

**С.М. Кнопова**

**ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ  
МАТЕМАТИКИ  
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

*Учебное пособие*

**Москва 2009**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

С.М. Кнопова

# ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

*Учебное пособие*

Москва 2009

**УДК 51(075)**  
**ББК 22.1я7**  
**К 53**

**Кнопова С.М. Избранные главы математики в примерах и задачах: учебное пособие.** – М.: МИФИ, 2009. – 68 с.

Даны краткие сведения по отдельным главам математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, теории вероятностей, элементов теории множеств и комбинаторики и приведены задачи по этим разделам математики.

Тематически пособие разбито на девять разделов. В каждый раздел помимо теоретических сведений включено большое количество примеров типовых задач с подробным разбором их решения (иногда дано несколько способов решения одной и той же задачи). В конце каждого раздела помещены задачи для самостоятельной работы.

В общей сложности пособие содержит более пятидесяти разобранных типовых задач с решениями и около четырехсот задач для самостоятельной работы различной степени сложности.

Пособие предназначено для студентов гуманитарного факультета МИФИ.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, проф. *А.Ф. Горюнов*

*Рекомендовано редсоветом МИФИ  
в качестве учебного пособия*

ISBN 978-5-7262-1138-1

© *Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет), 2009*

Редактор *М.В. Макарова*  
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 28.04.2009. Формат 60×84 1/16.  
Уч.-изд. л. 4,25. Печ. л. 4,25. Тираж 120 экз. Изд. № 027-1. Заказ №

---

*Московский инженерно-физический институт (государственный университет)  
Типография МИФИ. 115409, Москва, Каширское ш., 31*

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| Предисловие.....                     | 4  |
| 1. Множества. Функции.....           | 5  |
| Задачи .....                         | 8  |
| 2. Предел функции .....              | 10 |
| Задачи .....                         | 13 |
| 3. Дифференциальное исчисление ..... | 15 |
| 3.1. Производные .....               | 15 |
| Задачи .....                         | 17 |
| 3.2. Приложения производной.....     | 19 |
| Задачи .....                         | 20 |
| 4. Интегральное исчисление .....     | 22 |
| 4.1. Неопределенные интегралы .....  | 22 |
| Задачи .....                         | 24 |
| 4.2. Определенные интегралы .....    | 25 |
| Задачи .....                         | 26 |
| 4.3. Несобственные интегралы .....   | 27 |
| Задачи .....                         | 28 |
| 5. Ряды .....                        | 29 |
| 5.1. Числовые ряды .....             | 29 |
| 5.2. Степенные ряды .....            | 30 |
| 5.3. Ряды Тейлора .....              | 31 |
| Задачи .....                         | 32 |
| 6. Матрицы .....                     | 34 |
| 6.1. Определитель матрицы.....       | 34 |
| 6.2. Правило Крамера.....            | 35 |
| Задачи .....                         | 38 |
| 7. Геометрия .....                   | 42 |
| Задачи .....                         | 44 |
| 8. Комбинаторика.....                | 47 |
| Задачи .....                         | 48 |
| 9. Теория вероятностей.....          | 51 |
| Задачи .....                         | 56 |
| Список рекомендуемой литературы..... | 68 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Настоящее пособие предназначено для студентов гуманитарного факультета МИФИ, изучающих курс "Математика" или "Высшая математика".

Этот курс знакомит студентов гуманитарных специальностей с отдельными главами математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, теории вероятностей, элементами теории множеств и комбинаторики. Пособие представляет собой сборник задач именно по этим разделам математики.

Тематически пособие разбито на девять разделов. Каждый раздел содержит основные формулы и некоторые сведения, относящиеся к данной теме. При этом более подробно излагается информация, которая не входит в школьную программу. Далее в каждом разделе приводятся примеры решения типовых задач. В некоторых случаях разбирается несколько способов решения одной и той же задачи. В конце каждого раздела даны задачи для самостоятельной работы. Некоторые большие разделы разбиты на подразделы, каждый из которых составлен по описанной выше схеме.

Пособие составлено на основе курсов лекций, которые автор много лет читает на гуманитарном факультете.

## 1. МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИИ

---

Множества  $A$  и  $B$  называются равными, и пишут  $A = B$ , если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ . (В этом случае они состоят из одинаковых элементов.)

Так множество  $A = \{2, 3, 7\}$  равно множеству  $B = \{3, 7, 2\}$ .

**Объединением** (суммой)  $A \cup B$  называется множество, состоящее из всех элементов множества  $A$  и всех элементов множества  $B$ , и только из них. При этом если  $A$  и  $B$  имеют общие элементы, то каждый из них входит в объединение только один раз.

Например,  $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Пересечением** (произведением)  $A \cap B$  называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих как  $A$ , так и  $B$  (т.е. из общих для них элементов).

Например,  $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$ .

**Разность**  $A \setminus B$  есть множество, состоящее из всех элементов  $A$ , не входящих в  $B$  (эта операция определена, если  $A \cap B \neq \emptyset$ ).

Например,  $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$ .

Если  $A$  и  $B$  – конечные множества,  $k(A)$  и  $k(B)$  – количество элементов, содержащихся в  $A$  и  $B$  соответственно, то

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B). \quad (1.1)$$

Если каждому элементу  $x \in A$  по какому-то правилу  $f$  поставлен в соответствие один или несколько элементов  $y \in B$ , то говорят, что задано отображение множества  $A$  во множество  $B$  ( $f: A \rightarrow B$ ).

Если при этом каждому  $x \in A$  отвечает единственный  $y \in B$ , то отображение называется однозначным, в противном случае – это многозначное отображение. Однозначное отображение  $f: A \rightarrow B$  называется взаимно однозначным, если разным  $x \in A$  отвечают разные  $y \in B$  (рис. 1).

Множества  $A$  и  $B$  называются эквивалентными (обозначается  $A \sim B$ ), если существует взаимно однозначное отображение  $A$  в  $B$ .

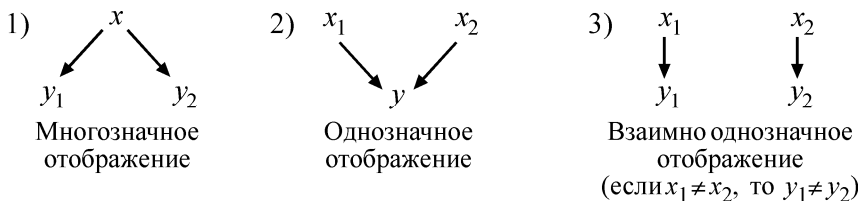


Рис. 1

Однозначное отображение  $f$  множества  $A \subset R$  во множество  $B \subset R$  называется функцией и обозначается  $y = f(x)$  (действительная функция одного действительного переменного).

Множество  $A$  называется областью определения функции, а множество всех элементов  $y = f(x) \in B$  – множеством ее значений;  $x \in A$  – называется независимой переменной или аргументом, а  $y \in B$  – зависимой переменной или функцией. Далее будем обозначать область определения функции через  $D(f)$ , а область ее значений через  $E(f)$ .

Однозначное отображение  $f$  множества  $A \subset R^n$  в множество  $B \subset R$  называется (действительной) функцией  $n$  действительных переменных ( $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ).

Пример 1.1. Даны множества  $A = \{5, 6, 7\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$  и  $C = \{7, 5, 6\}$ . Есть ли среди них равные?

*Ответ.*  $A = C$ , так как  $A \subset C$  (все элементы множества  $A$  содержатся во множестве  $C$ ) и  $C \subset A$ . Эти множества состоят из одинаковых элементов. Порядок расположения элементов внутри множества не играет роли.

Пример 1.2. Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Опишите множества  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

*Решение.*  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$  – в это множество вошли все элементы  $A$  и все элементы  $B$ , общие для них элементы 2 и 4 мы учли один раз.

$A \cap B = \{2, 4\}$  – вошли только общие элементы.

$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$  – те элементы  $A$ , которых нет в  $B$ .

$B \setminus A = \{6, 8, 10\}$  – те элементы  $B$ , которых нет в  $A$ .

Пример 1.3. Даны множества  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ ,  $C = \{5, 7, 8, 9\}$ . Есть ли среди них эквивалентные?

*Ответ.* Да,  $A \sim B$ . Между этими множествами существует взаимно однозначное отображение. Если обозначить элементы  $B$  через  $y$ , а элементы  $A$  через  $x$ , то легко увидеть, что каждому  $x$  отвечает один  $y = 2x$ . Верно и обратное, каждый  $y$  связан с одним единственным  $x = \frac{y}{2}$ .

Пример 1.4. Опишите множества, которые служат областью определения  $D(f)$  и областью значений  $E(f)$  для функции  $y = f(x) = \frac{1}{|x|}$ .

*Решение.* Данная функция определена при всех значениях  $x \neq 0$ , так как делить на нуль нельзя, поэтому  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Эта функция может принимать только положительные значения, так как  $|x| \geq 0$  при всех значениях  $x$ , но из сказанного выше следует, что  $x \neq 0$ , откуда  $E(f) = (0, +\infty) = \{x > 0\}$ .

Пример 1.5. Дана функция  $y = f(x) = -5x + 6$ . Найдите функцию  $x = \varphi(y)$ , обратную к  $f(x)$ .

*Решение.* Из соотношения  $y = -5x + 6$  выразим  $x$  через  $y$  (т.е. по зависимой переменной  $y$  находим аргумент  $x$ ):

$$x = \frac{6 - y}{5}.$$

Функция  $x = \varphi(y) = \frac{6 - y}{5}$  является обратной к функции  $f(x) = -5x + 6$ . Если хотим в  $\varphi(y)$  вернуться к привычным обозначениям (когда независимая переменная –  $x$ , а зависимая –  $y$ ), то нужно поменять местами  $x$  и  $y$ , т.е.

$$y = \frac{6 - x}{5} = \varphi(x).$$



## ЗАДАЧИ

1. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос» – составить множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?

2. Выписать все подмножества множества  $A = \{0, 1, 2\}$ .

3. Даны два множества  $A = \{0, 1, 2, 5\}$  и  $B = \{1, 3, 4, 5\}$ . Найти  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ .

4. Даны два множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и  $B = \{3, 6, 9, 12\}$ . Найти  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ .

5. Даны множества  $A = (-7, 1]$  и  $B = [-3, 4]$ . Что собой представляют множества  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ ?

6. Даны множества  $A = [2, 10]$  и  $B = [4, 6]$ . Найти  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$ .

7. Даны множества  $A = (4, 6)$ ,  $B = (-\infty, 0)$ ,  $C = (0, +\infty)$  и  $D = (-1, +\infty)$ . Описать следующие множества:  $A \cap C$ ;  $A \cap B$ ;  $A \cup B$ ;  $A \cup C$ ;  $B \cup C$ ;  $D \cap B$ ;  $D \cap C$ .

8. Даны множества  $A = (-6, 2)$ ,  $B = [0, +\infty)$ ,  $C = (-\infty, 0]$ . Описать множества:  $A \cap B$ ;  $A \cap C$ ;  $A \cap B \cap C$ ;  $A \cup B$ ;  $A \cup C$ ;  $B \cup C$ ;  $A \cup B \cup C$ .

9. Даны множества  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Описать множество  $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ .

10. Будут ли эквивалентны бесконечные множества  $A = \{x \in N\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  и  $B = \{-1, -2, -3, \dots\}$ ?

11. Указать множества, которые служат областью определения и областью значений для функций:

$$1) y = \frac{1}{x+2}; \quad 2) y = \frac{1}{x^2}; \quad 3) y = \frac{1}{x(x-1)};$$

$$4) y = \sqrt{-x}; \quad 5) y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}; \quad 6) y = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+2}}.$$

12. Дана функция  $y = f(x) = 3x - 1$ . Найти функцию, обратную по отношению к  $f(x)$ . Нарисовать графики этих функций.

13. Являются ли следующие функции четными (нечетными):

1)  $y = x + \frac{1}{x}$ ; 2)  $y = (x - 3)^2 + (x + 3)^2$ ; 3)  $y = x^2 - x + 3$ ?

14. Нарисовать графики функций и описать свойства этих функций:

1)  $y = |x|$ ;                      2)  $y = \sin x$ ;                      3)  $y = \cos x$ ;

4)  $y = x - 1$ ;                      5)  $y = x^2 + 1$ .

## 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

---

Предел постоянной величины равен этой величине, т.е. если  $C = \text{const}$ , то при всех  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C. \quad (2.1)$$

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b, \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \cdot b. \quad (2.3)$$

Если  $b \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}. \quad (2.4)$$

Для непрерывной функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.5)$$

### Замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \approx 2,72. \quad (2.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2.8)$$

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , то  $f(x)$  называется бесконечно малой величиной при  $x \rightarrow x_0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ , то  $f(x)$  называется бесконечно большой величиной при  $x \rightarrow x_0$ .

Если  $f(x)$  – бесконечно большая величина при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\frac{1}{f(x)}$  будет бесконечно малой, и наоборот (при условии, что эти пределы существуют).

Пример 2.1. Найти  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x^2-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x^2-1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + 1}{2^2 - 1} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{4 - 1} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2.2. Найти пределы функций  $y = x^2$  и  $y = \frac{1}{x^2}$  при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^2 = 0,$$

$x^2$  является бесконечно малой величиной при  $x \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

так как обратная к  $x^2$  величина  $\frac{1}{x^2}$  будет бесконечно большой при  $x \rightarrow 0$ ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty,$$

при  $x \rightarrow +\infty$  функция  $x^2$  является бесконечно большой величиной;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

обратная к  $x^2$  величина  $\frac{1}{x^2}$  будет бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$ .

Пример 2.3. Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(x-1)^2}$ .

*Решение.*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(x-1)^2} = +\infty$  – бесконечно большая величина.

Этот результат следует из того, что предел числителя равен  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$ , а предел знаменателя  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$  – бесконечно малая величина (дробь есть величина, обратная к бесконечно малой, т.е. бесконечно большая).

Если при вычислении предела дроби получаем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$  необходимы преобразования.

Пример 2.4. Найти  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ .

*Решение.* Если вычислять так, как в примере 2.1, то

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)} = \frac{0}{0},$$

т.е. получаем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .

Подойдем к примеру иначе:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1},$$

так как  $x$  только стремится к  $(-1)$ ,  $x \neq -1$ , точка  $x = -1$  может вообще не входить в область определения функции, то при  $x \neq -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -1-1 = -2.$$

Пример 2.5. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4}{5x^2 - 1}$ .

*Решение.* В этом примере имеем неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4}{5x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left( 3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left( 5 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x^2}}{5 - \frac{1}{x^2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{4}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{3 + 0}{5 - 0} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ

Вычислить пределы.

1.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x + 4}{x - 3}.$

2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^3 - 1}.$

3.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 2}{3x^3 - 1}.$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x.$

5.  $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 + 9x^2 + x - 1).$

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}.$

7.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{5x^2 - 16x + 3}.$

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x - 1) \cdot x}.$

9.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 4)(x + 3)}{x^2 + 2x - 3}.$

10.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{8 - 14x + 5x^2}.$

11.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}.$

12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2}.$

13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x - 1)^2}.$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}.$

15.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 3}.$

16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{-x^2 - 4x + 1}.$

17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4 + 1000x^2 + 1}{2x^4 - 100x^3}.$

18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{3x^5 - 2x + 1000}.$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 2x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)-1}{x}.$$

$$21. \text{Вычислить } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \text{ если:}$$

$$\text{а) } x_0 = 0, \quad \text{б) } x_0 = 1, \quad \text{в) } x_0 = +\infty.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - x + 1}{3x^3 + 100x^2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x^2 + 1 - \frac{\sin x}{x}\right).$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{2x}\right).$$

$$28. \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{4x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} 4(1+x)^{\frac{2}{x}}.$$

$$30. \text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x.$$

### 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

---

#### 3.1. Производные

Производные основных функций:

$$(C)' = 0, \quad C = \text{const};$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a \neq 1, \quad a > 0;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a \neq 1, \quad a > 0;$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1},$$

рассмотрим частные случаи:

$$a = 1, \quad (x)' = 1;$$

$$a = -1, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

#### Основные правила дифференцирования

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x). \quad (3.1)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x). \quad (3.2)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \quad (3.3)$$



$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \quad (3.4)$$

Производная сложной функции  $y = f(\varphi(x))$

$$y' = f'_{\varphi}(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \quad (3.5)$$

Пример 3.1.  $y = 5x^2 - 4x + 7$ . Найти  $y'$ .

*Решение.*

$$y' = (5x^2)' - (4x)' + 7' = 5 \cdot (x^2)' - 4 \cdot x' + 0 = 5 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 10x - 4.$$

Пример 3.2. Найти производную функции  $y = (3x^2 - 2)(5x + 1)$ .

*Решение.* Здесь  $f(x) = 3x^2 - 2$ ,  $f'(x) = 6x$ ,  $g(x) = 5x + 1$ ,  $g'(x) = 5$ .

По формуле (3.3)

$$\begin{aligned} y' &= [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = 6x(5x + 1) + 5 \cdot (3x^2 - 2) = \\ &= 30x^2 + 6x + 15x^2 - 10 = 45x^2 + 6x - 10. \end{aligned}$$

Пример 3.3.  $y = \frac{x-5}{2x-5}$ . Найти  $y'$ .

*Решение.* Обозначая  $f(x) = x - 5$ ,  $g(x) = 2x - 5$ , по формуле (3.4) получим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-5)' \cdot (2x-5) - (x-5)(2x-5)'}{(2x-5)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot (2x-5) - (x-5) \cdot 2}{(2x-5)^2} = \frac{2x-5-2x+10}{(2x-5)^2} = \frac{5}{(2x-5)^2}. \end{aligned}$$

Пример 3.4. Найти производную сложной функции  $y = \sin 2x$ .

*Решение.* Данную функцию можно записать как  $y = \sin t$ , где  $t = 2x$ , т.е. мы разложили сложную функцию на элементарные. Далее дифференцируем каждую из них по своему аргументу, результат перемножаем и выражаем все «переменные» через  $x$ , т.е. действуем по схеме (рис. 2)

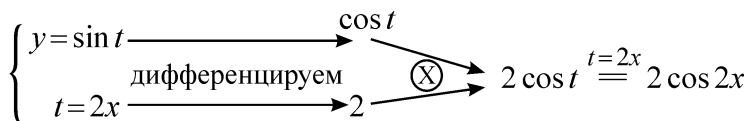


Рис. 2

$$y' = 2 \cos 2x.$$

Пример 3.5. Найти третью производную от функции  $y = 2x^4 - 3x^2 + 5$ .

*Решение.* Вначале ищем  $y' = 8x^3 - 6x$ . Вторая производная – это производная от  $y'$ .

Ищем  $y'' = [y']' = (8x^3 - 6x)' = 24x^2 - 6$ . Третья производная

$$y''' = [y'']' = (24x^2 - 6)' = 48x.$$

## ЗАДАЧИ

Найти производные функций.

1.  $y = x^6 + 5x^3 - 8$ .                      2.  $y = e^x + 2 \ln x + 3 \cos x + \sqrt{x}$ .

3.  $y = \sqrt[3]{x}$ .                                      4.  $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ .

5.  $y = 3x^2 - 6x + 5$ .                      6.  $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$ .

7.  $y = \frac{2}{x} + 2 \sin x - 4\sqrt{x}$ .              8.  $y = \sqrt[4]{x} + \operatorname{tg} x$ .

9. Найти производную функции  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$  в точках  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = -1$ . При каких значениях  $x$  производная равна 0?

Найти производные функций.

10.  $y = (3x - 5)(2x - 2)$ .              11.  $y = (3x^2 + 5)(2x - 4)$ . Найти  $y'(0)$ .

12.  $y = x \cdot e^x$ .                              13.  $y = x \cdot \cos x + \ln x$ .

14.  $y = x^2 \cdot e^x + 3 \cos x$ .              15.  $y = 3x - 5(x + 2)(3 - x) + \operatorname{tg} x$ .

16.  $y = \frac{7x^3 + 5}{x - 2}.$

17.  $y = \frac{2}{\sin x}.$

18.  $y = \frac{x}{e^x}.$

19.  $y = \frac{\cos x}{x}.$

20.  $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2}.$

21.  $y = x^2 \ln x + \frac{x}{e^x}.$

22.  $y = \operatorname{ctg} 3x.$

23.  $y = \ln \sqrt{x}.$

24.  $y = (x^2 - 5x + 3)^{100}.$

25.  $y = \sqrt{x^3 - 2x}.$

26.  $y = \sqrt{4 - x^2}.$

27.  $y = (x^2 - 5x + 8)^6.$

28.  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}.$

29.  $y = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}.$

30.  $y = \frac{1}{(x^2 - 1)^4}.$

31.  $y = \sin(2x^2 - 3).$

32.  $y = \ln(2 + \sin x^2).$

33.  $y = \operatorname{tg} \sqrt{6x}.$

34.  $y = \sin^4 3x.$

35.  $y = e^{\sin^2 x}.$

36.  $y = \sin(\sin(\sin x)).$

37.  $y = x \cdot \operatorname{tg} 3x.$

38.  $y = x \cdot e^{\sin^2 x}.$

39.  $y = (1 + \sin 3x) \cos 3x.$

40.  $y = \frac{\sin 2x}{x^3}.$

41.  $y = \frac{(1 + x^3)^2}{(1 - x^3)^2}.$

42. Прямолинейное движение точки задано уравнением  $y = t^3 + 2$ . Найти среднюю скорость движения точки при  $t \in [1, 2]$ . Чему равна мгновенная скорость точки в моменты времени  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 2$ ?

43. Прямолинейное движение точки задано уравнением  $y = 2t^2 + 5t$ . Чему равна мгновенная скорость этого движения в произвольный момент времени  $t$ ?

44. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = e^x$  в точке  $x = 0$ ?

45. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = 3x^2 + 2x + 1$  в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ .

Найти производные до  $n$ -го порядка включительно для функций.

$$46. y = x^5, \quad n = 7.$$

$$47. y = \sin x, \quad n = 4.$$

$$48. y = \ln x, \quad n = 5.$$

$$49. y = e^{-x^2}, \quad n = 2.$$

$$50. y = \sin 3x, \quad n = 2.$$

$$51. y = e^{2x}, \quad n = 3.$$

$$52. y = e^x \cdot \sin x, \quad n = 2.$$

$$53. y = x \cdot \ln x, \quad n = 3.$$

## 3.2. Приложения производной

Пример 3.6. Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2.$$

*Решение.*  $f'(x) = x^2 - 4$ . Функция  $f(x)$  строго возрастает там, где  $f'(x) > 0$  и строго убывает при  $f'(x) < 0$ .  $f'(x) = x^2 - 4 > 0$  на промежутке  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  – область возрастания функции;  $x^2 - 4 < 0$  при  $x \in (-2, 2)$ , на этом промежутке функция убывает.

Пример 3.7. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 1.$$

*Решение.* Вычисляем  $f'(x) = (x^3 + x^2 - 8x + 1)' = 3x^2 + 2x - 8$ . Точки экстремумов находим из уравнения  $f'(x) = 0$ .

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad x_2 = -2.$$

Далее ищем  $f''(x) = 6x + 2$ .

Так как  $f''\left(\frac{4}{3}\right) = 10 > 0$ , то  $x_1 = \frac{4}{3}$  – точка минимума функции;

$f''(-2) = -10 < 0$ ,  $x_2 = -2$  – точка максимума.

$$f_{\min} = f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{149}{27} = -5\frac{14}{27}; \quad f_{\max} = f(-2) = 13.$$

Пример 3.8. Определить интервалы выпуклости функции  $y = x^3$  и найти точки перегиба.

*Решение.*  $f'(x) = 3x^2$ ;  $f''(x) = 6x$ .

Точки перегиба находим из уравнения  $f''(x) = 0$ . Имеем одну точку перегиба  $x = 0$ . При  $x > 0$   $f''(x) > 0$ , значит на промежутке  $(0, +\infty)$  функция  $f(x) = x^3$  вогнутая. При  $x < 0$   $f''(x) < 0$  и  $f(x)$  будет выпуклой вверх при  $x \in (-\infty, 0)$ .

Пример 3.9. Пользуясь правилом Лопиталя, найти

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}.$$

*Решение.* При  $x = 2$  числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращаются в нуль. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

и получим

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 2} x = 3.$$

## ЗАДАЧИ

Найти интервалы монотонности функций.

54.  $f(x) = -2x^2 + 3$ .

55.  $f(x) = x^5$ .

56.  $f(x) = x^3 - 3x$ .

57.  $f(x) = (x^2 - 4)^2$ .

Определить интервалы выпуклости функции  $f(x)$  и найти точки перегиба.

58.  $f(x) = x^2 - 10$ .

59.  $f(x) = x^5 - 3x$ .

60.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 1$ .

61.  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x - 4$ .

Исследовать на экстремум функции.

62.  $f(x) = x^3 - 27x$ .

63.  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$ .

64.  $f(x) = (x^2 - 4)^2$ .

Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x)$  на отрезке.

65.  $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in [0, 3]$ .

66.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35, \quad x \in [-4, 4]$ .

67. Периметр прямоугольного участка равен 128 м. Какова максимальная возможная площадь этого участка?

68. Нужно огородить с трех сторон участок прямоугольной формы, прилегающий к длинной стене. Из имеющегося материала можно сделать забор длиной 120 м. Каковы должны быть размеры забора, чтобы площадь, обнесенная им, была наибольшей?

69. Разложить число 30 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Используя правило Лопиталя, найти следующие пределы.

70.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .

71.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ .

72.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ .

73.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}$ .

74.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ .

75.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ .

76.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ .

77.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ .

78.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

## 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

---

### 4.1. Неопределенные интегралы

#### Основные интегралы

$$C = \text{const}; \quad k = \text{const}.$$

$$\int k dx = kx + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Пример 4.1. Вычислить  $\int (x^2 + 7x - 5) dx$ .

*Решение.*

$$\int (x^2 + 7x - 5) dx = \int x^2 dx + \int 7x dx - \int 5 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C.$$

При интегрировании сложной функции пользуются методом замены переменной:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(z)dz, \quad (4.1)$$

где  $z = g(x)$ , а  $dz = g'(x)dx$ .

Пример 4.2. Вычислить  $\int \sin 3x dx$ .

*Решение.* Введем новую переменную  $z = 3x$ , тогда  $dz = (3x)' \cdot dx = 3dx$ , откуда  $dx = \frac{dz}{3}$ .

Этот интеграл можно переписать в новых обозначениях так, что он становится "табличным":

$$\int \sin 3x \cdot dx = \int \sin z \cdot \frac{dz}{3} = -\frac{1}{3} \cos z + C = -\frac{1}{3} \cos 3x + C.$$

На последнем шаге мы вернулись к прежней переменной, т.е. вместо  $z$  подставили ее выражение через  $x$  ( $z = 3x$ ).

Пример 4.3. Найти  $\int (2x+3)^2 dx$ .

*Решение.* Делаем замену переменных  $z = 2x+3$ ,

$$dz = (2x+3)' \cdot dx = 2dx, \quad dx = \frac{dz}{2}.$$

Тогда имеем

$$\int (2x+3)^2 dx = \int z^2 \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{6} (2x+3)^2 + C.$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx. \quad (4.2)$$

Пример 4.4. Найти  $\int x \cdot e^x dx$ .

*Решение.* Положим  $u(x) = x$ , а  $v'(x) = e^x$ . Тогда  $v(x) = e^x$ . Применяя формулу интегрирования по частям (4.2), с учетом того, что  $u'(x) = x' = 1$ , имеем

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$



## ЗАДАЧИ

Вычислить интегралы.

1.  $\int (-7x + 4)dx$ .

2.  $\int (2x^2 + 3x - 8)dx$ .

3.  $\int \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)dx$ .

4.  $\int (4x^3 - 3x^2 + 1)dx$ .

5.  $\int \frac{2dx}{x^3}$ .

6.  $\int x^2(x^2 + 3)dx$ .

7.  $\int \left(\frac{3}{x} + 2\sqrt{x}\right)dx$ .

8.  $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + 2e^x\right)dx$ .

9.  $\int 2^x dx$ .

10.  $\int e^{3x} dx$ .

11.  $\int \cos 5x dx$ .

12.  $\int \sin(2x + 1)dx$ .

13.  $\int e^{2x-3} dx$ .

14.  $\int \frac{dx}{x+1}$ .

15.  $\int \frac{2dx}{4x-1}$ .

16.  $\int (2x-5)^6 dx$ .

17.  $\int 3(5x+2)^4 dx$ .

18.  $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$ .

19.  $\int \frac{6dx}{(5x-7)^3}$ .

20.  $\int 8(11-3x)^5 dx$ .

21.  $\int \frac{5dx}{\sqrt{2x+7}}$ .

22.  $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx$ .

23.  $\int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx$ .

24.  $\int (1 - \cos x - \cos 2x)dx$ .

25.  $\int \left(e^{2x} + \frac{3}{\cos^2 5x}\right)dx$ .

26.  $\int \left(7\sin \frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}\right)dx$ .

27.  $\int \left(2\sin \frac{x}{5} + 3\cos 6x\right)dx$ .

28.  $\int x \cdot \cos x dx$ .

29.  $\int x \cdot \sin x dx$ .

30.  $\int \ln x dx$ .

31.  $\int x \cdot \ln x dx$ .

## 4.2. Определенные интегралы

Если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то справедлива формула Ньютона – Лейбница, по которой и вычисляется определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (4.3)$$

Пример 4.5.  $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

Пример 4.6.  $\int_0^2 (3x^2 - 2x)dx = (x^3 - x^2) \Big|_0^2 = (8 - 4) - 0 = 4.$

Пример 4.7. Найти  $\int_0^1 \cos 3x dx.$

*Решение.* Делаем замену переменных.

$$z = 3x, \quad dz = (3x)'dx = 3dx, \quad dx = \frac{dz}{3}.$$

Надо изменить пределы интегрирования. Так как  $z = 3x$ , то при  $x = 0$   $z = 0$ , а при  $x = 1$   $z = 3$ .

$$\int_0^1 \cos 3x dx = \int_0^3 \cos z \cdot \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \sin z \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \sin 3.$$

Возвращаться от  $z$  к  $x$  (к старой переменной) не нужно.

Пример 4.8. Интегрирование по частям.

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x \cdot e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e - 0 - e + 1 = 1$$

(сравните с примером 4.4).

Пример 4.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и графиком функции  $y = 2x - x^2$ .

*Решение.*  $y = 2x - x^2 = x(2 - x)$  – парабола, которая пересекает ось  $Ox$  в двух точках  $x = 0$  и  $x = 2$ , ветви параболы направлены вниз. Поэтому площадь данной криволинейной трапеции

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}.$$

## ЗАДАЧИ

Вычислить интегралы.

$$32. \int_{-1}^2 x^3 dx.$$

$$33. \int_0^1 x^5 dx.$$

$$34. \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 1) dx.$$

$$35. \int_{-1}^1 (x^2 + 5x^8) dx.$$

$$36. \int_{-1}^1 (5x^9 + 8 \sin x) dx.$$

$$37. \int_0^1 (2^x - 5^x) dx.$$

$$38. \int_{-1}^1 (5 \sin 2x + x^{17}) dx.$$

$$39. \int_2^3 \frac{dx}{x-1}.$$

$$40. \int_0^1 \frac{dx}{2x+1}.$$

$$41. \int_{-1/2}^0 (2x+1)^2 dx.$$

$$42. \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx.$$

$$43. \int_3^6 \sqrt{2 - \frac{x}{3}} dx.$$

$$44. \int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$

$$45. \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2x + x^2) dx.$$

$$46. \int_1^2 e^{2x-1} dx.$$

$$47. \int_0^2 x e^x dx.$$

$$48. \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x dx.$$

49. Найти площадь  $S$ , ограниченную графиком кривой  $y = \sin x$  и осью  $Ox$ , если  $x \in [0, \pi]$ .

50. Найти площадь  $S$ , ограниченную линиями  $y = 2x$  и  $y = x^2$ .

### 4.3. Несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.4)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx. \quad (4.6)$$

Пример 4.10. Выяснить, сходится или расходится  $\int_0^{+\infty} x dx$ .

$$\text{Решение. } \int_0^{+\infty} x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^2}{2} - 0 \right) = +\infty.$$

Интеграл расходится.

Пример 4.11. Вычислить  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{b} + 1 \right) = 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ

Выяснить, сходятся или расходятся следующие несобственные интегралы. Если интеграл сходится, то вычислить его.

$$51. \int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

$$52. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

$$53. \int_0^{+\infty} x^2 dx.$$

$$54. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$55. \int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

$$56. \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx.$$

$$57. \int_0^{+\infty} 5e^{-3x} dx.$$

$$58. \int_{-\infty}^0 e^{3x} dx.$$

$$59. \int_0^{+\infty} 2e^{-4x} dx.$$

$$60. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$61. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$62. \int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}.$$

$$63. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}.$$

$$64. \int_{-\infty}^0 x \cdot e^x dx.$$

## 5. РЯДЫ

---

### 5.1. Числовые ряды

Пусть дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (5.1)$$

где все  $a_n \in \mathbb{R}$ .

**Необходимый признак сходимости** числового ряда:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0. \quad (5.2)$$

**Достаточный признак сходимости** числового ряда (признак Даламбера):

$$\text{если } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q,$$

то при  $q < 1$  ряд (5.1) сходится, а при  $q > 1$  расходится (при  $q = 1$  ряд может как сходиться, так и расходиться).

Пример 5.1. Выяснить, сходится или расходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ .

*Решение.*  $a_n = 2^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ , нарушен необходимый признак сходимости ряда (см. (5.2)), значит этот ряд расходится.

Пример 5.2. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

*Решение.* Воспользуемся признаком Даламбера. Здесь

$$a_n = \frac{n}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}},$$
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится.

## 5.2. Степенные ряды

Функциональным рядом называется ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (5.3)$$

где все  $f_n(x)$  – функции от аргумента  $x$ , определенные на интервале  $X$ .

При любом фиксированном значении  $x = x_0$ ,  $x_0 \in X$ , ряд (5.3) образует обычный числовой ряд вида (5.1) и его можно исследовать описанными ранее способами. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  сходится, то  $x_0$  называется точкой сходимости ряда. Множество всех точек сходимости ряда (5.3) образует его **область сходимости**.

Пусть ряд (5.3) имеет вид

$$c_0 + c_1(x-b) + c_2(x-b)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-b)^n \quad (5.4)$$

(т.е.  $f_n(x) = c_n(x-b)^n$ ), где  $c_n$  – числа,  $b$  – фиксировано ( $b = \text{const}$ ).

Ряд (5.4) называется степенным рядом в окрестности точки  $b$ . Так при  $b = 0$  степенной ряд записывается как

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n. \quad (5.5)$$

Пример 5.3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

*Решение.* Так как при любом фиксированном значении  $x$  степенной ряд «превращается» в числовой, то будем исследовать его по признаку Даламбера.

$$a_n = \frac{x^n}{2^n}; \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right| = \frac{|x|}{2}.$$

Ряд сходится там, где

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} < 1, \text{ т.е. при } |x| < 2.$$

Откуда областью сходимости ряда является множество  $x \in (-2, 2)$ .

### 5.3. Ряд Тейлора

Пусть  $F(x)$  в точке  $x = b$  имеет производные любого порядка. Если все эти производные равномерно ограничены в некоторой окрестности точки  $b$  (т.е. для всех  $x$  из этой окрестности и любого  $n$ :  $|f^{(n)}(x)| \leq M$ ,  $M = \text{const}$ ), то  $F(x)$  раскладывается в степенной ряд

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n, \quad (5.6)$$

где  $F^{(0)}(b) = F(b)$ . Этот ряд называется рядом Тейлора функции  $F(x)$  в окрестности точки  $b$ .

При  $b = 0$  ряд Тейлора имеет вид

$$F(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} x + \frac{F''(0)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (5.7)$$

и называется рядом Маклорена.



**Пример 5.4.** Разложить функцию  $F(x) = e^x$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $b = 0$  (ряд Маклорена). Найти область сходимости этого ряда.

*Решение.* Надо построить ряд (5.7):

$$F(x) = e^x; \quad F'(x) = F''(x) = \dots = F^{(n)}(x) = \dots = e^x.$$

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = \dots = F^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1.$$

Откуда

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ — искомое разложение.}$$

Найдем область сходимости ряда по признаку Даламбера:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \text{ при всех } x.$$

Следовательно, ряд сходится при  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

## ЗАДАЧИ

Исследовать на сходимость числовые ряды.

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} 3n. \quad 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad 4. \sum_{n=0}^{\infty} 4^n.$$

Найти область сходимости степенных рядов.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad 6. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad 7. \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}. \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}. \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}.$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n.$$

Следующие функции разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $b = 0$  и найти области сходимости этих рядов.

$$15. \frac{1}{1-x}.$$

$$16. \frac{1}{1+x}.$$

$$17. \frac{1}{1-x^2}.$$

$$18. \frac{1}{1-2x}.$$

$$19. \frac{1}{1+4x}.$$

$$20. \frac{1}{1-5x}.$$

$$21. \frac{1}{1-x^3}.$$

$$22. \frac{1}{2-6x}.$$

$$23. \frac{1}{3+6x}.$$

$$24. e^{2x}.$$

$$25. e^{-2x}.$$

$$26. e^{x/2}.$$

$$27. e^{-5x}.$$

$$28. e^{x/3}.$$

$$29. \sin x.$$

$$30. \cos x.$$

## 6. МАТРИЦЫ

### 6.1. Определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число  $\Delta$  (или  $\det A$ ), вычисляемое по правилу

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (6.1)$$

Определителем квадратной матрицы  $A$  третьего порядка называется число

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (6.2)$$

Каждое слагаемое определителя является произведением элементов матрицы, по одному из каждой строки и каждого столбца. Знаки слагаемых в определителе третьего порядка удобно запомнить, пользуясь схемой, изображенной на рис. 3.



Рис. 3

Если  $A$  – треугольная матрица (верхняя или нижняя) произвольного порядка  $n$ , или диагональная матрица, то ее определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\Delta = \det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}. \quad (6.3)$$

Определитель матрицы, содержащей столбец или строку, состоящую из нулей, равен нулю.

## 6.2. Правило Крамера

Рассмотрим правило Крамера на примере систем линейных уравнений второго и третьего порядков.

Пусть дана система линейных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6.4)$$

Определителем системы называется

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наряду с  $\Delta$  рассмотрим определители  $\Delta_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), их столько, сколько в системе неизвестных (или уравнений).  $\Delta_j$  – определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  заменой  $j$ -го столбца на столбец свободных членов.

Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

### Правило Крамера

I. Если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j=1, 2, 3.$$

II. Если  $\Delta = 0$  и все  $\Delta_j = 0$ , то система имеет бесконечное множество решений (система неопределена).

III. Если  $\Delta = 0$ , а хотя бы один  $\Delta_j \neq 0$ , то система не имеет решений (система несовместна).

### Замечание

В частном случае, если система (6.4) является однородной (т.е. все  $b_j = 0$ ), тогда: если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение – нулевое (все  $x_j = 0$ ); если  $\Delta = 0$ , то система имеет бесконечное множество решений.

Пример 6.1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выписать матрицы  $2A$ ;  $A + B$ ;  $A^T$ .

*Решение.* При умножении матрицы на число на это число умножаются все ее элементы, т.е.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  одинакового размера  $2 \times 3$ , поэтому их можно складывать, при этом складываются элементы, стоящие на одинаковых позициях:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

При транспонировании матрицы ее строки и столбцы меняются местами, откуда

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.2. Найти определители следующих матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) = 7 + 6 = 13,$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = -1,$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20 \quad (\text{треугольная матрица}).$$

Пример 6.3. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

*Решение.* Матрица системы  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  совпадает с матри-

цей  $B$  из примера 6.2. Ее определитель уже найден  $\det A = -1$ , так как  $\det A \neq 0$ , то система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -1 + 2 = 1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 + 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 0 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = -1.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ответ.  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ .

Пример 6.4. При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} ax + 2y = 9, \\ 2x + y = 15 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Система имеет единственное решение, если ее определитель  $\Delta \neq 0$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 4 \neq 0, \text{ т.е. } a \neq 4.$$

Ответ. При  $a \neq 4$  система имеет единственное решение.

## ЗАДАЧИ

1. Даны матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 21 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписать матрицы  $A+B$ ;  $A-B$ ;  $A^T$ ; матрицу, противоположную к  $A$ ; для примеров: а)  $\frac{1}{2}A$ ; б)  $\frac{1}{3}A$ .

Найти произведения  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти  $A^2$  и  $A^3$ .

4.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Найти  $AB$ .

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Вычислить определители следующих матриц.

6. а)  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

7. а)  $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

8. а)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

9. а)  $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$



$$10. \text{ а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & 9 \\ 10 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$11. \text{ а) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. \text{ а) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$14. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Методом Крамера решить (или исследовать) системы уравнений.

$$15. \begin{cases} x + 2y = 1, \\ 3x + 4y = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 4x - 3y = 8. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x + 5y = 8, \\ -3x + y = -2. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x + 3y = -5, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 5x + 3y = 0, \\ 2x - 7y = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 6x + 8y = 5, \\ -3x - 4y = 2. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x + y = 3, \\ 12x + 12y = 48. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x + y + z = 6, \\ x - 2y = -3, \\ y - z = -1. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x + y + z = 1, \\ y - z = 2, \\ x + 2y = 3. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ x + 2z = 0, \\ 4x + y + 3z = 1. \end{cases}$$

27. При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} ax - 8y = 12, \\ 2x - 6y = 15 \end{cases}$$

не имеет решений?

28. Исследовать относительно параметра  $a$  систему

$$\begin{cases} 3x + 7y = 20, \\ ax + 14y = 15. \end{cases}$$

29. При каких значениях  $a$  система

$$\begin{cases} (a+1)x - y = a, \\ (a-3)x + ay = -9 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

30. При каких значениях  $a$  система

$$\begin{cases} (a+1)x + y = 3, \\ 2x + (2-a)y = 6 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

## 7. ГЕОМЕТРИЯ

---

Пусть даны две точки на плоскости  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Расстояние  $d$  между этими точками вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (7.1)$$

Координаты точки  $A(x, y)$ , которая делит отрезок  $M_1 M_2$  в заданном отношении  $\frac{m}{n}$ , определяются системой

$$\begin{cases} x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \\ y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}. \end{cases} \quad (7.2)$$

В частном случае ( $m = n$ ) координаты середины отрезка  $M_1 M_2$  находятся по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Уравнение прямой, проходящей через заданные точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ , имеет вид

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1). \quad (7.4)$$

Пусть даны две прямые на плоскости

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Признак параллельности этих прямых:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}. \quad (7.5)$$

Прямые совпадают, если

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (7.6)$$

Признак перпендикулярности двух прямых:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (7.7)$$

Уравнение окружности радиусом  $R$  с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$  имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (7.8)$$

Пример 7.1. Даны прямые

$$\begin{cases} x + y - 18 = 0, \\ 3x - 3y + 7 = 0. \end{cases}$$

Выяснить, являются ли эти прямые параллельными, совпадающими или перпендикулярными.

*Решение.* Эти прямые не являются параллельными, так как не выполняется условие (7.5)

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-3}{1},$$

отсюда очевидно, что они не могут совпадать.

Проверим прямые на перпендикулярность (см. (7.7)):

$$1 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) = 0.$$

Эти прямые являются перпендикулярными.

Пример 7.2. Кривая задана уравнением  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ . Выяснить, описывает ли это уравнение окружность, и если да, то каков ее радиус и координаты центра?

*Решение.* Выделим в этом уравнении полный квадрат относительно  $x$ , прибавляя и вычитая четыре:

$$x^2 - 4x + y^2 = (x^2 - 4x + 4) + y^2 - 4 = 0,$$

или

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4 = 2^2.$$

Сравнивая с (7.8), видим, что заданное уравнение есть уравнение окружности радиусом  $R = 2$  с центром в точке  $M_0(2, 0)$ .

**Пример 7.3.** В старой системе координат прямая описывается уравнением  $y = 2x + 3$ . Как будет выглядеть уравнение этой прямой в новой системе координат, если новая система получается из старой путем параллельного переноса координатных осей так, что новое начало координат  $O'(x_0, y_0)$  в старой системе имеет координаты  $x_0 = 2$  и  $y_0 = -1$ ?

*Решение.* Если координаты точек в старой системе обозначать  $(x, y)$ , а в новой –  $(x', y')$ , то связь между ними задается соотношениями

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases} \quad (7.9)$$

где  $(x_0, y_0)$  – координаты точки  $O'$ .

Подставляя это соотношение в уравнение  $y = 2x + 3$ , получим

$$y' - 1 = 2(x' + 2) + 3,$$

или  $y' = 2x' + 8$ .

Это и есть уравнение данной прямой в новой системе координат.

## ЗАДАЧИ

1. Даны точки  $M_1(1, 1)$  и  $M_2(5, 4)$ . Найти:

а) длину отрезка  $M_1M_2$ ;

б) координаты середины этого отрезка;

в) координаты точки  $A$ , которая делит отрезок  $M_1M_2$  в отношении  $\frac{2}{3}$ .

2. Даны точки  $M_1(2, 1)$  и  $M_2(3, 5)$ . Найти:

а) длину отрезка  $M_1M_2$ ;

б) координаты середины отрезка  $M_1M_2$ ;

в) координаты точки, которая делит отрезок в отношении  $\frac{1}{2}$ .

3. Написать уравнение прямой, составляющей с осью  $OX$  угол в  $45^\circ$  и проходящей через точку  $(1, 0)$ .

4. Выписать уравнение прямой, образующей с осью  $OX$  угол в  $60^\circ$  и проходящей через точку  $(1, 1)$ .

5. Выписать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

а)  $M_1(1, 2)$  и  $M_2(2, 3)$ ;      б)  $M_1(1, 0)$  и  $M_2(2, 1)$ .

6. Даны следующие пары прямых линий:

а)  $\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0, \\ 4x + 6y + 1 = 0; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0, \\ 4x + 6y + 10 = 0; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$

Выяснить, есть ли среди этих пар параллельные, совпадающие или перпендикулярные прямые.

7. Даны три прямые

$$l_1: x - y + 1 = 0, \quad l_2: 3x + 3y + 3 = 0, \quad l_3: 2x - 2y + 5 = 0.$$

Есть ли среди этих прямых параллельные, перпендикулярные или совпадающие?

8. Написать уравнение прямой, перпендикулярной к прямой  $y = 3x + 2$  и проходящей через точку  $(0, 0)$ .

9. Найти координаты точки пересечения прямых, описанных в задаче 6 б).

10. Какие из перечисленных кривых являются кривыми второго порядка: а) парабола; б) прямая; в) гипербола; г) окружность; д) синусоида?

11. Выписать уравнение окружности с центром в точке  $(1, 3)$  и радиусом  $R = 2$ .

12. Выписать уравнение окружности с центром в точке  $(2, -3)$  и радиусом  $R = 3$ .

13. Новая система координат получена из старой путем параллельного переноса осей таким образом, что начало координат переходит в точку  $O'(1, 1)$ .

а) Как будет выглядеть в старой системе координат уравнение параболы, которое в новой системе имеет вид  $y' = 3(x')^2 - 5$ ?

б) Как запишется в новой системе уравнение прямой, которая в старой системе описывалась уравнением  $2x + 3y + 1 = 0$ ?

14. Даны две системы координат: старая  $OXY$  и новая  $O'X'Y'$ . Оси  $OX \parallel O'X'$  и  $OY \parallel O'Y'$ . Точка  $O'$  имеет в старой системе координаты  $(2, 3)$ .

а) Как выглядит в старой системе координат уравнение окружности, центр которой совпадает с точкой  $O'$ , а радиус  $R = 1$ ?

б) Как запишется в новой системе уравнение прямой, которая в старой системе описывается уравнением  $y = -3x + 5$ ?

15. Новая система координат получена из старой путем параллельного переноса так, что новое начало координат  $O'(2, -1)$ . Выпишите в старой системе координат уравнение параболы, которая в новой системе описана уравнением  $y' = 2(x')^2 - 1$ .

### *Задачи на геометрическое место точек (Г.М.Т.)*

Нарисуйте Г.М.Т., которые задаются следующими условиями.

16. а)  $x \geq 0$ ;      б)  $y \leq 0$ ;      в)  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$

17. а)  $x \leq -2$ ;      б)  $y \geq 3$ ;      в)  $\begin{cases} x \leq -2, \\ y \geq 3. \end{cases}$

18.  $x + y - 2 \geq 0$ .

19.  $x - y + 1 \geq 0$ .

20.  $x^2 + 2x + 1 - y \leq 0$ .

21.  $x^2 + 5x - 6 + y \leq 0$ .

22. а)  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;      б)  $x^2 + y^2 > 1$ .

23.  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 > 4$ .

24.  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .

25.  $\begin{cases} x + y \geq 0, \\ x - y \leq 0. \end{cases}$

26.  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ x - y \geq 0. \end{cases}$

27.  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x - y \leq 0. \end{cases}$

28.  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ 2x + 3y \geq 0. \end{cases}$

## 8. КОМБИНАТОРИКА

---

Каждая последовательность  $n$  различных элементов с учетом порядка их следования называется **перестановкой** этих элементов.

Число всех возможных перестановок из  $n$  элементов

$$P_n = n!, \quad (8.1)$$

где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  (по определению  $0! = 1$ ).

Любая упорядоченная последовательность  $k$  различных элементов из  $n$  возможных элементов ( $k \leq n$ ) называется **размещением** из  $n$  элементов по  $k$ .

Число размещений  $A_n^k$ , т.е. число способов, которыми можно из  $n$  элементов выбрать  $k$  различных элементов с учетом порядка их следования, определяется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (8.2)$$

Если нужно из  $n$  элементов выбрать  $k$  различных ( $k \leq n$ ), но порядок их следования не играет роли, то в этом случае речь идет о сочетаниях из  $n$  элементов по  $k$  (в сочетаниях группы комбинаций различаются только элементами). Так если из  $n$  цифр выбираем две, то пары (1, 2) и (2, 1) образуют два различных размещения, но это одно сочетание (так как эти пары состоят из одинаковых элементов).

Число **сочетаний**, т.е. число способов, которыми можно выбрать из  $n$  элементов  $k$  различных элементов ( $k \leq n$ ) без учета порядка их следования:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (8.3)$$

Пример 8.1. Сколькими способами можно расставить на одной полке шесть различных книг?

*Решение.* Искомое число способов равно

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример 8.2. В турнире принимают участие восемь команд. Сколькими способами могут распределяться три первых места?



*Решение.* Надо из восьми команд выбрать три призера и здесь важен порядок их размещения на пьедестале (какая команда займет первое место, какая второе и т.д.). Таким образом, речь идет о размещении:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$$

Пример 8.3. В карточке спортлото надо зачеркнуть 6 номеров из 48. Сколькими способами это можно сделать?

*Решение.* В этой задаче не важен порядок, в котором вычеркиваем номера, здесь важно только, какие конкретно номера считаем «выигрышными», т.е. речь идет о сочетаниях:

$$C_{48}^6 = \frac{48!}{6! \cdot 42!} = \frac{42! \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{42! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 43 \cdot 44 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 3 = \\ = 12\,271\,512.$$

Это и есть искомый ответ.

Пример 8.4. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наудачу. Каково наибольшее число безуспешных попыток абонента?

*Решение.* В каждой из двух позиций может оказаться любая цифра от нуля до девяти. Следовательно, общее число возможных комбинаций составит  $10 \times 10 = 100$ . Одна из них будет верной. Откуда наибольшее число неудачных попыток (если правильная комбинация найдена последней) равно:

$$100 - 1 = 99.$$

## ЗАДАЧИ

1. Сколько вариантов в русской разговорной речи имеет предложение: «Сегодня идет снег»?
2. Сколько вариантов расположения слов допускает предложение: «Вчера студент добросовестно выполнил задание»?
3. Сколькими способами можно разместить на полке десять различных учебников?
4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, имея в наличии материал трех цветов, если известно, что полосы располагаются горизонтально?

5. Решить предыдущую задачу при отсутствии оговорки о горизонтальном расположении полос флага.

6. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

7. Сколькими способами можно выбрать одну четную и одну нечетную цифру из числа 123 456?

8. Десять студентов должны пройти диспансеризацию. Однако врач принимает в день только пять человек. Студенты составили список очередности посещения врача. Сколькими способами можно составить очередь на прием к врачу в первый день?

9. В осеннем семестре студенты изучают 12 дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание на субботу так, чтобы субботние занятия состояли из трех лекций по трем различным дисциплинам?

10. Сколько различных комбинаций по две несовпадающие буквы можно составить из пяти букв русского алфавита: А, Б, В, Г, Д?

11. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места?

12. Из девяти человек надо выбрать четырех человека и разместить их на четырех занумерованных стульях. Сколькими способами это можно сделать?

13. На семь сотрудников выделено пять путевок. Сколькими способами их можно распределить, если: а) все путевки различны; б) все путевки одинаковы?

14. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

15. Сколькими способами можно обить шесть стульев тканью, если имеются ткани шести различных цветов и все стулья должны быть разного цвета?

16. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

17. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на объекте. Сколькими способами это можно сделать?

18. Сколькими способами можно составить команду из четырех человек для соревнований по бегу, если имеется семь бегунов?

19. Читатель отобрал по каталогу восемь книг. Однако в библиотеке выдают одному читателю не более пяти книг. Сколько альтернатив взять книги есть у этого читателя?

20. Абонент забыл последние три цифры телефонного номера. Какое наибольшее число вариантов ему нужно перебрать, чтобы дозвониться (в этом случае необходимый номер набирается последним)?

21. Требуется составить колонну из пяти машин. Сколькими способами это можно сделать?

22. Для выигрыша в игральном автомате должны выпасть подряд четыре различные цифры. Сколько вариантов выигрышей при таких условиях возможно?

23. В полуфинале первенства института по шахматам участвует 20 студентов, а в финал выходят лишь трое. Сколько различных «троек» финалистов можно получить в этом случае?

24. Сколько команд по мини-футболу, состоящих из пяти игроков, можно образовать из 12 человек?

25. В числовом лото надо выбрать 5 номеров из 90. Сколькими способами это можно сделать?

26. В группе обучается 30 студентов. Сколькими способами могут быть выбраны староста и его заместитель?

27. В магазине девушке понравились пять оттенков губной помады одной фирмы (одинаковая цена). Однако денег ей хватает только на два тюбика. Сколькими способами она может выбрать свою покупку?

28. Молодой человек победил в игровом шоу и по количеству набранных очков заработал право выбрать два приза из десяти предлагаемых. Сколькими способами он может это сделать?

## 9. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

---

Пусть  $P(A)$  – вероятность события  $A$ , а  $P(A|B)$  – условная вероятность  $A$  при условии  $B$  (т.е. это вероятность события  $A$  при условии, что событие  $B$  уже произошло; считаем, что  $P(B) \neq 0$ );  $E$  – достоверное событие, а  $\theta$  – невозможное событие.

Используя эти обозначения, приведем некоторые формулы теории вероятностей.

Если  $A$  и  $B$  – несовместные события, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (9.1)$$

В общем случае (теорема сложения вероятностей):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (9.2)$$

Теорема умножения вероятностей:

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B), \quad (9.3)$$

для независимых событий эта теорема имеет вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (9.4)$$

Формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_i P(A|H_i) \cdot P(H_i), \quad (9.5)$$

где  $\sum_i H_i = E$ , и  $H_k H_j = \theta$  для любых  $k \neq j$ .

Пусть проводится  $n$  одинаковых и независимых опытов, в каждом из которых событие  $A$  может произойти с вероятностью  $P(A) = p$ . Тогда вероятность того, что  $A$  произойдет ровно  $m$  раз ( $m \leq n$ ), определяется по формуле Бернулли:

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot (1 - p)^{n-m}. \quad (9.6)$$

Если  $X$  – случайная величина (сокращенно с.в.), то функция распределения  $F(x)$  этой с.в. определяется как

$$F(x) = P(X < x). \quad (9.7)$$

Математическое ожидание с.в.  $X$  обозначается  $M[X]$  и вычисляется по формулам, приведенным далее.

Для дискретных с.в.

$$M[X] = \sum_i x_i p_i, \quad (9.8)$$

где  $p_i$  – вероятность того, что с.в.  $X$  принимает значение  $x_i$ .

Если в правой части формулы (9.8) стоит расходящийся ряд, то у такой с.в. нет математического ожидания.

Для непрерывных с.в.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx, \quad (9.9)$$

где  $p(x)$  – плотность вероятности  $X$ .

Если несобственный интеграл в формуле (9.9) расходится, то с.в.  $X$  не имеет математического ожидания.

Пусть  $M[X] = a$  и существует  $M[X^2]$ , тогда у с.в.  $X$  будет существовать дисперсия  $D[X]$ :

$$D[X] = M[(X - a)^2]. \quad (9.10)$$

Можно показать, что

$$D[X] = M[X^2] - a^2. \quad (9.11)$$

Пример 9.1. Из колоды карт наудачу выбирают одну карту. Найти вероятность того, что это карта бубновой масти.

*Решение.* Ищем вероятность по классической формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (9.12)$$

где  $n$  – общее число исходов опыта;  $m$  – число исходов «благоприятных» для  $A$  (т.е. осуществление которых влечет за собой  $A$ ). Пользуясь этой формулой, нашу задачу можно решить двумя способами.

*Первый способ.*

Считая, что в колоде 36 карт, имеем общее число исходов  $n = 36$ . «Благоприятные» события – извлечение карты бубновой масти любого достоинства, всего бубновых карт девять, т.е.  $m = 9$ .

$$\text{Имеем } P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

*Второй способ.*

Колода содержит четыре равноправные масти ( $n = 4$ ). «Благоприятное» событие (с точки зрения масти карт) одно (одна масть из четырех нас устраивает), т.е.  $m = 1$ , откуда

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

Пример 9.2. Два студента из одной учебной группы сдают экзамен по курсу «Математика». С учетом уровня их подготовки вероятность сдачи экзамена первым студентом равна  $P(A) = 0,6$ , а вторым –  $P(B) = 0,4$ . Какова вероятность того, что экзамен сдаст хотя бы один из них?

*Решение.* Эту задачу тоже можно решить двумя способами.

*Первый способ.*

События  $A$  и  $B$  являются независимыми, откуда по формуле (9.4) вероятность того, что и первый и второй студент сдали экзамен равна

$$P(AB) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24.$$

События  $A$  и  $B$  являются совместными и, следовательно,  $P(A + B)$  надо искать по формуле (9.2):

$$P(A + B) = 0,6 + 0,4 - 0,24 = 0,76.$$

*Второй способ.*

Будем обозначать событие противоположное к  $C$  через  $\bar{C}$ . Так как справедлива формула

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C), \quad (9.13)$$

то, зная вероятность  $P(\bar{C})$ , легко найти  $P(C)$ .

В нашей задаче противоположным к рассматриваемому событию является событие, заключающееся в том, что ни один студент не сдал экзамен, т.е.  $\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ , вероятность этого события равна

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,4) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24.$$

Откуда по (9.13)

$$P(A + B) = 1 - P(\bar{A} \bar{B}) = 1 - 0,24 = 0,76.$$

Пример 9.3. В ящике имеются семь белых шаров и три красных. Из ящика (не глядя) вынимают один за другим два шара. Какова вероятность того, что оба вынутых шара – красные?

*Решение.* Вероятность вынуть первый красный шар

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

(всего десять шаров, из них три красных). Вероятность того, что и второй шар – красный (при условии, что первый был красным)

$$P(B|A) = \frac{2}{9}$$

(всего осталось девять шаров, из них два – красных). По теореме умножения вероятностей (формула (9.3)):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

Пример 9.4. В первой группе обучается 20 студентов, из них 15 хорошо владеют компьютером, во второй группе 30 студентов, из них 24 имеют такой же опыт работы на компьютере, в третьей группе из десяти человек таковых шесть. Найти вероятность того, что наугад вызванный студент из произвольно выбранной группы хорошо владеет компьютером (событие  $A$ ).

*Решение.* Пусть  $H_i$  – событие, заключающееся в том, что был выбран студент из  $i$ -й группы,  $i = 1, 2, 3$ . Ясно, что это попарно несовместные события и

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Вероятности выбора студента, владеющего компьютером, из разных групп, соответственно, равны:

$$P(A|H_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4};$$

$$P(A|H_2) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5};$$

$$P(A|H_3) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

По теореме о полной вероятности (см. формулу (9.5)) имеем

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{4} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{15+16+12}{60} = \frac{43}{60}.$$

**Пример 9.5.** Минутная стрелка часов делает скачок на соседнее деление, когда реальное время превышает указываемое на полминуты. Таким образом, в каждый момент времени часы показывают реальное время с некоторой «ошибкой». Рассматривая эту ошибку, как случайную величину, имеющую равномерное распределение, выяснить какова средняя ошибка в показаниях часов.

*Решение.* Рассогласование между реальным временем и показаниями часов находится в пределах от  $-0,5$  до  $+0,5$  мин, таким образом, наша «ошибка» представляет собой с.в.  $X$ , равномерно распределенную на  $[-0,5; 0,5]$  мин.

Если с.в. равномерно распределена на  $[a, b]$ , то ее плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

В нашем примере ( $a = -0,5$ ;  $b = 0,5$ )

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -0,5, \\ 1 & \text{при } -0,5 \leq x \leq 0,5, \\ 0 & \text{при } x > 0,5. \end{cases}$$

Чтобы ответить на поставленный вопрос, надо найти математическое ожидание нашей с.в. (см. (9.9)):

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = \int_{-0,5}^{0,5} x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-0,5}^{0,5} = 0,125 - 0,125 = 0,$$

т.е. средняя ошибка в показаниях часов равно нулю.

**Пример 9.6.** Дискретная с.в.  $X$  с равной вероятностью может принимать значения 1, 2, 3. Найти дисперсию этой с.в.



*Решение.* Вначале найдем ее математическое ожидание  $a$ . Так как каждое значение принимается с вероятностью  $p = \frac{1}{3}$ , то

$$a = M[X] = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Тогда

$$M[X^2] = \sum_i x_i^2 p_i = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}.$$

По формуле (9.11)

$$D[X] = M[X^2] - a^2 = 4 \cdot \frac{2}{3} - 4 = \frac{2}{3}.$$

## ЗАДАЧИ

1. Из колоды карт извлекается одна карта. Пусть  $A$  – событие, означающее, что извлечена карта черной масти;  $B$  – извлечена карта бубновой масти;  $C$  – извлечена любая произвольная карта;  $D$  – извлечена картинка (валет, дама, король или туз);  $F$  – извлечена десятка пик;  $G$  – извлечен любой туз.

а) Описать противоположные события:  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$ .

б) Среди событий  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $G$  указать пары совместных событий.

2. Из полной колоды (52 карты) извлекается одна карта. Пусть следующие события означают, что:

$A$  – извлечена карта красной масти;  $B$  – карта трéфовой масти;  $C_2, C_3, \dots, C_{10}$  – извлечена двойка, тройка, ..., десятка любой масти;  $D$  – извлечена картинка (валет, дама, король или туз).

Что представляют собой события:

а)  $A + B$ ; б)  $AB$ ; в)  $C_9 + C_{10}$ ; г)  $A \cdot C_6$ ; д)  $B \cdot C_8$ ;

е)  $D + \sum_{k=2}^{10} C_k$ ; ж)  $\left( D + \sum_{k=2}^{10} C_k \right) - A$ ?

3. Упростить выражение  $(A + B)(A + \bar{B})(\bar{A} + B)$ .

4. Как по-другому можно описать событие  $(A + B) - AB$ ?

5. Бросают игральную кость, пусть:

$A_k$  – событие выпадения числа  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;

$B$  – выпало четное число;

$C$  – выпало нечетное число;

$D$  – выпало число меньше пяти;

$F$  – выпало число больше четырех.

а) Описать события, из которых вытекает  $B$ , и события, влекущие за собой  $C$ .

б) Через заданные события описать  $\theta$  и  $E$ .

в) Описать  $F$  через другие события.

г) Что собой представляют события:  $FC$ ;  $FB$ ;  $DB$ ;  $DC$ ;  $F\bar{B}$ ;  $F\bar{C}$ ;  $A_3B$ ;  $A_3C$ ;  $A_9C$ ;  $F\bar{B}C$ ;  $A_1 + B$ ?

6. В условиях предыдущей задачи упростить выражение

$$F + A_2 + B + C \cdot A_5.$$

7. Упростить выражение  $\overline{(A + \bar{B} + C + D)}$ , если известно, что  $\bar{A} \subset B$  и  $C \subset D$ .

8. Кораблик имеет рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие  $A$  означает, что в данный момент исправно рулевое устройство;  $B_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) означает исправность  $k$ -го котла;  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) – исправна  $i$ -я турбина. Событие  $D$ , состоящее в том, что кораблик управляем, происходит, когда исправно рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить  $D$  через  $A$ ,  $B_k$ ,  $C_i$  и  $\bar{D}$  через  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}_k$ ,  $\bar{C}_i$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ;  $i = 1, 2$ ).

9. Упростить выражение  $A + B + C + D + \bar{C} \cdot \bar{D}$ , если известно, что  $A \subset B$ ;  $\bar{C} \subset \bar{D}$ .

10. Вероятность достать билет на концерт равна  $\frac{1}{3}$ . Чему равна вероятность не достать этот билет?

11. Из колоды (36 карт) достают одну карту. Какова вероятность того, что это будет бубновый король? Чему равна вероятность достать короля любой масти?

12. Бросают игральную кость. Найти вероятности следующих событий: 1) выпала тройка; 2) выпало число меньше пяти; 3) выпало число больше четырех.

13. В учебной группе учатся 25 студентов, из них пять – отличники. Какова вероятность, что наугад вызванный студент является отличником?

14. События  $A$  и  $C$  несовместны ( $AC = \emptyset$ ). Найти вероятность  $P(C)$ , если  $P(A + C) = \frac{2}{3}$  и  $P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$ .

15. Найти вероятность  $P(B - A)$ , если известно, что  $\bar{B} \subset \bar{A}$  и  $P(B) = \frac{5}{6}$ , а  $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$ .

16. Среди  $N$  лотерейных билетов –  $n$  выигрышных. 1) Какова вероятность купить выигрышный билет? 2) Если первый купленный билет был выигрышным, какова вероятность, что второй покупатель тоже купит выигрышный билет?

17. Дана такая последовательность событий  $\{A_k\}$ , что  $A_1 \subset A_2 \subset A_3, \dots, A_n \subset \dots$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = E$ . Чему равен  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k)$ ?

18. Дана такая последовательность событий  $\{B_k\}$ , что  $B_1 \supset B_2, \dots, B_n \supset \dots$  и  $\prod_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$ . Найти  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(B_k)$ .

19. Одновременно бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) на них в сумме выпадет шесть очков; 2) сумма выпавших очков  $\geq 10$ .

20. Раздают полную (52 карты) колоду. Найти вероятность того, что: 1) первая карта будет тузом любой масти; 2) последняя карта будет трефовой масти.

21. Среди  $N$  лотерейных билетов –  $n$  выигрышных. Предположив, что куплено  $M$  билетов, среди которых  $l$  выигрышных, вычислить вероятность того, что  $(M + 1)$ -й купленный билет будет выигрышным.

22. Одновременно бросают две игральные кости. Пусть  $A$  – событие, что суммы очков  $\geq 10$ ;  $B$  – сумма очков четная. Найти условную вероятность  $P(A|B)$ .

23. В соревнованиях участвуют девять спортсменов. Из них три мастера спорта, три перворазрядника и три второразрядника. Вызывается один спортсмен. Найти вероятность того, что он – перворазрядник, если известно, что он не является мастером спорта.

24. Замок имеет четырехзначный цифровой шифр. Наугад выбираются четыре цифры. Какова вероятность открыть замок, если известно, что в коде все цифры различны?

25. Замок имеет пятизначный цифровой шифр. Причем известно, что все цифры в коде различны и принимают значения от нуля до пяти. Какова вероятность, набрав наугад пятизначное число, открыть этот замок?

26. В коробке находится шесть новых и две израсходованных батарейки. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

27. Найти вероятность того, что, доставая одну за другой четыре карты из колоды в 36 карт, мы вытащим все четыре туза?

28. Музыкальная фраза состоит из пяти различных звуков (нот), расположенных в определенном порядке. Найти вероятность случайного воспроизведения фразы, если известны составляющие ее ноты.

29. Из полной колоды (52 карты) наугад выбирают одну за другой три карты. Какова вероятность того, что в первый раз будет извлечена тройка (любой масти), во второй – семерка, а в третий – туз?

30. Какова вероятность, выбрав одновременно наугад из полной (52 карты) колоды три карты, получить набор, в который входят тройка, семерка, туз?

31. Игральную кость подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что: 1) шестерка не выпадет ни разу; 2) шестерка появится хотя бы один раз?

32. Механизм собирается из трех одинаковых деталей и считается неработающим, если все три детали вышли из строя. В сборочном цехе осталось 15 деталей, из которых пять бракованных. Какова вероятность того, что собранный из взятых наугад оставшихся деталей механизм будет работоспособным?

33. Из шести карточек с буквами *A, E, И, Л, Р, Т* одну за другой наугад выбирают четыре. Какова вероятность получить слово *ТИРЕ* (т.е. первой достать *Т*, второй *И* и т.д.)?

34. Из набора букв задачи 33 наугад одновременно берут четыре карточки. Какова вероятность извлечь четверку карточек, из которых можно составить слово *ТИРЕ*?

35. На экспертизу поступили три партии одинаковых золотых изделий по 20 шт. в каждой из трех коробок. В первой коробке было одно бракованное изделие, во второй – два, а в третьей – четыре. Из каждой коробки извлекли наугад одно изделие для экспертизы. Какова вероятность того, что все три изделия окажутся бракованными?

36. Из 40 экзаменационных вопросов студент выучил 30. Какова вероятность того, что он ответит на три заданных вопроса?

37. Какова вероятность того, что обезьяны, барабанившие по пишущей машинке, отпечатают текст «Гамлета», считая, что текст состоит из 27 000 букв и пропусков и что на машинке имеется 35 клавиш?

38. Два студента сдают зачет по физкультуре, для этого необходимо выполнить определенные нормативы. Вероятность сдать нормативы для первого студента  $P(A) = 0,8$ , а для второго  $P(B) = 0,7$ . Какова вероятность того, что оба студента получат с первой попытки зачет по физкультуре?

39. В партии изделий содержится  $m = 7k$  бракованных. При этом  $k$  изделий имеют брак «а»;  $k$  – брак «b»;  $k$  – брак «с»;  $k$  – «а» и «b»;  $k$  – «b» и «с»;  $k$  – «а» и «с»;  $k$  – «а», «b», «с». Являются ли попарно независимыми события  $A, B, C$ , состоящие в том, что наугад выбранное изделие из числа  $m$  бракованных имеет, соответственно, брак «а», «b» или «с»?

40. В партии игрушек содержится  $m = 4k$  бракованных. При этом  $k$  игрушек имеет брак вида «а»,  $k$  – вида «b»;  $k$  – «с» и  $k$  – «а», «b», «с». События  $A, B, C$  состоят в том, что наугад выбранная игрушка из числа  $m$  бракованных имеет, соответственно, брак вида «а», «b», «с». Независимы ли  $A, B, C$  попарно? Являются ли  $A, B, C$  независимыми в совокупности?

41. Два стрелка одновременно стреляют в одну цель, каждый делает по одному выстрелу. Вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым – 0,6. Какова вероятность, что хотя бы один из них попал в цель?

42. По некоторой цели производится  $n$  независимых выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна  $p$ . Вычислить вероятность хотя бы одного попадания.

43. Ремонтное ателье обслуживает пять клиентов. Вероятность вызова на обслуживание от каждого клиента равна 0,2. Какова вероятность, что в данный момент ателье занято обслуживанием клиентов?

44. Определить вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы на одной из них выпадет шестерка.

45. Три курсанта военного училища стреляют из пистолета по мишени, у каждого есть один выстрел. Вероятность попасть в мишень для первого курсанта равна 0,7; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что хотя бы один курсант попадет в мишень, и вероятность того, что попадут все три.

46. Идет проверка (аудит) банков. Всего в городе – 15 банков, из них пять работают с грубыми нарушениями закона. Какова вероятность того, что, выбрав наугад для проверки три банка, обнаружат хотя бы один «криминальный»?

47. На дактилоскопическую экспертизу поступили три отпечатка фаланг пальцев рук. Вероятность непригодности к работе каждого отпечатка равна 0,1; 0,15 и 0,2 соответственно. Найти вероятность того, что все три отпечатка будут пригодны к работе, и вероятность того, что хотя бы один из них будет пригоден.

48. Для получения положительной оценки студенту достаточно ответить на взятый билет, или, отказавшись отвечать на первый билет, взять второй и ответить на него. Какова вероятность для студента сдать экзамен, если из 20 билетов он может ответить на 15?

49. Три автомашины были угнаны в разных городах. Они разыскиваются работниками правоохранительных органов по трем независимым направлениям. Вероятность найти первую машину 0,5; вторую – 0,6 и третью – 0,8. Найти вероятности следующих событий:

- 1) нашли все три машины;
- 2) нашли только вторую и третью машины;
- 3) нашли только третью машину;

4) нашли хотя бы один автомобиль;

5) хотя бы одну машину не нашли.

50. В пачке имеется десять тетрадей, восемь из которых в клетку. Найти вероятность того, что среди взятых наугад двух тетрадей есть хотя бы одна в клетку.

51. Баскетбольная команда атакует. Мяч с вероятностью 0,6 падает к первому нападающему или с вероятностью 0,4 – ко второму. Вероятность забросить мяч в корзину у первого нападающего равна 0,3, а у второго – 0,35. Найти вероятность того, что атака будет успешной.

52. Из 18 стрелков пять попадают в мишень с вероятностью 0,8; семь – с вероятностью 0,7; четыре – с вероятностью 0,6 и два – с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что наугад выбранный стрелок попадет в мишень при одном выстреле?

53. На международный конкурс исполнителей эстрадной песни каждая страна может направить только одного участника. С вероятностью  $p_1 = \frac{2}{3}$  Россию на этом конкурсе будет представлять

Иванов, с  $p_2 = \frac{1}{6}$  – Петров и с  $p_3 = \frac{1}{6}$  – Сидоров, которые вышли в финал отборочного тура. Вероятность того, что Иванов выиграет международный конкурс (при условии участия в нем), равна  $\frac{3}{4}$ ,

для Петрова и Сидорова эти вероятности равны  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$  соответственно. Найти вероятность того, что международный конкурс выиграет певец из России.

54. Курсанту военного училища для поражения мишени предложены пять винтовок, на трех из которых были оптические прицелы. Вероятность поразить мишень из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9, а без оптического прицела – 0,55. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если курсанту дадут наугад выбранную винтовку, и он сделает один выстрел.

55. Имеется три одинаковых урны. В первой – два белых и один черный шар, во второй – три белых и один черный шар, в третьей урне – два белых и два черных шара. Из выбранной наугад урны

достаают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

56. Пассажир едет из  $A$  в  $B$ . Доехать можно автобусом, троллейбусом или трамваем. Он собирается сесть в первый пришедший транспорт. Таковым с вероятностью  $p_1 = 0,4$  может оказаться автобус, с  $p_2 = 0,3$  – трамвай и с  $p_3 = 0,3$  – троллейбус. Вероятности того, что автобус, трамвай или троллейбус задержится по пути в  $B$  равны, соответственно,  $0,2$ ;  $0,3$  и  $0,35$ . Найти вероятность того, что пассажир не задержится по пути из  $A$  в  $B$ .

57. Найти вероятность того, что при четырех бросках монеты ровно три раза выпадет орел.

58. В урне –  $N$  шаров, из них –  $M$  белых. Из урны  $n$  раз наугад вынимают шар, регистрируют цвет и шар возвращают в урну. Какова вероятность события, что белый шар был зарегистрирован ровно  $k$  раз ( $k < n$ )?

59. Игральную кость бросают 5 раз. Чему равна вероятность того, что число 2 выпадет ровно три раза?

60. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых имеет место исход  $A$  с вероятностью  $p$ . Испытания прекращаются сразу, как только первый раз произойдет  $A$ . Чему равна вероятность того, что при этих условиях будет проведено ровно  $k$  испытаний?

61. Некоторая игра обязательно оканчивается победой одного из двух противников (ничьи исключены). Считая результаты отдельных партий независимыми, выяснить, какой результат в играх с одинаково сильными противниками более вероятен: три выигрыша и один проигрыш в матче из четырех партий или шесть выигрышей и четыре проигрыша в матче из десяти партий?

62. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна  $0,7$ . По мишени производится пять независимых выстрелов. Какова вероятность: 1) хотя бы одного попадания; 2) ровно двух попаданий; 3) не менее двух попаданий?

63. Вероятность того, что все студенты присутствуют на занятиях в течение одного дня, равна  $0,85$ . Найти вероятность то-



го, что если 25 дней подряд проводят проверки, то все студенты будут присутствовать на занятиях ровно 20 дней.

64. В ящике содержатся 20 деталей, каждая из которых имеет свой регистрационный номер, причем 15 деталей имеют четные номера, а 5 – нечетные. Из ящика наугад вынимают деталь, регистрируют ее номер и возвращают назад в ящик. Опыт повторяют 5 раз. Считая опыты независимыми, найти вероятность того, что из пяти извлеченных деталей ровно две имели четные номера.

65. Вероятность прибытия англоязычной группы туристическое агентство оценивает величиной 0,6. Прибывает шесть групп. Найти вероятность того, что: 1) из прибывших ровно четыре англоязычные группы; 2) прибудет не более двух таких групп.

66. Мальчик стреляет из детского лука по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна  $\frac{1}{2}$ , он делает шесть выстрелов. Найдите вероятность того, что: 1) он ни разу не попал в мишень; 2) попал в мишень все 6 раз.

Выписать функцию распределения и построить график этой функции для следующих случайных величин.

67.  $X = 5$  (const).

Указание: константу можно рассматривать, как с.в., принимающую единственное значение с вероятностью  $p = 1$ .

68.  $X$  принимает значения 0 с вероятностью  $\frac{1}{3}$  и 1 с вероятностью  $\frac{2}{3}$ .

69.  $X$  принимает значения  $-1, 0, 1$  с вероятностями  $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$  соответственно.

70.  $X$  принимает значения 1, 2, 3, 4 с вероятностями  $\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}$  соответственно.

71. Для с.в. из задачи 70 найти  $P(X > 2)$ .

72. Функция распределения непрерывной с.в.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности  $p(x)$  этой с.в.

73. Функция распределения непрерывной с.в.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности этой с.в.

74. С.в.  $X$  распределена по закону Гаусса с параметрами  $(0, 1)$ .

1) Выписать плотность вероятности для  $X$ .

2) Указать, как функция распределения  $F(x)$  связана с интегралом ошибок  $\Phi(x)$ .

3) Выразить вероятности событий  $P(a \leq X \leq b)$  и  $P(a < X < b)$  через  $F(x)$  и  $\Phi(x)$ .

75. С.в.  $X$  распределена по закону Гаусса с параметрами  $(0, 1)$ . Выписать через интеграл ошибок вероятность  $P(|X| \leq b)$ .

76. Выписать плотность вероятности для с.в.  $X$ , распределенной  $(1, 2)$  – нормально (по Гауссу).

77. Время безотказной работы прибора имеет функцию распределения:

$$F(x) = 1 - e^{-0,02x}.$$

Найти вероятность того, что прибор безотказно проработает не менее 30 и не более 40 ч.

78. С.в.  $X$  равномерно распределена на  $[1, 3]$ . Выписать ее функцию распределения  $F(x)$ .

79. Найти функцию распределения для с.в., равномерно распределенной на  $[0, 3]$ .

Найти математическое ожидание  $M[X]$  и дисперсию  $D[X]$  для следующих случайных величин.

80.  $X = 105$  ( $X = \text{const}$ ).

81.  $X$  – дискретная с.в., принимающая значения единицы с вероятностью  $p$  и нуля с вероятностью  $1 - p$ .

82.  $X$  – дискретная с.в., принимающая значения  $-2, 1, 2$  с вероятностями  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  соответственно.

83.  $X$  – дискретная с.в., принимающая значения  $-1, 0, 1$  с вероятностями: 1)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ; 2)  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  соответственно.

84.  $X$  – дискретная с.в., значения которой определяются количеством выпавших очков при бросании игральной кости.

85.  $X$  – непрерывная с.в., равномерно распределенная на отрезке  $[1, 3]$ .

86.  $X$  – непрерывная с.в., равномерно распределенная на  $[0, 2]$ .

87.  $X$  распределена по закону Гаусса с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}.$$

88. Известно, что с.в., распределенная по закону Гаусса, имеет  $M[X] = 0$  и  $D[X] = 9$ . Выписать ее плотность вероятности.

89. Известно, что  $X$  и  $Y$  – независимые с.в. и  $M[X] = a$ ,  $M[Y] = b$ . Найти математическое ожидание следующих с.в.:  $Z_1 = 2(X + Y)$ ,  $Z_2 = X + 2Y + 1$ ,  $Z_3 = X - Y$ .

90.  $X$  и  $Y$  – независимые с.в.,  $M[X] = 1$ ,  $M[Y] = 3$ . Найти  $M[2XY + 3]$ .

91. Для с.в.  $Z_1, Z_2, Z_3$  из задачи 89 найти дисперсию, если известно, что  $D[X] = \sigma_1^2$ , а  $D[Y] = \sigma_2^2$ .

92.  $X$  и  $Y$  – независимые с.в.,  $D[X] = 1$ ,  $D[Y] = 4$ . Найти  $D[Y - 2X + 3]$ .

93. Дискретная с.в.  $X$  принимает значения  $-3$ ,  $0$  и  $3$  с вероятностями  $\frac{1}{18}$ ,  $\frac{8}{9}$  и  $\frac{1}{18}$  соответственно. Найти  $M[X]$ ,  $\sigma(X)$  и  $P(|X| \geq 3\sigma)$ . Последний результат сравнить с неравенством Чебышева.

94. Имеется партия изделий, в которых могут попадаться качественные и бракованные. Число бракованных изделий – случайная величина, распределенная по закону Гаусса. Известно, что среднее число бракованных изделий составляет 12 %, а среднеквадратичное отклонение – 3 %. Отобрано 100 изделий. Используя «правило  $3\sigma$ », оценить наиболее вероятный интервал, которому принадлежит число бракованных изделий.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Воронов М.В., Мещерякова Г.П. Математика для студентов гуманитарных факультетов. – Ростов н/Д: Феникс, 2002.
2. Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев. – М.: Гардарики, 2002.
3. Грес П.В. Математика для гуманитариев. – М.: Логос, 2004.
4. Богатов Д.Ф., Богатов Ф.Г. Математика для юристов в вопросах и ответах. – М.: Приор, 2001.
5. Васильков Д.А., Дружинин В.В. Начала теории вероятностей. – М.: МИФИ, 1987.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: АСТ, Астрель, 2007.