

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.Н.КОЛМАКОВ, Ю.А.ПЕКАР, Л.С.ЛЕЖНЕВА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ОПТИКА

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Тула 1999

УДК 517.9(07) + 53(07)

Электромагнетизм и оптика: Лекции по физике. /Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар, Л.С.Лежнева. Тул.гос.ун-т, Тула, 1999. 129 с.

ISBN 5 – 7679 – 0187 – 2

Пособие представляет собой часть курса лекций по общей физике, читаемого в ТулГУ для ряда инженерно-технических и инженерно-физических специальностей. В нем рассматривается обширный круг явлений, связанных с существованием переменных электрических и магнитных полей, свойства электромагнитного поля, условия возникновения и характер волновых процессов, основы геометрической и волновой оптики.

Предназначено для студентов всех специальностей физического и инженерно-технического профиля.

Ил. 204. Библиогр.: 12 назв.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук В.М.Дубовик (Объединённый институт ядерных исследований, г. Дубна).

ISBN 5 – 7679 – 0187 – 2

К $\frac{1604050000 - 012}{76П(03) - 99}$ 7 – 99

© Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар,
Л.С.Лежнева, 1999

© Тульский государственный
университет, 1999

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Явление электромагнитной индукции	7
1. Природа э.д.с. индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле	7
2. Вихревое электрическое поле	9
3. Закон Фарадея. Правило Ленца	10
4. Явление самоиндукции. Индуктивность	13
5. Взаимная индукция	15
Глава 2. Энергия магнитного поля	18
1. Энергия проводника с током	18
2. Энергия магнитного поля	20
3. Пондеромоторные силы	21
Глава 3. Электрические колебания	24
1. Интегрирующие и дифференцирующие RC – цепочки	24
2. Собственные электрические колебания	26
3. Вынужденные электрические колебания	30
4. Резонанс. Характеристики электрического колебательного контура	33
Глава 4. Электромагнитное поле. Теория Максвелла	37
1. Ток смещения	37
2. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла	40
3. Метод решения уравнений Максвелла (дополнение)	43
4. Поток энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга	45
Глава 5. Волновые процессы. Электромагнитные волны	50
1. Волновая функция	50
2. Волновое уравнение. Скорость распространения волны ..	53
3. Волны упругих колебаний в струне	55
4. Звуковые волны в газах	57
5. Электромагнитные волны	60
6. Принцип передачи сигналов с помощью электромагнитных волн (радио и телевидение)	62
7. Шкала электромагнитных волн	64
8. Энергия и импульс электромагнитной волны	65
9. Излучение электромагнитных волн зарядом, движущимся с ускорением	67

Глава 6. Основы геометрической оптики	71
1. Уравнение эйконала	71
2. Принцип Ферма	72
3. Законы отражения и преломления	73
4. Распространение света в неоднородной среде	74
Глава 7. Интерференция электромагнитных волн	76
1. Отражение электромагнитных волн от проводящей среды	76
2. Стоячие волны	77
3. Интерференция когерентных волн	79
4. Интерференционная схема Юнга	80
5. Условия пространственной и временной когерентности ...	82
6. Интерференция света в тонких пленках	85
7. Многолучевая интерференция. Дифракционная решетка ..	87
8. Голография (метод получения объемного изображения) ...	91
9. Интерферометрия интенсивностей	94
Глава 8. Дифракция электромагнитных волн	96
1. Принцип Гюйгенса – Френеля	96
2. Метод зон Френеля	97
3. Дифракция на круглых отверстиях и круглых непрозрачных экранах	100
4. Разрешающая способность оптических приборов	103
5. Дифракция света на полуплоскости	106
6. Дифракция света на узкой щели	107
7. Дифракция рентгеновских лучей	110
Глава 9. Дисперсия электромагнитных волн (света)	113
1. Распространение электромагнитных волн в диэлектрике	113
2. Дисперсия электромагнитных волн	114
3. Волновые пакеты. Групповая скорость	116
Глава 10. Поляризация электромагнитных волн	119
1. Естественный и поляризованный свет	119
2. Поляризация электромагнитных волн при отражении. Закон Брюстера	120
3. Поляризаторы. Закон Малюса	122
4. Поляризация при двойном лучепреломлении	123
Предметный указатель	126
Литература	129

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов технических и естественно-научных специальностей, которым читается двух- или трехсеместровый курс общей физики в рамках бакалаврской подготовки. Его изучение требует знания высшей математики в объеме дифференциального и интегрального исчисления и векторного анализа.

Имеется достаточно широкий набор рекомендуемой учебной литературы [1 — 10], рассматривающей те же темы, что и данное пособие. Но практически все эти учебники рассчитаны на значительно больший объем времени, необходимого для удовлетворительного изучения курса, чем то время, которое отводится на это существующими учебными программами. При этом попытка облегчить усвоение материала упрощением используемой математики, как правило, не приводит к успеху. Явления и процессы, протекающие в природе и используемые в технических приспособлениях, наиболее просто описываются математическим языком. Длинные качественные описания таких процессов в их многочисленных проявлениях и деталях обычно делают учебник слишком растянутым в объеме и труднопонимаемым для читателя, который сталкивается с изучаемым материалом впервые.

Существует и другая возможность — резко ограничить ряд изучаемых в курсе физики тем в соответствии со спецификой специальности студента, т.е. сделать этот курс прикладным или инженерным. Этот путь кажется самым простым, но приводит к ухудшению качества обучения. Все природные явления и процессы взаимосвязаны и взаимообусловлены. И курс физики — это единственная возможность для студента изучить и понять эту взаимосвязь, ознакомиться с приложениями физических явлений в разных областях науки и техники, с новейшими достижениями физики. В противном случае, закончив курс обучения, студент приобретет только умение решать конкретные, узкопрофессиональные задачи, что не соответствует стандарту высшего образования. Развитие техники, науки и культуры показывает, что знания, казалось бы относившиеся чисто к сфере интересов физики, становятся совершенно необходимыми в практических применениях. Примером может служить быстрое развитие всех областей техники, связанных с квантовой физикой: микроэлектроника, лазерная техника, разнообразные приложения современной физики твердого тела и т.п.

Таким образом, при подготовке данного пособия перед авторами стояли следующие задачи:

- выделить такой объем теоретического материала, который является совершенно необходимым для понимания сути рассматриваемых физических явлений и законов, и изложить этот материал в наиболее компактной форме;

- показать внутреннюю связь между проявлениями физических законов в различных областях, попытаться взглянуть на изучаемое явление с разных сторон;

- использовать при изложении такой уровень математики, чтобы читатель мог непосредственно применять изучаемые законы к решению любых задач, как предлагаемых в курсе общей физики, так и возникающих при изучении прикладных дисциплин;

- доказать все получаемые следствия с помощью относительно несложных математических преобразований и вычислений;

- иллюстрировать изложение наглядными примерами, взятыми из различных областей науки и техники, и одновременно указать возможности применения изучаемых физических законов на практике.

В связи с этим, оформление теоретического материала отличается от общепринятого. Компактная форма изложения предполагает быстрое и надежное переключение внимания читателя с одного ключевого утверждения на другое. Необходимо отделить основные формулировки и выводы от иллюстраций этих выводов различными примерами и дополнениями. Это окажется полезным и при обращении к тексту в процессе поиска информации при подготовке к экзамену или при решении задач. Поэтому в тексте пособия широко используется выделение ключевых утверждений, формул и терминов с помощью рамок, подчеркиваний и других типографских средств, как это делается обычно при чтении лекций на доске. Для дополнительного удобства приведен подробный предметный указатель.

В зависимости от уровня подготовки, от выделяемого на изучение курса времени и от специализации студента часть наиболее трудного для понимания материала может быть опущена при чтении данного пособия без смысловой потери.

Глава 1.

Явление электромагнитной индукции

1 Природа э.д.с. индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле

Свернем проводник в замкнутый контур и будем изменять магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром. Тогда в замкнутом проводнике возникает квазистационарный ток (его линии должны быть замкнутыми), названный индукционным.

Это явление называется электромагнитной индукцией.

Но магнитный поток $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ (или $\Phi = BS \cos \alpha$ для плоского контура в однородном магнитном поле) можно изменять разными способами: изменяя B , S или α .

Пусть изменяется площадь S контура, т.е. проводник с током движется в магнитном поле, пересекая линии индукции. Например, пусть однородное постоянное поле $\vec{B}$ направлено перпендикулярно к плоскости рамки с током I , у которой одна сторона скользит со скоростью $\vec{v}$ (рис.1.1).

Но вместе с проводником AC движутся в магнитном поле и все находящиеся в нем свободные электроны. На них действует магнитная составляющая силы Лоренца

$$\vec{F}_L = -e[\vec{v}, \vec{B}],$$

заставляющая их двигаться по проводнику, т.е. образовывать ток $I_{\text{и}}$. Эта сила неэлектростатической природы является *сторонней*.

Благодаря ей в движущемся проводнике возникает э.д.с. электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_{\text{и}} = \int_A^C \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \frac{\vec{F}_L \cdot d\vec{l}}{-e} = \int_A^C [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l} = vBl.$$

За время dt проводник сместится на расстояние vdt . Тогда $lvdt = dS$ — это бесконечно малое приращение площади рамки с током, т.е.

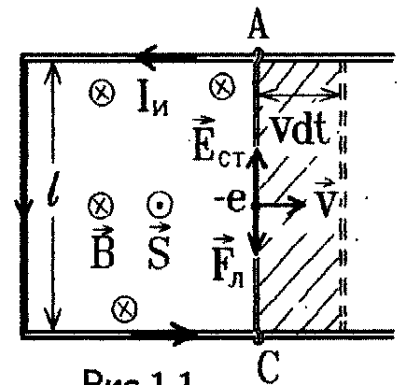


Рис.1.1

$\mathcal{E}_H = \frac{BdS}{dt}$. Но площадь задается вектором $\vec{S}$, направление которого определяют по правилу правого винта, вращая его по направлению возникающего индукционного тока I_H .

Поэтому векторы $\vec{B}$ и $\vec{S}$ направлены противоположно, и, внося постоянную величину $\vec{B} = \text{const}$ под знак производной, находим

$$\mathcal{E}_H = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

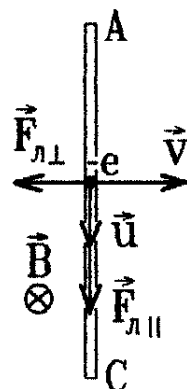
Причиной возникновения э.д.с. индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле, является действие магнитной составляющей силы Лоренца на свободные заряды в нем.

Вопрос: магнитная составляющая лоренцевой силы перпендикулярна скорости заряженных частиц и поэтому работы совершать не должна. Однако, в нашем случае $\mathcal{E}_H \sim \int \vec{F}_L \cdot d\vec{l} \neq 0$. В чем же дело?

Ответ: дело в том, что создавая ток $I_H = enuS$, свободные электроны, имеющие концентрацию n , движутся по проводнику поперечного сечения S с некоторой дрейфовой скоростью $\vec{u}$, и на них действует еще одна, перпендикулярная составляющая силы Лоренца

$$\vec{F}_{L\perp} = -e[\vec{u}, \vec{B}],$$

которая препятствует перемещению проводника в магнитном поле (рис.1.2).



Работа этой силы за время dt при перемещении свободного электрона вместе с проводником отрицательна: $dA_1 = -|F_{L\perp}|vdt = -euB \cdot vdt$ и компенсирует работу э.д.с. индукции по перемещению того же электрона вдоль проводника за то же время dt : $dA_2 = |F_{L\parallel}|udt = evB \cdot udt = -dA_1$. Суммарная работа силы Лоренца равна нулю!

Выводы:

- 1) при перемещении замкнутого проводника в магнитном поле возникает сила, препятствующая этому перемещению;
- 2) индукционный ток возникает за счет механической работы, совершенной при перемещении проводника против такой силы. В итоге эта работа преобразуется в джоулево тепло, выделяемое током.

Можно показать, что выражение $\mathcal{E}_H = -\frac{d\Phi}{dt}$ справедливо при любом перемещении контура в магнитном поле, например, при вращении рамки в магнитном поле; когда угол α изменяется с течением времени: $\alpha = \omega t$ (рис.1.3),

$$\Phi = BS \cos \omega t \text{ и } \mathcal{E}_H = BS\omega \sin \omega t.$$

Если рамку вращать в магнитном поле, то в ней появляется индукционный ток. Такая система будет генератором переменного тока.

Наоборот, если рамку подключить к внешнему источнику тока, то момент сил Ампера начнет поворачивать ее в магнитном поле. Такая система работает как электродвигатель или электромотор.

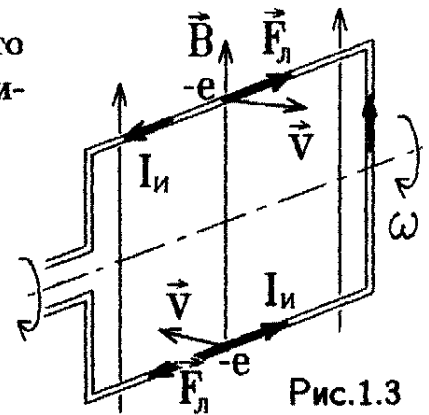


Рис.1.3

Замечание: при повороте (перемещении)

рамки с током I силы Ампера совершают работу $dA = Id\Phi$. Но одновременно к концам рамки оказывается приложено напряжение, равное $U = \mathcal{E}_\text{и} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Тогда протекающий ток I совершает работу $dA_I = UI dt = -Id\Phi = -dA$.

Таким образом, работа по повороту рамки происходит не за счет энергии внешнего магнитного поля, а за счет дополнительной работы внешнего источника тока против возникающей э. д. с. индукции.

2 Вихревое электрическое поле

Фарадей доказал экспериментально, что тот же закон $\mathcal{E}_\text{и} = -\frac{d\Phi}{dt}$ справедлив и тогда, когда контур не движется в магнитном поле, а изменяется само магнитное поле $\vec{B}$.

Например, пусть постоянный магнит приближается к проводящему контуру (рис.1.4). Силы Лоренца здесь не действуют.

Начавшееся движение свободных электронов можно объяснить только появлением нового электрического поля $\vec{E}_\text{в}$, силовые линии которого направлены вдоль контура, т.е. замкнуты, аналогично линиям индукции магнитного поля. Это поле $\vec{E}_\text{в}$ неэлектростатической природы называется вихревым.

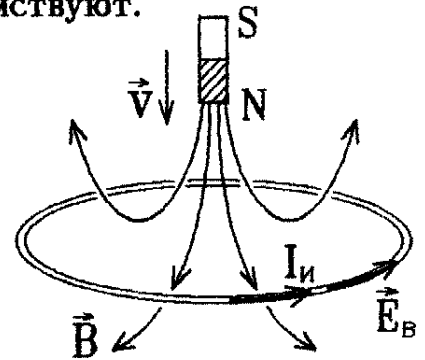


Рис.1.4

Циркуляция напряженности $\vec{E}_\text{в}$ по замкнутому контуру создает э. д. с. индукции

$$\mathcal{E}_\text{и} = \oint \vec{E}_\text{в} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Применяя теорему Стокса,

$$\oint_l \vec{E}_\text{в} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E}_\text{в} \cdot d\vec{S}, \text{ получаем уравнение } \boxed{\text{rot } \vec{E}_\text{в} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}},$$

смысл которого заключается в том, что

вихревое электрическое поле $\vec{E}_B$ порождается не электрическими зарядами, а изменяющимся со временем магнитным полем.

С другой стороны, поток вектора $\vec{E}_B$ по любой замкнутой поверхности S равен нулю.

$$\oint_S \vec{E}_B \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div } \vec{E}_B = 0$$

(действительно, сколько замкнутых линий $\vec{E}_B$ входит внутрь этой поверхности, столько же и выходит из нее (рис.1.5).

Пример: свободный заряд в вихревом электрическом поле будет двигаться вдоль замкнутой силовой линии $\vec{E}_B$, все время ускоряясь – в этом заключается принцип ускорения заряженных частиц в бетатроне.

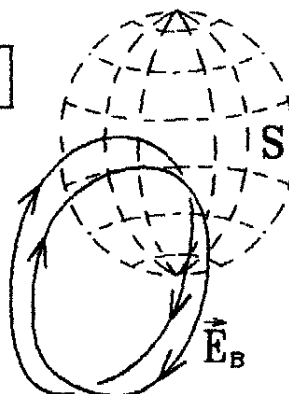


Рис.1.5

3 Закон Фарадея. Правило Ленца

При изменении магнитного потока через поверхность S , опирающуюся на замкнутый проводящий контур, в нем возникает э.д.с. электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_и = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Это – закон Фарадея.

Э.д.с. электромагнитной индукции возникает за счет сил Лоренца, если проводник движется в магнитном поле, пересекая линии $\vec{B}$, или за счет возникновения вихревого электрического поля, если меняется само магнитное поле $\vec{B}$.

Вопрос: очень длинный постоянный магнит с сечением S_M охвачен проводящим кольцом К (рис.1.6). Концы проводников 1 и 2 скользят по этому кольцу из точки D в точку C, все время образуя замкнутый проводящий контур. Возникнет ли в нем э.д.с. индукции?

Ответ: нет! Хотя вначале магнитный поток через замкнутый контур был нулевым $\Phi_D = 0$, а в конце $\Phi_C = \vec{B}_M \cdot \vec{S}_M \neq 0$, т.е.

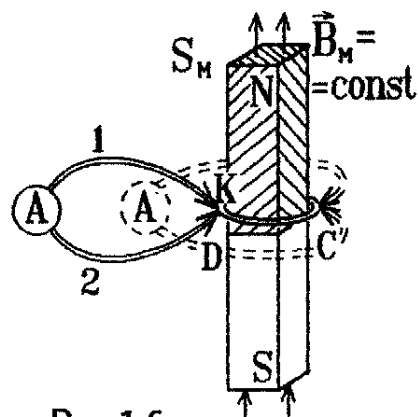


Рис.1.6

поток меняется. Но поле $\vec{B}$ не меняется (т.е. не возникает вихревого электрического поля). А вне длинного магнита, где движутся проводники 1 и 2, $\vec{B} = 0$ (не возникает силы Лоренца), т.е. нет причин для появления э.д.с. индукции.

Замечание 1: закон Фарадея $\mathcal{E}_и = -\frac{d\Phi}{dt}$ справедлив и тогда, когда действуют обе причины возникновения $\mathcal{E}_и$, т.е. и проводник движется в магнитном поле, и само это поле $\vec{B}$ меняется со временем (рис. 1.7).

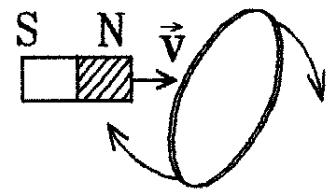
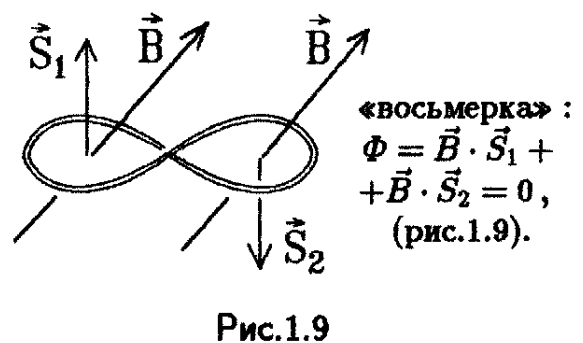
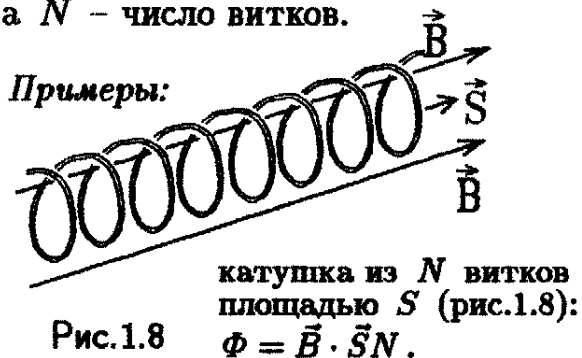


Рис.1.7

Замечание 2: замкнутый проводник может образовывать несколько витков. Поэтому в законе Фарадея надо учитывать полный магнитный поток $\Phi = \Phi_1 N$, где Φ_1 – магнитный поток через один виток, а N – число витков.



Вспомним теперь, что возникающие силы противодействуют движению проводника в магнитном поле. Можно сформулировать общее правило – **правило Ленца** :

э.д.с. электромагнитной индукции создает в замкнутом проводнике индукционный ток, текущий в таком направлении, что порождаемый этим током магнитный поток стремится скомпенсировать изменение первоначального магнитного потока. Иначе говоря, э.д.с. индукции противодействует изменению магнитного потока, являющегося причиной ее возникновения.

Пример: проводящее кольцо перемещают в область более сильного магнитного поля (рис.1.10). Поток $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$ растет. Поэтому индукционный ток $I_и$ потечет в таком направлении, чтобы созданный им магнитный поток $\Phi_и = \int \vec{B}_и d\vec{S} < 0$ был отрицателен и компенсировал увеличение потока Φ .

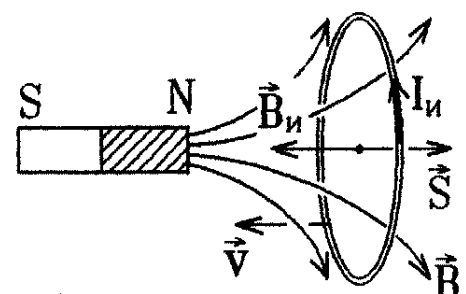


Рис.1.10

Вопрос : подносим кусок металла к постоянному магниту. Будет он притягиваться или отталкиваться от магнита (рис.1.11) ?

Ответ : с одной стороны, в металле возникают токи намагничивания, которые делают металл магнитом, притягивающимся к постоянному магниту (ферро- или парамагнетизм). Но с другой стороны, каждый замкнутый контур внутри металла является проводящим контуром, и в нем появится индукционный ток $I_{\text{и}}$ (рис.1.11).

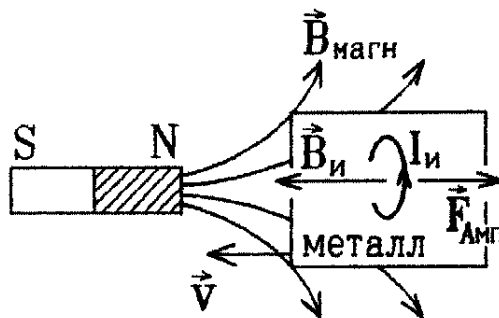


Рис.1.11

Сила Ампера, действующая на этот ток со стороны магнитного поля магнита, будет *отталкивать* его. Такие индукционные токи, возникающие в проводнике при изменении магнитного поля, называются токами Фуко. Они препятствуют внесению проводника в магнитное поле. Но токи Фуко – это токи проводимости. В отличие от токов намагничивания они быстро затухают из-за сопротивления проводника, а их энергия переходит в джоулево тепло

$$Q = \int I_{\text{и}}^2 R dt.$$

Работа, производимая против сил Ампера при внесении проводника в магнитное поле, идет на его нагревание.

Пример: плавление металлолома конверторным методом (в быстропеременном магнитном поле). (Следует иметь в виду, что вблизи мощных установок с быстропеременным магнитным полем могут также нагреваться металлические кольца на пальцах и, что еще хуже, – металлические зубы !)

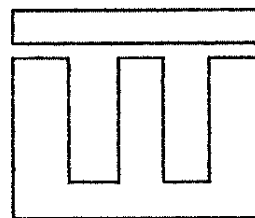


Рис.1.12

Сердечники трансформаторов, чтобы они не грелись, делают из тонких пластинок (рис.1.12), чтобы разорвать замкнутый контур и устранить токи Фуко (сейчас изготавливают ферритовые сердечники, не проводящие ток).

Индукционный ток в тонком замкнутом проводнике с сопротивлением R выражается, как

$$I_{\text{и}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{и}}}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

В сверхпроводящем состоянии (при низких температурах $T \rightarrow 0 \text{ K}$) $R = 0$ и, так как ток $I_{\text{и}}$ не может стать бесконечным, то $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ или

$\Phi = \text{const}$: как бы ни двигать, как бы ни деформировать в магнитном поле контур из сверхпроводника, магнитный поток через него не изменяется !

Иначе говоря, незатухающий индукционный ток всегда имеет такую

величину, чтобы полностью скомпенсировать изменение потока внешнего магнитного поля.

Пример: сверхпроводник (кольцо из сверхпроводника) весом mg лежит на отключенной катушке электромагнита (рис.1.13). Электромагнит включают. Но созданное им поле должно компенсироваться полем возникающего индукционного тока (опять $\Phi = 0$) (рис.1.14).

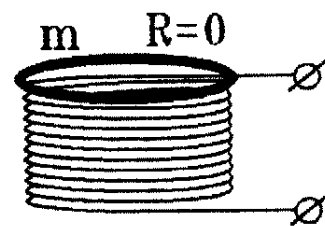


Рис.1.13

Появляются силы Ампера

$\vec{F}_A = \oint I_{\text{инд}} [d\vec{l}, \vec{B}_{\text{катушки}}]$, которые в неоднородном магнитном поле катушки выталкивают сверхпроводящий виток с током $I_{\text{инд}}$ вверх. Когда $F_A \geq mg$,

то виток повиснет в воздухе над электромагнитом («гроб Магомета»). Такая идея «подвески» в неоднородном магнитном поле осуществляется для транспорта на магнитной «подушке». Вагон, в проводящем днище которого циркулируют возникающие индукционные токи, приподнимается на высоту нескольких миллиметров над электромагнитом. Отсутствие силы трения позволяет обеспечить огромную скорость такого транспорта.

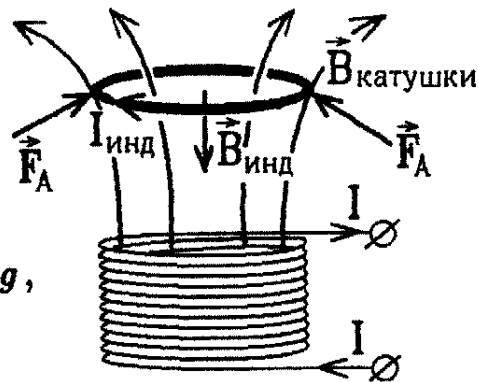


Рис.1.14

4 Явление самоиндукции. Индуктивность

Протекая по замкнутому проводнику, ток создает магнитное поле $\vec{B}$ и магнитный поток, пронизывающий площадь, охватываемую проводником. Величина такого магнитного потока пропорциональна величине тока в проводнике:

$$\Phi = LI.$$

Коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью проводника. Измеряется индуктивность в генри [Гн].

(1 Гн – это индуктивность такого контура, для которого магнитный поток равен 1 Вб при протекающем по контуру токе 1 А.)

Пример: вычислим индуктивность очень длинного соленоида с площадью витков S , в котором на длину l приходится N витков (рис.1.15).

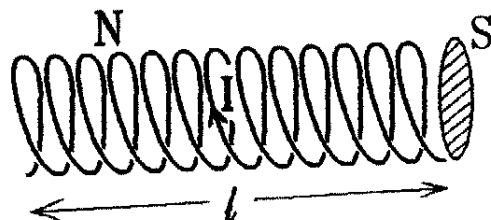


Рис.1.15

Если по соленоиду, заполненному магнетиком с проницаемостью μ , течет ток I , то, пренебрегая ослаблением поля на краях соленоида, получаем внутри него индукцию магнитного поля $B = \mu\mu_0 IN/l$. То-

гда полный магнитный поток через все N витков будет $\Phi = BSN = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} SI = LI$. Отсюда

$$L_{\text{сол}} = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Замечание: так как магнитный поток Φ создается самим током I , то по правилу винта векторы $\vec{B}$ и $\vec{S}$ направлены в одну сторону и $\Phi > 0$ (рис.1.16). Поэтому индуктивность проводника L всегда положительна.

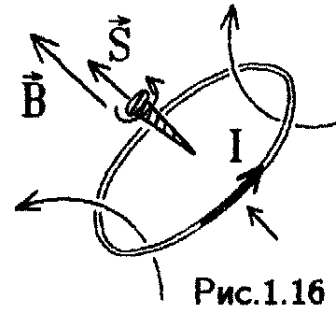


Рис.1.16

⚠ Важные замечания.

1) Формула $\Phi = LI$ применима только для тонких проводников, в которых проводящий контур практически совпадает с осью проводника. Для толстых проводников (рис. 1.17) выбор контура в определении $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ неоднозначен, поэтому для толстых проводников формулу $\Phi = LI$ применять нельзя!

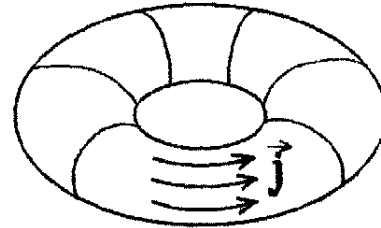


Рис.1.17

2) Индуктивность проводников L постоянна в немагнитных, диамагнитных и парамагнитных средах и зависит от величины тока I в присутствии ферромагнетика, в котором от тока зависит проницаемость μ (рис.1.18). В очень сильных полях ферромагнетик ведет себя как парамагнетик, так как $\mu \rightarrow 1$.

При изменении тока I в проводнике меняется и вызываемый им магнитный поток Φ . Поэтому, согласно закону Фарадея, в проводнике должна появиться э.д.с. самоиндукции:

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

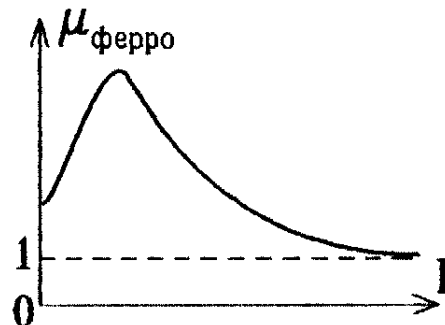
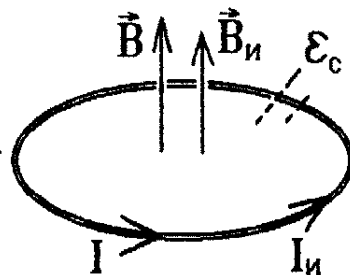


Рис.1.18

Если ферромагнетик отсутствует, то $L = \text{const}$, и

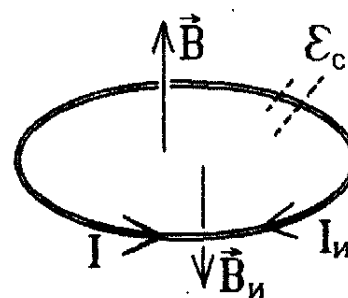
$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

Эта э.д.с. создает дополнительный индукционный ток $I_{\text{и}}$, направленный так, чтобы уменьшить первоначальное изменение тока I (рис.1.19 – 1.20). Изменяясь, ток I порождает э.д.с. самоиндукции, препятству-



(ток I убывает)

Рис.1.19



(ток I возрастает)

Рис.1.20

ющую этому изменению.

Вопрос : что опаснее – включать электромагнит или выключать его ? Почему телевизоры загораются при выключении ?

Ответ : огромная э.д.с. самоиндукции создает вольтовую дугу между размыкаемыми контактами.

5 Взаимная индукция

Э.д.с. электромагнитной индукции в замкнутом проводящем контуре возникает при изменении магнитного потока в нем. Но этот магнитный поток, вообще говоря, может создаваться магнитным полем какого-то *другого тока*, текущего в другом замкнутом проводнике. Поэтому следует говорить о *системе двух (нескольких) замкнутых проводников (контуров с токами)*.

Например, ток I_1 в первом проводнике (рис.1.21) создает некоторый магнитный поток $\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}$ через

второй проводящий контур. Ясно, что с увеличением тока I_1 будет пропорционально увеличиваться поток Φ_2 :

$$\Phi_2 = L_{21} I_1.$$

Коэффициент пропорциональности L_{21} называется взаимной индуктивностью (также измеряется в генри). Наоборот, если ток I_2 потечет по проводнику 2, то он создаст через контур 1 магнитный поток

$$\Phi_1 = L_{12} I_2.$$

Существует замечательная теорема взаимности:

В отсутствии ферромагнетика коэффициенты взаимной индуктивности одинаковы:

$$L_{12} = L_{21}.$$

(Теорема взаимности означает, что при пропускании по контурам одинаковых токов $I_1 = I_2$ они создают в «чужих» контурах одинаковые магнитные потоки $\Phi_1 = \Phi_2$!)

Пример : в центре кругового витка радиуса r в той же плоскости установили крохотную рамку с площадью S и током I (рис.1.22).

Пустим тот же ток I по внешнему витку. В плоскости рамки он создаст тот же магнитный поток $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2r} S$. Взаимная

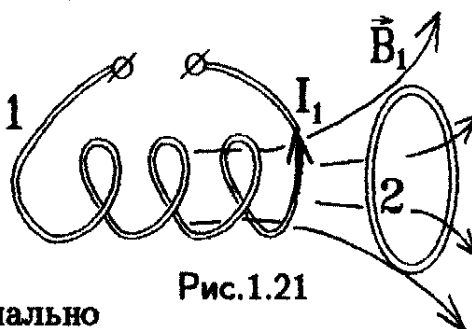


Рис.1.21

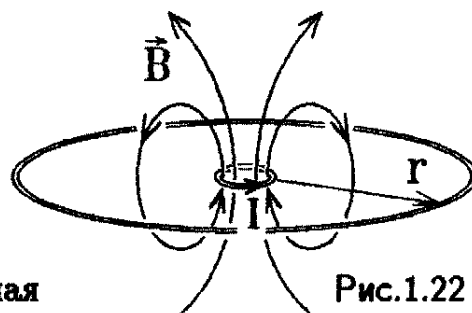


Рис.1.22

индуктивность этих проводников $L_{12} = \frac{\mu_0 S}{2r}$.

Но в присутствии ферромагнетика $L_{12} \neq L_{21}$!

Пример: трансформатор с ферромагнитным сердечником, (рис.1.23). Практически все линии индукции магнитного поля проходят внутри сердечника.

При включении тока I_1 имеем $B_1 = \mu(I_1)\mu_0 I_1 \frac{N_1}{l}$. Во второй обмотке с сечением S возникает магнитный поток $\Phi_2 = B_1 N_2 S = \mu(I_1)\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1 = L_{21} I_1$.

Наоборот, при включении тока I_2 во второй обмотке имеем

$B_2 = \mu(I_2)\mu_0 \frac{N_2}{l} I_2$ и $\Phi_1 = B_2 N_1 S = \mu(I_2)\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_2 = L_{12} I_2$. От-

сюда видно, что $L_{12} = \mu(I_2)\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S \neq L_{21} = \mu(I_1)\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S$ по той причине, что магнитная проницаемость μ ферромагнетика зависит от величины тока I , поэтому и взаимная индуктивность начинает зависеть от тока.

Но в отсутствии ферромагнетика коэффициенты взаимной индуктивности постоянны.

Замечание: они не обязательно положительны. Если токи I_1 и I_2 протекают по контурам в противоположных направлениях (рис.1.24), то в соответствии с выбранным правилом определения направления вектора $\vec{S}$ (правило винта) получим $\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S} < 0$. В этом случае и $L_{12} < 0$.

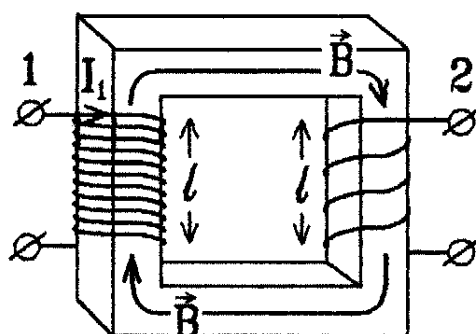


Рис.1.23

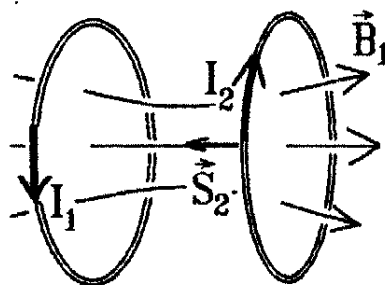


Рис.1.24

(Ясно, что коэффициенты L_{12} точно можно установить для определенных контуров. Поэтому формулы $\Phi_1 = L_{12} I_2, \dots$ можно использовать только для системы тонких проводников, но не для толстых проводников, где выбор контура неоднозначен.)

При изменении тока в одном проводнике, в другом возникает э. д. с. электромагнитной индукции, называемая

э. д. с. взаимной индукции:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt};$$

$$\mathcal{E}_1 = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

(если ферромагнетики отсутствуют).

Надо всегда помнить, что изменяющийся индукционный ток также должен вызывать появление э. д. с. самоиндукции.

Поэтому если замкнутый проводник (цепь) 1 находится вблизи других проводников с током, создающих магнитное поле (рис.1.25), то закон Ома для полной цепи (или второе правило Кирхгофа) следует записывать с учетом всех э. д. с. взаимной индукции и э. д. с. самоиндукции:

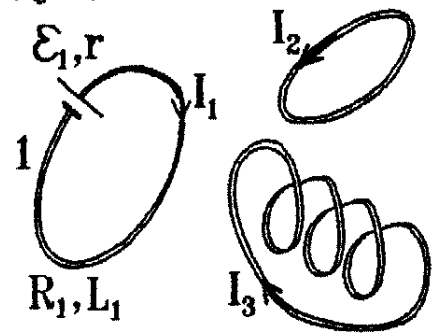


Рис.1.25

$$I_1(R_1 + r) = \sum \mathcal{E}_{\text{пост.тока}} + \sum \mathcal{E}_{\text{взаим.инд.}} + \mathcal{E}_{\text{самоинд.}},$$

или

$$I_1(R_1 + r) = \mathcal{E}_1 - \sum_{n \neq 1} L_{1n} \frac{dI_n}{dt} - L_1 \frac{dI_1}{dt},$$

т.е. надо учитывать все явления, приводящие к появлению тока в цепи.

Глава 2.

Энергия магнитного поля

1 Энергия проводника с током

При изменении тока в замкнутой цепи в ней возникает э.д.с. самоиндукции. Работа по перемещению заряда dq против этой э.д.с. (рис.2.1) идет на изменение энергии тока (напомним, что в электростатике $\delta A = (\varphi_1 - \varphi_2)dq$):

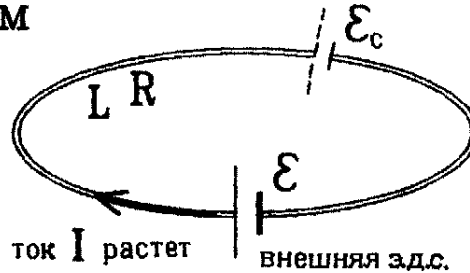


Рис.2.1

$$\delta A = -\varepsilon_c dq = L \frac{dI}{dt} dq = L \frac{dq}{dt} dI = LI dI = dW.$$

Пусть ток возрастает от 0 до I , тогда в случае отсутствия ферромагнетика $L = \text{const}$ и

$$W_{\text{тока}} = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{сравните с формулой для} \\ \text{энергии заряженного про-} \\ \text{водника емкости } C : \end{array} \right) \Rightarrow W_{\text{заряда}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Эта энергия W проводника с током является одновременно энергией магнитного поля, созданного током I , текущим по проводнику с индуктивностью L .

Пример: сверхпроводник выдерживает огромные токи с плотностью $j \approx 10^7 \text{ А/см}^2$. Пустив по сверхпроводнику ток такой величины, можно накопить в нем огромную энергию (в Японии построен сверхпроводящий накопитель энергии до 10^{12} Дж). Тогда можно было бы транспортировать электроэнергию не по проводам (при транспортировке по линиям электропередач от Волжского каскада электростанций к Москве теряется $\sim 20 \div 25\%$ энергии), а перевоза сверхпроводящие аккумуляторы с током.

Рассмотрим более детально процесс нарастания тока в замкнутой цепи. Ток создается источником некоторой сторонней э.д.с. Закон Ома для замкнутой цепи принимает вид $IR = \varepsilon + \varepsilon_c$, а работа источника сторонней э.д.с. по перемещению заряда dq вычисляется, как

$$\delta A_{\text{ист}} = \mathcal{E} dq = (IR - \mathcal{E}_c) dq = I^2 R dt + \frac{d(LI)}{dt} I dt.$$

Итак, работа источника сторонней э.д.с. идет и на изменение внутренней энергии проводника, т.е. на выделение джоулева тепла $\delta Q = I^2 R dt$, и на изменение энергии тока в нем $dW_{\text{тока}} = Id(LI)$ (в таком виде формула справедлива и в присутствии ферромагнетика):

$$\delta A_{\text{ист}} = \delta Q + dW_{\text{тока}}.$$

Обычно проводники с токами взаимодействуют друг с другом. Пусть рядом расположены две замкнутые цепи с токами I_1 и I_2 (рис.2.2). При изменении токов возникает взаимная индукция, и правила Кирхгофа для этих цепей имеют вид

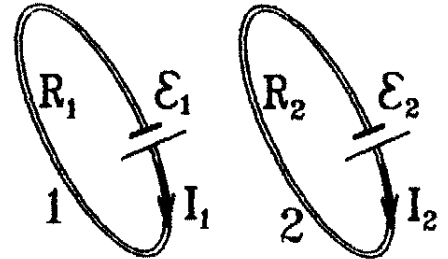


Рис.2.2

$$\mathcal{E}_1 = I_1 R_1 - \mathcal{E}_{\text{и}1} - \mathcal{E}_{c1}; \quad \mathcal{E}_2 = I_2 R_2 - \mathcal{E}_{\text{и}2} - \mathcal{E}_{c2}.$$

Суммарная работа, производимая в них источниками э.д.с., равна

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{ист}} = \mathcal{E}_1 I_1 dt + \mathcal{E}_2 I_2 dt = & \underbrace{I_1^2 R_1 dt + I_2^2 R_2 dt}_{\text{джоулево тепло}} + \\ & + \underbrace{(-\mathcal{E}_{\text{и}1} - \mathcal{E}_{c1}) I_1 dt + (-\mathcal{E}_{\text{и}2} - \mathcal{E}_{c2}) I_2 dt}_{\text{изменение энергии токов в цепях}}. \end{aligned}$$

Подставляя

$$\mathcal{E}_{ci} = -L_i \frac{dI_i}{dt}; \quad \mathcal{E}_{\text{и}1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}; \quad \mathcal{E}_{\text{и}2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

в случае отсутствия ферромагнетика (когда коэффициенты $L_1, L_2, L_{12} = L_{21}$ постоянны), находим суммарное изменение энергии токов

$$\begin{aligned} dW_{\text{тока}} &= L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + L_{12} I_1 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1 = \\ &= d(L_1 I_1^2 / 2 + L_2 I_2^2 / 2 + L_{12} I_1 I_2). \end{aligned}$$

Энергия системы двух замкнутых проводников с токами I_1 и I_2 имеет вид

$$W = L_1 I_1^2 / 2 + L_2 I_2^2 / 2 + L_{12} I_1 I_2.$$

Здесь величина $(L_1 I_1^2 / 2 + L_2 I_2^2 / 2)$, которая всегда положительна, называется собственной энергией проводников с токами I_1 и I_2 , а величина $L_{12} I_1 I_2$ — взаимной энергией токов, т.е. энергией их взаимодействия.

Замечание : вместе с коэффициентом взаимной индуктивности $L_{12} = L_{21}$ взаимная энергия двух токов может быть как положительной (если токи текут по контурам в одном направлении, как показано на рис.2.3), так и отрицательной (если токи обтекают контуры в противоположных направлениях, рис.2.4). Токи могут взаимно усиливать

или ослаблять их результирующее магнитное поле, но оно не может исчезнуть полностью, и поэтому полная энергия системы токов W всегда положительна.

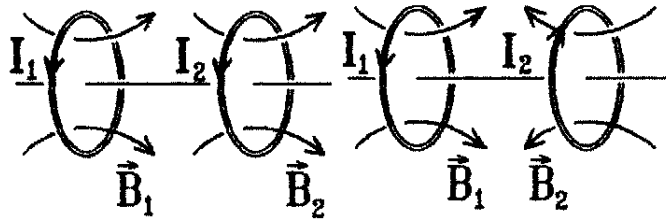


Рис.2.3

Рис.2.4

2 Энергия магнитного поля

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид с током I (рис.2.5). Постоянное магнитное поле с индукцией $B = \mu\mu_0 IN/l$ имеется только внутри соленоида, а энергия тока, текущего по участку соленоида длины l , равна



Рис.2.5

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \underbrace{\mu\mu_0 \frac{N^2}{l}}_{= L_{\text{сол}}} S I^2 = \frac{1}{2\mu\mu_0} \underbrace{\left(\mu\mu_0 \frac{N}{l} I\right)^2}_{= B^2} l S = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V,$$

где V – объем участка. Эта энергия будет одновременно энергией магнитного поля, созданного таким током. Получим выражение для плотности энергии магнитного поля, т.е. для энергии единицы объема :

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{сравните эту формулу с выражением для плотности энергии электрического поля :} \end{array} \right) \Rightarrow w = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{ED}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Энергию магнитного поля, заключенного в произвольном объеме V , определяют по формуле :

$$W = \int_{(V)} w dV = \int_{(V)} \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dV.$$

Но эта формула справедлива, строго говоря, только для неферромагнитной среды !

Действительно, в присутствии ферромагнетика, помимо нагревания проводника с током, будут нагреваться и участки ферромагнитной среды, в которых возникнут заметные токи намагничивания. На это пойдет часть работы источника тока. Поэтому энергия магнитного поля в ферромагнитной среде, полученного при той же работе источника сторонней э. д. с. , окажется меньше энергии поля в неферромагнитной среде.

Например, для системы двух проводников с токами I_1 и I_2 , индукции создаваемых ими магнитных полей по принципу суперпозиции складываются векторно (рис.2.6) :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

и суммарная энергия результирующего магнитного поля в неферромагнитной среде ($\mu \approx 1$)

$$W = \int_{(V)} \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dV = \int_{(V)} \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2}{2\mu\mu_0} dV = \\ = \int_{(V)} \frac{\vec{B}_1^2}{2\mu\mu_0} dV + \int_{(V)} \frac{\vec{B}_2^2}{2\mu\mu_0} dV + \int_{(V)} \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\mu\mu_0} dV.$$

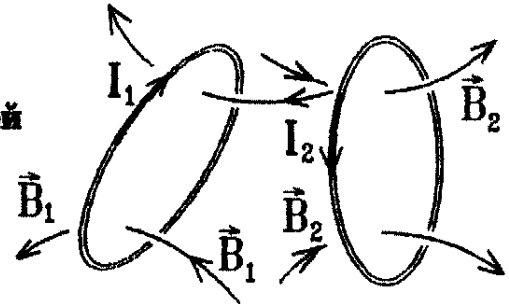


Рис.2.6

Отсюда видно, что взаимная энергия токов отрицательна ($L_{12} < 0$), когда $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 < 0$, т.е. когда векторы индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены в разные стороны и компенсируют друг друга.

Энергии контуров с токами не аддитивны.

Замечание : зная создаваемое током магнитное поле, можно рассчитать коэффициенты индуктивности проводников по формулам :

$$\frac{LI^2}{2} = \int_{(V)} \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dV \quad \text{и} \quad L_{12}I_1I_2 = \int_{(V)} \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{2\mu\mu_0} dV,$$

или $L = \frac{1}{I^2} \int_{(V)} \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dV$ и $L_{12} = \frac{1}{I_1I_2} \int_{(V)} \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\mu\mu_0} dV$,

где интегрирование проводится по всему объему пространства, заполненному магнитным полем рассматриваемых токов.

Эти формулы можно применять при вычислении индуктивностей любых проводников, в том числе и толстых.

3 Пондеромоторные силы

До сих пор мы считали, что контуры с током покоятся. Но если они не закреплены, то под действием сил Ампера начнут перемещаться, и работа сторонних э.д.с. пойдет не только на выделение джоулева тепла и изменение энергии магнитного поля, но и на совершение механической работы по перемещению контуров:

$$\delta A_{\text{ист}} = \underbrace{\delta Q}_{\text{джоулево тепло}} + \underbrace{dW}_{\text{энергия магн. поля}} + \underbrace{\delta A_{\text{мех}}}_{\text{механич. работа}}.$$

Рассмотрим, например, уже исследованную выше систему двух тонких замкнутых проводников с токами I_1 и I_2 (рис.2.7), для которой работа источников сторонних э. д. с.

$$\delta A_{\text{ист}} = \delta Q + (-\mathcal{E}_{\text{и1}} - \mathcal{E}_{\text{с1}})I_1 dt + (-\mathcal{E}_{\text{и2}} - \mathcal{E}_{\text{с2}})I_2 dt.$$

Сумма э. д. с. индукции и самоиндукции в замкнутом контуре определяется изменением результирующего магнитного потока через этот контур:

$$\mathcal{E}_{\text{и1}} + \mathcal{E}_{\text{с1}} = -\frac{d\Phi_1}{dt}; \quad \mathcal{E}_{\text{и2}} + \mathcal{E}_{\text{с2}} = -\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Поэтому

$$\delta A_{\text{ист}} = \delta Q + I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}},$$

и механическая работа по перемещению контуров результирующими силами (Ампера) определяется формулой:

$$\delta A_{\text{мех}} \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 - dW.$$

Но в неферромагнитной среде изменение энергии магнитного поля токов

$$dW = d \left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2 \right).$$

(Заметим, что коэффициенты L_1 , L_{12} , L_{21} уже не будут постоянными, т.к. они могут меняться при перемещении и деформации проводников (L_{12} , например, всегда зависит от относительного расположения контуров с токами).

Преобразуем это выражение, учитывая, что для тонких проводящих контуров с токами справедливы формулы $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1$:

$$dW = d \left[(L_1 I_1 + L_{12} I_2) \frac{I_1}{2} + (L_2 I_2 + L_{21} I_1) \frac{I_2}{2} \right] = \frac{1}{2} d(I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2).$$

(магнитный поток через любой контур создается магнитными полями всех токов во всех контурах). Тогда при условии постоянства магнитных потоков Φ_1 , $\Phi_2 = \text{const}$ получаем формулу:

$$\delta A_{\text{мех}} = -dW|_{\Phi_i = \text{const}} = -\frac{1}{2}(\Phi_1 dI_1 + \Phi_2 dI_2).$$

А при условии постоянства токов в контурах I_1 , $I_2 = \text{const}$ имеем:

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{мех}} = dW|_{I_i = \text{const}} &= I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 - \frac{1}{2}(I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2) = \\ &= \frac{1}{2}(I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2). \end{aligned}$$

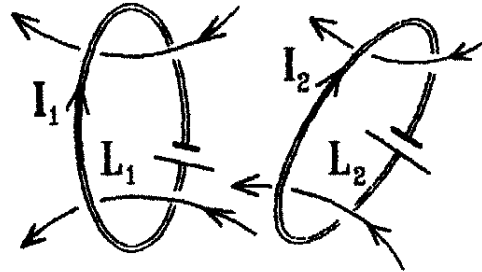


Рис.2.7

Таким образом, работа, совершаемая силами Ампера при перемещении контуров с токами, равна либо отрицательному изменению их общей магнитной энергии при условии постоянства магнитных потоков через эти контуры, либо положительному изменению их магнитной энергии при условии постоянства токов в контурах:

$$\delta A_{\text{мех}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW|_{\Phi_i = \text{const}} = dW|_{I_i = \text{const}}.$$

Не надо искать такие *действительные* перемещения контуров, при которых были бы постоянны магнитные потоки или токи. Эти условия являются чисто математическими, а полученная формула справедлива для любых перемещений контуров и позволяет определить действующую на них пондеромоторную силу (силу взаимодействия двух контуров):

$$\vec{F} = -\text{grad } W|_{\Phi_i = \text{const}} = \text{grad } W|_{I_i = \text{const}}.$$

Пример: две катушки с токами I_1 и I_2 навиты на общем неферромагнитном сердечнике (рис. 2.8).

При условии $I_1, I_2 = \text{const}$ собственные энергии магнитного поля токов постоянны. Но взаимная индуктивность L_{12} зависит от расстояния x между катушками. Поэтому они взаимодействуют с силой

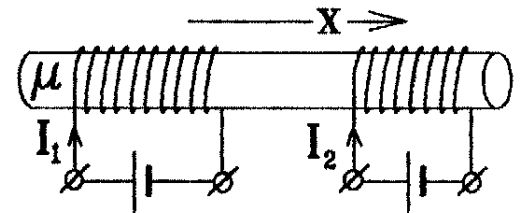


Рис.2.8

$$F = \left| \text{grad } W \right|_{I_1, I_2 = \text{const}} = \frac{\partial}{\partial x} (L_{12} I_1 I_2) = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}.$$

{
ab hoc
et
ab hac
}

Слово "пондеромоторный" образовано из двух латинских слов: *ponderis* (род. падеж от *pondus* – вес, тяжесть) и *motor* – приводящий в движение, и в дословном переводе означает: (силы) *приводящие в движение тяжести (весомые тела)*, так как во времена включения этого термина в научный лексикон признавалось существование и невесомых тел, например, «эфира».

В настоящее время в электродинамике термин "пондеромоторные силы" означает: силы, действующие на тела в электрическом и магнитном полях.

Глава 3.

Электрические колебания

1 Интегрирующие и дифференцирующие RC – цепочки

Подадим на RC – цепочку (рис.3.1) входное напряжение в виде прямоугольной ступеньки (рис.3.2). Это напряжение играет роль внешней э. д. с. . Поэтому правило Кирхгофа для контура запишется в виде:

$$U_{\text{вх}} = U_C + U_R \text{ или } U_0 = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt},$$

причем в начальный момент конденсатор был незаряжен: $q|_{t=0} = 0$. Решаем это уравнение методом разделения переменных:

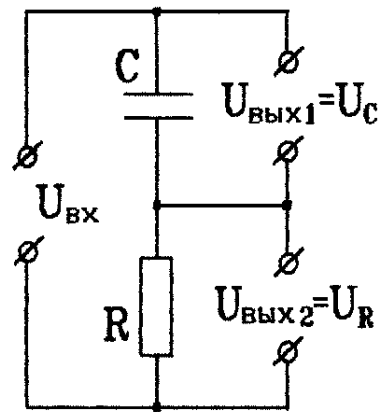


Рис.3.1

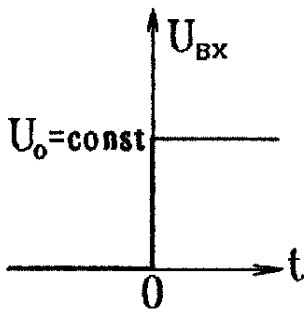


Рис.3.2

или

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - U_0 C)$$

$$\int_0^q \frac{dq}{q - U_0 C} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}.$$

Отсюда следует, что $\ln \left(\frac{q - U_0 C}{-U_0 C} \right) = -\frac{t}{RC}$,

и в результате $q = U_0 C (1 - e^{-t/RC})$.

Заметим теперь, что при $RC \gg t$ напряжение на конденсаторе возрастает практически по линейному закону:

$$U_{\text{вых1}} = U_C = \frac{q}{C} = U_0 \left(1 - \underbrace{1 + \frac{t}{RC} + O\left(\frac{t}{RC}\right)^2}_{= \exp(-t/RC)} \right),$$

т.е. $U_{\text{вых1}} \approx \frac{U_0}{RC} t$ — входное напряжение интегрируется по времени (рис.3.3).

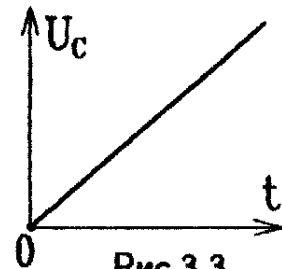


Рис.3.3

Такая RC-цепочка (рис.3.4) называется интегрирующей при выполнении условия $RC \gg t$. Если подать на ее вход не слишком быстро

меняющееся со временем напряжение $U_{\text{вх}}$, то из полученного выше результата находим, что

$$U_{\text{вых1}} = U_C \approx \frac{t}{RC} U_{\text{вх}} \ll U_{\text{вх}}.$$

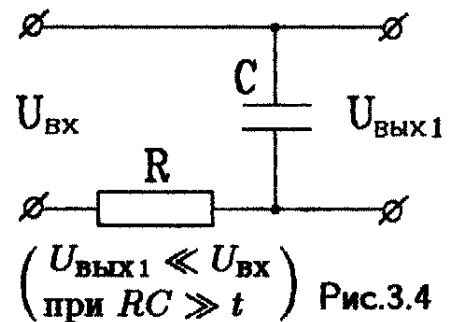
Тогда слагаемым U_C при записи правила Кирхгофа можно пренебречь:

$$U_{\text{вх}} = U_C + U_R \approx U_R = R \frac{dq}{dt} = RC \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{C} \right) = RC \frac{dU_{\text{вых1}}}{dt}.$$

Отсюда следует

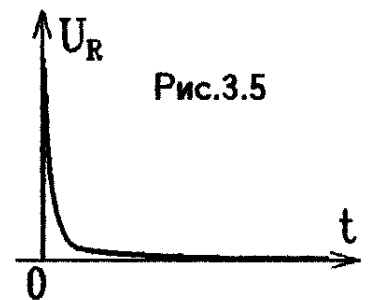
$$U_{\text{вых1}} \approx \frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{вх}} dt$$

С другой стороны, при $RC \ll t$ падение напряжения на сопротивлении R (рис.3.1) зависит от времени t , как



$$U_{\text{вых2}} = U_R = R \frac{dq}{dt} = R \frac{d}{dt} \left[U_0 C \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right) \right] = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

т.е. при $RC \ll t$ величина напряжения $U_{\text{вых2}} = U_R \approx 0 \ll U_{\text{вх}}$ всюду, кроме места скачкообразного изменения входного напряжения (рис.3.5). Такая зависимость U_R от t соответствует дифференцированию «ступеньки» $U_{\text{вх}}$.



RC-цепочка, изображенная на рис.3.6, называется дифференцирующей при выполнении условия $RC \ll 1$. Подавая на ее вход произвольно меняющееся напряжение $U_{\text{вх}}(t)$, получаем $U_{\text{вх}} = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$.

Т.к. $R \frac{dq}{dt} = U_{\text{вых2}} \ll U_{\text{вх}}$ при $RC \ll t$, то $q \approx CU_{\text{вх}}$ и

$$U_{\text{вых2}} = RC \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}.$$

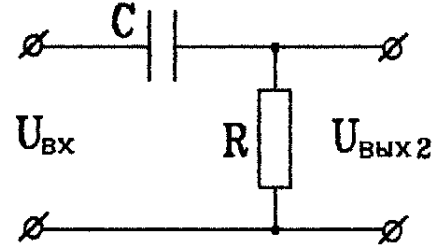
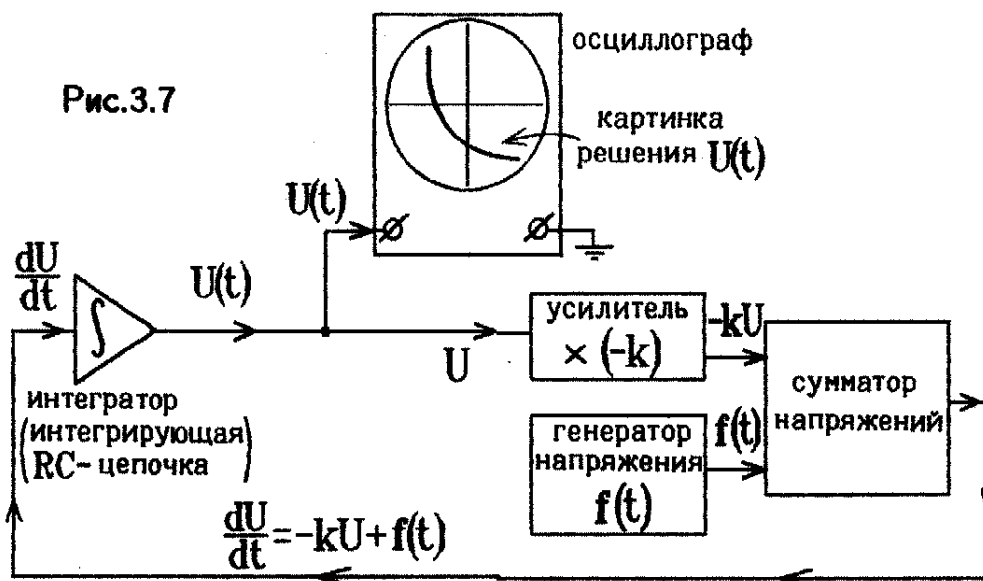


Рис.3.6

Вывод: существуют элементы цепей, которые автоматически интегрируют или дифференцируют подаваемые на них напряжения. Соединяя их необходимым образом, можно смоделировать в электрической цепи решение любых дифференциальных уравнений. Такие электронные системы называются аналоговыми вычислительными машинами (ABM).

Пример: необходимо исследовать решение уравнения $\frac{dU}{dt} + aU = f(t)$.

Составляем цепь, изображенную на рис.3.7. Изменяя параметры этой цепи (переменные R, C и т.п.), можно качественно исследовать поведение решения в любой области.



2 Собственные электрические колебания

Электрический колебательный контур – это замкнутая электрическая цепь, обладающая некоторой емкостью C и индуктивностью L (рис.3.8).

Если конденсатор емкости C первоначально был заряжен, то он начинает разряжаться, и в цепи возникает ток $I = \frac{dq}{dt}$, вызывающий

появление э.д.с. самоиндукции $\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}$, препятствующей изменению этого тока. В момент, когда конденсатор полностью разрядится, в цепи протекает ток I . Э.д.с. самоиндукции препятствует его мгновенному исчезновению, и он, постепенно затухая, начинает пере-

заряжать конденсатор.

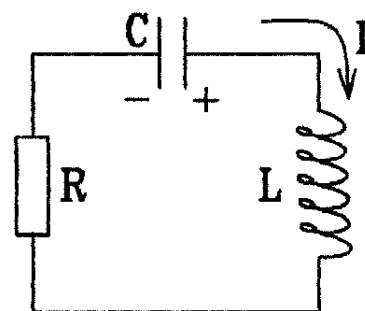


Рис.3.8

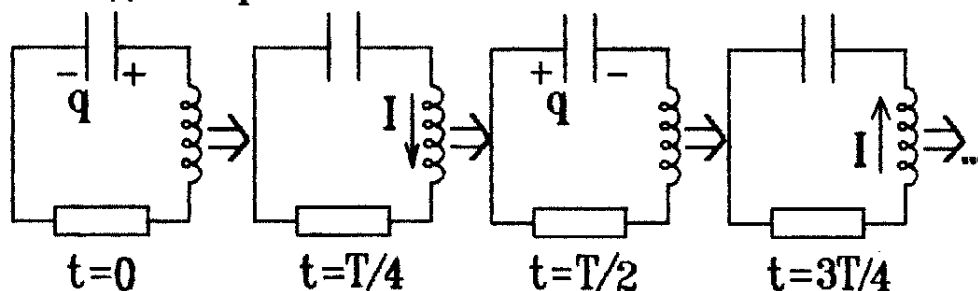


Рис.3.9

Затем конденсатор снова разряжается, ток течет в противополож-

ном направлении и т.д. (рис.3.9).

Электрические колебания происходят за счет превращения электрической энергии заряженного конденсатора в магнитную энергию тока в цепи и наоборот.

Если к электрическому контуру не подключены никакие внешние источники переменной э.д.с., то колебания называются собственными.

Изменяться по периодическому закону будет величина заряда на конденсаторе, величины тока и напряжения в цепи.

Получим уравнение этих колебаний.

Ток в контуре будет квазистационарным (меняющимся достаточно медленно, чтобы можно было применять законы постоянного тока), если $l/c \ll T$, где l – линейный размер цепи, c – скорость света, T – период электрических колебаний. Так как на практике размер радиоустройств $l \lesssim 0,1 \div 1$ м, а $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, то квазистационарными можно считать токи, меняющиеся с частотой $\nu = 1/T \lesssim 10^8 \div 10^9$ Гц! Для такого тока, (рис.3.8), применимо правило Кирхгофа

$$IR + U_C = \mathcal{E}_c.$$

Подставляя в него $U_C = \frac{q}{C}$, $I = \frac{dq}{dt}$, $\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$, получаем

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

– это уравнение собственных затухающих колебаний, где

$$\boxed{\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}}.$$

Его решение ищем в виде $q = Ae^{\lambda t}$, где A, λ – некоторые постоянные. Подставляя это решение в уравнение колебаний, находим

$$A(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0.$$

Корни этого характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. При $\beta^2 \geq \omega_0^2$ или $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ гармонические колебания в контуре отсутствуют – конденсатор разряжается аperiodически (рис.3.10).

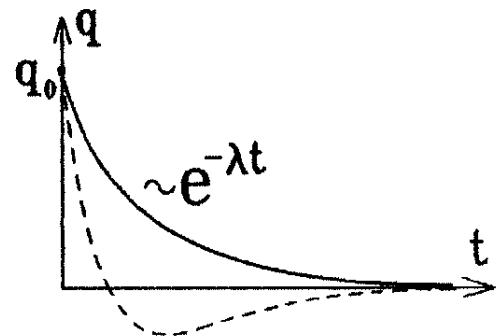


Рис.3.10

Электрических колебаний в контуре не возникает, если его омическое сопротивление R велико, или очень мала индуктивность L контура, или слишком велика его емкость C , т.е. если выполнено условие

$$R \geq 2\sqrt{L/C}.$$

Но если $\beta^2 < \omega_0^2$, то введем обозначение $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Тогда $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$, и искомое решение уравнения затухающих колебаний является суммой двух решений:

$$q = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}).$$

Это решение должно быть вещественным:

$$q = q^* = e^{-\beta t} (A_1^* e^{-i\omega t} + A_2^* e^{i\omega t}),$$

т.е. $A_2 = A_1^*$. Введем вместо величин A_1 и A_2 новые действительные постоянные q_0 и φ :

$$A_1 = \frac{q_0}{2} e^{i\varphi}.$$

Тогда $A_2 = A_1^* = \frac{q_0}{2} e^{-i\varphi}$ и

$$q = e^{-\beta t} \frac{q_0}{2} (e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}).$$

Но $\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos \alpha$, следовательно,

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Собственные электрические колебания в контуре происходят с частотой ω (это частота собственных затухающих колебаний):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

и с уменьшающейся по экспоненциальному закону амплитудой $q_{\max}(t) = q_0 e^{-\beta t}$ (рис.3.11).

Причиной затухания колебаний в электрическом колебательном контуре является превращение части энергии тока в джоулево тепло на омическом сопротивлении R : $dQ = I^2 R dt$ и рассеянии этого тепла в окружающую среду.

Если сопротивление контура R пренебрежимо мало или отсутствует (для сверхпроводящего контура $R = 0$), то колебания в контуре будут незатухающими:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

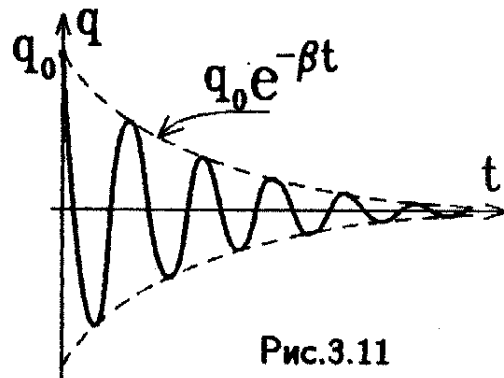


Рис.3.11

с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$.

(это — собственная частота незатухающих колебаний) (формула Томсона)

Вопрос: есть ли ток в электрическом колебательном контуре в тот момент, когда конденсатор заряжается до амплитудного значения?

Ответ: вычислим ток в контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)) =$$

$$= -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Разделим и умножим это выражение на $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$ и обозначим

$$-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \cos \delta; \quad \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \sin \delta.$$

Тогда $I = q_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t} [\cos \delta \cos(\omega t + \varphi) - \sin \delta \sin(\omega t + \varphi)]$.

Но $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$ Следовательно, ток в контуре изменяется по закону

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \delta),$$

где $I_0 = q_0 \omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$.

Итак, затухающие колебания тока происходят с той же частотой, что и колебания заряда q на конденсаторе (или напряжения U_C конденсатора), но *опережают* их по фазе на $\delta = \arctg(-\omega/\beta)$ и, так как $\cos \delta \leq 0$ и $\sin \delta > 0$, то $\pi/2 \leq \delta < \pi$.

Когда конденсатор разрядится полностью ($q = 0, \omega t + \varphi = \pi/2$), ток в контуре $I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\pi/2 + \delta)$ еще не максимален (рис.3.12)! И наоборот, когда конденсатор заряжается до амплитудного значения и энергия электрического поля в нем максимальна, в цепи течет разряжающий конденсатор ток, и часть энергии системы уже перешла в энергию магнитного поля.

Только в том случае, когда электрический контур не имеет омического сопротивления ($R = 0, \beta = 0, \sin \delta = 1, \cos \delta = 0$ и $\delta = \pi/2$), колебания тока в контуре опережают колебания напряжения на конденсаторе на четверть периода ($\delta = \pi/2$), и ток максимален в тот момент, когда конденсатор разряжен. В этом случае энергия электрического поля заряженного конденсатора полностью преобразуется в энергию магнитного поля и наоборот:

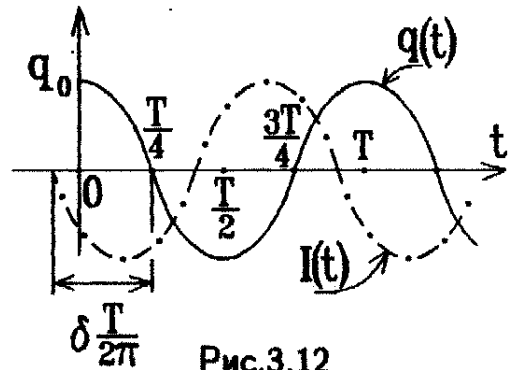


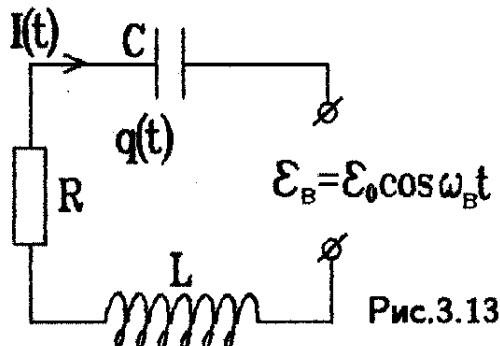
Рис.3.12

$$W_{эл} = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2 L}{2CL} = \underbrace{q_0^2 \omega_0^2}_{= I_0^2} \frac{L}{2} = \frac{LI_0^2}{2} = W_{магн}.$$

3 Вынужденные электрические колебания

Подключим к электрическому колебательному контуру внешний источник э.д.с., изменяющейся по гармоническому закону с частотой ω_B (рис.3.13). Для этого контура запишем правило Кирхгофа:

$$RI + U_C = \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_C.$$



Подставляя в это выражение $U_C = \frac{q}{C}$; $I = \frac{dq}{dt}$; $\mathcal{E}_C = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$, получим уравнение вынужденных гармонических колебаний

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega_B t \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega_B t}.$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения с ненулевой правой частью складывается из общего решения однородного уравнения $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$ и любого частного решения неоднородного уравнения.

Но возникающие собственные затухающие колебания заряда на обкладках конденсатора $q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi)$ (общее решение однородного уравнения) быстро затухают, и в контуре устанавливаются **вынужденные колебания**, происходящие с постоянной амплитудой и частотой ω_B внешней вынуждающей э.д.с.

Ищем это частное решение для вынужденных колебаний в виде $q = A \cos(\omega_B t - \varphi)$. Подставляя его в исходное уравнение, получим

$$\underbrace{A \omega_B^2}_{=a} \underbrace{\left[-\cos(\omega_B t - \varphi) \right]}_{= \cos(\omega_B t - \varphi + \pi)} + \underbrace{2\beta A \omega_B}_{=b} \underbrace{\left[-\sin(\omega_B t - \varphi) \right]}_{= \cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2)} + \underbrace{\omega_0^2 A \cos(\omega_B t - \varphi)}_{=c} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega_B t),$$

$$\text{т.е. } a \cos(\omega_B t - \varphi + \pi) + b \cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2) + c \cos(\omega_B t - \varphi) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega_B t).$$

Сумму трех однонаправленных гармонических колебаний с одинаковой частотой ω_B в левой части уравнения определим с помощью

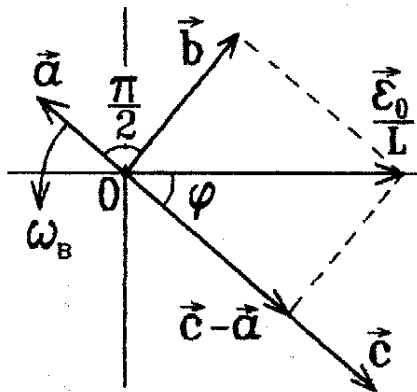


Рис.3.14

векторной диаграммы (рис.3.14), на которой все векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\frac{\vec{\mathcal{E}}_0}{L}$ вращаются вокруг оси O с угловой скоростью ω_B . Чтобы левая часть уравнения была равна правой, необходимо, чтобы

$$\left(\frac{\mathcal{E}_0}{L}\right)^2 = b^2 + (c - a)^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c - a}\right)$$

(колебания q всегда отстают по фазе на φ от колебаний внешней э.д.с. $\mathcal{E}_B$.)



Подставляя в полученные уравнения выражения для $a = A\omega_B^2$; $b = 2\beta A\omega_B$; и $c = A\omega_0^2$, находим зависимости амплитуды A и начальной фазы φ вынужденных колебаний заряда на конденсаторе $q_{\text{вын}} = A \cos(\omega_B t - \varphi)$ от частоты вынуждающей э.д.с. и параметров контура:

$$A^2 \left[(2\beta\omega_B)^2 + (\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 \right] = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{L} \right)^2$$

или $A = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}}$, а также $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}\right)$

(эти колебания происходят и в случае $\beta > \omega_0$).

Напряжение на конденсаторе при этом изменяется по закону

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}} \cdot \cos(\omega_B t - \varphi)$$

и отстает по фазе точно на $\pi/2$ от колебаний тока в контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = A\omega_B [-\sin(\omega_B t - \varphi)] = A\omega_B \cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2).$$

Определим теперь амплитуду вынужденных колебаний тока $I_0 = A\omega_B$, подставляя значения $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и $\beta = \frac{R}{2L}$ в полученную выше формулу для A :

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\mathcal{E}_0\omega_B}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + 4\frac{R^2}{4L^2}\omega_B^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\frac{L^2}{\omega_B^2}\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + \frac{L^2 R^2}{\omega_B^2 L^2}\omega_B^2}} = \\ &= \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L\right)^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует вывод : если в цепь подключен источник постоянного напряжения U_0 (рис.3.15,а), то ток в цепи равен $I_0 = U_0/R$. Если же в цепь включен источник переменного напряжения $\mathcal{E}_B = \mathcal{E}_0 \cos \omega_B t$ (рис.3.13,б), то амплитуды э.д.с. и тока в цепи связаны соотношением $I_0 = \mathcal{E}_0/Z$, где величина

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L\right)^2 + R^2}$$

называется полным сопротивлением или импедансом цепи. Составляющая R называется активным сопротивлением, а $X = \frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L$ — реактивным сопротивлением цепи.

Как видим, для переменного тока сопротивлением обладает как емкость, так и индуктивность. Величину $X_C = \frac{1}{\omega_B C}$ называют емкостным сопротивлением, а $X_L = \omega_B L$ — индуктивным сопротивлением.

Главное различие активного и реактивного сопротивления состоит в том, что на активном сопротивлении R выделяется джоулево тепло, а на реактивных сопротивлениях X_L и X_C — нет !

Действительно, средняя мощность, выделяемая переменным током на каком-либо элементе цепи (за один период) равна $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt$, где U — падение напряжения на этом элементе. Так как падение напряжения на емкости $U_C = \frac{q}{C}$ отстает при вынужденных колебаниях по фазе на $\pi/2$ от колебаний тока, то выделяемая на емкости мощность равна нулю :

$$\begin{aligned} \langle P_C \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T U_{C0} \cos(\omega_B t - \varphi) I_0 \underbrace{\cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2)}_{= -\sin(\omega_B t - \varphi)} dt = \\ &= \frac{U_{C0} I_0}{\omega_B T} \int_0^T \frac{1}{2} d(\cos^2(\omega_B t - \varphi)) = \frac{U_{C0} I_0}{\omega_B T} \frac{\cos^2(\omega_B t - \varphi)}{2} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0 \end{aligned}$$

(четная функция при интегрировании дает ноль).

Аналогично не выделяется мощность и на индуктивном сопротивлении, на котором падение напряжения $U_L = \mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}$ опережает

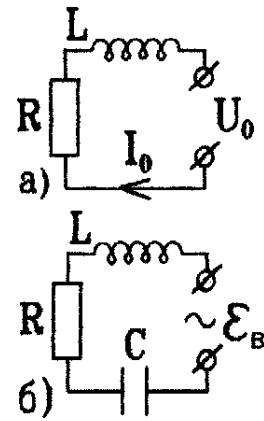


Рис.3.15

колебания тока по фазе на $\pi/2$.

На активном же сопротивлении R за период выделяется мощность

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I dt = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} R I_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega_B t - \varphi + \pi/2) dt.$$

Последний интеграл в этой формуле равен $T/2$, так как $\cos^2(\omega_B t) = (1 + \cos 2\omega_B t)/2$, а $\cos 2\omega_B t$ при интегрировании дает ноль, как четная функция, поэтому

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R.$$

Вывод: переменный ток $I = I_0 \cos \omega_B t$ выделяет в цепи ту же мощность, что и постоянный ток $I_{\text{эфф}} = I_0/\sqrt{2}$, создающий на сопротивлении R падение напряжения $U_{\text{эфф}} = U_0/\sqrt{2}$.

Величины $I_{\text{эфф}}$ и $U_{\text{эфф}}$ называются действующими или эффективными значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры, измеряющие переменный ток, проградуированы в действующих значениях $I_{\text{эфф}}$ и $U_{\text{эфф}}$.

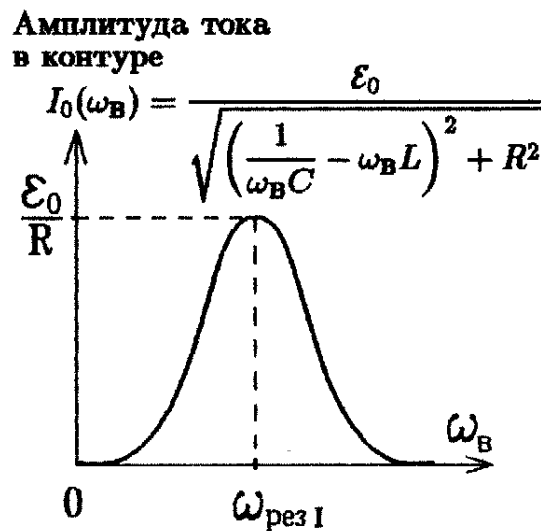
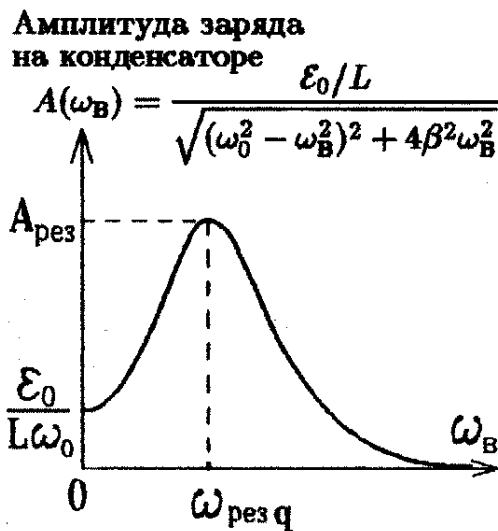
Вопрос: что будет, если к источнику переменной э.д.с. подключить сверхпроводящий контур с $R = 0$?

Ответ: полное сопротивление $Z = \left| \frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L \right| \neq 0$, и ток в контуре будет конечен: $I_0 = \mathcal{E}_0/Z$. Энергия будет перетекать из источника э.д.с. в контур и обратно, не производя в цепи полезной работы. Но энергия источника все же будет расходоваться на излучение контуром электромагнитных волн.

4 Резонанс. Характеристики электрического колебательного контура

Амплитуда вынужденных колебаний, как мы определили, зависит от частоты ω_B внешнего источника э.д.с. График зависимости амплитуды от этой частоты называется амплитудно-частотной характеристикой контура (рис.3.16 – 3.17).

При некоторой частоте внешнего источника амплитуда колебаний достигает максимума. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой $\omega_{\text{рез}}$.



Резонанс тока в контуре (рис.3.17) наступает при наименьшем значении полного сопротивления $Z_{\min} = R$, т.е. при $\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L = 0$ или $\omega_B^2 = \frac{1}{LC}$. Резонансная частота для тока $\omega_{\text{рез } I} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Резонанс напряжения на конденсаторе (рис.3.16) ищем из условия максимума $\frac{dA(\omega_B)}{d\omega_B} = 0$. Приравняв нулю производную по ω_B от знаменателя $A(\omega_B)$: $2(\omega_0^2 - \omega_B^2)(-2\omega_B) + 4\beta^2 \cdot 2\omega_B = 0$, получим $\omega_B^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$.

Т.е. резонансная частота для напряжения (заряда) на конденсаторе

$$\omega_{\text{рез } q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

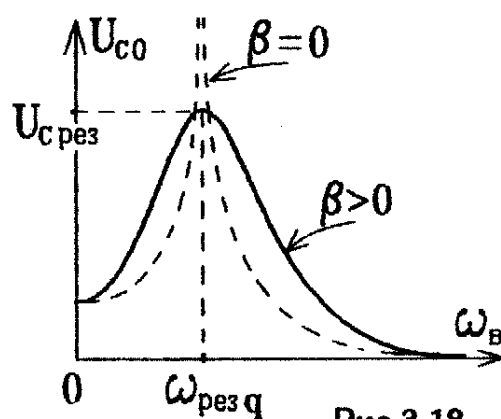
При этой частоте амплитуда заряда на конденсаторе имеет величину

$$q_{\max} = A_{\text{рез}} = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{\varepsilon_0/L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

а резонансное значение амплитуды напряжения на конденсаторе (рис.3.18)

$$U_{C \text{ рез}} = \left(\frac{q}{C}\right)_{\max} = \frac{\varepsilon_0/LC}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\varepsilon_0\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

При $\beta = \frac{R}{2L} \rightarrow 0$ (отсутствие активного сопротивления или очень большая индуктивность L) амплитуда напря-



жения на конденсаторе стремится к бесконечности (рис. 3.18) !

Таким образом, даже если к контуру прикладывать малое внешнее напряжение $\mathcal{E}_в$, то напряжение на отдельных элементах контура может быть очень большим (техника безопасности) ! В этом отношении резонансные явления опасны (пробой конденсатора, возникновение искры и т.п.).

Вопрос: а что будет, если резонанс возникнет в сверхпроводящем контуре ?

Заметим, что в состав электрического колебательного контура не обязательно должны быть впаяны конденсатор и катушка индуктивности. Элементы любой замкнутой цепи обладают некоторым значением емкости C и индуктивности L , и иногда электрические колебания могут возникать в самых необычных системах, например, в микроволновом резонаторе, изображенном на рис.3.19.

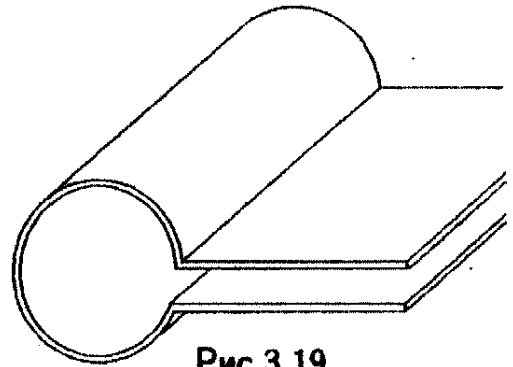


Рис.3.19

Любой контур характеризуется логарифмическим декрементом затухания собственных колебаний λ – это натуральный логарифм отношения амплитуды колебания в некоторый момент времени t к амплитуде через период. Так как затухание собственных колебаний происходит по экспоненциальному закону, то

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \boxed{\beta T = \lambda}.$$

Величина $\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda}}$ называется добротностью контура.

Обычно в колебательных контурах затухание мало и поэтому $\beta^2 \ll \omega_0^2$ и $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$.

Для таких контуров с высокой добротностью

$$\lambda \approx \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{и} \quad \boxed{Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

(Примеры: в электронных часах кварцевый резонатор имеет добротность $Q \approx 20000$, для частотно – стабилизированного CO_2 – лазера $Q \approx 10^9$.)

Чем выше добротность контура, тем слабее затухают собственные колебания в нем, тем меньше потери энергии на выделение джоулева тепла.

Но добротность характеризует еще одно свойство электрического колебательного контура – его избирательную способность.

Рассмотрим снова амплитудно-частотную характеристику напряжения на конденсаторе (рис.3.20).

Чем меньше затухание β , т.е. чем больше добротность Q контура, тем сильнее возрастает амплитуда в точке резонанса, т.е. тем уже и выше становится пик амплитудно-частотной характеристики. Принято считать, что контур усиливает сигналы тех частот, для которых амплитуды отлича-

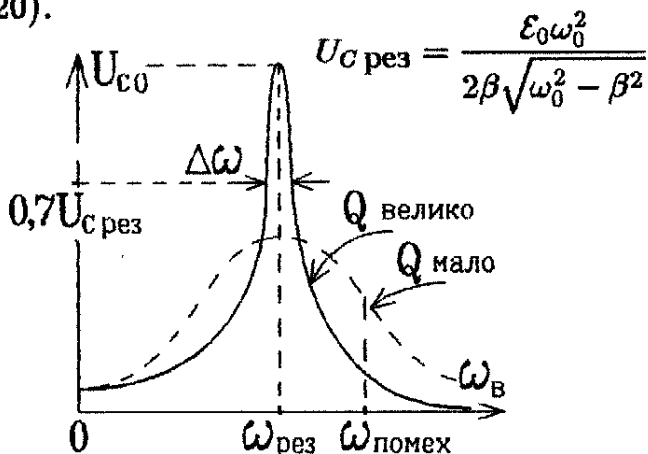


Рис.3.20

ются от резонансного значения не больше, чем в $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ раз. Интервал таких частот $\Delta\omega$ называется полушириной резонанса.

Можно показать, что $Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, т.е. чем меньше добротность контура, тем больший интервал частот $\Delta\omega$ он будет усиливать (наложение друг на друга передач радиостанций, работающих на близких частотах), а чем больше Q , тем больше избирательная способность контура усиливать при настройке только очень узкий интервал частот (определенную радиостанцию).

Вопрос: что происходит, если покрутить ручку настройки радиоприемника? Как бороться с глушением радиостанций?

Глава 4.

Электромагнитное поле. Теория Максвелла

1 Ток смещения

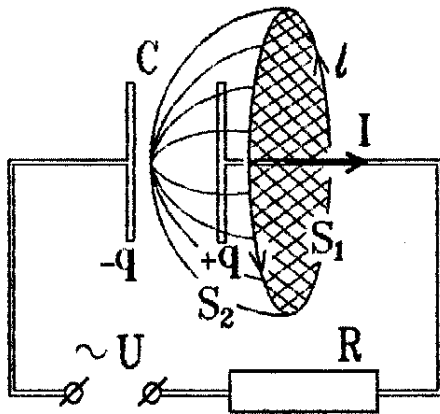


Рис.4.1

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_{\text{охват}} = I,$$

причем $\int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} \neq 0$, а $\int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$!

Действительно, интеграл в правой части (по теореме Стокса) можно брать по **любой** поверхности S_i , ограниченной контуром l . Но поверхность S_1 линии тока пересекают, и $j = I/S_{\text{провода}} \neq 0$, а через поверхность S_2 — полусферу, охватывающую одну из пластин конденсатора, — ток проводимости не течет (между пластинами конденсатора заряды не переносятся, и $j = 0$). Линии тока j обрываются на пластинах конденсатора, что приводит к *противоречию* !

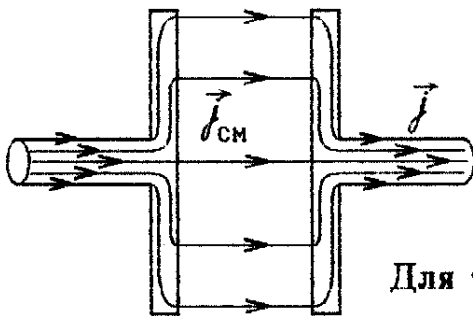


Рис.4.2 вакуум

Для того, чтобы теорема о циркуляции $\vec{H}$ не нарушалась, Максвелл предположил, что линии переменного тока $\vec{j}$ нигде не обрываются (всюду замкнуты, как и линии постоянного тока), и между пластинами конденсатора они переходят в линии тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ (рис. 4.2).

Но если между пластинами конденсатора находится вакуум, то движения зарядов там нет и ток смещения не является результатом движения заряженных частиц. Его назвали током только потому, что аналогично обычному току проводимости $\vec{j}$ ток смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ создает магнитное поле.

Для вычисления $\vec{j}_{\text{см}}$ запишем теорему о циркуляции $\vec{H}$ в дифференциальной форме :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j}_{\text{полн}}.$$

Возьмем дивергенцию от левой и правой части этого уравнения и используем правило циклической перестановки векторов: $\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{c} \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$:

$$\text{div} (\text{rot } \vec{H}) \equiv \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \underbrace{[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]}_{=0} \cdot \vec{H} = \text{div} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) = 0.$$

Следовательно, дивергенция от ротора любого вектора автоматически обращается в ноль. Но $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (согласно теореме о непрерывности для электрического заряда, которая в интегральной форме имеет вид $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -dq/dt$).

С другой стороны, $\rho = \text{div } \vec{D} = \text{div} (\epsilon \epsilon_0 \vec{E})$. Отсюда

$$\text{div } \vec{j}_{\text{см}} = -\text{div } \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) = \text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Так как это справедливо в любой точке пространства, то

$$\boxed{\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

Замечание: это же выражение для тока смещения можно получить, используя теорему о циркуляции $\vec{H}$ в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_S (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) \cdot d\vec{S}.$$

Так как величина $\vec{H}$ во всех точках пространства конечна, то, стягивая контур интегрирования l в точку, получим в левой части равенства ноль, т.е. поток вектора $\vec{j}_{\text{полн}}$ по любой замкнутой поверхности S равен нулю (рис. 4.3, 4.4):

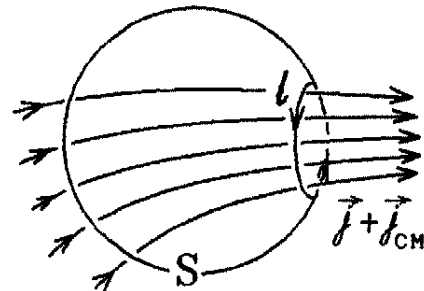


Рис.4.3

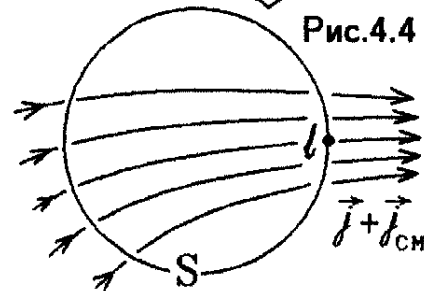


Рис.4.4

$$\oint_S (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) \cdot d\vec{S} = 0.$$

Но $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$, где $\frac{dq}{dt}$ — вытекающий из поверхности ток. Подставляя сюда $\rho = \text{div } \vec{D}$ и используя теорему Остроградского, найдем

$$\oint_S \vec{j}_{\text{см}} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V \text{div } \vec{D} dV = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

А так как это справедливо для любой замкнутой поверхности, то равны подынтегральные выражения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Ток смещения может появиться в любой среде: в вакууме, в диэлектрике, в проводнике. Так, в диэлектрике $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ и $\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Второе слагаемое показывает, что ток смещения, вытекающий из любой замкнутой поверхности S , может определяться движением связанных зарядов в диэлектрике ($\rho'_{\text{связ}} = -\text{div } \vec{P}$):

$$\oint_S \vec{j}_{\text{см}} \cdot d\vec{S} \sim \frac{d}{dt} \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V \text{div } \vec{P} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho'_{\text{связ}} dV = -\frac{dq'_{\text{связ}}}{dt}.$$

Под действием переменного электрического поля связанные заряды молекул диэлектрика совместно смещаются то в одну, то в другую сторону (рис. 4.5). Такое реальное движение связанных зарядов, как и движение свободных зарядов, образующих токи проводимости $\vec{j}$, действительно должно создавать магнитное поле. Но магнитное поле создает и вторая компонен-

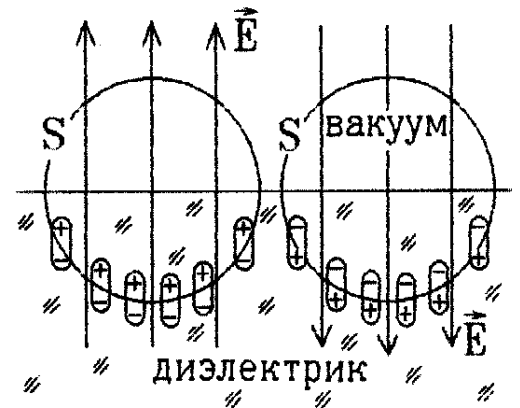


Рис.4.5

та тока смещения $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Она существует и в веществе, и в вакууме, но не связана ни с каким движением зарядов.

Магнитное поле создается изменяющимся электрическим полем !

Вопрос : шар с зарядом $+q$ поместили в проводящую однородную среду (рис.4.6). Естественно, он начнет разряжаться, и по радиаль-

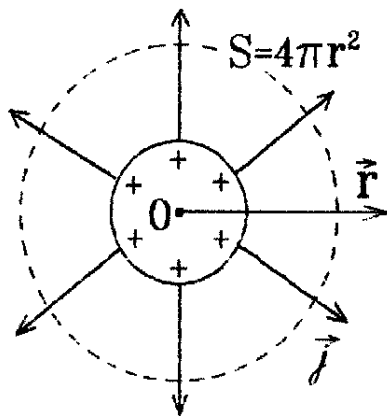


Рис.4.6

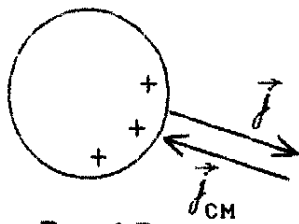


Рис.4.7

ным линиям потечет ток с плотностью

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{|dq/dt|}{4\pi r^2} = -\frac{dq/dt}{4\pi r^2}.$$

Каким будет магнитное поле вне шара?

Ответ: оно отсутствует ($\vec{B} = 0$!), так как при уменьшении заряда на шаре изменяется и создаваемое им электрическое поле $D = \epsilon\epsilon_0 E = \frac{q}{4\pi r^2}$. Поэтому возникает ток смещения $j_{см} = \frac{dD}{dt} = \frac{dq/dt}{4\pi r^2} < 0$, который направлен против линий $\vec{D}$, по величине равен току проводимости j и полностью компенсирует его: $\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см} = 0$ (рис. 4.7). Следовательно, магнитного поля в данном случае не существует.

2 Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла.

Оказывается, что магнитное и электрическое поля, вообще говоря, нельзя рассматривать порознь. Помимо того факта, что при переходе из одной инерциальной системы в другую электрическое поле превращается в магнитное и наоборот, оказывается, что

в одной и той же системе отсчета переменное магнитное поле

порождает вихревое электрическое поле : $\text{rot } \vec{E}_в = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

а переменное электрическое поле порождает ток смещения и, следовательно, переменное магнитное поле : $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

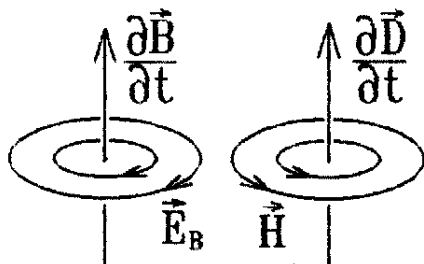


Рис.4.8

Линии напряженности этих полей замкнуты, охватывают векторы $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, но из-за разного знака направлены в противоположные стороны (рис. 4.8). Поля эти неразрывно связаны и образуют единое электромагнитное поле.

Пусть в какой-то точке пространства возник возрастающий ток, порождающий возрастающее магнитное поле, которое в свою очередь приводит к появлению возрастающего вихревого электрического поля и т.д. (рис.4.9).

Возникает переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве со скоростью света $\vec{c}$. Причем оно продолжает существовать даже в том случае, когда исчезла первоначальная причина его появления (рис.4.9).

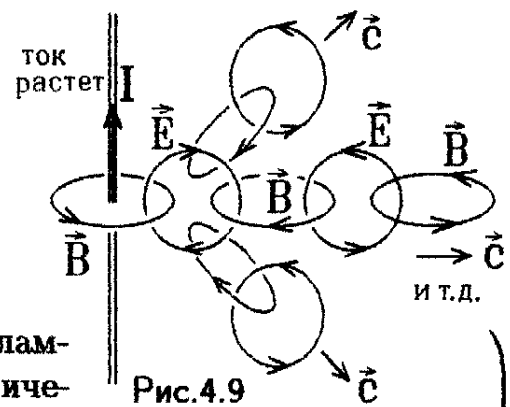


Рис.4.9

Поэтому при нажатии выключателя лампочка под потолком загорается практически мгновенно, несмотря на то, что дрейфовая скорость электронов, создающих электрический ток, очень мала: $u \approx 0,1 \div 0,01$ мм/с. Переменное электромагнитное поле пробегает вдоль электрической цепи и заставляет все свободные электроны во всех участках цепи практически одновременно двигаться со скоростью u .

Магнитные поля, созданные током проводимости и током смещения, складываются и вместе с электрическим вихревым полем и электрическим полем, созданным заряженными частицами, образуют единое электромагнитное поле. Описывается это поле системой уравнений Максвелла. Эта система представляет собой теоремы о циркуляции и о потоке (теоремы Гаусса) для электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} (1) \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right), \\ (2) \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right), \\ (3) \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV = \sum q, \\ (4) \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (1) – это закон электромагнитной индукции Фарадея. Циркуляция вихревого электрического поля не равна нулю. Она и образует э.д.с. электромагнитной индукции.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$, записанная в форме уравнения (2), справедлива всегда. Справа в

уравнении (2) стоит алгебраическая сумма токов проводимости и токов смещения, охватываемых замкнутым контуром l .

В уравнении (3) справа стоит алгебраическая сумма зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S и образующих обычное потенциальное электрическое поле.

(Вопрос на внимание : не следует ли после подстановки уравнения (4) в уравнение (1), что $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 0$ всегда ?)

Эта система уравнений Максвелла записана в интегральной форме. С помощью теорем Остроградского и Стокса ее можно записать в

дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ (2) \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ (3) \quad \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ (4) \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

В такой форме эти уравнения можно применять для среды с непрерывно меняющимися параметрами! На границах различных сред (типа вакуум – металл, диэлектрик – металл, металл 1 – металл 2) напряженности и индукции полей меняются скачком, и производные теряют смысл.

На таких границах надо применять уравнения Максвелла в интегральном виде и учитывать граничные условия.

Так, если на границе двух сред отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, то граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}; & B_{1n} &= B_{2n}; \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau}; & H_{1\tau} &= H_{2\tau}. \end{aligned}$$

Еще одно важное граничное условие: так как заряды и токи реально расположены в ограниченной области пространства, то на бесконечном удалении их поля исчезают:

$$\vec{E}|_{\infty} = \vec{B}|_{\infty} = 0.$$

Замечание: уравнения Максвелла мы записали в таком виде, чтобы устранить из них неизвестные связанные заряды ρ' и токи намагничивания $\vec{j}'$. Поэтому, кроме двух основных характеристик электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, в них вошли еще $\vec{D}$ и $\vec{H}$. Необходимо дополнить систему уравнений Максвелла связью между ними:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

Такие связи называются материальными уравнениями.

Однако, записанные выше материальные уравнения справедливы только при выполнении следующих условий:



1) среда должна быть локально однородной (ее параметры не могут испытывать скачков) и достаточно протяженной;

2) не должно быть остаточных эффектов типа остаточной намагниченности или остаточной поляризованности (гистерезис);

3) среда должна покоиться. Иначе, например, движущиеся связанные заряды также породят магнитное поле;

4) поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ должны быть достаточно слабыми. В сильных полях возникнут нелинейные члены типа

$$\begin{aligned} |\vec{D}| &= \epsilon \epsilon_0 E + \epsilon' E^2 + \epsilon'' E^3 + \dots, \\ j &= \sigma E + \sigma' E^2 + \dots. \end{aligned}$$

(Вопрос: когда не выполняется закон Ома в локальной форме)
 $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$?

Ответ : а) при $T \neq T_{\text{комн}}$: при повышении T увеличивается ионизация среды, и вольт-амперная характеристика искривляется; при уменьшении $T < T_{\text{крит}}$ (сверхпроводник) $\vec{E}_{\text{внутри}} = 0$;
 б) для сильных полей $\vec{E}$ или при большой разности потенциалов и т.п.

Еще два замечания:

1) система уравнений Максвелла линейна относительно векторов $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}$. Поэтому сумма двух решений опять будет решением системы. Это приводит к **принципу суперпозиции** полей $\vec{E}, \vec{B} \dots$ (для сильных полей принцип суперпозиции в веществе неприменим);

2) **уравнения Максвелла релятивистски инвариантны**, т.е. не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Вывод : зная распределение зарядов ρ и токов проводимости $\vec{j}$ в пространстве и решая систему уравнений Максвелла, можно найти поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в любой точке пространства. И наоборот, зная поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, можно определить распределение создающих их зарядов ρ и токов $\vec{j}$.

Если распределение зарядов и токов не изменяется со временем, то поля $\vec{B}$ и $\vec{E}$ тоже не зависят от времени, и система уравнений Максвелла распадается на две части и описывает *независимые* постоянные электростатическое и магнитное поля.

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0, \\ \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \sum q. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \sum I, \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

3 Метод решения уравнений Максвелла (дополнение)

Из уравнения (4) системы известно, что $\text{div } \vec{B} = 0$. Так как дивергенция от ротора любого вектора всегда равна нулю $\left(\text{div} (\text{rot } \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \underbrace{[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]}_{=0} \cdot \vec{A} = 0 \right)$, то можно обозначить $\boxed{\vec{B} = \text{rot } \vec{A}}$,

где вектор $\vec{A}$ называется вектор-потенциалом магнитного поля. Подставим это определение в уравнение (1):

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) \text{ или } \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Но нулю всегда равен ротор от градиента любой функции:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) &= [\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}_{=0} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Поэтому можно обозначить

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

В случае стационарных полей $\vec{A} = \text{const}$ и $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Становится понятен смысл введенной нами скалярной функции φ – это **потенциал электрического поля**.

Увы, три независимые компоненты вектора $\vec{E}$, т.е. E_x , E_y и E_z , мы стали описывать четырьмя неизвестными функциями A_x , A_y , A_z , φ . Одна из них – лишняя. Поэтому надо определить соотношение между вектор-потенциалом $\vec{A}$ и потенциалом φ . В наиболее удобной форме такое соотношение, позволяющее устранить одну неизвестную функцию, называется условием Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

(это условие можно выбрать и в другом виде).

Подставим теперь выражения $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ и $\operatorname{div} \vec{A} = -\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ в уравнение (2) системы уравнений Максвелла $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{rot} \vec{B}}{\mu\mu_0} &\equiv \frac{\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A})}{\mu\mu_0} = \frac{[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]]}{\mu\mu_0} = \\ &= \vec{j} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Преобразуем теперь по правилу $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ двойное векторное произведение в последней формуле:

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A},$$

где дифференциальный оператор

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется оператором Лапласа.

В результате уравнение (2) превращается в уравнение:

$$\frac{1}{\mu\mu_0} [\text{grad} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}] = \vec{j} - \varepsilon\varepsilon_0 \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

или $\Delta \vec{A} - \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu\mu_0 \vec{j} = 0$. А так как выражение в круглых скобках, согласно условию Лоренца, равно нулю, то

$$\Delta \vec{A} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \vec{j}.$$

Подставляя теперь выражения для $\vec{E}$ в уравнение (3) системы уравнений Максвелла, находим

$$\text{div } \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \text{div} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \rho.$$

$$\text{Но } \text{div} (\text{grad } \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Delta \varphi, \text{ т.е.}$$

$$-\varepsilon\varepsilon_0 \Delta \varphi - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \rho \text{ или, используя условие Лоренца,}$$

$$\Delta \varphi - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В результате этих преобразований вместо системы уравнений Максвелла получаем два независимых дифференциальных уравнения:

$$\left(\Delta - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad \left(\Delta - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}.$$

(Распределение заряда ρ определяет величину потенциала φ , а распределение токов проводимости $\vec{j}$ дает вектор-потенциал $\vec{A}$).

Решая эти уравнения с учетом начальных и граничных условий, находим функции $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A}(\vec{r}, t)$, а затем, дифференцируя их по правилам $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ и $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, определяем искомые характеристики $\vec{E}$ и $\vec{B}$ электромагнитного поля.

4 Поток энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Возьмем дивергенцию от векторного произведения напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\nabla}_E [\vec{E}, \vec{H}] + \vec{\nabla}_H [\vec{E}, \vec{H}].$$

Индексы E и H у оператора $\vec{\nabla}$ показывают, что по правилам дифференцирования произведения функций оператор $\vec{\nabla}$ сначала действует на функцию $\vec{E}$, а потом – на $\vec{H}$.

Воспользуемся теперь правилом циклической перестановки векторов и уравнениями Максвелла :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_E [\vec{E}, \vec{H}] &= \vec{H} [\vec{\nabla}_E, \vec{E}] = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \\ &= -\vec{H} \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu \mu_0 \vec{H}^2}{2} \right); \quad \vec{\nabla}_H [\vec{E}, \vec{H}] = -\vec{\nabla}_H [\vec{H}, \vec{E}] = \\ &= -\vec{E} [\vec{\nabla}_H, \vec{H}] = -\vec{E} \text{rot } \vec{B} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon \epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right)\end{aligned}$$

(в однородной среде $\mu, \epsilon = \text{const}$!)

$$\text{Следовательно, } \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu \mu_0 \vec{H}^2}{2} + \frac{\epsilon \epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

Но $w_{\text{эм}} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} + \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2}$ – это сумма плотностей энергии электрического и магнитного полей, т.е. плотность энергии электромагнитного поля, или энергия единицы объема электромагнитного поля.

А что такое $\vec{E} \cdot \vec{j}$? Выделим элемент тока в малом объеме среды с сечением ΔS , с длиной Δl и с объемом $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ (рис.4.10). Ток $\vec{j}$ порождается электрическим полем $\vec{E}$: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Тогда

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = (E \cdot \Delta l) \cdot \frac{j \cdot \Delta S}{\Delta l \cdot \Delta S} = \frac{IU}{\Delta V} = \frac{I^2 R}{\Delta V},$$

где $E \cdot \Delta l$ – это разность потенциалов, или напряжение U на участке длины Δl , а $j \cdot \Delta S$ – ток I через его сечение.

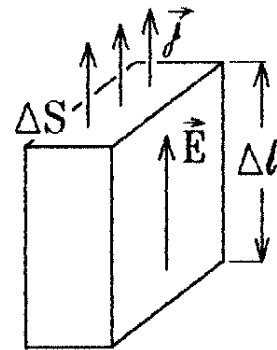


Рис.4.10

Полученное выражение – это джоулево тепло, выделяемое током за единицу времени в единице объема среды.

Так как магнитные силы работы по перемещению зарядов не производят, то $\vec{E} \cdot \vec{j}$ – это работа, производимая силами электрического поля в единице объема среды за единицу времени. Эта работа идет на выделение джоулева тепла, т.е. на нагревание среды или на осуществление каких-либо фотохимических реакций.

Проинтегрируем теперь полученное уравнение

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -\frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

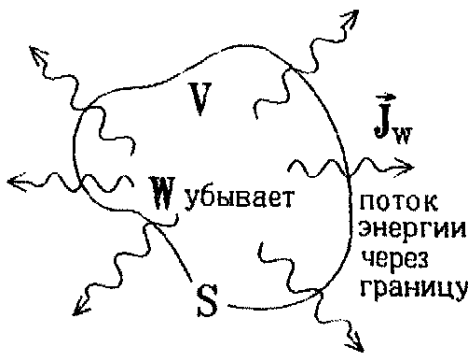


Рис.4.11

по любому объему V , ограниченному замкнутой поверхностью S (рис.4.11):

$$-\int_V \frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{эм}}) dV = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV + \int_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] dV.$$

Последнее слагаемое по теореме Остроградского равно $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S}$.

Полученное равенство выражает **закон сохранения энергии**:

убыль энергии электромагнитного поля за единицу времени внутри объема среды, ограниченного любой замкнутой поверхностью S , складывается из потока энергии, переносимой через эту поверхность электромагнитным полем, и работы, которую силы электромагнитного поля производят над зарядами в этом объеме среды за единицу времени:

$$-\frac{dW_{\text{эм}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\mu\mu_0 H^2}{2} + \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \right) dV = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV.$$

Это уравнение называется теоремой Пойнтинга.

Работа над электрическими зарядами может быть как положительной, когда заряды движутся под действием электрических сил, так и отрицательной, когда под действием каких-либо сторонних сил заряды движутся против сил электрического поля (например, внутри источника э.д.с.). В последнем случае энергия электромагнитного поля не убывает, а возрастает.

Вектор $\vec{J}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$ называется вектором Пойнтинга. Его величина равна энергии, переносимой электромагнитным полем за единицу времени через единичную площадь, нормальную к направлению распространения электромагнитного поля. Если вектор $\vec{J}_W$ направлен из замкнутой поверхности, то энергия выносится из нее, и наоборот. Вектор $\vec{J}_W$ является **вектором плотности потока энергии**.

Теорема Пойнтинга выведена для произвольного электромагнитного поля. Применим ее к случаю стационарных полей, например, к цепи постоянного тока. Ток I вызван некоторой разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$, создающей электрическое поле с на-

пряженностью $E = \frac{U}{l}$ на участке проводника длины l (рис.4.12). Этот ток создает вблизи поверхности проводника магнитное поле с напряженностью $H = \frac{I}{2\pi r}$ и, как видно из рис.4.12, вектор Пойнтинга $\vec{J}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$ направлен к оси проводника. Следовательно, **внутри** участка проводника длины l из окружающего пространства за единицу

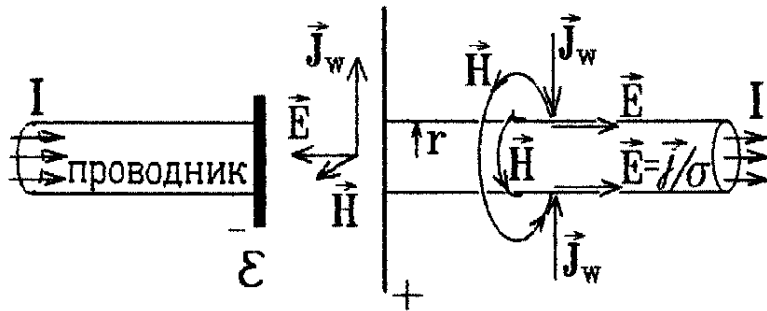


Рис.4.12

цу времени втекает энергия $\left| \int \vec{J}_W \cdot d\vec{S} \right| = H \cdot E \sin 90^\circ \cdot 2\pi r l = I \cdot U = I^2 R$. Интеграл в левой части был взят по боковой поверхности проводника $S = 2\pi r l$.

Эта энергия равна мощности P постоянного тока !

В теореме Пойнтинга она окажется с отрицательным знаком, т.к. $\vec{J}_W \updownarrow d\vec{S}$, а поэтому полностью компенсируется выделяемой джоулевой мощностью $P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV$. В результате $-\frac{dW_{эм}}{dt} = \oint_S \vec{J}_W d\vec{S} + P = 0$ и $W_{эм} = \text{const}$, следовательно, электромагнитное поле стационарно, и его энергия не меняется.

Джоулево тепло выделяется за счет переноса энергии электромагнитного поля из окружающей среды в проводник.



Откуда же берется эта энергия в окружающем пространстве ? Она поступает из источника э.д.с., в котором под действием сторонних сил ток течет против линий $\vec{E}$, мощность P сил электрического поля отрицательна, и вектор $\vec{J}_W$ направлен в окружающее пространство, наружу (рис.4.12).

Вопрос: из сказанного ранее следует, что энергия в цепях постоянного тока вытекает из источника э.д.с. и переносится к потребителю не по проводам, а по воздуху (рис.4.13) ? Так ли это ?



Рис.4.13

Ответ: энергия тока, с одной стороны, равна энергии движущихся заряженных частиц, а с другой стороны, – энергии магнитного поля, создаваемого током. Мы их не разделяем. Это одно и то же: есть движение заряженных частиц – есть и магнитное поле, нет

тока – нет и магнитного поля. Энергия тока в проводнике совпадает с энергией магнитного поля этого тока. Можно рассматривать реальное движение заряженных частиц, переносящих энергию по проводнику. А можно "забыть" об этом движении и учесть магнитное поле, существующее не только в проводнике, но и во всем пространстве. Результат, как видим, один и тот же.

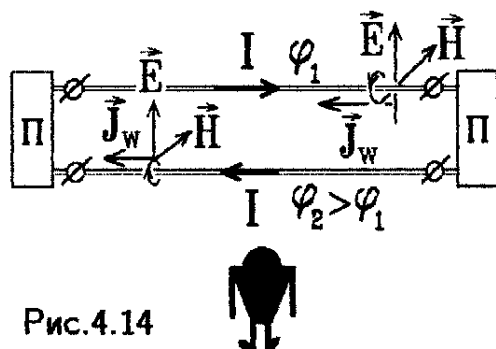


Рис.4.14

Еще один пример:

некто подошел к двухпроводной линии и определил направление тока в проводах и разность потенциалов между ними (рис.4.14). В какой стороне находится передатчик, а в какой – приемник?

Как видно из рис.4.14, вектор Пойнтинга $\vec{J}_W$ показывает направ-

вление переноса энергии справа налево, т.е. передатчик расположен справа, а приемник – слева.

Глава 5.

Волновые процессы. Электромагнитные волны

1 Волновая функция

Соседние частицы среды взаимодействуют друг с другом, и если одна частица начнет колебаться, то эти колебания передаются остальным частицам с некоторой скоростью v . Процесс распространения таких колебаний в пространстве называется волной.

Волны бывают продольные и поперечные. В продольных волнах частицы колеблются (смещаются) вдоль направления распространения волны, т.е. вдоль вектора скорости $\vec{v}$ волны.

Пример: колебания плотности среды, звук (рис.5.1).

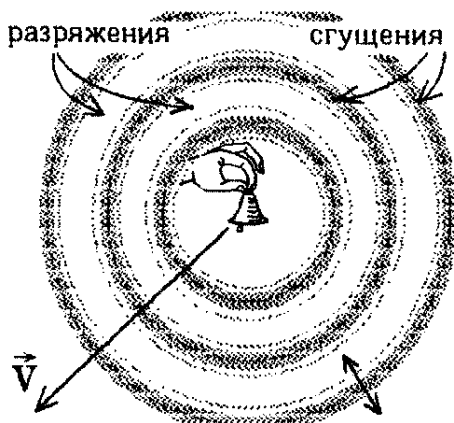


Рис.5.1

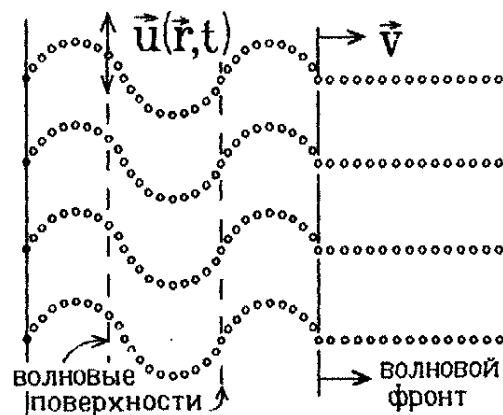


Рис.5.2

В поперечных волнах смещение $\vec{u}$ частиц среды перпендикулярно к направлению распространения волны (рис. 5.2).

Продольные волны возникают, если на частицы среды действуют силы потенциального поля, а поперечные волны – при действии сил вихревого поля.

Вопрос: плазма – это совокупность свободных нейтральных и заряженных частиц обоих знаков, обладающая свойством квазинейтральности. Например — это электронно-ионная плазма в тлеющем разряде. Волны какого типа возникают в ней ?

Ответ : сгущения и разрежения - плотности электронов (намного более тяжелые ионы, как правило, не успевают заметно сместиться) управляют- ся потенциальными силами электростатического кулоновского взаимодействия. Следовательно, волна колебаний электронной плотности будет продольной (рис.5.3). Но при этом колебательное движение электронов создает

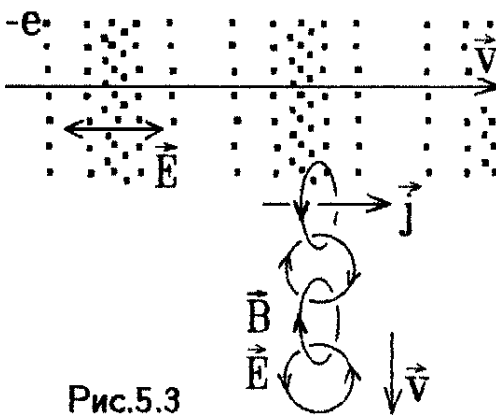


Рис.5.3

переменный ток и вихревое электрическое поле. В плазме возникнут также поперечные волны, где электроны будут колебаться перпендикулярно к направлению распространения электромагнитного поля.

Геометрическое место точек, до которых в данный момент времени дошли колебания (волна), называется волновым фронтом (это поверхность, по одну сторону которой частицы среды колеблются, а по другую — еще нет).

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, в которых частицы среды колеблются в одинаковой фазе или испытывают одинаковые смещения. Волновой фронт и волновые поверхности всегда перпендикулярны к направлению распространения волны $\vec{v}$.

Если волновой фронт и волновые поверхности являются плоскостями, то волна называется плоской, если сферами, то волна — сферическая.

Пусть колебания распространяются вдоль оси x (плоская волна, рис.5.4). Если частицы среды в плоскости $x = 0$ начали колебаться по гармоническому закону $\vec{u}(0, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то эти колебания, распространяясь со скоростью $\vec{v}$, достигнут произвольной плоскости $x = \text{const}$ только через время $\tau = x/v$. Следовательно, колебания частиц в плоскости $x \neq 0$ будут запаздывать на время τ :

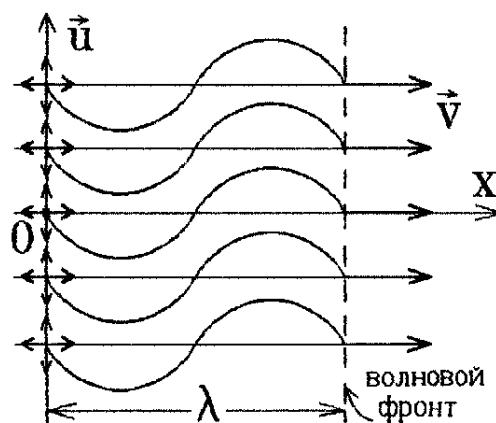


Рис.5.4

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \cos [\omega(t - \tau) + \varphi] = \vec{u}_0 \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi \right).$$

Длина волны λ — это расстояние между двумя соседними точками, колеблющимися в одинаковой фазе (испытывающими одинаковое смещение).

Период колебаний T — это время, за которое волна со скоростью

v проходит путь λ :

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}, \text{ а величина } \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$$

называется волновым числом.

Учитывая это, получаем выражение для волновой функции $\vec{u}(x, t)$ плоской волны, распространяющейся вдоль оси x :

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $(\omega t - kx + \varphi)$ – фаза волны, зависящая и от времени, и от координаты. В точке с координатой x начальной фазой колебаний будет величина $(-kx + \varphi)$.

Волновая функция $\vec{u}(x, t)$ описывает колебания всех частиц среды в произвольный момент времени. Часто ее записывают в комплексном виде

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \exp[i(\omega t - kx + \varphi)],$$

используя комплексное представление величин

$$\left. \begin{aligned} \exp(i\alpha) &= \cos \alpha + i \sin \alpha, \\ \exp(-i\alpha) &= \cos \alpha - i \sin \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Чтобы перейти от комплексной записи волновой функции к действительному значению, достаточно взять действительную часть комплексного выражения.

(Пока будем использовать действительные гармонические функции $\cos$ или $\sin$ для описания волн, но для ряда задач использовать экспоненциальные (хотя и комплексные) функции оказывается много удобнее, чем гармонические.)

Для плоской волны, движущейся против оси x , имеем:

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t + kx + \varphi).$$

Если плоская волна движется в произвольном направлении (рис.5.5), то вводят волновой вектор $\vec{k}$:

$$\vec{k} = k \frac{\vec{v}}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\vec{v}}{v},$$

направленный вдоль скорости $\vec{v}$ волны. Волновая функция такой плоской волны имеет вид

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор.

Сферическую продольную волну легко создать точечным источником (возбудителем) колебаний в однородной среде. Волновая функция сферической волны имеет вид

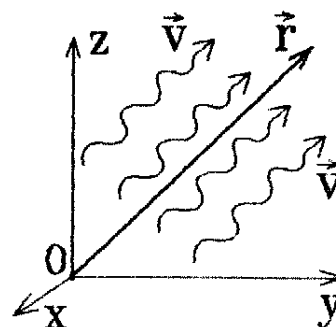


Рис.5.5

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kr + \varphi).$$

Действительно, ее волновая поверхность с одинаковой фазой колебаний $\omega t - kr + \varphi = \text{const}$ в любой фиксированный момент времени образует сферу с радиусом $r = (\omega t + \varphi - \text{const})/k$.

(Обратите внимание на различие выражений для волновых функций плоской и сферической волн!)

Волны с одной фиксированной частотой ω и постоянной амплитудой $\vec{u}_0$ называются монохроматическими. Для монохроматической волны волновая функция является бесконечной косинусоидой (или синусоидой), распространяющейся в пространстве со скоростью $\vec{v}$. Такие волны называют бегущими.

2 Волновое уравнение. Скорость распространения ВОЛНЫ

Любой процесс распространения волны в пространстве описывается одним и тем же дифференциальным уравнением – волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Используя оператор Лапласа $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, волновое уравнение можно записать в виде

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Решением волнового уравнения всегда будет волновая функция $\vec{u}(\vec{r}, t)$. Нетрудно проверить (подстановкой), что волновая функция распространяющейся вдоль оси x плоской волны $\vec{u} = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ будет решением одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Важное замечание: волновая функция $\vec{u}(\vec{r}, t)$ – это не обязательно смещение частиц среды в пространстве. Она может быть любой векторной величиной, например, вектором напряженности электрического поля. В этом случае распространяются колебания электрического поля и т.п.

Но гармоническая монохроматическая волна – это только простейшее решение волнового уравнения. Его решением будет любая функция,

зависящая от переменной $(t \mp x/v)$: $\vec{u}(t - x/v)$ — это волна, распространяющаяся *вдоль* оси x ; $\vec{u}(t + x/v)$ — это волна, распространяющаяся *против* оси x .

$$\left(\begin{array}{l} \text{Проверить это можно прямой подстановкой:} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial (t - x/v)^2} \left(\frac{\partial (t - x/v)}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(-\frac{1}{v} \right)^2. \end{array} \right)$$

Колебания частиц среды могут происходить не обязательно по гармоническому закону. Они могут описываться любой периодической функцией с периодом T : $f(t) = f(t + T)$. Но любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы бесконечного числа гармонических функций: $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ с различными частотами ω_i , амплитудами A_i и начальными фазами φ_i .

Такое разложение называется разложением в ряд Фурье. Следовательно, любую волну с произвольной формой колебаний можно представить как суммарное распространение гармонических монохроматических волн с различными частотами ω_i , но с одинаковой скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{u}(t - x/v) = \sum_i \vec{u}_{0i} \cos(\omega_i t - k_i x + \varphi_i), \quad k_i = \omega_i / v = 2\pi / \lambda_i.$$

Неизвестные амплитуды $\vec{u}_{0i}$ и начальные фазы φ_i определяют из начальных и граничных условий задачи.

Пример: волна имеет вид "пилы" (рис.5.6). (Волны такой формы используют в телевидении для образования развертки луча). Ее можно представить в виде ряда

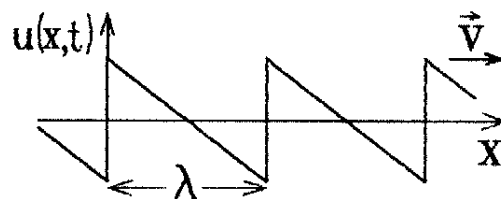


Рис.5.6

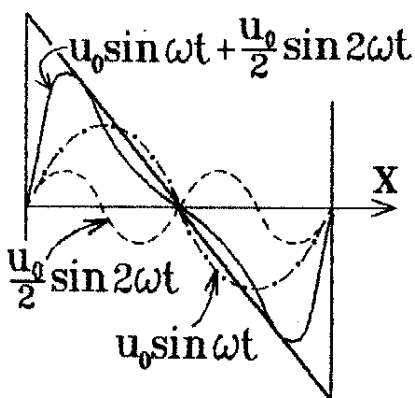


Рис.5.7

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_0}{n} \sin[n\omega(t - x/v)].$$

Сумма первых двух слагаемых ряда уже приближается по форме к "пиле" (рис. 5.7).

Вывод: все результаты, полученные для монохроматической гармонической волны, будут справедливыми и для волн произвольной формы (сумма решений уравнения также является его решением). Поэтому далее будут исследоваться только монохроматические гармонические волны.

Коэффициент, который стоит при производной $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ в волновом

уравнении, обязательно будет обратным квадратом скорости v волны. Это скорость перемещения волнового фронта и волновых поверхностей, т.е. точек, имеющих одинаковую фазу колебаний. Поэтому скорость v называют фазовой скоростью волны.

Рассмотрим различные примеры образования волн.

3 Волны упругих колебаний в струне

Вопрос: если концы гитарной струны длины l закреплены и не могут смещаться, то обычно колебания ее таковы, что вдоль струны укладывается половина длины волны: $l = \lambda/2$ (рис.5.8). Чуть ослабим винт, регулирующий натяжение струны. Длина волны $\lambda = 2l$ измениться не должна, но тон звука резко изменится. Почему?

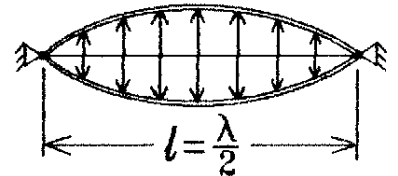


Рис.5.8

Ответ: тон звука определяется не длиной волны, а частотой колебаний струны. Эта частота $\nu = v/\lambda$ зависит от скорости v распространения волны, а величина скорости определяется натяжением струны. Покажем это.

Выделим участок струны длины dl , совершающий поперечные колебания (рис.5.9).

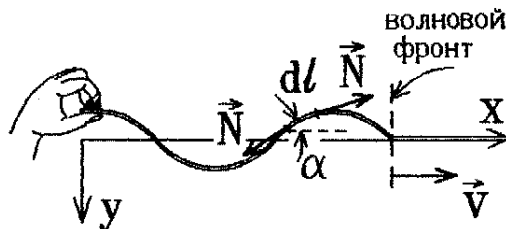


Рис.5.9

Силы натяжения $\vec{N}$, действующие на оба конца участка dl , практически равны по величине, но направлены по касательной к струне, т.е. под разными углами α . Они создают результирующую силу $F_{\text{рез}} = N \sin \alpha - N \sin(\alpha - d\alpha)$ в по-

перечном направлении, стремящуюся вернуть участок dl в положение равновесия (рис.5.10).

Так как поперечные смещения колеблющейся струны при достаточно большом натяжении N очень малы, то $\alpha \approx \sin \alpha \ll 1$, и уравнение движения (второй закон Ньютона) для участка dl с массой $dm = \frac{m}{l}dl$ (m – масса, l – длина всей струны) запишется в виде

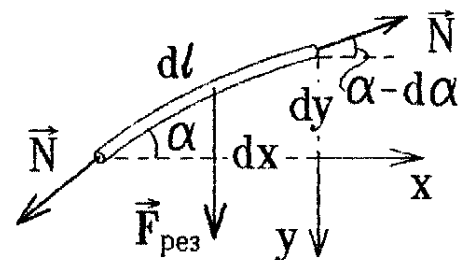


Рис.5.10

$$F_{\text{рез}} \approx Nd\alpha = dm \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{m}{l} \frac{d^2y}{dt^2} dl.$$

Из рис.5.10 следует, что

$$\left. \begin{aligned} dl &\approx \frac{dx}{\cos \alpha} \approx dx, \\ \alpha &\approx \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{dy}{dx}. \end{aligned} \right\} \text{Подставляя эти выражения в уравнение дви-}$$
 жения, получим $\frac{d\alpha}{dl} \approx \frac{d\alpha}{dx} \approx \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{m}{Nl} \frac{d^2 y}{dt^2}$ или

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m}{lN} \frac{d^2 y}{dt^2}}. \text{ Это волновое уравнение !}$$

Следовательно, при достаточно большом натяжении струны (при малых смещениях от положения равновесия) в ней возникает поперечная волна смещений $y = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$, движущаяся вдоль струны со скоростью, определяемой выражением $\frac{1}{v^2} = \frac{m}{lN}$, т.е.

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{l}{m} N}}.$$

Чем больше натяжение струны, тем больше скорость волны в ней !

Частота колебаний струны $\nu = 1/T = v/\lambda$ зависит от ее натяжения.

Вопрос : почему надо искать специальные струны для гитары, а нельзя натянуть вместо них кусок проволоки ?

Ответ : пусть длина струны $l = 50$ см, масса $m = 100$ г. Чтобы натянутая струна

$\left(l = \frac{\lambda}{2}, \nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{lN/m}}{2l} \right)$ издавала звук "до"

первой октавы (рис.5.11), сила натяжения долж-

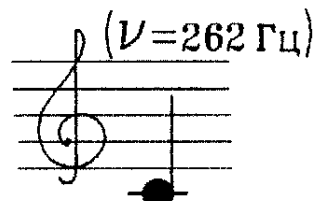


Рис.5.11

на иметь величину

$$N = 4\nu^2 ml = 4 \cdot (262)^2 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \approx 1,37 \cdot 10^4 \text{ Н} \approx 1400 \text{ кг}!$$

Не всякая проволока выдержит такую нагрузку. Подобный звук издает натянутый стальной трос, к которому подвешен большой груз.

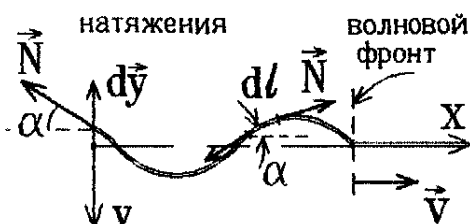


Рис.5.12

Пусть струна натянута с силой N , и один из ее концов начинает совершать колебания (рис.5.12). Очевидно, что смещая край струны на расстояние $d\vec{y}$ в поперечном направлении, надо совершить работу *против* силы натяжения :

$$\delta A = \vec{N} d\vec{y} = N dy \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -N \frac{dy}{dt} \sin \alpha dt.$$

Но для малых колебаний хорошо натянутой струны $\sin \alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = dy/dx$. Подставляя в выражение для работы волновую функ-

цию $y = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$, находим

$$\delta A = y_0^2 N \omega k \sin^2(\omega t - kx + \varphi) dt.$$

Эта работа совершается за счет энергии, поступающей от источника внешней силы. Затем начинают колебаться следующие участки струны, т.е. энергия переносится бегущей по струне волной со скоростью $\vec{v}$. За единицу времени через поперечное сечение струны переносится от внешнего вибратора средняя энергия $\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^2 N y_0^2}{2v}$. Заметим, что эта энергия пропорциональна квадрату амплитуды волны.

4 Звуковые волны в газах

Волны возникают далеко не всегда. Для струны условием их возникновения было большое натяжение (малое смещение). Выясним, при каких условиях они появляются в воздухе (в газах), или, иначе говоря, при каких условиях движение газа описывается волновым уравнением.

Направим ось x в сторону возрастания давления в газе. Тогда за счет разности давлений на кубик газа с объемом dV будет действовать сила давления

$$\begin{aligned} F_{\text{давл } x} &= p dS - (p + dp) dS = \\ &= -\frac{dp}{dx} \underbrace{dx dS}_{= dV} \quad \text{или} \quad \vec{F}_{\text{давл}} = -\text{grad } p \cdot dV. \end{aligned}$$

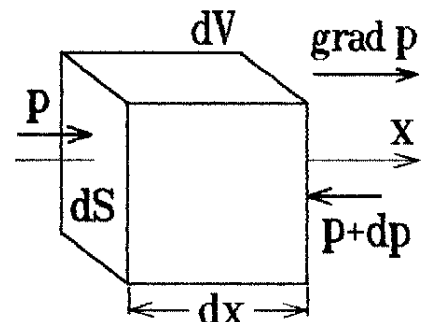


Рис.5.13

Второй закон Ньютона для этого кубика имеет вид

$$\underbrace{\rho dV}_{\text{масса}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} = \underbrace{-\text{grad } p \cdot dV}_{\vec{F}_{\text{давл}}} + \underbrace{\rho dV \vec{g}}_{\substack{\text{сила} \\ \text{тяжести}}} + \vec{F}_{\text{вязкого трения}}$$

— это уравнение Эйлера для движущейся жидкости или газа.

Предположим, что

А) газ можно считать невязким, т.е. силы трения очень малыми.

Тогда уравнение Эйлера принимает вид:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \vec{g}.$$

Рассмотрим теперь поток газа со скоростью $\vec{v}$. Через площадку $d\vec{S}$, ориентированную под углом α к направлению скорости потока $\vec{v}$ (рис.5.14), за время dt протекает масса газа $\rho dV = \rho v dt dS \cos \alpha =$

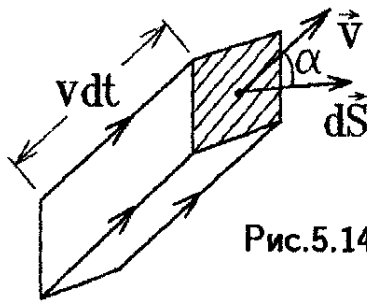


Рис.5.14

$= \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$ (здесь dV – объем протекшего газа). Следовательно, из любой замкнутой поверхности (рис.5.15) за время dt вытекает масса газа $\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt = -dm$, равная умень-

шению массы газа внутри этой замкнутой поверхности.

Разделив полученное соотношение на dt почленно, получим уравнение:

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) \text{ — это}$$

уравнение непрерывности для жидкости или газа.

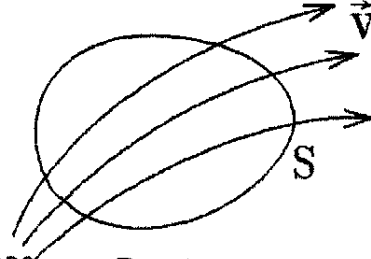


Рис.5.15

Используя теорему Остроградского, можно переписать это уравнение в дифференциальной форме:

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = \int_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV \text{ или } \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v})}.$$

В состоянии покоя равновесные значения давления, плотности и температуры газа в любой точке постоянны: $p_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$ и $T_0 = \text{const}$. Обычно любые отклонения от этих значений, возникающие при движении газа, очень малы (человек чувствует сильную боль, когда, например, давление газа на барабанную перепонку резко меняется всего на несколько процентов). Поэтому

Б) изменения давления и плотности газа можно считать малыми величинами, значительно меньшими равновесных значений :

$$p' = p - p_0 \ll p_0; \quad \rho' = \rho - \rho_0 \ll \rho_0.$$

В) Скорость газа $\vec{v}$ различна в разных точках пространства, но при этом в любой точке она также очень мала: $v \ll v_{\text{звука}}$. Элемент объема газа (рис.5.14) просто не успевает сместиться, и поэтому не возникает больших изменений давления и плотности.

Из-за этого обычную производную по времени в уравнении Эйлера можно заменить на частную производную :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{v} \cdot \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{v} \cdot \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \end{aligned}$$

а уравнение Эйлера и уравнение непрерывности принимают вид

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \rho_0 \vec{g} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\vec{\nabla} (\rho_0 \vec{v}),$$

если пренебречь малыми более высокого порядка, пропорциональными отклонению плотности газа от равновесного значения ($\rho' \ll \rho_0$).

Возьмем еще одну частную производную по времени от обеих частей полученного уравнения непрерывности и, подставляя выражение $\rho_0 \partial \vec{v} / \partial t$ из уравнения Эйлера, найдем

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} (\rho_0 \vec{v})) = -\vec{\nabla} \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \left(-\vec{\nabla} p + \underbrace{\rho_0 \vec{g}}_{=\text{const}} \right) = \Delta p.$$

Г) Процесс изменения давления и плотности газа при его сжатии или расширении можно считать очень быстрым, т.е. *адиабатическим*.

Если теперь рассматривать газ как **идеальный**, то, исключая температуру T из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{или} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$$

и из уравнения адиабатического процесса $T = \text{const} \cdot p^{(\gamma-1)/\gamma}$, найдем связь между давлением газа и его плотностью:

$$\begin{aligned} p\rho^{-\gamma} &= p_0\rho_0^{-\gamma} = \text{const} \quad \text{или} \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} = p_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^{\gamma} = \\ &= p_0 \left(1 + \gamma \frac{\rho'}{\rho_0} + \dots \right) \approx p_0 + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' = p_0 + \frac{\gamma RT_0}{\mu} \rho'. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в записанную выше формулу

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \Delta p = \Delta \left(\underbrace{p_0}_{=\text{const}} + \frac{\gamma RT_0}{\mu} \rho' \right) = \frac{\gamma RT_0}{\mu} \Delta \rho',$$

получаем

$$\Delta \rho' = \frac{\mu}{\gamma RT_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}.$$

Это – **волновое уравнение**.

Оно описывает звуковую волну продольных колебаний плотности (или давления) газа, распространяющуюся со скоростью

$$v_{\text{звука}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{\mu}} \quad - \text{ скорость звука.}$$

Как видим, звуковая волна в газах может возникать при выполнении условий (А) – (Г). (Можно определить условие возникновения звуковой волны в более плотных средах, но для этого придется задавать более сложное уравнение состояния).

5 Электромагнитные волны

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме или в однородной диэлектрической среде, где нет свободных зарядов и токов проводимости: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Запишем для этого случая систему уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ (2) \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ (3) \quad \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ (4) \quad \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Поделимся на обе части уравнения} \\ &(1) \text{ оператором } \operatorname{rot} \text{ и воспользуемся} \\ &\text{уравнением (2); тогда получим:} \\ &\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) \equiv [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \\ &= -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Используя формулу $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ для двойного векторного произведения, находим $[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\Delta \vec{E}$, так как, согласно уравнению (3), $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = 0$.

В результате этих преобразований получаем **волновое уравнение**

$$\Delta \vec{E} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Аналогично, подействовав оператором rot на второе уравнение системы Максвелла, получим волновое уравнение

$$\Delta \vec{H} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Вывод: в непроводящей среде электромагнитное поле существует в виде электромагнитных волн – это колебания вихревых электрического и магнитного полей, распространяющиеся со скоростью

$$v_{\text{эм}} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} = \frac{c}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Например, волновые функции для плоской электромагнитной волны имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi). \end{aligned}$$

Вопрос: как создать плоскую электромагнитную волну?

Рассмотрим в плоскости yz бесконечную тонкую пластину, по которой против оси y протекает поверхностный переменный ток с линейной плотностью $i = i_y = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (рис.5.15).

Охватим участок пластины, имеющий ширину l , очень узким прямоугольным контуром. По теореме о циркуляции для вектора $\vec{H}$

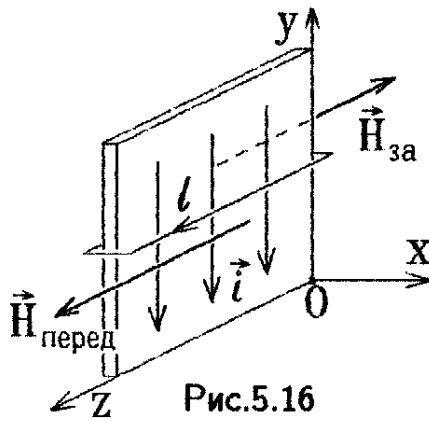


Рис.5.16

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{\text{за}} \cdot dl + H_{\text{перед}} \cdot dl = il,$$

где il – охватываемый контуром ток. Но $H_{\text{перед}} = H_{\text{за}} = H$ в силу симметрии, т.е. непосредственно вблизи пластины с током возникают колебания магнитного поля $H = H_z(x=0, t) = i/2 = (i_0 \cos(\omega t + \varphi))/2$. Эти колебания распространяются вдоль оси x , запаздывая по времени: $H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$,

где $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$, $H_0 = i_0/2$ – амплитуда колебаний напряженности магнитного поля. Это – **плоская волна**. Одновременно индуцируется вихревое электрическое поле:

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \cdot (-1) = -\vec{j} \frac{H_0}{\epsilon \epsilon_0} k \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

(Вектор $\vec{H}$ перед пластиной направлен по оси z , поэтому $H_x = 0, H_y = 0, H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$).

Следовательно, вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля направлен вдоль оси y , и его проекция на эту ось определяется, как

$$E_y = - \int \frac{H_0 k}{\epsilon \epsilon_0} \sin(\omega t - kx + \varphi) dt = \frac{H_0 k}{\epsilon \epsilon_0 \omega} \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

(постоянная интегрирования равна нулю, так как постоянное электрическое поле отсутствует). Это – **тоже плоская волна**.

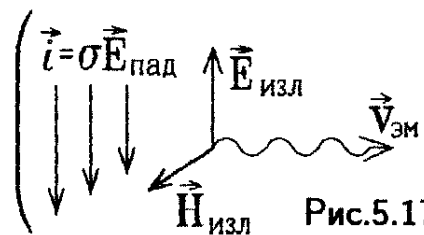


Рис.5.17

Заметим, что электрическое поле $\vec{E}$, создающее ток $\vec{j}$, и электрическое поле, излучаемое в виде электромагнитной волны $\vec{E}_{\text{изл}}$, колеблются в противофазе (рис.5.17)!

Итак, из уравнений Максвелла получены уравнения плоской электромагнитной волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

распространяющейся вдоль оси x со скоростью $v_{\text{эм}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$.

Амплитуды электрического и магнитного полей в плоской электромагнитной волне связаны соотношением

$$E_0 = \frac{H_0 k}{\epsilon \epsilon_0 \omega} = \frac{H_0}{\epsilon \epsilon_0 v_{\text{эм}}} = H_0 \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \quad \text{или} \quad \boxed{\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu \mu_0} H_0}.$$

Следовательно, в электромагнитной волне плотность энергии магнитного поля всегда равна плотности энергии электрического поля :

$$\boxed{w_{\text{эл}} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = w_{\text{магн}}}.$$

И еще один вывод:

в любой электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются в одинаковой фазе и образуют с вектором скорости волны $\vec{v}_{\text{эм}}$ правую тройку векторов (рис.5.18).



Рис.5.18

6 Принцип передачи сигналов с помощью электромагнитных волн (радио и телевидение)

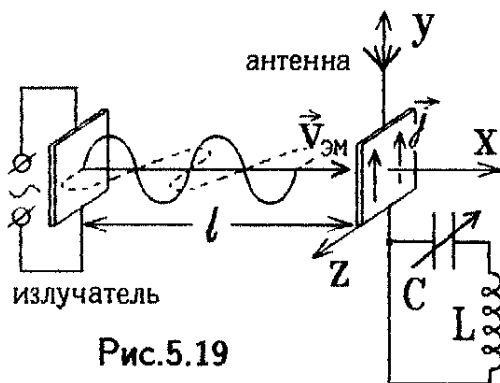


Рис.5.19

Как было показано, переменный ток в излучателе радио- или телепередатчика порождает электромагнитную волну. Волна, испущенная излучателем, может быть сферической. Но на очень большом удалении радиус кривизны волнового фронта настолько велик, что приходящую к приемнику волну можно считать

практически плоской. Когда эта волна попадает на антенну приемника, ее электрическое поле заставляет двигаться свободные электроны в материале антенны и, следовательно, создает в ней переменный ток (с частотой ω волны) (рис.5.19) :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_0 \cos(\omega t - kl + \varphi).$$

Изменения этого тока запаздывают относительно изменений тока в излучателе (передатчике) на время $\tau = \frac{kl}{\omega} = \frac{l}{v_{\text{эм}}} = \sqrt{\mu \epsilon \mu_0 \epsilon_0} \cdot l$ — это время, необходимое электромагнитной волне, чтобы пройти расстояние l до приемника.

Контур настройки приемника за счет явления резонанса выделяет и усиливает сигналы с частотой, близкой к резонансной. Однако передавать синусоидально меняющийся сигнал с постоянной амплитудой

бесполезно. Такая монохроматическая волна не несет никакой информации. (Что при этом будет слышно из репродуктора ?)

Пусть ток в излучателе, модулированный полезным сигналом, **изменяется** по некоторому закону (например, прямоугольными импульсами, рис.5.20). Представим эту периодическую функцию в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, амплитудами и начальными фазами (ряд Фурье):

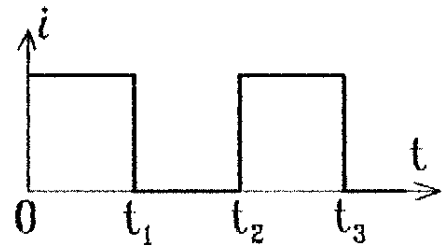


Рис.5.20

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} i_{0n} \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Согласно теореме о циркуляции магнитного вектора, порождаемое этим током магнитное поле вблизи пластины излучателя

$$H = \frac{i(t)}{2} = \sum_n \frac{i_{0n}}{2} \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

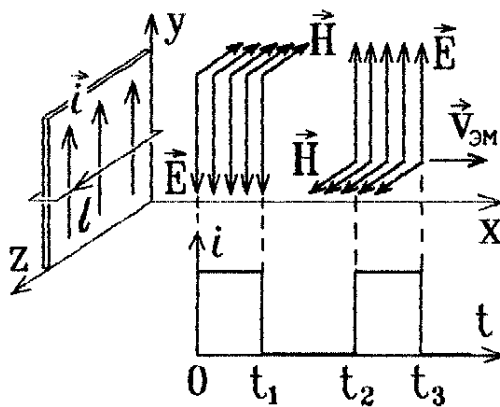


Рис.5.21

Каждое гармоническое колебание магнитного поля с амплитудой $H_{0n} = \frac{i_{0n}}{2}$ вызывает совпадающее по фазе колебание электрического поля с амплитудой $E_{0n} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} H_{0n} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} i_{0n}$. Вследствие этого вдоль оси x начнет распространяться (плоская) электромагнитная волна (рис.5.21)

$$\begin{cases} H_z = \sum_n \frac{i_{0n}}{2} \cos(\omega_n t - k_n x + \varphi_n) = \frac{1}{2} i \left(t - \frac{x}{v_{эм}} \right), \\ E_y = \sum_n \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} \cdot \frac{i_{0n}}{2} \cos(\omega_n t - k_n x + \varphi_n) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} i \left(t - \frac{x}{v_{эм}} \right). \end{cases}$$

(Заметим, что соотношение $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu\mu_0} H_z$ справедливо для плоских электромагнитных волн **любой формы**, не обязательно гармонических.)

Электромагнитная волна распространяется в пространстве в виде импульсов электрического и магнитного полей, по **форме совпадающих с изменением тока $i(t)$ в излучателе**, но запаздывающих на время $\tau = \frac{x}{v_{эм}}$.

Электрическое поле такой волны вызовет в антенне приемника ток

$$j(t) = \sigma E = \sigma \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \cdot i \left(t - \frac{l}{v_{\text{эм}}} \right),$$

пропорциональный току $i(t)$ в излучателе передатчика, но запаздывающий по времени на $l/v_{\text{эм}}$.

Так происходит передача преобразованного в ток сигнала любой формы с помощью электромагнитных волн.

Вывод: чтобы форма сигнала при передаче не менялась, необходимо, чтобы электромагнитные волны с разными частотами ω_n двигались в пространстве с одинаковой скоростью $v_{\text{эм}} = c/\sqrt{\mu\epsilon} = \text{const}$.

7 Шкала электромагнитных волн

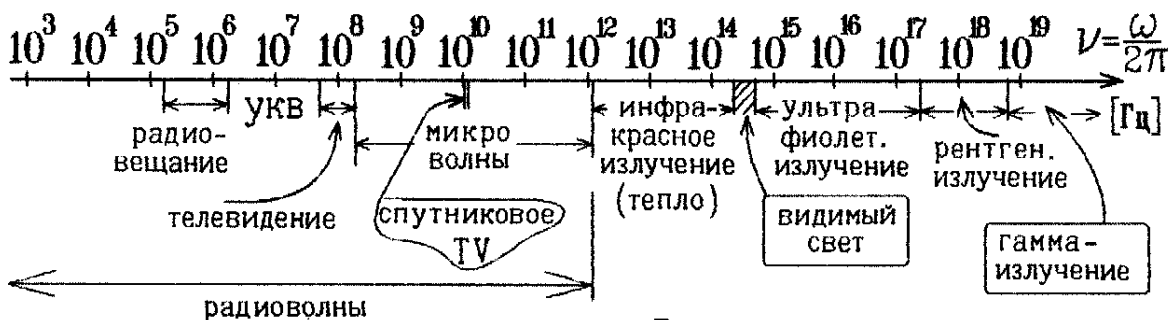


Рис.5.22

Все излучения, показанные на диаграмме (рис.5.22), (в том числе и видимый свет) являются электромагнитными волнами, т.е. быстропеременными колебаниями электрического и магнитного поля. Все они распространяются с одной скоростью, скоростью света $v_{\text{эм}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, и отличаются только частотой колебаний ω и длиной волны λ .

$$\left(\begin{array}{l} \text{Для видимого света} \\ 400 \text{ нм} \lesssim \lambda \lesssim 780 \text{ нм} \\ \text{или} \\ 3,7 \cdot 10^{14} \text{ Гц} \lesssim \nu \lesssim 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц.} \end{array} \right)$$

Вопрос: где используется микроволновое электромагнитное излучение? (Микроволновая бытовая электроника).

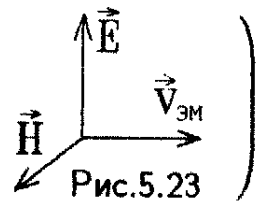
Все те законы и явления, которые мы будем изучать далее на примере видимого света (интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия, законы преломления и отражения), справедливы для электромагнитных волн любого диапазона частот.

Замечание : каждое из излучений, показанных на диаграмме (рис.5.22), обладает свойствами волны (непрерывность, сплошной волновой фронт) и частицы (корпускулы) или фотона. Чем больше частота излучения, тем заметнее его корпускулярные свойства, и наоборот – чем частота меньше, тем сильнее проявляются волновые свойства. При малых частотах (радиоволны) практически проявляются только волновые свойства, а при больших частотах (γ – излучение) его можно представить потоком частиц – фотонов.

8 Энергия и импульс электромагнитной волны

Электромагнитная волна – это электромагнитное поле в непроводящей среде. Вектор потока энергии, или вектор Пойнтинга для нее имеет вид

$$\vec{J}_W = [\vec{E}, \vec{H}] = EH \frac{\vec{v}_{эм}}{v_{эм}}, \quad \left(\begin{array}{l} \text{так как векторы} \\ \vec{E}, \vec{H}, \vec{v}_{эм} \text{ образуют} \\ \text{правую тройку векто-} \\ \text{ров (рис. 5.23):} \end{array} \right)$$



Но амплитуды E и H в плоской электромагнитной волне связаны соотношением $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$ или

$$\begin{cases} H = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} E = \epsilon\epsilon_0 E \cdot v_{эм}, \\ E = \frac{\mu\mu_0}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} H = \mu\mu_0 H \cdot v_{эм}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} EH &\equiv \left(\frac{1}{2} EH + \frac{1}{2} EH \right) = v_{эм} \left(\frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \right) = \\ &= v_{эм} (w_{эл} + w_{магн}) = v_{эм} \cdot w_{эм}, \end{aligned}$$

где $w_{эм}$ – это плотность энергии, или энергия единицы объема электромагнитного поля.

Поток энергии, переносимой электромагнитной волной, равен произведению плотности энергии электромагнитного поля на скорость распространения волны:

$$\boxed{\vec{J}_W = w_{эм} \vec{v}_{эм}}.$$

$\vec{J}_W$ – это энергия, переносимая через единичную площадку за единицу времени. (Действительно, через площадку dS за время dt "перетечет" электромагнитное поле, содержащееся в объеме $v_{эм} dt dS$ и имевшее энергию $w_{эм} v_{эм} dt dS$ (рис. 5.24).)

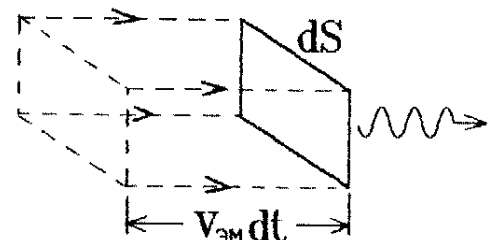


Рис.5.24

(Замечание: формула $\vec{J}_W = w\vec{v}$ справедлива для любой волны, распространяющейся со скоростью $\vec{v}$ и обладающей плотностью энергии колебаний w . Вектор $\vec{J}_W$ для акустических волн называют также вектором Умова.)

Направление вектора Умова – Пойнтинга $\vec{J}_W$ показывает направление переноса энергии волной, а его величина (энергия волны) всегда пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Пример: сферическая волна (рис. 5.25). Так как поток энергии, переносимой волной от источника O через любую сферическую поверхность S , одинаков:

$$\oint_S \vec{J}_W \cdot d\vec{S} \sim A_0^2 \cdot 4\pi r^2 = \text{const}, \quad \text{где } A_0 - \text{амплитуда колебаний, то}$$

амплитуда колебаний в сферической волне уменьшается обратно пропорционально расстоянию r от источника волны:

$$A_0 \sim \frac{1}{r}.$$

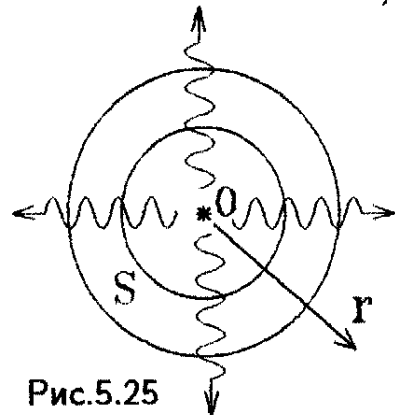


Рис.5.25

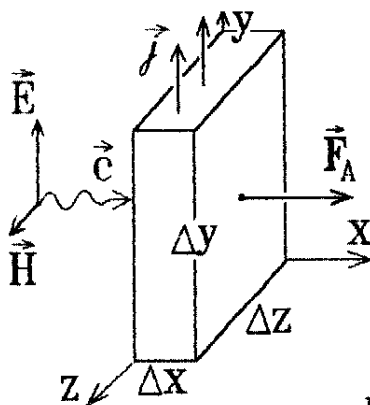


Рис.5.26

Пусть плоская электромагнитная волна падает на плоский участок поглощающей среды малой толщины Δx (рис. 5.26). Электрическое поле $\vec{E}$ волны заставляет двигаться свободные электроны в этой среде и создает ток $I = j \cdot \Delta x \cdot \Gamma z$, где $\Delta x \cdot \Delta z$ – поперечное сечение участка, (будем считать, что $\mu \approx \epsilon \approx 1$).

$$\text{Магнитное поле волны } B = \mu_0 H = \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{E}{c}$$

действует на этот ток с силой Ампера $F_A = I \Delta y B = \frac{jE}{c} \Delta x \Delta y \Delta z$.

Среда при этом должна поглощать падающую волну. За время dt в рассматриваемом участке среды поглотится энергия $J_W \Delta z \Delta y dt$ и превратится в джоулево тепло:

$$J_W \Delta z \Delta y dt = jE \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \cdot dt = F_A c dt.$$

Здесь jE – джоулево тепло, выделяющееся в единице объема среды за единицу времени; $\Delta x \Delta y \Delta z$ – объем участка. Но $\vec{F}_A dt = d\vec{p}$ – это импульс, приобретаемый средой за время dt . Чтобы выполнялся закон сохранения импульса, остается предположить, что импульсом обладает падающая электромагнитная волна, и этот импульс

$d\vec{p} = \vec{F}_A dt = \frac{\vec{J}_W}{c} \Delta y \Delta z dt$ передается среде.

Но за время dt в ней поглотилась волна, занимавшая объем $dV = cdt \cdot \Delta y \Delta z$ (рис.5.27). Следовательно,

$$d\vec{p} = \frac{\vec{J}_W}{c^2} dV,$$

и импульс единицы объема электромагнитной волны равен

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{J}_W}{c^2} = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{c^2} = \frac{w_{эм} \vec{c}}{c^2} \quad \left(\text{таким же импульсом обладает единица объема любого электромагнитного поля в любой среде.} \right)$$

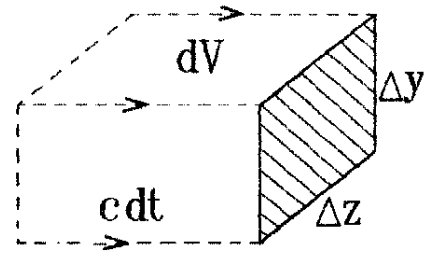


Рис.5.27

Все электромагнитные волны отталкивают поглощающие или отражающие их тела, т.е. создают на них давление

$$p = \frac{F_A}{\Delta z \Delta y} = \frac{J_W}{c} = \frac{w_{эм} \cdot c}{c} = w_{эм}.$$

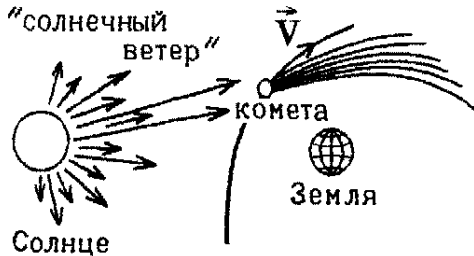


Рис.5.28

Пример : хотя давление солнечного луча очень мало (на поверхности Земли $\sim 10^{-6}$ Па), но его вполне можно применить как двигатель: запустив на околоземную орбиту "спутнике-парус" массой в одну тонну и размерами $100 \times 100 \text{ м}^2$, можно, используя давление

солнечного излучения, за год долететь до Луны. Аналогичным образом объясняется и образование кометных хвостов (рис.5.28).

9 Излучение электромагнитных волн зарядом, движущимся с ускорением

Вспомним, что точечный заряд q , движущийся с постоянной скоростью $\vec{v}$ ($v \ll v_{эм}!$), создает магнитное поле $\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 q [\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$.

С учетом того, что

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{e}_r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right),$$

где $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении $\vec{r}$, можно для вектора $\vec{B}$ записать выражение

$$\vec{B} = -\frac{\mu\mu_0 q}{4\pi} \left[\vec{v}, \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \frac{\mu\mu_0 q}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right), \vec{v} \right] = \frac{\mu\mu_0 q}{4\pi} \left[\vec{\nabla}, \frac{\vec{v}}{r} \right],$$

(так как вектор $\vec{v}$ постоянен, то оператор $\vec{\nabla}$ действует только на

функцию $f(r) = 1/r$), поэтому

$$\vec{B} = \text{rot} \left(\frac{\mu\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r} \right).$$

Заодно из выражения $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ получаем формулу для вектор-потенциала $\vec{A}$ поля заряда q , движущегося со скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r}.$$

Этот же заряд создает и электростатическое поле с потенциалом $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$. Сравните выражения для потенциала φ и вектор-потенциала $\vec{A}$ движущегося заряда!

Если же заряд начнет двигаться не с постоянной, а с переменной скоростью $\vec{v}$, то возникнет вихревое электрическое поле $\vec{E}_B$:

$$\text{rot} \vec{E}_B = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r} \right) \right],$$

откуда $\vec{E}_B = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}}{r} \right)$. Оно, в свою очередь, порождает переменное магнитное поле и т. д.

Такое электромагнитное поле распространяется от заряда q со скоростью света в виде электромагнитных волн.

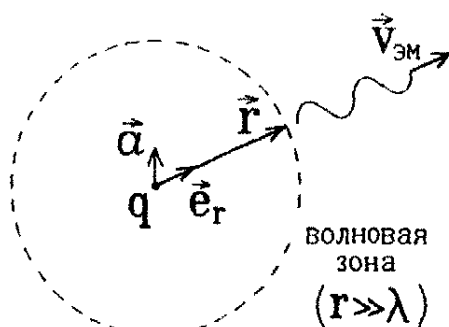


Рис.5.29

А так как сам заряд движется с очень малой скоростью $v \ll v_{\text{эм}}$, то он практически не успевает сместиться за то время, за которое электромагнитные волны проходят большое расстояние $r \gg \lambda$. Следовательно, приближенно можно считать, что $r = \text{const}$ и заряд q практически покоится на месте. Тогда

$$\vec{E}_B = -\frac{\mu\mu_0 q}{4\pi r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ где } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} - \text{ускорение заряда.}$$

Волновой зоной называется область, удаленная от излучающего заряда на расстояние $r \gg \lambda$ (рис.5.29). В ней электростатическое поле $\vec{E}_{\text{эл}} = -\text{grad} \varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, убывающее с расстоянием по закону $1/r^2$ пренебрежимо мало по сравнению с вихревым полем, убывающим по закону $1/r$!

Поэтому

можно считать, что в волновой зоне поле ускоренного заряда проявляется только в виде электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью $v_{\text{эм}} = 1/\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}$ вдоль радиальных направлений $\vec{e}_r$.

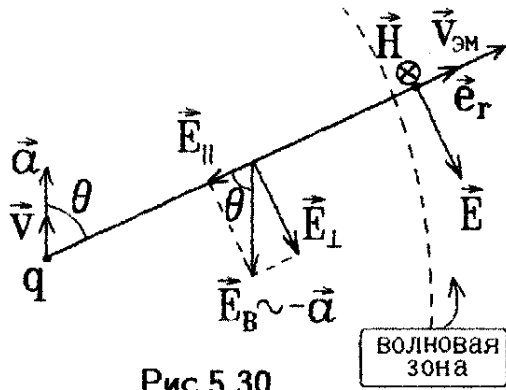


Рис.5.30

Но при больших r участок сферы (волновой фронт) будет практически плоским: в волновой зоне электромагнитные волны можно считать плоскими. А для плоских волн векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{v}_{\text{эм}}$ должны образовывать правую тройку векторов! Поэтому в волновой зоне $\vec{E} \perp \vec{e}_r$, и еще до достижения

волновой зоны должна исчезнуть, затухнуть радиальная составляющая $\vec{E}_{\parallel}$ вихревого электрического поля (рис. 5.30).

Вблизи излучающего заряда электромагнитное поле имеет сложный вид, но в волновой зоне распространяется практически плоская электромагнитная волна с амплитудами

$$E = E_{\text{в}1} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r} a \sin \theta; \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E = \frac{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}{4\pi} \frac{q}{r} a \sin \theta.$$

Электромагнитное поле, созданное ускоренным зарядом в волновой зоне, имеет вид:

$$E(t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r} a \left(t - \frac{r}{v_{\text{эм}}} \right) \cdot \sin \theta; \quad H(t) = \frac{1}{4\pi v_{\text{эм}}} \frac{q}{r} a \left(t - \frac{r}{v_{\text{эм}}} \right) \cdot \sin \theta.$$

Так как происходит запаздывание волны, движущейся с конечной скоростью $v_{\text{эм}}$, то ускорение заряда a следует брать в момент $\left(t - \frac{r}{v_{\text{эм}}} \right)$! В этих формулах θ – угол между направлением ускорения $\vec{a}$ заряда и направлением излучения электромагнитной волны.

Следствия:

1) любой заряд, движущийся ускоренно, теряет свою энергию, излучая электромагнитные волны.

Например, электрон, вращаясь вокруг ядра, движется с центростремительным ускорением $a = \frac{v^2}{R_{\text{орб}}}$ и обязан за время $\tau \sim 5 \cdot 10^{-11}$ с потерять свою кинетическую энергию и упасть на ядро! Следовательно, с точки зрения классической электромагнитной теории атомы неустойчивы. Классические законы неприменимы внутри атома!

2) Излученный ускоренным зарядом поток энергии $\vec{J}_W = [\vec{E}, \vec{H}] \sim \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_r$ различен вдоль разных направлений. Максимум энергии ускоренный заряд излучает в направлении, перпендикулярном к вектору ускорения $\vec{a}$, и практически не излучает в направлении вектора $\vec{a}$ (рис. 5.31)!

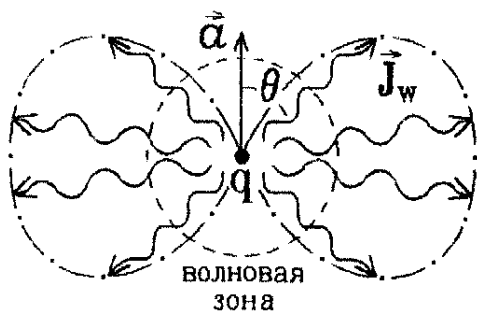


Рис.5.31

электроны в нем испытывают смещение $x = x_0 \cos \omega t$. Их ускорение $a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos \omega t$, и испускаемая электромагнитная волна в волновой зоне имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\mu\mu_0 q}{4\pi r} \omega^2 x_0 \cos(\omega t - kr) \cdot \sin \theta, \\ H &= \frac{1}{4\pi v_{\text{эм}} r} q \omega^2 x_0 \cos(\omega t - kr) \cdot \sin \theta. \end{aligned} \right\}$$

Испускаемая в пространство энергия

$$\underline{\underline{\vec{J}_W \sim \omega^4 !}}$$

Следовательно, потери на излучение резко растут с частотой переменного тока.

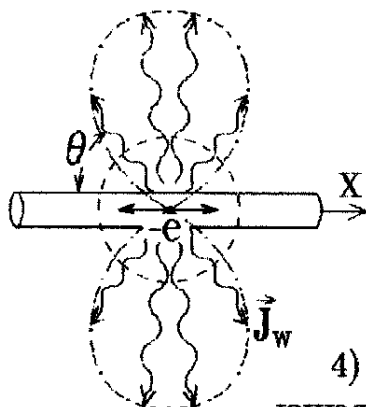


Рис.5.32

4) Рассеяние света в атмосфере. Свет, как падающая волна электромагнитного излучения, рассеивается на микроскопических неоднородностях, флуктуациях атмосферы, возбуждая в них колебания электронов с частотой света. Эти ускоренные заряды (электроны) испускают вторичные электромагнитные волны по всем направлениям (кроме направления вектора ускорения $\vec{a}$) с той же самой частотой. Но такое вторичное излучение прямо пропорционально четвертой степени частоты и обратно пропорционально четвертой степени длины волны падающего света

$$\vec{J}_W \sim \omega^4 \sim 1/\lambda^4.$$

Это выражение – закон Рэлея для рассеяния света.



Рис.5.33

Из него следует, что наиболее легко рассеиваются синие и голубые лучи, а красные лучи проходят атмосферу, рассеиваясь меньше (рис.5.33). Это объясняет синий и голубой цвет неба днем (преобладание голубых лучей в рассеянном свете) и красный цвет закатов и восходов (преобладание красных лучей в волнах, прошедших через атмосферу без рассеяния).

Глава 6.

Основы геометрической оптики

1 Уравнение эйконала

Электромагнитные волны с *малой длиной волны* λ движутся в пространстве в виде *лучей* (луч света, например). Найдем уравнение траектории таких лучей.

Вдали от источника (в волновой зоне) волна будет плоской. В комплексном виде ее волновая функция $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$.

Введем единичный вектор $\vec{\tau} = \vec{k}/k$, направленный вдоль скорости волны, то есть вдоль светового луча (рис.6.1). В среде с показателем преломления $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ скорость электромагнитной волны $v = c/n$, а длина волны $\lambda = vT = cT/n = \lambda_0/n$ в n раз меньше, чем в вакууме.

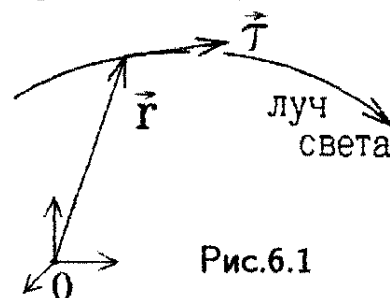


Рис.6.1

Тогда волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n$ будет в n раз больше, чем в вакууме. Подставляя $\vec{k} = k_0 n \vec{\tau}$ в волновую функцию плоской волны, получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - k_0 n \vec{\tau} \cdot \vec{r})].$$

В среде с $n = \text{const}$ такая плоская волна (луч) будет распространяться по прямой.

Но в среде с непостоянным показателем преломления $n = n(\vec{r})$ луч **искривлен**. Решение для волновой функции в такой среде ищут в виде $\vec{E} = \vec{A} \exp[i(\omega t - k_0 S)]$, где скалярную функцию $S = S(\vec{r})$ называют эйконалом.

Если показатель преломления среды n изменяется не очень быстро, то эйконал можно разложить в ряд вблизи некоторой точки с радиус-вектором $\vec{r}_0$ и ограничиться первыми двумя членами ряда (эйкональное приближение):

$$S(\vec{r}) = S(\vec{r}_0) + \left. \frac{dS}{d\vec{r}} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \dots$$

Подставим это разложение в искомое решение:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{A} \exp \left[i \left(\omega t - k_0 S(\vec{r}_0) - k_0 \frac{dS}{d\vec{r}} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \right) \right] = \\ &= \vec{A} \exp \left[i \left(-k_0 S(\vec{r}_0) + k_0 \frac{dS}{d\vec{r}} \cdot \vec{r}_0 \right) \right] \cdot \exp \left[i \left(\omega t - k_0 \frac{dS}{d\vec{r}} \cdot \vec{r} \right) \right].\end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с волновой функцией, видим, что оно описывает плоскую волну с амплитудой $\vec{E}_0 = \vec{A} \exp \left[i \left(-k_0 S(\vec{r}_0) + k_0 \frac{dS}{d\vec{r}} \cdot \vec{r}_0 \right) \right]$ и с начальной фазой $k_0 n \vec{r} \cdot \vec{r} = k_0 \frac{dS}{d\vec{r}} \cdot \vec{r}$, откуда следует, что

$$n \vec{\tau} = \frac{dS}{d\vec{r}} \equiv \vec{\nabla} S.$$

Это уравнение является основным уравнением геометрической оптики и называется уравнением эйконала.

2 Принцип Ферма

Проинтегрируем уравнение эйконала вдоль траектории луча, распространяющегося из точки 1 в точку 2 (рис.6.2):

$$\begin{aligned}\int_1^2 n \vec{\tau} \cdot d\vec{r} &= \int_1^2 \frac{dS}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 dS = \\ &= S_2 - S_1.\end{aligned}$$

Как следует из этого выражения, результат интегрирования не зависит от траектории.

Но если двигаться вдоль истинной траектории луча, то лишь для этой траектории угол между векторами $d\vec{r}$ и $\vec{\tau}$ равен 0° и, с учетом $|d\vec{r}| = dl$, получаем

$$\int_1^2 n \vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 n \underbrace{|\vec{\tau}|}_{=1} \cdot |d\vec{r}| \cos 0^\circ = \int_1^2 n dl = S_2 - S_1.$$

Величина $\int n dl$ называется оптической длиной пути луча. Оптическая длина пути, вычисленная вдоль истинной траектории луча, в точности равна изменению эйконала $S_2 - S_1$. Но если вычислить оптическую длину пути вдоль любой другой произвольной траектории (рис.6.2), то она окажется больше, чем $S_2 - S_1$:

$$\int_1^2 n \vec{\tau} \cdot d\vec{r}' = \int_1^2 n dl' \cos \theta = S_2 - S_1 < \int_1^2 n dl'.$$

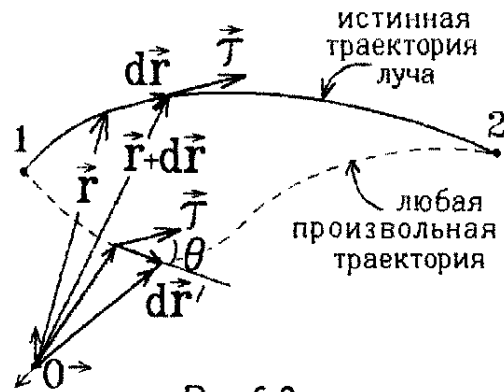


Рис.6.2

Итак, получен общий принцип, позволяющий определить истинную траекторию (светового) луча:

в любой среде луч движется по пути с наименьшей возможной оптической длиной, равной изменению эйконала:

$$\int_1^2 n dl = \min = S_2 - S_1.$$

Это положение называется принципом Ферма.

Подставляя в последнее выражение $n = c/v_{\text{эм}}$, находим

$$\int_1^2 n dl = c \int_1^2 \frac{dl}{v_{\text{эм}}} = c \int_1^2 dt = c\Delta t = \min.$$

Луч (света) распространяется по такому пути, который преодолевается им за наименьшее возможное время Δt

– это другая формулировка принципа Ферма.

3 Законы отражения и преломления

Применим принцип Ферма для вывода законов геометрической оптики.

Пусть луч света из точки A с координатой $x = 0$ падает в точке D с неизвестной координатой x на плоскую границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 и, отражаясь или преломляясь, проходит через точки B или C с координатой $x = \ell$, как показано на рис.6.3.

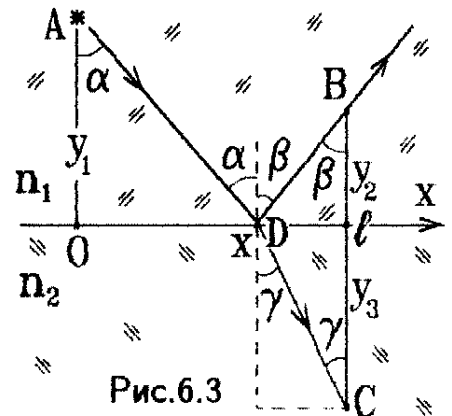


Рис.6.3

По принципу Ферма оптическая длина пути отраженного луча

$$L_{\text{отр}} = \int_A^B n dl = n_1(AD + DB) = n_1 \left(\sqrt{y_1^2 + x^2} + \sqrt{y_2^2 + (\ell - x)^2} \right)$$

должна быть минимальной на пути реального отраженного луча, т.е.

$$\frac{dL_{\text{отр}}}{dx} = n_1 \left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}}}_{=\sin \alpha} - \underbrace{\frac{\ell - x}{\sqrt{y_2^2 + (\ell - x)^2}}}_{=\sin \beta} \right) = 0.$$

Отсюда $\sin \alpha = \sin \beta$ или $\alpha = \beta$ – угол падения равен углу отражения!

Аналогично, для преломленного луча должна быть минимальна величина

$$L_{\text{пр}} = \int_A^B n \, dl = n_1 \cdot AD + n_2 \cdot DC = n_1 \sqrt{y_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{y_2^2 + (\ell - x)^2}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{dL_{\text{пр}}}{dx} = n_1 \underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} \right)}_{=\sin \alpha} - n_2 \underbrace{\left(\frac{\ell - x}{\sqrt{y_2^2 + (\ell - x)^2}} \right)}_{=\sin \gamma} = n_1 \sin \alpha - n_2 \sin \gamma = 0,$$

или иначе,

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}}. \quad \text{Таким образом, из принципа Ферма получен закон преломления (закон Снеллиуса-Декарта).}$$

Подобным же образом из принципа Ферма можно вывести формулу линзы: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Испущенные из точки S (рис.6.4) лучи, согласно принципу Ферма, одновременно и через наименьшее возможное время соберутся в точке P , давая изображение источника S .

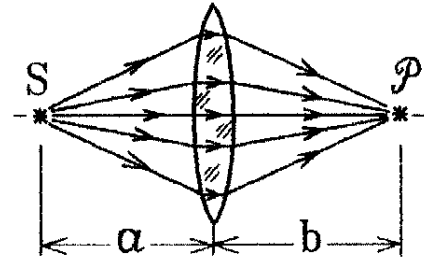


Рис.6.4

Замечание: все эти законы применимы не только для света, но и для любой другой электромагнитной волны. Чем меньше ее длина волны λ , тем заметнее свойства луча!

4 Распространение света в неоднородной среде

Снова рассмотрим истинную траекторию луча (рис.6.5). Дифференцируя уравнение эйконала по dl , т.е. по длине, измеренной вдоль траектории луча

$$\frac{d}{dl}(n \vec{\tau}) = \vec{\tau} \frac{dn}{dl} + n \frac{d\vec{\tau}}{dl} = \vec{\nabla} \left(\frac{dS}{dl} \right)$$

и принимая во внимание, что $\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \vec{\tau}$,

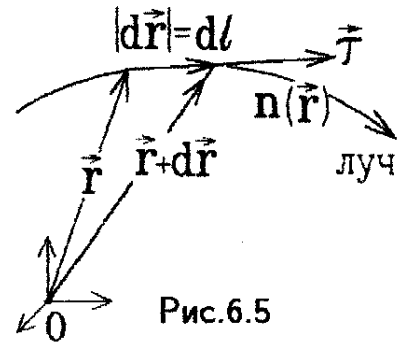


Рис.6.5

$$\begin{cases} \frac{dS}{dl} \equiv \frac{dS}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dl} = \underbrace{\vec{\nabla} S}_{=n\vec{\tau}} \cdot \underbrace{\vec{\tau}}_{=1} = n, \\ \frac{dn}{dl} \equiv \frac{dn}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} n, \end{cases}$$

получаем

$$\boxed{n \frac{d\vec{\tau}}{dl} + \vec{\tau}(\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} n) = \vec{\nabla} n}.$$

Это уравнение описывает движение луча в среде с неоднородным показателем преломления $n(\vec{r})$.

Введем теперь радиус кривизны траектории луча R , как показано на рис.6.6, где $\vec{e}_n$ —единичный вектор, задающий направление нормали к траектории. Тогда

$$dl = R d\varphi, \quad \vec{\tau} = |\vec{\tau}| d\varphi \cdot \vec{e}_n = \vec{e}_n d\varphi.$$

Отсюда следует, что $\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{e}_n}{R}$, а уравнение траектории луча принимает вид

$$n \frac{\vec{e}_n}{R} + \vec{\tau}(\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} n) = \vec{\nabla} n.$$

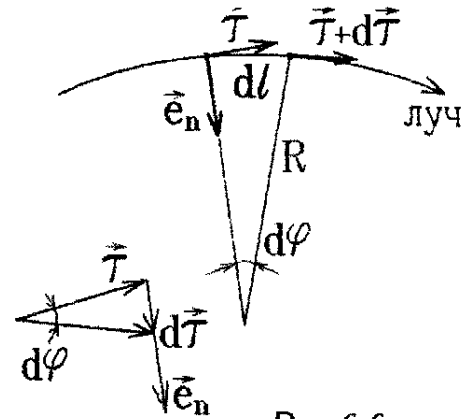


Рис.6.6

Умножая обе части этого уравнения скалярно на $\vec{e}_n$ и учитывая, что $\vec{e}_n^2 = 1$, $\vec{e}_n \cdot \vec{\tau} = 0$, получаем

$$\frac{n}{R} = \vec{e}_n \cdot \vec{\nabla} n \text{ или } R = \frac{n}{(\vec{e}_n \cdot \vec{\nabla} n)}.$$

Луч отклоняется в область с бóльшим показателем преломления: $R > 0$ при $\vec{\nabla} n \uparrow \uparrow \vec{e}_n$.

Это объясняет, например, возникновение миражей (рис.6.7).

В радиотехнике используется отклонение волн УКВ-диапазона (вместе с отражением от ионосферы). Это делает возможным осуществлять радиосвязь с помощью небольших радиопередающих станций на значительных расстояниях.

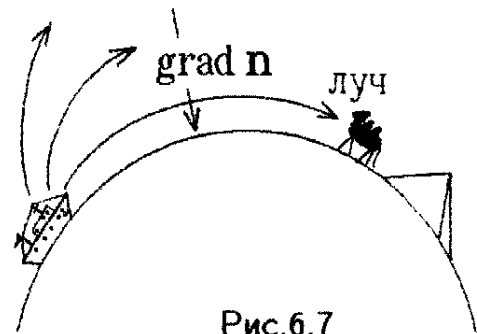


Рис.6.7

Глава 7.

Интерференция электромагнитных волн

1 Отражение электромагнитных волн от проводящей среды

Допустим, что плоская электромагнитная волна $\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ падает слева на плоскую проводящую поверхность. Она создает в проводящей среде переменный электрический ток, равный, согласно закону Ома, $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{пад}}$ (рис.7.1). В свою очередь, переменный электрический ток порождает вторичную волну $\vec{E}'$, распространяющуюся в обе стороны от поверхности.

Векторы $\vec{E}'$, $\vec{H}'$ и $\vec{v}_{\text{эм}}$ образуют правую тройку, а электрический вектор $\vec{E}'$ вторичной волны изменяется в *противофазе* с электрическим вектором падающей волны $\vec{E}_{\text{пад}}$.

Поясним это обстоятельство. Падающая волна заставляет свободные электроны проводника двигаться с ускорением $\vec{a} = q\vec{E}_{\text{пад}}/m_e$, где введено обозначение $q = -e$. Но ускоренно движущиеся заряды излучают в волновой зоне перпендикулярно к направлению ускорения электромагнитную волну $\vec{E}' = \vec{E}_{\perp \text{изл}} \sim -q\vec{a} = -q^2 \vec{E}_{\text{пад}}/m_e$, колеблющуюся в *противофазе* с падающей волной (рис.7.2).

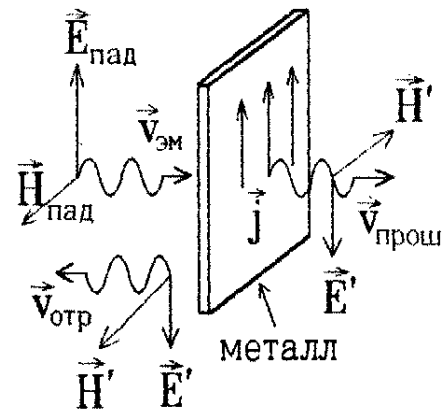


Рис.7.1

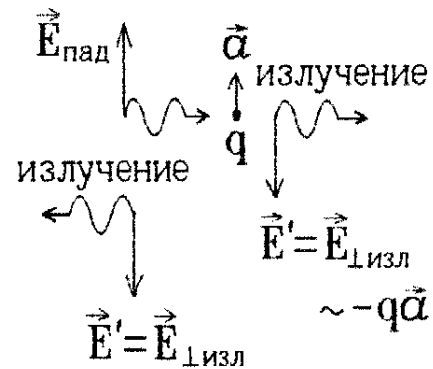


Рис.7.2

В направлении движения падающей волны и падающая и вторичные волны будут складываться и **взаимно гаситься** (ведь эти волны колеблются в противофазе)! Их сумма будет создавать волну $\vec{E}_{\text{прош}} =$

$= \vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}'$, проникающую внутрь проводника и колеблющуюся в фазе с падающей волной (рис.7.3). Но амплитуда этой прошедшей волны экспоненциально затухает с толщиной пройденного ею слоя, $\vec{E}_{\text{прош}} = \vec{E}_{\text{пад}} \exp(-\alpha x)$, так как часть энергии падающей волны должна непрерывно излучаться в обратном направлении колеблющимися свободными электронами. В проводнике свободных электронов очень много, поэтому затухание прошедшей волны происходит быстро: в металле прошедшая электромагнитная волна затухает на расстоянии в несколько атомных слоев ($\Delta x \approx 10^{-9} \div 10^{-10}$ м) !

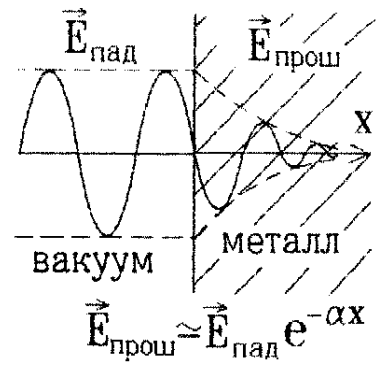


Рис.7.3

В проводящей среде электромагнитные волны не распространяются (мгновенно затухают). Поэтому, например, не существует прозрачных металлов.

Проводники отражают падающие на них электромагнитные волны. При этом отраженная волна $\vec{E}_{\text{отр}} = \vec{E}'$ колеблется в противофазе с падающей.

Последний результат можно сформулировать в более общем виде:

при прохождении через границу раздела двух сред и отражении от оптически менее плотной среды (с меньшим показателем преломления n) электромагнитные волны не меняют фазы колебаний. Но при отражении от оптически более плотной среды (с большим n) фаза колебаний электрического вектора меняется на π .

2 Стоячие волны

В идеальном проводнике сопротивление настолько мало, что потерями энергии на джоулево тепло можно пренебречь. К тому же электромагнитная волна практически не проникает вглубь такого проводника. Поэтому почти вся энергия отражается обратно, вследствие чего амплитуда отраженной волны совпадает с амплитудой $\vec{E}_0$ падающей волны.

Найдем результирующее поле падающей и отраженной волн (колеблющихся в противофазе):

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}_{\text{отр}} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) - \vec{E}_0 \cos(\omega t + kx).$$

Воспользовавшись формулой $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right)$,

получим волновую функцию стоячей волны :

$$\vec{E}_{\text{рез}} = 2\vec{E}_0 \sin kx \sin \omega t.$$

Здесь $2\vec{E}_0 \sin kx$ – амплитуда стоячей волны, а ωt – фаза колебаний.

Колебания во всех точках стоячей волны происходят в одинаковой фазе, но с разными амплитудами, изменяющимися от точки к точке по гармоническому закону (рис.7.4).

Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна (а именно: $E_{\text{рез}} = 2E_0$), называются пучностями, а точки с нулевой амплитудой – узлами стоячей волны. Так как в узлах колебания вообще отсутствуют, то вектор Пойнтинга $\vec{J}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$ в них равен нулю. Значит, энергия в стоячей волне через узлы не переносится !

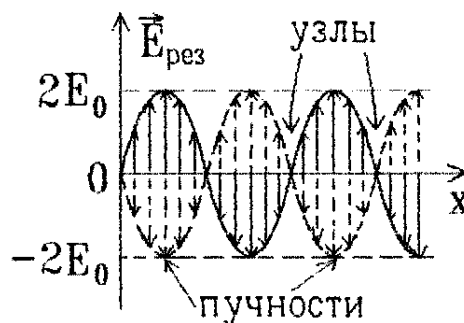


Рис.7.4

В отличие от обычной бегущей волны стоячая волна энергию не переносит.

Стационарная стоячая волна устанавливается в ограниченном объеме с идеально отражающими стенками (резонаторе), если на длине резонатора укладывается точно целое число длин полуволин $n \frac{\lambda}{2}$, где n – целое число.

Примерами стоячих волн являются хорошо известные колебания натянутых струн; такая стоячая волна изображена на рис.7.5.

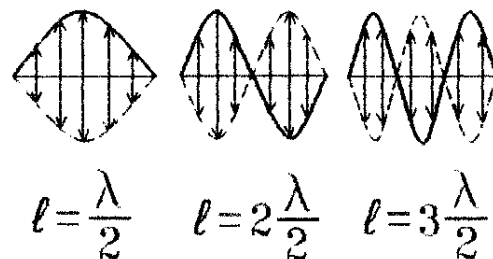


Рис.7.5

Другим примером стоячих волн может служить и звучание духовых музыкальных инструментов, причиной которого является возникновение стоячих волн плотности в воздушном столбе внутри инструмента.

Следует заметить, что записанная выше формула является лишь частным случаем общего выражения для волновой функции стоячей волны, которое имеет вид

$$F(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{i\omega t}$$

и удовлетворяет так называемому уравнению стоячей волны

$$\Delta f + k^2 f = 0,$$

где $\Delta = \vec{\nabla}^2$ – оператор Лапласа.

3 Интерференция когерентных волн

Интерференция волн – это явление устойчивого увеличения или уменьшения результирующей амплитуды колебаний при суперпозиции (наложении) двух или более когерентных волн. При этом в разных точках пространства результирующая амплитуда различна, но в любой точке она остается постоянной в течение довольно большого промежутка времени (времени наблюдения).

(Примером интерференции волн являются стоячие волны.)

Пусть в некоторую точку пространства, обычно называемую точкой наблюдения и обозначаемую буквой P , приходят от разных источников две волны с одинаковой частотой ω и с одинаковым направлением колебаний электрических векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ (рис.7.6). Тогда, согласно принципу суперпозиции, результирующее колебание в точке P будет иметь вид

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{E}_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

причем начальные фазы колебаний φ_1 и φ_2 будут зависеть от координат источников и точки наблюдения.

Для сложения колебаний применим метод векторной диаграммы. Как следует из рис.7.7, квадрат амплитуды результирующего колебания в точке P (по теореме косинусов) равен

$$E_{\text{рез}}^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \alpha = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

так как $\alpha = 180^\circ - (\varphi_2 - \varphi_1)$.

Волны называются некогерентными, если их разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ **зависит от времени**. Тогда среднее значение быстропеременной гармонической функции за время наблюдения $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$, и среднее значение квадрата амплитуды результирующего колебания

$$\langle E_{\text{рез}}^2 \rangle = E_1^2 + E_2^2.$$

Интенсивность (или энергия) волны (а для света – освещенность экрана) пропорциональна квадрату ее амплитуды, т.е. $I \sim E^2$.

Поэтому при наложении некогерентных волн их интенсивности складываются, и результирующая (усредненная) интенсивность будет одинакова во всех точках пространства: $\langle I_{\text{рез}} \rangle = I_1 + I_2$.

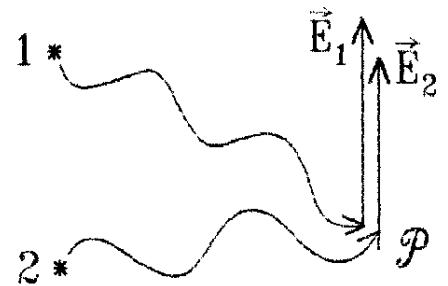


Рис.7.6

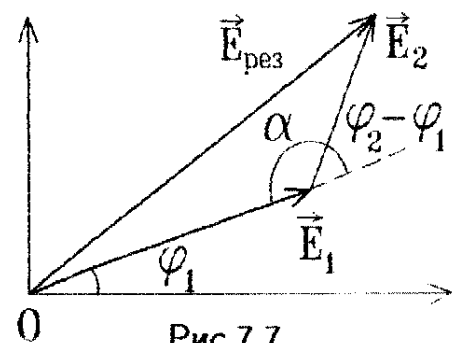


Рис.7.7

Когерентными называются волны, для которых разность фаз постоянна во времени $(\varphi_2 - \varphi_1) = \text{const}$.

В тех точках пространства (экрана), где разность фаз когерентных волн равна нечетному числу π , т.е.

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2m + 1)\pi, \text{ где } m - \text{целое число} \quad \left(\begin{array}{c} \text{условие} \\ \text{минимума} \end{array} \right),$$

резльтирующая амплитуда будет минимальной и равной

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2} = |E_1 - E_2|.$$

В тех же точках, где разность фаз когерентных волн равна четному числу π , т.е.

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2m\pi, \text{ где } m - \text{целое число} \quad \left(\begin{array}{c} \text{условие} \\ \text{максимума} \end{array} \right),$$

резльтирующая амплитуда будет максимальной: $E_{\text{рез}} = E_1 + E_2$.

Таким образом, при сложении когерентных волн наблюдается интерференционная картина, состоящая из устойчивых максимумов и минимумов интенсивности (освещенности) экрана.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Если амплитуды интерферирующих волн одинаковы: } E_1 = \\ = E_2 = E_0, \text{ в точках минимума освещенность падает до нуля,} \\ \text{а в точках максимума возрастает в четыре раза:} \\ I_{\text{max}} = E_{\text{рез}}^2 = (2E_0)^2 = 4I_0. \end{array} \right)$$

Вопрос: можно ли услышать акустическую интерференцию с помощью обычного стереопроигрывателя с двумя колонками (рис.7.8)?

Ответ: да – если воспроизводить через систему звук одного тона (синусоидальную волну) либо на открытом воздухе, либо в большом зале (чтобы исключить влияние волн, отраженных от стен и других предметов); тогда найдутся точки (узлы), где звук не слышен.

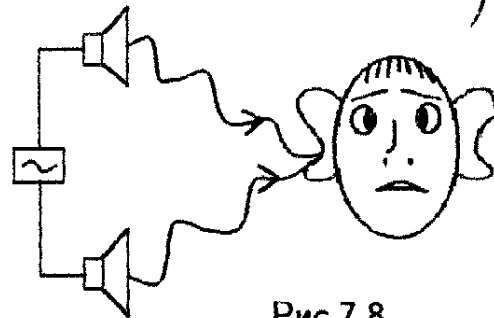


Рис.7.8

4 Интерференционная схема Юнга

Рассмотрим образование интерференционной картины на примере сложения электромагнитных волн от двух когерентных источников S_1 и S_2 , расстояние между которыми равно $2d$, испускающих свет в одинаковой фазе.

Попадая в точку наблюдения P с координатой x , находящуюся на симметрично расположенном экране, удаленном на расстояние l от

источников (рис.7.9), волны имеют оптическую разность хода $\Delta = n(r_2 - r_1)$ и разность фаз

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= |(\omega t - k n r_2) - (\omega t - k n r_1)| = \\ &= k \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} n(r_2 - r_1)\end{aligned}$$

С учетом условий максимума и минимума из предыдущего параграфа, можно сказать, что:

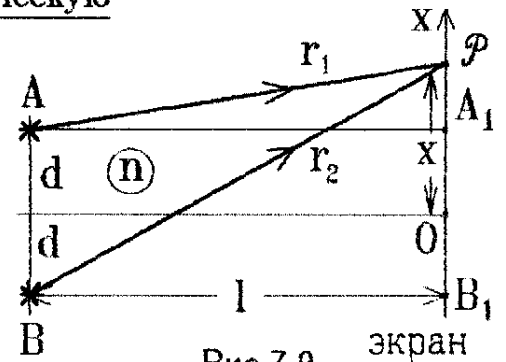


Рис.7.9

экран

если оптическая разность хода волн равна чётному числу длин полуволин

$$\Delta_{\max} = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m - \text{целое число} \quad (\Delta\varphi = 2m\pi),$$

то волны приходят в фазе и при сложении дают максимум интенсивности света.

Если же разность хода Δ равна нечётному числу длин полуволин

$$\Delta_{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m - \text{целое число} \quad (\Delta\varphi = (2m + 1)\pi),$$

то волны приходят в противофазе и гасят друг друга, т.е. получается минимум интенсивности.

Но из $\triangle AA_1P$ и $\triangle BB_1P$ на рис.7.9 следует, что

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= l^2 + (x - d)^2, \\ r_2^2 &= l^2 + (x + d)^2 \end{aligned} \right\} \text{ и } r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 4xd.$$

Если $d \ll l$ (точка наблюдения P интерференционной картины достаточно удалена от когерентных источников света), то $r_1 + r_2 \approx 2l$ и

$$\Delta = n(r_2 - r_1) = \frac{4xd \cdot n}{r_2 + r_1} \cong \frac{2nd \cdot x}{l}.$$

На экране (рис.7.10) будут видны светлые полосы (максимумы интерференционной картины) с координатами

$$x_m = \frac{l}{2nd} \Delta_{\max} = \frac{l}{2nd} 2m \frac{\lambda}{2} = m \frac{\lambda l}{2nd},$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – номер светлой полосы.

(Минимумы освещенности или центры темных полос наблюдаются в точках с координатами

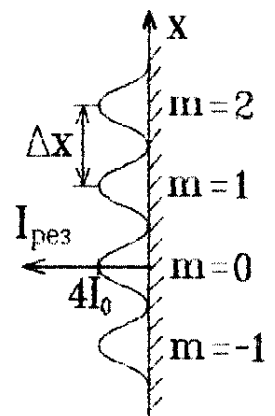
$$x'_m = \frac{l}{2nd} \Delta_{\min} = \frac{l}{2nd} (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m - \text{целое число.}$$


Рис.7.10

Расстояние между соседними интерференционными полосами или ширина интерференционной полосы имеет величину

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda l}{2nd}.$$

Найдем теперь закон изменения освещенности экрана в зависимости от координаты x (рис.7.10). Если амплитуды световых волн, приходящих от обоих когерентных источников одинаковы, то при сложении волн получаем

$$I_{\text{рез}} = kE_1^2 + kE_2^2 + k2E_1E_2 \cos(\Delta\varphi) = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta\right) =$$

$$= 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2nxd}{l}\right) \right].$$

Вопрос: как же осуществить на практике интерференционную схему Юнга?

Ответ: необходимо с помощью оптической системы разделить волну на два пучка и затем свести их вместе на экране.

Пример 1: билинза Бийе (рис.7.11, линза разрезана на две половинки, которые раздвинуты на расстояние h). Когерентными источниками света являются два изображения источника (1 и 2) в половинках линзы.

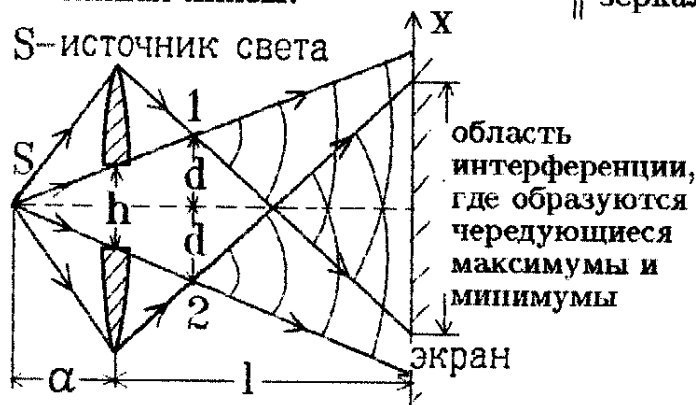


Рис.7.11

Пример 2: зеркало Ллойда (рис.7.12, источник света располагается вблизи плоскости зеркала). Когерентными источниками являются сам источник и его мнимое изображение в зеркале.

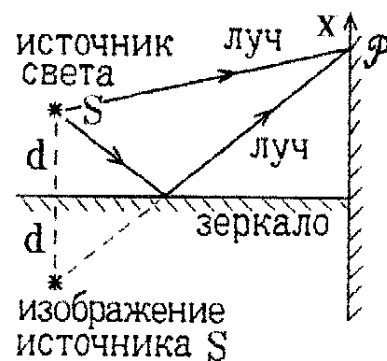


Рис.7.12

5 Условия пространственной и временной когерентности

На практике получить интерференционную картину весьма непросто. Реально атомы вещества излучают свет в течение очень короткого промежутка времени $\tau \approx 10^{-8}$ с (время нахождения атома

в возбужденном состоянии). Поэтому испущенный свет представляет собою не плоскую бесконечно длинную монохроматическую волну, а набор отдельных участков такой волны длиной $l \approx ct = 3 \text{ м}$ (рис.7.13). Такие участки называются цугами или волновыми пакетами. Волновые пакеты испускаются разными атомами случайным образом и поэтому некогерентны между собой.

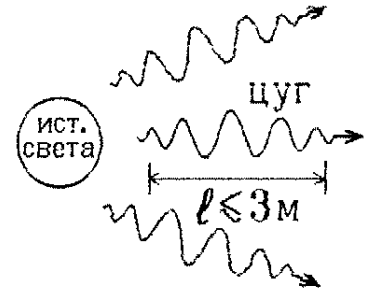


Рис.7.13

Чтобы в схеме Юнга получить интерференцию, надо сначала отдельные короткие цуги разделить на две части (создать два когерентных пучка света), а затем совместить их, заставив интерферировать между собой. Разность хода при этом не должна превышать длины цуга — поэтому размеры интерференционной картины ограничены.

Но любая функция $f(t)$, задающая импульс ограниченной длины (рис.7.14), может быть представлена в виде ряда или интеграла Фурье, т.е. в виде суммы гармонических функций с разными частотами, лежащими в интервале

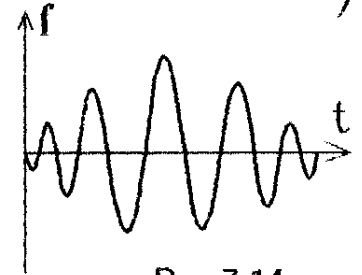


Рис.7.14

$$\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2} :$$

$$f(\omega_0 t - k_0 r) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) \cos(\omega t - kr) d\omega.$$

Таким образом, реально ни один источник света не является строго монохроматическим. Все источники испускают световые волны с целым набором частот $\omega \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ (или длин волн $\lambda \pm \frac{\Delta\lambda}{2}$).

Но тогда за промежуток времени Δt разность фаз между волнами с крайними частотами $\omega - \frac{\Delta\omega}{2}$ и $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$ возрастает на величину $(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})\Delta t - (\omega - \frac{\Delta\omega}{2})\Delta t = \Delta\omega \cdot \Delta t$ и создает дополнительный сдвиг интерференционных полос на экране.

Если складывать только волны с двумя крайними частотами $\omega \pm \Delta\omega/2$, то из рис.7.15 видно, что при сдвиге фаз $\Delta\omega \cdot \Delta t \lesssim \pi/2$ на экране все еще достаточно четко различаются чередующиеся

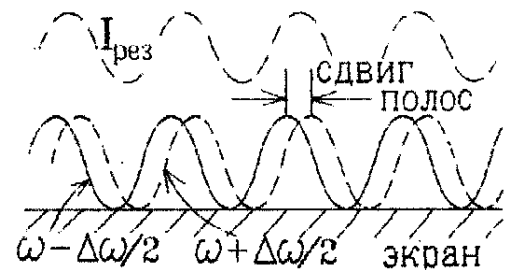


Рис.7.15

ся максимумы и минимумы интенсивности, а при $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \pi/2$ максимумы для одной частоты компенсируются минимумами для другой частоты, и интерференционная картина становится неразличимой. В действительности же надо складывать не две, а бесконечное число волн с частотами в интервале от $\omega - \Delta\omega/2$ до $\omega + \Delta\omega/2$. Строгий расчет показывает, что в этом случае интерференционная картина видна достаточно четко лишь при выполнении условия $\Delta\omega \cdot \Delta t \lesssim 2\pi$.

Вывод: для реальных некогерентных источников света интерференция может наблюдаться, если интерферирующие волны проходят расстояния от источников до экрана за время, не превышающее

время когерентности $\Delta t_{\text{ког}} \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Это – условие временной когерентности.

За это время свет не может пройти в вакууме расстояние, большее чем $l_{\text{ког}} = c\Delta t_{\text{ког}} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$. С другой стороны, из формулы $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ следует, что для малых приращений $\Delta\omega = \left| \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda \right|$ и, следовательно,

размеры интерференционной системы и интерференционной картины не могут превышать длины когерентности $l_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$. За пределами этого расстояния интерференционная картина исчезает (так как интерференционные картины для разных длин волн $\lambda \pm \Delta\lambda/2$ компенсируют друг друга).

Но когерентность нарушается также из-за того, что источник света имеет конечные размеры (скажем, b).

Обратимся снова к схеме Юнга.

Очевидно, что когерентными будут только те волны, которые испускаются одними и теми же атомами, т.е. одним и тем же участком источника света.

Пусть, например, лучи AO_1P и AO_2P , испущенные одним концом A источника (рис.7.16), дают максимум интерференции в точке P , а лучи BO_1P' и BO_2P' , идущие от другого конца B , дают максимум того же порядка в точке P' . (Для этого, конечно, разность хода их должна

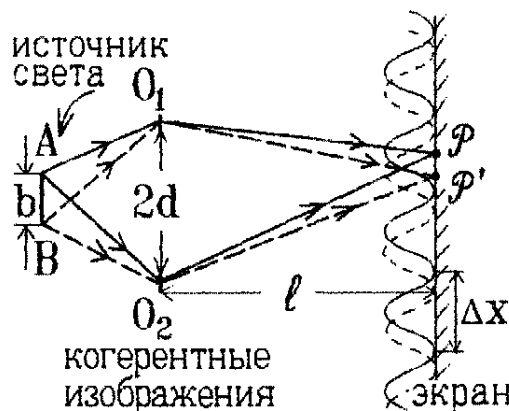


Рис.7.16

быть одинаковой, т.е. должно выполняться условие:

$$\Delta = n(AO_2 + O_2P - AO_1 - O_1P) = n(BO_2 + O_2P' - BO_1 - O_1P').$$

Здесь O_1 и O_2 – точки двух когерентных изображений источника света АВ в интерференционной схеме Юнга (рис.7.16).)

Две накладываются друг на друга интерференционные картины еще не сливаются друг с другом, если

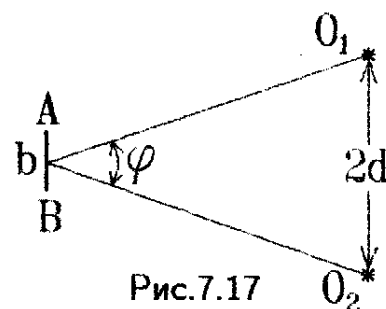
$$PP' < \frac{\Delta x}{2},$$

где $\Delta x = \frac{\lambda l}{2nd}$ – расстояние между соседними полосами интерференции на экране.

Это – **условие пространственной когерентности**, при выполнении которого на экране всё ещё видны чередующиеся максимумы и минимумы интенсивности.

Вывод:

чтобы на экране наблюдалась интерференционная картина, размеры источника света должны быть малы (чем меньше АВ, тем меньше PP'), т.е. $AB=b$ должно быть порядка $\lambda \ll l$.



Расчет показывает, что $b \lesssim \lambda/2\varphi$, где φ – угол, под которым когерентные изображения O_1 и O_2 в интерференционной схеме Юнга видны из точки расположения источника света (рис.7.17). Этот угол φ называется апертурой интерференции.

6 Интерференция света в тонких пленках

Пусть пленка с показателем преломления n , находящаяся в воздухе, имеет всюду одинаковую толщину d .

Пучок света 1, падая на пленку под углом α , частично отражается в точке О от оптически более плотной среды со сдвигом фазы на π (т.е. с изменением разности хода на $\Delta_1 = \frac{\Delta\varphi}{k} = \frac{\pi}{2\pi/\lambda} =$

$\frac{\lambda}{2}$ – так называемая "потеря полуволны"), образуя пучок 1'. Но, частично

преломляясь, он отражается в точке D от нижней поверхности пленки (в данном случае – без потери полуволны) и выходит из нее в точке С

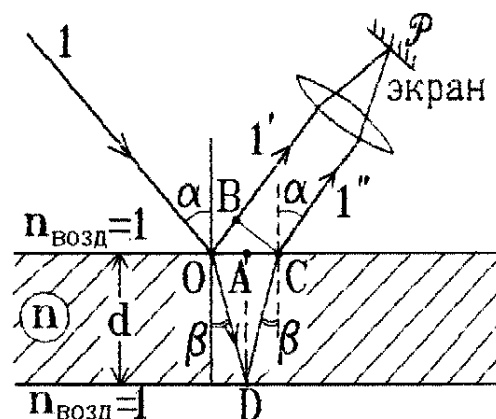


Рис.7.18

в виде пучка 1'' параллельно пучку 1' (рис.7.18).

Пучки света 1' и 1'' когерентны, так как образуются из одного пучка 1, и поэтому могут интерферировать на экране, если их собрать с помощью линзы (роль линзы может выполнять и глаз наблюдателя, что обычно и происходит).

Оптическая разность хода этих световых пучков

$$\Delta = (OD + DC) \cdot n - OB \cdot n_{\text{возд}} \pm \lambda/2.$$

Из рис.7.18 следует, что $OB = OC \cdot \sin \alpha$, $OC = 2 \cdot OA = 2d \cdot \tan \beta$, $OD = DC = d / \cos \beta$. Поэтому $\Delta = 2nd / \cos \beta - 2d \sin \alpha \tan \beta \pm \lambda/2$.

Но, согласно закону преломления, $\sin \alpha = \frac{n}{n_{\text{возд}}} \sin \beta = n \sin \beta$. Тогда

$\Delta = 2nd(1 - \sin^2 \beta) / \cos \beta \pm \lambda/2 = 2nd \cos \beta \pm \lambda/2$. Заменяя $\cos \beta$ выражением $\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - (\sin^2 \alpha) / n^2}$, находим окончательно разность хода волн, интерферирующих в тонкой пленке:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}.$$

Максимумы освещенности для данной длины волны λ будут наблюдаться при отражении света под определенными углами α_{max} , получаемыми из условия

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_{\text{max}}} \pm \frac{\lambda}{2} = 2m \frac{\lambda}{2}.$$

Получаемая таким образом интерференционная картина называется полосами равного наклона.

Пример: рассматривая тонкую пленку, на которую солнечный свет падает под разными углами, наблюдатель видит весь спектр цветов.

(*Вопрос:* в каком положении наблюдатель увидит синюю, а в каком – красную полосу одного и того же порядка m ?
Ответ: смотри рис.7.19.)

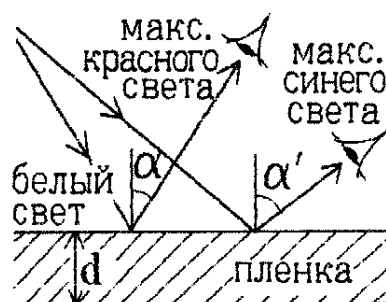


Рис.7.19

Вопрос: почему оконное стекло в лучах Солнца не дает интерференционной картины ?

Ответ: потому что для получения интерференционной картины необходимо выполнение условий пространственной и временной когерентности, для чего толщина пленки должна быть очень малой:

$$d \lesssim 0,05 \text{ мм} !$$

Если пленка имеет переменную толщину d , а свет падает на нее практически нормально (рис.7.20), то условие усиления отраженного света с длиной волны λ имеет вид:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2} = \boxed{2dn \pm \frac{\lambda}{2} = 2m\frac{\lambda}{2}}.$$

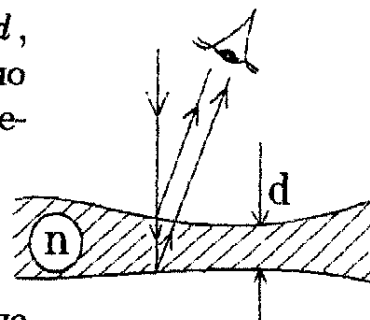


Рис.7.20

Усиление света происходит в тех точках, где пленка имеет определенную величину, удовлетворяющую этому условию. Такая интерференционная картина называется полосами равной толщины.

Примерами полос равной толщины являются: 1) кольца Ньютона (пленкой служит воздушный клин, образующийся между сферической поверхностью линзы и плоской стеклянной пластинкой); 2) радужные цвета бензиновых пленок на поверхности воды или пленок окислов на поверхности металлов; 3) разноцветные переливы бижутерии; и, наконец, 4) фиолетово-красный отблеск от линз хороших объективов.

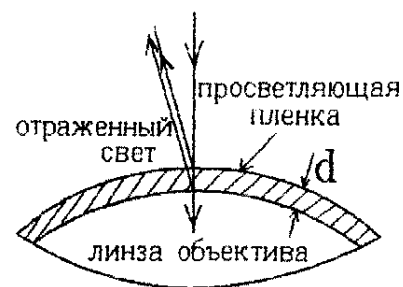


Рис.7.21

Остановимся немного подробнее на последнем явлении. Линзы объективов покрывают тонкой прозрачной пленкой (рис.7.21), толщина которой d подбирается так, чтобы выполнялось условие *ослабления отраженного света*: $2dn \pm \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$.

Такие линзы будут меньше отражать свет (не дают блики), поэтому большая часть падающего света будет проходить в оптическую систему (фотоаппарат).

Замечание: интерференцию в тонких пленках можно наблюдать не только в отраженном, но и в проходящем свете (рис.7.22), однако, контрастность картины при этом несравненно хуже. (Есть и еще одно отличие – максимумы и минимумы меняются местами.)

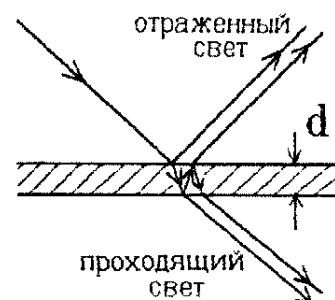


Рис.7.22

7 Многолучевая интерференция. Дифракционная решетка

Практический интерес представляет интерференция не двух, а большего числа когерентных пучков.

Например, интерференция в системе, называемой дифракционной решеткой. Это – система из N одинаковых щелей, расположенных на равном расстоянии d (постоянная решетки) друг от друга (рис.7.23). При нормальном падении на решетку плоского волнового фронта с длиной волны λ каждая щель будет когерентным источником, излучающим свет во всех направлениях.

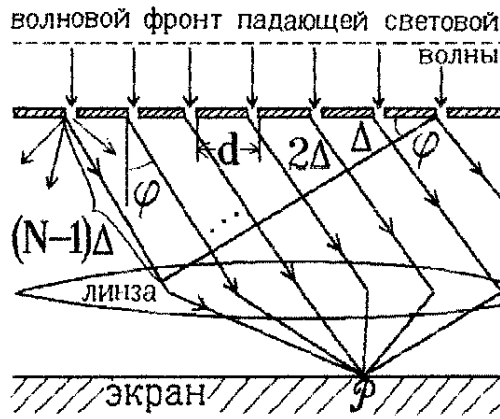


Рис.7.23

Линза (роль которой может выполнять глаз) соберет **параллельные** пучки света в одну точку P экрана (параллельные пучки, распространяющиеся в других направлениях, будут собраны в других точках экрана).

Как видно из рис.7.24, разность хода волн, приходящих от соседних щелей, равна $\Delta = d \sin \varphi$, т.е. колебания вектора $\vec{E}$ от каждой последующей щели сдвинуты по фазе на

$$\alpha = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$$

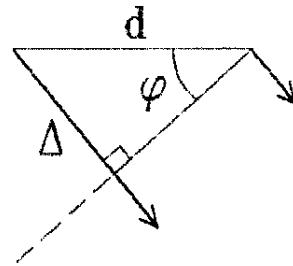


Рис.7.24

по сравнению с колебаниями $\vec{E}$ от предыдущей щели.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{рез}} = & \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0)}_{\text{от 1-ой щели}} + \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + \alpha)}_{\text{от 2-ой щели}} + \\ & + \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + 2\alpha)}_{\text{от 3-ей щели}} + \dots + \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + (N-1)\alpha)}_{\text{от N-ой щели}}, \end{aligned}$$

(так как амплитуды колебаний $\vec{E}_0$ в световой волне, приходящей от каждой щели, одинаковы).

Сложим эти колебания, пользуясь методом векторной диаграммы (рис.7.25):

Концы векторов $\vec{E}_0$ лежат на некоторой окружности радиуса R , а $\vec{E}_{\text{рез}}$ образует хорду этой окружности с углом $N\alpha$. Из прямоугольного треугольника АОВ находим $\frac{E_{\text{рез}}}{2} = R \sin \left(\frac{N\alpha}{2} \right)$, а из сегмента этой диаграммы (рис.7.26) следует $\frac{E_0}{2} = R \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. Исключая из двух последних равенств неизвестный

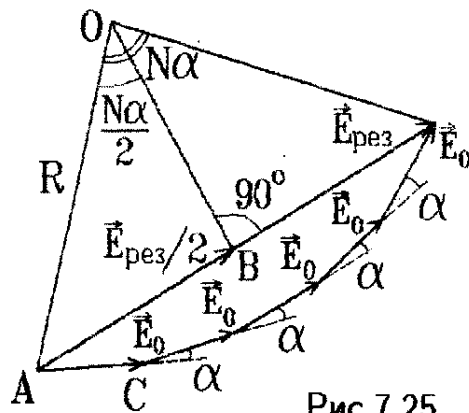


Рис.7.25

радиус R , получим:

$$\frac{E_{\text{рез}}}{E_0} = \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)},$$

т.е. результирующая интенсивность в точке P экрана определяется формулой $I_{\text{рез}} \sim E_{\text{рез}}^2$, или

$$I_{\text{рез}} = I_0 \frac{\sin^2(N\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)},$$

где I_0 – интенсивность, созданная одной щелью. При $\alpha/2 = \pi m$, где m – целое число, и числитель, и знаменатель этого выражения стремятся к нулю. Поэтому, используя правило Лопиталя, находим

$$\left| \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \right| \rightarrow \left| \frac{\frac{d}{d\alpha} \left(\sin \frac{N\alpha}{2} \right)}{\frac{d}{d\alpha} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)} \right|_{\alpha = 2\pi m} \rightarrow N.$$

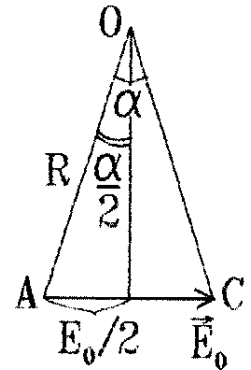


Рис.7.26

Это — главные максимумы интенсивности света, прошедшего через дифракционную решетку. Они получаются из условия

$$\alpha = 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi \quad \text{или} \quad \boxed{d \sin \varphi = m\lambda, \quad \text{где } m \text{ — целое число.}}$$

При выполнении этого условия, т.е. в точках экрана, соответствующих условиям главных максимумов, интенсивность света $I_{\text{рез}}$ возрастает по сравнению с интенсивностью света I_0 , приходящего от одной щели, в N^2 раз:

$$\boxed{I_{\text{рез}} = N^2 I_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Решетку можно изготовить, нанеся на} \\ \text{основу } 10^5 \text{ штрихов — тогда яркость света} \\ \text{возрастет в } 10^{10} \text{ раз!} \end{array} \right)$$

Но между соседними главными максимумами расположены $(N - 1)$ минимумов интенсивности, соответствующих нулям числителя:

$N\alpha/2 = \pi m$, где m – целое число, не равное $0, \pm N, \pm 2N, \dots$,
т.е. $\alpha = 2\pi m/N = (2\pi/\lambda)d \sin \varphi$ или

$$\boxed{d \sin \varphi = \frac{\lambda m}{N}, \quad m \neq 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots}$$

– условие дополнительных минимумов.

Получаемая при этом интерференционная картина такова: **очень яркие и узкие линии**, соответствующие главным максимумам для света с длиной волны λ , разделены участками, где интенсивность света очень мала из-за наличия дополнительных минимумов (рис.7.27).

Если на решетку направить белый свет с разными длинами волн λ , то она разделит его на все цвета радуги, образуя спектры порядка m (рис.7.28).

Вопрос: какие две линии с близкими длинами волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$ можно увидеть *раздельно* с помощью такой решетки?

Ответ:

по критерию Рэлея два пика интенсивности еще можно увидеть раздельно, если минимум первого пика совпадает с максимумом второго, т.е.

$$d \sin \varphi = m(\lambda + \Delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda \text{ или}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}.$$

Указанная ситуация изображена на рис.7.29, где в точке А совпадают главный максимум порядка m для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$ и первый дополнительный минимум для длины λ . Таким образом, решетка может разделить на отдельные линии свет с длинами волн, различающимися на величину $\Delta\lambda \geq \lambda/mN$ (в спектре m -го порядка).

Отношение $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$ называется раз-

решающей способностью дифракционной решетки. Из этой формулы следует, что разрешающая способность пропорциональна числу щелей N . Чем больше N , тем более узкие и яркие линии получаются в интерференционной картине.

Это обстоятельство используется в спектрографах – оптических приборах с большой разрешающей способностью, позволяющих фиксировать целиком весь спектр, для получения которого используются как призмы, так и дифракционные решетки, а также в оптических резонаторах, представляющих собой стеклянную пластинку (например, интерферометр Фабри – Перро).

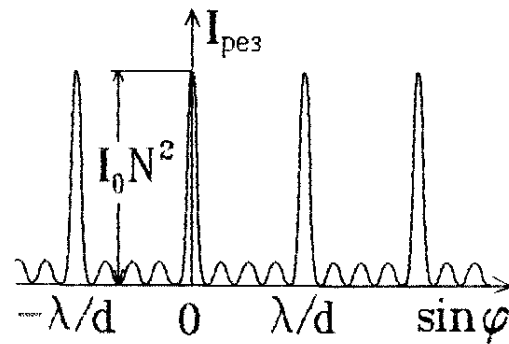


Рис.7.27

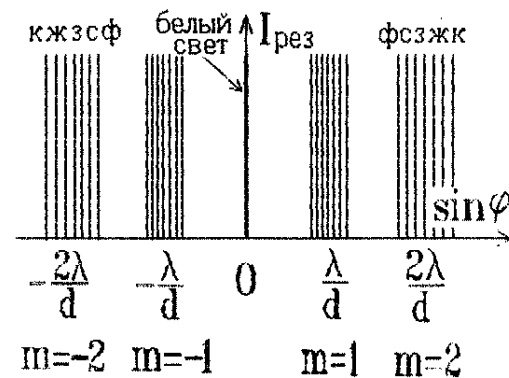
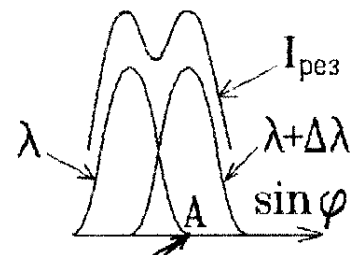


Рис.7.28



Главный максимум порядка m для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$ и первый дополнительный минимум для длины волны λ

Рис.7.29

8 Голография (метод получения объемного изображения)

На обычной фотографии фиксируется только амплитуда или интенсивность света, пришедшего на фотопластинку от предмета, – поэтому изображение выглядит плоским.

Для того, чтобы получить **объемное изображение**, надо, чтобы волны, приходящие от фотографии, сохраняли те же самые амплитуды и начальные фазы, что и волны, рассеянные самим предметом.

Метод был предложен в 1948 г. Денешем Гáбором (Нобелевская премия по физике в 1971 г.), а практически осуществлен в 1963 г. Лейтом и Упатниексом и независимо Денисюком.

Чтобы получить голографическую запись изображения предмета, разделяют обладающий высокой пространственной когерентностью луч лазера на два луча, а затем направляют их на фотопластинку, покрытую толстым слоем фотоэмульсии (рис.7.30):

1) опорный луч отражается от зеркала и, приходя к фотопластинке, помещенной в плоскости $x = 0$, имеет вид

$$E_{\text{оп}} = E_0 \cos \omega t;$$

2) предметный луч отражается от предмета и в плоскости фотопластинки имеет вид

$$E_{\text{пр}} = E_{\text{п}} \cos(\omega t + \varphi(y, z)).$$

Эти два луча интерферируют. Векторы $\vec{E}_{\text{оп}}$ и $\vec{E}_{\text{пр}}$ колеблются в одном направлении. Поэтому фотопластинка засвечивается пропорционально среднему значению интенсивности света:

$$\langle I_{\text{засв}} \rangle \sim \langle (E_{\text{оп}} + E_{\text{пр}})^2 \rangle = E_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t) \rangle}_{= 1/2} + E_{\text{п}}^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle}_{= 1/2} +$$

$$+ 2E_0 E_{\text{п}} \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} (E_0^2 + E_{\text{п}}^2) + 2E_0 E_{\text{п}} \cdot \frac{1}{2} \langle \cos \varphi \rangle,$$

так как $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$, а $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$.

Таким образом,

$$\boxed{\langle I_{\text{засв}} \rangle = \frac{1}{2} (E_0^2 + E_{\text{п}}^2) + E_0 E_{\text{п}} \cos \varphi}.$$

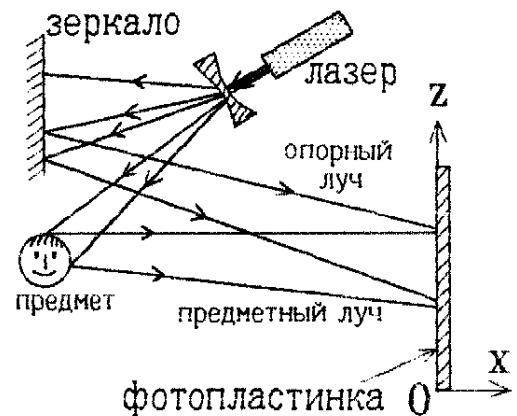


Рис.7.30

Голограмма – это слой фотоэмульсии на фотопластинке, на котором оказалась засвеченной тонкая сеть паутинообразных наложенных друг на друга отпечатков интерференционных максимумов (поэтому на фотопластинке оказывается запечатленной информация не только об амплитуде, но и о начальной фазе φ волн, приходящих от предмета).

Вопрос: какой вид имеет голограмма точечного предмета, находящегося на расстоянии a от фотопластинки (рис.7.31) ?

Ответ: $E_{оп} = E_0 \cos(\omega t - ka)$ – опорная волна, $E_{пр} = E_{\Pi} \cos(\omega t - kr)$ – волна, испущенная точечным предметом, находящимся в точке О. Темные полосы засветки соответствуют разности фаз лучей, кратной 2π :

$kr - ka = 2\pi m$ или $r = a + 2\pi m/k = a + m\lambda$. Но $r = \sqrt{a^2 + y^2} = a + m\lambda$, т.е. на голограмме видны темные кольца с радиусами $y_m = \sqrt{2am\lambda + (m\lambda)^2}$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Объясним теперь, каким образом полученная голограмма создает **объемное** изображение предмета. Для этого осветим ее под тем же углом, что и при записи, опорным лучом такого же лазера (рис.7.32). Этот пучок рассеивается на засвеченных линиях голограммы, как на щелях дифракционной решетки, а интенсивность прошедшего через голограмму света зависит от степени почернения голограммы:

$$I_{прош} = I_{пад} \left(1 - C \langle I_{засв} \rangle \right) \left(\begin{array}{l} \text{Чем сильнее почернение, тем меньше} \\ \text{света проходит через голограмму в} \\ \text{данном месте. } C - \text{некоторая посто-} \\ \text{янная.} \end{array} \right)$$

Так как амплитуда прошедшей волны $E_{прош} \simeq \sqrt{I_{прош}}$, то колебания в прошедшей волне будут иметь вид

$$E_{прош} = \underbrace{E_0 \cos(\omega t)}_{\text{опорный луч}} \cdot \sqrt{1 - C \langle I_{засв} \rangle}.$$

Учтем, что степень почернения фотопластинки все же мала $C \langle I_{засв} \rangle \ll 1$, т.е. $\sqrt{1 - C \langle I_{засв} \rangle} \approx 1 - \frac{C}{2} \langle I_{засв} \rangle$ и

$$E_{прош} = E_0 \cos(\omega t) \left[1 - \frac{C}{2} \left(\frac{E_0^2 + E_{\Pi}^2}{2} + E_0 E_{\Pi} \cos \varphi \right) \right] =$$

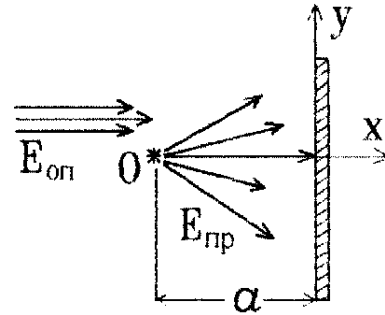


Рис.7.31

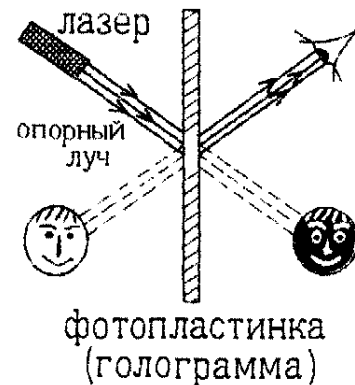


Рис.7.32

$$\begin{aligned}
&= E_0 \underbrace{\left(1 - \frac{C}{4}(E_0^2 + E_{\Pi}^2)\right)}_{= E'_0} \cos(\omega t) + \\
&+ \underbrace{E_0^2 \frac{C}{2}}_{= 2A} \cdot E_{\Pi} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(\cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t - \varphi))}_{= \cos(\omega t) \cos \varphi}
\end{aligned}$$

или, окончательно,

$$E_{\text{прош}} = E'_0 \cos \omega t + A E_{\Pi} \cos(\omega t + \varphi) + A E_{\Pi} \cos(\omega t - \varphi).$$

— Первое слагаемое соответствует прошедшему через голограмму лучу лазера.

— Второе слагаемое дает объемное изображение предмета (сохранилось выражение и амплитуды E_{Π} , и начальной фазы $\varphi(y, z)$) !

— Третье слагаемое дает еще одно изображение, но с обращенной начальной фазой, — мнимое (как если бы лучи от предмета приходили с противоположной стороны).

Следствия:

1) голограмму можно разбить на части. Каждый осколок опять дает **полное изображение** ! (Но ухудшается его качество, так как разрешающая способность пропорциональна числу штрихов N на голограмме);

2) смотря на голограмму под разными углами, можно разглядеть изображение с **разных сторон** (рис.7.33) !

3) Применения :

а) акустическая голография (ультразвуковыми волнами) в медицине — компьютер воссоздает объемную картину внутренних органов (вместо двумерных рентгеновских снимков) — такой метод называется томографией;

б) объемное кино и слайды;

в) элементы памяти ЭВМ;

г) распознавание образов;

д) динамическая голография.

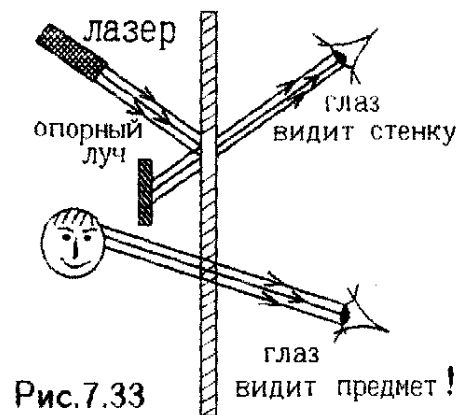


Рис.7.33

(В настоящее время используются толстые фотоэмульсионные голограммы, где в качестве опорных лучей применяют не высококогерентные лучи лазера, а обычный солнечный свет. Трехмерные голограммы воспроизводят не только амплитуду и фазу, но и спектральный состав света !)

9 Интерферометрия интенсивностей

Вопрос: можно ли получить интерференционную картину от некогерентных источников?

Ответ: да! (Метод был предложен в 1956г. Хэнбери, Брауном и Твиссом.)

Лучи от двух *некогерентных* источников 1 и 2 попадают на экран. С помощью фильтра (рис.7.34) выделяется свет (электромагнитные волны) с высокой степенью временной когерентности, т.е. практически с выделенной частотой ω (и очень узкой полосой $\Delta\omega$ монохроматичности). Тогда колебания в складывающихся волнах происходят с одной частотой ω и, для простоты, с одинаковыми амплитудами $E_1 = E_2 = E_0$, но с разными, произвольно меняющимися во времени, начальными фазами φ_1 и φ_2 .

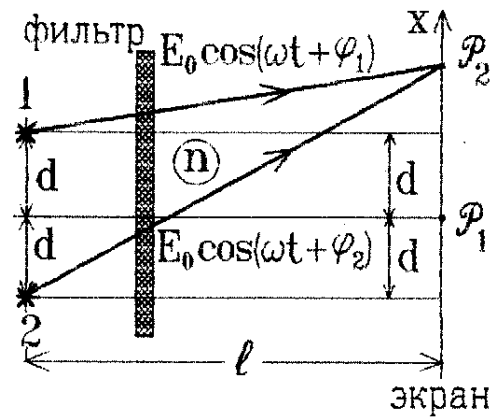


Рис.7.34

В центре экрана, в точке P_1 (рис.7.34) результирующая интенсивность света в некоторый момент времени t будет равна

$$\begin{aligned} I_1 &\sim E_{\text{рез}}^2 = \\ &= E_0^2 + E_0^2 - 2E_0E_0 \cos \underbrace{[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)]}_{=\theta} = \\ &= 2I_0 \left(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right). \end{aligned}$$

(для сложения использован метод векторной диаграммы (рис.7.35)).

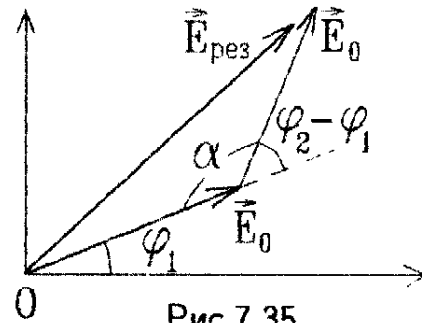


Рис.7.35

В тот же момент времени t величина интенсивности света в другой точке экрана P_2 запишется в виде

$$I_2 = 2I_0 \left(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + k\Delta) \right).$$

Так как в интерференционной схеме Юнга оптическая разность хода лучей, приходящих в точку наблюдения P_2 от источников 1 и 2, $\Delta = 2nxd/l$, то дополнительный сдвиг фаз

$$k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2nxd}{l} = \frac{4\pi nxd}{\lambda l} = \alpha.$$

С помощью быстродействующих приборов (фотоэлектронных умножителей) можно практически мгновенно перемножить величины I_1 и I_2 :

$$I_1 \cdot I_2 = 4I_0^2 \left(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right) \cdot \cos \left(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha) \right).$$

Обозначим $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$. Эта разность фаз некогерентных лучей быстро изменяется совершенно случайным образом. Найдем теперь среднее значение (по времени) произведения интенсивностей $I_1 \cdot I_2$:

$$\begin{aligned} \langle I_1 \cdot I_2 \rangle &= 4I_0^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) (1 + \cos(\varphi + \alpha)) d\varphi}_{\text{среднее значение по всем возможным величинам } \varphi} = \\ &= \frac{2I_0^2}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{= 2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{= 0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \alpha) d\varphi}_{= 0} + \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(\varphi + \alpha) d\varphi \right] = \\ &= \frac{2I_0^2}{\pi} \left[2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos \alpha d\varphi}_{= \pi \cos \alpha} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2\varphi + \alpha) d\varphi}_{= 0} \right] = \frac{2I_0^2}{\pi} (2\pi + \pi \cos \alpha) \end{aligned}$$

(при вычислениях была использована формула $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$). Итак, окончательно

$$\boxed{\langle I_1 \cdot I_2 \rangle = 2I_0^2 \left[2 + \cos \left(\frac{4\pi n x d}{\lambda l} \right) \right]},$$

т.е. средняя величина произведения интенсивностей зависит от координаты x точки P_2 на экране (рис.7.36 и 7.34), иначе говоря

получена интерференционная картина для $\langle I_1 \cdot I_2 \rangle$ от некогерентных источников.

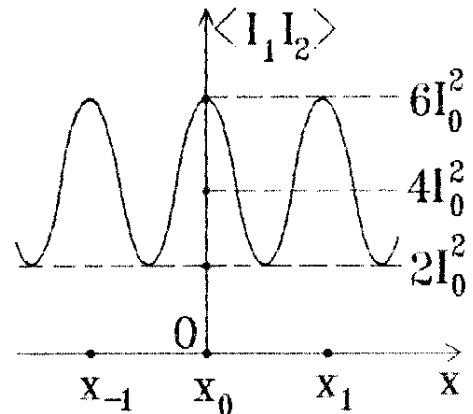


Рис.7.36

Максимальные значения $\langle I_1 \cdot I_2 \rangle$ получаются для точек с координатами

$$\frac{4\pi x_m n d}{\lambda l} = 2\pi m \quad \text{или} \quad \boxed{x_m = \frac{\lambda l m}{2nd}}, \text{ где } m - \text{целое}.$$

Пример: этот метод используется в астрофизике для определения расстояния $2d$ между далекими звездами, если известно их расстояние l от Земли, а на Земле измерено расстояние $\Delta x = \frac{\lambda l}{2nd}$ между соседними максимумами величины $\langle I_1 \cdot I_2 \rangle$.



Такой метод можно применять для любых некогерентных источников.

Глава 8.

Дифракция электромагнитных ВОЛН

1 Принцип Гюйгенса – Френеля

Каждый участок волнового фронта электромагнитной волны – это быстропеременные колебания электрических и магнитных полей, которые, согласно уравнениям Максвелла, снова порождают электромагнитную волну. Иначе говоря,

любой участок волнового фронта является источником вторичных электромагнитных волн, имеющих ту же частоту и распространяющихся во все стороны с такой же фазовой скоростью.

Это утверждение называется принципом Гюйгенса – Френеля.

Вторичные волны, испускаемые **каждым** участком волнового фронта (рис.8.1), складываются друг с другом, с первоначальной волной и интерферируют. В результате в направлении, противоположном направлению распространения волны, *они взаимно гасятся*.

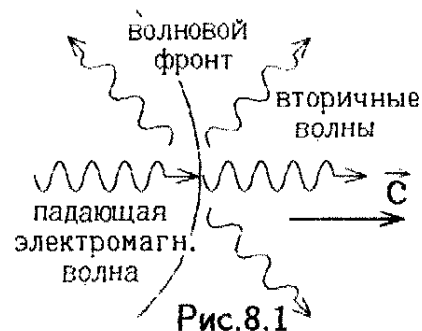


Рис.8.1

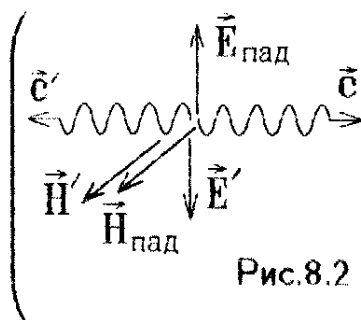


Рис.8.2

Напомним, что векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ ($\vec{k}$ – волновой вектор) образуют правую тройку векторов, вследствие чего для вторичной волны, распространяющейся в обратном направлении, вектор $\vec{E}'$ направлен противоположно вектору $\vec{E}_{\text{пад}}$ падающей волны (рис.8.2).

В направлении распространения волны вторичные волны тоже складываются, интерферируют и за время Δt проходят расстояние $\Delta r = c\Delta t$. Их огибающая представляет собой новое положение волнового фронта (рис.8.3):

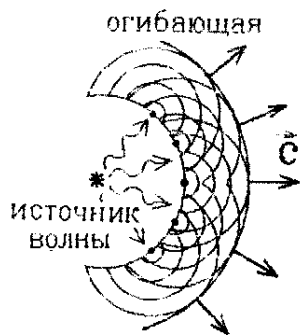


Рис. 8.3

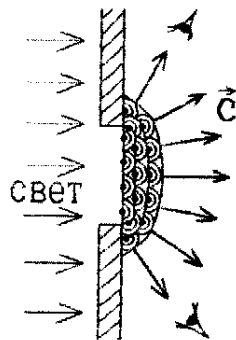


Рис. 8.4



Пример: падение света на отверстие (рис. 8.4). Лучи света огибают препятствие и оказываются в области геометрической тени. Это огибание часто называют дифракцией, хотя оно – только частный случай более общего явления, объясняемого принципом Гюйгенса–Френеля.

Дифракция электромагнитных волн

– это явления, возникающие при сложении и интерференции *бесконечного* числа вторичных электромагнитных волн, испущенных каждой точкой волнового фронта. При этом появляются отклонения от законов геометрической оптики.

В частности, в результате дифракции происходит огибание волнами препятствий, а также образование картины чередующихся максимумов и минимумов освещенности, аналогичной интерференционной картине.

Явления интерференции и дифракции имеют одну и ту же физическую природу. Интерференцией принято называть сложение *конечного* числа когерентных волн, а дифракцией – *бесконечного* числа волн от всех точек волнового фронта.

2 Метод зон Френеля

{ ab hoc
et
ab hac }

До начала 19 века считалось, что свет – это прямолинейные потоки (лучи) неких крошечных частиц, как-то действующих на глаз (точка зрения Ньютона). В 1818 г. молодой инженер Френель представил Парижской академии наук трактат, в котором утверждалось следующее (рис. 8.5 и 8.6):

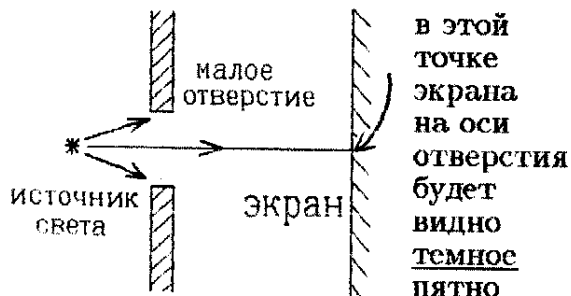


Рис. 8.5

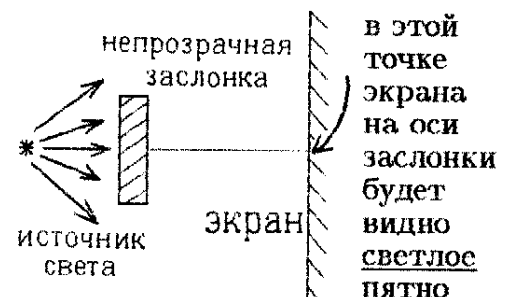


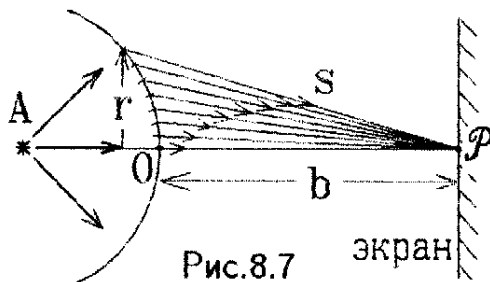
Рис. 8.6

Возможно ли такое ?

Академики были шокированы и возмущены тем, что они должны рассматривать такие нелепые предположения, противоречащие здравому смыслу (особенно возмущался небезизвестный Пуассон). Но среди них нашелся один – Араго, который поставил опыты, подтвердившие выводы Френеля. (За свою бурную жизнь Араго побывал и галерником, и рабом в Алжире, и наполеоновским полковником, но память о себе он оставил, как блестящий астроном-наблюдатель и популяризатор науки. Кстати, он впервые с большой точностью измерил радиус Земли.)

С тех пор почти целый век (до Эйнштейна) свет считали уже не потоком частиц, а волнами (эфира).

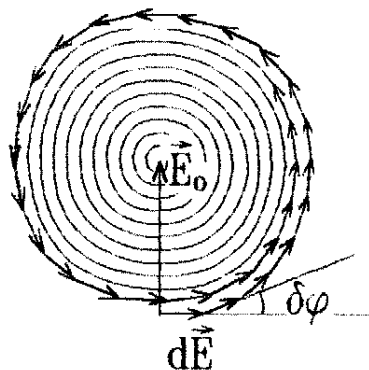
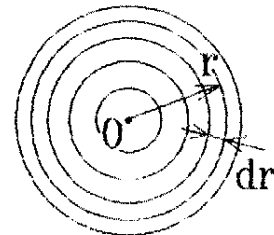
Объясним результаты опытов Френеля его собственным методом.



Пусть точечный источник света А испускает сферическую электромагнитную волну (рис.8.7). Рассмотрим положение волнового фронта в некоторый произвольный момент времени. Все участки волнового фронта испускают вторичные волны, приходящие в

точку наблюдения Р (на оси системы) и интерферирующие в ней. Разобьем волновой фронт на бесконечно узкие кольца так (рис.8.8), чтобы их площади $dS = 2\pi r dr$ были одинаковы.

Тогда каждое кольцо будет испускать волну с одинаковой амплитудой dE_0 (в одной фазе, с которой колеблются все точки волнового фронта). Но так как амплитуда сферической волны обратно пропорциональна расстоянию до источника света, то приходить в точку наблюдения Р эти волны будут с меньшей амплитудой $dE \sim dE_0/s$ (чем больше расстояние s до участка волнового фронта – тем меньше амплитуда приходящей от него вторичной волны).



Кроме того, волны от более далеких колец будут приходить в точку Р со все большим сдвигом фазы

$$\delta\varphi = k \cdot \Delta = k \cdot (s - b)n = \frac{2\pi}{\lambda} n(s - b).$$

Складывая амплитуды всех приходящих в точку Р волн методом векторной диаграммы, получим сходящуюся в точку спираль (рис.8.9).

(Спираль получается вследствие того, что

величины $|d\vec{E}|$ от более далеких колец становятся все меньше и меньше, уменьшаясь до нуля для бесконечно удаленных участков волнового фронта.)

Результирующая амплитуда от всего волнового фронта $\vec{E}_0 = \sum d\vec{E}$ будет радиусом этой спирали.

Теперь разобьем волновой фронт на участки, называемые зонами Френеля.

Зонами Френеля называются участки волнового фронта, выбранные таким образом, чтобы расстояния от границ двух соседних участков до точки наблюдения P отличались ровно на $\frac{\lambda}{2}$.

(Точнее говоря, разность хода двух лучей, приходящих в точку наблюдения P от соседних границ, должна быть равна $\frac{\lambda}{2}$.)

⚠ Замечание: || Для разных точек наблюдения P волновой фронт разбивается на зоны Френеля по-разному.

В случае сферического волнового фронта первая зона Френеля – это круговой сектор, а последующие зоны – кольца радиуса r_m на сферической поверхности.

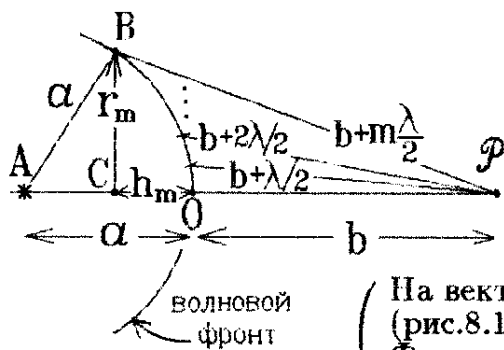


Рис. 8.10

(На векторной диаграмме (рис. 8.11) границы зон Френеля соответствуют точкам пересечения спирали с ее вертикальным диаметром.)

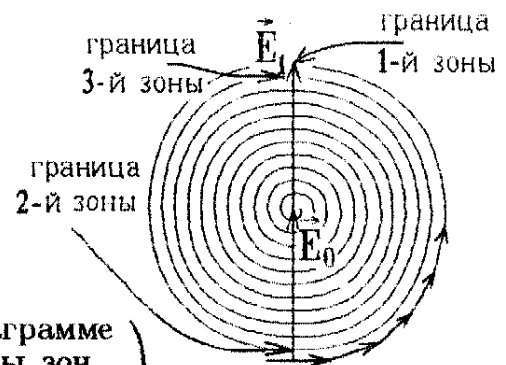


Рис. 8.11

Разность фаз для волн, пришедших от двух противоположных границ одной и той же зоны, имеет величину

$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$, значит, волны, приходящие от одной зоны, все еще усиливают друг друга, а волны от соседних зон Френеля приходят в противофазе и гасят друг друга.

Вычислим радиус m -ой зоны Френеля: из $\triangle ABC$ и $\triangle BCP$ на рис. 8.10 следует, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2.$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве и пренебрегая величиной $\left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2$ (для нескольких первых зон Френеля это – малая второго порядка, так как $\lambda \ll a, b$), получаем

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)},$$

а затем из первого равенства, снова пренебрегая величиной второго порядка малости, на сей раз h_m^2 , находим: $r_m^2 = 2ah_m$. Следовательно, радиус зон Френеля (с не очень большим номером m) в случае точечного источника света определяется формулой

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}, \quad \text{где } m - \text{целое число.}$$

Дифракция света от точечного источника называется дифракцией Френеля.

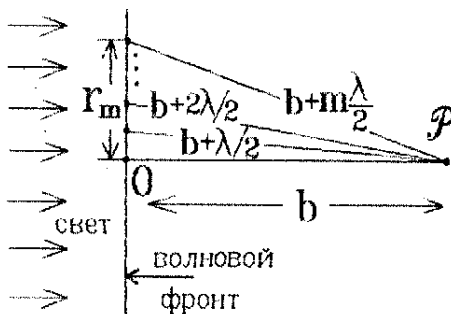


Рис.8.12

Но волновой фронт может быть *плоским* (параллельные лучи света (рис.8.12)). В этом случае дифракция волн называется дифракцией Фраунгофера, а радиус зон Френеля вычисляется по формуле, которая следует из теоремы Пифагора (рис.8.12); если пренебречь малой второго порядка $(m\lambda/2)^2$, то

$$r_m = \sqrt{\left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} \quad \text{или}$$

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}, \quad \text{где } m - \text{целое.}$$

3 Дифракция на круглых отверстиях и круглых непрозрачных экранах

Любые препятствия, находящиеся на пути распространения световой волны, будут закрывать часть зон Френеля на падающем на них волновом фронте (рис.8.13). Поэтому интенсивность прошедшего через них света можно определить, суммируя вклад оставшихся открытыми зон Френеля.

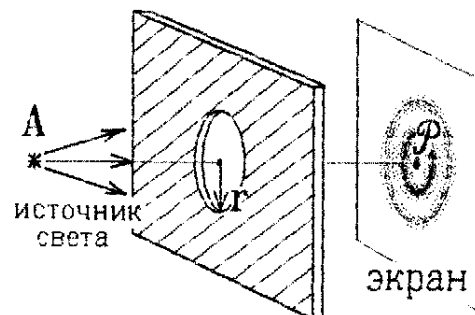


Рис.8.13

Как видно из рис.8.14, если радиус отверстия окажется равным радиусу четной зоны Френеля для точки P , т.е. $r = r_{2m}$, то вклады четного числа зон компенсируют друг друга, и в точке P освещенность будет минимальна ($E_2 \approx 0$). Если же в отверстии окажется нечетное число зон Френеля, то освещенность в точке P максимальна:

$$I_P \sim E_1^2 = (2E_0)^2 = 4I_0$$

— в 4 раза больше, чем при отсутствии препятствия !



Рис.8.14

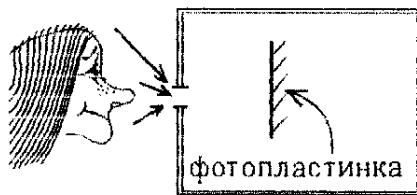


Рис.8.15

ab hoc
et
ab hac

Такая система работает, как фотоаппарат. Не так давно в Москве жил старик-фотограф с подобной камерой. Хотя из-за малости отверстия на фотопластинку попадало мало света и, чтобы получился снимок, приходилось сидеть перед камерой неподвижно по полчаса, очередь к этому фотографу была по записи и чуть ли не на год вперед ! Почему ?

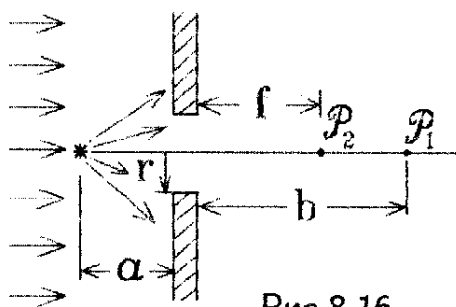


Рис.8.16

Чтобы разобраться во всем этом, рассмотрим принцип действия такого примитивного устройства — отверстия радиуса r в непрозрачном экране.

Если источник света (предмет) находится на расстоянии a от отверстия, то максимальная освещенность (изображение предмета) будет в точке P_1 , для которой радиус отверстия окажется равным радиусу первой зоны Френеля (рис.8.16):

$$r = r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b} \cdot 1 \cdot \lambda} \quad (\text{дифракция Френеля}).$$

Если же лучи падают на отверстие параллельно (дифракция Фраунгофера), то максимальная освещенность окажется в точке P_2 («фокусе» системы), для которой радиус отверстия тоже совпадает с радиусом первой зоны Френеля, но теперь уже вычисляемого по формуле $r = r_1 = \sqrt{f \cdot 1 \cdot \lambda}$.

Приравнявая правые части в двух последних формулах, получаем

$$f = \frac{ab}{a+b} \text{ или } \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}.$$

Отверстие обладает свойствами линзы !

Но если для линзы эта формула годится лишь в параксиальном приближении, и сфотографировать большой предмет "во весь рост" трудно (на фотографии Останкинская башня будет выглядеть тонким прутиком с неразличимыми деталями), то в отверстие камеры-обскуры свет может падать под любым углом. (Фотографии Останкинской башни, красовавшиеся лет 30 тому назад на обложках журналов, были сделаны близко поставленной камерой-обскурой с выдержкой в целые сутки !)

Зачем же женщины (в основном) становились в очередь к старику-фотографу ? Дело в том, что камера-обскура дает цветное изображение, но *радиус первой зоны рассчитывается для одной единственной длины волны* (как правило — желтой); поэтому все неконтрастные детали (морщины, тени и т.п.) с другими λ «смазываются». Таким образом, изображение автоматически ретушируется (как на парадных портретах государственных деятелей), т.е. камера-обскура выполняет функции художника-фотографа.

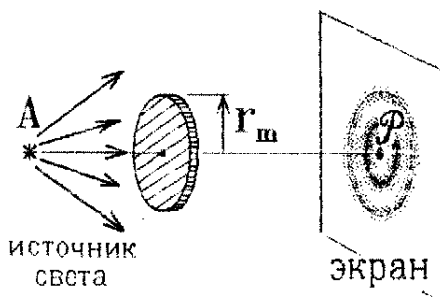


Рис.8.17



Рис.8.18

Пусть теперь препятствие (диск) закрывает первые m зон Френеля (рис. 8.17), тогда для точки P экрана остаются открытыми все остальные зоны, и освещенность в центре экрана

по-прежнему не равна нулю (рис.8.18): $I_P \sim E_P^2$.

Все это и объясняет парадоксальные результаты опытов Френеля.



Рис.8.19

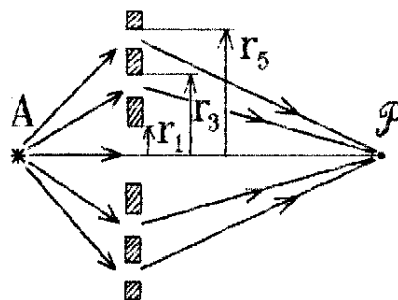


Рис.8.20

Еще один пример: зонная пластинка. Каким-либо образом, например, лучом лазера, на стеклянной пластинке делаются непрозрачными все четные зоны Френеля (конечно, для какой-то опреде-

ленной точки наблюдения P (рис.8.19 и 8.20)). Тогда свет проходит через оставшиеся нечетные зоны "в фазе", и поэтому освещенность в точке P возрастает до значения (рис.8.21)

$$I_P \sim (NE_1)^2 = 4N^2 E_0^2 \sim 4N^2 I_0,$$

где N – число зачерненных четных зон Френеля. Такая зонная пластинка (как и отверстие камеры-обскуры) «фокусирует» лучи в точке P , т.е. может служить в качестве хорошей линзы, причем – широкофокусной!



Рис.8.21

4 Разрешающая способность оптических приборов

Вообще говоря, никакая линза не может сфокусировать (собрать) пучок лучей в *одну точку*. Это обусловлено дифракцией электромагнитных волн.

Пусть свет падает нормально на круглое отверстие диаметра d . (Площадь этого отверстия называется апертурой). Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, прошедший через отверстие свет (вторичные волны) будет распространяться по всем направлениям. Выберем направление под углом φ к оси отверстия (рис.8.22). Интенсивность света, пришедшего под этим углом в точку P экрана, можно вычислить как и прежде, разбивая апертуру отверстия на зоны Френеля и суммируя вклад открытых зон. Однако, для несимметрично расположенной точки P зоны Френеля уже не будут простыми кольцами, и расчет интенсивности (освещенности) является сложной математической задачей. Решение ее (см. [11]) дает:

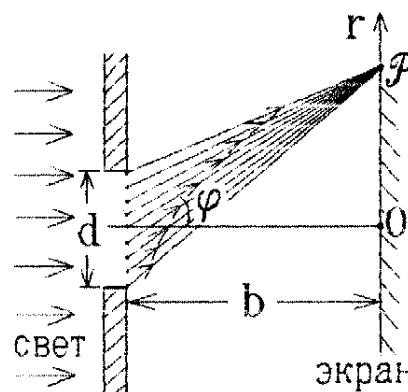


Рис.8.22

$$I_P = I_0 \left[\frac{J_1(x)}{x/2} \right]^2, \quad \text{где} \quad x = \frac{kd}{2} \sin \varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi.$$

Здесь I_0 – интенсивность света в точке O на оси отверстия, а $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода.

Если b – расстояние от отверстия до экрана, то для малых углов φ имеем $\sin \varphi \approx \tan \varphi = \frac{r}{b}$, $x = \frac{\pi d}{\lambda b} r$. Поэтому, находя из таблиц значения функции Бесселя [12], можно построить график зависимости освещенности экрана от расстояния r до оси (рис.8.23).

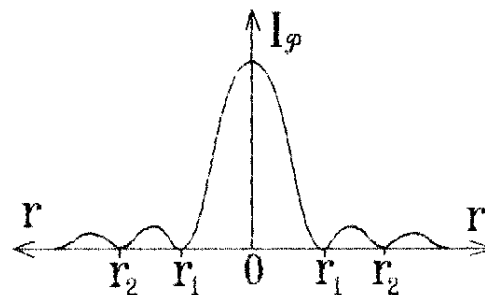


Рис.8.23

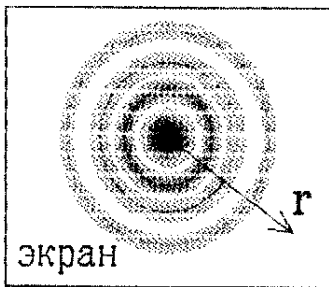


Рис.8.24

На экране виден сильный центральный максимум интенсивности (в точке O) и слабые боковые максимумы в виде концентрических колец (картина похожа на кольца Ньютона, возникающие при интерференции света (рис.8.24)).

График функции Бесселя первого рода имеет вид, показанный на рис.8.25.

Первый корень функции Бесселя, при котором $I_p = 0$ (т.е. $J_1(x) = 0$), равен $x_1 = 3,84$. При этом $\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi_1 \approx 3,84$, или

$$\sin \varphi_1 \approx 1,22 \frac{\lambda}{d}, \quad r_1 \approx 1,22 \frac{\lambda b}{d}.$$

Так как интенсивность боковых максимумов очень мала (примерно в 1000 раз меньше интенсивности центрального максимума), то

можно считать, что изображением круглого отверстия диаметра d в падающих параллельных лучах света на экране, удаленном на расстояние b , будет светлое пятно радиуса r_1 :

$$r_1 \approx 1,22 \frac{\lambda b}{d}.$$

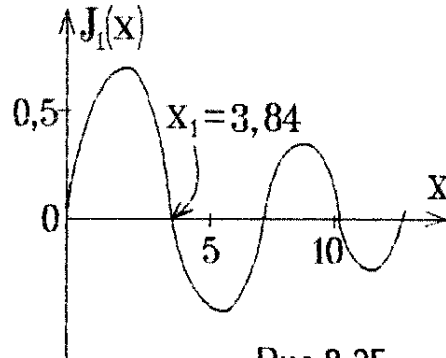


Рис.8.25

Такое пятно, ограниченное точками первого дифракционного минимума, называется дифракционным изображением.

Пример 1: лазерная локация Луны.

Луч мощного лазера — параллельный пучок света диаметра $d = 5$ см с длиной волны $\lambda = 500$ нм — направляют на Луну и ловят часть света, отраженного обратно на Землю.

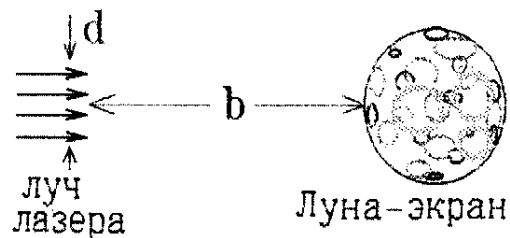


Рис.8.26

Вопрос: каков будет диаметр светового пятна от лазера на Луне, если расстояние до нее $b = 3,84 \cdot 10^8$ м?

Ответ: $d_{\text{пятна}} = 2r_1 = 2 \cdot 1,22 \cdot \frac{\lambda b}{d} = 9,37$ км. Это пятно наблюдали с помощью телескопов!

Пример 2: человек прищуривается при стрельбе. Зачем?

Глаз имеет линзу-хрусталик, в которую попадают пучки света, прошедшие апертуру-зрачок диаметра d , и которая фокусирует изображения предметов А и В в точки А' и В', находящиеся на глазном дне (рис.8.27).

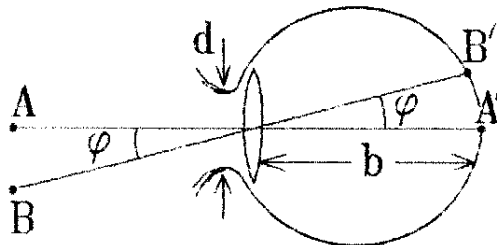


Рис.8.27

Если лучи от двух предметов А и В входят в глаз под углом φ , то, пройдя через оптический центр хрусталика-линзы, они выйдут под тем же углом φ . Но каждый точечный предмет глаз фиксирует на глазное дно не как точку, а как размытое пятно центрального дифракционного максимума с радиусом $r_1 = 1,22(\lambda b/d)$ и угловым размером $2\varphi_1 \approx 2\sin\varphi_1 = 2,44(\lambda/d)$.

Поэтому, если угловое расстояние φ между предметами А и В меньше, чем $2\varphi_1$, то эти два предмета сольются в одно пятно (согласно критерию разрешимости Рэлея) (рис.8.28).

Таким образом, условие, при котором две точки А и В видны раздельно, принимает вид:

$$\varphi > \varphi_1 = 1,22 \frac{\lambda}{d}.$$

При увеличении размера отверстия d размер центрального дифракционного максимума уменьшается.

Поэтому человек прищуривается днем, чтобы лучше рассмотреть что-либо: в глаз попадает меньше света, и размер d зрачка растёт. Две точки, прежде сливавшиеся в одну, теперь можно увидеть раздельно.

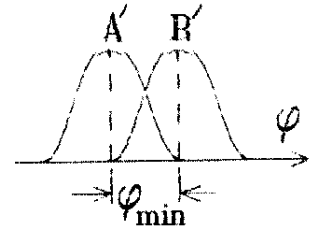


Рис.8.28

Вопрос: в каком свете можно лучше различить детали картины – в зеленом или в красном?

Ответ: так как $\lambda_{\text{зел}} < \lambda_{\text{крас}}$, то $\varphi_{\text{зел}}$ в первом случае меньше и, следовательно, в зеленом свете лучше различимы детали.

Пример 3: микроскоп.

В микроскопе исследуемый предмет наблюдается через линзу с очень малым фокусным расстоянием f , причем предмет располагается приблизительно в фокальной плоскости линзы, т.е. $a \approx f$. Изображения точек А и В предмета получаются поэтому на значительно большем расстоянии b , но видны они, как размытые пятна с радиусами r_1 (рис.8.29):

$$r_1 = 1,22 \frac{\lambda b}{d}.$$

Для того, чтобы изображения были видны раздельно, необходимо выполнение неравенства $A'B' \geq r_1$ (рис.8.30). Но из подобия треугольников $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$ на рис.8.29 сле-

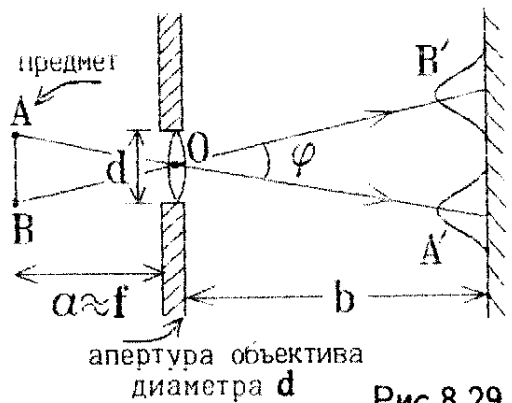


Рис.8.29

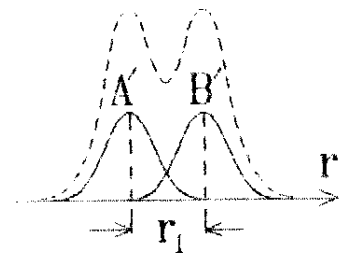


Рис.8.30

дует, что $A'B' = AB \cdot k$, где $k = b/f$ – коэффициент увеличения, т.е.

$$AB \geq r_1 \frac{f}{b} = 1,22 \frac{f}{d} \lambda.$$

Это наименьшее расстояние между точками, которые в микроскопе можно увидеть раздельно.

Так как для лучших микроскопов отношение d/f , называемое числовой апертурой объектива, имеет величину $d/f \approx 1,2$ (d – диаметр объектива, а f – фокусное расстояние объектива), то

$$AB \gtrsim \lambda.$$

Ни в один микроскоп нельзя рассмотреть предмет, размеры которого меньше, чем длина волны света, используемого для наблюдения.

Следствие: желательно подсвечивать наблюдаемый предмет синим цветом с меньшей длиной волны λ .

Но еще лучше использовать **электронный микроскоп**, в котором вместо лучей света предмет "освещается" потоками электронов, обладающих волновыми свойствами с длиной волны де Бройля

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{mv} \sim 10^{-16} \text{ м.}$$

В таком микроскопе в принципе могут быть различимы детали с размером $AB \sim \lambda_B \sim 10^{-16} \text{ м.}$ Это меньше размеров ядра!

5 Дифракция света на полуплоскости

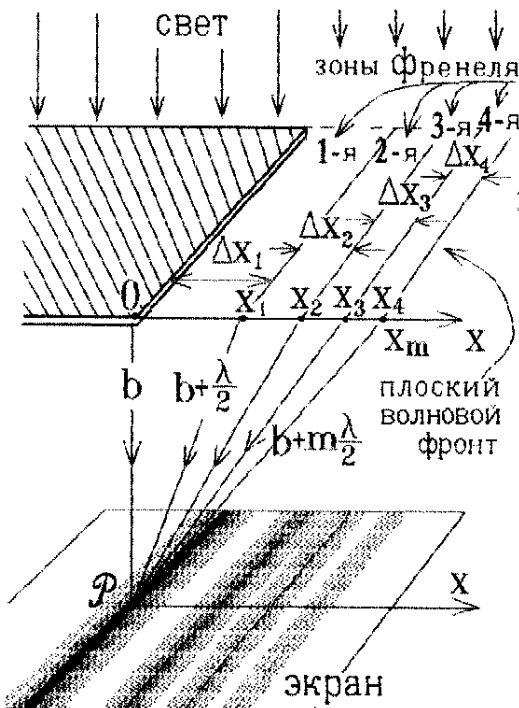


Рис.8.31

Пусть свет падает нормально на непрозрачную полуплоскость. Для точки P , находящейся на экране на расстоянии b под краем полуплоскости O , зонами Френеля будут узкие полоски на волновом фронте, параллельные краю полуплоскости (рис.8.31).

Расстояния от границ x_m до точки P отличаются на $\lambda/2$. Тогда

$$x_m = \sqrt{\left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} \approx \sqrt{bm\lambda}, \text{ где } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ширина зон Френеля $\Delta x_m = x_m - x_{m-1} = \sqrt{b\lambda} (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})$ заметно убывает с ростом номера зоны – числа m :

$$\Delta x_1 \sim \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1,$$

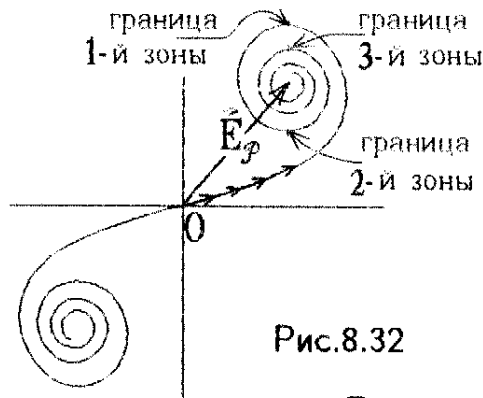


Рис.8.32

$$\Delta x_2 \sim \sqrt{2} - \sqrt{1} = 0,414,$$

$$\Delta x_3 \sim \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0,318,$$

$$\Delta x_4 \sim \sqrt{4} - \sqrt{3} = 0,268, \text{ и т.д.}$$

Как видно из этих расчетов, первая зона Френеля заметно шире (более, чем вдвое) любой из последующих зон. Поэтому вклад ее в векторную диаграмму, суммирующую вторичные волны,

пришедшие в точку P от всех зон Френеля, очень велик. Вследствие этого векторная диаграмма представляет собою сильно вытянутую спираль, называемую спиралью Корню или клотоидой (рис.8.32). Результирующая амплитуда в точке P , лежащей под краем полуплоскости, равна E_P . Нижняя половина спирали Корню соответствует зонам, закрытым полуплоскостью.

[Если точку P сдвигать по экрану вдоль оси x вправо (или влево), то будут открываться зоны Френеля на нижней части спирали (или закрываться первые зоны на верхней части спирали).]

Поэтому на экране будут видны чередующиеся полосы максимумов и минимумов интенсивности, параллельные краю полуплоскости.

Если непрозрачную полуплоскость убрать совсем, открыв весь волновой фронт, то спираль Корню откроется полностью, и в точке P интенсивность света будет $I_0 \sim (2E_P)^2$.

6 Дифракция света на узкой щели

Рассмотрим случай нормального падения плоской световой волны (дифракция Фраунгофера) на узкую щель ширины a .

(Если щель широкая, то найти распределение интенсивности света на экране можно с помощью спирали Корню.)

Каждая точка волнового фронта испускает свет во всех направлениях. Чтобы определить, как интерферируют лучи, распространяющиеся вдоль одного выделенного направления (под

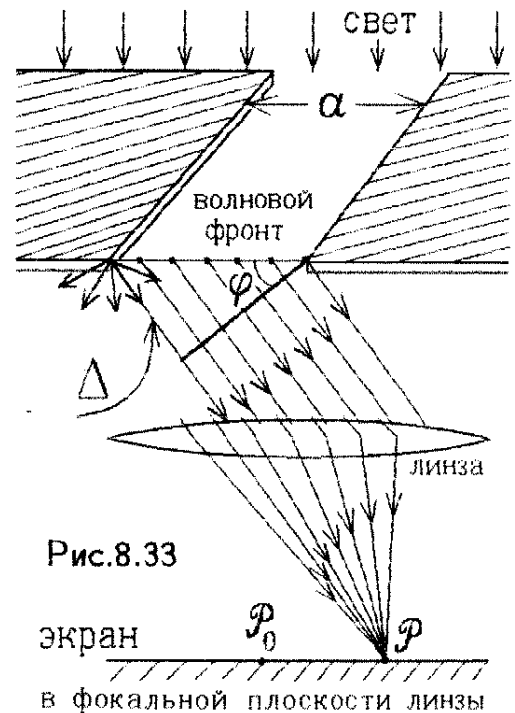


Рис.8.33

углом φ к плоскости щели), поместим перед экраном линзу, собирающую их в одну точку P (рис.8.33).

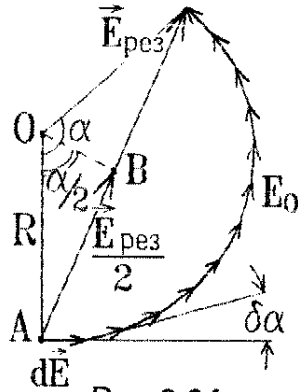


Рис.8.34

Тогда щель можно представить как набор плотно расположенных источников вторичных волн, испускающих волны с одинаковыми амплитудами dE и небольшим сдвигом фаз $\delta\alpha$ относительно друг друга. Сдвиг фаз между крайними источниками (краями щели)

$$\alpha = \sum \delta\alpha = k \cdot \Delta \quad \text{или} \quad \boxed{\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi}.$$

Просуммируем все приходящие в точку P волны $d\vec{E}$ методом векторной диаграммы (рис.8.34).

Длина дуги αR (угол α измеряется в радианах), очевидно, равна амплитуде E_0 в точке P_0 , соответствующей нормальному падению света на экран ($\varphi = 0$). В этом случае все лучи приходят без дополнительного сдвига фаз, и векторы $d\vec{E}$ складываются как параллельные векторы (рис.8.35). Отсюда следует, что радиус окружности $R = E_0/\alpha$.

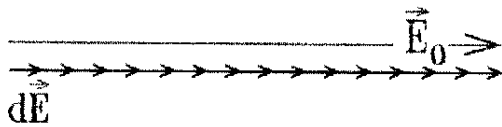


Рис.8.35

Вернемся к рис. 8.34. Как видно из $\triangle ABO$, $\frac{E_{\text{рез}}}{2} = R \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ или

$$E_{\text{рез}} = \frac{2E_0}{\alpha} \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

Отсюда вытекает, что распределение интенсивности в любой точке экрана определяется формулой

$$\boxed{I_P \sim E_{\text{рез}}^2 = I_0 \frac{4}{\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)},$$

где $I_0 \sim E_0^2$ – интенсивность света в центральной точке экрана, а

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi}.$$

При $\alpha/2 = \pi m = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi$ получаем минимумы освещенности на экране:

$$\Delta = \boxed{a \sin \varphi = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots} \quad \begin{array}{l} \text{условие дифракци-} \\ \text{онных минимумов} \\ \text{на щели ширины } a. \end{array}$$

Фактически мы разбили волновой фронт в плоскости щели на зоны Френеля – узкие полоски, параллельные щели, – оптическая разность хода от границ которых до точки наблюдения P на экране отличается на $\lambda/2$ (рис.8.36):

Для света, идущего от щели под разными углами φ , т.е. для различных точек наблюдения на экране, одна и та же щель разбивается на разное число зон Френеля.

Дифракционные минимумы соответствуют тем направлениям, для которых щель разбивается на четное число зон Френеля. Поэтому условием дифракционных минимумов будет равенство

$$a \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda.$$

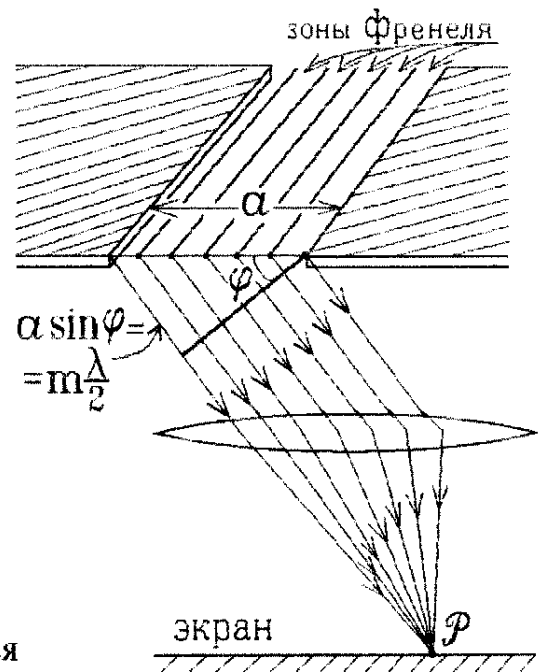


Рис.8.36

Положение максимумов определяется

из условия экстремума $\frac{dI_P}{d\alpha} = 0$ или

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} \right) = \frac{(\alpha/2) \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)}{\alpha^2} = 0, \text{ что дает}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \neq 0.$$

Первыми тремя корнями этого уравнения будут соответственно

$$\alpha_1 = 8,99 \text{ рад}, \quad \alpha_2 = 15,45 \text{ рад}, \quad \alpha_3 = 21,81 \text{ рад}.$$

При таких значениях α_i интенсивности первых трех дополнительных максимумов относятся к интенсивности главного максимума, как

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,0472 : 0,0165 : 0,0083.$$

Поэтому на экране виден ряд полос (рис.8.37).

Центральная, наиболее яркая полоса, занимающая положение между двумя первыми дифракционными минимумами слева и справа, в два раза шире остальных полос. Она является дифракционным изображением освещенной щели на экране.

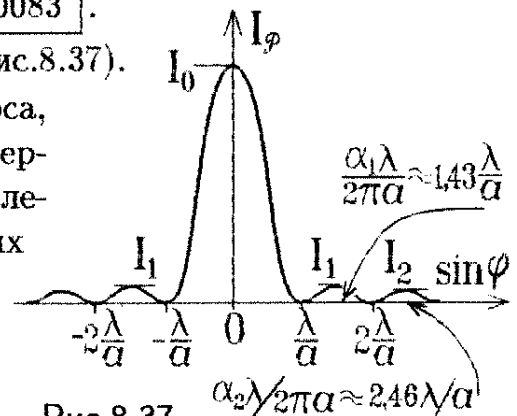


Рис.8.37

При прохождении света через дифракционную решетку картина интерференции лучей, приходящих от различных щелей, накладывается на дифракционную картину, получаемую от каждой щели, в результате чего на экране видно показанное на рис. 8.38 распределение интенсивности в зависимости от угла φ отклонения лучей.

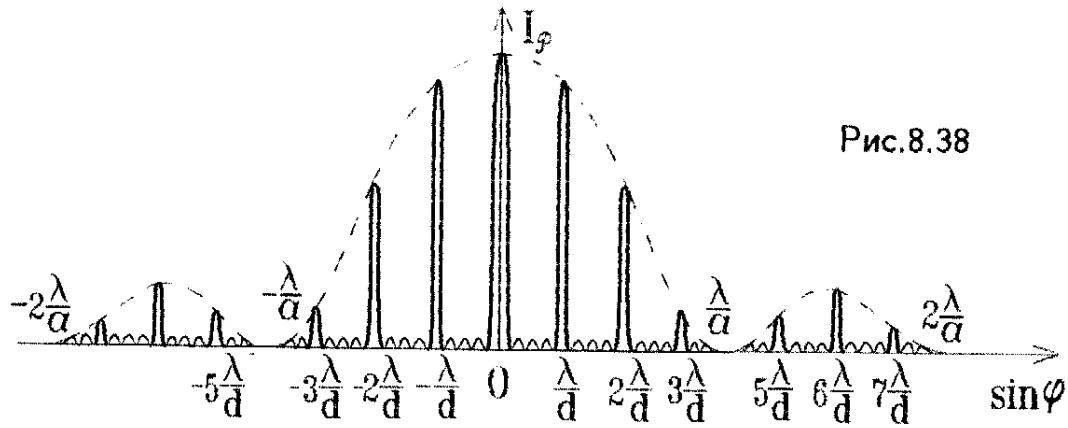


Рис. 8.38

7 Дифракция рентгеновских лучей

Из условия дифракционных минимумов или максимумов (например, для одной щели условие минимума имеет вид: $a \sin \varphi = m\lambda$) следует, что



для образования дифракционной картины необходимо, чтобы размеры препятствия были сравнимы с длиной волны, т.е. $a \sim \lambda$.

Условие дифракции.

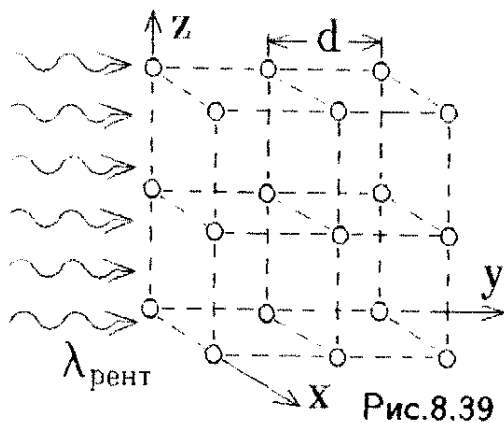


Рис. 8.39

Рентгеновское излучение имеет частоты $\nu \sim 4 \cdot 10^{17} \div 9 \cdot 10^{18}$ Гц или длины волн $\lambda \sim 0,03 \div 0,7$ нм.

Препятствием, сравнимым с этими длинами волн, является кристаллическая решетка (металла), в которой расстояние между соседними атомами (узлами) $d \sim 0,1$ нм. Поэтому

кристаллическая решетка вещества может служить естественной дифракционной решеткой для рентгеновских лучей (рис. 8.39).

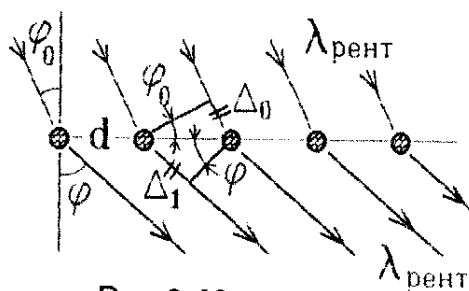


Рис. 8.40

Если лучи падают на нее под углом φ_0 , то, отклоняясь на атомах вещества под некоторым углом φ , они приобретают разность хода (рис. 8.40)

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_0 = d \sin \varphi - d \sin \varphi_0$$

(для лучей, дифрагирующих на соседних узлах решетки).

Но кристаллическая решетка вещества *трехмерна*. Поэтому при падении рентгеновского излучения на трехмерный кристалл необходимо записывать условия главных максимумов для *трех* одномерных решеток, ориентированных вдоль трех пространственных осей симметрии кристалла x, y и z :

$$\begin{aligned} d(\sin \varphi_x - \sin \varphi_{0x}) &= 2m_x \frac{\lambda}{2}, \\ d(\sin \varphi_y - \sin \varphi_{0y}) &= 2m_y \frac{\lambda}{2}, \\ d(\sin \varphi_z - \sin \varphi_{0z}) &= 2m_z \frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

где m_x , m_y , m_z — независимые целые числа.

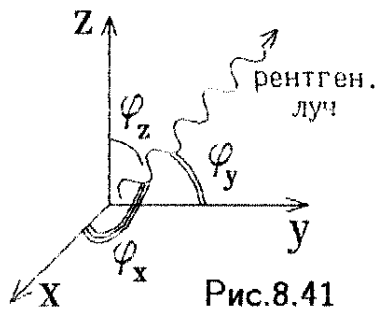


Рис.8.41

Три неизвестные φ_x , φ_y , φ_z связаны четырьмя уравнениями. Поэтому при дифракции на трехмерной пространственной решетке максимумы освещенности на экране наблюдаются лишь при отдельных значениях углов отклонения

φ_x , φ_y , φ_z . Вследствие этого на экране, которым является фотопленка, образуются не сплошные полосы интерференции, а отдельные симметрично расположенные пятна !

Существует несколько методов получения рентгенограмм.

1) Метод Лауэ.

Рентгеновскими лучами облучают монокристалл (кристалл с целой кристаллической решеткой).

2) Метод Дебая – Шеррера.

Облучают кристалл, измельченный в порошок из мелких кристаллов.

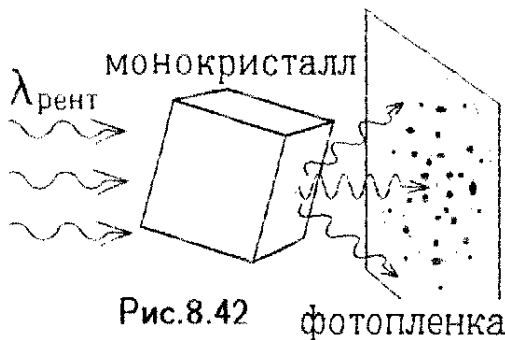


Рис.8.42

фотопленка

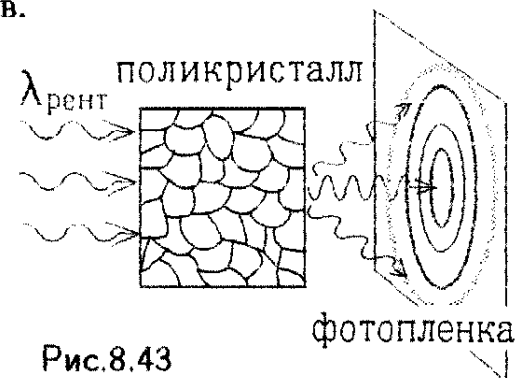


Рис.8.43

фотопленка

Пятна дифракционных максимумов на фотопленке расположены симметрично из-за симметрии кристалла. Полученная таким образом рентгенограмма называется лауэграммой (рис.8.42).

Так как мелкие кристаллы ориентированы под всевозможными углами, то пятна, полученные от каждого мелкого кристалла в разных точках экрана, сливаются в сплошные концентрические линии. Такая рентгенограмма называется дебаеграммой (рис.8.43).

Метод Вульфа-Брэггов также используется для анализа дифрак-

ционных максимумов, полученных на кристаллической трехмерной решетке. Его результаты полностью эквивалентны результатам метода Лауэ.

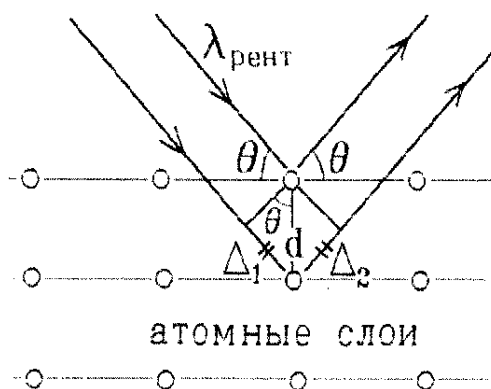


Рис.8.44

Метод заключается в следующем: через узлы кристаллической решетки проводят параллельные плоскости, называемые атомными слоями. В кристалле их можно провести бесчисленным числом способов. Если на них падает плоская волна, то вторичные волны, создаваемые атомными слоями, также будут плоскими, а суммарное действие атомного слоя состоит в отражении плоской волны (угол отражения равен углу падения).

Каждая система атомных слоев дает свое пятно максимума на экране.

Введем θ – угол скольжения (рис.8.44). Тогда лучи, отраженные от двух соседних атомных слоев, имеют разность хода $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 2d \sin \theta$. Поэтому условие максимума при их интерференции запишется в виде

$$\Delta = 2d \sin \theta = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad \text{где } m - \text{целое число} -$$

– это условие Вульфа – Брэггов для дифракции рентгеновских лучей. Подчеркнем еще раз, что и уравнения Лауэ, и условие Вульфа – Брэггов для различных атомных слоев дают эквивалентные результаты!

Применение дифракции рентгеновских лучей:

1) рентгеновская спектроскопия – на вещество с известными межатомными расстояниями d под определенным углом φ_0 направляют пучок исследуемых рентгеновских лучей; по положениям пятен главных максимумов на экране вычисляют неизвестную длину волны $\lambda_{\text{рент}}$ излучения;

2) рентгеноструктурный анализ – рентгеновское излучение с известной длиной волны под разными углами направляют на исследуемый кристалл и по положению пятен на рентгенограмме находят межатомные расстояния (тип решетки); тем самым определяют вид и структуру кристалла.

В 1912 г. В.Фридрих и П.Книппинг, направив на кристалл медного купороса узкий пучок рентгеновских лучей, обнаружили на проявленной фотопластинке картину из темных точек. В 1914 г. Макс фон Лауэ был удостоен Нобелевской премии "за открытие дифракции рентгеновских лучей в кристалле", а в 1915 г. У.Г.Брэгг и У.Л.Брэгг (отец с сыном) также получили Нобелевскую премию.

Глава 9.

Дисперсия электромагнитных волн (света)

1 Распространение электромагнитных волн в диэлектрике

Электромагнитная волна действует на заряженные частицы среды (в первую очередь на электроны) с силой Лоренца. Но так как для плоской падающей волны $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}$, то электрическая составляющая силы много больше магнитной:

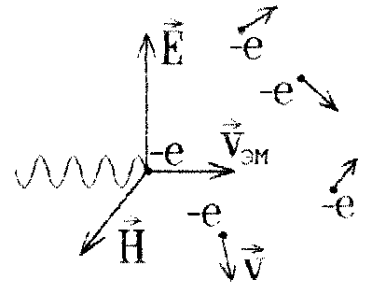


Рис.9.1

$$\frac{F_{\text{кул}}}{F_{\text{магн}}} = \frac{|-e\vec{E}|}{|-e[\vec{v}, \vec{B}]|} = \frac{E}{vB} = \frac{E}{v\mu_0 H} = \frac{1}{v\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} = \frac{v_{\text{эм}}}{v} \approx \frac{c}{v} \gg 1,$$

где $\vec{v}$ — скорость движения электрона (рис.9.1).

(Поэтому можно считать, что на вещество воздействует, в основном, только электрическое поле падающей волны (характеризующую его напряженность $\vec{E}$ называют также световым вектором)).

В диэлектрике свободных электронов практически нет. Электроны вращаются по круговым орбитам вокруг атомов с некоторой частотой ω_0 под действием внутриатомных кулоновских сил $\vec{F}_{\text{ат}}$ притяжения электронов к ядру (рис.9.2). Тогда, в проекции на направление y колебаний электрического поля падающей электромагнитной волны $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$, уравнение движения электронов примет вид

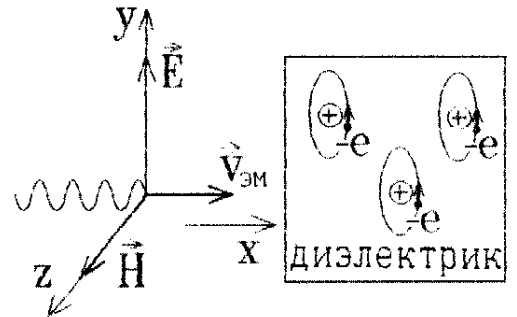


Рис.9.2

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \underbrace{-m\omega_0^2 y}_{= F_{\text{ат}} y} - eE$$

($F_{\text{ат}} y$ — квазиупругая сила) или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t - kx).$$

Возникают вынужденные колебания электронов с частотой ω падающей электромагнитной волны. Решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $y = y_0 \cos(\omega t - kx)$. Подставляя его в уравнение движения, находим, что $(-\omega^2 + \omega_0^2)y_0 \cos(\omega t - kx) = -(e/m)E_0 \cos(\omega t - kx)$ или

$$y = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - kx).$$

Частота обращения электрона в атоме очень велика: $\omega_0 > \omega$, т.е. **вынужденные колебания электронов в среде происходят в противофазе с колебаниями падающей электромагнитной волны**. Такие электроны испускают вторичные электромагнитные волны, также колеблющиеся в противофазе с падающей волной и **ослабляющие ее**.

Уменьшение амплитуды волны $|d\vec{E}|$, очевидно, пропорционально величине амплитуды E падающей волны, числу электронов, испускающих вторичные волны (т.е. концентрации электронов N_e), и толщине слоя диэлектрика dx , проходимого волной:

$$dE = -\text{const} \cdot N_e E dx \text{ или}$$

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{E} = -\eta \int_0^x dx,$$

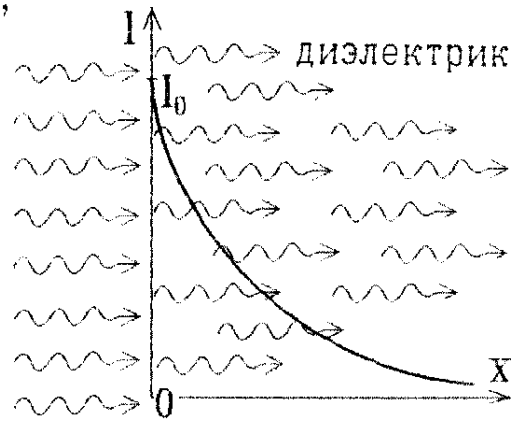


Рис.9.3

где $\eta = \text{const} \cdot N_e$. Интегрируя это уравнение, находим закон убывания амплитуды или интенсивности электромагнитной волны от толщины x пройденного слоя диэлектрика (рис.9.3):

$$E = E_0 \exp(-\eta x) \quad \text{или} \quad I = I_0 \exp(-2\eta x),$$

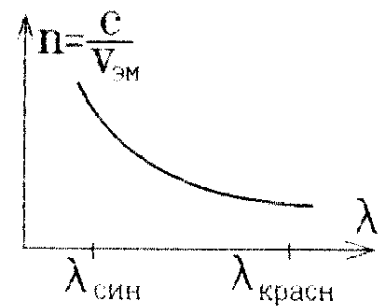
где 2η – коэффициент ослабления света средой.

Такой экспоненциальный закон убывания интенсивности света называется законом Бугера. Например, пропуская свет через толстую стопку оконных стекол, можно добиться резкого уменьшения его интенсивности.

2 Дисперсия электромагнитных волн

Дисперсия – это зависимость скорости электромагнитных волн в среде или показателя преломления n среды от длины волны или от ее частоты.

(Красный свет имеет большую скорость, чем синий, и обгоняет его (рис.9.4). Электромагнитные сигналы (импульсы) являются набором волн с разными частотами и не сохраняют свою форму, "расплываются" при перемещении в реальной среде)



Объяснение явления дисперсии
электромагнитных волн.

Рис.9.4

В молекулах или атомах среды имеется много электронов, вращающихся по разным орбитам с разными "собственными" частотами ω_{0k} . Под действием поля падающей электромагнитной волны с частотой ω они начинают смещаться на расстояния $y = y_{0k} \cos(\omega t - kx)$, и молекула приобретает дипольный электрический момент

$$p_{\text{мол}} = \sum_k (-e)y_k = \sum_k \frac{e^2 E_0}{m(\omega_{0k}^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - kx).$$

Умножая его на концентрацию молекул N , получаем суммарный дипольный момент всех молекул в единице объема среды, т.е., по определению, поляризованность среды, которая связана с напряженностью внешнего электрического поля (поля падающей волны) соотношением $P = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E$ или

$$P = N p_{\text{мол}} = \sum_k \frac{N e^2 E_0}{m(\omega_{0k}^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - kx) = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx).$$

Отсюда находим диэлектрическую } $\epsilon = 1 + \sum_k \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}$
проницаемость среды

Следовательно, показатель преломления диэлектрической среды n будет зависеть от частоты ω падающей электромагнитной волны:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + \sum_k \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}} \quad !$$

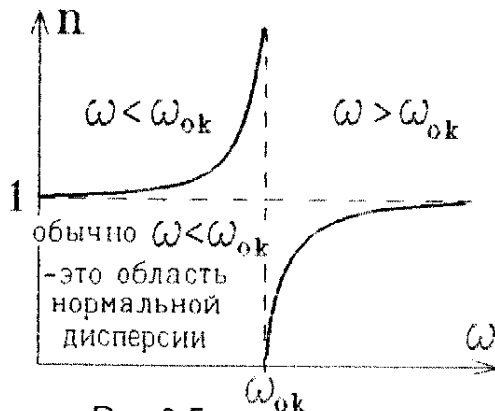


Рис.9.5

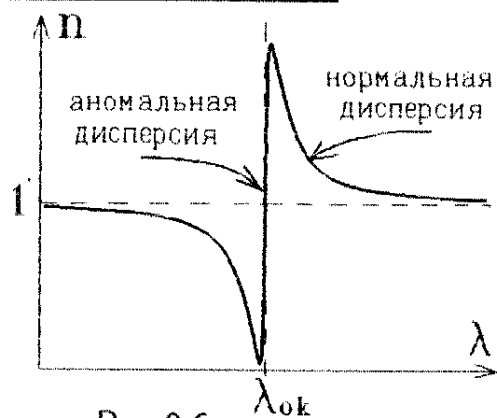


Рис.9.6

Так как $\omega = \frac{2\pi\nu_{эм}}{\lambda}$, то при увеличении λ (уменьшении ω) величина показателя преломления n должна уменьшаться (рис.9.5, 9.6). Это справедливо для всех частот ω электромагнитных волн, *кроме частот, близких к частотам ω_{0k} вращения электронов по орбитам*. При этих частотах (область аномальной дисперсии) возникает резонанс вынужденных колебаний электронов, и падение величины n сменяется ее ростом.

Вопрос: что же необычного в графиках на рис.9.5 и 9.6 ?

В некоторых случаях получаем $n < 1$ или $v_{эм} > c$! Например, в плазме, где электроны свободны и $\omega_{0k} = 0$, показатель преломления $n = \sqrt{1 - \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m \omega^2}} < 1$, где N_e — концентрация свободных электронов плазмы. Эта формула справедлива, когда смещенные электромагнитной волной электроны плазмы еще не сталкиваются с соседними электронами, т.е. когда амплитуда смещения $y_{\max} = y_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2}$ не превышает средней длины свободного пробега электрона в плазме.

Таким образом, в плазме и в некоторых других случаях фазовая скорость электромагнитной волны превышает скорость света в вакууме.

Противоречит ли это теории относительности ? Покажем, что нет.

3 Волновые пакеты. Групповая скорость.

Фазовая скорость $v_{эм} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$ — это скорость, с которой распространяется волновой фронт или волновая поверхность *бесконечной монохроматической волны*. Но реально таких волн нет. Они испускаются в виде *ограниченных импульсов* (цугов или волновых пакетов), являющихся набором электромагнитных волн с *разными частотами ω* , лежащими в интервале $\omega \pm \Delta\omega/2$ (рис.9.7).

Групповой скоростью $\vec{u}$ называется скорость, с которой передвигается центр волнового пакета или электромагнитного импульса (хотя сам волновой пакет может расплываться и менять свою форму из-за наличия дисперсии).

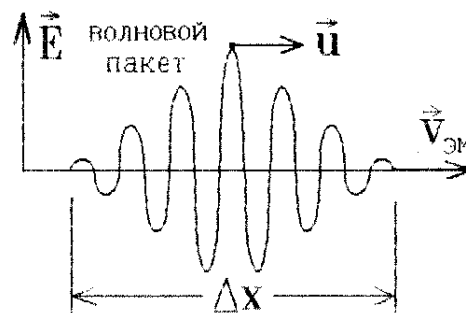


Рис.9.7

Рассмотрим для примера волновой пакет из двух волн с близкими частотами ω и $\omega + \Delta\omega$, волновыми числами k и $k + \Delta k$ и одинаковыми амплитудами:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx), \\ E_2 = E_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]. \end{cases}$$

Складывая их, получаем

$$E = E_1 + E_2 = \underbrace{2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)}_{\text{амплитуда}} \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right].$$

Так как $\Delta\omega \ll \omega$, то первый гармонический множитель изменяется очень медленно по сравнению со вторым, и его можно считать амплитудой волнового пакета (рис.9.8). Точки, в которых амплитуда максимальна и равна $2E_0$, удовлетворяют условию $\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = 0$ — это центр волнового пакета, образованного двумя складывающимися волнами. Скорость его перемещения $u = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Аналогичная формула для групповой скорости (скорости центра волнового пакета) получается при сложении большого числа волн с близкими частотами:

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Подставляя в это выражение значения $\omega = kv_{\text{эм}}$ и $k = 2\pi/\lambda$, получаем:

$$u = \frac{d(kv_{\text{эм}})}{dk} = v_{\text{эм}} + k \frac{dv_{\text{эм}}}{dk} = v_{\text{эм}} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv_{\text{эм}}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk},$$

но $\frac{d\lambda}{dk} = \left(\frac{dk}{d\lambda}\right)^{-1} = \left(\frac{d(2\pi/\lambda)}{d\lambda}\right)^{-1} = \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2}\right)^{-1} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$. Поэтому

$$u = v_{\text{эм}} - \lambda \frac{dv_{\text{эм}}}{d\lambda}$$

— эта формула связывает групповую и фазовую скорости волны. Из нее следует, что в среде с нормальной дисперсией $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ или $\frac{dv_{\text{эм}}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{n}\right) > 0$.

Групповая скорость оказывается меньше фазовой.

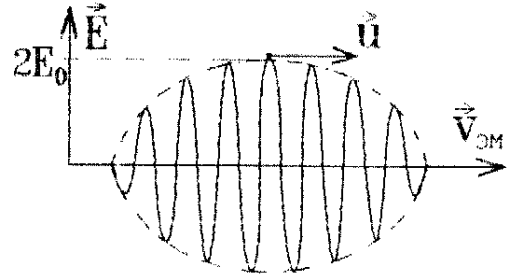


Рис.9.8

Сравним групповую скорость со скоростью света в вакууме.

Обычно $\frac{e^2 N}{m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \ll 1$, т.е. вдали от области аномальной

дисперсии $n \approx 1$. Тогда, обозначив $\frac{e^2 N}{2m \varepsilon_0} = \xi > 0$, находим для показателя преломления

$$n = \sqrt{1 + \sum_k \frac{2\xi}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)}} \approx 1 + \sum_k \frac{\xi}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}.$$

Отсюда $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_{\text{эм}}} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{c} \left(1 + \sum_k \frac{\xi}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \right)$.

Подставляя это значение волнового числа в определение групповой скорости, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} &= \frac{1}{c} \left(1 + \sum_k \frac{\xi}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \right) + \frac{\omega}{c} \cdot 2\omega \sum_k \frac{\xi}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2} = \\ &= \frac{1}{c} + \frac{\xi}{c} \sum_k \frac{\omega_{0k}^2 + \omega^2}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2} > \frac{1}{c}, \end{aligned}$$

откуда следует, что групповая скорость меньше скорости света в вакууме для любых частот падающей волны: как для $\omega < \omega_{0k}$, так и для $\omega > \omega_{0k}$ (рис.9.5).

Реально энергию и сигналы (информацию) переносят электромагнитные импульсы (волновые пакеты), а их групповая скорость будет всегда меньше скорости света в вакууме: $u = v_{\text{эм}} - \lambda \frac{dv_{\text{эм}}}{d\lambda} < c$!

Глава 10.

Поляризация электромагнитных волн

1 Естественный и поляризованный свет

В поперечной электромагнитной волне колебания электрического и магнитного полей происходят перпендикулярно направлению движения волны (рис.10.1).

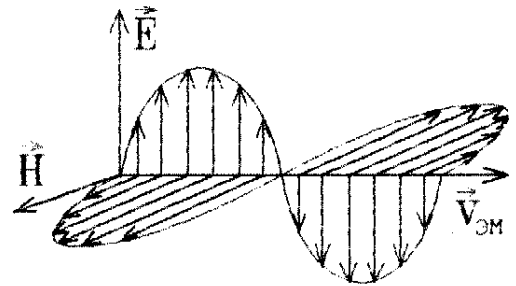


Рис.10.1

Естественным называется свет, в котором колебания вектора $\vec{E}$ (или $\vec{H}$) происходят беспорядочно, в любом направлении, перпендикулярно скорости распространения волны (рис.10.2).

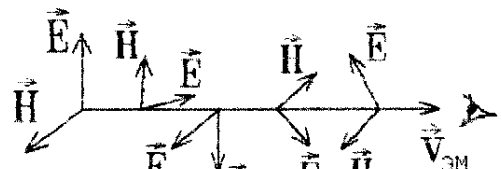


Рис.10.2

Если же колебания светового вектора $\vec{E}$ как-либо упорядочены, то свет называется поляризованным.

1) Для плоскополяризованного света колебания вектора $\vec{E}$ происходят все время в одной плоскости (рис.10.3).

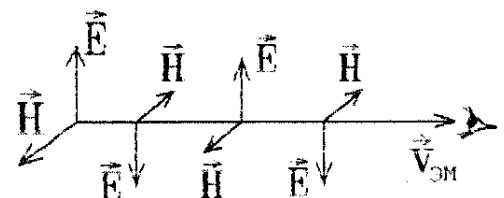


Рис.10.3

2) Можно получить световую волну, в которой вектор $\vec{E}$ будет вращаться вокруг направления скорости волны — это свет с круговой поляризацией.

Для этого достаточно сложить плоскополяризованные во взаимно-перпендикулярных плоскостях когерентные световые лучи, сдвинутые по фазе на $\pi/2$ (рис.10.4). Это можно проделать, например, смешав лучи, прошедшие через стеклянную плоскопараллельную пластинку, с лучами, отраженными от нее (рис.10.5). Тогда

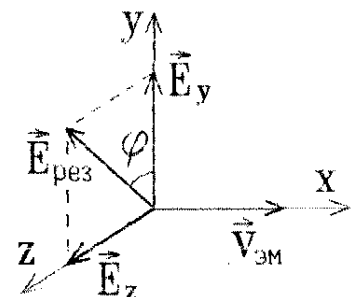


Рис.10.4

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z &= E_0 \cos(\omega t - kx \pm \pi/2) \end{aligned} \right\}$$

и, так как $\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_z}{E_y} =$

$$= \frac{\mp E_0 \sin(\omega t - kx)}{E_0 \cos(\omega t - kx)} = \mp \operatorname{tg}(\omega t - kx),$$

то угол φ начнет изменяться с угловой скоростью ω , т.е. результирующий вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ будет вращаться с этой угловой скоростью вокруг направления движения волны.

Посмотрим навстречу лучу света (против вектора $\vec{v}_{\text{эм}}$). Если при этом вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ вращается против часовой стрелки, то круговая поляризация называется левой, а при вращении $\vec{E}_{\text{рез}}$ по часовой стрелке — правой (рис.10.6).

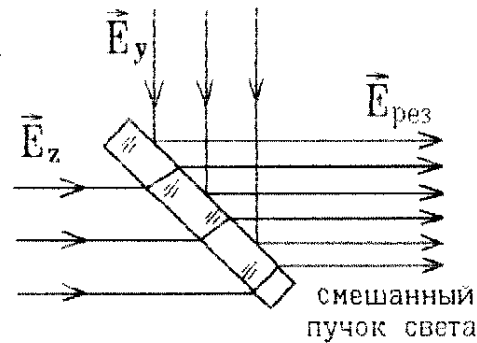


Рис.10.5

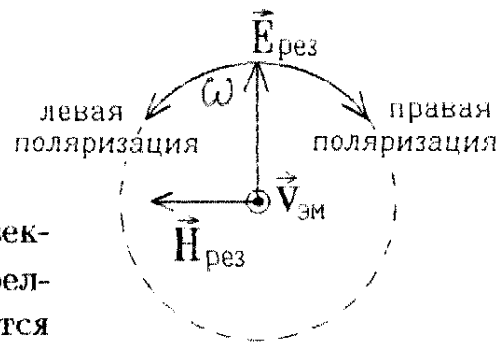


Рис.10.6

(Если амплитуды смешиваемых волн не одинаковы, $E_{0y} \neq E_{0z}$, то вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ при вращении будет описывать эллипс, а поляризация называется эллиптической).

В приведенных выше примерах свет полностью поляризован. Если же световой луч складывается из естественного и поляризованного света, то он называется частично поляризованным.

Вопрос: каков на вид поляризованный свет ?

2 Поляризация электромагнитных волн при отражении. Закон Брюстера

Плоскость падения светового луча всегда образована лучом и нормалью к отражающей поверхности. Пусть естественная электромагнитная волна падает под углом α на границу раздела двух диэлектрических сред с показателями преломления n_1 и n_2 (рис.10.7). Вектор $\vec{E}$ в ней колеблется и в плоскости падения света (эти колебания $\vec{E}_{\parallel}$

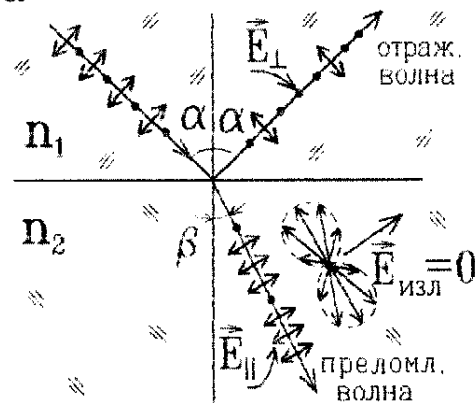


Рис.10.7

обозначены стрелочками), и перпендикулярно плоскости падения (колебания $\vec{E}_\perp$ обозначены точками). Проходящая через среду с показателем преломления n_2 волна (преломленная) заставляет электроны среды двигаться с ускорением и испускать вторичные электромагнитные волны, которые и образуют отраженную волну.

Но ускоренные заряды не излучают волн вдоль направления своего колебания, т.е. вдоль направления $\vec{E}_{\text{прел}\parallel}$. Поэтому в отраженном луче могут пропасть колебания, лежащие в плоскости падения.



При этом, очевидно, $\alpha + \beta = \pi/2$. Из закона преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\pi/2 - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

получаем закон Брюстера:

при падении естественного света на границу раздела двух непроводящих сред под углом $\alpha_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1}$ (угол Брюстера) отраженный луч будет **полностью поляризован**: колебания $\vec{E}$ в нем происходят только перпендикулярно плоскости падения света.

Так, солнечный свет становится плоскополяризованным для угла скольжения $\gamma = \pi/2 - \alpha = \pi/2 - \operatorname{arctg} 1,33 \approx 37^\circ$ к поверхности воды с показателем преломления $n = 1,33$ (рис. 10.8).

Глаз при этом никаких различий не заметит: физиологическое действие поляризованного света аналогично действию естественного света.

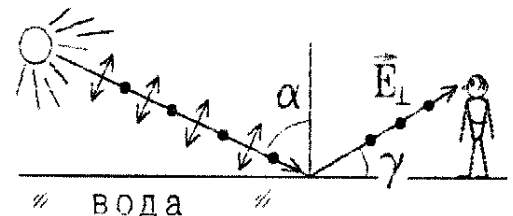


Рис.10.8

Если падение света происходит под другим углом $\alpha \neq \alpha_B$, то отраженный свет будет **частично поляризован**. Преломленный луч всегда **частично поляризован в плоскости падения света**.

Произведенный Френелем расчет показывает, что при отражении от границы раздела двух непроводящих сред падающего с интенсивностью I_0 естественного света интенсивность отраженного света определяется формулами, называемыми формулами Френеля:

$$I_{\text{отр}\perp} = \frac{I_0}{2} \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right]^2, \quad I_{\text{отр}\parallel} = \frac{I_0}{2} \left[\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \right]^2.$$

Первая из них относится к отраженному свету, в котором световой вектор $\vec{E}$ колеблется перпендикулярно плоскости падения, а вторая — к

свету, в котором световой вектор $\vec{E}$ колеблется в плоскости падения.
(при $\alpha + \beta = \pi/2$ получаем $I_{\text{отр}\parallel} = 0$, т.е. закон Брюстера).

Для преломленного луча, соответственно,

$$I_{\text{пр}\perp} = \frac{I_0}{2} - I_{\text{отр}\perp}, \quad I_{\text{пр}\parallel} = \frac{I_0}{2} - I_{\text{отр}\parallel}.$$

3 Поляризаторы. Закон Малюса

На практике для получения плоскополяризованных волн используют среду с асимметричной проводимостью. Пусть, например, электромагнитная волна падает на сетку из множества длинных параллельных тонких проволок (рис.10.9).

Параллельная проволочкам составляющая $\vec{E}_{\parallel}$ (рис.10.9) вызывает в них ток $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\parallel}$. Точно так же, как при падении электромагнитной волны на поверхность металла, возникнут вторичные волны, колеблющиеся в противофазе с $\vec{E}_{\parallel}$ и очень быстро гасящие ее. То есть составляющая $\vec{E}_{\parallel}$ не проникает за сетку. Но перпендикулярная к проволочкам составляющая $|\vec{E}_{\perp}| = |\vec{E}_{\text{пад}}| \cos \alpha$ не вызывает тока (в этом направлении сетка ток не проводит) и проникает за сетку.

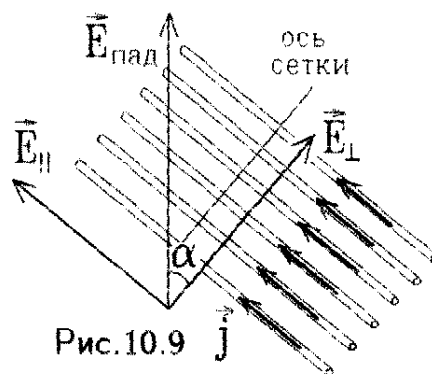


Рис.10.9

Проволочная сетка является поляризатором, т.е. пропускает только электромагнитные волны, в которых вектор $\vec{E}$ колеблется вдоль оси поляризатора. Вдоль этой оси поляризатор ток не проводит. Интенсивность прошедшего света связана с интенсивностью падающего (если он плоскополяризован) законом Малюса: $E_{\perp}^2 = (E_{\text{пад}} \cos \alpha)^2$ или

$$I_{\text{прош}} = I_{\text{пад}} \cos^2 \alpha,$$

где α – угол между осью поляризатора и направлением поляризации падающего света.

На рис.10.10 показано прохождение света через три скрепленных поляризатора.

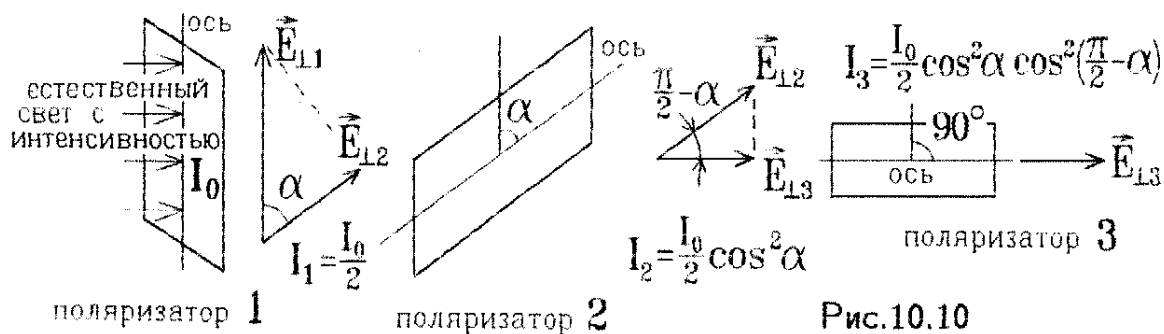


Рис.10.10

Вопрос: что будет, если убрать средний поляризатор? Если его вращать?

Оптические поляризаторы (поляроиды) изготавливают из специальной пластмассы, состоящей из длинных параллельных цепочек молекул, вдоль которых может течь ток (аналог сетки из проволочек).

Еще один пример применения поляризаторов – демонстрация стереоскопических фильмов (рис.10.11).

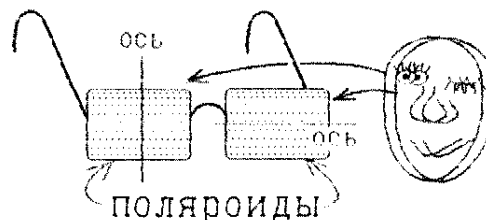


Рис.10.11

4 Поляризация при двойном лучепреломлении

Свойствами поляризаторов обладают и некоторые естественные кристаллы с решеткой не кубической формы (тетраэдрическая, гексагональная решетка). В таких кристаллах диэлектрическая проницаемость принимает разные значения вдоль разных направлений и задается тензором $\|\varepsilon_{ij}\|$, $i, j = x, y, z$.

Если вдоль всех направлений из точки O кристалла отложить соответствующие значения ε , то получится поверхность, образованная вращением эллипса (эллипсоид) (рис.10.12).

Одна из главных осей этого эллипсоида, например, ось z , называется оптической осью кристалла. Любой луч естественного света, проходя через такой кристалл, разделяется на два плоскополяризованных луча:

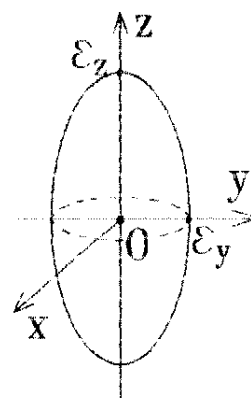


Рис.10.12

1) необыкновенным лучом называется луч, в котором световой вектор $\vec{E}_{\parallel}$ колеблется в плоскости, образованной лучом и оптической осью кристалла;

2) обыкновенным лучом называется луч, в котором световой вектор $\vec{E}_{\perp}$ колеблется перпендикулярно этой плоскости.

Оказывается, что скорость распространения обыкновенного луча одинакова по всем направлениям (рис.10.13).

Для необыкновенного луча скорость вдоль оптической оси совпадает со скоростью обыкновенного луча, но по всем остальным направлениям различна, так как зависит от величины ε

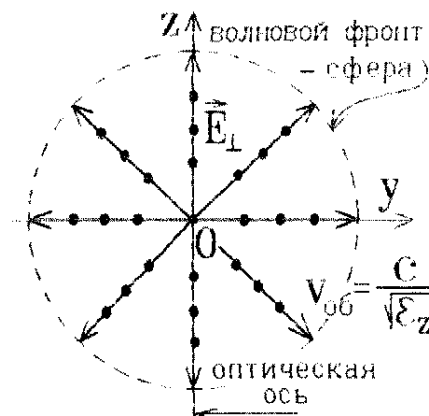


Рис.10.13

(рис.10.14). Например,

$$v_{nz} = v_{об} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}} < v_{ny} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}, \text{ так как } \epsilon_z > \epsilon_y.$$

Для обыкновенного луча выполняется обычный закон преломления света, но для необыкновенного луча этот закон нарушается вследствие того, что

волновой фронт света, испущенного точечным источником необыкновенных лучей в неизотропных кристаллах, несферичен.

Примеры.

а) Луч падает вдоль оптической оси кристалла (рис.10.15): скорость обыкновенного и необыкновенного лучей одинакова, и луч естественного света движется, не разделяясь.



Рис.10.15

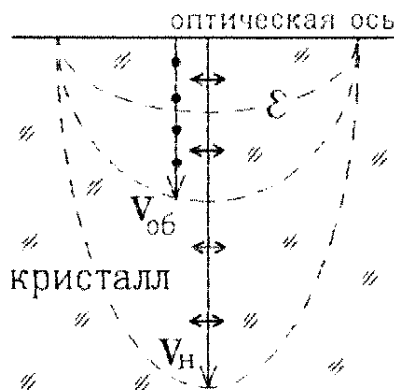


Рис.10.16

ность хода между ними растет.

в) Луч падает на кристалл под произвольным углом к оптической оси (рис.10.17). Плоские волновые фронты преломленных лучей являются огибающими вторичных волн, испущенных точками на поверхности кристалла.

Для необыкновенного луча нарушен закон преломления Снелла. Поэтому луч естественного света, проходя через кристалл под произвольным углом к оптической оси кристалла, разделится на обыкновенный и необыкновенный, которые дадут двойное изображение предмета (рис.10.18).

Часть естественных кристаллов обладает свойством дихроизма:

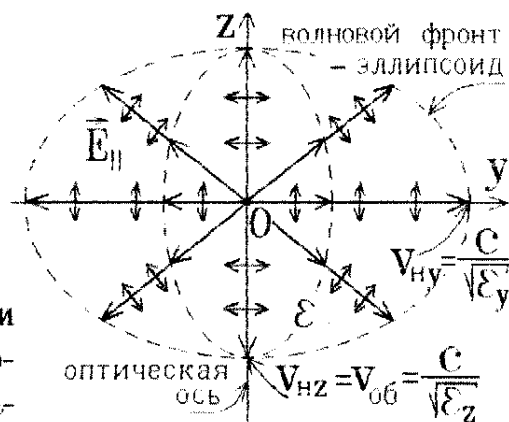


Рис.10.14

б) Рис.10.16: луч падает перпендикулярно оптической оси кристалла; обыкновенный и необыкновенный лучи движутся в одном направлении, но скорость необыкновенного луча больше (или меньше), чем у обыкновенного, и раз-



Рис.10.17

один из лучей (обыкновенный и необыкновенный) в них сильно поглощается. Так, в турмалине обыкновенный луч будет полностью поглощен, пройдя путь в 1 мм. Тогда **выходящий из кристалла луч, оставшийся непоглощенным, будет полностью плоскополяризован**. Такие кристаллы являются поляризаторами.

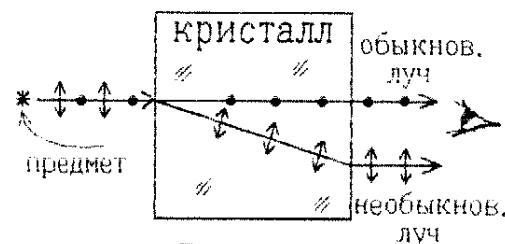


Рис.10.18

Замечание: интерферировать могут только лучи, плоскополяризованные в одной плоскости. Когерентные лучи, плоскополяризованные в разных плоскостях, не интерферируют, и их интенсивности складываются так же, как и для некогерентных лучей!

Оптически активными веществами называются вещества, поворачивающие плоскость поляризации при прохождении через них плоскополяризованной волны.

Угол φ поворота плоскости поляризации пропорционален концентрации активного вещества C и толщине l проходимого слоя (рис.10.19):

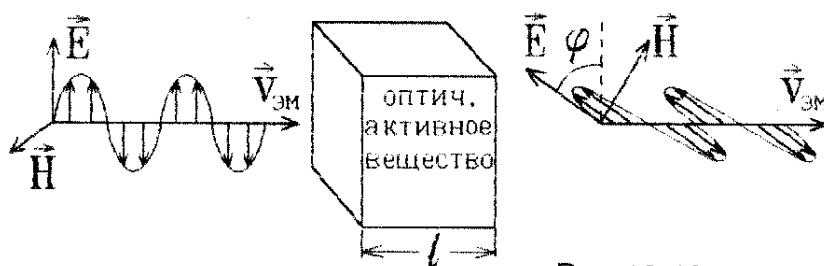


Рис.10.19

$$\varphi = \text{const} \cdot Cl.$$

Пример: сахарный сироп. По углу поворота φ определяют концентрацию сахара в растворе.

Вопрос: сахар, произведенный химическим путем (искусственный мед), вначале не поворачивает плоскость поляризации, но, постояв некоторое время на открытом воздухе, становится оптически активным. Почему?

Ответ: в сахаре, произведенном химическим путем, имеются в равных количествах как правополяризованные, так и левополяризованные молекулы. Бактерии, живущие в воздухе, используют для своей жизнедеятельности только левополяризованные молекулы, поэтому в сахаре остаются преимущественно правополяризованные, и он становится оптически активным.

Предметный указатель

- Аналоговые вычислительные машины 25
- Апертура отверстия 103
- объектива числовая 106
- Бетатрон 10
- Билинза Бийе 82
- Взаимная индуктивность 15
- Вектор Пойнтинга
(вектор плотности потока энергии) 47
- для электромагнитной волны 65
- Умова 66
- Вектор — потенциал магнитного поля 43
- Вихревое электрическое поле 9
- Волна бегущая 53
- монохроматическая 53
- плоская 51
- сферическая 51, 52
- Волновая зона 68
- Волновая поверхность 51
- Волновая функция
- плоской волны 52
- разложение в ряд Фурье 54, 83
- сферической волны 52, 53
- стоячей волны 78
- электромагнитной волны 60
- Волновое уравнение 53
- Волновое число 52
- Волновой вектор 52
- Волновой фронт 51
- Волновые пакеты (цуги) 83, 116
- Волны когерентные 80, 84
- некогерентные 79
- поперечные 50
- продольные 50
- Время когерентности 84
- Генератор переменного тока 9
- Голограмма 92
- Граничные условия 42
- Дебаеграмма 111
- Лействующее (эффективное) значение тока (напряжения) 33
- Дисперсия электромагнитных волн 114
- аномальная 116
- Дифракция электромагнитных волн 97
- Дифракция Фраунгофера 100
- Френеля 100
- Дифракционная решетка 88
- главные интерференционные максимумы 89
- постоянная решетки 88
- разрешающая способность 90
- условие дополнительных минимумов 89
- Дифракционное изображение 104, 107
- Лихроизм 124
- Длина волны 51
- Длина когерентности 84
- Закон Брюстера 121
- Бугера 114
- Малюса 122
- преломления 74
- Рэлея 70
- Фарадея 10
- Зеркало Ллойда 82
- Зонная пластинка 102
- Зоны Френеля 99
- радиус зон Френеля 100
- Импульс электромагнитной волны 67
- Индуктивность проводника 13

- Интерференция волн 79
 Интерференционная схема Юнга 80
 Камера-обскура 101
 Критерий Рэлея 90
 Лауэграмма 111
 Логарифмический декремент затухания колебаний 35
 Луч необыкновенный 123
 — опорный 91
 — обыкновенный 123
 — предметный 91
 Материальные уравнения 42
 Метод Вульфа-Брэггов 111, 112
 — Дебая-Шеррера 111
 — Лауэ 111
 Мираж 75
 Начальная фаза волны 52
 Оператор Лапласа 45
 Оптическая длина пути 72
 — ось кристалла 123
 — разность хода 81
 Оптически активные вещества 125
 Параксиальное приближение в геометрической оптике 102
 Плотность энергии электромагнитного поля 46
 Полный магнитный поток 14
 Полосы равного наклона 86
 — полосы равной толщины 87
 Поляризатор 122
 Пондеромоторная сила 23
 Правило Ленца 11
 Принцип Гюйгенса-Френеля 96
 — Ферма 73
 Резонанс 33
 Рентгеновская спектроскопия 112
 Рентгеноструктурный анализ 112
 RC — цепочка
 — дифференцирующая 25
 — интегрирующая 24
 Свет естественный 119
 — плоскополяризованный 119
 — с круговой поляризацией 119
 — левая и правая поляризация 120
 — с эллиптической поляризацией 120
 — частично поляризованный 121
 Световой вектор 113
 Связь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской электромагнитной волне 62
 Сдвиг фаз при отражении (потеря полуволны) 77, 85
 Система уравнений Максвелла
 — в дифференциальной форме 42
 — в интегральной форме 41
 Скорость волны
 — в газах 59
 — в натянутой струне 56
 — групповая 117
 — фазовая 55, 116
 — электромагнитной 60
 Сопротивление цепи
 — активное 32
 — емкостное 32
 — индуктивное 32
 — полное (импеданс цепи) 32
 — реактивное 32
 Спираль Корню 107
 Теорема взаимности 15
 — Пойнтинга 47
 Ток смещения 37
 Токи Фуко 12
 Трансформатор 16
 Угол Брюстера 121
 Узлы и пучности стоячей волны 78

- Уравнение вынужденных гармонических колебаний 30
 — непрерывности 58
 — собственных затухающих колебаний 27
 — стоячей волны 78
 — эйконала 72
 — Эйлера 57
 Уравнения Лауэ 111
 Условие временной когерентности 84
 — Вульфа-Брэггов 112
 — дифракционного минимума на узкой щели 108, 109
 — квазистационарности тока 27
 — Лоренца 44
 — максимума и минимума при интерференции 81, 82
 — пространственной когерентности 85
 Формула Томсона 29
 Формулы Френеля 121, 122
 Частота резонансная 33
 — собственных затухающих колебаний 28
 — собственных незатухающих колебаний 29
 Ширина интерференционной полосы 82
 Шкала электромагнитных волн 64
 Э.д.с. электромагнитной индукции 7
 — взаимной индукции 16
 — самоиндукции 14
 Эйконал 71
 Эйкональное приближение 71
 Электрический колебательный контур 26
 — амплитудно-частотная характеристика 33
 — добротность 35
 — избирательная способность 36
 — полуширина резонанса 36
 — собственные колебания 27
 Электромагнитное поле 40
 — в волновой зоне 69
 Энергия магнитного поля 18
 — собственная энергия токов 19
 — взаимная энергия токов 19

Литература

- [1] Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. – М.: Высш.шк., 1991. – 288 с.
- [2] Савельев И.В. Курс физики: В 3-х т. – М.: Наука, 1989.– Т.2. Электричество. Электрические колебания и волны. Волновая оптика. – 464 с.
- [3] Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш.шк., 1983. – 463 с.
- [4] Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высш.шк., 1985. – 351 с.
- [5] Орир Дж. Физика. Т.2 – М.: Мир, 1981. – 288 с.
- [6] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1976 – 1978, вып.1 – 10.
- [7] Бутиков Е.И. Оптика. – М.: Высш. шк., 1986. – 511 с.
- [8] Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука, 1976. – 926 с.
- [9] Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1977 – Т.3. Электричество. – 687 с.
- [10] Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1985 – Т.4. Оптика.– 751 с.
- [11] Борн М., Вульф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 855 с.
- [12] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. . Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) – М.: Наука, 1977. – 342 с.

Колмаков Юрий Николаевич

Пекар Юрий Александрович

Лежнева Лидия Сергеевна

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ОПТИКА

Лекции по физике

Редактор И.А.Есаян

Свод. тем. пл. №7

Подписано в печать 15.02.99. Формат бумаги 60 × 841/16. Бумага типограф. №2. Офсетная печать. Усл. печ. л. 7,4. Усл. кр.-отт. 7,4. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 200 экз. Заказ . С 012.

Тульский государственный университет. 300600, Тула, просп. Ленина, 92.
Подразделение оперативной полиграфии Тульского государственного университета. 300600 Тула, ул. Болдина, 151.