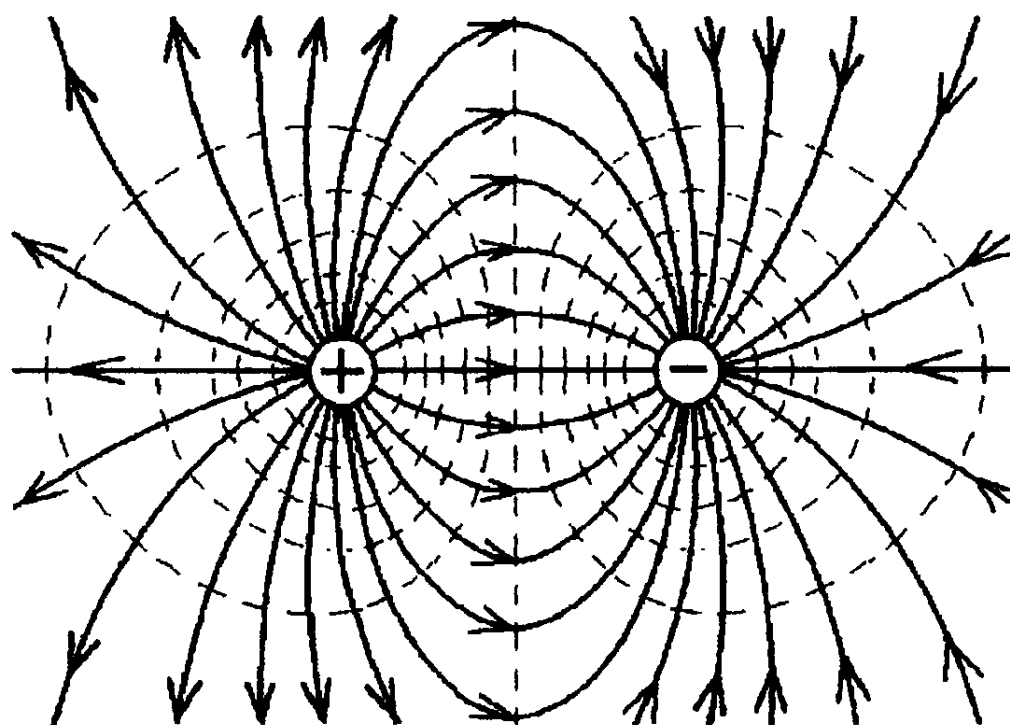


Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.Н.КОЛМАКОВ, Ю.А.ПЕКАР, И.М.ЛАГУН

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ



Тула 1999

УДК 517.9(07) + 53(07)

Электричество и магнетизм: Лекции по физике/ Ю.Н. Колмаков, Ю.А. Пекар, И.М. Лагун. Тул.гос.ун-т, Тула, 1999. 140 с.

ISBN 5 – 7679 – 0186 – 4

Пособие представляет собой часть курса лекций по общей физике, читаемого в ТулГУ для специальностей инженерно-технических и инженерно-физических направлений. В нем рассматриваются постоянные электрическое и магнитное поля в вакууме и веществе, законы постоянного тока и основные свойства плазмы.

Предназначено для студентов всех специальностей физического и инженерно-технического профиля.

Ил. 264. Библиогр.: 10 назв.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук В.М.Дубовик (Объединённый институт ядерных исследований, г. Дубна).

ISBN 5 – 7679 – 0186 – 4

К $\frac{1604050000 - 011}{76П(03) - 99}$ 8 – 99

© Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар,
И.М.Лагун, 1999

© Тульский государственный
университет, 1999

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Электрическое поле в вакууме.....	7
1. Электростатическое поле. Закон Кулона	7
2. Принцип суперпозиции. Силовые линии электростатического поля	9
3. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электрического поля	11
4. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей	13
5. Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Дивергенция $\vec{E}$	16
6. Работа сил электростатического поля. Потенциал	18
7. Связь потенциала и напряженности	21
8. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля	22
9. Электрический диполь	23
10. Поле системы зарядов на большом расстоянии	26
11. Уравнения Пуассона и Лапласа	23
Глава 2. Проводник в электрическом поле	29
1. Проводник в вакууме	29
2. Явление электрической индукции. Экранировка электрического поля	31
Глава 3. Электрическое поле в диэлектриках.....	34
1. Поляризация диэлектриков	34
2. Электрическое поле связанных зарядов	36
3. Вектор электрической индукции	39
4. Электрическое поле в диэлектрике	40
5. Электрическое поле на границе двух сред.....	42

Глава 4. Энергия заряженных проводников, диэлектриков и электрического поля	44
1. Электрическая емкость	44
2. Конденсаторы	45
3. Энергия системы зарядов	47
4. Энергия электрического поля	49
5. Силы, действующие на заряженные тела в присутствии диэлектрика	51
Глава 5. Законы постоянного тока	59
1. Электрический ток	59
2. Природа носителей тока в металле	59
3. Закон Ома для однородного проводника	62
4. Закон Джоуля-Ленца	64
5. Условие стационарности тока	66
6. Электродвижущая сила (э.д.с.)	69
7. Правила Кирхгофа	73
Глава 6. Контактные явления в проводниках	75
1. Работа выхода электрона из металла	75
2. Контактная разность потенциалов	76
3. Термоэлектрические явления	78
Глава 7. Магнитное поле в вакууме	81
1. Магнитная сила	81
2. Релятивистская природа магнетизма. Вектор индукции магнитного поля	82
3. Релятивистские преобразования электрического и магнитного полей	85
4. Магнитное поле движущегося точечного заряда	88
5. Магнитное поле тока. Закон Био – Савара – Лапласа	89
6. Сила Ампера	92
7. Теорема Гаусса для магнитного поля	93
8. Теорема о циркуляции для магнитного поля	94
9. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля	96
10. Ротор. Теорема Стокса	99
11. Сравнение свойств электростатического и постоянного магнитного полей	102

Глава 8. Проводник с током в магнитном поле	104
1. Контур с током в однородном магнитном поле.	
Магнитный момент	104
2. Контур с током в неоднородном магнитном поле	107
3. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле	108
4. Эффект Холла	110
Глава 9. Магнитное поле в магнетиках	111
1. Намагничение вещества	111
2. Циркуляция вектора намагниченности и токи намагничивания	113
3. Вектор напряженности магнитного поля и его свойства .	116
4. Магнитное поле в магнетиках. Постоянные магниты	118
5. Магнитное поле на границе двух сред	121
6. Магнетики. Природа ферро-, пара- и диамагнетизма	123
Глава 10. Плазма	126
1. Понятие о плазме	126
2. Свойства плазмы	128
3. Плазменные колебания	132
4. Плазма в магнитном поле	133
Предметный указатель	137
Литература	140

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов технических и естественно-научных специальностей, которым читается двух- или трехсеместровый курс общей физики в рамках бакалаврской подготовки. Его изучение требует знания высшей математики в объеме дифференциального и интегрального исчисления и векторного анализа.

Имеется достаточно широкий набор рекомендуемой учебной литературы [1 – 9], рассматривающей те же темы, что и данное пособие. Но практически все эти учебники рассчитаны на значительно больший объем времени, необходимого для изучения курса, чем то время, которое отводится на это существующими учебными программами.

В связи с этим при подготовке данного пособия авторы руководствовались следующими соображениями:

- выделить такой объем теоретического материала, который является совершенно необходимым для понимания сути рассматриваемых физических явлений и законов, а также изложить его в компактной форме;
- показать внутреннюю связь между проявлениями физических законов в различных приложениях и взглянуть на изучаемые явления с разных сторон;
- использовать уровень математики, позволяющий читателю непосредственно применять изучаемые законы к решению любых задач, как предлагаемых в курсе общей физики, так и возникающих при изучении прикладных дисциплин;
- иллюстрировать изложение наглядными примерами, взятыми из различных областей науки и техники.

Для удобства читателя приведен подробный предметный указатель.

Глава 1.

Электрическое поле в вакууме

1 Электростатическое поле. Закон Кулона

В природе существует несколько типов полей: гравитационное, электромагнитное, сильное, слабое. Каждое имеет свою константу взаимодействия или заряд (так, например, массу m можно назвать гравитационным зарядом).

Вокруг тел, имеющих электрический заряд, всегда существует электрическое поле.

Действительно, каждое заряженное тело окружено "облаком" непрерывно испускаемых и поглощаемых виртуальных частиц (виртуальных фотонов) (рис.1.1). Возникают эти частицы в соответствии с законами квантовой физики, и образуемое ими "облако" проявляется в Природе в виде электромагнитного поля, позволяющего заряженным частицам взаимодействовать на расстоянии. Заряженные тела взаимодействуют на расстоянии, обмениваясь виртуальными фотонами, переносящими энергию E и импульс $\vec{p}$ от одного тела к другому, как показано на рис.1.1.

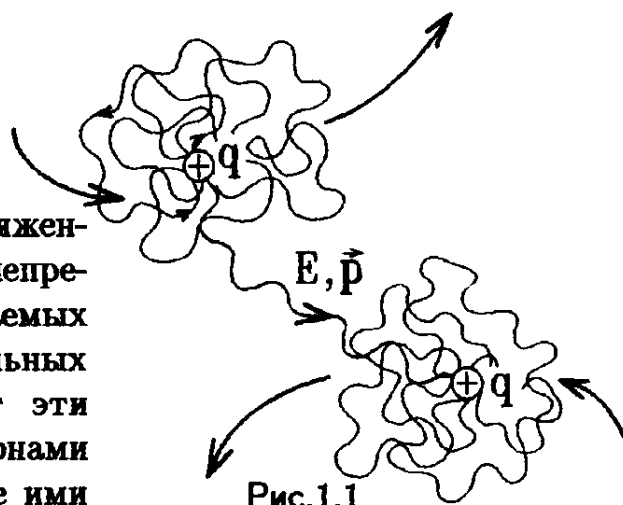


Рис.1.1

При движении электрически заряженных тел, помимо электрических, возникают и магнитные силы.

Вначале мы рассмотрим свойства покоящихся зарядов, между которыми действуют только электрические силы. Электрическое поле, созданное системой покоящихся зарядов, называется электростатическим полем.

Точечным зарядом является заряженное тело, геометрическими размерами которого в данных условиях можно пренебречь. Закон Кулона (1785 г.) устанавливает, что сила Кулона или сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов q_1 и q_2 , находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга (рис.1.2), определяется выражением

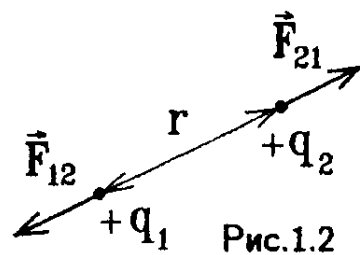


Рис.1.2

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_r$ — это единичный радиус-вектор, направленный вдоль линии, соединяющей точечные заряды, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$ м/Ф, а постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м называется электрической постоянной.

Величина электрического заряда измеряется в кулонах, причем нескомпенсированный заряд в 1 Кл — это очень большой заряд: два точечных заряда в 1 Кл каждый, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, будут отталкиваться с силой Кулона $F_{\text{кул}} = 9 \cdot 10^9$ Н !

Заметим также, что закон Кулона для двух точечных взаимодействующих зарядов и закон гравитационного притяжения Ньютона для двух материальных точек имеют аналогичный вид. Так, если поместить один точечный заряд q в начало координат (рис.1.3), то на другой точечный заряд q_0 будет действовать сила Кулона

$$\vec{F}_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^3} \vec{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{e}_r.$$

Подобным же образом запишется и сила гравитационного притяжения Ньютона для аналогично расположенных материальных точек с массами m и m_0 :

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -G \frac{mm_0}{r^3} \vec{r}.$$

Поэтому || все классические законы для электростатического и гравитационного полей одинаковы по форме. Задачи электростатики и гравитации решаются одинаковыми методами.

Однако, между электростатическим и гравитационным взаимодействиями существуют и некоторые отличия.

1) Знак массы (гравитационного заряда) всегда положителен, и гравитационная сила *притягивает* положительные массы. Электрический же заряд q может быть и положительным, и отрицательным, причем сила Кулона *отталкивает* одноименные заряды и *притягивает* разноименные.

2) Электрическое взаимодействие намного сильнее гравитационного (безразмерная константа электрического взаимодействия много больше аналогичной константы гравитационного взаимодействия). А так как наш мир электрически нейтрален, т.е. полный (положительный и отрицательный) заряд в нем равен нулю, то значительно более слабые гравитационные силы в нем становятся заметными и могут достигать огромной величины только из-за большой суммарной положительной

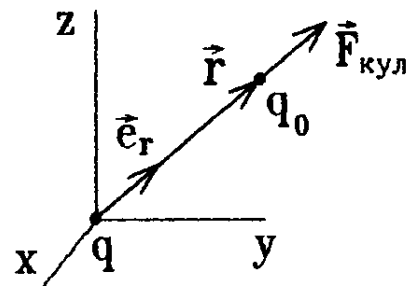


Рис.1.3.

массы всех частиц.

3) Электрический заряд нельзя уменьшать до сколь угодно малой величины. Имеется минимально возможный и *неделимый* заряд, равный или заряду электрона $|e| = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, или зарядам кварков $-|e|/3, 2|e|/3$. Но кварки объединены в элементарные частицы, заряды которых кратны заряду электрона e . Поэтому все заряды в Природе кратны заряду электрона: $q = Ne$, где N - целое. Для масс существование минимальной неделимой величины остается пока не вполне выясненной.

4) Величины массы и электрического заряда частиц могут изменяться с увеличением их энергии, но по-разному. Так, величины электрических зарядов двух взаимодействующих частиц возрастают с ростом энергии их взаимодействия (скэйлинг), но очень слабо. Этот эффект проявляется только в квантовой физике, и при изучении классических законов его можно не учитывать.

2 Принцип суперпозиции. Силовые линии электростатического поля

Электрическое поле действует только на заряженные тела, т.е. в любом случае, чтобы измерить величину электрического поля, созданного зарядом q , в него надо внести какой-либо пробный заряд q_0 (рис.1.4).

Тогда величину электрического поля можно определить по величине кулоновской силы $\vec{F}_{\text{кул}}$, с которой поле действует на пробный заряд q_0 . Но само поле заряда q не должно зависеть от величины q_0 . Поэтому электрическое поле принято характеризовать вектором напряженности $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{кул}}}{q_0}$$

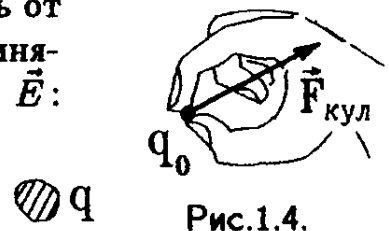


Рис.1.4.

– это векторная величина, равная силе, с которой поле действует на единичный пробный заряд.

Напряженность электростатического поля, созданного точечным зарядом q , помещенным в начало координат (рис.1.3):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Напряженность гравитационного поля, созданного точечной массой m , находящейся в начале координат:

$$\vec{E}_{\text{гр}} = -G \frac{m}{r^3} \vec{r}.$$

Если поле создается системой точечных зарядов, то напряженности полей, созданных каждым точечным зарядом q_i , складываются, и ре-

зультирующее поле в точке А (рис.1.5) выражается формулой

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$$

Это – принцип суперпозиции.

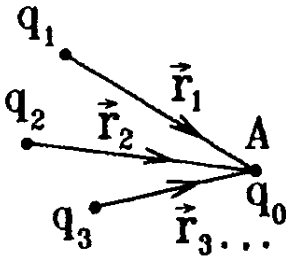


Рис.1.5.

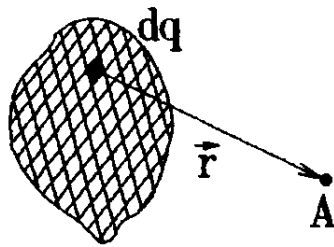


Рис.1.6.

Если заряд распределен непрерывно по некоторому телу с объемной плотностью ρ (рис.1.6), то разбиваем его на малые участки с объемом dV , которые можно считать точечными зарядами $dq = \rho dV$.

Для точечных зарядов применим закон Кулона $d\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}$, где вектор $\vec{r}$ проведен от точечного заряда dq к точке А, где измеряется поле (рис.1.6). Чтобы получить результирующее поле в точке А, надо векторно сложить напряженности, создаваемые всеми такими точечными зарядами:

$$\vec{E}_A = \int d\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV = \vec{E}_{\text{рез}}$$

Это – тоже принцип суперпозиции.

Такой способ определения напряженности результирующего поля с помощью закона Кулона, когда приходится вычислять интеграл по всему объему пространства V , заполненному зарядом, часто слишком сложен. Для примера рассмотрим только простейший случай: найдем напряженность поля заряда q , равномерно распределенного по тонкому кольцу радиуса R . Более того, поле будем искать только на оси кольца на расстоянии x от его центра О (рис.1.7). Так как расстояния $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ от каждого точечного заряда dq на кольце до точки А на оси, а также угол φ , где $\cos \varphi = x/r$, одинаковы, то

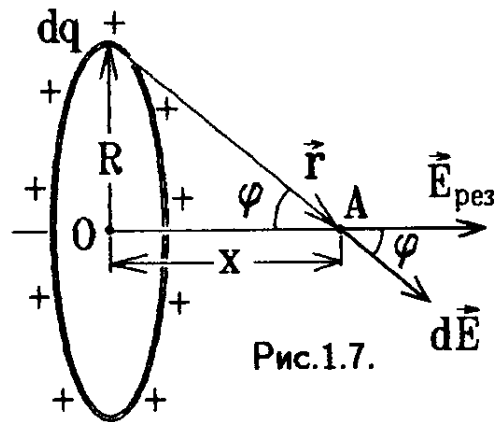


Рис.1.7.

$$E_{\text{рез}} = E_x = \int dE \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \varphi}{r^2} \int dq = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Существуют и другие, иногда более удобные, методы вычисления результирующего поля для непрерывно распределенного заряда. Но перед тем, как перейти к их описанию, заметим, что электрическое поле принято изображать с помощью силовых линий – это линии, касатель-

ные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности $\vec{E}$ (не имеющий начальной скорости свободный точечный заряд q_0 в электрическом поле всегда начинает двигаться вдоль силовой линии).

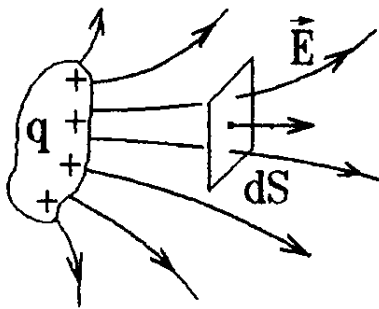


Рис.1.8.

Плотность силовых линий или число силовых линий dN , пересекающих расположенную под прямым углом площадку $dS_{\perp}$, пропорционально величине напряженности поля E в данной точке (рис.1.8):

$$dN / dS_{\perp} = E.$$

Окружим точечный заряд q сферическими поверхностями S с разными радиусами r (рис.1.9). Так как $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, где $S = 4\pi r^2$,

то число силовых линий, пересекающих каждую сферическую замкнутую поверхность:

$$N = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S = q/\epsilon_0 \text{ — постоянно.}$$

|| Следовательно, силовые линии не могут начинаться или заканчиваться в вакууме.

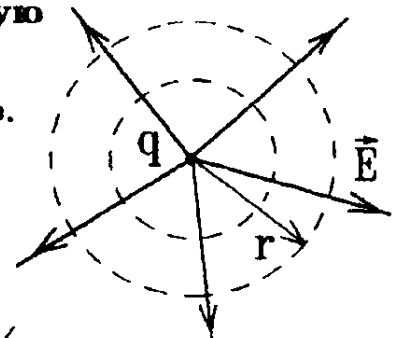


Рис.1.9.

Силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных, либо уходят в бесконечность (рис.1.10,а,б).

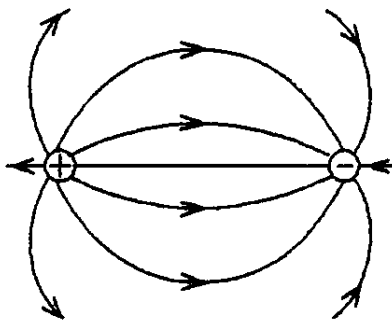


Рис.1.10,а.

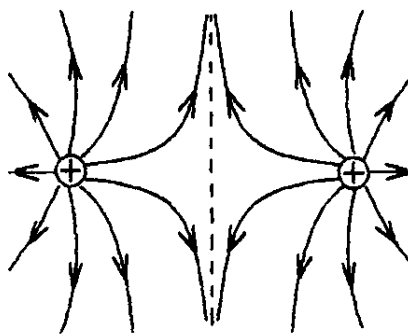


Рис.1.10,б.

3 Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электрического поля.

Площадку dS описывают нормальным к ней вектором $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали. Поток вектора $\vec{E}$ через эту площадку равен $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ — это число силовых линий электростатического поля, пересекающих площадку dS .

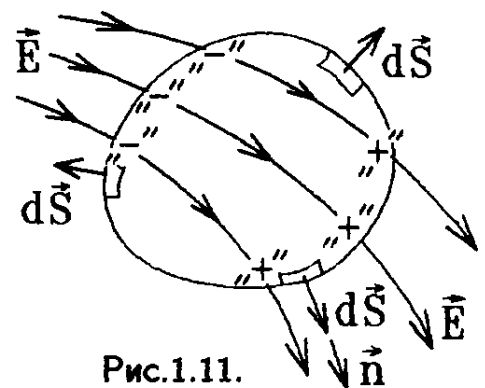


Рис.1.11.

Разбивая любую замкнутую поверхность S на элементарные площадки dS , договоримся всегда направлять вектор нормали $\vec{n}$ и вектор площадки $d\vec{S}$ из замкнутой поверхности наружу (рис.1.11). Тогда входящие в замкнутую поверхность силовые линии $\vec{E}$ создают отрицательный поток, так как $\vec{E} \cdot d\vec{S} < 0$ (они отмечены знаком "-" на рис.1.11), а выходящие из нее линии $\vec{E}$ создают положительный поток, так как $\vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$ (отмечены знаком "+" на рис.1.11).

Если внутри замкнутой поверхности S электрических зарядов нет, то все вошедшие в нее линии $\vec{E}$ должны выйти (рис.1.11), и поток вектора $\vec{E}$ через такую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

будет равен нулю.

Охватим теперь точечный заряд q сферической поверхностью радиуса r (рис.1.12), тогда

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos 0^\circ = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\oint dS}_{=4\pi r^2} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

— это число силовых линий, пересекающих замкнутую сферическую поверхность S .

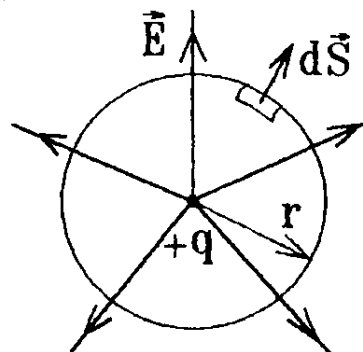


Рис.1.12

Но так как силовые линии не возникают и не исчезают в вакууме, то их число Φ_E будет одинаково для любой замкнутой поверхности S произвольной формы (рис.1.13,а,б):

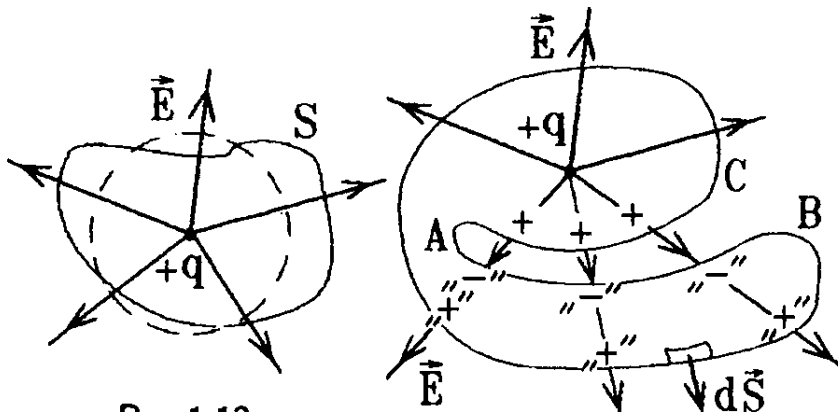


Рис.1.13,а.

Рис.1.13,б.

На участке AC (рис. 1.13,б) линии выходят из замкнутой поверхности S и берутся со знаком "+", а на участке AB они же входят со знаком "-", т.е. поток вектора напряженности не зависит от формы

замкнутой поверхности, охватывающей электрический заряд q :

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{const.}$$

Если внутри замкнутой поверхности находится система электрических зарядов, то используем принцип суперпозиции:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}_{\text{рез}} \cdot d\vec{S} = \oint \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_{E_i} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i.$$

Это и есть теорема Гаусса для электрического поля:

поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i / \epsilon_0.$$

Если заряд распределен внутри поверхности непрерывно с плотностью ρ , то $\sum_i q_i = \int dq = \int \rho dV$, и $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$.

Вопрос: изменятся ли $\vec{E}$ и Φ_E , если заряды раздвинуть так, как показано на рис.1.14 ?

Ответ: поле $\vec{E}$ изменится в точках поверхности S очень сильно, а поток Φ_E через эту поверхность не изменится ! Это же свойство есть и у гравитационного поля.

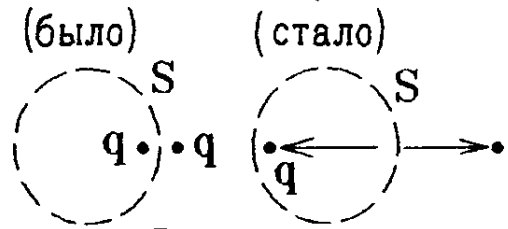


Рис.1.14

4 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей.

1. Заряженный проводник.

Свободные электроны в проводнике распределяются так, что результирующее поле внутри проводника отсутствует, т.е. $\vec{E} = 0$ (иначе электроны будут перемещаться в поле $\vec{E}$ до тех пор, пока оно не исчезнет).

Выберем любую замкнутую поверхность S внутри проводника (рис.1.15). Согласно теореме Гаусса для нее

$$\frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \oint_{\vec{E}=0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0,$$

т.е. внутри проводящей среды нескомпенсированного покоящегося заряда быть не может.

|| Свободный заряд, сообщенный проводящему телу, распределяется только по его поверхности.

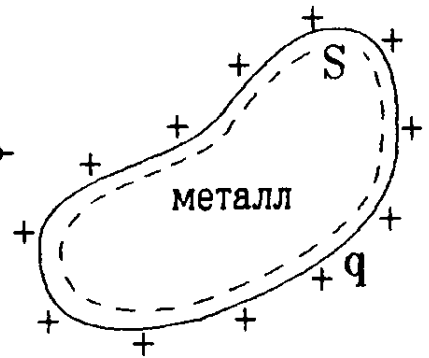


Рис.1.15

2. Заряженный шар.

Пусть заряд q равномерно распределен по объему шара радиуса R с объемной плотностью $\rho = q / \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$. Окружим шар сферической

поверхностью радиуса $r > R$ (рис.1.16). В силу симметрии распределения заряда величина $|\vec{E}|$ должна быть одинаковой в каждой точке этой поверхности S . Тогда

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \underbrace{\oint dS \cos 0^\circ}_{= 4\pi r^2} = q/\epsilon_0,$$

$$\text{или } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

С учетом направления линий поля получаем

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad \text{при } r \geq R.}$$

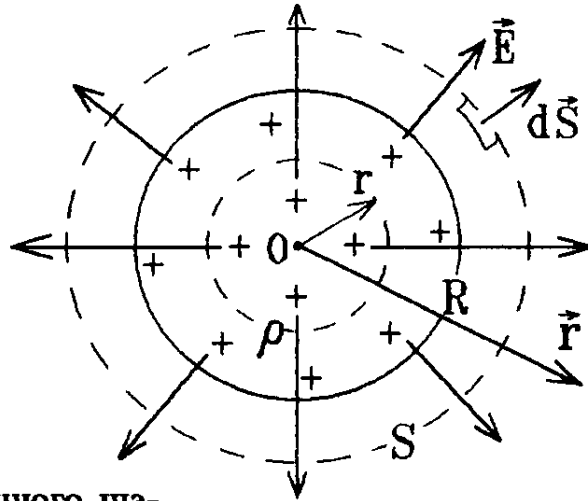


Рис.1.16

Поле вне равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда q , помещенного в центр шара.

Охватим теперь центр шара другой сферической поверхностью радиуса $r < R$ (рис.1.16). Снова $|\vec{E}| = E = \text{const}$ во всех точках этой поверхности, и, используя теорему Гаусса, находим

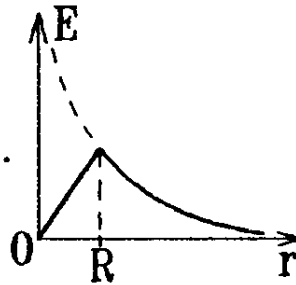


Рис.1.17

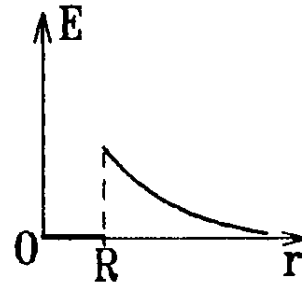


Рис.1.18

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{внутри}}/\epsilon_0 \quad \text{или} \quad E = \frac{q_{\text{внутри}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Но внутри поверхности теперь находится заряд $q_{\text{внутри}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. Поэтому внутри шара поле выражается формулой

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \quad \text{при } r \leq R.}$$

Зависимость напряженности поля равномерно заряженного шара от расстояния r до центра шара изображена на рис.1.17.

Если шар сделан из проводящего материала, то весь свободный заряд равномерно распределится по его поверхности ($q_{\text{внутри}} = 0$), и напряженность поля такого шара (или поля равномерно заряженной сферы радиуса R) будет иметь вид, показанный на рис.1.18.

3. Равномерно заряженная плоскость.

Если заряд распределен по бесконечной плоскости равномерно с поверхностной плотностью σ (это заряд, приходящийся на единицу площади), то вследствие симметрии линии $\vec{E}$ перпендикулярны плоско-

сти, как показано на рис.1.19.

Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра с площадью основания $S_{\text{осн}}$. Линии $\vec{E}$ пересекают только основания (рис.1.19), поэтому

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 2S_{\text{осн}} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\epsilon_0},$$

т.е. $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ – поле не зависит от расстояния до плоскости.

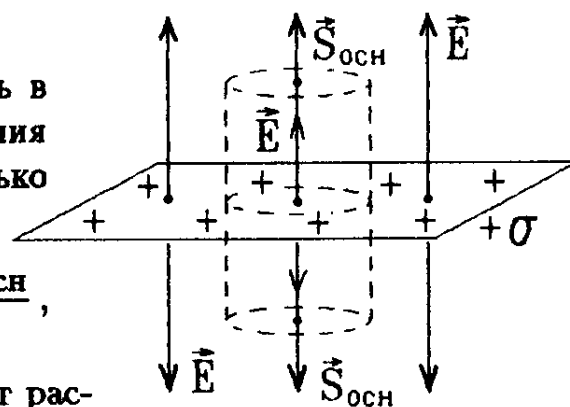


Рис.1.19

Эту формулу можно применить и для заряженной плоскости конечных размеров, и для заряженных искривленных поверхностей, но только в точках, удаленных от краев и находящихся **вблизи** поверхности (рис.1.20).

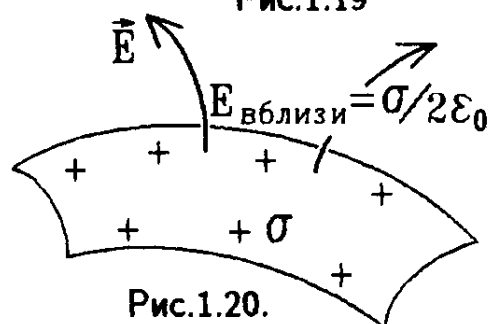


Рис.1.20.

4. Заряженный плоский конденсатор.

В таком конденсаторе разноименно заряженные с поверхностной плотностью $\sigma \approx \text{const}$ пластины находятся на малом расстоянии друг от друга, и приближенно их можно считать бесконечными.

В отрицательно заряженную плоскость линии $\vec{E}_2$ входят, а из положительно заряженной плоскости линии $\vec{E}_1$ выходят (рис.1.21). Поэтому между пластинами $E = E_1 + E_2 = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, т.е. внутри конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

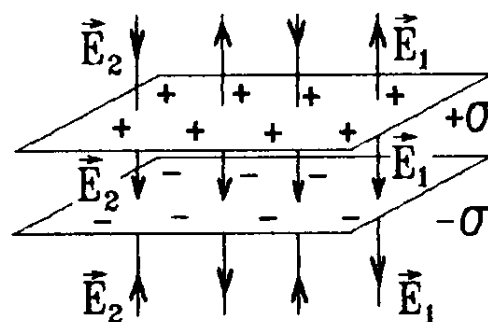


Рис.1.21.

а вне конденсатора $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ (поля положительно и отрицательно заряженных пластин конденсатора взаимно компенсируются).

5. Заряженный цилиндр (нить).

Пусть заряд распределен по бесконечному прямому цилиндру радиуса R с линейной плотностью λ (это заряд, приходящийся на единицу длины). Охватим участок цилиндра коаксиальной замкнутой цилиндрической поверхностью длины ℓ и радиуса r (рис.1.22).

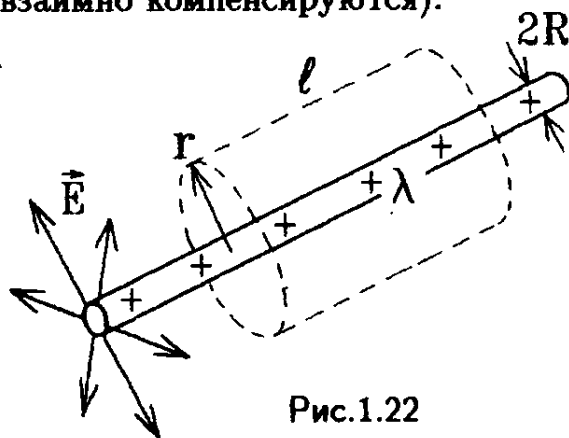


Рис.1.22

Так как в силу симметрии распределения заряда линии $\vec{E}$ должны расходиться вдоль радиальных направлений, то они будут пересекать только боковую поверхность цилиндра, причем на одинаковом удалении r от оси величина $|\vec{E}| = E = \text{const}$. Из теоремы Гаусса находим

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0}.$$

Но внутри замкнутой поверхности (рис.1.22) находится заряд $q_{\text{внутри}} = \lambda l$. Поэтому вне равномерно заряженного цилиндра (или прямой нити) поле убывает с расстоянием по закону

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

5 Теорема Гаусса в дифференциальной форме.

Дивергенция $\vec{E}$

Разделим поток любого вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S на объем ΔV , заключенный внутри этой поверхности, и будем стягивать поверхность в точку. Полученная скалярная величина называется дивергенцией вектора $\vec{A}$:

$$\text{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}.$$

Для вычисления $\text{div} \vec{A}$ в декартовых координатах возьмем элементарный объем в виде кубика со сторонами dx, dy, dz как показано на рис.1.23.

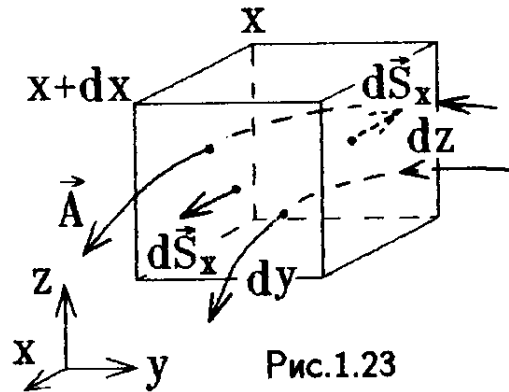


Рис.1.23

Тогда поток вектора $\vec{A}$ через две перпендикулярные к оси x площадки $dS_x = dy dz$, имеет выражение

$$\begin{aligned} & \underbrace{A_x(x+dx)dS_x}_{\text{линии } A \text{ выходят}} - \underbrace{A_x(x)dS_x}_{\text{линии } A \text{ входят}} = \\ & = \underbrace{[A_x(x+dx) - A_x(x)]}_{\frac{\partial A_x}{\partial x} dx} dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned}$$

Точно так же определяются потоки $\vec{A}$ через остальные грани (dS_y и dS_z). Поэтому суммарный поток через всю замкнутую поверхность кубика

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Сравнивая полученное выражение с определением дивергенции и учитывая, что $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ и что $dx dy dz = dV$, получаем формулу для вычисления дивергенции любого вектора $\vec{A}$:

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Разобьем теперь конечный объем V внутри замкнутой поверхности S на крошечные участки ΔV (рис.1.24) и возьмем сумму всех $\operatorname{div} \vec{A} \cdot \Delta V$ (это интеграл от функции $\operatorname{div} \vec{A}$ по объему V). Как и на рис.1.11, линии $\vec{A}$ выходят из одного участка ΔV со знаком "+" и входят в соседний участок ΔV со знаком "-", т.е. на всех внутренних границах участков ΔV потоки вектора $\vec{A}$ (число входящих и выходящих линий $\vec{A}$) будут компенсироваться, и в сумме остается только поток Φ_A по внешней поверхности S :

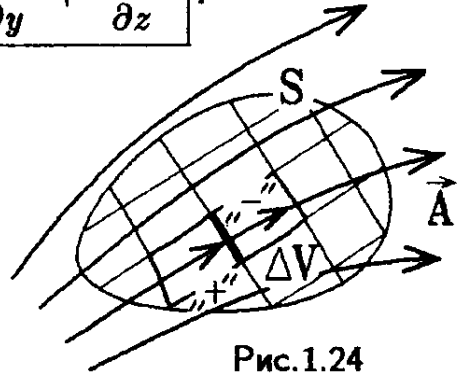


Рис.1.24

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Это теорема Остроградского:
поток любого вектора $\vec{A}$ по любой замкнутой поверхности равен интегралу от $\operatorname{div} \vec{A}$ по объему, заключенному внутри этой поверхности.

Более строгое доказательство теоремы Остроградского можно найти в курсе высшей математики, например, [10].

Применим теперь теорему Остроградского к вектору напряженности электрического поля: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV$. С другой стороны, согласно теореме Гаусса, $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$, где интеграл берется по всему объему V , охваченному замкнутой поверхностью S и заполненному зарядом с объемной плотностью ρ . Так как эти две теоремы справедливы для произвольного объема V , то из равенств интегралов следует равенство подинтегральных функций, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Это – теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме.

Заметим, что в тех точках поля, где дивергенция любого вектора $\vec{A}$ положительна ($\operatorname{div} \vec{A} > 0$), возникают линии вектора $\vec{A}$. Эти точки

называются источниками векторного поля $\vec{A}$. В точках, где $\operatorname{div} \vec{A} < 0$, линии вектора $\vec{A}$ исчезают (это – стоки поля $\vec{A}$). Например, в точках, где имеется положительный заряд, $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} > 0$, и в этих точках появляются силовые линии электрического поля. Как уже говорилось раньше, они начинаются на положительных зарядах. А в тех точках, где имеется отрицательный заряд, $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} < 0$, и силовые линии электрического поля исчезают. В точках, где заряда нет, $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ (но $\vec{E} \neq 0$), и силовые линии не могут исчезать или появляться.

В качестве примера, используя выражение для напряженности поля точечного заряда и формулу для вычисления дивергенции, легко найти, что $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ во всех точках пространства, кроме той, в которой находится сам заряд. А в точке расположения точечного заряда, так как $\Delta V \rightarrow 0$, получаем $\operatorname{div} \vec{E} = \pm\infty$ (в зависимости от знака заряда).

6 Работа сил электростатического поля. Потенциал

Кулоновская сила является центральной и, как всякая центральная сила, она консервативна.

Следовательно: 1) ее работа зависит от начального и конечного положения зарядов и не зависит от траекторий, по которым они перемещаются в конечные положения;

2) при перемещении заряда по замкнутой траектории работа действующих на него кулоновских сил равна нулю;

3) работа кулоновских сил идет на изменение потенциальной энергии системы зарядов.

Пусть, в простейшем случае, точечный заряд q_0 перемещается на расстояние $d\vec{r}$ в поле другого точечного заряда q (рис.1.3 и рис.1.25). При этом кулоновская сила совершает работу

$$dA = \vec{F}_{\text{кул}} d\vec{r} = F_{\text{кул}} \underbrace{|d\vec{r}| \cos \theta}_{dr} = F_{\text{кул}} dr.$$

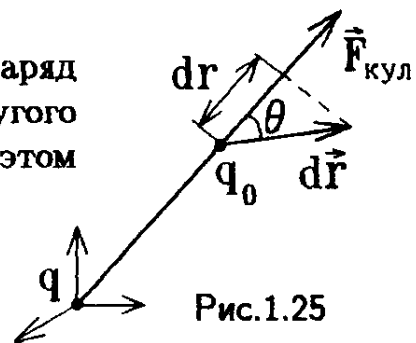


Рис.1.25

Следовательно, при изменении расстояния между зарядами от r_1 до r_2 величина работы будет

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

|| Таким образом, работа совершается только при изменении расстояния между зарядами.

По определению консервативности силы эта работа идет на изменение потенциальной энергии W взаимодействия зарядов:

$$dA_{\text{кул}} = -dW \text{ или } A_{12} = -(W_2 - W_1),$$

откуда следует, что кулоновская потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга, будет равна:

$$W_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r}$$

(Для сравнения: потенциальная энергия взаимодействия двух точечных масс имеет вид $W_{\text{грав}} = -\gamma \frac{m m_0}{r}$.)

Разделив на величину пробного заряда q_0 , получаем выражение для потенциала поля точечного заряда q , находящегося в начале координат:

$$\varphi = \frac{W_{\text{кул}}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

т.е. потенциал равен потенциальной энергии единичного точечного заряда в данной точке поля.

И потенциал, и потенциальная энергия определены с точностью до произвольной постоянной. Как и для гравитационного поля эта постоянная выбирается так, чтобы на бесконечном удалении ($r \rightarrow \infty$) $W_{\text{кул}}$ и φ были равны нулю.

Если заряд q_0 движется в поле системы точечных зарядов q_i , то

$$dA = \vec{F}_{\text{рез}} \cdot d\vec{r} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i dA_i.$$

Таким образом, работа по перемещению заряда q_0 из точки 1 в точку 2 в поле системы точечных зарядов (рис.1.26) равна алгебраической сумме работ по перемещению заряда q_0 в поле, создаваемом каждым точечным зарядом q_i :

$$A_{1 \rightarrow 2} = \sum_i A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{q_i q_0}{r_{1i}} - \frac{q_i q_0}{r_{2i}} \right),$$

где r_{1i} , r_{2i} – расстояния от точек 1 и 2 до заряда q_i .

(Для произвольно распределенного заряда $\vec{F}_{\text{кул}}$ уже не центрально, но консервативна, т.к. ее можно представить как суперпозицию центральных консервативных сил, действующих со стороны каждого точечного заряда.)

Аналогично потенциальная энергия точечного заряда q_0 и потенциал электростатического поля системы точечных зарядов равны ал-

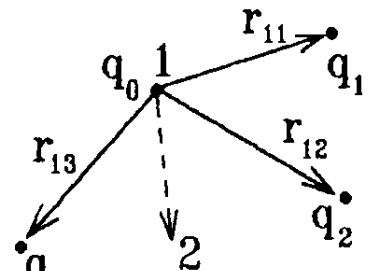


Рис.1.26

гебраической сумме энергий или потенциалов поля каждого заряда:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_0 q_i}{r_i} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i},$$

где r_i – расстояние до i -го точечного заряда q_i .

Замечание: можно доказать теорему Ирншоу: любая система зарядов не может находиться в равновесии под действием только электростатических сил между ними.

Если заряды распределены непрерывно с плотностью ρ , то разбиваем их на малые участки $dq = \rho dV$, которые можно считать точечными (рис.1.27). Тогда потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда q_0 с непрерывно распределенным по объему V зарядом выражается формулой:

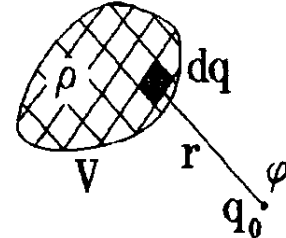


Рис.1.27

$$W = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}, \quad \text{а потенциал поля такого непрерывно распределенного заряда:} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Существенно, что потенциал и потенциальная энергия – это скалярные величины, и вычислять их значительно проще, чем векторы $\vec{F}_{\text{кул}}$ или $\vec{E}$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Заметим, например, что напряженность поля той же системы зарядов, изображенной на рис.1.27, следует определять по формуле} \end{array} \right) \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV.$$

При решении электростатических задач полезно учитывать и следующее утверждение:

точечный заряд q в точке с потенциалом φ всегда обладает потенциальной энергией $W = q\varphi$, поэтому работа по перемещению точечного заряда q в любом электростатическом поле всегда равна произведению величины заряда на разность потенциалов между точками начального и конечного положений заряда:

$$A_{12} = -(W_2 - W_1) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

В качестве единицы работы или энергии часто используют внесистемную, но очень удобную единицу электрон-вольт – это приращение кинетической энергии электрона, прошедшего разность потенциалов в 1 Вольт: $1 \text{ эВ} = e \cdot 1 \text{ В} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Вопрос: Какую работу надо совершить при перемещении заряда q_0 из точки $-\infty$ в точку $+\infty$ (рис.1.28) ?

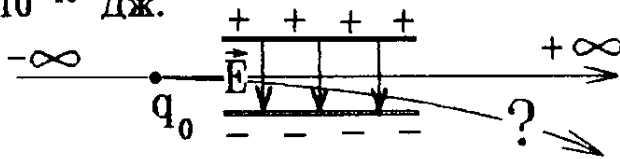


Рис.1.28

Ответ: $A = 0$, так как $A = q(\varphi_{-\infty} - \varphi_{+\infty})$ и $\varphi_{\pm\infty} = 0$.

7 Связь потенциала и напряженности

Любая консервативная сила связана с потенциальной энергией соотношением $\vec{F} = -\text{grad } W$. Разделив левую и правую часть на пробный заряд q_0 , получим соотношение между потенциалом и напряженностью:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{\nabla} \varphi = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Например, для точечного заряда (для которого $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$) имеем

$$\vec{E} = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\right) \varphi = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \text{ т.к. для центрального поля } \text{grad} \equiv \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Совокупность точек (поверхность) с одинаковым потенциалом называется экипотенциальной поверхностью.

Вектор напряженности $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ и силовые линии поля всегда перпендикулярны к экипотенциальным поверхностям, которые изображены штриховыми линиями на рис. 1.29.

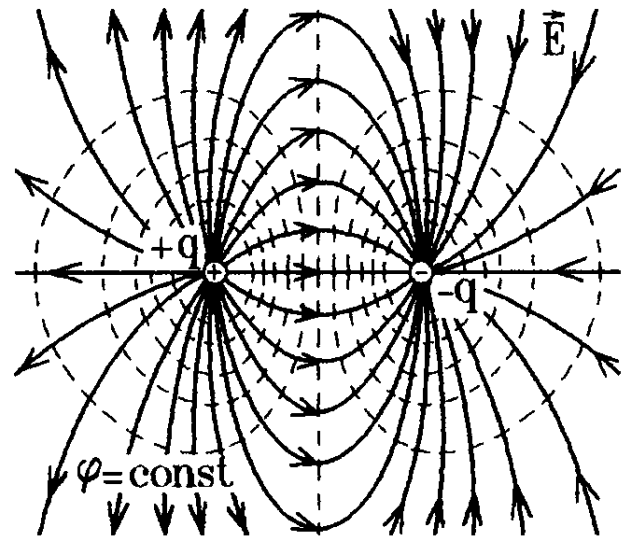


Рис.1.29

Вопрос: Совершается ли работа кулоновскими силами, если заряд движется по экипотенциальной поверхности?

Ответ: нет. $A = q \cdot \Delta\varphi = 0$, так как $\varphi = \text{const}$.

Вектор $\text{grad } \varphi$ направлен в сторону максимального возрастания потенциала; силовая линия направлена противоположно (например так, как это показано на рис.1.30). Поэтому свободные положительные заряды стремятся двигаться вдоль силовой линии в сторону уменьшения потенциала, а отрицательные – в сторону возрастания потенциала.

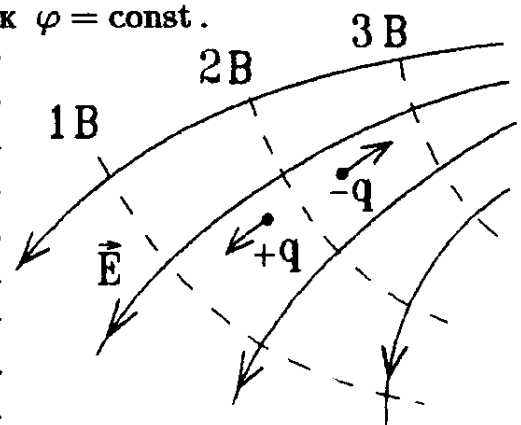


Рис.1.30

Чем гуще расположены экипотенциальные поверхности, тем больше $\text{grad } \varphi$ в данной точке поля, и тем больше электростатическая сила

$$\vec{F}_{\text{кул}} = -q \cdot \text{grad } \varphi.$$

Обратная связь потенциала и напряженности следует из определения потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \int_1^2 \vec{F}_{\text{кул}} \cdot d\vec{r}.$$

Разделив на q_0 , получим: $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$, т.е. зная потенциал

электростатического поля, всегда можно найти его напряженность и наоборот.

Замечание: как было отмечено ранее, для сложной системы зарядов проще вычислить потенциал, а затем, по известному распределению потенциала φ всегда можно определить напряженность поля $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$; зная же функцию $\vec{E}$ можно рассчитать и распределение зарядов $\rho = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$.

8 Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Величина, равная интегралу от любого вектора $\vec{A}$ по замкнутому пути l (рис.1.33):

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_l A \cdot dl \cos \theta,$$

называется циркуляцией вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру l . Она зависит от направления обхода контура (при изменении направления обхода изменяется знак циркуляции). Но для электростатического поля $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$. Поэтому

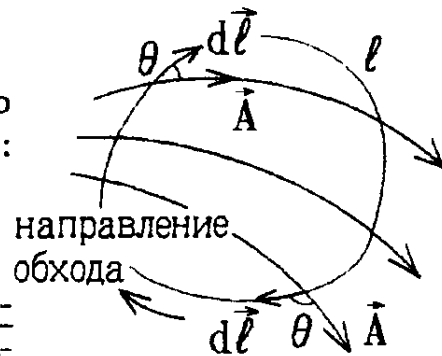


Рис.1.31

циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю:	}	$\varphi_1 - \varphi_{2 \rightarrow 1} = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
--	---	--

Это – теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$ для электростатического поля. Она эквивалентна утверждению о том, что при перемещении по замкнутому пути работа кулоновских сил равна нулю. Иначе говоря, все поля, циркуляция вектора напряженности которых по любому замкнутому контуру равна нулю, потенциальны, а силы в этих полях консервативны.

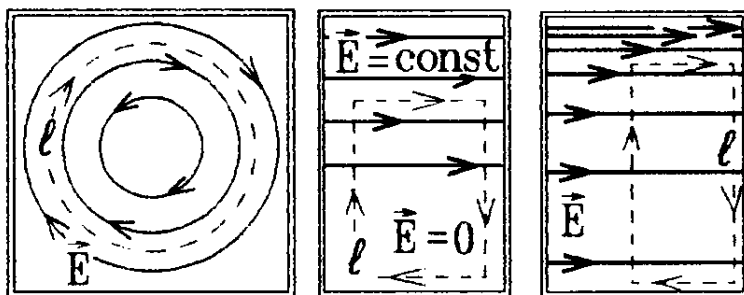


Рис.1.32

Из теоремы о циркуляции следует, что не могут существовать электростатические поля, фрагменты силовых линий которых изображены на рис. 1.32.

Действительно, циркуляция $\vec{E}$ вдоль замкнутых контуров l , показанных штриховыми линиями на этих фрагментах, положительна, что нарушает теорему о циркуляции $\vec{E}$.

Вопрос: чему равна циркуляция: а) ньютоновой силы тяготения? б) любой центральной силы?

Ответ: нулю, так как эти силы консервативны.

9 Электрический диполь

Электрическим диполем называется электронейтральная в целом система зарядов ($\sum q_i$) малого размера. Простейший электрический диполь (рис.1.33) – это два точечных, одинаковых по величине и разных по знаку заряда, расстояние l между которыми мало по сравнению с расстоянием r от диполя до точки наблюдения O . Такой диполь характеризуется электрическим моментом: $\vec{p}_e = ql\vec{l}$, направленным от отрицательного заряда к положительному.

Вычислим потенциал электростатического поля, создаваемого простейшим диполем в точке O (рис.1.34). С учетом суперпозиции полей двух точечных зарядов находим:

$$\varphi = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

Но из $\triangle AOB$ (рис.1.34) следует, что $r_1^2 = r_2^2 + l^2 - 2r_2 l \cos \theta$, где $l^2 \approx 0$ (второй порядок малости: $l \ll r_2 \approx r_1 \approx r$), т.е. $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2r l \cos \theta$. С точностью до малых высшего порядка $r_2 + r_1 \approx 2r$ и $r_2 r_1 \approx r^2$, т.е. $r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$ и

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

– это потенциал поля электрического диполя.

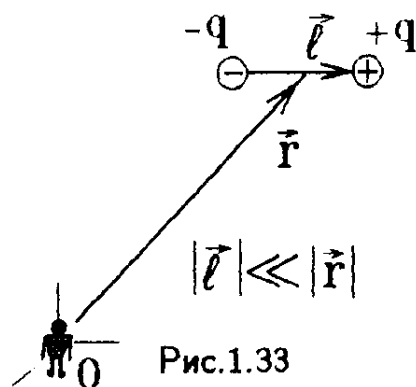


Рис.1.33

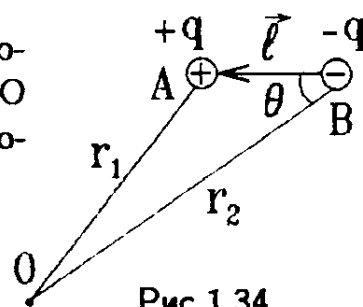


Рис.1.34

Он зависит от ориентации диполя относительно наблюдателя и убывает с расстоянием как $1/r^2$ (как напряженность поля точечного заряда!). В следующем параграфе мы покажем, что этой же формулой описывается поле любого электрического диполя. Это поле имеет вид, изображенный на рис.1.35. Сплошными линиями на этом рисунке обозначены силовые линии поля, штриховыми – эквипотенциальные поверхности. Такое поле возникает на расстояниях $r \gg l$ от диполя. Это, например, поле, создаваемое в целом электрически нейтральной молекулой; r – расстояние до центра диполя; θ – угол ориентации вектора дипольного момента $\vec{p}_e$.

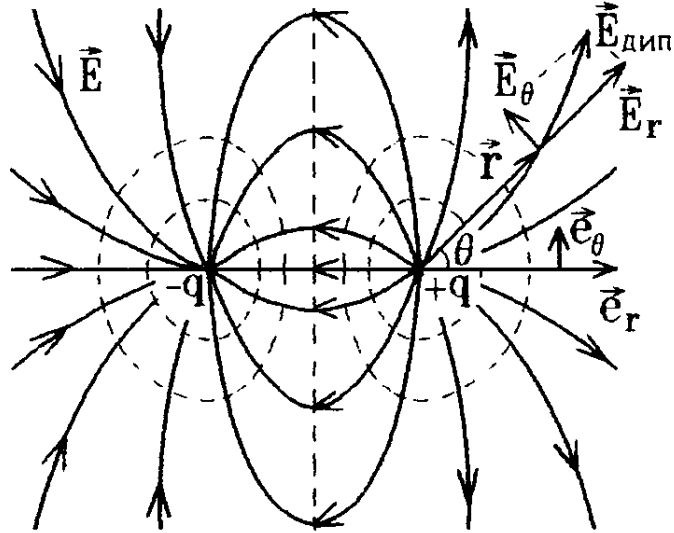


Рис.1.35

Напряженность поля, созданного диполем, получим, подставляя выражение grad в полярных координатах r, θ :

$$\vec{E}_{\text{дип}} = -\text{grad } \varphi_{\text{дип}} = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial \theta}\right),$$

т.е. $\vec{E}_{\text{дип}} = \vec{e}_r E_r + \vec{e}_\theta E_\theta$ (здесь $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ – единичные орты). Радиальная составляющая вектора напряженности E_r и перпендикулярная ей составляющая E_θ определяются, как

$$E_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial r} = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ и } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial \theta} = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Тогда $E_{\text{дип}} = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$.

Таким образом, получено выражение для напряженности поля электрического диполя:

$$E_{\text{дип}} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta},$$

которая зависит от угла ориентации диполя θ и расстояния r до диполя.

Во внешнем электрическом поле $\vec{E}_{\text{вн}}$ на диполь действует пара сил, старающаяся повернуть электрический момент диполя $\vec{p}_e$ вдоль силовой линии (рис.1.36). Момент этой пары сил имеет величину

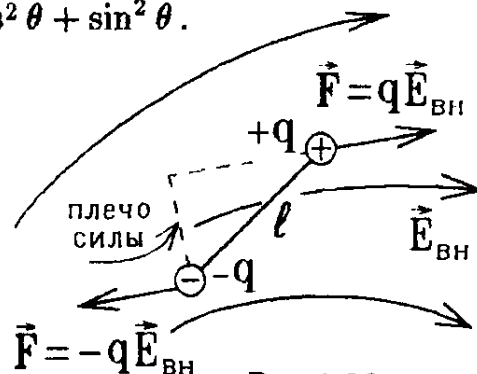


Рис.1.36

$$M = F \cdot \underbrace{l \sin \theta}_{\text{плечо}} = q E_{\text{вн}} l \sin \theta = p_e E_{\text{вн}} \sin \theta,$$

где θ – угол между векторами $\vec{p}_e$ и $\vec{E}_{\text{вн}}$.

С учетом направлений векторов, указанных на рис.1.36, вектор момента электрических сил, действующих на диполь, можно записать в виде векторного произведения:

$$\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}_{\text{вн}}].$$

Под действием этих сил свободные электрические диполи стремятся ориентироваться (повернуться) в направлении силовых линий внешнего электрического поля

Принцип суперпозиции позволяет также вычислить энергию простейшего электрического диполя во внешнем электрическом поле.

$$W_{\text{дип}} = +q \varphi_+ + (-q) \varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

где φ_+ и φ_- – потенциалы внешнего поля в точках, где находятся заряды $+q$ и $-q$.

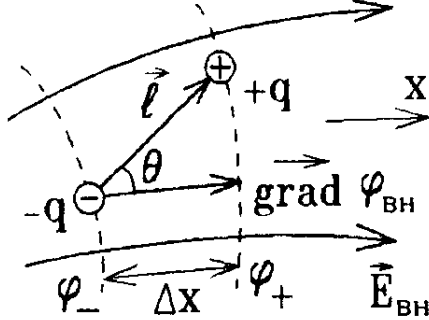


Рис.1.37

Если направить ось x вдоль силовых линий внешнего поля (рис.1.37), то

$$\begin{aligned} \varphi_+ - \varphi_- &\approx \frac{\partial \varphi_{\text{вн}}}{\partial x} \cdot \Delta x = |\text{grad } \varphi_{\text{вн}}| \cdot l \cos \varphi = \\ &= \vec{l} \cdot \text{grad } \varphi_{\text{вн}} = -\vec{l} \cdot \vec{E}_{\text{вн}}, \end{aligned}$$

следовательно, энергия диполя во внешнем электрическом поле

$$W_{\text{дип}} = -q \vec{l} \cdot \vec{E}_{\text{вн}} = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{\text{вн}}.$$

Тогда сила, действующая на диполь во внешнем электрическом поле, может быть представлена в виде

$$\vec{F} = -\text{grad } W_{\text{дип}} = \vec{\nabla}(\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{\text{вн}}).$$

Вопрос: как будет себя вести свободный диполь, помещенный в

а) однородное электрическое поле?

б) неоднородное электрическое поле?

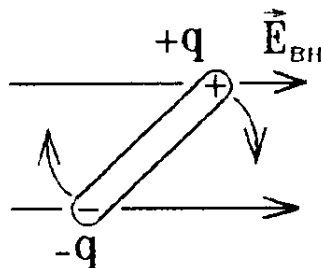


Рис.1.38

В однородном поле диполь (рис.1.38) только повернется в направлении силовых линий поля. Тогда $\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{\text{вн}} = p_e E_{\text{вн}} = \text{const}$, и поэтому результирующая сила, действующая на весь диполь, равна нулю, и диполь не будет перемещаться вдоль линий поля.

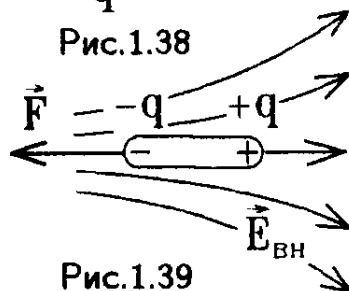


Рис.1.39

В неоднородном поле (рис.1.39) диполь повернется по полю и, так как $\vec{F} = -\text{grad}(p_e E_{\text{вн}})$, то он будет втягиваться силой $\vec{F}$ в область с большей напряженностью внешнего поля $\vec{E}_{\text{вн}}$.

10 Поле системы зарядов на большом расстоянии

Пусть задана система точечных зарядов q_i , находящихся в точках с радиус-векторами $\vec{r}_i$. Вблизи этой системы поле следует вычислять по точным формулам (хотя это и сложно), но на большом расстоянии r от центра системы (начала координат) O в точке A (рис.1.40) ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}_i|$) потенциал поля, создаваемого системой зарядов,

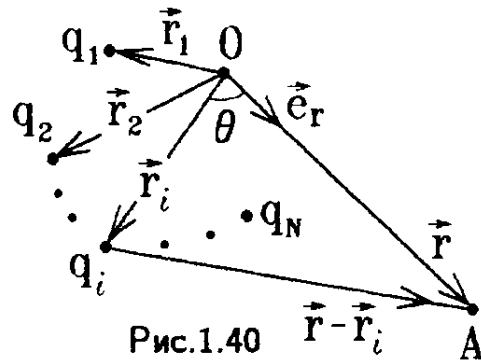


Рис.1.40

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

можно вычислить приближенно, так как

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \theta} = r \sqrt{1 - 2 \frac{r_i}{r} \cos \theta + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}, \text{ где } (r_i/r)^2 \approx 0 \text{ (как малая второго порядка).}$$

Обозначим малую величину, как $x = \frac{r_i \cos \theta}{r} = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r}$, где $\vec{e}_r$ — орт вектора $\vec{r}$, и разложим потенциал в ряд Тейлора по этой малой величине x . Так как

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r \sqrt{1 - 2x}} = \frac{1}{r} (1 - 2x)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2}(-2x) + \frac{3}{8}(-2x)^2 - \frac{5}{16}(-2x)^3 + \dots \right] \approx \frac{1}{r} \left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \dots \right), \text{ то}$$

$$\varphi(r) \equiv \sum_i \varphi_i \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \sum_i q_i \left[1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r} \right)^2 + \dots \right].$$

Проанализируем полученное выражение.

1. Если алгебраическая сумма зарядов не равна нулю: $\sum_i q_i = q \neq 0$, то на большом удалении можно оставить только первое слагаемое, пропорциональное $1/r$ (остальные малы):

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_i q_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{поле системы зарядов приближенно совпадает с полем точечного заряда } \sum_i q_i, \text{ помещенного в центр системы (размерами системы можно пренебречь).} \end{array} \right.$$

2. Часто встречаются электронейтральные системы, например, молекулы. Для них $\sum_i q_i = 0$, и поле определяется вторым слагаемым:

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{e}_r.$$

Для простейшей электронейтральной системы из двух зарядов (рис.1.41) имеем

$$\sum_{i=1}^2 q_i \vec{r}_i = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q\vec{l} = \vec{p}_e.$$

По аналогии $\boxed{\sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p}_e}$ — это дипольный электрический момент произвольной системы зарядов.

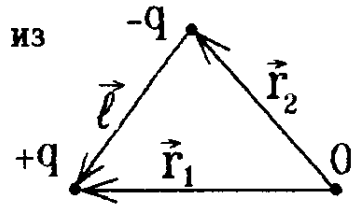


Рис.1.41

Выражения энергии или момента сил для такого произвольного диполя во внешнем электрическом поле совпадают с теми, которые были получены для простейшего электрического диполя.

Второе слагаемое в разложении потенциала системы зарядов в ряд представляет собою потенциал поля диполя:

$$\boxed{\varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e \cos \theta}{r^2}}.$$

3. Может встретиться система, у которой и дипольный электрический момент тоже равен нулю:

$$\begin{cases} \sum_i q_i = 0, \\ \sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p}_e = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Такая система называется} \\ \text{квадрупольем (в простей-} \\ \text{шем случае она имеет вид,} \\ \text{изображенный на рис.1.42)} \end{array}$$

и создает на большом удалении еще более слабое поле:

$$\boxed{\varphi_3(r) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0 r^3} \sum_i q_i (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r)^2 \sim \frac{1}{r^3}}.$$

Система, у которой поле квадруполя равно нулю, еще более симметрична: Это — октуполь (рис.1.43). Для него:

$$\varphi(r) \simeq \varphi_4(r) \simeq \frac{1}{r^4}.$$

В принципе, можно рассмотреть и еще более сложные системы зарядов.

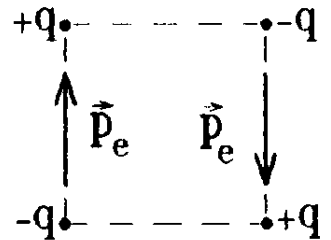


Рис.1.42

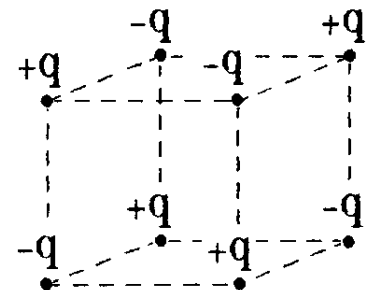


Рис.1.43

Вывод:

даже электронейтральная система создает электрическое поле. На большом удалении от системы оно зависит от симметрии распределения заряда и может быть представлено либо полем точечного заряда (если $\sum_i q_i \neq 0$), либо полем электрического диполя (если $\sum_i q_i = 0$, $\sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p}_e \neq 0$), либо полем квадруполя (если $\sum_i q_i = 0$ и $\vec{p}_e = 0$), и т.п. Зная $\varphi(r)$, можно определить и $\vec{E}(r) = -\text{grad } \varphi(r)$.

11 Уравнения Пуассона и Лапласа

Если заряд распределен в пространстве непрерывно, но не симметрично, что не позволяет применить для вычисления напряженности поля теорему Гаусса, то обычно используют следующий метод.

Заменим в теореме Гаусса в дифференциальной форме напряженность электрического поля через $-\text{grad } \varphi$. При этом получим уравнение для определения потенциала поля φ по заданному распределению плотности заряда ρ в пространстве:

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div}(\text{grad } \varphi) = \rho/\epsilon_0.$$

Теперь преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } \varphi) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla}_x (\vec{\nabla} \varphi)_x + \vec{\nabla}_y (\vec{\nabla} \varphi)_y + \vec{\nabla}_z (\vec{\nabla} \varphi)_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \vec{\nabla}^2 \varphi. \end{aligned}$$

Оператор $\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$ называется лапласианом. В декартовых координатах он равен сумме вторых частных производных по координатам.

Тогда уравнение для φ принимает вид

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка называется уравнением Пуассона; если $\rho(x, y, z)$ известно, то $\varphi(x, y, z)$ можно найти, решая его. Подобные задачи в математике называются краевыми: для решения дифференциального уравнения помимо распределения заряда $\rho(x, y, z)$ следует задать величину потенциала φ на границе области интегрирования. В качестве такого граничного условия для потенциала можно использовать условие $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$.

В тех областях, где электрический заряд отсутствует, т.е. $\rho = 0$ уравнение принимает вид

$$\Delta \varphi = 0$$

и называется уравнением Лапласа.

Решением уравнения Пуассона является выражение, уже обсуждавшееся в § 6 этой главы, основанное на принципе суперпозиции:

$$\varphi(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0 r} dV'.$$

Напряженность поля затем определяется по формуле $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$.

Глава 2.

Проводник в электрическом поле

1 Проводник в вакууме

В параграфе 4 главы 1 было показано, что заряд q распределяется только по поверхности проводника (следствие теоремы Гаусса) с некоторой поверхностной плотностью σ , где $\oint \sigma dS = q$. А так как внутри проводника

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi_{\text{пров}} = 0, \text{ то}$$

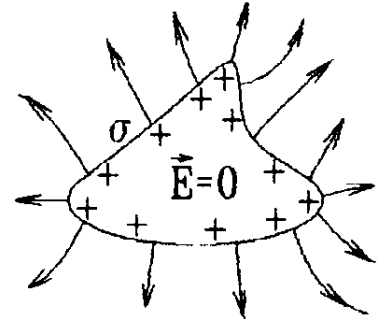


Рис.2.1

в любой точке однородного проводника его потенциал одинаков: $\varphi_{\text{пров}} = \text{const}$, т.е. поверхность проводника является эквипотенциальной.

Замечание: на границе двух разных проводников может возникать скачок потенциала.

Но линии $\vec{E}$ нормальны к эквипотенциальным поверхностям, поэтому

силовые линии электростатического поля всегда перпендикулярны к поверхности заряженного проводника (как бы ни был распределен на нем заряд σ) (рис.2.1).

Поле $\vec{E}$ **вблизи** поверхности проводника можно определить из теоремы Гаусса, выбирая замкнутую поверхность в виде цилиндра с основанием S (вектор $\vec{S}$ перпендикулярен поверхности проводника) и с очень малой высотой, эта замкнутая поверхность охватывает участок поверхности проводника с зарядом σS (рис.2.2). Линии $\vec{E}$ пересекают только верхнее основание, поэтому $\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = \sigma S / \epsilon_0$,

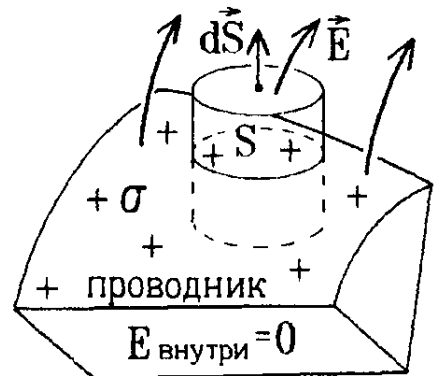


Рис.2.2

т.е. вблизи проводника в вакууме $E = \sigma / \epsilon_0$.

Это поле определяется не только зарядом σ в данном месте проводника. Дело в том, что заряд σ на участке поверхности создает поле $\vec{E}_1$ (вблизи поверхности это поле E_1 совпадает с полем бесконечной плоскости, заряженной с плотностью σ : $E_1 = \sigma / 2\epsilon_0$).

А остальной заряд на всей остальной поверхности проводника (рис.2.3) создает в этой же точке поле $\vec{E}_2$. Внутри проводника эти поля компенсируются: $E_1 - E_2 = 0$, а вне проводника $E = E_1 + E_2 = 2E_1 = \sigma/\epsilon_0$. Т.е. половина напряженности поля вблизи проводника создается поверхностным зарядом σ в данном месте проводника, а половина – всем остальным зарядом проводника.

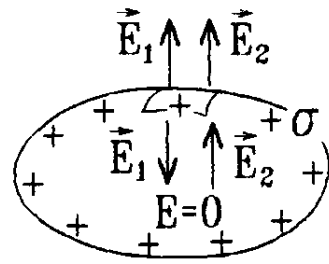


Рис.2.3

Но тогда весь остальной заряд проводника действует на участок заряда σdS с кулоновской силой:

$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} dS = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S}.$$

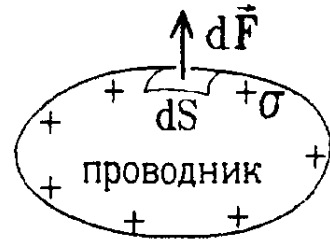


Рис.2.4

Эта сила нормальна к поверхности и старается растянуть поверхность заряженного проводника (рис.2.4). Конечно, суммарная сила, действующая на весь заряженный проводник, обращается в нуль:

$$\vec{F} = \oint_S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S} = 0 \quad (\text{иначе заряженный проводник начнет самопроизвольно двигаться в вакууме}).$$

Если форма проводника не симметрична, то заряд распределится по поверхности проводника неравномерно: $\sigma \neq \text{const}$ (рис.2.5). Действительно, на большом удалении поле заряженного проводника (системы зарядов) совпадает с полем точечного заряда,

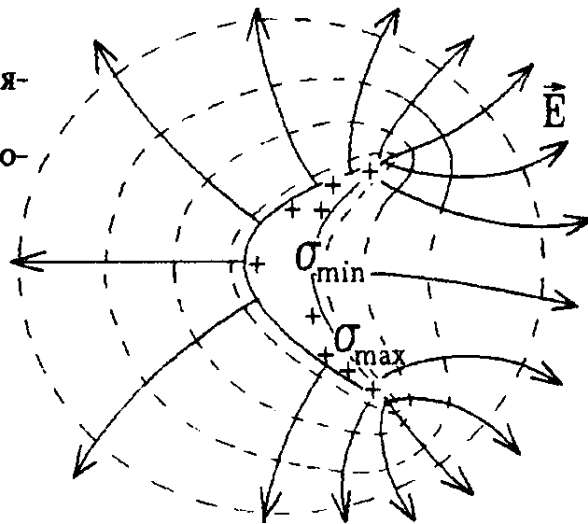


Рис.2.5

имеющего сферические эквипотенциальные поверхности. Вблизи же проводника эквипотенциальные поверхности совпадут с его поверхностью, т.е. вблизи выступов эквипотенциальные поверхности сгущаются, и $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ увеличивается. Но $E = \sigma/\epsilon_0$, поэтому

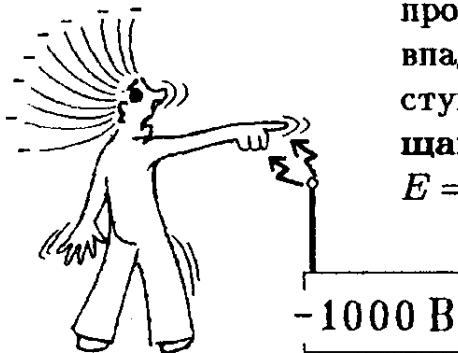


Рис.2.6

плотность зарядов σ на поверхности проводника будет максимальна на выступах и минимальна на впадинах.

Пример: статические электрические заряды стекают на конец каждого волоса (рис.2.6).

Не следует приближаться к выступающим (острым) концам заряженного проводника. Из-за большого электрического поля вблизи этих мест легко происходит электрический пробой и велика опасность поражения электрической искрой.

2 Явление электрической индукции. Экранировка электрического поля

При внесении проводника во внешнее электрическое поле (рис.2.7,а) свободные заряды в нем начнут перераспределяться и движутся до тех пор, пока созданное ими поле не скомпенсирует внешнее поле внутри проводника (рис.2.7,б).

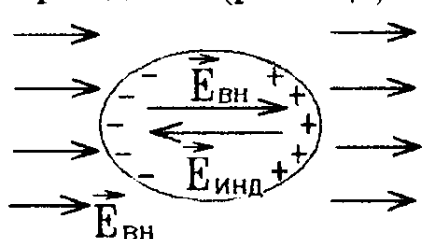


Рис.2.7а

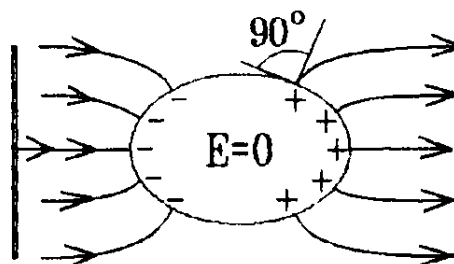


Рис.2.7б

Такое явление называется электрической индукцией, а появившиеся на поверхности проводника заряды – индуцированными зарядами.

Поле, создаваемое индуцированными зарядами, складывается с внешним полем, и силовые линии вне проводника искривляются (рис.2.7б).

Пример: между двумя заряженными пластинами помещают кусок металла (рис. 2.8,а). Картина силовых линий изменится при этом так, как показано на рис.2.8,б. Эквипотенциальные поверхности, изображенные на нем штриховыми линиями, ортогональны к силовым линиям.

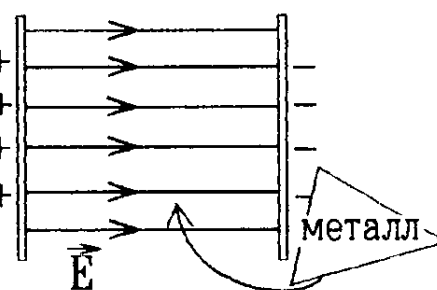


Рис.2.8,а

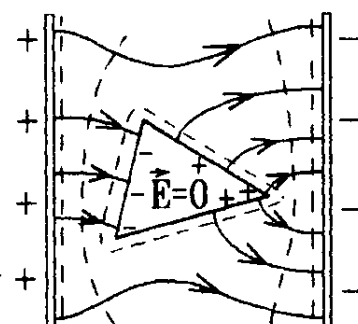


Рис.2.8,б

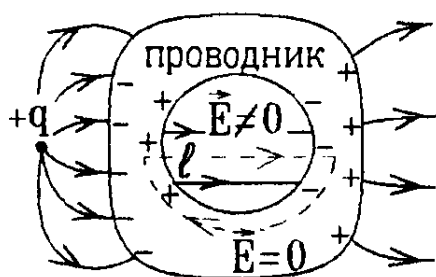


Рис.2.9,а

Вопрос: если во внешнее поле поместить проводник с полостью внутри, то будут ли индуцироваться заряды на поверхности внутренней полости (рис.2.9,а) ?

Ответ: нет! Иначе, выбрав замкнутый контур, проходящий через полость и толщину проводника (как показано на рис.2.9,а штриховой линией), получим:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{\text{полости}} \cdot l_{\text{полости}} \neq 0,$$

что противоречит теореме о циркуляции для электростатического поля.

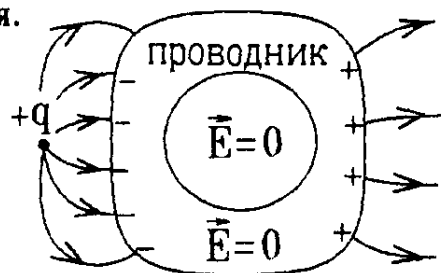


Рис.2.9,б

Внешние заряды не создают поля внутри пространства, окруженного слоем проводника (рис.2.9б)

(Как видим, такие теоремы, как теорема Гаусса или теорема о циркуляции, позволяют очень просто ответить на казалось бы сложные вопросы).

Вопрос: появится ли поле между двумя конечными металлическими пластинами, показанными на рис.2.10 ?

Ответ: да, если пластины не соединены проводником; нет, если они замкнуты проводником.

Если заряд q находится внутри полости в проводнике, то он индуцирует заряды на внутренней и внешней поверхности проводника и создает поле вне проводника (рис.2.11).

Вопрос: будем передвигать заряд внутри полости. Изменится ли распределение индуцированных зарядов на внешней поверхности проводника (рис.2.12) ?

Ответ: нет, не изменится. Силовые линии электростатического поля внутри полости **полностью** оканчиваются на индуцированном заряде $\sigma_{\text{внутр}}$.

$$\oint_{S_{\text{внутр}}} \sigma_{\text{внутр}} dS = -q; \quad \oint_{S_{\text{внеш}}} \sigma_{\text{внеш}} dS = q.$$

Индуцированный заряд $\sigma_{\text{внешн}}$ всегда распределен на внешней поверхности проводника так, как если бы он был помещен на сплошной проводник (распределение $\sigma_{\text{внешн}}$ зависит только от формы внешней поверхности проводника и полей вне его).

Если поверхность проводника является сфера радиуса R . Поэтому поле, создаваемое индуцированным зарядом вне проводника, одинаково при любом положении заряда q внутри полости и совпадает с полем шара, заряженного равномерно с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{внешн}} = q/(4\pi R^2)$.

металл $\bullet +q$

металл $\bullet -q$
Рис.2.10

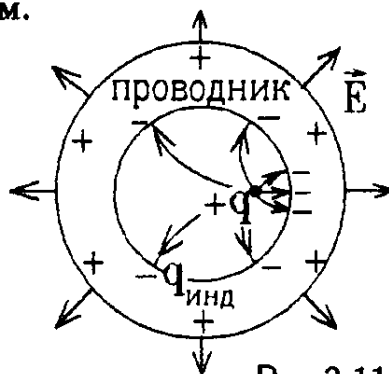


Рис.2.11

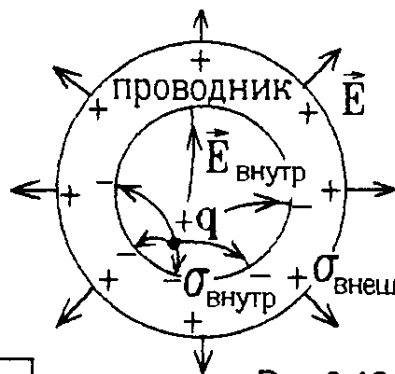


Рис.2.12

В нашем примере (рис.2.11 и 2.12) посторонних зарядов вне проводника нет, а внешней поверхно-

Вывод: замкнутая проводящая оболочка всегда разделяет пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. И никакое перераспределение зарядов (изменение электрического поля) в одной области не влияет на поле в другой области. Это свойство проводников называется экранировкой. Но справедливо оно только для электростатических полей. (Магнитное поле может проникать через слой проводника и изменять движение зарядов).

Пример на рис.2.11 и 2.12 позволяет сделать еще один очень важный для практики вывод.

Окружив заряженное тело замкнутым проводящим экраном, мы не устраним электрическое поле вне экрана. Чтобы устранить его, надо обязательно заземлить экран (рис.2.13). Тогда заряд, индуцированный на внешней поверхности экранирующего проводника, стекает на землю, в результате чего $\vec{E}_{\text{вне}} = 0$.

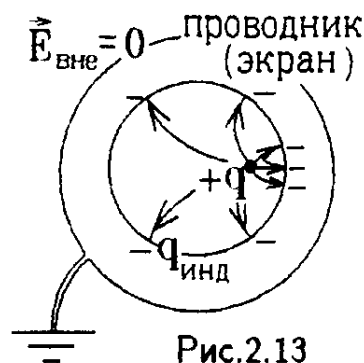


Рис.2.13

Рассмотрим в качестве экранирующего проводника тонкий плоский бесконечный проводящий слой (рис.2.14). Он разделяет пространство на две электрически не зависящие друг от друга области. Поднесем сверху к слою заряд $+q$. Вследствие явления электрической индукции на верхней поверхности слоя образуется индуцированный заряд $-\sigma_{\text{инд}}$. На нижней поверхности проводящего слоя также должен появиться индуцированный заряд $+\sigma_{\text{инд}}$, но он распределяется по плоской поверхности симметрично с плотностью $+\sigma_{\text{нижн}} = +q_{\text{инд}} / \underbrace{S}_{=\infty} = 0$ (слой бесконечен!). Поэтому по другую сторону

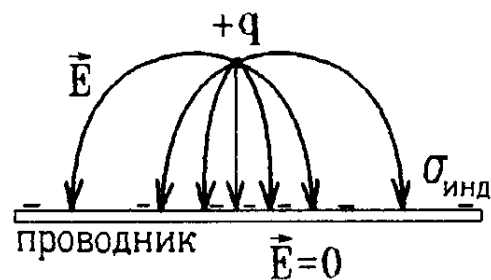


Рис.2.14

от бесконечного проводящего слоя поле не возникает !

Глава 3.

Электрическое поле в диэлектриках

1 Поляризация диэлектриков

Идеальная диэлектрическая среда не содержит свободных зарядов. Ее молекулы в целом нейтральны.

Если молекулы диэлектрика несимметричны или полярны (как, например, молекулы NaCl), то они обладают дипольным электрическим моментом $\vec{p}_e$. При этом электрические моменты соседних молекул разупорядочены, направлены хаотично и в сумме дают ноль (рис.3.1).

При помещении диэлектрика во внешнее поле с напряженностью $\vec{E}$ электростатические силы стремятся развернуть диполи по направлению $\vec{E}$, приводя их в состояние с минимальной энергией $W_{\min} = -p_e E$. Но в таком состоянии энтропия упорядоченной системы молекул была бы минимальной.

Поэтому энтропийные силы теплового движения, наоборот, стремятся разориентировать дипольные моменты. В результате дипольные моменты молекул только частично ориентируются по полю (рис.3.2).

Возьмем векторную сумму всех дипольных моментов молекул в достаточно малом объеме среды ΔV и разделим на этот объем:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_e}{\Delta V}.$$

Полученный вектор $\vec{P}$ называется вектором поляризованности диэлектрика.

Чем сильнее внешнее поле $\vec{E}$, тем сильнее должна быть ориентация дипольных моментов молекул, то есть величина $\vec{P}$ пропорциональна величине $\vec{E}$: $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$.

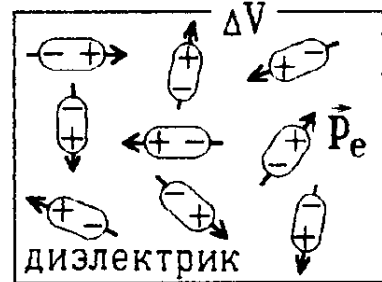


Рис.3.1

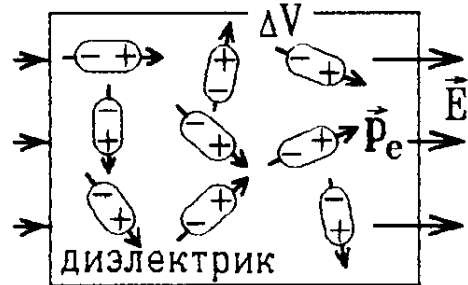


Рис.3.2

Константу пропорциональности ϵ называют диэлектрической восприимчивостью среды. Она безразмерна.

Если же молекулы диэлектрической среды симметричны или неполярны (например, O_2), то в отсутствие внешнего электрического поля их дипольный момент равен нулю: $\vec{p}_e = 0$. Но во внешнем электрическом поле центры положительного и отрицательного заряда такой молекулы смещаются, и у симметричных молекул также появляются дипольные моменты $\vec{p}_e$ (рис.3.3). Причем, чем сильнее внешнее поле, тем больше смещаются заряды и тем больше величина $\vec{p}_e = q\vec{l}$, следовательно, формула $\vec{P} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ по-прежнему справедлива.

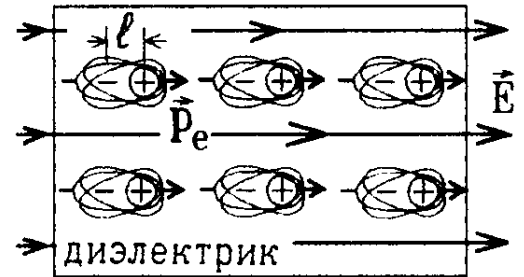


Рис.3.3

Замечание: выражение $\vec{P} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ справедливо только для изотропной диэлектрической среды. В случае неизотропной среды степень ориентации молекул по разным направлениям различна, вследствие чего постоянная ϵ должна зависеть от направления в среде. Такая анизотропная среда характеризуется тензором диэлектрической восприимчивости $||\epsilon||$ и поэтому

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в общем случае вектор $\vec{P}$ не параллелен вектору $\vec{E}$. Но в любой точке среды существуют три выделенных взаимно перпендикулярных оси (главные оси поляризации), в которых тензор $||\epsilon||$ диагонален:

$$||\epsilon|| = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Электрические заряды, создающие внешнее поле $\vec{E}$, называются сторонними (это могут быть, например, свободные заряды). Но во внешнем поле первоначально электронейтральная среда поляризуется – заряды молекул в ней разделяются. Однако, эти заряды связаны с молекулами и не могут передвигаться свободно. Их называют связанными и в отличие от сторонних отмечают штрихом: q' . Разделение связанных зарядов в молекулах под действием внешнего электрического поля называется поляризацией диэлектрика.

По принципу суперпозиции суммарное поле $\vec{E}$ в каждой точке ди-

электрика создается как свободными зарядами q , так и связанными зарядами q' :

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{q'}.$$

В вакууме молекул нет, $\sum \vec{p}_e = 0$, т.е. $\vec{P}_{\text{вакуума}} = 0$ и $\epsilon_{\text{вакуума}} = 0$.

2 Электрическое поле связанных зарядов

Охватим часть диэлектрика замкнутой поверхностью S (рис.3.4). Если приложить внешнее поле $\vec{E}$, то положительные связанные заряды молекул с объемной плотностью $+\rho'_M$ сдвинутся по полю на расстояние $\vec{l}_+$, а отрицательные, с плотностью $-\rho'_M$, сдвинутся против поля на $\vec{l}_-$ (рис.3.5).

В итоге через площадку $d\vec{S}$ в направлении поля переместится положительный заряд $+\rho'_M \vec{l}_+ d\vec{S}$, а против поля — отрицательный заряд $-\rho'_M \vec{l}_- d\vec{S}$, (здесь $\vec{l}_+ d\vec{S} = \vec{l}_- d\vec{S} = dV$ — элементарный объем).

Тогда полный заряд, пересекающий поверхность S (он равен полному связанному заряду, вытекающему из замкнутой поверхности S при поляризации диэлектрика) будет

$\oint (\rho'_M \vec{l}_+ d\vec{S} - \rho'_M \vec{l}_- d\vec{S}) = \oint \rho'_M \vec{l} d\vec{S}$, так как $\vec{l}_+ - \vec{l}_- = \vec{l}$ — это вектор смещения положительного связанного заряда молекулы относительно отрицательного.

Следовательно, внутри замкнутой поверхности останется нескомпенсированный связанный заряд $q' = - \oint \rho'_M \vec{l} d\vec{S}$.

(Если и внешнее поле, и диэлектрик однородны, а замкнутая поверхность полностью проходит внутри диэлектрика, то вытекающий из поверхности результирующий связанный заряд равен нулю: какой заряд вытекает из поверхности, такой же и втекает в нее).

Заметим теперь, что суммарный дипольный момент всех молекул в объеме ΔV выражается формулой

$$\sum \vec{p}_e = \sum q'_M \vec{l} = \rho'_M \Delta V \vec{l},$$

где q'_M — связанный заряд одной молекулы, а $\rho'_M \Delta V$ — суммарный связанный заряд всех молекул в объеме ΔV (рис.3.6). Тогда из определе-



Рис.3.4

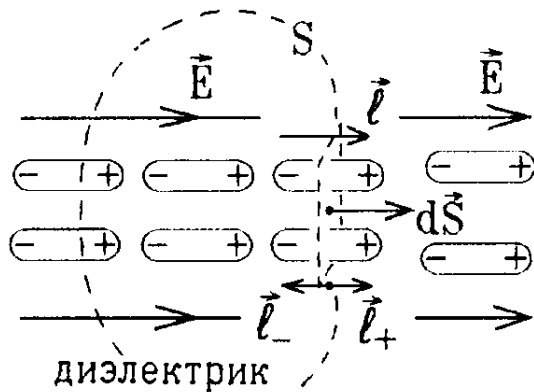


Рис.3.5

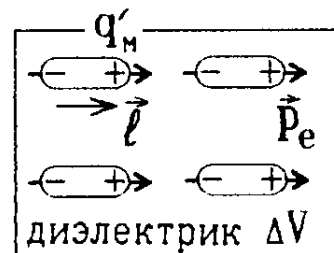


Рис.3.6

ния вектора поляризованности следует, что $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_e}{\Delta V} = \rho'_m \vec{l}$.

Итак, получена теорема Гаусса для вектора поляризованности $\vec{P}$:

поток вектора поляризованности $\vec{P}$ через любую замкнутую поверхность S равен суммарному связанному заряду внутри этой поверхности со знаком минус:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = - \sum q' = - \int_V \rho' dV,$$

где V – объем внутри поверхности S .

Используя теорему Остроградского: $\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV$, находим

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho',$$

где ρ' – плотность нескомпенсированного связанного заряда.

Отсюда следует, что линии вектора $\vec{P}$ начинаются на отрицательных и заканчиваются на положительных связанных зарядах.

Определим теперь плотность связанного заряда ρ' в диэлектрике. Для этого подставим формулу $\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ в полученное выражение для $\operatorname{div} \vec{P}$:

$$\operatorname{div} \vec{P} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = (\vec{\nabla} \epsilon) \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\rho'.$$

Учитывая, что $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho'}{\epsilon_0}$, так как поле $\vec{E}$ создается и связанными, и сторонними зарядами, имеющими плотность ρ , и что $(\vec{\nabla} \epsilon) \equiv \operatorname{grad} \epsilon$, находим

$$\epsilon_0 \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon + \epsilon \rho = -\rho'(1 + \epsilon) \quad \text{или} \quad \rho' = -\frac{\epsilon_0 \vec{E}}{\epsilon + 1} \operatorname{grad} \epsilon - \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} \rho.$$

Вывод: объемные связанные заряды с плотностью ρ' могут возникать только в тех точках, где диэлектрик неоднороден (то есть $\operatorname{grad} \epsilon \neq 0$) или где имеются свободные (сторонние) заряды с плотностью $\rho \neq 0$.

Действительно, в неоднородном диэлектрике концентрация молекул непостоянна. На рис.3.7 изображен случай, когда линии $\vec{E}$ внешнего поля направлены вдоль градиента концентрации молекул, или вдоль вектора $\operatorname{grad} \epsilon$. В этом случае внутри любой замкнутой поверхности, отмеченной штриховой линией на рис.3.7, окажется больше отрицательных связанных зарядов молекул, чем положительных, т.е. $\rho' < 0$.

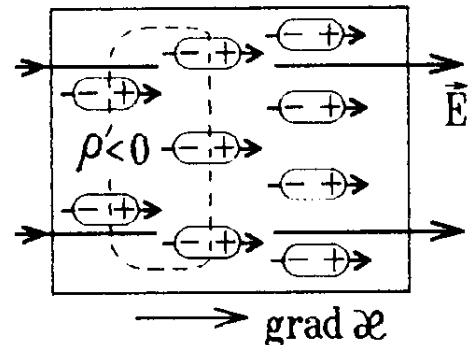


Рис.3.7

При изменении направления $\vec{E}$ на обратное плотность связанного заряда также изменит знак, и будет $\rho' > 0$).

Если же в диэлектрике имеются сторонние заряды (например, свободные электроны), то они поляризуют близлежащие молекулы. Тогда в малом объеме (штриховая линия на рис.3.8) вблизи стороннего заряда создается связанный заряд противоположного знака.

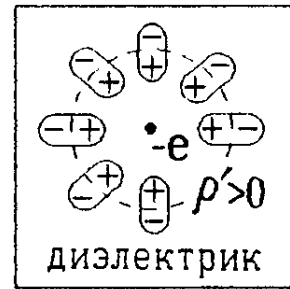


Рис.3.8

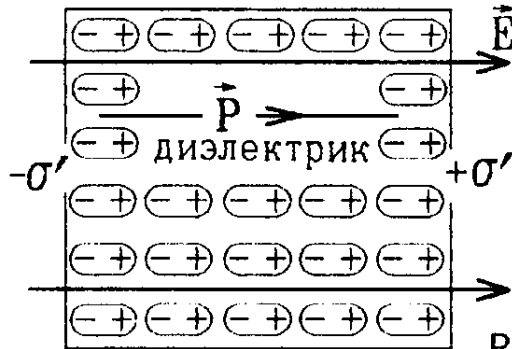


Рис.3.9

В однородном идеальном диэлектрике, в котором нет свободных зарядов, объемный связанный заряд отсутствует ($\rho' = 0$) и имеется только поверхностный связанный заряд σ' (рис.3.9).

Выберем на границе поляризованного диэлектрика и вакуума (рис.3.10) замкнутую поверхность в виде косоугольного цилиндра с основанием S , параллельным плоскости раздела сред, и боковыми направляющими, параллельными линиям вектора $\vec{P}$ (или $\vec{E}$). Эта поверхность охватывает участок границы со связанным зарядом $q' = \sigma' S$. Тогда по теореме Гаусса для вектора $\vec{P}$:

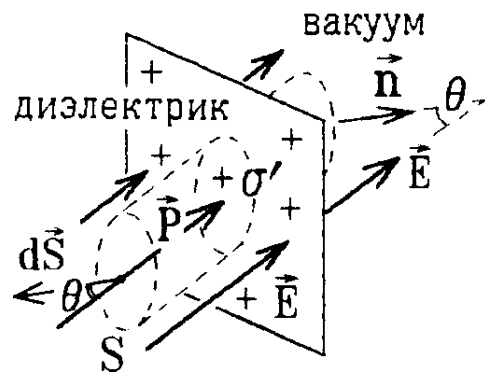


Рис.3.10

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot \vec{S} = P S \cos(\pi - \theta) = -P S \cos \theta = -q' = -\sigma' S$$

(θ – это угол между направлением поля $\vec{E}$ и нормалью $\vec{n}$ к границе раздела сред). Таким образом,

на границе диэлектрика и вакуума поверхностная плотность связанного заряда σ' равна проекции вектора $\vec{P}$ на направление внешней нормали $\vec{n}$ к границе:

$$\sigma' = P \cos \theta = P_n$$

или

$$\sigma' = \epsilon \epsilon_0 E_n.$$

Аналогично, с помощью теоремы Гаусса для вектора $\vec{P}$, можно показать, что на границе раздела двух диэлектриков с разными диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 > \epsilon_2$

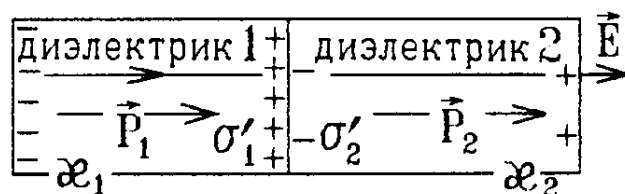


Рис.3.11

и с разными поверхностными плотностями связанного заряда $\sigma_1' > \sigma_2'$ (рис.3.11) нормальная составляющая вектора $\vec{P}$ скачком изменяется на величину

$$P_{1n} - P_{2n} = \sigma_1' - \sigma_2'.$$

3 Вектор электрической индукции

Вычислять распределение связанных зарядов в среде всегда трудно. Но оказывается, что в некоторых случаях для вычисления электрического поля в диэлектриках достаточно знать только распределение стороннего заряда ρ . Покажем, что это действительно так.

Поле внутри диэлектрика определяется и сторонним и связанным зарядом: $\text{div} \vec{E} = (\rho + \rho')/\epsilon_0$. Но после подстановки $\rho' = -\text{div} \vec{P}$, получим

$$\text{div} \vec{E} + \frac{\text{div} \vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{или} \quad \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho.$$

Вектор $\boxed{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}}$ называют вектором электрической индукции или электрического смещения. Подставляя $\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ в предыдущую формулу, находим $\boxed{\vec{D} = \epsilon_0(1 + \epsilon)\vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}}$, где безразмерный коэффициент $\boxed{\epsilon = 1 + \epsilon}$ называется диэлектрической проницаемостью среды.

Из полученных соотношений видно, что электрическое поле в диэлектрике удобно описывать не вектором напряженности $\vec{E}$, а вектором индукции $\vec{D}$, для которого теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид:

$$\boxed{\text{div} \vec{D} = \rho}.$$

Из нее следует, что линии вектора $\vec{D}$ начинаются только на положительных сторонних зарядах $\rho > 0$ и заканчиваются только на отрицательных сторонних зарядах $\rho < 0$.

Применив теорему Остроградского, можно сформулировать теорему Гаусса для $\vec{D}$ в интегральной форме:

поток вектора $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме обычных сторонних зарядов внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV = \sum q.$$

Поэтому вектор $\vec{D}$ можно в ряде случаев вычислить, зная только распределение стороннего заряда, а поле связанных зарядов в явном виде можно при этом не искать. Однако, еще раз заметим, что электрическое поле в диэлектрике создается и сторонними, и связанными

зарядами, как видно из теоремы Гаусса для вектора $\vec{E}$:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sum q + \sum q').$$

Если диэлектрик изотропен (ε – скаляр), то векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ параллельны: $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$. Тогда, зная вектор $\vec{D}$, можно определить и вектор $\vec{E}$: $\vec{E} = \vec{D} / \varepsilon \varepsilon_0$.

В анизотропных диэлектриках вектор $\vec{D}$ не параллелен вектору $\vec{E}$, и надо вводить тензор диэлектрической проницаемости $||\varepsilon|| = 1 + ||\varkappa||$:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + \varkappa_{xx} & \varkappa_{xy} & \varkappa_{xz} \\ \varkappa_{yx} & 1 + \varkappa_{yy} & \varkappa_{yz} \\ \varkappa_{zx} & \varkappa_{zy} & 1 + \varkappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Следует заметить, что в вакууме $\varkappa = 0$, $\varepsilon = 1$ и $\vec{D}_{\text{вак}} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{вак}}$.

Пример: точечный заряд окружен слоем диэлектрика. Часть линий вектора $\vec{E}$ начинается на связанных зарядах $+\sigma'$ на поверхности диэлектрика (рис.3.12). Линии же вектора $\vec{D}$ начинаются только на стороннем заряде q (рис.3.13). Эти линии, в отличие от линий $\vec{E}$, не будут обрываться или возникать на неоднородностях среды, где отсутствуют сторонние заряды.

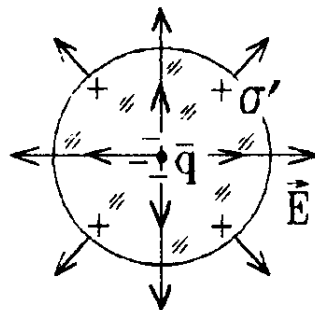


Рис.3.12

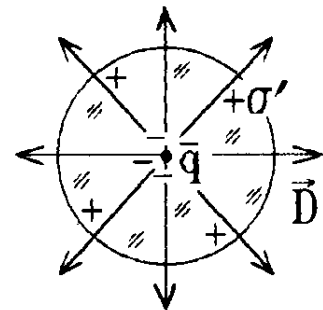


Рис.3.13

4 Электрическое поле в диэлектрике

Введем в заряженный плоский конденсатор (рис.3.14) с напряженностью поля $E_{\text{вак}} = \sigma / \varepsilon_0$ внутри плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика. На ее поверхностях (рис.3.15) возникает связанный заряд с поверхностной плотностью $\pm \sigma'$. Поле этого связанного заряда вычисляется, аналогично полю заряженного конденсатора, по формуле

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P_n}{\varepsilon_0} = \frac{\varkappa \varepsilon_0 E_n}{\varepsilon_0} = \varkappa E,$$

где E – напряженность поля внутри

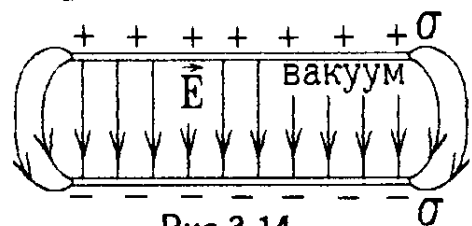


Рис.3.14

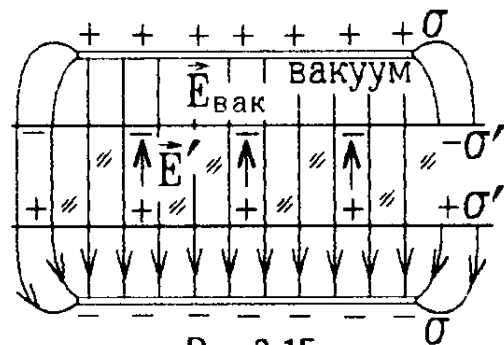


Рис.3.15

диэлектрической пластины.

Так как вектор $\vec{E}'$ направлен противоположно $\vec{E}_{\text{вак}}$, как видно из рис.3.15, то результирующее поле в диэлектрике будет

$$E = E_{\text{вак}} - E' = E_{\text{вак}} - \kappa E \quad \text{или} \quad E_{\text{вак}} = (1 + \kappa)E = \epsilon E, \text{ т.е.}$$

$$E_{\text{диэл}} = \frac{E_{\text{вак}}}{\epsilon}.$$

Заметим, что в рассматриваемом примере внесенный в электрическое поле диэлектрик полностью заполняет объем между эквипотенциальными поверхностями поля, созданного только сторонними зарядами (рис.3.16). Только при таком условии ни величина напряженности, ни направление силовых линий электрического поля вне диэлектрика не изменяются.

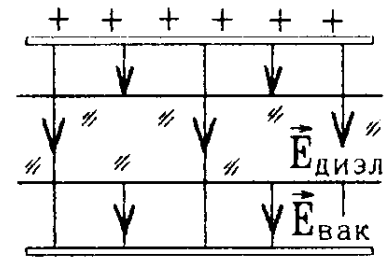


Рис.3.16

В тех случаях, когда изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ занимает все пространство между эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов, напряженность электрического поля в нем уменьшается в ϵ раз по сравнению с напряженностью поля в вакууме (в отсутствии диэлектрика), а вектор электрической индукции $\vec{D}$ при этом не изменяется:

$$\vec{D}_{\text{диэл}} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_{\text{диэл}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{вак}} = \vec{D}_{\text{вак}}.$$

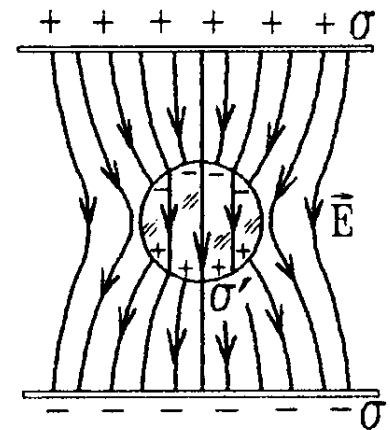


Рис.3.17

Если же поверхность диэлектрика не совпадает с эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов (рис.3.17), то связанные заряды искривляют линии $\vec{E}$, а вместе с ними и линии $\vec{D}$ вблизи границ диэлектрика. Тогда при расчете поля необходимо учитывать распределение таких зарядов.

Обратим внимание на то, что формулы связи $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ и $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ справедливы только в изотропных диэлектрических средах, поляризация которых вызвана **внешним сторонним** электрическим полем. В сегнетоэлектриках, которые тоже являются диэлектриками, эта поляризация сохраняется и после снятия внешнего поля. Иначе говоря, в сегнетоэлектриках электрическое поле может быть создано остаточной замороженной поляризацией молекул. В этом случае соотношения $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ и $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ не выполняются, но определение $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ верно всегда.

Рассмотрим точечный заряд q , находящийся в изотропной диэлек-

трической среде (рис.3.18). Линии вектора $\vec{D}$ начинаются на заряде q . Окружим его сферической поверхностью S радиуса r . Поток вектора $\vec{D}$ через эту поверхность не зависит от наличия диэлектрика и связанных зарядов, и по теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint dS \cos 0^\circ = D \cdot 4\pi r^2 = q.$$

$$\text{Но } E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \text{ или } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r},$$

следовательно, кулоновская сила взаимодействия двух точечных зарядов q и q_0 (рис.3.18), находящихся в диэлектрической среде, уменьшается в ϵ раз.

$$\vec{F}_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^3} \vec{r} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

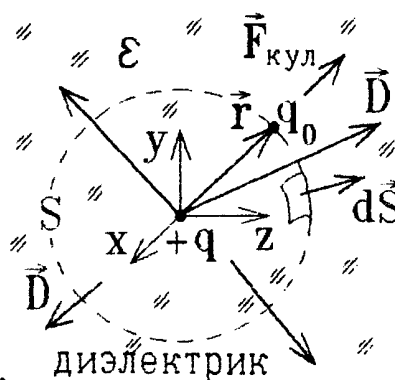


Рис.3.18

Поэтому все формулы и теоремы для электрического поля в вакууме, полученные в главе 1 из закона Кулона, остаются справедливыми и **внутри** изотропной диэлектрической среды с проницаемостью ϵ . Но во всех выражениях надо произвести замену $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon\epsilon_0$ (для вакуума $\epsilon_{\text{вак}} = 1$). Чтобы не учитывать дополнительного искривления силовых линий на связанных зарядах, обычно считают, что диэлектрик заполняет все пространство, т.е. ограничен эквипотенциальной поверхностью $\varphi|_{\infty} = 0$.

Замечание: строго говоря, сказанное относится только к **жидкому** изотропному диэлектрику. Твердый диэлектрик в результате действия внешнего электрического поля на связанные заряды начнет **деформироваться**. Вследствие этого, помимо электрических кулоновских сил, могут появиться дополнительные механические силы упругости, которые также надо учитывать.

5 Электрическое поле на границе двух сред

Пусть на границе двух изотропных однородных диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 отсутствуют сторонние (свободные) заряды. Тогда на этой границе появляется только связанный заряд с поверхностной плотностью σ' . Выберем узенький контур $ABCD$ (рис.3.19), охватывающий участок гра-

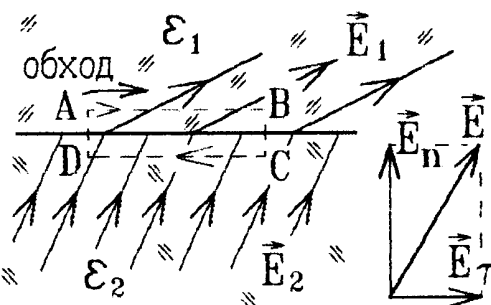


Рис.3.19

ницы, со сторонами $AB = CD = l$, параллельными поверхности раздела. Так как $AD \approx BC \approx 0$, то по теореме о циркуляции вектора $\vec{E}$:

$$\oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1\tau} l - E_{2\tau} l = 0,$$

т.е. на границе раздела двух диэлектриков тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ не изменяется $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Часть линий $\vec{E}$ будет обрываться на связанных зарядах σ , а линии $\vec{D}$ не прерываются (рис.3.19,

3.20). Соответственно, так как $E_{\tau} = \frac{D_{\tau}}{\epsilon \epsilon_0}$, то на границе

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

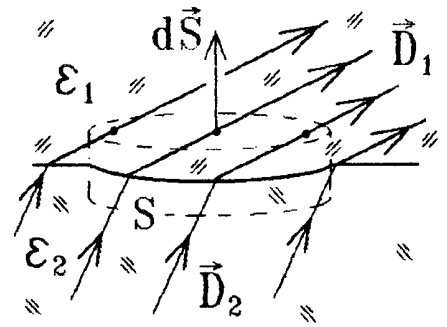


Рис.3.20

Выберем теперь замкнутую поверхность в виде очень короткого цилиндра с основаниями, имеющими площадь $S_{\text{осн}}$, параллельными границе раздела диэлектриков (рис.3.20). Эта поверхность охватывает участок границы раздела, но сторонних зарядов внутри нее нет, поэтому по теореме Гаусса $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx D_{1n} S_{\text{осн}} - D_{2n} S_{\text{осн}} = 0$, т.е. на границе раздела сохраняется нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ и не сохраняется нормальная составляющая вектора $\vec{E}$:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

Таким образом, на границе раздела диэлектриков, не обладающих сегнетоэлектрическими свойствами, силовые линии электростатического поля претерпевают излом (рис.3.21), где

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}, \quad \text{tg } \theta_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} \quad \text{и} \quad \frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

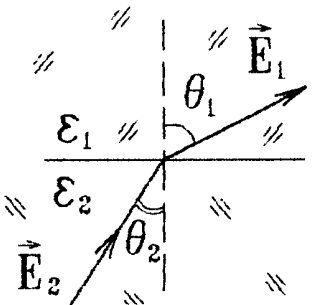


Рис.3.21

Полученные выражения справедливы и на границе диэлектрик – вакуум, если учесть, что для вакуума $\epsilon_{\text{вак}} = 1$. На границе диэлектрик – проводник все линии $\vec{E}$ и $\vec{D}$ обязаны закончиться на сторонних зарядах, индуцированных на поверхности проводника.

Глава 4.

Энергия заряженных проводников, диэлектриков и электрического поля

1 Электрическая емкость

Возьмем уединенный проводник, то есть проводник, настолько удаленный от других тел, что заряды на них практически не приводят к перераспределению индуцированных зарядов на рассматриваемом проводнике. Можно считать, что уединенный проводник окружен бесконечной диэлектрической средой или вакуумом.

Увеличим заряд q на уединенном проводнике в k раз. При этом в k раз возрастет поверхностная плотность заряда σ , и в k раз возрастет потенциал φ поверхности проводника: $\varphi = \int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0}$.

Вывод: потенциал уединенного проводника пропорционален величине заряда на нем: $q = C\varphi$.

Коэффициент пропорциональности C , зависящий от формы и размера уединенного проводника, называется его электрической емкостью (сокращенно его называют просто емкостью проводника). Измеряют емкость в фарадах: 1 фарад – это емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на $\Delta\varphi = 1$ В при увеличении заряда на нем на $\Delta q = 1$ Кл.

Пример: вычисление емкости уединенного шара (рис.4.1).

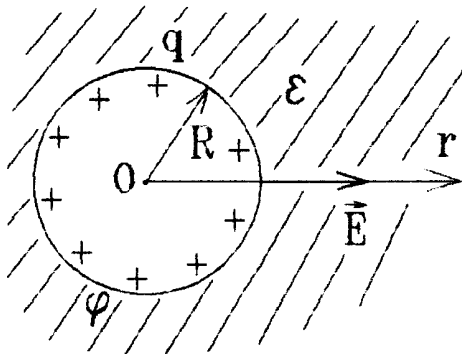


Рис.4.1

Заряд q , сообщенный проводнику, равномерно распределяется по поверхности уединенного шара и создает вне его поле с напряженностью $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{r=R} - \varphi \Big|_{r=\infty} &= \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \Big|_R^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} \equiv \frac{q}{C_{\text{шара}}}, \end{aligned}$$

так как $\varphi|_{r=\infty} = 0$. В результате получаем $C_{\text{шара}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$.

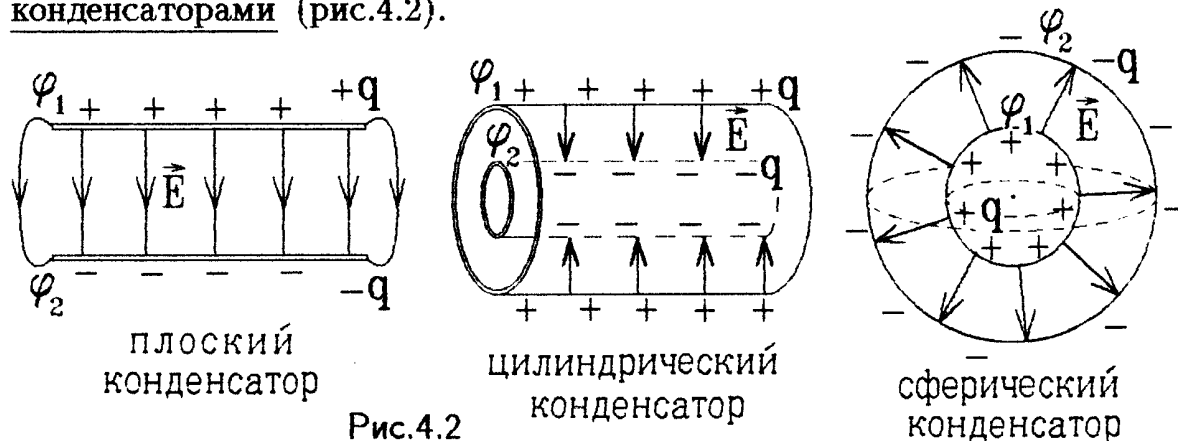
Емкость уединенных проводников очень мала. Например, емкость такого огромного шара, как Земля ($R \approx 6400$ км), составляет всего

$$C_{\text{Земли}} \approx 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ Ф.}$$

Вывод: на уединенных проводниках из-за возникновения электрического пробоя при большом φ нельзя накопить значительный заряд. Малая емкость уединенного проводника C связана с тем, что поле такого заряда занимает огромный объем пространства вокруг него.

2 Конденсаторы

Чтобы увеличить емкость и при небольших потенциалах φ накопить на проводниках большие заряды q , надо уменьшить объем электрического поля, создаваемого этими зарядами. Для этого используют системы из нескольких (в частности, из двух) проводников, называемые конденсаторами (рис.4.2).



Плоский конденсатор образован двумя параллельными проводящими пластинами (обкладками). Если заряды на них одинаковы по величине и противоположны по знаку, то силовые линии $\vec{E}$, начинающиеся на одной пластине, должны закончиться на другой, и практически всё электрическое поле сосредоточено в объеме между пластинами.

Обкладками цилиндрического конденсатора являются цилиндрические проводящие поверхности, имеющие общую ось, а сферический конденсатор – это две проводящие сферы с общим центром.

Заряд на всех конденсаторах пропорционален разности потенциалов на их обкладках (или напряжению $U = \varphi_1 - \varphi_2$, приложенному к конденсатору):

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU.$$

Коэффициент пропорциональности C между зарядом и напряжением называется емкостью конденсатора.

Если рассмотреть систему из двух (нескольких) проводников более подробно, то надо учесть, что изменение заряда на одном из них будет приводить к изменению индуцированных зарядов на поверхностях других проводников. Величины зарядов q_i и потенциалов φ_i всех проводников связаны друг с другом:

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \dots, \\ q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \dots, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Величины } C_{ij} \text{ называются} \\ \text{емкостными коэффициентами.} \end{array}$$

Они обладают следующими свойствами: C_{ii} – это емкость уединенного i -го проводника, она всегда положительна;

$C_{ij} = C_{ji}$ (теорема взаимности), если среда не обладает свойствами сегнетоэлектрика. C_{ij} может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Для заряженного конденсатора нетрудно решить записанную выше систему линейных уравнений и выразить емкость конденсатора через емкостные коэффициенты двух его обкладок:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}.$$

Эта емкость всегда положительна.

Вычислим емкость некоторых конденсаторов:

а) плоский конденсатор с обкладками площади S и расстоянием между пластинами d (рис.4.3). Поле между пластинами однородно

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} = \text{const.}$$

Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S} \equiv \frac{q}{C}, \text{ т.е.}$$

$$C_{\text{плоского конденсатора}} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}.$$

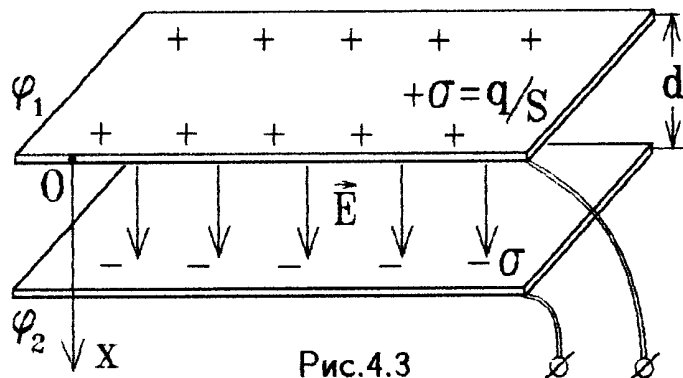


Рис.4.3

б) цилиндрический конденсатор длины ℓ с радиусами обкладок a и b (рис.4.4). Окружим внутреннюю обкладку с зарядом q коаксиальной цилиндрической поверхностью радиуса r , где $a < r < b$ и длины ℓ . Из теоремы Гаусса

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r \ell = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon\epsilon_0}$$

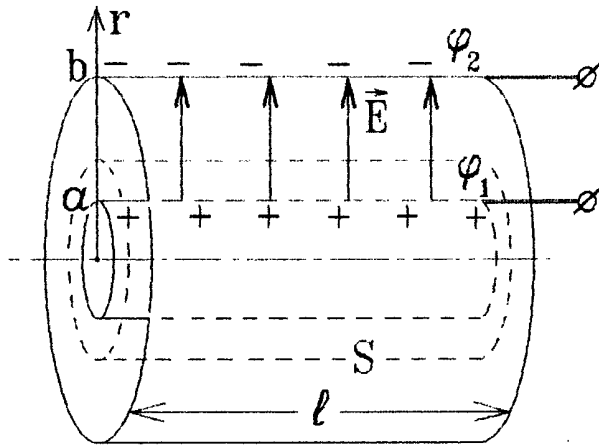


Рис.4.4

находим величину напряженности электрического поля внутри конденсатора: $E = q / (2\pi\epsilon\epsilon_0 l r)$.

$$\text{Тогда } \varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a} \equiv \frac{q}{C},$$

т.е.

$$C_{\text{цилиндр. конденсатора}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

Из полученных формул видно, что:

- 1) при уменьшении объема электрического поля, т.е. объема между обкладками, емкость конденсаторов резко возрастает. Появляется возможность накапливать большой заряд q на обкладках при малой разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между ними;
- 2) емкость конденсатора возрастает при заполнении пространства между его обкладками диэлектрической средой с большой проницаемостью ϵ .

Следует иметь в виду, что при достаточно большой разности потенциалов между обкладками любая диэлектрическая среда между ними "пробивается" электрической искрой; при этом конденсатор мгновенно разряжается. Поэтому, кроме емкости, каждый конденсатор характеризуется напряжением пробоя. Конденсатор *нельзя заряжать очень сильно*, чтобы напряжение на нем не достигло этого максимального значения.

3 Энергия системы зарядов

Разобьем заряженную среду на очень маленькие участки, каждый из которых можно считать **точечным зарядом** q_i (рис.4.5). Любой из этих зарядов находится в поле всех остальных зарядов и поэтому имеет энергию

$$W_i = q_i \varphi_i = q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

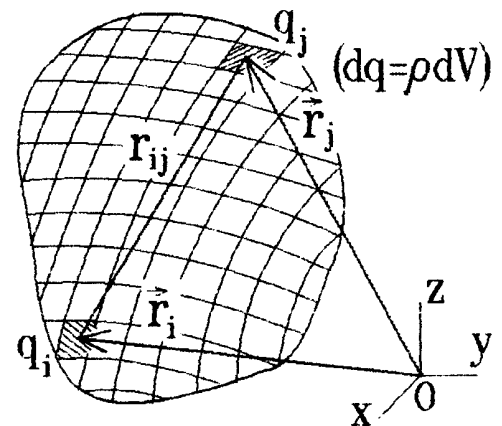


Рис.4.5

Чтобы найти полную энергию системы зарядов, следует сложить энергии W_i всех точечных зарядов q_i , но в такой сумме энергия взаимодействия любых двух точечных зарядов будет учитываться дважды:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \dots,$$

поэтому сумму надо уменьшить в два раза:

$$W_{\text{системы точечных зарядов}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Если заряд распределен в пространстве непрерывно с объемной плотностью $\rho = \rho(\vec{r})$, то зарядом элемента объема dV будет $dq = \rho dV$, и энергия системы вычисляется с помощью интеграла

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad \text{или} \quad W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV',$$

где интегрирование производится по всему объему V , занимаемому зарядом.

Примеры. 1) Энергия заряженного проводника.

Потенциал уединенного проводника произвольной формы, имеющего заряд q (рис.4.6), **одинаков во всех его точках.** Поэтому

$$W_{\text{заряж. проводн.}} = \frac{1}{2} \varphi \int \rho dV = \frac{1}{2} q \varphi.$$

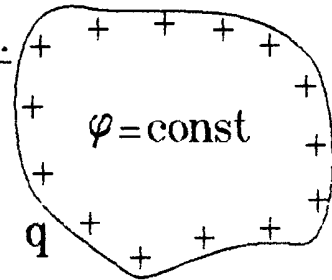


Рис.4.6

(Фактически этот интеграл следует брать не по объему, а по поверхности заряженного проводника.)

2) Энергия заряженного конденсатора.

Потенциал каждой *проводящей* обкладки конденсатора также одинаков во всех точках (рис.4.7). Поэтому

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \underbrace{\frac{1}{2} \varphi_1 q_1}_{\text{энергия верхней пластины}} + \underbrace{\frac{1}{2} \varphi_2 q_2}_{\text{энергия нижней пластины}} = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU.$$

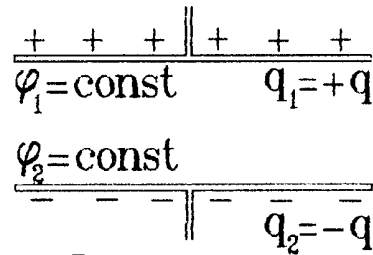


Рис.4.7

С учетом соотношения $q = CU$ энергию заряженного конденсатора можно записать в виде одной из трех формул:

$$W_{\text{конденсатора}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Этот результат можно получить другим способом: чтобы увеличить заряд конденсатора на dq , надо перенести этот добавочный заряд с отрицательно заряженной на положительно заряженную обкладку, совершив при этом работу $\delta A = -(\varphi_1 - \varphi_2)dq$ против электрических сил. Эта работа расходуется на изменение потенциальной энергии конденсатора $dW = -\delta A$. Таким образом, энергия заряженного конденсатора емкости C будет равна

$$W = \int dW = \int_0^q (\varphi_1 - \varphi_2)dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}.$$

4 Энергия электрического поля

Выразим энергию заряженного плоского конденсатора (рис.4.3) через напряженность поля $\vec{E}$. Для этого подставим выражения для емкости $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$ и напряжения $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = Ed$ в формулу для энергии. В результате получим:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V,$$

где $V = Sd$ – объем внутри конденсатора.

По сути дела мы выразили энергию системы зарядов на конденсаторе через энергию создаваемого этими зарядами электрического поля. В электростатическом случае эти энергии **одинаковы и фактически являются одной и той же величиной**. Если исчезнут заряды, то исчезнет и связанное с ними поле.

В изотропной диэлектрической среде (или вакууме) с учетом соотношения $D = \epsilon\epsilon_0 E$ плотность энергии электрического поля (энергия единицы объема) вычисляется по формуле

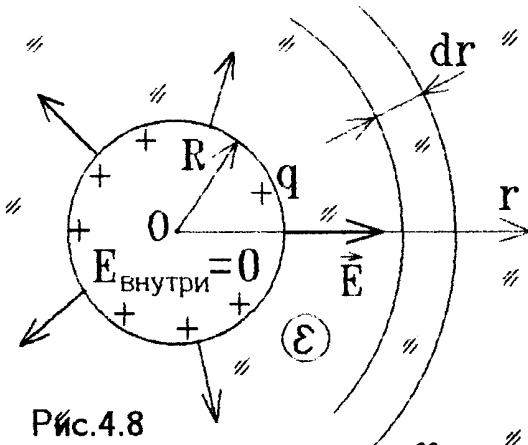
$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}.$$

Естественно, что размерность этой величины $[w] = \text{Дж/м}^3$.

Можно вычислять энергию заряженной системы

$$\text{или как } W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV, \text{ или как } W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV.$$

Результат будет одинаковым! Интеграл во втором выражении берется по **всему объему, занимаемому полем**, т.е. по всем точкам пространства, где $\vec{E} \neq 0$.



Пример: для уединенного заряженного проводящего шара (рис. 4.8) с емкостью $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$ энергия

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

С другой стороны, энергия электрического поля шара (а оно существует только вне шара и совпадает с полем точечного заряда q)

$$W_{\text{поля}} = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_R^\infty \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{объем сферического слоя}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R} \text{ — тот же результат!}$$

Замечание: на самом деле выражение энергии поля имеет более глубокий физический смысл, чем просто эквивалентная форма записи энергии системы неподвижных зарядов. Если заряды начнут двигаться с ускорением, то они будут создавать *переменное* поле, которое в виде электромагнитных волн начнет распространяться в диэлектрической среде на бесконечно большие расстояния. Это *переменное электрическое* поле существует и движется независимо от зарядов (зарядов в такой среде просто нет), но *плотность энергии поля по-прежнему выражается формулой* $w = \epsilon\epsilon_0 E^2/2$!

Получая формулу для w , мы использовали очень примитивную систему — плоский заряженный конденсатор. К тому же предположили, что поле во всех точках внутри него однородное ($E = \text{const}$), и пренебрегли краевыми эффектами (на самом же деле на краях это поле занимает некоторый объем вне конденсатора). Теперь выведем формулу для энергии поля в самом общем случае.

Подставим уравнения электростатики $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \equiv \text{div } \vec{D} = \rho$ и $\vec{\nabla}\varphi \equiv \text{grad } \varphi = -\vec{E}$ в общее определение энергии заряженной системы и произведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} W_{\text{системы зарядов}} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \varphi dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{\nabla} (\vec{D} \varphi) dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \varphi}_{=-\vec{E}} dV. \end{aligned}$$

Согласно теореме Остроградского, первое слагаемое в правой части этой формулы преобразуется в интеграл по поверхности, охватывающей бесконечный объем, заполненный полем. На этой

$$\left(\begin{array}{l} \text{поверхности (в бесконечности) поле отсутствует, т.е. } \vec{D}|_{\infty} = 0; \\ \varphi|_{\infty} = 0, \text{ и поэтому } \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\vec{D}\varphi) dV = \frac{1}{2} \int_S (\vec{D}\varphi)|_{\infty} \cdot d\vec{S} = 0. \\ \text{В итоге получаем прежний результат:} \\ W_{\text{электр. поля}} = W_{\text{системы зарядов}} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} dV \equiv \frac{1}{2} \int_V \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} dV. \end{array} \right)$$

Используя соотношение $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, справедливое в любой среде, можно уточнить смысл выражения для плотности энергии поля:

$$w_{\text{электр. поля}} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{P}}{2}.$$

Первое слагаемое $\varepsilon_0 E^2/2$ — это та энергия, которая расходуется на создание электрического поля $\vec{E}$ в единице объема среды.

Второе слагаемое $EP/2 = \varepsilon \varepsilon_0 E^2/2 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2/2$ — это энергия, которая расходуется на поляризацию единицы объема диэлектрика, т.е. на то, чтобы разделить заряды молекул диэлектрика. По сути дела — это энергия, приобретаемая молекулами-диполями среды в электрическом поле.

5 Силы, действующие на заряженные тела в присутствии диэлектрика

Вычисление таких сил всегда очень непростая задача !

Вопрос: чему равна сила, действующая на обкладку заряженного плоского конденсатора с введенной в него диэлектрической пластиной (рис.4.9) ?

Ответ: казалось бы, чего проще — $F = qE = q^2/(\varepsilon \varepsilon_0 S)$, где q — заряд на обкладке, а $E = q/(\varepsilon \varepsilon_0 S)$ — напряженность поля внутри конденсатора. Но этот ответ совершенно неверен !

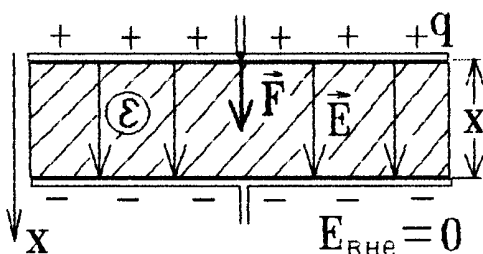


Рис.4.9

Поле $\vec{E}$ создано всеми зарядами системы, включая рассматриваемый заряд. Но сам на себя любой участок заряженной среды (с зарядом Δq) действовать не может. Поэтому надо вычислять отдельно поле $\vec{E}_{\Delta q}$, созданное зарядом Δq , отдельно поле $\vec{E}'$, созданное остальными зарядами ($\vec{E}' = \vec{E} - \vec{E}_{\Delta q}$), и определять силу $\Delta \vec{F} = \Delta q \cdot \vec{E}'$. На любой такой заряд Δq действует только поле

остальных зарядов! Задача становится очень сложной, поэтому выбирают другой путь.

Рассмотрим два заряженных проводника в изотропной диэлектрической среде (рис.4.10). Созданные ими поля складываются ($\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$), и поэтому энергия всей системы выразится, как

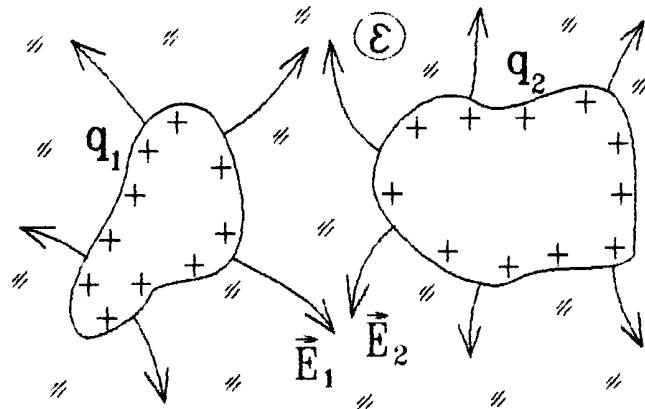


Рис.4.10

$$W = \int \frac{\epsilon \epsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2} dV =$$

$$= \underbrace{\int \frac{\epsilon \epsilon_0 \vec{E}_1^2}{2} dV + \int \frac{\epsilon \epsilon_0 \vec{E}_2^2}{2} dV}_{\text{собственная энергия проводников}} + \underbrace{\int \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV}_{\text{энергия взаимодействия}}.$$

собственная энергия проводников энергия взаимодействия

Эту формулу можно записать через емкостные коэффициенты:

$$\left(\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \varphi_i = \underbrace{\frac{1}{2} C_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \varphi_2^2}_{\text{собств. энергия}} + \underbrace{C_{12} \varphi_1 \varphi_2}_{\text{энергия взаим.}}, \\ \text{откуда видно, что } C_{12} < 0 &\text{ в тех случаях, когда } \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV < 0. \end{aligned} \right)$$

Силу взаимодействия тел можно определить через энергию их взаимодействия: $\vec{F} = -\vec{\nabla} W_{\text{взаим}} \equiv -\text{grad } W_{\text{взаим}}$.

Но если считать, что ни величины зарядов q_i , ни их распределения по поверхности проводников не меняются, то не меняются и собственные энергии проводников: $W_{\text{собств}} = \int \frac{\epsilon \epsilon_0 \vec{E}_1^2}{2} dV + \int \frac{\epsilon \epsilon_0 \vec{E}_2^2}{2} dV = \text{const}$ при $q_i = \text{const}$. Внося эту постоянную величину под знак градиента, получаем формулу для вычисления силы взаимодействия двух заряженных проводников в самом общем случае:

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} W_{\text{системы}} \text{ при условии } q_i = \text{const}}.$$

Это условие не означает, что все заряды должны быть на самом деле постоянными. Они могут стекать с проводников, появляться на них, перераспределяться, но **правильное** выражение для силы взаимодействия будет получено, если при вычислении $\text{grad } W$ выполняется **математическое** (а не физическое) условие $q_i = \text{const}$.

Вернемся к конденсатору, изображенному на рис.4.9. Если он отключен от источника напряжения, то заряд на нем действительно сохраняется ($q = \text{const}$), и удобно использовать формулу для энергии

конденсатора в виде $W = q^2/2C$. Величина силы, действующей на обкладку, будет равна

$$F = \left| -\frac{d}{dx}(W) \right|_{q = \text{const}} = \frac{q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\varepsilon \varepsilon_0 S} \right) = \frac{q^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 S}.$$

Получается правильный результат !

Такие консервативные силы стремятся *уменьшить* энергию системы. При отключенном от источника напряжения конденсаторе ($q = \text{const}$) его энергия

$$W = q^2/2C = \frac{q^2 d}{\varepsilon \varepsilon_0 S} \sim \frac{1}{\varepsilon}$$

будет уменьшаться, если поместить между пластинами диэлектрик с большим значением проницаемости ε . Жидкий диэлектрик начнет втягиваться в воздушный конденсатор, как показано на рис.4.11, увеличивая его емкость C и уменьшая энергию W .

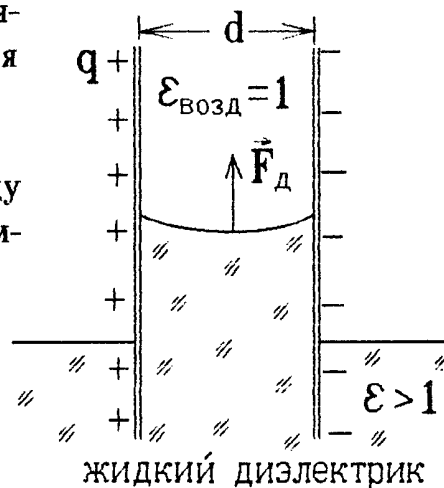


Рис.4.11

Вопрос: что произойдет с диэлектриком, если воздушный конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U = \text{const}$ (рис.4.12). Будет ли диэлектрик втягиваться или выталкиваться из конденсатора ?

Ответ: теперь $q \neq \text{const}$, и энергия конденсатора

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2d} U^2 \sim \varepsilon$$

будет увеличиваться при втягивании диэлектрика в конденсатор. Кажется, что он должен выталкиваться из конденсатора, но это неверно !

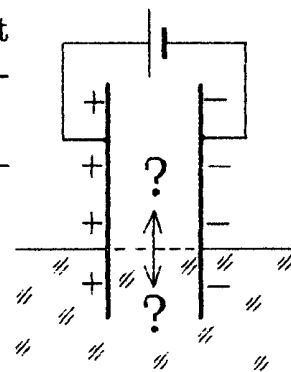


Рис.4.12

Диэлектрик будет по-прежнему **втягиваться** в конденсатор, как и на рис.4.11 ! Ведь силу $\vec{F}_д$, действующую на диэлектрик, по-прежнему следует вычислять при выполнении формального математического условия $q = \text{const}$. Поэтому ни ее величина, ни направление не должны измениться. (Сила, действующая на обкладку, тоже не изменится !) Причина этого заключается в том, что необходимо, кроме конденсатора, учесть еще и источник постоянного напряжения (батарею), через которую потечет ток — он-то и будет производить работу, часть которой пойдет на увеличение энергии конденсатора.

Вопрос: рассмотрим конденсатор, показанный на рис.4.9, в который втягивается диэлектрическая пластина, более внимательно. На поверхности жидкого диэлектрика образуется связанный заряд σ' (рис.4.13),

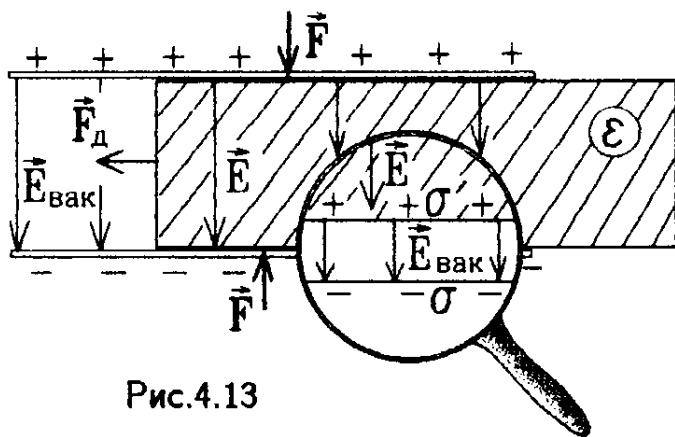


Рис.4.13

ослабляющий поле $\vec{E}_{\text{вак}}$, созданное зарядами, находящимися на обкладках. В результате поле внутри диэлектрика уменьшается в ϵ раз: $\vec{E} = \vec{E}_{\text{вак}}/\epsilon$. Но в бесконечно узком зазоре между диэлектриком и обкладкой поле будет тем же самым, что и в конденсаторе

без диэлектрика, т.е. $\vec{E}_{\text{вак}}$. Картина та же самая, что и на рис.3.15 или 3.16. Поэтому электрическая сила, притягивающая одну обкладку к другой, не должна зависеть от присутствия диэлектрика; ведь заряд σ на обкладке конденсатора находится в том же поле $\vec{E}_{\text{вак}}$, что и в воздушном конденсаторе ($\epsilon = 1$). На самом же деле сила $F = q^2/(2\epsilon\epsilon_0 S)$ уменьшается в ϵ раз. Почему?

Ответ: На поверхности диэлектрика и, возможно, в его объеме возникают связанные заряды. Поле конденсатора начинает действовать на эти заряды, но они связаны с молекулами диэлектрика, т.е. диэлектрик начнет деформироваться. В случае, изображенном на рис.4.13, он начнет механически давить на обкладку конденсатора в направлении, противоположном электрической силе $F_{\text{эл}} = q^2/(2\epsilon\epsilon_0 S)$. Результирующая сила, действующая на обкладку конденсатора, окажется меньше электрической именно в ϵ раз.

Силы, действующие на диэлектрик во внешнем электрическом поле, называются пондеромоторными. Их вычисление осложняется тем, что, кроме внешнего поля, следует учитывать воздействие на любой участок связанного заряда поля всех остальных возникших связанных зарядов. Помимо этого, при внесении в электрическое поле диэлектрическая среда испытывает деформацию (явление электрострикции), в связи с чем появляются внутренние механические напряжения.

Дополнение: вычисление плотности пондеромоторных сил.

Для вычисления пондеромоторных сил воспользуемся равенством

$$W_{\text{поля}} = \int \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = W_{\text{зарядов}} = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV$$

и запишем энергию электрического поля в виде

$$W = 2W_{\text{зарядов}} - W_{\text{поля}} = \int \left(\rho\varphi - \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \right) dV.$$

Предположим, что происходят какие-то бесконечно малые изменения:

среда вместе с зарядами смещается, меняется поле $\vec{E}$ или величина проницаемости ϵ . Тогда изменение энергии системы

$$\delta W = \int \left(\varphi \delta \rho + \rho \delta \varphi - \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \delta \epsilon \right) dV.$$

Второе и третье слагаемые в случае изотропного диэлектрика ($\epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$, $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$, $\delta \vec{E} = -\delta \vec{\nabla} \varphi$) преобразуются с помощью теоремы Остроградского в интеграл по поверхности, равный нулю:

$$\begin{aligned} \int_V (\rho \delta \varphi - \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E}) dV &= \int_V \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \delta \varphi - \vec{D} \cdot (-\vec{\nabla} \delta \varphi) \right) dV = \\ &= \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} \delta \varphi) dV = \int_S \vec{D} \delta \varphi d\vec{S} = 0 \end{aligned}$$

(поверхность S охватывает все поле, т.е. находится на бесконечности, где $\varphi = 0$ и $\vec{D} = 0$). Следовательно, изменение энергии электрического поля

$$\delta W = \int \left(\varphi \delta \rho - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \delta \epsilon \right) dV.$$

Изменение плотности заряда происходит по двум причинам:

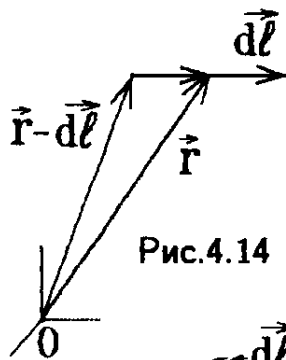


Рис. 4.14

1) среда сдвигается на бесконечно малое расстояние $d\vec{l}$ (рис. 4.14), и в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ оказывается участок среды, находившийся ранее в точке с радиус-вектором $\vec{r} - d\vec{l}$, в результате чего плотность заряда ρ изменяется на величину

$$\delta_1 \rho = \rho(\vec{r} - d\vec{l}) - \rho(\vec{r}) = -(\vec{\nabla} \rho) d\vec{l};$$

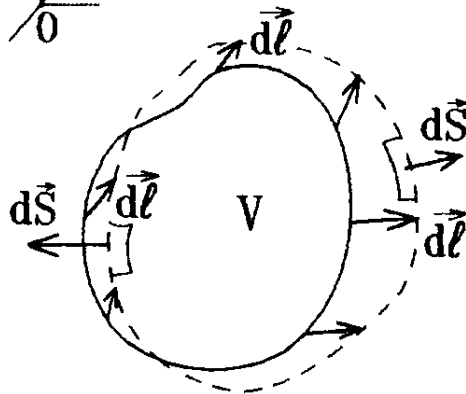


Рис. 4.15

2) различные точки среды могут смещаться на разные расстояния $d\vec{l}$, как показано на рис. 4.15, вследствие чего объем среды изменяется (среда деформируется) на величину δV :

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_S d\vec{l} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot d\vec{l}) dV \approx \\ &\approx (\vec{\nabla} \cdot d\vec{l}) V \quad (\text{здесь снова использована теорема Остроградского}). \end{aligned}$$

Из закона сохранения электрического заряда $(\rho + \delta_2 \rho)(V + \delta V) = \rho V$ находим изменение ρ при деформации среды: $\delta_2 \rho \approx -\rho \frac{\delta V}{V} = -\rho (\vec{\nabla} \cdot d\vec{l})$. Следовательно, суммарное изменение плотности заряда будет:

$$\boxed{\delta \rho = \delta_1 \rho + \delta_2 \rho = -\vec{\nabla} \cdot (\rho d\vec{l})}.$$

Изменение проницаемости $\delta\epsilon$ найти сложнее. Для этого надо ввести уравнение состояния среды. Наиболее простым оно будет для жидкого или газообразного диэлектрика, когда проницаемость ϵ среды зависит только от ее плотности ρ : $\delta\epsilon = \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\delta\rho = -\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\vec{\nabla}(\rho d\vec{l})$ (изменение плотности вещества происходит по тем же причинам, что и изменение плотности заряда, и вычисляется по аналогичной формуле). Подставим $\delta\epsilon$ и $\delta\rho$ в формулу для δW :

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_V \left[-\varphi \vec{\nabla}(\rho d\vec{l}) + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \vec{\nabla}(\rho d\vec{l}) \right] dV = \\ &= \int_V \nabla \left(-\varphi \rho d\vec{l} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \rho d\vec{l} \right) dV + \\ &+ \int_V \left[(\vec{\nabla}\varphi) \rho d\vec{l} - \vec{\nabla} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \rho \right) d\vec{l} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \vec{\nabla}\rho \cdot d\vec{l} \right] dV.\end{aligned}$$

Первый интеграл в этом выражении опять преобразуется в интеграл по бесконечной замкнутой поверхности S , где $\varphi = 0$ и $\vec{E} = 0$, т.е. обращается в нуль. А оставшийся интеграл связан с работой пондеромоторных сил при смещении среды на расстояние $d\vec{l}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dW = \int_V \left[\underbrace{\rho \vec{E}}_{= -\vec{\nabla}\varphi} - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \vec{\nabla}\rho + \vec{\nabla} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right) \right] d\vec{l} dV.$$

Плотность таких сил, т.е. пондеромоторная сила, действующая на единицу объема жидкого или газообразного диэлектрика, равна

$$\vec{f}_{\Pi} = \rho \vec{E} - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \vec{\nabla}\epsilon + \vec{\nabla} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right).$$

Первое слагаемое — это просто кулоновская сила, действующая на сторонний заряд ρ , вкрапленный в диэлектрик; второе слагаемое связано с неоднородностью диэлектрика (появлением объемных и поверхностных связанных зарядов, как показано в главе 3); третье слагаемое — это электрострикция.

Пример: снова вернемся к конденсатору, заполненному жидким диэлектриком (рис.4.13). будем считать диэлектрик идеальным ($\rho = 0$), а электрострикционное слагаемое — пренебрежимо малым.

Так как диэлектрик между обкладками находится в равновесии, то должна появиться механическая сила $f_{\text{мех}}$, уравновешивающая пондеромоторную силу $\vec{f}_{\Pi}$, как показано на рис.4.16, где изображена область вблизи обкладки (где диэлектрик нельзя считать однород-

ным). Эта механическая сила связана с появлением перепада давлений в среде. Как видно из рис.4.17, из-за наличия разности давлений на единицу объема среды будет действовать сила

$$\vec{f}_{\text{мех}} = \frac{p\Delta S - (p + dp)\Delta S}{\Delta S d\vec{l}} = -\frac{dp}{d\vec{l}} \equiv -\vec{\nabla} p \equiv -\text{grad } p.$$

Поэтому условие равновесия единицы объема среды принимает вид:

$$\vec{f}_{\text{мех}} + \vec{f}_{\Pi} = 0 \text{ или } \vec{\nabla} p = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \vec{\nabla} \epsilon.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства вдоль оси x , перпендикулярной к плоскости обкладки (рис.4.16), учитывая при этом, что на границе со-

храняется нормальная составляющая вектора $\vec{D}$, т.е. $D_n = \epsilon \epsilon_0 E = \text{const}$:

$$\int_p^0 dp = -\int_1^\epsilon \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\epsilon = -\frac{D^2}{2\epsilon_0} \int_1^\epsilon \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) = -p.$$

Иначе говоря, так как вблизи поверхности заряженного проводника $D_n = \sigma = q/S$, то на обкладку площадью S со стороны диэлектрика будет действовать механическая сила давления

$$F_{\text{давл}} = pS = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right).$$

А в противоположную сторону направлена чисто электрическая сила притяжения со стороны другой обкладки $F_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$ такая же, как и в воздушном конденсаторе. Результирующая этих сил

$$F = F_{\text{эл}} - F_{\text{давл}} = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S},$$

т.е. точно такая же, что и была получена для конденсатора с энергией

$$W = \frac{q^2 d}{2\epsilon\epsilon_0 S} !$$

(Этот результат немного неточен, так как мы пренебрегли электро-стрикцией, но рассмотренный пример показывает, как можно вычислять силы при наличии диэлектрика.)

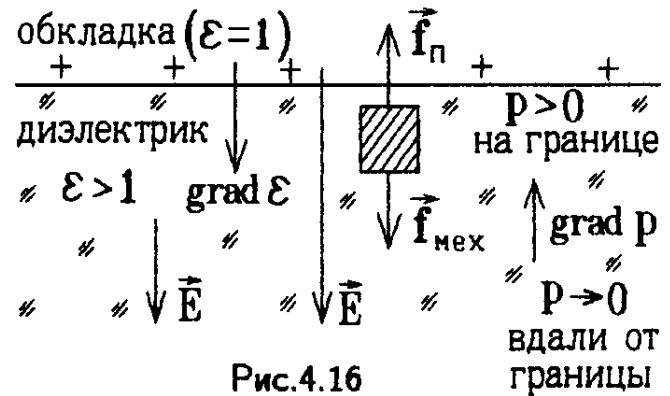


Рис.4.16

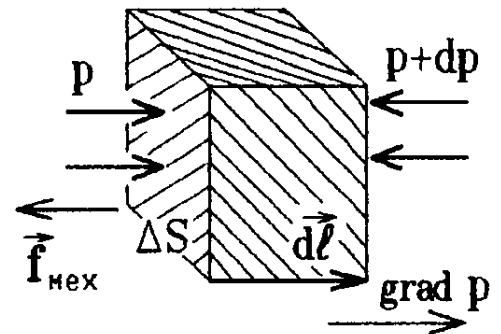


Рис.4.17

В случае газообразного диэлектрика можно считать, что $\epsilon = 1 + \alpha \rho$, где ρ – плотность среды, а $\alpha = \text{const}$. Тогда плотность пондеромоторных сил

$$\vec{f}_\Pi = \rho \vec{E} + \frac{(\epsilon - 1)\epsilon_0}{2} \vec{\nabla} E^2.$$

Пондеромоторные силы стремятся втянуть диэлектрик в область более сильного электрического поля $\vec{E}$ (в главе 3 было показано, что отдельные молекулы-диполи тоже втягиваются в область с бóльшим значением $\vec{E}$).

Вопрос: пусть в диэлектрической среде с проницаемостью ϵ существует электрическое поле. Будет ли в нее втягиваться (выталкиваться) кусок незаряженного диэлектрика с другой проницаемостью ϵ' ?

Ответ: при замене куска среды с проницаемостью ϵ на кусок среды с проницаемостью ϵ' энергия поля изменится на величину

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} \int_V (\vec{D}' \vec{E}' - \vec{D} \vec{E}) dV \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_V \left[(\vec{D}' - \vec{D}) \underbrace{\vec{E}'}_{=-\vec{\nabla}\varphi'} + (\vec{D} \vec{E}' - \vec{D}' \vec{E}) + (\vec{D}' - \vec{D}) \underbrace{\vec{E}}_{=-\vec{\nabla}\varphi} \right] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{\nabla} [(\vec{D}' - \vec{D}) (\varphi' + \varphi)] dV - \frac{1}{2} \int_V \left(\underbrace{\vec{\nabla} \vec{D}'}_{=\rho} - \underbrace{\vec{\nabla} \vec{D}}_{=\rho} \right) (\varphi' + \varphi) dV + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V (\epsilon \epsilon_0 \vec{E} \vec{E}' - \epsilon' \epsilon_0 \vec{E}' \vec{E}) dV. \end{aligned}$$

Первый интеграл преобразуется (с помощью теоремы Остроградского) в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, где $\varphi = 0$ и $\vec{D} = 0$. Второй интеграл равен нулю, так как распределение сторонних зарядов не меняется. Таким образом,

$$\Delta W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\epsilon - \epsilon') \vec{E}' \vec{E} dV \quad (\text{интеграл берется по объему вносимого диэлектрика, где } \epsilon' \neq \epsilon).$$

При $\epsilon' > \epsilon$ энергия уменьшается: $\Delta W < 0$. Иначе говоря, *пондеромоторные силы будут втягивать диэлектрик с бóльшей проницаемостью ϵ' в область с меньшей проницаемостью*. Аналогично можно показать, что незаряженный проводник будет втягиваться в диэлектрическую среду с электрическим полем (это можно понять, приняв во внимание появление индуцированных зарядов на его поверхности).

Попробуйте, используя полученный результат, доказать

закон Кёна: при электризации диэлектриков трением положительно заряжается диэлектрик с бóльшей проницаемостью.

Глава 5.

Законы постоянного тока

1 Электрический ток

Среда, имеющая свободные носители заряда (например, электроны) называется проводящей (или проводником). Под действием электрического поля свободные заряды начинают перемещаться (положительные – по полю, отрицательные – против), образуя электрический ток (рис.5.1).

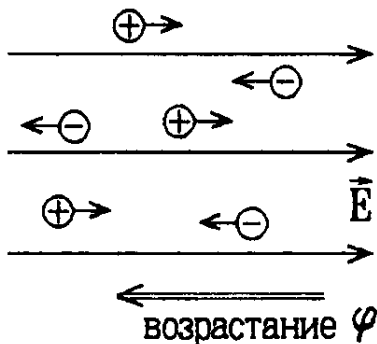


Рис.5.1

Сила тока I равна заряду, протекающему через поперечное сечение проводника (перпендикулярное вектору $\vec{E}$) за единицу времени: $I = dq/dt$. Сила тока измеряется в амперах.

Линии тока направлены по движению зарядов, то есть вдоль вектора $\vec{E}$. Направление тока совпадает с направлением движения положительных зарядов.

Если выделить в пространстве трубку, направленную вдоль линий $\vec{E}$ (рис 5.2), и разделить ток dI , протекающий внутри трубки, на ее поперечное сечение dS , то получим вектор плотности тока $\vec{j}$, направленный вдоль вектора $\vec{E}$ по касательной к линии тока: $j = dI/dS$. Плотность тока j – это ток, протекающий через единицу площади поперечного сечения проводника. Поэтому сила тока, т.е. ток, протекающий через любую поверхность

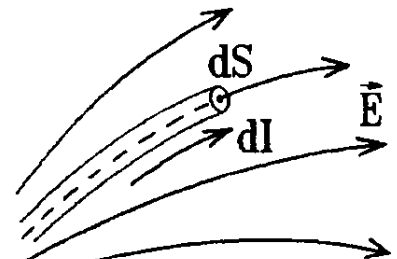


Рис.5.2

S , равна потоку вектора $\vec{j}$ через эту поверхность: $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

2 Природа носителей тока в металле

Для того, чтобы определить вид свободных носителей тока в металлах, Рикке примерно в течение года (1901 г.) пропускал ток через цепь, составленную из разнородных металлов (рис.5.3).

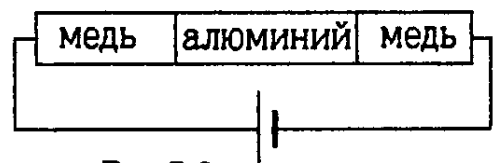


Рис.5.3

За это время по цепи протек заряд $\sim 3,5 \cdot 10^6$ Кл, но структура и химический состав металлов не изменились. Из опыта Рикке следует, что ток в металлах не связан с движением атомов (ионов) металла.

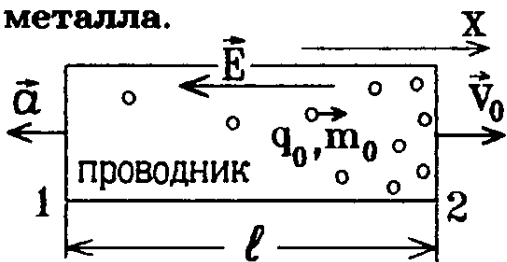


Рис.5.4

Возьмем теперь кусок металла длины l , двигавшийся со скоростью v_0 вдоль оси x , и резко затормозим его с ускорением $a < 0$ (рис.5.4). Свободные носители заряда q_0 с массой m_0 по инерции будут продолжать двигаться с прежней скоростью v_0 , пересекая сечение проводника и создавая ток. Но вылететь из незамкнутого проводника они не могут, и скапливаются у переднего конца 2, создавая избыточный заряд и электрическое поле $\vec{E}$, стремящееся оттолкнуть их обратно. Электрическая сила уравнивает силу инерции: $m_0 a = q_0 E = \text{const}$.

В результате на концах проводника создается разность потенциалов (напряжение)

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dx = \frac{m_0 a}{q_0} \int_0^l dx = \frac{m_0 a l}{q_0}.$$

Но если проводник замкнуть, то, в соответствии с законом Ома, по нему потечет ток $I = \frac{dq}{dt} = \frac{U}{R} = \frac{m_0 a l}{q_0 R}$, где $dq = \frac{m_0 a l}{q_0 R} dt$ — это заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за время dt , а R — сопротивление проводника.

За все время торможения t через него протечет заряд

$$q = \int_0^t dq = \frac{m_0 l}{q_0 R} \int_0^t a dt = \frac{m_0 l v_0}{q_0 R}.$$

В опытах Толмена — Стюарта (рис.5.5) провод в виде спирали (катушки) раскручивали до скорости $v_0 \sim 10^2 \div 10^3$ м/с и баллистическим гальванометром измеряли заряд q , протекающий при остановке спирали. Таким образом был определен удельный заряд свободных носителей тока

$$\frac{q_0}{m_0} = \frac{l v_0}{q R}.$$

Он оказался равным удельному заряду электро-

$$\text{на: } \frac{e}{m_e} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}} = 1,65 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

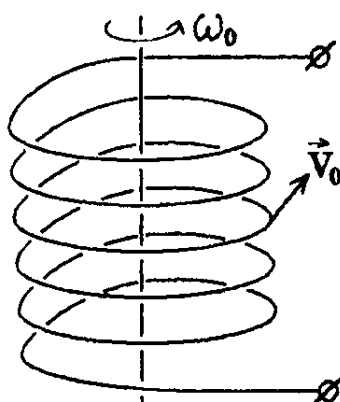


Рис.5.5

Вывод: свободные носители заряда в металлах — это электроны.

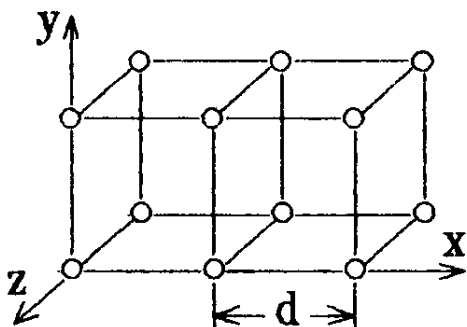


Рис.5.6

Вопрос: справедливо ли утверждение: "При подключении металлического проводника к источнику постоянного напряжения все свободные электроны в нем направлены движутся в одну сторону, к положительному полюсу батареи, создавая электрический ток" ?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим кристаллическую решетку металла (рис.5.6). Межатомное расстояние в ней $d \approx 10^{-10}$ м. А если из каждого атома вылетает один свободный электрон, то среднее расстояние между двумя соседними вылетевшими электронами (или между электроном и ионом решетки) то же самое: $d \approx 10^{-10}$ м. Но тогда соседние заряды должны действовать на освободившийся электрон с кулоновской силой

$$F_{\text{кул}} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \approx 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ Н},$$

которая заставляет их двигаться с ускорением $a = \frac{F_{\text{кул}}}{m_e} \approx 10^{22} \text{ м/с}^2$!

Скорость движения таких электронов огромна: в соответствии с законами квантовой физики ее среднее значение $\langle v \rangle \approx 10^6 \text{ м/с}$ (за одну секунду свободный электрон в маленьком кусочке металла пять раз пролетает расстояние от Тулы до Москвы). Поэтому под действием гигантских кулоновских сил со стороны соседних ионов решетки все свободные электроны хаотически мечутся от одного атома решетки

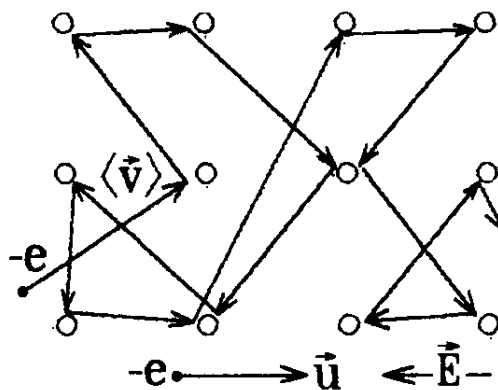


Рис.5.7

к другому, отталкиваясь от их электронных оболочек, как показано на рис.5.7. Во внешнем поле $\vec{E}$ свободный электрон мчится по некоторой ломаной линии с огромной скоростью $\langle v \rangle \sim 10^6 \text{ м/с}$ и лишь очень незначительно смещается против силовых линий $\vec{E}$ с некоторой результирующей или дрейфовой скоростью $\vec{u}$.

Электрический ток в металлах – это совместное движение с малой дрейфовой скоростью $\vec{u}$ хаотически мечущихся по решетке свободных электронов (рис.5.7).

Вопрос: с какой дрейфовой скоростью $\vec{u}$ движутся электроны по проводам после замыкания электрической цепи ?

Ответ: пусть по проводу сечением $S = 1 \text{ мм}^2$ течет ток $I = 1 \text{ А}$. Концентрация свободных электронов в металле $n \sim N_{\text{Авогадро}}/1 \text{ см}^3 \sim$

$\sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$. За время dt через поперечное сечение проводника протечет заряд $dq = enSudt$, где $Sudt$ – объем проводника (рис.5.8), а $nSudt$ – количество электронов, находящихся в этом объеме и за время dt пересекающих сечение площадью S . Таким образом, ток $I = dq/dt = enuS$. Плотность тока в проводнике $j = I/S = enu$ или, с учетом знака заряда электрона, $\vec{j} = -en\vec{u}$. Величина дрейфовой скорости электронов в рассматриваемом

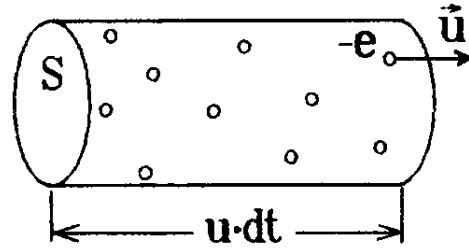


Рис.5.8

примере $u = \frac{I}{enS} \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ м/с} \approx 0,1 \text{ мм/с} !$

Таким образом, $u \ll \langle v \rangle$, и электроны практически «топчутся» на месте (рис.5.7).

Вопрос: через какое время после замыкания цепи электроны дойдут от полюсов батареи до нити накала лампы, и когда лампа загорится?

Ответ: практически мгновенно, хотя дрейфовая скорость $\vec{u}$ направленного движения электронов очень мала. Дело в том, что электрическое поле $\vec{E}$ устанавливается по всей длине проводника со скоростью света и заставляет все свободные электроны во всех точках цепи двигаться со скоростью $\vec{u}$.

3 Закон Ома для однородного проводника

Будем считать, что электрическое поле в проводнике постоянно: $E = \text{const}$. Свободные электроны движутся в нем почти хаотически с тепловой скоростью $\langle v \rangle$, сталкиваясь с атомами и рассеиваясь на них подобно молекулам газа (рис.5.7). При этом они пролетают между двумя последовательными столкновениями расстояние λ (среднюю длину свободного пробега) за время $\tau = \lambda / \langle v \rangle$.

Кулоновская сила сообщает им некоторую дополнительную скорость $\vec{v}'$ против линий вектора $\vec{E}$: $m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -e\vec{E}$, где m – масса электрона, а $(-e)$ – его заряд. Отсюда величина этой скорости

$$v' = \int_0^t \frac{eE}{m} dt = \frac{eE}{m} t.$$

При последующем столкновении электрон практически ее теряет.

Средняя скорость, приобретаемая электроном между двумя последовательными столкновениями, – это и есть дрейфовая скорость $\vec{u}$, направленная по касательной к силовой линии, т.е.

$$u = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v' dt = \frac{eE}{m\tau} \int_0^{\tau} t dt = \frac{eE}{2m} \tau = \frac{eE\lambda}{2m \langle v \rangle}.$$

Подставляя это выражение в формулу $j = neu$, получаем $\frac{e^2 n \lambda}{2m \langle v \rangle} E$, откуда следует закон Ома в локальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где величина $\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2m \langle u \rangle}$ называется удельной проводимостью проводника, она зависит только от свойств самого проводника. Обратная ей величина $\rho = 1/\sigma$ называется удельным сопротивлением проводника.

Таким образом, ток $\vec{j}$ в проводнике существует только если в нем создано электрическое поле $\vec{E}$.

Возьмем участок тонкого однородного провода длины l и сечения S (для однородного провода $S = \text{const}$ и $n = \text{const}$) (рис.5.9). Ток течет вдоль оси провода, поэтому и поле $\vec{E}$ направлено вдоль оси.

Разность потенциалов между концами проводника называется падением напряжения на нем:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^l E dx = El \quad \text{или} \quad E = \frac{U}{l}.$$

Отсюда $j = \frac{I}{S} = \sigma E = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$ или $\boxed{U = RI}$ — это закон Ома для участка однородного проводника.

Величина $\boxed{R = \rho \frac{l}{S}}$, где $\begin{cases} l - \text{длина проводника,} \\ S - \text{его сечение,} \\ \rho - \text{удельное сопротивление материала} \end{cases}$ называется сопротивлением проводника.

В классической электронной теории, с учетом найденного выше выражения для $\sigma = 1/\rho$, для сопротивления получается формула:

$$R = \frac{2m \langle v \rangle l}{e^2 n \lambda S}.$$

Эта формула классической физики показывает, что причиной появления электрического сопротивления является рассеяние свободных электронов электрическими полями атомов кристаллической решетки.

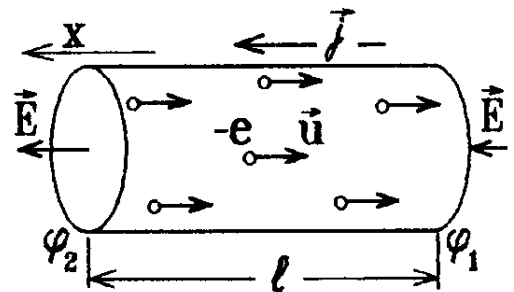


Рис.5.9

Чем чаще отклоняется электрон, тем меньше его длина свободного пробега λ , и тем больше сопротивление R . С ростом концентрации n свободных электронов сопротивление, наоборот, падает.

Замечание. Если использовать строго классические формулы для газа свободных электронов в металле, то при $n = \text{const}$ получим $\lambda \approx \text{const}$, а выражение для средней скорости теплового движения частиц классического максвелловского газа $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, с одной стороны, дает при комнатной температуре величину много меньшую, чем истинное значение средней скорости электронов $\langle v \rangle \sim 10^6$ м/с, а с другой – неправильную температурную зависимость вычисленного по классической формуле сопротивления $R \sim \sqrt{T}$ (рис.5.10).

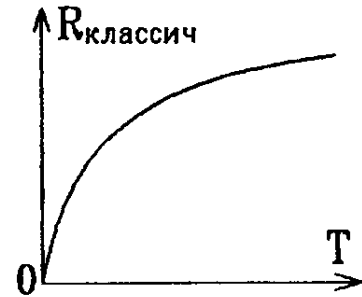


Рис.5.10

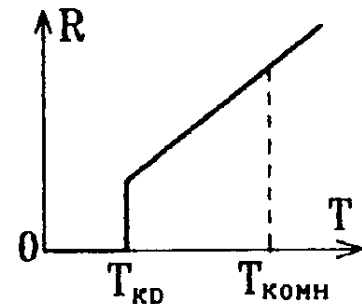


Рис.5.11

В действительности механизм возникновения сопротивления в металле объясняется квантовыми эффектами. При их учете вблизи комнатной температуры $T_{\text{комн}}$ сопротивление R возрастает с ростом T практически линейно, а для некоторых металлов при определенной критической температуре $T_{\text{кр}}$ может скачком падать до нуля (явление сверхпроводимости) (рис.5.11). Здесь мы не будем касаться квантовой теории, но и классическая теория позволяет достаточно точно описать многие явления проводимости.

4 Закон Джоуля-Ленца

При протекании тока I по участку проводника, заряд $dq = Idt$ проходит разность потенциалов (падение напряжения на участке) $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ (рис.5.12). Кулоновские силы совершают над зарядом работу $dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = UI dt$, которая должна идти на увеличение энергии носителей заряда. Но так как их средняя дрейфовая скорость и концентрация n неизменны, то эта энергия выделяется в проводнике, по которому течет ток, в виде тепла: $dQ = UI dt$. С учетом закона Ома $U = IR$, количество выделившегося тепла при пропускании тока в однородном проводнике выражается формулой:

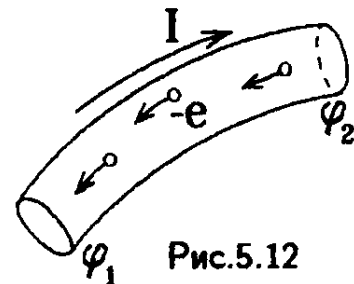


Рис.5.12

$$Q = \int UI dt = \int I^2 R dt$$

– это закон Джоуля-Ленца.

Этот закон легко понять с точки зрения классической электронной теории. Действительно, свободные электроны, пролетая среднюю длину свободного пробега λ за время $\tau = \lambda / \langle v \rangle$, приобретают дополнительную скорость

$$v' = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE\lambda}{m \langle v \rangle}.$$

При столкновении с атомами эта скорость теряется, т.е. средняя кинетическая энергия $\frac{m(v')^2}{2}$, приобретаемая свободным электроном под действием поля $\vec{E}$ за время между соударениями, переходит в тепло. Но, в среднем, каждый свободный электрон за малое время dt пролетает путь $\langle v \rangle dt$ и испытывает $\frac{\langle v \rangle dt}{\lambda}$ соударений. Если умножить энергию, выделяемую одним электроном при соударении, на число таких соударений за время dt и на число всех свободных электронов nSl

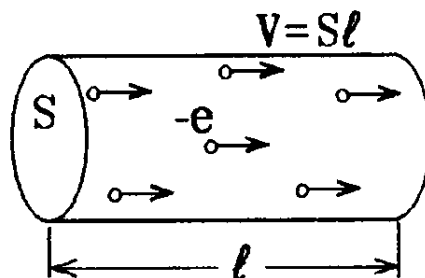


Рис.5.13

в участке проводника (рис.5.13), то получим выражение теплоты, выделяемой на всем этом участке при протекании постоянного тока:

$$dQ = \frac{m}{2} \left(\frac{eE\lambda}{m \langle v \rangle} \right)^2 \frac{\langle v \rangle dt}{\lambda} nSl = \frac{e^2 n \lambda}{2m \langle v \rangle} l S E^2 dt.$$

Вспоминая теперь, что для постоянного поля $El = \varphi_1 - \varphi_2 = U$ или $E = \frac{U}{l}$, и что $\rho = \frac{2m \langle v \rangle}{e^2 n \lambda}$, находим

$$dQ = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} U^2 dt = \frac{U^2}{R} dt = \frac{(IR)^2}{R} dt, \quad \text{т.е.} \quad \boxed{dQ = I^2 R dt}.$$

Джоулево тепло при протекании тока выделяется за счет неупругих соударений носителей тока (электронов) с атомами среды.

Замечание. Так как $I = jS = \sigma ES = \frac{ES}{\rho}$ и $R = \rho \frac{l}{S}$, то

$$dQ = \left(\frac{ES}{\rho} \right)^2 \rho \frac{l}{S} dt = \frac{E^2}{\rho} S l dt, \quad \text{где } Sl = V - \text{объем проводника.}$$

Таким образом, в единице объема среды за единицу времени выделяется джоулево тепло $\dot{Q}_{\text{уд}} = \sigma E^2 = E^2 / \rho = \rho j^2$ [Дж/(м³с)].

Величину $P = UI = I^2 R$ называют мощностью постоянного тока. Очевидно, она равна джоулеву теплу, выделяемому в проводнике за единицу времени.

А теперь зададимся вопросом: законы Ома и Джоуля-Ленца полу-

ченны, вообще говоря, для постоянного тока. Всегда ли их можно использовать на практике? Ведь постоянный ток встречается нечасто. Например, в бытовой сети $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$, где $\nu = 50$ Гц.

Прежде, чем ответить на этот вопрос, исследуем, при каких условиях ток постоянен (стационарен).

5 Условие стационарности тока

Окружим участок проводника, по которому течет ток с плотностью $\vec{j}$, замкнутой поверхностью S (рис.5.14). По определению вектора $\vec{j}$ его поток по этой поверхности равен суммарному току I , вытекающему из замкнутой поверхности S : $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I = -\frac{dq}{dt}$, где q — это суммарный заряд внутри поверхности S .

(Если ток вытекает из поверхности, то заряд внутри нее уменьшается, так как направление тока определяется направлением перемещения положительных зарядов.)

Но $q = \int_V \rho dV$, где ρ — это плотность заряда. Применяя теорему

Остроградского: $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\text{div } \vec{j}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$,

получаем $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Уравнения

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{\text{внутри}}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \equiv \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

называются уравнениями непрерывности электрического заряда (в интегральной и дифференциальной формах соответственно). Они выражают закон сохранения электрического заряда.

Заряд не может бесследно исчезнуть или возникнуть в какой-либо области. Поэтому при изменении заряда в некоторой области он должен вытекать или втекать в нее, создавая электрический ток.

Но если заряды в проводнике перераспределяются (в одной области суммарный заряд уменьшается, а в другой — увеличивается), то изменяются и потенциалы этих областей. А изменение потенциалов со временем приводит к изменению электрического поля. Поэтому и ток $\vec{j}$ не будет постоянным. Отсюда следует условие стационарности тока:

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

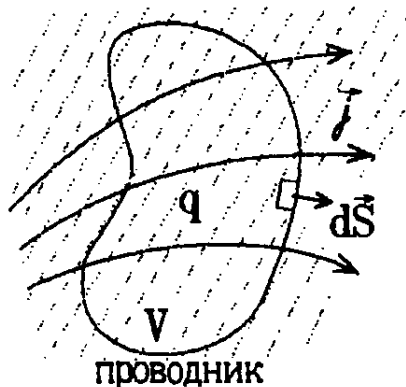


Рис.5.14

Для того, чтобы ток был постоянен, распределения потенциала и заряда в любой области проводящей среды должны быть постоянными во времени. Заряды могут перемещаться по проводнику, но какой заряд втекает в любую его область, такой же заряд и вытекает из нее (рис.5.15).

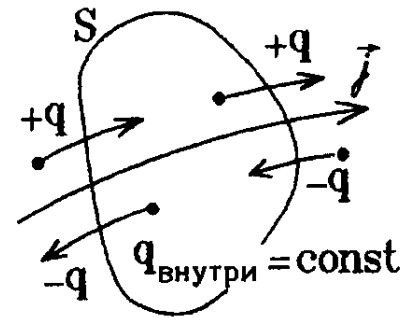


Рис.5.15

А так как точки, где $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$ являются точками, где линии вектора $\vec{j}$ возникают или исчезают, то линии постоянного или стационарного тока нигде не должны начинаться или заканчиваться: они замкнуты (рис.5.16).

Поэтому

цепь постоянного тока обязательно должна быть замкнута.

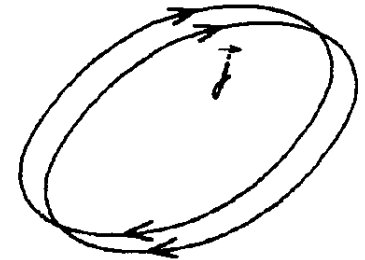


Рис.5.16

Замечание. Если $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, то линии нестационарного, переменного тока, вообще говоря, не замкнуты. Они начинаются в местах, где плотность заряда убывает, и заканчиваются там, где плотность заряда увеличивается. При выполнении условия $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ справедлив закон Ома в локальной форме $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Но тогда в однородном проводнике с неизменной во всех точках удельной проводимостью σ получаем $\operatorname{div} \vec{E}_{\text{внутр}} = 0$, и по теореме Гаусса $\operatorname{div} \vec{E}_{\text{внутр}} = \frac{\rho_{\text{внутр}}}{\epsilon_0} = 0$.

Внутри проводника, по которому течет постоянный ток, локальная плотность электрического заряда равна нулю, как и в случае электростатики, но само поле $\vec{E}_{\text{внутр}} = \vec{j}/\sigma = \text{const}$ не равно нулю.

Избыточный ненулевой заряд может появиться только в тех местах, где проводник неоднороден, или где он граничит с другой проводящей или непроводящей средой, то есть на поверхности проводника (рис.5.17). Этот заряд с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пов}}$ создает вне проводника нормальную составляющую E_n к его поверхности, а тангенциальная составляющая $E_\tau = E_{\text{внутр}}$ на границе двух сред сохраняется. Поэтому вблизи поверхности проводника, по которому течет постоян-

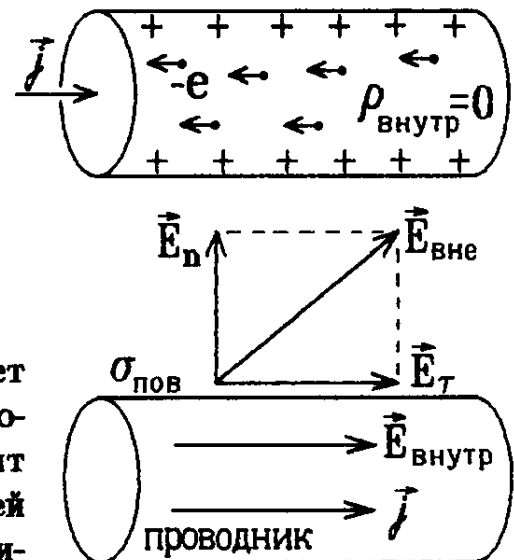


Рис.5.17

ный ток, поле $\vec{E}_{\text{вне}}$ может быть направлено под некоторым углом α к поверхности проводника с током. Такое поле, созданное движущимися зарядами в случае стационарного тока, обладает всеми свойствами обычного электростатического поля.

Рассмотрим теперь переменный ток $j = j(t)$. Оказывается, что если он изменяется достаточно медленно, то для него также можно применять закон Ома и другие законы постоянного тока.

Действительно, при изменении потенциалов в каком-либо месте проводника изменение электрического поля передается со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. И если при этом размер проводника равен l , то за время $\tau = l/c$ в нем успевает установиться новое распределение потенциалов, соответствующее значению тока в данный момент в каждой точке проводника. Это аналогично установлению равновесного состояния в термодинамической системе. Поэтому время τ также называется временем релаксации.

Пусть ток $j = j(t)$ меняется медленно в течение промежутка времени $t \gg \tau$. Тогда в любой момент t во всех точках цепи будет выполняться условие $\text{div } \vec{j} = -\partial \rho / \partial t \approx 0$, позволяющее считать ток в данный момент практически постоянным.

Такой медленно изменяющийся со временем ток называется квазистационарным. Пусть он изменяется по гармоническому закону: $I = I_0 \cos \omega t$. Тогда условие квазистационарности тока имеет вид:

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{c}{l}, \text{ где } l - \text{размер цепи.}$$

Для квазистационарных токов можно применять законы постоянного тока.

В компьютерах, например, размер цепей $l \sim 0,1$ м, и условие квазистационарности принимает вид $\omega \ll \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,1 \text{ м}} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$! Поэтому, даже в компьютерных цепях, где частота переменного тока достигает 100 МГц, всё же можно использовать законы постоянного тока. А в бытовых электросетях ток с малой частотой $\nu = 50$ Гц заведомо квазистационарен.

Пример: конденсатор емкости C с зарядом q_0 в момент времени $t = 0$ замкнули на сопротивление R (рис.5.18).

Разряд происходит достаточно медленно, и ток разряда $I = -\frac{dq}{dt}$ квазистационарен. Падения напряжения на конденсаторе и сопротивлении одинаковы:

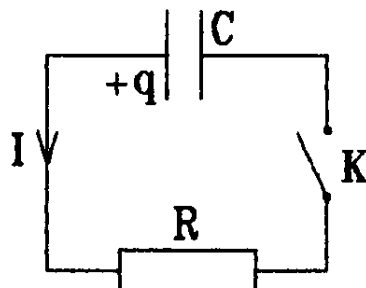


Рис.5.18

$$U = \frac{q}{C} = IR = -\frac{dq}{dt}R.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC},$$

следовательно $q = q_0 e^{-t/(RC)}$. Заряд на разряжающемся конденсаторе будет изменяться по экспоненциальному закону и за время $\tau = RC$ убывает в e раз (рис.5.19).

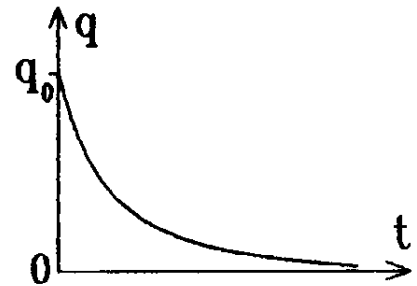


Рис.5.19

Замечание: переменный ток нельзя считать квазистационарным в таких устройствах, как антенны, микроволновые приборы, импульсные радиоустройства (включая линии задержки).

6 Электродвижущая сила (э.д.с.)

Если на концах проводника создать разность потенциалов, то свободные носители заряда под действием электростатических сил быстро перераспределятся так, чтобы скомпенсировать поле внутри проводника и сделать потенциал проводника всюду одинаковым ($\varphi_{\text{пров}} = \text{const}$). Электрический ток при этом прекращается.

Поэтому для поддержания ненулевой разности потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ и создания постоянного тока должны присутствовать дополнительные силы неэлектростатической природы (рис.5.20). Это химические, диффузионные и другие силы. Они совершают работу против электростатических кулоновских сил, возвращая свободные носители заряда обратно, и называются сторонними силами.



Рис.5.20

При наличии постоянного тока в проводнике на свободные носители заряда q действуют, вообще говоря, как кулоновские силы $\vec{F}_{\text{кул}} = q\vec{E}_{\text{кул}}$, так и сторонние силы $\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}_{\text{ст}}$, где $\vec{E}_{\text{ст}}$ – напряженность поля сторонних сил (рис.5.21). Но если в однородном проводнике плотность тока в любой точке определяется проводимостью σ и напряженностью электростатического кулоновского поля в данной точке: $\vec{j} = \sigma\vec{E}_{\text{кул}}$ (закон Ома), то при появлении сторонних сил они должны складываться с кулоновскими:

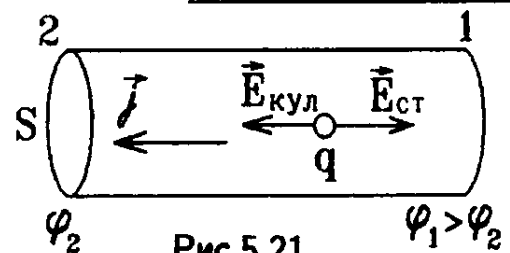


Рис.5.21

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{ст}}) .$$

Участок проводника, на котором действуют сторонние силы, называется неоднородным.

В тонком неоднородном проводнике векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$ направлены вдоль оси, перпендикулярно сечению проводника S . Интегрируя по длине проводника обе части предыдущего равенства, в случае постоянного или квазистационарного (рис.5.21) тока получим:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} .$$

Учтем, что $\frac{1}{\sigma} = \rho$, $j = \frac{I}{S} = \text{const}$, поэтому $\int_1^2 \frac{1}{\sigma} j dl = I \rho \frac{l}{S} = IR$.

Первое слагаемое справа, как следует из законов электростатики, является разностью потенциалов: $\int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Работу сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда называют электродвижущей силой (э.д.с.) $\mathcal{E}$, действующей на данном участке цепи:

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} .$$

Как и разность потенциалов, э.д.с. измеряется в вольтах.

С учетом этого определения получаем выражение

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} .$$

Это – закон Ома для неоднородного участка проводника, включающего э.д.с. $\mathcal{E}_{12}$, причем $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на его концах или падение напряжения на неоднородном участке цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}_{12} - IR .$$

Еще раз подчеркнем, что ненулевая разность потенциалов, а следовательно, и отличное от нуля электростатическое поле $\vec{E}_{\text{кул}} = -\text{grad } \varphi$ внутри проводника могут существовать только в одном случае – если на границах проводника возникают неэлектростатические сторонние силы, поддерживающие разность потенциалов неизменной, несмотря на перемещение свободных зарядов.

Такие сторонние силы возникают только в местах химической неоднородности проводников, в местах контакта разнородных проводников, или в местах, где на проводник действует переменное магнитное поле. Эти места называются источниками э.д.с. Именно на их краях

возникает постоянная разность потенциалов, приводящая к появлению тока в цепи.

Пример: замкнутая цепь, в которой положительная клемма А и отрицательная клемма В источника э. д. с. замкнуты однородным проводником (рис.5.22).

Потенциал $\varphi_A > \varphi_B$, и линии тока I выходят из клеммы «+» источника э. д. с. и входят в клемму «-», так как под действием кулоновских сил в однородном проводнике ток должен течь в сторону убывания потенциала $\vec{E}_{\text{кул}} = -\text{grad } \varphi$. Изменение потенциала φ вдоль этой цепи показано на рис.5.23. Поскольку линии постоянного тока замкнуты, то один и тот же ток I должен течь в одном направлении во всех точках цепи. На однородном участке цепи движение положительных зарядов $+q$, создающее ток I , обусловлено электростатической силой $\vec{F}_{\text{кул}}$ (рис.5.23). А в источнике э. д. с. (участок АВ) это движение поддерживается сторонней силой $\vec{F}_{\text{ст}}$, и ток течет в сторону возрастания потенциала.

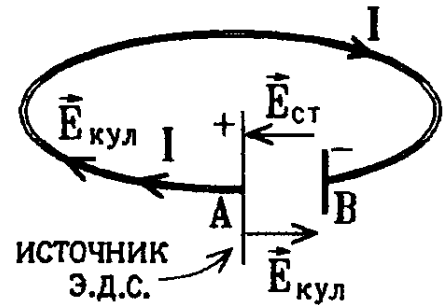


Рис.5.22

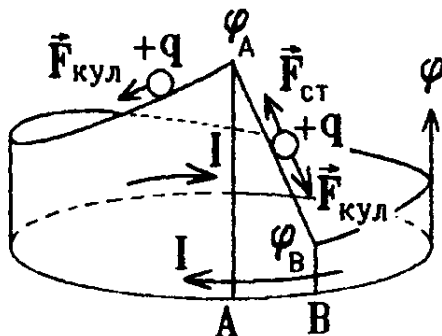


Рис.5.23

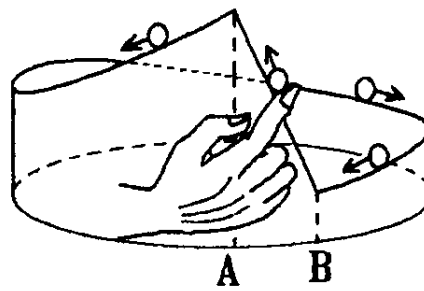


Рис.5.24

На рис.5.24 показан аналогичный пример из механики: шарик скатывается по желобу под действием силы тяжести, и поднимается на горку АВ сторонней силой.

Как правило, в цепях постоянного тока э. д. с. $\mathcal{E}$ создается в специальных устройствах – батареях, аккумуляторах, гальванических элементах. Каждый такой элемент обозначается символом $\begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array}$ и имеет некоторое сопротивление r , которое называется внутренним сопротивлением источника э. д. с. . Оно соединено последовательно с сопротивлениями остальных участков цепи. Поэтому закон Ома для участка цепи, содержащего источник э. д. с. $\mathcal{E}$, имеет вид:

$$I(R + r) = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

где R – суммарное сопротивление однородных проводников на этом участке цепи.

Если цепь постоянного тока, содержащая несколько источников

э. д. с. (батарей), замкнута (точка 1 совпадает с точкой 2) (рис.5.25), то $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_1 = 0$. Тогда получим закон Ома для замкнутой цепи:

$$\sum \mathcal{E} = I(R + r) \quad \text{или} \quad I = \frac{\sum \mathcal{E}}{R + r}.$$

В числителе последней формулы стоит алгебраическая сумма всех э. д. с. в цепи, а в знаменателе – сумма всех сопротивлений, включающая внутренние сопротивления источников э. д. с.

Чтобы правильно записать знаки э. д. с. в этой сумме, необходимо прежде всего выбрать направление обхода цепи. Тогда знак э. д. с. определяется ориентацией полюсов батареи относительно направления обхода. Например, для цепи, показанной на рис.5.25, формула закона Ома примет вид:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Замечание: квазистационарный ток может протекать по участку цепи, включающему конденсатор (рис.5.26). В этом случае на конденсаторе возникает заряд q , и падение напряжения $U_C = q/C$. Распределение потенциала на этом участке также показано

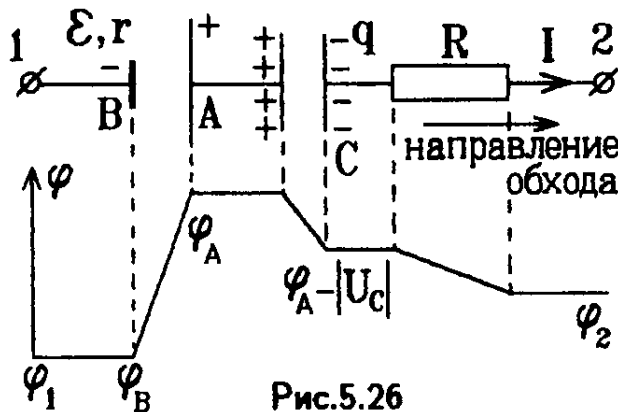


Рис.5.26

на рис.5.26. Закон Ома для участка цепи, содержащего конденсатор, запишется как

$$I(R + r) + U_C = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$$

(Источник э. д. с. стремится зарядить конденсатор, а ток $I = dq/dt$, созданный этим источником, разряжает конденсатор.)

Заметим также, что если через батарею с э. д. с. $\mathcal{E}$ течет ток, то разность потенциалов на клеммах этой батареи, или падение напряжения на ней,

$$U_{\text{ист}} = \varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E} - Ir.$$

При этом следует иметь в виду, что напряжение на клеммах батареи $U_{\text{ист}} < \mathcal{E}$, если ток течет в направлении обхода, указанном на рис.5.26 (разряжает батарею), и $U_{\text{ист}} > \mathcal{E}$, если ток течет в противоположном направлении (заряжает батарею). Для измерения величины э. д. с. $\mathcal{E}$ надо присоединять вольтметр к клеммам отключенной батареи.

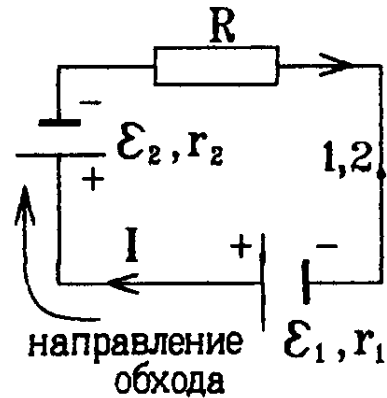


Рис.5.25

7 Правила Кирхгофа

Если электрическая цепь имеет сложный, разветвленный вид, то законы постоянного тока для нее пишутся в виде правил Кирхгофа. Пример такой цепи показан на рис.5.27.

Узлом называется точка, в которой соединяются три или более проводников. Так, например, цепь на рис.5.27 имеет четыре узла: А, В, С и D.

Первое правило Кирхгофа следует из условия стационарности тока. Окружим, например, узел А замкнутой поверхностью S . Тогда $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$, т.е. заряд (ток), вытекающий из поверхности S , равен заряду (току), втекающему в нее. Поэтому

алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0.$$

Это – первое правило Кирхгофа. Число токов в сумме должно равняться числу проводников, сходящихся в узле. Токи, направленные к узлу или от него, входят в сумму с разными знаками. Так, для узла В на рис.5.27 имеем:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Вдоль каждого выходящего из узла проводника надо в произвольном направлении обозначить стрелкой ток, текущий по этому проводнику (рис.5.27). Если направление тока выбрано неверно, то при решении системы уравнений величина тока получится отрицательной.

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для неоднородных участков проводника.

Замкнутым контуром называется сплошная линия, проведенная из любого узла вдоль проводников цепи, и возвращающаяся в этот узел, нигде не пересекая себя. Так, цепь на рис.5.27 имеет семь различных замкнутых контуров, показанных на рис.5.28.

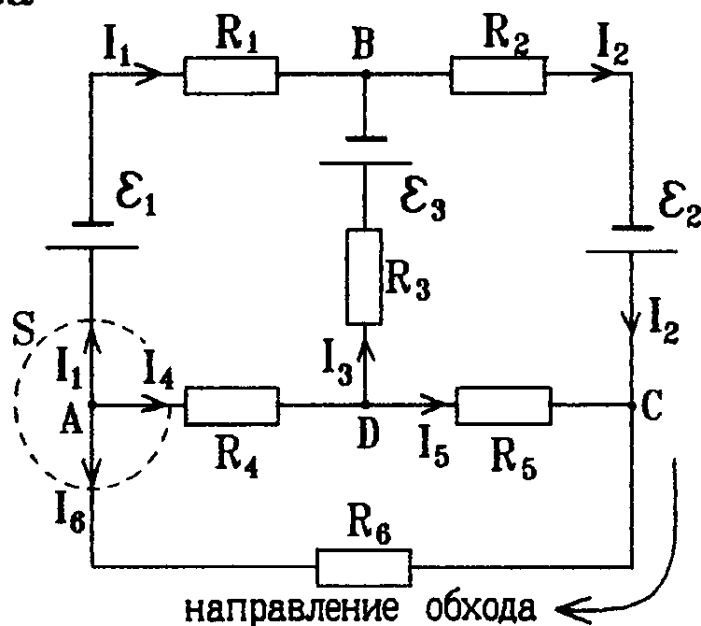


Рис.5.27

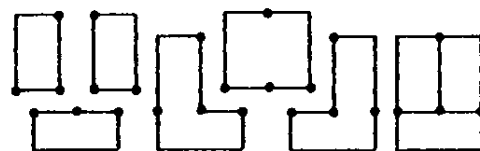


Рис.5.28

Разбиваем любой замкнутый контур на участки, соединяющие соседние узлы. Например, для внешнего контура цепи, изображенной на рис.5.27, это будут участки АВ, ВС и СА. Записываем для них закон Ома с учетом направления обхода:

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_1 r_1 &= \varphi_A - \varphi_B - \mathcal{E}_1, \\ I_2 R_2 + I_2 r_2 &= \varphi_B - \varphi_C + \mathcal{E}_2, \\ -I_6 R_6 &= \varphi_C - \varphi_A \end{aligned} \right\}$$

и складываем полученные выражения. Разности потенциалов в сумме дают ноль, и мы получаем второе правило Кирхгофа.

Алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления (включая внутренние сопротивления источников э.д.с.) в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме э.д.с. в этом же замкнутом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \mathcal{E}_i.$$

Чтобы учесть знаки в указанной сумме, выбираем направление обхода контура. Если выбранное произвольно направление тока совпадает с направлением обхода, то в сумму соответствующее слагаемое входит со знаком «+», в противном случае – со знаком «-». Правило определения знаков э.д.с. в сумме указано в предыдущем параграфе. Так, например, для внешнего замкнутого контура на рис.5.27 с учетом выбранного направления обхода второе правило Кирхгофа запишется в виде

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) - I_6 R_6 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1.$$

Замечание: не следует писать правила Кирхгофа для всех узлов и замкнутых контуров цепи. Эти уравнения линейно зависимы. Если цепь имеет N узлов, первые правила Кирхгофа следует писать для любых $(N - 1)$ узлов. Вторые правила Кирхгофа можно записать только для

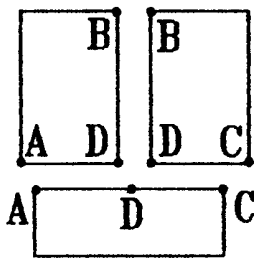


Рис.5.29

простейших, наименьших замкнутых контуров, внутри которых нет других участков цепи (рис.5.29). Записанная таким образом линейная система уравнений достаточна для определения всех неизвестных токов I_i во всех ветвях цепи.

Наконец, если токи в разветвленной цепи квазистационарны, а в цепь включены конденсаторы, то при записи второго правила Кирхгофа следует учесть сумму падений напряжения на конденсаторах в выбранном замкнутом контуре:

$$\sum_i I_i R_i + \sum_i U_{Ci} = \sum_i \mathcal{E}_i.$$

Глава 6.

Контактные явления в проводниках

1 Работа выхода электрона из металла

Свободные электроны металла движутся по кристаллической решетке хаотически с огромными скоростями $v \sim 10^6$ м/с (рис.6.1). В целом металл электрически нейтрален. Если бы его потенциал был равен потенциалу окружающей среды (вакуума), то ничто не препятствовало бы вылету свободных электронов за пределы металла.

В действительности на границе проводника создается эффективное электрическое поле, препятствующее такому вылету. Металл окружен очень тонким отрицательно заряженным слоем электронов, а ионы на границе металла образуют слой положительного заряда той же величины.

Такое распределение заряда на границе металла создает двойной электрический слой (рис.6.2), толщина которого не превышает нескольких межатомных расстояний. Электрическое поле $\vec{E}_{\text{гп}}$ двойного слоя препятствует вылету свободных электронов в вакуум. Как видно из рис.6.2 и 6.3, энергия электрона $W = -e\varphi$ за пределами металла, в вакууме, больше, чем внутри металла, а для потенциалов электрического поля на границе выполняется условие $\varphi_{\text{мет}} > \varphi_{\text{вак}}$.

Чтобы электрон вылетел из металла, ему надо совершить работу против сил этого граничного электрического поля и приобрести энергию

$$\Delta W = W_{\text{вак}} - W_{\text{мет}} = +e(\varphi_{\text{мет}} - \varphi_{\text{вак}}) = e\varphi_{\text{в}}$$

Величина $\varphi_{\text{в}}$ называется потенциалом выхода электрона из металла.

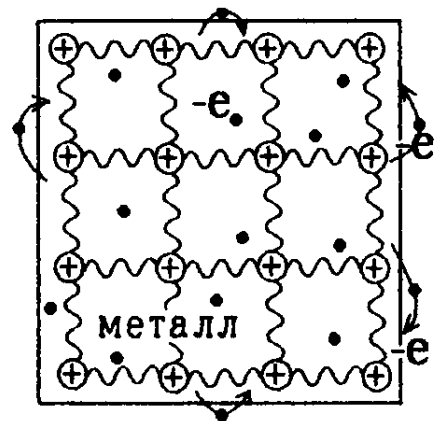


Рис.6.1

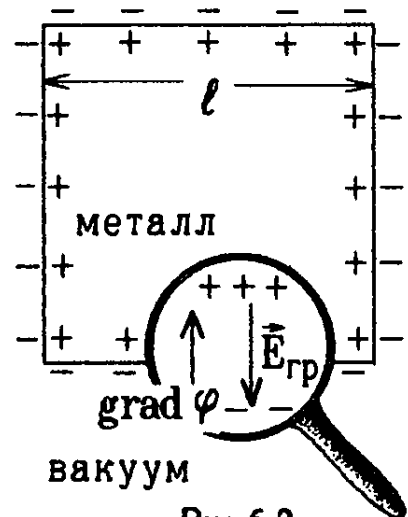


Рис.6.2

Из графика потенциальной кривой (рис.6.3) видно, что электроны в металле находятся в потенциальной яме. Как будет показано при изучении квантовых законов, электроны в такой яме могут иметь не какие угодно, а только определенные разрешенные значения энергии, причем каждое разрешенное значение энергии может иметь только один электрон. Естественно, что электроны стремятся обладать как можно меньшей энергией и поэтому занимают низшие разрешенные энергетические уровни (рис.6.3).

Наибольшее значение энергии свободного электрона в металле при этом практически совпадает с величиной, которую называют энергией Ферми E_F или химическим потенциалом металла. Эта величина характеризует те электроны в металле, которые обладают наибольшими скоростями, и которым легче всего вырваться из металла.

Работой выхода электрона из металла называется минимальная энергия, которую надо сообщить электрону в металле, чтобы он преодолел поле двойного электрического слоя и вылетел за пределы металла: $A_{\text{вых}} = W_{\text{вак}} - E_F = e\varphi_B$.

Очевидно, что сообщить эту энергию надо наибо́льшей скоростью электронам, чья энергия совпадает с энергией Ферми E_F . Для металлов работа выхода $A_{\text{вых}}$ примерно равна $2 \div 5$ эВ и сильно снижается при загрязнении поверхности.

При нагревании металла его электроны могут получать дополнительную тепловую энергию $\frac{3}{2}kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, очень незначительную по сравнению с величиной работы выхода, так как при комнатной температуре $T_{\text{комн}} = 300$ К, например, тепловая энергия $\frac{3}{2}kT_{\text{комн}} \approx 6 \cdot 10^{-21}$ Дж $\approx 0,04$ эВ $\ll A_{\text{вых}}$.

Следует заметить, что величина энергии Ферми $E_F(T)$ будет возрастать с ростом температуры, но очень слабо.

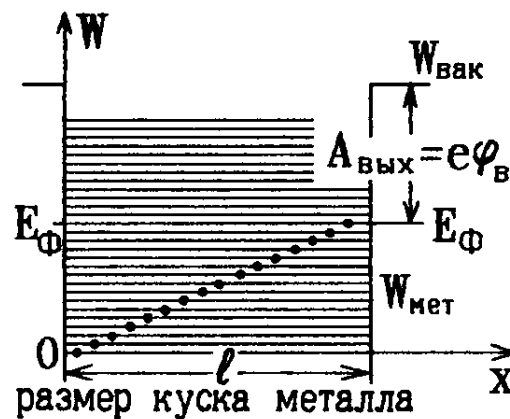


Рис.6.3

2 Контактная разность потенциалов

Металлы различаются значениями концентрации свободных электронов n , работой выхода и величиной энергии Ферми E_F . Чем больше концентрация свободных электронов, тем большую величину имеет

энергия Ферми, и тем меньше работа выхода электрона из металла (рис.6.4).

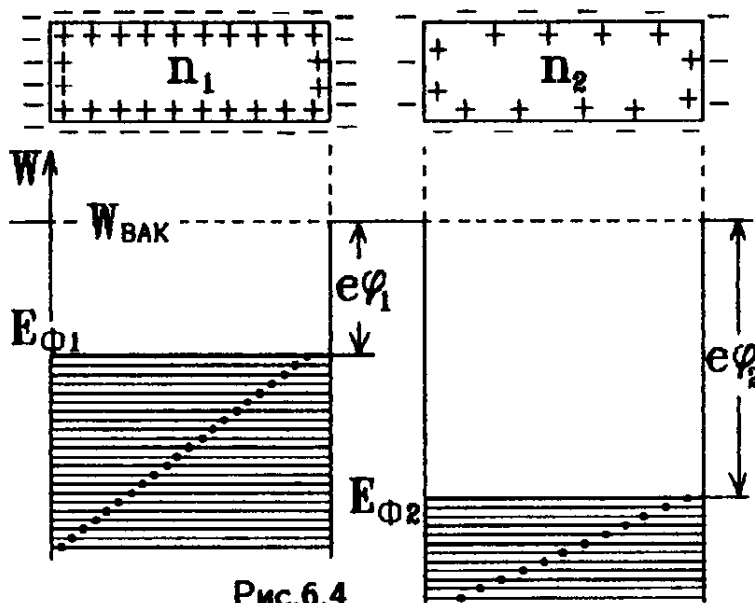


Рис.6.4

Если металлы соединить, то начнется диффузия свободных электронов из металла, в котором их концентрация больше, в металл, где она меньше. (рис.6.5).

Вопрос: будет ли эта диффузия продолжаться до тех пор, пока концентрации свободных электронов в металлах не сравняются?

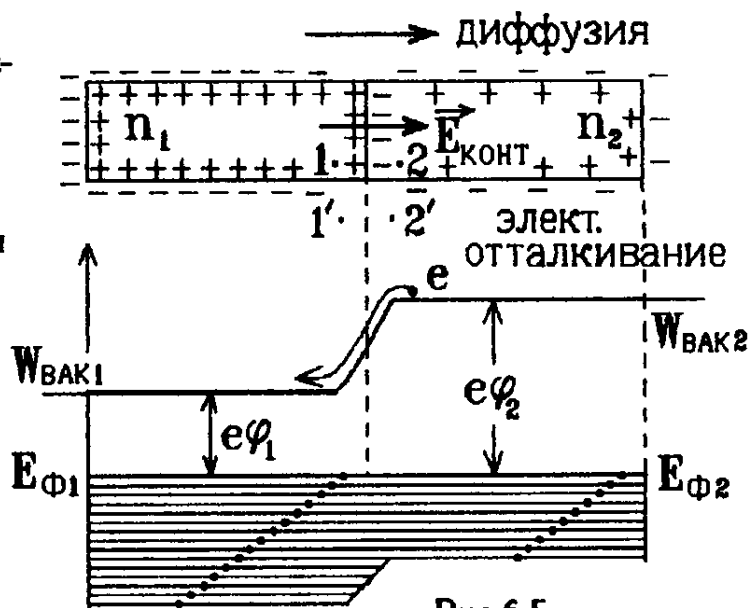
Ответ: нет, так как

при этом переносится и заряд. Один металл начнет заряжаться положительно, а другой – отрицательно, а вблизи границы раздела металлов возникнет двойной электрический слой, и появится электрическое поле $\vec{E}_{\text{конт}}$, которое отталкивает диффундирующие электроны обратно (рис.6.5).

Наступает динамическое равновесие: сколько электронов переносится через границу за счет диффузии, столько же и возвращается обратно электрическим полем в месте контакта.

При контакте, в состоянии динамического равновесия, энергии Ферми (средние энергии свободных электронов) в обоих металлах выравниваются, как показано на рис.6.5: $E_{\Phi 1} = E_{\Phi 2}$. Хотя потенциалы металлов постоянны ($\varphi_1 = \text{const}$, $\varphi_2 = \text{const}$), но они не равны между собой. Их разность $\varphi_2 - \varphi_1$ называется контактной разностью потенциалов.

Рис.6.5



Замечания.

1) Если разность потенциалов берется между точками 1 и 2 внутри

металлов, то она называется внутренней контактной разностью потенциалов, и если между точками 1' и 2', находящимися вблизи поверхности, но вне металлов, то $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{W_{\text{вак}2} - W_{\text{вак}1}}{e}$ — это внешняя контактная разность потенциалов.

2) Контактная разность потенциалов имеет неэлектростатическую природу (возникает за счет диффузии) и является электродвижущей силой, способной создать ток. Но если спаять в кольцо проводники из разных металлов (рис.6.6), то возникающие в контакте э.д.с. направлены навстречу друг другу и компенсируются: ток по такой замкнутой цепи не потечет.

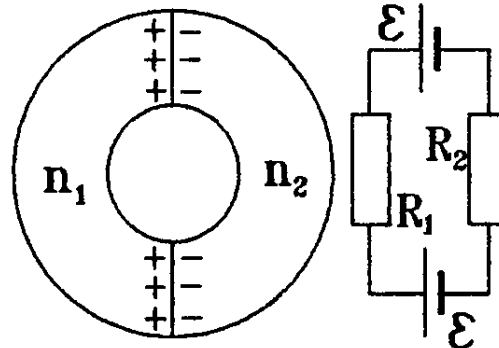


Рис.6.6

3) Внутри куска металла $\varphi = \text{const}$ только тогда, когда этот кусок однороден. В качестве примера неоднородного проводника рассмотрим проволоку, представляющую собой такой сплав двух металлов, в котором их концентрации меняются непрерывно и обращаются в нуль на разных концах проволоки (рис.6.7).



Рис.6.7

Соединим теперь концы проволоки в кольцо, как показано на рис.6.8а. Тогда в месте спая возникнет контактная э.д.с.

Вопрос: потечет ли по такому кольцу ток (второго контакта ведь нет)?

Ответ: разумеется не потечет. Иначе в проводнике выделялось бы джоулево тепло, хотя для этого отсутствуют источники энергии. Компенсирующая «контактная» э.д.с. противоположного направления равномерно распределена по всей длине проволоки (рис.6.8,б), которая неоднородна, и потому для нее $\varphi \neq \text{const}$.

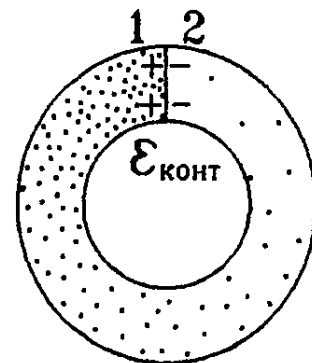


Рис.6.8а

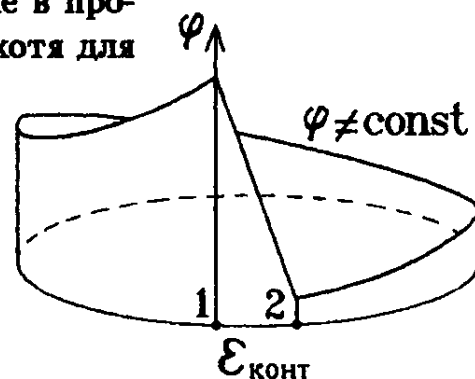


Рис.6.8б

3 Термоэлектрические явления

а) Явление Зеебека (1821 г.)

Спаянные в замкнутую цепь разнородные проводники называют-

ся термопарой (рис.6.9). Начнем нагревать один из спаев ($T_1 > T_2$). При нагревании энергия Ферми металлов слабо увеличивается, причем для различных металлов увеличивается по-разному. Контактные разности потенциалов в спаях тоже изменяются по-разному и уже не будут компенсировать друг друга. В термопаре появляется ненулевая результирующая термо-э.д.с. :

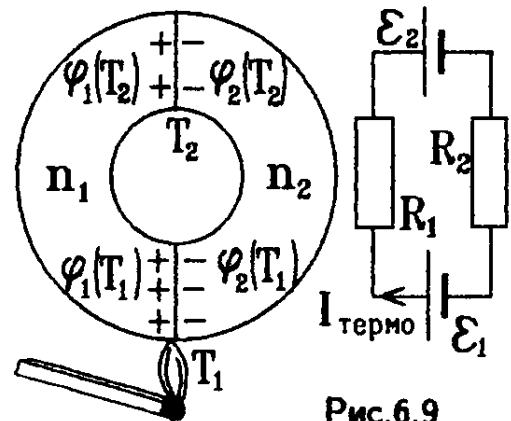


Рис.6.9

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \underbrace{[\varphi_1(T_1) - \varphi_2(T_1)]}_{\text{спай 1}} - \underbrace{[\varphi_1(T_2) - \varphi_2(T_2)]}_{\text{спай 2}} = \int_{T_2}^{T_1} \alpha_{12}(T) dT \neq 0.$$

Функция $\alpha_{12}(T)$ называется удельной термо-э.д.с. Она зависит от природы металлов и очень слабо зависит от температуры, так что при не очень большой разности температур ее можно считать постоянной:

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{термо}} = \alpha_{12}(T_1 - T_2)}.$$

Если поместить спай разнородных металлов в области с различной температурой, то по термопаре потечет ток $I_{\text{термо}}$, который можно использовать, например, для зарядки аккумуляторов. На этом принципе основана работа экологически чистых геотермальных станций, преобразующих тепло подземных источников в электрическую энергию. По величине тока $I_{\text{термо}}$ можно также определить разность температур, т.е. использовать термопару в качестве термометра.

в) Явление Пельтье (1834 г.)

Это явление обратное явлению Зеебека. Энергия свободного электрона $W = -e\varphi$ больше в той области, где металл заряжен отрицательно. Поэтому на границе двух металлов энергия электрона после преодоления контактного электрического поля должна измениться.

Если через такой спай пропустить электрический ток (рис.6.10), то движущиеся в обратном направлении электроны, проходя через спай, должны либо отдавать часть своей энергии, либо забирать

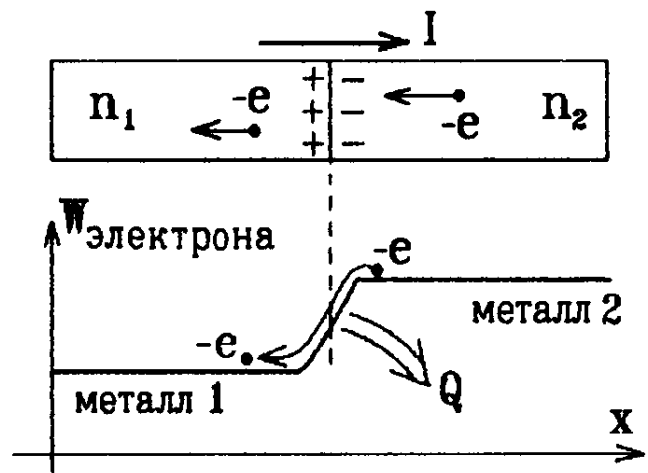


Рис.6.10

ее у кристаллической решетки в месте спая.

При пропускании электрического тока через спай разнородных металлов, спай будет либо нагреваться, либо, в зависимости от направления тока, охлаждаться. Это и есть явление Пельтье.

При этом выделяемое или поглощаемое тепло пропорционально протекающему через спай заряду Δq : $Q = \Pi_{12} \Delta q$. Коэффициент Π_{12} называется коэффициентом Пельтье и связан с удельной термо-э.д.с. соотношением $\Pi_{12} = \alpha_{12} T$.

б) Явление Томсона (1856 г.)

Это явление заключается в том, что тепло выделяется и при прохождении тока по однородному проводнику с градиентом температуры на концах.

Действительно, вблизи нагретого конца свободные электроны имеют большую тепловую скорость

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

чем вблизи холодного (рис. 6.11). Возникает перенос или диффузия «быстрых» электронов к холодному концу, а «медленных» — к нагретому.

Но «быстрые» электроны, имеющие большую скорость, быстрее доходят до противоположного конца, чем «медленные».

То есть у холодного края проводника скапливается некоторый избыток свободных электронов, создающий отрицательный заряд (рис. 6.11). Это, кстати, является одной из причин возникновения ненулевой термо-э.д.с.

Вблизи холодного края свободные электроны, следовательно, должны иметь большую электростатическую энергию $W_{эл}$, чем у нагретого. При прохождении электрона через проводник он должен получить или отдать эту разность энергий $W_{хол} - W_{нагр}$. То есть при пропускании тока от нагретого конца к холодному проводник будет нагреваться, а если изменить направление тока — охлаждаться.

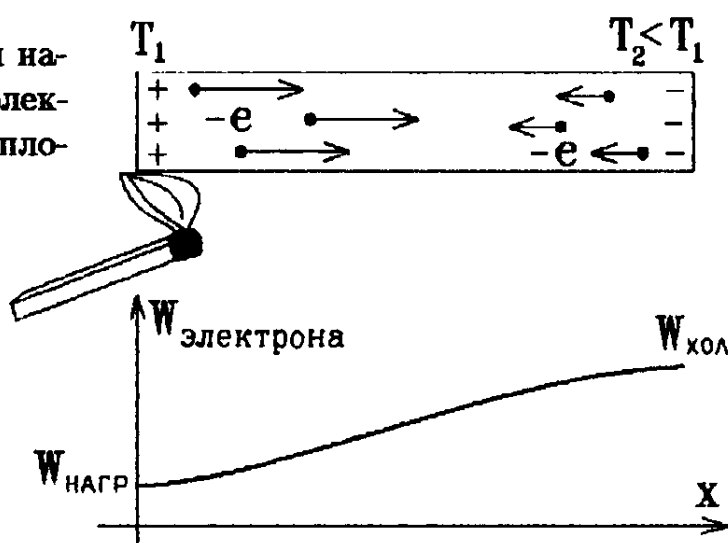


Рис. 6.11

Глава 7.

Магнитное поле в вакууме

1 Магнитная сила

Поместим неподвижную свободную частицу с зарядом q вблизи проводника с током или постоянного магнита (рис.7.1). Постоянный магнит на покоящуюся частицу не действует, а электрическим полем проводника с током можно пренебречь. В самом деле, хотя ток в металле создан движением свободных электронов, но заряд этих электронов практически скомпенсирован положительным зарядом решетки, и в целом проводник с током в этом случае можно считать электронейтральным.

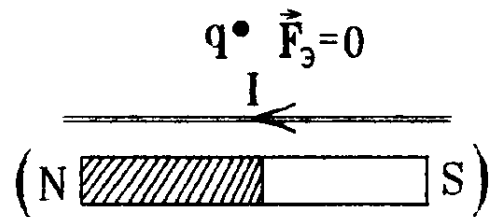


Рис.7.1

Но если частица с зарядом q движется, то ее траектория вблизи проводника с током (рис.7.2), а также вблизи постоянного магнита (рис.7.3)

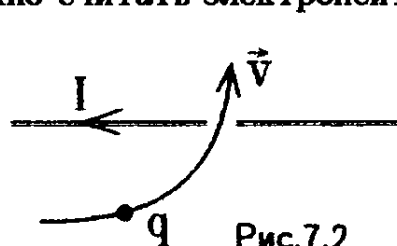


Рис.7.2

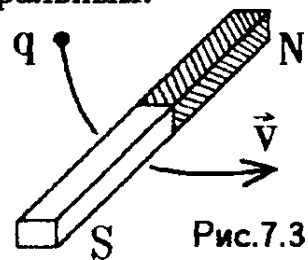


Рис.7.3

начнет искривляться. Из этого следует, что на нее действует какая-то сила неэлектростатической природы. Она была названа магнитной.

Магнитные силы действуют только на движущиеся заряды (токи) или на магниты.

Отдельные электрические заряды (положительные и отрицательные) существуют, а отдельных магнитных зарядов («северного» и «южного»), которые отталкивались или притягивались бы магнитными силами, в природе не наблюдается (рис.7.4). Если распилить постоянный магнит пополам, то получим два новых постоянных магнита (рис.7.5 и 7.6).

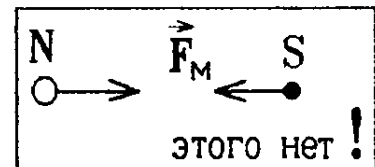
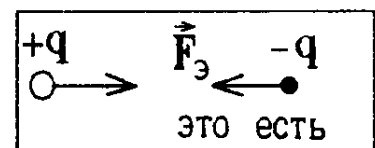


Рис.7.4

Замечание: возможно, что такие постоянные магнитные заряды существуют. Согласно гипотезе Дирака и предсказаниям современной физики элементарных частиц ими обладают микроскопические частицы, названные монополями, которые должны

были образоваться на начальных этапах развития нашей Вселенной. Но даже если они существуют, то слишком редки. Пороговая чувствительность современных приборов позволяет зарегистрировать монополи в случае, если на один гектар земной поверхности, сплошь заставленный детекторами частиц, за сутки будет падать не менее трех монополей. Для сравнения напомним, что крохотный ток в 1 мкА создается прохождением $\sim 6 \cdot 10^{12}$ электронов за 1 с.

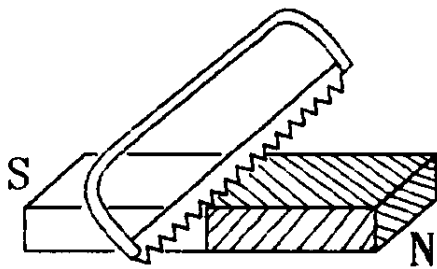


Рис.7.5

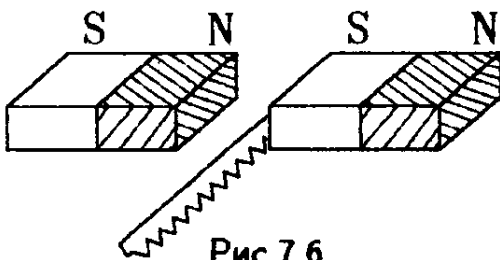


Рис.7.6

Так как монополи пока экспериментально не обнаружены, то, даже если они и существуют, их так мало в природе, что ими можно пренебречь. Таким образом, магнитное поле создается не магнитными зарядами. Попробуем ответить на вопрос: чем создается такое поле?

2 Релятивистская природа магнетизма.

Вектор индукции магнитного поля

Покажем, что магнитная сила имеет ту же природу, что и электрическая. Она является следствием релятивистских эффектов, возникающих при движении заряженных частиц.

Пусть по прямолинейному тонкому бесконечно длинному проводнику течет ток I . Параллельно проводнику на расстоянии r со скоростью $\vec{v}$ в ту же сторону, что и ток, движется положительный точечный заряд q . Из опыта следует, что магнитная сила начнет притягивать заряд q к проводнику с током.

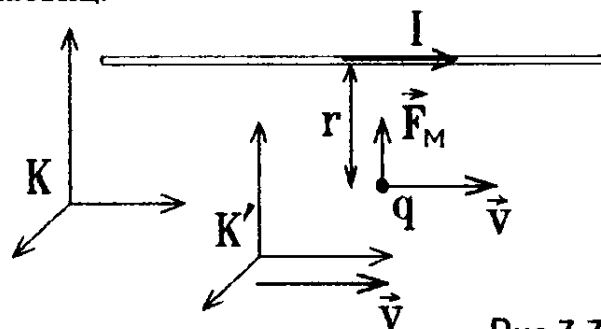


Рис.7.7

Но в другой инерциальной системе K' , движущейся вместе с зарядом q со скоростью $\vec{v}$, этот заряд покоится, и магнитной силы быть не должно. А по принципу относительности законы движения во всех инерциальных системах одинаковы, то есть сила притяжения должна сохраниться. Откуда же она берется?

Дело в том, что ток $I = jS = envS$ – это направленное движение вдоль проводника свободных электронов, n – их концентрация, S –

площадь сечения проводника. Тогда $n \cdot S \cdot 1 \text{ м}$ – это число свободных электронов в единице длины проводника (где $S \cdot 1 \text{ м}$ – объем единицы длины проводника), а $\frac{1 \text{ м}}{n \cdot S \cdot 1 \text{ м}}$ – это среднее расстояние между соседними свободными электронами, если они движутся «цепочкой», что справедливо для очень тонкого проводника (рис.7.8).

При этом дрейфовая скорость направленного движения носителей тока $u \approx 0,1 \text{ мм/с}$ очень мала, а так как на каждый свободный электрон приходится положительный ион решетки с зарядом $+e$, то среднее расстояние между положительными зарядами тоже равно l_0 (рис.7.8).

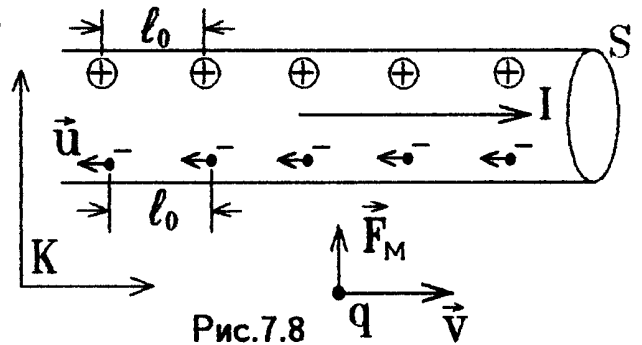


Рис.7.8

В сумме положительные и отрицательные заряды компенсируют друг друга, и проводник с током не заряжен и не взаимодействует с зарядом q электростатически.

Но в системе K' свободные электроны движутся со скоростью $(v+u)$, а положительные ионы – со скоростью v . Из-за релятивистского сокращения длины расстояние между свободными электронами будет чуть меньше, чем расстояние между положительными ионами (рис.7.9):

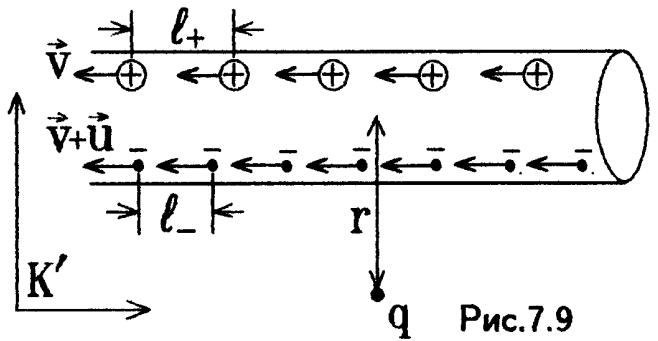


Рис.7.9

$$l_- = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v+u}{c}\right)^2} < l_+ = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Заряды уже не компенсируют друг друга и распределены вдоль проводника с результирующей линейной плотностью λ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{e}{l_+} + \frac{(-e)}{l_-} = \frac{e}{l_0} \left(\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} - \left[1 - \left(\frac{v+u}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \right) \approx \\ &\approx \frac{e}{l_0} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v+u}{c}\right)^2 \right) = \frac{e}{l_0} \left(-\frac{uv}{c^2} - \frac{u^2}{2c^2} \right) \approx -\frac{euv}{l_0 c^2} = \\ &= -eunS \frac{v}{c^2} = -\frac{Iv}{c^2}. \end{aligned}$$

При выводе этой формулы использовалось разложение в ряд по малой величине $\frac{v}{c}$ с точностью до членов порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^2$. Кроме того, было учтено, что $l_0 = \frac{1}{nS}$ и что $\frac{u^2}{2c^2} \approx 0$, поскольку

ку $u \ll v$. Таким образом $\lambda = -Iv/c^2$.

Отсюда видно, что вследствие лоренцева сокращения длины, проводник с током в системе K' оказывается линейно заряженным с плотностью λ (рис.7.10). Этот заряд создает на расстоянии r электрическое поле с напряженностью E' , которая была вычислена в §4 первой главы:

$$E' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Это поле притягивает неподвижный в системе K' заряд q к проводнику с силой

$$F_{\text{Э}}' = q|E'| = qv \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Согласно принципу относительности эта сила равна маг-

нитной силе в неподвижной системе отсчета K : $F_{\text{М}} = F_{\text{Э}}' = qvB$, где

величина $B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ характеризует магнитное поле, создаваемое прямолинейным током I . Она называется индукцией магнитного поля. Постоянная $\mu_0 = (\epsilon_0 c^2)^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м называется магнитной постоянной.

Но сила $\vec{F}_{\text{М}}$ – это вектор, ортогональный вектору скорости $\vec{v}$ заряда q . Поэтому магнитное поле описывают вектором индукции $\vec{B}$, также ортогональным направлению силы $\vec{F}_{\text{М}}$ (рис.7.11). На движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$ заряд q действует магнитная сила: $\vec{F}_{\text{М}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$, которую часто называют силой Лоренца.

Выводы.

1) Магнитное поле создают не магнитные заряды, а движущиеся электрические заряды или токи.

2) Магнитные силы имеют одну природу с электрическими. В одной инерциальной системе отсчета наблюдатель измеряет магнитную силу (с помощью магнитной стрелки), а в другой – она превращается в электрическую силу (которую надо измерять другим прибором). Таким образом, магнитное поле для одного наблюдателя является электрическим для другого. Поэтому электрическое и магнитное поля взаимосвязаны и образуют одно целое – электромагнитное поле.

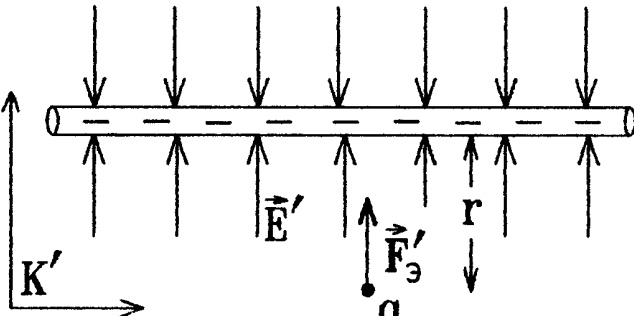


Рис.7.10

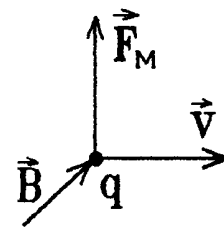


Рис.7.11

Переносчиками электрического и магнитного полей являются одни и те же виртуальные частицы (рис.1.1).

Замечание: индукцию магнитного поля определяют экспериментально по величине и направлению магнитной силы. Так как при замене правовинтовой системы координат на левовинтовую (рис.7.12) векторное произведение меняет знак, то для сохранения направления силы $\vec{F}_M$ должен измениться знак вектора $\vec{B}$. То есть вектор магнитной индукции $\vec{B}$, как и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, является аксиальным вектором. Единица измерения магнитной индукции в СИ – тесла [Тл].

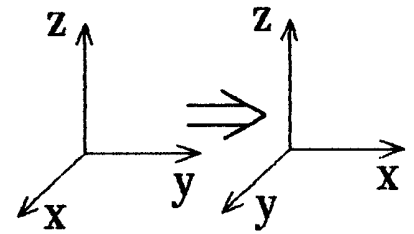


Рис.7.12

3 Релятивистские преобразования электрического и магнитного полей

Так как магнетизм – это релятивистский эффект движения заряженных частиц, то законы электромагнетизма уже удовлетворяют требованиям специальной теории относительности (то есть новых уравнений, как в механике, не требуется). При переходе из одной инерциальной системы в другую поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ меняются, переходят одно в другое. Они связаны релятивистскими формулами преобразования. Приведем их без вывода.

Пусть система K' движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ вдоль оси x относительно инерциальной системы K (рис.7.13). В некоторой точке x, y, z системы K в некоторый момент времени t по ее часам электрическое и магнитное поля имеют значения $\vec{E}$ и $\vec{B}$. В системе K' та же самая точка пространства-времени имеет координаты, связанные с координатами системы K преобразованиями Лоренца

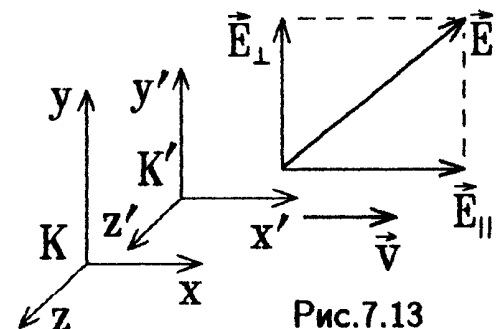


Рис.7.13

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а значения полей в ней равны $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$.

Разлагаем векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на составляющие, параллельные и перпендикулярные направлению скорости $\vec{v}$ (рис.7.13):

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, \quad \vec{E}' = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}, \quad \vec{B}' = \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}.$$

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля преобразуются при переходе из системы K в систему K' следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}, \vec{B}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \vec{B}'_{\perp} &= \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Продольные составляющие полей не меняются! Изменяются только поперечные компоненты.

Обратные преобразования можно получить заменой $\vec{v}$ на $(-\vec{v})$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel}, & \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel}, \\ \vec{E}_{\perp} &= \frac{\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v}, \vec{B}']}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \vec{B}_{\perp} &= \frac{\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}']}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

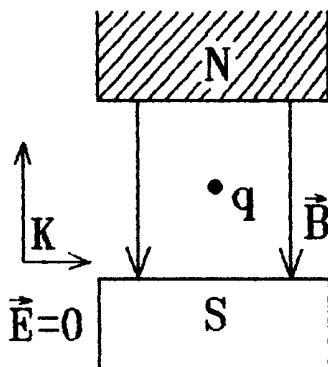


Рис.7.14

Пример: пусть в неподвижной системе K между полюсами неподвижного магнита находится неподвижный точечный заряд q (рис. 7.14). Очевидно, что на него не действуют ни магнитная, ни кулоновская силы: $\vec{F} = 0$. Перейдем теперь в систему K' , движущуюся вдоль магнита с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$ вправо (рис.7.15). В этой системе и заряд, и магнит движутся влево со скоростью $(-\vec{v})$.

Вопрос: будет ли на заряд действовать сила $\vec{F}'_{\text{М}} = q[-\vec{v}, \vec{B}'] \neq 0$? Начнет ли заряд отклоняться?

Ответ: в неподвижной системе K электрическое поле отсутствует: $\vec{E} = 0$, а $\vec{B} = \vec{B}_{\perp}$. Тогда в системе K' , движущейся со скоростью $v \ll c$, магнитное поле практически не изменяется:

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0, \quad \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx$$

$\approx \vec{B}_{\perp} = \vec{B}$, но появляется поперечное электрическое поле с напряженностью

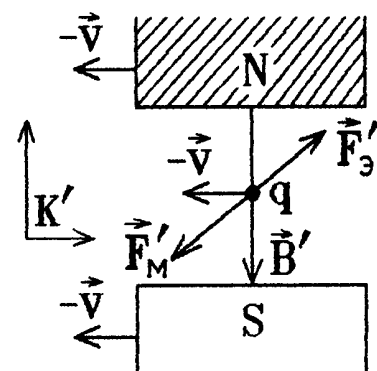


Рис.7.15

$$\vec{E}' = \vec{E}_\perp' = \frac{\vec{E}_\perp + [\vec{v}, \vec{B}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx [\vec{v}, \vec{B}] = [\vec{v}, \vec{B}'],$$

(так как $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$). Следовательно, на заряд q действует дополнительная электрическая сила $\vec{F}_3' = q\vec{E}' = q[\vec{v}, \vec{B}']$. Суммарная сила $\vec{F}' = \vec{F}_M' + \vec{F}_3' = 0$ отсутствует и в движущейся системе K' , т.е. заряд q не отклоняется в поперечном направлении.

А теперь – «обратный» пример. Постоянный магнит движется с той же скоростью, что и заряд q (рис.7.16). Из опыта известно, что равномерно движущийся магнит не создает электрического поля. На заряд q действует только магнитная сила $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}]$, отклоняющая заряд в сторону. Можно перейти в инерциальную систему отсчета, где магнит и заряд покоятся и магнитная сила отсутствует. Но в этой системе появится электрическое поле $\vec{E}' \neq 0$, по-прежнему отклоняющее заряд.

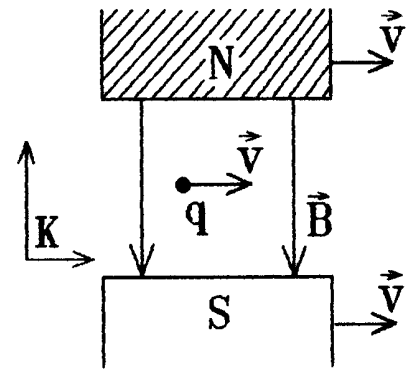


Рис.7.16

Таким образом, магнитная сила $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}]$ появляется всякий раз, когда заряд движется в магнитном поле независимо от относительного движения источников магнитного поля.

Из сравнения двух приведенных примеров можно сделать вывод:

при переходе из одной системы в другую электрическое и магнитное поля преобразуются друг в друга. Поэтому одновременно надо учитывать и электрическую, и магнитную силы, действующие на заряд: $\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ – эту суммарную силу следует называть силой Лоренца. Разделение такой полной силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие относительно, так как зависит от выбора системы отсчета.

Можно проверить, что хотя поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, но их комбинации

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' = \text{inv} \quad \text{и} \quad \vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = \vec{E}'^2 - c^2 \vec{B}'^2 = \text{inv}$$

не изменяются, то есть являются релятивистскими инвариантами.

Замечание: отсюда следует, что если в какой-либо системе векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ортогональны, т.е. $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, то они будут ортогональны и в любой другой системе: $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$. В этом случае можно найти такую инерциальную систему, где одно из полей отсутствует:

$$\vec{B}' = 0, \text{ а } \vec{E}' \neq 0, \text{ если } \vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 > 0 \text{ или}$$

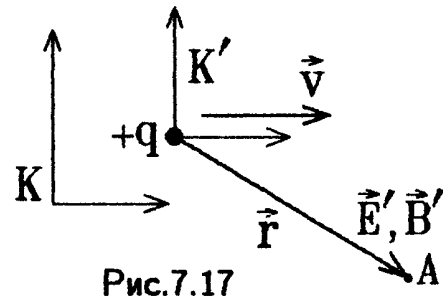
$$\vec{E}' = 0, \text{ а } \vec{B}' \neq 0, \text{ если } \vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 < 0.$$

И наоборот, если в каком-либо примере отсутствует либо электрическое, либо магнитное поле, то во всех других инерциальных системах отсчета для этого примера будет выполнено условие $\vec{E}' \perp \vec{B}'$.

4 Магнитное поле движущегося точечного заряда

Пусть заряд q движется с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$ (даже огромная средняя скорость хаотического движения свободных электронов в металле $\langle v \rangle \sim 10^6$ м/с много меньше $c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Перейдем в систему K' , в которой заряд покоится и создает в произвольной точке А на удалении $\vec{r}$ (рис.7.17) электростатическое поле $\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}$ (очевидно, что для покоящегося заряда $\vec{B}' = 0$).



Возвращаемся в неподвижную систему К. В ней $\vec{B}_{||} = \vec{B}'_{||} = 0$, и

$$\text{поэтому } \vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \frac{\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}']}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}'] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

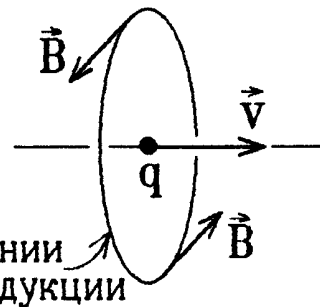
(при этом учтено, что для нерелятивистской частицы $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$ и $\vec{B}'_{\perp} = 0$). Подставляя $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$, получаем выражение для вектора индукции магнитного поля, созданного движущимся со скоростью $\vec{v}$

точечным зарядом q на расстоянии $\vec{r}$ от него:

$$\vec{B}_{\text{зар}} = \frac{\mu_0 q [\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Линии, касательные к вектору индукции, называются линиями индукции магнитного поля.

Эти линии всюду перпендикулярны векторам $\vec{v}$ и $\vec{r}$, то есть являются окружностями (рис.7.18), охватывающими направление движения заряда (вектор $\vec{v}$).



Они замкнуты в отличие от линий напряженности электростатического поля, которые начинаются и оканчиваются на электрических зарядах. Это связано с отсутствием постоянных магнитных зарядов. Линии индукции нельзя называть силовыми, так как силы $\vec{F}_M = q [\vec{v}, \vec{B}]$ ортогональны им.

Пример: рассмотрим два точечных одинаковых заряда, движущихся с одинаковыми скоростями $\vec{v}$ параллельно друг другу на расстоянии r (рис.7.19). Очевидно, они расталкиваются кулоновской силой $F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$. Но каждый из зарядов создает вблизи другого магнитное поле с индукцией $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin 90^\circ}{r^2}$, и в этом поле на движущийся со скоростью v заряд действует также магнитная составляющая силы Лоренца

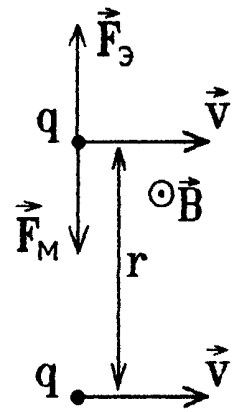


Рис.7.19

$F_M = qvB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{r^2}$. Эта сила, в противоположность

кулоновской, притягивает заряды одного знака, движущиеся в одном направлении.

Вопрос: могут ли эти силы уравновесить друг друга? Могут ли два свободных заряда одного знака не отталкиваться, а притягиваться друг к другу?

Ответ: нет! Это следует из отношения $\frac{F_M}{F_3} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$.

Отсюда еще раз видно, что

если бы скорость света была бесконечно большой ($c = \infty$) и специальная теория относительности не выполнялась, то магнитной силы и магнитного поля вообще бы не было. Магнетизм – это следствие релятивистских эффектов.

Величина магнитного взаимодействия ничтожна по сравнению с электростатическим. Для дрейфового движения свободных электронов (постоянный ток) $v = u \approx 0,1$ мм/с и $\frac{F_M}{F_3} = \left(\frac{10^{-4} \text{ м/с}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}\right)^2 \approx 10^{-26}$!

Практически магнитные силы должны исчезать на фоне электрических. Но дело в том, что положительные и отрицательные заряды в веществе точно скомпенсированы, и поэтому результирующая кулоновских сил ничтожна мала. А крайне малые магнитные силы, действующие на каждый свободный электрон, суммируются, то есть умножаются на коэффициент порядка числа Авогадро, и в итоге создаются достаточно большие магнитные поля. Заметное магнитное поле возникает при направленном движении достаточно большого заряда.

5 Магнитное поле тока.

Закон Био – Савара – Лапласа

Рассмотрим тонкий проводник с током I и вырежем из него маленький участок длины dl (рис.7.20). Все движущиеся в нем носители

заряда создают магнитные поля.

Согласно принципу суперпозиции для магнитного поля индукции полей, создаваемых разными источниками, складываются векторно, и результирующее поле всех движущихся зарядов равно

$$\vec{B}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{B}_i = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{v}_i, \vec{r}_i]}{r_i^3}.$$

Свободные электроны в проводнике, однако, движутся хаотически, их скорости $\vec{v}_i$ и векторы магнитной индукции $\vec{B}_i$ направлены в разные стороны и в сумме дают ноль. Поэтому кусок металла, вообще говоря, не создает магнитного поля, хотя в нем имеются движущиеся заряды.

Но ток в проводнике – это направленное результирующее движение свободных электронов с одной и той же дрейфовой скоростью $\vec{u}$. В участке проводника с объемом $dV = S dl$ будет $nSdl$ таких электронов, и, двигаясь совместно, они создадут в точке А на расстоянии $\vec{r}$ от участка dl (рис.7.20) поле с индукцией

$$d\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i = \underbrace{nSdl}_{\text{число электронов}} \cdot \underbrace{\frac{\mu_0 (-e) [\vec{u}, \vec{r}]}{4\pi r^3}}_{\text{поле одного электрона}}.$$

Учтем, что $-en\vec{u} = \vec{j}$ – плотность тока. Назовем векторную величину $I d\vec{l} = \vec{j} S dl = -en\vec{u} S dl$, направленную по линиям тока, элементом тока.

Получаем закон Био – Савара – Лапласа:

элемент тока $I d\vec{l}$ создает на расстоянии r (рис.7.21) магнитное поле с индукцией

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Этот закон позволяет, зная токи, рассчитать магнитное поле в любой точке пространства. Чтобы найти поле, созданное всем проводником с током, надо проинтегрировать полученное для $d\vec{B}$ выражение по всей длине проводника:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

(Направление вектора индукции определяется по правилу буравчика или винта (рис.7.21 и 7.23).)

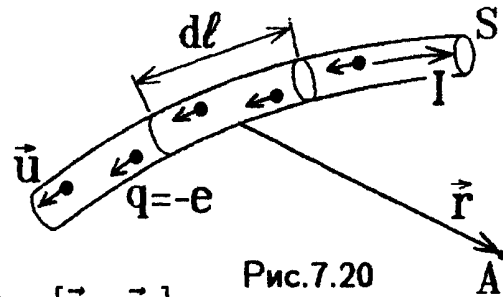


Рис.7.20

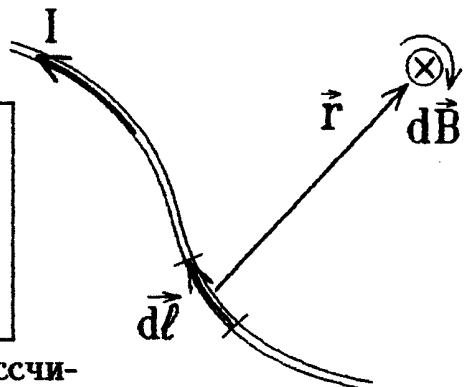


Рис.7.21

Линии индукции магнитного поля замкнуты и охватывают проводник с током (рис.7.22). Их плотность пропорциональна величине $\vec{B}$ в данной точке пространства.

Примеры.

1. Вычислим индукцию $\vec{B}$ на оси кругового витка радиуса R с током I (рис.7.23).

Каждый элемент тока $I d\vec{l}$ создает в точке A на оси витка на расстоянии x от его центра O поле $d\vec{B}$. Для определения результирующей индукции $\vec{B}_A$, направленной в силу симметрии вдоль оси витка, надо суммировать проекции всех векторов $d\vec{B}$ на ось (поперечные составляющие $d\vec{B}_\perp$ взаимно компенсируют друг друга):

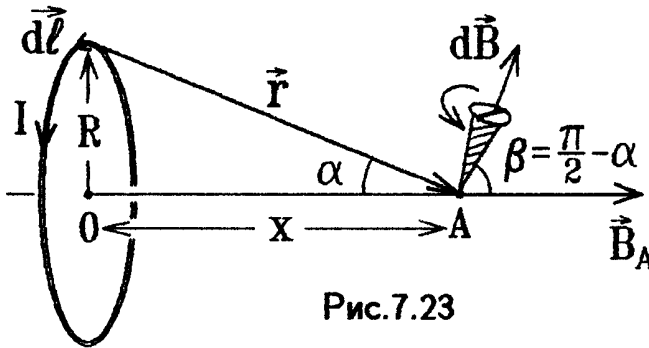


Рис.7.23

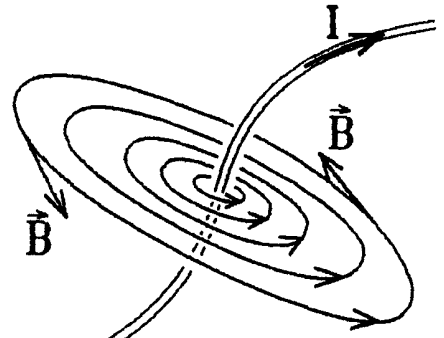


Рис.7.22

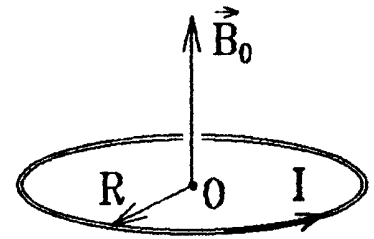


Рис.7.24

$$B_A = \oint dB \cos \beta = \oint \frac{\mu_0 I dl \sin 90^\circ}{4\pi r^2} \cos \beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos \beta \underbrace{\oint dl}_{= 2\pi R}.$$

Так как $r^2 = R^2 + x^2$ и $\cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, то индукция $\vec{B}_A$, направленная вдоль оси x , уменьшается с расстоянием x от центра витка O и имеет величину

$$B_A = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

В центре же кругового витка с током (рис.7.24)

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

2. Найдем индукцию $\vec{B}$ на расстоянии a от бесконечного прямолинейного тонкого проводника с током I (рис.7.25).

Из прямоугольного треугольника, изображенного на этом рисунке, следует: $\sin \beta = \cos \varphi$, $r = \frac{a}{\cos \varphi}$, $l = a \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Тогда $dl = a \cdot d(\operatorname{tg} \varphi) =$

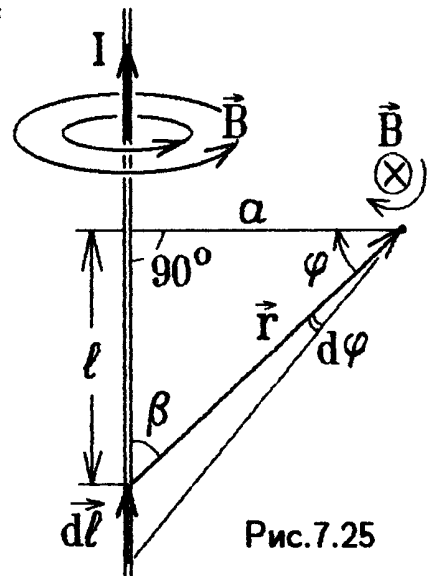


Рис.7.25

$= \frac{a \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi}$, и величину индукции $d\vec{B}$, созданной элементом тока $I d\vec{l}$, можно выразить через одну независимую переменную φ :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \beta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \varphi d\varphi.$$

Если поле создано конечным участком прямолинейного тонкого проводника с током, то в точке А на расстоянии a от проводника (рис.7.26) индукцию магнитного поля можно найти интегрированием по всей длине проводника (угол φ изменяется от $-\varphi_1$ до $+\varphi_2$):

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \varphi \Big|_{-\varphi_1}^{+\varphi_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1).$$

Для бесконечно длинного проводника $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, и $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

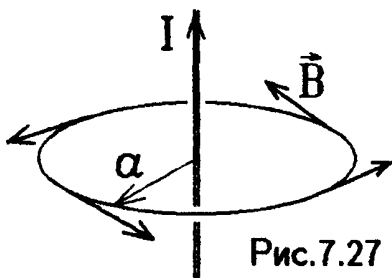


Рис.7.27

Это же выражение для индукции B вблизи тонкого бесконечного прямолинейного проводника с током I мы получили ранее в § 2 при определении магнитной силы. Линия вектора $\vec{B}$ показана на рис.7.27.

6 Сила Ампера

Внесем металлический проводник с током во внешнее магнитное поле $\vec{B}$. На движущиеся внутри свободные электроны действуют силы Лоренца $\vec{F}_M = -e [\vec{v}, \vec{B}]$ (рис.7.28). Скорости свободных электронов складываются из скорости хаотического движения $\vec{v}_{хд}$ и дрейфовой скорости $\vec{u}$, приводящей к появлению тока: $\vec{v} = \vec{v}_{хд} + \vec{u}$.

Скорости хаотического движения электронов направлены в разные стороны. Поэтому в разные стороны будут направлены и соответствующие им магнитные силы, которые в сумме скомпенсируются. Совместное же дрейфовое движение свободных электронов со скоростью $\vec{u}$ приводит к появлению суммарной силы $d\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{Mi} = -e [\vec{u}, \vec{B}] \cdot nSdl$, так как $nSdl$ — число свободных электронов на участке проводника длины dl и сечения S (рис.7.20), а $-e [\vec{u}, \vec{B}]$ — сила, действующая на один электрон.

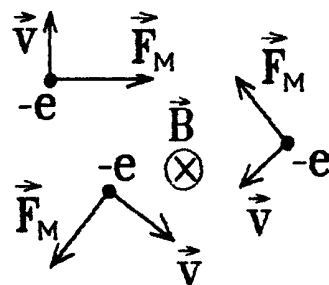


Рис.7.28

Сила $d\vec{F}_A$ называется силой Ампера. Действуя на все свободные заряды в проводнике, она действует и на сам проводник.

Так как $-enS\vec{u}dl = \vec{j}Sdl = I d\vec{l}$ (элемент тока), то

на элемент проводника с током I , помещенный во внешнее магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.7.29), действует сила Ампера

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}] \quad \text{— это закон Ампера.}$$

На весь проводник с током действует сила Ампера $\vec{F}_A = \int_I I [d\vec{l}, \vec{B}]$.

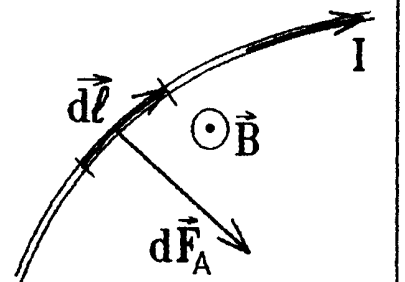


Рис.7.29

Вопрос: в стержень молниеотвода, сделанный из медной трубы, ударила молния. Когда стержень упал, оказалось, что он превратился в сплошной цилиндр. Почему?

Ответ: по стенкам стержня потекли сильные токи, расплавившие его, а силы Ампера притянули расплавленные участки трубы друг к другу.

Действительно, рассмотрим два параллельных прямолинейных тока I_1 и I_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга (рис.7.30). Первый ток создает вблизи второго поле $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$. В этом поле на участок второго тока длины

l действует сила Ампера $F_A = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l$, притягивающая токи друг к другу.

Если заряды одного знака отталкиваются, то однонаправленные токи притягиваются силой Ампера, а разнонаправленные токи — отталкиваются.

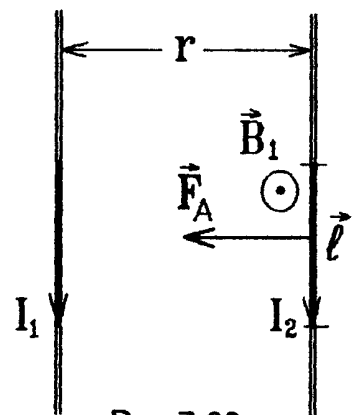


Рис.7.30

7 Теорема Гаусса для магнитного поля

Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через произвольную площадку $d\vec{S}$ (рис.7.31) называется магнитным потоком:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Численно он равен числу линий магнитной индукции, пересекающих площадку dS . В СИ единицей измерения Φ_B служит вебер [Вб].

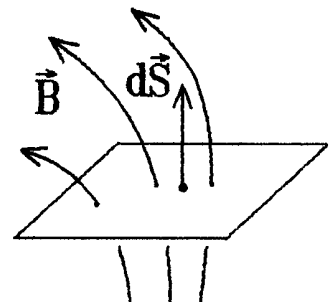


Рис.7.31

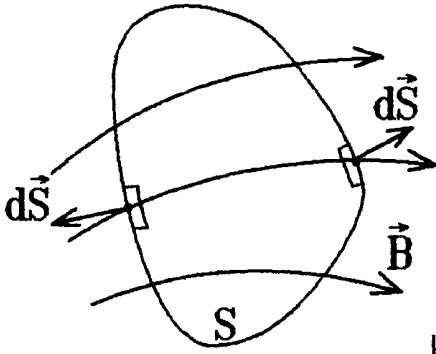


Рис.7.32

Но линии $\vec{B}$ замкнуты, они нигде не начинаются и нигде не кончатся. Поэтому сколько линий $\vec{B}$ входит внутрь замкнутой поверхности S , столько же и выходит из нее (рис.7.32). Входящие линии образуют тупой угол с $d\vec{S}$, и для них $\vec{B} \cdot d\vec{S} < 0$, а для выходящих линий $\vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$.

Поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Используя теорему Остроградского $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \text{div } \vec{B} dV = 0$, получаем теорему Гаусса для вектора $\vec{B}$ в дифференциальной форме:

$$\text{div } \vec{B} \equiv \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Напомним, что в точках, где $\text{div } \vec{B} \neq 0$, линии вектора $\vec{B}$ должны либо оканчиваться, либо начинаться. Условие $\text{div } \vec{B} = 0$ означает отсутствие начала или конца линий $\vec{B}$, то есть их замкнутость.

Вопрос: северный конец постоянного магнита окружили замкнутой поверхностью $S_{\text{пов}}$ (рис.7.33). Линии $\vec{B}$ выходят из северного полюса магнита (и из поверхности $S_{\text{пов}}$). Означает ли это, что $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$?

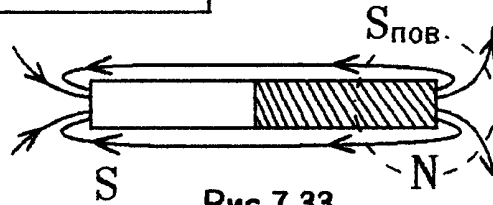


Рис.7.33

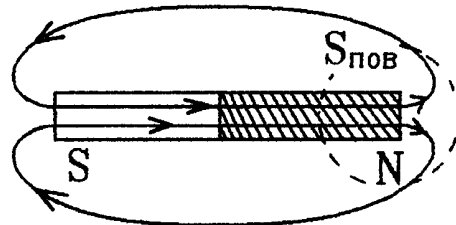


Рис.7.34

Ответ: нет. Внутри постоянного магнита тоже есть магнитное поле (рис.7.34). Все линии индукции $\vec{B}$ замкнуты и $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$.

8 Теорема о циркуляции для магнитного поля.

По определению циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру l называется интеграл $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$, знак которого зависит от направления обхода контура (рис.7.35).

Вычислим циркуляцию вектора $\vec{B}$ по круговому контуру радиуса R , окружающему прямой бесконечный проводник с током I (рис.7.36).

Контур совпадает с линией индукции, и величина $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ при интегрировании постоянна; поэтому $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} =$

$$= \oint B dl \cos 0^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \underbrace{\oint dl}_{2\pi R} = \mu_0 I.$$

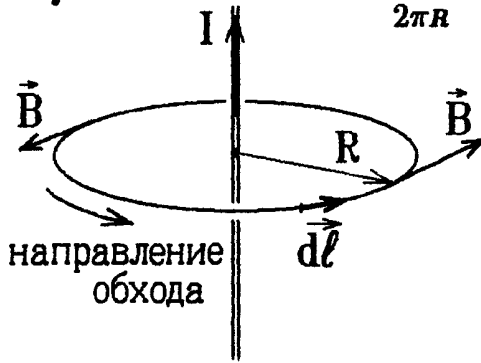


Рис.7.36

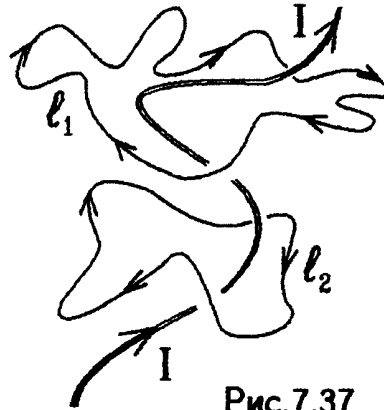


Рис.7.37

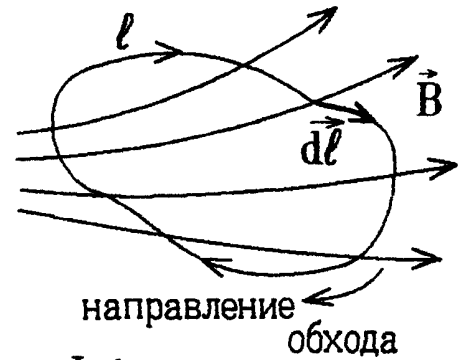


Рис.7.35

Этот результат не изменится, если форма проводника с током и форма охватывающего его контура будут произвольны (рис.

7.37): $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$. Если контур охватывает несколько токов, то их поля по принципу суперпозиции складываются: $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$, и циркуляция результирующего вектора $\vec{B}$ определяется выражением

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \sum_i \mu_0 I_i.$$

Но токи могут течь по проводникам в разных направлениях. К тому же можно изменить и направление обхода контура, что изменит знак циркуляции. Поэтому сумма в правой части должна быть алгебраической, т.е. следует учитывать знаки токов.

Если вектор индукции магнитного поля, создаваемого током, составляет острый угол (совпадает) с направлением обхода, то циркуляция будет положительной, и этот ток в сумме следует брать со знаком «+». Если угол тупой (направление обхода противоположно направлению линии индукции), то ток в сумме имеет знак «-». Например, для случая, показанного на рис.7.38, теорема о циркуляции запишется так: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$.

Обобщая все сказанное выше, приходим к выводу:

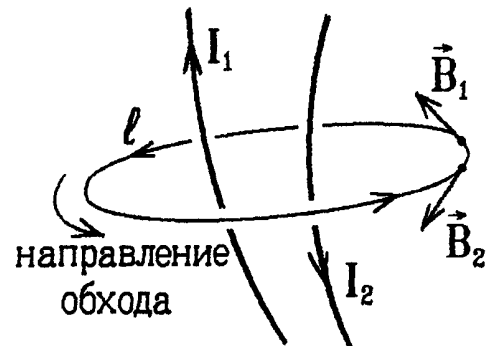


Рис.7.38

циркуляция вектора $\vec{B}$ по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i.$$

Это – теорема о циркуляции для вектора индукции магнитного поля.

Вопрос: чему равна циркуляция вектора $\vec{B}$ по контуру, показанному на рис.7.39?

Ответ: нулю, так как контур не охватывает токов. Само поле $\vec{B}$ при этом отлично от нуля.

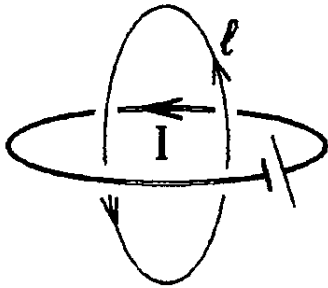


Рис.7.39

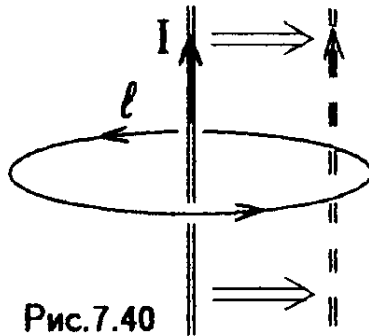


Рис.7.40

Вопрос: проводник с током перенесли к краю контура (рис. 7.40). Изменится ли циркуляция вектора $\vec{B}$?

Ответ: нет. Поле $\vec{B}$ изменяется во всех точках, но $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ не-

изменно, как бы ни пересекал проводник с током плоскость контура. Циркуляция в данном примере может измениться только скачком до нуля, если проводник вынести за пределы контура.

Замечание: если контур несколько раз охватывает один и тот же проводник с током, то этот ток в сумме надо учитывать столько же раз. Так, например, для случая, показанного на рис.7.41, следует записать $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 3\mu_0 I$.

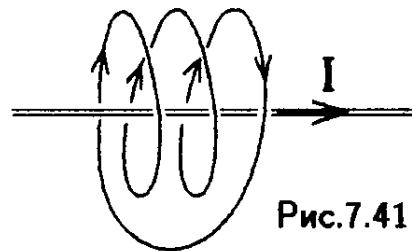


Рис.7.41

9 Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля

1. Цилиндрический проводник с током.

Полученная ранее формула для индукции магнитного поля тонкого прямого бесконечно длинного проводника с током $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ дает некорректный результат $B \rightarrow \infty$ на оси проводника, т.е. при $r = 0$. Этого можно избежать, если учесть, что любой реальный проводник имеет конечное поперечное сечение, и ток в нем распределен с конечной плотностью.

Пусть ток I , текущий по прямому цилиндрическому проводнику

радиуса R , имеет одинаковую во всех точках плотность $j = I/(\pi R^2)$ (рис.7.42). Для кругового контура l_1 радиуса $r > R$ теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ имеет вид: $\oint_{l_1} B dl \cos 0^\circ = \mu_0 I$

или $B \underbrace{\oint_{l_1} dl}_{= 2\pi r} = \mu_0 I$, так как

$B = \text{const}$ на одинаковом удалении r от оси. Таким образом,

$$\boxed{B|_{r>R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Поле вне длинного прямого цилиндрического} \\ \text{проводника с током совпадает с полем беско-} \\ \text{нечно тонкого прямого проводника с током.} \end{array} \right.$$

Другой контур l_2 радиуса $r < R$ охватывает участок проводника заштрихованный на рис.7.42, через поперечное сечение которого течет ток $I' = j\pi r^2$. В этом случае теорема о циркуляции $\vec{B}$ дает:

$$B \cdot \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}.$$

Поэтому внутри проводника $\boxed{B|_{r<R} = \mu_0 \frac{I r}{2\pi R^2}}.$

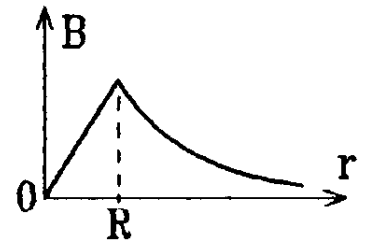


Рис.7.43

Зависимость величины B от расстояния r до оси проводника представлена на рис.7.43. Как видно, на оси проводника $B = 0$, а на поверхности проводника с током магнитное поле имеет наибольшую индукцию.

2. Бесконечно длинная катушка – соленоид с током.

Линии индукции магнитного поля должны замыкаться (выходя из одного конца соленоида, они возвращаются в другой). Если соленоид бесконечен, то линии $\vec{B}$ уходят в бесконечность. Внутри такого соленоида с равномерной намоткой витков $\vec{B} = \text{const}$, а вне его, вдали от концов соленоида, $\vec{B} = 0$ (рис.7.44).

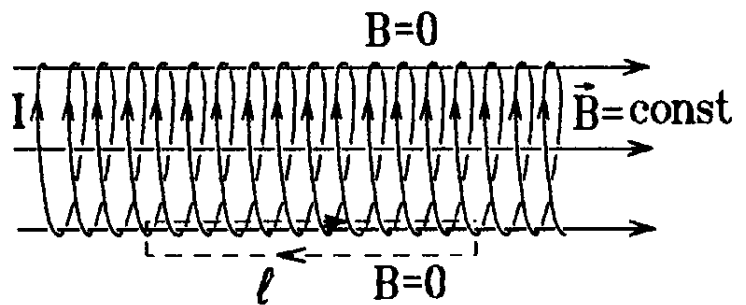


Рис.7.44

Циркуляция $\vec{B}$ по очень узкому прямоугольному контуру длины l , одна сторона которого лежит внутри соленоида, а другая — вне его,

равна $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{B_{\text{внутр}} l}_{=\text{const}} - \underbrace{B_{\text{вне}} l}_{=0} = \mu_0 I N$, так как контур охватывает N витков с током I , текущим по каждому витку. Таким образом, индукция магнитного поля внутри длинного прямого соленоида $B = \mu_0 I n$, где $n = \frac{N}{l}$ — число витков на единицу длины соленоида.

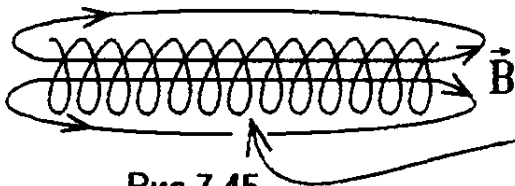


Рис.7.45

Вопрос: когда можно применять эту формулу (как известно, бесконечных соленоидов не существует)?

Ответ: вдали от краев длинных и узких соленоидов (рис.7.45).

3. Тороидальная катушка с током.

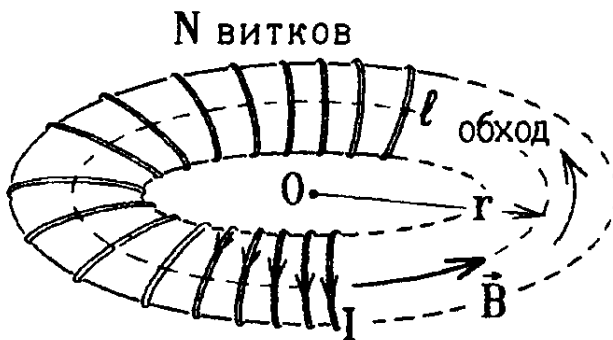


Рис.7.46

Линии индукции $\vec{B}$ внутри катушки образуют замкнутые окружности. Выберем контур l радиуса r , совпадающий с такой линией (рис.7.46). Он охватывает все N витков катушки, по которым течет ток I , и из теоремы о циркуляции $\vec{B}$ следует

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I,$$

т.е. индукция магнитного поля внутри тороидальной катушки зависит от расстояния r до ее центра O :

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}.$$

4. Плоскость с поверхностным током.

Пусть по бесконечной плоскости течет постоянный ток с линейной плотностью i (это — ток, протекающий по полосе ширины 1 м: $I = i l$). Выберем симметричный прямоугольный контур, охватывающий участок плоскости ширины l (рис.7.47).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{B_{\text{вверху}} l}_{=\text{const}} + \underbrace{B_{\text{внизу}} l}_{=\text{const}} = \mu_0 i l,$$

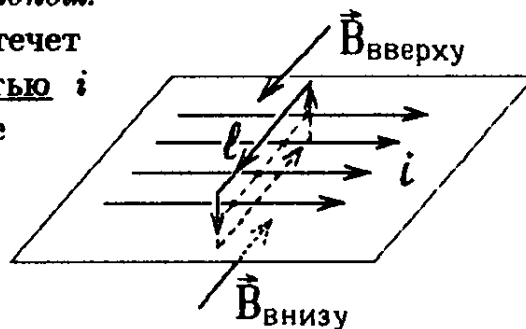


Рис.7.47

где $i l$ — охватываемый ток. Из-за симметрии контура относительно

плоскости с током $B_{\text{вверху}} = B_{\text{внизу}} = B = \mu_0 \frac{i}{2}$. Как видим, полученная величина индукции B магнитного поля, созданного бесконечной плоскостью с однородным током, не зависит от расстояния до

плоскости.

Замечание: формулу $B = \mu_0 i / 2$ можно применять для точек, достаточно близких к поверхности любой формы, по которой течет ток с линейной плотностью i . Рядом с поверхностью основной вклад в $\vec{B}$ дает близлежащий участок с током, который можно считать плоским.

10 Ротор. Теорема Стокса

Разделим циркуляцию любого вектора $\vec{A}$ по замкнутому плоскому контуру l на площадь S , ограниченную контуром, и будем стягивать контур в точку. Полученная в результате такой операции величина зависит от ориентации контура l в пространстве (рис.7.48) и является проекцией некоторого вектора на нормаль к плоскости контура:

$$(\text{rot } \vec{A})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}}{S}.$$

Такой вектор, обозначаемый $\text{rot } \vec{A}$, называется ротором вектора $\vec{A}$.

Если вектор $\text{rot } \vec{A}$ перпендикулярен плоскости контура (рис. 7.49), то величина его проекции на направление вектора $\vec{S}$ (площади контура) максимальна и равна $|\text{rot } \vec{A}|$. В этом случае направления обоих векторов $\text{rot } \vec{A}$ и $\vec{S}$ соотносятся с направлением обхода контура по правилу правого винта. Винт следует вращать по направлению обхода контура (рис.7.49), тогда его движение показывает направления векторов $\text{rot } \vec{A}$ и $\vec{S}$.

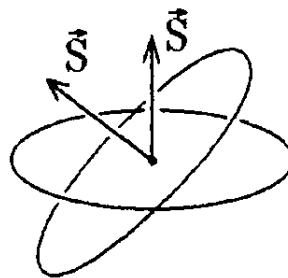


Рис.7.48

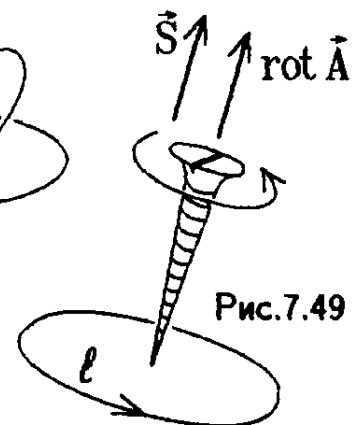


Рис.7.49

направление
обхода

Найдем проекцию $(\text{rot } \vec{A})_z$ на ось z . Для этого выберем контур в плоскости xy (перпендикулярно к оси z) в виде бесконечно малого прямоугольника со сторонами dx и dy (рис.7.50).

Вектор $\vec{A}$ является функцией трех независимых координат x , y и z , и его циркуляция вычисляется по формуле

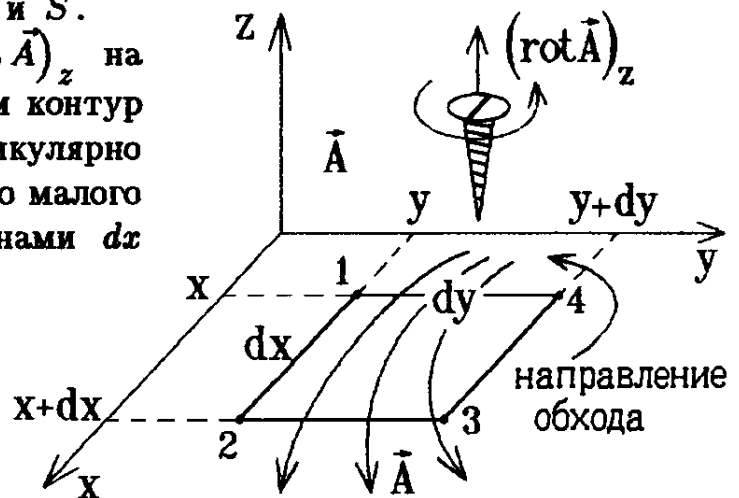


Рис.7.50

$\oint_{12341} \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_x(x, y, z)dx + A_y(x+dx, y, z)dy - A_x(x, y+dy, z)dx - A_y(x, y, z)dy = [A_y(x+dx, y, z) - A_y(x, y, z)]dy - [A_x(x, y+dy, z) - A_x(x, y, z)]dx$. Подчеркиванием отмечена координата, которая не изменяется на соответствующем участке (например, на участке 1–2 не изменяется координата y , на участке 2–3 – координата $x+dx$).

В квадратных скобках стоят бесконечно малые приращения функций, которые можно выразить через частные производные:

$$[f(x+dx, y) - f(x, y)] \equiv \frac{\partial f}{\partial x} dx, \text{ т.е. } \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial A_x}{\partial y} dy dx.$$

Но $dx dy = \delta S$ – площадь контура, и по определению ротора

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\oint \vec{A} d\vec{l}}{\delta S} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Аналогично находим проекции $\text{rot } \vec{A}$ на оси x и y . В результате оказывается, что $\text{rot } \vec{A}$ – это дифференциальный оператор от $\vec{A}$, и для его вычисления достаточно взять частные производные от проекций любого вектора $\vec{A}$ по следующему рецепту:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Вопрос: чему равен $\text{rot } \vec{r}$?

Ответ: так как $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, то $\text{rot } \vec{r} = 0$. Аналогично

равен нулю ротор от любого вектора, зависящего только от $\vec{r}$. Например, нулю равен ротор любой центральной силы (электростатической, гравитационной).

Формулу для вычисления $\text{rot } \vec{A}$ можно записать в виде определите-

$$\text{ля: } \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{A}], \text{ то есть } \text{rot } \vec{A} \text{ – это вектор-}$$

ное произведение оператора $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ и вектора $\vec{A}$. Для сравнения напомним выражения остальных дифференциальных операторов:

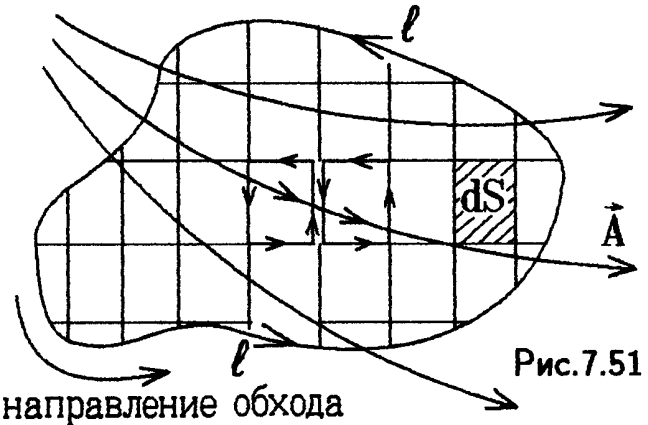
$$\text{grad } A = \vec{i} \frac{\partial A}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial A}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial A}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} A \quad \left(\begin{array}{l} \text{берется от скалярной величин} \\ \text{ны } A \text{ и является вектором.} \end{array} \right)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad \left(\begin{array}{l} \text{берется от вектора } \vec{A} \text{ и явля-} \\ \text{ется скалярной величиной.} \end{array} \right)$$

Возьмем теперь произвольный замкнутый контур l (можно не плоский) и ограничиваемую этим контуром поверхность S (произвольной

формы), разобьем на бесконечно малые участки dS (рис.7.51).

Для каждого бесконечно малого контура, охватывающего площадку $d\vec{S}$, имеем $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$ (определение ротора; векторы $\text{rot } \vec{A}$ и $d\vec{S}$ направлены в одну сторону). Просуммируем правые и левые части по всем участкам dS внутри контура l . Так как внутренние соседние участки соседних контуров обходятся в разные стороны

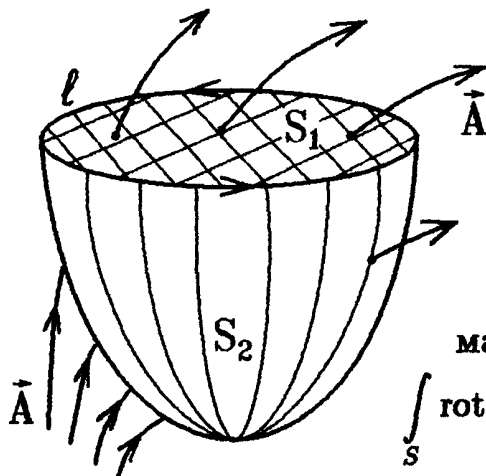


соседние участки соседних контуров обходятся в разные стороны (рис.7.51), то циркуляции $\vec{A} \cdot d\vec{l}$ для них имеют разные знаки и в сумме сокращаются. Поэтому в левой части суммы остаются нескомпенсированными только внешние участки, совместно образующие внешний контур l : $\sum \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{внеш}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$. В правой же части сумма является интегралом: $\sum \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

В результате приходим к теореме Стокса:

циркуляция любого вектора $\vec{A}$ по произвольному замкнутому контуру равна интегралу от $\text{rot } \vec{A}$ по поверхности произвольной формы, ограниченной этим контуром:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$



Заметим, что поверхность S можно выбрать какой угодно формы (рис. 7.52) – при этом результат не изменится:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Применим теперь теорему Стокса к магнитному полю (рис.7.53):

$$\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

теор. о циркуляции $\vec{B}$

где S – площадь, охватываемая контуром.

Так как это равенство выполняется для произвольных поверхностей S , то равны подинтегральные функции:

$$\text{rot } \vec{B} \equiv [\nabla, \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}. \quad \text{Это — теорема}$$

о циркуляции $\vec{B}$ в дифференциальной форме.

Отсюда следует, что зная индукцию $\vec{B}$ как функцию координат, можно простым дифференцированием определить плотность тока $\vec{j}$ в каждой точке пространства, то есть определить распределение токов, создающих данное магнитное поле.

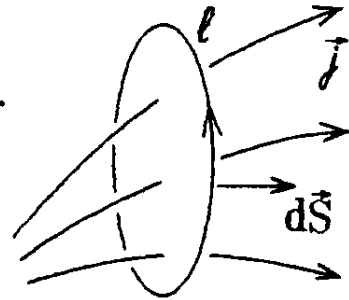


Рис.7.53

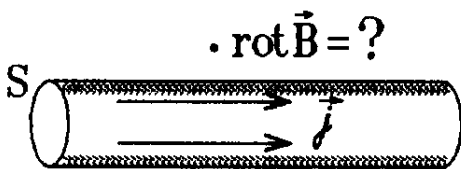


Рис.7.54

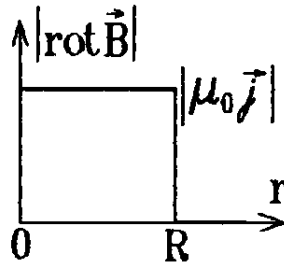


Рис.7.55

Вопрос: чему равен $\text{rot } \vec{B}$ в точке вблизи прямолинейного проводника с током (рис.7.54)?

Ответ: $\text{rot } \vec{B} = 0$ (рис.7.55), хотя в той же точке вне проводника $\vec{B} \neq 0$.

11 Сравнение свойств электростатического и постоянного магнитного полей

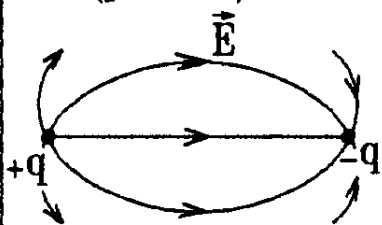
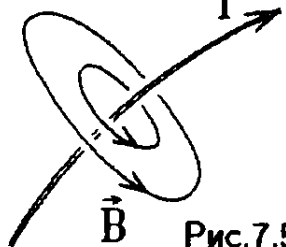
Сопоставим полученные ранее законы для этих полей, записав их в таблицу, представленную на следующей странице.

Если ротор вектора напряженности поля во всех точках пространства равен нулю, то такое поле называется потенциальным. Дивергенция этого вектора отлична от нуля только в тех точках, где расположены заряды, создающие поле. Для потенциального поля существует скалярная функция, называемая потенциалом φ поля, такая, что вектор напряженности является градиентом этой функции: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Силы этого поля всегда консервативны.

Следствие: для полей центральных консервативных сил $\text{rot } \vec{E} = 0$, т.е. все центральные поля — потенциальны. Например: электростатическое и гравитационное поля.

Если же, наоборот, дивергенция вектора индукции равна нулю во всех точках пространства, то поле называется вихревым (или соленоидальным). Ротор этого вектора отличен от нуля только в тех точках, где плотность тока, создающего такое поле, отлична от нуля (где присутствуют "вихри"). Зарядов — источников вихревого поля не существует, как не существует однозначного потенциала φ .

Замечание: вообще говоря, из уравнения $\vec{B} = -\text{grad } \varphi_m$ можно в каждой точке пространства можно формально определить функцию

	Электростатическое поле	Постоянное магнитное поле
Теорема Гаусса:	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$ или $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ или $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Теорема о циркуляции:	$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ или $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ или $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Линии поля:	Линии $\vec{E}$ начинаются и кончаются на электрических зарядах (рис.7.56).  Рис.7.56	Линии $\vec{B}$ замкнуты и охватывают токи (рис.7.57). Магнитных зарядов нет.  Рис.7.57

φ_m – скалярный магнитный потенциал. Но он будет неоднозначен: при каждом обходе по замкнутому контуру, охватывающему ток I , функция φ_m должна меняться на величину $\mu_0 I$. Поэтому нельзя пользоваться скалярным магнитным потенциалом в той области, где имеются токи $j \neq 0$.

В отличие от консервативных сил потенциальных полей магнитная сила $\vec{F}_m = q [\vec{v}, \vec{B}]$ перпендикулярна траектории движения заряда.

Поэтому силы магнитного поля работы не совершают, и невозможно определить через работу сил потенциальную энергию для вихревого поля. Нельзя построить машину, которая работала бы за счет энергии магнитного поля. Силы вихревого поля неконсервативны.

И все же, несмотря на такие различия, электростатическое и магнитное поля имеют одну природу и преобразуются одно в другое при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Глава 8.

Проводник с током в магнитном поле

1 Контур с током в однородном магнитном поле. Магнитный момент

Под контуром с током здесь подразумевается замкнутый тонкий проводник, по которому течет постоянный ток.

Рассмотрим замкнутый проводник или контур с током, находящийся в магнитном поле (рис. 8.1). На каждый элемент тока $I d\vec{\ell}$ действует сила Ампера

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{\ell}, \vec{B}].$$

Если поле однородно ($\vec{B} = \text{const}$), то результирующая сила, действующая

на весь контур, $\vec{F}_{\text{рез}} = \oint d\vec{F}_A = I \left[\oint d\vec{\ell}, \vec{B} \right] = 0$, так как $\oint d\vec{\ell} = 0$ для замкнутого контура (рис.8.2).

Таким образом, в однородном магнитном поле силы Ампера стремятся растянуть или сжать замкнутый контур с током, но в сумме они равны нулю и поэтому не могут сдвинуть контур с места.

Однако, суммарный момент этих сил нулю не равен. Действительно, так как на каждый элемент тока $I d\vec{\ell}$ действует момент силы $d\vec{M}$ относительно некоторой точки (оси) O (рис.8.3):

$$d\vec{M} = [\vec{r}, d\vec{F}_A] = I [\vec{r}, [d\vec{\ell}, \vec{B}]],$$

то суммарный момент сил $\vec{M} = \oint [\vec{r}, d\vec{F}_A]$ стремится повернуть весь контур с током. В однородном поле этот момент не зависит от выбора

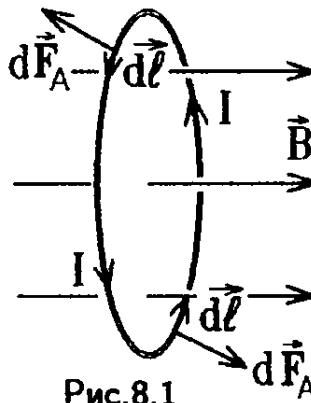


Рис.8.1

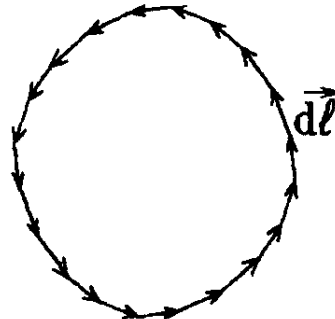


Рис.8.2

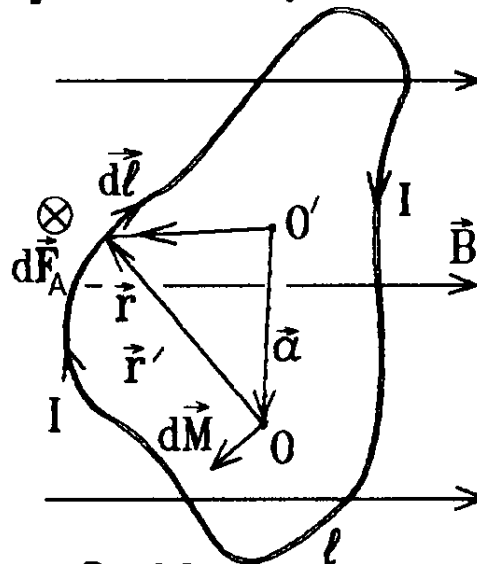


Рис.8.3

точки O . Это легко показать, записав формулу для результирующего момента сил относительно любой другой точки O' , смещенной относительно точки O на расстояние $\vec{a} = \text{const}$:

$$\vec{M}_{O'} = \oint_l [\underbrace{\vec{r} + \vec{a}}_{=\vec{r}'}, d\vec{F}_A] = \underbrace{\oint_l [\vec{r}, d\vec{F}_A]}_{=\vec{M}_O} + [\vec{a}, \underbrace{\oint_l d\vec{F}_A}_{=0}] = \vec{M}_O.$$

Вычислим этот момент сил.

Для этого разобьем плоский контур с током на очень узкие полоски ширины dy , как показано на рис.8.4. На два элемента тока $I d\vec{l}$, выделенные этой полоской, действует пара сил $d\vec{F}_A$, направленных в противоположные стороны. Момент этой пары сил равен

$$dM = x \cdot dF_A = x \cdot IB \underbrace{dl \sin \alpha}_{=dy} = IB dS,$$

где $dS = x dy$ — это площадь полоски.

Поэтому суммарный момент сил, поворачивающий весь контур с током, вычисляется, как $M = IB \int dS = IBS$. Будем определять направление вектора $\vec{S}$ площади, ограниченной контуром с током, по правилу правого винта, вращая его «по току» (рис.8.5). Тогда выражение для вектора момента сил запишется в виде $\vec{M} = [I\vec{S}, \vec{B}]$.

Величина $\vec{p}_m = I\vec{S}$ называется магнитным моментом контура с током.

Замечание: если контур с током не плоский (рис.8.6), то для него $\vec{p}_m = I \int d\vec{S}$, где интеграл берется по любой поверхности S , ограниченной контуром. Результат не зависит от формы этой поверхности.

Момент сил Ампера

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

стремится повернуть плоскость контура с током перпендикулярно линиям индукции $\vec{B}$ так, чтобы магнитный момент $\vec{p}_m$ был направлен одинаково с вектором $\vec{B}$ (рис.8.7).

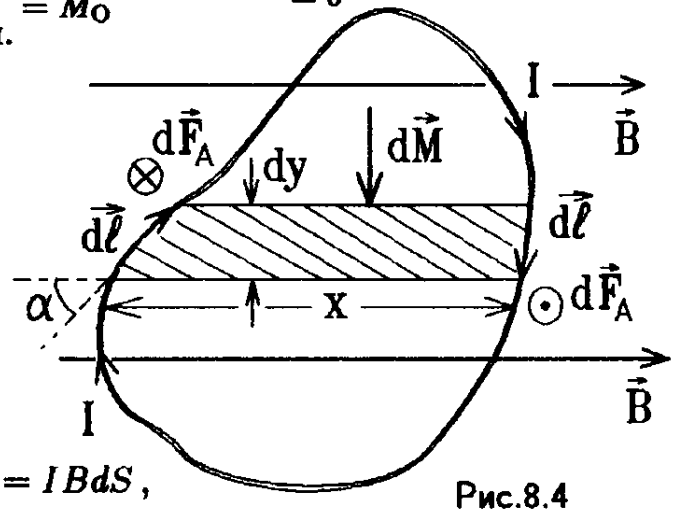


Рис.8.4

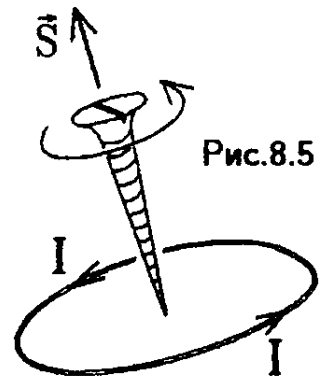


Рис.8.5

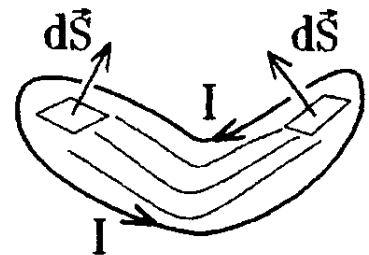


Рис.8.6

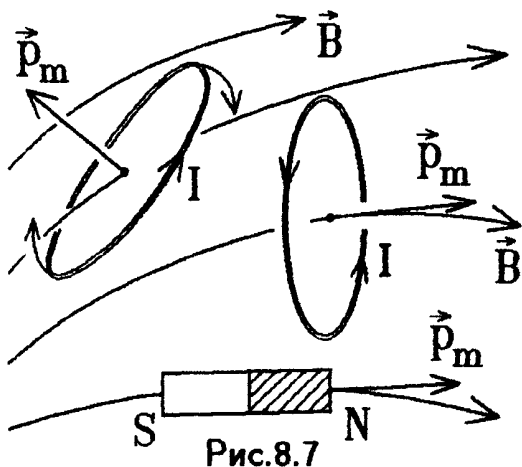


Рис. 8.7

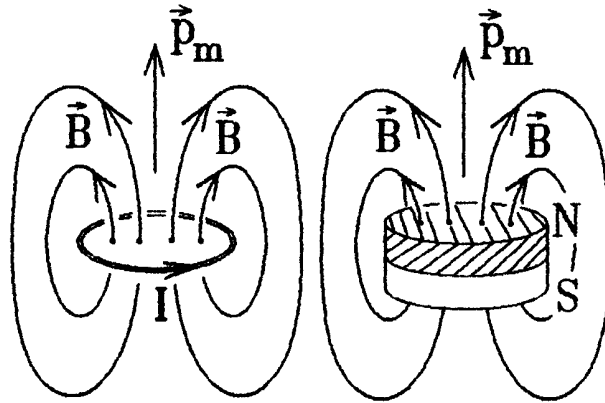
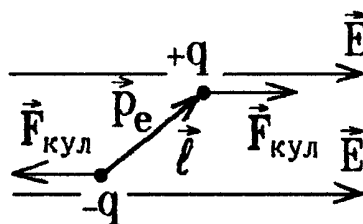


Рис. 8.8

Замечание: магнитное поле, создаваемое маленьким контуром с током, похоже на поле маленького постоянного магнита (рис. 8.8). Постоянный магнит (магнитная стрелка) так же, как и контур с током, разворачивается моментом сил вдоль линий вектора $\vec{B}$.

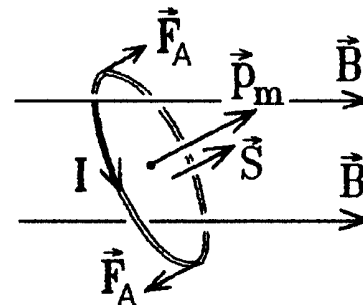
Чтобы проанализировать поведение небольшого контура с током в магнитном поле, его можно мысленно заменить небольшим магнитом (рис. 8.7).

Замкнутый контур с током называют также магнитным диполем по аналогии с электрическим диполем, который поворачивается моментом сил также по направлению линий $\vec{E}$ (рис. 8.9 и 8.10).



Электрический
диполь $\vec{p}_e = q\vec{l}$,
 $\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}]$

Рис. 8.9



Магнитный
диполь $\vec{p}_m = I\vec{S}$,
 $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$

Рис. 8.10

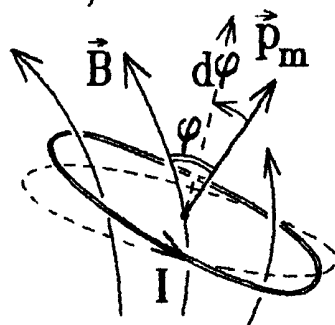


Рис. 8.11

Если через φ обозначить угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$, то при повороте контура с током в магнитном поле на угол $d\varphi$ (причем $d\varphi < 0$, так как угол φ уменьшается (рис. 8.11)), момент сил совершает работу $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = -p_m B \sin \varphi d\varphi = -dW$, которая идет на изменение потенциальной энергии контура с током в магнитном поле. Интегрируя это уравнение, получим выражение для энергии:

$$W = \int dW = \int \underbrace{p_m B}_{= \text{const}} \sin \varphi d\varphi = -p_m B \cos \varphi + \text{const} \quad \text{или}$$

$$W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} + \text{const}.$$

(Для сравнения: энергия электрического диполя во внешнем элек-

трическом поле $W = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} + \text{const.}$)

Замечание: хотя магнитное поле $\vec{B}$ не потенциально, но контур с током в нем обладает потенциальной энергией, которая определена с точностью до постоянной. Знак "—" показывает, что эта энергия минимальна, когда векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ параллельны и направлены в одну сторону. Магнитный диполь стремится повернуться в состояние с минимальной энергией.

2 Контур с током в неоднородном магнитном поле

В неоднородном поле ($\vec{B} \neq \text{const}$) формула $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ справедлива, если размер контура достаточно мал (тогда в пределах контура поле можно считать приближенно однородным). Следовательно, контур с током по-прежнему стремится развернуться так, чтобы его магнитный момент $\vec{p}_m$ был направлен вдоль линий вектора $\vec{B}$.

Но, кроме того, на контур (рис. 8.12) действует результирующая сила

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{рез}} &= -\text{grad } W = \\ &= -\text{grad}(-\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = \\ &= p_m \text{ grad } B \end{aligned}$$

(в случае однородного поля $B = \text{const}$, и $\vec{F}_{\text{рез}} = 0$).

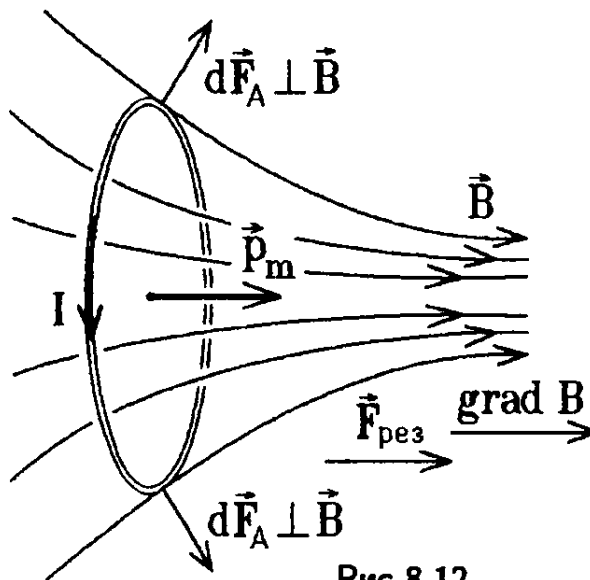


Рис.8.12

Эта сила действует на контур с током или на постоянный магнит с моментом $\vec{p}_m$ и втягивает их в область более сильного магнитного поля.

Замечание: применять эту формулу можно не всегда, так как она скорее качественная. При изменении $\vec{B}$ должен изменяться ток в контуре или намагниченность магнита, т.е. вектор $\vec{p}_m$ уже не постоянен. Далее с учетом явления электромагнитной индукции будет получена точная формула для определения силы, действующей на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Вопрос: на гладкой горизонтальной поверхности лежат кольцевые проводники с током I (рис.8.13). Участки 1 и 4, 2 и 3 притягиваются, а участки 1 и 3, 2 и 4 отталкиваются силами

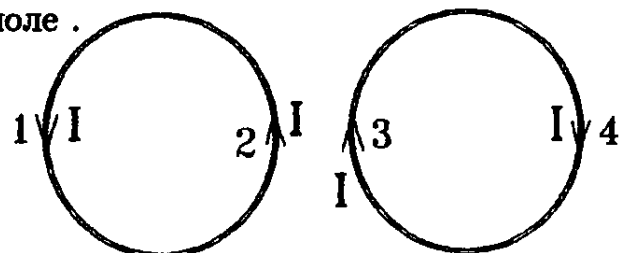


Рис.8.13

Ампера, причем без детальных расчетов не очевидно, сумма каких сил больше: $F_{14} + F_{23}$ или $F_{13} + F_{24}$. Как будут вести себя кольца в целом: притягиваться или отталкиваться?

Ответ: сила $\vec{F} = p_m \text{ grad } B$ в данном примере направлена вдоль вектора $\text{grad } B$ (рис.8.14). Она мала, но притягивает кольца. Это легко увидеть, заменив кольца с током небольшими постоянными магнитами (рис.8.15).

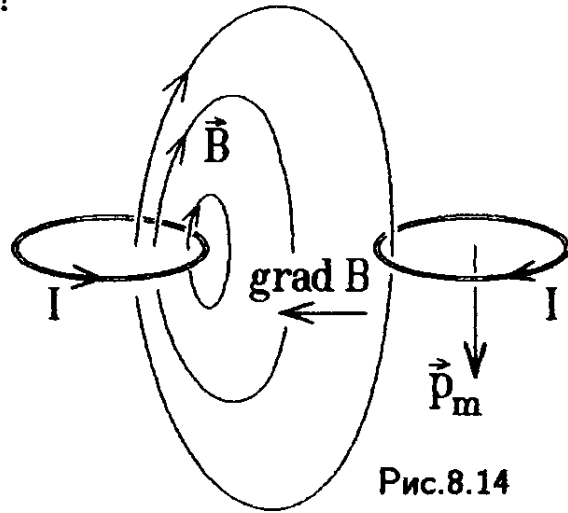


Рис.8.14

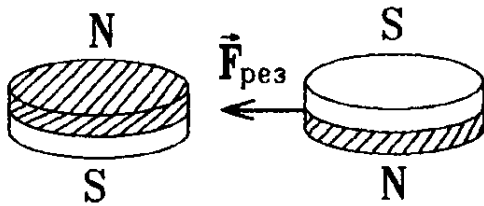


Рис.8.15

3 Работа по перемещению контура с током в магнитном поле

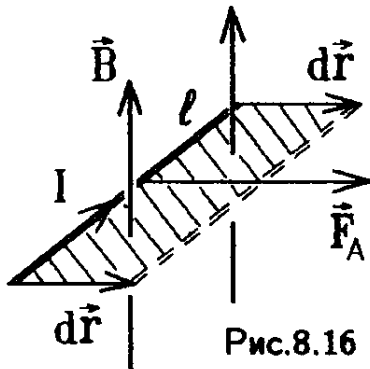


Рис.8.16

Переместим прямолинейный участок проводника с постоянным током I во внешнем магнитном поле $\vec{B}$ на расстояние $d\vec{r}$. Предположим, что проводник движется в направлении, перпендикулярном к его длине и к линиям вектора $\vec{B}$ (рис.8.16). Действующая на него сила Ампера $\vec{F}_A = I [\vec{l}, \vec{B}]$ совершает работу $dA = \vec{F}_A \cdot d\vec{r} = IB l dr$, где $l dr = dS$ — площадь, которую опишет движущийся проводник (она заштрихована на рис.8.16). Но $B dS = d\Phi$ — это поток магнитной индукции через площадку dS . Следовательно, работа при перемещении проводника с током в магнитном поле запишется в виде $dA = I d\Phi$. Этот результат не изменится при произвольном перемещении проводника с постоянным током во внешнем магнитном поле.

Если разбить теперь контур произвольной формы, по которому течет ток, на маленькие участки, то при перемещении контура к каждому участку можно применить полученную формулу. Поэтому

работа по перемещению всего контура с током I в магнитном поле равна $A = \int I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$, где Φ_2 и Φ_1 — магнитные потоки через площадь контура в конечном и начальном положениях.

Эта формула справедлива, если ток в контуре постоянен, т.е. при перемещении контура не учитывается явление электромагнитной индукции.

Замечание: можно перемещать контур с током, перенося его в область с другим значением $\vec{B}$, а также как угодно изменяя форму и площадь контура (рис.8.17).

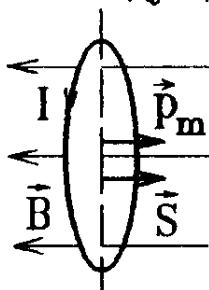
Если пренебречь возникающими механическими силами, то работа по перемещению не зависит от промежуточных положений контура:

$A = I(\Phi_{\text{конеч}} - \Phi_{\text{нач}})$ и определяется только изменением магнитного потока через поверхность, охватываемую контуром. Знак этого потока $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ задается направлением вектора $\vec{S}$. Для плоского контура его можно определить по правилу правого винта, вращаемого по току.

Вопрос: чему равна работа по перемещению контура с током, изготовленного в виде восьмерки (рис.8.18)?

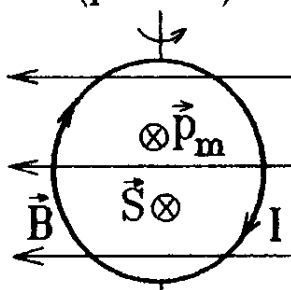
Ответ: в однородном магнитном поле — нулю, так как $\Phi_{\text{полн}} = 0$ вследствие того, что векторы $\vec{S}$ у двух частей «восьмерки» направлены противоположно.

Пример: круговой виток с током I расположен перпендикулярно линиям индукции $\vec{B}$ (рис.8.19).



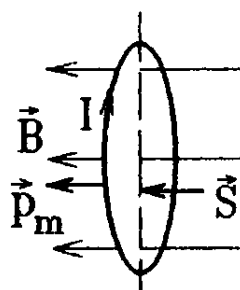
$$\Phi_1 = BS \cos 180^\circ = -BS$$

Рис.8.19



$$\Phi_2 = BS \cos 90^\circ = 0$$

Рис.8.20



$$\Phi_3 = BS \cos 0^\circ = BS$$

Рис.8.21

Повернем виток относительно оси, проходящей через диаметр, на 180° (рис.8.20 и 8.21). Виток сам стремится повернуться так, чтобы векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ оказались параллельными, поэтому работа, совершаемая силами Ампера, положительна:

$$A = \int I d\Phi = I(\Phi_3 - \Phi_1) = 2IBS.$$

Если рассмотреть изменение потенциальной энергии $W_3 - W_1 = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B})_3 + (\vec{p}_m \cdot \vec{B})_1 = -ISB \cos 0^\circ + ISB \cos 180^\circ = -2ISB = -A$, получаем тот же результат. Но формулу $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ можно применять только для небольших контуров с постоянным током, для которых поле вектора $\vec{B}$ в плоскости контура можно считать посто-

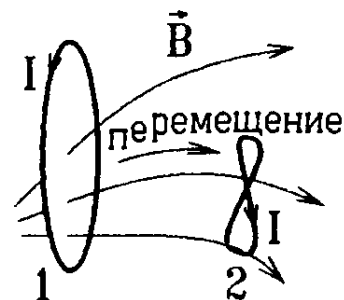


Рис.8.17

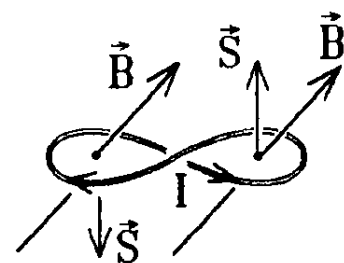


Рис.8.18

янным. Формула же $A = I \Delta \Phi$ справедлива и для больших контуров в сильно неоднородном магнитном поле (при условии $I = \text{const}$).

Наконец, если контур с током I не смещать, а изменять магнитное поле, т.е. изменять магнитный поток Φ через поверхность, охватываемую контуром, от значения Φ_1 до Φ_2 , то для этого надо совершить ту же работу $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$. Эта работа называется работой изменения магнитного потока, связанного с контуром.

4 Эффект Холла

Поместим проводник с током в поперечное магнитное поле $\vec{B}$ (рис. 8.22). На движущиеся со средней дрейфовой скоростью $\vec{u}$ носители тока (электроны) начинает действовать магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F}_M$, смещая их к одной из боковых сторон проводника. Эта сторона заряжается отрицательно, а противоположная – положительно.

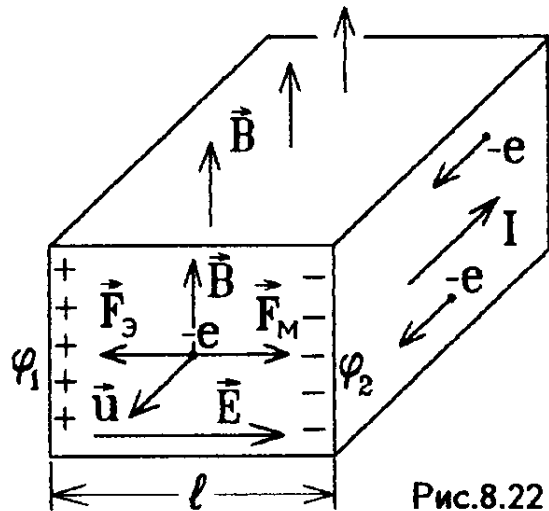


Рис.8.22

Эффект возникновения поперечной разности потенциалов в проводнике с током, помещенном в магнитное поле, называется эффектом Холла, а возникающая разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ – холловской разностью потенциалов.

При равновесии электрическая сила $\vec{F}_E = -e\vec{E}$, где $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l$ (рис.8.22), должна уравновесить магнитную силу $\vec{F}_M = -e[\vec{u}, \vec{B}]$, и электроны будут двигаться по проводнику, не отклоняясь: $F_E = F_M$ или $-e(\varphi_1 - \varphi_2)/l = -euB$, где l – поперечный размер проводника.

Подставляя полученную в § 2 гл.5 величину дрейфовой скорости $u = j/(en)$, где j – плотность тока, n – концентрация свободных электронов, запишем холловскую разность потенциалов в виде $\varphi_1 - \varphi_2 = RjBl$, где $R = 1/(en)$ – постоянная Холла.

Замечание: эффект Холла позволяет экспериментально определить знак заряда носителей тока. В p-полупроводниках, например, где эти носители положительны, знаки зарядов на боковых сторонах проводника изменятся на противоположные и изменится направление поперечного электрического поля. Кроме того, измерив холловскую разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, а также величины B и j , можно очень просто по формуле Холла вычислить концентрацию носителей тока в исследуемом проводнике.

Глава 9.

Магнитное поле в магнетиках

1 Намагничивание вещества

При внесении ряда веществ (особенно таких, как железо) в магнитное поле, оно изменяется. Такие вещества называются магнетиками. Очевидно, в них возникает какое-то дополнительное магнитное поле. Но магнитное поле создается только токами (или движущимися зарядами), т.е. в магнетиках или магнитных средах существуют какие-то дополнительные токи, которые Ампер назвал молекулярными токами.

Примером такого тока будет движение электрона, вращающегося вокруг положительного ядра по орбите радиуса r со скоростью v (рис.9.1) и совершающего один оборот за время $\Delta t = T = 2\pi r/v$. При таком движении электрона переносится заряд $\Delta q = e$, что эквивалентно круговому току $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{ev}{2\pi r}$ (этот ток I направлен противоположно скорости $\vec{v}$ отрицательно заряженного электрона). Такой ток создает орбитальный магнитный момент, имеющий величину $p_m = I \cdot \pi r^2 = evr/2$. Направление $\vec{p}_m$ показано на рис.9.1.

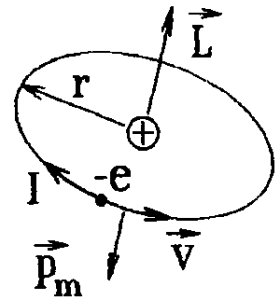


Рис.9.1

Заметим, что магнитный момент $\vec{p}_m$ вращающегося электрона связан с его моментом импульса (механическим моментом) $L = mvr$ соотношением $\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}$ (направлены эти вектора противоположно).

Приведенное соотношение называется гиромангнитным отношением.

Все молекулярные токи создаются движением электронов по замкнутым орбитам вокруг одного ядра, молекулы, или, может быть, группы молекул вещества (рис.9.2). Таким образом, все молекулярные токи являются замкнутыми (не обязательно круговыми) и обладают магнитным моментом $p_m = IS_{\text{орбиты}} \approx \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}$.



Рис.9.2

Ясно, что в среде очень много движущихся электронов, и если все молекулярные токи направлены хаотично, то их магнитные моменты

в сумме компенсируются, и вещество не создает магнитного поля, т.е. практически не является магнетиком (дерево, пластик).

Но если молекулярные токи каким-либо образом ориентированы, то в сумме они создают магнитное поле, и говорят, что вещество намагничено.

Сложим векторно магнитные моменты всех молекулярных токов в достаточно малом объеме ΔV вещества, разделим на этот объем и перейдем к пределу $\Delta V \rightarrow 0$. Полученный вектор

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}$$

называется вектором намагниченности среды (магнетика). Заметим, что это определение аналогично определению вектора поляризованности диэлектрика: $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_e}{\Delta V}$.

Если микроскопические молекулярные токи $I_{\text{мол}}$ в магнетике каким-либо образом ориентированы, то, складываясь, они создают результирующие токи намагничивания. Такие токи, в отличие от обычных токов проводимости, не приводят к перемещению заряда по магнетику. Действительно, двигаясь по замкнутым микроскопическим орбитам (рис.9.2), электроны "привязаны" к данной точке среды, т.е. не свободны. На них не действует никакое электрическое поле, заставляющее их перемещаться, просто они не могут находиться в покое.

Роль токов намагничивания заключается только в создании дополнительного магнитного поля в веществе. (В отличие от токов проводимости, эти токи и созданное ими дополнительное магнитное поле будут отмечаться штрихом.)

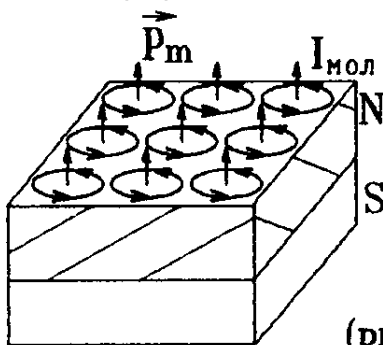


Рис.9.3,а

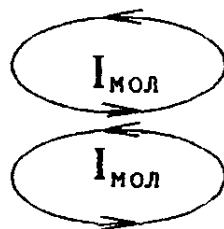


Рис.9.3,б

Пример: постоянный магнит. В этом случае молекулярные токи ориентированы относительно полюсов магнита. Их магнитные моменты складываются и образуют магнитный момент $\vec{p}_m$ магн. всего магнита

(рис.9.3,а). Как видно (рис.9.3,б), внутри однородного магнита молекулярные токи компенсируют друг друга, т.е. токи намагничивания текут по боковой поверхности магнита с некоторой линейной плотностью i' (это ток, приходящийся на единицу ширины поверхности: $i' = I'_{\text{пов}}/l$), как показано на рис.9.4. На какие бы маленькие куски ни резать магнит, он сохранит оба полюса.

Заметим, что короткий магнит (рис.9.5,а) с сечением S можно заменить на виток с током (рис.9.5,б) $I' = i'l$ и магнитным моментом $p_{m \text{ маг}} = I'S = i'lS = i'V$, где V – объем магнита. Но по определению $p_{m \text{ маг}} = \sum p_m = JV$, т.е. вектор намагниченности такого постоянного магнита имеет величину $J = i'$.

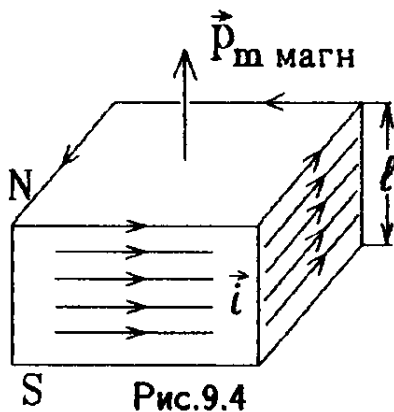


Рис.9.4

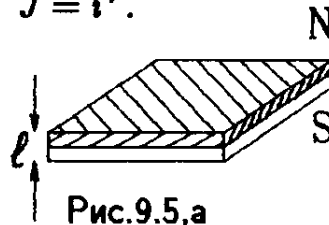


Рис.9.5,а

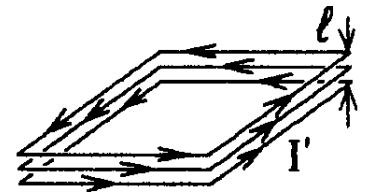


Рис.9.5,б

2 Циркуляция вектора намагниченности и токи намагничивания

Молекулярные токи $I_{\text{мол}}$ и образуемые ими токи намагничивания создают некоторое магнитное поле B' . Выберем внутри магнетика любой замкнутый контур l (рис.9.6) и запишем для него теорему о циркуляции B' : $\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{мол}}$, где $I_{\text{мол}}$ – токи, охватываемые контуром.

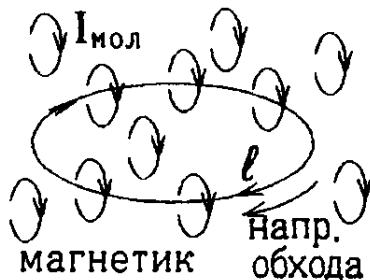


Рис.9.6

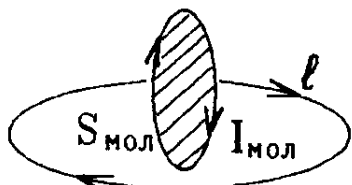


Рис.9.7

Если взять элемент контура длины $d\vec{l}$, то это те токи, центры которых лежат внутри косоугольного цилиндра с основанием $S_{\text{мол}}$, равным площади молекулярного тока (рис.9.8). Объем этого цилиндра $dV = S_{\text{мол}} d\vec{l} \cos \alpha$, где угол

Но кольцевые токи $I_{\text{мол}}$, полностью лежащие внутри контура, не дают вклада в сумму: они охватываются дважды, протекая в противоположных направлениях (рис.9.7), т.е. в сумме надо учесть только те молекулярные токи, которые в свою очередь охватывают линию контура l .

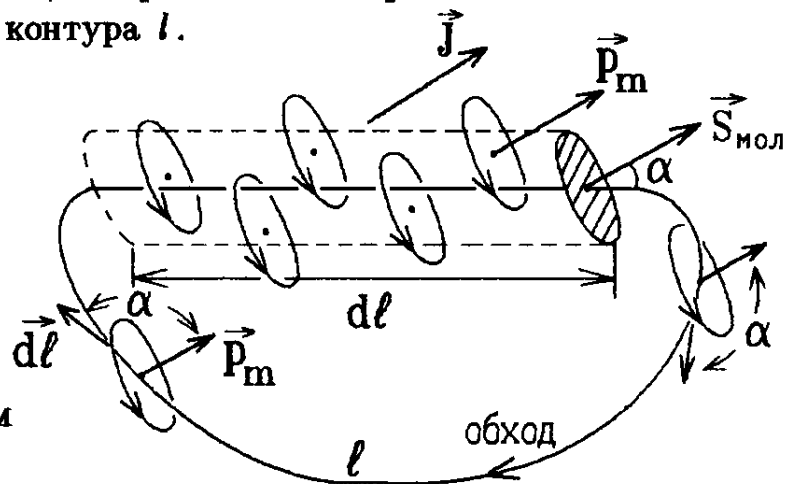


Рис.9.8

α – это угол между направлением обхода контура $d\vec{l}$ и магнитными моментами $\vec{p}_m$ всюду одинаково ориентированных молекулярных токов (направление их ориентации определяется вектором $\vec{J}$). Если n – концентрация молекулярных токов в магнетике, то малый цилиндр длины dl содержит $nS_{\text{мол}}dl \cos \alpha$ таких токов, а при обходе по всему замкнутому контуру их число равно $\oint nS_{\text{мол}} \cos \alpha dl$.

Умножая это число на величину одного молекулярного тока $I_{\text{мол}}$, получим сумму молекулярных токов, охватываемых контуром l :

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \cos \alpha dl.$$

Примем во внимание, что $p_m = I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$ – магнитный момент одного молекулярного тока. Тогда при одинаково ориентированных молекулярных токах (рис.9.8) вектор намагниченности будет равен суммарному магнитному моменту единицы объема магнетика:

$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} = n \vec{p}_m$. Тогда $\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint J dl \cos \alpha = \mu_0 \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}$, а так как это равенство выполняется для любого контура l , то

$$\boxed{\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}}.$$

Но в сумме все молекулярные токи создают результирующий ток намагничивания с плотностью $\vec{j}'$. Учитывая теорему о циркуляции $\vec{B}$ в дифференциальной форме: $\text{rot } \vec{B}' = \mu_0 \vec{j}'$, получаем теорему о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$ в дифференциальной форме: $\boxed{\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'}$. Это выражение определяет плотность токов намагничивания, создающих дополнительное магнитное поле. (В электростатике аналогичной формулой будет выражение для плотности связанных зарядов, создающих дополнительное электрическое поле: $\rho' = -\text{div } \vec{P}$.)

Используя теорему Стокса, можно получить теорему о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$ в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_s \text{rot } \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_s \vec{j}' \cdot d\vec{S} = \boxed{\sum I' = \oint_l \vec{J} \cdot d\vec{l}}, \text{ т.е.}$$

циркуляция вектора $\vec{J}$ по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых этим контуром.

Вопрос: в постоянном однородном магните токи намагничивания протекали только по поверхности. А как образуются объемные токи намагничивания?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим неоднородный магнетик,

у которого концентрация молекулярных токов не постоянна. На рис.9.9 видно, как не компенсируясь полностью, молекулярные токи образуют ток $\vec{j}'$ в объеме такого магнетика.

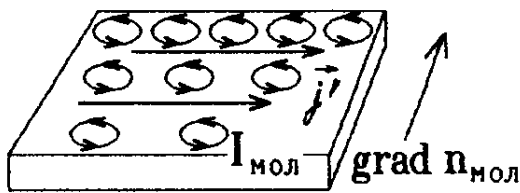


Рис.9.9

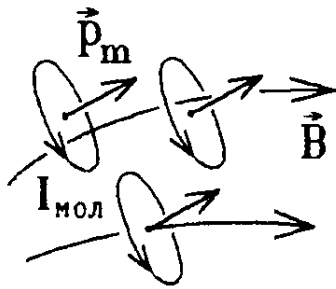


Рис.9.10

Нельзя считать, что вектор $\vec{J}$ определяется только токами намагничивания $\vec{j}'$. Сами молекулярные токи ориентируются, когда их магнитные моменты $\vec{p}_m$ поворачиваются

вдоль линий индукции внешнего магнитного поля $\vec{B}$ (рис.9.10), которое создается обычными токами проводимости $\vec{j}$. Иначе говоря, намагничивание среды может быть вызвано магнитным полем обычных токов проводимости. Поэтому

вектор $\vec{J}$ определяется распределением всех токов: и токов намагничивания $\vec{j}'$, и токов проводимости $\vec{j}$ в среде.

Вопрос: при определении магнитного поля проводника с током в § 9 гл.7 было учтено только поле, создаваемое обычными токами проводимости $\vec{j}$. Как повлияет на полученный результат дополнительное поле $\vec{B}'$ токов намагничивания?

Ответ: чем больше величина магнитного поля B , тем сильнее оно ориентирует молекулярные токи. Но в длинном цилиндрическом проводнике из магнетика поле $\vec{B}$, созданное обычным током проводимости I , растёт по мере удаления от оси проводника (рис.7.43). Поэтому молекулярные токи в большей степени ориентированы по полю $\vec{B}$ вблизи поверхности проводника, чем вблизи его оси; они распределены неоднородно (рис.9.11).

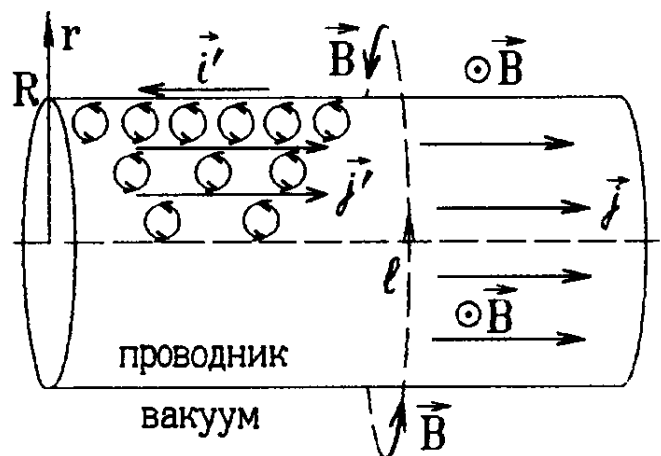


Рис.9.11

В этом случае в объеме проводника (магнетика) возникают токи намагничивания $\vec{j}'$, текущие в том же направлении, что и ток проводимости $\vec{j}$, т.е. имеется объемный ток намагничивания $I'_{об} = \int \vec{j}' \cdot d\vec{S}$. А по поверхности проводника в обратном направлении течет поверхностный ток намагничивания $I'_{пов} = 2\pi R i'$.

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{J}$ по круговому контуру радиуса $r > R$, охватывающему проводник (рис.9.11):

$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = I'_{об} - I'_{пов} = 0$, так как вне проводника, в вакууме, молекулярных токов нет, и $\boxed{\vec{J}_{в вакууме} = 0}$, т.е. $I'_{об} = I'_{пов}$.

Объемный и поверхностный токи намагничивания одинаковы по величине и различны по направлению.

Тогда индукция магнитного поля $\vec{B}$ вне провода, в вакууме, вычисляемая из теоремы о циркуляции, определяется только обычным током проводимости I :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{(I + I'_{об} - I'_{пов})}_{\text{охватываемые токи}} = \mu_0 I.$$

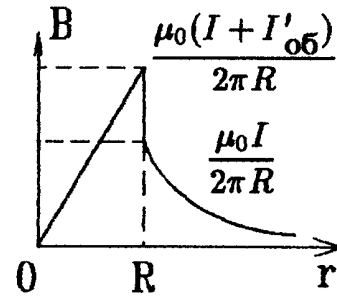


Рис.9.12

Внутри проводника поле $\vec{B}$ создано и током проводимости, и объемным током намагничивания (рис.9.12):

$$B \cdot 2\pi r \Big|_{r < R} = \mu_0(I + I'_{об}) = \mu_0(j + j')\pi r^2 \text{ или}$$

$$B \Big|_{r < R} = \frac{\mu_0(j + j')r}{2}.$$

Но если проводники из магнетика имеют более сложную форму, например, изогнуты, то токи намагничивания, вообще говоря, влияют и на поле вне проводника, то есть в вакууме.

3 Вектор напряженности магнитного поля и его свойства

Теперь мы знаем, что магнитное поле в среде создается и обычными токами проводимости, и токами намагничивания. Однако вычислить магнитное поле в некоторых случаях можно, пользуясь распределением только токов проводимости. Для этого учтем, что $\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}')$, и подставим сюда полученную в предыдущем параграфе формулу для плотности тока намагничивания $\vec{j}' = \text{rot } \vec{J}$. После подстановки и преобразования находим: $\frac{\text{rot } \vec{B}}{\mu_0} - \text{rot } \vec{J} = \text{rot } \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{j}$. Выражение в круглых скобках называют вектором

напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}}.$$

Как и вектор $\vec{J}$, напряженность магнитного поля, вообще говоря, зависит как от токов проводимости, так и от токов намагничивания.

Но в ряде задач вычислять $\vec{H}$ легче, чем индукцию $\vec{B}$.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств вектора $\vec{H}$. Теорема о циркуляции для вектора $\vec{H}$ в дифференциальной форме имеет вид:

$$\text{rot } \vec{H} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j}.$$

Как следует из этой теоремы, для определения $\text{rot } \vec{H}$ не надо учитывать неизвестное распределение молекулярных токов или токов намагничивания, а достаточно учесть только токи проводимости.

В интегральной форме теорема о циркуляции $\vec{H}$ запишется, как

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{или} \quad \boxed{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I}:$$

циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру l равна алгебраической сумме обычных токов проводимости, охватываемых этим контуром.

Пример: несмотря на присутствие токов намагничивания, для рассмотренного в §2 проводника с током I (рис. 9.13), получим

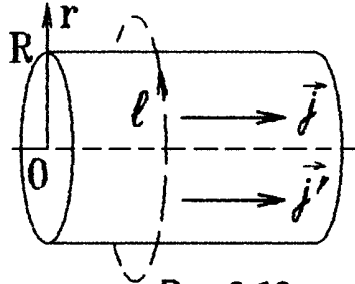


Рис.9.13

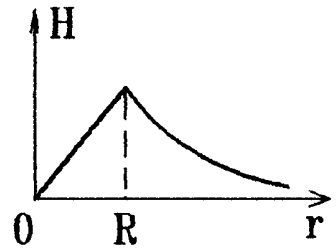


Рис.9.14

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \begin{cases} j \cdot \pi R^2 = I & \text{при } r > R, \\ j \cdot \pi R^2 = I \frac{r^2}{R^2} & \text{при } r < R, \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} & \text{при } r > R, \\ \frac{Ir}{2\pi R^2} & \text{при } r < R. \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Графическая зависимость } H(r) \\ \text{представлена на рис.9.14.} \end{array} \right)$$

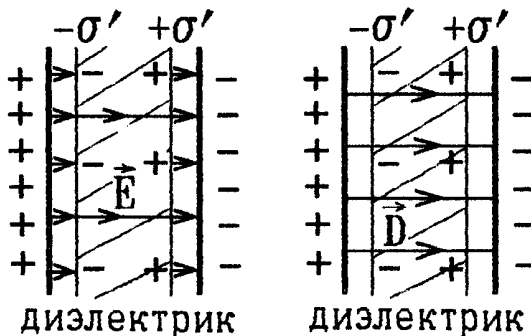


Рис.9.15

Замечание: сравним свойства векторов напряженности и индукции для постоянных электрического (рис.9.15) и магнитного полей (рис.9.16).

Часть линий вектора $\vec{E}$ в диэлектрике оканчивается на связанных зарядах σ' (рис.9.15). Часть линий вектора $\vec{B}$ в магнетике образуется за счет молекулярных токов (рис.9.16). Таким образом, на величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$ влияет микроскопическая структура среды.

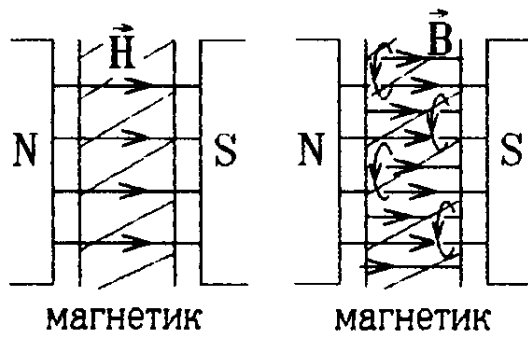


Рис.9.16

В то же время в случае, показанном на рис.9.15 и 9.16, линии $\vec{D}$ и $\vec{H}$ зависят только от распределения свободных зарядов и токов проводимости, а микроскопическая структура среды на них не влияет.

Основными для описания электрического и магнитного полей являются векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Вспомогательные векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$ используют для определения полей в ряде задач, чтобы не учитывать явно распределение связанных зарядов и токов намагничивания.

Возможно, правильное было бы вектор $\vec{B}$ назвать вектором напряженности магнитного поля по аналогии с вектором напряженности $\vec{E}$ электрического поля (а вектор $\vec{H}$ — вектором индукции магнитного поля по аналогии с вектором $\vec{D}$). Но такие названия «крест — накрест» сложились исторически. Именно поэтому электрическая постоянная ϵ_0 в законе Кулона оказывается в знаменателе формулы, а магнитная постоянная μ_0 в законе Био-Савара-Лапласа — в числителе.

4 Магнитное поле в магнетиках.

Постоянные магниты

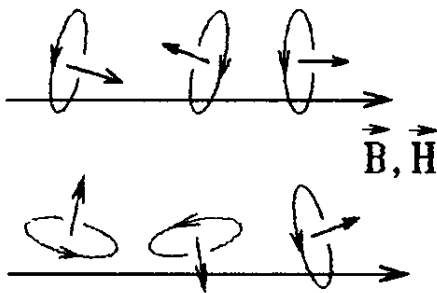


Рис.9.17

Во многих средах ориентация молекулярных токов происходит под действием внешнего магнитного поля. Энтропийные силы, с другой стороны, стремятся разориентировать магнитные моменты $\vec{p}_m$ молекулярных токов, поэтому их магнитные моменты лишь частично ориентированы вдоль поля $\vec{B}$ (рис.9.17). Чем сильнее магнитное поле $\vec{B}$, тем больше степень ориентации $\vec{p}_m$, т.е. $\sum \vec{p}_m \sim \vec{J} \sim \vec{B}$ или $\vec{H}$.

Такую линейную зависимость вектора намагниченности среды от величины внешнего магнитного поля принято записывать в виде

$\vec{J} = \chi \vec{H}$. Постоянная χ называется магнитной восприимчивостью (сравните с формулой для вектора поляризованности среды во внешнем электрическом поле: $\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$).

Подставляя это выражение для $\vec{J}$ в определение $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} =$

$= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}$, находим $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$. Величину $1 + \chi = \mu$ называют магнитной проницаемостью среды.

Следовательно, в изотропном магнетике связь индукции и напряженности магнитного поля имеет вид: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. В вакууме, а также в любой немагнитной среде $\chi = 0$, $\vec{J} = 0$ и $\mu = 1$.

Заметим следующее:

если однородный изотропный магнетик с проницаемостью μ полностью заполняет объем, ограниченный замкнутой поверхностью, образованной линиями $\vec{B}_{\text{пр}}$ (где $\vec{B}_{\text{пр}}$ — индукция поля, созданного только токами проводимости), то индукция магнитного поля в таком магнетике будет в μ раз больше, чем в вакууме: $\vec{B} = \mu\vec{B}_{\text{вак}}$. В частности, это справедливо для магнетика, заполняющего все бесконечное пространство (так как $B|_{\infty} = 0$). В таком случае при удалении магнетика ни величина, ни направление напряженности магнитного поля не изменятся: $\vec{H} = \vec{B}/\mu\mu_0 = \vec{B}_{\text{вак}}/\mu_0 = \vec{H}_{\text{вак}}$.

В качестве примера рассмотрим бесконечно длинный соленоид с током проводимости I в витках, заполненный магнетиком с магнитной проницаемостью μ , как показано на рис.9.18. Магнетик намаг-

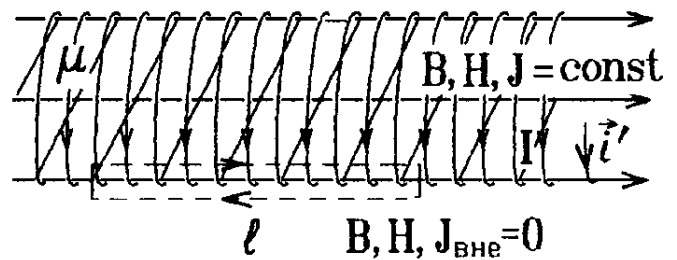


Рис.9.18

ничивается в результате ориентации молекулярных токов, и появляется ток намагничивания с линейной плотностью i' , текущий по его боковой поверхности (рис.9.3,а и 9.4).

Запишем теоремы о циркуляции для $\vec{H}$ и $\vec{B}$ по очень узкому прямоугольному замкнутому контуру длины l , охватывающему N витков с током I (рис.9.18):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{внутри}} \cdot l = IN \quad \text{или} \quad H_{\text{внутри}} = I \frac{N}{l};$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{внутри}} \cdot l = \mu_0 \underbrace{(IN + i'l)}_{\text{охватываемые токи}} = \mu_0 l (H_{\text{внутри}} + J).$$

Подставив в последнее выражение $J = \chi H$, найдем

$$B_{\text{внутри}} = \mu_0(1 + \chi)H_{\text{внутри}} = \mu_0\mu H_{\text{внутри}} = \mu\mu_0 IN/l.$$

Индукция магнитного поля $\vec{B}$ внутри очень длинного соленоида возрастает в μ раз при введении в соленоид сердечника с магнитной проницаемостью μ .

Если же магнетик имеет произвольную форму, то возникающие в нем токи намагничивания приводят к изменению магнитного поля и к искривлению линий $\vec{B}$ и $\vec{H}$ не только внутри, но и вне магнетика, в вакууме, как показано на рис.9.19. Линии $\vec{B}$ при этом прерываться не могут, они замкнуты. А линии $\vec{H}$ должны обрываться или возникать в точках неоднородности среды, в которых $\mu \neq \text{const}$ (для того, чтобы выполнялось соотношение $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$).

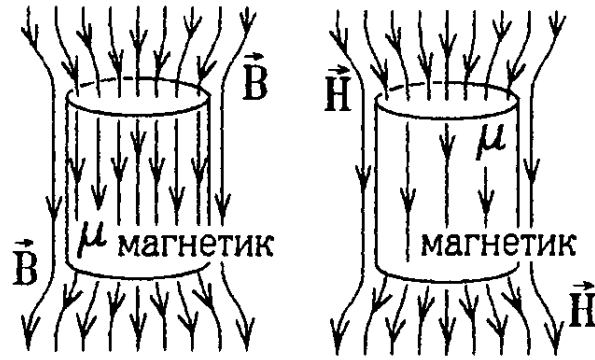


Рис.9.19

Вопрос: в каких случаях внутри магнетика появляются объемные токи намагничивания $j' \neq 0$?

Ответ: 1) если магнетик неоднороден, как показано на рис.9.9;

2) если в магнетике имеются объемные токи проводимости j . В этом случае из теоремы о циркуляции для вектора намагниченности следует $\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int \vec{j}' \cdot d\vec{S}$. В левой части этого выражения интеграл берется по любому замкнутому контуру, а в правой части стоит полный ток намагничивания I' , охватываемый контуром. Подставляя $\vec{J} = \chi\vec{H}$ и используя теорему о циркуляции $\vec{H}$ по тому же контуру: $\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \chi \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \chi \oint \vec{j} \cdot d\vec{S}$, получим $\boxed{\vec{j}' = \chi\vec{j}}$.

Таким образом, магнитное поле тока проводимости $\vec{j}$ ориентирует молекулярные токи, что приводит к появлению тока намагничивания $\vec{j}'$. Из сказанного можно сделать вывод:

объемных токов намагничивания нет в однородном магнетике, в котором отсутствуют токи проводимости. Если поместить такой магнетик во внешнее магнитное поле, то токи намагничивания возникнут только на поверхности (на границе) магнетика (рис.9.4).

Отметим еще один важный факт:

формулы $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, $\vec{J} = \chi\vec{H}$, $\vec{B}' = \mu_0\vec{J}$ и $\vec{j}' = \chi\vec{j}$ справедливы только в изотропном магнетике, в котором эффект намагничения создан магнитным полем обычных токов проводимости. В постоянных магнитах (в ферромагнитных средах), где остаточные токи намагничивания и созданное этими токами остаточное магнитное поле $\vec{B}_{\text{ост}}'$ сохраняются даже в отсутствие внешнего магнитного поля, записанные выше формулы не применимы! Но соотношение

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ выполняется и в этом случае.

Для замкнутой поверхности в виде цилиндра с бесконечно малой высотой, одно основание S которого лежит в одной среде, а другое – в другой (рис.9.21), теорема Гаусса для $\vec{B}$ дает: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{1n}S - B_{2n}S = 0$ (линии индукции практически пересекают только основания S цилиндрической замкнутой поверхности), т.е. $B_{1n} = B_{2n}$.

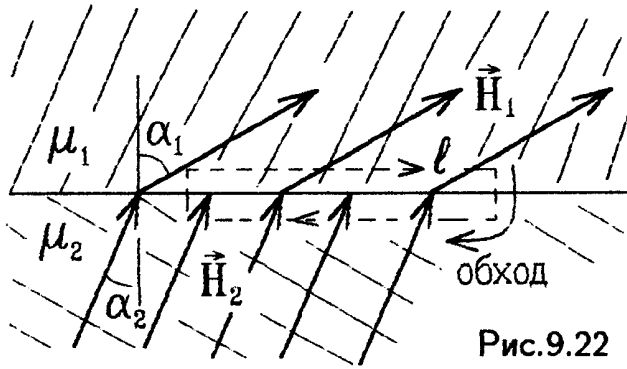


Рис.9.22

С другой стороны, если на границе отсутствуют токи проводимости, то для очень узкого замкнутого контура длины l , охватывающего часть границы (рис.9.22), из теоремы о циркуляции $\vec{H}$ получим

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1\tau}l - H_{2\tau}l = 0, \text{ так}$$

как охватываемый ток проводимости равен нулю.

Следовательно, на границе двух сред сохраняется тангенциальная составляющая вектора напряженности и нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Если среды на рис.9.21 и 9.22 не являются ферромагнитными, то на границе их раздела с учетом связи $B = \mu_0\mu H$ должны выполняться условия:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \text{ Поэтому } \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \text{ где}$$

α_1 и α_2 – углы между линией индукции (напряженности) и нормалью к поверхности раздела магнетиков.

Замечание: линии вектора $\vec{B}$ всегда замкнуты, они нигде не могут обрываться или возникать. Поэтому при внесении в магнитное поле оболочки из магнетика с большим μ линии $\vec{B}$ отклоняются к ее внешней поверхности (рис.9.23), где они сгущаются, и поле $\vec{B}$ усиливается. Соответственно, внутри оболочки поле $\vec{B}$ будет заметно ослабевать, т.е. замкнутые железные оболочки ($\mu_{\text{железа}} \gg 1$) можно использовать в качестве магнитной защиты (экранировка магнитного поля).

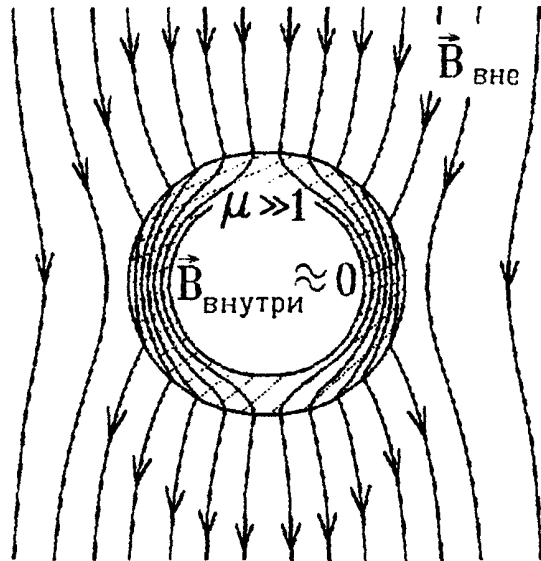


Рис.9.23

Что касается линий $\vec{H}$, то для рассматривавшейся ранее (рис.9.21) замкнутой цилиндрической поверхности S $\oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = H_{1n}S - H_{2n}S \neq 0$, так как $H_{1n} \neq H_{2n}$. Тогда из теоремы Остроградского $\oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int \text{div } \vec{H} dV$ следует, что на границе раздела двух различных магнетиков $\text{div } \vec{H} \neq 0$, т.е. на этой границе (как уже отмечалось в §4) линии $\vec{H}$ могут возникать или обрываться (рис.9.22).

6 Магнетики. Природа ферро-, пара- и диамагнетизма

По своим магнитным свойствам все магнетики делятся на три типа в зависимости от величины магнитной проницаемости μ :

- 1) $\mu = 1 + \chi \gg 1$ – это ферромагнетики (Fe, Ni, Co и т.п.);
- 2) $\mu = 1 + \chi \gtrsim 1$ (магнитная восприимчивость $\chi \approx 10^{-4} \ll 1$) – это парамагнетики (кислород, большинство металлов);
- 3) $\mu = 1 + \chi \lesssim 1$ ($\chi \approx -10^{-5} < 0$) – это диамагнетики (водород, вода, Cu, благородные газы).

1. Ферромагнетизм.

В ферромагнетиках начинают действовать большие по величине силы квантовой природы, названные обменными силами. Эти силы заставляют магнитные моменты всех атомов в некоторой области выстраиваться стро-го параллельно (рис.9.24). Такая область ферромагнетика называется доméном и обладает очень большим результирующим магнитным моментом $\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{m \text{ ат}}$, т.е. обладает свойствами постоянного магнита. Ориентируясь вдоль направления внешнего магнитного поля, доméны способны создать очень сильное намагничение среды, чем объясняется большая величина $\mu \gg 1$.

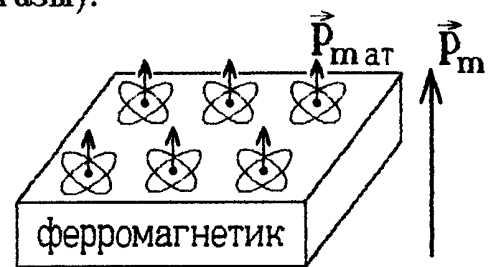


Рис.9.24

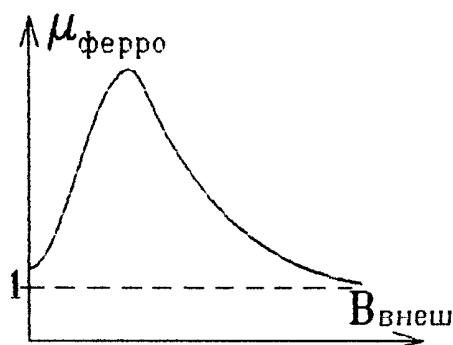


Рис.9.25

Заметим только, что степень этой ориентации зависит от величины внешнего поля. Поэтому проницаемость μ ферромагнитной среды также непостоянна и зависит от величины $B_{\text{внеш}}$ (рис.9.25). В очень сильных магнитных полях ферромагнетик приближается по своим свойствам к парамагнетику ($\mu \rightarrow 1$). Ферромагнетизм как квантовое явление будет

рассмотрен далее в квантовой теории вещества.

2. Парамагнетизм.

Движение электронов по замкнутым орбитам в атомах создает молекулярные токи с магнитными моментами $\vec{p}_{m \text{ орб}}$. Но, кроме того, как оказывается, все элементарные частицы – электроны, протоны, нейтроны – сами ведут себя как крошечные магниты, т.е. обладают некоторыми собственными магнитными моментами $\vec{p}_{m \text{ собст}}$ (их природа также будет изучена в курсе квантовой физики).

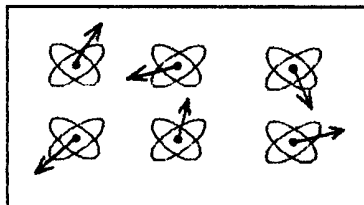


Рис.9.26

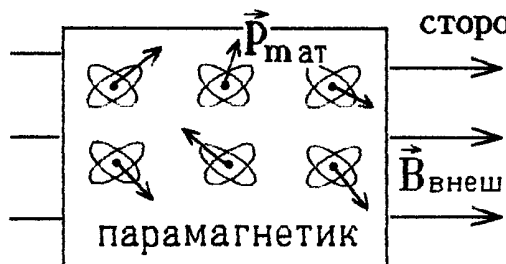


Рис.9.27

Магнитные моменты атомов среды складываются из всех этих магнитных моментов составляющих атом частиц:

$$\vec{p}_{m \text{ ат}} = \sum (\vec{p}_{m \text{ орб}} + \vec{p}_{m \text{ собст}}).$$

В парамагнетике обменные силы не действуют, и магнитные моменты отдельных атомов направлены хаотически в разные стороны (рис.9.26).

При помещении парамагнетика во внешнее магнитное поле $\vec{B}_{\text{внеш}}$ магнитным моментам атомов энергетически выгодно быть ориентированными по полю (рис.9.27). С другой стороны, тепловое движение препятствует ориентации $\vec{p}_{m \text{ ат}}$ вдоль линий $\vec{B}_{\text{внеш}}$, разориентируя их (и увеличивая энтропию среды). Поэтому

магнитные моменты атомов лишь частично (и очень слабо) ориентированы по полю, вследствие чего степень этой ориентации χ мала.

магнитные моменты атомов лишь частично (и очень слабо) ориентированы по полю, вследствие чего степень этой ориентации χ мала.

3. Диамагнетизм.

Для некоторых веществ сумма орбитальных и собственных магнитных моментов всех составляющих атом частиц равна нулю:

$$\vec{p}_{m \text{ ат}} = \sum (\vec{p}_{m \text{ орб}} + \vec{p}_{m \text{ собст}}) = 0,$$

т.е. атомные магнитные моменты, способные ориентироваться по внешнему магнитному полю, отсутствуют.

Но каждый электрон вращается вокруг атомного ядра и образует маленький волчок, гироскоп, на который во внешнем магнитном поле действует момент сил

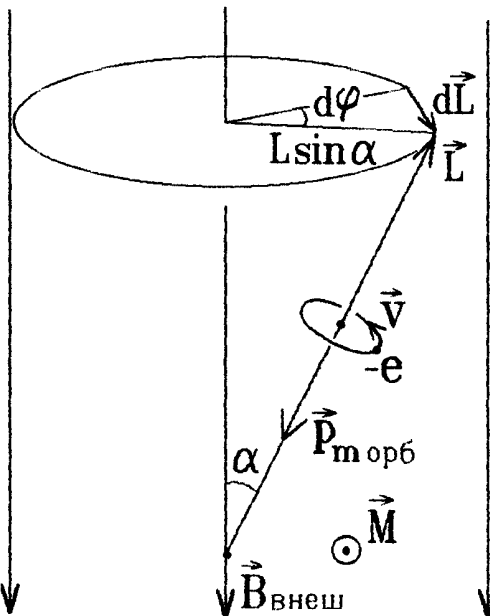


Рис.9.28

$$\vec{M} = [\vec{p}_{\text{торб}}, \vec{B}_{\text{внеш}}].$$

Такой гироскоп совершает прецессию (рис.9.28). Его момент импульса $\vec{L}$ (или ось) поворачивается за время dt на угол

$$d\varphi \approx \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{M dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_{\text{торб}} B_{\text{внеш}} \sin \alpha dt}{L \sin \alpha}.$$

Учитывая, что гироманнитное отношение $\frac{p_{\text{торб}}}{L} = \frac{e}{2m_e}$, где m_e – масса, e – заряд электрона, находим циклическую частоту прецессии, которая называется ларморовой частотой прецессии:

$$\omega_L = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e B_{\text{внеш}}}{2m_e}.$$

Но если волчок совершает прецессию, то и любая точка на волчке тоже вращается с угловой скоростью ω_L вокруг линий $\vec{B}_{\text{внеш}}$. Это дополнительное вращение создает дополнительный молекулярный ток и дополнительный нескомпенсированный магнитный момент $\vec{p}_{\text{мл}}$, ориентированный **против** поля $\vec{B}_{\text{внеш}}$ (рис.9.29). Поэтому

эффект ларморовой прецессии магнитных моментов молекулярных токов $\vec{p}_{\text{торб}}$ во внешнем магнитном поле ослабляет это поле ($\chi < 0$).

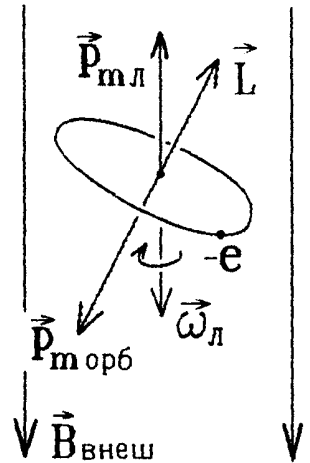


Рис.9.29

Этот эффект имеется, естественно, у всех веществ, но он очень мал, и в ферро- и парамагнитных средах перекрывается выстраиванием ненулевых магнитных моментов атомов по полю. Заметен он только в диамагнетиках, где $\vec{p}_{\text{ат}} = 0$.

Глава 10.

Плазма

1 Понятие о плазме

Мы живем в условиях, когда вещество находится в твердом (кристаллическом), жидком или газообразном состоянии. Но подавляющая доля вещества нашей Вселенной существует в другом агрегатном состоянии – состоянии плазмы.

Плазма – это сильно ионизированный квазинейтральный газ, в котором велика степень ионизации α , т.е. отношение числа ионизированных атомов к числу всех атомов газа: $\alpha \gtrsim 10^{-3}$.

Квазинейтральность плазмы означает, что суммарный отрицательный заряд свободных электронов в каждом достаточно малом объеме приближенно равен суммарному заряду положительно заряженных ионов. Но свободные электроны и ионы движутся, и в любой области внутри плазмы может образоваться небольшой избыток ионов или электронов и возникнуть локальный электрический заряд с плотностью ρ .

Вопрос: любой ионизированный газ стремится рекомбинировать. Рекомбинацией называется процесс столкновения электронов и ионов, приводящий к образованию нейтральных атомов. Почему же плазма не превращается в нейтральный газ?

Ответ: это объясняется разными причинами, так как плазма может существовать при различных условиях. Почти все вещество нашей Вселенной находится в состоянии плазмы либо в звездах, либо в виде разреженного межзвездного газа (доля планет очень мала). Поэтому рассмотрим процессы, обеспечивающие устойчивое состояние плазмы в этих двух случаях.

В звездах температура вещества (в основном водорода) слишком велика ($T \gtrsim 10^7$ K), и отдельные атомы имеют огромную кинетическую энергию $3kT/2 \gtrsim 10^3$ эВ, много большую, чем энергия ионизации атома $W_{\text{ион}} \approx 10$ эВ (это энергия, которую надо затратить, чтобы выбить электрон из внешней электронной оболочки атома). Такой процесс называется ударной ионизацией

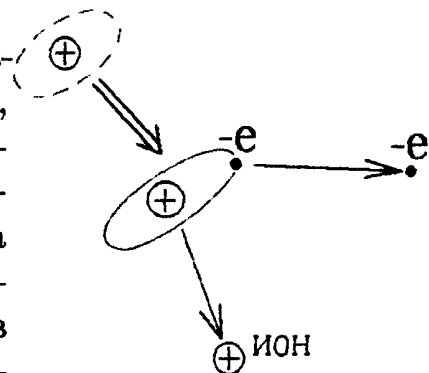


Рис.10.1

(рис.10.1). Поэтому в результате многочисленных соударений атомов звездное вещество будет находиться в состоянии практически полной ($\alpha \approx 1$) ионизации (сильно ионизированная плазма).

В межзвездной среде атомы газа тоже ионизируются за счет редких соударений друг с другом, соударений с элементарными частицами, образующими космические лучи, за счет фотоионизации (выбивание электронов при поглощении фотонов рентгеновского или γ -излучения звезд). Рекомбинация же ионов и электронов сильно затруднена, так как при столкновении двух частиц (электрона и иона) рекомбинация вообще невозможна.

Чтобы объяснить это, перейдем в систему, где образующийся нейтральный атом покоится (рис.10.2). В нерелятивистском случае суммарная кинетическая энергия иона и электрона до удара была положительной, а после удара энергия атома равна нулю. Поэтому рекомбинация должна сопровождаться испусканием фотона (рис.10.2). Но в этом случае два уравнения

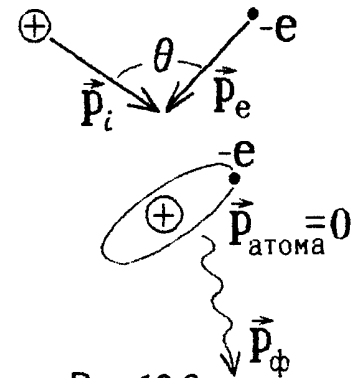


Рис.10.2

$$\begin{cases} \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{p_e^2}{2m_e} = W_{\text{ион}} + \underbrace{E_{\text{фотона}}}_{= p_{\text{ф}} c} & (\text{закон сохранения энергии}), \\ \vec{p}_i + \vec{p}_e = \vec{p}_{\text{ф}} & (\text{закон сохранения импульса}) \end{cases}$$

не могут иметь решения для нескольких произвольных переменных p_i , p_e , $p_{\text{ф}}$, θ . Рекомбинация происходит, когда при образовании нейтрального атома выполняются законы сохранения энергии и импульса системы, что случается крайне редко. Поэтому межзвездное вещество сохраняется в виде сильно ионизированной плазмы с $\alpha \approx 1$. (В обычном газе концентрация атомов $n \approx 10^{25} \text{ м}^{-3}$ велика, и рекомбинация достаточно быстро происходит при тройных соударениях частиц, но в межзвездном газе $n < 10^7 \text{ м}^{-3}$, и тройные соударения практически отсутствуют).

Можно сделать вывод:

|| для поддержания вещества в состоянии плазмы должна существовать либо **внешняя причина**, вызывающая непрерывную ионизацию атомов газа (ударная ионизация, рентгеновское или γ -излучение, очень сильные электрические поля и т.п.), либо должен существовать механизм, замедляющий рекомбинацию ионов.

Плазма может существовать в разных условиях, как изображено на рис.10.3, где по координатным осям отложены температура T и концентрация ионов и электронов $n = n_i = n_e$ плазмы.

Плазма образуется при ионизации газа, но некоторые ее свойства сильно отличаются от свойств газа из электронейтральных частиц, что и позволяет считать плазму особым четвертым агрегатным состоянием.

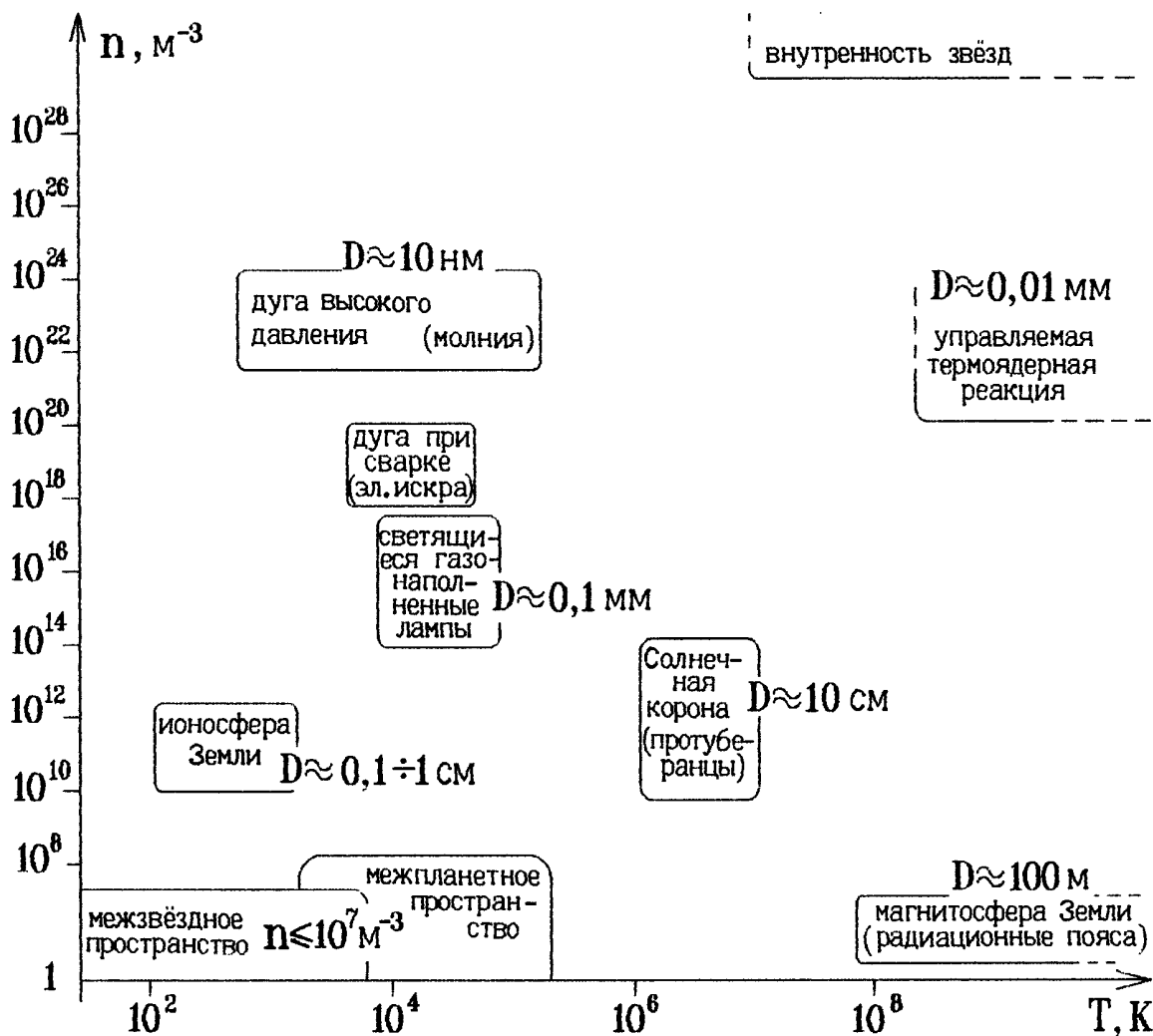


Рис.10.3

2 Свойства плазмы

1. Экранировка электрического поля.

Поместим в плазму малый положительный точечный заряд q . Его электрическое поле с потенциалом $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ действует на свободные заряженные частицы плазмы, притягивая электроны и отталкивая положительные ионы (рис.10.4) так, что в области вблизи заряда q концентрация электронов n_e возрастает, а концентрация ионов n_i уменьшается

по сравнению с равновесным значением концентрации частиц в плазме $n = n_{e0} = n_{i0}$. Условие электронейтральности плазмы в этой области

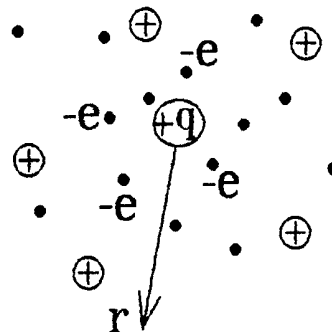


Рис.10.4

нарушается, и возникает нескомпенсированный отрицательный заряд с объемной плотностью $\rho = +en_i - en_e$. Газ заряженных частиц, имеющих в поле с потенциалом φ потенциальную энергию $\pm e\varphi$, приходит в равновесие и подчиняется распределению Больцмана:

$$n_e = n \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right); \quad n_i = n \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right),$$

откуда

$$\rho = en \left[\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \right] < 0,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Часть силовых линий, выходящих из заряда $+q$, будет оканчиваться на этом облаке отрицательного заряда, т.е. плазма начинает экранировать (ослаблять) электрическое поле внесенного заряда q .

Как было отмечено раньше, плазма образована очень быстрыми частицами, кинетическая энергия которых $3kT/2$ всегда намного превышает потенциальную энергию взаимодействия:

$$kT \gg e\varphi.$$

Тогда $\exp\left(\pm \frac{e\varphi}{kT}\right) \approx 1 \pm \frac{e\varphi}{kT}$ (разложение по малому параметру), и

$$\rho = -\frac{2e^2n}{kT}\varphi.$$

Из уравнений электростатики (теорема Гаусса в дифференциальной форме) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\varphi) = -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, получаем уравнение Пуассона для определения потенциала:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ или } \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{2e^2n}{\varepsilon_0 kT} \varphi.$$

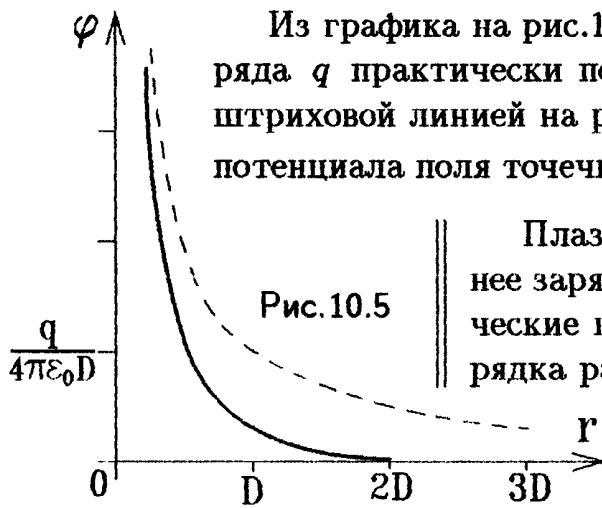
Его решение ищем в виде $\varphi = \frac{A}{r} \exp(\text{const} \cdot r)$. Подставляя $\varphi(r)$ в уравнение Пуассона, получаем $\text{const} = -\sqrt{2e^2n/(\varepsilon_0 kT)}$, $A = q/(4\pi\varepsilon_0)$ (вблизи заряда q , где нет частиц плазмы, поле совпадает с полем уединенного точечного заряда q). В результате найден потенциал поля точечного заряда q , внесенного в плазму:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{D}\right), \quad \text{где постоянная } D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{e^2n}}$$

называется дебаевским радиусом или радиусом экранировки.

{ ab hoc
et
ab hac }

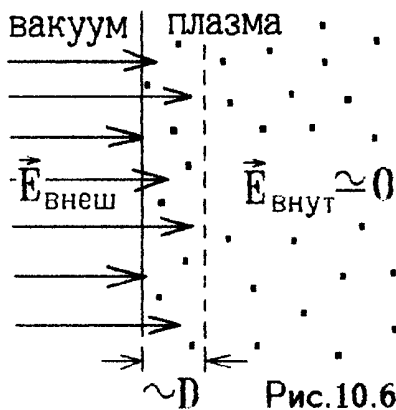
Эта постоянная была введена П. Дебаем и Е. Хюккелем в 1923 г. в процессе исследования свойств сильных электролитов, а для описания свойств плазмы была использована И. Лэнгмюром в 1927 г. И Дебаю, и Лэнгмюру за их пионерские исследования были присуждены Нобелевские премии.



Из графика на рис.10.5 видно, что при $r \gtrsim D$ поле заряда q практически полностью исчезает (для сравнения штриховой линией на рис.10.5 показана зависимость от r потенциала поля точечного заряда в вакууме: $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$).

Плазма экранирует поля внесенных в нее заряженных тел или внешние электрические поля (рис.10.6) на расстояниях порядка радиуса экранировки D .

Приблизительные величины радиусов экранировки D для разных случаев плазмы указаны



на рис.10.3. В случае сильных полей, когда $e\varphi \gtrsim kT$, поведение плазмы меняется, но свойство экранировки внешних полей по-прежнему сохраняется.

Ионизированный газ можно считать плазмой только в том случае, когда линейные размеры занимаемой им области намного превышают дебаевский радиус экранировки D .

2. Коллективный характер взаимодействия частиц.

Экранироваться будет не только внесенный извне заряд, но и любое локальное изменение заряда самой плазмы, возникающее при случайном сближении нескольких ионов или электронов. В частности, заряд каждой частицы плазмы тоже экранируется на расстоянии D .

Но в области с радиусом D (где электрическое поле любого электрона или иона плазмы отлично от нуля) находится

$$N = n \cdot \frac{4}{3}\pi D^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{(\epsilon_0 k)^{3/2}}{e^3} \sqrt{\frac{T^3}{n}} = 1,38 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{T^3}{n}}$$

частиц плазмы каждого знака. В большинстве случаев, показанных на рис.10.3, это число $N \gg 1$!

Каждая частица плазмы электрически взаимодействует одновременно с огромным числом $N \gg 1$ других частиц плазмы. В результате этого коллективного взаимодействия траектории частиц не могут изменяться резко, т.е. быть ломаными линиями. При движении каждая частица сильно ионизированной плазмы имеет плавно искривляющуюся траекторию (рис.10.7).

Для сравнения заметим, что нейтральные частицы обычного газа почти не взаимодействуют на расстоянии, а сталкиваются только с од-

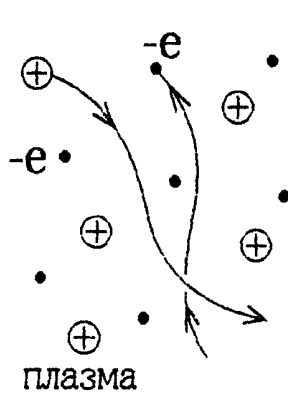


Рис.10.7

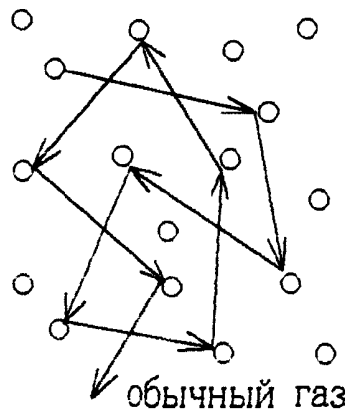


Рис.10.8

ной соседней частицей (парные столкновения). В результате траекторией частицы газа будет ломаная линия, практически не выходящая за пределы малого объема газа, в котором частица совершает хаотическое движение (рис.10.8).

3. Уравнение состояния плазмы.

Суммарная потенциальная энергия взаимодействия каждой частицы плазмы со всеми соседними частицами намного меньше, чем ее кинетическая энергия: $W_{вз} \ll 3kT/2$.

Действительно, ион плазмы окружен «облаком» экранирующего отрицательного заряда (рис.10.9), плотность которого была вычислена ранее:

$$\rho = -\frac{2e^2n}{kT}\varphi = -\frac{2e^3n}{4\pi\epsilon_0kTr} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{D}\right).$$

Тогда
$$\frac{W_{вз}}{3kT/2} = \frac{2}{3kT} \int \frac{e|\rho|dV}{4\pi\epsilon_0r} =$$

$$= \frac{e^4n}{3\pi(\epsilon_0kT)^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{D}\right) dr = \frac{1}{3\sqrt{2}\pi nD^3} = \frac{4}{9\sqrt{2}N} \ll 1.$$

Это означает, что взаимодействием заряженных частиц плазмы друг с другом можно пренебречь и рассматривать плазму как **идеальный газ** с уравнениями состояния для электронов и ионов

$$p_e = nkT_e \text{ и } p_i = nkT_i$$

(температуры электронного и ионного газов могут быть различными).

Противоположно заряженные электроны и ионы плазмы движутся свободно друг относительно друга, но при этом все время выполняется условие квазинейтральности.

Однако, при сильном увеличении концентрации частиц n возрастает эффективная энергия взаимодействия (притяжения!) между противоположно заряженными частицами плазмы, и давление как электронного, так и ионного газов в ней начинает уменьшаться по сравнению с давлением идеального газа $p = nkT$.

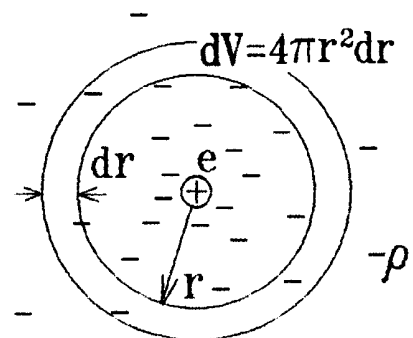


Рис.10.9

4. Проводимость плазмы.

Плазма образована свободными заряженными частицами, и поэтому проводит ток (рис.10.10). Ее удельная проводимость сильно зависит от температуры T и мало изменяется при увеличении концентрации n : $\sigma \approx 10^{-3} T^{3/2} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. При $T \gtrsim 10^8 \text{ К}$ (температура звезд или реакции термоядерного синтеза) проводимость плазмы превышает проводимость золота или меди. (Для сравнения заметим, что в слабо ионизированных газах $\sigma \sim 1/\sqrt{T}$, как и в металлических проводниках, в соответствии с классической теорией проводимости).

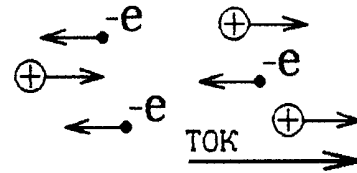


Рис.10.10

3 Плазменные колебания

Сохранять идеальную электронейтральность во всех ее точках плазма не может. При малейшем изменении температуры (тепловая флуктуация) электроны приобретают дополнительную скорость, а ионы сдвинуться не успевают, так как они имеют значительно большую массу $m_i \gtrsim 2 \cdot 10^3 m_e$, где m_e – масса электрона.

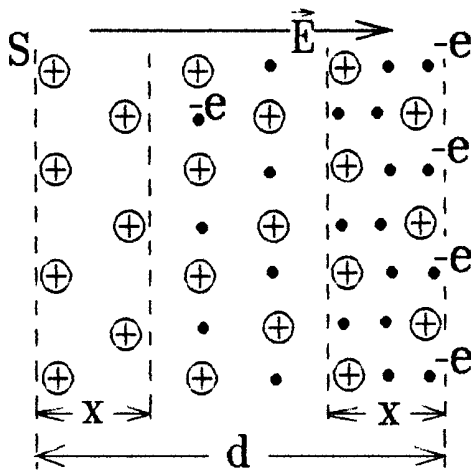


Рис.10.11

Предположим, что в слое плазмы толщины d электроны сдвинулись на малое расстояние x относительно ионов, как показано на рис.10.11. Возникает флуктуация заряда, т.е. два тонких слоя с площадью S и с объемом $x \cdot S$, которые имеют заряды $+q = en_i xS$ и $-q = -en_e xS$, где $n_i = n_e = n$. Они создают поле, аналогичное полю плоского заряженного конденсатора (рис.10.12):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{enx}{\epsilon_0}.$$

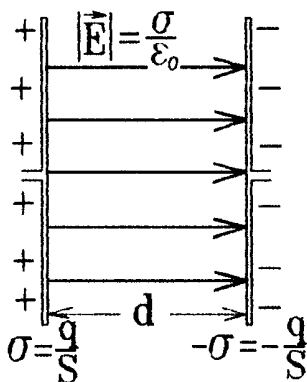


Рис.10.12

Возникшее поле действует на все электроны в слое толщины d , имеющие общую массу $m = m_e n S d$ и общий заряд $Q = -en S d$, и заставляет их вернуться обратно, т.е. стремится уничтожить возникшее нарушение квазинейтральности.

Уравнение движения всей совокупности электронов (тяжелые ионы не успевают сдвинуться) будет иметь вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = QE \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e} x = 0}.$$

Это – уравнение гармонических колебаний. В момент достижения положения равновесия (электронейтральности) электроны по инерции продолжают движение, и отрицательный заряд смещается в другую сторону и т.д.

Вывод: при всех нарушениях электронейтральности в плазме возникают колебания плотности электронного газа (т.е. плотности заряда ρ). Эти колебания называются плазменными или лэнгмюровскими и происходят с плазменной (лэнгмюровской) частотой $\omega_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e}}$.

Флуктуации плотности, возникающие в обычном газе, немедленно распространились бы за счет столкновения молекул по всему газу. А **плазменные колебания не распространяются по всей плазме. Они происходят только в очень малой области, где возникли возмущения.** Размер такой области определяется амплитудой A колебания каждого электрона: $x = A \cos \omega_{\text{пл}} t$. Приравнивая его кинетическую энергию тепловой, $m_e \frac{v^2}{2} = \frac{m_e}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \approx \frac{m_e}{2} A^2 \omega_{\text{пл}}^2 = \frac{1}{2} kT$ (энергия одной степени свободы), найдем

$$A \approx \sqrt{\frac{kT}{m_e \omega_{\text{пл}}^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{e^2 n}} = D.$$

Размер области плазмы, в которой могут возникать нарушения электронейтральности, равен радиусу экранировки D и мал по сравнению с размерами всей плазмы.

4 Плазма в магнитном поле

В большинстве случаев можно считать, что плазма или достаточно сильно нагрета, или достаточно разрежена так, что энергия взаимодействия ее частиц с другими частицами

пренебрежимо мала по сравнению с тепловой энергией: $W_{\text{вз}} \ll 3kT/2$. Тогда частицы плазмы движутся в магнитном поле **независимо**. Под действием силы Лоренца $\vec{F}_L$ их траектории образуют винтовые линии, навитые на линии индукции $\vec{B}$ (рис.10.13).

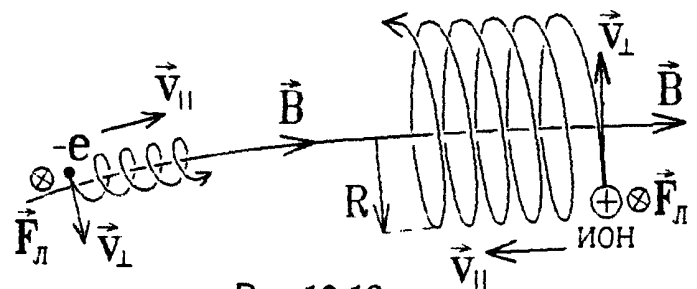


Рис.10.13

Радиус траекторий определяется из уравнения движения $mv_{\perp}^2/R = F_{\perp} = ev_{\perp}B$, т.е. $R = \frac{mv_{\perp}}{eB}$, а частота обращения $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v_{\perp}}{2\pi R} = eB/m$ называется циклотронной частотой.

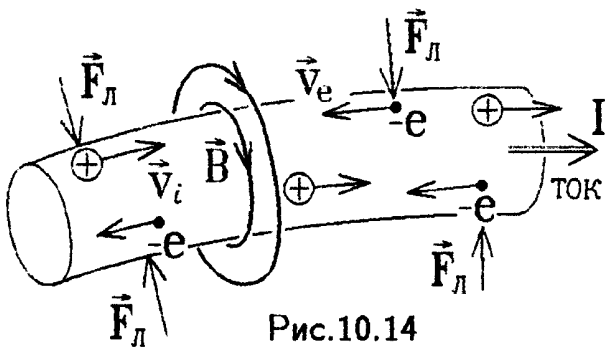


Рис.10.14

Рассмотрим возникновение тока в плазме. Трубка тока (рис. 10.14) создает свое собственное магнитное поле $\vec{B}$. И это поле действует на каждую движущуюся заряженную частицу с силой Лоренца $\vec{F}_L$, направленной к оси тока! Эти силы **сжимают**

трубку тока и не дают плазме разлететься под действием внутреннего давления $p = nkT$. Это явление называется пинч – эффектом (английское «pinch» означает «сжимать»).

Плазма может существовать в виде устойчивого, не разлетающегося плазменного «шнура» (или «трубки») с током, когда на границе «шнура» магнитные силы, вызывающие пинч – эффект, полностью уравниваются силами внутреннего давления в плазме.

Примерами устойчивого плазменного «шнура» будут молния или электрическая искра; протуберанец (плазма выброшенная из солнечной короны в виде узкого «языка»); плазма в установках типа «токамак» (рис.10.15).

Замечание: при повышении плотности плазмы пинч – эффект перестает стабилизировать плазменный шнур, и развиваются гидромагнитные неустойчивости: Рис.10.15

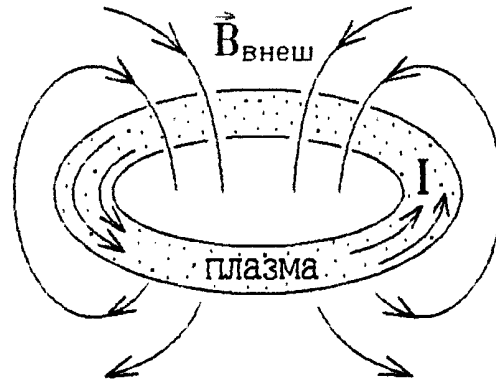


Рис.10.15

в месте, где радиус шнура случайным образом утончается, скорость течения плазмы возрастает (как и скорость течения жидкости в узком участке трубы!) (рис.10.16).

Тогда, согласно уравнению Бернулли $p + \rho v^2/2 = \text{const}$, давление внутри плазмы на этом участке уменьшается, а магнитное поле $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ растет. Магнитные силы превышают силы внутреннего давления, и шнур сжимается все сильнее, пока не разорвется.

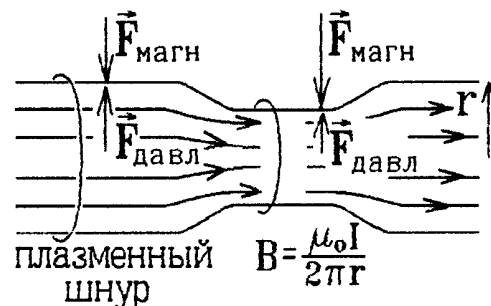


Рис.10.16

Но есть другая возможность предотвратить растекание плазмы — использовать «магнитные зеркала» или «магнитные ловушки».

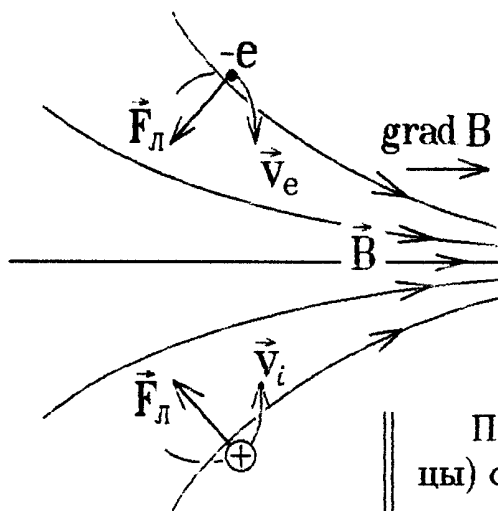


Рис.10.17

Пусть частицы плазмы движутся в неоднородном магнитном поле по винтовой траектории в направлении к области с более сильным полем. Как видно из рис.10.17, возникающие силы Лоренца будут иметь продольные составляющие, отталкивающие и электроны, и ионы плазмы от области с большим значением индукции B !

Плазма (движущиеся заряженные частицы) отражается от сильных магнитных полей и стремится перетечь в сторону ослабления магнитного поля.

Если удастся создать такое внешнее магнитное поле, что его градиент всюду направлен от границы плазмы наружу (рис.10.18), то плазма находится в устойчивом состоянии, не может вырваться из такой «магнитной ловушки» (ее называют также «магнитной бутылкой»). Примером такой магнитной ловушки служит довольно сложное геомагнитное поле Земли (рис.10.19).

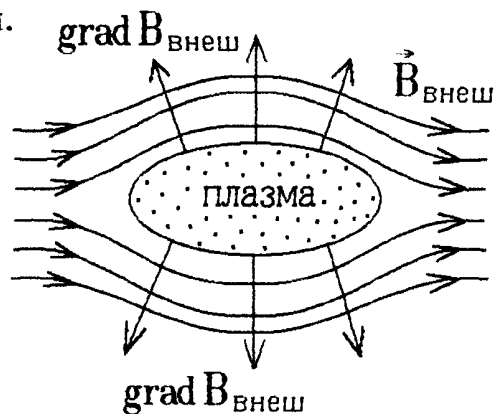


Рис.10.18

Внутренний радиационный пояс (пояс Ван Аллена) начинается на высоте ~ 1000 км над поверхностью Земли в ее экваториальной области. Это устойчивая плазма из протонов с энергиями 10^7 эВ $\lesssim E_p \lesssim 10^9$ эВ и электронов с меньшими энергиями 10^4 эВ $\lesssim E_e \lesssim 10^6$ эВ. Она образуется при бомбардировке атмосферы Земли потоками космических лучей солнечного и галактического происхождения.

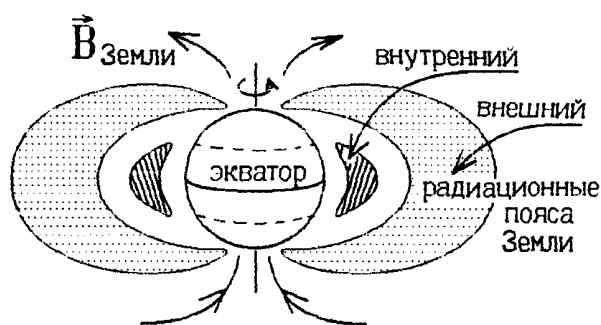


Рис.10.19

Внешний радиационный пояс, наоборот, нестабилен. В основном, это электроны с энергиями 10^4 эВ $\lesssim E_e \lesssim 10^6$ эВ, захватываемые внешней частью магнитного поля Земли из солнечного излучения (кроме света Солнце испускает потоки космических лучей — протонов и электронов). Но геомагнитное поле временами начинает достаточно

сильно изменяться (магнитные бури). В это время заряженные частицы покидают внешний радиационный пояс в области вблизи его краев (в полярной области), что сопровождается возникновением свечения. Мы называем это свечение **полярным сиянием**.

В установках типа «токамак» для получения искусственной плазмы в устойчивом состоянии тоже создают магнитное поле, охватывающее плазму в виде магнитной ловушки. Плазма движется в этом поле, не касаясь стенок установки, как это показано на рис.10.20, где изображена схема типичного «токамака».

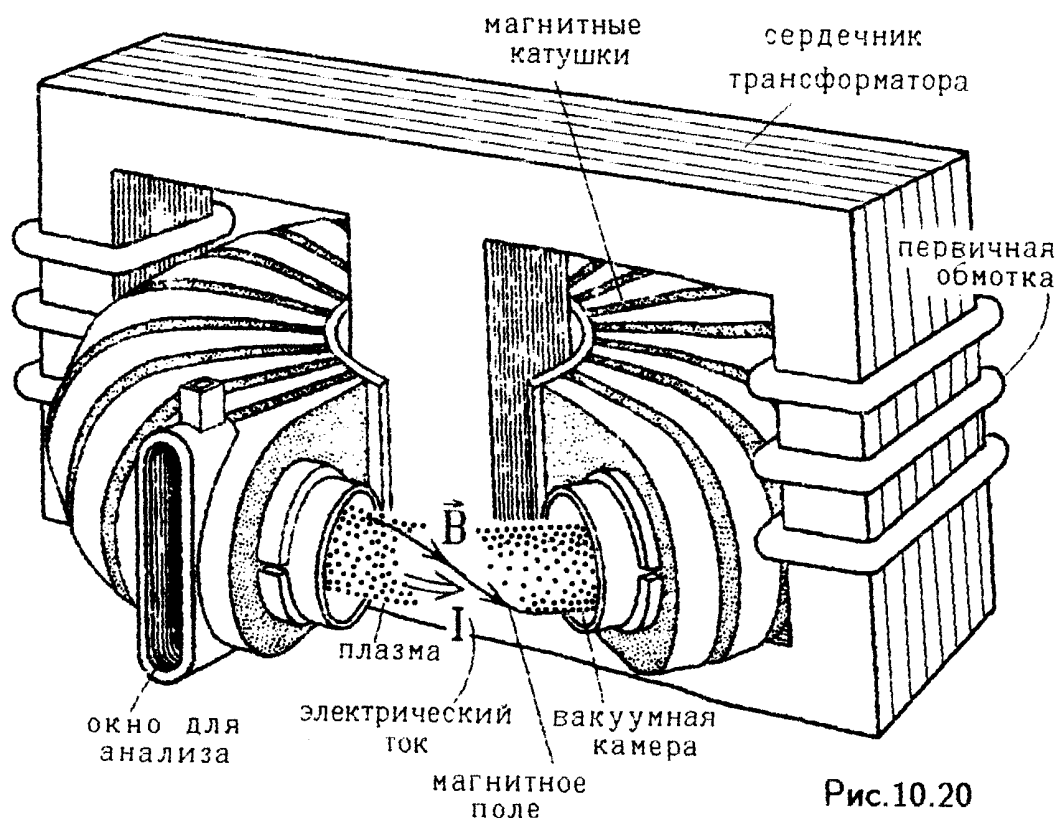


Рис.10.20

Плазма, нагретая до $\sim 10^7$ К, удерживается в коаксиальных магнитных «поверхностях», создающих магнитную ловушку. Такие поверхности образованы винтовыми магнитными линиями. На рис.10.20 показана только одна такая линия. Эта устойчивая плазменная конфигурация (в форме бублика) называется тороидальным пинчем. Чтобы добиться управляемой термоядерной реакции в установке типа «токамак», необходимо в течение хотя бы 100 мс удержать плазму плотностью порядка 10^{20} м⁻³, нагретую до указанной выше температуры.

Предметный указатель

Вектор

- аксиальный 85
- индукции $\vec{B}$ магнитного поля 84
- движущегося заряда 88
- намагниченности $\vec{J}$ 112
- напряженности $\vec{E}$ электрического поля 9
- вблизи заряженного проводника 29
- точечного заряда 9
- электрического диполя 24
- напряженности $\vec{H}$ магнитного поля 116
- поляризованности $\vec{P}$ 34
- электрической индукции (электрического смещения) $\vec{D}$ 39
- Гиромагнитное отношение 111
- Граничные условия для постоянного магнитного поля 122
- электростатического поля 28, 43
- Двойной электрический слой 75
- Дебаевский радиус (радиус экранировки) 129
- Диамagnetик 123
- Дивергенция вектора 16, 100
- Диполь магнитный
- электрический 23
- Диэлектрическая восприимчивость 35
- тензор 35
- Диэлектрическая проницаемость среды 39
- тензор 40
- Домен 123
- Дрейфовая скорость 61
- Емкостные коэффициенты 46

Емкость

- конденсатора 46
- плоского 46
- цилиндрического 46
- уединенного шара 45
- электрическая 44
- Закон Ампера 93
- Био-Савара-Лапласа 90
- Джоуля-Ленца 64
- Кёна 58
- Кулона 7
- Ома для замкнутой цепи 72
- Ома в локальной форме 63
- Ома для неоднородного участка проводника 70
- Ома для однородного участка проводника 63
- Замкнутый контур 73
- Заряд индуцированный 31
- пробный 9
- связанный 35
- объемный 37
- поверхностный 17
- сторонний 35
- точечный 7
- Источник э. д. с. 70
- Источники и стоки поля 18
- Катушка соленоидальная 97
- тороидальная 98
- Квадруполь 27
- Квазистационарный ток 68
- Консервативные силы 18, 102
- Контактная разность потенциалов 77
- внутренняя и внешняя 78
- Контур с током 104
- Коэффициент Пельтье 80

- Лапласиан 28
 Ларморова частота прецессии 125
 Линии индукции магнитного поля 88
 Лэнгмюровская частота 133
 Магнетики 111
 Магнитная восприимчивость 118
 — постоянная 84
 — проницаемость среды 119
 Магнитные ловушки 135, 136
 Магнитный диполь 106
 Магнитный поток 93
 Молекулы неполярные 35
 — полярные 17
 Монополи Дирака 81
 Мощность постоянного тока 65
 Намагничивание вещества 112
 Напряжение пробоя конденсатора 47
 Неоднородный проводник 70
 Обменные силы 123
 Октуполь 27
 Опыт Рикке 60
 — Толмена-Стюарта 60
 Остаточная индукция намагничивания 121
 Падение напряжения
 — на обкладках конденсатора 45
 — на участке однородного проводника 63
 Парамагнетик 123
 Пинч-эффект 134
 Плазма 126
 — гидромагнитные неустойчивости 134
 Плазменные колебания 133
 Плотность энергии электрического поля 49, 51
 Плотность тока 59
 — линейная 98
 Поле потенциальное 102
 — соленоидальное (вихревое) 102
 Поляризация диэлектриков 35
 Пондеромоторные силы 54, 58
 Потенциал 102
 — поля системы зарядов 20
 — на большом удалении 26, 27
 — поля точечного заряда 19
 — поля электрического диполя 23
 Поток вектора напряженности электрического поля 11
 Постоянная Холла 110
 Правила Кирхгофа 73, 74
 Принцип суперпозиции для магнитного поля 82, 90
 — электростатического поля 10
 Работа
 — выхода электрона из металла 76
 — изменения магнитного потока, связанного с контуром 110
 — перемещения контура с током 108
 — перемещения заряда в электрическом поле 20
 Радиационные пояса Земли 135
 Рекомбинация 126
 Релятивистские инварианты 87
 Ротор вектора 99, 100
 Связь потенциала и напряженности 21, 102
 Сегнетоэлектрики 41
 Сила Ампера 93
 — Кулона 7
 — Лоренца 84, 87
 — магнитная 81
 Сила тока 59
 Силовые линии электростатического поля 10
 Сопротивление проводника 63
 — внутреннее источника э. д. с. 71

- Степень ионизации газа 126
 Сторонние силы 69
 Теорема Гаусса
 — для индукции $\vec{B}$ магнитного поля 94
 — в дифференциальной форме 94
 — для напряженности $\vec{E}$ электрического поля 13
 — в дифференциальной форме 17
 — для поляризованности $\vec{P}$ 37
 — в дифференциальной форме 37
 — для индукции $\vec{D}$ 39
 — в дифференциальной форме 39
 Теорема Ирншоу 20
 — Остроградского 17
 — Стокса 101
 Теорема о циркуляции
 — вектора $\vec{B}$ постоянного магнитного поля 96
 — в дифференциальной форме 101
 — вектора $\vec{E}$ электростатического поля 22
 — вектора $\vec{H}$ постоянного магнитного поля 117
 — в дифференциальной форме 117
 — вектора $\vec{J}$ намагниченности 114
 — в дифференциальной форме 114
 Термопара 79
 Токи молекулярные 111
 — намагничивания 112
 Ударная ионизация 126
 Удельная термо-э. д. с. 79
 Удельная проводимость 63
 Удельное сопротивление 63
 Удельный заряд свободных носителей тока 60
 Уединенный проводник 44
 Узел 73
 Уравнение Лапласа 28
 — Пуассона 28
 Уравнение непрерывности электрического заряда 66
 Условие квазинейтральности плазмы 126
 — квазистационарности тока 68
 — стационарности тока 66
 Ферромагнетик 120, 123
 Холловская разность потенциалов 110
 Циклотронная частота 134
 Циркуляция вектора по замкнутому контуру 22
 Эквипотенциальная поверхность 21
 Экранировка постоянного магнитного поля 122
 — электростатического поля 33
 Электрическая постоянная 8
 Электрический момент 23
 Электрический ток 59
 Электродвижущая сила (э. д. с.) 70
 Электромагнитное поле 7, 84
 Электрон-вольт 20
 Электростатическое поле 7
 Элемент тока 90
 Энергия
 — заряженного конденсатора 48
 — заряженного проводника 48
 — собственная 48
 — системы зарядов 48
 — магнитного диполя во внешнем поле 106
 — электрического диполя 25
 — Ферми 76
 Эффект Холла 110
 Явление Зеебека 78, 79
 — Пельтье 80
 — Томсона 80
 — электрической индукции 31
 — электрострикции 54, 56

Литература

- [1] Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. – М.: Высш.шк., 1991. – 288 с.
- [2] Савельев И.В. Курс физики: В 3-х т. – М.: Наука, 1989.– Т.2. Электричество. Электрические колебания и волны. Волновая оптика. – 464 с.
- [3] Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш.шк., 1983. – 463 с.
- [4] Орир Дж. Физика. Т.1. – М.: Мир, 1981. – 336 с.
- [5] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1976 – 1978, вып.1 – 10.
- [6] Сивухин Д.В. Электричество (Общий курс физики). – М.: Физмат, 1983. – 688 с.
- [7] Астахов А.В., Широков Ю.М. Курс физики: В 3-х т.– М.: Физмат, 1980. – Т.2. Электромагнитное поле. – 360 с.
- [8] Парселл Э. Электричество и магнетизм (Берклевский курс физики).– М.: Физмат, 1971.– 448 с.
- [9] Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
- [10] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3-х т. – 2-е изд. – М.: Высш.шк., 1988.

Колмаков Юрий Николаевич

Пекар Юрий Александрович

Лагун Ирина Марсельевна

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.
ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Редактор И.А.Есаян

Свод.тем.пл.№8

Подписано в печать 15.02.99. Формат бумаги 60 x 841/16. Бумага типограф.№2. Офсетная печать. Усл.печ.л. 8,1. Усл. кр.-отт. 8,1. Уч.-изд.л. 7,0. Тираж 200 экз. Заказ . С 011.

Тульский государственный университет. 300600, Тула, просп. Ленина, 92. Подразделение оперативной полиграфии Тульского государственного университета. 300600 Тула, ул.Болдина, 151.