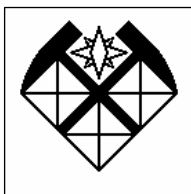


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Серго Орджоникидзе
(МГРИ-РГГРУ)**

А. Д. Каринский

**ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ
В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ.
СТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ. СТАЦИОНАРНОЕ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ**

Учебное пособие

«Допущено УМО по образованию в области прикладной геологии в качестве учебного пособия для студентов направления подготовки 21.05.03 «Технология геологической разведки» специализаций «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых», «Геофизические исследования скважин», «Сейсморазведка», «Геофизические информационные системы» (решение № 28-14-УМО/1 от 28.01.14г.)».

Москва, 2014 г.

УДК 550.83.015; 550.83.017

Каринский А. Д.

“Теория полей, применяемых в разведочной геофизике” (Статические поля. Стационарное электрическое поле). Изд. 2-е, исправленное. Учебное пособие. Российский государственный геологоразведочный университет (МГРИ-РГГРУ). 2014. 105 с.

Учебное пособие составлено на основе практикумов [6, 7]. Рассмотрены элементы математического аппарата, применяемого при расчетах полей; примеры решения прямых задач теории статического поля в вакууме и в среде, теории стационарного электрического поля. Рассмотрению задач предшествуют необходимые пояснения. В конце каждой главы приведены задания для самостоятельной работы.

Ил. 18, список лит. 11 назв.

Р е ц е н з е н т ы:

- доктор физико-математических наук В. А. Шевнин (профессор кафедры Геофизических методов исследования земной коры Геологического факультета МГУ)

- кандидат технических наук И. А. Мараев (доцент кафедры Геофизики МГРИ-РГГРУ)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	- 5 -
1. ВВЕДЕНИЕ.....	- 5 -
1.1. СКАЛЯРЫ И ВЕКТОРЫ	- 5 -
1.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ.....	- 6 -
1.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛАМЭ.....	- 10 -
1.4. ПОТОК, НАПРЯЖЕНИЕ, ЦИРКУЛЯЦИЯ.....	- 10 -
1.5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ.....	- 12 -
1.6. СИММЕТРИЯ ПОЛЯ.....	- 15 -
1.7. ЗАДАНИЯ.....	- 18 -
2. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.....	- 19 -
2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ.....	- 19 -
2.2. ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ МАСС И ПОЛЕ ДИПОЛЯ.....	- 23 -
Поле одной точечной массы.....	- 23 -
Поле двух точечных масс.....	- 28 -
Поле диполя.....	- 29 -
2.3. ПОЛЕ ЛИНЕЙНЫХ МАСС.....	- 32 -
Поле на оси окружности.....	- 34 -
Поле отрезка прямой.....	- 36 -
Поле прямой.....	- 38 -
Поле линейного диполя.....	- 39 -
2.4. ПОЛЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАСС.....	- 40 -
Поле на оси «круга».....	- 42 -
Поле «плоскости».....	- 44 -
Поле двойного слоя.....	- 45 -
Поле сферической поверхности.....	- 47 -
2.5. ПОЛЕ ОБЪЕМНЫХ МАСС.....	- 50 -
Поле шара.....	- 50 -
Поле пласта.....	- 53 -
Поле цилиндра.....	- 55 -
2.6. ЗАДАНИЯ.....	- 58 -
3. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ; __СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.....	- 59 -
3.1. ПОЯСНЕНИЯ.....	- 59 -
Основные формулы. Прямая задача.....	- 60 -
Поле у особой поверхности.....	- 63 -
О теореме единственности.....	- 64 -
Этапы решения задачи.....	- 67 -
3.2. НЕОДНОРОДНОСТЬ В СРЕДЕ В ПЕРВИЧНОМ ПОЛЕ.....	- 68 -
Проводящий шар в однородном электростатическом поле.....	- 68 -
Сферическое включение в среде в первичном поле.....	- 74 -
Цилиндрическая неоднородность в среде в первичном поле.....	- 79 -
3.3 ПОЛЕ ЭЛЕКТРОДОВ.....	- 84 -
Поле шарового электрода в однородной среде.....	- 85 -

Поле точечного электрода в присутствии непроводящего полупространства.....	- 88 -
Поле точечного электрода в присутствии плоской границы.....	- 91 -
РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	- 93 -
РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ.....	- 93 -
Поле точечного электрода, расположенного на оси цилиндрической границы.....	- 97 -
3.4. ПОЛЕ ДВОЙНОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА....	- 101 -
Поле поляризованной сферы.....	- 101 -
3.5. ЗАДАНИЯ.....	- 104 -
ЛИТЕРАТУРА.....	- 105 -

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии рассмотрены уравнения статического поля в вакууме, статического поля в присутствии среды, стационарного электрического поля и примеры решения прямых задач теории этих полей. Пособие состоит из трех разделов. В первом рассмотрены элементы математического аппарата, применяемого при решении задач, особенности построения некоторых систем координат, свойства симметричных полей, упрощающие определение таких полей в системах координат. Во втором разделе приведены примеры расчета статического поля, создаваемого заданными массами (зарядами). В третьем разделе рассмотрены решения некоторых прямых задач теории статического поля в присутствии среды и стационарного электрического поля. Каждая глава заканчивается заданиями для самостоятельной работы.

Большую работу при подготовке учебного пособия к 1-му изданию выполнил доцент кафедры Геофизики МГРИ-РГГРУ К. В. Новиков, которому автор выражает искреннюю признательность.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. СКАЛЯРЫ И ВЕКТОРЫ

Скалярную величину (скаляр) T характеризует число (его абсолютная величина и знак). Векторную величину (вектор) \vec{M} определяют абсолютная величина (модуль вектора) $M=|\vec{M}|$ и направление, либо три числа – скалярные компоненты вектора в данной системе координат. Вектор \vec{M} можно представить в виде направленного отрезка.

Скаляр T или вектор \vec{M} образуют *поле* в области пространства V , если каждой точке a этой области соответствует некоторое значение T или \vec{M} .

Различают скалярную (M_l) и векторную (\vec{M}_l) компоненты вектора \vec{M} по направлению линии l . Эти компоненты определяют выражения:

$$M_l = M \cos(\vec{M}, l) = (\vec{M} \cdot \vec{1}_l), \quad \vec{M}_l = \vec{1}_l M_l, \quad (1)$$

где $\vec{1}_l$ – единичный вектор (орт), направленный по касательной к линии l . Единичный вектор $\vec{1}_M$ по направлению вектора \vec{M} равен отношению \vec{M}/M . В соответствии с (1) компоненту \vec{M}_l вектора \vec{M} можно рассматривать, как проекцию вектора \vec{M} на орт $\vec{1}_l$. Согласно (1), величина M_l положительна или отрицательна, если угол $(\vec{M}, \vec{1}_l)$ – острый или тупой соответственно. Если угол $(\vec{M}, \vec{1}_l) = \pi/2$, то компонента $M_l = 0$, а если этот угол равен нулю, то компонента M_l равна модулю M вектора \vec{M} .

При заданном направлении линии l можно полагать направленным также каждый элемент dl этой линии. Такому направленному элементарному отрезку dl соответствует вектор \vec{dl} , бесконечно малый по абсолютной величине (равной длине dl).

При рассмотрении поля \vec{M} у поверхности S иногда требуется разложить вектор \vec{M} на две компоненты: нормальную \vec{M}_n и тангенциальную (касательную) \vec{M}_ϕ . Компонента \vec{M}_n – проекция вектора \vec{M} на нормаль n к поверхности S , а (полная) тангенциальная компонента \vec{M}_ϕ – проекция \vec{M} на плоскость, касательную к S . Для случая, когда поверхность S – плоскость, эти компоненты показаны на рис. 1,б.

Если dS – элемент поверхности S и определено направление нормали n к S , то можно ввести понятие ориентированной элементарной площадки \vec{dS} . Направление \vec{dS} совпадает с направлением нормали n к площадке dS , а модуль $|\vec{dS}| = dS$ (см. рис. 1,в). Если поверхность S – замкнутая, то обычно полагают, что нормаль n направлена наружу (из области V , ограниченной поверхностью S).

Непрерывность поля и ее нарушение. Скалярное поле T – непрерывно в точке a , если бесконечно малому перемещению точки a по любому направлению соответствует бесконечно малое изменение величины T . Векторное поле \vec{M} непрерывно в точке a , если в этой точке непрерывна компонента M_l по любой (гладкой) линии l . В противном случае поле (T, \vec{M}) терпит разрыв в точке a и эта точка называется особой (a_{oc}). Такие точки могут образовывать особые линии l_{oc} или особые поверхности S_{oc} поля \vec{M} .

1.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Положение точки a в пространстве можно определить:

1. радиусом-вектором \vec{L}_{Oa} , направленным в точку a из некоторой фиксированной точки O (см. рис. 1,а);
2. тремя числами: ξ_1, ξ_2, ξ_3 – координатами точки a в выбранной системе координат. В этом случае положение точки является функцией ее координат: $a = a(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Решение прямых задач (определение поля различных его источников) и расчеты полей удобно проводить в системах координат. В дальнейшем будем пользоваться тремя системами правых ортогональных координат: декартовой, цилиндрической и сферической. Термин «правые ортогональные координаты» означает, что в любой точке координатные направления (см. ниже) взаимно ортогональны, а при определенной последовательности трех координат эти направления образуют правую тройку направлений. Если первое из этих направлений вращать на угол $\pi/2$ (рад) в

сторону второго, то перемещение правого винта покажет третье направление.

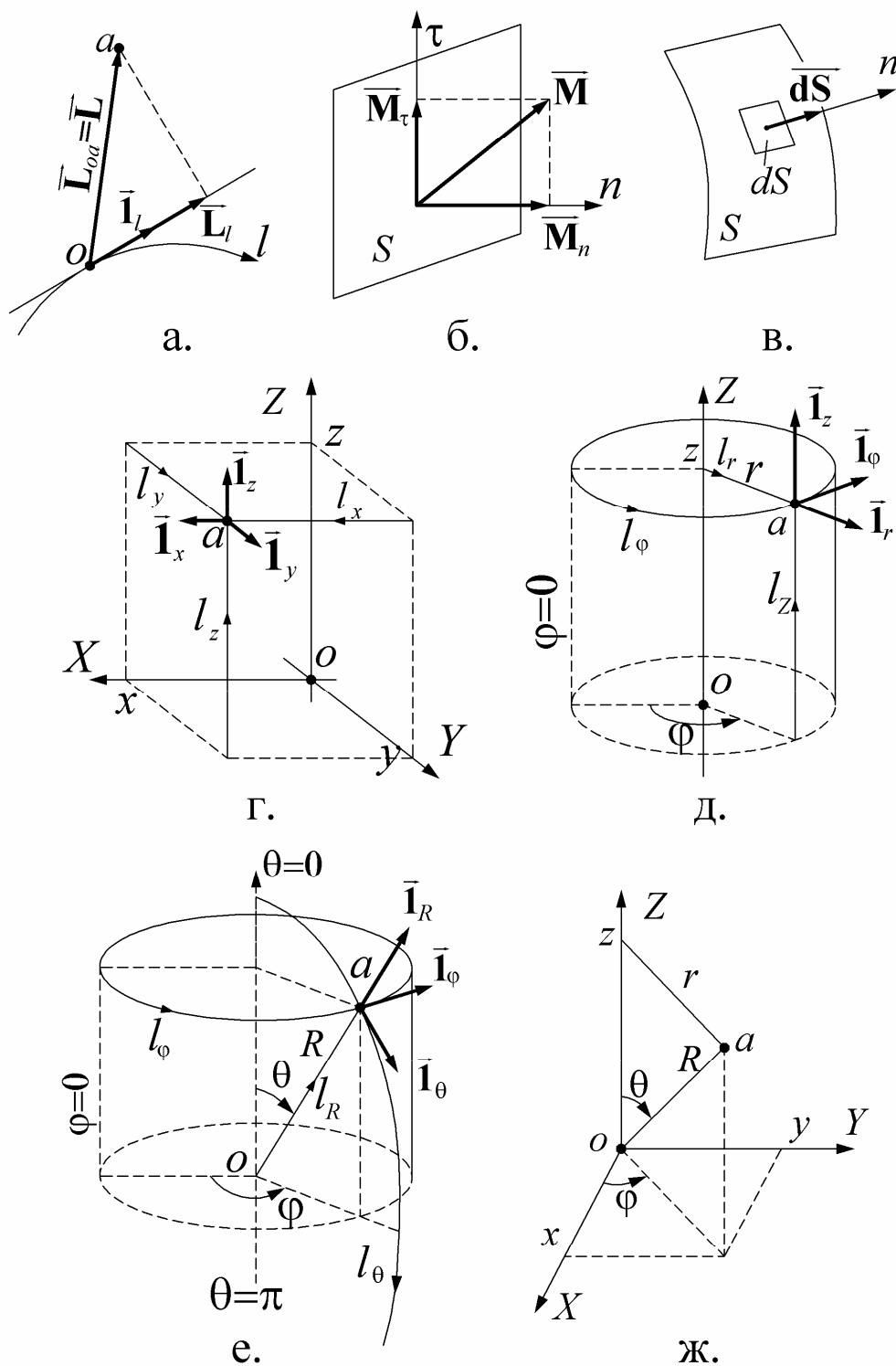


Рис.1. Векторы, компоненты векторов. Системы координат.

Геометрическое место точек, имеющих постоянное значение одной из координат ξ ($\xi = \text{const}$), называется координатной поверхностью S_ξ . Коор-

динатная линия l_ξ – это направленная линия, по которой перемещается точка с увеличением координаты ξ (при постоянных значениях двух других координат). При этом, например, координатная линия l_1 – геометрическое место точек, имеющих постоянные значения координат ξ_2, ξ_3 или линия пересечения координатных поверхностей S_2 ($\xi_2 = \text{const}$) и S_3 ($\xi_3 = \text{const}$). Вектор единичной длины $\vec{1}_\xi$, ориентированный по касательной к координатной линии l_ξ , направлен в каждой точке этой линии как градиент (см. ниже) координаты ξ . В ортогональных системах координат единичные векторы (орты) $\vec{1}_1, \vec{1}_2, \vec{1}_3$, направленные по касательным к координатным линиям l_1, l_2, l_3 , взаимно перпендикулярны. В правой системе координат орты $\vec{1}_1, \vec{1}_2, \vec{1}_3$ образуют правую тройку векторов. То есть, если орт $\vec{1}_1$ вращать на наименьший угол ($\pi/2$) для совмещения его с ортом $\vec{1}_2$, то направление орта $\vec{1}_3$ определит «правило правого винта».

Декартову систему координат образуют три взаимно перпендикулярные оси X, Y, Z пересекающиеся в точке O – начале координат. Координатами $\xi_1 = x, \xi_2 = y, \xi_3 = z$ точки a являются ее проекции на соответствующие координатные оси (рис. 1,г). Пределы изменения координат x, y, z – интервалы $(-\infty, +\infty)$. Координатные поверхности в декартовых координатах – плоскости: $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$. Координатные линии – прямые, параллельные соответствующим осям. Орты $\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z$ всюду параллельны осям X, Y, Z соответственно.

Цилиндрическая система координат. Координаты в этой системе: $\xi_1 = r, \xi_2 = \varphi, \xi_3 = z$. Чтобы ввести эту систему координат, надо определить: положение в пространстве оси Z , начало координат O на этой оси и начало отсчета координаты φ ($\varphi = 0$) – полуплоскости, ограниченной осью Z (рис. 1,д). Координату z точки a определяет проекция точки a на ось Z ; координата r – расстояние от точки a до оси Z ; координата φ угол между ограниченной осью Z полуплоскостью, проходящей через точку a , и полуплоскостью $\varphi = 0$. Координата $r \geq 0$. Координатные поверхности: $r = \text{const}$ – цилиндрические поверхности с осью Z ; $\varphi = \text{const}$ – полуплоскости, ограниченные осью Z ; $z = \text{const}$ – плоскости, ортогональные оси Z . Координатные линии: l_r – лучи, исходящие из точек на оси Z и перпендикулярные этой оси; l_φ – окружности с осью Z ; l_z – прямые, параллельные оси Z . Орт $\vec{1}_z$ всюду параллелен оси Z , а направления ортов $\vec{1}_r$ и $\vec{1}_\varphi$ зависят от координаты φ . В плоскости $z = \text{const}$ цилиндрические координаты r и φ идентичны соответствующим полярным координатам на плоскости.

Сферическая система координат. Координаты в этой системе: $\xi_1 = R, \xi_2 = \theta, \xi_3 = \varphi$. Чтобы ввести эту систему координат, надо опреде-

лечь положение в пространстве полярной оси, выбрать начало координат O на этой оси и начало отсчета координаты φ – полуплоскости $\varphi=0$, ограниченной полярной осью (рис. 1,е). Координата R точки a равна расстоянию L_{Oa} от начала координат до точки a ; координата θ – (полярный) угол между радиусом-вектором \vec{L}_{Oa} и направлением полярной оси; (азимутальная) координата φ – угол между ограниченной полярной осью полуплоскостью, проходящей через точку a , и полуплоскостью $\varphi = 0$. В правой системе координат направления отсчета координаты φ и полярной оси образуют правовинтовую систему. Координаты R и θ – неотрицательны, причем $0 \leq R < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Координатные поверхности: $R = \text{const}$ – сферические поверхности с центром в начале координат O ; $\theta = \text{const}$ – конические поверхности вращения, осью которых является полярная ось; $\varphi = \text{const}$ – полуплоскости, ограниченные полярной осью. Координатные линии: l_R – лучи, исходящие из начала координат O ; l_θ – полуокружности с центром в точке O , опирающиеся на полярную ось; l_φ – окружности, осью которых является полярная ось. Направления ортов $\vec{1}_R$ и $\vec{1}_\theta$ зависят от координат θ и φ , а направление $\vec{1}_\varphi$ – от координаты φ .

Иногда применяют «совмещенную» систему координат, включающую системы x, y, z ; r, φ, z ; R, θ, φ или две из них. В этом случае обычно предполагают, что системы имеют общее начало O , полярную ось, совпадающую с осью Z , и начало отсчета координаты φ в полуплоскости: $y = 0$, $x > 0$ (рис. 1,ж). В таком случае справедливы равенства:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = R \sin \theta, \quad \text{tg } \varphi = y/x, \\ R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \text{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) = \text{arctg}(r/z). \end{aligned}$$

Координаты из одной системы – взаимно независимы.

В выбранной системе с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 скалярное поле T будет определено, если будет известна (найдена) зависимость $T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Векторное поле

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{1}_1 M_1 + \vec{1}_2 M_2 + \vec{1}_3 M_3$$

будет определено в системе координат, если будут известны зависимости его компонент от координат:

$$M_1 = M_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad M_2 = M_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad M_3 = M_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

1.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛАМЕ

Коэффициенты Ламе h_i ($i = 1, 2, 3$) определяют связь между приращением координаты $d\xi_i$ и перемещением dl_i вдоль координатной линии l_i , которое совершает при этом точка:

$$h_i = dl_i/d\xi_i; \quad dl_i = h_i \cdot d\xi_i. \quad (2)$$

Определим коэффициенты Ламэ для декартовых, цилиндрических и сферических координат. В этих системах координат существенно различаются два типа координатных линий.

1. Линии l_x, l_y, l_z, l_r, l_R – прямые или лучи. Координаты x, y, z, r, R определяют в единицах длины (метрах). Очевидно, что коэффициенты Ламэ для этих координат равны единице, так как путь, проходимый точкой при приращении (увеличении) какой либо из этих координат, равен величине этого приращения.

2. Линии l_φ в цилиндрической системе координат и линии l_θ, l_φ в сферической системе координат – окружности или полуокружности. Координаты θ и φ определяются в угловых единицах (радианах). Рассмотрим, как связан путь dl проходимый точкой по дуге окружности радиуса ρ , с приращением $d\alpha$ угловой координаты α (рис. 2,а). По определению центральный угол (в радианах) равен отношению длины дуги окружности к радиусу этой окружности. Следовательно, $d\alpha = dl/\rho$ или

$$\rho = dl/d\alpha$$

При сравнении этого выражения с определением коэффициента Ламэ (2) видно, что в случае, если координата угловая, а координатная линия – окружность (или полуокружность), коэффициент Ламэ равен радиусу этой окружности. Тогда в цилиндрических координатах $h_\varphi = r$, а в сферических координатах: $h_\theta = R, h_\varphi = R \sin \theta$ (рис. 1,д,е).

1.4. ПОТОК, НАПРЯЖЕНИЕ, ЦИРКУЛЯЦИЯ

Потоком (скалярным) $d\Psi$ вектора \vec{M} через элементарную площадку dS с нормалью n называется произведение $M \cdot dS \cdot \cos(\vec{M}, n)$. Если воспользоваться понятием ориентированной элементарной площадки \vec{dS} (см. раздел 1.1), то выражение для потока $d\Psi$ можно записать в более компактном виде:

$$d\Psi = (\vec{M} \cdot \vec{dS}), \quad (3)$$

где $(\vec{M} \cdot \vec{dS})$ – скалярное произведение векторов \vec{M} и \vec{dS} .

Согласно (3), $d\Psi > 0$ или $d\Psi < 0$, если угол между направлениями \vec{M} и n – острый или тупой соответственно. Если угол $(\vec{M}, n) = \pi/2$ или $\vec{M} = 0$, то $d\Psi = 0$.

Поток вектора \vec{M} через поверхность S равен интегральной сумме потоков $d\Psi$ через все элементы dS поверхности S :

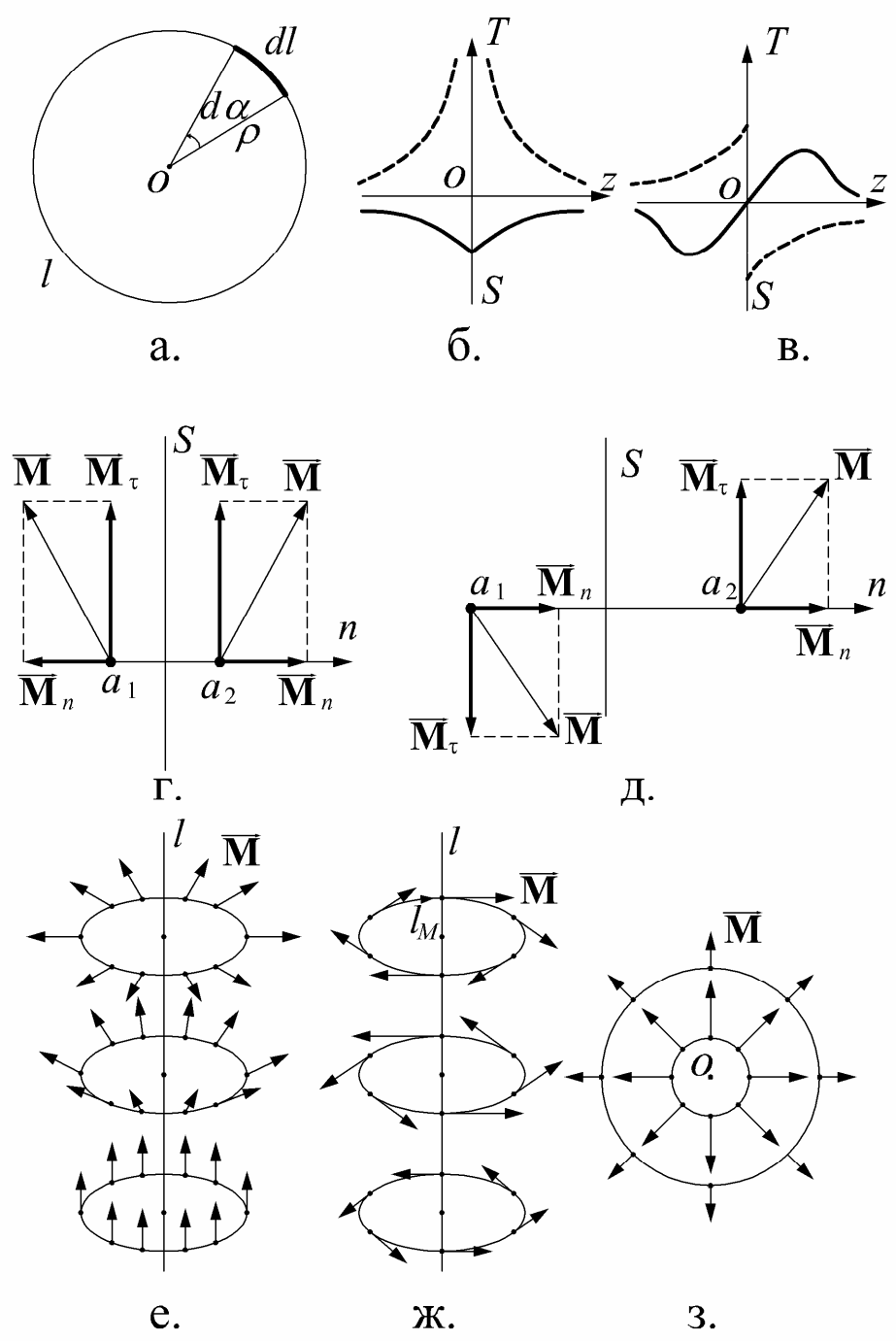


Рис..2. К определению коэффициентов Ламэ. Симметрия поля.

$$\Psi = \int_S (\vec{M} \cdot d\vec{S}) \quad \text{или} \quad \Psi = \oint_{S[V]} (\vec{M} \cdot d\vec{S}) \quad (4)$$

Во втором из выражений (4) отмечено, что поверхность S – замкнутая и ограничивает область пространства V . Очевидно, что если нормали к поверхности $S[V]$ направлены наружу относительно области V и векторные линии l_M поля \vec{M} выходят из области V , то поток Ψ через поверхность $S[V]$ – положителен. Если же линии l_M входят в область V , оканчиваясь (обрываясь) в этой области, то $\Psi < 0$.

Напряжение $d\mathcal{E}$ вектора \vec{M} на отрезке dl направленной линии l определяет равенство:

$$d\mathcal{E} = M \cdot dl \cdot \cos(\vec{M}, d\vec{l}) = (\vec{M} \cdot d\vec{l}), \quad (5)$$

где $d\vec{l}$ – ориентированный (по направлению линии l) отрезок dl . Согласно (5), знак напряжения $d\mathcal{E}$ – тот же, что знак $\cos(\vec{M}, d\vec{l})$.

Напряжение \mathcal{E}_{12} поля \vec{M} вдоль линии l , соединяющей точки “1” и “2”, это – интегральная сумма напряжений $d\mathcal{E}$, т.е. криволинейный интеграл вида:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{M} \cdot d\vec{l}), \quad (6)$$

Циркуляция \mathcal{C} вектора \vec{M} это – напряжение \mathcal{E} вектора \vec{M} по замкнутой линии l :

$$\mathcal{C} = \oint (\vec{M} \cdot d\vec{l}). \quad (7)$$

Очевидно, что, если существуют замкнутые векторные линии l_M поля \vec{M} , то, по крайней мере, по этим линиям циркуляция вектора \vec{M} не равна нулю. Действительно, согласно (5), если угол $(\vec{M}, d\vec{l})$ равен 0 или π (и $\vec{M} \neq 0$), то подынтегральная функция в (7) – знакопостоянна и по линиям l_M циркуляция $\mathcal{C} \neq 0$.

1.5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пространственные производные определяют характер изменения поля в окрестности данной точки пространства. Первая пространственная производная скалярного поля T – градиент, а первые пространственные производные векторного поля \vec{M} – дивергенция и ротор.

Градиент скалярного поля T ($\text{grad} T$) – вектор, имеющий направление наиболее резкого (интенсивного) возрастания скаляра T в окрестности данной точки и абсолютную величину, равную производной T по этому направлению. Отметим, что вектор $(-\text{grad} T)$ имеет направление наиболее резкого убывания (падения) скаляра T .

Проекция градиента скаляра T на направление l (скалярная компонента вектора $\text{grad}T$ по направлению l):

$$\text{grad}_l T = \frac{\partial T}{\partial l} = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad (8)$$

Где (в соответствии с (2)) ξ координата, отсчитываемая по направлению l а, h_ξ - коэффициент Ламэ. Умножая скалярные компоненты $\text{grad}T$ на соответствующие орты $\vec{\mathbf{1}}_i$ и суммируя векторные компоненты $\text{grad}T$ по трем взаимно ортогональным направлениям, получаем:

$$\text{grad}T = \frac{\vec{\mathbf{1}}_1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \frac{\vec{\mathbf{1}}_2}{h_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} + \frac{\vec{\mathbf{1}}_3}{h_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3}, \quad (9)$$

Правую часть равенства (9) можно представить, как произведение символического вектора

$$\nabla = \frac{\vec{\mathbf{1}}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\vec{\mathbf{1}}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\vec{\mathbf{1}}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3}, \quad (10)$$

называемого «набла», на скаляр T :

$$\text{grad}T = \nabla T. \quad (9')$$

Дивергенция векторного поля $\vec{\mathbf{M}}$ ($\text{div}\vec{\mathbf{M}}$) в точке a – предел отношения потока вектора $\vec{\mathbf{M}}$ через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область пространства V , к объему области V при стремлении V к нулю и стягивании $S[V]$ к точке a :

$$\text{div}\vec{\mathbf{M}} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_{S[V]} (\vec{\mathbf{M}} d\vec{\mathbf{S}})}{V} \quad (11)$$

Согласно (11), $\text{div}\vec{\mathbf{M}}(a)$ – скалярное поле, знак которого – тот же, что и знак потока вектора $\vec{\mathbf{M}}$ через предельно малую замкнутую поверхность, окружающую точку a . Если в точке a начинаются или оканчиваются векторные линии l_M поля $\vec{\mathbf{M}}$, то в этой точке соответственно $\text{div}\vec{\mathbf{M}} > 0$ или $\text{div}\vec{\mathbf{M}} < 0$. Те места (области пространства, точки и т. д.), где $\text{div}\vec{\mathbf{M}} \neq 0$, $\text{div}\vec{\mathbf{M}} > 0$ и $\text{div}\vec{\mathbf{M}} < 0$ называют соответственно источниками, истоками и стоками поля $\text{div}\vec{\mathbf{M}}$.

Применяя формулу (11) к области V в виде координатного элемента объема $dV = h_1 d\xi_1 \cdot h_2 d\xi_2 \cdot h_3 d\xi_3$, можно получить для $\text{div}\vec{\mathbf{M}}$ выражение (см.[1], стр. 24):

$$\text{div}\vec{\mathbf{M}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3 M_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_3 h_1 M_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 M_3) \right], \quad (12)$$

которым проще воспользоваться, чем определением (11) понятия $\text{div}\vec{\mathbf{M}}$, при расчетах $\text{div}\vec{\mathbf{M}}$ в системах координат.

Согласно (10), правую часть равенства (12) в системе координат можно представить, как скалярное произведение $(\nabla \cdot \vec{M})$, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{M} = (\nabla \cdot \vec{M}). \quad (12')$$

Ротор векторного поля \vec{M} ($\operatorname{rot} \vec{M}$) – вектор, скалярную компоненту которого по направлению n определяет выражение

$$\operatorname{rot} \vec{M}_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{l[S]} (\vec{M} \cdot d\vec{l})}{S}, \quad (13)$$

где n – нормаль к S , а поверхность S ограничена контуром $l[S]$, направление обхода, по которому образует правовинтовую систему с направлением n . При $S \rightarrow 0$ замкнутый контур $l[S]$ стягивается к точке a – центру площадки S .

Применяя (13) к поверхностям S в виде координатных площадок dS_i , можем получить выражения для скалярных компонент $\operatorname{rot}_i \vec{M}$ ($i = 1, 2, 3$), которыми проще воспользоваться, чем выражением (13), при расчетах $\operatorname{rot} \vec{M}$ в системах координат (см. [1], стр. 20). При этом, например,

$$\operatorname{rot}_1 \vec{M} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_3 M_3) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_2 M_2) \right].$$

Аналогичный вид имеют выражения для скалярных компонент $\operatorname{rot}_2 \vec{M}$ и $\operatorname{rot}_3 \vec{M}$ вектора $\operatorname{rot} \vec{M}$. Выражение для поля $\operatorname{rot} \vec{M} = \mathbf{1}_1 \operatorname{rot}_1 \vec{M} + \mathbf{1}_2 \operatorname{rot}_2 \vec{M} + \mathbf{1}_3 \operatorname{rot}_3 \vec{M}$ может быть записано при помощи определителя третьего порядка:

$$\operatorname{rot} \vec{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{1}}_1 h_1 & \vec{\mathbf{1}}_2 h_2 & \vec{\mathbf{1}}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 M_1 & h_2 M_2 & h_3 M_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \vec{\mathbf{1}}_1 h_1 \left[\frac{\partial (h_3 M_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (h_2 M_2)}{\partial \xi_3} \right] - \right. \\ \left. - \vec{\mathbf{1}}_2 h_2 \left[\frac{\partial (h_3 M_3)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (h_1 M_1)}{\partial \xi_3} \right] + \vec{\mathbf{1}}_3 h_3 \left[\frac{\partial (h_2 M_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (h_1 M_1)}{\partial \xi_2} \right] \right\}. \quad (14)$$

Не сложно убедиться в том, что в соответствии с (10), (14) в декартовой системе координат ротор вектора \vec{M} можно выразить, как векторное произведение:

$$\operatorname{rot} \vec{M} = [\nabla \cdot \vec{M}]. \quad (14')$$

Отметим, что при $\operatorname{rot} \vec{M} \equiv 0$ и $\operatorname{div} \vec{M} \neq 0$ поле \vec{M} называют потенциальным, а при $\operatorname{rot} \vec{M} \neq 0$ и $\operatorname{div} \vec{M} \equiv 0$ – чисто-вихревым или соленоидальным. В случае потенциального поля производная $\operatorname{div} \vec{M}$ определяет характер изменения поля \vec{M} по направлению \vec{M} . Если же поле \vec{M} – чисто вих-

ревое, то производная $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}$ зависит от изменений поля $\vec{\mathbf{M}}$ в направлениях, ортогональных направлению $\vec{\mathbf{M}}$. Отметим, что при $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ и $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ поле $\vec{\mathbf{M}}$ иногда называют «лапласовым».

Лапласиан $\nabla^2 T$ скалярного поля T – вторая производная поля T : $\nabla^2 T = (\nabla \cdot \nabla T) = \text{div grad } T$. Из выражений (9), (12) следует, что

$$\nabla^2 T = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3} \right) \right]. \quad (15)$$

Для другой второй производной поля T справедливо тождественное равенство:

$$\text{rot grad } T \equiv 0. \quad (16)$$

В формулах (8) – (10), (12), (14), (15): ξ_i ($i = 1, 2, 3$) – координаты, $\vec{\mathbf{1}}_i$ – орты, M_i – скалярные компоненты вектора $\vec{\mathbf{M}}$ по координатным направлениям, h_i – коэффициенты Ламэ. Согласно (2), в декартовых, цилиндрических и сферических координатах коэффициенты Ламэ h_i определяют следующие выражения:

$\xi_{1,2,3} = x, y, z$	$\xi_{1,2,3} = r, \varphi, z$	$\xi_{1,2,3} = R, \theta, \varphi$
$h_1 = h_x = 1$	$h_1 = h_r = 1$	$h_1 = h_R = 1$
$h_2 = h_y = 1$	$h_2 = h_\varphi = r$	$h_2 = h_\theta = R$
$h_3 = h_z = 1$	$h_3 = h_z = 1$	$h_3 = h_\varphi = R \sin \theta$

Отметим, что вторые производные векторного поля $\vec{\mathbf{M}}$: $\text{rot rot } \vec{\mathbf{M}}$, $\text{grad div } \vec{\mathbf{M}}$, $\nabla^2 \vec{\mathbf{M}}$ связаны равенством $\text{rot rot } \vec{\mathbf{M}} = \text{grad div } \vec{\mathbf{M}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{M}}$, которое можно рассматривать, как определение лапласиана вектора $\nabla^2 \vec{\mathbf{M}}$. Вторая производная $\text{div rot } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$.

1.6. СИММЕТРИЯ ПОЛЯ

Если возбудители поля симметрично расположены относительно плоскости, прямой или точки, то порождаемое этими возбудителями поле будет иметь соответствующую симметрию. Симметричные поля имеют определенные свойства, которые упрощают их расчеты. Рассмотрим виды симметрии поля, и некоторые свойства симметричных полей.

Зеркальная симметрия – симметрия относительно плоскости.

Пусть a_1 и a_2 – две любые точки, симметричные относительно плоскости S . Скалярное поле T – четно симметрично относительно плоскости S , если $T(a_1) = T(a_2)$ и нечетно симметрично относительно плоскости S , если $T(a_1) = -T(a_2)$. Если плоскость $z=0$ (декартовых или цилиндрических координат) совпадает с плоскостью симметрии S , то при четной симметрии поля T имеем: $T(z) = T(-z)$ (т.е. T – четная функция координаты z), а при

нечетной симметрии поля T : $T(z) = -T(-z)$ то есть $T(z)$ – нечетная функция z (см. рис. 2,б,в). На рис. 2,б видно, что при четной симметрии поле T на плоскости S либо непрерывно, либо принимает бесконечно большие значения. На плоскости S нечетной симметрии (см. рис. 2,в) поле T либо равно нулю, либо терпит разрыв, равный удвоенному значению T при $z \rightarrow 0, z > 0$.

Векторное поле \vec{M} чётно симметрично относительно S при $M_\tau(a_1) = M_\tau(a_2), M_n(a_1) = M_n(a_2)$ (рис. 2,г) и нечётно симметрично относительно S при $M_\tau(a_1) = -M_\tau(a_2), M_n(a_1) = M_n(a_2)$ (рис. 2,д). Сказанное выше о зеркальной симметрии поля T на плоскости симметрии S остается справедливым и для соответствующих скалярных компонент векторного поля. Компоненты M_τ при четной симметрии и M_n при нечетной симметрии могут меняться на плоскости S так же, как чётно симметричное поле T , а компоненты M_n при четной симметрии и M_τ при нечетной симметрии – аналогично нечётно симметричному полю T .

Цилиндрическая симметрия – симметрия относительно оси. Прямая l называется осью четной или нечетной цилиндрической симметрии поля, если любая плоскость S , проходящая через прямую l , является плоскостью соответственно четной или нечетной симметрии.

У имеющего цилиндрическую симметрию скалярного поля T значения T одинаковы в пределах любой окружности с осью l . Поле T в этом случае чётно симметрично относительно любой плоскости проходящей через l . Определению нечетной цилиндрической симметрии скалярного поля формально удовлетворяет только поле T , всюду равное нулю.

Примеры цилиндрически-симметричных векторных полей представлены на рис. 2,е,ж. Векторы \vec{M} на этих рисунках изображены в нескольких точках окружностей с осью по оси симметрии l . При четной цилиндрической симметрии (рис. 2,е) векторы \vec{M} ориентированы по нормали к таким окружностям, при нечетной цилиндрической симметрии (рис. 2,ж) – направлены по касательной к окружностям.

Сферическая симметрия – симметрия относительно точки (центра симметрии). Точка O называется центром симметрии, если любая проходящая через точку O плоскость является плоскостью зеркальной симметрии. Определению нечетной сферической симметрии формально удовлетворяют лишь поля: $T = 0, \vec{M} = 0$. Поэтому обычно, говоря о сферически симметричных полях T, \vec{M} , подразумевают их четную симметрию относительно любой плоскости, проходящей через центр симметрии O .

Значения сферически симметричного скалярного поля T одинаковы во всех точках произвольно выбранной сферической поверхности S с центром в центре симметрии O . При сферической симметрии векторного поля векторы \vec{M} нормальны к такой поверхности S , одинаковы по абсолютной величине в пределах поверхности S и направлены либо наружу относи-

тельно области V , ограниченной поверхностью S , либо в область V (рис. 2,3).

Определение симметричных полей в системах координат. Выбор системы координат при расчетах поля проводится с учетом симметрии поля. Оптимальный выбор системы координат позволяет добиться того, что некоторые компоненты поля \vec{M} равны нулю, а поле T или ненулевые компоненты поля \vec{M} зависят не от трех, а от двух или от одной координаты. Это обстоятельство и делает возможным получение аналитических выражений для поля или упрощает численный расчет поля.

Охарактеризуем некоторые особенности цилиндрически-симметричных полей в совмещенной системе координат с осью Z , совпадающей с осью симметрии, и сферически-симметричных полей в сферических координатах с началом в точке O , совпадающей с центром симметрии.

1. Цилиндрически-симметричное скалярное поле T в совмещенной $(r, \varphi, z$ и $R, \theta, \varphi)$ системе координат не зависит от координаты φ :

$$\partial T / \partial \varphi = 0, \text{ то есть } T = T(r, z) \text{ или } T = T(R, \theta). \quad (17)$$

На оси Z цилиндрических координат (или на полярной оси сферических координат) поле T непрерывно или принимает бесконечно большое значение.

2. При четной цилиндрической симметрии поля \vec{M} составляющая $M_\varphi = 0$, а компоненты M_r и M_z или M_R и M_θ не зависят от координаты φ :

$$\vec{M} = \vec{1}_r M_r + \vec{1}_z M_z, \quad M_r = M_r(r, z), \quad M_z = M_z(r, z)$$

или

$$\vec{M} = \vec{1}_R M_R + \vec{1}_\theta M_\theta, \quad M_R = M_R(R, \theta), \quad M_\theta = M_\theta(R, \theta). \quad (17')$$

На оси симметрии компонента M_z непрерывна или принимает неограниченные значения, а компонента M_r равна нулю, либо поле \vec{M} терпит разрыв на этой оси.

3. При нечетной цилиндрической симметрии поля \vec{M} все его компоненты, кроме M_φ , равны нулю, а производная $\partial M_\varphi / \partial \varphi = 0$:

$$\vec{M} = \vec{1}_\varphi M_\varphi(r, z) \text{ или } \vec{M} = \vec{1}_\varphi M_\varphi(R, \theta).$$

4. Сферически-симметричное поле T в сферических координатах зависит только от координаты R , то есть $\partial T / \partial \theta = \partial T / \partial \varphi = 0$;

$$T = T(R). \quad (18)$$

В начале координат O поле T непрерывно или обращается в бесконечность.

5. У сферически симметричного векторного поля \vec{M} :

$$M_\theta = M_\varphi = 0, \quad \frac{\partial M_R}{\partial \theta} = \frac{\partial M_R}{\partial \varphi} = 0, \text{ то есть}$$

$$\vec{M} = \vec{1}_R M_R(R). \quad (18')$$

В начале координат O поле $\vec{M} = 0$ или терпит разрыв.

1.7. ЗАДАНИЯ

1. Получить формулы для площадей координатных площадок dS_i в цилиндрических и сферических координатах. (В декартовых координатах: $dS_x = dydz$, $dS_y = dzdx$, $dS_z = dxdy$).
2. Получить формулы для координатных элементов объема dV в цилиндрических и сферических координатах. (В декартовых координатах $dV = dxdydz$).
3. Получить из формул (11), (13) выражения (12), (14).
4. Записать выражения (12), (14), (15) в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.
5. Получить выражения для компонент M_x , M_y , M_z поля \vec{M} в совмещенной системе координат $(x, y, z; r, \varphi, z; R, \theta, \varphi)$, если поле \vec{M} задано в виде:

а. $\vec{M} = \vec{1}_R M_R(R)$;

б. $\vec{M} = \vec{1}_r M_r + \vec{1}_z M_z$, $M_r = M_r(r, z)$, $M_z = M_z(r, z)$;

в. $\vec{M} = \vec{1}_\varphi M_\varphi(r, z)$.

6. Найти пространственные производные $\text{grad}T$ и $\nabla^2 T$ скалярного поля T (в соответствующих системах координат).

а). $T = 1/R$, $R > 0$;

б). $T = \cos\theta/R^2$, $R > 0$;

в). $T = |z|$, $z > 0$;

г). $T = \ln(r^{-1})$, $r > 0$;

д). $T = \cos\varphi/r$, $r > 0$;

е). $T = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$;

ж). $T = z^2$;

з). $T = R^2$;

и). $T = C_1 x + C_2 y + C_3 z$, где C_1, C_2, C_3 - константы.

7. Определить производные $\text{div}\vec{M}$ и $\text{rot}\vec{M}$, поля \vec{M} , заданного выражениями в системах координат.

а). $\vec{M} = \vec{1}_R M_R$, $M_R = R^{-2}$, $R > 0$;

б). $\vec{M} = \vec{1}_R M_R$, $M_R = R$;

в). $\vec{M} = \vec{1}_z M_z$, $M_z = z/|z|$, $z \neq 0$;

г). $\vec{M} = \vec{1}_\varphi M_\varphi$, $M_\varphi = r^{-1}$, $r > 0$;

д). $\vec{M} = \vec{1}_\varphi M_\varphi$, $M_\varphi = r$;

е). $\vec{M} = \vec{1}_z M_z$, $M_z = (r^2 + z^2)^{-1/2}$;

ж). $\vec{M} = \vec{1}_\varphi M_\varphi$, $M_\varphi = \sin\theta/R^2$;

з). $\vec{M} = \vec{1}_R M_R$, $M_R = R^3$.

Какие из этих полей \vec{M} – потенциальные ($\text{rot}\vec{M} \equiv 0$ и $\text{div}\vec{M} \neq 0$), какие – чисто вихревые (соленоидальные) ($\text{rot}\vec{M} \neq 0$ и $\text{div}\vec{M} \equiv 0$), а какие – «лапласовы» ($\text{rot}\vec{M} \equiv 0$ и $\text{div}\vec{M} \equiv 0$)?

8. Определить вид симметрии полей T , \vec{M} , заданных аналитическими выражениями в п.п. 6, 7.

2. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Статическим полем в вакууме называют не меняющееся со временем (постоянное) поле, создаваемое: гравитационными массами, электрическими зарядами в отсутствии проводников или диэлектриков, либо физически фиктивными магнитными массами (магнитными полюсами) в отсутствии магнетиков. Теория электростатического и магнитостатического полей в вакууме является основой для изучения этих полей в присутствии проводников, диэлектриков, магнетиков. Далее, говоря "массы" будем подразумевать, что это либо гравитационные массы, либо электрические заряды, либо (физически фиктивные) магнитные массы. В этом разделе приведены примеры расчета статического поля, создаваемого заданными массами.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Объемные и точечные массы. Применяя "макроскопический" подход, будем отвлекаться от атомарно-молекулярного строения вещества и полагать, что физически реальной является объемная масса m_V , заполняющую область пространства V . Характеристикой такой массы является объемная плотность

$$\delta(q) = \frac{dm}{dV},$$

где dm – (элементарная) масса в бесконечно малом элементе объема dV с центром в точке q . Плотность $\delta(q)$ – скалярное поле. Объемную массу m_V в области V определяют выражения:

$$m_V = \int_V \delta dV, \quad m_V = \delta \cdot V.$$

Второе из этих выражений справедливо в случае, если масса m_V в области пространства V однородна ($\delta = \text{const}$) и V – объем этой области.

Наряду с объемными массами будем рассматривать массы *необъемные*, в частности точечные массы. Заменяя реальную объемную массу необъемной массой, получаем возможность не рассматривать те характеристики объемной массы, которые в данном случае не существенны. При расстоянии от массы m , много большем ее размеров, сила \vec{F} , с которой эта масса будет взаимодействовать с другими массами (см. ниже), определяется положением центра тяжести O массы m и величиной m . В связи с тем, что при указанном условии такие характеристики массы, как ее форма, размеры и плотность δ не оказывают влияния на силу \vec{F} , можем (при расчете \vec{F}) заменить эту массу точечной массой m , расположенной в точке O . Объем точечной массы $V \rightarrow 0$, а ее плотность $\delta \rightarrow \infty$.

Закон Кулона–Ньютона. Напряженность поля. Согласно закону Кулона–Ньютона, если m_1, m_2 – точечные массы, находящиеся в точках "1" и "2" соответственно, то силу \vec{F}_{12} , действующую со стороны массы m_1 на массу m_2 , определяет выражение:

$$\vec{F}_{12} = v \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{\vec{L}_{12}}{L_{12}^3}, \quad (19)$$

где \vec{L}_{12} – радиус-вектор, направленный из точки "1" в точку "2"; L_{12} – модуль этого вектора (равный расстоянию между точками "1" и "2"), v – коэффициент, зависящий от физической природы масс и применяемой системы физических единиц.

Коэффициент v имеет следующие значения: $v = -\gamma$ если m_1, m_2 – гравитационные массы; $v = 1/(4\pi\epsilon_0)$, если m_1, m_2 – электрические заряды. Единица (физически фиктивной) "магнитной массы" в СИ не определена. Но если ввести понятие "магнитной массы", следуя [1] (стр.80), то для таких масс в выражении (19) надо положить $v = \mu_0/(4\pi)$. Здесь γ, ϵ_0 и μ_0 – соответственно гравитационная, электрическая и магнитная постоянные:

$$\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}, \quad \epsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Напряженностью гравитационного ($\vec{\Gamma}$) или электрического (\vec{E}) поля, создаваемого массой m_1 в точке "2", называется отношение $\vec{F}_{12}/m_2 = v\vec{f}$, где

$$\vec{f}_{12} = m_1 \frac{\vec{L}_{12}}{L_{12}^3}. \quad (20)$$

Напряженность магнитного поля $\vec{H} = v\vec{f}/\mu_0$. Таким образом, напряженности гравитационного, электростатического и магнитостатического полей пропорциональны полю \vec{f} , которое в точке (наблюдения) "2" определяет выражение (20), если поле создает точечная масса m_1 , расположенная в точке "1". Далее в этом разделе будем рассматривать поле \vec{f} и называть \vec{f} «напряженностью статического поля». Для перехода от поля \vec{f} к напряженностям конкретных по физической природе полей (гравитационного, электрического или магнитного) надо умножить вектор \vec{f} на соответствующий коэффициент:

$$\vec{\Gamma} = -\gamma \cdot \vec{f}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{f}, \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \vec{f}. \quad (19')$$

Так как для гравитационного поля этот коэффициент ($-\gamma$) отрицателен, то вектор $\vec{\Gamma}$ антипараллелен вектору \vec{f} . Это обусловлено тем, что гравитационные массы притягиваются, а имеющие одинаковый знак электрические заряды (либо одноименные магнитные полюса) отталкиваются.

Если поле $\vec{\mathbf{f}}$ создает масса m , находящейся в точке q , а точка наблюдения – a , то формулу (20) можно представить в следующем виде:

$$\vec{\mathbf{f}}(a) = m \frac{\vec{\mathbf{L}}_{qa}}{L_{qa}^3}. \quad (20')$$

Согласно (1), (20'), компоненту вектора $\vec{\mathbf{f}}$ по направлению k определяет выражение:

$$f_k(a) = |m| \cos(\vec{\mathbf{f}}, k) / L_{qa}^2.$$

Так как при $m > 0$ векторы $\vec{\mathbf{L}}_{qa}$, и $\vec{\mathbf{f}}$ направлены одинаково, а при $m < 0$ эти векторы – антипараллельны, то $\cos(\vec{\mathbf{f}}, k) = \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, k) \frac{m}{|m|}$. Тогда

$$f_k(a) = m \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, k) / L_{qa}^2 \text{ или}$$

$$f_k(a) = m \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{1}}_k) / L_{qa}^2 \quad (21)$$

где $\vec{\mathbf{1}}_k$ – единичный вектор по направлению k .

Точечная масса конечна по величине и занимает бесконечно малый объем. Поле $\vec{\mathbf{d}}\mathbf{f}(a)$, создаваемое в точке наблюдения a элементарной массой dm , бесконечно малой по величине и занимаемому ею объему (и расположенной в точке q), и скалярную компоненту $df_k(a)$ этого поля определяет формулы, аналогичные выражениям (20'), (21):

$$\vec{\mathbf{d}}\mathbf{f}(a) = dm \frac{\vec{\mathbf{L}}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_k(a) = dm \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{1}}_k) / L_{qa}^2 \quad (22)$$

Принцип суперпозиции. Закон Кулона–Ньютона и следующие из него выражения (20)–(22) справедливы для точечных или элементарных масс. Этот закон принимает более общий вид на основе принципа суперпозиции, согласно которому сила, действующая со стороны заданной совокупности масс на данную (например, пробную точечную) массу m_a , равна векторной сумме сил, действующих со стороны каждой массы этой совокупности на массу m_a . Это позволяет определять поле $\vec{\mathbf{f}}$ совокупности масс суммированием полей элементарных и точечных масс.

Уравнения поля. Уравнения поля (а также некоторые физические законы) могут быть записаны в дифференциальной или в интегральной форме. Входящие в уравнение, записанное в дифференциальной форме, величины относятся к окрестности одной точки пространства. При интегральной форме записи уравнения входящие в него величины относятся к разным точкам пространства.

Система уравнений статического поля $\vec{\mathbf{f}}$ является следствием законов сохранения энергии и Кулона–Ньютона. В дифференциальной форме система уравнений поля $\vec{\mathbf{f}}$:

$$\text{I. } \text{rot} \vec{\mathbf{f}} = 0, \quad (23)$$

$$\text{II. } \operatorname{div} \vec{\mathbf{f}} = 4\pi \cdot \delta, \quad (24)$$

а в интегральной форме:

$$\text{I'. } \oint_l (\vec{\mathbf{f}} \overline{d\mathbf{l}}) = 0, \quad (23')$$

$$\text{II'. } \oint_{S[V]} (\vec{\mathbf{f}} \overline{d\mathbf{S}}) = 4\pi \cdot m_V, \quad (24')$$

Здесь $\delta = dm/dV$ – объемная плотность масс; $S[V]$ – замкнутая поверхность, ограничивавшая область V ; m_V – масса в области V . Равенство (24') называют уравнением или законом Гаусса.

Согласно (23), (24), поле $\vec{\mathbf{f}}$ – потенциальное, векторные линии l_f поля $\vec{\mathbf{f}}$ не замкнутые. Они начинаются там, где $\delta > 0$, а оканчиваются в тех местах, в которых плотность масс $\delta < 0$, то есть источники поля $\vec{\mathbf{f}}$ – массы. Там, где масс нет ($\delta=0$), $\operatorname{div} \vec{\mathbf{f}} = 0$.

Потенциал U поля $\vec{\mathbf{f}}$. Уравнения поля (23), (23'), определяющие его безвихревой (потенциальный) характер, позволяют ввести для поля $\vec{\mathbf{f}}$ потенциал U :

$$\vec{\mathbf{f}} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U. \quad (25)$$

При этом, согласно (16), уравнение (23) обращается в тождество. Из (25) следует, что вектор $\vec{\mathbf{f}}$ всюду направлен в сторону наиболее резкого уменьшения (падения) потенциала U .

В соответствии с (8), (25) скалярную компоненту f_i напряженности поля $\vec{\mathbf{f}}$ по координатному направлению l_i определяет выражение:

$$f_i = -\frac{\partial U}{\partial l_i} = -\frac{1}{h_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}. \quad (26)$$

Заменяя в уравнении (24) $\vec{\mathbf{f}}$ на $(-\operatorname{grad} U)$ и учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U$, получаем для потенциала уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 U = -4\pi\delta. \quad (27)$$

Вне масс-источников статического поля $\vec{\mathbf{f}}$, то есть там, где $\delta=0$, потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0. \quad (28)$$

Решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями; следовательно, в тех областях пространства, где нет источников статического поля (масс), потенциал U – гармоническая функция.

Можно показать ([1], стр. 94), что, согласно (25), разность потенциалов U в точках “1” и “2” равна напряжению e_{12} поля $\vec{\mathbf{f}}$ между этими точками. То есть в соответствии с (6)

$$U_1 - U_2 = e_{12} = \int_1^2 (\vec{\mathbf{f}} \overline{d\mathbf{l}}). \quad (28')$$

Напряженностью поля \vec{f} потенциал U определяется с точностью до постоянного слагаемого C , так как $\text{grad}(U+C)=\text{grad}U$. Для однозначного определения потенциала U по полю \vec{f} требуется задать (определить) значение потенциала $U(\phi)$ в некоторой фиксированной точке ϕ . Тогда потенциал $U(a)$ в произвольной точке a в соответствии с (28') можно определить по формуле:

$$U(a) = \int_a^\phi (\vec{f} \vec{d}\vec{l}) + U(\phi). \quad (29)$$

Согласно (6), (29) потенциал U в точке a равен сумме напряжения $\mathcal{E}_{a\phi}$ поля \vec{f} на пути $l_{a\phi}$ (от точки a до точки ϕ) и потенциала $U(\phi)$ в точке ϕ .

Напряжение потенциального поля \vec{f} не зависит от формы пути $l_{a\phi}$, а полностью определяется полем \vec{f} и положением точек a и ϕ . Часто точку ϕ выбирают на бесконечности и полагают потенциал в этой точке равным нулю ($U(\infty)=0$). Однако, как будет показано ниже (см., например, задачу 8), выбор нулевого потенциала на бесконечности не всегда возможен.

Можно доказать, что для потенциалов U и dU соответственно полей \vec{f} точечной массы m и $d\vec{f}$ элементарной массы dm , определяемых равенствами (20'), (22), справедливы следующие выражения:

$$U(a) = m/L_{qa} + C, \quad dU(a) = dm/L_{qa} + C, \quad (30)$$

где $C = \text{const}$.

В соответствии с принципом суперпозиции потенциал поля совокупности точечных и элементарных масс можно определить, суммируя величины U и dU , определяемые выражениями (30). Если выбрать нулевое значение потенциала $U(a)$ на бесконечно - большом расстоянии L_{qa} от точки a до точки q (то есть $U(a)=0$ при $L_{qa} \rightarrow \infty$), то в (30) слагаемое $C=0$.

Отметим, что если поле $\delta(q)$ плотности масс-источников поля $\vec{f}(a)$ - симметрично, то симметричными являются и поле $\vec{f}(a)$, а также - его потенциал $U(a)$. При этом поля $\vec{f}(a)$, $U(a)$ имеют симметрию того же вида, что и поле $\delta(q)$.

2.2. ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ МАСС И ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Поле одной точечной массы

Задача 1. Определить поле \vec{f} точечной массы, помещенной в начало O : А) сферической, Б) цилиндрической системы координат.

Решение. Так как точечная масса m находится в начале координат O , то $L_{qa} = L_{Oa}$.

А). Из выражения (21) для компоненты поля \vec{f} точечной массы получаем:

$$f_R = \frac{m}{L_{qa}^2} \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{1}}_R) = \frac{m}{R^2}$$

так как $L_{qa}=R$, а угол $(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{1}}_R) = 0$. Из (21) следует, что две другие компоненты поля $\vec{\mathbf{f}}$ в сферических координатах равны нулю ($f_\theta=f_\varphi=0$), так как углы $(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{1}}_\theta)$ и $(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{1}}_\varphi)$ равны $\pi/2$. Таким образом,

$$\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{1}}_R f_R, \quad f_R = \frac{m}{R^2} \quad \text{или} \quad \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{1}}_R \cdot R \frac{m}{R^2}. \quad (31)$$

Простота выражения (31) для поля $\vec{\mathbf{f}}$ точечной m массы (находящейся в точке O) обусловлена тем, что это поле сферически симметричное и центр его симметрии совпадает с началом O сферических координат. Тогда, согласно (18), $\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{1}}_R f_R(R)$.

При $m > 0$ имеем $f_R > 0$, т.е. векторные линии l_f поля $\vec{\mathbf{f}}$ расходятся из начала координат O (в которое помещена точечная масса m). При $m < 0$ компонента $f_R < 0$, т.е. векторные линии l_f поля $\vec{\mathbf{f}}$ сходятся в точку O .

Б). Из выражения (21) получаем для компонент поля $\vec{\mathbf{f}}$ точечной массы, помещенной в начало O цилиндрической системы координат (рис. 3,а):

$$f_r = \frac{m}{L^2} \cos(\vec{\mathbf{L}}, \vec{\mathbf{1}}_r) = \frac{m}{L^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{m}{L^2} \sin \alpha, \quad f_\varphi = \frac{m}{L^2} \cos(\vec{\mathbf{L}}, \vec{\mathbf{1}}_\varphi) = 0,$$

$$f_z = \frac{m}{L^2} \cos(\vec{\mathbf{L}}, \vec{\mathbf{1}}_z) = \frac{m}{L^2} \cos \alpha,$$

где $L=L_{qa}=L_{Oa}$, $\alpha = \angle(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{1}}_z)$. Принимая во внимание, что $\sin \alpha = r/L$, $\cos \alpha = z/L$, $L = (r^2 + z^2)^{1/2}$, получаем:

$$\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{1}}_r f_r + \vec{\mathbf{1}}_z f_z, \quad f_r = \frac{mr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad f_z = \frac{mz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (32)$$

На рис. 3,б,в сплошными линиями показаны зависимости определяемых выражениями (32) компонент f_z и f_r от координаты z при $m > 0$ и $r=r_0 > 0$. Пусть точка наблюдения a перемещается по горизонтальной прямой (по профилю), параллельной оси Z и проходящей на расстоянии r_0 над точечной массой $m > 0$. Полагая, что начало координат O находится в точечной массе m , а ось Z параллельна профилю, можем считать, что графики $f_r(z)$ и $f_z(z)$ отражают зависимость вертикальной компоненты f_r и горизонтальной (по направлению профиля) компоненты f_z поля $\vec{\mathbf{f}}$ точечной массы m .

На рис. 3,б,в видно, что если $m > 0$, то при любом положении точки a имеем: $f_r > 0$. При $z > 0$ компонента $f_z > 0$, так как угол между направлением вектора $\vec{\mathbf{f}}$ и координатным направлением l_z (орта $\vec{\mathbf{1}}_z$) – острый. При $z < 0$ компонента $f_z < 0$, так как $\angle(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{1}}_z) > \pi/2$, а при $z=0$ компонента $f_z=0$, так как $\angle(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{1}}_z) = \pi/2$ (см. рис. 3.а). Если $|z| \rightarrow \infty$, то $f_r \rightarrow 0$, $f_z \rightarrow 0$.

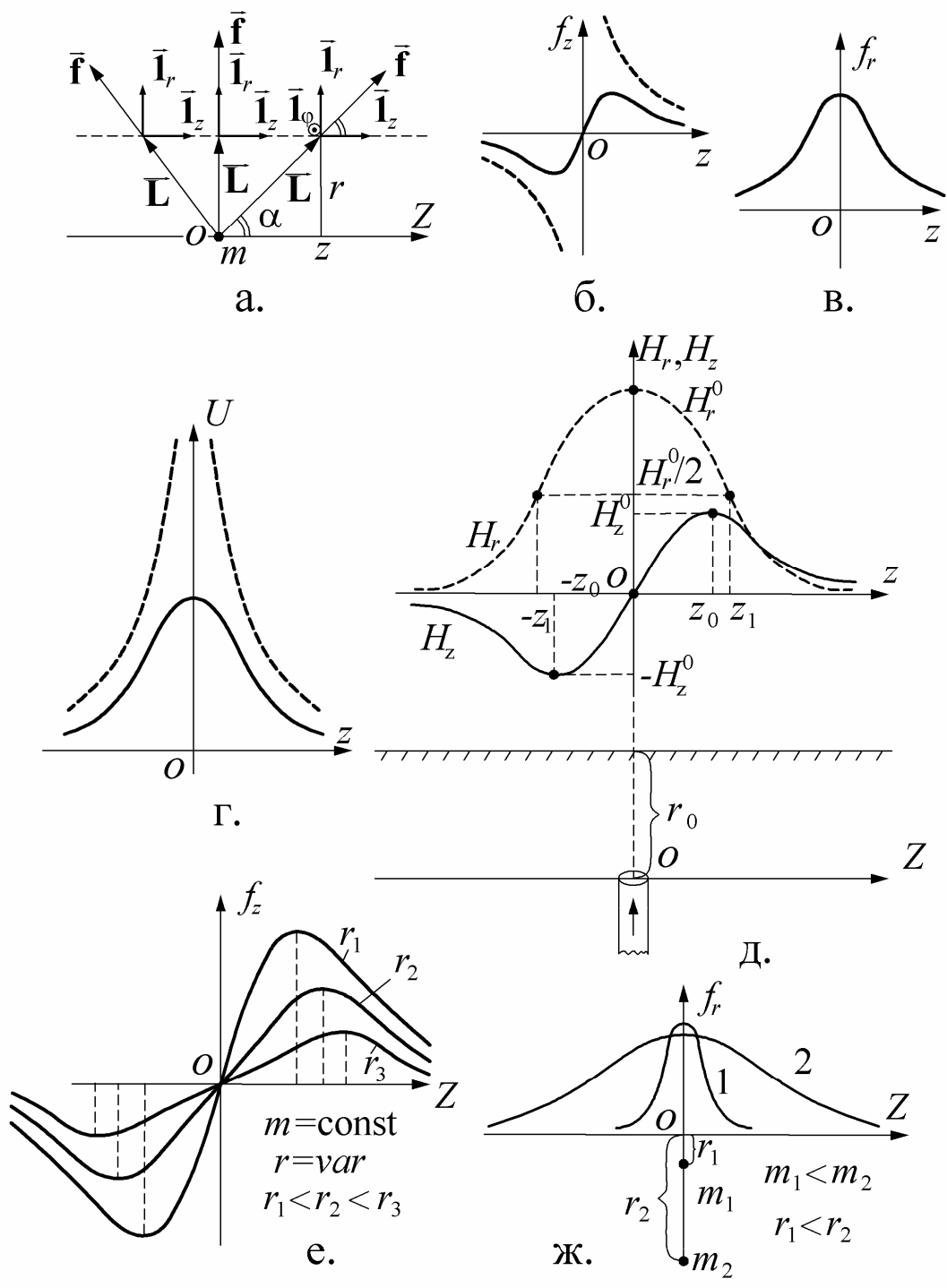


Рис.3. Поле точечной массы.

Штриховой линией на рис. 3,б показана зависимость $f_z(z)$ для случая, когда точка наблюдения a перемещается по оси Z ($r=0$), проходящей через точечную массу m . На рисунке видно, что при $|z| \rightarrow 0$ ($L_{qa} \rightarrow 0$) имеем $f \rightarrow \infty$.

Задача 2. Определить потенциал U поля \vec{f} точечной массы m , помещенной в начало цилиндрической системы координат (рис. 3,а), на основе равенства (30). Перейти к компонентам поля \vec{f} , пользуясь формулой (26).

Решение. Если положим $U=0$ при $L_{qa} \rightarrow \infty$, то, как следует из выражения (30),

$$U = m/L_{qa}. \text{ Тогда } U = m(r^2 + z^2)^{-1/2}, f_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0,$$

$$f_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = mr(r^2 + z^2)^{-3/2}, f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = mz(r^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Таким образом, для компонент поля получены те же формулы, что и при решении этой задачи другим способом (задача 1,Б). Это подтверждает справедливость выражения (30) для потенциала поля точечной массы. Отметим также, что равенство нулю компоненты f_φ поля \vec{f} формально следует из того, что потенциал U не зависит от координаты φ . Для случая $m>0$ графики $U(z)$ при $r=r_0 >0$ (сплошная линия) и при $r=0$ (штриховая линия) приведены на рис. 3,г. При $|z| \rightarrow \infty$ потенциал $U \rightarrow 0$, а при $r \rightarrow 0$ и $|z| \rightarrow 0$ потенциал $U \rightarrow \infty$ как $m/L_{qa} = m(r^2 + z^2)^{-1/2}$.

Задача 3. Решить обратную задачу. Определить расстояние от горизонтального прямолинейного профиля, проходящего над точечной массой m , до этой массы, а также величину m , полагая, что на этом профиле известны значения: А) проекции вектора напряженности статического поля \vec{f} на направление профиля, Б) вертикальной компоненты \vec{f} .

Поставим эту задачу более конкретно на примере магнитоэстатического поля $\vec{H} = \vec{f}/4\pi$. Пусть в земле имеется намагниченный объект (тело), в виде вертикального цилиндра, поперечные размеры которого много меньше расстояния r_0 , от его верхней кромки до поверхности земли. Расстояние от поверхности земли до нижней кромки этого объекта много больше r_0 . Тело намагничено по вертикали. При этом можно полагать, что источником поля \vec{H} является точечная масса m (точечный магнитный полюс), находящаяся на глубине r_0 от горизонтальной линии наблюдений на поверхности земли, проходящей над массой m . Требуется определить глубину r_0 от линии наблюдений до верхней кромки намагниченного тела и величину m , полагая, что на этой линии известны (получены в результате измерений) значения: А) горизонтальной (вдоль направления профиля) компоненты магнитного поля \vec{H} ; Б) вертикальной компоненты поля \vec{H} .

Решение. Будем полагать, что начало цилиндрической системы координат совмещено с массой m , а ось Z направлена параллельно профилю (см. рис. 3,д). Тогда в случаях А), Б) можем полагать заданными величины H_z и H_r соответственно. Если справедливо допущение, что источник поля

И можно аппроксимировать точечным магнитным полюсом, то, согласно (32), (19'), имеем:

$$H_z = mz(r_0^2 + z^2)^{-3/2} / 4\pi, \quad H_r = mr_0(r_0^2 + z^2)^{-3/2} / 4\pi. \quad (32')$$

На основе выражений (32') попробуем выразить искомые величины r_0 и m через абсциссы и ординаты характерных точек графиков функций $H_z(z)$, $H_r(z)$.

А). Функция $H_z(z)$ – нечетная (см. рис. 3,д, сплошная линия). Характерными точками на графике $H_z(z)$ являются максимум и минимум. Обозначим абсциссы и ординаты этих экстремумов соответственно $\pm z_0$ и $\pm H_z^0$. При $z = \pm z_0$ производная $\partial H_z / \partial z = 0$. Согласно (32'),

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = m(r_0^2 - 2z^2) \cdot (r_0^2 + z^2)^{-5/2} / 4\pi,$$

откуда следует, что при $r_0^2 = 2z_0^2$, т. е. при

$$r_0 = z_0 \sqrt{2} = \frac{(2z_0)}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot (2z_0),$$

где $2z_0$ – расстояние между экстремумами – “ширина аномалии”. Таким образом, между расстоянием $2z_0$ от минимума до максимума на графике $H_z(z)$ и расстоянием r_0 от профиля до точечной массы существует прямая пропорциональная зависимость.

При $z=z_0$ компонента $H_z = H_z^0$ (рис. 3,д). Тогда, согласно (32') и полученному выше выражению для r_0 ,

$$H_z^0 = mz_0(r_0^2 + z_0^2)^{-3/2} / 4\pi = 3^{-3/2} \cdot m / (4\pi z_0^2), \text{ откуда следует, что}$$

$$m = 4\pi \cdot 3^{3/2} \cdot z_0^2 \cdot H_z^0 \approx 4\pi \cdot 5.2 \cdot z_0^2 \cdot H_z^0.$$

Итак, для того, чтобы найти глубину r_0 достаточно знать расстояние $2z_0$ – «ширину аномалии». Для определения m требуются данные, как о ширине ($2z_0$), так и об амплитуде (H_z^0) аномального поля.

Б). При любых значениях m и r_0 функция $H_r(z)$ имеет максимум, когда координата $z=0$. То есть абсцисса максимума функции $H_r(z)$ в данном случае не связана с глубиной до точечной массы, а показывает проекцию точечной массы на профиль наблюдения (рис. 3,д). Обозначим максимальное значение $H_r(0) = H_r^0$. Согласно (32'), $H_r^0 = m / (4\pi r_0^2)$, откуда

$$m = 4\pi r_0^2 H_r^0. \quad (33)$$

Обозначим $\pm z_1$ те значения аргумента z , при которых $H_r(z) = H_r^0 / 2$. Расстояние ($2z_1$) можем назвать шириной аномалии H_r на уровне половины максимума (половины амплитуды аномалии) (рис. 3,д). Напомним, что значения z_1 и H_r^0 можно полагать известными при решении обратной задачи. Из выражения (32') для H_r следует, что

$$H_r^0 / 2 = mr_0(r_0^2 + z_1^2)^{-3/2} / 4\pi. \quad (34)$$

Не сложно получить решение системы уравнений (33), (34) для r и m :

$$r_0 = z_1 / \sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0.652 \cdot (2z_1), \quad m = 4\pi \cdot H_r^0 \cdot z_1^2 / (2^{2/3} - 1) \approx 4\pi \cdot 1.7 \cdot H_r^0 \cdot z_1^2.$$

Таким образом, для компоненты H_r (как и для компоненты H_z) ширина аномалии пропорциональна глубине r_0 до точечной массы m . Глубина r_0 может быть определена по абсциссам, а масса m – по абсциссам и ординатам характерных точек на графике $H_r(z)$.

Выводы о связи абсцисс и ординат характерных точек на графиках компонент поля \vec{H} с параметрами источника поля в виде точечной массы, разумеется, справедливы и для статических полей $\vec{f} = 4\pi\vec{H}$, $\vec{E} = \vec{f}/4\pi\epsilon_0$, $\vec{G} = -\gamma\vec{f}$. В частности, ширина аномалии ($2z_0$) на графике $f_z(z)$ пропорциональна глубине r_0 точечной массы (рис. 3.е). Компонента f_r поля \vec{f} тем медленнее убывает с увеличением $|z|$, чем больше значение r_0 . Если, например, в одном случае поле создает масса m_1 , расположенная на глубине r_1 , а в другом – масса m_2 , находящаяся на глубине r_2 , то при $m_1 < m_2$ и $r_1 < r_2$, максимальные значения функции f_r в обоих случаях могут быть близки по величине, но компонента f_r поля массы m_2 медленнее убывает с увеличением $|z|$, чем та же компонента поля массы m_1 (рис. 3,ж).

Поле двух точечных масс

В соответствии с (20) и принципом суперпозиции поле двух точечных масс m_1, m_2 в точке наблюдения a (рис.4,а) определяет выражение:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m_1 \frac{\vec{L}_1}{L_1^3} + m_2 \frac{\vec{L}_2}{L_2^3}.$$

Если потенциалы полей \vec{f}_1 и \vec{f}_2 , создаваемых массами m_1 и m_2 , обозначим U_1 и U_2 и положим $U_1=0$ при $L_1 \rightarrow \infty$ и $U_2=0$ при $L_2 \rightarrow \infty$, то, согласно (30),

$$U = U_1 + U_2 = \frac{m_1}{L_1} + \frac{m_2}{L_2}. \quad (35)$$

Задача 4. Определить потенциал U поля \vec{f} двух точечных масс m_1, m_2 , расположенных на оси Z цилиндрических координат с началом O и имеющих соответственно координаты $z_1 = -l/2, z_2 = l/2$, для двух случаев: а) $m_1 = m_2 = m > 0$, б) $m_2 = -m_1 = m > 0$ (рис. 4,б).

Решение. Из формулы (35) получаем:

$$\text{а) } U = m \left\{ \left[r^2 + (z + l/2)^2 \right]^{-1/2} + \left[r^2 + (z - l/2)^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad (36)$$

$$\text{б) } U = m \left\{ \left[r^2 + (z - l/2)^2 \right]^{-1/2} - \left[r^2 + (z + l/2)^2 \right]^{-1/2} \right\}. \quad (37)$$

Графики $U(z)$ (при $m_1 = m_2 = m > 0$), построенные на основе выражения (36), приведены на рис. 4,г,е. В первом случае (рис. 4, г) координата $r=0$, то есть точка наблюдения перемещается по оси Z (профиль наблюдения проходит через точечные массы); во втором случае (рис. 4,е) $r \neq 0$, то

есть точка наблюдения перемещается вдоль прямой, параллельной оси Z , и проходит на некотором расстоянии $r \neq 0$ от точечных масс.

Графики на рис. 4,д,ж показывают зависимость (37) потенциала U поля \vec{f} (при $m_2 = -m_1 = m > 0$) от координаты z при $r=0$ и $r \neq 0$ соответственно. В плоскости $z=0$, точки которой равноудалены от масс m и $-m$, потенциал $U=0$, эта плоскость – эквипотенциальна.

На рис. 4,з,и применен другой способ графического изображения рассматриваемых полей при помощи векторных линий l_f поля \vec{f} (сплошные линии) и эквипотенциальных линий $U=\text{const}$ (штриховые линии) в плоскости, проходящей через массы m_1 и m_2 . Эквипотенциальные линии на рис. 4,з,и являются сечениями эквипотенциальных поверхностей $U=\text{const}$ плоскостью, проходящей через массы m_1, m_2 . Семейства векторных и эквипотенциальных линий на рис. 4,з,и – взаимно ортогональны. Отметим, что графики $U(z)$ на рис. 4,г,д,е,ж можно рассматривать, как профили поверхностей, изображенных на рис.4,з,и в виде карт изолиний "высот" этих поверхностей.

На рис. 4,з все векторные линии, начинающиеся на массах $m > 0$, продолжают до бесконечности. На большом удалении от точечных масс форма эквипотенциальных линий приближается к окружностям, а форма эквипотенциальных поверхностей – к сферам, центр которых расположен в центре тяжести масс O . На рис. 4,и векторные линии, выходящие из массы m , заканчиваются в точке, где расположена масса $-m$.

Векторные и эквипотенциальные линии поля одной точечной массы $m > 0$ в проходящей через нее плоскости изображены на рис.4,в.

Поле диполя

Диполем называется совокупность двух точечных масс: $m > 0$ и $-m$, имеющих противоположный знак и одинаковых по абсолютной величине, расстояние l между которыми много меньше, чем расстояния от этих масс до точки наблюдения a . Диполь характеризует его момент $\vec{p} = \vec{l}_l \cdot ml$, где $\vec{l}_l = \vec{l} / l$ – единичный вектор по направлению вектора \vec{l} , а \vec{l} – радиус-вектор с началом в массе $-m$ и концом в массе m . Модуль момента диполя $p = ml$, где $l = |\vec{l}|$.

Задача 5. Определить потенциал U поля \vec{f} диполя, центр которого помещен в начало O совмещенной $(r, \varphi, z$ и $R, \theta, \varphi)$ системы координат, а момент $\vec{p} = \vec{l}_z \cdot ml$ направлен вдоль оси Z , т.е. массы $-m$ и m расположены в точках оси Z с координатами: $z = -l/2$ и $z = l/2$ соответственно (рис. 5,а). В соответствии с приведенным выше определением, расстояние от центра диполя до точки наблюдения $R = \sqrt{r^2 + z^2} \gg l$.

Решение. Получим сначала выражение для потенциала U поля \vec{f} диполя в системе координат R, θ, φ . При $R \gg l$ можем полагать, что отрезки

L_1, L_2 (практически) параллельны отрезку L_{Oa} , а также пренебречь кривизной показанной на рис. 5,а штриховой линией дуги окружности с радиусом R и с центром в точке наблюдения a . Тогда из (35) получаем:

$$U \approx \frac{m}{R - (l/2)\cos\theta} - \frac{m}{R + (l/2)\cos\theta} = \frac{m}{R} \cdot \frac{1 + \alpha - 1 + \alpha}{1 - \alpha^2}, \text{ где } \alpha = \frac{l \cos\theta}{2R}.$$

При $R \gg l$ имеем $\alpha^2 \ll 1$, следовательно

$$U \approx \frac{m}{R} 2\alpha = \frac{ml \cos\theta}{R^2} = \frac{p \cos\theta}{R^2} = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{1}_R)}{R^2}. \quad (38)$$

Таким образом, потенциал U поля \vec{f} диполя (и, следовательно, поле диполя) полностью определяет момент \vec{p} диполя (а также положение точки наблюдения). Если уменьшить l , но во столько же раз увеличить m , то момент \vec{p} и поле диполя не изменятся. При теоретическом изучении поля диполя удобно полагать, что длина диполя $l \rightarrow 0$, а $m = p/l \rightarrow \infty$. Тогда условие $R \gg l$ выполняется при любых расстояниях $R > 0$.

Согласно (26), для скалярных компонент поля \vec{f} диполя в сферических координатах получаем:

$$f_R = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{2p \cos\theta}{R^3}, \quad f_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{R^3}, \quad f_\varphi = -\frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \quad (39)$$

Так как $\cos\theta = z/R$, $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ то, согласно (38), (26), в цилиндрической системе координат:

$$U = \frac{p \cdot z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}; \quad \vec{f} = \vec{1}_r f_r + \vec{1}_z f_z, \quad f_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3 \cdot p \cdot z \cdot r}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (40)$$

$$f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{p \cdot (2z^2 - r^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Поля \vec{f} и U имеют четную цилиндрическую симметрию относительно оси диполя Z и – нечетную зеркальную симметрию относительно плоскости $z=0$ – экваториальной плоскости диполя, проходящей через центр диполя O и ортогональной его моменту \vec{p} .

Из выражений (38), (39) следует, что потенциал U поля \vec{f} диполя обратно пропорционален квадрату расстояния R от центра диполя до точки наблюдения, а компоненты напряженности поля обратно пропорциональны R^3 . Таким образом, поле диполя убывает с удалением от источника быстрее, чем поле точечной массы (см. выражения (30), (31)).

На рис. 5,б изображены векторные линии l_f поля \vec{f} диполя. Эти линии l_f начинаются на положительном полюсе m диполя и оканчиваются на отрицательном полюсе $-m$.

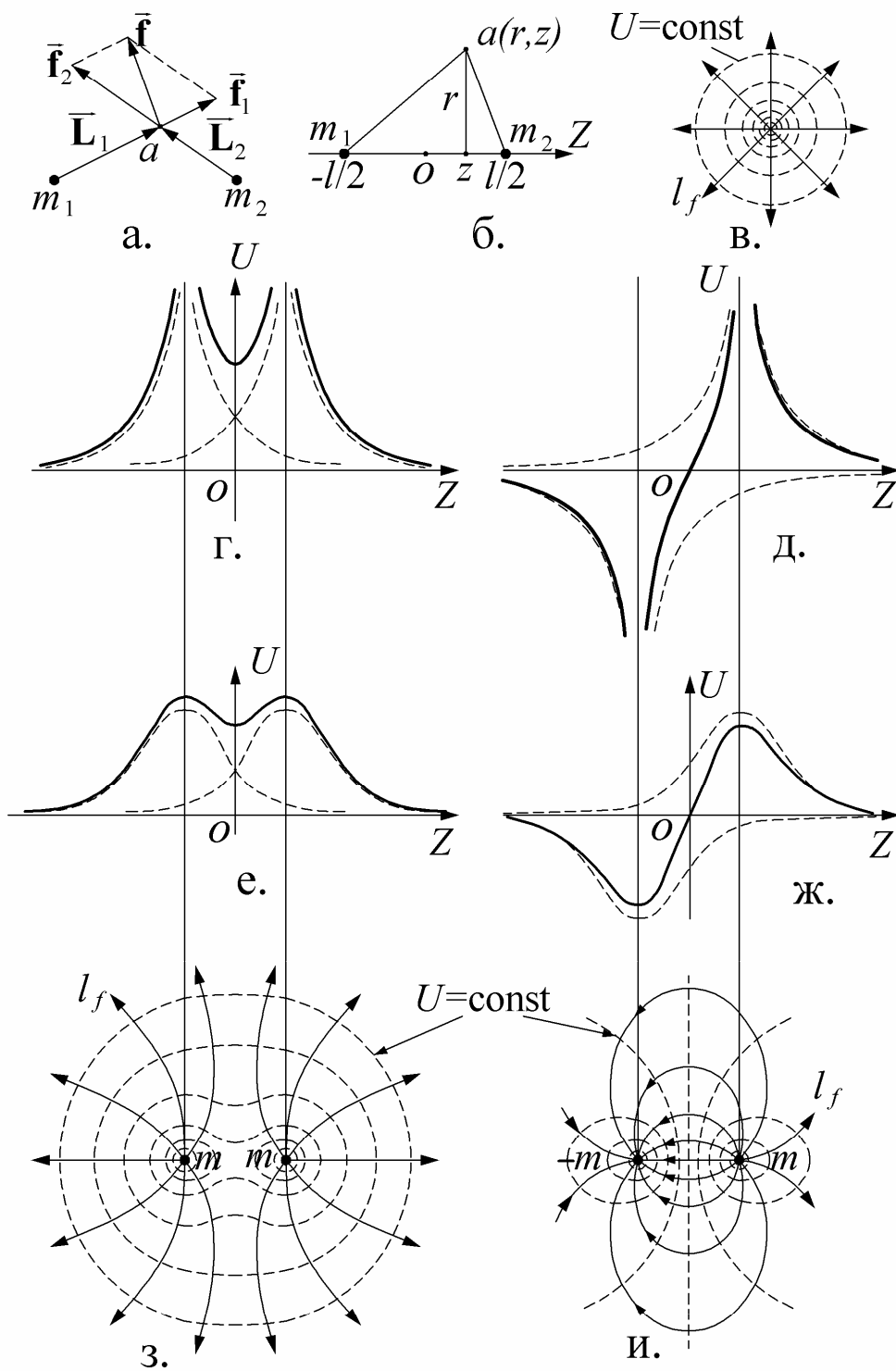


Рис.4. Поле двух точечных масс.

На рис. 5,в,е показаны линии l_f , а также- направления векторов \vec{f} на горизонтальном профиле соответственно при горизонтальном и вертикальном направлении момента диполя \vec{p} . На рис. 5,г,д,ж,з приведены графики вертикальной и горизонтальной компонент поля \vec{f} диполя на горизонтальном профиле при горизонтальном (г, д) и вертикальном (ж, з) направлении момента диполя \vec{p} .

В первом случае, когда момент \vec{p} направлен по горизонтальной оси Z , (рис. 5,в,г,д) над диполем (при $z=0$) вектор \vec{f} направлен горизонтально и антипараллелен орту $\vec{1}_z$ (оси Z). При этом вертикальная компонента f_r равна нулю, а значение горизонтальной компоненты f_z – минимально (максимально по абсолютной величине). С ростом $|z|$ величина модуля $|f_r|$ сначала возрастает, а потом начинает убывать. При $|z|=r/\sqrt{2}$, как следует из формулы (40), $f_z=0$, так как вектор \vec{f} направлен вертикально. Если величина $|z|>r/\sqrt{2}$, то $f_z>0$. При $|z|\rightarrow\infty: f_r\rightarrow 0, f_z\rightarrow 0$.

Во втором случае, при вертикальном направлении момента диполя \vec{p} (см. рис. 5,е,ж,з) зависимости от координаты x ($x=r$ при $x>0$ и $x=-r$ при $x<0$) вертикальной f_z и горизонтальной $f_x = f_r \cdot x/|x|$ компонент поля диполя выглядят иначе. Особенности этих графиков будут вполне понятны, если сопоставить направления векторов \vec{f} и ортов $\vec{1}_x, \vec{1}_z$ на рис. 5,е.

2.3. ПОЛЕ ЛИНЕЙНЫХ МАСС

Для линейно вытянутых масс (рис. 6,а) удобно ввести понятие линейной плотности λ :

$$dm = \delta dV = \delta \Delta S dl = \lambda dl, \quad \lambda = \delta \Delta S = dm/dl. \quad (41)$$

В выражениях (41) dm – масса элемента объема dV в виде прямого цилиндра с основанием ΔS и высотой dl , δ – средняя объемная плотность в таком элементе объема dV , l – линия, вдоль которой вытянута масса. На достаточно большом расстоянии от такой массы создаваемое ею поле \vec{f} зависит от положения линии l и распределения λ вдоль этой линии. То есть при этом условии площадь (и форма) сечения ΔS и объемная плотность δ сами по себе не существенны. Тогда поле физически реальной линейно вытянутой объемной массы можно заменить проще вычисляемым полем необъемной линейной массы.

Понятие линейной массы вводят, уменьшая ΔS и соответственно увеличивая δ так, чтобы λ и положение линии l остались неизменными:

$$\Delta S \rightarrow 0, \quad \delta = \lambda/\Delta S \rightarrow \infty, \quad \lambda = \text{const.}$$

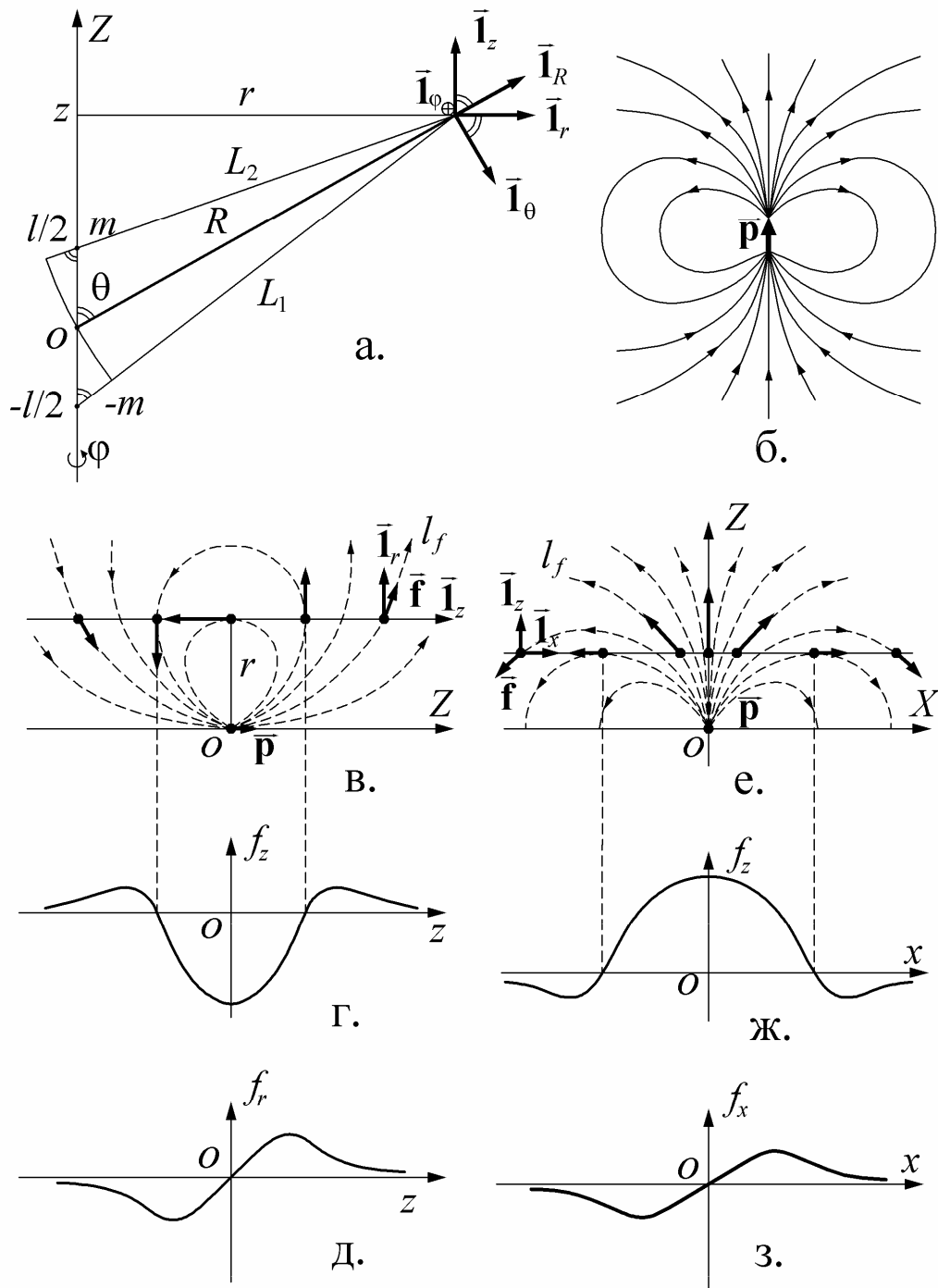


Рис.5. Поле диполя.

Из (22), (41) и принципа суперпозиции следует, что в точке наблюдения a :

$$\vec{df} = \frac{dm \cdot \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3} = \frac{\lambda dl \cdot \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_i = \frac{\lambda dl}{L_{qa}^2} \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_i), \quad f_i = \int_l df_i. \quad (42)$$

Интегрирование проводится по (точкам q) линии l , на которой лежит линейная масса.

Поле на оси окружности

Задача 6. Линейная масса m_0 имеет форму окружности l . Радиус окружности – r_0 . Линейная плотность $\lambda = \text{const}$. Определим поле на оси окружности (рис. 6,б).

Решение. Источник поля имеет цилиндрическую симметрию. Введем цилиндрическую систему координат, совместив ось Z с осью окружности, а начало координат O – с центром окружности; dl – произвольный элемент окружности, содержащий точку $q(r_q=r_0, z_q=0)$; a – точка наблюдения с координатами $r_a=0, z_a=z$, лежащая на оси Z .

Элемент dl окружности (см. рис. 6,б) создает в точке a на оси Z поле:

$$\vec{df} = \vec{1}_r df_r + \vec{1}_z df_z,$$

причем, согласно (42), для z -компоненты поля df_z элементарной массы $dm=\lambda dl$ и компоненты поля f_z линейной массы на окружности l имеем:

$$df_z = \frac{\lambda dl}{L_{qa}^2} \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_z) = \frac{\lambda dl}{L_{qa}^2} \cos \alpha = \frac{\lambda z dl}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}, \quad f_z = \oint_l df_z.$$

Так как $r_0 = \text{const}$, а z – координата точки наблюдения a , не меняющаяся при интегрировании по линии l , то

$$f_z = \frac{z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \oint_l \lambda dl = \frac{m_0 z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (43)$$

где $\oint_l \lambda dl = \oint_l dm = m_0 = 2\pi r_0 \lambda$ – масса окружности.

При получении выражения (43) фактически не требовалось пользоваться условием $\lambda = \text{const}$, следовательно, это выражение справедливо при произвольном распределении линейной массы по окружности l .

При $\lambda = \text{const}$ поле \vec{f} однородной линейной массы в виде окружности – цилиндрически симметрично и, если $f_r \neq 0$ на оси Z , то поле \vec{f} разрывно на оси симметрии. Но поле \vec{f} в вакууме непрерывно, следовательно

$$\text{при } r=0: f_r=0. \quad (44)$$

Справедливость выражения (44) при $\lambda = \text{const}$ может быть доказана также следующим образом. Рассмотрим (на оси Z) поле $\vec{df}_1 + \vec{df}_2$ двух одинаковых по длине элементов окружности dl_1 и dl_2 , находящихся на противоположных концах ее диаметра (рис. 6,в). Если $\lambda = \text{const}$, то массы

элементов dl_1 и dl_2 окружности одинаковы. Как видно, на рис. 6,в $\vec{df}_1 + \vec{df}_2 = \vec{1}_z df_\Sigma$.

«Разбивая» всю окружность l на пары таких элементов, симметричных относительно центра O окружности, получаем для суммарного поля на оси Z : $\vec{f} = \vec{1}_z f_z$ ($f_r=0$).

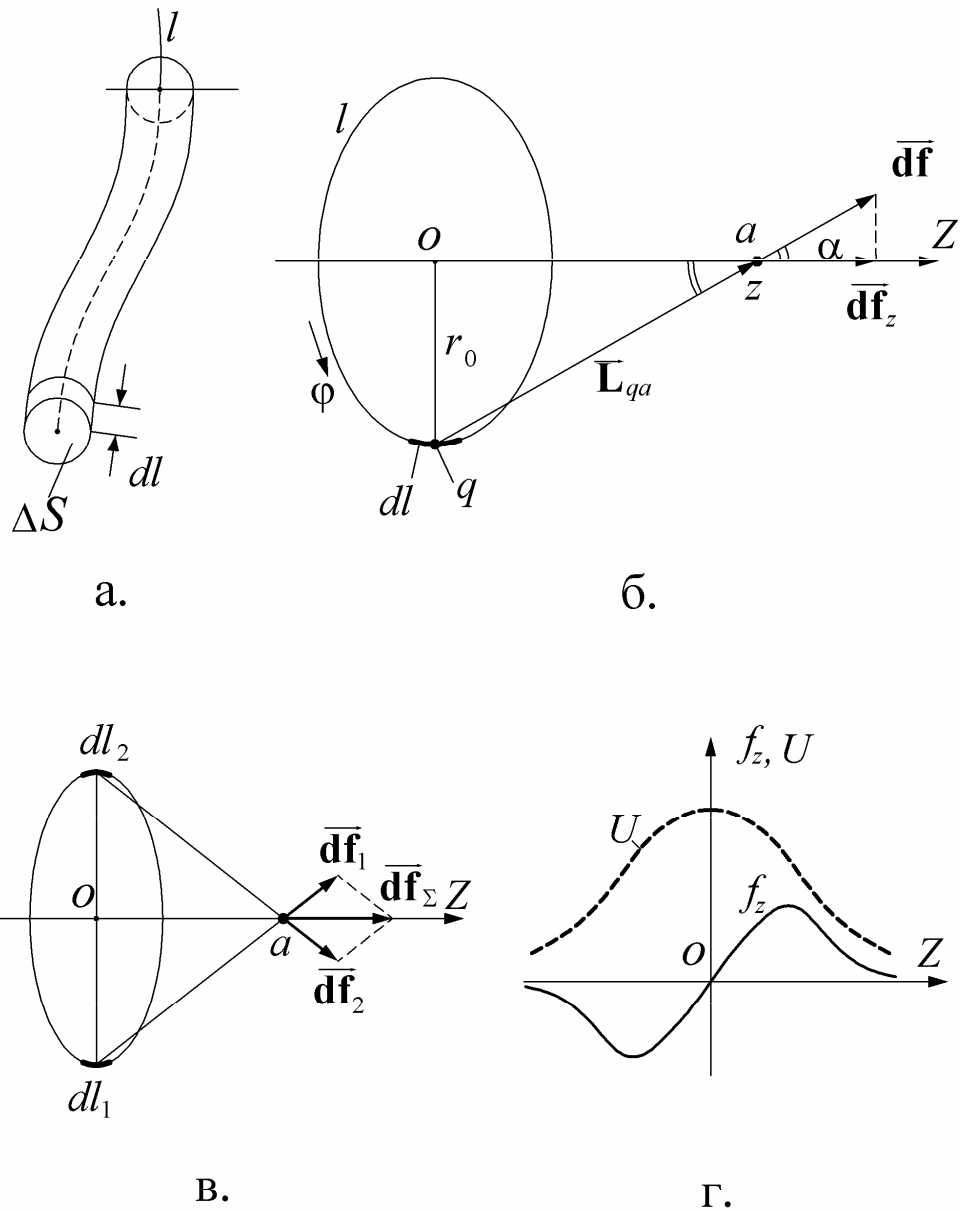


Рис. 6. К определению линейной массы. Поле на оси окружности.

Определим потенциал U поля окружности при $r=0$ (на оси Z). Полагая, что $U=0$ при $L_{qa} \rightarrow \infty$, на основе (30) получаем:

$$U = \oint \frac{\lambda dl}{(r_0^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{m_0}{(r_0^2 + z^2)^{1/2}}. \quad (45)$$

Из выражения (45) для U можем получить формулу (43) для f_z на основе (26). Отметим, что аналогичное определение компоненты f_r путем дифференцирования выражения (45) – не правомерно. Это выражение определяет потенциал U только на оси Z ($r=0$) и не характеризует U , как функцию координаты r в окрестности этой оси. Графики функций $f_z(z)$ и $U(z)$ при $\lambda>0$ показаны на рис. 6,г.

Поле отрезка прямой

Задача 7. Источник статического поля \vec{f} – однородная линейная масса в виде отрезка прямой, т.е. в пределах этого отрезка линейная плотность $\lambda=\text{const}$. Требуется определить поле \vec{f} такой массы.

Решение. Отрезок прямой и его поле симметричны относительно прямой, на которой лежит этот отрезок. Введем цилиндрическую систему координат, совместив ось Z с осью по оси симметрии источника поля (рис. 7,а). Выбор полуплоскости $\varphi=0$ – произволен. Начало координат выберем таким образом, чтобы плоскость $z=0$ проходила через точку наблюдения a . Тогда $r_a=r$, $z_a=0$. Координаты концов отрезка: $r=0$, $z=z_1$ и $r=0$, $z=z_2$. Произвольная точка q отрезка имеет координаты: $r_q=0$, $z_q=z$, $z_1 \leq z \leq z_2$.

Согласно (17') для цилиндрически симметричного поля \vec{f} (с четной симметрией) имеем:

$$\vec{f} = \vec{1}_r f_r + \vec{1}_z f_z.$$

Выражения для f_r и f_z получим путем суммирования компонент df_r и df_z полей \vec{df} , создаваемых всеми элементами $dl=dz$ отрезка $z_1 z_2$. Как видно на рис 7,а, в соответствии с (42)

$$df_r = \frac{\lambda dz}{L^2} \cos \alpha, \quad df_z = \frac{\lambda dz}{L^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\lambda dz}{L^2} \sin \alpha,$$

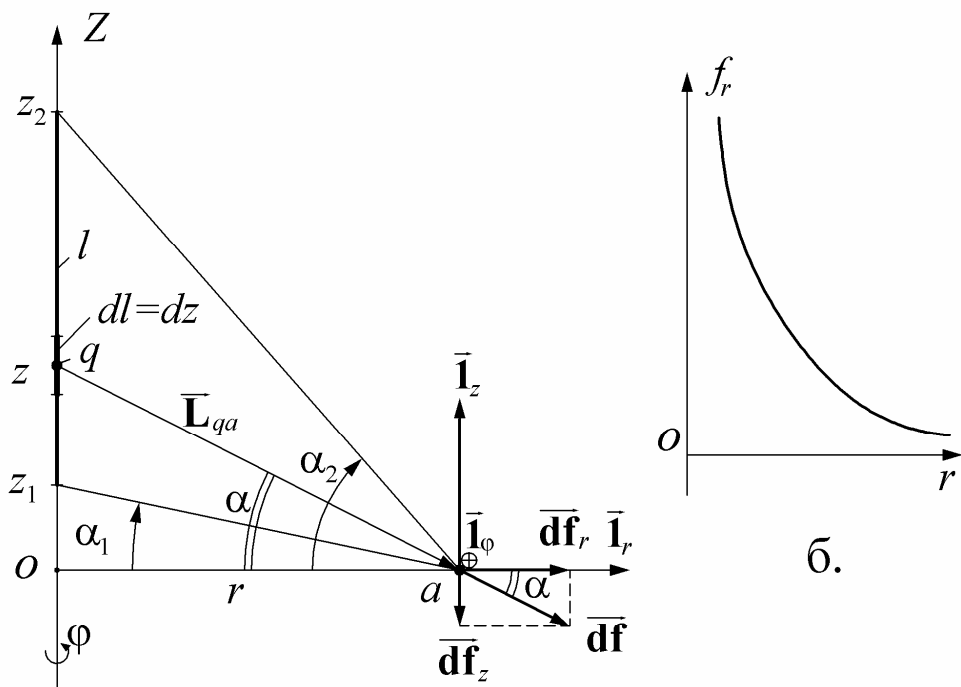
где $L = |\vec{L}_{qa}|$, α – угол $(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_r)$. Так как при интегрировании $r=\text{const}$, а

$$\cos \alpha = \frac{r}{L}, \quad L = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{z}{r}, \quad z = r \text{tg } \alpha, \quad \frac{dz}{d\alpha} = \frac{r}{\cos^2 \alpha}, \quad dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

для компонент df_r, df_z получаем:

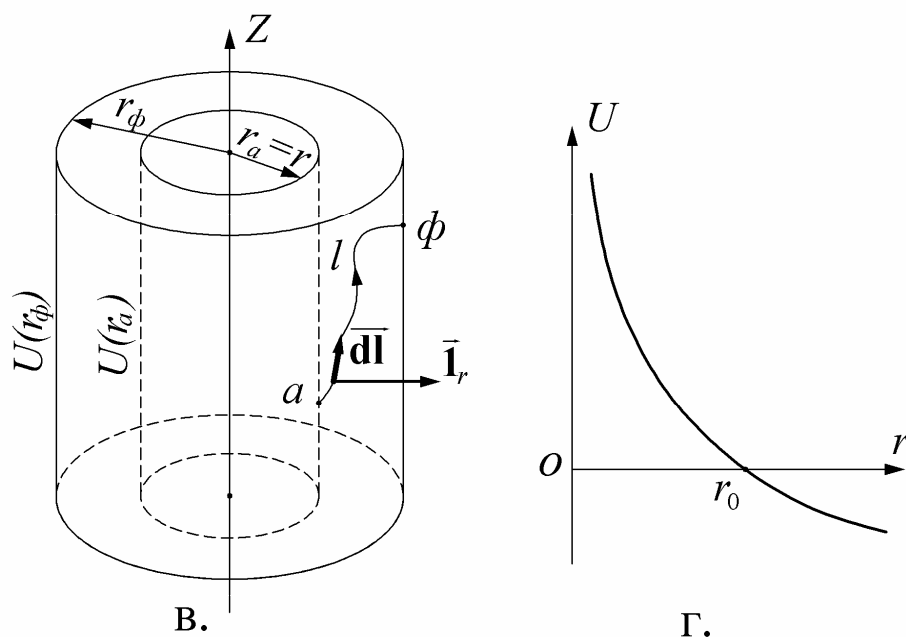
$$df_r = \frac{\lambda}{r} \cos \alpha d\alpha, \quad df_z = -\frac{\lambda}{r} \sin \alpha d\alpha.$$

Тогда



а.

б.



в.

г.

Рис.7. Поле отрезка прямой. Поле прямой.

$$f_r = \frac{\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1),$$

$$f_z = -\frac{\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Чтобы выразить компоненты f_r, f_z через цилиндрические координаты, следует учесть, что

$$\cos \alpha_{1,2} = r(r^2 + z_{1,2}^2)^{-1/2}, \quad \sin \alpha_{1,2} = z_{1,2}(r^2 + z_{1,2}^2)^{-1/2}.$$

Если проекция точки a на ось Z лежит посередине отрезка ($-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$ или $-z_1 = z_2 = z_0$), то

$$\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{1}}_r f_r, \quad f_r = \frac{2\lambda}{r} \sin \alpha_0 = \frac{2\lambda}{r} \frac{z_0}{(r^2 + z_0^2)^{1/2}} \quad (46)$$

Поле прямой

В следующей задаче, а также в задачах 9, 11, 12, 15, 16, будем определять поле масс, неограниченных по одному или более направлениям. Поле таких масс обычно проще вычислить, чем поле масс конечных размеров, и в некоторых случаях полем масс, имеющих неограниченную протяженность, бывает удобно заменить поле соответствующих более реальных масс при достаточно большой протяженности последних. Например, выражение (47) очевидно справедливо не только при $z_0 \rightarrow \infty$, но и при $z_0 \gg r_0$ (см. ниже).

Задача 8. Условия те же, что в задаче 7, но однородная линейная масса в виде отрезка прямой имеет неограниченную длину, то есть источник статического поля $\vec{\mathbf{f}}$ – бесконечно длинная однородная прямолинейная масса («прямая»). Определим поле $\vec{\mathbf{f}}$ и потенциал U поля такой массы.

Решение. Совмещая «прямую» с осью Z цилиндрической системы координат и полагая в выражении (46) $z_0 \rightarrow \infty$, ($\alpha_0 \rightarrow \pi/2$), получаем:

$$\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{1}}_r f_r, \quad f_r = \frac{2\lambda}{r}. \quad (47)$$

Согласно (47), векторные линии поля $\vec{\mathbf{f}}$ при $\lambda > 0$ – это лучи, выходящие из точек прямой и направленные по нормали к ней. График функции $f_r(r)$ (при $\lambda > 0$) приведен на рис. 7,б.

При любых r , в том числе при $r \rightarrow \infty$, величина f убывает с удалением от источника поля медленнее, чем $1/r^2$, где r – расстояние от источника до точки наблюдения. Такое поле называется нерегулярным на бесконечности. Ниже убедимся, что нулевой потенциал такого поля следует выбирать на конечном расстоянии от источника поля.

Определим потенциал поля прямой. Векторные линии l_f ортогональны эквипотенциальным поверхностям. Из выражения (47) следует, что поверхности $U=\text{const}$ – цилиндрические ($r=\text{const}$) с осью Z (см. рис. 7,в), то есть $U=U(r)$.

Воспользуемся выражением (29). На рис.7,в показаны соединенные произвольной линией l точки a и ϕ , лежащие на эквипотенциальных поверхностях $r=r_a=\text{const}$ и $r_\phi=\text{const}$ с потенциалами, которые обозначим $U(r_a)=U(r)$ и $U(r_\phi)$ соответственно. Согласно (29), (47),

$$U(a) = U(r_a) = \int_a^\phi (\vec{f} \cdot d\vec{l}) + U(r_\phi) = \int_{r_a}^{r_\phi} f_r dr + U(r_\phi),$$

где учтено, что при $\vec{f} = \vec{f}_r = \vec{1}_r f_r$ имеем: $(\vec{f} \cdot d\vec{l}) = f_r (\vec{1}_r \cdot d\vec{l}) = f_r dr$, так как скалярное произведение $(\vec{1}_r \cdot d\vec{l}) = dr$ (см. рис. 7,в). Таким образом, согласно (47),

$$U(r_a) = 2\lambda \int_{r_a}^{r_\phi} r/dr + U(r_\phi) = 2\lambda (\ln r_\phi - \ln r_a) + U(r_\phi) = 2\lambda \ln \frac{r_\phi}{r_a} + U(r_\phi). \quad (48)$$

Если выберем потенциал $U=0$ при $r \rightarrow \infty$ (то есть $U(r_\phi)=0$ при $r_\phi \rightarrow \infty$), то получим $U \rightarrow \infty$ при любых конечных значениях $r_a=r$. Выберем поэтому $U=0$ при $r=r_0$, где r_0 – конечное расстояние от точки наблюдения до неограниченной однородной прямолинейной массы, не равное нулю. Тогда

$$U = 2\lambda \ln \frac{r_0}{r} = -2\lambda \ln \frac{r}{r_0}. \quad (49)$$

График функции $U(r)$ приведен на рис. 7,г. При сделанном выборе нулевого потенциала и при $\lambda > 0$, имеем: $U \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ и $U \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow \infty$. Вне однородной линейной массы в виде «прямой» потенциал U ограничен на любом конечном расстоянии r от этой «прямой». Определяемый выражением (49) потенциал U называют логарифмическим потенциалом.

Поле линейного диполя

Задача 9. Источники поля \vec{f} – две неограниченные однородные, взаимно- параллельные прямолинейные массы с линейными плотностями $-\lambda$ и $\lambda=\text{const} > 0$. Расстояние l между этими массами обозначим L_{12} . Совокупность таких линейных масс, при условии, что расстояния от них до точки наблюдения много больше L_{12} , называют линейным диполем. Надо определить потенциал U поля \vec{f} линейного диполя.

Решение. Введем цилиндрическую и декартову системы координат $(r, \phi, z$ и $x, y, z)$ с общей осью Z , параллельной линейным массам и проходящей посередине между ними. Полуплоскости $\phi=0$ и $\begin{cases} y = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ этих систем координат проходят через линейную массу с плотностью λ . Рис. 5,а можно

рассматривать, как сечение линейного диполя плоскостью $z=\text{const}$, ортогональной образующим его линейным массам, при замене обозначений: $z \rightarrow x$, $R \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \varphi$. В данном случае можем полагать, что потенциал $U \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Из выражения (48) при $U(\varphi)=0$ и учете принципа суперпозиции получаем:

$$U(a) = 2\lambda \left[\ln \left(\frac{L_{\varphi 2}}{L_{a 2}} \right) - \ln \left(\frac{L_{\varphi 1}}{L_{a 1}} \right) \right] = 2\lambda \left[\ln \left(\frac{L_{a 1}}{L_{a 2}} \right) - \ln \left(\frac{L_{\varphi 1}}{L_{\varphi 2}} \right) \right]$$

где $L_{\varphi 1}$, $L_{\varphi 2}$ и $L_{a 1}$, $L_{a 2}$ – расстояния от точки φ и точки наблюдения a до линейных масс с плотностями $-\lambda$ и λ соответственно. При удалении точки φ в бесконечность имеем: $L_{\varphi 1}/L_{\varphi 2} \rightarrow 1$, $\ln(L_{\varphi 1}/L_{\varphi 2}) \rightarrow 0$. Ввиду малости отношения L_{12}/r можно полагать, что отрезки $L_{a 1}$ и $L_{a 2}$ – практически параллельны отрезку L_{Oa} , равному расстоянию от оси Z до точки наблюдения a . Тогда $L_{a 1} \approx r + (L_{12} \cos \varphi)/2$, $L_{a 2} \approx r - (L_{12} \cos \varphi)/2$ и из предыдущего выражения для $U(a)$ получаем:

$$U(a) \approx 2\lambda \ln \frac{r + (L_{12}/2)\cos \varphi}{r - (L_{12}/2)\cos \varphi} = 2\lambda \ln \frac{1 + (L_{12}/2r)\cos \varphi}{1 - (L_{12}/2r)\cos \varphi}.$$

Воспользуемся известными разложениями в степенные ряды:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots +; \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Принимая во внимание малость отношения L_{12}/r и пренебрегая малыми величинами выше первого порядка, получаем:

$$\frac{1 + (L_{12}/2r)\cos \varphi}{1 - (L_{12}/2r)\cos \varphi} \approx \left(1 + \frac{L_{12} \cos \varphi}{2r} \right)^2 \approx 1 + \frac{L_{12} \cos \varphi}{r}; \quad \ln \left(1 + \frac{L_{12} \cos \varphi}{r} \right) \approx \frac{L_{12} \cos \varphi}{r}.$$

Таким образом, для потенциала $U(a)$ получаем выражение:

$$U = 2 \cdot \eta^\lambda \cdot \frac{\cos \varphi}{r}, \quad (50)$$

в котором $\eta^\lambda = \lambda \cdot L_{12}$ – линейная плотность дипольных моментов, равная дипольному моменту единицы длины линейного диполя. Согласно (50), поле линейного диполя полностью определяется величиной η^λ . При теоретическом рассмотрении поля линейного диполя удобно полагать, что $L_{12} \rightarrow 0$, а $\lambda = \eta^\lambda / L_{12} \rightarrow \infty$. Тогда условие $r \gg L_{12}$ выполняется при любых $r > 0$.

Поле \vec{f} линейного диполя имеет две составляющие в цилиндрической системе координат: $\vec{f} = \vec{1}_r f_r + \vec{1}_\varphi f_\varphi$. Компоненты f_r и f_φ этого поля не сложно определить на основе выражения (26).

2.4. ПОЛЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАСС

При рассмотрении поля масс пластообразной формы, то есть масс, толщина (мощность) которых много меньше других их размеров, бывает удобно ввести понятие поверхностной плотности σ (рис. 8,а):

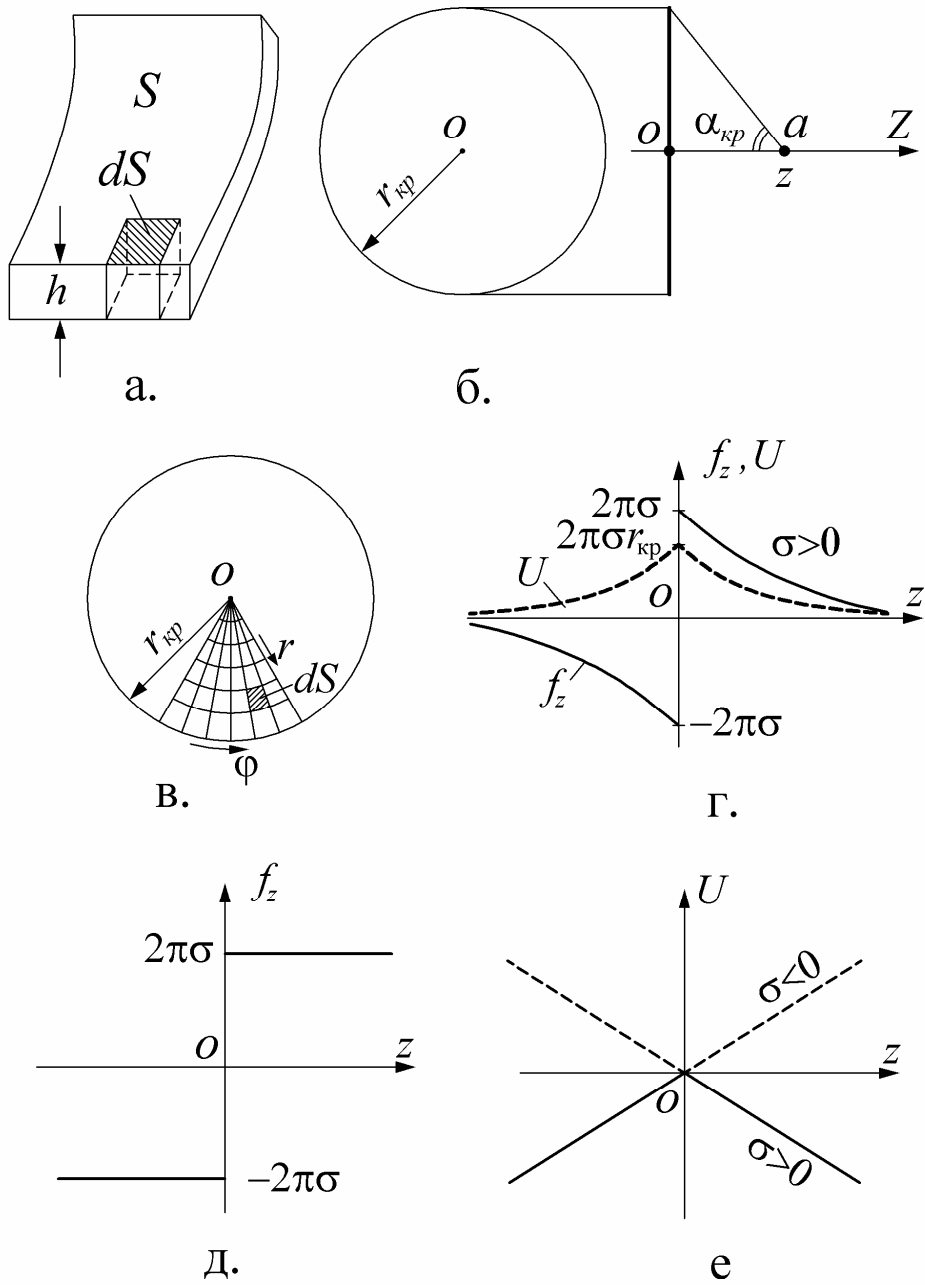


Рис.8. К определению поверхностной массы. Поле круга в плоскости.

$$dm = \delta dV = \delta h dS = \sigma dS, \quad \sigma = \delta h = dm/dS,$$

где h – "толщина" массы в виде пласта (или слоя), S – поверхность, вдоль которой "простирается" этот слой, dm – масса элемента объема dV в виде прямой призмы или цилиндра с основанием dS и высотой h (рис. 8,а), δ – средняя объемная плотность в этом элементе объема dV . На достаточно большом расстоянии от такой массы ее поле \vec{f} зависит практически только от положения в пространстве поверхности S и от значений поверхностной плотности σ на этой поверхности. Тогда поле такой объемной массы можно заменить полем более простой поверхностной массы с поверхностной плотностью σ , лежащей на поверхности S и называемой "простым слоем".

Понятие такой поверхностной массы вводят, полагая, что $h \rightarrow 0$, $\delta = \sigma/h \rightarrow \infty$, но при этом поверхностная плотность σ – конечная величина, такая же, как у физически реальной объемной массы в виде достаточно тонкого слоя с мощностью h . Элементарную поверхностную массу dm , лежащую на площадке dS , определяет выражение: $dm = \sigma \cdot dS$.

Тогда, согласно (22), поле $\vec{df}(a)$ элементарной поверхностной массы dm с «центром» в точке q , скалярную компоненту $df_l(a)$ поля $\vec{df}(a)$ по направлению l , а также компоненту $f_l(a)$ по направлению l поля \vec{f} поверхностной массы, лежащей на поверхности S , в точке наблюдения a определяют выражения:

$$\vec{df}(a) = \frac{\sigma dS \cdot \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_l(a) = \frac{\sigma dS}{L_{qa}^2} \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l), \quad f_l(a) = \int_S df_l(a). \quad (50')$$

В последнем выражении при интегрировании точка q "пробегают" поверхность S .

В соответствии с (30), (50') и принципом суперпозиции потенциал $U(a)$ поля $\vec{f}(a)$ поверхностной массы с плотностью $\sigma(q)$, лежащей на поверхности S (при ограниченных размерах S), можно определить выражением:

$$U(a) = \int_S dU(a) = \int_S \frac{dm(q)}{L_{qa}} = \int_S \frac{\sigma(q) \cdot dS}{L_{qa}}. \quad (50'')$$

Поле на оси «круга»

Задача 10. Пусть однородная ($\sigma = \text{const}$) поверхностная масса имеет форму круга с радиусом $r_{\text{кр}}$. Определим поле \vec{f} на оси симметрии такой массы (на оси «круга»).

Решение. Поле симметрично относительно оси круга. Введем систему координат r, φ, z , совместив ось Z цилиндрических координат с осью круга, а начало координат O с центром круга. Выбор полуплоскости $\varphi = 0$ – произволен. На рис. 8,б показаны две проекции круга и система координат. Из непрерывности вне поверхностной массы (при $z \neq 0$) поля \vec{f} на оси Z

круга и четной цилиндрической симметрии поля $\vec{\mathbf{f}}$ относительно этой оси следует, что

$$\text{на оси } Z \text{ (при } r = 0), \quad \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{1}}_z f_z. \quad (51)$$

При помощи отрезков координатных линий l_r («радиусов круга») и координатных линий l_φ (окружностей с центром в точке O) разобьем круг на множество элементарных координатных площадок $dS = dl_r \cdot dl_\varphi = dr \cdot r d\varphi = r dr d\varphi$ (см. (2) и рис. 8,в) При этом $0 \leq r \leq r_{\text{кр}}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Элементарную поверхностную массу dm на dS определяет выражение: $dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot r dr d\varphi$. Следовательно, в соответствии с (22), (50'), на оси Z «круга» для компоненты df_z поля массы dm имеем:

$$df_z(z) = \frac{\sigma dS}{L^2} \cos(\vec{\mathbf{L}}, \vec{\mathbf{1}}_z) = \frac{\sigma z dS}{L^3} = \frac{\sigma \cdot z \cdot r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \text{ Тогда, согласно (50') компо-}$$

ненту f_z поля $\vec{\mathbf{f}}$ «круга» на его оси Z можем определить следующим образом:

$$f_z(z) = \int_S df_z(z) = \sigma \cdot z \int_0^{r_{\text{кр}}} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \pi \sigma z \int_0^{r_{\text{кр}}} (r^2 + z^2)^{-3/2} 2r dr.$$

Так как координата z точки наблюдения не меняется при интегрировании по источнику поля - простому слою на поверхности S круга, то

$$2r dr = dr^2 = d(r^2 + \text{const}) = d(r^2 + z^2), \quad \text{то есть} \quad \int_0^{r_{\text{кр}}} (r^2 + z^2)^{-3/2} 2r dr =$$

$$= \int_0^{r_{\text{кр}}} (r^2 + z^2)^{-3/2} d(r^2 + z^2) = 2 \cdot \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(r_{\text{кр}}^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \text{ Следовательно, на оси } Z$$

для ненулевой компоненты f_z поля $\vec{\mathbf{f}}$ «круга» получаем выражение:

$$f_z = 2\pi\sigma z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2}} \right) = 2\pi\sigma \frac{z}{|z|} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2}} \right) = 2\pi\sigma \frac{z}{|z|} (1 - \cos \alpha_{\text{кр}}). \quad (52)$$

где $\alpha_{\text{кр}}$ – плоский угол, под которым из точки наблюдения a на оси Z виден радиус круга $r_{\text{кр}}$ (рис. 8,б).

График функции $f_z(z)$ приведен на рис. 8,г сплошной линией. Независимо от величины $r_{\text{кр}}$ разрыв нормальной к поверхностной массе (с поверхностной плотностью σ) компоненты f_z поля $\vec{\mathbf{f}}$ равен $4\pi\sigma$.

Получим выражение для потенциала U , определяемого выражениями (51), (52), поля $\vec{\mathbf{f}}$ на оси Z «круга» (потенциала U на оси однородного простого слоя в форме круга) - рис. 8,б.

Согласно второму равенству в (30), потенциал dU поля $d\vec{\mathbf{f}}$ элементарной массы $dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot r dr d\varphi$ (рис. 8,в) на оси Z «круга» определяет вы-

ражение: $dU(z) = \frac{dm}{L} = \frac{\sigma dS}{L} = \frac{\sigma \cdot r dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$. Тогда, в соответствии с (50''),

при $\sigma = \text{const}$:

$$U(z) = \int_0^{r_{\text{кр}}} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \cdot r dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \pi \sigma \int_0^{r_{\text{кр}}} \frac{d(r^2 + z^2)}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = 2\pi \sigma \left(\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2} - |z| \right). \quad (52')$$

Определяемая выражением (52') зависимость $U(z)$ на оси Z круга (при $\sigma > 0$) показана на рис. 8,г штриховой линией. Как видно на этом рисунке, $U(z)$ – четная непрерывная функция координаты z . В частности, функция $U(z)$ непрерывна при $z \rightarrow 0$ (на простом слое). Выражение (52') может служить одним из примеров, показывающих, что на поверхностной массе в виде простого слоя с плотностью σ потенциал U поля \vec{f} непрерывен.

Поле «плоскости»

Задача 11. Определить поле неограниченной плоской однородной поверхностной массы (плоскости) с поверхностной плотностью $\sigma = \text{const}$.

Решение. Такую поверхностную массу можем рассматривать как однородную массу в виде круга бесконечно большого радиуса. Выбрав ту же систему координат, что и при решении задачи 10, и положив $r_{\text{кр}} \rightarrow \infty$ ($\alpha_{\text{кр}} \rightarrow \pi/2$), из выражений (51), (52) получаем:

$$\vec{f} = \vec{1}_z f_z, \quad f_z = 2\pi \sigma \frac{z}{|z|}. \quad (53)$$

Отметим, что хотя выражение (53) для поля плоскости и получено из формул (51), (52), определяющих поле \vec{f} на оси симметрии Z круга, оно справедливо для произвольной точки пространства, так как любая прямая, перпендикулярная однородной неограниченной плоской массе, будет осью симметрии поля этой массы. Векторные линии поля \vec{f} – лучи, выходящие (при $\sigma > 0$) из точек плоскости и ей перпендикулярные. График функции $f_z(z)$ приведен на рис. 8,д. В соответствии с (53) поле лежащей на плоскости однородной поверхностной массы с плотностью σ («плоскости») не убывает с удалением от этой массы.

Определим потенциал поля такой массы. Согласно (53), (25), $U = U(z)$, то есть эквипотенциальные поверхности – плоскости $z = \text{const}$. Так как при $\vec{f} = \vec{1}_z f_z$ скалярное произведение $(\vec{f} \cdot d\vec{l}) = f_z (\vec{1}_z \cdot d\vec{l}) = f_z dz$, из выражения (29) получаем:

$$U(z) = \int_z^{z_\phi} f_z dz + U(z_\phi). \quad (54)$$

Выберем $U=0$ при $z=0$ (то есть $z_\phi=0$, $U(z_\phi)=0$). Примем во внимание, что $d|z|/dz = z/|z|$, а $\int (z/|z|) dz = |z|$. Тогда

$$U(z) = 2\pi\sigma \int_z^0 \frac{|z|}{z} dz = -2\pi\sigma|z| \quad (54')$$

или $U = -2\pi\sigma z$ при $z > 0$, $U = 2\pi\sigma z$ при $z < 0$.

Графики функции $U(z)$ при $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ показаны на рис. 8,е. Согласно (54'), на поверхностной массе с плотностью σ потенциал непрерывен. То, что при $z=0$ функция $U(z)$ – не дифференцируема, согласуется с тем, что нормальная к поверхностной массе компонента $f_z = -dU/dz$ терпит разрыв на этой массе.

Поле двойного слоя

Двойным слоем называется совокупность двух поверхностных масс (в виде простых слоев), расстояние h между которыми достаточно мало по сравнению с расстояниями от них до точки наблюдения, а плотности этих поверхностных масс в точках, расположенных на кратчайшем расстоянии между массами, равны соответственно σ и $-\sigma$ (то есть имеют противоположный знак и одинаковы по абсолютной величине). Составляющие двойной слой простые слои называют его обкладками. Поле \vec{f} , создаваемое двойным слоем, зависит от поверхностной плотности дипольных моментов $\eta = \sigma \cdot h$. При уменьшении h , соответствующем увеличении σ и при фиксированном значении η поле двойного слоя не меняется. Поэтому при теоретическом изучении поля двойного слоя удобно полагать, что при конечной плотности дипольных моментов η имеем: $h \rightarrow 0$, $\sigma = (\eta/h) \rightarrow \infty$. В таком случае обкладки двойного слоя являются сторонами поверхности S , "несущей" двойной слой. При постоянстве η на S двойной слой называют однородным. В этом случае величина η равна дипольному моменту единицы площади поверхности S .

Задача 12. Определить поле двух неограниченных плоских однородных поверхностных масс с поверхностными плотностями $-\sigma$ и $\sigma > 0$, лежащих на взаимно параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно h . Перейти к полю неограниченного плоского однородного двойного слоя (при $h \rightarrow 0$, $\eta = \sigma \cdot h = \text{const}$, $\sigma = (\eta/h) \rightarrow \infty$)

Решение. Направим ось Z (декартовых или цилиндрических координат) по нормали к этим плоскостям, поместив начало координат O посередине между плоскостями (рис. 9,а). Тогда положение поверхностных масс определяют равенства: $z = -h/2$ и $z = h/2$. Согласно (53), при учете принципа суперпозиций поле двух таких «плоскостей» $\vec{f} = \vec{1}_z f_z$, причем:

$$\begin{aligned} \text{при } z < -h/2 \quad f_z^{(1)} &= -2\pi\sigma - 2\pi(-\sigma) = 0, \\ \text{при } -h/2 < z < h/2 \quad f_z^{(2)} &= -2\pi\sigma + 2\pi(-\sigma) = -4\pi\sigma, \\ \text{при } z > h/2 \quad f_z^{(3)} &= 2\pi\sigma + 2\pi(-\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

График функции $f_z(z)$ показан на рис. 9,б.

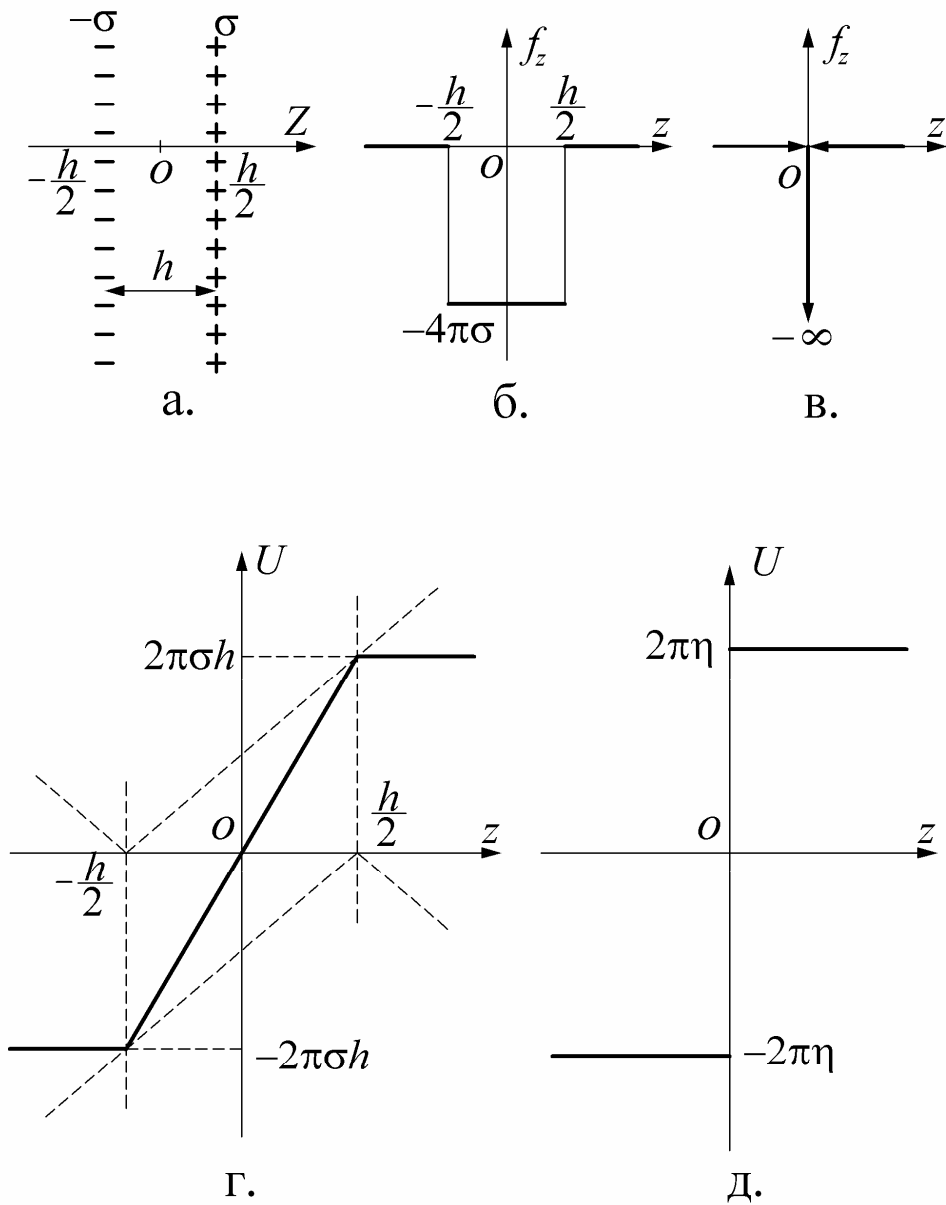


Рис.9. Поле двух плоскостей и поле двойного слоя.

Найдем потенциал U поля \vec{f} , определяемого выражениями (55). Согласно (26),

$$f_z = -\partial U / \partial z, \text{ а при } U=U(z) \quad f_z = -dU/dz, \quad dU = -f_z dz, \quad (56)$$

$$U = -\int f_z dz + C,$$

где $C = \text{const}$. Из (55), (56) получаем:

$$\begin{aligned} \text{при } z < -h/2 & \quad U_1 = C_1, \\ \text{при } -h/2 < z < h/2 & \quad U_2 = 4\pi\sigma z + C_2, \\ \text{при } z > h/2 & \quad U_3 = C_3, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы.

Если выбрать $U_2=0$ при $z=0$, то при учете того, что потенциал U непрерывен на простом слое (при $z=\pm h/2$), получаем: $C_2=0$, $C_1=-2\pi\sigma h$, $C_3=2\pi\sigma h$, то есть

$$\text{при } |z| < h/2 \quad U_2 = 2\pi\sigma z, \quad \text{при } |z| > h/2 \quad U_{1,3} = 2\pi\sigma h(z/|z|). \quad (57)$$

График функции $U(z)$, определяемой выражениями (57), показан на рис. 9,г сплошной линией. Его можно получить также, сложив графики потенциалов поля плоскостей с плотностями $-\sigma$ и σ (рис. 8,е), изображенные на рис. 9,г штриховыми линиями.

От поля двух плоскостей к полю двойного слоя с поверхностной плотностью дипольных моментов $\eta=\sigma h$ перейдем при $h\rightarrow 0$, $\sigma=(\eta/h)\rightarrow\infty$. В бесконечно малом интервале между обкладками двойного слоя при $\sigma\rightarrow\infty$, согласно (55), $f_z\rightarrow-\infty$. В остальной части пространства поле $\vec{f}=0$ (рис 9,в).

При $h\rightarrow 0$ и $\eta=\sigma h=\text{const}$ из (57) получаем для потенциала U :

$$U = 2\pi\eta(z/|z|). \quad (58)$$

График функции $U(z)$ показан на рис. 9,д. Согласно (58), на двойном слое потенциал U поля \vec{f} терпит разрыв, равный $4\pi\eta$.

Поле сферической поверхности

Задача 13. Однородная поверхностная масса в виде простого слоя ($\sigma=\text{const}$), лежащая на замкнутой поверхности S_0 , имеет форму сферы с радиусом R_0 . Определим поле \vec{f} такой массы и его потенциал U внутри (область V_i) и вне (область V_e) сферической поверхности S_0 (рис. 10,а).

Решение. Поле \vec{f} – сферически симметричное. В сферической системе координат R, θ, φ с началом O в центре сферической поверхности S_0 , согласно (18'),

$$\vec{f} = \vec{1}_R f_R, \quad f_R = f_R(R). \quad (59)$$

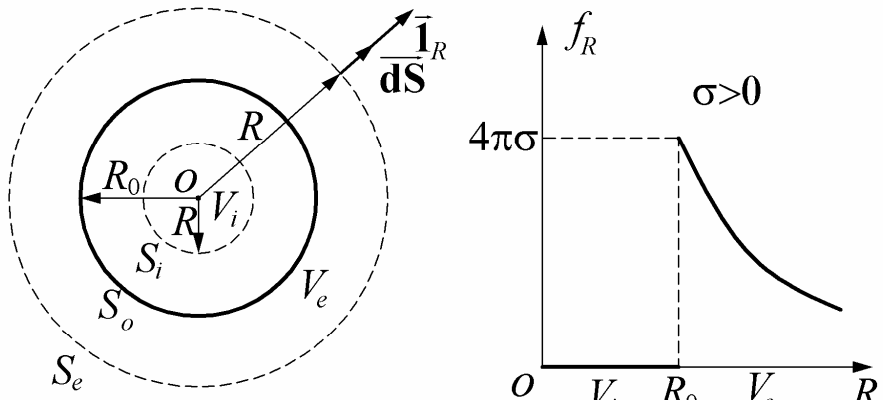
Представим себе две сферические поверхности с радиусами R : $S_i (R < R_0)$ и $S_e (R > R_0)$ с общим центром в начале координат O (рис. 10,а). Учтем, что ориентированные площадки \vec{dS} каждой такой сферической поверхности S направлены как орты $\vec{1}_R$ на всей этой поверхности. В таком случае, согласно (1),

$$(\vec{f} \cdot \vec{dS}) = f \cdot dS \cdot \cos(\vec{f}, \vec{dS}) = f \cdot \cos(\vec{f}, \vec{1}_R) \cdot dS = f_R \cdot dS,$$

следовательно, поток вектора \vec{f} через сферическую поверхность S с радиусом R :

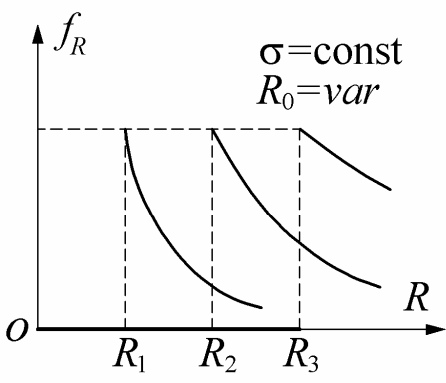
$$\oint_S (\vec{f} \cdot \vec{dS}) = \oint_S f_R \cdot dS = f_R \oint_S dS = f_R \cdot 4\pi R^2,$$

так как на поверхности S координата $R=\text{const}$ и, согласно (59), величина f_R не меняется на S . Тогда уравнение Гаусса (24') принимает вид $4\pi R^2 \cdot f_R = 4\pi m_V$ или

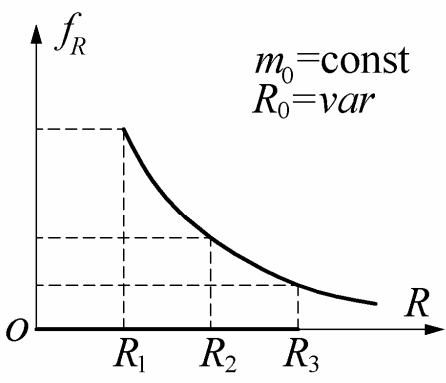


а.

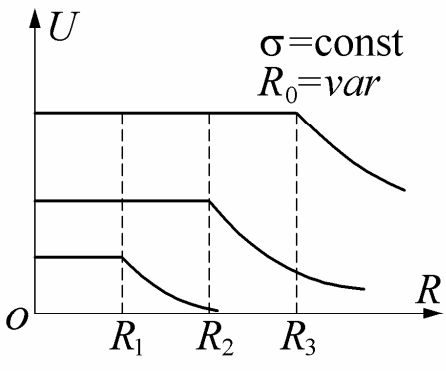
б.



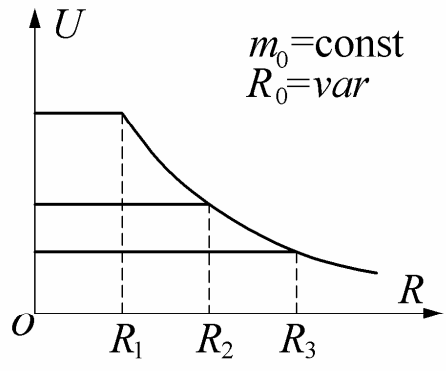
в.



г.



д.



е.

Рис.10 Поле сферической поверхности.

$$f_R = m_V / R^2, \quad (60)$$

где m_V – масса в области V , ограниченной сферической поверхностью с радиусом R . Отметим, что равенство (60) справедливо для любого сферически-симметричного поля \vec{f} , удовлетворяющего условию (59).

Применяя уравнение (60) к поверхностям S_i и S_e (рис. 10,а) и учитывая, что для этих поверхностей масса m_V соответственно равна 0 и $m_0 = 4\pi R_0^2 \cdot \sigma$, получаем:

$$f_R^i = 0, \quad f_R^e = \frac{m_0}{R^2} = \frac{4\pi R_0^2 \cdot \sigma}{R^2}. \quad (61)$$

График функции $f_R(R)$ приведен на рис. 10,б. Согласно (61), компонента f_R поля \vec{f} , нормальная к поверхностной массе, терпит на этой массе разрыв, равный $4\pi\sigma$, (см. также выражения (52), (53)).

Найдем потенциал U поля \vec{f} «сферической поверхности» (однородного простого слоя на поверхности сферы с радиусом R_0), определяемого выражениями (59), (61). Согласно (59), (25) или (18) потенциал U сферически симметричного поля \vec{f} – функция координаты R : $U=U(R)$. Выполняя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены при выводе выражения (48), из (29) при $\vec{f} = \vec{1}_R \cdot f_R$ получаем:

$$U(R) = 2\pi\sigma \int_R^{R_\phi} f_R dR + U(R_\phi). \quad (62)$$

Согласно (61), подынтегральную функцию в (62) в областях пространства V_i и V_e определяют разные выражения. Определим сначала потенциал U_e в области V_e . Полагая, что $U_e=0$ при $R \rightarrow \infty$, из (62), (61) получаем:

$$U_e = \int_R^\infty f_R^e dR + 0 = m_0/R = 4\pi R_0^2 \sigma / R. \quad (63)$$

Из (63) следует, что при $R=R_0$ потенциал $U_e(R_0) = 4\pi\sigma R_0$. Учтем непрерывность потенциала U на поверхностной массе с плотностью σ (простом слое): $U_i(R_0) = U_e(R_0) = U(R_0)$, где $U(R_0)$ – потенциал на простом слое (на любой из сторон этого слоя). Из (62), (61) для потенциала U в области V_i получаем:

$$U_i = \int_R^{R_0} f_R^i dR + U(R_0) = U(R_0) = 4\pi\sigma R_0. \quad (64)$$

Согласно (64), область V_i – эквипотенциальна, то есть потенциал U_i – одинаков во всех точках области пространства V_i (не зависит от координат точки наблюдения a в этой области). Это – понятно, так как в соответствии с (25), (61) $\text{grad}U_i = -\vec{f}_i = 0$.

На рис. 10,в,д показаны графики функций $f_R(R)$ и $U(R)$ при разных радиусах поверхности S_0 и одинаковой поверхностной плотности σ . На

рис. 10,г,е сопоставлены графики функций $f_R(R)$ и $U(R)$ для случаев, когда одинаковые по величине m_0 поверхностные массы лежат на сферических поверхностях S_0 с различными радиусами R_0 . На рис. 10,г,е видно, что в соответствии с (61), (63) в области V_e величины f_R и U зависят только от массы $m_0=4\pi R_0^2\sigma$ и расстояния R от центра этой массы до точки наблюдения. Согласно (31), (61), поле однородной поверхностной массы m_0 в форме сферы с центром в точке O - такое же снаружи этой сферы (в области V_e), какое создавала бы точечная масса m_0 , расположенная в точке O .

2.5. ПОЛЕ ОБЪЕМНЫХ МАСС

Как уже было отмечено выше, если мы не изучаем влияние на различные поля отдельных атомов или молекул, а рассматриваем поле его "макроскопических" источников, то физически реальной «массой», как источника статического поля, является масса объемная. Такую массу характеризует объемная плотность $\delta=dm/dV$ (см. раздел 2.1). Соответственно, элементарную объемную массу dm в элементе объема dV определяет выражение: $dm=\delta dV$.

Согласно (22), в точке наблюдения a поле \vec{df} элементарной объемной массы dm (с центром в точке q), скалярную компоненту df_l этого поля и компоненту f_l поля \vec{f} объемной массы, находящейся в области V , определяют выражения:

$$\vec{df}(a) = \frac{\delta dV \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_l(a) = \frac{\delta dV}{L_{qa}^2} \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l), \quad f_l(a) = \int_V df_l,$$

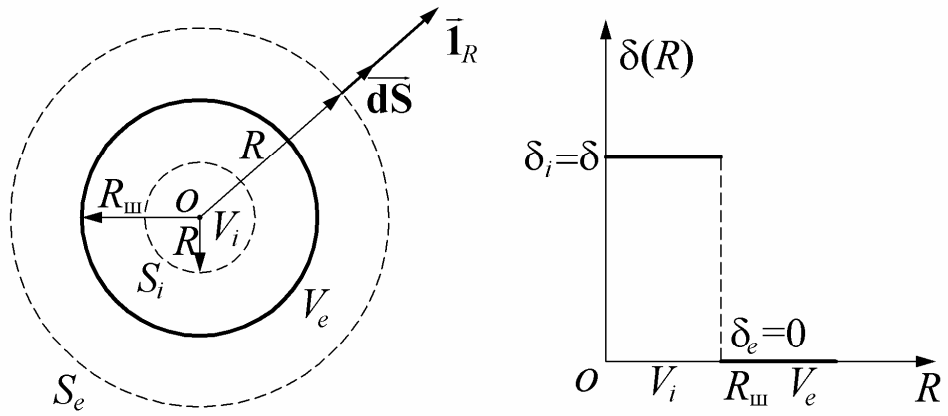
где $\delta=\delta(q)$, а при интегрировании точка q «пробегаёт» область V . В частности, в декартовых координатах x, y, z для скалярной компоненты f_x поля \vec{f} такой объемной массы имеем:

$$f_x(a) = \int_V \frac{\delta(q) \cdot (x_a - x_q) \cdot dx_q dy_q dz_q}{\left[(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2 \right]^{3/2}}.$$

Если объемная масса имеет простую (симметричную) форму, то компоненты ее поля \vec{f} бывает проще вычислить не на основе приведенного выше выражения для f_l , а пользуясь уравнениями (24) или (24'). Определим поле \vec{f} нескольких таких симметричных однородных объемных масс.

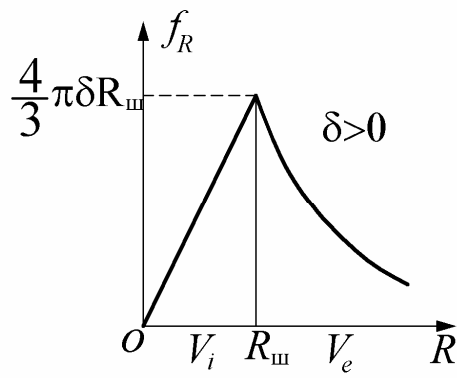
Поле шара

Задача 14. Статическое поле \vec{f} создает однородная объемная масса в форме шара с радиусом $R_{ш}$ (рис. 11,а). Внутри шара (область V_i) объемная плотность $\delta_i=\delta=\text{const}$; вне шара (область V_e) $\delta_e=0$. Требуется определить поле \vec{f} и его потенциал U в областях V_i и V_e .

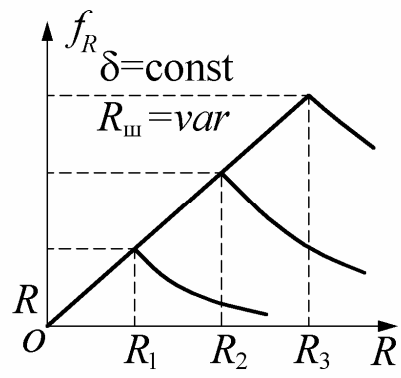


а.

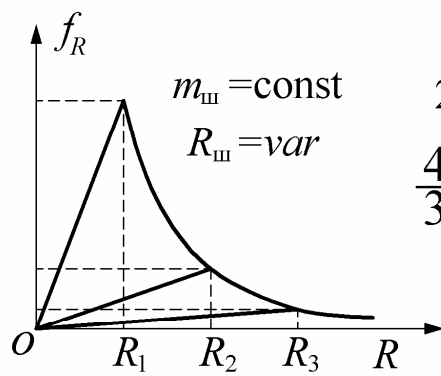
б.



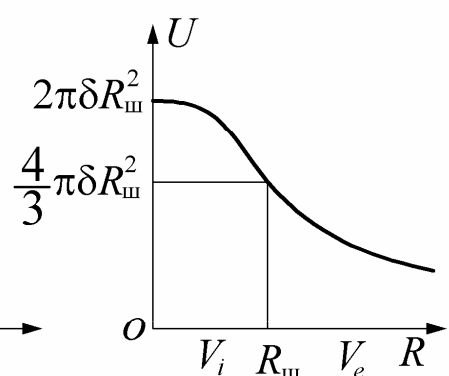
в.



г.



д.



е.

Рис.11. Поле шара.

Решение. Поместим начало сферических координат O в центр шара. Тогда $\delta=\delta(R)$ (рис. 11,б). Однородная масса в форме шара и ее поле \vec{f} – сферически симметричны, следовательно, справедливы равенства (59). Решим задачу способом, примененным в задаче 13. Для поля \vec{f} , удовлетворяющего условиям (59), уравнение Гаусса (24') принимает более простой вид (60). Применяя (60) к показанным на рис. 11,а сферическим поверхностям S_i и S_e (радиусы R которых соответственно меньше и больше $R_{\text{ш}}$) и учитывая, что массы m_V , в областях V , ограниченных этими поверхностями, соответственно равны $(4/3)\pi R^3 \cdot \delta$ и $(4/3)\pi R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta$, получаем:

$$f_R^i = (4/3)\pi\delta R, \quad f_R^e = \frac{(4/3)\pi R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta}{R^2} = \frac{m_{\text{ш}}}{R^2}, \quad (65)$$

где f_R^i и f_R^e – R -компонента поля \vec{f} в областях V_i и V_e соответственно, а $m_{\text{ш}}=(4/3)\pi R_{\text{ш}}^3 \delta$ – масса однородного шара с плотностью δ и с радиусом $R_{\text{ш}}$.

Выражения (59), (65) определяют поле \vec{f} , создаваемое однородной объемной массой в форме шара. График функции $f_R(R)$ при $\delta>0$ приведен на рис. 11,в. Согласно (65), поле \vec{f} равно нулю в начале координат O – центре симметрии объемной массы в виде однородного шара, и непрерывно в этой массе и на ее границе. Величина $|f_R|$ имеет максимум при $R=R_{\text{ш}}$ (на поверхности шара).

Как следует из (65), величину f_R^i полностью определяют значения δ и R , а величину f_R^e – значения $m_{\text{ш}}$ и R . Это иллюстрируют рис. 11,г,д, где показаны семейства кривых $f_R(R)$ при нескольких значениях $R_{\text{ш}}$. Графики на рис. 11,г соответствуют случаю, когда массы в форме шаров различного радиуса имеют одинаковую плотность δ , а кривые на рис. 11,д – случаю, когда массы $m_{\text{ш}}$ таких шаров – одинаковы (а их плотность δ , соответственно, имеет разные значения). На рис. 11,д видно, что при $m_{\text{ш}}=\text{const}$ в области V_e , внешней для всех этих масс, поля масс $m_{\text{ш}}$ (одинаковых по величине $m_{\text{ш}}$, но разных по радиусу $R_{\text{ш}}$) – совпадают. Следовательно, в этой области нельзя отличить одно из этих полей от другого. Согласно выражениям (65) для f_R^e и (31) для f_R , поле, создаваемое массой $m_{\text{ш}}$ в форме шара с центром в точке O , вне этой массы совпадает с полем точечной массы $m=m_{\text{ш}}$ расположенной в точке O .

Определим потенциал поля шара. При выполнении условия (59) можем воспользоваться выражением (62). Полагая, что $U=0$ при $R\rightarrow\infty$, из (62), (65), получаем для потенциала U_e в области V_e :

$$U_e = \int_R^{\infty} f_R^e dR + 0 = \frac{m_{\text{ш}}}{R} = \frac{(4/3)\pi R_{\text{ш}}^3 \delta}{R}. \quad (66)$$

На поверхности шара (при $R=R_{\text{ш}}$) имеем $U(R_{\text{ш}}) = (4/3)\pi R_{\text{ш}}^2 \delta$. При учете того, что потенциал U статического поля \vec{f} непрерывен в объемной массе и

на поверхности такой массы, для потенциала U_i внутри шара ($R < R_{\text{ш}}$) из (62), (65) получаем

$$U_i = \int_R^{R_{\text{ш}}} f_R^i dR + U(R_{\text{ш}}) = 2\pi\delta R_{\text{ш}}^2 - \frac{2}{3}\pi\delta R^2. \quad (67)$$

Зависимость $U(R)$ при $\delta > 0$ показана на рис. 11,е. Согласно выражениям (66), (67), значение $|U|$ максимально в центре шара. Из этих выражений следует также, что $[U(0) - U(R_{\text{ш}})] = (1/2) \cdot [U(R_{\text{ш}}) - U(\infty)]$. То есть (в отсутствие других источников поля \vec{f} и при любых значениях $R_{\text{ш}}$ и δ) разность потенциалов ΔU между центром однородного шара и его поверхностью равна половине разности потенциалов ΔU между поверхностью шара и бесконечно удаленными от него точками.

Поле пласта

Задача 15. Источником статического поля \vec{f} является однородная объемная масса ($\delta = \text{const}$) в виде плоскопараллельного слоя (пласта) с мощностью h . Такой пласт можем рассматривать, например, как прямой круговой цилиндр с высотой h и с бесконечно большим радиусом $r_{\text{ц}}$ (рис. 12,а). Требуется определить поле \vec{f} пласта.

Решение. Очевидно, что однородная масса в виде пласта и ее поле цилиндрически-симметричны относительно произвольной нормали n к границам пласта и зеркально-симметричны относительно плоскости, лежащей посередине пласта. Введем декартову, либо цилиндрическую систему координат с осью Z , ортогональной границам пласта, и плоскостью $z=0$ посередине пласта (рис. 12,б). При этом объемная плотность $\delta = \delta(z)$ (рис. 12,в). Из симметрии поля относительно оси Z и плоскости $z=0$, а также - непрерывности поля \vec{f} объемной массы следует, что

$$\vec{f} = \vec{1}_z f_z(z), \quad (68)$$

$$f_z(0) = 0. \quad (69)$$

Границы пласта делят пространство на три области: V_1, V_2, V_3 (рис. 12,б). В областях V_1 и V_3 – плотность масс $\delta_{1,3} = 0$; в области V_2 плотность $\delta_2 = \delta = \text{const}$. Определим поле \vec{f} пласта, решая уравнение (24): $\text{div} \vec{f} = 4\pi\delta$, которое, согласно (12), для поля \vec{f} пласта, удовлетворяющего условию (68), принимает вид: $df_z/dz = 4\pi\delta(z)$. Тогда для областей V_2 и V_1, V_3 имеем соответственно:

$$df_z^{(2)}/dz = 4\pi\delta, \text{ где } \delta = \text{const}, \text{ и } df_z^{(1)}/dz = 0, \quad df_z^{(3)}/dz = 0, \quad (70)$$

где в первом из уравнений (70) δ – объемная плотность пласта, а $f_z^{(1,2,3)}$ – z -компонента поля \vec{f} в областях V_1, V_2, V_3 . Решения уравнений (70): $f_z^{(1)} = C_1, \quad f_z^{(2)} = 4\pi\delta z + C_2, \quad f_z^{(3)} = C_3$, где C_1, C_2, C_3 – постоянные, подлежащие определению из условий задачи. Из равенства (69) следует, что

$C_2 = 0$. Требуя, чтобы на границах пласта (при $z = \pm h/2$) поле \vec{f} было непрерывно:

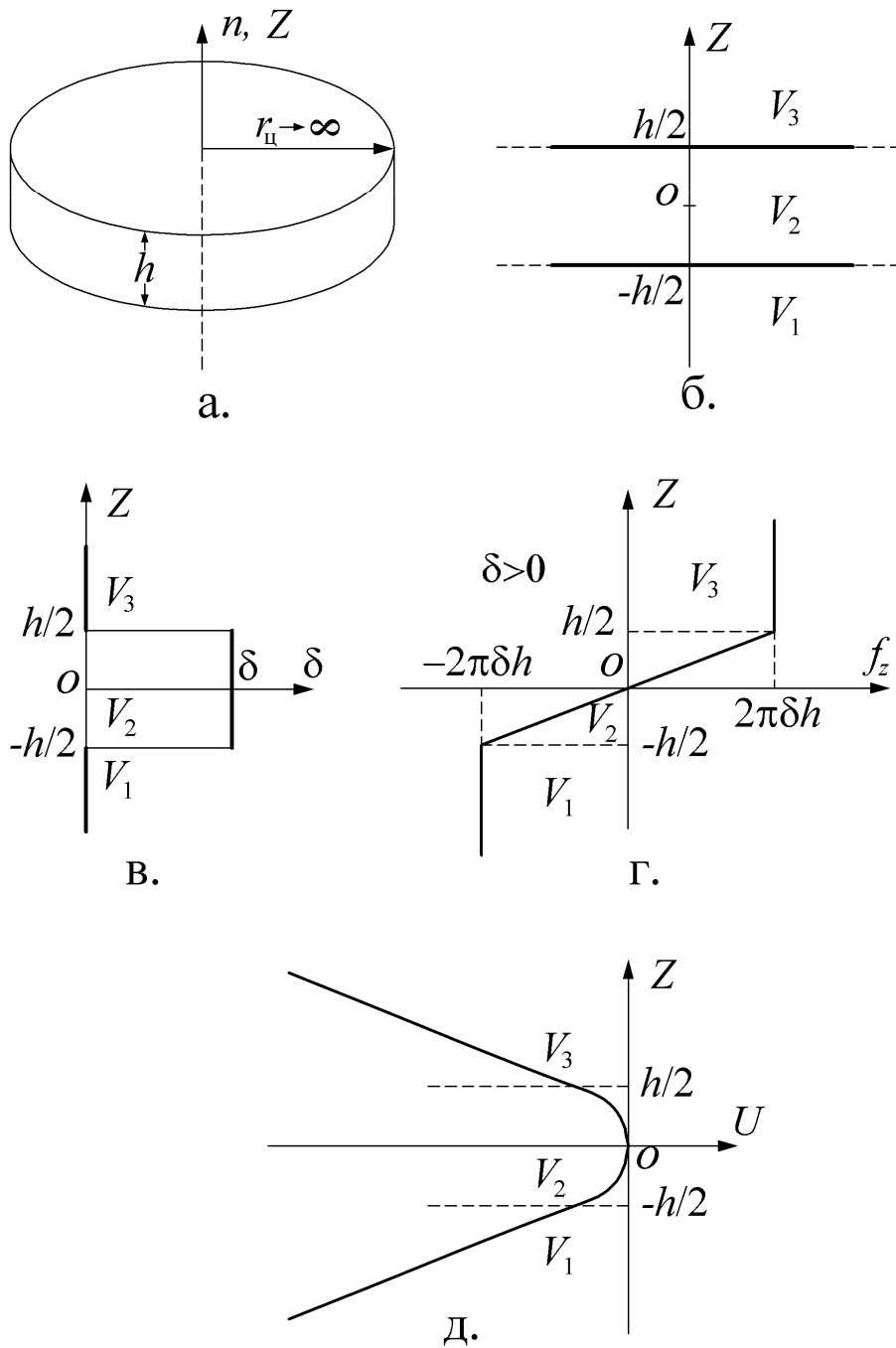


Рис.12. Поле пласта.

$$f_z^{(1)}(-h/2) = f_z^{(2)}(-h/2), \quad f_z^{(3)}(h/2) = f_z^{(2)}(h/2),$$

можем определяем постоянные C_1, C_3 : $C_1 = -2\pi\delta h$, $C_3 = 2\pi\delta h$. Таким образом, для областей V_1, V_2, V_3 соответственно получаем:

$$f_z^{(1)} = -2\pi\delta h, \quad f_z^{(2)} = 4\pi\delta z, \quad f_z^{(3)} = 2\pi\delta h. \quad (71)$$

График функции $f_z(z)$ показан на рис. 12,г. Вне пласта (в областях V_1 и V_3) его поле $\vec{f} = \vec{1}_z \cdot 2\pi\delta h(z/|z|)$ совпадает с полем плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = \delta h$. (см. (53)) и не убывает с удалением от источника поля.

Определим потенциал U поля \vec{f} пласта. Из (68) следует, что $U = U(z)$, то есть эквипотенциальные поверхности $U = \text{const}$ – плоскости $z = \text{const}$. Тогда при $\vec{f} = \vec{1}_z f_z$ из (29) получаем выражение (54):

$$U(z) = \int_z^{z_\phi} f_z dz + U(z_\phi).$$

Выберем нулевое значение потенциала ($U=0$) при $z=0$ (в области V_2) и определим потенциал U в областях V_2 ($|z| < h/2$), V_3 ($z > h/2$) и V_1 ($z < -h/2$). Согласно (71), (54),

$$U_2 = \int_z^0 f_z^{(2)} dz + 0 = 4\pi\delta \int_z^0 z dz = -2\pi\delta z^2.$$

На границах пласта – при $z = \pm h/2$ имеем $U(\pm h/2) = -\pi\delta h^2/2$. При учете того, что потенциал U непрерывен в объемной массе и на ее границе, из (71), (54) получаем:

$$U_3 = \int_z^{h/2} f_z^{(3)} dz + U(h/2) = \pi\delta h^2/2 - 2\pi\delta z,$$

$$U_1 = \int_z^{-h/2} f_z^{(1)} dz + U(-h/2) = \pi\delta h^2/2 + 2\pi\delta z.$$

Итак,

$$\text{при } |z| < h/2, \quad U = -2\pi\delta z^2, \quad \text{при } |z| > h/2, \quad U = \pi\delta h^2/2 - 2\pi\delta h|z|. \quad (72)$$

График функции $U(z)$, которую определяют выражения (72), показан на рис. 12,д.

Поле цилиндра

Задача 16. Поле \vec{f} создает однородная объемная масса ($\delta = \text{const}$) в виде кругового цилиндра с радиусом $r_{\text{ц}}$ и неограниченного по высоте. Граница цилиндра делит пространство на области V_i и V_e (рис. 13,а). Определим поле \vec{f} и потенциал U поля такой массы («цилиндра»).

Решение. Введем цилиндрическую систему координат с осью Z , совпадающей с осью цилиндра. Объемную плотность $\delta = \delta(r)$ определяют в об-

ластях V_i и V_e выражения: $\delta_i = \delta = \text{const}$, $\delta_e = 0$ (рис. 13,б). Вследствие симметрии поля цилиндра относительно оси Z , симметрии поля относительно любой плоскости $z = \text{const}$ и непрерывности поля \vec{f} объемной массы имеем:

$$\vec{f} = \vec{1}_r f_r, \quad f_r = f_r(r), \quad (73)$$

$$U = U(r), \quad (74)$$

$$f_r = 0, \quad \text{при } r=0. \quad (75)$$

Определим поле \vec{f} и потенциал U поля цилиндра, решая уравнение Пуассона (27) для потенциала U , которое в области V_e (где $\delta=0$) переходит в уравнение Лапласа (28). Учтем, что, согласно (26),

$$\text{при } U=U(r) \text{ имеем: } f_r = -\frac{dU}{dr}. \quad (76)$$

Из выражений (27), (15) при условии (74) следует, что

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) \right] = -4\pi\delta, \quad \text{где } \delta = \delta(r).$$

Тогда для областей V_i ($r < r_{\text{ц}}$) и V_e ($r > r_{\text{ц}}$) соответственно получаем:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_i}{dr} \right) \right] = -4\pi\delta; \quad \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_e}{dr} \right) \right] = 0, \quad (77)$$

где $\delta = \delta_i = \text{const}$.

Из уравнения (77) для потенциала U_i внутри цилиндра следует, что

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_i}{dr} \right) = -4\pi\delta r; \quad r \frac{dU_i}{dr} = -2\pi\delta r^2 + C_1.$$

Принимая во внимание равенство (76) и условие (75), получаем: $C_1 = 0$ и

$$f_r^i = 2\pi\delta r. \quad (78)$$

Из полученного выше дифференциального уравнения первого порядка для потенциала U_i можем определить U_i с точностью до постоянно слагаемого C_2 :

$$U_i = -\pi\delta r^2 + C_2. \quad (79)$$

Из уравнения (77) для U_e при условии (76) получаем:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_e}{dr} \right) = 0; \quad \frac{dU_e}{dr} = \frac{C_3}{r}; \quad f_r^e = -\frac{C_3}{r},$$

где $C_3 = \text{const}$.

При $r = r_{\text{ц}}$ имеем: $f_r^e(r_{\text{ц}}) = f_r^i(r_{\text{ц}})$, то есть $-C_3/r_{\text{ц}} = 2\pi\delta r_{\text{ц}}$, $C_3 = -2\pi\delta r_{\text{ц}}^2$.

Следовательно,

$$f_r^e = 2\pi\delta r_{\text{ц}}^2 / r. \quad (80)$$

Выражения (73), (78), (80) определяют поле \vec{f} “цилиндра” однородной массы в виде кругового цилиндра, неограниченного по высоте.

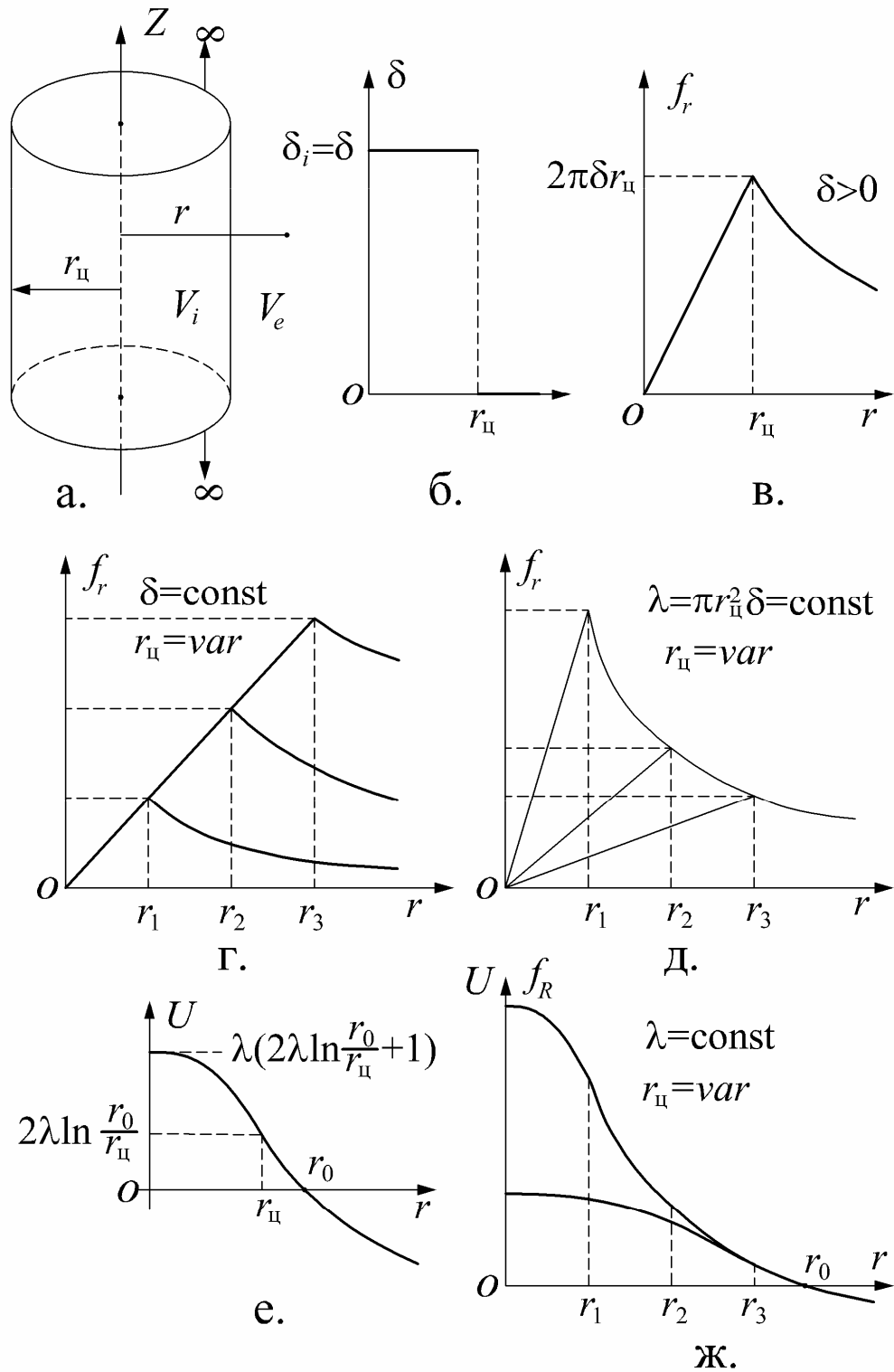


Рис. 13. Поле цилиндра.

Из дифференциального уравнения первого порядка для U_e следует, что

$$U_e = C_3 \ln r + C_4 = 2\pi\delta r_{\text{ц}}^2 \ln r + C_4, \quad (81)$$

где $C_4 = \text{const}$.

Выражения (79), (81) определяют потенциал $U(r)$ в областях V_i, V_e с точностью до постоянных слагаемых C_2, C_4 . Эти постоянные сможем определить, если выберем нулевое значение потенциала ($U=0$) при некотором значении координаты r (при каком либо расстоянии r от оси цилиндра) и учтем, что на границе цилиндра потенциал U - непрерывен ($U_i=U_e$ при $r=r_{\text{ц}}$). Выберем $U=0$ при $r=r_0 > r_{\text{ц}}$ (в области V_e). Тогда из выражения (81) получаем:

$$U_e = 2\pi r_{\text{ц}}^2 \delta \cdot \ln \frac{r_0}{r}. \quad (82)$$

Требую, чтобы при $r=r_{\text{ц}}$ выполнялось условие $U_i=U_e$, из выражений (79) и (82) получаем: $C_2 = 2\pi r_{\text{ц}}^2 \delta \cdot \ln(r_0/r_{\text{ц}}) + \pi r_{\text{ц}}^2 \delta$, следовательно

$$U_i = 2\pi r_{\text{ц}}^2 \delta \cdot \ln(r_0/r_{\text{ц}}) + \pi \delta (r_{\text{ц}}^2 - r^2). \quad (83)$$

Произведение $\pi r_{\text{ц}}^2 \delta$, входящее в формулы (80), (82), (83), равно массе единицы длины цилиндра, то есть его линейной плотности λ . Согласно (47), (49), (80), (82), поле цилиндра в области V_e совпадает с полем расположенной на оси цилиндра неограниченной однородной прямолинейной массы с линейной плотностью $\lambda = \pi r_{\text{ц}}^2 \cdot \delta$.

Графики функций $f_r(r)$ и $U(r)$ приведены на рис. 13,в-ж. На рис. 13,д,ж видно, что в соответствии с (80), (82) в области V_e ($r > r_{\text{ц}}$) функции f_r^e и U_e полностью определяют значения λ и r . При $r < r_{\text{ц}}$ (в области V_i) поле \vec{f} цилиндра зависит только от δ и расстояния r до оси цилиндра (см. выражение (78) и рис. 13,г).

2.6. ЗАДАНИЯ

1. Получить формулы для потенциала U и компонент f_x, f_y, f_z поля \vec{f} точечной массы m , расположенной в начало O декартовых координат.

2. На основе выражений (40) для компонент поля \vec{f} диполя получить формулы, позволяющие определить абсолютную величину p момента \vec{p} диполя и расстояние (r или z) от диполя до проходящего над ним прямого профиля по абсциссам и ординатам характерных точек на графиках, показанных на рис. 5,г,д,ж,з. См. задачу 3.

3. Определить потенциал U и компоненту f_z поля \vec{f} однородного двойного слоя в форме круга S , лежащего в плоскости $z=0$ цилиндрических координат, на оси Z этого круга. При решении задачи следует учесть, что элемент двойного слоя на площадке dS аналогичен диполю с моментом $dp = \eta \cdot dS$. См. задачи 12, 5, 10.

4. Определить поле \vec{f} однородной массы в форме шара путем решения уравнения (24), то есть решить задачу 14 способом, примененным при решении задачи 15.

5. Определить массу m неоднородного шара с радиусом $R_{ш}$ и сферически симметричной плотностью $\delta(R)$, а также поле \vec{f} этой массы. При $R < R_{ш}$ $\delta_i(R) = \delta_0[1 - (R/R_{ш})^2]$, где δ_0 – плотность в центре шара. При $R > R_{ш}$ $\delta_e = 0$. См. задачу 14.

6. Определить поле \vec{f} однородной массы в виде плоскопараллельного слоя (пласта) с плотностью δ на основе уравнения Гаусса (24'), то есть решить задачу 15 способом, примененным при решении задач 13, 14. В качестве замкнутой поверхности $S[V]$ следует взять поверхность прямого цилиндра (с высотой $2|z|$ и произвольной площадью S_0 оснований), симметричного относительно середины пласта.

7. Определить поле \vec{f} однородной массы в виде неограниченного по высоте кругового цилиндра с плотностью δ путем решения уравнения (24'), то есть решить задачу 16 способом, примененным при решении задач 13, 14. В качестве замкнутой поверхности $S[V]$ следует взять поверхность прямого кругового цилиндра (произвольной высоты) с осью по оси симметрии массы, создающей поле.

8. Решить задачу 16 с заменой $\delta_i = \delta = \text{const}$ на $\delta_i(r) = \delta_0[1 - (r/r_{ц})]$, где δ_0 – плотность δ на оси цилиндра. Найти линейную плотность λ такой массы.

9. Определить поле \vec{f} (в точке с координатой z) на оси симметрии Z однородной массы в виде прямого кругового цилиндра с высотой h и радиусом основания $r_{ц}$ (см. рис. 12, а, б при $r_{ц} \neq \infty$). Задачу можно решить, интегрируя (по координате z_q) поле дисков с радиусами $r_{ц}$ и высотами dz_q . Поле $d\vec{f}$ диска определяется по аналогии с полем \vec{f} круга (см. задачу 10).

3. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ; СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

3.1. ПОЯСНЕНИЯ

Средой называют расположенную определенным образом в пространстве совокупность тел (объектов), которые сами по себе могут не создавать поля, но оказывают влияние на поле. Тела, не создающие гравитационного поля, но оказывающие на него влияние, не известны. На постоянное (во времени) магнитное поле оказывают влияние магнетики, а на постоянное электрическое поле – проводники и диэлектрики.

Постоянное электрическое поле – это кулоново поле; его создают заряды, плотность которых не меняется со временем. При этом различают электростатическое и стационарное электрическое поле. Электростатиче-

ское поле создают неподвижные заряды. Стационарным называют электрическое поле в проводящей среде, под действием которого происходит направленное движение свободных электрических зарядов (ионов, электронов) – постоянный электрический ток. Электрическое поле определяет его напряженность \vec{E} , а также вектор электрической индукции (смещения) \vec{D} . Электрический ток (в объемном проводнике) характеризует вектор плотности тока \vec{j} .

В магнитостатике (по формальной аналогии с электростатикой) бывает удобно пользоваться представлениями о физически фиктивных магнитных массах (магнитных полюсах), как источниках поля. Характеристиками магнитного поля являются его напряженность \vec{H} и вектор магнитной индукции \vec{B} .

Основные формулы. Прямая задача

Все выражения, приведенные в разделе 2 для поля \vec{f} , справедливы и для рассматриваемых здесь полей \vec{E} , \vec{H} (и их потенциалов U), если умножить выражения для \vec{f} на соответствующие константы. Напомним, что, согласно (19'), $\vec{E} = [1/(4\pi\epsilon_0)] \cdot \vec{f}$ и $\vec{H} = [1/(4\pi)] \cdot \vec{f}$.

Однако при расчете полей \vec{E} ; \vec{H} в присутствии среды не все возбудители (источники) поля можно полагать заданными. Часть этих возбудителей зависит от поля и может быть определена только после его вычисления. При учете этого обстоятельства, системы уравнений рассматриваемых полей в дифференциальной форме удобно представить в следующем виде.

<i>Электростатическое поле</i>	<i>Магнитостатическое поле</i>	<i>Стационарное электрическое поле</i>	
I. $\text{rot } \vec{E} = 0;$	I. $\text{rot } \vec{H} = 0;$	I. $\text{rot } \vec{E} = 0;$	(84)
II. $\text{div } \vec{D} = \delta_{\text{свб}};$	II. $\text{div } \vec{B} = 0;$	II. $\text{div } \vec{j} = 0,$	(85)

где $\delta_{\text{свб}}$ – объемная плотность свободных электрических зарядов – ионов, электронов (см.[1], стр.143). Уравнения (84), (85) дополняют уравнениями связи:

$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0;$	$\vec{j} = \gamma \left(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}} \right),$	(86)
--------------------------------	--	---	------

где $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$ и $\mu_a = \mu_0 \mu$ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости, ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные (см. раздел 2.1), \vec{J}^0 – вектор постоянной (остаточной) намагниченности, $\gamma = 1/\rho$ – удельная электропроводность, ρ – удельное электрическое сопротивление, $\vec{E}^{\text{стр}}$ – напряженность поля сторонних (не кулоновых) сил, под действием которых (совместно с действием кулоновых сил с напряженностью \vec{E}), согласно (86), в проводящей

среде (при $\gamma > 0$) существует электрический ток с плотностью \vec{j} (см. [1], стр.192). Величины ϵ , γ и μ , характеризующие среду как диэлектрик, проводник и магнетик, называют соответственно электрическими и магнитными параметрами среды.

Из (84) следует, что электростатическое и стационарное электрическое поле \vec{E} , а также - магнитостатическое поле \vec{H} – поля потенциальные, для них, аналогично (25), можно ввести скалярный потенциал U :

$$\vec{E} = -\text{grad}U; \quad \vec{H} = -\text{grad}U. \quad (87)$$

Согласно (87), (25), (26) расчет векторных полей \vec{E} ; \vec{H} можно свести к нахождению скалярного поля U и последующему дифференцированию. Подставляя (86), (87) в (85) и учитывая равенства (9'), (12'), получаем для потенциалов U рассматриваемых здесь полей уравнения:

$(\nabla(\epsilon \nabla U)) = -\delta_{\text{свб}}/\epsilon_0;$	$(\nabla(\mu \nabla U)) = -\delta^0;$	$(\nabla(\gamma \nabla U)) = \text{div}(\gamma \vec{E}^{\text{стр}}),$	(88)
--	---------------------------------------	--	------

где; $\delta^0 = -\text{div} \vec{J}^0$. Соответственно, при $\nabla \epsilon = 0$, $\delta_{\text{свб}} = 0$; $\nabla \mu = 0$, $\text{div} \vec{J}^0 = 0$; $\nabla \gamma = 0$, $\text{div}(\gamma \vec{E}^{\text{стр}}) = 0$ уравнения (88) для потенциалов электростатического, магнитостатического и стационарного электрического полей становятся уравнениями Лапласа (28): $\nabla^2 U = 0$. Решения уравнения Лапласа называют гармоническими функциями.

Равенства $\nabla \epsilon = 0$, $\nabla \mu = 0$, $\nabla \gamma = 0$ ($\text{grad} \epsilon = 0$, $\text{grad} \mu = 0$, $\text{grad} \gamma = 0$) означают, что среда однородна по соответствующим параметрам. Случай, когда эти равенства справедливы во всем пространстве, соответствует безграничной однородной модели среды. Кусочно-однородная модель среды состоит из порознь однородных областей пространства. Поверхность, на которой параметр среды терпит разрыв, называют поверхностью раздела или границей.

Прямая задача теории рассматриваемых полей состоит в нахождении решений уравнений (88) для U (в частном случае – уравнения Лапласа), удовлетворяющих ряду условий, о которых будет сказано ниже. При этом предполагается, что известны модель среды (распределение параметров среды: ϵ , μ или γ в пространстве) и те величины, которые не зависят от искомого поля (\vec{E} ; \vec{H}) и могут быть произвольно заданы при постановке прямой задачи. Такими величинами могут быть: при расчете электростатического поля в присутствии диэлектриков – свободные заряды или их поле; при расчете магнитостатического поля – постоянные магниты или их поле; при расчете стационарного электрического поля – стороннее поле $\vec{E}^{\text{стр}}$ или некоторые данные, заменяющие сведения о нем: положение и эмиссии токовых электродов или создаваемое при помощи электродов "первичное" поле (см. раздел 3.3) и т. д.

При сравнении уравнений (88) для потенциалов рассматриваемых полей и учете сделанных выше замечаний ясно, что потенциалы электростатического, магнитостатического и стационарного электрического поля удовлетворяют, в сущности, одинаковым уравнениям, а прямые задачи теории этих полей математически идентичны. Поэтому далее будем более подробно рассматривать одно из этих полей – стационарное электрическое поле \vec{E} . Согласно (87), (88), для перехода от выражений, определяющих поле \vec{E} , к соответствующим формулам, например для магнитостатического поля \vec{H} , требуется выполнить замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}; \quad \gamma \rightarrow \mu; \quad \gamma \vec{E}^{\text{стр}} \rightarrow \vec{J}^0 \quad (89)$$

Как уже было отмечено, характеристикой реального электрического тока (в объемном проводнике) является вектор плотности тока \vec{j} . Векторные линии l_j поля \vec{j} называют токовыми линиями. Поток вектора \vec{j} через поверхность S : $I_S = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{dS})$. Если на всей поверхности S углы α между

векторами \vec{j} и нормальными n к S не превышают $\pi/2$, то $I_S = I$, а если эти углы $\alpha \geq \pi/2$, то $I_S = -I$, где I – электрический ток (сила тока) через поверхность S .

В теории стационарного электрического поля вводят понятие необъемных токов: линейных и поверхностных (см.[1], стр.178–181). Например, электрический ток вдоль вытянутого (по линии l) проводника с малым сечением ΔS при достаточно малой величине ΔS можно заменить линейным током I по линии l , полагая $\Delta S \rightarrow 0$, $j = I/\Delta S \rightarrow \infty$, $I = \text{const}$.

Интегральными формами уравнений (84), (85) для стационарного электрического поля являются уравнения:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \oint_l (\vec{E} \cdot \vec{dl}) = 0, \\ \text{II.} \quad & \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{dS}) = I_S = 0, \end{aligned} \quad (90)$$

согласно которым в случае стационарного электрического поля циркуляция вектора \vec{E} и поток вектора \vec{j} через замкнутую поверхность S всегда равны нулю. Выражения (85), (90) для вектора \vec{j} называют уравнениями непрерывности постоянного электрического тока соответственно в дифференциальной и интегральной формах.

В тех областях пространства, где $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ (во «внешних» частях цепей электрического тока), уравнение (86) для стационарного электрического поля вырождается в более простое уравнение - закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \vec{E}/\rho. \quad (91)$$

Этот закон (который обычно справедлив для многих проводников, включая горные породы) устанавливает прямую пропорциональную зависи-

мость между напряженностью электрического поля \vec{E} и плотностью \vec{j} электрического тока (вызванного этим полем \vec{E}) в данной точке пространства с удельной электропроводностью $\gamma=1/\rho$.

Поле у особой поверхности

Особыми поверхностями S_{oc} стационарного электрического поля \vec{E} являются поверхности, несущие простые или двойные электрические слои (см. раздел 1.1 и задачи 11, 12). На поверхностях S_{oc} поля $\vec{E} = -\nabla U$, \vec{j} или U могут терпеть разрыв. Дифференциальные уравнения (84), (85), (88) на таких поверхностях теряют смысл и должны быть заменены соответствующими уравнениями в поверхностной форме (см. [1], стр. 28- 33, 115-118, 149- 150, 184 и др.). Далее будем полагать, что поверхность S_{oc} разделяет области пространства V_1 и V_2 ; “1” и “2” – расположенные на бесконечно-малом расстоянии друг от друга «соседние» точки, принадлежащие соответственно областям V_1 и V_2 и расположенные на разных сторонах поверхности S_{oc} . Будем также полагать, что нормаль n к S_{oc} направлена из области V_1 в область V_2 .

Как меняется потенциал U поля \vec{E} при пересечении точкой наблюдения a поверхности S_{oc} ? Из решений задач 11, 12 следовало, что потенциал U поля \vec{f} непрерывен на простом слое с поверхностной плотностью σ , но терпит разрыв, равный $4\pi\cdot\eta$, на двойном слое с поверхностной плотностью дипольных моментов η . Следовательно, для потенциала U поля \vec{E} при учете равенства $\vec{E} = [1/(4\pi\epsilon_0)]\vec{f}$ имеем:

$$U_2 - U_1 = \eta/\epsilon_0 = e^{ктн}, \quad (92)$$

где U_1, U_2 – потенциалы поля \vec{E} в точках “1” и “2”; $e^{ктн}$ – контактная э.д.с., поддерживающая существование двойных электрических слоев в проводящей среде на особых поверхностях (на которых имеется стороннее поле $\vec{E}^{стр}$), см.[1], стр.194–196. Выражение (92) записано в предположении, что (при $\eta>0$) положительная обкладка двойного слоя обращена к области V_2 .

Если на S_{oc} отсутствует контактная э.д.с. $e^{ктн}$, то, согласно (92), на такой поверхности потенциал U – непрерывен:

$$U_2 = U_1. \quad (93)$$

Согласно результатам решения задач 10, 11, нормальная к S_{oc} компонента f_n поля \vec{f} терпит на этой поверхности разрыв, равный $4\pi\cdot\sigma$ (см, например, (52)). Тогда для поля \vec{E} в точках “1” и “2” имеем:

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \sigma/\epsilon_0. \quad (94)$$

При ограниченных значениях тангенциальной к поверхности S_{oc} компоненты j_τ на этой поверхности (чему соответствует отсутствие на S_{oc} необъемных токов) поверхностная форма уравнения непрерывности постоянного тока может быть записана в следующем виде:

$$\vec{j}_n^{(2)} = \vec{j}_n^{(1)}. \quad (95)$$

Практически для стационарного электрического поля \vec{E} наибольший интерес представляет случай, когда S_{oc} является поверхностью раздела (границей), по разные стороны которой параметр среды γ имеет разные значения. Для поверхностной плотности зарядов σ на такой границе из (91), (94), (95) может быть получено выражение:

$$\sigma = 2\varepsilon_0 \cdot \gamma_{12} \cdot E_n^{cp}, \quad (96)$$

где $\gamma_{12} = k_{12} = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2) = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2)$ - коэффициент контрастности границы S_{oc} , по разные стороны которой (в точках “1” и “2”) удельная электропроводность γ имеет значения γ_1, γ_2 ; $E_n^{cp} = (E_n^{(1)} + E_n^{(2)})/2$ - среднее значение нормальной к S_{oc} скалярной компоненты поля \vec{E} в этих точках. Согласно (96), на поверхности раздела S_{oc} ($\gamma_1 \neq \gamma_2$) при наличии нормальной к этой поверхности компоненты E_n поля γ_1 существует (индуцированный полем \vec{E}) поверхностный заряд (в виде простого слоя с поверхностной плотностью σ). Величина E_n в (96) – это n -компонента фактически действующего на S_{oc} (суммарного) поля \vec{E} , создаваемого всеми зарядами, включая заряды с плотностью σ на S_{oc} . Отсюда следует, что если нам не известно суммарное поле \vec{E} , то (при постановке прямой задачи) не может быть задана (считаться известной) и величина σ на S_{oc} .

Если, в точках “1”, “2” на S_{oc} напряженность стороннего поля $\vec{E}^{стр} = 0$, то, согласно (26), (91), уравнение (95) может быть представлено в следующем виде: $\gamma_1 E_n^{(1)} = \gamma_2 E_n^{(2)}$ или

$$\gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}. \quad (97)$$

О теореме единственности

Решение прямых задач теории стационарного электрического поля обычно сводится к определению потенциала U фактически действующего (суммарного) поля $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}^B$ в среде с известным распределением γ при заданном первичном поле \vec{E}^{Π} или его источниках. Под полем \vec{E}^{Π} при этом обычно понимают поле известных (не зависящих от искомого суммарного поля \vec{E}) зарядов в безграничной однородной среде. Фактически при решении прямой задачи теории стационарного электрического поля требуется

найти вторичное поле $\vec{E}^B = \vec{E} - \vec{E}^{\Pi}$ (или его потенциал U^B), источниками которого являются заряды, индуцированные в местах нарушения однородности среды.

В кусочно-однородных моделях среды источниками поля \vec{E}^B являются заряды в виде простых слоев на границах (поверхностях раздела сред с разной удельной электропроводностью). Поверхностную плотность σ таких зарядов определяет выражение (96). За редким исключением плотность зарядов σ не может быть определена до того, как будет найдено поле \vec{E}^B этих зарядов, так как определение σ требует знания суммарного поля $\vec{E} = \vec{E}^B + \vec{E}^{\Pi}$, нормальная компонента которого входит в правую часть равенства (96).

Поэтому задача определения поля \vec{E}^B (при неизвестном распределении его источников, зависящем от \vec{E}^B) не допускает применения тех «прямых» методов расчета на основе выражений вида (20'), (22), (42), (50'), которыми мы пользовались в разделе 2. Основным приемом, позволяющим получать аналитические решения прямых задач теории стационарного поля (а также электростатического и магнитостатического полей в присутствии среды), является подбор этих решений. Обоснование правомерности такого подбора дают теоремы единственности решения прямых задач (см. [1], стр.53-59, 166-169, 224-228).

Для уверенности в правильности подбора искомого решения прямая задача теории стационарного поля \vec{E} должна быть поставлена как краевая задача, включающая уравнение потенциала U (в общем случае – это уравнение (88)) и дополняющие условия. Если решение задачи проводится для области пространства V , то в соответствии с теоремой единственности дополняющие условия должны содержать:

- 1) краевые условия на границе $S[V]$ области V ;
- 2) условия сопряжения на всех особых поверхностях S_{oc} в области V (если такие поверхности имеются в области V);
- 3) условия у всех особых точек и линий в области V (если такие точки и линии есть в области V).

Необходимость задания краевых условий предопределяет то, что решение прямой задачи должно проводиться не для такой области V , где на фактически может интересоваться поле, а для области V , на всей границе S которой может быть задано (известно из физических условий задачи) одно из следующих трех краевых условий:

$$I. U(p) = \varphi(p); \quad II. \partial U(p)/\partial n = \Psi(p); \quad III. \int_S \gamma(\partial U(p)/\partial n) dS = Q, \quad (98)$$

где Q – известная величина, $\varphi(p)$, $\Psi(p)$ – известные функции положения точки p на поверхности S , n – нормаль к S . Выражения I, II и III в (98) называют соответственно краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го типа. Крае-

вые условия должны быть заданы на всей поверхности $S[V]$, но на разных участках этой поверхности можно задавать условия различного типа.

Часто краевые условия могут быть заданы лишь в бесконечно удаленных точках и называются условиями в бесконечности. В этом случае областью V , для которой приходится ставить и решать краевую задачу, является все пространство.

В соответствии с (92), (97) условия сопряжения (граничные условия) на поверхностях S_{oc} для стационарного электрического поля обычно могут быть выражены равенствами:

$$\text{а) } U_2 - U_1 = e^{ктн}(p), \quad \text{б) } \gamma_2(\partial U_2/\partial n) = \gamma_1(\partial U_1/\partial n), \quad (99)$$

где p произвольная точка на S_{oc} ; "1", "2" – точки, лежащие на разных сторонах S_{oc} на бесконечно малых расстояниях от точки p , $U_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ – значения U и γ в этих точках, n – нормаль к S_{oc} . Если на S_{oc} нет контактной э.д.с. $e^{ктн}$ (и поддерживаемых ею двойных электрических слоев), то первое граничное условие в (99) принимает более простой вид: (93).

Особыми точками и линиями стационарного поля \vec{E} могут быть точечные и линейные электроды, на которых потенциал $U \rightarrow \infty$ (см. задачи 21, 22). Задавая условия у особых точек или линий, надо определить функции, выражающие асимптотическое поведение U при неограниченном приближении точки наблюдения к особым точкам или линиям.

Точные выражения для функций, определяющих асимптотическое поведение U , при задании краевых условий в бесконечности или условий у особых точек и линий, могут быть неизвестны. Требования к точности задаваемых условий можно установить, обратившись к теореме единственности ([1], стр. 53-59). Из доказательства этой теоремы видно, что (в случае стационарного электрического поля) краевые условия должны обеспечивать выполнение равенства $\int_S U'''\gamma(\partial U'''/\partial n)dS = 0$, где $U''' = U' - U''$ -

разность возможных решений U' , U'' уравнения потенциала U , удовлетворяющих дополняющим условиям. В случаях, о которых идет речь, поверхность S с нормалью n – это бесконечно удаленная поверхность или поверхность, окружающая особую точку (линию) и "стянутая" к этой точке (линии). Отсюда следует, что если, например, S - сферическая поверхность с радиусом $R \rightarrow \infty$ (или ее часть), то краевое условие 1-го типа на S для функции U может быть задано с точностью до слагаемого, убывающего при $R \rightarrow \infty$ быстрее, чем $R^{-1/2}$. Тогда функция U''' будет убывать быстрее, чем $R^{-1/2}$ (а функция $\partial U'''/\partial n = \partial U'''/\partial R$ – быстрее, чем $R^{-3/2}$) при $R \rightarrow \infty$, что обеспечит выполнение равенства $\int_S U'''\gamma(\partial U'''/\partial n)dS = 0$.

Согласно теореме единственности, существует лишь одно (правильное) решение прямой задачи, которое удовлетворяет не только уравнению (88), но и дополняющим условиям. Это позволяет свести процесс нахождения решения задачи к подбору решения. При этом правильность полу-

ченных результатов будет гарантирована, если в процессе подбора удалось найти то решение уравнения потенциала, которое удовлетворяет всем дополняющим условиям. Отметим, что это решение для разных частей области V могут выражать разные функции.

Этапы решения задачи

Процесс решения конкретных прямых задач может иметь особенности, зависящие от специфики этих задач и метода, применяемого при подборе решения. Далее при рассмотрении задач будем по возможности придерживаться схемы, при которой постановка и решение задачи разбивается на следующие этапы (шаги).

1. Формулировка условий задачи.

2. Выбор системы координат, проводимый с учетом конфигурации особых поверхностей, симметрии заданных возбудителей поля (или первичного поля) и модели среда. Если совокупность заданных возбудителей поля и модели среда симметрична, то соответствующую симметрию имеют все возбудители поля и искомое поле (\vec{E} , \vec{H} , U).

3. Формулировка условий, упрощающих задачу и ограничивающих круг возможных решений, при учете симметрии поля, особенностей модели среды.

4. Постановка краевой задачи (уравнения потенциала и дополняющие условия).

5. Предложение "проекта" решения задачи, то есть гипотезы о том, какой вид может иметь решение задачи. Обоснования этой гипотезы могут иметь интуитивный характер или их может не быть вовсе. Обычно проект решения предлагается на основе опыта решения других задач, физических представлений и содержит неизвестные множители, слагаемые, подлежащие определению в дальнейшем.

6. «Испытание» проекта решения, проверка того, может ли выраженное в таком виде решение удовлетворить всем условиям краевой задачи. При этом упомянутые выше неизвестные множители и слагаемые "подгоняются" под дополняющие условия, то есть определяются такие их значения, при которых выполняются эти условия. Если на этом этапе удалось найти выражения, удовлетворяющие уравнениям потенциала и дополняющим условиям, то краевая задача решена. Если этого сделать не удалось, то приходится возвращаться к этапу 5.

7. Определение полей \vec{E} , \vec{H} , плотности источников вторичного поля и т.д.; исследование полученного решения.

При решении уравнений в частных производных пользуются методом Фурье (разделения переменных). Применяя этот метод при решении краевой задачи (на этапах 5, 6), стремятся получить наиболее общее решение уравнения потенциала (с учетом упрощающих условий, сформулиро-

ванных на этапе 3), но отбрасывают те из этих решений, которые противоречат дополняющим условиям.

3.2. НЕОДНОРОДНОСТЬ В СРЕДЕ В ПЕРВИЧНОМ ПОЛЕ

В этом разделе рассмотрим примеры решения прямых задач, в которых однородность модели среды нарушается из-за наличия в ней однородного включения (объекта) сферической или цилиндрической формы, у которого параметр среды в общем случае отличаются от того же параметра вмещающей среды. При этом в качестве заданного первичного поля принимается то поле, которое бы мы имели в отсутствие включения, то есть в безграничной однородной среде. Во всех задачах в этом разделе первичное поле принимается наиболее простым - всюду однородным, то есть одинаковым по абсолютной величине и направлению во всех точках пространства.

Проводящий шар в однородном электростатическом поле

Если внести проводник в первичное электростатическое поле \vec{E}^{Π} (или создать такое поле \vec{E}^{Π} , в котором окажется проводник), имеющиеся в проводнике свободные электрические микрочастицы начнут перемещаться под действием поля \vec{E}^{Π} (положительные – по направлению этого поля, отрицательные – в противоположном направлении) и накапливаться в микроскопически-тонком слое у поверхности S проводника. В свою очередь эти поверхностные (при макроскопическом подходе) заряды в виде простого слоя с плотностью σ создают вторичное поле \vec{E}^B и фактически действовать на заряды в проводнике будет суммарное поле $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}^B$. Опыт показывает, что через непродолжительное время (после внесения проводника в поле или "включения" поля \vec{E}^{Π}) поле \vec{E} станет статическим. Это означает, что поле $\vec{E}^B = \vec{E} - \vec{E}^{\Pi}$ и плотность его источников (зарядов с плотностью σ на поверхности S) – постоянны и движение зарядов в проводнике – прекратилось. Это возможно, если в проводнике суммарное поле $\vec{E} = 0$. Образование зарядов на поверхности проводника при внесении его в электростатическое поле называют электростатической индукцией.

Таким образом, внутри проводника (суммарное) электростатическое поле $\vec{E} = 0$. При этом несущественно, однороден ли проводник по удельной электропроводности γ и какова величина γ . Для плотности поверхностных зарядов σ на S справедливо выражение (см.(96) при $\gamma_2=0$, $\vec{E}^{(1)}=0$): $\sigma = \epsilon_0 E_n$, где E_n – нормальная к S компонента суммарного поля \vec{E} вне проводника у его поверхности S , а нормаль n к S направлена наружу отно-

сительно области, занятой проводником. Так как слагаемое \vec{E}^B поля \vec{E} создают заряды с неизвестной плотностью σ , то неизвестна и компонента E_n этого поля у поверхности проводника. То есть при неизвестном поле \vec{E} прямой аналитический расчет плотности σ источников поля \vec{E}^B по формуле $\sigma = \varepsilon_0 E_n$ и расчет их поля \vec{E}^B на основе выражений вида (50') - невозможны.

Задача 17. В однородное первичное электростатическое поле \vec{E}^Π , заданное в вакууме, внесен проводник в форме шара с радиусом $R_{ш}$ (рис. 14,а). Проводник – электрически нейтрален, его (суммарный) заряд $e=0$. Полагая, что \vec{E}^Π и $R_{ш}$ – известны (заданы), определим суммарное электростатическое поле \vec{E} или потенциал U этого поля.

Решение. В присутствии проводника к полю \vec{E}^Π добавится вторичное поле \vec{E}^B находящихся на поверхности S проводника (сфере с радиусом $R_{ш}$) электрических зарядов с плотностью σ . Фактически будем иметь поле $\vec{E} = \vec{E}^\Pi + \vec{E}^B$ с потенциалом $U = U^\Pi + U^B$, где $\vec{E} = -\text{grad}U$, $\vec{E}^\Pi = -\text{grad}U^\Pi$, $\vec{E}^B = -\text{grad}U^B$. Совокупность заданного поля \vec{E}^Π и модели среды имеет осевую (цилиндрическую) симметрию, а особая поверхность S - сфера. Введем сферическую систему координат R, θ, φ с началом в центре шара и полярной осью – по направлению \vec{E}^Π . Дополним эту систему осью Z (цилиндрических, либо декартовых координат), совмещенной с полярной осью (рис. 14, а). Тогда для потенциала U (и его слагаемых U^Π, U^B) должно выполняться условие, аналогичное (17): $\partial U / \partial \varphi = 0$.

Так как $\vec{E}^\Pi = \vec{1}_z E_z^\Pi$, то потенциал $U^\Pi = U^\Pi(z)$ и аналогично (56) имеем:

$$U^\Pi = -\int E_z^\Pi dz + C = -E^\Pi \int dz + C = -E^\Pi \cdot z + C,$$

где $C = \text{const}$ и учтено, что, $\cos(\vec{E}_z^\Pi, \vec{1}_z) = 1$, $E^\Pi = \text{const}$. Значение C зависит от того, в пределах какой из плоскостей $z = \text{const}$ выберем $U^\Pi = 0$. Выберем $U^\Pi = 0$ при $z = 0$. Тогда $C = 0$ и

$$U^\Pi = -E^\Pi \cdot z = -E^\Pi \cdot R \cos \theta. \quad (100)$$

Перейдем к нахождению потенциала U^B . Вторичное поле \vec{E}^B создают заряды e^+ и e^- ($e^+ + e^- = 0$), имеющие нечетную симметрию относительно плоскости $z = 0$. Тогда в плоскости $z = 0$: $\vec{E}^B = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \vec{1}_z E_z^B$ (рис. 14,а). Следовательно, разность потенциалов ΔU^B между двумя любыми точками плоскости $z = 0$, равная напряжению поля \vec{E}^B между этими точками (см. (28')), равна нулю. Из этого следует, что потенциал U^B одинаков во всех

точках плоскости $z=0$ и имеет на этой плоскости то же значение, что и в бесконечно удаленных точках ($R \rightarrow \infty$). Поэтому можем выбрать значение

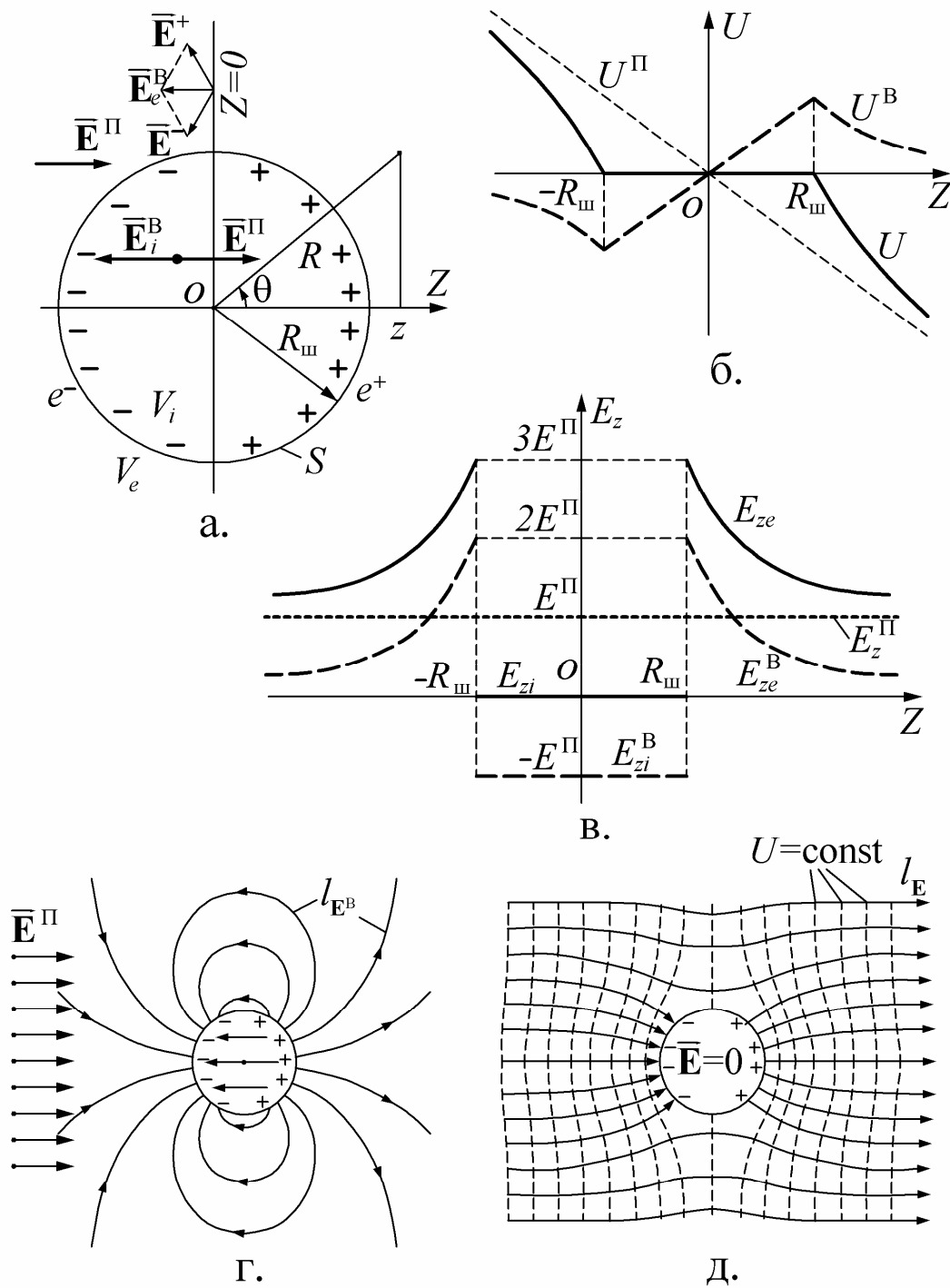


Рис. 14. Проводящий шар в однородном поле \vec{E}^Π

$$U^B = 0 \text{ при } z=0 \text{ (и при } R \rightarrow \infty). \quad (101)$$

Область, занятую проводником, обозначим V_i , а остальную часть пространства – V_e . Ниже убедимся, что потенциалы U^B и U в областях V_i и V_e определяют разные выражения. Поэтому применим для потенциалов U в областях V_i и V_e обозначения:

$$U_i = U^\Pi + U_i^B, \quad U_e = U^\Pi + U_e^B. \quad (102)$$

В соответствии с изложенным выше в области V_e , занятой проводником, суммарное электростатическое поле $\vec{E}_i = 0$. Следовательно, в этой области имеем: $-\vec{E}_i = \text{grad} U_i = \text{grad}(U^\Pi + U_i^B) = 0$, $U^\Pi + U_i^B = C_1$, $U_i^B = C_1 - U^\Pi = C_1 + E^\Pi \cdot z$, где $C_1 = \text{const}$. Чтобы удовлетворить условию (101), положим $C_1 = 0$. Тогда

$$U_i^B = E^\Pi \cdot z = E^\Pi \cdot R \cos \theta, \quad U_i = U^\Pi + U_i^B = 0. \quad (103)$$

Получены выражения (100), (103) для U^Π , U_i^B и $U_i = U^\Pi + U_i^B$. Если определим еще потенциал вторичного поля вне проводника (U_e^B), то рассматриваемая прямая задача будет решена. В отличие от поля \vec{E}_i поле \vec{E}_e – не известно. Не известны также источники вторичной части этого поля, так как их плотность σ зависит от искомого поля \vec{E}_e .

Чтобы получить выражение для потенциала U_e^B , поставим для потенциала U_e краевую задачу (для области V_e) и попытаемся найти ее единственное решение. Область V_e представляет собой все пространство без области V_i ($R < R_{\text{ш}}$), занятой проводником. Особых поверхностей, линий или точек в области V_e нет. Тогда, в соответствии со сказанным в разделе 3.1, краевая задача для области V_e должна включать уравнение потенциала, краевые условия у поверхности проводника ($R = R_{\text{ш}}$) и условия в бесконечности ($R \rightarrow \infty$).

Так как в области V_e нет зарядов, согласно (27), потенциал U_e должен удовлетворять уравнению Лапласа (28). Учтем, что на поверхности $R = R_{\text{ш}}$, на которой имеется простой слой, потенциал U – непрерывен (см. (54), (93)), а в области V_i согласно (103), $U_i = 0$. Примем также во внимание, что, согласно (100)–(102), асимптотическое поведение потенциала U_e при $R \rightarrow \infty$ будет определять его слагаемое U^Π . Итак, в области V_e :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_e = 0, \\ 2) \quad \text{при } R = R_{\text{ш}} \quad U_e = 0, \\ 3) \quad \text{при } R \rightarrow \infty \quad U_e \rightarrow \infty, \text{ как } U^\Pi, \end{array} \right\} \quad (104)$$

где величину U^Π определяет выражение (100). Если удастся (каким угодно способом) найти функцию U_e , удовлетворяющую условиям (104), то, согласно теореме единственности, эта функция и будет искомым потенциа-

лом поля \vec{E}_e . Отметим, что краевая задача вида (104), то есть задача для функции, гармонической в некоторой области пространства, при краевых условиях 1-го типа на границе этой области (см. (98)) называется задачей Дирихле.

Источником поля \vec{E}^B является нейтральная совокупность зарядов e^+ и e^- (рис. 14,а). Очевидно, что при $R \gg R_{ш}$ поле этих зарядов должно быть идентично полю диполя (см. задачу 5). Выскажем предположение, что в рассматриваемом случае (поле \vec{E}^{Π} – однородно, проводник имеет форму шара) поле \vec{E}^B совпадает с полем диполя не только при $R \gg R_{ш}$, но и во всей области V_e ($R > R_{ш}$). Кроме того, поле \vec{E}_e^B – такое, которое создал бы диполь, расположенный в центре шара (в начале координат O), момент которого \vec{p} направлен, как \vec{E}^{Π} , то есть ориентирован по полярной оси. Согласно выражению (38) для потенциала U поля $\vec{f} = 4\pi\epsilon_0 \vec{E}$, потенциал поля \vec{E} такого диполя $U = p \cdot \cos\theta / (4\pi\epsilon_0 R^2)$. Введем обозначение $d = p / (4\pi\epsilon_0)$ и в соответствии со сделанным выше предположением будем искать потенциал U_e^B в виде: $U_e^B = d \cdot \cos\theta / R^2$, где d – неизвестный множитель, не зависящий от координат R, θ, φ . Тогда, согласно (100), (102), мы пробуем найти выражение для потенциала U_e в виде выражения:

$$U_e = -E^{\Pi} R \cos\theta + d \cos\theta / R^2. \quad (105)$$

Обратимся к условиям (104). Согласно (15), уравнение Лапласа (28) для функции U_e в сферической системе координат при $\partial U_e / \partial \varphi = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U_e}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial U_e}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Если подставить выражение (105) для U_e в это уравнение и выполнить дифференцирование, то можно убедиться, что оба слагаемых в правой части (105) удовлетворяют уравнению Лапласа (второе из них – при $R > 0$). Отметим, что справедливость равенств $\nabla^2 U^{\Pi} = 0$, $\nabla^2 U_e^B = 0$ (при $R > R_{ш}$) даже не требует такой проверки. Согласно (27), потенциал U статического поля любых источников (масс, зарядов) удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 U = 0$ вне этих источников (при $\delta=0$). Первое слагаемое в (105) – потенциал однородного поля \vec{E}^{Π} , а второе – потенциал поля диполя. Это – поля известных нам источников вне этих источников (см. задачи 5, 11, 15).

Очевидно, что 3-му условию в (104) (при $R \rightarrow \infty$) выражение (105) удовлетворяет при любом значении d . Остается обеспечить выполнение 2-го условия в (104): $U_e = 0$ при $R = R_{ш}$. Подставляя выражение (105) для U_e в это равенство, получаем уравнение: $-E^{\Pi} R_{ш} \cos\theta + d \cos\theta / R_{ш}^2 = 0$, реше-

ние которого для d имеет вид: $d = E^{\Pi} R_{\text{ш}}^3$. Таким образом, из (105), для потенциала U_e получаем выражение:

$$U_e = -E^{\Pi} R \cos \theta + E^{\Pi} R_{\text{ш}}^3 \cos \theta / R^2, \quad (106)$$

удовлетворяющее всем условиям (104) краевой задачи, и, следовательно, определяющее потенциал U_e электростатического поля \vec{E}^e в области V_e (вне проводника в форме шара).

Из (106) на основе (39) не сложно получить выражения для компонент поля \vec{E}^e в сферической системе координат:

$$E_R^e = E^{\Pi} \cdot \cos \theta \cdot \left(1 + 2R_{\text{ш}}^3 / R^3\right), \quad E_{\theta}^e = E^{\Pi} \cdot \sin \theta \cdot \left(-1 + R_{\text{ш}}^3 / R^3\right), \quad E_{\varphi}^e = 0.$$

Первые слагаемые в выражениях для компонент E_R^e , E_{θ}^e отвечают составляющим первичного, а вторые – вторичного электрического поля.

Определим потенциал U и компоненту E_z поля \vec{E} на оси Z , проходящей через центр O проводника и направленной по первичному полю (рис. 14,а). Так как $R \cos \theta = z$, а на оси Z : $R = |z|$, $\cos \theta = \pm 1$, то на этой оси $\cos \theta / R^2 = z / |z|^3$. Принимая во внимание (100), (102), (106) и определяя E_z , по формуле $E_z = -(\partial U / \partial z)$, получаем выражения для U и E_z , на оси Z :

$$U^{\Pi} = -E^{\Pi} z, \quad U_i^{\text{B}} = E^{\Pi} z, \quad U_e^{\text{B}} = E^{\Pi} R_{\text{ш}}^3 \cdot z / |z|^3, \quad E_z^{\Pi} = E^{\Pi}, \quad E_{iz}^{\text{B}} = -E^{\Pi}, \\ E_{ez}^{\text{B}} = 2E^{\Pi} R_{\text{ш}}^3 / |z|^3.$$

Графики функций $U(z)$ и $E_z(z)$ на оси Z (для первичного, вторичного и суммарного поля) показаны на рис. 14,б,в. При $z = \pm R_{\text{ш}}$ z -компонента вторичного и суммарного поля \vec{E} терпит разрыв на поверхностных зарядах. Плотность σ таких зарядов будет определена в задаче 18.

Согласно полученному решению, в области V_i вторичное поле \vec{E}_i^{B} однородно, направлено навстречу первичному полю \vec{E}^{Π} и равно ему по абсолютной величине. В области V_e поле \vec{E}_e^{B} совпадает с полем \vec{E} диполя (расположенного в центре шара) с моментом $\vec{p} = \vec{1}_z \cdot 4\pi\epsilon_0 E^{\Pi} R_{\text{ш}}^3 = \vec{1}_z \cdot 3\epsilon_0 E^{\Pi} V_{\text{ш}}$, где $V_{\text{ш}}$ объем шара. Векторные линии $l_{E^{\text{B}}}$ поля \vec{E}^{B} показаны на рис. 14,г. Эти линии начинаются на зарядах e^+ и оканчиваются на зарядах e^- . При более детальном исследовании полученного решения можно составить представление о других особенностях рассматриваемого поля, например, о конфигурации векторных линий l_E и эквипотенциальных поверхностей $U = \text{const}$ суммарного поля \vec{E} . Линии l_E и эквипотенциальные линии в плоскости, проходящей через ось Z , показаны на рис. 14,д.

Сферическое включение в среде в первичном поле

Рассмотрим две математически идентичные задачи: первую – для стационарного электрического поля \vec{E} , вторую – для магнитоэлектрического поля \vec{H} .

Задача 18. Первичное однородное поле \vec{E}^{Π} задано в однородной среде с удельной электропроводностью γ_e . Допустим, что однородность среды нарушена из-за наличия в ней включения (объекта) в форме шара с радиусом $R_{ш}$ и с удельной электропроводностью γ_i . Само по себе включение однородно, то есть в его пределах $\gamma_i = \text{const}$. Требуется определить суммарное поле $\vec{E} = -\text{grad}U$ (или его потенциал U) внутри (область V_i) и вне (область V_e) включения (рис. 15,а).

Решение. Так же, как в предыдущей задаче, будем полагать, что

$$\vec{E}_{i,e} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}_{i,e}^B, \quad U_{i,e} = U^{\Pi} + U_{i,e}^B, \quad (107)$$

где $\vec{E}_{i,e}^B$ – вторичное поле в областях V_i, V_e , создаваемое зарядами (в виде простого слоя) на поверхности включения. Согласно (96), плотность σ этих зарядов зависит от суммарного поля \vec{E} и не может быть определена, если создаваемая этими зарядами часть \vec{E}^B поля \vec{E} – неизвестна.

Учитывая симметрию задачи и форму особой поверхности, введем ту же систему координат, что в задаче 17 (рис. 15,а). Так как при $\vec{E}^{\Pi} = \vec{1}_z E^{\Pi}$ потенциал $U^{\Pi} = U^{\Pi}(z)$, то, полагая $U^{\Pi} = 0$ при $z=0$, получаем для U^{Π} выражение (100). Удельные электропроводности γ_i, γ_e имеют произвольные значения и, в отличие от задачи 17, здесь не можем утверждать, что $\vec{E}_i = 0$, $U_i = \text{const}$ и не можем задать краевое условие (для области V_e) на поверхности включения (при $R=R_{ш}$). В данном случае краевую задачу придется ставить и решать для совокупности областей V_i и V_e (для всего пространства).

Учтем, что порознь в областях V_i и V_e среда – однородна, в этих областях поле $\vec{E}^{\text{ср}} = 0$, на особой поверхности $R=R_{ш}$ не заданы контактные э.д.с., а нормали к этой поверхности ориентированы по координатным направлениям l_R . Если положим $U_e^B \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, то, согласно (88), (93), (97), (100), (107), получаем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & \nabla^2 U_i = 0, \quad \nabla^2 U_e = 0; \\ 2) \quad & \text{при } R \rightarrow \infty \quad U_e \rightarrow \infty, \text{ как } U^{\Pi}; \\ 3) \quad & \text{при } R = R_{ш} : \\ & \quad \text{а) } U_i = U_e, \\ & \quad \text{б) } \gamma_i (\partial U_i / \partial R) = \gamma_e (\partial U_e / \partial R). \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Если сумеем найти функции U_i, U_e , удовлетворяющие всем условиям краевой задачи (108), то эти функции и будут определять потенциал искомого поля \vec{E} .

Воспользуемся тем, что рассматриваемая задача имеет некоторое сходство с задачей 17 (однородность первичного поля, форма особой поверхности). Согласно решению задачи 17, вторичное электростатическое поле \vec{E}_i^B внутри проводника однородно, направлено навстречу первичному полю \vec{E}^Π и равно последнему по абсолютной величине; вне проводника (в области V_e) вторичное поле \vec{E}_e^B совпадает с полем диполя (с моментом, направленным как \vec{E}^Π), помещенного в центр проводника.

Предположим, что в рассматриваемой задаче

$$\vec{E}_i^B = -C\vec{E}^\Pi, \quad (109)$$

где $C = \text{const}$, то есть поле \vec{E}_i^B однородно и пропорционально \vec{E}^Π (с коэффициентом пропорциональности $-C$), а поле \vec{E}_e^B – идентично полю диполя с неизвестным пока моментом. Тогда, согласно (100), (103), (105), (107), потенциалы U_i, U_e поля \vec{E} в областях V_i, V_e надо искать в виде следующих функций:

$$U_i = -E^\Pi z + CE^\Pi z = (C-1)E^\Pi R \cos \theta, \quad U_e = -E^\Pi R \cos \theta + d \cos \theta / R^2, \quad (110)$$

где $d = \text{const}$. Слагаемое $-E^\Pi z = -E^\Pi R \cos \theta$ в правых частях выражений (110), согласно (100), это – потенциал первичного поля U^Π .

Очевидно, что U_i, U_e в (100) удовлетворяют условиям “1”, “2” в (108) (см. задачу 17). Проверка того, можно ли удовлетворить условиям “3”, а и “3”, б в (108) сводится к решению системы уравнений “3”, а, “3”, б (с подстановкой выражений (110) для U_i и U_e) относительно неизвестных величин C и d . Решая эту систему двух уравнений

$$(C-1)E^\Pi R_{\text{ш}} = -E^\Pi R_{\text{ш}} + d/R_{\text{ш}}^2, \quad \gamma_i(C-1)E^\Pi = \gamma_e(-E^\Pi - 2d/R_{\text{ш}}^3),$$

получаем:

$$C = \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e}, \quad d = CE^\Pi R_{\text{ш}}^3 = \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e} E^\Pi R_{\text{ш}}^3. \quad (111)$$

При подстановке (111) в (110) получаем выражения для U_i и U_e , удовлетворяющие всем условиям (108), и, следовательно, определяющие потенциал искомого поля \vec{E} в областях V_i ($R < R_{\text{ш}}$) и V_e ($R > R_{\text{ш}}$).

На основе выражений (8), (87), (110), (111) и (94) или (96) не сложно определить компоненты поля \vec{E} в областях V_i и V_e , а также – плотность зарядов σ на границе этих областей (при $R = R_{\text{ш}}$). В частности, для σ из (94), (110), (111) получаем:

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot (E_{eR} - E_{iR})|_{R=R_{\text{ш}}} = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial R} - \frac{\partial U_e}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_{\text{ш}}} = 3\varepsilon_0 CE^\Pi \cos \theta. \quad (112)$$

Отметим, что если $\gamma_i = \gamma_e$, то, согласно (111), $C=0$, $d=0$ и, следовательно, $\sigma=0$, $U^B=0$, $\vec{E}^B = 0$, то есть (в отсутствие неоднородности по γ) суммарное поле $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi}$. В общем случае характер распределения зарядов по поверхности разрыва γ (при $R=R_{ш}$) и создаваемое этими зарядами поле \vec{E}^B существенно зависят от соотношения удельных электропроводностей γ_i и γ_e .

Если занимающий область V_i объект (в форме шара) – хорошо проводящий по сравнению с вмещающей средой ($\gamma_i > \gamma_e$), то, согласно (111), (112), величины C и d – положительные; σ меняется на поверхности $R=R_{ш}$, как $\cos\theta$. При этом в области V_e вторичное поле \vec{E}_e^B – аналогично полю расположенного в центре сферического включения диполя с моментом, ориентированным по направлению поля \vec{E}^{Π} . В области V_i поле \vec{E}_i^B направлено навстречу \vec{E}^{Π} . Это приводит к ослаблению суммарного поля \vec{E}_i (уменьшению его абсолютной величины) по сравнению с $|\vec{E}^{\Pi}|$ (рис. 15,б,в). В частности, при $\gamma_e=0$ (или при $\gamma_i \rightarrow \infty$) имеем $C=1$, и решение рассматриваемой задачи переходит в решение задачи 17.

Если удельная электропроводность «тела» (объекта) в области V_i меньше, чем у вмещающей его среды ($\gamma_i < \gamma_e$), то величины C и d в выражениях (110)–(112) – отрицательны. Согласно (112), плотность зарядов σ меняется на поверхности $R=R_{ш}$, как $(-\cos\theta)$. При этом поле \vec{E}_e^B совпадает с полем расположенного в центре O области V_i диполя с моментом, антипараллельным вектору \vec{E}^{Π} . Поле \vec{E}_i^B направлено как \vec{E}^{Π} , и усиливает \vec{E}_i (увеличивает его абсолютную величину) по сравнению с \vec{E}^{Π} (рис. 15.г.д).

Так как поле \vec{E}_e^B – идентично полю диполя, то кривые на рис. 5,г-з можно рассматривать как графики компонент этого поля при перемещении точки наблюдения a вдоль прямых линий (в области V_e) при соответствующих направлениях поля \vec{E}^{Π} относительно направлений этих линий. Например, кривая на рис. 5,д может иллюстрировать изменение скалярной компоненты E_{ez}^B вдоль прямой, параллельной оси Z , при $\vec{E}^{\Pi} = \vec{1}_z E^{\Pi}$ и $\gamma_i > \gamma_e$.

Задача 18а. Первичное магнитоэстатическое поле с напряженностью \vec{H}^{Π} – однородно и задано в однородной среде с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_e$. Но в среде имеется однородное включение (объект) в форме шара с радиусом $R_{ш}$ и с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_i$. Полагая, что во всем пространстве вектор постоянной (остаточной) намагниченности

$\vec{J}^0 = 0$, определим суммарное поле \vec{H} внутри (область V_i) и вне (область V_e) этого «объекта».

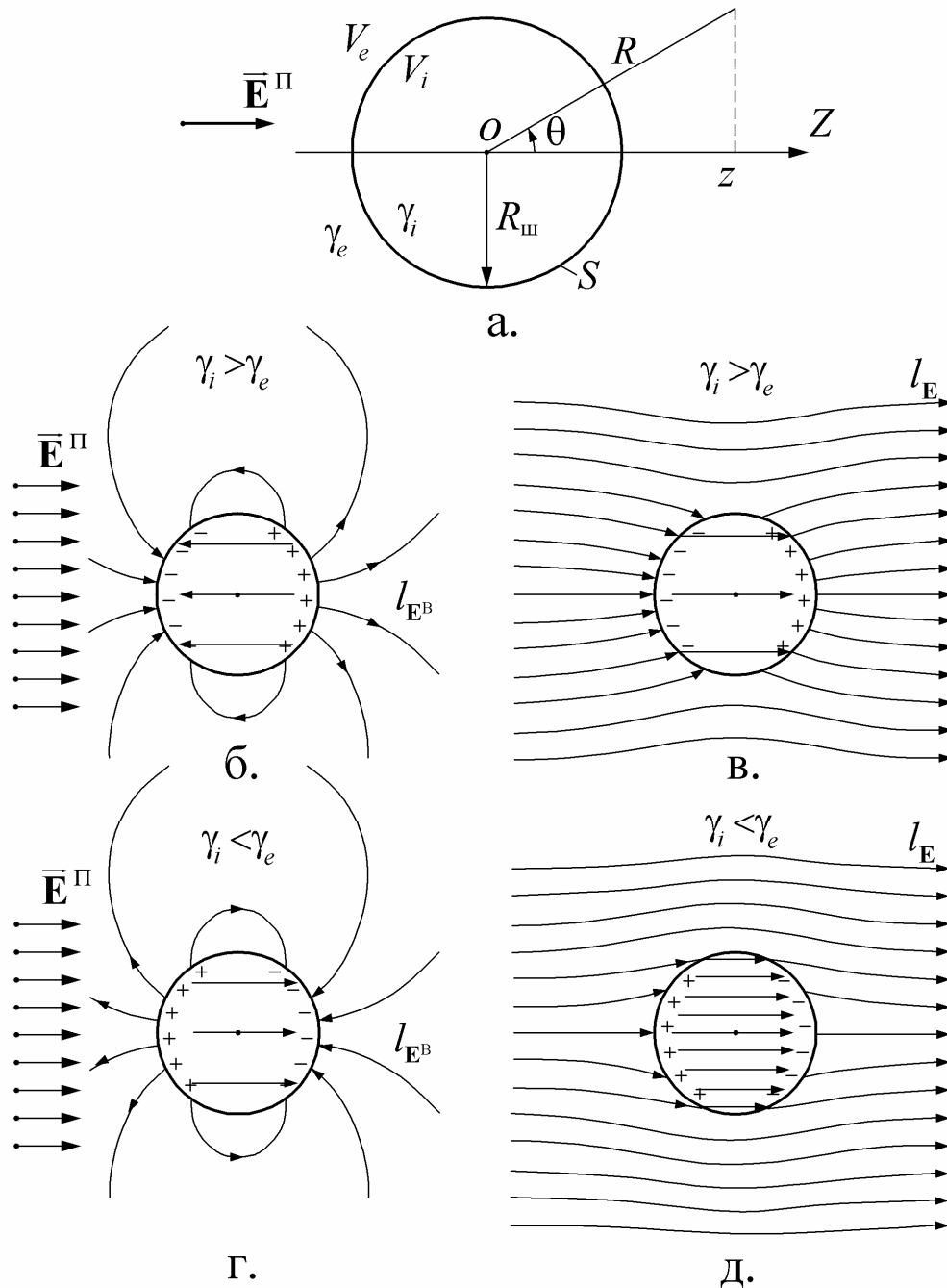


Рис.15. Сферическое включение в среде в однородном первичном поле

Решение. Будем полагать, что потенциал U связан с напряженностью магнитостатического поля \vec{H} равенством (87): $\vec{H} = -\text{grad}U$. Введем ту же систему координат, которая применялась при решении задачи 18. Иллюстрацией к задаче может служить рис. 15,а при замене обозначений: $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\gamma \rightarrow \mu$. Воспользуемся тем, что, согласно (87)–(89), рассматриваемая задача математически идентична задаче 18 для стационарного электрического поля и сводится к краевой задаче вида (108), где следует лишь заменить $\gamma_{i,e}$ на $\mu_{i,e}$. Отметим, что при этом второе условие сопряжения “3,б” в (108) на особой поверхности S_{oc} :

$$\text{при } R = R_{\text{ш}} : \quad \mu_i(\partial U_i / \partial R) = \mu_e(\partial U_e / \partial R).$$

следует из непрерывности на S_{oc} (нормальной к этой поверхности, с нормалью n по направлению $\vec{1}_R$) компоненты $B_n = \mu_0 \mu H_n = \mu_0 \mu H_R = -\mu_0 \mu (\partial U / \partial n) = -\mu_0 \mu (\partial U / \partial R)$ вектора магнитной индукции \vec{B} . Непрерывность компоненты B_n и произведения $\mu \cdot \frac{\partial U}{\partial n}$ (при $\vec{J}^0 = 0$) на особых поверхностях S_{oc} с нормалью n – это поверхностная форма уравнения $\text{div} \vec{B} = 0$ в (85) (см. [1], стр. 150, 164).

Применяя подстановки (89), на основе (107), (109)–(111) для рассматриваемой прямой задачи теории магнитостатического поля получаем:

$$\begin{aligned} U_{i,e} &= U^\Pi + U_{i,e}^B, \quad U^\Pi = -H^\Pi \cdot z = -H^\Pi \cdot R \cos \theta, \quad \vec{H}_i^B = \vec{1}_z H_{iz}^B = -C \vec{H}^\Pi, \\ H_{iz}^B &= -CH^\Pi, \quad U_i^B = CH^\Pi \cdot z = CH^\Pi \cdot R \cos \theta, \quad U_e^B = d \cos \theta / R^2, \\ \vec{H}_i &= \vec{H}^\Pi + \vec{H}_i^B = (1-C) \vec{H}^\Pi = \vec{1}_z (1-C) H^\Pi, \end{aligned} \quad (113)$$

где

$$C = (\mu_i - \mu_e) / (\mu_i + 2\mu_e), \quad d = CH^\Pi R_{\text{ш}}^3. \quad (114)$$

Наибольший интерес представляет случай, когда среда в области V_e немагнитна ($\mu_e = 1$), а $\mu_i = (1 + \kappa) > 1$, где κ – магнитная восприимчивость однородного магнетика в области V_i . Тогда из (114) получаем:

$$C = \kappa / (3 + \kappa), \quad (1 - C) = 1 / (1 + \kappa / 3), \quad d = H^\Pi R_{\text{ш}}^3 \kappa / (3 + \kappa). \quad (115)$$

Под действием поля \vec{H}_i , шар (или расположенный в области V_i магнетик иной формы) намагничивается. Вектор намагниченности $\vec{J} = \kappa \vec{H}_i$ (при $\vec{J}^0 = 0$) характеризует дипольный момент единицы объема намагниченного объекта. Если этот объект занимает область V , то дипольный магнитный момент намагниченного объекта $\vec{M} = \int_V \vec{J} dV$, то при однородном намагни-

чении (в области V поле \vec{J} – однородно) имеем:

$$\vec{M} = \vec{J} \cdot V = \kappa \vec{H}_i \cdot V, \quad \vec{M}_{\text{ш}} = \vec{J} \cdot V_{\text{ш}} = \kappa \vec{H}_i V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{ш}}^3 \vec{H}^\Pi \frac{\kappa}{1 + \kappa / 3}, \quad (116)$$

где второе выражение, согласно (113), (115), определяет дипольный магнитный момент однородного магнетика в форме шара, находящегося в первично-однородном магнитном поле \vec{H}^{Π} .

Фактически магнетик намагничивается под действием суммарного поля \vec{H}_i . Так как в рассматриваемом случае $C > 0$, то, согласно (113), вторичное поле \vec{H}_i^B ослабляет суммарное поле \vec{H}_i по сравнению с первичным полем \vec{H}^{Π} . Поле \vec{H}_i^B "размагничивает" шар. Чтобы количественно охарактеризовать это явление, вводят понятие "коэффициент размагничивания". Если поле \vec{H}^{Π} – однородно, а вектор \vec{H}_i^B антипараллелен вектору \vec{H}^{Π} , то коэффициент размагничивания N зависит от формы намагниченного тела, может зависеть от направления \vec{H}^{Π} и определяется равенством:

$$\vec{H}_i^B = -N \cdot \vec{J} = -N \cdot \vec{H}_i = -N \cdot \left(\vec{H}^{\Pi} + \vec{H}_i^B \right). \quad (117)$$

Из (113), (115)- (117) получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}_i^B &= -\vec{H}^{\Pi} \cdot N \cdot \frac{\text{ж}}{1 + N \cdot \text{ж}}, & \vec{H}_i &= \vec{H}^{\Pi} \cdot \frac{1}{1 + N \cdot \text{ж}}, \\ \vec{J} &= \vec{H}^{\Pi} \cdot \frac{\text{ж}}{1 + N \cdot \text{ж}}, & \vec{M} &= \vec{H}^{\Pi} \cdot V \cdot \frac{\text{ж}}{1 + N \cdot \text{ж}}, \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

в правые части которых входят задаваемые при решении прямых задач теории магнитостатического поля величины \vec{H}^{Π} , ж , V , а также коэффициент размагничивания N . Следовательно, согласно (118), если для однородного тела (объекта), находящегося в первично-однородном поле \vec{H}^{Π} , известны ж и коэффициент размагничивания N , то известно также и поле \vec{J} . Тогда создаваемое этим намагниченным телом поле \vec{H}_e^B в принципе может быть определено путем прямого расчета (см. [1], стр. 137).

При сравнении выражений (117), (118) с (113), (115), (116) видно, что если однородно намагниченный объект имеет форму шара, то коэффициент размагничивания $N=1/3$.

Отметим, что при $N \cdot \text{ж} \ll 1$ имеем $C \ll 1$. Тогда, согласно (113), (118), $H_i^B \ll H^{\Pi}$, $\vec{H}_i \approx \vec{H}^{\Pi}$, $\vec{J} \approx \text{ж} \cdot \vec{H}^{\Pi}$. Если (приближенное) решение прямой задачи магнитостатики проводится при допущении о том, что $\vec{J} \approx \text{ж} \cdot \vec{H}^{\Pi}$, то говорят, что это решение получено без учета размагничивания.

Цилиндрическая неоднородность в среде в первичном поле.

Задача 19. Однородное первичное поле \vec{E}^{Π} задано в однородной среде с удельной электропроводностью $\gamma = \gamma_e$. Но однородность среды нарушается из-за наличия в ней объекта в форме кругового цилиндра с ра-

диусом $r_{ц}$, неограниченного по «протяженности» (высоте) и имеющего удельную электропроводность $\gamma_i = \text{const}$. Полагая, что поле \vec{E}^{Π} направлено по нормали к оси цилиндра, определим суммарное электрическое поле \vec{E} (или его потенциал U) внутри (область V_i) и вне (область V_e) такого цилиндрического «объекта», нарушающего однородность среды.

Решение. Рассматриваемая задача – «плоская», заданное поле \vec{E}^{Π} и модель среды одинаковы в любой плоскости, нормальной к оси цилиндрического объекта с $\gamma = \gamma_i$; особая поверхность – цилиндрическая. Введем цилиндрическую систему координат с осью Z по оси цилиндра и отсчетом угловой координаты φ от направления \vec{E}^{Π} . Дополним эту систему координат проходящей через ось цилиндра осью X , направленной как \vec{E}^{Π} . Отметим, что в рассматриваемой «плоской» задаче цилиндрические координаты r и φ идентичны полярным координатам в произвольной плоскости $z = \text{const}$. Иллюстрацией к задаче (в плоскости $z = \text{const}$) может служить рис. 15,а при замене обозначений: $R \rightarrow r$, $R_{ц} \rightarrow r_{ц}$, $\theta \rightarrow \varphi$, $Z \rightarrow X$.

Полагаем, что потенциал U связан с полем \vec{E} равенством (87): $\vec{E} = -\text{grad}U$. Введем для полей \vec{E} и U обозначения (107). Для потенциала $U^{\Pi}(x)$ однородного поля \vec{E}^{Π} , направленного по оси X , полагая $U^{\Pi} = 0$ при $x = 0$, аналогично (100), получаем:

$$U^{\Pi} = -E^{\Pi} \cdot x = -E^{\Pi} \cdot r \cos \varphi. \quad (119)$$

Источники вторичного поля \vec{E}^B – поверхностные заряды, индуцированные на границе $r = r_{ц}$, плотность σ которых определяет выражение вида (96). Так как модель среды и поле \vec{E}^{Π} – симметричны относительно плоскости $x = 0$, то, согласно (96), эта плоскость разделяет разноименные поверхностные заряды на границе $r = r_{ц}$. При $r \gg r_{ц}$ поле этих зарядов должно быть идентично полю линейного диполя (см. задачу 9, и выражение (50)). Следовательно, можем полагать, что при $r \rightarrow \infty$ $U_e^B \rightarrow 0$ как $1/r$. Кроме того, при учете симметрии задачи и того, что при изменении координаты φ точки наблюдения a на 2π эта точка возвращается в исходное положение – ясно, что потенциал U^B вторичного поля \vec{E}^B в системе координат r, φ, z не зависит от координаты z и является четной периодической функцией координаты φ :

$$U^B = U^B(r, \varphi), \quad U^B(r, \varphi) = U^B(r, -\varphi), \quad U^B(r, \varphi) = U^B(r, \varphi + 2\pi n), \quad (120)$$

где n – целое число

Краевые условия в рассматриваемой задаче могут быть заданы лишь в бесконечно удаленных от цилиндра точках (при $r \rightarrow \infty$). Так как решение задачи должно быть одинаковым в любой плоскости $z = \text{const}$, поставим краевую задачу для такой плоскости. При учете однородности среды в областях V_i и V_e , выражений (107), (119), а также того, что нормали к особой

поверхности $r=r_{ц}$ ориентированы по координатным направлениям l_r , подобно (108), можем сформулировать краевую задачу следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_i = 0, \quad \nabla^2 U_e = 0; \\ 2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad U_e \rightarrow \infty \text{ как } U^{\Pi}; \\ 3) \quad \text{при } r = r_{ц} : \\ \quad \quad \text{а) } U_i = U_e, \\ \quad \quad \text{б) } \gamma_i(\partial U_i / \partial r) = \gamma_e(\partial U_e / \partial r). \end{array} \right\} \quad (121)$$

где потенциал U^{Π} определяет выражение (119).

На основе (121) определим требования к потенциалу U^B вторичного поля \vec{E}^B . При учете линейности оператора Лапласа ∇^2 , того, что согласно (119), функция U^{Π} – гармоническая (см. задачу 17), непрерывности U^{Π} на границе $r=r_{ц}$ и обозначения (107) для потенциала U^B из (121) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_i^B = 0, \quad \nabla^2 U_e^B = 0; \\ 2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad U_e^B \rightarrow 0; \\ 3) \quad \text{при } r = r_{ц} : \\ \quad \quad \text{а) } U_i^B = U_e^B, \\ \quad \quad \text{б) } \gamma_i \left[\frac{\partial (U^{\Pi} + U_i^B)}{\partial r} \right] = \gamma_e \left[\frac{\partial (U^{\Pi} + U_e^B)}{\partial r} \right]. \end{array} \right\} \quad (122)$$

В соответствии с первым условием в (122) потенциал U^B в областях V_i, V_e должен удовлетворять уравнению Лапласа. Согласно (15), в цилиндрических координатах при выполнении первого из условий в (120) уравнение Лапласа для функции U^B имеет вид:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U^B}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U^B}{\partial \varphi} \right) \right] = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U^B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U^B}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (123)$$

Будем решать уравнение Лапласа для $U^B (U_i^B, U_e^B)$ методом разделения переменных, то есть попытаемся найти решение уравнения (123) для U^B в виде произведения двух взаимно независимых функций $U^B = \Phi(r) \cdot \Psi(\varphi)$. Тогда из (123) получаем:

$$\Psi \cdot r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\Phi \cdot \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} \quad \text{или} \quad \frac{r}{\Phi} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2}. \quad (124)$$

Второе уравнение в (124) определяет равенство двух взаимно независимых функций. Левая часть этого уравнения зависит от r , а правая от φ . Такому уравнению удовлетворим, приравняв его левую и правую части к (одному и тому же) произвольному числу λ .

При этом, из (124), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\frac{r}{\Phi} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = \lambda, \quad -\frac{1}{\Psi} \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} = \lambda. \quad (125)$$

Каждое из двух уравнений в (125) имеет два частных решения. Решения уравнений (125) зависят от знака числа λ . Рассмотрим два случая:

1) $\lambda = -m^2 \leq 0$, 2) $\lambda = m^2 \geq 0$, где m – неотрицательное число, то есть $m \geq 0$.

1). Частные решения уравнений (125) при $\lambda = -m^2 \leq 0$ – это функции:

$$\Phi_1 = \cos(m \cdot \ln r), \quad \Phi_2 = \sin(m \cdot \ln r); \quad \Psi_1 = e^{m\varphi}, \quad \Psi_2 = e^{-m\varphi}. \quad (126)$$

Общие решения уравнений (125) при произвольном фиксированном значении $m \geq 0$ получим в виде линейных комбинаций их частных решений (126) для Φ и Ψ . Если попытаемся воспользоваться такими выражениями для функций Φ и Ψ в (126), то потенциал $U^B = \Phi \cdot \Psi$ не сможет удовлетворить некоторым из требований, предъявленных выше к решению задачи для U^B . При том виде, который имеют функции Φ_1, Φ_2 в (126) для U^B , не будет выполнено, в частности, краевое условие “2” в (122). Кроме того, при решениях (126) уравнений (125) нельзя удовлетворить, например, третьему условию в (120) для $U^B = \Phi \cdot \Psi$. Таким образом, при выборе $\lambda \leq 0$ не удастся получить решение краевой задачи (121), (122).

2). $\lambda = m^2 \geq 0$. В этом случае две пары частных решений уравнений (125) для Φ и Ψ – это функции:

$$\Phi_1 = r^m, \quad \Phi_2 = r^{-m}, \quad \Psi_1 = \cos(m\varphi), \quad \Psi_2 = \sin(m\varphi)$$

Тогда общие решения уравнений (125) второго порядка для функций Φ и Ψ при произвольном значении $m \geq 0$ могут быть представлены в виде линейной комбинации частных решений:

$$\Phi = ar^m + br^{-m}, \quad \Psi = c \cos(m\varphi) + d \sin(m\varphi), \quad (127)$$

где a, b, c, d – множители, не зависящие от аргументов r, φ функций Φ, Ψ . Но эти множители могут зависеть от параметра m .

Сформулированные выше требования (120), (122) к потенциалу $U^B = \Phi \cdot \Psi$ заставляют нас отбросить некоторые из слагаемых в выражениях для Φ и Ψ . Согласно второму условию в (120), функция $\Psi(\varphi)$ должна быть четной, поэтому следует положить в (127) $d=0$. В области V_e имеем $r_{ц} < r < \infty$ и, если для этой области $a \neq 0$ при $m > 0$, то получим $U_e^B \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, что противоречит краевому условию “2” в (122). В области V_i имеем $0 \leq r < r_{ц}$ и, если для этой области $b \neq 0$ при $m > 0$, то $U_i^B \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, то есть ось Z будет особой линией поля U^B что противоречит условиям задачи (122), согласно которым поле U^B не имеет особой линии при $r=0$. Тогда, введя обозначения $A(m) = ac, B(m) = bc$, для $U^B = \Phi \cdot \Psi$ получаем:

$$U_i^B(m) = A(m) \cdot r^m \cos(m\varphi), \quad U_e^B(m) = B(m) \cdot r^{-m} \cos(m\varphi).$$

Эти выражения определяют частные решения для U_i^B и U_e^B , так как соответствуют какому-либо одному, хотя и произвольному, значению па-

раметра m . Общее решение получим, суммируя все частные решения $U^B(m)$ (при всех возможных значениях $m \geq 0$).

В общем случае мы должны были бы искать решение для потенциалов U^B в виде интегралов Фурье: $U^B = \int_0^\infty U^B(m) dm$, подынтегральная функция в которых содержит множитель $\cos(m\varphi)$. Но интегралы такого вида выражают не периодические функции аргумента φ . При учете 3-го равенства в (120), выражающего периодическую зависимость функции $U^B(r, \varphi)$ от φ , можем ограничиться при суммировании $U^B(m)$ целыми значениями параметра m , то есть выразить общие решения для U_i^B, U_e^B в виде рядов Фурье:

$$U_i^B = \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot r^m \cos(m\varphi), \quad U_e^B = \sum_{m=0}^{\infty} B(m) \cdot r^{-m} \cos(m\varphi). \quad (128)$$

Согласно (107), (119), (128), для потенциала U суммарного поля в областях V_i, V_e имеем:

$$U_i = -E^\Pi r \cos \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot r^m \cos(m\varphi), \quad (129)$$

$$U_e = -E^\Pi r \cos \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} B(m) \cdot r^{-m} \cos(m\varphi).$$

Выражения (128), (129) удовлетворяют условиям “1”, “2” в (122) при любых значениях $A(m), B(m)$. Множители $A(m), B(m)$ в (129) определим из условий “3,а”, “3,б” в (122). Из условия “3,а” в (122) получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot r_{\text{ц}}^m \cos(m\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} B(m) \cdot r_{\text{ц}}^{-m} \cos(m\varphi).$$

Равенство этих рядов Фурье при любых $r_{\text{ц}}$ возможно при равенстве коэффициентов Фурье, то есть при $A(m) \cdot r_{\text{ц}}^m = B(m) \cdot r_{\text{ц}}^{-m}$ или

$$B(m) = A(m) \cdot r_{\text{ц}}^{2m}. \quad (130)$$

Из условия “3,б” в (122), согласно (129), (130), получаем:

$$\gamma_i \left[-E^\Pi \cos \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot m \cdot r_{\text{ц}}^{m-1} \cos(m\varphi) \right] =$$

$$= \gamma_e \left[-E^\Pi \cos \varphi - \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot m \cdot r_{\text{ц}}^{m-1} \cos(m\varphi) \right]. \quad (131)$$

Из того, что уравнение (131) справедливо при любых $\gamma_i, \gamma_e, r_{\text{ц}}$, следует равенство множителей при $\cos(m\varphi)$ в левой, и правой частях этого уравнения всех значениях m . Рассмотрим эти равенства при $m=0, 1, 2, \dots$

При $m=0$ из (131) получаем: $\gamma_i \cdot A(0) \cdot 0 = -\gamma_e \cdot A(0) \cdot 0$, то есть множитель $A(0)$ может быть выбран произвольно. Положим

$$A(0) = C, \quad (132)$$

где $C = \text{const}$.

При $m=1$ к соответствующим членам рядов в левой и правой частях уравнения (131) надо прибавить первые слагаемые в этих частях, содержащие множитель $\cos(1 \cdot \varphi)$. Тогда приходим к уравнению

$$\gamma_i [-E^\Pi + A(1)] = -\gamma_e [E^\Pi + A(1)]$$

решая которое относительно $A(1)$, при учете (130) получаем:

$$A(1) = \gamma_{ie} \cdot E^\Pi, \quad B(1) = \gamma_{ie} \cdot E^\Pi \cdot r_{ц}^2, \quad \text{где } \gamma_{ie} = (\gamma_i - \gamma_e) / (\gamma_i + \gamma_e) - \quad (133)$$

коэффициент контрастности границы (цилиндра), см. (96).

При $m=2$ получаем уравнение: $\gamma_i \cdot A(2) = -\gamma_e \cdot A(2)$, которому удовлетворяет только значение $A(2)=0$. Аналогичные уравнения имеем при $m=3, 4, \dots$. Следовательно, согласно (130), (131), при $m \geq 2$: $A(m)=0, B(m)=0$, то есть все члены рядов, выражающих в (129) потенциал U^B , при $m \geq 2$ равны нулю.

Подставляя (132), (133) в (129), и при учете (130) получаем выражения для U_i, U_e с точностью до постоянного слагаемого C . Требуя, чтобы выполнялось краевое условие “2” в (121), (122), получаем $C=0$ и, следовательно

$$U_i = E^\Pi r (-1 + \gamma_{ie}) \cos \varphi, \quad U_e = E^\Pi [-r + (\gamma_{ie} \cdot r_{ц}^2) / r] \cos \varphi. \quad (134)$$

Вторые слагаемые в правых частях равенств (134) определяют потенциалы U_i^B, U_e^B . При сравнении выражений для U_i^B и (119) для потенциала однородного поля видно, что вторичное поле \vec{E}_i^B в области V_i – однородно и коллинеарно полю \vec{E}^Π . Из полученного решения прямой задачи следует, что направления полей \vec{E}_i^B и \vec{E}^Π – одинаковы при $\gamma_i < \gamma_e$ ($\gamma_{ie} < 0$) и противоположны при $\gamma_i > \gamma_e$ ($\gamma_{ie} > 0$). При сравнении полученного выражения для U_e^B (второе слагаемое в правой части равенства (134) для U_e) и выражения (50) для потенциала U поля \vec{f} линейного диполя и учета того, что $\vec{f} / (4\pi\epsilon_0) = \vec{E}$, видно, что поле \vec{E}_e^B совпадает с полем линейного диполя, лежащего на оси Z при линейной плотности дипольных моментов $\eta^\lambda = 2\pi\epsilon_0 \cdot \gamma_{ie} \cdot E^\Pi \cdot r_{ц}^2$.

Векторные линии l_{E^B} и l_E полей \vec{E}^B и \vec{E} в плоскости $z = \text{const}$ сходны по конфигурации с линиями l_E , показанными на рис. 15, б-д для случая, когда неоднородность в среде имеет форму шара.

3.3 ПОЛЕ ЭЛЕКТРОДОВ.

В этом разделе речь пойдет о поле токовых электродов Э. При помощи таких электродов можно искусственно создавать стационарное электрическое поле \vec{E} в проводящей среде. При теоретическом рассмотрении поля объемных электродов обычно предполагают, что токовый электрод – идеальный проводник (с удельной электропроводностью $\gamma_\mathcal{E} \rightarrow \infty$), а элек-

трический ток I к нему подается по бесконечно- тонкому проводу с бесконечно- высоким сопротивлением изоляции, не искажающему модель среды, в которой находится электрод \mathcal{E} .

Зная поле одного токового электрода \mathcal{E} , обычно можно определить поле нескольких токовых электродов путем суммирования полей таких электродов. Поэтому в теории геофизических методов удобно пользоваться понятием "уединенный электрод" \mathcal{E} , предполагая, что другой токовый электрод, необходимый, чтобы цепь постоянного тока была замкнута (или несколько других токовых электродов), находится на достаточно большом расстоянии от данного электрода \mathcal{E} и не влияют на распределение зарядов в электроде \mathcal{E} (на его поверхности).

Если расстояние от электрода \mathcal{E} до точки наблюдения- много больше размеров электрода \mathcal{E} , то при расчетах поля \vec{E} объемный электрод можно заменить "точечным электродом", имеющим бесконечно малые геометрические размеры. Ток, "стекающий" с электрода или "втекающий" в электрод из окружающей электрод среды, называют током эмиссии или эмиссией электрода $I_{\mathcal{E}}$. В первом из этих случаев (когда электрод подсоединен к положительному полюсу гальванического элемента или аккумулятора и ток "стекает" с него) полагают, что $I_{\mathcal{E}} > 0$, а во втором- $I_{\mathcal{E}} < 0$.

Поле шарового электрода в однородной среде

Задача 20. В безграничную однородную проводящую среду с удельной электропроводностью γ (или удельным электрическим сопротивлением $\rho = 1/\gamma$) помещен занимающий область V_i токовый электрод \mathcal{E} (с $\gamma_{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$) в форме шара с радиусом $R_{ш}$ и с эмиссией $I_{\mathcal{E}}$. Требуется определить поле \vec{E} , его потенциал U и плотность тока \vec{j} в окружающей электрод однородной среде - в области V_e .

Решение. Если объемный электрод \mathcal{E} – идеальный проводник, то, согласно (87) и закону Ома в дифференциальной форме (91), внутри электрода (в области V_i) имеем:

$$\text{при } R < R_{ш} \quad - \text{grad}U = \vec{E} = \vec{j}/\infty = 0, \quad U = \text{const},$$

то есть область, занятая электродом, эквипотенциальна. Если также справедливо допущение, что модель среды не искажается из-за присутствия тонкого провода (подводящего электрический ток к электроду), то рассматриваемая задача сферически симметрична. Введем сферическую систему координат с началом O в центре электрода (рис. 16,а). Тогда, согласно (18), (18'), имеем:

$$U = U(R), \quad \vec{E} = \vec{1}_R E_R(R), \quad \vec{j} = \vec{1}_R j_R(R). \quad (135)$$

В соответствии с (90), для замкнутой поверхности S , расположенной в среде, окружающей электрод (рис. 16,а), справедливо равенство:

$$\oint_S (\vec{j} \cdot \vec{dS}) = I_S = 0.$$

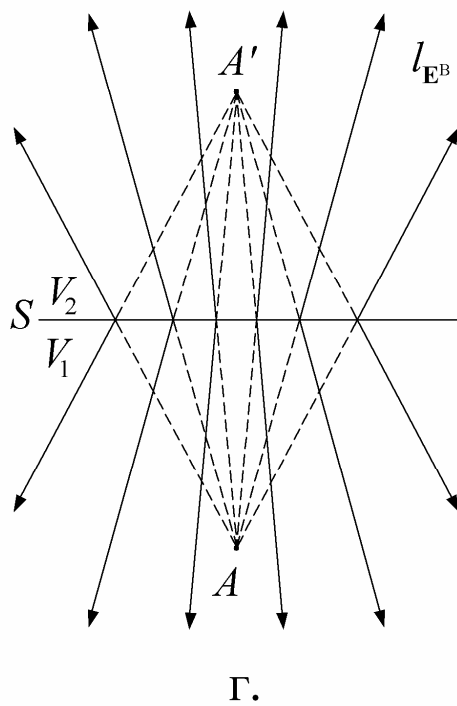
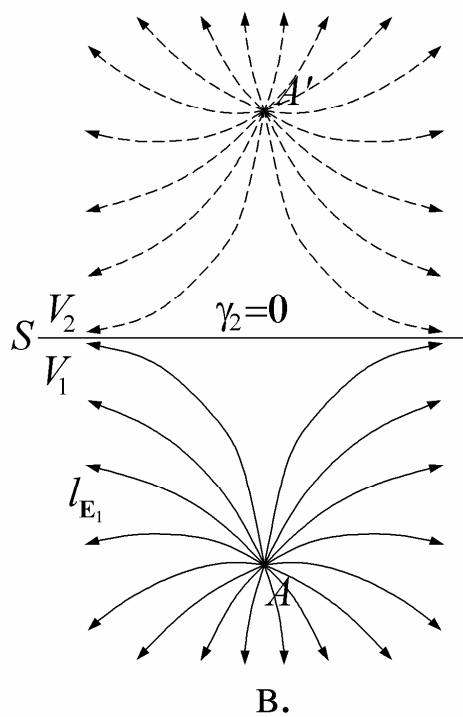
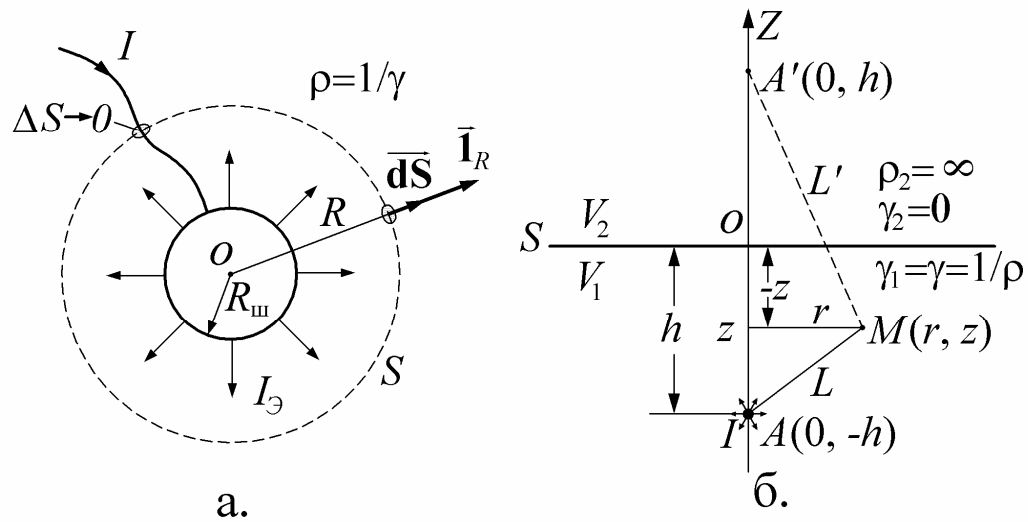


Рис.16. Шаровой электрод в однородной среде.
Точечный электрод в присутствии непроводящего полупространства.

Поток I_S вектора \vec{j} через S составляют: ток I по проводу и ток эмиссии электрода $I_{\mathcal{E}}$. Для случаев, когда ток I направлен к электроду или от электрода получаем соответственно: $-I+I_{\mathcal{E}}=0$ или $I+I_{\mathcal{E}}=0$, то есть $I_{\mathcal{E}}=\pm I$. В дальнейшем будем обозначать $I_{\mathcal{E}}=I$, опуская знаки " \pm " и придавая величине I алгебраический смысл.

Если S – сферическая поверхность $R=\text{const}$, то, согласно (135), на S значения U , E_R , j_R – постоянны. Введем в рассмотрение не замкнутую поверхность S_0 представляющую собой поверхность S без бесконечно малой площадки ΔS , через которую протекает линейный ток I (рис. 16,а). Площадь S_0 , с точностью до бесконечно малой величины равна $4\pi R^2$. Поток вектора \vec{j} через S_0 :

$$\int_{S_0} (\vec{j} \cdot \vec{dS}) = I_{\mathcal{E}} = I. \quad (136)$$

На S_0 векторы \vec{dS} и \vec{i}_R – взаимно параллельны, следовательно, $(\vec{j} \cdot \vec{dS}) = j_R dS$. Так как на S_0 координата $R=\text{const}$, то, согласно (135), (136), $I = j_R \cdot S_0 = j_R \cdot 4\pi R^2$, откуда следует, что

$$j_R = I / (4\pi R^2). \quad (137)$$

Из (137) на основе (91), (87) не сложно определить, что при $R > R_{\text{ш}}$:

$$E_R = I / (\gamma \cdot 4\pi R^2) = \rho \cdot I / (4\pi R^2), \quad U = I / (\gamma \cdot 4\pi R) = \rho \cdot I / (4\pi R). \quad (138)$$

Полученные выражения (135), (138) для поля \vec{E} шарового электрода идентичны формулам (59), (61) для поля однородной поверхностной массы в форме сферической поверхности. Это связано с тем, что источники поля \vec{E} такого электрода – однородные поверхностные заряды (с поверхностной плотностью $\sigma=\text{const}$) находящиеся на поверхности электрода, при $R=R_{\text{ш}}$. При учете того, что внутри электрода $\vec{E} = 0$, из (94), (138) получаем выражение для поверхностной плотности этих зарядов: $\sigma = \epsilon_0 \rho I / (4\pi R_{\text{ш}}^2)$. Так как на поверхности, шарового электрода $\sigma=\text{const}$, то заряд электрода $e_{\mathcal{E}} = \sigma \cdot (4\pi R_{\text{ш}}^2) = \epsilon_0 \rho I$.

Согласно (138), при заданном токе I поле шарового электрода в окружающей его среде не зависит от радиуса $R_{\text{ш}}$ электрода. В частности, если $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$, то выражения (137), (138) справедливы при $R > 0$ и определяют поле расположенного в начале сферических координат точечного электрода в безграничной однородной среде с удельным электрическим сопротивлением $\rho=1/\gamma$. В этом случае источник поля \vec{E} – точечный заряд $e_{\mathcal{E}}=\epsilon_0 \rho I$.

Поле точечного электрода в присутствии непроводящего полупространства

В рассматриваемом ниже примере показано, какое влияние (в первом приближении) оказывает граница «земля – воздух» на стационарное электрическое поле точечного электрода.

Задача 21. Плоскость S делит пространство на две области (полупространства) V_1 и V_2 с удельными электропроводностями $\gamma_1=\gamma=1/\rho$ и $\gamma_2=0$ соответственно. В точке A в однородной проводящей области V_1 на расстоянии h от S находится точечный токовый электрод с эмиссией I . Требуется определить потенциал U поля \vec{E} в областях V_1, V_2 .

Решение. Задача симметрична относительно проходящей через точку A нормали n к плоскости S ; особая поверхность – плоскость S . Введем цилиндрическую систему координат, совместив ось Z с этой нормалью n и поместив начало координат O в точке пересечения оси Z с плоскостью S (рис. 16,б). Если ось Z направлена из V_1 в V_2 , то в области V_1 имеем: $-\infty < z < 0$, а в области V_2 $0 < z < \infty$.

Полагая, что \vec{E} и U связаны равенством (87), введем обозначения, аналогичные (107):

$$\vec{E}_{1,2} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}_{1,2}^B, \quad U_{1,2} = U^{\Pi} + U_{1,2}^B \quad (139)$$

где $\vec{E}_{1,2}$ и $U_{1,2}$ – величины \vec{E} и U в областях V_1, V_2 . Источник первичного поля \vec{E}^{Π} – точечный заряд электрода $e_{\mathcal{E}} = \epsilon_0 \rho I$ в точке A . Согласно (138), при учете обозначения $\gamma_1=1/\rho$ имеем: $U^{\Pi} = \rho I / (4\pi L)$, где L – расстояние от точки A до точки наблюдения M . Координаты этих точек: $r_A=0, z_A=-h, r_M=r, z_M=z$ (рис. 16,б), тогда $L = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ и

$$U^{\Pi} = \rho I / \sqrt{r^2 + (z+h)^2}. \quad (140)$$

Согласно (140), при $L \rightarrow \infty$ $U^{\Pi} \rightarrow 0$, как $1/L$.

Источники вторичного поля \vec{E}^B – поверхностные заряды (в виде простого стоя) на плоскости S . Поле \vec{E}^B и его потенциал U^B должны быть четно симметричными относительно S ($z=0$). Если еще учесть осевую симметрию задачи, то, в соответствии с (17), для потенциала U^B имеем:

$$U^B = U^B(r, z), \quad U_2^B(r, z) = U_1^B(r, -z). \quad (141)$$

Воспользуемся тем, что среда в области V_2 – изолятор ($\gamma_2=0$). В соответствии с (91), в V_2 плотность тока $\vec{j}=0$, а, согласно (95), нормальная к границе S компонента $j_n=j_z$ – непрерывна на S . Следовательно, в проводнике (область V_1) у его поверхности S с нормалью Z :

$$j_z^{(1)} = 0 \Big|_S, \quad \gamma_1 E_z^{(1)} = 0 \Big|_S, \quad E_z^{(1)} = 0 \Big|_S, \quad (\partial U_1 / \partial z) = 0 \Big|_S.$$

Таким образом, у границы S проводника (в области V_1) с изолятором (область V_2) известно значение нормальной к S производной потенциала U , эта производная равна нулю. В соответствии с (98) это означает, что на такой границе может быть задано краевое условие 2-го типа. Благодаря этому можем поставить краевую задачу для области V_1 , занятой проводником, и определить поле в этой области независимо от поля в изоляторе.

Область V_1 – полупространство, которое можно представить себе, как полушарие бесконечно большого радиуса. Краевые условия для V_1 надо задать на плоскости S ($z=0$) и в бесконечно удаленных от электрода точках полусферы ($L \rightarrow \infty$). Учитывая однородность среды по γ в области V_1 , выражения (88), (139), (140), а также то, что точка A ($L=0$) – особая, так как в ней имеется точечный заряд e_3 , получаем для V_1 следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_1 = 0, \quad \text{при } L \neq 0, \\ 2) \quad \text{при } L \rightarrow 0 \quad U_1 \rightarrow \infty, \quad \text{как } U^\Pi, \\ 3) \quad \text{при } L \rightarrow \infty \quad U_1 \rightarrow 0, \quad \text{как } 1/L, \\ 4) \quad \text{при } z = 0 \quad (\partial U_1 / \partial z) = 0. \end{array} \right\} \quad (142)$$

Величину U^Π в (142) определяет выражение (140). Условие “2” в особой точке следует из того, что потенциал U^B в точке A – ограничен. При записи краевого условия “3” учтено, что при $L \rightarrow \infty$ $U^B \rightarrow 0$ не медленнее, чем U^Π .

При подборе выражения для U_1^B воспользуемся методом зеркальных изображений. В рассматриваемой задаче предпосылки применения этого метода достаточно очевидны. Непроводящая среда в области V_2 препятствует прохождению электрического тока через поверхность S . На рис.16,в (сплошными линиями) показано, какой может быть форма векторных линий полей \vec{j} или \vec{E} в области V_1 в присутствии границы S с изолятором. Если бы границы S не было и во всем пространстве была однородная проводящая среда с удельной электропроводностью $\gamma_1 = \gamma = 1/\rho$, то подобную форму в полупространстве V_1 , эти векторные линии имели бы, если в точке A' , симметричной точке A относительно плоскости S , находился точечный электрод с эмиссией $I' = I$ и с зарядом $e_3' = e_3$. Предположим, что поле электрода A в V_1 в присутствии плоской границы S с изолятором не просто похоже, а полностью идентично полю двух электродов с одинаковыми зарядами и эмиссиями I : действительного в точке A и фиктивного в точке A' находящихся в безграничной однородной среде с удельной электропроводностью $\gamma_1 = 1/\rho$. Так как координаты точки A' : $r_{A'} = 0, z_{A'} = h$ (рис. 16,б), потенциал поля двух таких электродов определяют выражения:

$$U_1 = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \right), \quad L = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}, \quad L' = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}. \quad (143)$$

Не сложно убедиться, что выражение (143) для U_1 удовлетворяет при $z < 0$ всем условиям краевой задачи (142) и, следовательно, это и есть иско-
мое решение для проводящего полупространства. Второе слагаемое в пра-
вой части этого выражения отвечает потенциалу U_1^B . Таким образом, в по-
лупространстве V_1 вторичное поле, фактически создаваемое поверхност-
ным зарядом на плоскости S , совпадает с полем заряда e_3 фиктивного то-
чечного электрода в точке A' , являющегося зеркальным изображением ре-
ального электрода A в плоскости S .

Осталось найти потенциал U_2^B (в изоляторе), что легко сделать, если
принять во внимание, что вторичное поле, создаваемое зарядами на плос-
кости S , должно быть симметрично относительно S ($z=0$). Это отражено во
втором условии (141). Из (139)- (141), (143) получаем:

$$U_2^B = \rho I / (4\pi L), \quad U_2 = \rho I / (4\pi L) + \rho I / (4\pi L) = \rho I / (2\pi L) \quad (144)$$

Выражения (143), (144) определяют и при $z < 0$ и $z > 0$ соответственно.

Согласно (144), вторичное поле в V_2 совпадает с полем фиктивного
точечного электрода (заряда e_3), расположенного в той же точке A , что и
действительный электрод (рис. 16,г). Потенциал U_2 суммарного поля в V_2
равен удвоенному потенциалу U^{Π} . Более детальный анализ полученного
решения будет проведен в задаче 22, которая включает данную задачу как
частный случай.

Если $h=0$, то есть точечный электрод расположен на границе S , то,
согласно (143), (144), для потенциалов U^B и U во всем пространстве спра-
ведливы выражения (144) для U_2^B и U_2 , в которых следует положить
 $L=(r^2+z^2)^{1/2}$. Следовательно, потенциал U поля точечного электрода с за-
данной эмиссией I , расположенного на плоской границе однородного про-
водящего и непроводящего полупространств, всюду равен удвоенному по-
тенциалу поля такого же электрода, находящегося в безграничной одно-
родной проводящей среде с удельной электропроводностью проводящего
полупространства: $U_{1,2}=2 \cdot U^{\Pi}$

Отметим, что примененный при решении задачи подход, при кото-
ром влияние непроводящего полупространства V_2 на поле в проводящем
полупространстве V_1 учитывается путем отражения модели среды в V_1 и
заданного там возбудителя поля в область V_2 , справедлив при любых за-
данных возбудителях и среде в проводящем полупространстве. Действи-
тельно, согласно условию “4” в (142), в V_1 на границе S (с нормалью z) с
изолятором достаточно обеспечить выполнение краевого условия
 $(\partial U / \partial z) = -E_z = 0|_S$. Если среду в области V_1 и заданные там возбудители
поля отразить в область V_2 , то все возбудители поля \vec{E} будут симметричны
относительно S ; суммарное поле на S будет направлено вдоль S , то есть на
 S компонента $E_z = -(\partial U / \partial z) = 0$. Следовательно, решая для ограниченного
плоскостью S проводящего полупространства V_1 прямую задачу теории

стационарного поля \vec{E} (в присутствии непроводящего полупространства V_2), можем заменить ее задачей для неограниченного проводящего пространства с четной симметрией относительно S . Поле точечного электрода в присутствии плоской границы

Поле точечного электрода в присутствии плоской границы

Следующую задачу можно рассматривать, как обобщение задачи 21 для случая, когда удельные электропроводности обоих однородных полупространств – произвольны. Рассмотрим два подхода, при которых подбор решения краевой задачи проводится разными методами: зеркальных изображений и разделения переменных.

Задача 22. Плоскость S делит пространство на две однородные области V_1, V_2 с удельными электропроводностями $\gamma_1=1/\rho_1, \gamma_2=1/\rho_2$ соответственно. В области V_1 на расстоянии h от S в точке A находится точечный электрод с эмиссией I . Требуется определить потенциал U стационарного поля \vec{E} в областях V_1, V_2 .

Решение. Введем ту же систему координат, что и в задаче 21 (рис. 17,а), а также обозначения (139), полагая, что \vec{E} и U связаны равенством (87). Первичное поле создает заряд $e_{\text{э}}=\epsilon_0 I/\gamma_1$, электрода с заданной эмиссией I , расположенного в среде с удельной электропроводностью γ_1 . Для потенциала $U^{\text{П}}$ справедливо выражение, аналогичное (140):

$$U^{\text{П}} = I / \left(4\pi\gamma_1 \sqrt{r^2 + (z+h)^2} \right). \tag{145}$$

Вторичное поле $\vec{E}^{\text{В}}$ создают поверхностные заряды на плоскости S . В связи с тем, что эти заряды симметричны относительно оси Z и плоскости $z=0$ для потенциала $U^{\text{В}}$ поля $\vec{E}^{\text{В}}$ справедливы условия (141).

Так как значения γ_1 и γ_2 – произвольны, то, в отличие от задачи 21, на плоскости S не может быть задано краевое условия вида “4” в (142). Поставим краевую задачу для области, включающей все пространство (V_1 и V_2). Эта задача должна иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_1 = 0 \text{ при } L \neq 0, \quad \nabla^2 U_2 = 0, \\ 2) \quad \text{при } L \rightarrow 0 \quad U_1 \rightarrow \infty, \text{ как } U^{\text{П}}, \\ 3) \quad \text{при } L \rightarrow \infty \quad U_{1,2} \rightarrow 0, \text{ как } 1/L, \\ 4) \quad \text{при } z = 0: \quad \text{а) } U_1 = U_2, \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{б) } \gamma_1 (\partial U_1 / \partial z) = \gamma_2 (\partial U_2 / \partial z). \end{array} \right\} \tag{146}$$

В (146) учтено, что среда в областях V_1, V_2 – однородна, особая точка A находится в V_1 , а область V_2 не содержит особых точек. Условия “2”, “3” в (146) аналогичны требованиям “2”, “3” в (142). Условия сопряжения “4,а”, “4,б” следуют из (93), (97).

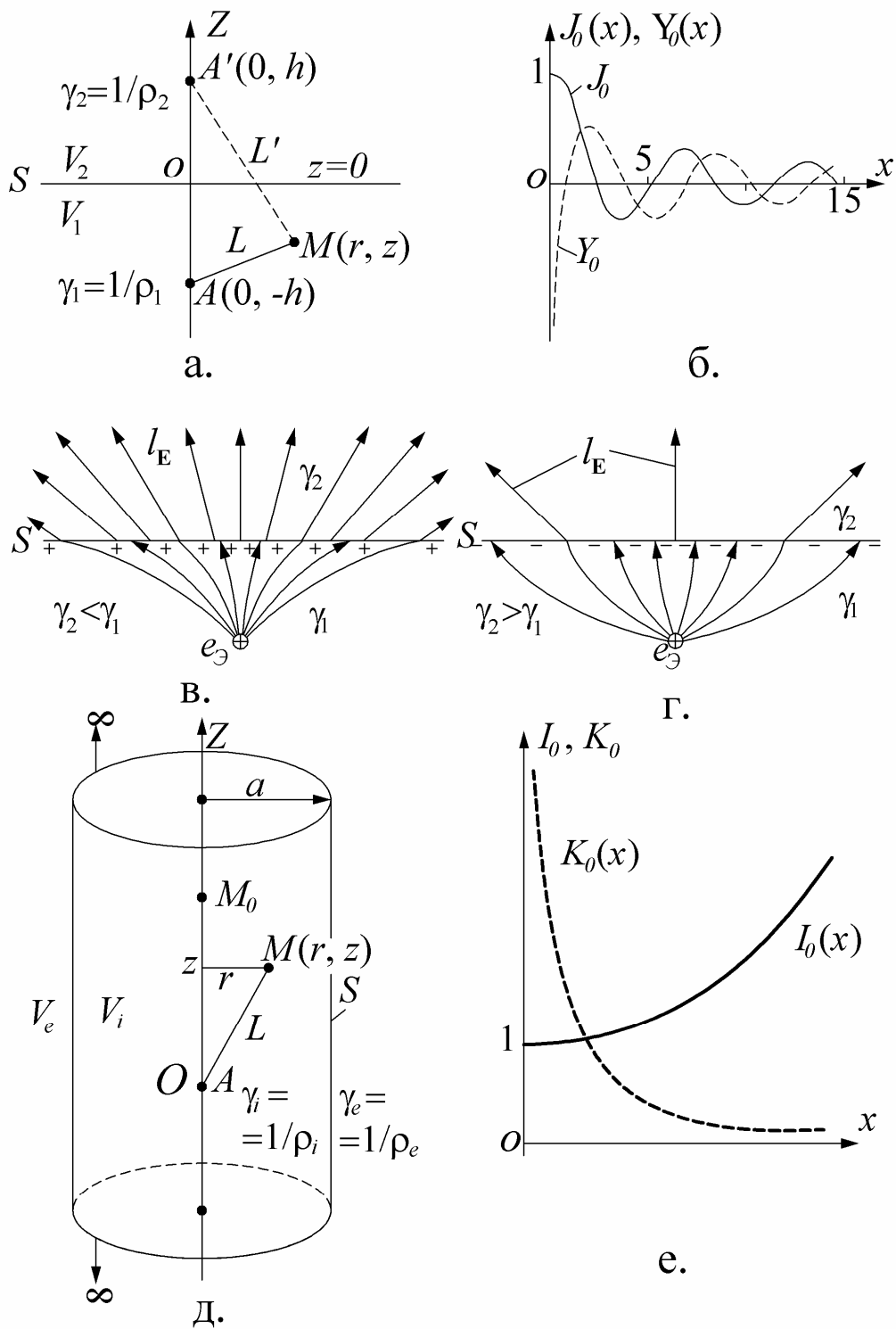


Рис.17. Точечный электрод в присутствии границы.

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Как и в задаче 21, попытаемся найти U_1^B и U_2^B в виде потенциалов полей фиктивных точечных электродов в безграничной однородной среде с удельной электропроводностью γ_1 той среды, в которой находится действительный электрод. Допустим, что, (как и в задаче 21) вторичное поле в области V_2 можно заменить полем фиктивного электрода, расположенного в точке A , а поле \vec{E}^B в V_1 – полем фиктивного электрода, находящегося в точке A' , являющейся отражением точки A в плоскости S . Если учесть второе условие в (141) или условие “4,а” в (146), то ясно, что заряды этих фиктивных электродов должны быть одинаковы. Предположим, что они пропорциональны заряду $e_{\text{Э}} = \epsilon_0 \rho_1 I = \epsilon_0 I / \gamma_1$ действительного электрода. Тогда, обозначив коэффициент пропорциональности α , аналогично (143), (144) получаем:

$$U_1 = \frac{I}{4\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{\alpha}{L'} \right), \quad U_2 = \frac{I}{4\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{\alpha}{L} \right), \quad (147)$$

где L и L' – расстояния от точки наблюдения соответственно до точек A и A' , определяемые равенствами (143). Вторые слагаемые в правых частях выражений (147) соответствуют потенциалам U_1^B , U_2^B .

Легко убедиться, что выражения (147) удовлетворяют всем условиям (146) кроме “4,б” при любом значении множителя α . Подставляя выражения (147) для U_1 , U_2 в равенство “4,б” в (146), дифференцируя функции $1/L$ и $1/L'$ по z и полагая $z=0$, получаем уравнение $\gamma_1(1-\alpha) = \gamma_2(1+\alpha)$, решение которого для α :

$$\alpha = \gamma_{12} = (\gamma_1 - \gamma_2) / (\gamma_1 + \gamma_2) = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 + \rho_2). \quad (147')$$

Следовательно, если величина α равна коэффициенту контрастности γ_{12} границы S (см. (96)), то выражения (147) для U_1 , U_2 удовлетворяют всем требованиям краевой задачи (146) и определяют искомое решение при $z < 0$, $z > 0$ соответственно.

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

На основе (146) и выражения (145) для U^{Π} определим условия, которым должен удовлетворять потенциал U^B . Так как точка $L=0$ не является особой для вторичного поля, а функция U^{Π} – гармоническая при $L \neq 0$ и непрерывная при $z=0$, из (146) для $U^B = U - U^{\Pi}$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & \nabla^2 U_1^B = 0, \quad \nabla^2 U_2^B = 0, \\ 2) \quad & \text{при } L \rightarrow \infty \quad U_{1,2}^B \rightarrow 0, \text{ как } 1/L, \\ 3) \quad & \text{при } z = 0: \quad \text{а) } U_1^B = U_2^B, \\ & \quad \text{б) } \gamma_1 \left[\partial(U^{\Pi} + U_1^B) / \partial z \right] = \gamma_2 \left[\partial(U^{\Pi} + U_2^B) / \partial z \right]. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Из (15) следует, что при выполнении первого из условий (141) в цилиндрической системе координат уравнение Лапласа для функции U^B имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U^B}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U^B}{\partial z^2} = 0., \quad (148')$$

Предположим, что решение для U^B можно выразить, как произведение двух функций, одна из которых зависит от аргумента r , а вторая - от z . Полагая $U^B = \Phi(r) \cdot \Psi(z)$, после простых преобразований получаем из (148') выражение:

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = - \frac{1}{r \cdot \Phi} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right), \quad (149)$$

определяющее равенство двух взаимно независимых функций аргументов z и r . Можем получить два обыкновенных дифференциальных уравнения для Φ и Ψ , приравнявая левую и правую части (149) к произвольному числу λ (см. задачу 19). Тогда

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = \lambda; \quad - \frac{1}{r \cdot \Phi} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = \lambda.$$

Вид функций $\Phi(r)$ и $\Psi(z)$, являющихся решениями этих уравнений, зависит от знака числа λ . Можно убедиться, что при $\lambda < 0$ функции Φ и Ψ - такие, что потенциал $U^B = \Phi \cdot \Psi$ не будет удовлетворять дополняющим условиям в (148). Приравняем левую и правую части (149) к неотрицательному числу $\lambda = m^2 \geq 0$, при этом для определенности будем полагать, что $m \geq 0$. При $\lambda = m^2$ получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для Ψ и Φ :

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} = m^2 \Psi, \quad \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + m^2 \Phi = 0.$$

Второе из этих уравнений является частным случаем дифференциального уравнения Бесселя. Общие решения уравнений для $\Phi(r)$ и $\Psi(z)$ - это функции:

$$\Psi = E \cdot \exp(-mz) + F \cdot \exp(mz), \quad \Phi = C \cdot J_0(mr) + D \cdot Y_0(mr), \quad (149')$$

где E, F, C, D - множители, которые могут зависеть от параметра m , но не зависят от аргументов z и r функций Ψ и Φ ; J_0 и Y_0 - функции Бесселя (аргумента mr) нулевого порядка и соответственно первого и второго рода. Графики функций J_0 и Y_0 приведены на рис. 17,б. При $x \rightarrow 0$: $J_0(x) \rightarrow 1$, а функция $Y_0(x)$ имеет логарифмическую особенность (при $x \rightarrow 0$ $Y_0(x) \rightarrow -\infty$, как $(2/\pi) \ln x$).

То есть при $r \rightarrow 0$ (на оси Z) функция $Y_0(mr) \rightarrow -\infty$. Но поле $U^B = \Phi \cdot \Psi$ - всюду ограничено, поэтому в выражении (149') для функции Φ должны выбрать для множителя D значение: $D = 0$. В области V_1 пределы изменения координаты z : $-\infty < z < 0$, но при $m > 0$ и $z \rightarrow -\infty$ $\exp(-mz) \rightarrow \infty$. Поэтому, что-

бы в этой области выполнялось краевое условие “2” в (148) для $U^B = \Phi \cdot \Psi$, следует для области V_1 выбрать значение множителя E , равное нулю. Соответственно, выполнение условия “2” в (148) в области V_2 (где $0 < z < \infty$) – возможно лишь, если в этой области пространства множитель F в выражении (149’) для Ψ равен нулю.

Таким образом, применяя обозначения: $C \cdot F = A(m)$, $C \cdot E = B(m)$, в областях V_1 , V_2 получаем для потенциалов $U_{1,2}^B$ следующие частные решения – при некотором произвольном значении числа $m \geq 0$:

$$U_1^B(m) = A(m) \cdot \exp(mz) \cdot J_0(mr), \quad U_2^B(m) = B(m) \cdot \exp(-mz) \cdot J_0(mr).$$

Общие решения для $U_{1,2}^B$ получим, суммируя частные решения $U(m)$ при всех возможных значениях $m \geq 0$.

В задаче (19) были основания для того, чтобы ограничиться при таком суммировании только целыми значениями параметра m . В рассматриваемой задаче таких оснований – нет, этот параметр может принимать любые неотрицательные значения. Поэтому следует выразить общие решения для $U_{1,2}^B$ в виде интегралов:

$$U_1^B = \int_0^{\infty} A(m) e^{mz} J_0(mr) dm, \quad U_2^B = \int_0^{\infty} B(m) e^{-mz} J_0(mr) dm. \quad (150)$$

Для определения неизвестных множителей $A(m)$, $B(m)$ в подынтегральных функциях воспользуемся условиями сопряжения (граничными условиями): “3,а”, “3,б” в (148). Подставляя выражения (150) для U_1^B , U_2^B (при $z=0$) в “3,а”, получаем равенство интегралов (при одинаковых пределах интегрирования и при любых значениях r), из которого следует, что $B(m) = A(m)$. Остается найти коэффициент $A(m)$. Из условия “3,б” получаем для $A(m)$ интегральное уравнение:

$$(\gamma_1 - \gamma_2) \left(\partial U^{\Pi} / \partial z \right) = \int_0^{\infty} A(m) \left[\gamma_2 \partial(e^{-mz}) / \partial z - \gamma_1 \partial(e^{mz}) / \partial z \right] J_0(mr) dm \Big|_{z=0}. \quad (151)$$

Пользуясь интегралом Вебера-Липшица:

$$(\rho^2 + \zeta^2)^{-1/2} = \int_0^{\infty} e^{-m|\zeta|} J_0(m|\rho|) dm, \quad (152)$$

и полагая в (152) $|\rho| = r$, $\zeta = z + h$ представим выражение (151) в виде:

$$U^{\Pi} = [I / (4\pi\gamma_1)] \cdot \int_0^{\infty} e^{-m|z+h|} J_0(mr) dm.$$

Так как производная

$$\partial U^{\Pi} / \partial z = [I / (4\pi\gamma_1)] \cdot \int_0^{\infty} -m [(z+h) / |z+h|] e^{-m|z+h|} J_0(mr) dm,$$

то из (151) при $z=0$ получаем уравнение, справедливое при любых значениях r, γ_1, γ_2 :

$$\int_0^{\infty} (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot [I/(4\pi\gamma_1)] \cdot e^{-mh} m J_0(mr) dm = \int_0^{\infty} A(m) \cdot (\gamma_2 + \gamma_1) \cdot m J_0(mr) dm.$$

Из равенства этих интегралов следует равенство подынтегральных функций, то есть $(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot [I/(4\pi\gamma_1)] \cdot e^{-mh} = A(m) \cdot (\gamma_2 + \gamma_1)$. Отсюда

$$A(m) = [\gamma_{12} I / (4\pi\gamma_1)] e^{-mh}, \text{ где } \gamma_{12} = (\gamma_1 - \gamma_2) / (\gamma_1 + \gamma_2). \quad (153)$$

Так как $B(m)=A(m)$, то из (150), (153) следует, что

$$U_1^B = [\gamma_{12} I / (4\pi\gamma_1)] \cdot \int_0^{\infty} e^{-m(-z+h)} J_0(mr) dm, \quad (154)$$

$$U_2^B = [\gamma_{12} I / (4\pi\gamma_1)] \cdot \int_0^{\infty} e^{-m(z+h)} J_0(mr) dm.$$

Пользуясь интегралом (152), из (154) получаем:

$$U_1^B = \gamma_{12} I / (4\pi\gamma_1 L'), \quad U_2^B = \gamma_{12} I / (4\pi\gamma_1 L),$$

где L и L' – расстояния до точек A и A' , определяемые выражениями (143). Принимая во внимание обозначение (139) и равенство (145), получаем уже известные нам выражения (147), (148), определяющие решение задачи для потенциала U суммарного поля \vec{E} в полупространствах V_1, V_2 .

* * *

Отметим, что при $\gamma_2=0$, согласно (148), имеем $\gamma_{12}=1$ и из (147) получаем решение (143), (144) задачи 21. Если $\gamma_1=\gamma_2$ то коэффициент контрастности границы $\gamma_{12}=0$ и $U_{1,2}=U^{\Pi}$. На основе выражений (147) для U_1, U_2 определим нормальную к границе S компоненту E_z поля \vec{E} , поверхностную плотность σ заряда e_S и заряд e_S на этой границе. Согласно (87), (94), (147), (148), имеем:

$$E_z^{(1)} = -\frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left(\frac{z+h}{L^3} + \gamma_{12} \frac{z-h}{L'^3} \right), \quad E_z^{(2)} = -\frac{\partial U_2}{\partial z} = \frac{\rho_1 \rho_2 I \cdot (z+h)}{2\pi \cdot (\rho_1 + \rho_2) L^3};$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(E_z^{(2)} - E_z^{(1)} \right) \Big|_{z=0} = (\varepsilon_0 / 2\pi) \rho_1 I h \gamma_{12} (r^2 + h^2)^{-3/2} = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E_z^{\Pi} \Big|_{z=0},$$

где $E_z^{\Pi} \Big|_{z=0} = \rho_1 I h / \left[4\pi (r^2 + h^2)^{3/2} \right]; \quad (155)$

$$e_S = \int_S \sigma dS = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} \sigma r dr = \varepsilon_0 \rho_1 I \cdot \gamma_{12} = \gamma_{12} \cdot e_{\mathcal{D}}$$

где $e_{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \rho_1 I$ – заряд электрода A , расположенного в среде с удельным электрическим сопротивлением ρ_1 (см. задачу 20).

Согласно (96), плотность зарядов σ на границе S должны определять коэффициент контрастности γ_{12} и значения нормальной к S компоненты суммарного поля \vec{E} . Но, в соответствии с (155), величину σ определяют коэффициент γ_{12} и нормальная к S компонента первичного поля \vec{E}^{Π} . Это связано с тем, что в рассматриваемой задаче (в виде исключения) создаваемое поверхностным зарядом на (единственной) плоской границе S вторичное поле \vec{E}^B направлено по касательной к этой границе, то есть нормальная к S компонента вторичного поля $E_z^B = 0$ на S . Заряд e_S , индуцированный на границе S , не зависит от расстояния h и определяется зарядом электрода $e_{\mathcal{E}}$ и коэффициентом γ_{12} . На рис. 17, в, г для случаев $\gamma_{12} > 0$ и $\gamma_{12} < 0$ показано, какими могут быть векторные линии l_E суммарного поля \vec{E} , если эмиссия I и заряд $e_{\mathcal{E}}$ электрода – положительны.

Поле точечного электрода, расположенного на оси цилиндрической границы

Прямую задачу теории стационарного электрического поля, решение которой будет рассмотрено ниже, называют задачей Фока – Штефанеску. Решение этой задачи было получено с целью обоснования теории электрического каротажа кажущихся сопротивлений.

Задача 23. Цилиндрическая поверхность S с радиусом a делит пространство на две области: внутреннюю V_i (в виде неограниченного по высоте кругового цилиндра) и внешнюю (окружающую этот цилиндр) область V_e . Порознь эти области однородны по удельной электропроводности γ . Значения γ в областях V_i и V_e обозначим соответственно $\gamma_i = 1/\rho_i$ и $\gamma_e = 1/\rho_e$. В точке A на оси границы S находится точечный электрод с эмиссией I и зарядом $e_{\mathcal{E}} = \epsilon_0 \rho_i I$. Требуется определить потенциал U стационарного поля \vec{E} в областях V_i и V_e .

Решение. Введем цилиндрическую систему координат, совместив ее ось Z с осью цилиндрической границы S и поместив начало координат O в точку A , где расположен электрод (рис. 17, д). Вследствие симметрии задачи относительно оси Z потенциал U в точке наблюдения M может зависеть от ее координат r, z , но не зависит от координаты φ . Как и в предыдущей задаче, электрическое поле удобно представить в виде суммы: $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}^B$, где \vec{E}^{Π} – поле заряда $e_{\mathcal{E}} = \epsilon_0 \rho_i I$, а \vec{E}^B – поле зарядов в виде простого слоя с неизвестной плотностью σ , лежащего на цилиндрической границе S . Тогда потенциал U , связанный с полем \vec{E} равенством (87), при учете выражений (140), (145) для потенциала первичного поля точечного электрода определяют выражения, подобные (102), (107):

$$U_i = U^{\Pi} + U_i^B, \quad U_e = U^{\Pi} + U_e^B, \quad U^{\Pi} = \frac{I}{4\pi\gamma_i L}, \quad L = \sqrt{r^2 + z^2}. \quad (156)$$

$$\Psi = C_1 \cdot \cos(mz) + C_2 \cdot \sin(mz), \quad \Phi = D_1 \cdot I_0(mr) + D_2 \cdot K_0(mr),$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 – множители, которые не зависят от аргументов z, r функций Ψ, Φ , но могут быть разными при различных значениях параметра m . В выражениях для Φ $I_0(mr)$ и $K_0(mr)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка 1-го и 2-го рода аргумента $(m \cdot r)$. K_0 называют также функцией Макдональда. Зависимости функций $I_0(x)$ и $K_0(x)$ от x приведены на рис. 17,е. Отметим, что при $x \rightarrow 0$: $K_0(x) \rightarrow \infty$, а при $x \rightarrow \infty$: $I_0(x) \rightarrow \infty$.

Так как произведение $\Phi \cdot \Psi = U^B$, то при учете условий “2”, “3” в (159), а также- второго равенства в (157), не можем воспользоваться некоторыми из решений для Φ и Ψ . Согласно 2-му условию в (157) потенциал U^B должен быть четной функцией координаты z . Это условие выполнимо только при $C_2=0$. В соответствии с условием “2” в (159), в области V_i , где $0 \leq r < a$, должны выбрать $D_2=0$, так как при $r \rightarrow 0$: $K_0(mr) \rightarrow \infty$, а потенциал U_i^B имеет ограниченные значения всюду, в том числе на оси Z . Из условия “3” в (159) следует, что в области V_e , где $a < r < \infty$, следует выбрать $D_1=0$, так как при $r \rightarrow \infty$ и $m > 0$: $I_0(mr) \rightarrow \infty$, а потенциал $U_e^B \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Обозначая произведения $C_1 \cdot D_1 = A(m)$, $C_1 \cdot D_2 = B(m)$, получаем следующие частные решения для U_i^B, U_e^B при произвольном, но фиксированном значении $m \geq 0$:

$$U_i^B(m) = A(m) \cdot I_0(mr) \cdot \cos(mz), \quad U_e^B(m) = B(m) \cdot K_0(mr) \cdot \cos(mz).$$

Как и в предыдущей задаче, общие решения для U_i^B, U_e^B получим в виде интегралов:

$$U_i^B = \int_0^{\infty} A(m) \cdot I_0(mr) \cos(mz) dm, \quad U_e^B = \int_0^{\infty} B(m) \cdot K_0(mr) \cos(mz) dm. \quad (160)$$

Если определим множители $A(m), B(m)$ в подынтегральных функциях в (160), то решение задачи будет получено.

Подставляя выражения (160) в условие “4,а” в (159), и учитывая, что из полученного равенства интегралов следует равенство подынтегральных функций, получаем:

$$B(m) = A(m) \cdot I_0(ma) / K_0(ma) \quad (161)$$

Для того, чтобы можно было воспользоваться условием сопряжения “4,б” в (159) и получить аналитическое решение прямой задачи, надо представить потенциал U^{Π} в виде интеграла, сходного с выражениями (160) для U^B . Пользуясь формулой Вебера

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(mr) \cos(mz) dm,$$

из выражений (156) для U^{Π} получаем:

$$U^{\Pi} = \frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \int_0^{\infty} K_0(mr) \cos(mz) dm.$$

Следовательно, потенциалы суммарного поля $U_{i,e} = U^{\Pi} + U_{i,e}^B$ при учете (161) можно представить в виде:

$$U_i = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) K_0(mr) + A(m) I_0(mr) \right] \cos(mz) dm,$$

$$U_e = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) + A(m) \frac{I_0(ma)}{K_0(ma)} \right] K_0(mr) \cos(mz) dm.$$

Подставим эти выражения в равенство “4,a” в (159). При дифференцировании учтем, что $\frac{dI_0(x)}{dx} = -I_1(x)$, $\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$, где $I_1(x)$, $K_1(x)$ - модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка. Так как условие “4,a” в (159) справедливо при $r=a$, из этого условия получаем:

$$\int_0^{\infty} \left[- \left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) K_1(ma) + A(m) I_1(ma) \right] \cos(mz) dm =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[- \left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) - A(m) \frac{I_0(ma)}{K_0(ma)} \right] K_1(ma) \cos(mz) dm.$$

Из равенства этих интегралов при любых значениях a, z следует равенство подынтегральных функций:

$$- \left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) K_1(ma) + A(m) I_1(ma) = \left[- \left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) - A(m) \frac{I_0(ma)}{K_0(ma)} \right] K_1(ma).$$

Отсюда для коэффициента $A(m)$ получаем выражение:

$$A(m) = \frac{\left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) (\gamma_i - \gamma_e) K_0(ma) K_1(ma)}{\gamma_i I_1(ma) K_0(ma) + \gamma_e I_0(ma) K_1(ma)}. \quad (162)$$

Таким образом, в соответствии с (156), (160), (161), (162) получаем выражения для потенциалов U_i и U_e (в областях V_i и V_e) поля \vec{E} точечного электрода, расположенного на оси цилиндрической границы:

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \frac{I}{4\pi\gamma_i \sqrt{r^2 + z^2}} + \int_0^{\infty} A(m) I_0(mr) \cos(mz) dm, \\ U_e &= \frac{I}{4\pi\gamma_i \sqrt{r^2 + z^2}} + \int_0^{\infty} A(m) \frac{I_0(ma)}{K_0(ma)} K_0(mr) \cos(mz) dm, \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

где $A(m) = \frac{\left(\frac{I}{2\pi^2\gamma_i} \right) (\alpha - 1) K_0(ma) K_1(ma)}{\alpha I_1(ma) K_0(ma) + I_0(ma) K_1(ma)}, \quad \alpha = \gamma_i / \gamma_e = \rho_e / \rho_i.$

В точке M_0 на оси Z цилиндрической границы, то есть при $r=0$ (рис. 17, д) имеем: $I_0(0)=1$ и

$$U(M_0) = \frac{I}{4\pi\gamma_i|z|} + \int_0^\infty A(m) \cos(mz) dm.$$

3.4. ПОЛЕ ДВОЙНОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Рассмотрим пример прямой задачи теории стационарного электрического поля, в которой заданным источником поля \vec{E} является поддерживаемый контактной э.д.с. $\mathcal{E}^{\text{КТН}}$ двойной электрический слой на особой поверхности, являющейся в общем случае поверхностью раздела двух сред с разными удельными электропроводностями.

Поле поляризованной сферы

Задача 24. Заданным источником стационарного поля \vec{E} является двойной электрический слой с поверхностной плотностью дипольных моментов $\eta = \varepsilon_0 \cdot \mathcal{E}^{\text{КТН}}$ на сферической поверхности S с радиусом R_0 . Поверхность S разделяет области V_i и V_e , среда в которых порознь однородна и имеет удельные электропроводности $\gamma_i = 1/\rho_i$ и $\gamma_e = 1/\rho_e$ соответственно (рис. 18,а). Контактная э.д.с. $\mathcal{E}^{\text{КТН}} = \mathcal{E}$, поддерживающая двойной слой, меняется на поверхности S по закону: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos\theta$, где θ – угол, отсчитываемый от заданного луча, выходящего из центра поверхности S . На рис. 18,а этот луч направлен вертикально вниз. Прямую, на которой угол θ равен нулю или π , назовем осью поляризации. Требуется определить потенциал U , связанный с полем \vec{E} равенством $\vec{E} = -\text{grad}U$.

Решение. Задача цилиндрически симметрична относительно оси поляризации; особая поверхность – сфера. Введем сферическую систему координат с началом O в центре сферической поверхности S и полярной осью по оси поляризации, дополнив эту систему осью Z , которую совместим с полярной осью (рис. 18,а). Для потенциала U , согласно (17), имеем: $U=U(R, \theta)$.

Так как источники поля, расположенные на поверхности S ($R=R_0$), имеют нечетную зеркальную симметрию (относительно плоскости $z=0$), то при $R \gg R_0$ искомое поле должно быть идентично полю диполя. Принимая во внимание, что среда в областях V_i и V_e – однородна, стороннее поле всюду, кроме поверхности S , равно нулю, а нормали к особой поверхности S ориентированы по координатным линиям l_R , согласно (88), (92), (93), (38), имеем:

$$\left. \begin{aligned}
1) \quad & \nabla^2 U_i = 0, \quad \nabla^2 U_e = 0; \\
2) \quad & \text{при } R \rightarrow \infty \quad U_e \rightarrow 0, \quad \text{как } 1/R^2; \\
3) \quad & \text{при } R = R_0 : \\
& \quad \quad \quad \text{а) } U_e - U_i = \mathcal{E}, \quad \text{б) } \gamma_i (\partial U_i / \partial R) = \gamma_e (\partial U_e / \partial R).
\end{aligned} \right\} \quad (164)$$

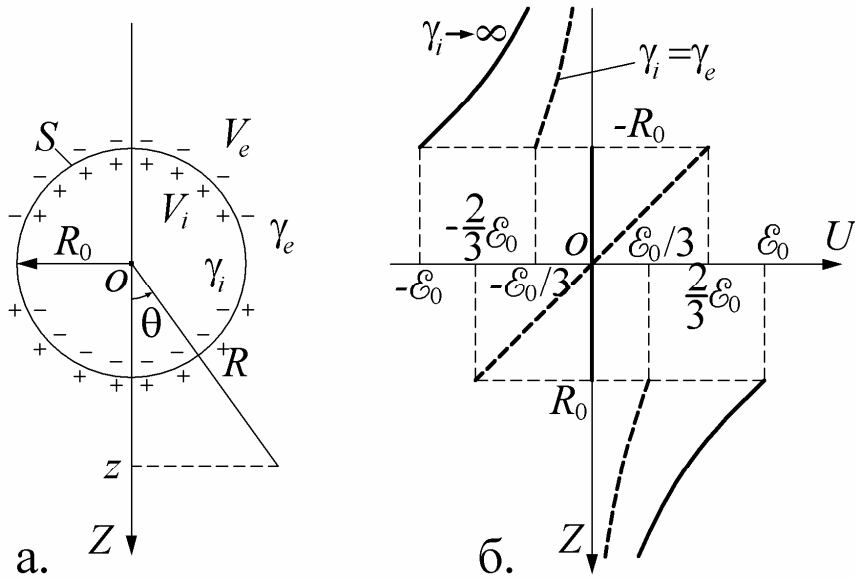


Рис.18. Поле поляризованной сферы.

Попытаемся получить решение задачи в предположении, что поле \vec{E}_i в области V_i – однородно и коллинеарно оси поляризации Z , а поле \vec{E}_e в области V_e – идентично полю диполя D , расположенного в центре сферической поверхности S и имеющего направление момента \vec{p} , коллинеарное оси Z . Тогда, согласно (19'), (38), (54'), аналогично (100), (105) или (109), (110) имеем: $\vec{E}_i = \vec{1}_z E_{iz}$, $E_{iz} = a = \text{const}$,

$$U_i = -a \cdot z = -a \cdot R \cos \theta, \quad U_e = b \cdot \cos \theta / R^2, \quad (165)$$

где $b = p / (4\pi\epsilon_0)$, а $\vec{p} = \vec{1}_z p$ – момент диполя D .

Функции U_i и U_e в (165) удовлетворяют условиям “1”, “2” в (164), а из условий “3,а”, “3,б” в (164) (при учете того, что с $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \theta$) получаем систему уравнений

$$\begin{cases}
b/R_0^2 + aR_0 = \mathcal{E}_0, \\
\gamma_i a = \gamma_e 2b/R_0^3,
\end{cases}$$

решение которой для a и b :

$$a = (\mathcal{E}_0/R_0) \frac{2\gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e}, \quad b = \mathcal{E}_0 R_0^2 \frac{\gamma_i}{\gamma_i + 2\gamma_e}. \quad (166)$$

Выражения (165), (166) для U_i и U_e удовлетворяют всем условиям (164) и, следовательно, определяют искомого решение для потенциала U поля \vec{E} .

Итак, поле \vec{E}_i – однородно, а поле \vec{E}_e – такое, какое создавал бы диполь D с моментом $\vec{p} = \vec{1}_z(4\pi\epsilon_0) \cdot b$. При ограниченных $\gamma_i > 0$ и $\gamma_e > 0$ имеем $a > 0$, $b > 0$. Так как $\vec{E}_i = \vec{1}_z a$, то поле \vec{E}_i и момент \vec{p} направлены как ось Z .

Мы полагали, что поверхностная плотность дипольных моментов $\eta = \epsilon_0 \cdot \mathcal{E}$, характеризующая двойной слой, задана и не зависит от удельных электропроводностей γ_i и γ_e . Но, согласно (165), (166), потенциал U и, следовательно, поле \vec{E} зависит от величин γ_i и γ_e . Это связано с тем, что кроме двойного слоя на поверхности раздела S в соответствии с (96) должен присутствовать другой источник поля \vec{E} – простой слой с плотностью σ . Определим эту плотность. Согласно (94), (87), (165), (166),

$$\sigma = \epsilon_0 \left[(\partial U_i / \partial R - \partial U_e / \partial R) \right]_{R=R_0} = 2\epsilon_0 (\mathcal{E}_0 / R_0) \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e} \cos\theta. \quad (167)$$

Рассмотрим три случая: $\gamma_i = \gamma_e$; $\gamma_i > \gamma_e$; $\gamma_i \rightarrow \infty$.

При $\gamma_i = \gamma_e$, обозначая величины a и b соответственно a'' и b'' из (166) получаем:

$$a'' = (2/3) \mathcal{E}_0 / R_0, \quad b'' = (1/3) \mathcal{E}_0 R_0^2. \quad (168)$$

Согласно (168), величины a'' , b'' не зависят от γ . Из (167) следует, что в этом случае $\sigma = 0$, то есть единственным источником поля \vec{E} является заданный двойной электрический слой. Подставляя выражения (168) для a'' , b'' вместо множителей a , b в (165), можем определить потенциал той части \vec{E}'' поля \vec{E} , которую создает двойной слой.

При $\gamma_i > \gamma_e$ согласно (167), плотность σ простого слоя меняется по поверхности $R = R_0$, как $\cos\theta$. Для разностей $a' = a - a''$, $b' = b - b''$ из (166), (168) получаем:

$$a' = -(2/3) (\mathcal{E}_0 / R_0) \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e}, \quad b' = (2/3) \mathcal{E}_0 R_0^2 \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e}. \quad (169)$$

Если подставим выражения (169) для a' , b' вместо величин a , b в (165), то определим потенциал той части \vec{E}' поля \vec{E} , которую создает простой слой. Так как при $\gamma_i > \gamma_e$ имеем $a' < 0$, $b' > 0$, то, согласно (165), (168), (87), поле \vec{E}' ослабляет суммарное поле \vec{E} (по сравнению с полем \vec{E}'') в области V_i и усиливает \vec{E} в области V_e .

При $\gamma_i \rightarrow \infty$ (в области V_i – идеальный проводник) из (166), (169) получаем:

$$a = 0, \quad b = \mathcal{E}_0 R_0^2, \quad a' = -(2/3)\mathcal{E}_0/R_0, \quad b' = (2/3)\mathcal{E}_0 R_0^2.$$

В этом случае, согласно (165), (87), (168), $\vec{E}_i = 0$, $U_i = 0$, а поле \vec{E}_e в три раза больше поля \vec{E}''_e создаваемого заданным двойным слоем.

Графики функций $U(z)$ при расположении точки наблюдения на оси поляризации Z для случаев $\gamma_i = \gamma_e$ (штриховая линия) и $\gamma_i \rightarrow \infty$ (сплошная линия) показаны на рис. 18,б.

3.5. ЗАДАНИЯ

1. На основе решения задачи 18 построить для оси Z графики функций $U(z)$ и $E_z(z)$ (для первичного, вторичного и суммарного поля) в двух случаях: а) $\gamma_i \gg \gamma_e$; б) $\gamma_i \ll \gamma_e$.

2. В задачах 18, 23 определить заряд e_s , на полусфере S ($R=R_{ш}=R_0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$).

3. В задаче 18 при условии $\gamma_i = 0$ поставить краевую задачу для области V_e и получить решение этой задачи.

4. В задаче 19 при условии $\rho_i = 0$ поставить краевую задачу для области V_e и получить решение этой задачи.

5. В немагнитной среде задано первично однородное поле \vec{H}^{Π} , в котором находится объект в виде неограниченного по высоте кругового цилиндра с радиусом r и с магнитной восприимчивостью $\kappa > 0$. Вектор остаточной намагниченности $\vec{J}^0 = 0$. Определить магнитное поле внутри и вне цилиндра, полагая, что направление \vec{H}^{Π} нормально к оси цилиндра, Найти коэффициент размагничивания N и магнитный момент единицы длины цилиндра (см. задачи 18,а, 19).

6. Две коаксиальные цилиндрические поверхности с радиусами r_1, r_2 , делят пространство на три области: внутреннюю V_1 , цилиндрический слой V_2 и внешнюю V_3 с удельными электропроводностями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, соответственно. Заданное однородное первичное поле \vec{E}^{Π} (поле в безграничной однородной среде с $\gamma = \gamma_3$) направлено по нормали к оси симметрии модели среды. Определить потенциал и суммарного поля $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}^B$ в предположении, что \vec{E}^B в V_1 – однородно и коллинеарно \vec{E}^{Π} , \vec{E}^B в V_3 – идентично полю линейного диполя, а \vec{E}^B в V_2 – сумма однородного поля и поля линейного диполя (см. задачу 19).

7. На основе решения задачи 22 построить для оси Z графики функций $U(z)$ и $E_z(z)$ (для первичного, вторичного и суммарного поля) в двух случаях: а) $\gamma_2 \gg \gamma_1$ б) $\gamma_2 \ll \gamma_1$.

8. Горизонтальная плоскость S – граница между непроводящим верхним полупространством V_0 и проводящим полупространством V^* . В V^* по-

луплоскость S , нормальная к S_0 , разграничивает области V_1, V_2 среда в которых порознь однородна и имеет удельную электропроводности γ_1, γ_2 , соответственно. На той части плоскости S_0 , которая разделяет области V_0 и V_1 , на расстоянии h от S находится точечный электрод с эмиссией I . Поставить краевую задачу для потенциала U поля \vec{E} в полупространстве V^* и получить ее решение методом зеркальных изображений (см. задачи 21, 22).

9. В задаче 24 при условии $\rho_i=0$ поставить краевую задачу для области V_e и получить решение этой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альпин Л. М., Даев Д. С, Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». М., "Недра", 1985.
2. Альпин Л. М. Теория поля. М., "Недра", 1966.
3. Альпин Л. М. Практические работы по теории поля. М., "Недра", 1971.
4. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л., "Недра", 1972.
5. Заборовский А. И. Электроразведка. М. Гостпотехиздат, 1963.
6. Каринский А. Д. Практикум по теоретическим основам разведочной геофизики. Изд-во МГРИ, 1984.
7. Каринский А. Д. Практикум по курсу «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». Изд-во МГГА, 1993.
8. Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. М., "Недра", 1997.
9. Кудрявцев Ю. И. Теория поля и ее применение в геофизике. М., "Недра", 1988.
10. Овчинников И. К. Теория поля. М., "Недра", 1979.
11. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции, М., "Наука", 1977.