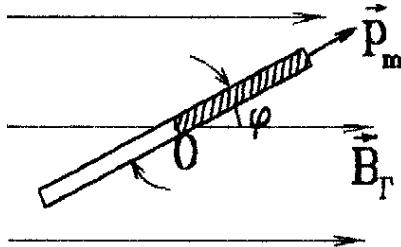


Рис.3.17

Задача 3.13

Два магнита создают неоднородное магнитное поле, симметричное относительно вертикальной оси x . По какому закону должна изменяться величина индукции магнитного поля, чтобы небольшой кусочек парамагнетика с плотностью ρ и магнитной проницаемостью μ мог висеть в любой точке поля на этой оси неподвижно. Величина индукции вблизи нижнего магнита равна B_0 .

Решение

Используя выражение для энергии кусочка парамагнетика во внешнем поле \mathbf{B} , создаваемом магнитами, $W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}$, определяем магнитную силу, втягивающую парамагнетик в область более сильного магнитного поля :

$$F_x = (-\text{grad } W)_x = p_m \frac{dB}{dx}.$$

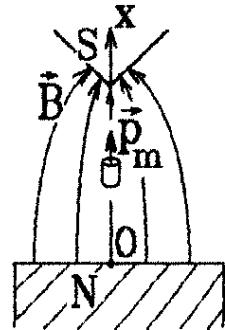


Рис.3.18

По условию эта сила должна уравновешиваться в любой точке вертикальной оси (рис.3.18) силой тяжести

$$p_m \frac{dB}{dx} = mg = \rho V g. \quad (3.22)$$

Суммируя магнитные моменты токов намагничивания внутри парамагнетика и разделив на объем парамагнетика V , получаем, по определению, величину намагниченности

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{p}_m \Big|_{\text{в единице объема}} = \frac{\mathbf{p}_m}{V} \quad (3.23)$$

(это определение можно было использовать непосредственно при получении формулы (3.20)). Если линии \mathbf{B} входят в кусочек парамагнетика перпендикулярно к его торцевым поверхностям, то величина индукции поля внутри парамагнетика не меняется. Во внешнем поле \mathbf{B} напряженность \mathbf{H} и намагниченность \mathbf{J} в магнетике определяются условиями

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu\mu_0; \quad \mathbf{J} = \chi\mathbf{H}, \quad \text{где } \chi = \mu - 1. \quad (3.24)$$

Из формул (3.23) и (3.24) находим

$$p_m = (\mu - 1)VB/\mu\mu_0.$$

Подставляя ρ_m в (3.22), имеем

$$B \frac{dB}{dx} = \frac{\mu\mu_0\rho g}{\mu - 1}.$$

Интегрируя это уравнение, получим искомую зависимость величины B неоднородного магнитного поля от координаты x :

$$B = \sqrt{\frac{2\mu\mu_0}{\mu - 1}\rho gx + B_0^2}.$$

Задача 3.14

Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородно намагниченного ферромагнетика. Найти поля B и H внутри и вне пластины, если намагниченность J направлена: а) перпендикулярно плоскости пластины; б) параллельно плоскости пластины.

Решение

а) Токи намагничивания ориентированы перпендикулярно вектору J (рис.3.19). Внутри пластины индукция магнитного поля B также должна быть ориентирована вдоль направления J , т.е. перпендикулярно поверхностям пластины. В силу граничных условий

$$B_{\text{внутр}} = B_{\text{вне}} = 0. \quad (3.25)$$

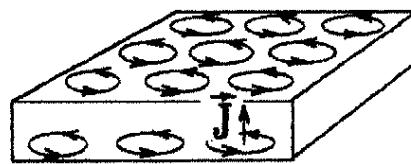


Рис.3.19

Действительно, бесконечная намагниченная пластина, участок которой изображен на рис.3.19, не создает поля B . Иначе вне пластины линии B уходили бы параллельно друг другу в бесконечность аналогично линиям E для бесконечной равномерно заряженной плоскости. Но магнитное поле не может иметь потенциальный характер (линии B должны быть замкнутыми), поэтому должно выполняться условие (3.25).

Надо также помнить, что формулы $J = \chi H$ или $B = \mu\mu_0 H$ справедливы только для магнетика, находящегося во внешнем магнитном поле. Их нельзя использовать, например, для среды с остаточной намагниченностью, т.е. в постоянных магнитах. Определение напряженности

$$H = B/\mu_0 - J \quad (3.26)$$

справедливо всегда.

Подставляя (3.25) в (3.26), находим

$$H_{\text{внутр}} = J; \quad H_{\text{вне}} = 0.$$

б) Токи намагничивания имеют вид, изображенный на рис.3.20. Они компенсируют друг друга в любой точке внутри однородного магнетика и создают токи с поверхностью плотностью i' , текущие по поверхностям пластины в противоположных направлениях. Охватив участок поверхности узким прямоугольным контуром Γ длины l (рис.3.20) и записав теорему о циркуляции для вектора J по этому контуру, получим

$$\oint J dl = J \cdot l = i' l \quad \text{или} \quad J = i'. \quad (3.27)$$

Индукция поля B для таких токов была найдена в задаче 3.6. (рис.3.7). Согласно (3.8) и (3.27), имеем

$$B_{\text{внутр}} = \mu_0 i' = \mu_0 J; \quad B_{\text{вне}} = 0.$$

Тогда в соответствии с (3.26) оказывается, что напряженность магнитного поля для бесконечного магнита, изображенного на рис.3.20, всюду равна нулю:

$$H_{\text{внутр}} = H_{\text{вне}} = 0.$$

Тот же результат с учетом (3.18), (3.19) получаем и для тонкого длинного постоянного магнита (рис.3.16).

Задача 3.15

Тонкий длинный постоянный магнит цилиндрической формы имеет радиус r , длину b и остаточную индукцию B_O в центральной точке О (рис.3.21). Во сколько раз величина индукции поля в точке А вблизи торца магнита больше величины индукции создаваемого им поля в точке С вне магнита вблизи его середины?



Рис.3.21

Решение

На торце магнита линии индукции расходятся в стороны, и индукция поля уменьшается: $B_A < B_O$. Но если соединить торцами два одинаковых магнита с одной и той же намагниченностью (рис.3.22), то в

точке А поля двух магнитов складываются и образуют такое же поле, как и в точке О (в центре длинного магнита) :

$$2B_A = B_O \quad \text{или} \quad B_A = B_O/2. \quad (3.28)$$

Если бы магнит был бесконечно длинным, то вне его, в точке С, поле отсутствовало бы. Поэтому, вырезав из бесконечно длинного магнита кусок длиной b (рис.3.23) и используя принцип суперпозиции, получим

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_C = 0, \quad (3.29)$$

где поля $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ – это поля, созданные тонкими полубесконечными магнитами 1 и 2 (рис.3.23) в точке С, т.е. практически на их оси. Вычислим эти поля.

Поле цилиндрического магнита создается поверхностным током i' , обтекающим боковую поверхность магнита (рис.3.24). Разбиваем эту поверхность на бесконечно узкие кольца шириной dx , находящиеся на расстоянии x от точки С (рис.3.24). Кольцевой ток dI' , текущий по такому кольцу, определяется формулами (3.18), (3.19) :

$$dI' = i' dx = B_O dx / \mu_0.$$

В соответствии с выражением (3.3) он создает на оси тока в точке С магнитное поле

$$dB_1 = \frac{\mu_0 dI' r^2}{2(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{B_O r^2 dx}{2(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по всей длине магнита l , используя формулу (3.5) и учитывая, что $r \ll b$, находим

$$B_1 = \frac{B_O r^2}{2} \cdot \int_{b/2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{B_O}{2} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} \right) \approx \frac{B_O r^2}{b^2}.$$

Тогда из (3.29) и (3.28) следует

$$\frac{B_A}{B_C} = \frac{B_A}{2B_1} \approx \frac{b^2}{4r^2}.$$



Рис.3.22



Рис.3.23

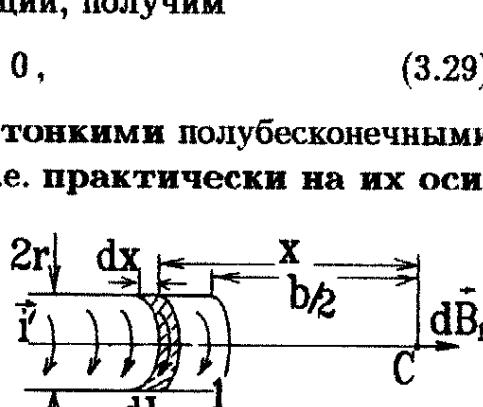


Рис.3.24

Энергия магнитного поля

Задача 3.16

Расстояние между обкладками плоского воздушного конденсатора d много меньше размеров обкладок. К конденсатору приложено внешнее напряжение U . Пластина из диэлектрика толщины $h = d/3$ с проницаемостью ϵ движется внутри конденсатора параллельно его обкладкам с постоянной скоростью v . Найти плотность энергии магнитного поля внутри пластины и вне ее в неподвижной системе отсчета.

Решение

Напряженность электрического поля внутри диэлектрической пластины в ϵ раз меньше чем вне ее (рис.3.25). Разность потенциалов между обкладками

$$U = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_0(d - h) + \frac{E_0}{\epsilon} h$$

позволяет вычислить напряженность поля вне пластины

$$E_0 = \frac{U\epsilon}{\epsilon d - (\epsilon - 1)h}. \quad (3.30)$$

На обкладках конденсатора заряд распределен с поверхностной плотностью σ и поэтому $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. На поверхности диэлектрика образуется связанный поверхностный заряд σ' , создающий внутри диэлектрика дополнительное поле $E' = \sigma'/\epsilon_0$, которое направлено противоположно полю E_0 и уменьшает его. В результате поле в диэлектрике

$$E = E_0/\epsilon = E_0 - E' = E_0 - \sigma'\epsilon_0. \quad (3.31)$$

Подставляя (3.30) в (3.31), находим поверхностную плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \frac{U\epsilon_0(\epsilon - 1)}{\epsilon d - (\epsilon - 1)h}. \quad (3.32)$$

Этот заряд движется вместе с пластиной, создавая ток с поверхностной плотностью

$$i' = \sigma'v \quad (3.33)$$

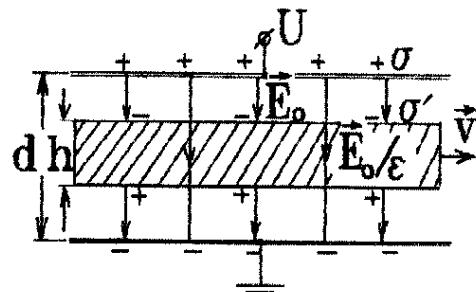


Рис.3.25

(через полосу шириной $l = 1 \text{ м}$ за время $t = 1 \text{ с}$ протекает заряд, находящийся на площадке $S = l \cdot vt$, т.е. $q' = i' \cdot t = \sigma' \cdot lvt$). Движущийся заряд на противоположных поверхностях пластиинки имеет разный знак, и поверхностные токи i' текут по разным плоскостям пластиинки в противоположных направлениях (рис.3.7). Между плоскостями (внутри пластиинки) они создают магнитное поле (3.8) $B_{\text{внутр}} = \mu_0 i'$.

Таким образом, плотность магнитной энергии внутри пластиинки получим, используя выражения (3.33), (3.32) и подставляя $h = d/3$:

$$w_{\text{внутр}} = \frac{B_{\text{внутр}}^2}{2\mu_0} = \frac{9\mu_0}{2} \left(\frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)Uv}{(2\epsilon + 1)d} \right)^2.$$

Вне пластиинки магнитное поле отсутствует.

Задача 3.17

Найти силу притяжения двух длинных тонких цилиндрических постоянных магнитов с длиной l , площадью поперечного сечения S и с магнитным моментом p_m каждый (рис.3.26).

Решение

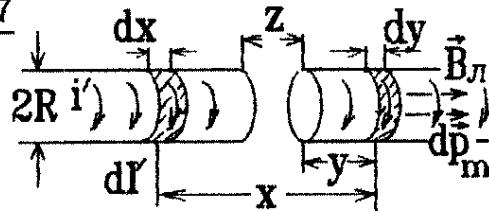


Рис.3.26

Так же, как и в задаче 3.15, разбиваем каждый магнит на бесконечно узкие кольца ширины dx с током намагничивания dI' . Согласно (3.19) и (3.20) или (3.18) и (3.23) этот ток можно представить в виде

$$dI' = i' \cdot dx = \frac{p_m}{lS} dx. \quad (3.34)$$

Предположим, что между магнитами имеется узкий зазор ширины z (рис.3.26). Тогда индукция магнитного поля, создаваемого всеми кольцевыми токами намагничивания левого магнита в плоскости узкого кольца с шириной dy на правом магните, определяется выражением (3.4):

$$\begin{aligned} B_L &= \int_{x=y+z}^{y+z+l} \frac{\mu_0 dI' \cdot R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 p_m x}{2lS \sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_{x=y+z}^{x=y+z+l} = \\ &= \frac{\mu_0 p_m}{2lS} \left[\frac{y+z+l}{\sqrt{(y+z+l)^2 + R^2}} - \frac{y+z}{\sqrt{(y+z)^2 + R^2}} \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

где R – радиус магнита. Кольцо ширины dy с магнитным моментом $d\mathbf{p}_m = S \cdot dI'$ на правом магните имеет энергию $dW = -\mathbf{B}_{\text{л}} \cdot d\mathbf{p}_m$, т.е. энергия взаимодействия всего правого магнита с левым

$$W = - \int_{y=0}^l \mathbf{B}_{\text{л}} \cdot d\mathbf{p}_m = - \int_{y=0}^l S B_{\text{л}} dI'.$$

Подставляя сюда (3.34) и (3.35) и вычисляя интеграл, получим

$$W = -\frac{\mu_0 p_m^2}{2Sl^2} \left[\sqrt{(2l+z)^2 + R^2} - 2\sqrt{(l+z)^2 + R^2} + \sqrt{z^2 + R^2} \right]. \quad (3.36)$$

Энергия взаимодействия зависит от ширины z зазора между магнитами. С учетом того, что $l \gg R$, находим силу притяжения магнитов из выражения

$$F = \left| \frac{dW}{dz} \right|_{z \rightarrow 0} = \frac{\mu_0 p_m^2}{2Sl^2}.$$

Такой же результат получим для силы взаимодействия между двумя длинными одинаковыми соленоидами с током (рис.3.13).

*Сила Лоренца. Движение заряженной частицы
в электрическом и магнитном полях*

Задача 3.18

Протоны ускоряются в циклотроне так, что максимальный радиус орбиты $R = 2$ м. Частота генератора циклотрона $\nu = 1$ МГц, эффективное напряжение между дуантами $U = 100$ В. Пренебрегая шириной зазора между дуантами, найти полное время процесса ускорения протона и приближенное значение пройденного им при ускорении пути.

Решение

В дуанте, где действует только поперечное магнитное поле B , протон движется под действием силы Лоренца $F_{\text{л}}$ по окружности радиуса r (рис.3.27), т.е. в соответствии с уравнением динамики

$$mv^2/r = F_{\text{л}} = evB \text{ или } r = mv/eB. \quad (3.37)$$

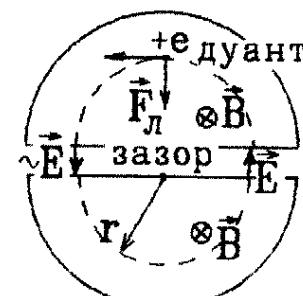


Рис.3.27

Он совершает половину оборота (от зазора до зазора) за время

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{eB}. \quad (3.38)$$

Период обращения протона не зависит от радиуса r траектории. Это позволяет ускорять заряженные частицы, изменяя переменное электрическое поле в зазоре с частотой $\nu = 1/T$ так, чтобы оно ускоряло протон при каждом его пролете через зазор. Подставляя T из (3.38), получаем величину индукции магнитного поля в таком циклотроне:

$$B = 2\pi m\nu/e. \quad (3.39)$$

Из выражения (3.38) находим конечную скорость v_K и конечную энергию W_K протона после ускорения

$$v_K = 2\pi R/T = 2\pi\nu R \quad \text{и} \quad W_K = mv_K^2/2 = 2\pi^2 m\nu^2 R^2. \quad (3.40)$$

Но, пролетая зазор, протон каждый раз скачком увеличивает свою энергию на величину $W_1 = eU$. Чтобы приобрести конечную энергию (3.40), ему надо пролететь зазор N раз, где

$$N = W_K/W_1 = 2\pi^2 m\nu^2 R^2/eU = 8241. \quad (3.41)$$

Отсюда полное время ускорения

$$t = N \cdot T/2 = N/2\nu \approx 4,12 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Пролетев зазор в n -й раз, протон имеет энергию $W_n = nW_1 = neU = mv_n^2/2$ и скорость $v_n = \sqrt{2neU/m}$. До следующего попадания в зазор он проходит путь $s_n = v_n \cdot T/2 = v_n/2\nu$, т.е. полный путь, пройденный протоном при ускорении,

$$s = \sum_{n=1}^N s_n = \sqrt{\frac{eU}{2m\nu^2}} \cdot \sum_{n=1}^N \sqrt{n}.$$

Так как $N \gg 1$, то можно приближенно считать, что

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{n} \approx \int_0^N \sqrt{n} \cdot dn = \frac{2N^{3/2}}{3}.$$

Поэтому, подставляя (3.41), получим

$$s \approx \sqrt{\frac{2eUN^3}{9\nu^2m}} = \frac{4m\pi^3 R^3 \nu^2}{3eU} \approx 3,45 \cdot 10^4 \text{ м.}$$

Задача 3.19

Точечный источник O испускает электроны с одинаковой по величине скоростью v_0 в пределах конуса с очень малым углом раствора 2α , где $\alpha \ll 1$, ось которого совпадает с направлением однородного магнитного поля с индукцией B (рис.3.28). На некотором удалении от точки O пучок электронов будет фокусироваться. Определить радиус сфокусированного пучка.

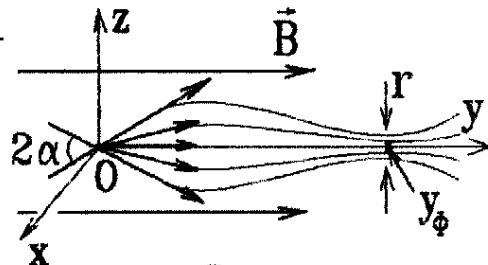


Рис.3.28

Решение

Направим ось y вдоль пучка. Пусть электрон вылетает из начала координат O перпендикулярно к оси x и под углом φ к оси пучка y ($-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$, как показано на рис.3.28). Уравнение движения электрона, на который действует сила Лоренца, имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = -e \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.42)$$

Раскрывая определитель и записывая (3.42) в проекциях на оси координат, получим

$$m \frac{dv_x}{dt} = eBv_z, \quad m \frac{dv_z}{dt} = -eBv_x, \quad m \frac{dv_y}{dt} = 0. \quad (3.43)$$

Из первого уравнения этой системы выражаем v_z и подставляем во второе. Это дает уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x = 0,$$

имеющее решение

$$v_x = -A \sin\left(\frac{eB}{m}t + \beta\right) \quad \text{и} \quad v_z = -A \cos\left(\frac{eB}{m}t + \beta\right).$$

Постоянные A и β находим из начальных условий $v_x(t=0)=0$, $v_z(t=0)=v_0 \sin \varphi$. Получаем $A=v_0 \sin \varphi$, $\beta=0$ и

$$v_x = -v_0 \sin \varphi \cdot \sin\left(\frac{eB}{m}t\right), \quad v_z = v_0 \sin \varphi \cdot \cos\left(\frac{eB}{m}t\right), \quad v_y = v_0 \cos \varphi. \quad (3.44)$$

Интегрируя (3.44) по времени, определяем координаты электрона в произвольный момент времени t :

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v_x dt = \frac{mv_0 \sin \varphi}{eB} \left[\cos \left(\frac{eB}{m} t \right) - 1 \right], \quad y = v_0 \cos \varphi \cdot t, \\ z &= \int_0^t v_z dt = \frac{mv_0 \sin \varphi}{eB} \sin \left(\frac{eB}{m} t \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Электроны движутся по спиралям вокруг оси y с периодом $T = 2\pi t/eB$, периодически сближаясь с осью y и пересекая ее в точке фокуса. Но, вылетев под разными углами φ к оси y , электроны пересекают ее в разных, хотя и близких друг к другу точках. Координата ближайшего к точке вылета О фокуса y_Φ ($x = z = 0$) вычисляется по формуле

$$y_\Phi = v_0 \cos \varphi \cdot T \approx 2\pi m v_0 / eB \quad \text{при малом } \varphi. \quad (3.46)$$

Отклонение электрона r от оси y в этой точке получим, подставляя момент времени $t = y_\Phi / v_0 \cos \varphi$ в первые два уравнения (3.45) и производя разложение по малому углу φ ($\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$):

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} = \frac{2mv_0 \sin \varphi}{eB} \sin \left(\frac{eB}{2m} t \right) \approx \frac{2mv_0 \varphi}{eB} \sin \left(\pi + \frac{\pi \varphi^2}{2} \right) \approx \frac{\pi m v_0 \varphi^3}{eB}.$$

С точностью до малых более высокого порядка этот результат не изменится, если чуть сместить координату фокуса y_Φ влево или вправо (рис.3.28). Поэтому минимальный радиус сфокусированного пучка получим при $\varphi = \alpha$:

$$r_{min} = \frac{\pi m v_0 \alpha^3}{eB}.$$

Задача 3.20

Магнетрон состоит из цилиндрического катода радиуса a и охватывающего его коаксиального цилиндрического анода радиуса b . По оси магнетрона протянут тонкий провод, по которому течет ток I , создающий магнитное поле. Найти наименьшую разность потенциалов U между катодом и анодом, при которой термоэлектроны, покидающие катод без начальной скорости, начнут достигать анода.

Решение

Считая, что на катоде распределен с линейной плотностью $-\lambda$ заряд, находим выражение напряженности электрического поля в области между анодом и катодом (1.8) :

$$E(r) = +\lambda / 2\pi\epsilon_0 r.$$

Затем, используя связь напряженности и потенциала, находим потенциал точки, удаленной на расстояние r от оси магнетрона (рис.3.29)

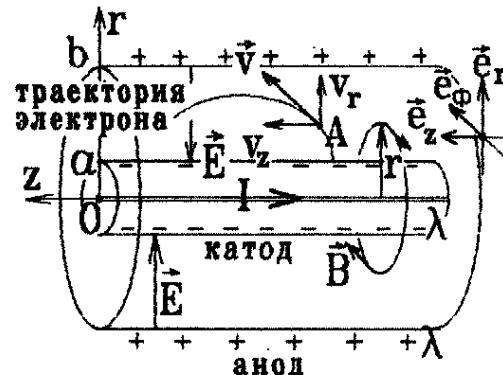


Рис.3.29

$$\varphi(r) - \varphi(a) = - \int_a^r E dr = \frac{\lambda \ln(r/a)}{2\pi\epsilon_0}. \quad (3.47)$$

Неизвестный заряд λ можно выразить через разность потенциалов между анодом и катодом

$$U = \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{\lambda \ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0}.$$

Из (3.47) получаем

$$\varphi(r) - \varphi(a) = \frac{U \ln(r/a)}{\ln(b/a)}. \quad (3.48)$$

Воспользуемся цилиндрической системой координат. Направление полей E и B , а также ортов e_r , e_φ , и e_z такой системы координат показано на рис.3.29 (электрон находится в точке А).

Уравнение движения электрона

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = eEe_r - e \cdot \begin{vmatrix} e_r & e_\varphi & e_z \\ v_r & v_\varphi & v_z \\ 0 & -B & 0 \end{vmatrix}$$

запишется в проекциях на оси координат цилиндрической системы в виде

$$m \frac{dv_r}{dt} = eE - eBv_z, \quad m \frac{dv_\varphi}{dt} = 0, \quad m \frac{dv_z}{dt} = eBv_r. \quad (3.49)$$

Чтобы не решать систему дифференциальных уравнений (3.49), воспользуемся тем, что траектория электрона лежит в продольном сечении магнетрона ($v_\varphi = 0$). Тогда, ускоряясь разностью потенциалов $\varphi(r) - \varphi(a)$, электрон приобретает в точке A кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = e(\varphi(r) - \varphi(a)), \text{ откуда } v = \sqrt{v_r^2 + v_z^2} = \sqrt{\frac{2eU \ln(r/a)}{m \ln(b/a)}}. \quad (3.50)$$

Осовую проекцию скорости v_z находим из последнего уравнения (3.49), подставляя в него выражение индукции магнитного поля $B = \mu_0 I / 2\pi r$, создаваемого текущим по осевому проводнику током, а также выражение радиальной проекции скорости $v_z = dr/dt$, и интегрируя полученное уравнение

$$m \int_0^{v_z} dv_z = \frac{\mu_0 e I}{2\pi} \int_0^r \frac{dr}{r}.$$

Отсюда

$$v_z = \frac{\mu_0 e I \ln(r/a)}{2\pi m}. \quad (3.51)$$

В точке максимального удаления электрона от катода (точка поворота траектории) $v_r = 0$, и $v = v_z$. Чтобы электрон достиг (коснулся в этой точке) анода, необходимо чтобы $r = b$. Приравнивая (3.50) и (3.51) и подставляя $r = b$, получим

$$U_{min} = \frac{\mu_0^2 I^2 e}{8\pi^2 m} \ln^2 \left(\frac{b}{a} \right).$$

Релятивистская частица

Задача 3.21

Чтобы в циклотроне не возникала расстройка, связанная с изменением периода обращения электрона при возрастании его энергии, медленно изменяют частоту ускоряющего поля. Чему должна быть равна эта изменяемая частота через $t = 10^{-4}$ с после начала ускорения, если индукция магнитного поля $B = 1,2$ Тл, а за один оборот электрон приобретает энергию $\Delta W = 10$ эВ?

Решение

Движение электрона в дуанте циклотрона (рис.3.27) описывается релятивистским уравнением динамики, аналогичным (3.37) :

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{v^2}{r} = evB.$$

Период обращения релятивистской частицы

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.52)$$

зависит от ее скорости и поэтому возникает необходимость менять период (частоту) ускоряющего электрического поля в зазоре по тому же закону (3.52). По условию после n оборотов в циклотроне электрон будет иметь полную энергию

$$mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = mc^2 + n \cdot \Delta W. \quad (3.53)$$

Исключая из (3.52) и (3.53) переменную $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, находим

$$T = \frac{2\pi}{eB} \left(m + \frac{n\Delta W}{c^2} \right). \quad (3.54)$$

Время, за которое электрон совершил N оборотов с момента начала ускорения, ищем по формуле

$$t = \sum_{n=1}^N T = \frac{2\pi}{eB} \left(mN + \frac{\Delta W}{c^2} \sum_{n=1}^N n \right) = \frac{2\pi}{eB} \left(mN + \frac{\Delta W}{c^2} \cdot \frac{N(N-1)}{2} \right).$$

Отсюда с учетом $2mc^2/\Delta W \gg 1$ получаем квадратное уравнение для определения N :

$$N^2 + \frac{2mc^2}{\Delta W} N - \frac{eBc^2}{\pi\Delta W} t = 0,$$

дающее решение

$$N = -\frac{mc^2}{\Delta W} + \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\Delta W}\right)^2 + \frac{eBc^2}{\pi\Delta W} t}. \quad (3.55)$$

Частоту ускоряющего поля в момент времени t находим из соотношения (3.54), подставляя в него найденную величину N из (3.55) :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{eBc^2}{2\pi(mc^2 + N\Delta W)} = \frac{eB}{2\pi m} \sqrt{1 + \frac{eB\Delta W}{\pi m^2 c^2} t}.$$

Глава 4

Задачи

для индивидуальной работы

1 Задачи по электростатике

1-1. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускают в керосин, плотность которого равна $800 \text{ кг}/\text{м}^3$, а диэлектрическая проницаемость равна 2. Какой должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же?

Ответ : $1600 \text{ кг}/\text{м}^3$.

1-2. Тонкостенная проводящая сфера радиуса $R = 20 \text{ см}$ имеет заряд $q = 25 \text{ мКл}$. На расстоянии $l = 80 \text{ см}$ от центра этой сферы находится точечный заряд $Q = -50 \text{ мКл}$. Найти потенциал на поверхности сферы.

Ответ : 562 кВ.

1-3. На противоположных концах диаметра некоторой окружности закреплены два точечных положительных заряда q_1 и q_2 . Модуль напряженности электрического поля, созданного этими зарядами на окружности, имеет минимальное значение в точке A (рис.4.1, где $\alpha = 15^\circ$). Определить отношение величин зарядов q_1/q_2 .

Ответ : $q_1/q_2 = 52,0$.

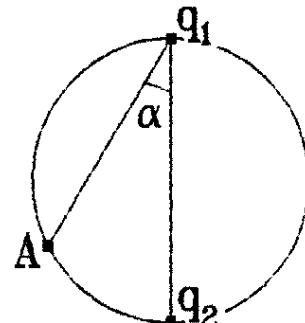


Рис.4.1

1-4. В диаметрально противоположных точках непроводящего шара ($\epsilon = 1$) с радиусом $R = 2 \text{ м}$ закрепляют положительные точечные заряды q_1 и q_2 . Напряженность электрического поля на поверхности шара имеет минимальную величину $1 \text{ кВ}/\text{м}$. Определить величину заряда q_2 , если $q_1 = 0,512 \text{ мКл}$.

Ответ : $q_2 = 0,754 \text{ мКл}$.

1-5. Половина шара радиуса R заряжена равномерно с объемной плотностью заряда ρ . Другая половина не заряжена. Найти потенциал в центре шара.

$$\text{Ответ: } \varphi = \rho R^2 / 4\epsilon_0 .$$

1-6. Две бесконечные металлические плоские поверхности образуют угол 90° (рис.4.2). Какую работу надо совершить, чтобы переместить точечный заряд q вдоль биссектрисы угла из точки, находящейся на расстоянии d от вершины угла O , в точку, находящуюся на расстоянии b от вершины O ?

$$\text{Ответ: } A = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} (1 - \sqrt{8}) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) .$$

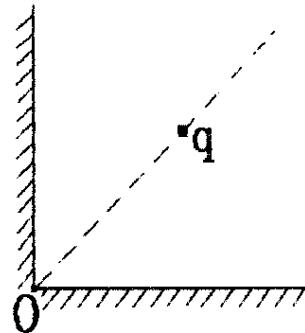


Рис.4.2

1-7. Три электрона в состоянии покоя помещены в вершинах правильного треугольника. Они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Найти их предельную скорость, если сторона треугольника равна: а) $l = 1$ см; б) $l = 10^{-16}$ см.

$$\text{Ответ: а) } 225 \text{ м/с; б) } v = c\sqrt{1 + 2k}/(k + 1) = 0,9994 \cdot c ,$$

где $k = 4\pi\epsilon_0 l m c^2 / e^2 = 3,56 \cdot 10^{-2}$, c – скорость света;
 m , e – масса и заряд электрона.

1-8. Из заземленной, не заряженной металлической плоскости выбивается электрон, скорость которого направлена перпендикулярно к плоскости. Вычислить скорость электрона на расстоянии $l = 3$ мм от плоскости, если известно, что удалившись от нее на расстояние $l_0 = 2$ мм, он двигался со скоростью $v_0 = 300$ м/с.

$$\text{Ответ: } 262 \text{ м/с} .$$

1-9. Точечный заряд q помещен на расстоянии $r/2$ от центра полой тонкостенной металлической изолированной сферы радиуса r , на которой расположен заряд Q . Определить силу, действующую на заряд q .

$$\text{Ответ: } F = 2q^2/9\pi\epsilon_0 r^2 .$$

1-10. В проводнике сделана сферическая полость радиуса R . На каком расстоянии от центра этой полости следует поместить точечный заряд q , чтобы поверхностные плотности индуцированного заряда в наиболее близкой и наиболее удаленной от заряда q точках на поверх-

ности полости отличались в 3,375 раз ? (Указание: использовать метод изображений).

Ответ : $R/5$.

1-11. В поле точечного заряда q внесли проводящую сферу радиуса r . Во сколько раз изменилась при этом напряженность поля в точках A и B вблизи поверхности сферы (рис.4.3), если расстояние между центром сферы и зарядом $l = 10r$? Для определения индуцированного на поверхности сферы заряда использовать метод изображений.

Ответ : $E_A/E_{A_0} = 3 - r/l = 2,9$; $E_B/E_{B_0} = 3 + r/l = 3,1$.

1-12. На расстоянии $a = 4R/3$ от заземленного проводящего шара радиуса R расположен точечный заряд q . Используя метод изображений, определить распределение индуцированного заряда на поверхности шара и найти величину индуцированного заряда на половине шара, обращенной к точечному заряду q .

Ответ : $q_{\text{инд}} = -\frac{q(a+R)}{2a} \left(1 - \frac{a-R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right) = -\frac{7q}{10}$.

1-13. Над плоским листом металла перпендикулярно к нему расположен равномерно заряженный тонкий стержень длины $a = 1$ см с зарядом $q = 10^{-8}$ Кл. Нижняя точка стержня удалена от листа на расстояние $h = 1$ см. Найти поверхностную плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на листе непосредственно под стержнем.

Ответ : $\sigma = -q/2\pi h(h+a) = -8 \cdot 10^{-10}$ Кл/см².

1-14. Найти потенциал φ и величину напряженности поля E в центре полусфера радиуса R , заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда σ .

Ответ : $\varphi = \sigma R / 2\epsilon_0$; $E = \sigma / 4\epsilon_0$.

1-15. Тонкое кольцо радиуса R заряжено равномерно и имеет положительный заряд q . Вдоль оси кольца расположен тонкий стержень длины $3R$, равномерно заряженный с той же плотностью, что и кольцо. Плоскость кольца делит стержень в пропорции 1 : 2. Найти величину действующей на стержень силы.

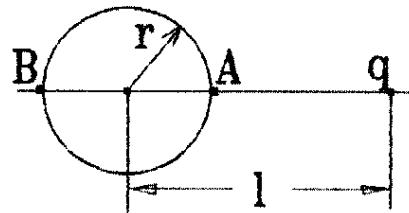


Рис.4.3

$$\text{Ответ: } F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{q^2}{8\pi^2\epsilon_0 R^2}.$$

1-16. Точечный заряд q находился на высоте h над бесконечной тонкой проводящей плоскостью. Из плоскости вырезают диск радиуса R с центром в точке, наименее удаленной от заряда q . Остальную часть плоскости удаляют. Во сколько раз возрастет при этом заряд, индуцированный на верхней поверхности диска?

Ответ: увеличится в $\alpha/(\alpha - 1)$ раз, где $\alpha = \sqrt{1 + (R/h)^2}$.

1-17. Очень длинная нить ориентирована перпендикулярно к проводящей плоскости, и ее ближайший конец находится на расстоянии h от этой плоскости. Нить заряжена равномерно с линейной плотностью λ . Найти поверхностную плотность индуцированного на плоскости заряда на расстоянии r от точки пересечения плоскости и продолжения нити.

$$\text{Ответ: } \sigma = -\lambda / 2\pi\sqrt{r^2 + h^2}.$$

1-18. На высоте $h = 1$ см над плоскостью горизонтально лежащего металлического листа расположен равномерно заряженный диск радиуса $r = 1$ см с зарядом $q = 10^{-9}$ Кл. Плоскость диска параллельна плоскости листа. Найти поверхностную плотность индуцированного заряда в точке, расположенной на листе непосредственно под центром диска.

$$\text{Ответ: } \sigma = -\frac{q}{\pi r^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right) = -9,32 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2.$$

1-19. Металлический шарик радиуса $R = 1$ см имеет заряд $q = 10$ мКл. Найти величину результирующей силы, которая действует на заряд, расположенный на одной из его половин.

$$\text{Ответ: } F = q^2 / 32\pi\epsilon_0 R^2 = 1,12 \text{ кН}.$$

1-20. По тонкой бесконечно длинной нити, согнутой под прямым углом (рис.4.4), равномерно распределен электрический заряд с линейной плотностью λ . Найти величину напряженности электрического поля в точке, лежащей на биссектрисе угла, и удаленной на расстояние r от его вершины.

$$\text{Ответ: } E = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r.$$

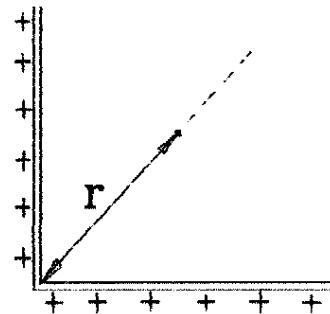


Рис.4.4

1-21. Бесконечная тонкая нить, по которой равномерно распределен заряд с линейной плотностью λ , согнута так, что прямые участки расходятся под углом 90° , а место сгиба образует дугу окружности радиуса r с центром в точке О (рис.4.5). Найти величину напряженности электрического поля в этой точке О.

$$\text{Ответ: } E_O = \sqrt{2}\lambda / 4\pi\epsilon_0 r .$$

1-22. Тонкая бесконечная нить образует два параллельных участка и полуокружность радиуса r в месте сгиба, как показано на рис.4.6. Найти величину напряженности в центре О этой полуокружности, если по всей нити равномерно распределен заряд с линейной плотностью λ .

$$\text{Ответ: а) } E = 0 ; \text{ б) } E = \lambda / \pi\epsilon_0 r .$$

1-23. Место сгиба бесконечной нити образует три четверти окружности радиуса r , а прямые концы расходятся под прямым углом, как показано на рис.4.7. Вычислить величину напряженности в центре О окружности, если по нити равномерно распределен электрический заряд с линейной плотностью λ .

$$\text{Ответ: } 0 .$$

1-24. Крохотная муфта массы m с зарядом $+q$ может скользить без трения вдоль прямолинейной направляющей, совпадающей с осью тонкостенной трубы радиуса R и длины $l = 3R/2$. По внутренней поверхности трубы равномерно распределен отрицательный заряд с поверхностной плотностью $-\sigma$. Найти период малых колебаний муфты относительно положения равновесия.

$$\text{Ответ: } T = \sqrt{125\pi^2\epsilon_0 m R / 12q\sigma} .$$

1-25. По поверхности тонкого плоского уединенного диска равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м². Найти радиус диска, если потенциал точки на его краю $\varphi = 72$ В.

$$\text{Ответ: } R = \pi\epsilon_0\varphi/\sigma = 1,00 \text{ м} .$$

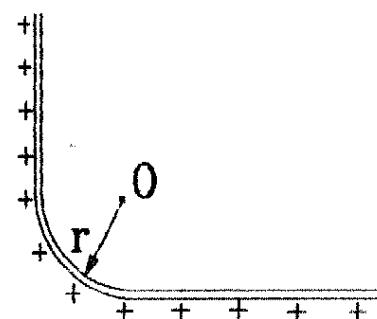


Рис.4.5

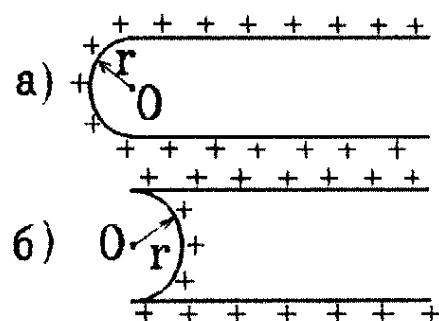


Рис.4.6

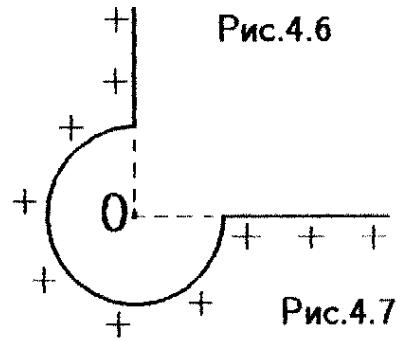


Рис.4.7

1-26. Электрический диполь с дипольным моментом \mathbf{p}_e находится на расстоянии r от длинной прямой нити, заряженной равномерно с линейной плотностью заряда λ . Найти силу, действующую на диполь, если вектор \mathbf{p}_e ориентирован: а) вдоль нити; б) по радиус-вектору \mathbf{r} ; в) перпендикулярно и к нити, и к радиус-вектору \mathbf{r} .

Ответ: а), в) $F = 0$; б) $\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{p}_e / 2\pi\epsilon_0 r^2$.

1-27. По тонкому кольцу радиуса r равномерно с линейной плотностью λ распределен заряд. Крохотный электрический диполь массы m с дипольным моментом \mathbf{p}_e , в начальный момент времени покоявшийся в центре кольца O (рис.4.8), начал двигаться вдоль его оси. Найти максимальную скорость диполя при его движении.

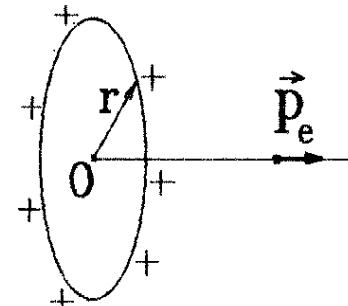


Рис.4.8

$$\text{Ответ: } v_{max} = \sqrt{\frac{2\lambda p_e}{3\sqrt{3}\epsilon_0 r}}.$$

1-28. Точечный электрический диполь с моментом \mathbf{p}_e находится во внешнем однородном электрическом поле \mathbf{E}_0 , причем векторы \mathbf{p}_e и \mathbf{E}_0 параллельны и направлены в одну сторону. В этом случае одна из экви-потенциальных поверхностей является сферой. Найти ее радиус.

$$\text{Ответ: } r = \sqrt[3]{p_e / 4\pi\epsilon_0 E_0}.$$

1-29. Маленький электрический диполь с моментом \mathbf{p}_e и массой m находится в положении равновесия на оси закрепленного кольца радиуса R , по которому равномерно распределен заряд q (рис.4.9). Найти период малых колебаний диполя относительно положения равновесия.

$$\text{Ответ: } T = 3\pi R^2 \sqrt{\sqrt{3}\epsilon_0 m / q p_e}.$$

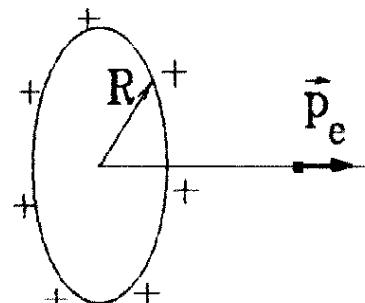


Рис.4.9

1-30. Металлический незаряженный шар радиуса R вносится в однородное электрическое поле напряженностью E_0 . Найти точки пространства, в которых напряженность поля станет равной: а) $2E_0$; б) $E_0/3$. (Указание: использовать метод, приведенный при решении задачи 1.5. гл.1).

Ответ : а) точки лежат на расстоянии $l = \pm \sqrt[3]{2}R$ от центра шара по направлению поля ;
 б) точки лежат на окружности радиуса $r = \sqrt[3]{3/2} R$, центр которой совпадает с центром шара, а плоскость перпендикулярна к направлению поля .

1-31. Две бесконечные плоские металлические взаимно перпендикулярные пластины образуют двугранный угол. На биссектрисе такого угла на одинаковом расстоянии b от обеих пластин находится электрический диполь с вектором p_e , направленным к вершине угла. Найти силу, действующую на диполь, и ее направление.

Ответ : $F = 3p_e^2 (3\sqrt{2} - 1) / 16\pi\epsilon_0 b^4$, направлена к вершине угла.

1-32. Маленький незаряженный металлический шарик радиуса r помещен на оси тонкого равномерно заряженного кольца радиуса R на расстоянии $l_1 = R$ от центра кольца. Какую работу надо совершить, чтобы отодвинуть шарик вдоль оси на расстояние $l_2 = 2R$ от центра ? Заряд кольца равен q ; $R \gg r$. (Указание: для определения дипольного момента заряда, индуцированного на шарике, использовать метод, приведенный при решении задачи 1.5. гл.1).

Ответ : $A = 93r^3 q^2 / 4000\pi\epsilon_0 R^4$.

1-33. Маленький незаряженный металлический шарик массы m и радиуса r может свободно перемещаться вдоль оси тонкого кольца радиуса R ($R \gg r$). По кольцу равномерно распределен заряд q . Найти период малых колебаний шарика вдоль оси около положения равновесия. (Указание: дипольный момент заряда, индуцированного на шарике, определить методом, использованным при решении задачи 1.5. гл.1).

Ответ : $T = \frac{9\pi R^3}{2rq} \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m}{r}}$.

1-34. Стальной бронебойный снаряд длины $l = 25$ см имеет в момент соприкосновения с броней скорость $v_0 = 1000$ м/с и теряет скорость, пробивая броню толщины $d = 5$ см. Найти разность потенциалов U между головной и хвостовой частями снаряда, возникающую при его равнозамедленном торможении в броне.

Ответ : 14,2 мкВ .

1-35. Диэлектрический диск радиуса R и высоты h с диэлектрической проницаемостью ϵ вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Доказать, что возникающая из-за вращения объемная плотность заряда ρ постоянна внутри диска. Найти величину ρ . Найти также величину заряда q на боковой поверхности диска.

Ответ: $\rho = 2\epsilon\epsilon_0 m_e \omega^2 / e$; $q = 2\pi\epsilon_0 (\epsilon - 1) h R^2 \omega^2 m_e / e$,
где m_e , e – масса и заряд электрона.

1-36. Найти зависимость от радиус-вектора r напряженности электрического поля E , созданного зарядом, распределенным в пространстве с плотностью $\rho = \rho_0/r$, где ρ_0 – константа. Диэлектрическая проницаемость пространства $\epsilon = 1$.

Ответ: $E = \rho_0 r / 2\epsilon_0 r$.

1-37. Пространство ($\epsilon = 1$) заполнено зарядом с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где ρ_0 и α – константы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию r при $\alpha r^3 \ll 1$ и при $\alpha r^3 \gg 1$.

Ответ: $E = \rho_0 r / 3\epsilon_0$ при $\alpha r^3 \ll 1$; $E = \rho_0 / 3\epsilon_0 \alpha r^2$ при $\alpha r^3 \gg 1$.

1-38. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл распределен внутри шара радиуса $r = 10^{-10}$ м. Как должна зависеть объемная плотность этого заряда от расстояния до центра шара, чтобы электрон с массой m_e , помещенный в центре шара, мог совершать гармонические колебания? Определить частоту этих колебаний.

Ответ: $\rho = 3q / 4\pi r^3 = \text{const}$; $\nu = q / \sqrt{16\pi^3 \epsilon_0 m_e r^3}$.

1-39. Два прямых очень тонких и бесконечно длинных стержня соприкасаются в точке O , как показано на рис.4.10, пересекаясь под прямым углом. По стержням равномерно распределены заряды с линейными плотностями $\lambda_1 = 1$ Кл/м и $\lambda_2 = 2$ Кл/м соответственно. Одна из силовых линий поля будет прямой линией, проходящей через точку O . Найти угол наклона α этой линии к первому стержню.

Ответ: $\alpha = \arctg(1/\sqrt{2}) = 35^\circ 16'$.

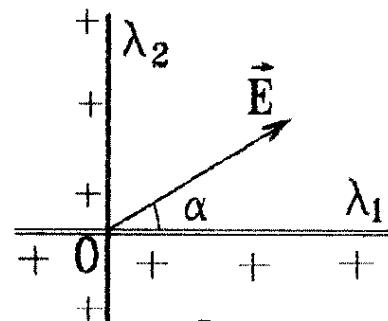


Рис.4.10

1-40. Внутри круглого бесконечно длинного цилиндра, заряженного равномерно с объемной плотностью ρ , имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси цилиндра и смешена относительно нее на расстояние b . Найти напряженность E электрического поля в полости, полагая для материала цилиндра $\epsilon = 1$.

$$\text{Ответ : } E = \rho b / 2\epsilon_0 .$$

1-41. Очень длинный металлический незаряженный цилиндр помещен в однородное электрическое поле с напряженностью E_0 , силовые линии которого перпендикулярны к оси цилиндра (рис.4.11). Используя метод, примененный при решении задачи 1.5. гл.1, получить распределение поверхностной плотности индуцированного заряда на поверхности цилиндра.

$$\text{Ответ : } \sigma = 2\epsilon_0 E_0 \cos \theta .$$

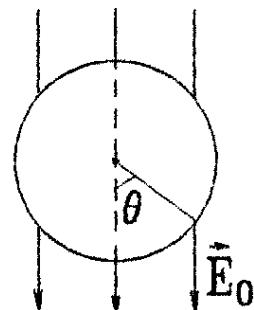


Рис.4.11

1-42. В однородное электрическое поле с напряженностью E_0 вносят очень длинную прямую металлическую проволоку радиуса r перпендикулярно вектору E_0 . Вычислить положительный индуцированный заряд, появляющийся на поверхности куска проволоки единичной длины. (Указание: распределение поверхностной плотности такого заряда определить методом, использованным при решении задачи 1.5. гл.1).

$$\text{Ответ : } q = 4\epsilon_0 E_0 r .$$

1-43. Маленький электрический диполь находится на середине перпендикуляра, проведенного от точечного положительного заряда q к бесконечно длинной прямой нити, по которой равномерно распределен положительный заряд с линейной плотностью λ . При каком расстоянии x между зарядом q и нитью сила, действующая на диполь, будет равна нулю?

$$\text{Ответ : } x = 2q/\lambda .$$

1-44. Длина перпендикуляра, проведенного из точки, где находится точечный заряд q , к бесконечной прямой нити, равна l . Вдоль этого перпендикуляра может перемещаться маленький электрический диполь. С какой линейной плотностью λ следует равномерно зарядить нить, чтобы диполь менял свою ориентацию в той же точке, в которой обращается в ноль действующая на него сила?

$$\text{Ответ : } \lambda = 3q/8l .$$

1-45. Две одинаковые незаряженные проводящие сферы радиуса r каждая помещены в однородное электрическое поле с напряженностью E_0 так, что центры сфер расположены на расстоянии l друг от друга, причем $l \gg r$. Линия, соединяющая центры сфер, направлена вдоль вектора E_0 . Вычислить величину и направление силы электрического взаимодействия между сферами. (Указание: созданные индуцированными на сferах зарядами поля определить, используя метод, примененный при решении задачи 1.5. гл.1.)

$$\text{Ответ: } F = 24\pi\epsilon_0 r^6 E_0^2 / l^4 \quad (\text{сила притяжения}) .$$

1-46. Решить предыдущую задачу 1-45 при условии, что линия, соединяющая центры сфер, перпендикулярна вектору E_0 .

$$\text{Ответ: } F = 12\pi\epsilon_0 r^6 E_0^2 / l^4 \quad (\text{сила отталкивания}) .$$

1-47. Найти потенциал электростатического поля с напряженностью $\mathbf{E} = iky + jkx$, где k – константа.

$$\text{Ответ: } \varphi = -kxy + \text{const} .$$

1-48. Пространство между двумя плоскими параллельными проводящими пластинами заполняет среда с $\epsilon = 1$, в которой равномерно с плотностью ρ распределен электрический заряд. Расстояние между пластинами равно d . Считая, что в удаленных точках пластины замкнуты накоротко, а их потенциалы равны нулю, найти максимальную величину потенциала в пространстве между пластинами.

$$\text{Ответ: } \varphi_{\max} = \rho d^2 / 8\epsilon_0 .$$

1-49. Найти отношение радиуса внешней обкладки цилиндрического конденсатора к радиусу его внутренней обкладки, при котором величина напряженности электрического поля вблизи внутренней обкладки была бы минимальной. Конденсатор при этом подключен к одному и тому же источнику постоянного напряжения.

$$\text{Ответ: } r_{\text{внеш}} / r_{\text{внутр}} = e = 2,72 .$$

1-50. Найти потенциал электростатического поля с напряженностью $\mathbf{E} = i2axy + ja(x^2 - y^2)$, где a – константа.

$$\text{Ответ: } \varphi = -ay(x^2 - y^2/3) + \text{const} .$$

1-51. Найти потенциал электростатического поля с напряженностью $\mathbf{E} = iay + j(ax + bz) + kby$, где a, b – константы.

$$\text{Ответ: } \varphi = -y(ax + bz) + \text{const} .$$

1-52. Электрическое поле вблизи плоской поверхности однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ также однородно и имеет напряженность E_0 . Силовые линии этого поля наклонены к поверхности диэлектрика под углом θ (рис.4.12). Найти: а) поток вектора напряженности E через сферу радиуса R с центром на поверхности диэлектрика; б) циркуляцию вектора индукции электрического поля D по очень узкому прямоугольному контуру Γ длины l (рис.4.12), плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору E .

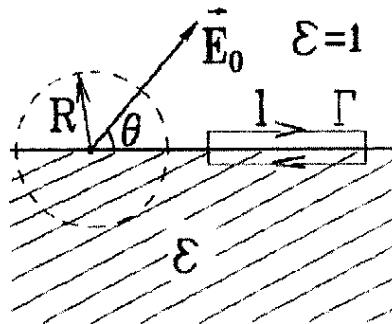


Рис.4.12

$$\text{Ответ : } \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \pi(\epsilon - 1)R^2 E_0 \sin \theta / \epsilon ; \quad \oint \mathbf{D} dl = -\epsilon_0(\epsilon - 1)E_0 l \cos \theta .$$

1-53. Электроны с энергией $W = 5$ кэВ образуют цилиндрический пучок с диаметром $d = 1$ см. Ток в пучке $I = 1$ А равномерно распределен по его сечению. Найти напряженность электрического поля на поверхности пучка и разность потенциалов между поверхностью пучка и его осью.

$$\text{Ответ : } E = \frac{I}{\pi \epsilon_0 d} \sqrt{\frac{m_e}{2W}} = 85,8 \text{ кВ/м} ; \quad \Delta \varphi = \frac{I}{4\pi \epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2W}} = 214 \text{ В} ,$$

где m_e – масса электрона.

1-54. Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра по закону $\varphi = ar^2 + b$, где a и b – постоянные, $\epsilon = 1$. Найти электрический заряд внутри шара радиуса r .

$$\text{Ответ : } q = -8\pi \epsilon_0 a r^3 .$$

1-55. Заряд распределен в пространстве ($\epsilon = 1$) таким образом, что потенциал создаваемого им электростатического поля имеет сферически-симметричный вид $\varphi = \varphi_0 \exp(-r/r_0)$, где φ_0 и r_0 – постоянные. На каком удалении от начала координат плотность заряда минимальна и чему она при этом равна ?

$$\text{Ответ : } r = r_0 (1 + \sqrt{3}) , \quad \rho_{min} = -1,74 \cdot 10^{-2} \cdot \epsilon_0 \varphi_0 / r_0^2 .$$

1-56. Заряд, распределенный в пространстве ($\epsilon = 1$), создает электростатическое поле со сферически-симметричным потенциалом $\varphi = \varphi_0 \ln(1 + r_0/r)$, где φ_0 , r_0 – постоянные. Найти величину заряда,

находящегося внутри сферы радиуса r_0 с центром в начале координат.

$$\text{Ответ : } q = 2\pi\epsilon_0\varphi_0 r_0 .$$

1-57. Используя условия задачи 1-55, определить величину заряда, заключенного в сферу радиуса r_0 с центром в начале координат.

$$\text{Ответ : } q = 4\pi\epsilon_0\varphi_0 r_0 / c .$$

1-58. Две бесконечно длинные прямые нити заряжены равномерно с линейными плотностями заряда λ_1 и λ_2 соответственно, и расположены взаимно перпендикулярно друг к другу. Найти величину силы взаимодействия нитей друг с другом.

$$\text{Ответ : } F = \lambda_1\lambda_2 / 2\epsilon_0 .$$

1-59. Пустотелый металлический шар радиуса r с зарядом q , имеющий массу m , плавает в диэлектрической жидкости с проницаемостью ϵ . Плотность жидкости $\rho_{\text{жидк}} = 3m/2\pi r^3$. Найти плотность свободного заряда на поверхности шара.

$$\text{Ответ : } \sigma_1 = q / 2\pi(\epsilon + 1)r^2 \quad \text{на границе шар-воздух} ;$$

$$\sigma_2 = \epsilon q / 2\pi(\epsilon + 1)r^2 \quad \text{на границе шар-жидкость} .$$

1-60. Точечный заряд q находится в центре шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 5$. Найти поляризованность как функцию радиус-вектора r , проведенного из центра шара, а также заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

$$\text{Ответ : } P = qr / 5\pi r^3 ; \quad q' = -0,8 \cdot q .$$

1-61. В воде электрическое поле с напряженностью $E = 1000$ В/см создает поляризацию, эквивалентную правильной ориентации только одной из N молекул. Дипольный электрический момент молекулы воды $p_e = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл/м, диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon = 81$. Найти N .

$$\text{Ответ : } N = 2930 \text{ молекул} .$$

1-62. В центре диэлектрического шара радиуса r с проницаемостью $\epsilon_1 = 2$ помещен точечный заряд q . Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью $\epsilon_2 = 4$. Найти поверхностную плотность σ' связанных зарядов на границе раздела диэлектриков.

$$\text{Ответ : } \sigma' = -q / 16\pi r^2 .$$

1-63. Проводник произвольной формы (рис.4.13), имеющий заряд q , окружен однородным диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2,5$. Найти суммарные поверхностные связанные заряды на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика.

$$\text{Ответ: } q'_{\text{внутр}} = q'_{\text{внеш}} = -0,6 \cdot q .$$

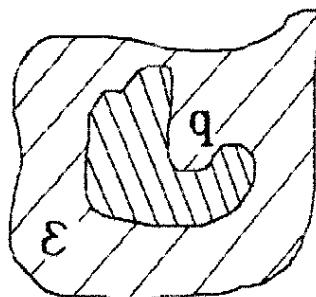


Рис.4.13

1-64. Половина пространства между двумя концентрическими обкладками сферического конденсатора заполнена, как показано на рис.4.14, однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Заряд на конденсаторе равен q . Найти величину напряженности электрического поля на сферической поверхности радиуса r с центром в точке О и величину связанного заряда внутри этой поверхности.

$$\text{Ответ: } E(r) = q / 2\pi\epsilon_0(\epsilon + 1)r^2 ; \quad q' = -q(\epsilon - 1) / (\epsilon + 1) .$$

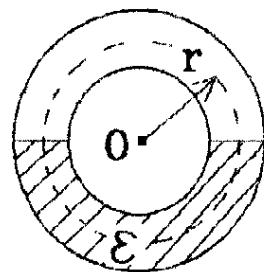


Рис.4.14

1-65. Пластина пьезоэлектрика толщины $2d$ из-за неоднородной деформации поляризована так, что вектор поляризованности направлен вдоль оси x , а его величина изменяется по закону $P = P_0(1 - x^2/d^2)$, где P_0 – поляризованность в центре пластины, а расстояние x отсчитывается от средней плоскости пластины. Пренебрегая краевыми эффектами, найти разность потенциалов между боковыми поверхностями пластины.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = 4P_0d / 3\epsilon_0 .$$

1-66. Точечный заряд q расположен в начале координат О и окружен идеальным диэлектриком, проницаемость которого изменяется с расстоянием r от точки О по закону $\epsilon = 1 + \alpha r^n$, где α , n – постоянные. Вычислить связанный заряд внутри сферы радиуса r с центром в точке О.

$$\text{Ответ: } q' = -q(\epsilon - 1) / \epsilon .$$

1-67. Проводящий шар радиуса R , имеющий заряд q , окружен неоднородной бесконечной идеальной диэлектрической средой, проницаемость которой изменяется по закону $\epsilon = (r/R)^n$, где r – расстояние от центра шара О, n – положительная постоянная. Найти радиус сфе-

рической поверхности с центром в точке O , внутри которой находится половина всего связанного заряда.

$$\text{Ответ: } \sqrt[n]{2}R .$$

1-68. Очень длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения радиуса R поляризован так, что вектор поляризованности в каждой точке цилиндра на удалении r от его оси направлен вдоль радиуса цилиндра и равен по модулю $P = ar^n$, где a , n – постоянные. Найти величину объемного связанного заряда, приходящегося на единицу длины цилиндра.

$$\text{Ответ: } q' = -2\pi a R^{n+1} (n+2) / (n+1) .$$

1-69. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 5$ создано однородное электрическое поле с напряженностью $E = 100$ В/м. Радиус шара $r = 3$ см. Найти максимальную поверхностную плотность связанного заряда на поверхности шара и полный связанный заряд одного знака.

$$\text{Ответ: } \sigma'_{max} = 3,54 \text{ нКл/м}^2 , q' = \pi \epsilon_0 (\epsilon - 1) E r^2 = 10 \text{ пКл} .$$

1-70. Точечный заряд q находится на плоскости, отделяющей вакуум от безграничного однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Доказать, что эквипотенциальные поверхности электрического поля образуют правильные сферы с зарядом q в центре; найти потенциал φ как функцию расстояния r от заряда q .

$$\text{Ответ: } \varphi(r) = q / 2\pi \epsilon_0 (\epsilon + 1) r .$$

1-71. Электрическое поле в безграничной диэлектрической среде с однородной восприимчивостью α имеет сферически-симметричный вид с напряженностью $E = e_r \alpha / r^n$, где α , n – постоянные, e_r – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора r . Определить распределение объемной плотности связанных зарядов в такой среде.

$$\text{Ответ: } \rho' = -(2-n) \epsilon_0 \alpha \alpha / r^{n+1} .$$

1-72. Напряженность поля внутри плоского заряженного воздушного конденсатора $E = 3000$ В/м. Считая, что диэлектрическая проницаемость воздуха зависит от концентрации n его молекул по закону $\epsilon = 1 + \alpha n$, где $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-20}$ м³ и что поляризованные молекулы воздуха подчиняются распределению Больцмана, найти отношение концентрации молекул внутри конденсатора к их концентрации вне конденсатора. Температура воздуха $T = 300$ К.

Ответ : $n/n_0 = \exp(\alpha\epsilon_0 E^2/2kT) = 1,000135$.

1-73. Крохотный проводящий шарик находится внутри заполняющего половину пространства однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ на расстоянии l от его безграничной плоской поверхности, отделяющей диэлектрик от вакуума. Найти распределение поверхностной плотности σ' связанного заряда, возникающего на этой поверхности, как функцию расстояния r от шарика. Шарик имеет заряд q . Найти полную величину связанного заряда на границе "диэлектрик-вакуум".

Ответ : $\sigma' = q(\epsilon - 1)l/2\pi\epsilon(\epsilon + 1)r^3$; $q' = q(\epsilon - 1)/\epsilon(\epsilon + 1)$.

1-74. Крохотный проводящий шарик, имеющий заряд q , находится в однородном изотропном диэлектрике с проницаемостью ϵ на расстоянии l от безграничной плоской проводящей пластины, ограничивающей диэлектрик. Найти поверхностные плотности связанных зарядов на границе с проводящей пластиной и индуцированных зарядов на поверхности пластины, как функции расстояния r от шарика. Найти также полный связанный заряд на границе диэлектрика и проводника.

Ответ : $\sigma' = ql(\epsilon - 1)/2\pi\epsilon r^3$; $\sigma_{\text{инд}} = -ql/2\pi r^3$; $q' = q(\epsilon - 1)/\epsilon$.

1-75. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии l от плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ , заполняющего все полупространство. Найти величину силы, действующей на заряд q со стороны связанных зарядов на поверхности диэлектрика.

Ответ : $F = q^2(\epsilon - 1)/16\pi\epsilon_0(\epsilon + 1)l^2$.

1-76. Сферическая оболочка радиуса R с равномерно распределенным по ней зарядом q расширяется до радиуса $2R$ под действием электрических сил. Найти работу этих сил при таком расширении.

Ответ : $A = q^2/16\pi\epsilon_0 R$.

1-77. Точечный заряд $q = 3$ мКл помещен в центре шарового слоя из однородного изотропного диэлектрика с $\epsilon = 3$. Внутренний радиус слоя $a = 250$ мм, внешний — $b = 500$ мм. Найти энергию поля, заключенную в пределах диэлектрика.

Ответ : 27 мДж.

1-78. Бесконечный цилиндр круглого сечения с радиусом R , материал которого имеет проницаемость $\epsilon = 1$, заряжен равномерно с объ-

емной плотностью заряда ρ . Определить энергию электрического поля, заключенного внутри участка цилиндра единичной длины.

$$\text{Ответ: } W_1 = \pi \rho^2 R^4 / 16\epsilon_0 .$$

1-79. Заряд равномерно распределен по поверхности проводящего шара радиуса $r_0 = 1$ см. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\epsilon = 1$. Найти радиус сферы, внутри которой заключено 75 % энергии электрического поля, созданного зарядом шара.

$$\text{Ответ: } R = 4r_0 = 4 \text{ см} .$$

1-80. Первоначально заряд $q = 10^{-10}$ Кл был равномерно распределен по объему шара радиуса $r = 1$ см. Затем вследствие взаимного отталкивания заряды перешли на поверхность шара. Какая работа была при этом совершена, если диэлектрическая проницаемость материала шара $\epsilon = 1$?

$$\text{Ответ: } A = 8,09 \text{ нДж} .$$

1-81. В бесконечной однородной среде с проницаемостью ϵ распределен сторонний электрический заряд, имеющий объемную плотность $\rho = A(r^{-1} - a^{-1}) \exp(-r/a)$, где a , A – постоянные, r – расстояние от некоторой бесконечной прямой оси. Найти энергию электрического поля, заключенную в плоском слое среды, имеющем единичную толщину и перпендикулярном оси.

$$\text{Ответ: } W_1 = \pi a^2 A^2 / 4\epsilon\epsilon_0 .$$

1-82. Сферическая оболочка радиуса $R = 0,5$ м заряжена равномерно с поверхностной плотностью σ . Найти модуль вектора электрической силы, которая действует на участок поверхности сферы, имеющий площадь 1 м^2 . (Указание: воспользоваться выражением энергии заряженной сферы).

$$\text{Ответ: } \sigma^2 / 2\epsilon_0 .$$

1-83. Бесконечная среда, диэлектрическая проницаемость которой изменяется с расстоянием r от некоторой точки О по закону $\epsilon = \exp(r/b)$, заряжена сторонним электрическим зарядом с плотностью $\rho = a/r$, где a , b – постоянные. Определить энергию электрического поля, созданного такой системой зарядов. Какая часть энергии заключена внутри сферической поверхности радиуса $r = b$ с центром в точке О ?

$$\text{Ответ: } W = \pi a^2 b^3 / \epsilon_0 ; \quad 8,03 \% .$$

1-84. Предполагая, что электрон – это равномерно заряженный по объему шарик и что его масса m_e определяется из соотношения $W = m_e c^2$, где W – электростатическая энергия электрона, найти радиус электрона r .

$$\text{Ответ : } r = 3e^2 / 20\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 1,69 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

1-85. В подключенный к батарее плоский конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 1,2$ см вносят две пластины из диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 5$ (рис.4.15). Какой должна быть толщина l зазора между этими пластинами, чтобы поле в зазоре возросло в $n = 3$ раза после внесения диэлектрика в конденсатор?

$$\text{Ответ : } l = d(\epsilon - n) / n(\epsilon - 1) = 0,2 \text{ см.}$$

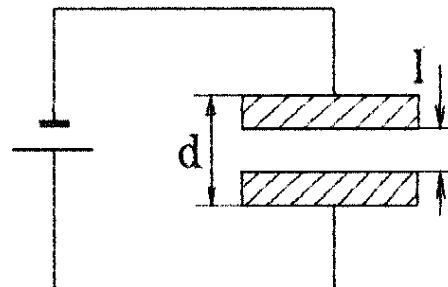


Рис.4.15

1-86. Найти работу A , которую надо совершить, чтобы увеличить на $\Delta d = 0,2$ мм расстояние между пластинами плоского конденсатора площадью $S = 400 \text{ см}^2$ с неизменным зарядом $q = 0,2 \text{ мККл}$. В зазоре между пластинами находится воздух с $\epsilon = 1$.

$$\text{Ответ : } 11,3 \text{ мкДж.}$$

1-87. В плоский конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 5$ мм внесена пластина из диэлектрика с $\epsilon = 6$ так, что остался воздушный зазор толщины $h = 2$ мм. Конденсатор подключен к батарее с напряжением $U = 150$ В. Найти новую разность потенциалов между обкладками конденсатора, если его отключить от батареи, а затем вытащить диэлектрическую пластину.

$$\text{Ответ : } U' = U\epsilon d / (h(\epsilon - 1) + d) = 300 \text{ В.}$$

1-88. Площадь обкладки плоского конденсатора $S = 1 \text{ м}^2$, расстояние между обкладками $h = 5$ мм. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется в направлении, перпендикулярном обкладкам, по линейному закону от значения $\epsilon_1 = 2$ вблизи одной обкладки до $\epsilon_2 = 5,44$ вблизи другой. Определить емкость конденсатора.

$$\text{Ответ : } C = \epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1) S / h \ln(\epsilon_2/\epsilon_1) = 6,09 \text{ нФ.}$$

1-89. Сферический конденсатор с радиусом внутренней обкладки R заполнен диэлектриком, проницаемость которого возрастает с расстоянием r от центра обкладок по закону $\epsilon = r/R$. Определить емкость такого конденсатора, если радиус внешней обкладки в n раз больше радиуса внутренней обкладки.

$$\text{Ответ: } C = 8\pi\epsilon_0 R n^2 / (n^2 - 1).$$

1-90. Плоский воздушный конденсатор с площадью каждой пластины $S = 200 \text{ см}^2$ и расстоянием между пластинами $d = 5 \text{ мм}$ поместили во внешнее однородное электрическое поле с напряженностью $E = 1,3 \text{ кВ/см}$, перпендикулярное к пластинам. Затем пластины замкнули накоротко проводником. Когда ток в этом проводнике прекратился, проводник убрали. Какую работу против электрических сил надо теперь совершить, чтобы развернуть конденсатор на 180° , поменяв местами его обкладки?

$$\text{Ответ: } A = 2\epsilon_0 S E^2 d = 2,99 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

1-91. Пластины плоского конденсатора, расстояние между которыми равно d , замкнуты накоротко. Между ними находится еще одна параллельная тонкая плоская металлическая пластина с зарядом q . Какой заряд протечет по закорачивающему проводнику, если пластину с зарядом переместить на расстояние l (рис.4.16) ?

$$\text{Ответ: } \Delta q = ql/d.$$

1-92. Пластина из сегнетоэлектрика с толщиной h и с "замороженной" перпендикулярно боковым граням однородной поляризованностью \vec{P} помещена в плоский конденсатор параллельно его обкладкам (рис.4.17). Обкладки конденсатора, расстояние между которыми равно d , соединены между собой накоротко. Найти напряженность электрического поля внутри и вне пластины.

$$\text{Ответ: } E_{\text{внутр}} = (h - d)\vec{P}/\epsilon_0 d; \quad E_{\text{вне}} = h\vec{P}/\epsilon_0 d.$$

1-93. Изолированный плоский заряженный конденсатор имеет площадь обкладок $S_0 = 1 \text{ м}^2$. В конденсатор вводят пластину из диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 3$. Толщина пластины совпадает с рас-

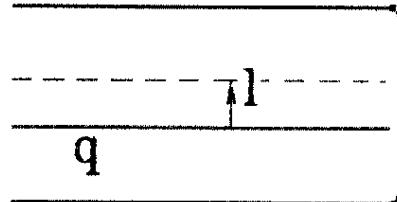


Рис.4.16

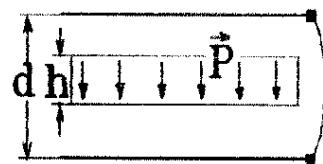


Рис.4.17

стоянием между обкладками. Величина электрической индукции D в пластине возрастает в два раза по сравнению со значением D_0 в конденсаторе до введения пластины. Какова площадь основания пластины?

$$\text{Ответ : } S = S_0(\epsilon - 2)/2(\epsilon - 1) = 0,25 \text{ м}^2.$$

1-94. Плоский конденсатор расположен горизонтально так, что одна его пластина находится над поверхностью жидкости, а другая погружена под ее поверхность (рис.4.18). Жидкость является диэлектриком с проницаемостью ϵ и плотностью ρ . На какую высоту поднимется уровень жидкости в конденсаторе после сообщения его пластинам заряда с поверхностной плотностью σ ?

$$\text{Ответ : } \Delta h = \sigma^2(\epsilon - 1)/\epsilon\epsilon_0\rho g.$$

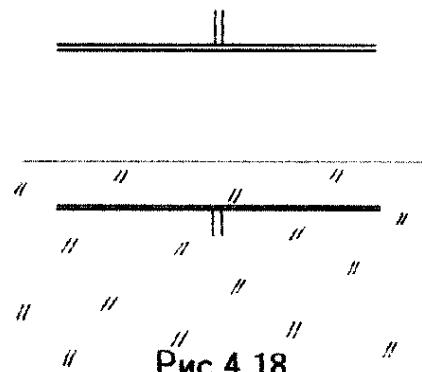


Рис.4.18

1-95. В плоский конденсатор с квадратными обкладками площадью S введена плоская квадратная пластина той же площади S и толщины d с диэлектрической проницаемостью ϵ , практически заполняющая весь объем между пластинами конденсатора. Силу какой минимальной величины F надо приложить к диэлектрику, чтобы тот начал выдвигаться из конденсатора вдоль направления, параллельного одной из сторон пластины (рис.4.19)? Конденсатор имеет заряд q и отключен от источника напряжения. Краевыми эффектами пренебречь.

$$\text{Ответ : } F = (\epsilon - 1)q^2d/2\epsilon_0\epsilon^2S^{3/2}.$$

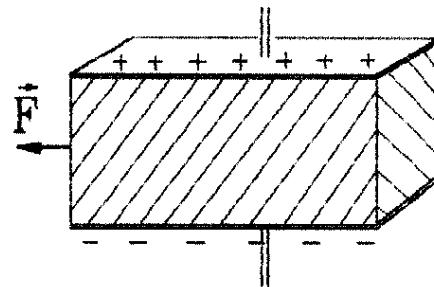


Рис.4.19

1-96. Два одинаковых металлических шарика радиуса a расположены в диэлектрической среде с проницаемостью ϵ . Расстояние между центрами шариков b настолько велико ($b \gg a$), что можно считать заряды распределенными по поверхностям шариков практически равномерно. Вычислить взаимную емкость этой системы.

$$\text{Ответ : } C \approx 2\pi\epsilon\epsilon_0 a.$$

1-97. Прямой провод радиуса b расположен параллельно безграничной проводящей плоскости. Расстояние между осью провода

и плоскостью равно d . Найти взаимную емкость этой системы на единицу длины провода при условии $b \ll d$.

$$\text{Ответ : } C_1 \approx 2\pi\epsilon_0 / \ln(2d/b) .$$

1-98. Определить емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок r_1 и r_2 , если половина пространства между обкладками заполнена однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ (рис.4.20), а другая половина – вакуумом.

$$\text{Ответ : } C = 2\pi\epsilon_0(\epsilon + 1)r_1r_2 / (r_2 - r_1) .$$

1-99. Половина пространства между двумя коаксиальными обкладками цилиндрического конденсатора длины l заполнена однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ , как показано на рис.4.21. Радиус внутренней обкладки равен r_1 , внешней – r_2 . Определить емкость такого конденсатора, если $l \gg r_1, r_2$.

$$\text{Ответ : } C = \pi\epsilon_0(\epsilon + 1)l / \ln(r_2/r_1) .$$

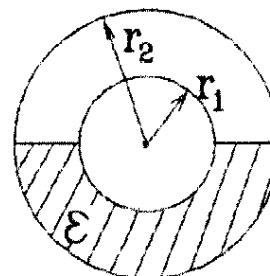


Рис.4.20

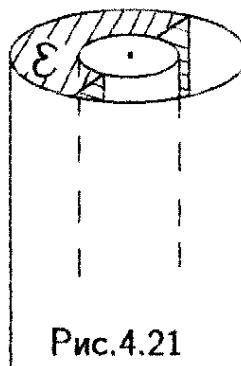


Рис.4.21

1-100. Плоский конденсатор с квадратными пластинами площадью $a \times a$ заряжен до разности потенциалов U и отсоединен от источника напряжения. После этого в конденсатор вдвинута на глубину b широкая пластина из диэлектрика с проницаемостью ϵ . Толщина пластины d совпадает с расстоянием между обкладками конденсатора (рис.4.22), причем $d \ll a, b$. С какой силой F пластина втягивается в конденсатор?

$$\text{Ответ : } F = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)U^2a^3}{2(a - b + \epsilon b)^2d} .$$

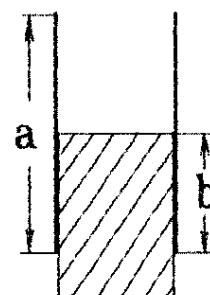


Рис.4.22

1-101. Зазор между обкладками в длинном цилиндрическом конденсаторе полностью заполнен слоем диэлектрика с проницаемостью ϵ . Средний радиус обкладок R , толщина зазора между ними d , причем $d \ll R$. Обкладки конденсатора подключены к источнику постоянного напряжения U . Найти величину электрической силы, действующей на диэлектрик.

$$\text{Ответ : } F = \pi\epsilon_0(\epsilon - 1)RU^2/d .$$

1-102. Левая пластина плоского незаряженного конденсатора закреплена, а правая, имеющая массу m , связана с нерастянутой пружиной, имеющей коэффициент жесткости k (рис.4.23). Конденсатор подключают к источнику постоянного напряжения. В положении равновесия расстояние между пластинами уменьшается на 25 %. Найти период малых колебаний правой пластины около положения равновесия.

$$\text{Ответ : } T = 2\pi \sqrt{3m/k} .$$

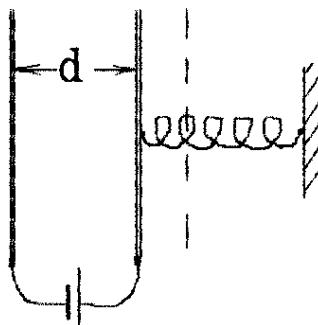


Рис.4.23

1-103. Начало координат совпадает с центром металлического шарика. Найти его емкость, если радиус шарика R_0 и он окружен неоднородной диэлектрической средой с $\epsilon = \alpha r^n$, где r – расстояние от центра шарика. При каком соотношении между постоянными α и n эта емкость совпадает с емкостью такого же шарика в вакууме ?

$$\text{Ответ : } C = \frac{4\pi\epsilon_0\alpha(n+1)}{R_0^{n+1}} \quad \text{при } \alpha = \frac{R_0^{n+2}}{n+1} .$$

2 Задачи на законы постоянного тока

2-1. При напряжении в сети $U = 120$ В вольтметр, соединенный последовательно с сопротивлением $R_1 = 10$ кОм, показывает $U_1 = 50$ В. Если при том же напряжении в сети соединить вольтметр последовательно с неизвестным сопротивлением R_2 , то он покажет $U_2 = 10$ В. Определить величину сопротивления R_2 .

$$\text{Ответ : } R_2 = 78,6 \text{ кОм} .$$

2-2. Найти сопротивление бесконечной цепи, изображенной на рис.4.24, где $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом.

$$\text{Ответ : } 4 \text{ Ом} .$$

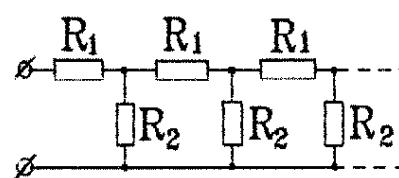


Рис.4.24

2-3. Резистор с сопротивлением R и нелинейное сопротивление, вольт-амперная характеристика которого имеет вид $U = k\sqrt{I}$, соединены последовательно и подключены к источнику напряжения U_0 . Найти ток в цепи, полагая постоянную $k = 3 \cdot \sqrt{RU_0}/2$.

$$\text{Ответ : } I = U_0/4R .$$

2-4. Точки А и В цепи замыкают накоротко, как показано на рис.4.25. Определить величину тока, который потечет по закорачивающему участку провода от точки А к точке В, если $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$, внутренним сопротивлением источника э.д.с. пренебречь.

Ответ : 1 А .

2-5. Электрическая цепь составлена из четырех одинаковых резисторов и двух батарей с э.д.с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = r$ (рис.4.26). Какая максимальная суммарная тепловая мощность может рассеиваться на этих четырех резисторах ?

Ответ : $P_{\max} = (\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2) / 4r$.

2-6. Подвижный контакт реостата, изображенного на рис.4.27, перемещают вдоль всей длины потенциометра с сопротивлением R . Найти отношение величины максимального тока, текущего при этом через амперметр А, к величине минимального тока. Сопротивлением амперметра и внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

Ответ : $I_{\max} / I_{\min} = 1 + R/r$.

2-7. Найти э.д.с. и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного трем параллельно соединенным элементам с э.д.с. \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 и внутренними сопротивлениями r_1 , r_2 и r_3 соответственно.

Ответ : $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 r_3 + \mathcal{E}_2 r_1 r_3 + \mathcal{E}_3 r_1 r_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$; $r = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$.

2-8. Амперметр и вольтметр подключены последовательно к батарее с э.д.с. $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$. Если параллельно вольтметру подключить некоторое сопротивление, то показание вольтметра уменьшается вдвое, а показание амперметра вдвое увеличивается. Найти показание вольтметра после подключения сопротивления.

Ответ : 2 В .

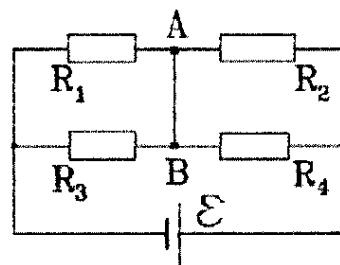


Рис.4.25

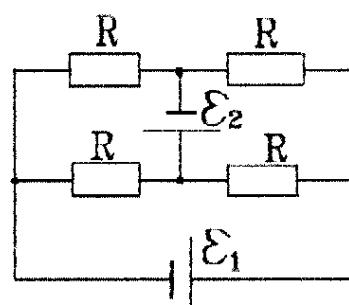


Рис.4.26

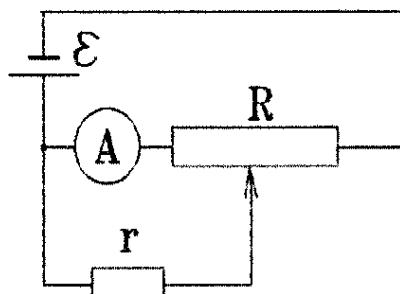


Рис.4.27

2-9. Чему равно сопротивление проволочного каркаса, изображенного на рис.4.28, если сопротивление единицы длины проволоки равно R_1 , а длины сторон равны a и b ?

$$\text{Ответ: } R = R_1 \frac{(a+b)\sqrt{a^2 + b^2} + 2ab}{a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

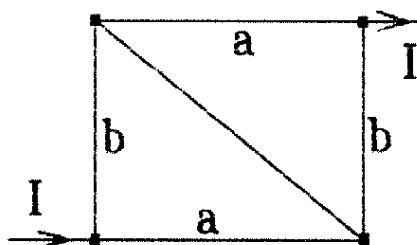


Рис.4.28

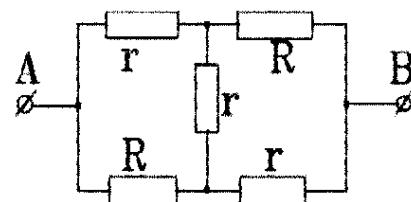


Рис.4.29

2-10. Найти сопротивление между точками A и B участка цепи, изображенного на рис.4.29.

$$\text{Ответ: } R_{AB} = r(r + 3R) / (R + 3r).$$

2-11. Определить сопротивление между точками A и B участка цепи, изображенного на рис.4.30.

Ответ:

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_5 (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}$$

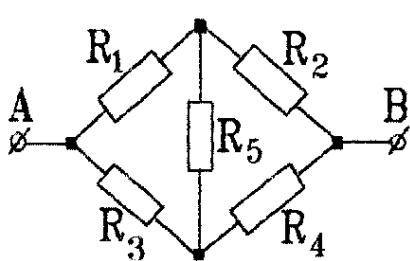


Рис.4.30

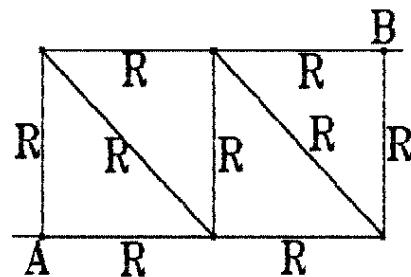


Рис.4.31

2-12. Найти сопротивление цепи R_{AB} между точками A и B каркаса из девяти одинаковых проволочек с сопротивлением R каждая (рис.4.31).

$$\text{Ответ: } R_{AB} = 15R/11.$$

2-13. Электронный пучок, испускаемый ускорителем со скоростью v , образует ток I . Концентрация электронов в пучке быстро убывает

с расстоянием r от оси пучка по закону $n = n_0 \exp(-r^2/b)$, где b – постоянная. Определить концентрацию электронов n_0 на оси пучка.

$$\text{Ответ: } n_0 = I/\pi b e v, \quad e - \text{заряд электрона}.$$

2-14. Однородно заряженный по всему объему шар радиуса R равномерно вращается вокруг своей оси симметрии. Чему равен полный ток, создаваемый вращением заряда на шаре, если плотность тока на экваторе шара равна j ?

$$\text{Ответ: } I = 2R^2 j / 3.$$

2-15. Два цилиндрических проводника одинакового сечения, но с разными удельными сопротивлениями $\rho_1 = 84 \text{ нОм} \cdot \text{м}$ и $\rho_2 = 50 \text{ нОм} \cdot \text{м}$, прижаты торцами друг к другу (рис.4.32). Найти заряд на границе раздела данных проводников, если в направлении от первого ко второму проводнику течет ток $I = 50 \text{ А}$.

$$\text{Ответ: } q = \varepsilon_0 I (\rho_2 - \rho_1) = -1,51 \cdot 10^{-17} \text{ Кл}.$$



Рис.4.32

2-16. Материал, из которого изготовлен цилиндрический провод радиуса b , неоднороден, а его удельная проводимость меняется с расстоянием r от оси провода по закону $\sigma = \sigma_0 \ln(b/r)$, где $\sigma_0 = \text{const}$. Найти ток, текущий вдоль провода, если падение напряжения на единице длины провода равно U_1 .

$$\text{Ответ: } I = \pi \sigma_0 U_1 b^2 / 2.$$

2-17. В растворе медного купороса, удельное сопротивление которого $\rho = 40 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, ток идет между параллельными медными проволоками с радиусами $r_0 = 4 \text{ мм}$ каждая, расстояние между осями которых $b = 13 \text{ см}$. Определить плотность тока в средней точке между проволоками, если между ними поддерживается напряжение $U = 12 \text{ В}$.

$$\text{Ответ: } j = \frac{2U}{\rho b \ln(b/r_0 - 1)} = 134 \text{ А/м}^2.$$

2-18. Однородная слабо проводящая среда с удельным сопротивлением $0,02 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ заполняет пространство между двумя коаксиальными идеально проводящими тонкими цилиндрическими поверхностями, имеющими одинаковую длину $l = 2 \text{ м}$ и радиусы 1 см и $1,5 \text{ см}$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти сопротивление среды между цилиндрическими поверхностями.

$$\text{Ответ: } 6,45 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}.$$

2-19. Пространство между двумя концентрическими проводящими сферами заполнено слабо проводящей средой. При подключении к сферам полюсов источника постоянного напряжения по цепи течет ток I , а объемная плотность мощности, рассеиваемой за счет джоулевых потерь, одинакова в каждой точке среды и равна P_1 . Найти зависимость удельной проводимости среды от расстояния r до общего центра сфер.

$$\text{Ответ: } \sigma = I^2 / 16\pi^2 P_1 r^4 .$$

2-20. Зазор между пластинами плоского конденсатора заполнен неоднородной слабо проводящей средой, удельная проводимость которой изменяется по линейному закону от величины σ_1 до величины σ_2 в направлении, перпендикулярном к пластинам. Площадь каждой пластины равна S , ширина зазора равна h . Найти ток через конденсатор при постоянном напряжении U на нем.

$$\text{Ответ: } I = US(\sigma_2 - \sigma_1) / h \ln(\sigma_2/\sigma_1) .$$

2-21. Электрод в виде металлического шара диаметром $D = 10$ см находится в неограниченной среде, удельное сопротивление которой изменяется с расстоянием r от центра шара по закону $\rho = \rho_0 D/r$, где $\rho_0 = 10$ Ом · м. Пренебрегая удельным сопротивлением самого шара, вычислить сопротивление этой системы.

$$\text{Ответ: } 15,9 \text{ Ом} .$$

2-22. На поверхности двух одинаковых конусов из диэлектрика, которые соприкасаются имеющими диаметр D основаниями, нанесен очень тонкий проводящий слой толщины h с удельной проводимостью σ . К вершинам конусов A и B (рис.4.33) припаяны цилиндрические электроды диаметра d . Определить сопротивление R_{AB} между вершинами, если $h \ll d$.

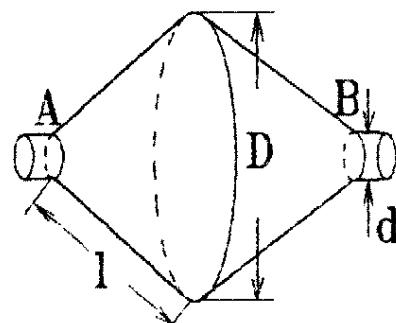


Рис.4.33

$$\text{Ответ: } R_{AB} = 2l \ln(D/d) / \pi \sigma h (D - d) .$$

2-23. Металлический шарик радиуса b находится на расстоянии l от безграничной идеально проводящей плоскости. Пространство вокруг шарика заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ . Считая, что разность потенциалов между шариком и плоскостью равна U и что $b \ll l$, найти плотность тока вблизи проводящей плоскости как функцию расстояния r от шарика. Используя

полученный результат, определить сопротивление среды между шариком и плоскостью. (Указание: для определения поля в среде применить метод изображений).

$$\text{Ответ: } j(r) = 2blU/\rho r^3, \quad R = \rho/4\pi b.$$

2-24. По длинному проводнику круглого сечения с радиусом b проходит ток I . Удельное сопротивление материала, из которого сделан проводник, изменяется с расстоянием r до оси проводника по закону $\rho = \alpha/r^2$, где α – постоянная. Найти сопротивление единицы длины такого проводника и напряженность электрического поля в нем.

$$\text{Ответ: } R_1 = 2\alpha/\pi b^4, \quad E = 2\alpha I/\pi b^4.$$

2-25. Для поддержания постоянной температуры накала вольфрамовой нити пришлось повысить напряжение на $\eta = 2\%$. Считая, что теплоотдача нити в окружающее пространство пропорциональна площади ее поверхности, найти, во сколько раз уменьшился вследствие испарения диаметр нити.

$$\text{Ответ: в 1,04 раза.}$$

2-26. Тонкая проволочка диаметром 0,4 мм в плавком предохранителе плавится при длительном прохождении тока силой не менее 6 А. При каком минимальном токе расплавится проволочка диаметром 0,6 мм из того же материала? Потери тепла в окружающее пространство пропорциональны площади поверхности проволочки.

$$\text{Ответ: 11 А.}$$

2-27. Источник тока присоединен к реостату длины l с общим сопротивлением R . В обоих случаях, когда движок реостата стоит на расстоянии l' от одного или от другого конца реостата (рис.4.34), мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова. Определить внутреннее сопротивление источника тока.

$$\text{Ответ: } r = R\sqrt{l'(l - l')}/l.$$

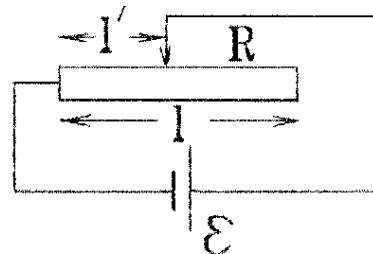


Рис.4.34

2-28. Однородный цилиндрический проводник сделан из материала, удельное сопротивление которого меняется со временем по закону $\rho = \rho_0(t/\tau)^4$, где ρ_0 , τ – постоянные величины. Найти зависимость от времени тока, протекающего через этот проводник, если при про-

пускации постоянного тока I_0 через цилиндрический проводник того же радиуса и длины, но с постоянным удельным сопротивлением ρ_0 , в обоих проводниках за одно и то же время t выделяется одинаковое тепло.

$$\text{Ответ: } I = \sqrt{5}I_0.$$

2-29. От источника с напряжением 100 кВ требуется передать на расстояние 5 км мощность 5 МВт. Допустимая потеря напряжения в проводах 1%. Рассчитать минимальное сечение S медного провода, пригодного для этой цели. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · см.

$$\text{Ответ: } 8,6 \text{ мм}^2.$$

2-30. Каким должно быть сопротивление R_x , чтобы при подключении его в цепь, изображенную на рис.4.35, где U – источник постоянного напряжения, выделяемое на сопротивлении R_x джоулево тепло было бы максимальным? $R_1 = 28 \text{ Ом}$, $R_2 = 36 \text{ Ом}$.

$$\text{Ответ: } 15,8 \text{ Ом}.$$

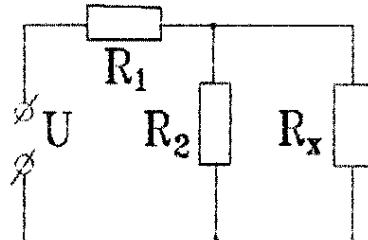


Рис.4.35

2-31. В цепи, изображенной на рис.4.36, ключ K замыкают в начальный момент времени $t_0 = 0$. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника тока, найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе C .

$$\text{Ответ: } U_C = \frac{\mathcal{E}}{2} \left(1 - \exp(-2t/RC) \right).$$

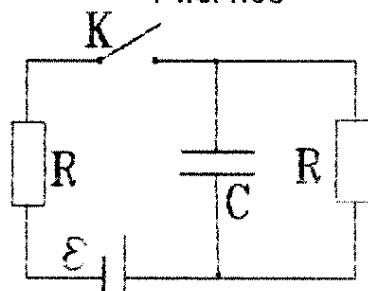


Рис.4.36

2-32. Найти закон изменения температуры тонкой манганиновой проволоки, по которой начал протекать постоянный ток I . Не зависящее от температуры сопротивление проволоки равно R , известны также длина проволоки l , радиус сечения r , плотность d , удельная теплопроводность c . Начальная температура проволоки совпадает с температурой окружающей среды T_0 . Нагретая до температуры T , проволока отдает в окружающее пространство тепловую мощность $P = \alpha(T - T_0)S$, где S – площадь поверхности проволоки, $\alpha = \text{const}$.

$$\text{Ответ: } T = T_0 + \frac{I^2 R}{2\pi arl} \left[1 - \exp \left(-\frac{2\alpha t}{rcd} \right) \right].$$

2-33. В схеме, изображенной на рис.4.37, заданы э.д.с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 с внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 соответственно. Изменяя сопротивление R , можно добиться выделения на нем максимальной тепловой мощности. Найти величину этой мощности.

Ответ : $P_{\max} = (\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1)^2 / 4r_1 r_2(r_1 + r_2)$.

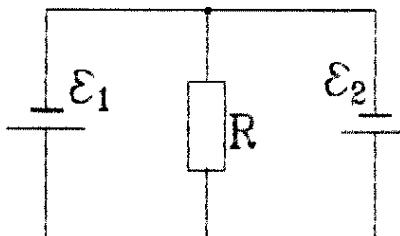


Рис.4.37

2-34. К источнику э.д.с. с внутренним сопротивлением r подключают, как показано на рис.4.38, проволочный куб из проволоки с удельным сопротивлением ρ и сечением S . Какой должна быть длина ребра куба b , чтобы в кубе выделялась максимальная тепловая мощность ? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

Ответ : $b = 4Sr / 3\rho$.

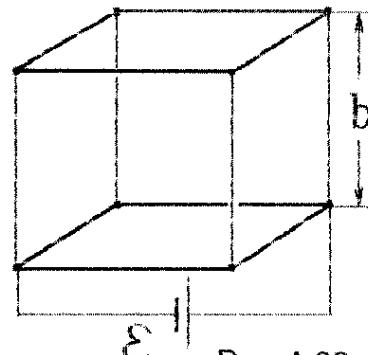


Рис.4.38

2-35. $N = 25000$ одинаковых источников тока с $\mathcal{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждый следует собрать в батарею так, чтобы во внешней цепи с сопротивлением $R = 10$ Ом, подключенной к этой батарее, выделялась максимальная мощность. Определить величину этой максимальной возможной мощности. (Указание: источники тока можно соединять как параллельно, так и последовательно). Какой будет максимальная мощность при $R = 1$ Ом ?

Ответ : $P_{\max} = \mathcal{E}^2 / 4r = 6250$ Вт при $R = 10$ Ом ;

$P_{\max} = 5917$ Вт при $R = 1$ Ом .

2-36. Идеально проводящий заряженный шар радиуса b окружен бесконечной однородной слабо проводящей средой. Найти радиус сферы с центром в центре шара, внутри которой при стекании с шара заряда будет выделяться 80 % джоулева тепла.

Ответ : $r = 5b$.

2-37. Ток идет от медной трубки радиуса $r_1 = 2$ мм к медной трубке радиуса $r_2 = 1$ см по плоской алюминиевой фольге (рис.4.39). Какова толщина фольги, если при равномерном уменьшении силы тока от $I_0 = 2$ А до нуля за время $\tau = 1$ мин в фоль-

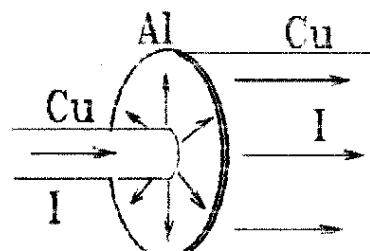


Рис.4.39

где выделилось тепло $Q = 2 \text{ мДж}$? Удельное сопротивление алюминия $\rho = 25 \text{ нОм} \cdot \text{м}$.

$$\text{Ответ: } \delta = \rho I_0^2 \tau \ln(r_2/r_1) / 6\pi Q = 0,477 \text{ мм.}$$

2-38. Источник тока с э.д.с. \mathcal{E} соединительными проводами диаметра d подсоединен к центрам оснований тонкостенной жестяной цилиндрической банки длины b , как показано на рис.4.40. Внутренним сопротивлением источника тока и сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. При некотором соотношении длины и радиуса банки в цепи выделяется максимальная тепловая мощность. Определить величину этой мощности, если толщина жести равна δ , а ее удельное сопротивление равно ρ .

$$\text{Ответ: } P_{max} = \pi \mathcal{E}^2 \delta / \rho [1 + \ln(b/d)].$$

2-39. При напряжении в сети 120 В вода в электрочайнике закипает за 20 мин, а при напряжении 110 В — за 28 мин. За сколько минут закипит вода при напряжении 100 В, если потери тепла пропорциональны времени нагревания?

$$\text{Ответ: за } 44,1 \text{ мин.}$$

2-40. Незаряженный конденсатор емкости C подключен в начальный момент времени последовательно с сопротивлением R к батарее с э.д.с. \mathcal{E} и с внутренним сопротивлением r . Определить величину джоулева тепла, выделившегося за время t на сопротивлении R при зарядке конденсатора.

$$\text{Ответ: } Q = \frac{C \mathcal{E}^2}{2(R+r)} \left[1 - \exp \left(-\frac{2t}{(R+r)C} \right) \right].$$

2-41. Диэлектриком в плоском конденсаторе является пропитанная вазелином бумага с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2,1$ и с удельным сопротивлением $\rho = 2,3 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. За какое время такой конденсатор будет терять половину сообщенного ему заряда из-за утечки заряда через диэлектрик?

$$\text{Ответ: } t = \epsilon \epsilon_0 \rho \ln 2 = 296 \text{ с.}$$

2-42. Сферический конденсатор с радиусами сфер r_1 и r_2 заполнен однородной слабо проводящей средой. Емкость конденсатора при этом

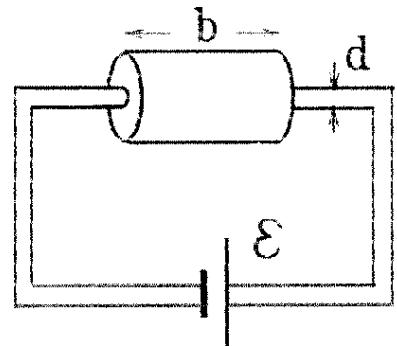


Рис.4.40

равна C , а разность потенциалов на обкладках уменьшается после отключения конденсатора от батареи в η раз за время t . Определить удельное сопротивление среды.

$$\text{Ответ: } \rho = 4\pi r_1 r_2 t / C(r_2 - r_1) \ln \eta .$$

2-43. Две круглые плоские пластины с общей осью и с радиусом r_0 каждая образуют плоский конденсатор. Расстояние между пластинами равно d , причем $d \ll r_0$. Проводимость пластин бесконечна, вследствие чего заряд распределяется по пластинам равномерно. В начальный момент времени заряд на таком конденсаторе был равен q_0 , и в этот же момент центры пластин соединили проводником с таким большим сопротивлением R , что индуктивностью цепи можно пренебречь. Какой ток будет течь через цилиндрическое сечение с радиусом r ($r < r_0$) любой из пластин (рис.4.41)? Центр сечения совпадает с центром пластины.

$$\text{Ответ: } I_r = \frac{q_0(r_0^2 - r^2)d}{\pi \epsilon_0 r_0^4 R} \exp\left(-\frac{td}{\pi \epsilon_0 r_0^2 R}\right) .$$

2-44. К конденсатору емкостью 10 мкФ последовательно через сопротивление 1 кОм подсоединяют батарею с э.д.с., равной 2 В. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, найти, через сколько времени конденсатор зарядится до напряжения 1,97 В?

$$\text{Ответ: через } 0,042 \text{ с.}$$

2-45. Плоский конденсатор с диэлектриком из парафинированной бумаги ($\epsilon = 2$) через 10 мин после прекращения зарядки сохранил 10 % первоначального заряда. Предполагая, что утечка заряда происходит только через парафинированную бумагу, вычислить ее удельное сопротивление.

$$\text{Ответ: } \rho = 1,47 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м.}$$

2-46. Конденсатор емкостью 5 мкФ, заряженный до напряжения 200 В, разряжается через два последовательно соединенных резистора с сопротивлениями $R_1 = 500$ Ом и $R_2 = 300$ Ом. Найти количество тепла, выделяющегося при разрядке в резисторе R_1 .

$$\text{Ответ: } 0,0625 \text{ Дж.}$$

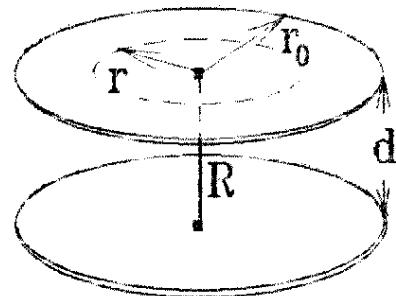


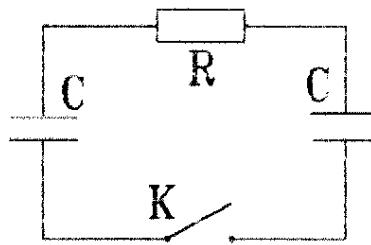
Рис.4.41

2-47. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны a и b , причем $a < b$. Пространство между обкладками заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ и удельным сопротивлением ρ . В момент $t = 0$ внутренней обкладке первоначально незаряженного конденсатора сообщили заряд q_0 . Найти зависимость от времени тока, протекающего между обкладками конденсатора, а также количество тепла, выделившееся в веществе к моменту прекращения этого тока.

$$\text{Ответ: } I = \frac{q_0}{\epsilon \epsilon_0 \rho} \exp\left(-\frac{t}{\epsilon \epsilon_0 \rho}\right); \quad Q = \frac{q_0^2(b-a)}{8\pi \epsilon \epsilon_0 a b}.$$

2-48. В схеме, показанной на рис.4.42, один из конденсаторов зарядили до напряжения U_0 и в момент $t = 0$ замкнули ключ К. Найти зависимость тока I в цепи от времени t . Используя эту зависимость, определить количество выделившегося на сопротивлении R тепла.

$$\text{Ответ: } I = U_0 \exp(-2t/RC)/R; \quad Q = CU_0^2/4. \quad \text{Рис.4.42}$$



2-49. По прямому медному проводу длиной 1 км и сечением 1 мм^2 течет ток 4,5 А. Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, найти время, за которое электрон переместится из одного конца провода в другой.

$$\text{Ответ: } \approx 2,98 \text{ Mc}.$$

2-50. Металлический диск диаметра $d = 5$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. Найти разность потенциалов между ободом и центром такого диска.

$$\text{Ответ: } 7,11 \cdot 10^{-13} \text{ В}.$$

2-51. Напряжение между анодом и катодом вакуумного диода $U = 100$ В, анодный ток $I = 50 \text{ mA}$, площадь анода $S = 8 \text{ мм}^2$. Считая, что плотность анодного тока практически одинакова в любой точке анода, вычислить среднее давление электронного пучка на анод.

$$\text{Ответ: } \langle p \rangle = \sqrt{2mI^2U/cS^2} = 0,211 \text{ Па},$$

где m , e – масса и заряд электрона.

2-52. Две большие параллельные пластины находятся в вакууме. Одна из пластин служит катодом, испускающим электроны практически с нулевой начальной скоростью. Поток электронов, движущийся к другой пластине (аноду), создает в пространстве объемный заряд, вследствие чего потенциал в зазоре между пластинами меняется по закону $\varphi = kx^{4/3}$, где k – положительная постоянная, x – расстояние от катода. Найти плотность тока в пространстве между пластинами. (Указание: найти выражение плотности пространственного заряда и использовать его для определения тока вблизи анода).

$$\text{Ответ: } j = 4\epsilon_0 k \sqrt{\frac{2ck}{81m_e}} , \text{ где } m_e , e \text{ – масса и заряд электрона.}$$

2-53. Из ускорителя выводится однородный цилиндрический пучок протонов с энергией $W = 4 \text{ МэВ}$, который проходит в вакууме расстояние $l = 4 \text{ м}$, прежде чем попасть на мишень. Из-за кулоновского взаимодействия протонов друг с другом поперечные размеры пучка увеличиваются. Оценить максимальную плотность тока j_{max} в пучке, если допускается увеличение радиуса пучка не более чем на $\eta = 1\%$. Начальными поперечными скоростями протонов и создаваемым при их движении магнитным полем пренебречь.

$$\text{Ответ: } j_{max} = \frac{4\epsilon_0 \eta}{l^2 c} \sqrt{\frac{8W^3}{m}} = 4,9 \text{ А/м}^2 , \text{ где } m \text{ – масса протона.}$$

2-54. Из электронной пушки вырывается однородный пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 10 \text{ кВ}$. Пучок имеет цилиндрическую форму с поперечным сечением $S = 10 \text{ мм}^2$ и образует ток $I = 1000 \text{ А}$. Найти период поперечных колебаний протона, попавшего внутрь пучка.

$$\text{Ответ: } T = \sqrt{\frac{8\pi^2 \epsilon_0 m_p S}{I}} \sqrt{\frac{2U}{em_c}} = 2,08 \cdot 10^{-9} \text{ с,}$$

где m_e , e – масса и заряд электрона, m_p – масса протона.

2-55. Конденсатор емкостью C начинает заряжаться от батареи с постоянной э.д.с. \mathcal{E} через нелинейное сопротивление, ток в котором связан с напряжением на сопротивлении соотношением $I = \beta \sqrt[3]{U}$, где $\beta = \text{const.}$ Найти зависимость тока в цепи от времени, если батарея подключена в момент времени $t = 0$.

$$\text{Ответ: } I = \sqrt{\beta^2 \mathcal{E}^{2/3} - 2\beta^3 t / 3C} .$$

2-56. Центр тонкой проводящей заземленной сферы с очень малым радиусом r находится на расстоянии a от точечного заряда q_1 и на расстоянии b от точечного заряда q_2 , как показано на рис.4.43. Заряды q_1 и q_2 закреплены. Радиус сферы начинает в момент времени $t = 0$ расти с постоянной скоростью v . Найти зависимость тока, текущего по заземляющему сферу проводу, от времени.

$$\text{Ответ: } I = -(q_1/a + q_2/b) \cdot v \quad \text{при } 0 < t < a/v ;$$

$$I = -q_2 v / b \quad \text{при } a/v < t < b/v ;$$

$$I = 0 \quad \text{при } t > b/v .$$

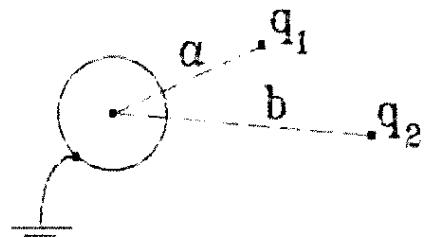


Рис.4.43

3 Задачи на законы магнитного поля

3-1. Найти индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током $I = 8$ А изогнут так, как показано на рис.4.44. Радиус изогнутой части проводника $R = 10$ см, а его прямолинейные участки очень длинные.

$$\text{Ответ: } B = 3,94 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

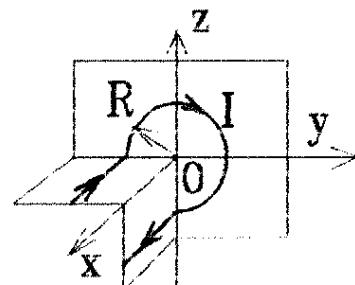


Рис.4.44

3-2. Все проводники разветвленной цепи, показанной на рис.4.45, прямолинейны, бесконечны и лежат в одной плоскости. Определить величину и направление вектора напряженности магнитного поля в точке, лежащей на перпендикулярной к плоскости токов линии, проходящей через точку разветвления A , на расстоянии $l = 2$ см от плоскости токов. Ток $I = 0,3$ А; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$.

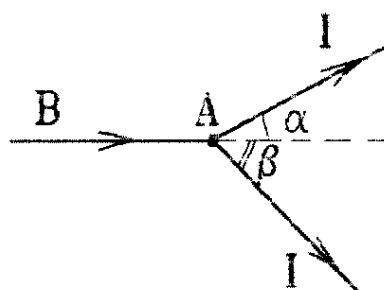


Рис.4.45

$$\text{Ответ: } H = 4,27 \text{ А/м} ; \text{ вектор } H \text{ образует угол}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \beta - \sin \alpha}{2 + \cos \beta + \cos \alpha} \right) = 3^\circ 19' \text{ с плоскостью,}\newline \text{перпендикулярной к проводнику BA .}$$

3-3. Два бесконечно длинных параллельных проводника А и С с токами расположены перпендикулярно плоскости рисунка. При этом $OA = OC = b = 0,2 \text{ м}$, а индукция в точке О равна нулю. Справа от точки О вектор индукции магнитного поля на оси Ox направлен вверх параллельно отрезку АС, как показано на рис.4.16. Определить величину тока, текущего по проводнику С, если максимальное значение индукции на оси Ox $B_{max} = 10^{-6} \text{ Тл}$.

$$\text{Ответ : } I = 2\pi b B_{max} / \mu_0 = 1 \text{ А.}$$

3-4. По двум бесконечным плоским проводящим лентам, расположенным в одной плоскости, текут токи с одинаковыми однородными поверхностными плотностями $j = 1 \text{ А/м}$. Размеры лент и расстояние между ними указаны на рис.4.47. Определить координату x точки между лентами на оси Ox , в которой индукция магнитного поля, создаваемого этими токами, минимальна. Найти это минимальное значение B_{min} .

$$\text{Ответ : } B_{min} = 3,21 \cdot 10^{-7} \text{ Тл.}$$

3-5. Через центр железного кольца, изображенного на рис.4.48, перпендикулярно его плоскости проходит длинный прямолинейный провод, по которому течет ток $I = 25 \text{ А}$. Кольцо имеет прямоугольное сечение S с размерами $r = 18 \text{ мм}$, $R = 22 \text{ мм}$, $h = 5 \text{ мм}$. Магнитную проницаемость железа считать постоянной : $\mu = 200$. Найти магнитный поток, пронизывающий площадь сечения кольца.

$$\text{Ответ : } \Phi = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

3-6. Определить величину напряженности магнитного поля в центре равностороннего треугольника со стороной $0,6 \text{ м}$, обтекаемого током 250 мА .

$$\text{Ответ : } H = 0,597 \text{ А/м.}$$

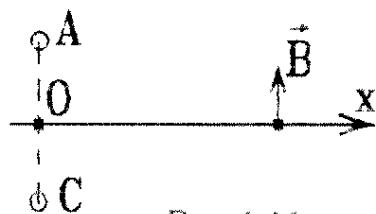


Рис.4.46

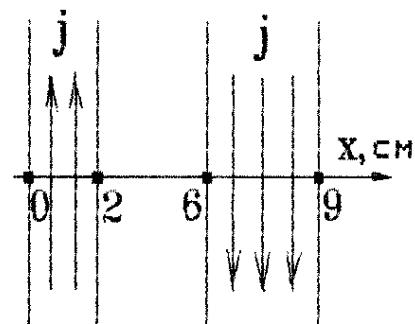


Рис.4.47

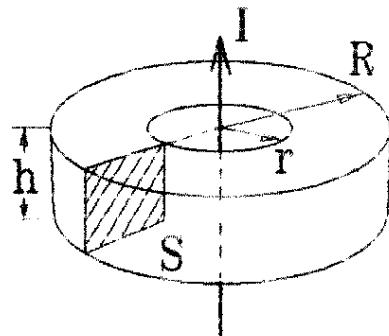


Рис.4.48

3-7. Найти индукцию магнитного поля в точке О контура с током $I = 2 \text{ А}$, который показан на рис.4.49 (размеры контура $r = 12 \text{ см}$ и $b = 20 \text{ см}$).

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{3}{2r} + \frac{\sqrt{2}}{\pi b} \right) = 9,27 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

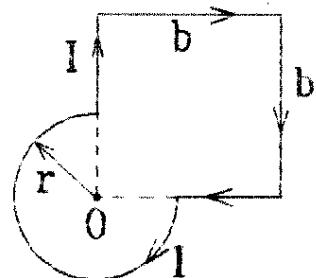


Рис.4.49

3-8. Ток $I = 6 \text{ А}$ течет в контуре, имеющем форму равнобедренной трапеции, как показано на рис.4.50. Отношение оснований трапеции равно двум. Найти индукцию магнитного поля в точке О, лежащей в плоскости трапеции на расстоянии $b = 3 \text{ см}$ от меньшего основания трапеции длиной $d = 8 \text{ см}$.

$$\text{Ответ: } B = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

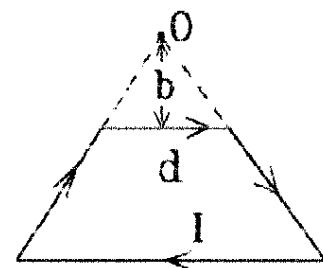


Рис.4.50

3-9. Непроводящий тонкий диск радиуса $R = 5 \text{ см}$, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью $\sigma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл/м}^2$, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 15 \text{ рад/с}$. Найти индукцию магнитного поля в центре диска.

$$\text{Ответ: } B = \mu_0 \sigma \omega R / 2 = 9,43 \cdot 10^{-10} \text{ Тл.}$$

3-10. Найти индукцию магнитного поля в центре проводящего контура, имеющего вид прямоугольника с диагональю $d = 16 \text{ см}$ и с углом между диагоналями $\varphi = 30^\circ$, если по контуру течет ток $I = 5 \text{ А}$.

$$\text{Ответ: } B = 10^{-4} \text{ Тл.}$$

3-11. Найти напряженность магнитного поля H в центре плоского замкнутого контура, изображенного на рис.4.51, по которому течет ток $I = 0,2 \text{ А}$. Контур состоит из двух дуг радиуса $R = 60 \text{ см}$ и двух параллельных прямых, находящихся на расстоянии $2b = 40 \text{ см}$ друг от друга.

$$\text{Ответ: } H = \frac{I}{\pi R} \left(\sqrt{(R/b)^2 - 1} + \arcsin(b/R) \right) = 0,336 \text{ А/м.}$$

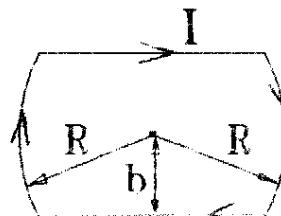


Рис.4.51

3-12. Однослойная катушка соленоид имеет длину $l = 10 \text{ см}$ и радиус сечения $R = 1 \text{ см}$. Число витков на единицу длины $n = 12000 \text{ м}^{-1}$. Найти индукцию магнитного поля в центре катушки при пропускании через нее тока $I = 80 \text{ мА}$.

$$\text{Ответ : } B = \mu_0 I n / \sqrt{1 + 4R^2/l^2} = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

3-13. На цилиндрический барабан из немагнитного материала намотаны четыре витка провода под углом $\alpha = 45^\circ$ один к другому, как показано на рис.4.52. Каждый виток представляет собой прямоугольную рамку со сторонами $h = 10$ см (высота барабана) и $d = 20$ см (диаметр основания). Обмотка начинается в центре С одного из оснований барабана. По проволоке течет ток $I = 0,4$ А. Найти величину и направление напряженности магнитного поля H в средней точке на оси цилиндра.

$$\text{Ответ : } H = \frac{4I\sqrt{h^2 + d^2}}{\pi h d} \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} \right) = 7,44 \text{ А/м}.$$

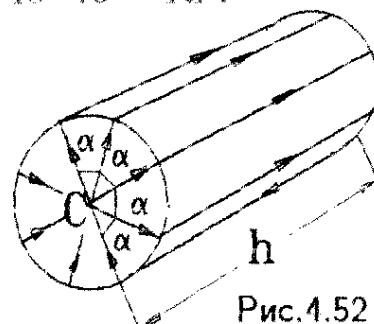


Рис.4.52

3-14. Деревянный шар радиуса $R = 40$ см обмотан тонкой проволокой так, что все витки параллельны между собой, плотно уложены и покрывают половину шара в один слой, как показано на рис.4.53. По проволоке течет ток силой $I = 40$ мА. Найти напряженность магнитного поля H в центре шара О, если общее число витков $N = 2400$.

$$\text{Ответ : } H \approx IN/4R = 60 \text{ А/м}.$$

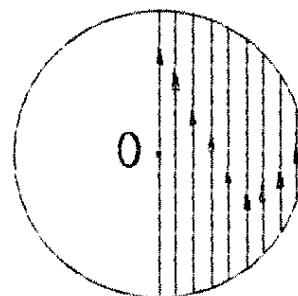


Рис.4.53

3-15. По прямому соленоиду длины $l = 10$ см, имеющему $N = 400$ витков радиуса $R = 10$ см, течет ток $I = 1$ А. Вычислить величину индукции магнитного поля на оси такого соленоида и найти среднее значение индукции магнитного поля внутри соленоида на его оси.

$$\text{Ответ : } \langle B \rangle = \mu_0 I N \left[\sqrt{1/l^2 + R^2/l^4} - R/l^2 \right] = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

3-16. Ток I течет с однородной плотностью по срезанному в виде половины цилиндра длинному проводнику радиуса R (рис.4.54). Чему равна напряженность магнитного поля на оси проводника, если магнитная проницаемость его материала $\mu = 1$?

$$\text{Ответ : } H_0 = 2I/\pi^2 R.$$

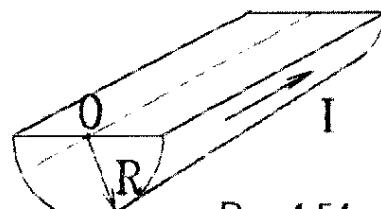


Рис.4.54

3-17. Очень длинный тонкий магнит с сечением S и с магнитным моментом единицы длины p_{m1} расположен вдоль оси кругового тока I , как показано на рис.4.55. Край магнита расположен на расстоянии d от центра проводника с током. При каком радиусе R проводника сила его притяжения к магниту будет максимальной ? Чему равна величина этой силы ?

Ответ : $R = \sqrt{2}d$; $F_{max} = \sqrt{2}\mu_0 I S p_{m1} / 3\sqrt{3}R$.

3-18. Шар радиуса R из диэлектрика с магнитной проницаемостью $\mu = 1$ равномерно заряжен по всему объему с плотностью заряда ρ и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти индукцию магнитного поля в центре шара.

Ответ : $B = 4\mu_0 \omega \rho R^2 / 3$.

3-19. Тороидальный сердечник, изображенный на рис.4.56, сделан из двух половинок, изготовленных из различных материалов с магнитными проницаемостями $\mu_1 = 200$ и $\mu_2 = 100$. Общая длина сердечника, включая два зазора размером $d = 5$ мм каждый, равна 60 см. По обмотке сердечника, имеющей 6000 витков, течет ток 1 А. Найти индукцию B магнитного поля в зазоре.

Ответ : $B = 0,523$ Тл.

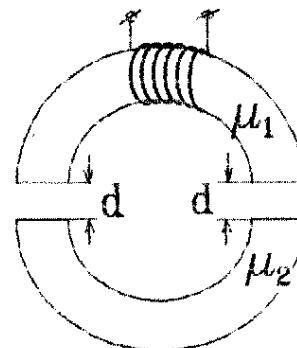


Рис.4.56

3-20. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита, намотанной на тонком тороидальном сердечнике длины l с магнитной проницаемостью μ , возбужден ток I_0 . При этом в сердечнике имеется небольшой зазор ширины l_0 , такой, что рассеянием магнитного потока в зазоре можно пренебречь. Во сколько раз изменится ток в обмотке, если путем деформации сердечника зазор уменьшить в два раза ?

Ответ : в $\frac{2l + (\mu - 1)l_0}{2l + 2(\mu - 1)l_0}$ раз.

3-21. Ток I течет вдоль длиной тонкостенной трубы радиуса R , имеющей по всей длине продольную прорезь ширины h . Плотность тока однородна. Найти индукцию магнитного поля внутри трубы при условии $h \ll R$.

Ответ : $B \approx \mu_0 I h / 4\pi^2 R r$, где r – расстояние от прорези .

3-22. Очень длинный непроводящий цилиндр, по боковой поверхности которого равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0,05 \text{ Кл/м}^2$, скатывается с нулевой начальной скоростью без проскальзывания по наклонной плоскости с высоты $h = 1 \text{ м}$. Чему равна напряженность магнитного поля внутри цилиндра после того, как он скатится на горизонтальную поверхность (рис.4.57) ?

$$\text{Ответ : } H = 2\sigma\sqrt{gh/3} = 0,181 \text{ А/м}.$$

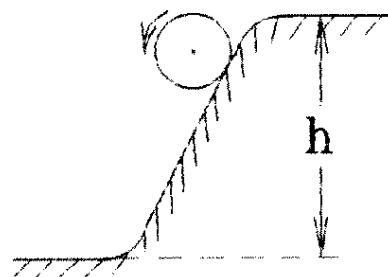


Рис.4.57

3-23. В вакууме создан стационарный, аксиально-симметричный, ограниченный цилиндрической поверхностью радиуса R поток электронов, ускоренных разностью потенциалов U . Индукция магнитного поля такого электронного пучка изменяется с расстоянием r от оси пучка по закону $B = B_0(r/R)^k$ при $r \leq R$ (здесь B_0 и k – положительные постоянные). Найти распределение концентрации электронов в пучке, если известны масса m_e и заряд e электрона.

$$\text{Ответ : } n(r) = \frac{(k+1)B_0}{\mu_0 e R} \sqrt{\frac{m_e}{2eU}} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1}.$$

3-24. Однородный ток плотности j течет внутри неограниченной пластины толщиной 1 м параллельно ее поверхности. Считая магнитную проницаемость всюду равной единице, определить величину энергии магнитного поля, созданного током в кубическом участке пластины с ребром 1 м.

$$\text{Ответ : } w = \mu_0 j^2 / 24 \text{ Дж/м}^3.$$

3-25. Ток I течет по тонкому прямому проводу и далее растекается равномерно во всем направлениях в однородной проводящей среде с магнитной проницаемостью $\mu = 1$, занимающей полупространство. Провод с током перпендикулярен к поверхности среды (рис.4.58). Найти индукцию магнитного поля в точке C , находящейся на расстоянии b от провода, и в точке A , удаленной от точки O пересечения провода с поверхностью среды на расстояние b под углом θ . (Указание: используя форму линий индукции, применить те-

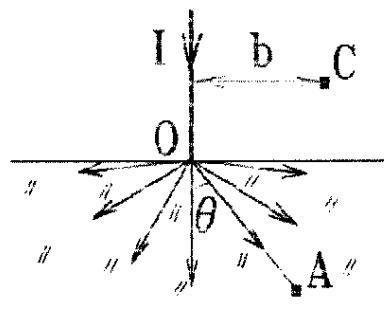


Рис.4.58

орему о циркуляции).

$$\text{Ответ: } B_C = \mu_0 I / 2\pi b; \quad B_A = \mu_0 I \operatorname{tg}(\theta/2) / 2\pi b.$$

3-26. Для исключения джоулевых потерь энергии в линиях передачи постоянного тока предложено использовать коаксиальный кабель, внутренняя жила и наружная оболочка которого изготовлены из сверхпроводника. Максимально допустимая индукция на поверхности сверхпроводника $B_{max} = 0,05$ Тл, максимально допустимая напряженность электрического поля в изолирующей прослойке кабеля $E_{max} = 3 \cdot 10^6$ В/м. При каком соотношении диаметров d/D жилы и оболочки можно передать максимальную мощность P_{max} ? Найти эту мощность, приняв диаметр наружной оболочки $D = 20$ см.

$$\text{Ответ: } d/D = 1/\sqrt{e} = 0,607;$$

$$P_{max} = \pi D^2 E_{max} B_{max} / 4\mu_0 e = 1,38 \cdot 10^9 \text{ Вт}.$$

3-27. Плоскость замкнутого контура, изображенного на рис.4.59, перпендикулярна прямому бесконечному проводнику с током I_0 . Найти момент сил Ампера, действующий на контур, по которому течет ток I . Размеры контура указаны на рисунке.

$$\text{Ответ: } M = \mu_0 II_0(b - a)/\pi.$$

3-28. Под длинной горизонтальной шиной на двух одинаковых пружинах с коэффициентом жесткости $k = 10^{-4}$ Н/м подведен прямой провод длины $l = 50$ см (рис.4.60). Когда по шине и проводу токи не текут, расстояние между ними $h = 20$ см. Найти установившееся расстояние h' между ними, если по шине течет ток силой 3 А, а по проводу — ток силой 2 А в противоположном направлении. Провод может двигаться только в вертикальной плоскости.

$$\text{Ответ: } h' = 21,4 \text{ см}.$$

3-29. Катушка, по которой течет ток $I = 1A$, помещена во внешнее однородное магнитное поле так, что ее ось совпадает с направлением поля. Обмотка катушки выполнена из медной проволоки диаметра $d = 1$ мм, радиус витков $r = 10$ см. При каком предельном значении магнитной индукции B внешнего поля обмотка катушки будет разо-

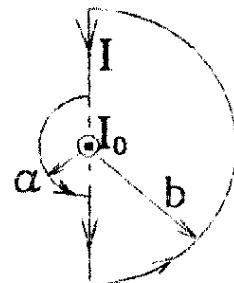


Рис.4.59

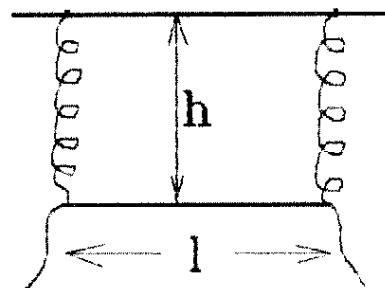


Рис.4.60

рвана? Прочность меди на разрыв $\sigma_p = 2,3 \cdot 10^8$ Па.

$$\text{Ответ: } B = \pi \sigma_p d^2 / 4Ir = 1,81 \text{ кТл} .$$

3-30. В одной плоскости лежат параллельные бесконечно длинные тонкий провод и проводящая полоса ширины h . По ним в одну сторону текут одинаковые токи I (плотность тока в полосе однородна). Первоначально провод находился на расстоянии h от края полосы. Какую работу на единицу длины провода надо совершить, чтобы отодвинуть его на расстояние $2h$ от края полосы?

$$\text{Ответ: } A_1 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \left(\frac{27}{16} \right) .$$

3-31. Постоянный ток I течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса R . Такой же ток течет в противоположном направлении по тонкому проводнику, расположенному вдоль оси первого проводника. Найти силу магнитного взаимодействия данных проводников в расчете на единицу их длины.

$$\text{Ответ: } F_1 = \mu_0 I^2 / \pi^2 R .$$

3-32. Замкнутый проводящий контур с током I образует часть окружности с радиусом R и хорду с углом $2\varphi = \pi/2$. Через центр окружности перпендикулярно плоскости контура проходит бесконечный прямой проводник с таким же током I . Найти величину действующего на замкнутый контур момента силы Ампера относительно центра хорды О (рис.4.61).

$$\text{Ответ: } M_O = \mu_0 I^2 R (4 - \pi) / 4\sqrt{2}\pi .$$

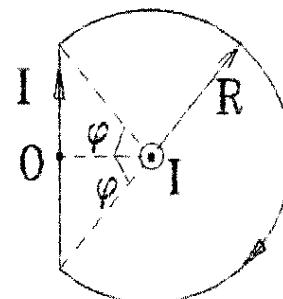


Рис.4.61

3-33. Какое давление испытывает боковая поверхность длинного прямого соленоида, имеющего $n = 5000$ витков на единицу длины, когда по нему протекает ток $I = 80$ мА?

$$\text{Ответ: } p = \mu_0 I^2 n^2 / 2 = 0,101 \text{ Па} .$$

3-34. Вдоль длинного цилиндрического плазменного шнура радиуса $r = 5$ см течет ток I , сосредоточенный в поверхностном слое. Давление в плазме $p = 100$ кПа. При каком токе I плазменный шнур будет находиться в равновесии (т.е. вызванное током I магнитное давление на его боковую поверхность уравновесит давление p)?

$$\text{Ответ: } I = 2\pi r \sqrt{2p/\mu_0} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ А} .$$

3-35. Внутри достаточно длинного отрезка медной трубы радиуса $r_1 = 1$ см создано магнитное поле с индукцией $B_1 = 5$ Тл. При взрывном сжатии этого отрезка (рис.4.62) в стенках трубы возникают токи, обеспечивающие сохранение магнитного потока. Конечный радиус трубы после сжатия $r_2 = 1$ мм. Какое давление p действует при взрыве на стенки трубы (в конце сжатия это давление уравновешивается давлением магнитного поля) ?

$$\text{Ответ : } p = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \approx 10^6 \text{ атм.}$$

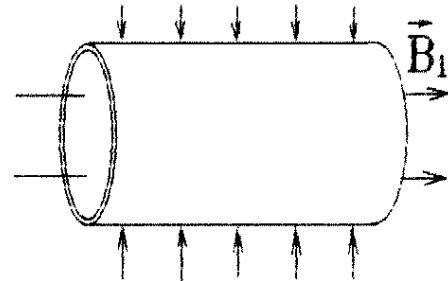


Рис.4.62

3-36. Вдоль оси цилиндрического жидкого проводника радиуса b течет однородный ток I . Найти зависимость давления p , обусловленного взаимодействием тока с созданным им магнитным полем, от расстояния r до оси проводника.

$$\text{Ответ : } p(r) = \mu_0 I^2 (b^2 - r^2) / 4\pi^2 b^4 .$$

3-37. Ток I течет по длинному однослойному соленоиду, радиус сечения которого равен R . Число витков на единицу длины соленоида равно n . Найти предельную силу тока, при которой может наступить разрыв обмотки, если предельная нагрузка на разрыв проволоки обмотки равна $F_{\text{пр}}$.

$$\text{Ответ : } I_{\text{пр}} = \sqrt{2F_{\text{пр}} / \mu_0 R n} .$$

3-38. Вычислить магнитный момент тонкого проводника с током $I = 0,8$ А, плотно навитого на половину тора в один слой, как показано на рис.4.63. Диаметр сечения тора $d = 5$ см, число витков $N = 500$.

$$\text{Ответ : } p_m = INd^2 / 2 = 0,5 \text{ А} \cdot \text{м}^2 .$$

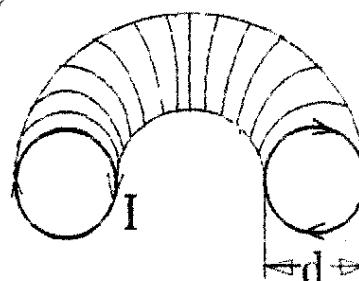


Рис.4.63

3-39. Две небольшие короткие одинаковые катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой. Расстояние между катушками $b = 2$ м значительно превышает их линейные размеры (рис.4.64). Число витков каждой катушки $N = 100$, радиус витков $r = 1$ см. С какой силой взаимодействуют катушки, когда по ним текут

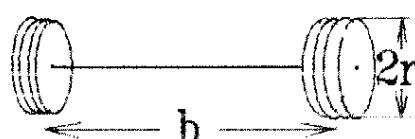


Рис.4.64

одинаковые токи $I = 0,1 \text{ A}$?

$$\text{Ответ: } F \approx 3\pi\mu_0 N^2 I^2 r^4 / 2b^4 = 3,7 \cdot 10^{-13} \text{ Н.}$$

3-40. Два круговых витка с радиусами R_1 и R_2 и с токами I_1 и I_2 соответственно (рис.4.65) имеют общую ось и расположены на очень большом расстоянии d друг от друга, так что $R_2 \ll d$. При некотором расстоянии d величина магнитной силы, отталкивающей правый виток от левого, максимальна. Найти эту силу F_{max} .

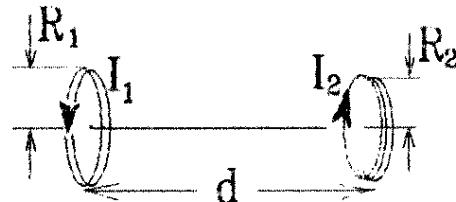


Рис.4.65

$$\text{Ответ: } F_{max} = 24\pi\mu_0 I_1 I_2 R_2^2 / 25\sqrt{5} R_1^2.$$

3-41. Заряд $q = 2 \text{ мКл}$ равномерно распределен по объему однородного шара радиуса $R = 5 \text{ см}$, который вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\omega = 100 \text{ рад/с}$. Найти магнитный момент такого шара.

$$\text{Ответ: } p_m = q\omega R^2 / 5 = 10^{-4} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

3-42. Два одинаковых непроводящих тонких диска с радиусами r вращаются в одну сторону вокруг общей оси с одной и той же угловой скоростью ω . Определить величину магнитной силы, притягивающей диски, если расстояние между ними равно h , причем $h \gg r$, а диски заряжены равномерно с одинаковой поверхностной плотностью σ .

$$\text{Ответ: } F = 3\pi\mu_0\sigma^2\omega^2r^8 / 32h^4.$$

3-43. Длинный диэлектрический цилиндр радиуса R статически поляризован так, что во всех его точках поляризованность $P = \alpha r$, где α – положительная постоянная, r – расстояние от оси. Цилиндр привели во вращение вокруг его оси с угловой скоростью ω . Найти индукцию магнитного поля на оси цилиндра.

$$\text{Ответ: } B = \mu_0\alpha\omega R^2 / 2.$$

3-44. Оси двух катушек с магнитными моментами $p_{m1} = 4 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$ и $p_{m2} = 6 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$ лежат на одной прямой. Найти величину силы взаимодействия этих катушек, если расстояние $l = 20 \text{ см}$ между ними значительно превышает их линейные размеры.

$$\text{Ответ: } F = 3\mu_0 p_{m1} p_{m2} / 2\pi l^4 = 9 \text{ нН}.$$

3-45. Очень длинный ферромагнитный сердечник сечения S с магнитной проницаемостью μ разрезан на две половины. На левую по-

ловину равномерно с плотностью витков на единицу длины n навита обмотка, по которой течет ток I . Силу какой минимальной величины надо приложить к правой половине сердечника, чтобы отделить ее от левой половины?

$$\text{Ответ: } F = \mu_0 \mu (\mu - 1) n^2 I^2 S / 8.$$

3-46. Две плоские параллельные пластины с общей осью и с радиусом r_2 каждая находится на расстоянии d друг от друга и имеют заряды $+q$ и $-q$. В начальный момент времени центры пластин соединяют проводником с таким большим сопротивлением R , что индуктивностью системы и сопротивлением пластин можно пренебречь. Найти величину энергии магнитного поля в цилиндрическом слое с радиусами $r_1 \leq r \leq r_2$ между пластинами (рис.4.66) в момент времени t , если $d \ll r_1$.

$$\text{Ответ: } W = \frac{\mu_0 \ln(r_2/r_1)}{4\pi^3} \cdot \left(\frac{qd}{\epsilon_0 r_2^2 R} \right)^2 \exp \left(-\frac{2td}{\pi \epsilon_0 r_2^2 R} \right).$$

3-47. На оси соленоида с током I , имеющего n витков на единицу длины, диаметр витков D и длину b , расположен крохотный магнит с магнитным моментом p_m . Расстояние от магнита до края соленоида также равно b (рис.4.67). Вывести формулу распределения индукции магнитного поля, созданного током на оси соленоида. Используя эту формулу, найти величину силы взаимодействия между соленоидом и магнитом в случае, когда $b = D$.

$$\text{Ответ: } F = \left(\frac{1}{5^{3/2}} - \frac{1}{17^{3/2}} \right) \frac{\mu_0 n I p_m}{D}.$$

3-48. Вдоль плазменного шнура радиуса R течет постоянный ток I . Удельная проводимость шнура убывает с расстоянием r от его оси по закону $\sigma = \sigma_0 (1 - r^2/R^2)$, где σ_0 – постоянная. Найти максимальное значение индукции магнитного поля, создаваемого таким током. На каком расстоянии r_0 от оси шнура наблюдается это значение индукции?

$$\text{Ответ: } r_0 = \sqrt{2/3} R; B_{max} = \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 I}{\pi R}.$$

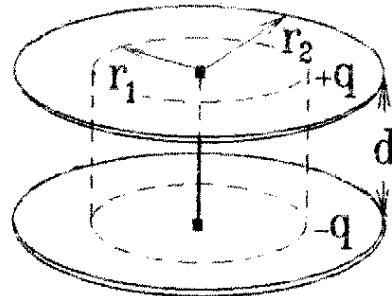


Рис.4.66

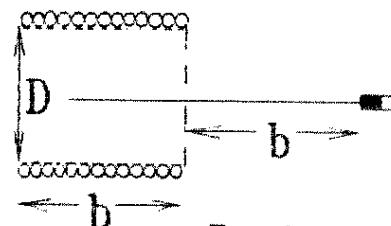


Рис.4.67

3-49. На рис.4.68 показан кольцевой соленоид прямоугольного сечения. Найти магнитный поток через это сечение, если ток в обмотке $I = 1,7 \text{ A}$, полное число витков $N = 1000$, внешний диаметр в $k = 1,6$ раз больше внутреннего, а толщина сердечника из немагнитного материала $h = 5 \text{ см}$.

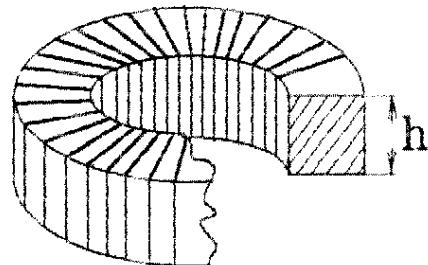


Рис.4.68

$$\text{Ответ : } \Phi = \mu_0 I N h \ln k / 2\pi = 7,99 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

3-50. Магнитный момент стрелки компаса $p_m = 0,3 \text{ A} \cdot \text{м}^2$, ее масса $m = 5 \text{ г}$, длина $l = 2 \text{ см}$. Горизонтальная составляющая напряженности магнитного поля Земли $H_F = 18 \text{ А/м}$. Рассматривая магнитную стрелку как тонкий стержень, определить период ее колебаний в магнитном поле Земли.

$$\text{Ответ : } T = 0,985 \text{ с.}$$

3-51. Небольшая тонкая магнитная стрелка массы $m = 10 \text{ г}$, длины $l = 2 \text{ см}$, с магнитным моментом $p_m = 0,4 \text{ A} \cdot \text{м}^2$ подвешена за центр масс в горизонтальном положении над бесконечным плоским медным листом, по поверхности которого течет однородный ток с поверхностной плотностью $i = 2 \text{ А/м}$. Стрелка может свободно вращаться вокруг вертикальной нити подвеса. Пренебрегая влиянием магнитного поля Земли, найти период малых собственных колебаний стрелки.

$$\text{Ответ : } T = \pi l \sqrt{2m / 3\mu_0 i p_m} = 5,12 \text{ с.}$$

3-52. Горизонтально расположенная магнитная стрелка с магнитным моментом p_m подвешена на вертикальной нити с очень большим модулем кручения G над горизонтальной проводящей плоскостью. На какой угол повернется стрелка, если по плоскости в направлении начального равновесного положения стрелки потечет ток с однородной поверхностной плотностью i ?

$$\text{Ответ : } \varphi = \mu_0 i p_m / 2G.$$

3-53. Небольшая магнитная стрелка помещена внутрь соленоида с током и может совершать малые незатухающие колебания вокруг вертикальной оси. Ось соленоида расположена в горизонтальной плоскости. В зависимости от ориентации соленоида период колебаний стрелки изменяется от максимального значения $T_1 = 1,33 \text{ с}$ до минимального значения $T_2 = 0,16 \text{ с}$. Найти индукцию магнитного поля B , создан-

ного током в соленоиде, если горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_3 = 2,26 \cdot 10^{-5}$ Тл.

$$\text{Ответ: } B = B_3 \frac{1 \pm (T_2/T_1)^2}{1 \mp (T_2/T_1)^2} = 2,20 \cdot 10^{-5} \text{ Тл или } 2,33 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

3-54. Тонкая квадратная рамка массы $m = 10$ г может свободно вращаться вокруг закрепленной оси OO' , проходящей через ее середину (рис.4.69). Найти период малых колебаний рамки относительно положения равновесия, если рамка находится в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл, линии которого ортогональны оси OO' , а по рамке течет ток $I = 1$ А.

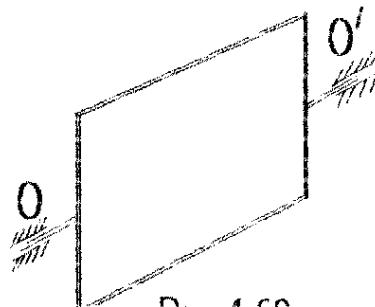


Рис.4.69

$$\text{Ответ: } T = \pi \sqrt{2m/3IB} = 2,57 \text{ с.}$$

3-55. В центре длинного соленоида, изображенного на рис.4.70 и имеющего $n = 5000$ витков на метр длины, помещена укрепленная на конце коромысла весов небольшая катушка с числом витков $N = 200$. Ось катушки перпендикулярна к оси соленоида. Диаметр витков катушки 1 см. Плечо коромысла имеет длину $l = 30$ см. Катушка уравновешена грузом, установленным на чашке весов. При пропускании по соленоиду и катушке тока равновесие коромысла нарушается. На какую величину Δm надо изменить массу груза, помещенную на чашке, чтобы восстановилось равновесие в том случае, когда через соленоид и катушку течет одинаковый ток $I = 20$ мА ?

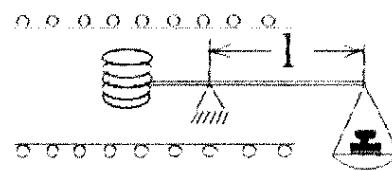


Рис.4.70

$$\text{Ответ: } \Delta m = 1,34 \cdot 10^{-10} \text{ кг.}$$

3-56. Два одинаковых достаточно тонких магнита расположены на одной прямой на расстоянии $b = 50$ см друг от друга. Магнитный момент каждого из них $p_m = 0,02 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, длина $i = 5$ см. Магниты укреплены на параллельных осях, проходящих через их центры перпендикулярно указанной выше прямой, имеют относительно этих осей одинаковые моменты инерции $I = 3 \cdot 10^{-10} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ и способны вращаться вокруг них без трения. Магниты отклоняют в разные стороны на одинаковый малый угол φ и отпускают. Определить период малых колебаний системы относительно положения равновесия.

$$\text{Ответ: } T \approx \frac{2\pi b}{pm} \sqrt{\frac{\pi Ib}{\mu_0}} = 3,04 \text{ с.}$$

3-57. Квадратная рамка с током $I = 0,9 \text{ А}$ расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток $I_0 = 5 \text{ А}$. Сторона рамки $d = 8 \text{ см}$. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии $b = 12 \text{ см}$. Найти механическую работу, которую надо совершить для поворота рамки вокруг ее оси на 180° , если токи поддерживают неизменными.

$$\text{Ответ: } A = \frac{\mu_0 I I_0 d}{\pi} \ln \left(\frac{b + d/2}{b - d/2} \right) = 9,98 \cdot 10^{-8} \text{ Дж.}$$

3-58. Квадратная рамка со стороной d , по которой течет ток I_2 , и бесконечный прямой провод с током I_1 расположены в одной плоскости на расстоянии b друг от друга (рис.4.71). Какую работу надо совершить, чтобы отодвинуть рамку в этой плоскости вправо еще на расстояние b ?

$$\text{Ответ: } A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 d}{2\pi} \ln \left(\frac{2b + d}{2b + 2d} \right).$$

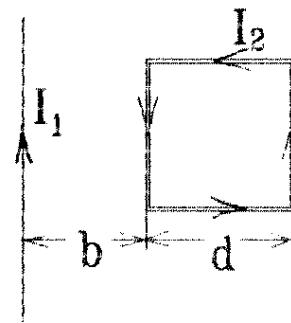


Рис.4.71

3-59. В короткозамкнутый длинный сверхпроводящий соленоид с площадью сечения S_1 , в центральной части которого (вдали от концов) индукция магнитного поля равна B , вставляют длинный соосный сверхпроводящий сердечник цилиндрической формы с площадью сечения S_2 . Пренебрегая краевыми эффектами, найти магнитное давление на боковую поверхность сердечника. (Указание: использовать выражение для энергии магнитного поля системы).

$$\text{Ответ: } p_{\text{магн}} = B^2 S_1^2 / 2\mu_0 (S_1 - S_2)^2.$$

3-60. Постоянный магнит имеет форму достаточно тонкого диска, намагниченного вдоль его оси. Радиус диска $R = 1 \text{ см}$. Оценить значение молекулярного тока I' , текущего по ободу диска, если индукция магнитного поля на оси диска в точке, отстоящей на $x = 10 \text{ см}$ от его центра, $B = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$

$$\text{Ответ: } I' = 485 \text{ А.}$$

3-61. Зависимость намагниченности J некоторого ферромагнита от напряженности магнитного поля в нем приведена на рис.4.72. Из этого ферромагнита изготовлен сердечник тонкой торoidalной катушки с радиусом R (радиус тора), имеющей N витков. В сердечнике имеется узкий поперечный воздушный зазор длины l . При каком значении тока I_0 в обмотке катушки наступит насыщение ее сердечника ? Как будет возрастать индукция магнитного поля B в зазоре сердечника при дальнейшем возрастании тока I в катушке ?

$$\text{Ответ : } I_0 = \frac{2\pi RH_0 + J_0 l}{N}; \quad B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi R} + \mu_0 J_0 \left(1 - \frac{l}{2\pi R}\right).$$

3-62. Компас расположен над горизонтальным проводом, по которому течет постоянный ток I , на высоте $h = 0,1$ м над осью провода. Стрелка компаса намагничена до насыщения. Остаточная индукция стали, из которой изготовлена стрелка, $B_0 = 2$ Тл. Плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³. При какой величине тока I стрелка поднимается над своим шпеньком ?

$$\text{Ответ : } I > 2\pi h^2 \rho g / B_0 = 2400 \text{ А}.$$

3-63. Очень длинный прямой соленоид, имеющий n витков на единицу длины, погружен в парамагнитную жидкость с восприимчивостью χ так, что ось O соленоида параллельна поверхности жидкости, а из точки O жидкость, проникающая в соленоид, видна под углом α , как показано на рис.4.73. Какая магнитная сила будет действовать на жидкость, заключенную в отрезке соленоида единичной длины, при пропускании через соленоид тока I ? Радиус витка равен r .

$$\text{Ответ : } F_1 = \mu_0 \chi n^2 I^2 r \sin(\alpha/2).$$

3-64. Между полюсами электромагнита требуется создать магнитное поле с индукцией $B = 1,4$ Тл. Длина железного сердечника $l_1 = 40$ см, диаметр сердечника $D = 5$ см. Э.д.с. какой величины \mathcal{E} надо взять для питания обмотки электромагнита, чтобы получить требуемое

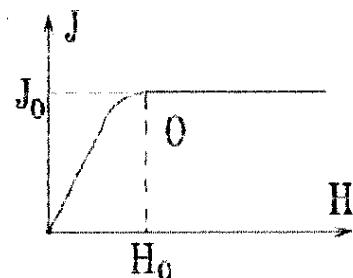


Рис.4.72

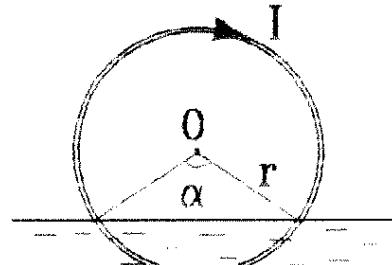


Рис.4.73

магнитное поле, используя для обмотки медную проволоку с площадью поперечного сечения $S = 1 \text{ мм}^2$? Какой будет при этом наименьшая толщина намотки h , если считать, что предельно допустимая плотность тока $j = 1,1 \cdot 10^7 \text{ А}/\text{м}^2$? Ширина межполюсного зазора $l_2 = 1 \text{ см}$. (Указание: использовать кривую намагничивания технически чистого железа [5, с.160]).

$$\text{Ответ: } \mathcal{E} = \pi D \rho (H_1 l_1 + Bl_2 / \mu_0) / S \approx 28,5 \text{ В; } h = 3,28 \text{ мм.}$$

3-65. Длинный цилиндр изготовлен из материала с остаточной однородной намагниченностью, направленной вдоль его оси, как показано на рис.4.74,а. Индукция его поля в точке А вблизи торца $B_A = 1 \text{ Тл}$. Найти индукцию B_C вблизи центра торца короткого и широкого цилиндра с диаметром d , изготовленного из того же материала (рис.4.74,б), если его высота $h = d/20$.

$$\text{Ответ: } B_C \approx 2hB_A/d \approx 0,1 \text{ Тл.}$$

3-66. На замкнутый железный торoidalный сердечник электромагнита длины l и сечения S с постоянной магнитной проницаемостью μ намотана обмотка из N витков, по которым протекает ток I . На сердечнике сделаны два разреза, расстояние между которыми равно b . Какую работу A следует совершить, чтобы удалить вырезанный кусок сердечника, оставляя в нем воздушный зазор длины b . Рассеянием магнитного потока пренебречь; $\mu \gg 1$.

$$\text{Ответ: } A = -\mu_0(\mu I N)^2 b S / l(l + \mu b).$$

3-67. Между полюсами электромагнита создано магнитное поле, индукция которого изменяется с расстоянием r от оси электромагнита по закону $B = B_0 \exp(-r^3/r_0^3)$, где B_0 , r_0 – постоянные. Маленький диамагнитный образец в виде тонкого диска с объемом V и с магнитной восприимчивостью χ помещают на таком расстоянии r от оси, чтобы на него действовала максимальная сила, выталкивающая образец из межполюсного пространства (рис.4.75). Найти величину этой силы.

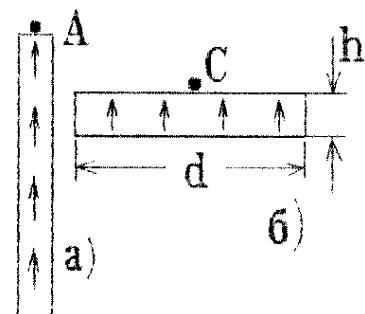


Рис.4.74

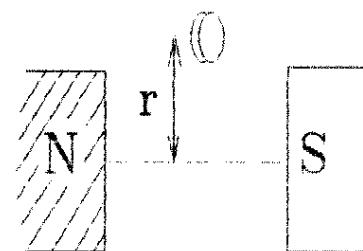


Рис.4.75

$$\text{Ответ: } F_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3}{e^2} \cdot \frac{\chi V B_0^2}{\mu_0 r_0}}.$$

3-68. Стержень из ферромагнитного материала с $\mu \gg 1$, имеющий форму цилиндра с радиусом r , помещен во внешнее однородное магнитное поле B_0 , направленное вдоль его оси. Определить индукцию в центре цилиндра, если его длина равна l .

$$\text{Ответ: } B = \frac{B_0 \alpha}{\alpha - (\mu - 1)l/2}, \text{ где } \alpha = \mu \sqrt{r^2 + (l/2)^2}.$$

3-69. Катушка из N витков намотана на железный тороидальный сердечник с магнитной проницаемостью μ . Радиус тора R , радиус сечения сердечника r , причем $r \ll R$. Тор разрезан на две половины, раздвинутые так, чтобы между ними образовался воздушный зазор ширины h , как показано на рис.4.76. Определить величину силы взаимодействия между половинами тора, если в обмотке протекает ток I , а $\mu \gg 1$.

$$\text{Ответ: } F = \frac{\mu_0 \pi}{4} \left(\frac{\mu N r}{\pi R + \mu h} \right)^2.$$

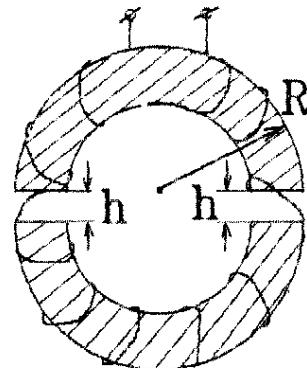


Рис.4.76

3-70. Индукция магнитного поля в вакуме вблизи плоской поверхности магнетика с магнитной проницаемостью μ равна B , а вектор \mathbf{B} составляет угол θ с нормалью \mathbf{n} к поверхности, как показано на рис.4.77. Найти циркуляцию вектора \mathbf{B} по плоскому круговому контуру Γ радиуса R , центр которого лежит на поверхности магнетика, а плоскость перпендикулярна к плоскости поверхности магнетика.

$$\text{Ответ: } \oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = 2R(1 - \mu)B \sin \theta.$$

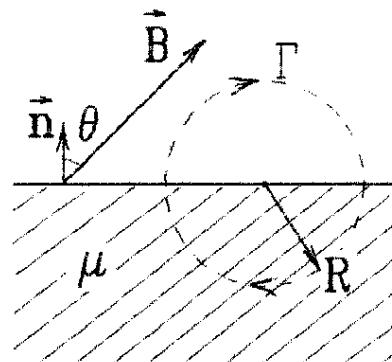


Рис.4.77

3-71. Длинный цилиндрический стержень из ферромагнитного материала с площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ мм}^2$ расположен вдоль оси достаточно длинного соленоида с плотностью намотки витков $n = 10^4 \text{ м}^{-1}$. Один конец стержня находится в центре, а

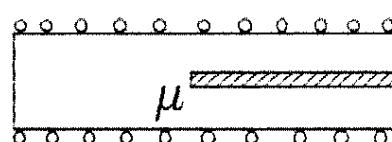


Рис.4.78

другой – на краю соленоида (рис.4.78). При этом, если по обмотке соленоида течет ток $I = 1 \text{ A}$, то стержень втягивается в соленоид с силой $F = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. Определить магнитную проницаемость μ материала стержня.

$$\text{Ответ: } \mu = \left(1 - 8F / 3\mu_0 SI^2 n^2\right)^{-1} = 41,9.$$

3-72. Тонкий постоянный магнит длины l из ферромагнетика с остаточной намагниченностью J , направленной вдоль оси магнита, подносят вплотную к крошечной магнитной стрелке компаса с магнитным моментом p_m перпендикулярно к оси ее вращения (рис.4.79). Момент инерции стрелки относительно этой оси равен I . Поперечные размеры магнита пренебрежимо малы по сравнению с его длиной. Найти период малых колебаний стрелки около положения равновесия.

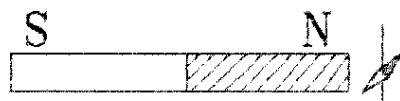


Рис.4.79

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{2I / \mu_0 p_m J}.$$

3-73. Круговой контур с током лежит на плоской границе раздела вакуума и однородного магнетика, занимающего полупространство. Если магнетик убрать, то во всех точках на оси контура величина индукции магнитного поля уменьшится в $\eta = 1,985$ раз. Чему равна магнитная проницаемость μ магнетика? (Указание: можно воспользоваться теоремой о циркуляции, направляя одну из сторон контура интегрирования вдоль оси проводника).

$$\text{Ответ: } \mu = \eta / (2 - \eta) \approx 132.$$

3-74. Длинный соленоид, намотанный на тонкостенный капилляр, погружен одним концом в парамагнитную жидкость с плотностью ρ и магнитной проницаемостью μ . Число витков на единицу длины соленоида равно n . Определить изменение уровня жидкости Δh в капилляре, если по соленоиду пропустить ток I .

$$\text{Ответ: } \Delta h = \mu_0 (\mu - 1) I^2 n^2 / \mu g \rho.$$

3-75. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика с магнитной проницаемостью μ равна B , а вектор \mathbf{B} составляет угол θ с нормалью \mathbf{n} к поверхности, как показано на рис.4.80. Найти поток вектора напряженности магнитного

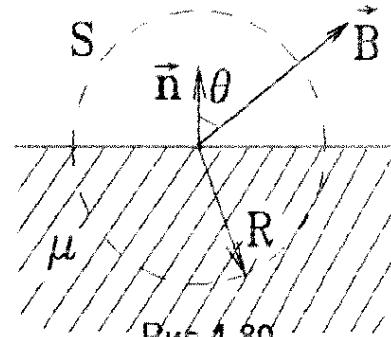


Рис.4.80

поля через поверхность сферы S радиуса R , центр которой лежит на поверхности магнетика.

$$\text{Ответ: } \oint \mathbf{H} d\mathbf{S} = \pi(\mu - 1)R^2 B \cos \theta / \mu_0 \mu .$$

3-76. Ферромагнитный тонкий стержень длины h с площадью поперечного сечения S и магнитной проницаемостью μ подносят к краю соленоида, имеющего ту же длину h и диаметр витков $D = 2h$ (рис.4.81). Найти величину магнитной силы, которая будет втягивать стержень в соленоид, если тот имеет N витков обмотки, по которой протекает ток I . Стержень расположен вдоль оси соленоида. (Указание: вывести формулу для распределения индукции магнитного поля вдоль оси соленоида и использовать ее).

$$\text{Ответ: } F = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{5} \right) \frac{\mu_0(\mu - 1)SI^2N^2}{2\mu h^2} .$$

3-77. Имеется тонкий длинный цилиндрический постоянный магнит длины l с радиусом поперечного сечения r . Индукция магнитного поля в точке А вблизи торца магнита (рис.4.82) равна B_0 . Определить величину магнитной силы, действующей на частицу с зарядом q , движущуюся со скоростью v перпендикулярно магниту в точке С, лежащей вне магнита вблизи его середины (рис.4.82). (Указание: найти распределение индукции магнитного поля вдоль оси магнита).

$$\text{Ответ: } F = 2qvB_0\sqrt{r^2 + l^2} (\sqrt{4r^2 + l^2} - l) / l\sqrt{4r^2 + l^2} .$$

3-78. Круглый диск радиуса r из магнетика с магнитной проницаемостью μ помещен во внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0 , направленное вдоль оси диска (рис.4.83). При какой максимальной толщине h диска индукция в его центре отличается от B_0 не более чем на $\delta = 1\%$? (Указание: получить формулу распределения индукции вызванного поверхностными токами намагниченностии магнитного поля вдоль оси диска и использовать эту формулу).

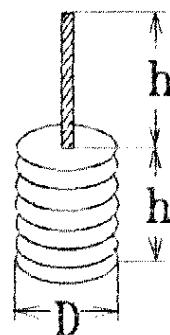


Рис.4.81



Рис.4.82

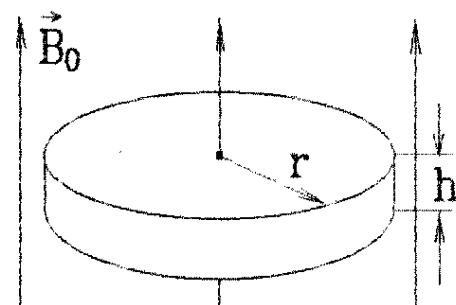


Рис.4.83

Ответ : $b_{max} \approx 2r\delta / \sqrt{(1 - 1/\mu)^2 - \delta^2} \approx 0,02 \cdot r$.

3-79. Длинный прямой соленоид с плотностью намотки витков на единицу длины n заполнен магнитиком, магнитная проницаемость которого возрастает с расстоянием r от оси соленоида по закону $\mu = \exp(kr^2)$, где k – постоянная. Если по соленоиду пропускать ток I , то магнитные силы создадут избыточное давление в магнетике. Определить зависимость этого давления от расстояния r .

Ответ : $p = \mu_0(\mu n I)^2 / 2$.

3-80. Определить силу, действующую на электрон в момент, когда тот пересекает со скоростью $v = 3 \cdot 10^6$ м/с под прямым углом ось длинного соленоида в непосредственной близости от его конца. Сила тока в соленоиде $I = 2$ А, число витков на единицу длины $n = 3000$ м⁻¹, магнитную проницаемость среды принять равной единице.

Ответ : $F = 1,81 \cdot 10^{-15}$ Н.

3-81. Релятивистский электрон движется по окружности радиуса 0,1 м в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл. Найти его ускорение и период обращения.

Ответ : $a = 2,30 \cdot 10^{17}$ м/с²; $T = 4,15 \cdot 10^{-9}$ с.

3-82. В телевизионном кинескопе катушки вертикального отклонения пучка электронов создают однородное магнитное поле $B = 0,01$ Тл. Внутри катушек, как показано на рис.4.84, это поле направлено за плоскость чертежа, а вне катушек поле отсутствует. Кинетическая энергия электронов равна 20 кэВ. На какой угол отклонится от первоначального направления пучок электронов после пролета через катушки шириной $L = 2$ см?

Ответ : $\alpha = \arcsin \left(\frac{LeB}{\sqrt{2m_e W}} \right) = 24^\circ 48'$, где m_e – масса электрона.

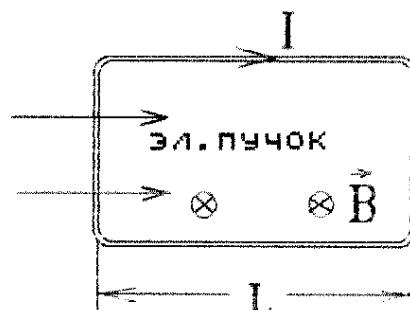


Рис.4.84

3-83. Большая плоская незаряженная пластина из немагнитного материала, обладающая свойствами проводника, движется равномерно в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,3$ Тл со скоростью $v = 40$ км/ч. Векторы \mathbf{B} и \mathbf{v} взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластины (рис.4.85). Определить поверхностную

плотность σ электрического заряда, возникающего на поверхности пластины. Магнитным полем такого заряда можно пренебречь.

$$\text{Ответ: } \sigma = 2,95 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2.$$

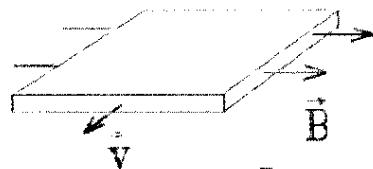


Рис.4.85

3-84. В однородном магнитном поле с индукцией B в направлении, перпендикулярном к B , движется со скоростью v электрический диполь с электрическим моментом p_e . Найти период малых собственных колебаний диполя, если его момент инерции относительно оси, параллельной направлению B и проходящей через центр диполя, равен I .

$$\text{Ответ: } T = 2\pi\sqrt{I/B p_e}.$$

3-85. Тонкий пучок протонов, ускоренных разностью потенциалов U , влетает в тонкостенную стеклянную трубку длины l и радиуса r строго вдоль ее оси. Трубка ориентирована перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. При каком значении индукции B пучок начнет попадать в стенки трубы?

$$\text{Ответ: } B \geq \frac{2r}{l^2 + r^2} \sqrt{\frac{2m_p U}{e}}, \text{ где } m_p, e - \text{ масса и заряд протона.}$$

3-86. В модели магнитогидродинамического генератора между пластинами плоского конденсатора с площадью S создано параллельное пластинам однородное магнитное поле с индукцией B . Пластины конденсатора замыкают через внешнее сопротивление R и пропускают между ними поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ со скоростью, направленной параллельно пластинам и перпендикулярно линиям индукции B . Расстояние между пластинами равно d . При некоторой величине сопротивления R выделяемая на нем мощность будет максимальной. Чему она равна?

$$\text{Ответ: } P_{max} = v^2 B^2 S d / 4\rho.$$

3-87. Слабо расходящийся пучок нерелятивистских заряженных частиц, ускоренных разностью потенциалов $U = 400$ В, выходит из точки А вдоль оси прямого соленоида. Пучок фокусируется на расстоянии $l = 3$ см от точки А при двух последовательных значениях индукции магнитного поля в соленоиде $B_1 = 7,2$ мТл и $B_2 = 8,1$ мТл. Найти удельный заряд q/m частиц.

Ответ : $q/m = 4,33 \cdot 10^{13}$ Кл/кг .

3-88. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл из некоторой точки О выходит в направлении линий индукции магнитного поля слегка расходящийся пучок моноэнергетических электронов, имеющих скорость $v = 6 \cdot 10^6$ м/с . Определить расстояние l от точки О до ближайшей точки, в которой фокусируется пучок.

Ответ : $l = 2,14$ см .

3-89. В усовершенствованном циклотроне, изображенном на рис.4.86, изменение периода обращения электрона ΔT делают кратным периоду ускоряющего поля T_0 . Сколько раз электрону необходимо пройти через ускоряющий промежуток такой установки, чтобы приобрести полную энергию $W = 4,6$ МэВ , если $\Delta T = T_0$, индукция магнитного поля $B = 0,107$ Тл , а частота ускоряющего поля $\nu = 3000$ МГц ?

Ответ : $n = 2\pi\nu W/eBc^2 = 9$.

3-90. С поверхности цилиндрического провода радиуса R , по которому течет постоянный ток I , вылетает электрон с начальной скоростью v_0 , перпендикулярной к поверхности провода. Найти, на какое расстояние удалится электрон от оси провода, прежде чем он повернет обратно под действием магнитного поля тока.

Ответ : $r_{max} = R \exp \left(\frac{2\pi m_e v_0}{\mu_0 e I} \right)$; m_e , e - масса и заряд электрона

3-91. Можно смоделировать траекторию заряженной частицы в магнитном поле, натянув в зазоре магнита проволоку с током I . С какой силой F надо натянуть проволоку, чтобы имитировать траекторию протона с энергией $W = 1$ МэВ ?

Ответ : $F = \frac{I}{e} \sqrt{2m_p W} = 0,14$ Н ; m_p , e - масса и заряд протона.

3-92. Вдоль медного прямого проводника круглого сечения радиуса $R = 5$ мм течет однородный ток $I = 50$ А . Найти разность потенциалов между осью проводника и его поверхностью. Концентрация электронов проводимости у меди $n = 9 \cdot 10^{22}$ см⁻³ .

Ответ : $\Delta U = \mu_0 I^2 / 4\pi^2 n e R^2 = 2,21$ нВ .

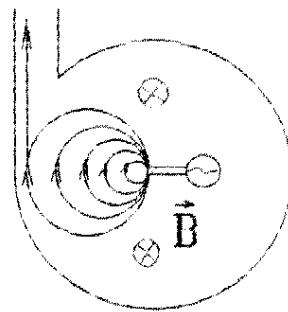


Рис.4.86

3-93. В зазоре постоянного магнита создано поле, проекция индукции которого на вертикальную ось магнита изменяется с расстоянием r от оси магнита по закону $B_z(r) = B_0 \exp(-\alpha r^2)$, где B_0 , α – постоянные (рис.4.87). Электрон движется в зазоре по равновесной круговой орбите с радиусом r_0 , ось которой совпадает с осью магнита. Найти частоту ω_z вертикальных колебаний электрона в случае малых отклонений от горизонтальной плоскости равновесной орбиты. (Указание: для определения индукции \mathbf{B} использовать теорему о циркуляции в дифференциальной форме).

$$\text{Ответ: } \omega_z = \frac{\sqrt{2\alpha} e r_0 B_z(r_0)}{m_e},$$

где m_e , e – масса и заряд электрона.

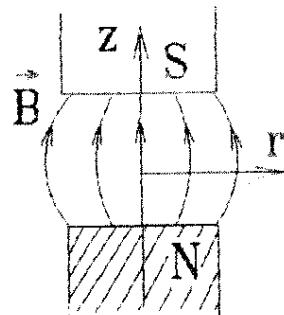


Рис.4.87

3-94. Из начала координат O области, где созданы однородные, параллельные оси Oy электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B , вылетает в направлении оси Ox с начальной скоростью v_0 частица с удельным зарядом q/m (рис.4.88). Найти для нерелятивистского случая координату y_n частицы в момент, когда она в n -й раз пересечет ось Oy , и угол α между вектором скорости частицы и осью Oy в этот момент.

$$\text{Ответ: } y_n = 2\pi^2 m n^2 E / q B^2; \quad \alpha = \arctg(v_0 B / 2\pi n E).$$

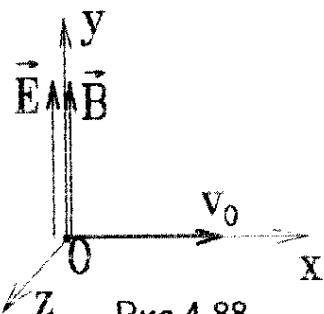


Рис.4.88

3-95. Пучок нерелятивистских заряженных частиц проходит, не отклоняясь, через область A , в которой созданы поперечные, однородные и взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B . Если магнитное поле выключить, то след пучка на экране Э смещается на Δx . Зная расстояния h и b (рис.4.89), найти удельный заряд частиц.

$$\text{Ответ: } q/m = 2E\Delta x / B^2 h(h + 2b).$$

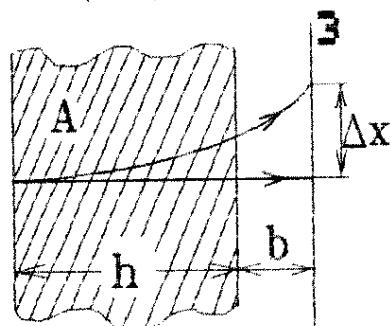


Рис.4.89

3-96. Узкий пучок нерелятивистских протонов проходит, не отклоняясь, через область, в которой созданы однородные, поперечные, взаим-

но ортогональные электрическое и магнитное поля с напряженностью $E = 120 \text{ кВ/м}$ и индукцией $B = 0,05 \text{ Тл}$. Затем пучок попадает на заzemленную мишень. Найти силу, с которой пучок действует на мишень, если ток в пучке $I = 0,8 \text{ мА}$.

$$\text{Ответ: } F = 2,00 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

3-97. Имеются однородные, взаимно перпендикулярные поля \mathbf{E} и \mathbf{B} ($E \ll cB$, где c – скорость света). Свободную частицу с массой m и зарядом q без начальной скорости помещают в эти поля. По какому закону будет изменяться со временем величина скорости частицы?

$$\text{Ответ: } v = E \sqrt{2 - 2 \cos(qBt/m)} / B.$$

3-98. Нерелятивистская заряженная частица пролетает электрическое поле цилиндрического конденсатора, а затем попадает в однородное поперечное магнитное поле с индукцией B , как показано на рис.4.90. В конденсаторе частица движется по дуге окружности, в магнитном поле – по полуокружности радиуса r . Разность потенциалов на конденсаторе U , радиусы обкладок a и b . Найти скорость частицы и ее удельный заряд q/m .

$$\text{Ответ: } v = U / Br \ln(b/a); q/m = U / B^2 r^2 \ln(b/a).$$

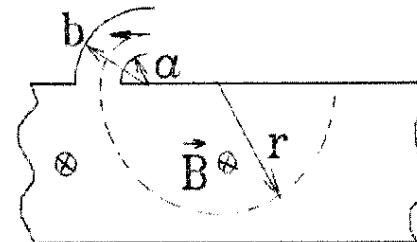


Рис.4.90

3-99. Частица с удельным зарядом q/m начинает двигаться в момент времени $t = 0$ из точки O с нулевой начальной скоростью в области, где созданы однородные, взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B (рис.4.91). Найти для нерелятивистского случая среднее значение проекции вектора скорости частицы на ось Ox (дрейфовая скорость) и координаты x_n точек пересечения траектории частицы с осью Ox .

$$\text{Ответ: } \langle v_x \rangle = E/B; x_n = 2\pi n En / qB^2, n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

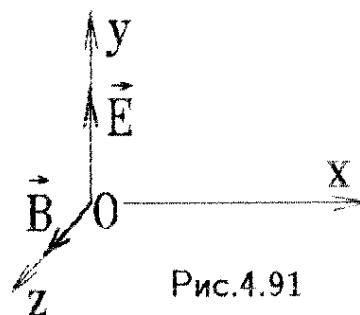


Рис.4.91

3-100. Частицу с массой m и зарядом q вносят в горизонтально направление однородное магнитное поле с индукцией B и отпускают без начальной скорости в некоторой точке в момент времени $t = 0$. Как из-

меняется расстояние r от этой точки до частицы со временем и какова дрейфовая скорость частицы ?

$$\text{Ответ : } r = g\sqrt{\omega^2 t^2 - 2\omega t \sin \omega t - 2 \cos \omega t + 2}/\omega^2;$$

$$v_{\text{др}} = g/\omega, \text{ где } \omega = qB/m.$$

3-101. Между двумя параллельными пластинами, одна из которых является катодом, а другая – анодом, создано перпендикулярное пластинам однородное электрическое поле с напряженностью E и параллельное пластинам однородное магнитное поле с напряженностью H . При каком расстоянии d между пластинами электрон с массой m_e вернется обратно на катод, и на каком расстоянии x от точки вылета он тогда попадет на катод ? Электрон вылетает из катода без начальной скорости.

$$\text{Ответ : } d > 2m_e E / \mu_0^2 H^2 e; x = 2\pi m_e E / \mu_0^2 H^2 e.$$

3-102. Частица с удельным зарядом q/m движется в области, где созданы однородные, взаимно перпендикулярные, постоянные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B , как показано на рис.4.92. В момент $t = 0$ частица находилась в точке О и имела нулевую скорость. Для нерелятивистского случая найти длину участка траектории между двумя ближайшими точками, в которых скорость частицы обращается в нуль.

$$\text{Ответ : } s = 8Em/qB^2.$$

3-103. Нить накала магнетрона имеет диаметр $d = 2 \text{ мм}$, а цилиндр анода $D = 20 \text{ мм}$. Между нитью накала и анодом приложена разность потенциалов $U = 2 \text{ В}$. На цилиндр анода навита проволока, которая образует достаточно длинный соленоид, ось которого совпадает с осью нити (рис.4.93). Число витков на единицу длины соленоида $n = 800 \text{ м}^{-1}$. Какой наименьшей силы ток надо пропустить по соленоиду, чтобы ни один электрон, вылетевший из нити без начальной скорости, не долетел до анода ?

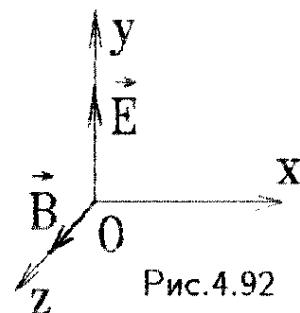


Рис.4.92

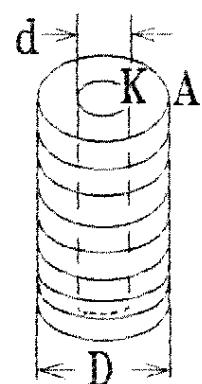


Рис.4.93

$$\text{Ответ: } I = \frac{4D}{\mu_0 n(D^2 - d^2)} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} = 0,958 \text{ A},$$

где m_e , e – масса и заряд электрона.

3-104. Узкий пучок одинаковых ионов с зарядом q и массой m , имеющих различные скорости, входит в точке O , как показано на рис.4.94, в область, где созданы однородные, постоянные, параллельные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B . Направление пучка в точке O совпадает с осью Ox , а поля направлены вдоль оси Oy . На расстоянии l от точки O находится плоский экран, ориентированный перпендикулярно к оси Ox . Найти уравнение следа, оставленного ионами на экране.

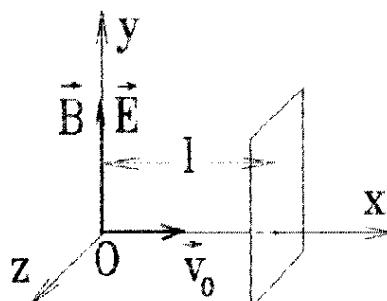


Рис.4.94

$$\text{Ответ: } z = l \operatorname{tg} \left(\sqrt{qB^2 y / 2mE} \right).$$

3-105. Заряженная частица с удельным зарядом q/m начинает двигаться в области, где созданы однородные, взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля, как показано на рис.4.95. Магнитное поле имеет постоянную индукцию B , электрическое меняется со временем, как $E = E_0 \cos \omega t$, где $E_0 = \text{const}$, $\omega = qB/m$. Найти в нерелятивистском случае закон движения частицы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, если в момент времени $t = 0$ она покоялась в точке О.

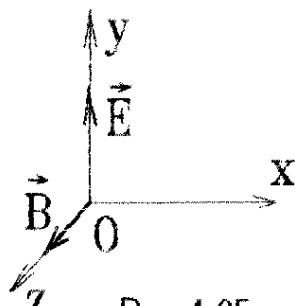


Рис.4.95

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } x(t) &= qE_0 (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) / 2m\omega^2; \\ y(t) &= qE_0 t \sin \omega t / 2m\omega; \quad z(t) = 0. \end{aligned}$$

3-106. Частица с зарядом q и массой m находилась в начальный момент времени в начале координат, имея нулевую начальную скорость. Взаимно перпендикулярные, однородные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B заставляют частицу двигаться по искривленной траектории. На каком расстоянии от начала координат окажется частица в момент достижения ею кинетической энергии W , если $W \ll mc^2$?

$$\text{Ответ: } r = \frac{Em}{qB^2} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \alpha^2 - 2\alpha \sin \alpha},$$

где $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{B}{E} \sqrt{\frac{W}{2m}}\right)$.

3-107. Из точки А в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией B , вылетают частицы с массой m и зарядом q каждая. Скорости вылета частиц v_0 одинаковы по величине и направлены в пределах очень малого угла α ($\alpha \ll 1$, рис.4.96). В некоторой точке, удаленной от точки А, пучок вылетевших частиц сфокусируется. Какой будет минимальная ширина δh сфокусированного пучка?

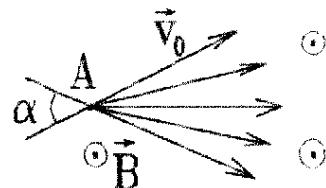


Рис.4.96

3-108. Ускоритель протонов представляет из себя вакуумную трубку длины $l = 3$ м, вдоль оси которой направлено практически однородное постоянное электрическое поле E (рис.4.97). Протоны с массой m_p ускоряются с нулевой начальной скоростью и при выходе из трубы имеют энергию $W = 4$ МэВ. Какой должна быть величина индукции B однородного поперечного внешнего магнитного поля, чтобы отклонение пучка протонов от оси трубы в ее конце не превышало $b = 1$ см?

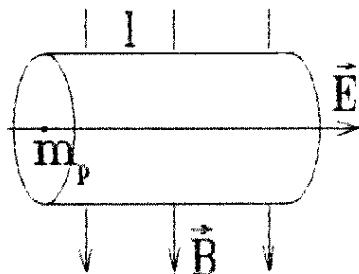


Рис.4.97

$$\text{Ответ: } B \leq \left(\frac{3b}{cl^2} \right) \sqrt{\frac{Wm_p}{2}} = 4,82 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

4 Тематическое содержание предлагаемых задач

Обозначения разделов курса физики, используемых при решении задач

- А – сила Ампера;
- Б – закон Био – Савара;
- Г – теорема Гаусса в интегральной форме;
- Гд – теорема Гаусса в дифференциальной форме;

- Гр – граничные условия для полей;
- Д – поле электрического диполя;
- ДЛ – закон Джоуля – Ленца;
- ДЧ – движение частицы в электрическом и магнитном полях;
- ЕП – связь напряженности и потенциала электростатического поля;
- Из – метод изображений;
- Л – сила Лоренца;
- Мг – магнетики и постоянные магниты;
- Мм – магнитный момент;
- Мс – момент сил, действующий на контур с током;
- На – намагниченность, токи намагничивания;
- О – закон Ома;
- Од – закон Ома в дифференциальной форме;
- Оп – остаточная поляризованность диэлектриков;
- П – вектор поляризованности, диэлектрики;
- ПК – правила Кирхгофа;
- По – подвижность;
- Пп – магнитное поле прямого бесконечного проводника или кругового контура с током;
- Рел – релятивистская частица;
- Рк – работа по перемещению контура с током в магнитном поле;
- РП – расчет поля системы зарядов, принцип суперпозиции;
- С – конденсатор, вычисление емкости, перезарядка конденсатора;
- Со – магнитное поле в соленоиде (тороиде);
- Сп – вычисление сопротивления;
- Тз – поле точечного заряда;
- Ток – определение тока или плотности тока;
- Тол – опыт Толмена – Стюарта;
- Ф – поток магнитной индукции;
- Ц – теорема о циркуляции;
- Э – вычисление энергии системы или плотности энергии поля.

Содержание предложенных задач

(в скобках указана трудность задачи в баллах)

- | | | |
|-----------------|------------------|---------------------|
| 1-1. Тз (1) | 1-36. Г (2) | 1-70. П,Г,Гр (4) |
| 1-2. Тз (2) | 1-37. Г (3) | 1-71. П,Гд (4) |
| 1-3. Тз,РП (3) | 1-38. Тз,Г (4) | 1-72. Д,П (5) |
| 1-4. Тз,РП (3) | 1-39. Г (3) | 1-73. П,РП,Гр (6) |
| 1-5. РП (3) | 1-40. Г (4) | 1-74. П,РП,Гр (6) |
| 1-6. Тз,Из (3) | 1-41. Г (4) | 1-75. П,РП,Гр (6) |
| 1-7. Тз (3) | 1-42. Г (5) | 1-76. Э (1) |
| 1-8. Тз,Из (3) | 1-43. Д,Г (4) | 1-77. Э (2) |
| 1-9. Тз,Из (3) | 1-44. Д,Г (4) | 1-78. Г,Э (2) |
| 1-10. Тз,Из (5) | 1-45. Д,Г (5) | 1-79. Э (3) |
| 1-11. Тз,Из (6) | 1-46. Д,Г (5) | 1-80. Г,Э (3) |
| 1-12. Тз,Из (8) | 1-47. ЕП (1) | 1-81. Г,Э (4) |
| 1-13. РП,Из (4) | 1-48. Г,ЕП (3) | 1-82. Э (4) |
| 1-14. РП (4) | 1-49. Г,ЕП (4) | 1-83. Г,Э (4) |
| 1-15. РП (4) | 1-50. ЕП (3) | 1-84. Г,Э (4) |
| 1-16. РП,Из (4) | 1-51. ЕП (3) | 1-85. С (2) |
| 1-17. РП,Из (4) | 1-52. Г,П,Гр (4) | 1-86. С (2) |
| 1-18. РП,Из (5) | 1-53. Г,ЕП (5) | 1-87. С (2) |
| 1-19. РП (5) | 1-54. Гд (3) | 1-88. С (3) |
| 1-20. РП (5) | 1-55. Гд (4) | 1-89. С (3) |
| 1-21. РП (5) | 1-56. Гд (5) | 1-90. С (3) |
| 1-22. РП (5) | 1-57. Гд (5) | 1-91. С,ЕП (4) |
| 1-23. РП (5) | 1-58. Г,РП (4) | 1-92. С,ЕП,П,Оп (4) |
| 1-24. РП (6) | 1-59. Гр (3) | 1-93. С (4) |
| 1-25. РП (6) | 1-60. П,Г (2) | 1-94. С (4) |
| 1-26. Д (3) | 1-61. П (3) | 1-95. С,Э (4) |
| 1-27. Д,РП (4) | 1-62. П (3) | 1-96. Г,С (4) |
| 1-28. Д (4) | 1-63. П,Гр (4) | 1-97. Г,Из,С (5) |
| 1-29. Д,РП (5) | 1-64. П,Г,Гр (4) | 1-98. С,Г,Гр (5) |
| 1-30. Д (5) | 1-65. П,Оп (4) | 1-99. Г,С,Гр (5) |
| 1-31. Д,Из (5) | 1-66. П (4) | 1-100. Э,С (4) |
| 1-32. Д,РП (6) | 1-67. П,Г (4) | 1-101. С,Э (5) |
| 1-33. Д,РП (7) | 1-68. П,Гд (4) | 1-102. С (5) |
| 1-34. Тол (2) | 1-69. П (4) | 1-103. П,Гр (5) |
| 1-35. Тол,Г (3) | | |

- | | | |
|-----------------|-----------------------|-------------------|
| 2-1. О (2) | 2-20. Си (3) | 2-39. ДЛ (2) |
| 2-2. О (3) | 2-21. Си (3) | 2-40. С,ДЛ (3) |
| 2-3. О (3) | 2-22. Сп (5) | 2-41. С (3) |
| 2-4. ПК (3) | 2-23. Сп,ЕП,Од,Из (6) | 2-42. С,Сп,ПК (4) |
| 2-5. ПК (3) | 2-24. Од,Сп,ЕП (4) | 2-43. С (4) |
| 2-6. ПК (3) | 2-25. ДЛ (2) | 2-44. С,ПК (3) |
| 2-7. ПК (4) | 2-26. ДЛ (2) | 2-45. С,ПК (3) |
| 2-8. ПК (4) | 2-27. ДЛ (2) | 2-46. С,ДЛ (3) |
| 2-9. ПК (4) | 2-28. ДЛ (2) | 2-47. Сп,ДЛ,С (5) |
| 2-10. ПК (4) | 2-29. О,ДЛ (3) | 2-48. С,ДЛ (6) |
| 2-11. ПК (4) | 2-30. ПК,ДЛ (3) | 2-49. По (2) |
| 2-12. ПК (5) | 2-31. С,ПК (4) | 2-50. ЕП (2) |
| 2-13. Ток (3) | 2-32. ДЛ (4) | 2-51. По (4) |
| 2-14. Ток (4) | 2-33. ДЛ,ПК (3) | 2-52. Гд,По (6) |
| 2-15. Од,Гр (3) | 2-34. ДЛ,ПК (5) | 2-53. Ток,Г (5) |
| 2-16. Од (4) | 2-35. ДЛ,ПК (6) | 2-54. Ток,Г (6) |
| 2-17. Од,ЕП (4) | 2-36. Сп,ДЛ (3) | 2-55. Сп,С (3) |
| 2-18. Сп (2) | 2-37. Сп,ДЛ (4) | 2-56. Ток,Тз (3) |
| 2-19. Си (2) | 2-38. Сп,ДЛ (5) | |

- | | | |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| 3-1. Ип,РП (1) | 3-37. Ц,А (6) | 3-73. Ц,Мг,Гр (5) |
| 3-2. Ип,РП (3) | 3-38. Мм (3) | 3-74. Мм,Со,Мг (6) |
| 3-3. Ип,РП (3) | 3-39. Э,Б,Мм (3) | 3-75. Г,Гр,Мг (6) |
| 3-4. Ип (3) | 3-40. Б,Мм (4) | 3-76. Б,Мг,Со,Мм (7) |
| 3-5. Ип,Ф (1) | 3-41. Мм (5) | 3-77. Б,На,Мг,Л (7) |
| 3-6. Б (2) | 3-42. Б,Мм,Э (6) | 3-78. Б,На,Гр,Мг (7) |
| 3-7. Б (2) | 3-43. Со,Гд,П (4) | 3-79. Ц,На,А (7) |
| 3-8. Б (2) | 3-44. Мм,Б (3) | 3-80. Л,Со (1) |
| 3-9. Б (2) | 3-45. Со,Э (3) | 3-81. Л,Рел (1) |
| 3-10. Б (2) | 3-46. Ип,Э,Со (3) | 3-82. Л (2) |
| 3-11. Б (3) | 3-47. Б,Мм (7) | 3-83. Л (2) |
| 3-12. Б (4) | 3-48. Ц,Од (4) | 3-84. Л (3) |
| 3-13. Б (4) | 3-49. Ц,Ф (3) | 3-85. Л (3) |
| 3-14. Б (4) | 3-50. Mc (2) | 3-86. О,Л (3) |
| 3-15. Со,Б (4) | 3-51. Mc,Ц (2) | 3-87. Л (3) |
| 3-16. Б,РП (4) | 3-52. Mc,Ц (2) | 3-88. Л (3) |
| 3-17. Б (5) | 3-53. Mc,РП (3) | 3-89. Л,Рел (4) |
| 3-18. Б (6) | 3-54. Mc (3) | 3-90. Л (4) |
| 3-19. Ц (2) | 3-55. Mc (3) | 3-91. Л,А (4) |
| 3-20. Ц,Ф (2) | 3-56. Б,Mc,Мм (6) | 3-92. Л,Ц,Ток (5) |
| 3-21. Ип,Ц (3) | 3-57. Э,Ф,Рк (3) | 3-93. Ц,Л (5) |
| 3-22. Со (4) | 3-58. Ф,Рк (3) | 3-94. Л,ДЧ (2) |
| 3-23. Ц,Ток (4) | 3-59. Э,Ф (4) | 3-95. Л,ДЧ (3) |
| 3-24. Ц,Э (4) | 3-60. На,Б (2) | 3-96. Ток,Л,ДЧ (3) |
| 3-25. Ц (5) | 3-61. Ц,На,Мг (3) | 3-97. Л,ДЧ (4) |
| 3-26. Ц (6) | 3-62. Ип,Мм,На (3) | 3-98. Л,Г,Ц,ДЧ (4) |
| 3-27. А (2) | 3-63. Со,Э,Мг (4) | 3-99. Л,ДЧ (5) |
| 3-28. Ип,А (2) | 3-64. Ц,Гр,Мг (4) | 3-100. Л,ДЧ (5) |
| 3-29. А (3) | 3-65. На,Мг,Ип (4) | 3-101. Л,ДЧ (5) |
| 3-30. А,Ип (4) | 3-66. Ц,Мг,Э (4) | 3-102. Л,ДЧ (6) |
| 3-31. А,Ип (3) | 3-67. Мг,Мм (4) | 3-103. Л,ДЧ (6) |
| 3-32. А,Ип (4) | 3-68. Б,На (5) | 3-104. Л,ДЧ (6) |
| 3-33. Ц,А (4) | 3-69. Ц,Э,Мг (5) | 3-105. Л,ДЧ (6) |
| 3-34. Ц,А (4) | 3-70. Ц,Гр,Мг (5) | 3-106. Л,ДЧ (6) |
| 3-35. Ц,А,Ф (5) | 3-71. Мм,Со,Мг (5) | 3-107. Л,ДЧ (7) |
| 3-36. А,Ц (5) | 3-72. Б,На (5) | 3-108. Л,ДЧ (7) |

Литература

1. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. – 2-е изд. – М.: Высш.шк., 1991. – 288 с.
2. Савельев И.В. Курс физики: В 3 т. – М.: Наука, 1989. – Т.2 – 464 с .
3. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш.шк., 1983. – 463 с.
4. Орир Дж. Физика: В 2 т. – М.: Мир, 1981. – Т.1. – 336 с.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
6. Козсл С.М., Рашиба Э.И., Славатинский С.Л. Сборник задач по физике (задачи МФТИ). – М.: Наука, 1987. – 301 с.
7. Батыгин В.В., Тонтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 504 с.
8. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
9. Сена Л.Л. Сборник вопросов и задач по физике. – М.: Высш.шк., 1986. – 239 с.
10. Мин Чен. Задачи по физике с решениями. – М.: Мир, 1978. – 239 с .
11. Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. – 2-е изд. – М.: Атомиздат, 1975. – 336 с.
12. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М.: Мир, 1978. – 541 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 3 |
| Глава 1. Электростатика | 5 |
| Глава 2. Законы постоянного тока | 28 |
| Глава 3. Магнитное поле | 39 |
| Глава 4. Задачи для индивидуальной работы | |
| 1. Задачи по электростатике | 66 |
| 2. Задачи на законы постоянного тока | 86 |
| 3. Задачи на законы магнитного поля | 98 |
| 4. Тематическое содержание задач | 125 |
| Литература | 129 |

Колмаков Юрий Николаевич

Некар Юрий Александрович

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Задачи и методы их решения

Редактор Г.М.Захарова

Свод.тем.пл.№6

Подписано в печать 03.06.97. Формат бумаги 60 × 841/16 . Бумага типограф.№2. Офсетная печать. Усл.печ.л. 6,7. Усл. кр.-отт. 6,7. Уч.-изд.л. 6,0.

Тираж экз. Заказ .

Тульский государственный университет. 300600, Тула, просп. Ленина, 92.

Подразделение оперативной полиграфии Тульского государственного университета. 300600 Тула, ул.Болдина, 151.