Б. С. Калитин

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 517.925

Р е ц е н з е н т ы :
Заведующий отделом «Дифференциальные уравнения» Института
математики и механики УрО РАН
доктор физико-математических наук *В. И. Максимов*;
доктор физико-математических наук *В. В. Амелькин*

Калитин Б. С.

Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений: научное издание / Б. С. Калитин. – Минск, БГУ, 2013. – 264 с.

В монографии изложен метод знакопостоянных функций Ляпунова применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, явно зависящих от времени. Приведен сравнительный анализ результатов разного подхода в формировании теорем метода функций Ляпунова для исследования задачи устойчивости состояний равновесия.

Книга предназначена научным работникам, аспирантам и студентам математических специальностей, занимающимся вопросами устойчивости в моделях естествознания, и специалистам по прикладной математике.

ISBN 978-985-518-

Кто не боится пересмотреть основы
учения для уточнения знания,
тот уже прав.
Кто не боится остаться непонятым,
тот с нами.
Кто не боится соединить русла
больших течений, тот наш друг.

Слова Учителей Индии

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая книга посвящена задачам устойчивости решений систем обыкновенных неавтономных дифференциальных уравнений. Основное внимание обращено на метод функций Ляпунова (второй метод или прямой метод Ляпунова) и его содержание на современном этапе. Материалы первоисточников фиксируют определенный итог накопленного опыта исследований одного из направлений развития идей А. М. Ляпунова. Речь идет об обосновании возможности использования *знакопостоянных функций* вместо знакоопределенных. Как всякое новое, эта идея требует пояснения не только теории ее создания, но и проведения испытаний на экспериментальном уровне, т. е. иллюстрации на конкретных примерах приложения. Все эти вопросы не остались без внимания. Вместе с тем в книге учтены предшествующие достижения таких известных специалистов в области теории устойчивости, как Н. Г. Четаев [112], Г. В. Каменков [69], П. А. Кузьмин [76], К. П. Персидский [98], Ж. Курцвейль [77], Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский [8, 9], В. И. Зубов [35], В. М. Матросов [86–88], Ж. П. Ла Салль и С. Лефшец [82], Х. Л. Массера [85], Т. Йошизава [166], Ц. Артстейн [116–118], А. С. Андреев [5–7], а также работы автора [37–65, 139, 140] и др. Достаточно полные списки библиографий по этому вопросу содержатся в обзорах литературы работ [2, 23, 75, 89, 102, 105, 115, 121, 152, 166].

Указанные результаты, во-первых, дополнили и обогатили арсенал инструментов анализа систем дифференциальных уравнений, подготовили благодатную почву для дальнейшего развития идей создателя теории устойчивости, академика Александра Михайловича Ляпунова.

Во-вторых, эти достижения расширили класс функций Ляпунова, пригодных для изучения задач устойчивости, что крайне важно с практической точки зрения. Работа проведена в направлении разрешения сопутствующей проблемы – поиска подходящей функции Ляпунова. Как показывает накопленный опыт решения задач устойчивости, такая проблема во многом зависит от искусства исследователя, его личного опыта, т. е. играет роль субъективного фактора. Тем не менее в работах [2, 11, 15, 37, 42, 43, 48, 54, 59, 61, 65, 75, 78, 89, 96, 104, 112, 115] наработаны специальные методы и приемы построения функций Ляпунова, развитие таких подходов продолжает совершенствоваться.

В-третьих, авторы не только предоставили новые теоретические возможности развития теории устойчивости динамических процессов, но и сохранили преемственность идей и формулировок основных результатов А. М. Ляпунова, подчеркивая тем самым универсальность прямого метода.

Как известно, метод функций Ляпунова базируется на простой геометрической идее, которая состоит в следующем:

A) Определенно положительная функция $V(x)$ (в общем случае положительная функция относительно компактного инвариантного множества M, так что $V(x) = 0\ \forall x \in M$) обладает тем свойством, что при неограничительных условиях и достаточно малом значении числа $c > 0$ множество уровня $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le c\}$ задает компактную окрестность K_c множества M.

B) При выполнении условия монотонности функции V вдоль движений наблюдаемого динамического процесса (производная по времени $\dot{V}$ в силу уравнений знакопостоянная) окрестности K_c положительно инвариантны при всех достаточно малых $c > 0$.

C) Если имеет место строгая монотонность изменения функции Ляпунова вдоль решений, то множества K_c строго положительно инвариантны, т. е. если состояние x_0 принадлежит границе $\operatorname{Fr} K_c$ множества K_c, то решение $x(x_0, t_0, t)$, $x(x_0, t_0, t_0) = 0$, содержится в его внутренности $\operatorname{int} K_c$ для всех $t > t_0$.

В дальнейшем источником развития метода функций Ляпунова послужили попытки ослабить требования, предъявляемые к функции V и ее производной $\dot{V}$, со свойствами *A*), *B*) и *C*).

Первым существенным шагом в этом направлении явились работы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [8, 9, 75], а также А.П. Тузова [108]. Здесь в теоремах об асимптотической устойчивости (локальной и глобальной), а также в теореме о неустойчивости производная $\dot{V}$ допускается знакопостоянной, а не знакоопределенной с множеством нуля, которое не содержит положительных полутраекторий, кроме тривиальной.

Соответствующие результаты были получены для автономных и периодических по времени систем дифференциальных уравнений, а также для уравнений с запаздыванием времени [75]. Позднее Дж. Ла-Салль [146] добавил к этой идее рассмотрение задачи о локализации инвариантных множеств, что в современной научной литературе используется как принцип инвариантности.

ЭВОЛЮЦИЯ ИДЕЙ БАРБАШИНА–КРАСОВСКОГО

Наблюдая за развитием прямого метода в направлении использования определенно положительных функций Барбашина – Красовского с неположительной производной по времени применительно к неавтономным уравнениям, а именно, функций вида

$$\begin{cases} V(x,t) > 0, \quad \dot{V}(x,t) \le 0, \\ V(x,t) = c > 0 \text{ определяют окрестности равновесия } x = 0, \end{cases}$$

можно выделить несколько подходов. Первый из них связан с идеей В. М. Матросова [87] об использовании дополнительных функций, которые обеспечивают «недолгую» жизнь решений исследуемой системы на множестве, где производная функции Ляпунова равна нулю:

$$\dot{V}(x,t) = 0.$$

Впоследствии такая идея перешла в метод векторных функций Ляпунова, развиваемый научной школой академика В. М. Матросова и его блистательными учениками [20, 21, 89].

Несколько иной, но в том же направлении, подход в развитии идей Барбашина – Красовского был осуществлен А. С. Андреевым [5, 6], где использовалась техника предельных уравнений и предельных функций Ляпунова. Здесь в терминах категории предельных структурных свойств получено обобщение теорем Барбашина – Красовского для асимптотической устойчивости и устойчивости в целом.

Важный момент дальнейшего развития второго метода связан с рассмотрением более широкого класса вспомогательных функций. Среди желаемых тем исследований в этом направлении естественной казалась попытка использовать не знакоопределенные функции Ляпунова, а знакопостоянные, как это уже произошло с производной по времени от функции Ляпунова в работах Барбашина – Красовского. Однако, до конца 70-х годов XX в. неясным оставался вопрос о том, возможен ли такой следующий шаг в развитии прямого метода, т. е. использование функций вида $V(x) \geq 0$ вместо функций $V(x) > 0, \ x \notin M$.

Первая публикация на эту тему появилась в 1978 году [13], что послужило основанием для создания *метода знакопостоянных функций* Ляпунова. В этой статье были доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и устойчивости в целом (глобальная асимптотическая устойчивость) для систем автономных дифференциальных уравнений. Позднее были приведены различные варианты теорем о неасимптотической устойчивости [16, 139, 140] и о неустойчивости [63, 142]. Итоговой работой по методу знакопостоянных функций применительно к автономным дифференциальным уравнениям может служить монография Н. Г. Булгакова [16] и автора [65], где дана обширная иллюстрация метода на конкретных исследованиях динамических процессов естествознания.

Предлагаемая читателю книга является непосредственным продолжением работы [65]. Если не вдаваться в излишние детали констатации всех возможных результатов современной теории метода функций Ляпунова, материал данной монографии построен по принципу выявления общей закономерности развития идей прямого метода по следующей схеме:

Теоретической основой возможности указанного обобщения теорем Ляпунова является, по сути дела, отмеченная топологическая связь между наличием функции Ляпунова, подчиненной требованиям теорем, и множествами α- и ω-предельных точек движений динамических систем. Это обстоятельство, по-видимому, впервые было указано в [146] при доказательстве принципа инвариантности и выделено отдельным утверждением в лемме 5.1 [10].

Заметное упрощение обоснований основных утверждений метода знакопостоянных функций для динамических систем дало привлечение к рассмотрению отрицательных полутраекторий и связанных с ними критериев В. И. Зубова [35] и М. С. Измана [36] об асимптотической устойчивости, относящихся к качественной теории дифференциальных уравнений. Это позволило вскрыть и другие закономерности развития метода функций Ляпунова. В частности, в работе [164] показано, что попытка получить в автономном случае утверждение об асимптотической устойчивости из принципа инвариантности [82] приводит к обнаружению того, что использованная функция Ляпунова необходимо принадлежит классу знакопостоянных функций, а не только определенно положительных, и уж тем более – не знакопеременных.

Существенным отличием нового класса вспомогательных функций (знакопостоянных) от классических функций Ляпунова является невозможность выполнения условия *A*), отмеченного А. М. Ляпуновым.

Для знакопостоянных функций выполнение данного условия, как основного маяка самой идеи второго метода, в принципе невозможно. Это явилось причиной длительной паузы развития второго метода в данном направлении со времен создания Ляпуновым прямого метода исследования задач устойчивости и повсеместного внедрения идей Барбашина – Красовского. Возникающие здесь трудности формулировок новых утверждений и их доказательств подтолкнули исследователей к изучению дополнительных характеристик решений и их траекторий в качественной теории дифференциальных уравнений. В частности, в «копилку» устойчивоподобных свойств добавилось понятие *B*-устойчивости [39], которое «сильнее» свойства устойчивости по Ляпунову, но «слабее» свойства асимптотической устойчивости. Подверглись модификации и понятия свойств относительной устойчивости, связанные с существованием замкнутого положительно инвариантного множества Y_0, определяемого нулевой поверхностью уровня знакопостоянной функции V. Все эти и иные новые подходы обеспечили успешное продвижение в деле развития метода функций Ляпунова.

К настоящему времени теория прямого метода в классе знакопостоянных функций Ляпунова разработана для следующих динамических процессов:

✓ полудинамические системы [56, 63],

✓ динамические системы [16, 47, 49, 54, 58, 139, 140],

✓ системы неавтономных дифференциальных уравнений [41, 46, 49, 51, 52, 61, 62, 63, 68, 73],

- ✓ системы с периодической по времени правой частью [16, 44, 54],
- ✓ системы автономных дифференциальных уравнений [13, 16, 38, 42, 43, 48, 54, 59, 65, 142, 164],
- ✓ дискретные системы (автономные и неавтономные) [12, 15, 16, 24, 104],
- ✓ системы Пфаффа [29, 30],
- ✓ системы дифференциально-функциональных включений [79, 80],
- ✓ системы неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с конечным и бесконечным запаздыванием [7, 97, 107].

Большая часть этих исследований будет подробно представлена в главах монографии с соответствующей иллюстрацией на конкретных примерах.

В доказательствах новых результатов использовались различные методы и приемы. Главными среди них являются: *методы топологической динамики* [33, 35, 36, 57, 58, 92, 115, 121, 152, 153, 154], *техника предельных уравнений* [5, 46, 97, 117, 159], *качественная теория устойчивости полудинамических систем* [64, 152] и др.

Направление данного развития второго метода подчинено единой идее последовательной преемственности теории устойчивости, созданной гением математики, выдающимся ученым А. М. Ляпуновым. Последнее подтверждается найденными удобными для пользователей формулировками основных утверждений об устойчивости, асимптотической устойчивости, глобальной асимптотической устойчивости и неустойчивости, из которых естественным образом вытекают классические теоремы А. М. Ляпунова, Н. Г. Четаева, Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского, В. И. Зубова, Ж. Ла Салля и др. Выделены классы ситуаций, для которых возможно построение знакопостоянных функций Ляпунова, и даны достаточно содержательные примеры решения задач устойчивости.

Преимущества использования знакопостоянных функций можно охарактеризовать следующим обстоятельством. Во-первых, исследуемые динамические процессы, как правило, зависят от некоторых параметров исходной модели. Удачно построенная определенно положительная функция для рассматриваемой модели может оказаться вырожденной, т. е. *знакоположительной*, при предельных значениях параметров. До начала 80-х гг. XX в. изучение проблемы устойчивости для таких предельных ситуаций проводилось путем привлечения дополнительных рассуждений качественной теории устойчивости (см., например, [75, 112] Иные авторы и вовсе оставляли вырожденные случаи без внимания. В противовес этому формулировки теорем, опирающихся на знакопостоянные функции, позволяют делать заключение об устойчивости или неустойчивости наблюдаемых движений (или инвариантных множеств) в отмеченных крайних ситуациях не прибегая к громоздким дополнительным рассуждениям, требующим определенных знаний и навыков исследователя. Это дает дополнительную информацию об условиях устойчивости наблюдаемых явлений и тем самым, подчеркивается естественная возможность развития теории устойчивости.

Во-вторых, создание теоретической базы метода знакопостоянных функций позволяет существенно сократить доказательства полученных ранее утверждений (например, если речь идет о результатах, использующих первые интегралы динамических систем [35, 42, 48, 54, 61, 65, 86, 91, 105, 112, 150, 151] или изучение критических случаев [59]).

В-третьих, хотя проблема построения знакопостоянных функций остается по-прежнему такой же актуальной, как и при поиске определенно положительных функций Ляпунова, тем не менее, эта проблема приобретает дополнительный ресурс на ее реализацию. Важным является тот вывод, что созданы новые возможности сгладить трудности поиска подходящей вспомогательной функции для решения задачи устойчивости движения.

Отметим также, что обращение теорем об устойчивости, основанные на использовании знакопостоянных функций, не является важной математической проблемой. Соответствующее пояснение дано в монографии Н. Н. Красовского [75, с. 80] по поводу использования определенно положительных функций Ляпунова со знакопостоянной производной по времени.

Цель настоящей работы – изложить имеющиеся результаты (и в первую очередь результаты автора) по методу знакопостоянных функций Ляпунова применительно к различным классам процессов динамики и указать сферу его применения для решения проблем устойчивости движения.

Для лучшего восприятия представленного материала в первой главе изложены все необходимые сведения теории устойчивости, которые используются в последующих частях издания. Основное содержание дает различные формулировки новых результатов прямого метода, и при этом излагаются три основных подхода в решении проблемы устойчивости нулевого решения.

В первом из них (глава 2) для теоретического обоснования метода знакопостоянных функций используется техника предельных уравнений, где наряду с понятием предельных функций правых частей системы (понятие предельного уравнения) используется и понятие предельных функций Ляпунова.

Во втором подходе (глава 3) для обоснования основных теорем применяется метод разделения переменных (координат вектора состояния системы x) на подмножества $x = (y, z)$ с представлением явного вида многообразия ($y = \varphi\ (z, t)$), где функция Ляпунова равна нулю.

И наконец, в главе 4 излагается третий подход формирования новых результатов, основанный на методах качественной теории дифференциальных уравнений. Здесь предварительно изучаются специальные локальные и глобальные свойства полутраекторий в окрестности, где функция Ляпунова обращается в нуль. В частности, используются такие понятия, как «пороговое свойство» П. Сейберта [153, 154, 158] (the treshold property), свойство устойчивости вблизи равновесия, равномерная интегральная непрерывность, свойства предельных множеств траекторий и т. п.

Таким образом, главы 2, 3 и 4 посвящены развитию метода функций Ляпунова в классе знакоположительных вспомогательных функций. Этот метод, в отличие от подхода В. М. Матросова, допускает существование решений на множестве нулей функции Ляпунова, но только таких, которые удовлетворяют определенным свойствам. В случае устойчивости (или неустойчивости) это – свойство стремления к началу координат. Таким образом, если найденная каким-то образом функция Ляпунова (в реальности) не содержит положительных полутраекторий на множестве нулей функции V, то это функция типа Ляпунова – Барбашина – Красовского – Матросова. В противном случае возможно применение метода знакопостоянных функций.

Обращаем внимание читателя на принятый в книге унифицированный порядок нумерации теорем метода функций Ляпунова, который удобен при сравнении предлагаемых методов и приемов построения прямого метода для различных типов дифференциальных уравнений. Такая нумерация содержит три (или четыре) цифры для каждого раздела книги. Первые две рядом стоящие цифры – это порядковый номер соответствующей главы и ее раздела. Третье место порядковой нумерации закреплено постоянно за следующими свойствами решений:

цифра 1 – устойчивость,

цифра 2 – асимптотическая устойчивость,

цифра 3 – глобальная асимптотическая устойчивость,

цифра 4 – неустойчивость.

Четвертая цифра порядкового номера означает модификацию свойства, отмеченного третьей цифрой.

Главы 2, 3 и 4 можно читать независимо друг от друга, так как они отражают разные подходы в понимании одного и того же:

Эволюция идей А. М. Ляпунова, Н. Г. Четаева, Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского в направлении использования знакопостоянных вспомо-

гательных функций – это естественный процесс развития одного из современных универсальных методов теории устойчивости движения.

В предлагаемой монографии допускается использование широко известных или обоснованных, часто цитируемых в научных публикациях результатов теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и смежных с ними направлений научного познания без приведения соответствующих доказательств.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность академику РАН С. Н. Васильеву, а также профессорам В. В. Амелькину, А. А. Косову, В. И. Максимову и Д. Я. Хусаинову за возможность общения и обсуждения результатов, что, по моему убеждению, отразилось в конечном счете на улучшении содержания книги.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{R}^+$ – вещественная положительная полуось;

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство,

$x(x_0, t_0, t)$ – решение, проходящее через точку $x = x_0$ при $t = t_0$.

$\gamma^+(x_0, t_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(x_0, t_0, t), t \geq t_0\}$ – положительная полутраектория;

$\gamma^-(x_0, t_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(x_0, t_0, t), t \leq t_0\}$ – отрицательная полутраектория;

$\gamma(x_0, t_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(x_0, t_0, t), t \in \mathbb{R}\}$ – траектория;

$L^+(x_0, t_0)$ ($L^-(x_0, t_0)$) – множество всех ω-предельных (соответственно α-предельных) точек для пары $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$;

$\overline{N}$ – замыкание множества N из $\mathbb{R}^n$;

$\mathrm{Fr}N$ – граница множества $N \subset \mathbb{R}^n$;

$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$, $A \subset \mathbb{R}^n$;

$B(N, \alpha) = \{x \in X\colon d(N, x) < \alpha\}$, $N \subset \mathbb{R}^n$;

$B_Y(N, \alpha) = B(N, \alpha) \bigcap Y$, $\alpha > 0$;

$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$;

K – множество функций Хана, т. е. непрерывных возрастающих функций a: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ таких, что $a(0) = 0$.

$\boldsymbol{C}^1(U, W)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций из U в W

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

1.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Материал данного раздела книги носит информативный характер. Наряду с упоминанием хорошо известных сведений из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости, метода функций Ляпунова, будут представлены схемы вложения неавтономного векторного дифференциального уравнения в общую абстрактную полудинамическую систему [46, 152] и изложена теория предельных уравнений [7, 46, 97, 117, 152, 159].

Пусть $\mathbb{R}^n$ означает n-мерное пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, а $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$ – соответственно ось вещественных чисел и ее неотрицательная часть. Производная вектора x по времени t-это

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n).$$

Пусть $B(x_0, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| < \alpha\}$ $\alpha > 0$ означает шар радиусом α с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, а $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \alpha\}$ – шар радиусом α с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть G – открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ – некоторая непрерывная вектор-функция. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\dot{x} = f(x, t),\ x(t_0) = x_0 \in G,\ t_0 \in I \subset \mathbb{R}. \qquad (1.1)$$

Определение 1.1. *Вектор-функция* $x = x(t)$, x: $t \to x(t)$, *определенная на интервале* I, $I \subset \mathbb{R}^+$, *называется решением* (1.1) (*задачи Коши* (1.1)), *если выполняются следующие условия*:

1) $x(t_0) = x_0$;
2) $x(t) \in G$ $\forall t \in I$;

3) $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ – *дифференцируема*;

4) $\dot{x}(t) = f(x(t), t)\ \ \forall t \in I.$

В этом случае говорят, что решение $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ проходит через точку $x = x_0$ при $t = t_0$ (в момент времени $t = t_0$).

Изначальными проблемами теории дифференциальных уравнений принято считать следующие возникающие задачи: указать *локальные и глобальные условия существования* решения, *условия единственности* решения. Ответы на эти вопросы дают известные теоремы.

Теорема 1.1 (Пеано) [109, с. 21]. *Пусть функция* $f: B(x_0, b)\times$ $\times[t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна для положительных чисел* a *и* b, *где* $B(x_0, b) \subset D$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \le t \le t_0 + a$. *Тогда существует по крайней мере одно решение* $x(x_0, t_0, t)$ *системы* (1.1), *проходящее через точку* $x = x_0$ *в момент времени* $t = t_0$, *причем это решение определено на отрезке* $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$, *где* $\alpha = \min(a, b/M)$, *и*

$$\| f(x,t) \| \le M \quad \forall (x, t) \in B(x_0, b) \times [t_0, t_0 + a].$$

Говорят, что функция $f: D\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица, если для любого компакта $K \subset D$ существует число $L = L(K) > 0$, такое, что

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \le L\|x - y\|, \ \ \forall x, y \in K \ \text{ и } \ \forall t \ge 0.$$

Теорема 1.2 (Пикара – Линделефа) [109, с. 19]. *Пусть функция* $f: D\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица. Тогда через каждую точку* $(x_0, t_0) \in D\times\mathbb{R}^+$ *проходит единственное решение* $x(x_0, t_0, t)$ *системы* (1.1).

Теорема 1.3 (о продолжении решения) [109, с. 24]. *Пусть функция* $f: D\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна и* $x(x_0, t_0, t)$, $(x_0, t_0) \in D\times\mathbb{R}^+$, *является решением системы* (1.1), *определенном на некотором интервале оси* $\mathbb{R}^+$. *Тогда функция* $x(x_0, t_0, t)$ *может быть продолжена* (*как решение*) *на максимальный интервал существования* $[\omega_-, \omega_+]$. *Кроме того, если* $[\omega_-, \omega_+]$ – *максимальный интервал существования, то* $x(x_0, t_0, t)$ *стремится к границе* $\mathrm{Fr}\, D$ *множества* D *при* $t \to \omega_-$ *и при* $t \to \omega_+$.

Следствие 1.1 [94, с. 16]. *Если решение* $x(x_0, t_0, t)$, $(x_0, t_0) \in D\times\mathbb{R}^+$, *остается при возрастании времени* $t \ge t_0$ *в замкнутой ограниченной об-*

ласти K из *D*, *в которой выполнены условия теоремы существования*, *то это решение может быть продолжено на бесконечный интервал* $[t_0, +\infty]$.

Наиболее простым условием, обеспечивающим неограниченную продолжаемость решений системы (1.1), является следующее:

$$\|f(x, t)\| < M < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \forall t \geq 0.$$

Действительно, так как всякое решение $x(x_0, t_0, t)$ можно представить в интегральном виде $x(x_0, t_0, t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(x_0, t_0, s), s)ds$, то отсюда легко следует оценка: $\| x(x_0, t_0, t) - x_0\| \leq M(t - t_0)$ $\forall t \geq t_0$. Поэтому решение не может стремиться к бесконечности при стремлении времени $t \geq t_0$ к конечному значению.

Встречаются ситуации, когда функция правой части дифференциального уравнения зависит от некоторого множества параметров $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k)$, причем для каждого фиксированного η задача Коши

$$\dot{x} = f(x, t, \eta), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

имеет единственное решение $x(t) = \varphi(x_0, t_0, t, \eta)$. Справедлива следующая теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных и от параметров.

Теорема 1.4 [109, с. 118]. *Предположим*, *что функция* $f(x, t, \eta)$ *непрерывна на некотором открытом множестве E*, *и пусть для каждого* $(x_0, t_0, \eta) \in E$ *задача Коши* (1.2) *с фиксированным* η *имеет единственное решение* $x(t) = \varphi(x_0, t_0, t, \eta)$. *Пусть* $[\omega_-, \omega_+]$ – *максимальный интервал существования решения* $x(t) = \varphi(x_0, t_0, t, \eta)$. *Тогда функция* $\varphi(x_0, t_0, t, \eta)$ *непрерывна на множестве* $\omega_- < t < \omega_+$, $(x_0, t_0, \eta) \in E$.

1.2. РАВНОМЕРНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1.1 (Гронволл – Беллман) [31, 94]. *Пусть заданы интервал* $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, *непрерывная неотрицательная функция* $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ *и непрерывная положительная функция* $u : [a, b] \to \mathbb{R}^+$, *которая*, *для любых значений* $t, \tau \in [a, b]$ *удовлетворяет интегральному неравенству*

$$u(t) \le u(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Psi(s)u(s)\,|\,ds\,|. \tag{1.3}$$

Тогда при всех $a < t_0 \le t < b$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$u(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \Psi(s)ds\right) \le u(t) \le u(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \Psi(s)ds\right). \tag{1.4}$$

Доказательство. Используя неравенство (1.3) при $t \ge \tau$ и при $t \le \tau$ соответственно, можем записать

$$u(t) \le u(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Psi(s)u(s)ds, \quad t \ge \tau\,, \tag{1.5}$$

$$u(t) \le u(\tau) + \int_{t}^{\tau} \Psi(s)u(s)ds, \quad t \le \tau\,. \tag{1.6}$$

Умножим (1.5) на $\Psi(t)$. Тогда будем иметь неравенство

$$u(t)\Psi(t) \le \Psi(t)\left(u(\tau) + \int_{\tau}^{t} u(s)\Psi(s)ds\right).$$

Его можно записать в виде дифференциального неравенства

$$v'(t) \le \Psi(t)(u(\tau) + v(t)), \quad \forall t \ge \tau, \tag{1.7}$$

если положить

$$v(t) = \int_{\tau}^{t} u(s)\Psi(s)ds.$$

Перепишем (1.7) в следующем виде:

$$\frac{v'(t)}{u(\tau) + v(t)} \le \Psi(t), \quad \forall t \ge \tau,$$

а затем проинтегрируем. Тогда получим

$$\ln(u(\tau) + v(t)) - \ln u(\tau) \le \int_{\tau}^{t} \Psi(s)ds \;\;\Leftrightarrow\;\; u(\tau) + \int_{\tau}^{t} u(s)\Psi(s)ds \le u(\tau)e^{\int_{\tau}^{t}\Psi(s)ds}.$$

В результате из неравенства (1.3) будем иметь правое неравенство требуемого соотношения (1.4), если положить $\tau = t_0$. Это и завершает доказательство оценки сверху в (1.4).

Доказательство оценки снизу проводится аналогично, где вместо неравенства (1.5) следует воспользоваться неравенством (1.6).

Установим теперь некоторое неравенство для решений уравнения (1.1), связанное с условием Липшица. Пусть даны два решения $x(t)=x(x_0,t_0,t)$ и $y(t)=x(y_0,t_0,t)$, определенные на некотором интервале $\omega_- < t-t_0 < \omega_+$. Они удовлетворяют соответствующим интегральным уравнениям, из которых можно составить разность

$$x(t)-y(t)=x_0-y_0+\int_{t_0}^{t}(f(x(s),s)-f(y(s),s))ds.$$

Произведя оценку норм обеих частей этого равенства, получим

$$\|x(t)-y(t)\|\le\|x_0-y_0\|+\int_{t_0}^{t}\|f(x(s),s)-f(y(s),s)\|ds,\ \ \forall t\ge t_0.$$

Отсюда с учетом условия Липшица можем записать

$$\|x(t)-y(t)\|\le\|x_0-y_0\|+L\int_{t_0}^{t}\|x(s)-y(s)\|ds,\ \ \forall t\ge t_0.$$

Аналогично этому можно вывести неравенство

$$\|x(t)-y(t)\|\ge\|x_0-y_0\|-L\int_{t_0}^{t}\|x(s)-y(s)\|ds,\ \ \forall t\ge t_0.$$

Применяя теперь лемму 1.1, получим оценку решений для всех значений времени $t\ge t_0$ и $t_0\ge 0$ в следующем виде:

$$\|x_0-y_0\|e^{-L(t-t_0)}\le\|x(x_0,t_0,t)-x(y_0,t_0,t)\|\le\|x_0-y_0\|e^{L(t-t_0)}. \qquad (1.8)$$

Эта оценка называется *основным неравенством*. Оно характеризует скорость удаления и скорость сближения близких друг другу решений. С помощью оценки (1.8) легко доказывается следующее свойство решений уравнения (1.1).

Теорема 1.5 (интегральная непрерывность решений) [94, с. 22]. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *удовлетворяет условию Липшица. Если решение* $x(x_0,t_0,t)$ *уравнения* (1.1) *существует при* $t_0\le t\le t_0+a$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *можно найти* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *такое, что решение* $x(y_0,t_0,t)$, *определенное начальными данными* $x(y_0,t_0,t_0)=y_0$, $t=t_0$, *где* $\|x_0-y_0\|<\delta$, *существует в том же интервале и удовлетворяет для всех значений* t *в интервале* $t_0\le t\le t_0+a$ *неравенству* $\|x(x_0,t_0,t)-x(y_0,t_0,t)\|<\varepsilon$.

При условии, что правая часть уравнений (1.1) удовлетворяет локальному условию Липшица по x, интегральная непрерывность обладает определенным условием равномерности по $t_0 \geq 0$. А именно, имеет место следующее свойство.

Определение 1.2 ([55, 68]). *Система* (1.1) *удовлетворяет свойству* ***равномерной интегральной непрерывности*** (*свойству* РИН), *если для любого числа* $\beta > 0$ ($B_\beta \subset D$), *любых* $\varepsilon > 0$ *и* $T > 0$ *можно указать число* $\delta = \delta(\beta, \varepsilon, T) > 0$, такое, *что*

$$\|x(x_0, t_0, t) - x(y_0, t_0, t)\| < \varepsilon$$

для любой четверки $(x_0, y_0, t_0, t) \in D \times D \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, *удовлетворяющей условию*

$$t_0 \geq 0,\ \|x_0 - y_0\| < \delta;\ \|x(x_0, t_0, t)\| < \beta \ \text{при}\ t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Теорема 1.6. *Если функция* $f : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица*, *то система* (1.1) *удовлетворяет свойству равномерной интегральной непрерывности*.

Доказательство. Пусть $x(x_0, t_0, t)$ и $x(y_0, t_0, t)$ – решения системы (1.1). По лемме 1.1 получаем

$$\|x(x_0, t_0, t) - x(y_0, t_0, t)\| \leq \|x_0 - y_0\|\, e^{L(t-t_0)}.$$

Поэтому для любого $T > 0$ имеем следующую оценку:

$$\|x(x_0, t_0, t) - x(y_0, t_0, t)\| \leq \|x_0 - y_0\|\, e^{LT} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \ \text{и}\ \forall t_0 \geq 0.$$

Это и подтверждает свойство РИН.

Замечание 1.1. Из определения свойства РИН при $y_0 = 0$ вытекает, в частности, что если решение $x(x_0, t_0, t)$ при достаточно малом начальном состоянии ($\|x_0\| < \delta$) и $t_0 \geq 0$ ограничено шаром B_β, то оно равномерно ограничено по переменной $t_0 \geq 0$.

Пример 1.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = (-1)^n 2tx$, $t \geq 1$. Нетрудно проверить, что несмотря на то, что оно не удовлетворяет условию Липшица, при n нечетном его решения обладают свойством равномерной интегральной непрерывности; при n четном, напротив, свойство равномерной интегральной непрерывности отсутствует.

Другие достаточные условия равномерной интегральной непрерывности могут быть получены на основании следующего определения.

Определение 1.3. *Решение* $\varphi(x_0, t_0, t)$ *системы* (1.1) *будем называть равномерно ограниченным по* $t_0 \geq 0$, *если* $\forall T > 0\ \exists C = C(T) > 0$, *то* $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq C\|x_0\|$ *для* $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ *и всех* $t_0 \geq 0$.

Теорема 1.7. *Пусть правая часть системы* (1.1) *удовлетворяет неравенству*

$$\| f(x, t)\| \le g(t)\|x\|,\ x \in G,\ t \ge 0, \tag{1.9}$$

где $g\colon\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– непрерывная неотрицательная функция. Тогда, если для любого* $T > 0$ *существует постоянная* $C > 0$ такая*, что выполняется неравенство*

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)ds \le C < +\infty,\ \forall t_0 \ge 0, \tag{1.10}$$

то решения системы (1.1) *обладают свойством равномерной ограниченности по* $t_0 \ge 0$.

Действительно, оценивая интегральное равенство

$$\varphi(x_0, t_0, t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(x_0, t_0, s), s)ds\ ,$$

получим $\|\varphi(x_0,\ t_0,\ t)\| \le \|x_0\| + |\int_{t_0}^{t}\|f(\varphi(x_0,t_0,s),s)\|ds\,|$, или, с учетом (1.9), будем иметь неравенство $\|\varphi(x_0,\ t_0,\ t)\| \le \|x_0\| + |\int_{t_0}^{t} g(t)\|\varphi(x_0,t_0,s)\|ds\,|$. Отсюда, воспользовавшись леммой 1.1 и (1.10), получаем оценку

$$\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \le \|x_0\|\exp(\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)ds\ ) \le C\|x_0\|\ \ \forall t_0 \ge 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что в примере 1.1 при нечетном n решения являются равномерно ограниченными при $t_0 \ge 0$, а при n четном они этим свойством не обладают.

Теперь нетрудно видеть, что справедлива теорема.

Теорема 1.8. *Если все решения системы* (1.1) *равномерно ограничены по* $t_0 \ge 0$ *для начальных состояний* x_0 *из некоторого компакта* K, *то они обладают свойством равномерной интегральной непрерывности в* K.

Пример 1.2. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = (at \sin t - 2t)x,\ \ x \in \mathbb{R}\ ,\ t \ge 0;\ a \in \{0,\ \pi/3\}\ .$$

1) Пусть $a = 0$. Тогда, интегрируя, получаем оценку

$$|x(x_0, t_0, t) - x(y_0, t_0, t)| = |x_0 - y_0|\exp(\ t_0^2\ - t^2) \le |x_0 - y_0|$$

для любого $T > 0$ и для всех значений $0 \le t_0 \le\ t \le t_0 + T$. Следовательно, имеет место равномерная интегральная непрерывность решений.

2) Пусть $a = \pi/3$. Тогда, соответственно получим:

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)| = |x_0 - y_0|\exp(\pi/3 \sin t - \pi/3t \cos t - t^2)\Big|_{t_0}^{t} .$$

Положим здесь $t_{0n} = 2\pi n$, $T = \pi$ и $t_n = t_{0n} + T$. Тогда будем иметь

$$(\pi/3 \sin t - \pi/3t \cos t - t^2)\Big|_{t_{0n}}^{t_{0n}+T} = \pi^2 (4n + 1)(\pi/3 - 1) \to +\infty \text{ при } n \to +\infty.$$

Таким образом, убеждаемся, что равномерная интегральная непрерывность решений отсутствует.

Пример 1.3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x} = (-1)^n \frac{x}{t} + xy, \quad \dot{y} = -\frac{y}{t}, \quad t \geq 1. \tag{1.11}$$

Его общее решение имеет вид:

$$x(x_0, y_0, t_0, t) = x_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(-1)^n + y_0 t_0}, \quad y(x_0, y_0, t_0, t) = \frac{y_0 t_0}{t}, \quad t \geq t_0 \geq 1.$$

Все решения системы (1.11) равномерно ограничены для любого натурального числа n. Действительно, нетрудно проверить, что если n четное, то

$$|x(x_0, y_0, t_0, t)| \leq |x_0| \text{ при } 1 + y_0 t_0 \leq 0,\ t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

и

$$|x(x_0, y_0, t_0, t)| \leq |x_0|\exp(Ty_0) \text{ при } 1 + y_0 t_0 > 0,\ t_0 \leq t \leq t_0 + T \text{ для всех } t_0 \geq 1.$$

Это означает, что решения системы (1.11) равномерно ограничены по $t_0 \geq 1$ для всех начальных состояний x_0, y_0 из компактного множества в $\mathbb{R}^2$, и поэтому система (1.11) обладает свойством равномерной интегральной непрерывности решений.

Аналогично рассматривается случай нечетного значения n.

1.3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

В теории устойчивости важную роль играют ограниченные решения $x(x_0, t_0, t)$, $t \geq t_0$, уравнения (1.1) и их положительные полутраектории

$$\gamma^+(x_0, t_0) = \{y \in D : y = x(x_0, t_0, t), t \geq t_0\},$$

которые обладают предельными точками при $t \to +\infty$. Поведение таких решений на бесконечности во многом определяется свойствами их множеств предельных точек. Изложим основные свойства предельных множеств таких решений [105, с. 277].

Определение 1.4. *Пусть решение* $x(x_0, t_0, t)$ *уравнения* (1.1) *ограничено при* $t \geq t_0$ *в замыкании области D. Точка* $y \in \bar{D}$ *называется* ω-*предельной для решения* $x(x_0, t_0, t)$, *если существует неограниченная последовательность моментов времени* $(t_n)_{n \geq 1}$, $t_n \geq t_0$, *такая, что* $x(x_0, t_0, t_n) \to y$ *при* $t_n \to +\infty$. *Множество всех* ω-*предельных точек решения* $x(x_0, t_0, t)$ *обозначим через* $L^+(x_0, t_0)$.

Теорема 1.9. *Если решение* $x(x_0, t_0, t) \in D$ *для всех* $t \geq t_0$, *то множество* $L^+(x_0, t_0)$ *замкнуто.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность точек $(y_n) \subset L^+(x_0, t_0)$ такую, что $y_n \to y$ при $n \to +\infty$. Покажем, что $y \in L^+(x_0, t_0)$. По построению для каждого номера *n* существует последовательность $(t_k^n)_{k \geq 1}$, $t_k^n \to +\infty$ при $k \to +\infty$ такая, что $x(x_0, t_0, t_k^n) \to y_n$, если только $k \to +\infty$. Поэтому для любого номера *n* можно указать номер $k = k(n) \geq n$ такой, что будет выполнено неравенство

$$\| x(x_0, t_0, t_{k(n)}^n) - y_n \| < \frac{1}{n}.$$

С учетом этих построений и неравенства треугольника можем записать соотношения

$$\| x(x_0, t_0, t_{k(n)}^n) - y \| \leq \| x(x_0, t_0, t_{k(n)}^n) - y_n \| + \| y - y_n \| < \frac{1}{n} + \| y - y_n \|,$$

которые справедливы для любого натурального *n*. Полученные оценки позволяют утверждать, что $x(x_0, t_0, t_{k(n)}^n) \to y$ при $t_{k(n)}^n \geq n \to +\infty$. Последнее и означает, что $y \in L^+(x_0, t_0)$. Теорема доказана.

Теорема 1.10. *Если решение* $x(x_0, t_0, t)$ *ограничено, то имеет место равенство*

$$\lim_{t \to +\infty} d(x(x_0, t_0, t), L^+(x_0, t_0)) = 0. \tag{1.12}$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует число $\varepsilon > 0$ и последовательность (t_n), $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, такая, что расстояние $d(x(x_0,t_0,t_n), L^+(x_0,t_0)) > \varepsilon \ \forall n \geq 1$. В этом случае с учетом ограниченности решения $x(x_0,t_0,t)$ найдется подпоследовательность $(t_k) \subset (t_n)$, $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, для которой последовательность точек $(x(x_0,t_0,t_k))_{k\geq 1}$ сходится к некоторой точке y при $k \to +\infty$. Тогда с одной стороны, по построению $y \in L^+(x_0,t_0)$, а с другой стороны, точка y должна находиться от $L^+(x_0,t_0)$ на расстоянии не меньше, чем $\Delta > 0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 1.11. *Если решение* $x(x_0,t_0,t)$ *ограничено, то* ω-*предельное множество* $L^+(x_0,t_0)$ *не пусто компактно и связно*.

Доказательство. Поскольку всякое ограниченное решение обладает предельными точками при $t \to +\infty$, то множество $L^+(x_0,t_0)$ не пусто, а с учетом теоремы 1.9 оно компактно. Остается показать, что $L^+(x_0,t_0)$ связно. Действительно, если это не так, то $L^+(x_0,t_0) = P \cup Q$, где P и Q – два не пустых компактных множества, не имеющих общих точек. Следовательно, с учетом компактности расстояние между ними $d(P,Q) = \Delta > 0$. Кроме того, на основании теоремы 1.10 имеем предельное равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} d(x(x_0,t_0,t), P \cup Q) = 0.$ Поэтому можно указать последовательность моментов времени (t_n), $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, которая удовлетворяет условиям

$$\lim_{n\to+\infty} d(x(x_0,t_0,t_n),P) > \frac{\Delta}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} d(x(x_0,t_0,t_n),Q) > \frac{\Delta}{3}.$$

В силу ограниченности решения $x(x_0,t_0,t)$ из этой последовательности можно извлечь такую неограниченно возрастающую подпоследовательность $(t_k) \subset (t_n)$, что $x(x_0,t_0,t_k) \to y$ при $t_k \to +\infty$. Следовательно, по определению ω-предельной точки будем иметь включение $y \in L^+(x_0,t_0) = P \cup Q$. Однако по построению точка y находится на расстоянии не меньшем, чем $\Delta/3$, как от множества P, так и от множества Q. Пришли к противоречию, что и доказывает справедливость теоремы.

1.4. УСЛОВИЯ КАРАТЕОДОРИ

Для неавтономных уравнений требования к функции f, определяющей ее правую часть, можно ослабить без потери свойств существования и единственности решений. Это в первую очередь относится к требованию непрерывности f относительно переменной времени t. Изложим основную идею этой возможности, основанную на так называемом условии Каратеодори [116, 132, 152].

Оговорим основные свойства уравнения (1.1). Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а функция $f: D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по $x \in D$ для каждого $t \in \mathbb{R}^+$ и измерима по Лебегу относительно $t \in \mathbb{R}^+$ для каждого $x \in D$. (Будем говорить кратко об измеримых множествах, измеримых функциях и интегралах на измеримом множестве типа Лебега). Предположим, что для каждого компактного множества $K \subset D$ существует две локально интегрируемых функции m_K и l_K такие, что:

$$|f(x,t)| \le m_K(t) \quad \forall\, (x,t) \in K \times \mathbb{R}^+, \tag{1.13}$$

$$|f(x_1,t) - f(x_2,t)| \le l_K(t)\,|x_1 - x_2| \quad \forall\, (x_1,t), (x_2,t) \in K \times \mathbb{R}^+. \tag{1.14}$$

Предположим, что функции m_K и l_K удовлетворяют условиям:

$\mathbf{F_1}$: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta_K(\varepsilon) > 0$ такое, что если E – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащееся в интервале $[s, s + 1]$ и с мерой меньше δ, тогда $\int_E m_K(s)ds < \varepsilon$;

$\mathbf{F_2}$: существует постоянная $L_K > 0$ такая, что

$$\int_s^{s+1} l_K(s)ds \le L_K \text{ для каждого } s \in \mathbb{R}^+.$$

Определение 1.5. *Функция $f: D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$, непрерывная по $x \in D$ для каждого $t \in \mathbb{R}^+$, измеримая по $t \in \mathbb{R}^+$ для каждого $x \in D$, для которой существует локально интегрируемая функция m_K, удовлетворяющая неравенству* (1.13) *на любом компакте $K \subset D$, называется удовлетворяющей **условию Каратеодори**.*

Известны [132, с. 28–30] следующие утверждения:

- если функция f удовлетворяет условию Каратеодори, то существует непродолжаемое решение $x(x_0, t_0, t)$ уравнения (1.1), проходящее через точку (x_0, t_0) из $D \times \mathbb{R}^+$;
- если, кроме того, f – локально липшицева по x, тогда такое решение $x(x_0, t_0, t)$ обладает свойством единственности;
- решение непрерывно зависит от (x_0, t_0, t).

1.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Приведем известные, общепринятые и наиболее употребляемые свойства устойчивости решений, источниками которых являются ставшие классическими понятия А. М. Ляпунова [81]: *устойчивость*, *асимптотическая устойчивость* и *неустойчивость*. Дальнейшее развитие теории устойчивости для неавтономного случая в период после А. М. Ляпунова привело ученых к необходимости рассмотрения и детального изучения многочисленных модификаций классических понятий. Было обращено внимание на возможность (или невозможность) равномерности этих свойств по отношению к координатам состояния системы (вектора x_0) или по отношению к начальному моменту времени t_0, а также по отношению к возможности их совместного выполнения. Последователями идей А. М. Ляпунова были выработаны и соответствующие критерии новых свойств устойчивости в рамках второго метода, приведены примеры представителей различных определений свойств устойчивости и их модификаций, подчеркивающие важность исследования всех возникающих ситуаций в определении свойств устойчивости. Однако, резюмируя накопленные результаты эволюции прямого метода, можно сказать, что основных свойств по-прежнему четыре: устойчивость, асимптотическая устойчивость, глобальная асимптотическая устойчивость и неустойчивость.

1.5.1. УСТОЙЧИВОСТЬ

Если правая часть $f\colon\ D\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ уравнения (1.1) непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица, тогда, как известно, через каждую точку $(x_0,\ t_0)$ области определения системы проходит единственное решение $x(x_0,\ t_0,\ t)$, $x(x_0,\ t_0,\ t_0) = x_0$, определенное на некотором интервале полуоси $t \geq t_0$.

Отметим, что если изначально ставится задача об устойчивости произвольного состояния равновесия $x = x_0 \in D$, то такую задачу всегда можно свести к равновесию, расположенному в начале координат, сделав соответствующую замену переменных $y = x - x_0$. При этом, как нетрудно проверить, переходим к исследованию системы $\dot{y} = F(y,t)$, $F(0,t) = 0$, где следует положить $F(y,t) = f(y + x_0, t) - f(x_0, t)$. Таким образом, задача об устойчивости равновесия системы обыкновенных неавтономных дифференциальных уравнений может быть всегда сведена к системе вида (1.1).

Определение 1.6 [105]. Нулевое решение системы (1.1) называется:
– *устойчивым в смысле Ляпунова*, если:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \geq 0)(\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t \geq t_0) \ \Rightarrow \ \| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon;$$

– *равномерно устойчивым*, если:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t_0 \geq 0) \ (\forall t \geq t_0) \ \Rightarrow \ \| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon.$$

Пример 1.4 [131, p. 174]. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -x - \frac{x}{t+1}(1 - x(t+1)^2)$$

получено из уравнения $\dot{z} = z(z-1)$ подстановкой $z = (t + 1)x$. Поэтому общее решение этого уравнения может быть записано в виде

$$x(x_0, t_0, t) = \frac{x_0(t_0 + 1)}{x_0(t_0 + 1) - (x_0(t_0 + 1) - 1)e^{t - t_0}}, \ t \geq t_0.$$

Здесь нетрудно проверить, что нулевое решение устойчиво. Однако оно не является равномерно устойчивым, так как для любого достаточно малого числа $\delta > 0$ и $0 < x_0 < \delta$ существует момент времени $t_0 = \dfrac{1}{x_0} - 1 > 0$ такой, что $x(x_0, t_0, t) \equiv 1 \ \forall t \geq t_0$.

Отметим также, что в примере 1.1 при n нечетном нулевое решение рассматриваемого уравнения равномерно асимптотически устойчиво, а при n четном оно неустойчиво.

Отметим, что в примере 1.2 при нечетном n нулевое решение (1.11) устойчиво по Ляпунову, но не равномерно устойчиво по $t_0 \geq 1$. При n четном нулевое решение (1.11) неустойчиво, причем по координате y сохраняется свойство равномерной асимптотической устойчивости для любого натурального n.

1.5.2. ПРИТЯЖЕНИЕ

Определение 1.7 [105]. Нулевое решение системы (1.1) называется:
– *слабо притягивающим*, если

$$(\forall t_0 \geq 0)(\exists \eta = \eta(t_0) > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x_0 \in B_\eta)(\exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+, \ t_n \to +\infty, \ \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} x(x_0, t_0, t_n) = 0;$$

– *равномерно слабо притягивающим*, если

$$(\exists\eta > 0)(\forall\varepsilon > 0)(\forall x_0 \in B_\eta)(\forall t_0 \geq 0)(\exists(t_n) \subset \mathbb{R}^+,\ t_n \to +\infty, \ \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x(x_0, t_0, t_n) = 0;$$

– *притягивающим*, если

$$(\forall t_0 \geq 0)(\exists\eta = \eta(t_0) > 0)(\forall\varepsilon > 0)(\forall x_0 \in B_\eta)(\exists T = T(t_0, \varepsilon, x_0) > 0) \ \Rightarrow$$

$$\| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0 + T;$$

– *эквипритягивающим*, если

$$(\forall t_0 \geq 0)(\exists\eta = \eta(t_0) > 0)(\forall\varepsilon > 0)(\exists T = T(t_0, \varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\eta) \ \Rightarrow$$

$$\| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0 + T.$$

– *равномерно притягивающим, если*

$$(\exists\eta > 0)(\forall\varepsilon > 0)(\exists T = T(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\eta)(\forall t_0 \geq 0) \ \Rightarrow$$

$$\| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0 + T.$$

Пример 1.5. Для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -\frac{x}{t+1}, \quad t \geq 0,$$

общее решение с начальными данными $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ есть

$$x(x_0, t_0, t) = \frac{x_0(t_0+1)}{t+1}.$$

Отсюда видно, что нулевое решение равномерно устойчиво и эквипритягивающее, но не является равномерно притягивающим.

Множество

$$A(t_0) = \{x_0 \in G : x(x_0, t_0, t) \to 0,\ t \to +\infty\}$$

представляет собой *область притяжения* начала координат в момент времени t_0.

В случае, когда $A(t_0)$ не зависит от t_0, принято говорить, что область притяжения *равномерная*.

Если $G = \mathbb{R}^n = A(t_0)$ для любого $t_0 \geq 0$, то говорят, что начало координат *глобально притягивающее*. Кроме того, начало координат называют *равномерно глобально притягивающим*, если

$$(\forall\eta > 0)(\forall t_0 \geq 0)(\forall x_0 \in B_\eta) \ \Rightarrow \ \| x(x_0, t_0, t) \| \to 0 \ \ \textit{при} \ \ t \to +\infty.$$

Пример 1.6 [31, с. 84]. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t+1} - (t+1)^2 xy^2, \\ \dot{y} = -\dfrac{y}{t+1}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Интегрируя, получим

$$x = c_1(t+1)e^{-c_2^2(t+1)}, \quad y = \frac{c_2}{t+1}.$$

Полагая $t_0 = 0$, будем иметь

$$x = x(0)(t+1)e^{-y^2(0)t}, \quad y = \frac{y(0)}{t+1}.$$

Отсюда видно, что если $y(0) \neq 0,$ то $x(t) \to 0$ и $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Если же $y(0) = 0,$ то $y(t) \equiv 0$ $\forall t \geq 0$ и тогда непосредственно из первого уравнения системы получаем, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому нулевое решение является притягивающим. Тем не менее для любого $\delta > 0$ при $x(0) = \delta^2,$ $y(0) = \delta$ получим:

$$x\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) > e^{-1}.$$

Следовательно, решение $x = 0$, $y = 0$ не является устойчивым, а значит, не является асимптотически устойчивым. Этот факт иллюстрируется на рис. 1.1.

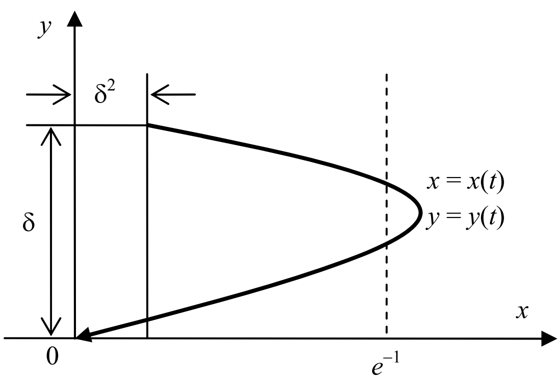

Рис. 1.1. Пример притягивающего,
но неустойчивого равновесия

1.5.3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Определение 1.8 [105]. Нулевое решение системы (1.1) называется:

– *асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее*;

– *эквиасимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и эквипритягивающее;

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее;

– *глобально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и глобально притягивающее*;

– *равномерно глобально асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно глобально притягивающее*.

Пример 1.7 [131, с. 174]. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -x - \frac{x}{t+1}(1 - x^2(t+1)^3)$$

получено из уравнения $\dot{z} = z(z^2 - 1)$ подстановкой $z = (t + 1)x$. Непосредственным интегрированием убеждаемся, что для фиксированного $t_0 \geq 0$ область притяжения нулевого решения определяется неравенством

$$|x_0| \leq \frac{1}{t_0 + 1}.$$

Поэтому тривиальное решение не является равномерно асимптотически устойчивым.

Пример 1.8. Для дифференциального уравнения примера 1.2 общее решение с начальными данными $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ есть

$$x(x_0, t_0, t) = \frac{x_0(t_0 + 1)}{t + 1}.$$

Отсюда видно, что нулевое решение равномерно устойчиво и равномерно притягивающее относительно x_0, но не является равномерно притягивающим относительно $t_0 \geq 0$. Следовательно, начало координат не является равномерно асимптотически устойчивым.

Пример 1.9 [105, с. 20]. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{t+1}, \text{ для } -1 \le x(t+1) \le 1, \\ \dfrac{x}{t+1} - \dfrac{2}{(t+1)^2}, \text{ для } 1 < x(t+1), \\ \dfrac{x}{t+1} + \dfrac{2}{(t+1)^2}, \text{ для } x(t+1) < -1, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Путем непосредственного интегрирования несложно убедиться, что решение $x = 0$ эквиасимптотически устойчиво, но не является ни равномерно устойчивым, ни глобально асимптотически устойчивым.

Пример 1.10. Рассмотрим простейшее линейное скалярное неавтономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = a(t)x, \ t \ge 0, \tag{1.15}$$

где $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная, ограниченная функция.

Известно следующее утверждение [128].

Решение $x = 0$ *системы* (1.15) *тогда и только тогда*:

– *устойчиво*, *если* $\forall t_0 \ge 0 \ \exists M(t_0) > 0$ *такое*, *что*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds \le M(t_0), \quad \forall t \ge t_0;$$

– *равномерно устойчиво*, *если* $\exists M > 0$ *такое*, *что*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds \le M, \quad \forall t \ge t_0, \forall t_0 \ge 0;$$

– *асимптотически устойчиво*, *если* $\forall t_0 \ge 0$ *имеет место предел*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds \to -\infty \ \textit{при} \ t \to +\infty;$$

– *равномерно асимптотически устойчиво*, *если существует* $\sigma > 0$ *такое*, *что*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds \le -\sigma(t - t_0), \quad \forall t \ge t_0 \ \textit{и} \ \forall t_0 \ge 0. \tag{1.16}$$

Доказательство. Установим справедливость теоремы для случая равномерной асимптотической устойчивости.

Необходимость. Пусть решение $x = 0$ системы (1.15) равномерно асимптотически устойчиво. Докажем, что в этом случае выполняется (1.16). Предположим, от противного, что имеет место следующее свойство:

$$\forall\sigma > 0 \;\; \exists t_* \geq 0 \;\; \exists t^* \geq t_* \text{ такое, что } \int_{t_*}^{t^*} a(s)ds > -\sigma(t^* - t_*).$$

Для нормы решения $\| x(x_0, t_0, t) \|$ из определения равномерной асимптотической устойчивости следует, что:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\exists T = T(\varepsilon) > 0)(\forall t_0 \geq 0)(\forall x_0 \in B_\delta) \Rightarrow$$

$$\| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 + T\,. \tag{1.17}$$

Оценим решение, определяемое формулой $x(x_0, t_0, t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$, с помощью соотношения (1.16), положив $\sigma = \frac{1}{T}\ln\frac{|x_0|}{\varepsilon}$, $t_0 = t_*$ и $t = t^*$. Тогда получим

$$\| x(x_0, t_*, t^*) \| = |x_0| e^{\int_{t_*}^{t^*} a(s)ds} > |x_0| e^{-\sigma(t^* - t_*)}.$$

Поскольку ясно, что число T можно считать большим, чем $t^* - t_*$, то отсюда имеем соотношения:

$$\| x(x_0, t_*, t^*) \| > |x_0| e^{-\sigma T} = |x_0| e^{-\ln\frac{|x_0|}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Таким образом, пришли к противоречию с условием (1.17). Необходимость доказана.

Достаточность. Эта часть доказательства легко следует из условия (1.16) и очевидных соотношений

$$\| x(x_0, t_0, t) \| = |x_0| e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \leq |x_0| e^{-\sigma(t - t_0)} \leq |x_0|, \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{и} \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Итак, решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство остальных утверждений можно осуществить аналогичным образом.

1.5.4. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ МНОЖЕСТВ

Исследование понятия относительной устойчивости для динамических систем рассматривается в работах [45, 64, 65, 81, 101, 103, 121, 126, 130, 145, 153, 160, 161, 162, 166].

Будем говорить, что множество Y в D *положительно инвариантно*, если $\forall x_0 \in Y$ имеем включение $x(x_0, t_0, t) \in Y \;\; \forall t_0 \geq 0$ и $\forall t \geq t_0$.

Определение 1.9. Пусть Y – замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Решение $x = 0$ системы (1.1) является:

– *равномерно устойчивым относительно Y*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta \cap Y)(\forall t_0 \geq 0) \;\Rightarrow$$

$$\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \;\forall t \geq t_0;$$

– *слабо притягивающим относительно Y*, если

$$(\forall t_0 \geq 0)(\exists \eta = \eta(t_0) > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x_0 \in B_\eta \cap Y)(\exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+, \, t_n \to +\infty, \;\Rightarrow$$

$$\| x(x_0, t_0, t_n) \| \to 0;$$

– *равномерно слабо притягивающим относительно Y, если*

$$(\exists \eta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x_0 \in B_\eta \cap Y)(\forall t_0 \geq 0)(\exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+, \, t_n \to +\infty, \;\Rightarrow$$

$$\| x(x_0, t_0, t_n) \| \to 0;$$

– *равномерно притягивающим относительно Y*, если

$$(\exists \sigma > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists T > 0)(\forall x_0 \in B_\sigma \cap Y)(\forall t_0 \geq 0) \;\Rightarrow$$

$$\|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha \;\; \forall t \geq t_0 + T;$$

– *равномерно Y-асимптотически устойчивым*, если оно равномерно Y-устойчиво и равномерно Y-притягивающее;

– *равномерно Y-глобально асимптотически устойчивым*, если оно равномерно Y-асимптотически устойчиво, $D = \mathbb{R}^n$, и каждое решение $x(x_0, t_0, t)$, $x_0 \in Y$, $t_0 \geq 0$, стремится к началу координат при $t \to +\infty$.

При $Y = \mathbb{R}^n$ из этих определений соответственно следуют общепринятые свойства определения пп. 1.1.1–1.1.3.

Пусть $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ – функция расстояния и $Y \subset \mathbb{R}^n$. Положим

$$B(Y, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(Y, x) < r\}, \;\; r > 0.$$

Согласуясь с устойчивоподобными понятиями для состояний равновесия (см. [64, 65, 121]) будем использовать следующие свойства замкнутых множеств.

Определение 1.10. Замкнутое положительно инвариантное множество Y называется:

– *равномерно устойчивым*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall t_0 \geq 0)(\forall x_0 \in B(Y, \delta)) \Rightarrow$$
$$d(x(x_0, t_0, t), Y) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0;$$

– *равномерно притягивающим*, если

$$(\exists \eta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists T = T(\eta, \varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B(Y, \eta))(\forall t_0 \geq 0) \Rightarrow$$
$$d(x(x_0, t_0, t), Y) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 + T;$$

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее;

– *равномерно глобально асимптотически устойчивым*, если оно равномерно асимптотически устойчиво, $D = \mathbb{R}^n$, и каждое решение $x(x_0, t_0, t)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus Y$, $t_0 \geq 0$, стремится к множеству Y при $t \to +\infty$.

1.6. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Пусть **K** означает множество непрерывных строго монотонно возрастающих функций (функций Хана) $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ таких, что $a(0) = 0$. Напомним следующие понятия.

Определение 1.11. *Непрерывная функция $V(x, t)$ ($V: D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) называется* ***определенно положительной****, если существует функция a из класса* **K** *такая, что*

$$V(x,t) \geq a(\| x \|) \quad \forall t \geq 0 \ \ и \ \ V(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 .$$

Функция $V(x, t)$ называется ***определенно отрицательной****, если функция $(-V(x, t))$ является определенно положительной.*

Определение 1.12. *Непрерывная функция $V(x, t)$ ($V: D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) называется* ***знакоположительной****, если*

$$V(x, t) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0 \quad и \quad V(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 .$$

Функция $V(x, t)$ называется ***знакоотрицательной****, если функция $(-V(x, t))$ является знакоположительной.*

*Если в области D функция V(x, t) принимает как положительные, так и отрицательные значения, то она называется **знакопеременной**.*

Определение 1.13 [8]. *Непрерывная функция* $V(x, t)$ (V: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) *называется **бесконечно большой** при* $\| x \| \to +\infty$, *если*

$$|V(x, t)| \to +\infty \text{ при } \| x \| \to +\infty$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$. *Иными словами*: $\forall R > 0 \;\; \exists r = r(R) > 0$, *что*

$$|V(x, t)| > R \textit{ при } t \geq 0 \textit{ и } \| x \| > r.$$

В теории второго метода А. М. Ляпунова изучается поведение функций $V(x, t)$ вдоль траекторий системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) и на основе этого делается вывод об устойчивости или неустойчивости точек покоя системы.

Функции, имеющие указанное предназначение, принято называть *функциями Ляпунова*. Здесь важную роль играет понятие производной функции Ляпунова, вычисленной по времени в силу рассматриваемой системы, или, короче, *производной по времени функции V*. Для непрерывно дифференцируемой функции V: $D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ эта производная обычно обозначается $\dot{V}(x, t)$ и определяется равенством

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,t) &= \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right)' f(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} f_i(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где штрих « ′ » означает операцию транспонирования.

Правая часть (1.18) является скалярным произведением градиента $\partial V(x, t) / \partial x$ функции $V(x)$ и *вектора фазовой скорости* $f(x, t)$ системы (1.1). Поэтому, если знак этого произведения положителен в некоторой точке $x = x_0$, то в этой точке решение $x(x_0, t_0, t)$ системы пересекает поверхность уровня $V(x, t) = V(x_0, t_0)$ в направлении возрастания функции $V(x(x_0, t), t)$ при $t > t_0$; если же скалярное произведение отрицательно, то решение $x(x_0, t_0, t)$ пересекает указанную поверхность уровня в направлении убывания функции $V(x(x_0, t), t)$ при $t > t_0$. Это же поясняет и непосредственное вычисление производной по времени t от суперпозиции функций $V(x(x_0, t), t)$, а именно, по определению производной имеем:

$$\frac{d}{dt} V(x(x_0, t_0, t), t) = \left(\frac{\partial V(x(x_0, t), t)}{\partial x} \right)' \frac{dx(x_0, t_0, t)}{dt}.$$

Отсюда в силу системы (1.1) следует, что

$$\frac{d}{dt}V(x(x_0,t_0,t),t)=\left(\frac{\partial V(x(x_0,t_0,t),t)}{\partial x}\right)' f(x(x_0,t_0,t),t) \; .$$

Основная идея использования вспомогательных функций $V(x, t)$ в изучении устойчивости состоит в следующем [81].

Известно, что в достаточно малой окрестности U начала координат поверхности уровня $V(x, t) = c$, $c > 0$, определенно положительных функций определяют систему замкнутых поверхностей, «охватывающих» точку $x = 0$. Пусть $\dot V(x,t) \le 0$ для $x \in U$ и $t \ge 0$. Тогда, если $V(x_0, t_0) = c$, то функция $V(x(x_0, t_0, t), t)$ не возрастает с ростом t, а значит, решение $x(x_0, t_0, t)$ не покидает U и, более того, либо оно «пересекает» поверхность уровня в направлении начала координат, т. е. снаружи внутрь, либо «скользит» вдоль этой поверхности. Следовательно, можно ожидать, что в таком случае начало координат устойчиво.

При выполнении строгого неравенства $\dot V(x,t) < 0$ (в U при $t \ge 0$) соответствующие траектории пересекают под определенным углом семейство поверхностей уровня $V(x, t) = c$ снаружи внутрь при любом достаточно малом значении $c > 0$, и тогда можно ожидать, что начало асимптотически устойчиво. Если же $\dot V(x,t) > 0$ в U при $t \ge 0$, то функция $V(x(x_0, t_0, t), t)$ возрастает при $t > t_0$, и тогда каждая точка поверхности уровня $V(x, t) = c$ является точкой «выхода» из множества, ограниченного этой поверхностью. Ясно, что в таком случае, скорее всего, начало координат будет неустойчивым.

1.6.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛЯПУНОВА

Во всех перечисленных случаях особую роль играют замкнутые поверхности уровня, образующие ограниченные окрестности начала координат. Ляпунов установил, что таким свойством обладают непрерывные определенно положительные функции $V:\ D\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$.

Если же функция $V(x, t)$ лишь знакоположительная или знакопеременная, то в окрестности начала поверхности $V(x, t) = c$, вообще говоря, разомкнуты при любых достаточно малых $c > 0$.

Пусть G – открытая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$ и V: $G\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ непрерывная определенно положительная функция. Представляем исследование структуры поверхностей уровня $V(x, t) = c$, $c > 0$, функции V [50, 65].

Определение 1.14. *Будем говорить, что уравнение* $V(x, t) = c$, $c > 0$, *задает* ***поверхность Ляпунова***, *если существует «шар»* $\overline{B}_\varepsilon \subset G$, $\varepsilon > 0$, *такой, что для любой непрерывной линии*

$$x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n, \ T > 0, \ x(0) = 0, \ \|x(T)\| = \varepsilon, \tag{1.19}$$

найдется число $\tau \in \,]0, T[$, *для которого* $x(t) \in G$ *для всех* $t \in [0, \tau]$, *причем* $V(x(\tau),\tau) = c$.

Лемма 1.2. *Для непрерывной определенно положительной функции* $V\colon G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *существует число* $c^* > 0$ *такое, что* $V(x, t) = c$ *является поверхностью Ляпунова для любого значения* $c \in [0, c^*]$.

Доказательство. Рассмотрим шар B_ε, $\varepsilon > 0$, содержащийся в G вместе со своим замыканием, и вычислим значение $c^* = \min\limits_{\|x\|=\varepsilon,\, t\ge 0} V(x,t)$. Соединим теперь точку $x = 0$ с какой-либо точкой x, $\|x\| = \varepsilon$, с помощью непрерывной линии (1.19), причем $x(t) \in \overline{B}_\varepsilon \ \ \forall t \in [0, T]$. Так как $V(0, t) = 0$, $V(p,t) \ge c^*$ при всех $0 \le t \le T$ и функция $V(x(t), t)$ непрерывна, то для каждого $0 < c < c^*$ можно указать число $\tau = \tau(c) \in [0, T]$, для которого $V(x(\tau),\tau) = c$.

Лемма доказана.

Отсюда вытекает также и следующее утверждение.

Следствие 1.2. *Если для непрерывной функции* $V\colon G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *уравнение* $V(x, t) = \overline{c}$, $\overline{c} > 0$, *задает поверхность Ляпунова, то при всех* $0 < c < \overline{c}$ *уравнение* $V(x, t) = c$ *также задает поверхность Ляпунова.*

Замечание 1.1. Определенно положительные квадратичные формы $V(x) = x'Bx$ имеют простую геометрическую структуру поверхностей уровня. Здесь $V(x) = c$ определяет поверхность Ляпунова при любом $c > 0$. Однако, в общем случае для функций со свойствами определенной положительности такое утверждение неверно.

Предложение 1.1. *Если для непрерывной определенно положительной функции* $V\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *при некотором* $\overline{\overline{c}} > 0$ *поверхность* $V(x, t) = \overline{\overline{c}}$ *не является поверхностью Ляпунова, то существует единственное число* $c_V > 0$ *такое, что*:

1) $V(x) = c$ *– поверхность Ляпунова для* $0 < c < c_V$;

2) *при всех* $c > c_V$ *уравнение* $V(x, t) = c$ *не является поверхностью Ляпунова.*

Доказательство. Так как $V(x, t)$ – определенно положительная функция, то по лемме 1.2 найдется число $c^* > 0$, что $V(x, t) = c$ – поверхность Ляпунова для всех значений $0 < c < c^*$. Обозначим через c_V верхнюю грань всех таких чисел c^*. По условию $V(x, t) = \bar{\bar{c}}$ не является поверхностью Ляпунова, поэтому в силу следствия 1.2 число $c_V < +\infty$. Следовательно, условие 1) предложения 1.1 также выполняется на основании следствия 1.2, а условие 2) вытекает очевидным образом из определения c_V как верхней грани чисел указанного типа. Единственность существования числа c_V следует из предположений 1) и 2).

Замечание 1.2. *a*) Число $c = c_V$ непосредственно связано с определенно положительной функцией Ляпунова $V(x, t)$. Поэтому уместно назвать его *оптимальным числом функции Ляпунова* (или кратко, *оптимальным числом* V).

b) Поверхность уровня $V(x, t) = c_V$ может как быть поверхностью Ляпунова, так и не быть ею. Для подтверждения этого рассмотрим следующие два примера.

Пример 1.11. Для определено положительной функции

$$V(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

как нетрудно вычислить, $c_V = 1$, и уравнение $V(x, y) = 1$ не определяет поверхность Ляпунова. Поверхности уровня изображены на рис. 1.2.

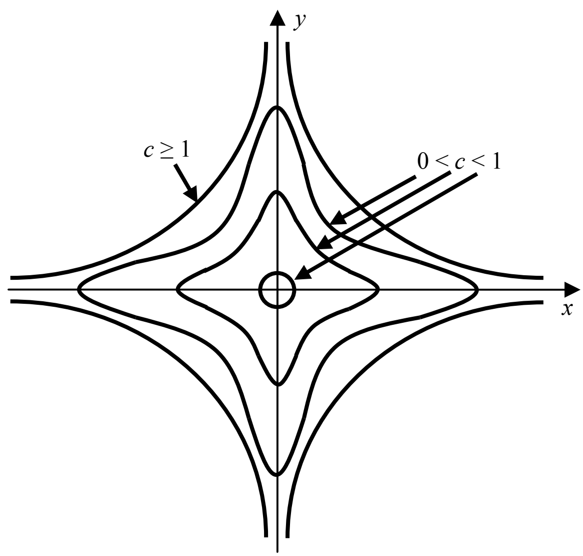

Рис. 1.2. Линии уровня $V(x, y) = c$

Пример 1.12. Пусть $V(x,\ y)\ = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dfrac{y^2}{(1+y^2)^2}$. Здесь вычисления показывают, что $c_V = 0{,}25$ и поверхность $V(x,\ y)\ =\ c_0$ является поверхностью Ляпунова. Линии уровня функции V при $0 < c < 0{,}25$ представлены на рис. 1.5, *a*. Здесь имеется девять несвязных между собой кривых линий. При $c = 0{,}25$ линии уровня представлены на рис. 1.3, *b*.

При $c > 0,\ 25$ замкнутые линии $V(x, y) = c$ отсутствуют.

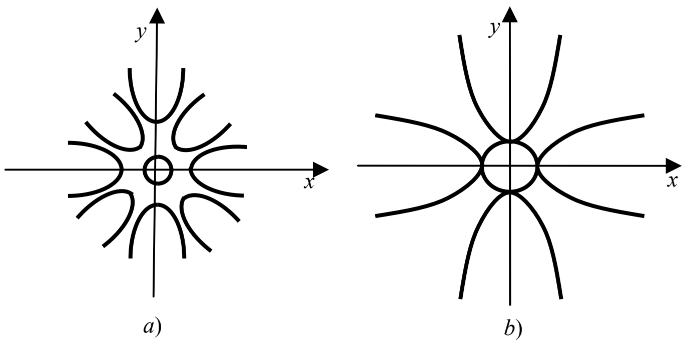

Рис. 1.3. Линия уровня $V(x, y) = c$:
a) при $0 < c < 1/4$; *b*) при $c =1/4$.

1.7. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

1.7.1. НЕАВТОНОМНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом разделе сформулируем без доказательства общеизвестные утверждения второго метода, основанные на результатах А. М. Ляпунова [81], Н. Г. Четаева [112], К. П. Персидского [98], Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [8; 75]. Они составляют основу известных утверждений классической теорий второго метода Ляпунова.

Теорема 1.7.1 [81]. *Предположим, что существует окрестность U для $x = 0$, функция $V \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+)$ и функция $a \in$* **K** *такие, что для любых $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ выполняются следующие условия*:

1) $a(\|x\|) \le V(x,t)$;

2) $\dot V(x,t) \le 0$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1.1) *устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 1.7.1.1 [98]. *Если при выполнении условий теоремы* 1.4.1 *дополнительно потребовать, чтобы существовала функция* $b \in \mathbf{K}$ *такая, что выполняется неравенство* $V(x,t) \le b(\| x \|)$, *то решение* $x = 0$ *системы* (1.1) *равномерно устойчиво.*

Теорема 1.7.2. *Предположим, что существует окрестность* U *для* $x = 0$, *функция* $V \in \mathbb{C}^1(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, *и функции* a, b, $c \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех* $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия:*

1) $a(\| x \|) \le V(x,t) \le b(\| x \|)$;

2) $\dot{V}(x,t) \le -c(d(Y,x))$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.7.3 [8]. *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$. *Предположим, что существуют функции* $V \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, *и функции* a, b, $c \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех* $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия:*

1) $a(\| x \|) \le V(x,t) \le b(\| x \|)$;

2) $\dot{V}(x,t) \le -c(d(Y,x))$;

3) *каждое решение* $x(x_0, t_0, t)$, *удовлетворяющее условию* $V(x(x_0, t_0, t), t) \le M < +\infty$, *ограничено.*

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1.1) *глобально равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.7.4.1 [81]. *Если существуют* $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ $(\overline{B_\varepsilon} \subset D)$, *открытое множество* $\Psi \in B_\varepsilon$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V : B_\varepsilon \times [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$, *функции* a, $b \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех* $(x, t) \in \Psi \times [t_0, +\infty[$ *выполняются следующие условия:*

1) $0 < V(x,t) \le b(\| x \|)$;

2) $\dot{V}(x,t) \ge a(\| x \|)$;

3) *начало координат* $x = 0$ *принадлежит* $\mathrm{Fr}\,\Psi$;

4) $V(x,t) = 0$ *на* $(\mathrm{Fr}\Psi \cap B_\varepsilon) \times [t_0, +\infty]$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1.1) *неустойчиво.*

Теорема 1.7.4.2 [81]. *Если существуют* $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ $(\overline{B_\varepsilon} \subset D)$, *открытое множество* $\Psi \in B_\varepsilon$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V : B_\varepsilon \times [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$, *непрерывная функция* $W : \Psi \times [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$,, *функция* $b \in \mathbf{K}$ *и число* $c > 0$ *такие, что для всех* $(x, t) \in \Psi \times [t_0, +\infty]$ *выполняются следующие условия:*

1) $0 < V(x,t) \le b(\| x \|)$;

2) $\dot{V}(x,t) = cV(x,t) + W(x,t) \ \ (W(x,t) \ge 0)$;

3) *начало координат* $x = 0$ *принадлежит* $\mathrm{Fr}\,\Psi$;

4) $V(x,t) = 0$ *на* $(\mathrm{Fr}\Psi \cap B_\varepsilon) \times [t_0, +\infty]$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1.1) *неустойчиво.*

Первое существенное продвижение в направлении развития идей второго метода А. М. Ляпунова сделано Н. Г. Четаевым [112]. Им было замечено, что для обнаружения неустойчивости невозмущенного движения достаточно выделить хотя бы одно решение исследуемой системы, которое покидает фиксированную окрестность этого решения при сколь угодно малых по норме начальных возмущений $\| x_0 \|$.

Теорема 1.7.4.3 [112]. *Предположим, что существуют* $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ $(\overline{B_\varepsilon} \subset D)$, *открытое множество* $\Psi \in B_\varepsilon$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V : B_\varepsilon \times [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$, *функция* $a \in \mathbf{K}$ *и число* $k > 0$ *такие, что для всех* $(x, t) \in \Psi \times [t_0, +\infty]$ *выполняются следующие условия*:

1) $0 < V(x,t) \le k$;

2) $\dot{V}(x,t) \ge a(V(x,t))$; ;

3) *начало координат* $x = 0$ *принадлежит* $\mathrm{Fr}\,\Psi$;

4) $V(x,t) = 0$ *на* $(\mathrm{Fr}\,\Psi \cap B_\varepsilon) \times [t_0, +\infty]$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (0.1) *неустойчиво.*

Пример 1.13 [131, с. 204]. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(t)x_2 + b(t)x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -a(t)x_1 + b(t)x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Возьмем функцию Ляпунова

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad \dot{V}(x_1, x_2) = 2b(t)(x_1^2 + x_2^2).$$

В соответствии с представленными теоремами второго метода нулевое решение исследуемой системы будет: – устойчивым, если $b(t) \le 0$; – неустойчивым, если $b(t) \ge 0$; – равномерно асимптотически устойчивым, если существует число $\sigma > 0$ такое, что $\int\limits_{t_0}^{t} b(s)ds \le -\sigma(t - t_0)$, $\forall t \ge t_0$, $\forall t_0 \ge 0$. Последнее следует из того факта, что выбранная функция Ляпунова и ее производная по времени дают для решения $x(t) =$ $= (x_1(x_{10}, x_{20}, t_0, t), x_2(x_{10}, x_{20}, t_0, t))$ следующее равенство

$$\| x(t) \|^2 = e^{2\int_{t_0}^{t} b(s)ds} (x_{10}^2 + x_{20}^2), \ \forall t \ge t_0.$$

Если здесь, в частности, выполняется неравенство

$$b(t) \le b_0 < 0, \forall t \ge 0,$$

то равномерная асимптотическая устойчивость начала координат системы следует из теоремы 1.4.2.

1.7.2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПО ВРЕМЕНИ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{1.20}$$

где D – открытая окрестность начала координат пространства $\mathbb{R}^n$, а функция $f(x,t)$ ($f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) непрерывная, периодическая по времени t с периодом $\theta > 0$, удовлетворяет условию Липшица в области D, причем $f(0,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Для таких уравнений в работе [75] получено обобщение теорем 1.7.2, 1.7.3 и 1.7.4 в виде следующих утверждений.

Теорема 1.7.2.1 [75]. *Пусть для уравнения* (1.20) *существуют окрестность U точки $x = 0$, непрерывно дифференцируемая, периодическая по t с периодом $\theta > 0$, функция $V : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ и функция $a \in \mathbf{K}$ такие, что для всех $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$ выполняются условия*:

1) $a(\| x \|) \le V(x,t)$ *и* $V(0,t) = 0$;

2) $\dot{V}(x,t) \le 0$;

3) *множество* $M = \{x \in U : \dot{V}(x,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\} = 0\}$ *не содержит положительных полутраекторий, кроме нулевой.*

Тогда начало координат уравнения (1.20) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.7.3.1 [8]. *Пусть множество $G = \mathbb{R}^n$. Предположим, что для уравнения* (1.16) *существуют непрерывно дифференцируемая, периодическая по t с периодом $\theta > 0$, функция $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ и функция $a \in \mathbf{K}$ такие, что выполняются условия*:

1) $a(\| x \|) \le V(x,t)$ *и* $V(0,t)=0$;

2) $\dot V(x,t) \le 0$;

3) *множество* $M = \{x \in U : \dot V(x,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\} = 0\}$ *не содержит положительных полутраекторий, кроме нулевой.*

4) *функция* $V(x,t)$ *является бесконечно большой.*

Тогда начало координат уравнения (1.20) *глобально асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.7.4.4 [75]. *Пусть для уравнения* (1.20) *существуют окрестность U точки x* = 0, *непрерывно дифференцируемая, периодическая по t с периодом* θ > 0, *функция* $V : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *и функция* $a \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех* $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$ *выполняются условия*:

1) $\exists t_0 \in \mathbb{R} \ \forall \alpha > 0 \ \exists p \in B_\alpha$, *что* $V(p,t_0) > 0$;

2) $\dot V(x,t) \ge 0 \ \forall x \in U \setminus \{0\}$;

3) *множество* $M = \{x \in U : \dot V(x,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\} = 0\}$ *не содержит положительных полутраекторий, кроме нулевой.*

Тогда нулевое решение уравнения (1.20) *неустойчиво.*

Пример 1.14. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1^3 + 2\alpha x_1 x_2^2 \sin t, \\ \dot x_2 = -x_2^3 + 2\alpha x_1^2 x_2 \cos t, \ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Возьмем определенно положительную функцию Ляпунова

$$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot V(x_1,x_2) = -x_1^4 + 2\alpha x_1^2 x_2^2 (\sin t + \cos t) - x_2^4.$$

Производная $\dot V$ будет:

– знакоотрицательной, если $|\alpha| \le 1/\sqrt{2}$,

– определенно отрицательной, если $|\alpha| < 1/\sqrt{2}$.

в остальных случаях производная $\dot V$ будет знакопеременной.

Согласно теореме Ляпунова начало координат (0,0) данной системы будет устойчивым, если $|\alpha| \le 1/\sqrt{2}$. Оно будет асимптотически устойчивым, если $|\alpha| < 1/\sqrt{2}$.

Пример 1.15. Пусть задано дифференциальное уравнение Льенара

$$\ddot x + a(x,t)\dot x + b(x) = 0,$$

где обе функции $a:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывны, $b(0) = 0$, а $a(x,t)$ – ограниченная, периодическая по времени t функция. Предположим, кроме того, что выполнено условие

$$a(x,t)\ge a_0>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \text{ и } \forall t\in\mathbb{R}.$$

Рассмотрим определенно положительную функцию Ляпунова

$$V(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\int_0^x b(s)ds, \quad \dot{V}(x,\dot{x},t)=-a(x,t)\dot{x}^2.$$

Поскольку производная $\dot{V}(x,\dot{x},t)$ лишь знакоотрицательная, то по теореме Ляпунова равновесие $x=\dot{x}=0$ будет устойчивым.

Однако, здесь можно получить более сильное утверждение, используя ту же функцию Ляпунова, но при этом воспользоваться теоремой Н.Н. Красовского. Действительно, нетрудно проверить, что в данном случае функции выполнены все условия теоремы 1.7.2, т. е. равновесие $x=\dot{x}=0$ асимптотически устойчиво.

Если при этом дополнительно потребовать условие

$$\int_0^x b(s)ds\to+\infty \quad \text{при} \quad |x|\to+\infty,$$

то функция Ляпунова будет бесконечно большой. В этом случае согласно теореме 1.7.3 указанное равновесие будет глобально асимптотически устойчивым.

1.7.3. АВТОНОМНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приведем основные утверждения широко известных ныне результатов по развитию прямого метода Ляпунова, выполненных Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским для случая автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x}=f(x), \quad x\in D\subset\mathbb{R}^n, \tag{1.21}$$

где D – окрестность начала координат пространства $\mathbb{R}^n$, а функция $f:D\to\mathbb{R}^n$ непрерывна, $f(0)=0$, и удовлетворяет условию Липшица в области D.

Теорема 1.7.2.2 [75]. *Пусть существуют окрестность U начала координат и непрерывно дифференцируемая функция $V:U\to\mathbb{R}^+$ такие, что*:

1) *$V(x) > 0$ $\forall x \in U \setminus \{0\}$ и $V(0) = 0$;*

2) *$\dot{V}(x) \le 0$ $\forall x \in U$;*

3) *множество $M = \{x \in U : \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит положительных полутраекторий, кроме нулевой.*

Тогда начало координат уравнения (1.21) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.7.3.2 [8]. *Пусть множество $G = \mathbb{R}^n$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ такая, что*:

1) *$V(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $V(0) = 0$;*

2) *$\dot{V}(x) \le 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$;*

3) *множество $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит положительных полутраекторий, кроме нулевой;*

4) *функция $V(x)$ является бесконечно большой.*

Тогда начало координат уравнения (1.21) *глобально асимптотически устойчиво.*

Терема 1.7.4.2 [75]. *Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$ в G и непрерывно дифференцируемая функция $V: G \to \mathbb{R}$ такая, что*:

1) *$\forall\ \alpha > 0$ $\exists p \in B_\alpha$, что $V(p) > 0$;*

2) *$\dot{V}(x) \ge 0$ $\forall x \in U \setminus \{0\}$;*

3) *множество $M = \{x \in U \setminus \{0\} : \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит положительных полутраекторий.*

Тогда нулевое решение уравнения (1.21) *неустойчиво.*

Внешнее отличие этих теорем от классических утверждений А. М. Ляпунова [81] и Н. Г. Четаева [112] состоит в дополнительном требовании, а именно в проверке условия 3). Однако, как указал Е. А. Барбашин [10, с. 26], отсутствие на множестве *M* положительных полутраекторий достаточно легко проверяется. Действительно, если уравнение поверхности, определяющей множество *M*, задается условием $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, то соотношение

$$\dot{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} f_j(x) \ne 0 \qquad (1.22)$$

дает достаточное условие отсутствия полутраекторий.

Если функции $\dot{\varphi}$ и f непрерывно дифференцируемы, то можно повторить рассуждения, воспользовавшись понятием производных высшего порядка по времени от функции $\varphi(x)$, и в дополнение к (1.22) выписать аналогичное условие для $\ddot{\varphi}(x)$. Если функции $\varphi(x)$, и $f(x)$ дифференцируемы достаточное число раз, то на указанном пути можно подобным образом получить ряд достаточных условий отсутствия положительных полутраекторий уравнения (1.21). Каждое из добавленных таким путем соотношений типа (1.22) сужает множество, на котором проверяется отсутствие полутраекторий, что с практической точки зрения последовательно облегчает проверку условий 3). На этом пути получены результаты работы Григорьевой Н. Б. [28].

Представленные результаты метода функций Ляпунова предполагают, что задачу устойчивости можно успешно решать при условии построения вспомогательной функции V, которая подчинена определенным требованиям. Хотя утверждения даны в форме достаточных условий устойчивости, обращению этих теорем посвящен ряд серьезных исследований ученых. Причина такого внимания объясняется тем, что теоремы обращения дают ответ на вопрос о широте класса задач, который может быть изучен с помощью метода функций Ляпунова. Таким образом, они играют важную роль, во-первых, для того, чтобы подчеркнуть мощность идей прямого метода А. М. Ляпунова. Во-вторых, теоремы обращения, могут существенным образом использоваться для дальнейшего развития и обоснования метода знакопостоянных функций.

1.8. ТЕОРЕМЫ ОБРАЩЕНИЯ

Представим теоремы существования функции Ляпунова, удовлетворяющих различным устойчивоподобным свойствам состояний равновесия дифференциальных уравнений. Первая из этих теорем относится к свойству устойчивости в смысле Ляпунова.

Теорема 1.8.1 [98]. *Пусть правая часть системы* (1.1) *непрерывно дифференцируема по переменным* $(x,\ t)\in B_\rho\times\mathbb{R}^+$, $\rho>0$, $\overline{B_\rho}\subset D$, *и обладает устойчивым состоянием равновесия* $x=0$. *Тогда существуют функции* $V\in C_{xt}^{(1,1)}(B_\rho\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ *и* $a\in\mathbf{K}$ *такие, что для любой точки* $(x,$ $t)\in B_\rho\times\mathbb{R}^+$ *имеют место условия*:

1) $a(\|x\|)\le V(x,t)$;

2) $\dot{V}(x,t)\le 0$.

Теорема 1.8.1.1 [75, 77]. *Пусть правая часть системы* (0.1) *непрерывно дифференцируема по переменным* $(x,\ t)\in B_\rho\times\mathbb{R}^+$, $\rho>0$, $\overline{B_\rho}\subset D$, *и обладает равномерно устойчивым состоянием равновесия* $x=0$. *Тогда* *существуют функции* $a, b \in \mathbf{K}$ *и* $V \in C_{xt}^{(1,1)}(B_\rho \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *такие, что для любой точки* $(x, t) \in B_\rho \times \mathbb{R}^+$ *имеют место условия*:

1) $a(\|x\|) \le V(x,t) \le b(\|x\|)$;

2) $\dot{V}(x,t) \le 0$.

Теорема 1.8.2 [75]. *Пусть правая часть системы* (0.1) *непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по переменной* $x \in B_\rho$, $\rho > 0$, $\overline{B_\rho} \subset D$, *и обладает равномерно асимптотически устойчивым состоянием равновесия* $x = 0$. *Тогда существуют функции* $V \in C_{xt}^{(1,1)}(B_\rho \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, *функции Хана* $a, b, c \in \mathbf{K}$ *и положительные числа* M_1 *и* M_2 *такие, что для любой точки* $(x, t) \in D \times \mathbb{R}^+$ *имеют место условия*:

1) $a(\|x\|) \le V(x,t) \le b(\|x\|)$;

2) $\dot{V}(x,t) \le -c(\|x\|)$.

3) $\left\|\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right\| \le M_1$, $\left\|\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right\| \le M_2$.

Наконец, приведем теорему обращения для свойства глобальной равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 1.8.3 [8]. *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$, *правая часть уравнения* (0.1) *непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по переменной* $x \in B_\rho$ *для любого* $\rho > 0$, *и обладает глобально равномерно асимптотически устойчивым состоянием равновесия* $x = 0$. *Тогда существуют функции* $V \in C_{xt}^{(1,1)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, *функции Хана* $a, b, c \in \mathbf{K}$ *такие, что для любой точки* $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ *имеют место условия*:

1) $a(\|x\|) \le V(x,t) \le b(\|x\|)$;

2) $\dot{V}(x,t) \le -c(\|x\|)$;

3) *для любого* $\rho > 0$ *существуют* $M_1 > 0$ *и* $M_2 > 0$ *такие, что*:

$$\left\|\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right\| \le M_1, \ \left\|\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right\| \le M_2 \quad \forall\, x \in B_\rho \ \text{ и } \ \forall t \ge 0.$$

1.9. ПОЛУДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

В этом разделе определим полудинамическую систему $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ на метрическом пространстве (X, d) [152] с произвольным непустым множеством элементов X и функцией расстояния $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+$ – вещественная полупрямая положительных чисел.

1.9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Тройка $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ называется *полудинамической системой* [152], если отображение $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(i) $\pi(x, 0) = x \ \forall x \in X$ (*свойство начального состояния*);

(ii) $(\pi(x, t), \tau) = \pi(x, t + \tau) \ \forall x \in X$ и $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+$ (*полугрупповое свойство*);

(ii) π – непрерывное отображение произведения пространств $X \times \mathbb{R}^+$ в X (*свойство непрерывности*).

Отображение $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$ называется фазовым отображением, а X – фазовым пространством.

Положим для краткости $\pi(x, t) = xt \ \forall x \in X$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Тогда для каждого $x \in X$ и $t \in \mathbb{R}^+$ отображение x: $t \to xt$ называется *движением*, а множество $\gamma^+(x) = \{y \in X\colon y = xt,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ – *положительной полутраекторией* этого движения. Тогда аксиомы (I) и (II) соответственно принимают вид:

(I′) $x0 = x \ \forall x \in X$;

(II′) $xt(\tau) = x(t + \tau) \ \forall x \in X$ и $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+$.

Для любого подмножества N из X и для любого интервала I из $\mathbb{R}^+$ будем использовать обозначения

$NI = \{x \in X\colon x \in N, t \in I\}$;

– $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$;

– $B(N, \alpha) = \{x \in X\colon d(N, x) < \alpha\}$, $\alpha > 0$;

– $B_Y(N, \alpha) = B(N, \alpha) \bigcap Y$, $Y \subset X$, $\alpha > 0$;

– $\bar{N}$ – замыкание, $\operatorname{int} N$ – внутренность, $\operatorname{Fr} N$ – граница множества N из X.

1.9.2. НЕАВТОНОМНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x, t), \quad t \geq 0, \tag{1.23}$$

где $f\colon D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, $f(0, t) = 0$, D – окрестность начала координат. Предположим, что каждая пара $(x_0, t_0) \in D \times \mathbb{R}^+$ порождает единственное решение $x(x_0, t_0, t)$, подчиненное начальному условию

$x(x_0, t_0, t_0) = x_0$, и определенное на некотором интервале $t_0 \le t < \omega$, причем $x(x_0, t_0, t) \in D$ для всех $\forall t \in [t_0, \omega]$. Обычный путь построения соответствующей полудинамической системы связан с использованием выбранного выражения (символа) для обозначения решений, которые определены на $[t_0, +\infty]$ и подчинены равенству начальных условий. Однако решения системы (1.23), вообще говоря, не определены на положительной полуоси времени на фазовом пространстве D и поэтому можно говорить лишь о построении соответствующей локальной полудинамической системы.

Один из приемов вложения в полудинамическую систему состоит в следующем. Пусть $y = (x, t) \in D \times \mathbb{R}^+$ и $g = (f, 1)$, где 1 означает скалярную постоянную функцию, тождественно равную единице. Таким образом, нетрудно проверить, что соответствующая (локальная) полудинамическая система может быть построена на фазовом пространстве $W = D \times \mathbb{R}^+$ путем введения фазового отображения

$$\pi(x_0, t_0, t) = (x(x_0, t_0, t), t_0 + t).$$

Однако с точки зрения задач устойчивости такая система мало интересна, так как для нее, в частности, исходная точка покоя $x = 0$ не является состоянием равновесия, возникают проблемы с изучением ограниченных траекторий, периодических траекторий и т. п.

Более интересным оказывается иной подход в построении полудинамической системы для уравнения (1.23), в котором «зеркально» отражены основные задачи теории устойчивости.

Предварительно отметим следующее свойство: если $x(t)$ – решение системы (1.23), то $x(t + \tau)$ – решение уже другой системы, а именно, системы $\dot{x} = f(x, t + \tau)$, зависящей от сдвинутого момента времени $t + \tau$. Следовательно, сдвиг по времени в решении порождает сдвиг по времени в структуре системы. При таком переходе течение времени в решении уравнения (1.23) аналогично времени преобразованного уравнения (1.23). Если мы сможем каким-то образом включить при переводе правую часть f в состояние системы, тогда мы будем на пути к построению желаемой полудинамических системы.

Определение 1.15. *Для любой функции* $f : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *и любого* $s \in \mathbb{R}^+$ *функцию* f_s *будем называть сдвигом* f, где $f_s(x, t) = f(x, t + s)$.

Обозначим через $\Phi(x_0, f, t)$ решение уравнения (1.23), проходящее через точку (x_0, 0) и зависящее от времени t. Для согласования принятых обозначений такое решение можно обозначить выражением $\Phi(x_0, f, \bullet)$. Тогда $\Phi(x_0, f, s+\bullet)$ будет решением уравнения $\dot{x} = f_s(x,t)$, проходящим через точку $(\Phi(x_0, f_s, s), 0)$. Следовательно, решение можно записать и следующим образом $\Phi\big(\Phi(x_0, f, s), f_s, \bullet\big)$. Теперь, опираясь на свойство единственности решений уравнения (1.23), получаем тождество

$$\Phi(x_0, f, t+s) = \Phi\big(\Phi(x_0, f, s), f_s, t\big). \qquad (1.24)$$

Это говорит о том, что функция f и все ее сдвиги f_s, $s \in \mathbb{R}^+$, являются элементами некоторого соответствующим образом определенного функционального пространства **F**. Тогда отображение

$$\pi((x_0 f), t) = (\Phi(x_0, f, t), f_t)$$

является именно нужным нам кандидатом для определения фазового отображения полудинамической системы с фазовым пространством $\mathbf{F} \times D$. Покажем, что таким образом может быть построена полудинамическая система $(\mathbf{F} \times D, \mathbb{R}^+, \pi)$ с нужными свойствами соответствия проблем устойчивости, которая отвечает неавтономному дифференциальному уравнению (1.23).

На самом деле, множество $\mathbf{F}$ может быть снабжено топологией, в которой отображение из $\mathbf{F} \times D$ в **F**, определяемое соотношением $(f, t) \to f_t$ является непрерывным.

Определим пространство **F**, состоящее из функций $f : D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют условию Каратеодори и локальному условию Липшица по x.

Полагаем, что соответствующие локально интегрируемые функции $m_{K,g}$ и $l_{K,g}$ (зависящие, вообще говоря, от f) удовлетворяют следующим условиям:

$\mathbf{F}_1'$: для каждого ε > 0 и каждого измеримого подмножества $E \subset [s, s+1]$ [72, с. 295], мера которого меньше $\delta_K(\varepsilon)$,

$$\int_E m_K(s) ds < \varepsilon;$$

$$\mathbf{F}_2' : \int\limits_s^{s+1} l_{K,g}(s)ds \le L_K \text{ для каждого } s \in \mathbb{R}^+.$$

Здесь $\delta_K(\bullet)$ и L_K определяются исходной функцией f и остаются неизменными для всех $h \in \mathbf{F}$.

Определим на **F** метрическое пространство с метрикой

$$\rho(f,h) = \sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-(i+j)} \min\{1, |\int\limits_0^{s_j} (f(x_i,t) - h(x_i,t))dt|\}.$$

Согласно определению **F** и принятой метрике этого пространства оно будет компактным в слабой топологии. Пусть $\overline{\mathbf{F}}$ – замыкание **F** в выбранной слабой топологии.

Теорема 1.12. *Множество* **F**, *наделенное функций расстояния* ρ, *является метрическим пространством* [152, с. 145].

Можно показать, что последовательность $(f_n) \subset \mathbf{F}$ сходится к $g \in \overline{\mathbf{F}}$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $(x, s) \in D \times \mathbb{R}^+$ будет:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^s f_n(x,t)dt = \int\limits_0^s g(x,t)dt.$$

Более того, если последовательность (f_n) сходится к g и если (ψ_n) – последовательность непрерывных функций на $[0, s]$, сходящихся равномерно к функции ψ_0, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^s f_n(\psi_n(t),t)dt \to \int\limits_0^s g(\psi_0(t),t)dt \quad \text{для каждого } s \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, Φ непрерывна на $\mathbf{F} \times D \times \mathbb{R}^+$ и отображение $t \to f_t$ из $\mathbb{R}^+$ в **F**, а также отображение $(f,t) \to f_t$ непрерывны.

Лемма 1.3 [152, с. 147]. *Справедливо следующее свойство*: *если* $g \in \mathbf{F}$, $x \in D$ *и* $s, t \in \mathbb{R}^+$, *то*

$$\Phi\big(\Phi(x,g,t), g_t, s\big) = \Phi(x,g,t+s).$$

Доказательство почти очевидно.

Предложение 1.2. [152, с. 155]. *Предположим, что функции* m_K *и* l_K *постоянны для каждого компакта* $K \subset B$. *Тогда каждая функция* $g \in \overline{\mathbf{F}}$ *удовлетворяет условию Каратеодори с одними и теми же постоянными* m_K *и* l_K. *В этом случае мы можем положить* $m_{K,g} = m_K$ и $l_{K,g} = l_K$.

Доказательство. Пусть $K \subset D$ компактно и $g \in \overline{\mathbf{F}}$. Тогда существует последовательность $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такая, что $f_{t_n} \to g$. Выберем произвольные точки $x, y \in K$ и с учетом предположений запишем неравенство

$$\| f(x_1, t_n + t) - f(x_2, t_n + t) \| \le l_K \| x_1 - x_2 \| \ \ \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}^+.$$

Положим

$$h_n(t) = \frac{f(x_1, t_n + t) - f(x_2, t_n + t)}{\| x_1 - x_2 \|}$$

и рассмотрим последовательность $(h_n) \in L^1([0, s], \mathbb{R}^d)$ для $s > 0$, где L^1 – пространство суммируемых функций [72, с. 431]. Согласно лемме 3.1 [152, с. 156] (h_n) слабо сходится к h в пространстве $L^1([0, s], \mathbb{R}^d)$, где

$$h(t) = \frac{g(x_1, t) - g(x_2, t)}{\| x_1 - x_2 \|}.$$

Эта сходимость поточечная, тогда $\| h_n(t) \| \le l_K$ для всех $n \in \mathbb{N}$ влечет $\| h(t) \| \le l_K$. Аналогичным образом можно показать, что $\| g(x, t) \| \le m_K$.

Если существует локально интегрируемая функция l_K, удовлетворяющая неравенству (1.14) для каждого компакта $K \subset D$, тогда функция g называется *локально липшицевой по x* с константой Липшица $l_K(t)$.

1.9.3. АВТОНОМНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим следующую полудинамическую систему [83]. Пусть $\mathbf{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ – пространство Банаха непрерывных функций φ: $[-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\| \varphi \| = \max\limits_{-h \le s \le 0} \| \varphi \|$ и со сходимостью в **C**, являющейся равномерной сходимостью на $[-h, 0]$. Определим функцию xt: $[h, 0] \to \mathbb{R}^n$ равенством

$$xt(s) = x(t + s), \ -h \le s \le 0.$$

Пусть $f : X \subset \mathbf{C} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, где X – открытое подмножество в **C**. Предположим, кроме того, что f удовлетворяет локальному условию Липшица и отображает ограниченные множества из X в ограниченные множества из **C**.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(x_t)\,. \tag{1.25}$$

Определение 1.16. *Функция* $x : [-r, a] \to \mathbb{R}^n$ *является решением уравнения* (1.25), *если для некоторого a* > 0, *x* удовлетворяет (1.25) для всех $t \in [0, a]$; *на* $[-r, a]$, $x(t)$ – решение задачи с начальными данными

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \quad x_0 = \varphi, \tag{1.26}$$

если $x(t)$ *удовлетворяет* (1.25) *на* $[-r, a]$ *для некоторого a* > 0 *и* $x(t) = \varphi(t)$ *для* $-r \le t \le 0$, $\varphi \in X$.

Мы ограничимся случаем непрерывных начальных данных.

Будем считать, что каждая задача Коши (1.26) имеет единственное решение $x(t)$, определенное на $t \in [-r, \omega(\varphi)], \omega(\varphi) > 0$, где $[-r, \omega(\varphi)]$ максимальный интервал определения. Мы предположим также, что f есть отображение ограниченных множеств из X в ограниченные множества **C**. Это условие выполняется, если предположить, что f удовлетворяет локальному условию Липшица и непрерывна на X. Теоремы существования и единственности, а также непрерывной зависимости будут выполнены точно так же [132], как и для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обозначим через $x(\varphi)$ решение, начинающееся в точке $(0, \varphi)$. Известно [132], что в оговоренных предположениях решение единственно и непрерывно зависит от начальных условий. Наконец, пусть $f(0) = 0$, т. е. уравнение (1.25) обладает нулевым решением.

Определим фазовое отображение π: $X \times \mathbb{R}^+ \to X$ полудинамической системы $(X, \mathbb{R}, \pi)$ равенством

$$\pi(xt, s) = xt + s,\ s \in [-t, +\infty].$$

В частности, $x(t) = xt(0) = \pi(t, \varphi)(0)$.

Нетрудно убедиться в том, что введенное таким образом отображение удовлетворяет трем определяющим аксиомам полудинамических систем.

1.10. ПРЕДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x,t), \\ f(0,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \end{gathered} \tag{1.27}$$

где $f: D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, D – окрестность начала координат. Если символом $\Phi(x_0, f, t)$ как и выше обозначить решение уравнения (1.27), проходящее через точку (x_0, 0), то будет справедливым тождество (1.24).

Пусть $\mathbf{F}$ – пространства сдвигов функции f и $\overline{\mathbf{F}}$ – замыкание $\mathbf{F}$ в слабой топологии (п. 1.8.2). Изложим концепцию предельного уравнения для (1.27) [105, 152, 159].

Определение 1.17. Если $g \in \overline{\mathbf{F}}$, то дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = g(y,t) \tag{1.28}$$

называется *предельным уравнением* для уравнения (1.27).

Условия $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$, определенные на $\mathbf{F}$ (п. 1.8.2), дают заключение о том, что $\overline{\mathbf{F}}$ – компактное метрическое пространство, соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению (1.27).

Определим положительнуюполутраекторию и положительное предельное множество для (1.27) соответственно формулами

$$\gamma^+(x_0, f) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \Phi(x_0, f, t),$$

$$L^+(x_0, f) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \ \Phi(x_0, f, t_n) \to x^*, \text{при } t_n \to +\infty\}.$$

Известно, что если решение $\Phi(x_0, f, t)$ содержится в D вместе со своим замыканием (или $\Phi(x_0, f, t)$ относительно компактно), то $\gamma^+(x_0, f)$ –относительно компактное подмножество D.

Отметим также, что $y^* \in L^+(x_0, f)$, если и только если существует последовательность $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \to +\infty$, такая, что $\Phi(x_0, f, t_n) \to y^*$.

Замечание 1.3. Каждый элемент $g \in \overline{\mathbf{F}}$ определен на $D \times \mathbb{R}$. Действительно, $f_{t_n} \to g$ для некоторой последовательности $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \to +\infty$, Определим положительную полутраекторию и положительное предельное множество для (1.27) соответственно формулами

$$\gamma^+(x_0,f)=\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+}\Phi(x_0,f,t),$$

$$L^+(x_0,f)=\{x^*\in\mathbb{R}^n:\ \Phi(x_0,f,t_n)\to x^*,\ \text{при}\ t_n\to+\infty\}.$$

Известно, что если решение $\Phi(x_0,f,t)$ содержится в D вместе со своим замыканием (или $\Phi(x_0,f,t)$ относительно компактно), то $\gamma^+(x_0,f)$ – относительно компактное подмножество D.

Отметим также, что $y^*\in L^+(x_0,f)$, если и только если существует последовательность $(t_n)\subset\mathbb{R}^+$, $t_n\to+\infty$, такая, что $\Phi(x_0,f,t_n)\to y^*$.

Замечание 1.3. Каждый элемент $g\in\overline{\mathbf{F}}$ определен на $D\times\mathbb{R}$. Действительно, $f_{t_n}\to g$ для некоторой последовательности $(t_n)\subset\mathbb{R}^+$, $t_n\to+\infty$, и поэтому для любого $t\in\mathbb{R}$ имеем $t_n+t\in\mathbb{R}^+$ для достаточно больших натуральных $n\geq 1$. Следовательно, $f_{t_n}(x,t)$ определено для достаточно больших n, а значит, и $g(x,t)$ тоже.

Определение 1.18 [105, 152]. Подмножество $M\subset\mathbb{R}^n$ называется *квазиинвариантным* (относительно уравнения (1.27), если для каждого $y^*\in M$ существует $g\in\overline{\mathbf{F}}$ такое, что $\Phi(y^*,g,t)\in M$ для всех $t\in\mathbb{R}$.

Лемма 1.4. *Если решение* $\Phi(x_0,f,t)$, $t\in\mathbb{R}^+$, *относительно компактно и принадлежит D, то* $L^+(x_0,f)$ *квазиинвариантно*.

Доказательство. Пусть $y^*\in L^+(x_0,f)$. Тогда существует последовательность $(t_n)\subset\mathbb{R}^+$, $t_n\to+\infty$, $f_{t_n}\to g\in\overline{\mathbf{F}}$ и $\Phi(x_0,f,t_n)\to y^*\in L^+(x_0,f)$. Известно, что $g(y,t)$ определено для всех $x\in B$ и $t\in\mathbb{R}$ согласно замечанию 2.1. Фиксируем $t\in\mathbb{R}$. Тогда выражение

$$\Phi\Big(\Phi(x_0,f,t_n),f_{t_n},t\Big)=\Phi(x_0,f,t+t_n)$$

определено для достаточно больших n. Отсюда с учетом непрерывности Ф получаем

$$\Phi\Big(\Phi(f,x_0,t_n),f_{t_n},t\Big)\to\Phi(y^*,g,t).$$

На основании определения $L^+(x_0, f)$ можем записать также

$$\Phi(y^*, g, t) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x_0, f, t+t_n) \in L^+(x_0, f).$$

Теперь в случае, когда m_K и l_K постоянны, мы на основании предложения 1.12 имеем, что $\| g(y,t)\| \le m_K$ для всех $(x,\ t) \in D\times\mathbb{R}$ и g локально липшицева по y с константой Липшица l_K. Выберем компактное множество K так, чтобы $L^+(x_0, f) \subset K \subset D.$ Отсюда следует, что на основании замечания 1.5 $\Phi(g, y^*, t)$ – есть решение уравнения $\dot y = g(y,t)$ для всех $t\in\mathbb{R}.$ Это и требовалось доказать.

Следствие 1.2. Если $y^* \in L^+(x_0, f)$, *то существует* $g \in \overline{\mathbf{F}}\setminus\mathbf{F}$ *и последовательность* $(t_n)\subset\mathbb{R}^+$, $t_n \to +\infty$, *такая, что* $\Phi(x_0, f_{t_n}, t)$ сходится равномерно к $\Phi(y^*, g, t)$ *на компактных подмножествах из* $\mathbb{R}$.

Следующий пример показывает, что в лемме 1.3 нельзя заменить слово «существует» на фразу «для всех $g \in \overline{\mathbf{F}}\setminus\mathbf{F}$ ».

Пример 1.16 [152, с. 160]. Рассмотрим периодическую систему

$$\begin{cases} \dot x = -y, \\ \dot y = x + m(t) g(x,y), \end{cases}$$

где функции $m(t)$ и $g(x,\ y)$ определены следующим образом. Фиксируем число $c > 0$ и пусть

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & x^2 + (y-1)^2 \ge 2c, \\ 1, & x^2 + (y-1)^2 \le c. \end{cases}$$

Продолжим g из $\boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ на все множество $\mathbb{R}^2$. Выберем достаточно малое число α ($0 < \alpha < 1/4\pi$) так, чтобы

$$\{t\in[0,\pi] \ \Rightarrow\ \sin t \ge 1-c\} \ \Leftrightarrow\ |t - 1/2\pi| \le \alpha.$$

Тогда для $t\in[0,\pi]$ имеем: $\cos^2 t + (\sin t - 1)^2 \le 2c \ \Leftrightarrow\ |t-1/2\pi| \le \alpha.$ Отсюда $g(\cos t, \sin t) = 0 \ \Leftrightarrow\ |t - 1/2\pi| > \alpha.$

Определим

$$m(t) = \begin{cases} 0, & 1/2\pi - \alpha \le t \le 1/2\pi + \alpha, \\ 1, & 1/2\pi + \alpha \le t \le 5/2\pi - \alpha, \end{cases}$$

и продолжим m как непрерывную 2π-периодическую функцию.

Положим $D=\mathbb{R}^2$. Ясно, что $(x(t),y(t))=(\cos t,\sin t)$ является ограниченным решением уравнения. Точка (0,1) принадлежит положительно предельному множеству $L^+((0,1),f)=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ этого решения. Для любого $t_0\in\mathbb{R}^+$ положим $T_0=t_0(\mathrm{mod}\,2\pi)$. Если $|T_0-1/2\pi|\geq 2\alpha,$ то решение, исходящее из (0,1) в момент t_0, не принадлежит $L^+((0,1),f)$. Действительно, согласно исходному уравнению, если $(x(t_0),y(t_0))=(0,1)$, то

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t_0)=-y(t_0)=-1,\\&\dot{y}(t_0)=x(t_0)+m(t_0)g(x(t_0),y(t_0))=0+1\cdot g(0,1)=1.\end{aligned}$$

Но чтобы решение оставалось в $L^+((0,1),f)$ при $t=t_0$, необходимо, чтобы направление фазовой скорости в точке $(\dot{x}(t_0),\dot{y}(t_0))$ было равно (–1, 0), а не (–1, 1).

Следующее утверждение верно очевидным образом.

Лемма 1.5. *Объединение множества квазиинвариантных множеств является квазиинвариантным множеством.*

Лемма 1.6. *Замыкание множества квазиинвариантных множеств является квазиинвариантным множеством.*

Доказательство. Пусть M квазиинвариантно и (x_n) – последовательность точек M такая, что $x_n\to x_0$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует последовательность $(t_n^k)_{k\geq 1}\subset\mathbb{R}^+$ и некоторое $f_n^*\in\overline{\mathbf{F}}$ так, что $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(x_n,f_{t_n^k},t)=\Phi(x_n,f_n^*,t)$. Сходимость равномерная на компактах из $\mathbb{R}$. Выберем диагональную последовательность $(t_n)=(t_n^n)$ так, чтобы

$$\|\Phi(x_n,f_{t_n^k},t)-\Phi(x_n,f^*,t)\|<\frac{1}{n},\ \ t\in[0,n].$$

Мы можем предположить (так как $\overline{\mathbf{F}}$ компактно), что $f_{t_n}\to f^*\in\overline{\mathbf{F}}$.

Покажем, что $\Phi(x_0,f^*,t)\in\bar{M}$ для всех $t\in\mathbb{R}$.

Действительно, так как $x_0\in\bar{M}$, то согласно квазиинвариантности имеем:

$$\begin{aligned}&\|\Phi(x_0,f^*,t)-\Phi(x_n,f_n^*,t)\|\leq\|\Phi(x_0,f^*,t)-\Phi(x_0,f_{t_n},t)\|+\\&+\|\Phi(x_0,f_{t_n},t)-\Phi(x_n,f_{t_n},t)\|+\|\Phi(x_0,f_{t_n},t)-\Phi(x_n,f_n^*,t)\|.\end{aligned}$$

Непрерывность Φ влечет к тому, что первые два члена правой части стремятся к нулю при $n \to +\infty$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}$. Следующий член также стремится к нулю при $n \to +\infty$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}$ согласно построению специальной последовательности (t_n). Квазиинвариантность влечет $\Phi(x_n, f_n^*, t) \in M$ для всех t из $\mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, расстояние между $\Phi(x_0, f^*, t)$ и M может быть сколь угодно малым. Отсюда следует, что $\Phi(x_0, f^*, t) \in \bar{M}$ для каждого $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 1.7. *Для любого* $x_0 \in D$ *положительная полутраектория* $\gamma^+(x_0, f)$ *является квазиинвариантным множеством относительно уравнения* (1.27).

Доказательство. Пусть $y_0 \in \gamma^+(x_0, f)$. Тогда $y_0 = \Phi(x_0, f, t_0)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$, и следовательно, $\Phi(y_0, f_{t_0}, t) \in \gamma^+(x_0, f)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$. Поэтому согласно лемме 1.6 выполняются следующие соотношения:

$$\Phi(y_0, f_{t_0}, t) = \Phi\Big(\Phi(f, x_0, t_0), f_{t_0}, t\Big) = \Phi(x_0, f, t_0 + t) \in \gamma^+(x_0 f)$$

для всех $t \in \mathbb{R}^+$. Это доказывает квазиинвариантность $\gamma^+(x_0, f)$ относительно уравнения (1.27).

1.11. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

Следствием свойства квазиинвариантности является обобщение принципа инвариантности Ля Салля [152, теорема 3.11, гл. 2] для уравнения (1.27).

Предложение 1.2 (Общий принцип инвариантности для обыкновенных дифференциальных уравнений). *Предположим, что существует замкнутое множество* $E \subset D$ *и множество* $H \subset D$ *со следующими свойствами*: $\forall x_0 \in H$, $\Phi(x_0, f, t) \to E$ *при* $t_n \to +\infty$.

Если решение $\Phi(x_0, f, t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, *компактно и принадлежит D, то тогда* $\Phi(x_0, f, t) \to M$ *при* $t_n \to +\infty$, *где M – наибольшее квазиинвариантное подмножество E.*

Множество E определяется часто с помощью вспомогательных функций (функций Ляпунова). Вместо того, чтобы локализовать (что трудно сделать) предельное множество $L^{+}(x_0, f)$, найдем *M*. Так как $L^{+}(x_0, f)$ квазиинвариантно, лемма 1.6 позволяет установить, куда стремятся решения при $t \to +\infty$.

Пусть $\overline{G} \subset D$, а функции $V \in \mathbf{C}^{1,0}(D \times \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R})$ и $V_0 : \mathbf{C}^{0}(D, \mathbb{R})$ такие, что выполняются следующие условия: $\dot{V}(x,t) \le V_0(x) \le 0$ для всех $(x,\ t) \in G \times \mathbb{R}^{+}$. Положим $E = \{x \in \overline{G} :\ V_0(x) = 0\}$ и пусть *M* – наибольшее квазиинвариантное подмножество *E* относительно уравнения (1.25).

Предложение 1.3 (Принцип инвариантности). *Предположим, что для уравнения* (1.27) *существует множество G* $(\overline{G} \subset D)$, *непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова V на* $G \times \mathbb{R}^{+}$ *и непрерывная функция* $V_0 : D \to \mathbb{R}$ *такие, что*

1) $\dot{V}(x,t) \le V_0(x) \le 0$ *для всех* $(x,\ t) \in G \times \mathbb{R}^{+}$.

Положим $E = \{x \in \overline{G} : V_0(x) = 0\}$ *и пусть M – наибольшее квазиинвариантное подмножество E относительно уравнения* (1.25).

Тогда все решения уравнения (1.27) *из области G ограничены на* $\mathbb{R}^{+}$ *и стремятся к M при* $t \to +\infty$.

Следствие 1.3. *Пусть* $V : G \times \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ *– функция Ляпунова на G и* $\gamma^{+}(x, f)$ *– ограниченная положительная полутраектория в G. Тогда* $y^{*} \in L^{+}(x_0, f)$ *влечет существование элемента* $g \in \overline{\mathbf{F}}$, *для которого функция* $V(\Phi(y^{*}, g, t), t)$ *постоянна для всех* $t \in \mathbb{R}^{+}$.

Предложение 1.4. *Предположим, что для уравнения* (1.27) *существует функция Ляпунова V на ограниченном множестве* $G \subset D$ *и выполнены следующие условия*:

1) *G положительно инвариантно относительно уравнения* (1.27);

2) *V – класса* $\boldsymbol{C}^{1}$ *и* $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ *ограничена на множестве* $\overline{G} \subset D$;

3) $V(x,t) = c(t)$ *– невозрастающая по времени функция на Fr M, где* $M \subset D$ *– наибольшее квазиинвариантное подмножество E относительно уравнения* (1.27).

Тогда M асимптотически устойчиво для уравнения (1.27) *и G содержится в области притяжения начала координат.*

Следствие 1.3. *Предположим, что существует функция Ляпунова V для уравнения* (1.27) *на множестве* $G \subset D$. *Если*:

1) *V не зависит от* $t \in \mathbb{R}^+$;

2) G *– ограниченная компонента множества* $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < a\}$;

3) $x = 0$ *– единственное квазиинвариантное подмножество* $E = \{x \in \overline{G} : \dot{V}(x) = 0\}$ *относительно уравнения* (1.27);

Тогда $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво для уравнения* (1.25).

Пример 1.17. Рассмотрим уравнение Льенара $\ddot{x} + h(x, \dot{x}, t)\dot{x} + f(x) = 0,$ или соответствующую ему систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x) - h(x, y, t)y.$$

Предположим, что выполнены условия:

1) $f \in \boldsymbol{C}^1$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}$ существуют, непрерывны на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, непрерывны на $G \times \mathbb{R}^+$ и равномерно ограничены на множествах из $G \times \mathbb{R}^+$, где $G \subset \mathbb{R}^2$ ограничено.

2) $h(x, y, t) \ge k(x, y)$ с $k(x, y) > 0$, если $y \neq 0$, $k(x, y)$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

3) для любого ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^2$ и $\varepsilon > 0$ существует $u_B(\varepsilon) > 0$ такое, что $\int\limits_t^{t+\delta} h(x, y, s)ds < \varepsilon$ для $|\delta| < u_B(\varepsilon)$ и $(x, y) \in B$;

4) $f(x)x > 0$, если $x \neq 0$;

5) величина $S(x) = \int\limits_0^x f(s)ds \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$.

Тогда начало (0, 0) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Ясно, что условия $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ выполняются. Возьмем функцию Ляпунова

$$V(x, y, t) = 0{,}5y^2 + S(x), \quad \dot{V}(x, y, t) = -h(x, y, t)y^2 \le k(x, y,)y^2.$$

Множество $G_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y, t) < a\}$ для $a > 0$. Тогда G_a – открыто, ограничено и положительно инвариантно. Следовательно, все решения уравнения ограничены на $\mathbb{R}^+$. Здесь $E = G \bigcap \{(x, y) : y = 0\}$. Ясно, что (0,0) – наибольшее положительно инвариантное подмножество E. Следовательно, если $x \neq 0$, то каждое такое решение расположено на оси Ox. Согласно следствию 1.3 имеем $M \in \{(0,0)\}$. Поскольку все решения ограничены, то их предельные множества (со свойством квазиинвариантности) не пусты и принадлежат M. Поэтому $M = \{(0,0)\}$. Более того, так как $V(x, y) \to +\infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$, то все пространство $\mathbb{R}^2$ есть область притяжения $\{(0,0)\}$.

1.12. ПРЕДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

1.12.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x,t), \quad f(0,t) = 0, t \geq 0, \tag{1.29}$$

удовлетворяющее предположениям $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ на соответственно построенном пространстве $\mathbf{F}$.

Пример 1.18 [152, с. 175]. Предельным уравнением для $\dot{x} = \sin\sqrt{t}$ является уравнение с постоянной правой частью $\dot{x} = c,\ c \in [0,1]$.

Пример 1.19 [152, с. 176]. Уравнение $\dot{x} = -2x + e^{-t}$ имеет решение, проходящее через точку (x_0, 0) в виде функции $\Phi(t) = x_0 e^{-t} + e^{-t} - e^{-2t}$. С другой стороны, предельное уравнение $\dot{x} = -2x$ имеет решение, проходящее через точку (x_0, 0) в виде функции $\Psi(t) = x_0 e^{-t}$. Первое из уравнений не обладает нулевым решением, а второе таковым обладает.

Предложение 1.5. *Если нулевое решение уравнения* (1.29) *равномерно устойчиво или равномерно асимптотически устойчиво, то нулевое решение каждого предельного уравнения* $\dot{y} = g(y,t),\ \ g \in L^{+}(f)$, *также равномерно устойчиво или равномерно асимптотически устойчиво соответственно*.

Предложение 1.6. *Если нулевое решение уравнения* (1.29) *равномерно устойчиво и* U *– область равномерного притяжения каждого предельного уравнения* $\dot{y} = g(y,t),\ \ g \in L^{+}(f)$, *то* U *– область притяжения нулевого решения* (1.29).

Доказательство. Пусть U – область притяжения нулевого решения каждого предельного уравнения для $\dot{x} = f(x,t)$. Если U не является областью равномерного нулевого решения уравнения $\dot{x} = f(x,t)$, то должны существовать $\varepsilon > 0$, компактное множество $K \subset U$, последовательность

$(x_n) \subset K$ (в предположении сходимости к некоторому элементу $x_0 \in K$), последовательности $(t_n),(T_n) \subset \mathbb{R}^+$ с $t_n \to +\infty$ и $T_n \to +\infty$, такие, что $\| \Phi(x_n, f_{t_n}, T_n) \| \geq \varepsilon$. Выберем $\delta = \delta(1/2\varepsilon) > 0$ согласно равномерной устойчивости нулевого решения уравнения $\dot{x} = f(x,t)$. Тогда имеем:

$$\| \Phi(x_n, f_{t_n}, t) \| \geq \delta \text{ для каждого } t \in [0, T_n].$$

С другой стороны, если $\| \Phi(x_n, f_{t_n}, \tau) \| < \delta$ для некоторого $\tau \in [0, T_n]$, то полагая $y_n = \Phi(x_n, f_{t_n}, \tau)$, мы получим равномерную устойчивость нулевого решения уравнения $\dot{x} = f(x,t)$

$$\| \Phi(x_n, f_{t_n}, \tau + t) \| = \| \Phi(x_n, f_{t_n + \tau}, t) \| < 1/2\varepsilon \text{ для каждого } t \in \mathbb{R}^+.$$

Если мы выберем $t = T_n - \tau$, то $\| \Phi(x_n, f_{t_n}, T_n) \| < 1/2\varepsilon$, что противоречит предположению выше.

Поскольку $\overline{\mathbf{F}}$ компактно, мы можем предположить (выбрав подпоследовательность, если это необходимо), что $\lim\limits_{n\to\infty} f_{t_n} = g \in L^+(f)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(x_n, f_{t_n}, t) = \Phi(x_0, g, t)$ равномерно по t, принадлежащему компакту из $\mathbb{R}^+$ и $\| \Phi(x_n, f_{t_n}, t) \| \geq \delta$ для каждого $\tau \in [0, T_n]$, то мы можем заключить, что $\| \Phi(x_0, g, t) \| \geq \delta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$. Однако это противоречит предположению о том, что U – область притяжения нулевого решения уравнения $\dot{y} = g(y,t)$.

Пример 1.20 [152, с. 180]. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - h(t)y, \end{cases} \tag{1.30}$$

где функция $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1) h – измерима и неотрицательна,

2) $H(t) = \int\limits_0^t h(s)ds$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^+$.

Ясно, что имеют место условия $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$. Все предельные уравнения для (1.30) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - g(t)y, \end{cases}$$

где $\int\limits_0^t g(s)ds = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^t h(t_n + s)ds$ для каждой последовательности $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \to +\infty$.

Функция Ляпунова $V = x^2 + y^2$ имеет производную $\dot{V} = -h(t)y^2 \le 0$.

Поэтому нулевое решение равномерно устойчиво.

Можно показать, что справедливо следующее утверждение [152]: *необходимое и достаточное условие того, чтобы нулевое решение уравнения* (1.30) *было равномерно асимптотически устойчивым, состоит в том, что система*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

не является предельной для уравнения (1.24).

Предложение 1.5. *Нулевое решение уравнения* (1.29) *равномерно асимптотически устойчиво в том и только в том случае, когда существует окрестность U начала координат, являющейся областью равномерного притяжения для каждого предельного уравнения* $\dot{y} = g(y,t)$, $g \in \overline{\mathbf{F}}$.

Доказательство. Если нулевое решение уравнения $\dot{x} = f(x,t)$ равномерно асимптотически устойчиво, то такая окрестность U существует согласно предложению 1.6.

Обратно, предположим, что такая окрестность U существует. С учетом предложения 1.5 достаточно показать, что нулевое решение $\dot{x} = f(x,t)$ равномерно устойчиво. Пусть это не так. Тогда должно существовать ε > 0, последовательность $(x_n) \subset D$ и $(t_n), (t'_n) \subset \mathbb{R}^+$ такие, что $x_n \to 0$ и $\|\Phi(x_n, f_{t_n}, t'_n)\| = \varepsilon$. Отсюда следует, что $t_n + t'_n \to \infty$. Заметим, что $(t_n + t'_n)$ ограничена, а значит $(t_n), (t'_n)$ также ограничены. Мы можем предположить (путем выбора подпоследовательностей, если это необходимо), что $t_n \to t_0$ и $t'_n \to t'_0$. Таким образом.

$$\varepsilon = \|\Phi(x_n, f_{t_n}, t'_n)\| \to \|\Phi(0, f_{t_0}, t'_0)\|.$$

Но нулевое решение – единственное решение, проходящее через точку (0, t_0). Поэтому последовательность $(t_n + t'_n)$ неограниченная. Не теряя общности рассуждений, можем предположить, что $t_n \to +\infty$. Будем различать два случая.

А) Пусть (t'_n) ограничена. Выберем, если это необходимо, подпоследовательность с тем, чтобы $f_{t_n} \to g \in \overline{\mathbf{F}}$ и $t'_n \to t'_0$. Тогда будет:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n, f_{t_n}, t'_n) = \Phi(0, g, t'_0).$$

Но $\| \Phi(0, g, t'_0) \| = \varepsilon,$ как и ранее, на основании единственности решения $\dot{y} = g(y,t),$ проходящего через (0,0).

Б) Пусть теперь (t'_n) неограниченная. Не теряя общности, предполагаем, что $\| \Phi(x_n, f_{t_n}, t) \| < \varepsilon$ для $t \in [0, t'_n]$. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что множество $K = \overline{B(0,\varepsilon)} \subset U$. Выберем $T = T(1/2\varepsilon, K) > 0$ согласно определению равномерного притяжения нулевого решения каждого предельного уравнения. Положим $s_n = t_n + t'_n$ и $y_n = \Phi(x_n, f_{t_n}, t'_n - T)$. Мы можем предположить (переходя к подпоследовательности, если это необходимо), что $f_{t_n} \to g \in \overline{\mathbf{F}}$. Тогда $\| y_n \| < \varepsilon$ и поэтому можно считать, что (y_n) сходится к точке $y_0 \in K$. В результате получим: $\Phi(y_n, f_{s_n}, t) \to \Phi(0, g, t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Условие равномерного притяжения влечет, что $\| \Phi(y_0, g, t) \| < 1/2\varepsilon$. Однако, $\| \Phi(y_n, f_{s_n}, T) \| = \| \Phi(x_n, f_{t_n}, t'_n) \| = \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно при $n \to +\infty$ будет иметь, равенство $\| \Phi(y_0, g, T) \| = \varepsilon,$ противоречащее предположению. Теорема доказана.

Следствие 1.4 [73]. *Для того чтобы решение системы* (1.27) *было глобально равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно выполнение условий*:

1) *решение* $x = 0$ *глобально асимптотически устойчиво относительно семейства предельных систем* $\dot{y} = g(y,t), \quad g \in L^+(f)$;

2) *все решения* $x(x_0, t_0, t)$ *уравнения* (1.27) *ограничены при* $t > t_0$ *равномерно по* (x_0, t_0).

1.12.2. АСИМПТОТИЧЕСКИ АВТОНОМНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве приложения предыдущих результатов рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x,t), \quad f(0,t) = 0 \; \forall t \geq 0 \tag{1.31}$$

и его возмущение уравнение

$$\dot{x} = f(x,t) + h(x,t), \quad h(0,t) = 0 \; \forall t \geq 0, \tag{1.32}$$

где функция $h(x,t)$ удовлетворяет условию:

$$h_\tau \to 0 \;\text{ в } \mathbf{F} \text{ при } \; t \to +\infty.$$

Ясно, что уравнение (1.31) является предельным для уравнения (1.32).

Предложение 1.6. *Предположим, что нулевое решение* (1.31) *равномерно асимптотически устойчиво, а нулевое решение уравнения* (1.32) *равномерно устойчиво. Если* $\lim\limits_{t\to+\infty} h_t = 0$ в $\mathbf{F}$, *то нулевое решение уравнения* (1.32) *также равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Равномерное притяжение нулевого решения уравнения (1.31) характеризуется существованием фиксированной области притяжения для каждого предельного уравнения (1.31), или, что эквивалентно, уравнения (1.32). Следовательно, нулевое решение уравнения (1.32) равномерно асимптотически устойчиво.

Определение 1.19 [152, с. 184]. Функция $f \in \mathbf{F}$ называется *асимптотически автономной*, если $L^+(f) = \{g\}$; точка f называется *асимптотически периодической*, если $L^+(f)$ состоит из периодической орбиты; т. е. $g \in L^+(f)$ влечет, к тому что g – периодическая по $t \in \mathbb{R}$ функция.

Замечание 1.3. Функция f асимптотически автономная тогда и только тогда, когда $g_t = g$ для каждого $t \in \mathbb{R}$. По этой причине $L^+(f) = \{g\}$ может быть инвариантным. Следовательно, f асимптотически автономная тогда и только тогда, когда g не зависит от t (автономная).

Предложение 1.6 мотивирует новое определение, с которым устанавливается счетный критерий для f асимптотически автономной.

Определение 1.20 [152, с. 184]. *Функция* $h \in \mathbf{F}$ *называется* ***исчезающей***, *если для каждого компактного множества* $K \subset D$ *существует функция* μ_K: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *такая, что*

$$\lim_{t\to+\infty}\mu_K(t)=0 \quad \text{и} \quad \| \int_t^{t+\sigma} h(x,s)ds \| \le \mu_K(t)$$

для каждого $(x,\sigma)\in K\times[0,1]$ *и* $t\in\mathbb{R}^+$.

Функция может быть исчезающей и неограниченной.

Пример 1.18. Рассмотрим функцию $h(x,t)=xe^t\cos e^{2t}$. Вычислим

$$\int_t^{t+\sigma} e^s\cos e^{2s}ds=\int_t^{t+\sigma}(e^s\cos e^{2s}-\frac{1}{2}e^{-s}\sin e^{2s})ds+\int_t^{t+\sigma}\frac{1}{2}e^{-s}\sin e^{2s}ds.$$

$$|\int_t^{t+\sigma} e^s\cos e^{2s}ds|\le\left|\left(\frac{1}{2}e^{-s}\sin e^{2s}\right)_t^{t+\sigma}\right|+\int_t^{t+\sigma}\frac{1}{2}e^{-s}ds\le e^{-t}+e^{-t}$$

для каждого $\sigma\in[0,1]$.

Пусть $\mu_K(t)\in Ke^{-t}$. Для значений $\|x\|\le K$ видим, что определение 1.17 удовлетворяется.

Предложение 1.7. *Функция f асимптотически автономная, если и только если существуют функции g, h* $\in$ **F** *такие, что*

i) $f=g+h$,

ii) g – *автономная*,

iii) h – *исчезающая*.

Пример 1.21. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=-x+x^2e^{-t},$$

где x^2e^{-t} – исчезающая. Тогда предельное уравнение принимает вид

$$\dot{x}=-x$$

и является автономным. Нулевое решение этого уравнения глобально асимптотически устойчиво. Следовательно, по теореме 12 нулевое решение исходного уравнения равномерно асимптотически устойчиво, но не является глобально асимптотически устойчивым, так как обладает неограниченным решением $x(t)=2e^t$.

Завершим рассмотрение асимптотически автономных и асимптотически периодических уравнений, характеризуя их положительно предельные множества.

Предложение 1.8. *Рассмотрим автономную систему*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.33}$$

и ее возмущенное уравнение

$$\dot{x} = f(x) + h(x,t), \tag{1.34}$$

где обе функции f, h $\in$ **F** *и h – исчезающая функция. Если решение* $\Phi(x_0, f+h, t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, *относительно компактно и содержится в D, тогда положительно предельное множество* $L^+(x_0, f+h)$ *инвариантно относительно решений уравнения* (1.33).

Доказательство. Доказательство следует очевидным образом из квазиинвариантности $L^+(x_0, f+h)$ относительно единственного предельного уравнения (1.33).

Предложение 1.9. *Рассмотрим периодическое уравнение*

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{1.35}$$

где f – периодическая функция периода $\tau > 0$. *Пусть h – исчезающая функция и рассмотрим возмущенное уравнение*

$$\dot{x} = f(x,t) + h(x,t). \tag{1.36}$$

Предположим, что решение $\Phi(x_0, f+h, t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, *уравнения* (1.36) *относительно компактно и содержится в D. Тогда для каждого* $y_0 \in L^+(x_0, f+h)$ *существуют* $t_0 \in [0, \tau]$ *и последовательность* $(k_n) \subset \mathbb{N}$, $k_n \to +\infty$, *а также решение* $y(\bullet)$ *уравнения* (1.35), *проходящее через точку* (y_0, t_0) *такое, что* $y(t) \in L^+(x_0, f+h)$ *для каждого* $t \in \mathbb{R}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_0, f+h, k_n\tau + t) = y(t)$$

равномерно по t на каждом ограниченном интервале из $\mathbb{R}$.

Пример 1.22 [74]. Уравнение

$$\dot{x} = -x + 2e^{-t}x^2 \tag{1.37}$$

имеет единственное предельное уравнение $\dot{x} = -x$, нулевое решение которого глобально асимптотически устойчиво, поэтому условие 1 следствия 1.5.1 выполнено. Однако это не обеспечивает глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.37), которое имеет неограниченное решение $x(1,0,t) = e^t$.

2. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. ТЕОРЕМЫ НА ОСНОВЕ КОНСТРУКЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Возможность вложения системы неавтономных дифференциальных уравнений в автономную динамическую систему порождает идею воспользоваться этим соответствием для формулировки теорем второго метода Ляпунова. Это возможно по той причине, что полученные результаты для абстрактных динамических систем требуется лишь трансформировать, отмечая все детали переходного соответствия. Именно этот подход был использован автором в работе [46].

2.1.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x,t), \;\; f(0,t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где f: $D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, D – окрестность начала координат $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x.

Пусть $\mathbf{F}$ означает пространство сдвигов функции f (п. 1.8.2), наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из $D \times \mathbb{R}^+$ и $\overline{\mathbf{F}}$ – замыкание $\mathbf{F}$ в такой топологии. В результате $\overline{\mathbf{F}}$ оказывается компактным множеством, содержащим предельные функции g к функции f. Пусть для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{F}}$ предельное уравнение (2.1) имеет вид

$$\dot{y} = g(y,t), \;\; y \in \mathbb{R}^n, \;\; t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Ясно, что каждая предельная функция $g \in \overline{\mathbf{F}}$, $g : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, непрерывна и $g(0,t) = 0 \ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Так как f удовлетворяет локальному условию Липшица, то g также удовлетворяет локальному условию Липшица [159].

Обозначим через $\Phi(f, x_0, t)$ решение уравнения (2.1), проходящее через точку (x_0, 0) и зависящее от времени t, так что $\Phi(f, x_0, 0) = x_0$.

Пусть тройка $(X, \mathbb{R}, \pi)$ означает динамическую систему на множестве $X = D \times \mathbf{F}$ [121]. Положим $\overline{X} = D \times \overline{\mathbf{F}}$ и введем в рассмотрение динамическую систему $(\overline{X}, \mathbb{R}, \pi)$. Тогда решению $x = 0$ отвечают множества $M = \{(x, f) \in X :\ x = 0\}$ и $\overline{M} = \{(x, f) \in \overline{X} :\ x = 0\}$ соответственно в динамических системах $(X, \mathbb{R}, \pi)$ и $(\overline{X}, \mathbb{R}, \pi)$.

Отметим следующее: метрическое пространство X локально компактно, а M – его замкнутое положительно инвариантное подмножество; метрическое пространство $\overline{X}$ компактно, а $\overline{M}$ – его компактное положительно инвариантное подмножество.

Прежде чем приступить к сравнению свойств устойчивости нулевого решения системы (2.1) и инвариантных множеств M и $\overline{M}$, напомним необходимые понятия, в соответствии с принятыми обозначениями решений.

Определение 2.1. *Нулевое решение* (2.1) ***устойчиво***, *если*:

$$(\forall f \in \mathbf{F})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(f, \varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t \geq 0) \ \Rightarrow\ \Phi(f, x_0, t) \in B_\varepsilon.$$

Определение 2.2. *Нулевое решение* (2.1) ***равномерно устойчиво***, *если*:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall f \in \mathbf{F})(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t \geq 0) \ \Rightarrow\ \Phi(f, x_0, t) \in B_\varepsilon.$$

Заметим что, так как $\overline{M}$ компактно в $(\overline{X}, d)$, то для него, как известно, устойчивость в $(X, \mathbb{R}, \pi)$ всегда равномерна. Кроме того, множество M относительно компактно в $(\overline{X}, \mathbb{R}, \pi)$, а поэтому, если M устойчиво, то и равномерно устойчиво. Отсюда, опираясь непосредственно на введенные выше определения, получаем следующие два утверждения.

Предложение 2.1. *Если множество M динамической системы $(X, \mathbb{R}, \pi)$ устойчиво* (*равномерно устойчиво*), *то нулевое решение системы* (2.1) *устойчиво* (*соответственно*, *равномерно устойчиво*).

Предложение 2.2. *Если множество $\overline{M}$ динамической системы $(\overline{X}, \mathbb{R}, \pi)$ устойчиво*, *то нулевое решение системы* (2.1) *равномерно устойчиво.*

Замечание 2.1. Обращение предложений 2.1 и 2.2 связано со следующим обстоятельством. В определении 2.2 сравнение «невозмущенных» движений (движений на M) с «возмущенными» движениями (движениями в окрестности M) учитывает норму отклонения f в функциональном пространстве $\mathbf{F}$ с метрикой ρ (п. 1.8.2). В определениях 2.1 и 2.2 такое отклонение касается лишь параметра сдвига функции f. Следовательно, если соответствующим образом сузить характер указанных возмущений f в $\mathbf{F}$, то утверждения предложений 2.1 и 2.2 будут носить характер необходимых и достаточных условий.

Следствие 2.1. *Если нулевое решение каждого из предельных уравнений* (2.2) *устойчиво*, *то нулевое решение системы* (2.1) *равномерно устойчиво.*

Перейдем теперь к рассмотрению свойств асимптотической устойчивости. Как известно, нулевое решение (2.1) называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и если

$$(\exists\delta > 0)(\forall\varepsilon > 0)(\exists T = T(\varepsilon) > 0)(\forall f \in \mathbf{F})(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t \geq T + \tau) \Rightarrow \\ \Phi(f, x_0, t) \in B_\varepsilon.$$

Предложение 2.3. *Если подмножество* $\bar{M}$ *динамической системы* $(\bar{X}, \mathbb{R}, \pi)$ *асимптотически устойчиво*, *то нулевое решение системы* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Пусть теперь $D = \mathbb{R}^n$, и рассмотрим свойство устойчивости в целом (глобальная асимптотическая устойчивость). Как для нулевого решения (2.1), так и для множеств M и $\bar{M}$ соответствующих динамических систем, понятие глобальной асимптотической устойчивости складывается из устойчивости исследуемого объекта и области его притяжения, совпадающего со всем фазовым пространством. Поэтому можно показать, что имеет место

Предложение 2.4. *Если подмножество* $\bar{M}$ *динамической системы* $(\bar{X}, \mathbb{R}, \pi)$ *глобально асимптотически устойчиво*, *то нулевое решение* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво и глобально притягивающее.*

Утверждение, обратное к предложениям 2.3 и 2.4, зависит от обстоятельств, указанных в замечании 2.1.

Следствие 2.2. *Если нулевое решение каждого из предельных уравнений* (2.2) *асимптотически устойчиво* (*глобально асимптотически устойчиво*), *то нулевое решение* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво* (*равномерно асимптотически устойчиво и глобально притягивающее*).

Обозначим через $\mathbf{V}$ класс функций $V : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ограниченных на каждом множестве $K \times \mathbb{R}$, где K – компактное подмножество D, и равномерно непрерывных по $x \in K$ на $K \times \mathbb{R}$. Известно [159], что для любой функции $V \in \mathbf{V}$ и всякой последовательности чисел (t_n), $t_n \to +\infty$, можно выделить подпоследовательность $(t_{n(k)})_{k \geq 1}$, для которой $(V(x, t + t_{n(k)}))$ сходится к функции $v(x, t)$ равномерно на каждом компакте из $D \times \mathbb{R}$. Функцию $v(x, t)$ будем в дальнейшем именовать предельной для $V(x, t)$. Класс предельных функций для $\mathbf{V}$ обозначим $\bar{\mathbf{V}}$.

Пусть имеем пару функций $(f, V) \in \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{V}}$ такую, что существует последовательность моментов времени (t_k), $t_k \to +\infty$, для которой

$$f(x, t + t_k) \to g(x, t) \text{ и } V(x, t + t_k) \to v(x, t) \text{ при } k \to +\infty.$$

В этом случае (g, v) будем называть предельной парой для пары (f, V), соответствующей последовательности (t_k).

Лемма 2.5 [64, с. 156]. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *локально компактная динамическая система и M – компактное подмножество X. Тогда если M неустойчиво, то всякая окрестность U множества M обладает тем свойством, что U \ M содержит отрицательную полутраекторию. Более точно, существует компактная окрестность* $\overline{B(M, \varepsilon_0)}$, $\varepsilon_0 > 0$, *для которой при любом* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *существуют последовательности* (x_n), $x_n \in X$, *и* (t_n), $t_n \geq 0$, $t_n \to +\infty$, *такие, что*

$$x_n \to x \in M,\ x_n t_n \to y \in \mathrm{Fr}B(M, \varepsilon) \text{ при } n \to +\infty, \text{ причем } \gamma^-(y) \subset B(M, \varepsilon).$$

Предложение 2.5 [46]. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *локально компактная динамическая система и M – компактное подмножество X. Множество M устойчиво, если существует окрестность U множества M и существует функция* $V \in \bar{\mathbf{V}}$ *такая, что*:

1) $V(x, t) \geq 0$ $\forall (x, t) \in U \times \mathbb{R}$ и $V(x, t) = 0$ $\forall (x, t) \in M \times \mathbb{R}$;

2) $V(xt, t) \leq V(x, 0)$ $\forall t \geq 0$ и $\forall x[0, t] \subset U$;

для любой предельной для (f, V) *пары* (g, v) *не существует относительно компактной полутраектории* $\gamma_g^-(p)$ *уравнения* (2.2), *расположенной в U \ M, и такой, что* $v(\Phi(g, p, t), t) = 0$ $\forall t \leq 0$.

Доказательство. Если предположить, что при выполнении всех требований предложения 2.5 множество M не является устойчивым, то по лемме 2.5 существует число $\varepsilon > 0$, $\overline{B(M, \varepsilon)} \subset U$ и $\overline{B(M, \varepsilon)}$ компактно, существуют последовательности (x_n), $x_n \to x \in M$, и (t_n), $t_n \to +\infty$, $t_n \geq 0$, для которых $x_n t_n \to \bar{x} \in \mathrm{Fr}B(M, \varepsilon)$, причем $\overline{\gamma^-(\bar{x})} \subset \overline{B(M,\varepsilon)} \setminus M$. Отсюда с учетом 1), 2) для любого числа $t < 0$ имеем неравенство

$$0 \le V(x_n(t + t_n), t + t_n) \le V(x_n, 0),$$

справедливое при достаточно большом n ($n \ge N$), т. е. при $t + t_n \ge 0 \quad \forall n \ge N$. Так как $\overline{B(M,\varepsilon)}$ компактно и $V \in \bar{\mathbf{V}}$, то из последовательности (t_n) можно выделить подпоследовательность (пусть это сама последовательность) такую, что

$$V(x_n(t + t_n), t + t_n) \to v(\bar{x}, t).$$

Учитывая при этом предыдущее неравенство и то, что $V(x_n, 0) \to 0$, для решения $\Phi(g,\bar{x},t)$ предельного уравнения получаем тождество $v(\Phi(g,\bar{x},t), t) = 0 \quad \forall t \le 0$, противоречащее требованию 3) предложения 2.5. Таким образом, M устойчиво.

Лемма 2.1. *Пусть V – функция класса $\bar{\mathbf{V}}$ такая, что*

$$V(\Phi(f,x,t), t) \le V(x, 0) \ \ \forall t \ge 0 \ \ \text{и} \ \ \forall x[0, t] \subset U.$$

Тогда, если $\gamma_f^+(x_0)$ (или $\gamma_f^-(x_0)$) – относительно компактная полутраектория, расположенная вместе со своим замыканием в U, то $\forall x^* \in L_f^+(x_0)$ (соответственно $\forall x^* \in L_f^-(x_0)$) существует предельная пара (g,v), для которой

$$v(\Phi(g,x^*,t), t) = v(x^*, 0) \ \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

При этом выполняются соотношения:

$$x^* \in L_f^+(x_0) \ \Rightarrow \ V(\Phi(g,x^*,t), t) \ge v(\Phi(g,x^*,t), t) \ \ \forall t \ge 0,$$

$$x^* \in L_f^-(x_0) \ \Rightarrow \ V(\Phi(g,x^*,t), t) \le v(\Phi(g,x^*,t), t) \ \ \forall t \le 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $\overline{\gamma_f^+(p)}$ компактно и расположено в U. Тогда множество ω-предельных точек $L_f^+(p) \ne \varnothing$. Пусть точка $x^* \in L_f^+(p)$. По определению предельного множества можно указать последовательность моментов времени $(t_n)_{n\ge1}$ такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(f_{t_n}, t_0, t_n) = x^*$.

В силу квазиинвариантности $L_f^+(p)$ (лемма 1.4), существует предельная функция $g \in \bar{\mathbf{F}}$ и, по крайней мере, одно решение $\Phi(g, x^*, \bullet)$:

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ соответствующего предельного уравнения (2.2) с начальным условием $\Phi(g, x^*, 0) = x^*$, такое, что $\Phi(g, x^*, t) \in L_f^+(p)$ для любого $t \in \mathbb{R}^+$. А значит, для каждого $t \in \mathbb{R}^+$ можно указать последовательность моментов времени $(t_n(t))_{n \geq 1}$ такую, что

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(f, p, t + t_n(t)) = \Phi(g, x^*, t).$$

Для $(t_n(t))_{n \geq 1}$ можно выбрать подпоследовательность (не нарушая общности, пусть это сама последовательность $(t_n(t))$), соответствующую предельной паре $(g, v) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$, для которой в силу компактности множества $\overline{\gamma_f^+(p)}$ предельная функция v: $\overline{\gamma_f^+(p)} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ такова, что

$$\lim_{n \to +\infty} V(\Phi(f, p, t + t_n(t)), t + t_n(t)) = v(\Phi(g, x^*, t), t).$$

Покажем, что имеет место равенство (2.3), т. е. $v(\Phi(g, x^*, t), t) = \mathrm{const}$. Действительно, так как $x^* \in L_f^+(p)$, то для любого момента времени $t \in \mathbb{R}^+$ имеем

$$\lim_{n \to +\infty} d(\Phi(f, p, t + t_n(t)), \Phi(g, x^*, t)) = 0.$$

Выберем из последовательности $(t_n(t))$ подпоследовательность $(\tau_n(t))$ такую, что $\tau_n(t) \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $\tau_n(t) \leq t_n(t)$ $\forall n \geq 1$. Тогда на основании монотонного убывания функции V вдоль решений системы имеем:

$$V(\Phi(f, p, t + t_n(t)), t + t_n(t)) \leq V(\Phi(f, p, \tau_n(t)), \tau_n(t)) \qquad (2.5)$$

для всех $n \geq 1$ и $t \in \mathbb{R}^+$. Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$v(\Phi(g, x^*, t), t) \leq v(\Phi(g, x^*, 0), 0).$$

Последнее неравенство и (2.5) доказывают одновременно второе из неравенств (2.4).

Аналогично этому, выбирая подпоследовательность $(\tau_n(t))$ так, чтобы имело место неравенство $t_n(t) \leq \tau_n(t)$ $\forall n \geq 1$, получим противоположное неравенство $v(\Phi(g, x^*, t), t) \geq v(\Phi(g, x^*, 0), 0)$. Объединяя оба доказанных неравенства, получаем искомое тождество (2.3).

Доказательство леммы для случая монотонного возрастания функции V вдоль рассматриваемого движения $(f, p): t \to \Phi(f, p, t)$ проводится аналогично, где вместо неравенства (2.5) используется противоположное неравенство.

Предложение 2.6. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *локально компактная динамическая система, M – компактное подмножество, X и N – окрестность M. Предположим, что существует функция V из класса* $\bar{\mathbf{V}}$ *такая, что*:

1) $V(x, t) \geq 0 \;\; \forall (x, t) \in N \times \mathbb{R}$ *и* $V(x, t) = 0 \;\; \forall (x, t) \in M \times \mathbb{R}$;

2) $V(xt, t) \leq V(x, 0) \;\; \forall t \geq 0$ *и* $\forall x[0, t] \subset N$;

3) *для любой предельной пары* $(g, v) \in \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{V}}$ *не существует относительно компактной полутраектории* $\gamma_g^-(p)$ *системы* (2.2), *расположенной в* $N \setminus M$ *и такой, что* $v(\Phi(g, p, t), t) = v(x, 0) \;\forall t \leq 0$.

Тогда M асимптотически устойчиво.

Доказательство. Нетрудно видеть, что условие 3) предложения 2.5 влечет за собой выполнение требования 3) предложения 2.6 и, следовательно, множество M устойчиво. Поэтому для произвольного числа $\varepsilon > 0$ ($\overline{B(M, \varepsilon)}$ компактно и содержится в N) можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $B(M, \delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M, \varepsilon)$. Покажем, что $B(M, \delta)$ является подмножеством области притяжения $A(M)$. Действительно, если это не так, то $\exists x \in B(M, \delta)$, что $L_f^+(x) \setminus M \neq \varnothing$, причем $L_f^+(x) \subset \overline{B(M, \varepsilon)}$, а значит, ω-предельное множество $L_f^+(x)$ компактно. Пусть $\bar{x} \in L_f^+(x) \setminus M$. Тогда $\gamma_g^-(\bar{x}) \subset L_f^+(x) \setminus M$ в силу инвариантности $L_f^+(x)$ и положительной инвариантности M. Так как $L_f^+(x)$ компактно, то $L_f^-(\bar{x})$ также компактно, причем в силу устойчивости M имеем $L_f^-(\bar{x}) \cap M = \varnothing$. По лемме 2.1 для соответствующей предельной функции $v(x,t)$ и α-предельной точки $p \in L_f^-(\bar{x})$ будем иметь $v(p, t) = v(p, 0) \;\; \forall t \leq 0$. Однако это невозможно на основании требования 3) и того факта, что по построению $\gamma_g^-(\bar{x}) \subset N \setminus M$. Таким образом, $B(M, \delta) \subset A(M)$, т. е. M асимптотически устойчиво.

Аналогично можно обосновать и следующей результат.

Предложение 2.7. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *локально компактная динамическая система, M – компактное подмножество, X и N – окрестность M. Предположим, что существует функция* V из класса $\bar{\mathbf{V}}$ *такая, что*:

1) $V(x, t) \geq 0 \;\; \forall (x, t) \in X \times \mathbb{R}$ *и* $V(x, t) = 0 \;\; \forall (x, t) \in M \times \mathbb{R}$;

2) $V(xt, t) \leq V(x, 0) \;\; \forall t \geq 0$ *и* $\forall x \in X$;

4) *для любой предельной пары* $(g, v) \in \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{V}}$ *не существует относительно компактной полутраектории* $\gamma_g^-(p)$, *расположенной в* $N \setminus M$ *и такой, что* $v(\Phi(g, p, t), t) = v(x, 0) \;\forall t \leq 0$.

3) *множество* $H_\alpha = \{x \in X\colon V(x, t) \le \alpha \ \ \forall t \ge 0\}$ *положительно устойчиво по Лагранжу* $\forall\alpha > 0$.

Тогда M глобально асимптотически устойчиво.

Определение 2.2. *Будем говорить, что функция* $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *является бесконечно большой, если* $\forall r \in \mathbb{R}^+$ *существует компактное множество K из X такое, что* $V(x, t) > r \ \ \forall x \notin K$ *и* $\forall t \ge 0$.

Лемма 2.2. *Пусть существует непрерывная бесконечно большая функция* $V\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая условию* 2) *предложения* 2.7. *Тогда всякое движение динамической системы положительно устойчиво по Лагранжу.*

Замечание 2.2. а) Множество $v_0 = \{x \in \bar{U} : v(x, t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ содержит M. Если v_0 положительно инвариантно и замкнуто, то согласно теореме 3.5 [64, с. 129] требование 3) в предложении 2.5 равносильно асимптотической устойчивости M относительно v_0.

б) Более того, если v непрерывно дифференцируема, то соотношение $v(\Phi(g, x, t), t) = v(x, 0)$ в предложениях 2.7 и 2.8 можно заменить равенством $\dot{v}(\Phi(g, x, t), t) = 0$, где $\dot{v}$ – производная по времени, вычисленная вдоль движений предельной динамической системы.

в) Требование 4) предложения 2.7 является и необходимым условием глобальной асимптотической устойчивости множества M при выполнении требования 2).

2.1.2. ТЕОРЕМЫ ВТОРОГО МЕТОДА

Из результатов предыдущего раздела, а именно, предложений 2.5, 2.6 и 2.7, получаем следующие утверждения.

Теорема 2.1.1 [46]. *Нулевое решение системы* (2.1) *равномерно устойчиво, если существует шар* B_α, $\alpha > 0$ *и непрерывно дифференцируемая функция V из класса* $\mathbf{V}$ *такая, что*:

1) $V(x, t) \ge 0 \ \ \forall (x, t) \in B_\alpha \times \mathbb{R}$ *и* $V(0, t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$;

2) $\dot{V}(x, t) \le 0 \ \ \forall (x, t) \in B_\alpha \times \mathbb{R}$;

3) *для любой предельной для* (f, V) *пары* $(g, v) \in \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{V}}$ *в области* B_α *не существует решения* $\Phi(y_0, \tau, t)$, $y_0 \ne 0$, *системы* (2.2) *такого, что*

$$v(\Phi(y_0, \tau, t), t) = 0 \ \ \forall t \le \tau.$$

Теорема 2.1.2 [46]. *Нулевое решение системы* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво, если существует шар* B_Δ, $\Delta > 0$, *и непрерывно дифференцируемая функция V из класса* $\mathbf{V}$ *такие, что*:

1) $V(x, t) \geq 0 \;\; \forall(x, t) \in B_\Delta \times \mathbb{R}$ *и* $V(0, t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq 0 \;\; \forall(x, t) \in B_\Delta \times \mathbb{R}$;

3) *для любой предельной для* (f,V) *пары* $(g,v) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$ *в шаре* B_Δ *не существует решения* $\Phi(y_0,\tau,t)$, $y_0 \neq 0$, *системы* (2.2) *такого, что*

$$v(\Phi(y_0,\tau,t)\;,t) = v(y_0, \tau) \;\; \forall t \leq \tau.$$

Теорема 2.1.3 [46]. *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$. *Нулевое решение* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво и глобально притягивающее, если для системы* (2.1) *существует непрерывно дифференцируемая функция V из класса* $\mathbf{V}$ *такая, что*:

1) $V(x, t) \geq 0 \;\; \forall(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и* $V(0, t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq 0 \;\; \forall(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$;

3) *для любой предельной для* (f,V) *пары* $(g,v) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$ *не существует решения* $\Phi(y_0,\tau,t)$, $y_0 \neq 0$, *системы* (2.2) *такого, что*

$$v(\Phi(y_0,\tau,t),\; t) = v(y_0, \tau) \; \forall t \leq \tau.$$

4) *для любого числа* $\alpha > 0$ *всякое решение* $\Phi(x_0,\tau,t)$ *уравнения* (2.1) *из множества* $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : V(x, t) \leq \alpha \;\; \forall t \geq 0\}$ *ограничено при* $t \geq \tau$.

Теорема 2.1.4. *Пусть для системы* (2.1) *существуют окрестность U начала координат, непрерывно дифференцируемая функция* $V \in \mathbf{V}$ *и функция* $a \in \mathbf{K}$ *такие, что выполняются следующие условия*:

1) $|V(x,t)| \leq a(\| x \|) \;\;\; \forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$;

2) $\forall \alpha > 0 \;\; \exists\, p \in B(0, \alpha)$, $p \neq 0$ *и* $\exists t_0 \in \mathbb{R}^+$ *такие, что* $V(p,t_0) > 0$;

3) $\dot{V}(x,t) \geq 0 \;\; \forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$;

4) *если существует предельная пара* $(g,v) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$ *и решение* $y(p, t_0, t)$, $p \neq 0$, *системы* (2.2), *для которых* $v(y(p,t_0,t),t) = v(p,t_0) \;\;\; \forall t \geq t_0$, *то при* $t \to +\infty$ *имеет место одно из следующих двух условий*

$$y(p,t_0,t) \to 0 \;\; \text{или} \;\; y(p,t_0,t) \to \mathrm{Fr}U.$$

Тогда точка покоя $x = 0$ *системы* (2.1) *неустойчива*.

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\overline{B_\varepsilon} \subset U$. Согласно 2) для произвольного числа $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) существует точка $p \in B_\delta \setminus \{0\}$ и $t_0 \geq 0$ такие, что $V(p,t_0) > 0$. Тогда по условию 1) существует число $\mu > 0$ такое, что $|V(y,t)| < V(p,t_0)$, если $\| y \| < \mu$. Согласно требованию 3) для решения $x(p,t_0,t)$ можем записать неравенство $V(x(p,t_0,t),t) \geq V(p,t_0)$ $\forall t \geq t_0$. Поэтому справедлива оценка

$$\| x(p,t_0,t) \| \geq \mu \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.6}$$

Покажем, что решение $x(p,t_0,t)$ выходит из множества B_ε, когда t возрастает, чем и докажем утверждение теоремы. Действительно, предположим обратное. Пусть решение $x(p,t_0,t)$ остается в шаре B_ε для любого $t \geq t_0$. В таком случае, имеем

$$\mu \leq \| x(p,t_0,t) \| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.7}$$

Следовательно, множество ω-предельных точек $L^+(p,t_0)$ решения $x(p,t_0,t)$ не пусто и не содержит начало координат.

Для пары $(y^*,\ t_0)$, $y^* \in L^+(p,t_0)$, $t_0 \geq 0$, по лемме 1.3 существует предельная пара $(g,v) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$, соответствующая последовательности (t_n) для которой решение $y(y^*,t_0,t)$, предельного уравнения (2.2) удовлетворяет равенству $v(y(y^*,t_0,t),t) = v(y^*,t_0)$ $\forall t \geq t_0$.

Пусть по условию 4) теоремы 2.1.4 при $t \to +\infty$ имеем $y(y^*,t_0,t) \to 0$. Тогда так как в силу теоремы 2.1.4 $y(y^*,t_0,t) \in L^+(p,t_0)$ $\forall t \geq t_0$, то с учетом компактности $L^+(p,t_0)$ предельная точка решения $y(y^*,t_0,t)$ содержится во множестве $L^+(p,t_0)$. Таким образом, $0 \in L^+(p,t_0)$. Однако это противоречит (10).

Если же по условию 4) теоремы 2.1.4 $y(y^*,t_0,t) \to \mathrm{Fr}U$ при возрастании t, то с учетом квазиинвариантности $L^+(p,t_0)$ это множество будет содержать точки вне $\overline{B_\varepsilon}$. В этом случае также приходим к противоречию с предположением (2.7).

Таким образом, справедливо обратное, т. е. начало координат неустойчиво.

Замечание 2.3. Если множество $V_0 = \{x \in \overline{U} : v(x,\ t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$ положительно инвариантно и замкнуто, то требование 3) в теореме 5.5 равносильно асимптотической устойчивости M относительно V_0. Более того, если v непрерывно дифференцируема, то соотношение $v(\Phi(y_0,\tau,t),\ t) = v(x,\ 0)$ в теоремах 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.3 можно заменить на равенство $\dot{v}(\Phi(y_0,\tau,t),t) = 0$, где $\dot{v}(x,t)$ – производная по времени, вычисленная вдоль движений динамической системы. Требование 4) в теореме 2.1.3 можно заменить более жестким условием того, что всякое решение $x(x_0, \tau, t)$ системы (2.6) ограничено при $t \geq \tau$.

В заключении отметим, что требование A), вообще говоря, не является обременительным. Во многих практических задачах оно заведомо выполняется. Для систем, правая часть которых не ограничена, можно предложить следующий прием. Ищется функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(t)$ монотонно возрастает и $\varphi(t) \to \pm\infty$ при $t \to \pm\infty$. Тогда, полагая $t = \varphi(\tau)$, от системы (2.6) переходим к системе

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\tau))} f(x, \varphi^{-1}(\tau))$$

Например, если, то при $\varphi(t) = t^{2p+1}$ приходим к системе, предельное уравнение для которой уже существует.

2.1.3. ПРИМЕРЫ

Пример 2.1. Рассмотрим частный случай системы (2.1):

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, t), \\ \dot{y} = yQ(x, y, t), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Установим *условия устойчивости* нулевого решения системы (2.8). Для этого исследуем несколько возможных случаев.

A) Предположим сначала, что в любой окрестности начала координат функция Q принимает положительные значения при $t \in \mathbb{R}$. Тогда для некоторого числа $a > 0$ функция $\beta(t) = \sup\limits_{(x,y)\in B_a} Q(x, y, t)$ будет неотрицательной. Положим

$$V(x, y, t) = y^2 \exp\left(-2\int_0^t \beta(s)\,ds\right).$$

Ясно, что $V(x, y, t) \geq 0$ $\forall (x, y, t) \in B_\alpha \times \mathbb{R}$, причем производная по времени функции $V(x, y, t)$ выражается равенством

$$\dot{V}(x, y, t) = -2y^2(\beta(t) - Q(x, y, t))\exp\left(-2\int_0^t \beta(s)\,ds\right).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие ограниченности

$$\int_0^t \beta(s)ds \le M < +\infty, \forall t \ge 0. \tag{2.9}$$

Тогда всякая предельная для V функция будет иметь вид $v(x, y, t) = cy^2$, где c – положительна постоянная.

Пусть предельное уравнение для (2.2) задается равенствами

$$\begin{cases} \dot{x} = P^*(x, y, t), \\ \dot{y} = yQ^*(x, y, t). \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда на основании теоремы 2.1.1 и с учетом замечания 2.4 нулевое решение (2.6) будет равномерно устойчивым, если выполнено неравенство (2.9) и нулевое решение каждого предельного уравнения

$$\dot{x} = P^*(x, 0, t) \tag{2.11}$$

будет равномерно асимптотически устойчивым.

Далее, каждая предельная функция v непрерывно дифференцируема, ее производная по времени, вычисленная в силу предельной системы (2.8), имеет вид

$$\dot{v}(x, y, t) = y^2 Q^*(x, y, t).$$

Поэтому согласно замечанию 2.4 нулевое решение (2.8) будет равномерно асимптотически устойчивым, если выполнено условие (2.9) и нулевое решение каждого предельного уравнения, удовлетворяющего равенствам

$$\begin{cases} \dot{x} = P^*(x, y, t), \\ yQ^*(x, y, t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.12}$$

будет равномерно асимптотически устойчивым.

B) Если в некоторой окрестности U начала координат $\mathbb{R}^2$ функция $Q(x, y, t) \le 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, причем для любого $a > 0$ такого, что $B_a \subset U$, определенная выше функция $\beta(t) \equiv 0$, то, полагая $V(x, y, t) = y^2$, приходим к тем же условиям равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения (2.8), что и в *A*). При этом условие (2.9) выполняется автоматически.

C) Наконец, пусть имеет место случай $Q(x, y, t) \le \alpha$, где число $\alpha < 0$. Тогда, используя функцию $V(x, y, t) = y^2$, получаем условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения (2.8). Эти условия состоят в требовании равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения каждого предельного уравнения (2.12).

Укажем теперь *условия неустойчивости* начала координат системы (2.8). Для некоторого числа $a > 0$ введем в рассмотрение функцию

$$\alpha(\mathrm{t}) = \inf_{(x,y)\in B_a} Q(x,y,t).$$

В качестве функции Ляпунова положим

$$V_1(x, y, t) = y^2 \exp\left(-2\int_0^t \alpha(s)ds\right),$$

для которой производная по времени в силу системы (2.8) равна

$$\dot{V}_1(x,y,t) = 2y^2(Q(x,y,t) - \alpha(t))\exp\left(-2\int_0^t \alpha(s)ds\right).$$

Потребуем выполнения следующих условий

$$\int_0^t \alpha(s)ds \le M < +\infty, \forall t \ge 0; \tag{2.13}$$

$\exists a > 0$ такое, что если $\dot{V}_1(x,y,t) = 0$ для $|y| < a$ и $\forall t \ge 0$, то $y = 0$. (2.14)

В этом случае для функции V_1 выполняются условия 1)–3) теоремы 2.1.4, причем множество, где $\dot{V}_1(x,y,t) = 0$, представляет собой ось $y = 0$. Очевидно, что множество, где производная соответствующей предельной функции Ляпунова $\dot{v}_1(x,y,t) = 0$, также совпадает с осью $y = 0$. На этом множестве предельная система переходит в скалярное уравнение (2.11). Если к тому же такое уравнение имеет лишь решения, которые с достаточно малыми по норме начальными данными либо стремятся к нулю, либо покидают всякую окрестность нуля (например, если $|P^*(x,0,t)| > 0$ для $0 < |x| < a, \forall t \ge 0$), то будут выполнены все требования теоремы 2.1.4. Следовательно, при условиях (2.13), (2.14) мы получаем неустойчивость нулевого решения исследуемой системы уравнений.

Пример 2.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}-\left(hf(t)(\dot{x}-a(t)x)^{2p}+\frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\right)\dot{x}+f(t)x^m=0,\ \forall t\geq 0, \tag{2.15}$$

где $m\in\mathbb{N}$, $h\in\mathbb{R}$, а $f(t)$, ее производная $\dot{f}(t)$ и $a(t)$ – непрерывные ограниченные функции, причем $f(t)$ удовлетворяет условию

$$f(t)\geq f_0>0\ \ \forall t\geq 0. \tag{2.16}$$

Для исследования задачи об устойчивости равновесия $x=0, \dot{x}=0$ произведем некоторые предварительные построения. Возьмем функцию Ляпунова

$$V(x,\dot{x},t)=\frac{\dot{x}^2}{2f(t)}+\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

для которой производная по времени в силу уравнения (2.13) равна

$$\dot{V}(x,\dot{x},t)=h\dot{x}^2(\dot{x}-a(t)x)^{2p}.$$

Пусть $a^*(t)$, $f^*(t)$ и $\dot{f}^*(t)$ – предельные функции соответственно для $a(t)$, $f(t)$ и $\dot{f}(t)$. Тогда предельное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{y}-\left(hf^*(t)(\dot{y}-a^*(t)y)^{2p}+\frac{\dot{f}^*(t)}{2f^*(t)}\right)\dot{y}+f^*(t)y^m=0\ \ \forall t\geq 0. \tag{2.17}$$

Предельная для V функция v с соответствующей производной по времени в силу предельного уравнения (2.17) соответственно равны

$$v(y,\dot{y},t)=\frac{\dot{y}^2}{2f^*(t)}+\frac{y^{m+1}}{m+1},\quad \dot{v}(y,\dot{y},t)=h\dot{y}^2(\dot{y}-a^*(t)y)^{2p}.$$

Рассмотрим множество Y^*, где $\dot{v}(y,\dot{y},t)=0\ \forall t\geq 0$. Оно определяется равенствами

$$h\dot{y}=0,\ \text{или}\ \ \dot{y}-a^*(t)y=0\ \forall t\geq 0.$$

В первом случае при $h \neq 0$ имеем $\dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow y = 0$, и поэтому множество Y^* не содержит ненулевых решений предельного уравнения.

Во втором случае на множестве Y^* предельная система превращается в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = a^*(t)y, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Теперь приступим к анализу устойчивости равновесия $x = 0, \dot{x} = 0$.

a) *Условия устойчивости*. Пусть выполнены следующие предположения

$$m = 2n - 1, \ n \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ h < 0. \tag{2.19}$$

Тогда очевидно, что для функции *V* справедливы условия 1) и 2) теоремы 2.1.1. С учетом требования (2.16) на множестве Y_0^*, где $v(y, \dot{y}, t) = 0,$ имеем $y = \dot{y} = 0$ и, следовательно, выполнено и условие 3) этой теоремы. В результате приходим к следующему: равновесие $x = 0, \dot{x} = 0$ устойчиво, если выполняются условия (2.16) и (2.19).

b) *Условия асимптотической устойчивости*. Пусть по-прежнему выполняются условия (2.19). Тогда выполнены условия 1) и 2) теоремы 2.1.2. Кроме того, общее решение уравнения (2.18) определяется формулой

$$y(y_0, t_0, t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a^*(s)ds}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Поэтому на основании замечания 2.5 для выполнения условия 3) этой же теоремы достаточно потребовать выполнения следующего соотношения

$$\int_{t_0}^{-\infty} a^*(s)ds \neq 0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}^+. \tag{2.21}$$

Действительно, в этом случае, принимая во внимание (2.18), всегда существует достаточно малая окрестность положения равновесия, в которой будут отсутствовать отрицательные полутраектории предельного уравнения (2.18). Это обеспечивает выполнение условия 3) теоремы 2.4.2. Таким образом, условия (2.16), (2.19) и (2.21) обеспечивают равномерную асимптотическую устойчивость решения $x = 0, \dot{x} = 0$.

c) *Условия глобальной асимптотической устойчивости*. Предположим, что выполнены условия (2.16), (2.19) и (2.21), обеспечивающие равномерную асимптотическую устойчивость решения $x=0, \dot{x}=0$. Тогда функция $V(x,\dot{x},t)$ является бесконечно большой по переменным вектора $(x,\dot{x})$. Поэтому, с учетом неположительности ее производной по времени в силу уравнения (2.15), всякое решение этого уравнения будет ограниченным при $t \geq 0$. В этом случае будут выполнены все требования теоремы 2.1.3, а значит решение $x=0, \dot{x}=0$ глобально равномерно асимптотически устойчиво.

d) Сформулируем *условия неустойчивости* согласно теореме 2.4.4.

Условия 1)–3) теоремы 2.1.4 для функции V выполняются в каждом из следующих случаев:

i) m – четное, $h \neq 0,\ \ 0 < f_0 \leq |\,f(t)\,|\ \ \forall t \geq 0;$

ii) m – нечетное, $h > 0,\ \ 0 < f_0 \leq |\,f(t)\,|\ \ \forall t \geq 0;$

iii) m – нечетное, $h < 0,\ \ 0 < f_0 \leq |-f(t)\,|\ \ \forall t \geq 0.$

Так как предельная производная $\dot{v}(y,\dot{y},t)$ существует и непрерывна, то согласно замечанию 2.5 рассмотрим множество Y^*, где она равна нулю. С учетом предыдущих рассуждений заключаем, что если на Y^* существуют ненулевые решения предельного уравнения (2.16), то они необходимо удовлетворяют скалярному дифференциальному уравнению (2.19). Поэтому, опираясь на формулу общего решения (2.20), потребуем выполнения условия

$$\left|\int_{t_0}^{t} a^*(s)ds\right| \to \infty \ \text{ при } \ t \to +\infty. \qquad (2.22)$$

В этом случае будет выполнено и условие 4) теоремы 2.1.4. Таким образом, решение $x=0, \dot{x}=0$ дифференциального уравнения (2.15) неустойчиво, если выполнено условие (2.22) и одно из требований *i*), *ii*) или *iii*).

Пример 2.3. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \dfrac{t}{1+t}x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{(2+t)e^{\frac{1}{1+t}}}{(1+t)^2}x_1 - \dfrac{1+te^{\frac{1}{1+t}}}{(1+t)^2}x_2 - e^{\frac{1}{1+t}}\left(x_2 - f(t)\dfrac{t}{(1+t)}x_1\right)^2, \ t \geq 0, \end{cases} \qquad (2.23)$$

где $f(t)$ – непрерывная ограниченная функция.

Возьмем функцию Ляпунова

$$V(x_1, x_2, t) = \frac{x_1}{1+t} + x_2 e^{\frac{1}{1+t}}.$$

Ее производная по времени в силу системы (2.23) равна

$$\dot{V}(x_1, x_2, t) = \left(x_2 - f(t)\frac{t}{(1+t)} x_1 \right)^2 \geq 0.$$

Для нее выполняются условия 1)–3) теоремы 2.1.4.

Пусть $g(t)$ означает предельную функцию для $f(t)$. Тогда легко видеть, что множество предельных систем записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = (y_2 - g(t)y_1)^2. \end{cases} \tag{2.24}$$

Соответствующая предельная функция Ляпунова определяется формулой

$$v(y_1, y_2, t) = y_2.$$

Она дифференцируема, и ее производная в силу системы (2.24) равна

$$v(y_1, y_2, t) = (y_2 - g(t)y_1)^2.$$

На множестве Y_0^* нулей производной $\dot{v}(y_1, y_2, t)$ вдоль решения $(y_1(t), y_2(t))$ имеем тождество

$$y_2(t) = g(t)y_1(t), \ t \geq 0.$$

При этом предельная система вырождается в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_1 = (g(t) - 1)y_1, \ t \geq 0. \tag{2.25}$$

Потребуем существование начального момента времени $t_0 \geq 0$ такого, что если $t \to +\infty$, то выполняется одно из следующих двух условий:

$$\int_{t_0}^{t} (g(s) - 1)ds \to \pm\infty. \tag{2.26}$$

Тогда каждое решение $(y_1(t), y_2(t))$ предельного уравнения (2.25) либо стремится к нулю, либо не ограничено в зависимости от знака предела интеграла (2.26). Это обеспечивает выполнение условия 4) теоремы 2.1.4. Таким образом, начало координат исследуемой системы неустойчиво.

Заметим, что матрица линейного приближения для предельной системы (2.24) отвечает критическому случаю одного нулевого корня.

2.2. ТЕОРЕМЫ А. А. КОСОВА

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x,t), \;\; f(0,t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.27}$$

где $f: D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, D – окрестность начала координат $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x. Для любой пары $(x_0, t_0) \in D \times \mathbb{R}$ через $x = x(x_0, t_0, t)$ ($x(x_0, t_0, \cdot): \mathbb{R} \to D$) обозначим решение уравнения (2.27), удовлетворяющее начальному условию $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$.

Пусть функции $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и $W: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ непрерывны и удовлетворяют локальному условию Липшица в шаре B_r, $r > 0$.

Для тройки

$$(\, f(x,t),\, V(x,t),\; W(x,t)\,),$$

следуя [5, 97], будем называть предельной тройкой (g, v_g, w_g), соответствующей последовательности $t_k \to +\infty$, такие три функции

$$g \in \bar{\mathbf{F}}, \quad v_g \in \bar{\mathbf{V}}, \quad w_g \in \bar{\mathbf{W}},$$

которые являются предельными при $k \to +\infty$, для функций

$$(\, f(x, t+t_k),\, V(x, t+t_k),\; W(x, t+t_k)\,)$$

соответственно.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{y} = g(y,t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.28}$$

которое определяет для (2.27) соответствующее предельное уравнение при каждом $g \in \overline{\mathbf{F}}$.

Определение 2.3 [73]. *Будем называть решение* $x = 0$ *асимптотически устойчивым относительно множества предельных нулей функции* $V(x, t)$ *и семейства предельных систем* (2.28), *если выполняются условия*:

1) *для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $t_0 \geq 0$ *можно указать* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое*, *что для любой предельной пары* $(g, v_g) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$ *и любого* $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *такого*, *что* $v_g(y_0, t_0) = 0$ и $\| y_0 \| < \delta$, *для решения* $y(y_0, t_0, t)$ *уравнения* (2.28) *следует* $\| y(y_0, t_0, t) \| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$;

2) *можно указать* $\Delta > 0$ *такое*, *что для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $t_0 \geq 0$ *найдется* $T = T(\varepsilon_1, \Delta, t_0) > 0$ *такое*, *что для любой предельной пары* $(g, v_g) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$ *и любого* $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *такого*, *что* $v_g(y_0, t_0) = 0$ *и* $\| x_0 \| < \Delta$, *для решения* $y(y_0, t_0, t)$ *уравнения* (2.28) *будет* $\| y(y_0, t_0, t) \| < \varepsilon_1$ *при всех* $t \geq t_0 + T(\varepsilon_1, \Delta, t_0)$.

Лемма 2.3 [73]. *Пусть знакоположительная функция* $V(x,t)$ *удовлетворяет локальному условию Липшица и такова*, *что*

$$\dot{V}(x,t) = \lim_{r \to +0} \sup \frac{V(x + rf(x,t), t + r) - V(x,t)}{r} \leq 0$$

при всех $t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда множество предельных нулей функции $V(x,t)$ *положительно инвариантно относительно семейства предельных систем*, *т. е. для каждой предельной пары* $(g, v_g) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}}$ *имеет место условие*:

$$v_g(y_0, t_0) = 0 \ \Rightarrow \ v(y(y_0, t_0, t), t) = 0 \quad \forall \, t \geq t_0.$$

Доказательство следует из неравенств $v_g(y,t) \geq 0 \ \ \dot{v}_g(y,t) \leq 0,$ вытекающих из соответствующих неравенств для $V(y,t)$ и $\dot{V}(y,t)$.

Теорема 2.2.1 [73]. *Пусть для системы* (2.27) *существуют такие знакоположительные функции* $V(x,t)$ *и* $W(x,t)$, *удовлетворяющие ло-*

кальному условию Липшица, что при всех $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+$ *выполняются условия*:

1) $V(x,t)\geq 0$ *и* $V(0, t) = 0$;

2) $\dot{V}(x,t)\leq -W(x,t)\leq 0$;

3) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества предельных нулей функции* $V(x,t)$ *и семейства предельных систем* (2.28).

Тогда нулевое решение равномерно устойчиво.

Доказательство. Предположим, что нулевое решение (2.27) не является равномерно устойчивым. Тогда можно указать $\varepsilon>0$ и три последовательности (x_{0k}), $x_{0k}\to 0$, $(t_{0k})\in\mathbb{R}^+$ и (t_k), $t_{0k}\to+\infty$ при $k\to+\infty$ такие, что

$$\| x(x_{0k},t_{0k},t_k)\| = \varepsilon. \tag{2.29}$$

Из непрерывности траекторий системы (2.27) из (2.28) следует, что для любого $0<\tilde{\varepsilon}<\varepsilon$ существует последовательность (τ_k), $\tau_k\to+\infty$, такая, что

$$\| x(x_{0k},t_{0k},\tau_k)\| = \tilde{\varepsilon},$$

$$\tilde{\varepsilon}<\| x(x_{0k},t_{0k},t)\|<\varepsilon \quad \text{при} \quad \tau_k<t<t_k. \tag{2.30}$$

Ввиду ограниченности последовательности $x_k = x(x_{0k},t_{0k},\tau_k)$, не уменьшая общности, можно считать, что $x_k\to\tilde{x}$, $f(x,t+\tau_k)\to g(x,t)$, $V(x,t+\tau_k)\to v_g(x,t)$ при $k\to+\infty$ (этого всегда можно добиться выбором соответствующих сходящихся подпоследовательностей). При этом из неравенств $0\leq V(x_k,\tau_k)\leq V(x_{k0},t_{0k})$ и наличия ввиду условия Липшица бесконечно малого высшего предела у функции $V(x,\ t)$ следует, что $v_g(\tilde{x},0)=0$.

Из свойств движений исходной и предельной систем следует [159]

$$x(x_k,\tau_k,t+\tau_k)\to y(\tilde{x},0,t) \quad \text{при} \quad k\to+\infty \tag{2.31}$$

при всех $t\in[0,\tau]$, $\tau>0$, при которых движения остаются в некотором ограниченном множестве, а значит, и при всех t из (2.30).

Покажем, что при достаточно малом $\tilde{\varepsilon}>0$ будет $t_k-\tau_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$. Пусть это не так, тогда для каждого $\tilde{\varepsilon}>0$ существует

$\tau = \tau(\tilde{\varepsilon}) > 0$ такое, что для некоторой подпоследовательности (τ_{k_i}) будет $t_{k_i} - \tau_{k_i} \le \tau(\tilde{\varepsilon}) < +\infty$. Если теперь по $\varepsilon = 0,5\tilde{\varepsilon}$ выбрать $\delta = \delta(\varepsilon, 0) > 0$ в соответствии с п. 1 определения, то для всех $0 < \tilde{\varepsilon} < \delta$ из условия 2 получаем для всех $t \ge 0$

$$\| y(\tilde{x}, 0, t) \| \le 0,5\tilde{\varepsilon}. \tag{2.32}$$

Полагая в (2.31) $t = t_{k_i} - \tau_{k_i} < \tau(\tilde{\varepsilon})$ и переходя к пределу при $i \to +\infty$ (или выбирая в случае необходимости сходящуюся подпоследовательность), получим с учетом (2.30) $\| y(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) \| = \tilde{\varepsilon}$ для некоторого $\tilde{t} \in [0, \tau(\tilde{\varepsilon})]$, что противоречит (2.32). Полученное противоречие и показывает, что $t_k - \tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ для всех $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0 = \delta(0.5\tilde{\varepsilon})$.

Возьмем $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0$ и по числам $\Delta = \varepsilon_0$ и $\varepsilon_1 = 0.5\tilde{\varepsilon}$ в соответствии с определением 2.5 выберем $T(\varepsilon_1, \Delta, 0) > 0$ так, чтобы

$$\| y(\tilde{x}, 0, t) \| < \varepsilon_1 = 0,5\tilde{\varepsilon}. \text{ при всех } t \ge t(\varepsilon_1). \tag{2.33}$$

Выберем номер k_0 столь большим, чтобы при всех $k > k_0$ было $t_k - \tau_k > 2T(\varepsilon_1)$. Тогда из (2.30) и (2.31) получаем неравенство $\| y(\tilde{x}, 0, t) \| \ge \tilde{\varepsilon}$ при всех $t \in [0, 2T(\varepsilon_1)]$, которое при $t = T(\varepsilon_1)$ будет противоречить (2.15). Полученное противоречие и показывает, что при условиях 1 и 2 нулевое решение системы (2.27) будет устойчиво равномерно по t_0.

Теорема 2.2.2 [73]. *Пусть для системы* (2.27) *существуют такие знакоположительные функции* $V(x,t)$ *и* $W(x,t)$, *удовлетворяющие локальному условию Липшица, что при всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ *выполняются условия*:

1) $V(x,t) \ge 0$ *и* $V(0, t) = 0$;

2) $\dot{V}(x,t) \le -W(x,t) \le 0$;

3) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества предельных нулей функции* $V(x,t)$ *и семейства предельных систем* (2.28);

4) *для любой предельной тройки* (g, v_g, w_g) *и любого числа* $c > 0$ *множество*

$$N(c,g) = \{(x,t) : w(x,t) = 0, v(x,t) = c\}$$

не содержит положительных полутраекторий соответствующей предельной системы (2.28).

Тогда нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Так как выполнены все условия теоремы 2.1.1, то нулевое решение равномерно устойчиво.

Покажем, что все решения (2.27) стремятся к $x = 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по (x_0, t_0). Пусть это не так. Тогда можно указать $\Delta > 0, \varepsilon_1 > 0$ и три последовательности

$$(t_{0k}) \in \mathbb{R}^+, (x_{0k}) \subset B(0,\Delta) \quad \text{и} \quad (t_k) \subset \mathbb{R}^+, t_k - t_{0k} \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

такие, что $\| x(x_{0k}, t_{0k}, t_k) \| \geq \varepsilon_1.$ Не ограничивая общности, можно считать $t_{0k} \to +\infty$ и $x_{0k} \to \bar{x}^0$ при $k \to +\infty$, поскольку иначе в качестве t_{0k} можно было бы взять $t_{0k} + 0.5(t_k - t_{0k})$, а в качестве x_{0k} взять $x(x_{0k}, t_{0k}, t_{0k} + 0.5(t_k - t_{0k}))$ и с учетом условия 4 перейти в случае необходимости к сходящейся подпоследовательности.

Из установленной выше равномерной устойчивости по t_0 нулевого решения (2.27) следует, что при всех $t \geq 0$ будет выполняться неравенство

$$\| x(x_{0k}, t_{0k}, t + t_{0k}) \| \geq \delta(\varepsilon_1) > 0, \tag{2.34}$$

где $\delta(\varepsilon_1)$ взято в соответствии с определением равномерной по t_0 устойчивости.

Пусть последовательности $t_{0k} \to +\infty$ соответствует предельная тройка $(g, v_g, w_g).$ Тогда из (2.34) получаем

$$\| y(\bar{x}^0, 0, t) \| \geq \delta(\varepsilon_1) \quad \text{при всех} \quad t \geq 0. \tag{2.35}$$

В силу ограниченности $y(\bar{x}^0, 0, t)$, вытекающей из условия 4 [131, с. 23], его множество ω-предельных точек $L^+(g, \bar{x}^0, 0)$ не пусто. Пусть $\bar{x} \in L^+(g, \bar{x}^0, 0)$, последовательность $t_m \to +\infty$ при $m \to +\infty$ такова, что $y(\bar{x}^0, 0, t_m) \to \bar{x}$ при $m \to +\infty$ и (t_m) соответствует предельная тройка

$$(h, v_h, w_h) \in \overline{\mathbf{F}} \times \overline{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{W}} \subset \Phi(f) \times \Phi(V) \times \Phi(W).$$

Положительная полутраектория $y_h(\bar{x}, 0, t), t \geq 0,$ будет целиком лежать в $N(c, h)$ при некотором $c \geq 0$ и одновременно в $L^+(g, \bar{x}^0, 0)$. Из условия 3 следует, что $c = 0$, поэтому на основании условия 2 будет $y_h(\bar{x},0,t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Но тогда при достаточно большом $t > 0$ точка $y_h(\bar{x},0,t) \in L^+(g,\bar{x}^0,0)$ будет сколь угодно близкой к точке $x = 0$, что противоречит (2.35). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.2.2.

Теорема 2.2.3 [73]. *Пусть для системы* (2.27) *существуют такие знакопостоянные функции* $V(x,t)$ *и* $W(x,t)$, *удовлетворяющие локальному условию Липшица, что при всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ *выполняются условия*:

1) $V(x,t) \ge 0$ *и* $V(0, t) = 0$;

2) $\dot{V}(x,t) \le -W(x,t) \le 0$;

3) *решение* $x = 0$ *глобально асимптотически устойчиво относительно множества предельных нулей функции* $V(x,t)$ *и семейства предельных систем* (2.28);

4) *для любой предельной тройки* (g, v, w) *и любого числа* $c > 0$ *множество*

$$N(c,g) = \{(x,t) : w_v(x,t) = 0, v_v(x,t) = c\}$$

не содержит положительных полутраекторий соответствующей предельной системы (2.28);

5) *все решения* $x(x_0,t_0,t)$ *системы* (2.27) *ограничены при* $t \ge t_0$ *равномерно по* (x_0,t_0).

Тогда нулевое решение системы (2.27) *равномерно глобально асимптотически устойчиво.*

Замечание 2.4. Условие 2 в теоремах 2.2.1–2.2.3 можно заменить следующим условием:

2а. Решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво в целом относительно системы (2.27) и множества $V^{-1}(0,+\infty)$ [73].

Полагая $V(x,t) \equiv 0$ в теореме 2.5.3 с учетом наследуемости свойства равномерной асимптотической устойчивости в целом семейства предельных систем, получаем следующее.

Следствие 2.3. *Для того, чтобы нулевое решение системы* (2.34) *было глобально равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно выполнения условий*:

1) *решение* $x = 0$ *глобально асимптотически устойчиво относительно семейства предельных систем* (2.28);

2). *все решения* $x(x_0, t_0, t)$ *системы* (2.27) *ограничены при* $t \geq t_0$ *равномерно по* (x_0, t_0).

Пример 2.4 [74]. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2x_1^2 x_2}{\sqrt{1 + a^2 x_1^2}}, \ \ \dot{x}_2 = -x_2.$$

Нулевое решение этой системы глобально асимптотически устойчиво при любом $a \neq 0$. Однако при $a = 0$ получаем систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2, \ \ \dot{x}_2 = -x_2,$$

нулевое решение которой лишь локально асимптотически устойчиво с границей области притяжения, определяемой уравнением $x_1 x_2 = 1$ [35].

Пример 2.5 [74]. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + f(x,t)\dot{x} + g(x,t) = 0, \tag{2.36}$$

которое описывает движение материальной точки под действием нестационарных сил сопротивления типа вязкого трения и нестационарной восстанавливающей силы. Пусть выполняются следующие условия, отвечающие физической природе сил:

$$\begin{cases} 0 < f_1 \leq f(x,t) \leq f_2 < +\infty \ \ \textit{ïðè âñåõ}\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ 0 < g_1 x^2 \leq x g(x,t) \leq g_2 x^2 \ \ \ \textit{ïðè âñåõ}\ t \geq 0,\ x \neq 0, \\ \alpha(f_1 - f_2) < g_1 \leq g_2 < 2\alpha(f - \alpha), \end{cases} \tag{2.37}$$

где $f_j, g_j, j = 1,2,$ – положительные постоянные, а $\alpha \in (0, f_1)$.

Произведем замену переменных $x_1 = x, \ \ x_2 = \alpha x + \dot{x}.$ Тогда от уравнения (2.36) можно перейти к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = (-\alpha^2 + \alpha f(x_1,t) - g(x_1,t)/x_1)x_1 + (\alpha - f(x_1,t))x_2. \end{cases} \tag{2.38}$$

Положим

$$H_1(x_1, x_2, t_0, t) = -\alpha,$$

$$H_4(x_1,x_2,t_0,t)=((\alpha f(x_1,t)-g(x_1,t)/x_1)x_1-f(x_1,t))x_2-$$
$$-((\alpha f(x_1,t_0)-g(x_1,t_0)/x_1)x_1)/x_2.$$

$$h_2(x_2,t_0)=1,$$

$$h_3(x_1,t_0)=((-\alpha^2+\alpha f(x_1,t_0)-g(x_1,t_0)/x_1)x_1+\alpha)/x_1,$$

$$H_1^0(x_1,x_2)=-\alpha,$$

$$H_4^0(x_1,x_2)=\sup_{t\ge 0}(\alpha-f(x_1,t))$$

$$h_2^0(x_2)=1,\ \varphi^0(x_2)=|x_2|,$$

$$h_3^0(x_1)=\psi^0(x_1)/|x_1|,\ \psi^0(x_1)=\sup_{t\ge 0}|(-\alpha^2+\alpha f(x_1,t)-g(x_1,t)/x_1)x_1|.$$

Возьмем функцию Ляпунова

$$V(x_1,x_2)=\int_0^{x_1}\sup_{t\ge 0}|(-\alpha^2+\alpha f(x,t)-g(x,t)/x)x|\operatorname{sign}(x)dx+\frac{1}{2}x_2^2.$$

Ее производная по времени в силу системы (2.38) имеет вид:

$$\dot V(x_1,x_2,t)\le\begin{cases}H_1^0h_3^0x_1^2+2h_2^0h_3^0|x_1x_2|+H_4^0h_2^0x_2^2, \text{ï ðè } x_1x_2\ne 0,\\ H_1^0h_3^0x_1^2, \text{ï ðè } x_1\ne 0,\ x_2=0,\\ H_4^0h_2^0x_2^2, \text{ï ðè } x_1=0,\ x_2\ne 0.\end{cases}$$

Отсюда на основании (2.37) имеем $\dot V(x_1,x_2,t)\le -W(x_1,x_2)\le 0,$ причем

$$W^{-1}(0)=\{(x_1,x_2):h_3^0(x_1)=0,\ h_2^0(x_2)=0\}\cup$$
$$\cup\{x_1=0,\ h_2^0(x_1)=0\}\cup\{x_2=0,\ h_3^0(x_1)=0\}\cup\{(0,0)\}.$$

На множестве $W^{-1}(0)$ для функции $v(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ будем иметь оценку $\dot v(x_1,x_2,t)\le 2H_1^0x_1^2+H_4^0x_2^2<0$ при $x_1^2+x_2^2\ne 0$.

Таким образом, по теореме 2.2.1 все условия теоремы 2.2.2 будут выполнены, а значит, будут выполненными и условия теоремы 2.2.3, т. е. нулевое решение системы (2.38) равномерно глобально асимптотически устойчиво.

2.3. АСИМПТОТИЧЕСКИ ТРЕУГОЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.3.1. СИСТЕМЫ С АСИМПТОТИЧЕСКИ ИСЧЕЗАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Определение 2.4 [62]. *Пусть* U *– окрестность начала координат пространства* $\mathbb{R}^n$ *и* $Y:(z,t)\to Y(z,t)$ *– непрерывная функция, определенная на множестве* $U\times\mathbb{R}^+$ *такая, что* $Y(0,t)=0\ \forall t\ge 0$. *Функцию* Y *будем называть* ***локально асимптотически исчезающей****, если для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует компактная окрестность* K *точки* $z=0$, *содержащаяся в шаре* B_ε, *и для любого числа* $\mu>0$ *существует момент времени* $t=t(K,\mu)>0$ *такой, что*

$$\|Y(z,t)\|\le\mu \quad \forall z\in K \ \text{ è } \ \forall t>t(K,\mu). \tag{2.39}$$

Предположим, что задана пара систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=X(x,t), \tag{2.40}$$

$$\dot{y}=X(y,t)+Y(y,t), \tag{2.41}$$

где функции X и Y определены в области $U\times\mathbb{R}^+$, непрерывны и обращаются в нуль в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$ при всех $t\ge 0$. Кроме того, пусть функция X имеет непрерывные и равномерно ограниченные частные производные по координатам состояний вектора x в области точек $(x,t)\in U\times\mathbb{R}^+$. Будем предполагать также, что функция Y не нарушает условий существования и единственности решений системы (2.41) и является локально асимптотически исчезающей.

Предложение 2.8 [62]. *Пусть выполнены следующие условия*:

a) *решение* $y=0$ *системы* (2.41) *равномерно устойчиво*;

b) *решение* $x=0$ *системы* (2.40) *равномерно асимптотически устойчиво*;

c) *функция* $Y(y,t)$ *является локально асимптотически исчезающей*.

Тогда нулевое решение возмущенной системы (2.41) *равномерно асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Так как нулевое решение системы (2.40) равномерно асимптотически устойчиво, то существует шар B_Δ, $\Delta > 0$, начальных состояний x_0, расположенный в области равномерного притяжения решения $x = 0$ системы (2.40). Более того, по теореме 5.1 [75] для системы (2.40) существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова V: $B_\Delta \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, функции Хана a, b, $c \in \mathbf{K}$ и число $N > 0$ такие, что в области $B_\Delta \times \mathbb{R}^+$ имеют место условия

1) $a(\| x \|) \le V(x, t) \le b(\| x \|)$;

2) $\dot{V}_{(27)}(x,t) \le -c(\| x \|)$;

3) $\left\| \dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right\| \le N.$

Вычислим производную по времени $\dot{V}_{(28)}(y,t)$ от функции $V(y, t)$ в силу системы (2.41) и оценим выражение для производной сверху в области $B_\Delta \times \mathbb{R}^+$. Получим

$$\dot{V}_{(28)}(y,t) = \dot{V}_{(27)}(y,t) + \left(\frac{\partial V(y,t)}{\partial y} \right)' Y(y,t) \le -c\,(\| y \|) + N \| Y(y,t) \|. \quad (2.42)$$

Согласно равномерной устойчивости начала координат системы (2.41) имеем:

$$(\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon < \Delta)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall t_0 \ge 0)(\forall y_0 \in B_\delta)(\forall t \ge t_0):\ \Rightarrow$$

$$\| y(t, t_0, y_0) \| < \varepsilon.$$

Пусть пара чисел $\mu > 0$ и $\nu = \nu(\mu) > 0$ также соответствует определению равномерной устойчивости нулевого решения системы (2.41), причем $\nu < \delta$. То есть,

$$y_0 \in B_\nu^n \ \Rightarrow\ \| y(x_0, y_0, t_0, t) \| \le \mu \quad \forall t_0 \ge 0 \ \text{ и } \ \forall t \ge t_0. \quad (2.43)$$

Так как возмущение Y в системе (2.41) – локально асимптотически исчезающая функция, то для некоторого числа $t = t(K, \nu) > 0$ (в данном случае K – замыкание шара B_ε^n) выполняется неравенство

$$\| Y(z(t), t) \| \le 0{,}5c(\nu) \quad \forall t > t(K, \nu).$$

Покажем, что найдется не зависящая от $t_0 \geq 0$ величина $T > t(K, \mu)$ такая, что решение $y(t) = y(y_0, t_0, t)$ с начальным состоянием $y_0 \in B_\delta$ при $t = T + t_0$ попадет в шар B_ν. А тогда при всех $t > T + t_0$ оно не покинет шар B_μ, откуда будет следовать равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2.41). В самом деле, если это не так, то значения функции $y(t)$ будут принадлежать шаровому слою $B_\varepsilon \setminus B_\nu$ для всех $t \geq t(K, \mu)$. В этом случае для функций $V(y(t), t)$ можем записать равенство

$$V(y(t), t) = V(y(t^*), t^*) + \int_{t_\varepsilon}^{t} \dot{V}_{(28)}(y(s), s)ds\,,$$

из которого при $t > t(K, \mu)$ с учетом *a*), (2.39), (2.42) и (2.43) следует неравенство

$$\mathrm{V}(\mathrm{y}(\mathrm{t}), \mathrm{t}) \leq \mathrm{b}_1(\mu) - (\mathrm{t}-\mathrm{t}(\mathrm{K}, \mu))\mathrm{c}(\nu)+\mathrm{N} \int_{t(K,\mu)}^{t} \| Y(y(s), s) \|\, ds. \qquad (2.44)$$

На основании предыдущих построений можно утверждать существование числа $T_1 = T_1(\varepsilon)>0$ такого, что

$$\int_{t(K,\mu)}^{t} \| Y(y(s), s) \|\, ds < \frac{1}{2} c(\nu)(t - t(K, \nu)), \text{ если } t > T_1 + t(K, \mu).$$

Зафиксируем положительное число T, подчинив его условию

$$T > T_1 + t_\varepsilon + \frac{b(\mu)}{c(\nu)}. \qquad (2.45)$$

Ясно, что таким образом выбранная величина $T > 0$ не зависит ни от начального момента времени $t_0 \geq 0$, ни от начального состояния $y_0 \in B_\delta^n$. По построению при $t > T$ правая часть неравенства (2.44) в силу (2.45) является отрицательной величиной, что в шаровом слое $B_\varepsilon \setminus B_\nu$ противоречит знаку левой части этих неравенств. Таким образом, решение $y(t)$ остается в шаре B_μ при всех $t > T$. Отсюда в силу произвольности выбора числа $\mu > 0$ и следует равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (2.40)

Для сокращения формулировок введем следующее понятие, которое фигурирует в различных модификациях в ряде работ.

Пусть $U = \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что нулевое решение системы (2.40) *равномерно глобально асимптотически*, если оно равномерно устойчиво и, кроме того, для решений $x(x_0, t_0, t)$ системы (2.40) предельное равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(x_0, t_0, t) \| = 0 \tag{2.46}$$

выполняется равномерно по $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in K$ для каждой компактной окрестности K начала координат пространства $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить также, что решения системы (2.40) *равномерно ограничены при* $t \to +\infty$, если для любой компактной окрестности $K \subset \mathbb{R}^n$ начала координат можно указать положительное число M такое, что $\| x(x_0, t_0, t) \| \leq M \quad \forall x_0 \in K \ \ \forall t_0 \geq 0$ и $\forall t \geq t_0$.

Определение 2.5. *Пусть* $Y : (z, t) \to Y(z, t)$ *– непрерывная функция, определенная на множестве* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, *такая, что* $Y(0, t) = 0 \ \forall t \geq 0$. *Будем говорить, что* Y – ***асимптотически исчезающая функция****, если для любой компактной окрестности* K *точки* $z = 0$ *и для любого числа* $\mu > 0$ *существует момент времени* $t = t(K, \mu) > 0$ *такой, что выполняется условие* (2.39).

Предложение 2.9 [62] Пусть $U = \mathbb{R}^n$ *и выполнены следующие условия*:

a) *решение* $y = 0$ *системы* (2.41) *равномерно устойчиво*;

b) *решение* $x = 0$ *системы* (2.40) *равномерно устойчиво в целом*;

c) *функция* $Y(y, t)$ *является асимптотически исчезающей*;

d) *решения системы* (2.41) *равномерно ограничены при* $t \to +\infty$.

Тогда нулевое решение возмущенной системы (2.41) *равномерно устойчиво в целом*.

Доказательство. Согласно предложению 2.14 выполнение требований *a*)–*c*) предложения 2.15 влечет равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (2.41). Поэтому достаточно показать, что всякое решение $y(y_0, t_0, t)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, стремится к нулю при $t \to +\infty$. В силу требования *d*) существует число $M > 0$ такое, что

$$\left\| y(y_0, t_0, t) \right\| \leq M \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.47}$$

Из соображений краткости приведем лишь схему дальнейшего доказательства данного предложения, которую можно построить по принципу повторения этапов доказательства предложения 2.14. Для этого, во-первых, вместо неравенства (2.43) следует использовать оценку (2.47). Во-вторых, выбор функции V с условиями 1)–3) следует заменить выбором соответствующей функции Ляпунова согласно теореме 16.3 [84, с. 90] (случай устойчивости в целом). В-третьих, вместо определения 2.4 нужно воспользоваться определением 2.5. Затем в последующих рассуждениях за несущественным изменением можно полностью использовать структуру доказательства предложение 2.8, которая и приводит к выполнению предельного равенства $\lim\limits_{t \to +\infty} \left\| y(y_0, t_0, t) \right\| = 0$.

2.3.2. АСИМПТОТИЧЕСКИ ТРЕУГОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть система (2.40) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), & x \in U_x \\ \dot{y} = g(y, t), & y \in U_y,\ t \geq 0, \end{cases} \tag{2.48}$$

где $U = (U_x, U_y)$ – открытая связная окрестность начала координат евклидового пространства $\mathbb{R}^{p+q}$, причем $U_x \subset \mathbb{R}^p$, $U_y \subset \mathbb{R}^q$.

Для каждого начального состояния $z_0 = (x_0, y_0)$ из U и начального момента $t_0 \geq 0$ через $z(z_0, t_0, t) = (x(z_0, t_0, t), y(z_0, t_0, t))$ будем обозначать решение системы (2.48) с условиями $z(z_0, t_0, t_0) = z_0 = (x_0, y_0)$.

Пусть возмущенная система (2.41) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) + Y_1(x, y, t), & x \in U_x \\ \dot{y} = g(y, t) + Y_2(x, y, t), & y \in U_y,\ t \geq 0, \end{cases} \tag{2.49}$$

где функция $Y = (Y_1, Y_2)$ по-прежнему играет роль возмущений системы (2.48).

Определение 2.6. *Систему* (2.49) *будем называть* ***локально асимптотически треугольной*** (***асимптотически треугольной***), *если функция Y является локально асимптотически исчезающей* (*соответственно асимптотически исчезающей*).

Отметим, что проблема устойчивости нулевого решения треугольных систем дифференциальных уравнений (система (2.48)) рассматривалась многими авторами ([15, 43, 48, 54, 62, 63, 65, 78, 148, 155, 156, 161]). При этом в работах [15, 43, 48, 54, 65, 155, 156] исследовались автономные системы, а в [62, 63, 161] – неавтономные. Здесь для решения задачи устойчивости нулевого решения в основном использовались два подхода. Авторы работ [15, 43, 48, 54, 62, 63, 65, 161] применяли прямой метод Ляпунова (знакоопределенные [161] или знакопостоянные [15, 43, 48, 54, 62, 63, 65] функции Ляпунова). Второй подход связан с проблемой Флорио – Сейберта [64], истоком которой являются задача об устойчивости по отношению к части переменных [101, 103] и принцип сведения [99]. В общем виде этот метод разработан П. Сейбертом [153, 158] для проблем топологической динамики применительно к задаче об относительной устойчивости инвариантных множеств.

Основным выводом работ по принципу сведения является тот факт, что если решение $x = 0$ системы

$$\dot{x} = f(x, 0, t), \quad x \in \mathbb{R}^p, t \geq 0, \tag{2.50}$$

равномерно асимптотически устойчиво и решение $y = 0$ системы

$$\dot{y} = g(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^q, t \geq 0, \tag{2.51}$$

равномерно асимптотически устойчиво (или равномерно устойчиво), то начало координат системы (2.48) является равномерно асимптотически устойчивым (соответственно равномерно устойчивым).

В этом разделе мы докажем принцип сведения для асимптотически треугольных систем неавтономных дифференциальных уравнений (2.49).

Теорема 2.3.2. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

1) *начало координат системы* (2.49) *равномерно устойчиво относительно* y;

2) *нулевое решение системы* (2.50) *равномерно асимптотически устойчиво*;

3) *нулевое решение системы* (2.51) *равномерно асимптотически устойчиво*.

Тогда начало координат локально асимптотически треугольной системы (2.49) *является равномерно асимптотически устойчивым*.

Доказательство. В силу устойчивости относительно координат вектора y имеем, что

$$(\forall \mu > 0,\ B^q_\mu \subset U_y)(\exists \nu = \nu(\mu) > 0)(\forall t_0 \geq 0)(\forall (x_0, y_0) \in B_\nu):$$

$$\left\| y(t, t_0, x_0, y_0) \right\| < \mu \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.52}$$

Так как нулевое решение системы (2.50) равномерно асимптотически устойчиво, то по теореме 5.1 [75] существуют число $\rho > 0$ $(B^p_\rho \subset U_x)$, непрерывно дифференцируемая функция v: $B^p_\rho \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, функции Хана a, b, c и число $N > 0$ такие, что в области $B^p_\rho \times \mathbb{R}^+$ имеют место условия

a) $a(\| x \|) \leq v(x, t) \leq b(\| x \|)$;

b) $\dot{v}_{(2.50)}(x, t) \leq -c(\| x \|)$; c) $\left\| \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right\| \leq N$.

По предположению правые части системы (2.48) удовлетворяют условию Липшица, поэтому можно указать число $L = L(\rho) > 0$ такое, что:

$$\left\| f(x, y, t) + Y_1(x, y, t) - f(x, \tilde{y}, t) - Y_1(x, \tilde{y}, t) \right\| \leq L \left\| y - \tilde{y} \right\| \tag{2.53}$$

для всех $x \in B^p_\rho$, $y, \tilde{y} \in B^q_\rho$, $t \geq 0$.

Зафиксируем числа $\varepsilon > 0$ и $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ с условием

$$\varepsilon < \rho,\ b(\gamma) < a(\varepsilon),\ \gamma < \varepsilon, \tag{2.54}$$

и определим положительную величину σ с помощью равенства

$$\sigma = -\sup_{\gamma \leq \|x\| \leq \varepsilon,\, t \geq 0} \dot{v}_{(2.50)}(x, t). \tag{2.55}$$

Наконец, выберем число ν – настолько малое, чтобы одновременно выполнялись условие (1.52) и следующие неравенства

$$\nu < \gamma,\ \mu < \min\left\{ \frac{\sigma}{NL}, \frac{\rho}{2} \right\}. \tag{2.56}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству равномерной устойчивости нулевого решения системы (2.49). Для этого покажем, что если $z_0 \in B^{p+q}_\nu \times \mathbb{R}^+$, и $t_0 \geq 0$, то решение $z(z_0, t_0, t) = (x(t), y(t))$ системы

(2.49) не выходит из шара B_ε^{p+q} при всех $t \geq t_0$. Действительно, так как по предположению 1) нулевое решение этой системы устойчиво по отношению к координатам вектора $y(t)$, то достаточно показать, что для компонент вектора $x(t)$ выполняется неравенство

$$\| x(t) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.57}$$

Если, напротив, условие (2.57) нарушается, то очевидно существуют моменты времени $t_2 > t_1 > t_0$ такие, что

$$\| x(t_1) \| = \gamma, \ \gamma < \| x(t) \| < \varepsilon \ \text{ при } \ t_1 < t < t_2 \ \text{ и } \ \| x(t_2) \| = \varepsilon.$$

Выпишем производную по времени $\dot{v}_{(2.49)}$, вычисленную от функции $v(x, t)$ в силу системы (2.49). Имеем

$$\dot{v}_{(2.49)}(x, y, t) = \dot{v}_{(2.50)}(x, t) + \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)' (f(x, y, t) \ +$$

$$+ Y_1(x, y, t) - \ f(x, 0, t) \ - Y_1(x, 0, t)).$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством Липшица (2.53), а также (2.57), (2.55) и (2.56), получаем следующие оценки:

$$\dot{v}_{(2.49)}(x, y, t) = \dot{v}_{(2.50)}(x, t) \ + NL \| y(t) \| \leq -\sigma + NL\mu < 0 \, , \ t_1 \leq t \leq t_2.$$

Таким образом, функция $v(x(t), t)$ строго монотонно убывает на интервале $[t_1, t_2]$ и поэтому с учетом предположения *а*) имеем:

$$\mathrm{a}(\varepsilon) = \mathrm{a}\,(\| x(t_2) \|) \ \leq \mathrm{v}(\mathrm{x}(\mathrm{t}_2), \mathrm{t}_2) < \mathrm{v}(\mathrm{x}(\mathrm{t}_1), \mathrm{t}_1) \leq \mathrm{b}\,(\| x(t_1) \|) \ = \mathrm{b}(\gamma).$$

Однако это противоречит второму из неравенств (2.54). Следовательно, справедливо обратное утверждение, и мы получаем равномерную устойчивость нулевого решения системы (2.49) и по координатам вектора $x(t)$.

Теперь для завершения доказательства теоремы 2.3.3 достаточно воспользоваться утверждением предложения 2.9. Теорема доказана.

Конструкция доказательства теоремы 2.3.3 позволяет без особого труда сформулировать и утверждение о неасимптотической устойчивости.

Теорема 2.3.1. *Предположим*, *что выполнены следующие условия*:

1) *начало координат системы* (2.49) *устойчиво относительно* y;

2) *нулевое решение системы* (2.48) *равномерно асимптотически устойчиво*;

Тогда начало координат локально асимптотически треугольной системы (2.49) *устойчиво*.

Доказательство. В отличие от доказательства теоремы 2.3.3 здесь достаточно использовать теорему 13.1 [75], которая для системы (2.49) гарантирует существование знакопостоянной функции Ляпунова (определенно положительной относительно координат вектора y), а затем применить теорему 2 [56] с условием, что $\varphi(x, t) \equiv 0$.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $U = \mathbb{R}^{p+q}$. *Предположим, что система* (2.49) *асимптотически треугольная в целом и выполнены следующие условия*:

1) *начало координат системы* (2.49) *равномерно устойчиво относительно* y;

2) *нулевое решение системы* (2.50) *равномерно асимптотически устойчиво*;

3) *нулевое решение системы* (2.51) *равномерно асимптотически устойчиво*;

4) *решения системы* (2.49) *равномерно ограничены при* $t \to +\infty$.

Тогда начало координат системы (2.40) *глобально равномерно асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Согласно теореме 2.3.3 выполнение требований 1)–3) теоремы 2.3.3 влечет равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.49). А тогда по теореме 2.3.2 и следует требуемое утверждение.

Рассмотрим примеры приложения полученных результатов об устойчивости для уравнений движения механических систем.

Предположим, что исследуется движение несвободной материальной системы из n точек с переменными массами $m(t) = (m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t))$, положения которых определяются координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_{3n}(t)$. Пусть данная система подчинена удерживающим, голономным идеальным связям, выраженным системой уравнений $S_i(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Будем считать, что эти уравнения допускают выражение координат вектора x через $m = 3n - k$ независимых обобщенных координат q_1, q_2, …, q_m. В этом случае при отсутствии реактивных сил движение системы описывается уравнениями [95]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{2.58}$$

где

$$T = T(q,\ \dot{q},\ t),\ \Pi = \Pi(q, m(t), t);$$

$Q_i = Q_i(q, \dot{q},\ t)$ – непотенциальные обобщенные силы, действующие на точки системы. Пусть

$$q = 0, \quad \dot{q} = 0. \qquad (2.59)$$

равновесие системы, которое обеспечивается выполнением равенств $\partial\Pi$ / $\partial q = 0$ и $Q = 0$.

Уравнения движения (2.58) очевидно приводятся к нормальному виду. В результате получаем некоторую систему дифференциальных уравнений (систему вида (2.41)), в которой функция $Y(y, t)$ отражает претерпеваемые с течением времени определенные изменения масс $m(t)$ и уравнений связей. В такой постановке задача об устойчивости равновесия (2.59) может быть изучена предложенным методом исследования систем с асимптотически исчезающими возмущениями.

2.3.2. ПРИМЕРЫ

Пример 2.6. Пусть имеется система, состоящая из тела A массой M и прикрепленного к нему математического маятника массой m и длиной нити l (массой нити пренебрегаем). Предположим, что к телу A прикреплена пружина жесткостью c, другой конец которой зафиксирован в неподвижной точке. Тело A может двигаться по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту (рис. 2.6.1).

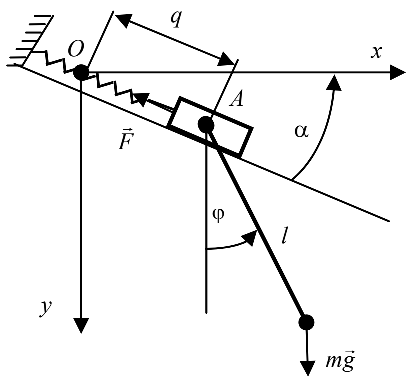

Рис. 2.1. Механическая система

Будем предполагать, что параметры системы M, m, l – суть непрерывно дифференцируемые неотрицательные функции, области значений которых подчинены следующим неравенствам:

$$0 < M_0 \le M(t) \le M_1,\ \ 0 < m(t) \le m_1,\ \ 0 < l_0 \le l(t) \le l_1,\ \ 0 < \alpha < \pi/2. \quad (2.60)$$

Составим дифференциальные уравнения движения системы, поместив начало координат со спускающейся вертикалью Oy в точку статического равновесия O. Такая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем угол φ отклонения маятника от вертикали и смещение q тела A вдоль наклонной плоскости, отсчитываемого от точки статического равновесия.

Предположим, что изменение масс $M(t)$ и $m(t)$ не сопровождается появлением соответствующих реактивных сил.

В данном случае сила $\vec{F}$ действия пружины имеет величину $F = c\left|q + \mu(t)\right|$, где μ – статическое удлинение пружины, определяемое формулой

$$\mu(t) = ((M(t) + m(t))g\sin\alpha(t)) / c. \quad (2.61)$$

Кроме действия силы тяжести $m\vec{g}$ будем учитывать также силу сопротивления движению тела A, пропорциональную скорости $\dot{q}$, и силу сопротивления вращению маятника, пропорциональную величине его количества движения $m(t)l(t)\dot{\varphi}$.

В этих предположениях для выбранных обобщенных координат (q, φ) уравнения движения механической системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\big((M(t) + m(t))\dot{q} + m(t)l(t)\cos(\varphi + \alpha(t))\big) = -cq - k\dot{q},$$

$$\frac{d}{dt}\Big(m(t)l^2(t)\dot{\varphi} + m(t)\dot{q}l(t)\cos(\varphi + \alpha(t))\Big) +$$

$$+m(t)l(t)\dot{q}\dot{\varphi}\sin(\varphi + \alpha(t)) = -gm(t)l(t)\sin\varphi - hm(t)l(t)\dot{\varphi}, \quad (2.62)$$

где k и h – коэффициенты сил сопротивления.

Предположим, что изменение массы $m(t)$ происходит при выполнении следующих условий:

$$m(t) \to 0,\ \ \dot{m}(t) \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0 \ \text{ и } \ \left|\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\right| \le m_0 < +\infty \quad \forall t \ge 0. \quad (2.63)$$

Тогда уравнения первого приближения (уравнения типа (2.48)) можно выбрать в виде

$$M(t)\ddot{q} = -(k + M(t))\dot{q} - cq + ml\dot{\alpha}(t)\dot{\varphi}\sin(\varphi + \alpha(t)), \tag{2.64}$$

$$l^2(t)M(t)\ddot{\varphi} = M(t)l(t)\left(\left(\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}l(t) + 2\dot{l}(t)\right) - h\right)\dot{\varphi} - gM(t)l(t)\sin\varphi +$$

$$+ \cos(\varphi+\alpha(t))\left(M(t)\dot{q}\left(\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}l(t) + \dot{l}(t)\right) + gl(t)\left(cq + (\dot{M}(t) + k)\dot{q}\right)\right) -$$

$$-M(t)l(t)\,\dot{\varphi}\dot{q}\,\sin(\varphi + \alpha(t)) + \; l(t)\dot{\alpha}(t)\dot{q}\sin(\varphi + \alpha(t)) \; . \tag{2.65}$$

Легко видеть, что равномерная асимптотическая устойчивость решения $q = \dot{q} = 0$ уравнения (2.64) может быть обеспечена условием

$$\dot{M}(t) + k \geq \gamma > 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.66}$$

При выполнении (2.66), равномерная асимптотическая устойчивость равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ уравнения (2.65) равносильна равномерной асимптотической устойчивости решения $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ редуцированного уравнения

$$l(t)\ddot{\varphi} = \left(\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}l(t) + 2\dot{l}(t) + hl(t)\right)\dot{\varphi} - g\sin\varphi. \tag{2.67}$$

Для этого уравнения условия равномерной асимптотической устойчивости (в предположении (2.63)) можно взять в виде неравенства

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} + h \; \leq \delta < 0 \quad \forall t \geq 0$$

или, после интегрирования в пределах от 0 до t, в виде следующего неравенства:

$$m(t)l^2(t) \leq m(0)l^2(0)e^{-(h-\delta)t}. \tag{2.68}$$

Таким образом, решение $\varphi = \dot{\varphi} = 0$, $q = \dot{q} = 0$ исследуемой механической системы будет равномерно асимптотически устойчивым, если выполнены условия (2.60), (2.63), (2.66) и (2.68).

Заметим, что в рассмотренной ситуации полученные условия устойчивости не зависят от положения плоскости скольжения тела A, т. е. от угла $\alpha_0 \in [0, \pi / 2]$.

Пример 2.7. Рассмотрим механическую систему в виде трех материальных объектов P_1, P_2, P_3 с соответствующими массами m_1, m_2, m_3, расположеных на прямой (рис. 1.6.2).

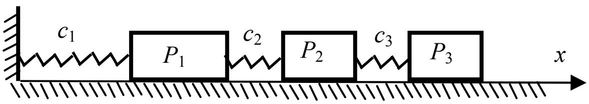

Рис. 2.2. Механическая система

Точки системы соединены между собой пружинами жесткости соответственно c_1, c_2, c_3, причем первая пружина левым концом закреплена неподвижно. Предположим, что масса m_1 и параметры жесткости c_1, c_2 являются непрерывными функциями времени t с непрерывными производными $\dot{m}_1(t), \dot{c}_1(t)$, и они удовлетворяют следующим условиям:

$$m_1(t) \to 0, \;\; \dot{m}_1(t) \to 0, \;\; c_1(t) \to 0, \;\; \frac{c_2(t)}{m_1(t)} \to 0 \;\; \text{при} \;\; t \to +\infty;$$

$$\left|\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)}\right| \le N_1 < +\infty, \quad 0 < \sigma \le \left|\frac{c_1(t)}{m_1(t)}\right| \le N_2 < +\infty \quad \forall t \ge 0. \tag{2.69}$$

Из этих требований, в частности, следует, что $c_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Кроме того, предположим, что точка переменной массы P_1 испытывает силу сопротивления, равную $-m_1(t)F(x_1, t)\dot{x}_1$ и определяемую непрерывной функцией $F(x_1, t)$; точки P_2, P_3 подвержены действию сил сопротивления соответственно $-k_2\dot{x}_2$ и $-k_3\dot{x}_3$, где k_2, k_3 – положительные постоянные.

В этих условиях уравнения движения системы (в частном случае постоянных масс и отсутствия сил сопротивления [18, с. 70]) записываются в виде

$$m_1(t)\ddot{x}_1 - \dot{m}_1(t)\dot{x}_1 + c_1(t)x_1 - c_2(t)(x_2 - x_1) = -m_1(t)F(x_1,t)\dot{x}_1,$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(t)(x_2 - x_1) - c_3(x_3 - x_2) = -k_2\dot{x}_2,$$

$$m_3\ddot{x}_3 + c_3(x_3 - x_2) = -k_3\dot{x}_3, \tag{2.70}$$

где x_1, x_2, x_3 – обобщенные координаты, равные соответственно расстояниям точек P_1, P_2, P_3 от тех положений, в которых пружины находятся в ненапряженном состоянии.

Здесь в качестве соответствующей треугольной системы (системы (2.48)) можно взять следующие уравнения:

$$\ddot{x}_1+\left(F(x_1,t)-\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)}\right)\dot{x}_1+\frac{c_1(t)}{m_1(t)}x_1=0, \tag{2.71}$$

$$m_2\ddot{x}_2-c_3(x_3-x_2)=-k_2\dot{x}_2,\quad m_3\ddot{x}_3+c_3(x_3-x_2)=-k_3\dot{x}_3. \tag{2.72}$$

При этом нетрудно видеть, что разница между исходной системой (2.70) и треугольной системой (2.71), (2.72) определяется асимптотически исчезающими функциями.

Уравнение (2.71) является уравнением типа Льенара. Для него условия равномерной асимптотической устойчивости решения $x_1=\dot{x}_1=0$ приведены в работе [5] и получены методом предельных уравнений. Мы продолжим эти исследования, рассмотрев дополнительно задачу об устойчивости в целом.

Возьмем функцию Ляпунова $V(x_1,\dot{x}_1,t)=\dfrac{1}{2}x_1^2+\dfrac{m_1(t)}{2c_1(t)}\dot{x}_1^2$. В силу требования (2.69) она является определенно положительной и бесконечно большой. Производная этой функции по времени в силу уравнения (2.72) имеет вид

$$\dot{V}(x_1,\dot{x}_1,t)=-\frac{m_1(t)}{c_1(t)}\left(F(x_1,t)-\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)}+\frac{m_1(t)}{2c_1(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{c_1(t)}{m_1(t)}\right)\right)\dot{x}_1^2.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$F(x_1,t)-\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)}+\frac{m_1(t)}{2c_1(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{c_1(t)}{m_1(t)}\right)\ge\Delta>0\quad\forall t\ge0, \tag{2.73}$$

где Δ – некоторая постоянная. Тогда все решения уравнения (2.53) будут ограниченными на полуоси $t\ \ge\ 0$. Поэтому при выполнении условий (2.69), (2.73) по теореме 2.3.3 следует, что равновесие $x_1=\dot{x}_1=0$ глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Вторая группа равенств из приведенной треугольной системы, а именно уравнения (2.72), представляет собой систему с постоянными коэффициентами. Следовательно, для них условия равномерной устойчивости в целом нулевого решения $x_2 = \dot{x}_2 = x_3 = \dot{x}_3 = 0$ можно выписать согласно критерию Гурвица. Они выражаются неравенством

$$\alpha\beta((\alpha + \beta)(\alpha B + \beta A) + (A - B)^2) > AB(\alpha + \beta)^2, \tag{2.74}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\alpha = k_2 / m_2,\ \ \beta = k_3 / m_3,\ \ A = c_3 / m_2,\ \ B = c_3 / m_3. \tag{2.75}$$

Таким образом, на основании теоремы 2.3.3 равновесие исследуемой механической системы глобально равномерно асимптотически устойчиво, если выполнены условия (2.69), (2.73)–(2.75).

2.4. ТЕОРЕМЫ Н. Б. ГРИГОРЬЕВОЙ

Предлагаемый в данном разделе подход [28] касается асимптотически автономных дифференциальных уравнений и дополняет результаты Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [8], К. П. Персидского [98], Н. Г. Четаева [112], относящиеся к автономным и периодическим по времени дифференциальным уравнениям. Идея предлагаемого пути формирования теорем второго метода основана на использовании производных высших порядков по времени от функции Ляпунова.

Рассмотрим систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x,t), \quad x \in B_\Delta \in \mathbb{R}^n;\ 0 \le t < \infty, i = \overline{1, n}, \tag{2.76}$$

где $\Delta > 0$ и $f_i(0,t) = 0\ \ \forall t \ge 0.$

Пусть функции $f_i(x,t)$ ($i = 1, \ldots, n$) сходятся при $t \to +\infty$ равномерно в области $\overline{B}_\varepsilon$ к функциям $g_i(x)$:

$$\underset{t\to+\infty}{f_i(x,t)} \underset{\overline{B_\Delta}}{\longrightarrow} g_i(x), \quad g_i(x) \in \boldsymbol{C}^m(B_\Delta), \quad m \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.77}$$

Другими словами, исходная система уравнений (2.76) является асимптотически автономной (гл. 1). При этом единственным представителем множества предельных уравнений для (2.76) является автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in B_\Delta, g(0) = 0. \tag{2.78}$$

Пусть $v(y)$ – некоторая функция Ляпунова (вообще говоря, класса $\mathbf{C}^n(B_\Delta, \mathbb{R})$) и $y(y_0, t)$ – означает решение уравнения (2.78) с начальным условием $y(y_0, 0) = y_0$. Напомним, что производная по времени от функции $v(y)$ вдоль решений системы (2.78) в точке $(y_0) \in B_\Delta$ определяется равенством

$$\begin{gathered}\dot{v}(y_0) = \left.\frac{dv(y(y_0,t))}{dt}\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial y(y_0,t)}{\partial x}\right)' \left.\frac{dy(y_0,t)}{dt}\right|_{t=0} + \\ + \left.\frac{\partial v(y_0)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \left(\frac{\partial v(y)}{\partial y}\right)' \left. g(y)\right|_{y=y_0}.\end{gathered} \tag{2.79}$$

Определим теперь для функции $v(y)$ понятие производных по времени высших порядков $\overset{(k)}{v}(y)$ в силу исследуемой системы дифференциальных уравнений. Для этого положим

$$\ddot{v}(y) = \frac{d}{dt}(\dot{v}(y)) = \left(\frac{\partial \dot{v}(y)}{\partial x}\right)' g(y),$$

$$\overset{(k)}{v}(y) = \frac{d}{dt}\left(\overset{(k-1)}{v}(y)\right) = \left(\frac{\partial \overset{(k-1)}{v}(y)}{\partial y}\right)' g(y), \; k = 3, 4, \ldots .$$

Такая процедура последовательного вычисления производных непосредственно связана с понятием скобок Ли.

Обозначим через $\mathbf{V_0}(B_\Delta)$ класс асимптотически автономных функций $V(x,t) \in C^{1,1}_{tx}(B_\Delta \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ таких, что $V(x,t) \underset{t \to +\infty}{\to} v(x) \in \boldsymbol{C}^{m+1}(B_\Delta)$, равномерно по $t \geq 0$, причем $V(0,t) = 0, \; \forall t \geq 0.$ Если $\Delta = +\infty$, то в классе $\mathbf{V_0}(\mathbb{R}^n)$ соответственно подразумевается равномерная сходимость $V(x,t)$ на B_Δ при каждом $\Delta > 0$.

Теорема 2.4.4 [28]. *Пусть система уравнений* (2.76) *асимптотически автономна, т. е. удовлетворяет условию* (2.77). *Предположим, что для системы* (2.76) *существуют число* $t_0 \geq 0$ *и функция* $V(x, t)$ *класса* $\mathbf{V_0}$ *такая, что*:

1) $\dot{V}(t,x) \geq 0$;

2) $\forall \delta > 0,\ \exists p \in B_\delta$ *такое, что* $V(p,t_0) > 0$;

3) *предельная для V функция* $v(y)$ *удовлетворяет условию*:

$$\{y \in B_\Delta : v(y) = c,\ \overset{(k)}{v}(y) = 0\} \quad k = 1,2,...,m+1,$$

не содержит положительных полутраекторий уравнения (2.78) *ни при каком* $c > 0$.

Тогда нулевое равновесие уравнения (2.76) *неустойчиво.*

Теорема 2.4.2 [28]. *Пусть система уравнений* (2.76) *асимптотически автономна, т. е. удовлетворяет условию* (2.77). *Предположим, что для системы* (2.76) *существуют функция* $V(x, t)$ *класса* $\mathbf{V_0}$ *и функция* $a \in \boldsymbol{K}$ *такие, что для всех* $(x,t) \in B_\Delta \times \mathbb{R}^+$ *выполняются условия*:

1) $\dot{V}(x,t) \leq 0$;

2) $a(\| x \|) \leq V(x,t)$;

3) *предельная для V функция* $v(y)$ *удовлетворяет условию: множество определяемое равенствами*

$$\{y \in B_\Delta : v(y) = c,\ \overset{(k)}{v}(y) = 0\} \quad k = 1,2,...,m+1,$$

не содержит положительных полутраекторий уравнения (2.78) *ни при каком* $c > 0$.

Тогда нулевое равновесие уравнения (2.76) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 2.4.3 [28]. *Пусть* $B_\Delta = \mathbb{R}^n$ *и система уравнений* (2.76) *асимптотически автономна в* $\mathbb{R}^n$, *т. е. удовлетворяет условию* (2.59) *для каждого* $\Delta > 0$. *Предположим, что для системы* (2.76) *существует функция* $V(x, t)$ *класса* $\mathbf{V_0}(\mathbb{R}^n)$ *и бесконечно большая функция* $a \in \boldsymbol{K}$ *такая, что*

1) $\dot{V}(x,t) \leq 0,\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$;

2) $a(\| x \|) \leq V(x,t)\ \ \forall t \geq 0$ *и* $\forall x \in \mathbb{R}^n$;

3) *предельная для V функция* $v(x,t)$ *удовлетворяет условию: множество, определяемое равенствами*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : v(x,t) = c, \quad \overset{(k)}{v}(x,t) = 0, \forall t \geq 0\} \quad k = 1, 2, ..., m+1,$$

не содержит положительных полутраекторий уравнения (2.78) *ни при каких* $c > 0$ *и* $\Delta > 0$.

Тогда нулевое равновесие системы (2.76) *глобально равномерно асимптотически устойчиво.*

2.4.1. ПРИМЕРЫ

Пример 2.8. [28]. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_3 + f_1(x,t), \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 + f_2(x,t), \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + f_3(x,t), \end{cases}$$

где функции $f_i(x,t), i = 1,2,3,$ сходятся равномерно при $t \to +\infty$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ к $g_i \in C^1$. Для функции

$$V = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)/2$$

имеем производную, равную $\dot{V} = (x_1 + 2x_3 - x_2)^2 + x_1 f_1 + \ +x_2 f_2 - x_3 f_3$. Если

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 - x_3 f_3 = (x_1 + 2x_3 - x_2)^2 h(x,t), \quad h(0,t) = 0, h \in \boldsymbol{C},$$

то $\dot{V} \geq 0$. Состояние равновесия неустойчиво.

Пример 2.9 [28]. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_3 + f_1(x), \\ \dot{x}_2 = x_2 + 2x_1 + f_2(x), \\ \dot{x}_3 = x_3 - 2x_2 + f_3(x), \end{cases}$$

где $f_i \in \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Функция $V = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$ имеет производную $\dot{V} = (x_1 + \ x_2 - x_3)^2 + x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$. Если

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 h(x), \ h \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R}^3), \quad h(0) = 0, h \in \boldsymbol{C},$$

то для этой системы выполнены все условия теоремы 2.4.4 (о неустойчивости), а для обратной к ней системы – все условия теоремы 2.4.2 (о равномерной асимптотической устойчивости).

3. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ

В отличие от главы 2, ниже предлагается иной подход к формированию достаточных условий устойчивости в классе знакопостоянных функций Ляпунова. Он принципиально отличается не только в идейном плане, но и по форме представления результатов. В частности, заранее выделяется поверхность нулевого уровня вспомогательной функции V, что на деле дает новые возможности для практического применения.

3.1. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Пусть $U = (U_x, U_y)$ означает открытую связную окрестность начала координат $\mathbb{R}^{p+q}$, где $U_x \subset \mathbb{R}^p$, $U_y \subset \mathbb{R}^q$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y, t), & x \in \mathbb{R}^p, \\ \dot{y} = Y(x, y, t), & y \in \mathbb{R}^q, \ t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{3.1}$$

Предположим, что функции X и Y локально липшицевы по x и y, равномерны по t и исчезают в точках $x = 0$, $y = 0$ для всех $t \geq 0$. Для каждой точки $z_0 = (x_0, y_0)$ из U и начального момента $t_0 \geq 0$ через $z(z_0, t_0, t) = (x(z_0, t_0, t), y(z_0, t_0, t))$ будем обозначать решение системы (3.1) с начальными условиями $z(z_0, t_0, t_0) = z_0$. Пусть $B_\Delta^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \| x \| < \Delta\}$ означает «шар» с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$ и радиусом $\Delta > 0$.

Определение 3.1. Пусть $\varphi : U_x \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$ – непрерывная функция. Будем говорить, что начало координат системы (3.1) устойчиво по отношению к разности $y - \varphi(x,t)$, если для любых чисел $\mu > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует число $\delta = \delta(\mu, t_0) > 0$ такое, что для всякого решения $x(t) = x(z_0, t_0, t)$, $y(t) = y(z_0, t_0, t)$ с начальными условиями $z_0 = (x_0, y_0) \in B_\delta^{p+q}$, определенного для $t_0 \leq t < t_0 + \omega$, $\omega = \omega(z_0, t_0) > 0$, справедливо неравенство

$$\|y(t) - \varphi(x(t), t)\| < \mu \tag{3.2}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + \omega]$.

Если при этом число $\delta > 0$ не зависит от выбора начального момента времени $t_0 \geq 0$, то будем говорить, что начало координат системы (3.1) равномерно устойчиво по отношению к разности $y - \varphi(x, t)$.

Теорема 3.1.1 [51]. *Пусть для системы* (3.1) *существуют непрерывная локально липшицева по x равномерно по* $t \geq 0$ *функция* φ $U_x \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(0, t) = 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* V $U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и функция* $a \in \mathbf{K}$ *такие, что для каждой точки* $(x, y, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняются условия*:

1) $a(\|y - \varphi(x, t)\|) \leq V(x, y, t)$ *и* $V(0, 0, t) = 0$;

2) $\dot{V}(x, y, t) \leq 0$;

3) *нулевое решение системы*

$$\dot{x} = X(x, \varphi(x,t), t), \quad x \in U_x,\ t \geq 0, \tag{3.3}$$

равномерно асимптотически устойчиво.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.1) *устойчиво.*

Если, кроме того, существует функция $b \in \mathbf{K}$ *такая, что*

4) $V(x, y, t) \leq b(\|y - \varphi(x, t)\|)$,

то нулевое решение (3.1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Покажем сначала, что начало координат устойчиво по отношению к разности $y - \varphi(x, t)$. Предположим напротив, т. е. для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существуют последовательности $z_n = (x_n, y_n) \subset U$, $\|z_n\| \to 0$, и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$, для которых

$$\|y(z_n, t_0, t_n) - \varphi(x(z_n, t_0, t_n), t_n)\| = \varepsilon \quad \forall\ n \geq 1. \tag{3.4}$$

С учетом 1), 2) имеем неравенства

$$0 \leq V(z(z_n, t_0, t_n), t_n) \leq V(z_n, t_n) \quad \forall\ n \geq 1. \tag{3.5}$$

Поэтому если $\|z_n\| \to 0$ при $n \to +\infty$, то и $V(z(z_n, t_0, t_n), t_n) \to 0$. Отсюда на основании 3) следует, что

$$\|y(z_n, t_0, t_n) - \varphi(x(z_n, t_0, t_n), t_n)\| \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Однако последнее противоречит (3.4), что и доказывает устойчивость по отношению к разности $y - \varphi(x, t)$.

Доказательство равномерной устойчивости по отношению к разности $y - \varphi(x, t)$ проводится аналогично. Следует только учесть, что в неравенствах (3.5) вместо t_0 нужно использовать последовательность начальных моментов времени $(t_{0n}) \subset \mathbb{R}^+$.

Для доказательства устойчивости начала координат предварительно заметим следующее. Во-первых, так как решение $x = 0$ системы (3.3) равномерно асимптотически устойчиво, а ее правая часть по условию локально липшицева по x равномерно по $t \geq 0$, то по теореме Н. Н. Красовского [75] можно указать непрерывно дифференцируемую функцию v: $B_\rho^p \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ($\rho > 0$, $B_\rho^p \subset U_x$), а также функции a_1, b_1, c_1 из класса **K** и число $M > 0$ такие, что для каждой точки $(x, t) \in B_\rho^p \times \mathbb{R}^+$ выполняются условия:

1) $a(\|x\|) \leq v(x, t) \leq b(\|x\|)$;

2) $\dot{v}_{(3.3)}(x,t) \leq -c_1(\|x\|)$;

3) $\|\partial v(x, t)/\partial x\| \leq M$.

Здесь через $\dot{v}_{2.3}$ обозначена производная по времени, вычисленная от функции v в силу системы (3.3).

Во-вторых, начало координат системы (3.1) равномерно устойчиво по отношению к разности $y - \varphi(x, t)$. Поэтому для любых чисел $\mu > 0$ (пусть $\mu < \rho$) и $t_0 \geq 0$ можно указать число $\delta = \delta(\mu, t_0) \geq 0$, что для всякого решения

$$x(t) = x(z_0, t_0, t),\ y(t) = y(z_0, t_0, t),\ z_0 = (x_0, y_0) \in B_\delta^{p+q},$$

определенного для $t_0 \leq t < t_0 + \omega$, $\omega = \omega(z_0, t_0) > 0$, справедливо неравенство (3.2) для всех $t_0 \leq t < t_0 + \omega$.

В-третьих, по условию Липшица можно зафиксировать постоянные $L_1 > 0$ и $L_2 > 0$ так, чтобы в соответствии с предположениями выполнялись неравенства

$$\|X(x, y, t) - X(x, \bar{y}, t)\| \leq L_1\|y - \bar{y}\|, \tag{3.6}$$

$$\|\varphi(x, t)\| \leq L_2\|x\| \tag{3.7}$$

для всех пар точек (x, y) и $(x, \bar{y})$ из шара B_δ^{p+q} и всех значений $t \geq 0$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству устойчивости нулевого решения системы (3.1). Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ – произвольные числа, причем, не нарушая общности, потребуем, чтобы

$$\varepsilon < \rho / (2L_2). \tag{3.8}$$

Выберем величину $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ так, что

$$b_1(\gamma) < a_1(\varepsilon), \ \ \gamma < \varepsilon, \tag{3.9}$$

и положим

$$-\sigma = \sup_{\gamma \le \|x\| \le \varepsilon, \ t \ge 0} \dot{v}_{(3.3)}(x,t)\,. \tag{3.10}$$

Ясно, что на основании b) число $\sigma > 0$. Выберем упомянутую выше величину $\mu > 0$ таким образом, чтобы

$$\mu < \min\{\sigma / (2L_1M), \ \rho / 2\}, \tag{3.11}$$

а число

$$\delta = \delta(\mu, t_0) < \gamma(\varepsilon) = \gamma. \tag{3.12}$$

Теперь покажем, что для решения $z(t) = (x(t), \ y(t))$ системы (3.1) с начальными данными $z_0 \in B_\delta^{p+q}$, $t_0 \ge 0$, компонента $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \tag{3.13}$$

по крайней мере, до тех пор, пока

$$\|y(t)\| < \rho \ \text{ при } t \ge t_0. \tag{3.14}$$

Действительно, если (3.13) не выполняется при тех значениях $t \ge t_0$, при которых имеет место (3.14), то существуют моменты времени $t_2 > t_1 > t_0$ такие, что

$$\|x(t_1)\| = \gamma, \ \ \gamma < \|x(t)\| < \varepsilon \ \text{ при } \ t_1 < t < t_2$$

и

$$\|x(t_2)\| = \varepsilon, \ \text{ а } \ \|y(t)\| < \rho \ \text{ при } t_1 \le t \le t_2.$$

Воспользуемся выражением для производной по времени $\dot{v}(x, y, t)$, вычисленной от функции $v(x, t)$ в силу системы (3.1). Для этого запишем $\dot{v}(x, y, t)$ в виде

$$\dot{v}(x, y, t) = \dot{v}_{(3.3)}(x,t) + \left(\frac{\partial v(x.t)}{\partial x}\right)' (X(x, y, t) - X(x, \varphi(x, t), t)). \tag{3.15}$$

Для оценки ее сверху вдоль решения ($x(t)$, $y(t)$) сначала заметим, что с учетом (3.7)

$$\|\varphi(x(t), t)\| \le L_2\|x(t)\| \le L_2\varepsilon < \rho \tag{3.16}$$

для всех $t \in [t_1, t_2]$ в силу выбора числа ε согласно (3.5). Поэтому, учитывая (3.7), а также неравенство Липшица и соотношения (3.2), (3.10), (3.11), будем иметь

$$\begin{aligned}\dot{v}(x(t), y(t), t) \le \dot{v}_{(3.3)}(x(t), t) + ML_1\left(y(t) - \varphi(x(t), t)\right) < -\sigma + \mu ML_1 < \\ < -\sigma + ML_1(\sigma/(2ML_1)) = -\sigma/2 < 0\end{aligned}.$$

для всех $t \in [t_1, t_2]$. Следовательно, функция $v(x(t), t)$ монотонно убывает на участке $t_1 \le t \le t_2$. Поэтому с учетом а) получаем

$$a_1(\varepsilon) = a_1(\|x(t_2)\|) \le v(x(t_1), t_1) \le b_1(\|x(t_1)\|) = b_1(\gamma).$$

Однако это противоречит неравенству (3.9). Таким образом, (3.13) выполняется при $t \ge t_0$ до тех пор, пока имеет место (3.14).

С другой стороны, вдоль рассматриваемых решений нарушение неравенства (3.14) при возрастании времени t от момента $t = t_0$ не может произойти раньше, чем нарушится (3.13). В самом деле, из (3.2), (3.7) имеем оценку

$$\|y(t)\| < \mu + \|\varphi(x(t), t)\| \le \mu + L_2\|x(t)\| < \mu + L_2\varepsilon, \tag{3.17}$$

откуда на основании (3.5), (3.11) следует, что $\|y(t)\| < \rho / 2 + \rho / 2 = \rho$ при всех $t \ge t_0$, для которых выполняется условие (3.13). Поэтому неравенство (3.13) остается справедливым при всех $t \ge t_0$, а значит, нулевое решение (3.1) устойчиво относительно компоненты $x(t)$.

Устойчивость начала системы (3.1) относительно компоненты $y(t)$ вытекает непосредственно из оценки (3.17) в силу произвольности выбора чисел $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$. Равномерная устойчивость рассматривается аналогично.

Замечание 3.1. Если в условиях теоремы 3.1.1 функция $\varphi(x, t) \equiv 0$ для всех $(x, t) \in U_x \times \mathbb{R}^+$, то получаем утверждение об устойчивости и равномерной устойчивости нулевого решения системы (3.1) относительно части переменных (переменных y) [103].

Определение 3.2. *Пусть* φ: $U_x \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$ *– непрерывная функция. Будем говорить, что начало координат системы* (3.1) ***равномерно асимптотически устойчиво по координатам*** $z_0 = (x_0, y_0)$ ***по отношению к разности*** $y - \varphi(x, t)$, *если оно равномерно устойчиво по отношению к* *этой разности и если можно указать число* $\sigma > 0$ *такое, что для любых чисел* $t_0 \geq 0$ и $\xi > 0$ *существует момент времени* $T_1 = T_1(t_0, \xi) > 0$, *для которого имеет место неравенство*

$$\|y(t) - \varphi(x(t), t)\| < \xi \quad \forall\, t \geq t_0 + T_1, \tag{3.18}$$

как только начальное состояние $z_0 = (x_0, y_0)$ *решения* $z(t) = (x(t), y(t))$ *принадлежит* $B_\delta^{p+q} \cap U$. *Если при этом число* T_1 *не зависит от* $t_0 \geq 0$, *то будем говорить, что начало координат системы* (3.1) ***равномерно асимптотически устойчиво по отношению к разности*** $y - \varphi(x, t)$.

Теорема 3.1.2 [51]**.** *Пусть существуют шар* B_Δ^{p+q} ($\Delta > 0$, $B_\Delta^{p+q} \subset U$), *непрерывно дифференцируемая функция* V: $B_\Delta^{p+q} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *непрерывная локально липшицева по* x *равномерно по* $t \geq 0$ *функция* φ: $B_\Delta^p \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(0, t) = 0$, *а также функции* a, b, $c \in \mathbf{K}$ *такие, что для каждой точки* $(x, y, t) \in B_\Delta^{p+q} \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(\|y - \varphi(x, t)\|) \leq V(x, y, t) \leq b(\|y - \varphi(x, t)\|)$;

2) $\dot{V}(x, y, t) \leq -c(\|y - \varphi(x, t)\|)$

3) *нулевое решение системы* $\dot{x} = X(x, \varphi(x, t), t)$, $x \in U_x$, $t \geq 0$, *равномерно асимптотически устойчиво.*

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Поскольку выполнены все требования теоремы 3.1.1, то нулевое решение (3.1) равномерно устойчиво, т. е. $\forall \Lambda > 0$ $\exists \lambda = \lambda(\Lambda) > 0$, что для решения $z(t) = (x(t), y(t))$

$$\|z(t)\| < \Lambda \quad \forall\, t_0 \geq 0 \ \text{ и } \ \forall t \geq t_0, \tag{3.19}$$

если только $\|z_0\| < \lambda$. Аналогично этому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\|z(t)\| < \varepsilon \quad \forall t_0 \geq 0 \ \text{ и } \ \forall t \geq t_0 \ \text{ при } \|z_0\| < \delta. \tag{3.20}$$

Пусть $v: B_\rho^p \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\rho < \Delta$, – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая, как и при доказательстве теоремы 3.1.1, условиям *a*)–*c*) с функциями Хана a_1, b_1, c_1 согласно требованию равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.5); и пусть постоянные Липшица $L_1 > 0$ и $L_2 > 0$ удовлетворяют неравенствам (3.6), (3.7) в области $B_\rho^{p+q} \times \mathbb{R}^+$.

Далее, из равномерной устойчивости нулевого решения (3.1) относительно разности $y - \varphi(x, t)$ следует, что $\forall \mu > 0\ \exists \nu = \nu(\mu) > 0$, для которых выполняется неравенство

$$\|y(t) - \varphi(x(t), t)\| < \mu \ \ \forall (x_0, y_0) \in B_\nu^{p+q} \quad \forall t \geq 0. \tag{3.21}$$

Более того, на основании требований 1), 2) теоремы 3.2 начало системы (3.1) равномерно асимптотически устойчиво по отношению к разности $y - \varphi(x, t)$ [101]. Поэтому существует число $\sigma > 0$ такое, что для любого числа $\xi > 0$ можно указать момент времени $T_1 = T_1(\xi) > 0$, для которого имеет место неравенство

$$\|y(t) - \varphi(x(t), t)\| < \xi \ \ \forall t_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0 + T_1 \text{ и } \forall\ z_0 = (x_0, y_0) \in B_\sigma^{p+q}. \tag{3.22}$$

В дальнейшем будем считать выполненными неравенства

$$\varepsilon < \min\{\rho / (2L_2), \rho, \lambda\}, \ \ \Lambda < \Delta, \ \ \lambda < \sigma. \tag{3.23}$$

Нетрудно проверить, что наряду с введенными выше величинами ρ, ε, δ, ξ можно указать число γ, для которого одновременно будут выполнены следующие условия:

$$0 < \gamma < \min\{\delta, (\delta - \xi) / L_2\}, \tag{3.24}$$

$$0 < \xi < \min\{\delta, c_1(\gamma) / (ML_1), \rho / 2\}, \tag{3.25}$$

$$b_1(\gamma) < a_1(\varepsilon). \tag{3.26}$$

Зафиксируем момент времени T, ограничив его снизу неравенством

$$T > b_1(\lambda) / (c_1(\gamma) - ML_1\xi). \tag{3.27}$$

В силу (3.25) величина T, по крайней мере, больше нуля.

Покажем, что норма вектора $x(t) = x(z_0, t_0, t)$ с начальными данными $t_0 \geq 0$, $z_0 \in B_\lambda^{p+q}$, не может быть больше числа γ одновременно для всех значений $t_0 + T_1 \leq t \leq t_0 + T_1 + T$. В самом деле, пусть, напротив,

$$\|x(t)\| \geq \gamma \ \ \forall t \in [t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T]. \tag{3.28}$$

Тогда в силу (3.19), (3.28) справедливы соотношения (3.16). По построению

$$\gamma \leq \|x(t)\| \leq \Lambda \ \text{ для } \ y, \varphi(x(t), t) \in B_\rho^q. \tag{3.29}$$

Поэтому, используя, как и при доказательстве теоремы 3.22, представление (3.15), получаем оценку

$$\dot{v}(x, y, t) \leq -c_1(\gamma) + ML_1\|y - \varphi(x(t), t)\|. \tag{3.30}$$

Выбранное нами решение $z(t)$, $z_0 \in B_\lambda^{p+q}$, с учетом (3.16), (3.19), (3.25) удовлетворяет соотношениям (3.29). Поэтому, подставляя его в (3.30) и интегрируя по t на отрезке $[t_0+T_1,\ t_0 + T_1 + T]$, будем иметь

$$v(x(t),t) \le v(x_0,t_0) - Tc_1(\gamma) + ML_1 \int_{t_0+T_1}^{t} \| y(\tau) - \varphi(x(\tau),\tau) \| \, d\tau \, .$$

Отсюда, используя оценки a), (3.22), (3.23), (3.27), получаем:

$$v(x(t),t) \le b(\lambda) - Tc_1(\gamma) + ML_1T\xi < 0.$$

Однако последнее невозможно, так как функция v неотрицательна. Поэтому существует момент времени $t_1 \in [t_0+T_1,\ t_0 + T_1 + T]$ такой, что $\|x(t_1)\| < \gamma$. Отсюда, учитывая свойства a), b), будем иметь цепочку неравенств:

$$a(\|x(t_1)\|) \le v(x(t_1),t_1) \le b_1(\|x(t_1)\|) < b_1(\gamma).$$

Но в таком случае, опираясь на неравенство (3.26), получим $\|x(t_1)\| < \delta$. При этом на основании (3.22), (3.24) можем написать, что

$$\|y(t_1)\| < \xi + \|\varphi(x(t_1),t_1)\| \le \xi + L_2\|x(t_1)\| < \xi + L_2\gamma < \delta.$$

Поэтому в силу (3.19) $\|x(t)\| < \varepsilon\ \ \forall t \ge t_1$ и тем более для всех $t \ge t_0 + T_1 + T$. Таким образом, с учетом произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ равномерно по $t_0 \ge 0$ норма $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ для каждой пары $(x_0, y_0) \in \in B_\lambda^{p+q}$. Кроме того, из (3.7), (3.22), (3.23) следует оценка

$$\|y(t)\| < \xi + \|\varphi(x(t),t)\| \le \xi + L_2\|x(t)\| < \xi + L_2\varepsilon$$

одновременно для всех $t_0 \ge 0$ и всех $t \ge t_0 + T_1 + T$, если $z_0 \in B_\lambda^{p+q}$. Другими словами, $\|y(t)\| \to 0$ также при $t \to +\infty$ равномерно по $t_0 \ge 0$, откуда и следует равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (3.1) по $z_0 = (x_0, y_0)$ и $t_0 \ge 0$.

Теорема 3.1.3 [51]. *Пусть* $U = \mathbb{R}^n$. *Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемая функция* V: $\mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *непрерывная локально липшицева по* x *равномерно по* $t \ge 0$, *функция* φ: $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(0,t) = 0$, *а также функции* a, b, $c \in \mathbf{K}$ *такие, что для каждой точки* $(x, y, t) \in \mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(\|y - \varphi(x,t)\|) \le V(x,y,t) \le b(\|y - \varphi(x,t)\|)$;

2) $\dot{V}(x,y,t) \le -c(\|y - \varphi(x,t)\|)$

3) *нулевое решение системы* (3.3) *равномерно глобально асимптотически устойчиво*;

4) *всякое решение системы* (3.1) *ограничено при* $t \ge 0$.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.1) *равномерно глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. При выполнении всех условий теоремы 3.1.3 нулевое решение системы (3.18) будет равномерно асимптотически устойчиво в силу теоремы 3.1.2. Поэтому для завершения доказательства теоремы 3.3 достаточно показать, что всякое решение $z(t) = (x(z_0, t_0, t), y(z_0, t_0, t))$ системы (2.1) с произвольными начальными данными $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{p+q}$ стремится к началу координат при $t \to +\infty$. Для подтверждения этого сначала заметим, что норма $\|y(t) - \varphi(x(t), t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, где $x(t) = x(z_0, t_0, t)$, $y(t) = y(z_0, t_0, t)$. Это можно обосновать точно так же, как и в [101] для устойчивости в целом по части переменных. Кроме того, так как по условию 4) все решения ограничены при $t \ge 0$, то можно указать число $A > 0$ такое, что $\|z(t)\| \le A \ \ \forall t \ge t_0$.

Пусть постоянные Липшица $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ соответствуют условиям (3.16), (3.17) в шаре B_A^{p+q} для всех значений $t \ge 0$.

Покажем сначала, что $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Действительно, если бы это было не так, то на основании уже имеющегося свойства равномерной асимптотической устойчивости существовало бы число $\eta > 0$, для которого $\|x(t)\| \ge \eta \ \ \forall t \ge t_0$. Для получения противоречия поступим следующим образом. Пусть v: $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – непрерывно дифференцируемая, допускающая бесконечно большой низший предел при $\|x\| \to +\infty$ ([8]) функция, удовлетворяющая вместе с числом $M > 0$ и функциями Хана a_1, b_1, c_1 условиям a)–c) в шаре B_A^p при всех $t \ge 0$ согласно теореме Барбашина – Красовского [9]. Последнее возможно с учетом требования 3) теоремы 3.27.

Зафиксируем числа $\mu > 0$ и $T > 0$ с тем условием, что

$$\|y(t) - \varphi(x(t), t)\| < \mu \ \ \forall t \ge t_0 + T, \tag{3.31}$$

причем считаем, что

$$L_1 M \mu < \sigma, \quad -\sigma = \sup_{\eta \le \|x\| \le A,\ t \ge 0} \dot{v}_{(3.3)}(x,t),$$

а $\dot{v}_{(3.3)}$ – производная по времени, вычисленная от функции v в силу системы (3.3). Тогда при всех значениях $t \geq t_0 + T$ из выражения для производной по времени от функции v теперь уже в силу системы (3.1) можно записать представление

$$v(x(t),t) = v(x(t_0+T),t_0+T) + \int_{t_0+T}^{t} \dot{v}_{(3.3)}(x(\tau),\tau)d\tau +$$

$$+\int_{t_0+T}^{t} \left(\frac{\partial v(x(\tau),\tau)}{\partial x}\right)' (X(x(\tau),y(\tau),\tau) - X(x(\tau),\varphi(x(\tau),\tau),\tau)d\tau,$$

из которого с учетом (3.6), (3.31), а) и с) будем иметь следующие неравенства:

$$v(x(t), t) \leq b_1(\|x(t_0 + T)\|) - (t - (t_0 + T))\sigma - L_1M\mu < 0,$$

если t достаточно велико. Последнее и приводит нас к противоречию. Поэтому компонента $x(t)$ с течением времени попадает в шар B_η^p с любым достаточно малым радиусом $\eta > 0$, т. е. $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Учитывая это, легко доказать стремление к нулю нормы $\|y(t)\|$ при $t \to +\infty$. С этой целью достаточно воспользоваться (3.7) и следующим неравенством треугольника:

$$\|y(t)\| \leq \|y(t) - \varphi(x(t), t)\| + \|\varphi(x(t), t)\| \leq \|y(t) - \varphi(x(t), t)\| + L_2\|x(t)\|.$$

Теорема доказана.

Определение 3.3. *Пусть* $\varphi : U_x \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$ *– непрерывная функция. Будем говорить, что начало координат системы* (3.1) *неустойчиво относительно разности* $y - \varphi(x,t)$, *если существуют числа* $\mu > 0$ *и существует* $t_0 \geq 0$ *такие, что для любого* $\delta > 0$ *существует решение* $x(t) = x(z_0, t_0, t)$, $y(t) = y(z_0, t_0, t)$ *с начальным условием* $z_0 = (x_0, y_0) \in B_\delta^{p+q}$ *и существует момент времени* $t^* > t_0$, *для которого*

$$\| y(t^*) - \varphi(x(t^*),t^*) \| \geq \mu.$$

Теорема 3.1.4. *Пусть для системы* (3.1) *существуют непрерывная локально липшицева по x равномерно по* $t \geq 0$ *функция* $\varphi : U_x \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$,

$\varphi(0, t) = 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *функции* a, $b \in \mathbf{K}$ *такие*, *что выполняются условия*:

1) $V(x, y, t) \le b(\| y - \varphi(x,t) \|) \quad \forall (x, y, t) \in U \times \mathbb{R}^+$;

2) $\forall t_0 \ge 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists z^* \in B_\alpha^{p+q}$ *такое*, *что* $V(z^*, t_0) > 0$;

3) $\dot V(x, y, t) \ge a(\| y - \varphi(x,t) \|) \quad \forall (x, y, t) \in U \times \mathbb{R}^+$

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Предположим, что все условия теоремы выполнены. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\overline{B_\varepsilon^{p+q}} \subset U$. Тогда с учетом предположения 2) для произвольного числа $\delta > 0$ (не нарушая общности считаем, что $\delta < \varepsilon$) можно указать точку $z_0 \in B_\delta^{p+q}$ и момент времени $t_0 \ge 0$ такие, что $V(z_0, t_0) > 0$. Покажем, что решение $z(z_0, t_0, t)$ покинет с ростом времени шар B_ε^{p+q}, что и будет удовлетворять свойству неустойчивости начала координат системы (3.1). Пусть, напротив, это не так. Тогда можем записать неравенство

$$\| z(z_0, t_0, t) \| < \varepsilon \quad \forall t \ge t_0.$$

В этом случае имеем:

$$\| y(z_0, t_0, t) - \varphi(x(z_0, t_0, t), t) \| \le \| y(z_0, t_0, t) \| + \| \varphi(x(z_0, t_0, t), t) \| \le$$

$$\le \varepsilon + L_2 \| x(z_0, t_0, t), t) \| \le \varepsilon(1 + L_2). \tag{3.32}$$

С другой стороны, поскольку $V(x, \varphi(x,t), t) \equiv 0$ и функция V непрерывна, то существует $\eta > 0$ такое, что

$$| V(z,t) | < V(z^*, t_0) \text{ если } \| y - \varphi(x,t) \| < \eta.$$

Согласно предположению 3) и соотношению (3.32) решение $z(z^*, t_0, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\eta \le \| y(z_0, t_0, t) - \varphi(x(z_0, t_0, t), t) \| \le \varepsilon(1 + L_2).$$

Поэтому можем записать

$$V(z(z^*, t_0, t), t) = V(z^*, t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot V(z(z^*, t_0, s), s) ds \ge$$

$$\ge V(z^*, t_0) + a(\eta)(t - t_0) \to +\infty.$$

при $t \to +\infty$. Однако на компакте $\overline{B_{\delta}^{p+q} \setminus B_{\varepsilon(1+L_2)}^{p+q}}$ функция $V(z, t)$ ограничена, что приводит к противоречию. Теорема 3.1.4 доказана.

3.1.1. ПРИМЕРЫ

Частный случай следующего примера рассмотрен А. М. Ляпуновым [81, с. 89].

Пример 3.1. Пусть $U = (U_x, U_y)$ − окрестность начала координат пространства $\mathbb{R}^{p+q}$, $V(x)$ $(V : U_x \to \mathbb{R})$ − непрерывно дифференцируемая функция и система (3.1) имеет вид уравнений

$$\dot{x}_s = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_s}\omega_s^2(x, y, t), \quad s = \overline{1, k},$$
$$\dot{y} = Y(x, y, t).$$

Предположим, что правые части суть непрерывные ограниченные при всех $t \geq 0$ функции, удовлетворяющие локальному условию Липшица, причем

$$V(0) = 0, \text{ и } Y(0, 0, t) = 0, \quad \omega_s(x, y, t) \neq 0, \ \forall (x, y, t) \in U \times \mathbb{R}^+.$$

Вычисляя полную производную по времени от функция $V(x)$ вдоль решений системы, получим

$$\dot{V}(x) = -\sum_{s=1}^{p}\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_s}\omega_s(x, y, t)\right)^2.$$

Если функция $V(x)$ является определенно положительной по переменным вектора x, то согласно теореме 3.1.1 вопрос о равномерной устойчивости равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы сводится к тому, чтобы нулевое решение редуцированной системы $\dot{y} = Y(0, y, t)$ было равномерно асимптотически устойчивым.

Если в дополнение к этому система уравнений

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_s} = 0, \quad s = \overline{1, k},$$

обладает лишь нулевым решением, то согласно теореме 3.1.2 равновесие $x = 0$, $y = 0$ будет равномерно асимптотически устойчивым.

Пример 3.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}+\dot{x}(1+\varphi(t))+x(\dot{\varphi}(t)+\varphi(t))=0,$$

где $\varphi:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная при всех $t\geq 0$ вместе со своей производной. Знакопостоянная функция

$$2V(x,\dot{x})=(\dot{x}+\varphi(t)x)^{2}\geq 0$$

имеет производную в силу системы

$$V(x,\dot{x})=-(\dot{x}+\varphi(t)x)^{2}\geq 0.$$

Множество нулей производной определяется формулой

$$Y=\{(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^{2}:\dot{x}+\varphi(t)x=0\ \forall t\geq 0\}.$$

На этом множестве уравнение сводится к скалярному дифференциальному уравнению $\dot{x}+\varphi(t)x=0$ Если предположить, что выполняется условие

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(s)ds\to-\infty \quad \text{равномерно по} \quad t_0\geq 0,$$

то нулевое решение скалярного уравнения будет равномерно асимптотически устойчивым. В этом случае равновесие $x=\dot{x}=0$ также будет равномерно асимптотически устойчивым.

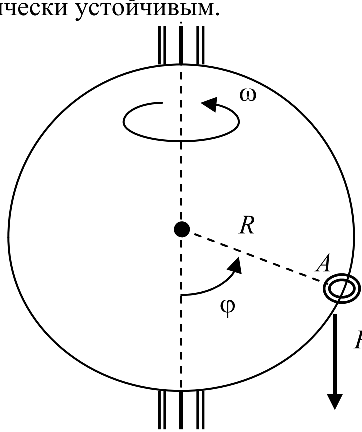

Рис. 3.1. Механическая система

Пример 3.3 [61]. Тяжелое колечко A ограниченной переменной массы $m(t) \geq m_0 > 0$ может скользить без трения по окружности радиусом R, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра (рис. 3.1). Предположим, что относительная скорость присоединяющихся (отделяющихся) частиц равна нулю и колечко подвержено действию силы сопротивления его движению, пропорциональной угловой скорости $\dot{\varphi}$, величина которой выражается формулой

$$F = (m(t) + R\omega^2\cos 2\varphi - g\sin\varphi)\,\dot{\varphi}.$$

Положение равновесия $\varphi = \varphi_0$ колечка определяется из векторного равенства центробежной силы $\vec{F}_c$, равной по величине $F_c = m(t)R\omega^2\sin\varphi$, и силы тяжести $\vec{P} = m(t)\vec{g}$. Поэтому можем записать

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R\omega^2\sin\varphi}{g} \quad \text{или} \quad \cos\varphi_0 = \frac{g}{R\omega^2}.$$

Запишем уравнение Ньютона в проекции на касательную к траектории движения колечка. В соответствии с уравнениями движения тел переменной массы [95] получим

$$\ddot{x} + (m(t) + f'(x))\dot{x} + m(t)f(x) = 0, \quad x = \varphi - \varphi_0,$$

где $f(x) = R\omega^2\sin(x + \varphi_0)\cos(x + \varphi_0) - g\sin(x + \varphi_0)$, а $f'(x)$ – производная функции $f(x)$.

Возьмем функцию Ляпунова $2V(x,\dot{x}) = (\dot{x} + f(x))^2$. Ее полная производная по времени в силу уравнения движения представляется формулой $\dot{V}(x,\dot{x}) = -m(t)(\dot{x} + f(x))^2$.

На множестве, где $\dot{V}(x,\dot{x}) = 0$, движения описываются дифференциальным уравнением первого порядка $\dot{x} + f(x) = 0$. Очевидно, что если $xf(x) > 0$, $x \neq 0$, то равновесие $x = 0$ такого уравнения будет асимптотически устойчивым. Отсюда по теореме 3.1.2 равновесие $x = \dot{x} = 0$ исследуемого движения будет равномерно асимптотически устойчивым.

Если дополнительно потребовать, чтобы все решения исследуемого дифференциального уравнения были ограниченными с ростом времени t, то на основании теоремы 3.1.3 получим глобальную равномерную асимптотическую устойчивость равновесия $x = \dot{x} = 0$. Для получения условий этого перейдем к соответствующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -m(t)f(x) - y(m(t) + f'(x)). \end{cases}$$

Заметим, что наличие используемой функции V говорит о том, что модуль $|y + f(x))|$ ограничен вдоль решений системы уравнений. Следовательно, если одна из координат решения $(x(t), y(t))$ ограничена, то вторая будет также ограничена. Рассмотрим функцию $2V_1(y) = y^2$, для которой производная по времени есть

$$\dot{V}_1 = -m(t)f(x)y - (m(t) + f'(x))y^2.$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$-m(t)f(x)y - (m(t) + f'(x))y^2 \le 0 \quad \forall t \ge 0$$

при ограниченных $|x|$ и достаточно больших значений $|y|$. Тогда при ограниченных x производная $\dot{V}_1$ будет неположительной, а значит координата $y(t)$ будет ограниченной. Таким образом, при выполнении указанного условия обе координаты решения $(x(t), y(t))$ не могут быть одновременно неограниченными.

Пример 3.4. Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = axy^2, \\ \dot{y} = ax^3 + byz^2, \\ \dot{z} = cy^3 + dz^3, \end{cases}$$

где a, b, c, d – постоянные, причем $abcd \ne 0$. Для функции Ляпунова $V(x, y) = x^2 \ge 0$ имеем знакоположительную производную по времени в силу системы в виде $\dot{V}(x, y) = 2ax^2y^2 \le 0$. С учетом того, что $a \ne 0$, нули производной определяются множеством

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}.$$

Исследуем поведение решений исходной системы на Y, рассмотрев два случая.

1) Если $x = 0$, то изучаемая система сводится к системе двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = byz^2, \\ \dot{z} = cy^3 + dz^3, \quad bd \neq 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Для рассмотрения поведения решений этой редуцированной системы возьмем функцию Ляпунова $V_1(x, y) = y^2 \geq 0$ с производной по времени в силу системы (3.33), равной

$$\dot{V}_1(x, y) = 2by^2 z^2. \tag{3.34}$$

Здесь необходимо рассмотреть два взаимоисключающих случая.

А) Если $b < 0$, то нулевое решение системы (3.33) асимптотически устойчиво при $d < 0$ и неустойчиво, если $d > 0$. Действительно, на множестве, где $\dot{V}_1(x, y) = 0,$ имеем $yz = 0$. Поэтому, если производная обращается в нуль за счет равенства $y = 0$, то система (3.33) равносильна скалярному уравнению

$$\dot{z} = dz^3. \tag{2.35}$$

Для такого уравнения условие $d < 0$ означает асимптотическую устойчивость решения $z = 0$. Если же $d > 0$, то это решение неустойчиво, а значит, в силу инвариантности множества Y неустойчивым будет и начало координат исходной системы.

Пусть теперь производная $\dot{V}_1(x, y)$ обращается в нуль за счет равенства $z = 0$. Тогда система (3.33) равносильна условию $y = 0$. Следовательно, множество нулей производной по времени функции $V_1(x, y)$ совпадает с началом координат системы (3.33). Отсюда по теореме Н. Н. Красовского [75] получаем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.33).

В) Остается рассмотреть случай $b > 0$. Проведя здесь рассуждения, аналогичные случаю А), приходим к следующему выводу: либо нулевое решение скалярного уравнения (3.35) асимптотически устойчиво ($d < 0$), либо оно неустойчиво ($d > 0$). И в том, и в другом случае выполняются все предположения теоремы 3.1.4, а значит, при $d \neq 0$ имеет место неустойчивость начала координат исследуемой системы.

2) Если производная по времени функции $V(x, y)$ равна нулю при $y = 0,$ то изучаемая система сводится к соотношениям

$$\dot{x} = 0, \quad cx = 0,$$

откуда следует, что $x = 0$, так как $c \neq 0$. Следовательно, условие 4) теоремы 3.1.4 также выполняется. Таким образом, начало координат рассматриваемой системы неустойчиво.

3.1.2. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Заметим, что если функция Ляпунова V лишь знакопостоянна, а ее производная по времени – знакоотрицательная, то требование неасимптотической устойчивости на многообразии $V = 0$ не обеспечивает устойчивости относительно всего фазового пространства. Действительно, можно показать это на простом примере автономного случая.

Пример 3.5. Рассмотрим систему уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = \frac{xy^2}{1 + x^2 + y^2},\ \dot{y} = -\frac{y^3}{1 + x^2 + y^2}.$$

Знакоположительная функция $V = y^2$ имеет производную по времени, равную $\dot{V} = -\dfrac{2y^4}{1 + x^2 + y^2} \le 0.$ На множестве, где $V = 0$, система переходит в скалярное уравнение $\dot{x} = 0$, обладающее неасимптотически устойчивым положением равновесия $x = 0$. Однако нулевое решение исходной системы уравнений неустойчиво, в чем нетрудно убедиться непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений.

Можно ожидать, что в отдельных случаях такое утверждение будет иметь место, если потребовать выполнения некоторых дополнительных условий. Приведем пример одной из таких ситуаций.

Пусть имеем систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y, z, t), & x \in \mathbb{R}^p, \\ \dot{y} = Y(x, y, z, t), & Y(x, y, 0, t) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^q, \\ \dot{z} = Az + Z(x, y, z, t), & Z(x, y, 0, t) = 0, \ z \in \mathbb{R}^r, \end{cases} \tag{3.36}$$

где $X:\ \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ – непрерывная функция, $X(0, 0, 0, t) = 0$, Y и Z – ограниченные по t и голоморфные по x, y, z, причем разложение вектор-функции Z начинается с членов не ниже второй степени; A – квадратная ($n \times n$)-матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части.

Теорема 3.1.1.1. *Предположим, что существует окрестность U точки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и непрерывно дифференцируемая функция V: $U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ такая, что для некоторой функции $a \in$* **K** *и любых* значений $(x, y, z, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняются условия*:

1) $V(x, y, z, t) \ge a(\|x\|)$, $V(0, 0, 0, t) = 0$;
2) $\dot{V}(x, y, z, t) \le 0.$

Тогда нулевое решение системы (3.36) *устойчиво.*

Более того, если для некоторой функции $b \in$ **K** *и любых* (x, y, z, t) $\in \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняется неравенство*

3) $V(x, y, z, t) \le b(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$,

то нулевое решение равномерно устойчиво, и всякое решение, близкое к невозмущенному, стремится при $t \to +\infty$ *к одному из установившихся движений* $x = 0$, $y_j = c_j$, $z = 0$.

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.1 тогда согласно теореме В. В. Румянцева [101] нулевое решение (3.36) будет устойчивым по переменным вектора x. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого начального момента времени $t_0 \ge 0$ можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для всех $(x_0, y_0, z_0) \in B_\delta$ и для всех $t \ge t_0$ будет выполняться неравенство: $\|x(x_0, y_0, z_0, t)\| < \varepsilon$. При этом если $\|(x_0, y_0, z_0)\| < \delta$, то, подставляя во вторую и третью группу уравнений (3.36) компоненту $x(x_0, y_0, z_0, t)$, приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{y} = \tilde{Y}(y, z, t), \\ \dot{z} = Az + \tilde{Z}(y, z, t), \end{cases} \tag{3.37}$$

для которой выполнены все требования теоремы И. Г. Малкина [84, с. 113]. На основании этой теоремы нулевое решение (2.37) равномерно устойчиво по t_0 (но не по отношению компоненты x_0 !), причем всякое решение (3.36) стремится при $t \to +\infty$ к одному из положений равновесия $y_j = c_j$, $j = \overline{1, q}$; $z_j = 0$, $j = \overline{1, r}$.

Таким образом, нулевое решение (3.36) оказывается устойчивым. Второе утверждение теоремы 3.1.1 рассматривается аналогично с использованием теоремы В. В. Румянцева [101] о равномерной устойчивости по части переменных.

3.1.3. ТРЕУГОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть система (3.33) имеет вид

$$\dot{x} = X(x, y, t), \quad x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q, t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.38}$$

$$\dot{y} = Y(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^q, \; t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.39}$$

которую в научной литературе принято называть треугольной. Такие системы встречаются, например, при исследовании математических моделей разоружения [78, 149]. Будем предполагать, что эти уравнения удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим существование, единственность и неограниченную продолжаемость всех решений при $t \geq 0$. Кроме того, пусть $X(0,0,t)=0$, $Y(0,t)=0, \forall t \geq 0$, т. е. уравнения обладают тривиальным решением $x = 0$, $y = 0$.

Для автономного случая системы (3.38), (3.39) задача о локальной устойчивости нулевого решения рассматривалась в работе [149], а в [156, 157, 161, 162] – задача о глобальной асимптотической устойчивости. Причем в работе [162] используется метод знакоопределенных функций Ляпунова, а в [156, 157, 161] – методы качественной теории устойчивости динамических систем. В последнем случае отмечена связь изучаемой проблемы устойчивости треугольных систем с принципом сведения.

Проиллюстрируем теоремы п. 3.1 на примере треугольной системы (3.38), (3.39). Для этого предварительно заметим, что в качестве функции $y = \varphi(x, t)$ здесь можно взять $y \equiv 0$. Выделим уравнение

$$\dot{x} = X(x,0,t), \quad x \in \mathbb{R}^p,\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.40}$$

Теорема 3.1.1.1 [62]. *Решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.38), (3.39) *равномерно устойчиво*, *если*:

1) *решение* $y = 0$ *уравнения* (3.39) *равномерно устойчиво*;

2) *решение* $x = 0$ *уравнения* (3.40) *равномерно асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Так как нулевое решение уравнения (3.39) равномерно устойчиво, то существует [98] непрерывно дифференцируемая, определенно положительная функция $V(y,t)$, определенная в области $B_\rho \times \mathbb{R}^+, \rho > 0,$ такая, что $a(\|y\|) \leq V(y,t) \leq b(\|y\|),$ где a и b – функции класса **K**; ее производная $\dot{V}(y,t)$ (по времени в силу уравнения (3.39)) является знакоотрицательной функцией. Используя теперь эту же функцию Ляпунова для системы уравнений (3.38), (3.39) как знакопостоянную функцию относительно пространства $\mathbb{R}^{p+q}$, убеждаемся, что она удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 3.1.1, где следует положить $\varphi(x, t) \equiv 0$. Кроме того, условие 2) теоремы 3.2.1 влечет выполнение условия 3) теоремы 3.1.1. Таким образом, согласно теореме 3.1.1 решение $x = 0$, $y = 0$ системы (3.38), (3.39) равномерно устойчиво.

Теорема 3.1.2.1 [62]. *Решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.38), (3.39) *равномерно асимптотически устойчиво*, *если*:

1) *решение* $y = 0$ *уравнения* (3.39) *равномерно асимптотически устойчиво*;

2) *решение* $x = 0$ *уравнения* (3.40) *равномерно асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Обоснование этого и следующего утверждений можно осуществить аналогично доказательству теоремы 3.1.1.

Теорема 3.1.3.1. *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$. *Если нулевое решение уравнения* (3.39) *и нулевое решение уравнения*

$$\dot{x} = X(x, 0, t), \quad x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.41}$$

равномерно глобально асимптотически устойчивы, а всякое решение системы (3.38), (3.39) *ограничено при* $t \geq 0$, *то решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.38), (3.39) *равномерно глобально асимптотически устойчиво.*

Исследуем теперь ситуацию, когда (3.39) обладает лишь свойством локальной асимптотической устойчивости.

Предложение 3.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *все решения системы* (3.39) *определены при* $t \in \mathbb{R}$;

2) *решение* $y = 0$ *системы* (3.39) *равномерно асимптотически устойчиво и* A *есть его область притяжения в* $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$;

3) *решение* $y = 0$ *системы* (3.30) *равномерно притягивающее*;

4) *решение* $x = 0$ *системы* (3.41) *равномерно устойчиво в целом*;

5) *всякое решение системы* (3.38), (3.39) *с начальными условиями* $(y_0, t_0) \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$ *ограничено при всех* $t \geq t_0$.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (3.38), (3.39) *равномерно асимптотически устойчиво и* $\mathbb{R}^p \times A$ *– его область притяжения.*

Доказательство. Поскольку имеют место условия 2), 3), то по теореме В.И. Зубова [35] применительно к системе (3.39) существуют две непрерывные функции $v : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и w: $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что:

i) $1 + v(y, t) < 0$ *для* $(y, t) \in A, y \neq 0$;

ii) $w(y,t) > 0$ *для* $(y, t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$, $y \neq 0$;

iii) $\forall \gamma_2 > 0$ $\exists \gamma_1 > 0$ и $\exists \alpha_1 > 0$, *что* $v(y, t) < -\gamma_1$ *и* $w(y, t) > \alpha_1$ *при* $\| y \| \geq \gamma_2$ *и* $t \in \mathbb{R}$;

iv) *функции* $v(y,t)$ *и* $w(y, t)$ *равномерно по* $t \in \mathbb{R}$ *стремятся к нулю при* $\|y\| \to 0$;

v) *если* $(\bar{y}, \bar{t})$ *– точка границы области* A, $\bar{y} \neq 0$, *то* $\lim v(y, t) = -1$ *при* $(y, t) \subset A$, $\|y - \bar{y}\| \to 0$, $(t - \bar{t}) \to 0$;

vi) *полная производная функции* v *по времени, вычисленная в силу системы* (3.39), *удовлетворяет равенству*

$$\frac{dv}{dt} = w(y, t)(1 + v(y, t)).$$

Для исследуемой системы (3.38), (3.39) положим $V(x, y, t) = -v(y,t)$. Тогда легко проверить, что для функции V выполнены все требования теоремы 3.1.2 при $\varphi(x, t) \equiv 0$, а значит нулевое решение системы (3.38), (3.39) равномерно асимптотически устойчиво. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что если $z_0 = (x_0, y_0)$ для $x_0 \in \mathbb{R}^p$, $(y_0, t_0) \in A$, то норма $\|z(z_0, t_0, t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Это можно сделать, повторив почти дословно доказательство теоремы 3.1.2 в той ее части, где доказывается асимптотическое стремление к нулю решений системы (3.36). Отличие состоит лишь в выборе начальных условий по компоненте y_0.

Отметим, что требование 5) теоремы 3.2.1 вызвано использованием соответствующей теоремы из [35] (теорема 50). Оно может быть заменено следующим условием, вытекающим из теоремы 51 [35]:

«*функция* $Y(y, t)$ *ограничена равномерно по* $t \in \mathbb{R}$ *в любом шаре* $\|y\| < \Delta$, $\Delta > 0$».

3.1.4. КАСКАД ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Взаимосвязанные системы изучались П. Сейбертом и Р. Суаресом [156, 157] для автономного случая, где использовано понятие *SIBO*-систем. В данном примере мы исследуем проблему стабилизации каскада неавтономных взаимосвязанных систем, опираясь на теоремы 3.1.2 и 3.1.3. Введем сначала основные понятия, соответствующие неавтономному случаю.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, содержащую управляющие функции u и v:

$$\dot{x} = X(x,u,t), \quad x \in \mathbb{R}^p,\, u \in \mathbb{R}^k,\, t \in \mathbb{R}, \tag{3.42}$$

$$\dot{y} = Y(y,v,t), \quad y \in \mathbb{R}^q,\, v \in \mathbb{R}^l,\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.43}$$

Предположим, что каждая из систем (3.42) и (3.43) стабилизируема в целом (равномерно глобально асимптотически устойчива), т. е. существуют такие функции $u = u(x, t)$ и $v = v(y, t)$ (определенного класса, который мы здесь не уточняем), что при их подстановке соответственно нулевое решение (3.42) и (3.43) равномерно глобально асимптотически устойчиво.

Задача состоит в поиске достаточных условий стабилизации в целом каскада взаимосвязанных систем

$$\dot{x} = X(x, c(y,t) + u, t), \tag{3.44}$$

$$\dot{y} = Y(y, v, t). \tag{3.45}$$

Объединенная система (3.44), (3.45) характеризуется непрерывной функцией $c(y, t)$ такой, что $c(0, t) \equiv 0$, $\forall t \geq 0$. Нетрудно представить себе схему взаимосвязи (3.44) и (3.45). Входной сигнал системы (3.44) складывается из преобразованного выходного сигнала системы (3.44) в виде $c(y, t)$ и управления $u(x, t)$.

Определение 3.4 [161]. Система (3.42) называется системой «малый вход – ограниченный выход» (или сокращенно *SIBO*-системой), если для каждой непрерывной функции $u(t)$, стремящейся к нулю при $t \to +\infty$, соответствующие решения (3.44), (3.45) ограничены при всех $t \geq 0$.

Теорема 3.1.5. *Предположим, что функции* $u = u^*(x, t)$ *и* $v = v^*(y, t)$ *стабилизируют в целом соответственно системы* (3.42) *и* (3.43). *Тогда, если при* $u = u^*(x, t) + w$ *система* (3.42) *есть SIBO-система и все ее решения определены при* $t \geq 0$, *то система* (3.44), (3.43) *стабилизируема в целом*.

Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы 3.1.3. Остается только привести условия, гарантирующие свойство *SIBO*-системы.

Теорема 3.1.6. *Пусть* u^* *удовлетворяет условиям теоремы* 3.1.5. *Предположим, что существует положительно определенная, допускающая бесконечно большой низший предел, непрерывно дифференцируемая функция* $W(x, t)$ *такая, что*

$$\dot{W}(x,t) = \frac{\partial W'(x,t)}{\partial x} X(x, u^*(x,t) + w, t) + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \leq 0 \tag{3.46}$$

для всех ограниченных значений $\|w\|$ *и достаточно больших величин* $\|x\|$ ($\|w\| \leq \alpha$, $\|x\| \geq \beta$).

Тогда при $u = u^*(x, t) + w$ *система* (3.42) *есть SIBO-система при условии, что каждое ее решение определено при всех* $t \geq 0$.

Пример 3.6. Рассмотрим системы

$$\dot{x} = x^3 + x^3 + u \tag{3.47}$$

и

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = v. \tag{3.48}$$

Пусть соответствующий каскад взаимосвязанных систем строится с помощью функции $c(y, t) = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + x^3(c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2) + x^3 u, \\ \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = v. \end{cases} \tag{3.49}$$

Очевидно, функции $u^* = -x^2$, $v^* = -y_1 - y_2$ стабилизируют соответственно системы (3.47) и (3.48). Положим $W(x, t) = 0{,}5x^2$. Тогда имеет место неравенство

$$\dot{W}(x,t) = -x^4(1 - (c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2) + x^2 - w) \le 0,$$

если выполнены следующие условия:

$$|y_1| \le \frac{1}{c_1(t)} \le c_1^* < +\infty, \quad |y_2| \le \frac{1}{c_2(t)} \le c_2^* < +\infty, \forall t \ge 0, \tag{3.50}$$

при $|w| \le \varepsilon$ и $|x| > 1 - \varepsilon$.

В нашем случае величины $|y_1|$ и $|y_2|$ стремятся к нулю, и поэтому при достаточно больших $|x|$ с течением времени будет $\dot{W}(x,t) \le 0$. Следовательно, все решения (3.48) определены при $t \ge 0$. Кроме того, (3.47) есть *SIBO*-система, таким образом, каскад взаимосвязанных систем (3.48) стабилизируем в целом согласно теореме 3.1.3.

Пример 3.7 (Системы, линейные по управлению). Здесь мы обратим внимание на специальный случай системы (3.42), когда правая часть линейна по управлению, т. е. представима в виде:

$$\dot{x} = X(x, t) + X_1(x, t)u. \tag{3.51}$$

Теорема 3.1.7. *Если существуют управления* $u = u^*(x, t)$ и $v = v^*(y, t)$, *стабилизирующие соответственно системы* (3.42) *и* (3.43), *тогда существует и управление* $u = u^{**}(y, t)$ *такое, что нулевое решение каскада взаимосвязанных систем*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,t) + X_1(x,t)(y + u^{**}(y,t)), \\ \dot{y} = Y(y, v^*(y,t), t) \end{cases} \tag{3.52}$$

равномерно устойчиво в целом.

Действительно, пусть управление $u = u^{**}(x, t)$ стабилизирует систему (3.51). Тогда u^* можно выбрать так, чтобы для каждой функции w, стремящейся к нулю при $t \to +\infty$, все решения системы

$$\dot{x} = X(x, t) + X_1(x, t)(u^*(x, t) + w) \tag{3.53}$$

были бы ограниченными. Это означает, что (3.52) есть *SIBO*-система. Отсюда по теореме 3.1.3 и следует требуемое утверждение.

Можно обосновать также и следующее утверждение.

Следствие 3.1. Пусть $W(x, t)$ – функция Ляпунова для системы (3.51) с $u = u^*(x, t)$ и $v = v^*(y, t)$ – функция, стабилизирующая систему (3.52). Тогда, если W и X_1 – полиномиальные функции по x, то управления v^* и

$$u^{**}(x, t) = u^*(x, t) - \frac{\partial W'(x,t)}{\partial x} X_1(x, t)$$

стабилизируют систему (3.52).

В прямом методе Ляпунова теореме обращения для случая неасимптотической устойчивости уделено достаточно большое внимание. Они в совокупности отражают сложность топологической структуры окрестности равновесия такого типа. Поэтому объяснимо появление работ [41, 49, 58, 119, 140], посвященных различным модификациям теоремы Ляпунова об устойчивости.

Теорема 3.1.8 [41]. *Предположим, что для системы* (2.1) *существуют непрерывно дифференцируемые функции* $v_1(x, y, t)$, $v_2(y, t)$ *и функции* a_1, $a_1 \in$ **K** *такие, что выполняются следующие условия*:

1) $v_1(x, y, t) \geq a_1(\| x \|)$, $\forall (x, y, t) \in D \times \mathbb{R}^+$, *и* $v_1(0, 0, t) = 0$, $\forall t \geq 0$;

2) $| v_2(y, t) | \leq a_2(\| y \|)$, $\forall (y, t) \in D_y \times \mathbb{R}^+$;

3) $\forall \alpha > 0$ *существует окрестность* U_y *точки* $y = 0$ *такая, что*

$$\inf v_2(y, t) > 0, (y, t) \in (\mathrm{Fr} U_y) \times \mathbb{R}^+, U_y \subset B_{\alpha y};$$

4) $\dot{v}(x, y, t) = \dot{v}_1(x, y, t) + \dot{v}_2(y, t) \leq 0 \;\; \forall (x, y, t) \in D \times \mathbb{R}^+$.

Тогда нулевое решение системы устойчиво.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ – произвольное число. Согласно условию 3) определим окрестность U_y точки $y = 0$, содержащуюся в шаре $B_{\alpha y}$ (пространства $\mathbb{R}^q$), такую, что

$$\mu = \inf v_2(y, t) > 0, \;\; (y, t) \in (\mathrm{Fr} U_y) \times \mathbb{R}^+.$$

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и выберем с учетом требования 2) число $\alpha > 0$ так, чтобы $| v_2(y, t) | \leq a_1(\varepsilon / 2)$, если только $(y, t) \in B_{\alpha y} \times \mathbb{R}^+$.

Пусть $0 < \beta < \mu$ и $t_0 \geq 0$. Тогда можно указать число $\delta = \delta(t_0) > 0$ настолько малое, что $v(z_0, t_0) = v_1(z_0, t_0) + v_2(z_0, t_0) < \beta$ при $\| z_0 \| < \delta$; это всегда можно осуществить на основании 1), 2). Теперь ясно, что при $\| z_0 \| < \delta$ будет $\| y(z_0, t_0, t) \| < \alpha < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$, так как в силу 1), 4) имеем

$$v_2(y(t),t_0) \le v(z(t),t_0) \le v(z_0,t_0), \quad \forall t \ge t_0.$$

Кроме того, $\| x(z_0,t_0,t) \| < \varepsilon \quad \forall t \ge t_0$, поскольку

$$a_1(\| x(t) \|) \le v_1(z(t),t) = v(z(t),t) - v_2(y(t),t) \le$$
$$\le v(z_0,t_0) - v_2(y(t),t) < a_1(\varepsilon/2),$$

что и завершает доказательство теоремы на основании свойства монотонности функции a_1.

Пример 3.8. Пусть динамическая система задается системой трёх дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2\psi(x_3), \\ \dot{x}_2 = -x_1\psi(x_3) - x_2\varphi(x_2)\sin\dfrac{\pi}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 \ne 0, \\ \dot{x}_3 = \alpha(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

и $\dot{x}_2 = 0$ при $x_1 = x_2 = 0$. Будем считать, что функции ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и α : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ непрерывны и $\varphi(x_2)\psi(x_3) > 0$ для всех $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$.

Пример 3.9. Пусть динамическая система определяется тремя дифференциальными уравнениями из примера 5.3. Функция v : $(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, x_3)$: $x_3 \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, заданная равенством $v(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{x_1^2 + x_2^2}$, имеет вне точек множества $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 = 0\}$ непрерывную производную по времени в силу системы, равную $\dot{v}(x) = -x_2^2\varphi(x_3)\dfrac{\pi}{x_1^2 + x_2^2}\sin\dfrac{\pi}{x_1^2 + x_2^2}$. Очевидно, при $\varphi(x_3) \ge 0$ эта функция удовлетворяет всем требованиям теоремы 5.5, а значит, множество M равномерно устойчиво.

Пример 3.10. Пусть динамическая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\right) + \beta(x, y) \quad \text{при} \quad x \ne 0, \end{cases}$$

и $\dot{y} = \beta(0, y)$ при $x = 0$, где $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, такая, что $\beta(0,0) = 0$, $y\beta(x, y) \le 0$. Функция Ляпунова

$$\mathrm{v(x,\, y)} = 0,5y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}} \cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \ \text{и} \ v(x, y) = 0,5y^2 \ \text{при} \ x = 0$$

является непрерывно дифференцируемой, ее производная по времени, вычисленная в силу исследуемой системы, равна, как нетрудно видеть, $\dot{v}(x, y) = y\beta(x, y)$ и неположительна. Поэтому для точки $M = \{(0, 0)\}$ выполнены все условия теоремы об устойчиво.

4. МЕТОД СЕЙБЕРТА

В данной главе предлагается метод формирования основных утверждений об устойчивости с использованием знакопостоянных функций Ляпунова, основанный на результатах П. Сейберта по проблеме принципа сведения [153, 158]. Для обоснования принципа сведения применяется разработка специальных средств качественной теории полудинамических систем. Это дало возможность развить метод функций Ляпунова для систем неавтономных дифференциальных уравнений в классе знакопостоянных вспомогательных функций.

4.1. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Рассмотрим систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t),\ x \in G \subset \mathbb{R}^n,\ \ f(0, t) = 0\ \ t \geq 0, \tag{4.1}$$

определенную в открытой связной окрестности D начала координат $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f: G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и локально липшицева по x. Тогда ясно, что через каждую точку (x_0, t_0) области определения системы проходит единственное решение $x(x_0, t_0, t)$, $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$. Как было отмечено в главе 1, для системы (1.1), удовлетворяющей локальному условию Липшица, имеет место свойство равномерной интегральной непрерывности решений.

Определим аналог свойства решений системы (4.1), введенное П. Сейбертом как "threshold property" [153].

Определение 4.1. Пусть Y замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Будем говорить, что пара $(0, Y)$ обладает *свойством Сейберта* [153, 158], если для любого $\mu > 0$ существует $\nu = \nu(\mu) > 0$ такое, что если решение $x(x_0, t_0, t)$, $x_0 \in B_\nu$, $t_0 \geq 0$, удовлетворяет неравенству $d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \nu$ на некотором интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $T > 0$, тогда $\|x(x_0, t_0, t)\| < \mu$ для $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Другими словами, данное определение означает, что если решение $x(x_0, t_0, t)$ «удаляется» от начала координат, то оно сначала начинает «удаляться» от множества Y.

Лемма 4.1. *Пусть Y – положительно инвариантное множество системы* (4.1), *содержащее начало координат. Если решение $x = 0$ системы* (4.1) *равномерно Y-притягивающее, тогда пара* $(0, Y)$ *обладает свойством Сейберта.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует $\mu > 0$, существуют последовательности

$$(x_{0n}),\ x_{0n} \in \mathbb{R}^n,\ \lim_{n\to+\infty} x_{0n} = 0\,;\ (t_{0n}) \subset \mathbb{R}^+\,;\ (t_n) \subset \mathbb{R}^+$$

такие, что

$$\lim_{n\to+\infty} \sup d(x(x_{0n}, t_{0n}, t_n), Y) = 0$$

и, кроме того,

$$\|x(x_{0n}, t_{0n}, t)\| < \mu \text{ для } t_{0n} \le t < t_{0n} + t_n$$

$$\|x(x_{0n}, t_{0n}, t_n)\| = \mu \quad \forall n \ge 1. \tag{4.2}$$

Очевидно, число $\mu > 0$ можно выбрать произвольным достаточно малым. Выберем число σ согласно определению 4.1 и число β из свойства РИН (определение 1.1) так, чтобы

$$\sigma < \beta. \tag{4.3}$$

Кроме того, выберем число $\alpha > 0$ в соответствии с определением равномерного Y-притяжения так, чтобы наряду с уже указанным числом μ выполнялись неравенства

$$2\alpha < \mu < \sigma. \tag{4.4}$$

Пусть величины ε и δ выбраны в соответствии со свойством РИН таким образом, что

$$\varepsilon < \mu/2, \tag{4.5}$$

$$\delta < \sigma - \mu. \tag{4.6}$$

Предположим сначала, что последовательность (t_n) ограничена. В таком случае, не теряя общности рассуждений, можно считать ее сходящейся к некоторому значению $t^* > 0$. С учетом свойства РИН (если положить $x_0 = 0$, $y_0 = x_{0n}$, $T = t^*$) для $\|x_{0n}\| < \sigma$ имеем:

$$\|x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \in [0, t^*], \ \ \forall t_{0n} \geq 0.$$

Но тогда это противоречит условию (4.2) для достаточно больших n и на этом доказательство леммы завершается.

Предположим теперь, что последовательность (t_n) не ограничена. Пусть число T выбрано в соответствии с определением 4.1. В этом случае для достаточно больших n величина $\tau_n = t_n - T$ будет положительной.

Введем в рассмотрение две точки $y_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t_n)$ и $z_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t_n - T)$. Согласно (4.2) для таких точек имеет место соотношение

$$z_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + \tau_n) \in x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n}, t\_\{0n\} + t_n)) \subset B_\mu \tag{4.7}$$

и равенство

$$y_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + \tau_n + T) = x(z_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n + T). \tag{4.8}$$

Используя (4.7) и условие $\|y_n\| = \mu$ (см. (4.2)) можем утверждать, что для достаточно больших значений n существует точка

$$z'_n \in B(z_n, \delta) \cap Y.$$

Тогда, опираясь на (4.6) и (4.7) можем заключить, что $z'_n \in B_\sigma \cap Y$. Поэтому определение свойства равномерного Y-притяжения дает соотношение

$$x(z'_n, t_{0n}, t_{0n} + T) \in B_\alpha, \ \ \forall t_{0n} \geq 0.$$

С учетом (4.7) и неравенства $t_n > T$ можем написать

$$\begin{gathered} x(z_n, t_{0n} + t_n - T, [t_{0n} + t_n - T, t_{0n} + t_n]) = \\ = x(x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t_n - T), t_{0n} + t_n - T, [t_{0n} + t_n - T, t_{0n} + t_n)]) = \\ = x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n}, t_{0n} + t_n]). \end{gathered}$$

Следовательно, на основании (4.3), (4.4), (4.7) и свойства РИН имеем

$$\begin{gathered} x(z_n, t_{0n} + t_n - T, [t_{0n} + t_n - T, t_{0n} + t_n]) = \\ = x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n}, t_{0n} + t_n) \in B(0, \mu) \subset B_\beta. \end{gathered}$$

Кроме того, так как $\|z - z'\| < \delta$, то по свойству РИН будем иметь неравенство

$$\|x(z_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n + T) - x(z'_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n + T)\| < \varepsilon.$$

Теперь (4.8), (4.9), (4.10) и свойство РИН дают

$$y_n = x(z_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n + T) \in B_{\alpha + \varepsilon}.$$

Наконец, из (4.4) и (4.5) вытекает, что $y_n \in B_\mu$. Однако это противоречит предположению (4.2).

Лемма доказана полностью.

4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Введем в рассмотрение следующее понятие.

Определение 4.2. *Будем говорить, что замкнутое положительно инвариантное множество Y, содержащее точку $x = 0$, является* ***равномерно устойчивым вблизи начала координат****, если существует окрестность U точки $x = 0$, в которой выполняется следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых начальных состояний $x_0 \in B_\delta$, $t_0 \geq 0$, и любого $T > 0$, удовлетворяющего условию*

$$x(x_0, t_0, t) \subset U \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

выполняется также и условие

$$d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Лемма 4.2. *Если Y равномерно устойчиво вблизи начала координат и пара $(0, Y)$ удовлетворяет свойству Сейберта, тогда $x = 0$ равномерно устойчиво.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $x = 0$ не является равномерно устойчивым. Тогда существует $\varepsilon > 0$, существуют последовательности (x_{0n}), $x_{0n} \to 0$, $(t_{0n}) \in \mathbb{R}^+$ и (t_n), $t_n \geq t_{0n}$, такие, что

$$\|x(x_{0n}, t_{0n}, t)\| < \varepsilon \text{ для } t_{0n} \leq t < t_n \text{ и } \|x(x_{0n}, t_{0n}, t_n)\| = \varepsilon \quad \forall n \geq 1. \qquad (4.9)$$

Возьмем последовательности положительных чисел (μ_n), $\mu_n \to 0$, и (ν_n), $\nu_n \to 0$, для которых пары (μ_n, ν_n) удовлетворяют свойству Сейберта.

Без потери общности можно предположить, что

$$\|x_{0n}| < \nu_n, \quad \overline{B_\varepsilon} \subset U, \qquad (4.10)$$

где U – окрестность, в которой выполняется свойство РИН. Тогда ясно, что $x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n} + t_n]) \subset U$. Согласно свойству устойчивости Y вблизи начала координат из (4.9) и (4.10) вытекает следующее:

$$x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n} + t_n]) \subset B(Y, \mu_n),$$

а значит, $d(x(x_{0n}, t_{0n}, t_n), Y) \to 0$ при $n \to +\infty$. Пришли к противоречию, так как это несовместимо с равенством в соотношениях (4.9) и свойством Сейберта.

Лемма 4.2 доказана.

Приведем теорему об устойчивости метода знакопостоянных функций Ляпунова.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *функция* $V \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *и функции* $a, b \in \mathbf{K}$ *такие, что*:

1) $a(d(Y_0, x)) \le V(x, t) \le b(\|x\|)$, $\forall (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$, *где*

$$Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0 \ \forall t \ge 0\}};$$

2) $\dot{V}(x,t) \le 0$, $\forall\ (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$;

3) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* Y_0.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (4.1) *равномерно устойчиво*.

Доказательство. Согласно предположению 1) множество Y непусто замкнуто и с учетом 2) оно положительно инвариантно. Покажем сначала, что множество Y равномерно устойчиво вблизи начала. С этой целью зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\overline{B_\varepsilon} \subset U$. Согласно 1) существует $\lambda > 0$ такое, что $V(x, t) > \lambda\ \forall t \ge 0$, если $d(Y, x) > \varepsilon$.

Так как $V(0, t) = 0$, то в силу того, что $V(x, t) \le b(\|x\|)$, для числа λ можно указать число $\delta > 0$ такое, что $V(x_0, t_0) \le \lambda$, $\forall t_0 \ge 0$, если $\|x_0\| < \delta$ ($\delta = b^{-1}(\lambda)$).

Следовательно, если решение $x(x_0, t_0, t)$ остается в окрестности U на интервале $t_0 \le t \le t_0 + T$ для $T > 0$, то согласно предположению 2) будем иметь:

$$V(x(x_0, t_0, t), t) \le \lambda, \ \ t_0 \le t \le t_0 + T \ \ \forall t_0 \ge 0.$$

Таким образом, с учетом предыдущих построений решение $x(x_0, t_0, t)$ удовлетворяет неравенству

$$d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \varepsilon \ \text{ для } \ t_0 \le t \le t_0 + T \ \ \forall t_0 \ge 0.$$

Следовательно, Y равномерно устойчиво вблизи начала координат. Кроме того, согласно предположению 3) и леммы 4.1 пара $(0, Y)$ удовлетворяет свойству Сейберта. В таком случае, используя лемму 4.2, получаем равномерную устойчивость для состояния равновесия $x = 0$. Теорема доказана.

4.3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Определение 4.3. *Будем говорить, что положительно инвариантное множество Y является* ***равномерно асимптотически устойчивым вблизи начала координат****, если оно равномерно устойчиво вблизи начала координат и, более того, существует* $\Delta > 0$ *такое, что* $x_0 \in B_\Delta$, $t_0 \geq 0$, *влечет равенство* $\lim\limits_{t\to+\infty} d(Y, x(x_0, t_0, t)) = 0$.

Лемма 4.3. *Нулевое решение системы равномерно асимптотически устойчиво, если выполняются следующие условия*:

1) $x = 0$ *является равномерно Y-асимптотически устойчивым*;

2) Y *равномерно асимптотически устойчиво вблизи начала координат*.

Доказательство. Покажем, что существует число $\sigma > 0$ такое, что для всех $\alpha > 0$ можно указать $T = T(\sigma, \alpha) > 0$, которое удовлетворяет соотношению

$$\|x_0\| < \sigma \;\Rightarrow\; \|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha,\ \forall t_0 \geq 0, \text{ и } \forall t \geq t_0 + T.$$

Действительно, из предположения 1) следует, что решение $x = 0$ является Y-равномерно притягивающим. Следовательно, по лемме 4.1 пара $(0, Y)$ обладает свойством Сейберта. Кроме того, согласно предположению 2) множество Y является равномерно устойчивым вблизи начала координат. В таком случае по лемме 4.2 решение $x = 0$ системы (4.1) равномерно устойчиво, т. е. $\forall\beta > 0\ \exists\sigma > 0$ такое, что

$$\|x_0\| < \sigma \;\Rightarrow\; \|x(x_0, t_0, t)\| < \beta \quad \forall t_0 \geq 0,\ \ \forall t \geq t_0. \tag{4.11}$$

При этом число $\sigma > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Поэтому с учетом предположения 2) для любого числа $\eta > 0$ существуют число $T_1 > 0$ такое, что имеют место соотношения

$$\|x_0\| < \sigma \;\Rightarrow\; d(x(x_0, t_0, t_0 + T_1), Y) < \eta,\ \ \forall t_0 \geq 0.$$

Иначе говоря, выполняется неравенство

$$d(x(x_0, t_0, t_0 + T_1), y) < \eta \quad \forall y\colon\ d(y, Y) < \eta, \text{ и } \forall t_0 \geq 0.$$

Отсюда с учетом (4.11) можем записать следующее:

$$\|x_0\| < \sigma \;\Rightarrow\; d(x(x_0, t_0, t_0 + T_1), y) < \eta, \text{ если } d(y, Y) < \beta + \eta,\ \forall t_0 \geq 0. \tag{4.12}$$

Поскольку $x = 0$ равномерно устойчиво, то по числу $\alpha > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого

$$\|x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha,\ \forall t_0 \geq 0 \ \text{ и } \ \forall t \geq t_0. \tag{4.13}$$

Более того, так как Y равномерно притягивающее вблизи начала координат, а числа $\beta > 0$ и $\eta > 0$ выбраны произвольно, то можно указать число $T_2 > 0$, удовлетворяющее соотношению

$$\|x_0\| < \beta + \eta,\ x_0 \in Y \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t_0 + T_2)\| < \delta / 2,\ \forall t_0 \geq 0.$$

Далее, с учетом замечания 1.1 можем записать следующее:

$$\|x_0\| < \beta + \eta,\ x_0 \in Y \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t_0 + T_2)\| < \gamma\ \ \forall t_0 \geq 0.$$

Поэтому, используя свойство РИН, для чисел $\beta = \gamma$, $\varepsilon = \delta /2$, $T = T_2$ и $\delta = \eta$, удовлетворяющих (4.12), можем также написать соотношения

$$\|x_0\| < \beta + \eta,\ x_0 \in Y \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t_0 + T_2)\| < \delta,\ \forall t_0 \geq 0. \qquad (4.14)$$

Положим $T = T_1 + T_2$ и используем последовательно неравенства (4.12), (4.14) и (4.13). Тогда получим условие

$$\|x_0\| < \sigma \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon,\ \forall t_0 \geq 0 \text{ и } \forall t \geq t_0 + T,$$

которое и доказывает лемму.

Теорема 4.3.2. *Предположим, что существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *функции* $V \in \mathbf{C}^1(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ и a, b, $c \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех* $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ выполняются следующие условия:

1) $a(d(Y_0, x)) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|)$, *где*

$$Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0\ \forall t \geq 0\}};$$

2) $\dot{V}(x,t) \leq -c(d(Y_0, x))$;

3) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* Y_0.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (4.1) *равномерно асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Согласно теореме 4.1 решение $x = 0$ равномерно устойчиво, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon\ \ \forall t_0 \geq 0 \text{ и } \forall t \in t_0.$$

Покажем, что $d(Y, x(x_0, t_0, t)) \to 0$, если $t \to +\infty$. Предположим противное, что это не так. Тогда, поскольку Y равномерно устойчиво вблизи начала координат (см. доказательство теоремы 4.3.1), существует $\beta > 0$ такое, что $d(Y, x(x_0, t_0, t)) \geq \beta$, $\forall t \geq t_0$. В этом случае из предположения 2) вытекает следующее соотношение

$$V(x(x_0, t_0, t), t) \le V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} c(\beta)ds \; = V(x_0, t_0) - c(\beta)(t - t_0) \to -\infty$$

при $t \to +\infty$. Но это невозможно для ограниченного решения $x(x_0, t_0, t)$, $t \ge t_0$ (оно содержится во множестве B_ε) и непрерывной функции V, удовлетворяющей предположению 1).

Таким образом, Y является равномерно асимптотически устойчивым вблизи начала координат. Следовательно, из леммы 4.3 вытекает, что $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Приведем дополнение к теореме В.М. Матросова [87] в классе знакопостоянных функций Ляпунова.

Теорема 4.3.2.1. *Предположим, что существует окрестность* U *точки* $x = 0$, *существуют функции* $V \in \mathbf{C^1}(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $W \in \mathbf{C^0}(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $V^* \in \mathbf{C^0}(U, \mathbb{R})$ *и* $a, b, c \in \mathbf{K}$ *и две постоянные* A, L *такие, что для всех* $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *имеют место следующие условия*:

1) $a(d(Y, x)) \le V(x, t) \le b(\|x\|)$, *где* $Y = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0 \ \forall t \ge 0\}}$;

2) $\dot{V}(x, t) \le V^*(x) \le 0$, *пусть* $E_1 = \{x \in U :\ V^*(x) = 0\}$;

3) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* Y;

4) $|W(x, t)| < L$;

5) $\max\{d(x, E_1), |\dot{W}(x,t)|\} \ge c(\|x\|)$;

6) $\|f(x, t)\| < A$ *и* $f \in \mathbf{C^1}$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (4.1) *равномерно асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Условия 1)–3) гарантируют равномерную устойчивость $x = 0$ (теорема 4.1). Согласно работе [98] существует положительно определенная функция $V_p(x, t)$ такая, что $V_p(x, t) \le b_1(\|x\|)$, $b_1 \in \mathbf{K}$, производная которой $\dot{V}_p(x,t) \le 0$. Положим

$$v(x, t) = V(x, t) + V_p(x, t), \text{ где } \dot{v}(x,t) = \dot{V}(x,t) + \dot{V}_p(x,t) \le 0.$$

Обозначим через $E = \{x \in U :\ \dot{v}(x,t) = 0 \quad \forall t \ge 0\}$. Тогда $E \subset E_1$. Следовательно, для множества E выполняются все предположения теоремы

В. М. Матросова [87] о равномерной асимптотической устойчивости. Это и завершает доказательство высказанного утверждения.

4.4. ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

В этой части работы полагаем $D = \mathbb{R}^n$ и считаем, что свойство РИН решений системы (4.1) верно в каждом шаре B_β, $\beta > 0$.

Лемма 4.4. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

1) $x = 0$ *является равномерно* Y-*асимптотически устойчивым и* Y-глобально притягивающим;

2) *множество* Y *равномерно глобально асимптотически устойчиво*;

3) *все решения* $x(x_0, t_0, t)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus Y$, $t_0 \geq 0$, *ограничены*.

Тогда нулевое решение системы (4.1) *равномерно глобально асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Согласно лемме 4.3 нулевое решение системы (4.1) равномерно асимптотически устойчиво, т. е. оно равномерно устойчиво и, кроме того имеем:

$$(\exists\sigma > 0)(\forall\alpha > 0)(\exists T > 0)(\forall x_0 \in B_\sigma \cap Y)(\forall t_0 \geq 0) \;\Rightarrow$$
$$\|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha \;\; \forall t \geq t_0 + \mathrm{T},$$

Для завершения доказательства леммы 4.4 достаточно показать, что с течением времени любое решение $x(x^*, t^*, t)$ попадает в шар $B(0, \sigma)$ при $t \to +\infty$.

Действительно, так как решение $x(x^*, t^*, t)$ ограничено, то его ω-предельное множество $L^+(x^*, t^*)$ непусто, компактно и квазиинвариантно. Поэтому если $q \in L^+(x^*, t^*)$, то существует достаточно большой момент времени $T^* > 0$, для которого будем иметь неравенство

$$\|x(x^*, t^*, t^* + T^*) - q\| < \delta.$$

С другой стороны, на основании предположения 2) предельное множество $L^+(x^*, t^*)$ содержится в Y, а значит, выбранная точка $q \in Y$. Кроме того, так как начало координат системы (4.1) является равномерно Y-глобально притягивающим, то по заданному состоянию $q \in Y$ и числу $\sigma/2 > 0$ можно указать число $\overline{T}$ такое, что

$$\|x(q, t^* + T^*, t^* + T^* + \overline{T})\| < \sigma/2.$$

По свойству РИН имеем:

$$(\forall \sigma/2 > 0)(\forall T > 0)(\exists \delta > 0):$$

$$\|x^* - y^*\| < \delta \Rightarrow \|x(x^*, t^*, t) - x(y^*, t^*, t)\| < \sigma/2 \quad \forall t \in [t^*, t^* + T].$$

В таком случае по свойству РИН можем записать

$$\|x(x^*, t^*, t^* + T^*), t^* + T^*), \bar{T}) - x(q, t^* + T^*, \bar{T})\| < \sigma/2.$$

Теперь, используя неравенство треугольника, будем иметь следующие соотношения:

$$\|x(x^*, t^*, t^* + T^*), t^* + T^*), \bar{T})\| \equiv \|x(x(x^*, t^*, t^* + T^*), t^* + T^*), t^* + T^*), \bar{T})\| \leq$$
$$\leq \|x(x(x^*, t^*, t^* + T^*), t^* + T^*), t^* + T^*), \bar{T}) - x(q, t^* + T^*, t^* + T^* + \bar{T})\| +$$
$$+ \|x(q, t^* + T^*, t^* + T^* + \bar{T})\| \leq \sigma/2 + \sigma/2 = \sigma.$$

Таким образом, доказано, что с течением времени любое решение системы (4.1) попадает в шар B_σ и, следовательно, притягивается началом координат.

Лемма 4.4 доказана.

Теорема 4.4.3. *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$. Предположим, что существуют функции $V \in \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ и a, b, $c \in \boldsymbol{K}$ такие, что для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ выполняются следующие условия:

1) $a(d(Y, x)) \leq V(x, t) \leq b(d(Y, x))$, *где* $Y = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : V(x,t) = 0 \ \forall t \geq 0\}}$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq -c(d(Y,x))$;

3) $x = 0$ *глобально равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* Y.

4) *каждое решение* $x(x_0, t_0, t)$, *удовлетворяющее условию* $V(x(x_0, t_0, t), t) \leq M < +\infty$, *ограничено*.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (4.1) *глобально равномерно асимптотически устойчиво*.

Доказательство. Пусть выполнены все предположения теоремы 4.3. Тогда согласно лемме 4.4 утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что замкнутое множество Y равномерно глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство равномерной асимптотической устойчивости множества Y следует из предположений 1) и 2).

Доказательство глобального притяжения множества Y можно осуществить точно так же, как и доказательство свойства притяжения множества Y, используемое при обосновании теоремы 2.

Таким образом, по лемме 4.4 начало координат системы (4.1) равномерно глобально асимптотически устойчиво.

4.5. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Пусть D означает открытую связную окрестность начала координат $\mathbb{R}^n$. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t), x \in D \subset \mathbb{R}^p, \ t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.15}$$

где функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x равномерно по t и исчезает в точке $x = 0$ для всех $t \geq 0$. Для каждой точки $x_0 \in U$ и начального момента $t_0 \geq 0$ через $x(x_0, t_0, t)$ будем обозначать решение системы (4.15) с начальными условиями $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$. Пусть B_α, $\alpha > 0$, означает «шар» с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$ и радиусом $\alpha > 0$, а $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ – функция расстояния.

Теорема 4.5.4. *Пусть для системы* (4.15) *существуют окрестность U точки $x = 0$, непрерывно дифференцируемая функция V: $U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, функция Хана $c \in$ **K** такие, что выполняются условия*:

1) $V(0,t) = 0 \ \ \forall t \geq 0$ *и функция* $V(x,t)$ *ограничена во множестве* $U \times \mathbb{R}^+$;

2) $\forall \alpha > 0 \ \ \exists p \in B_\alpha$ *и* $\exists \tau \geq 0$ *такие, что* $V(p,\tau) > 0$;

3) *решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0 \ \forall t \geq 0\}}$;

4) $\dot{V}(x,t) \geq c(d(Y_0, x)) \ \ \forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$.

Тогда решение $x = 0$ системы (4.15) *неустойчиво.*

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы, во-первых, $\overline{B_\varepsilon} \subset U$ и, во-вторых, с учетом предположения 3) множество $\overline{B_\varepsilon} \cap Y$ содержалось бы в области притяжения $A_Y(0)$ точки $x = 0$ относительно Y.

Согласно предположению 2) для числа $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) существует пара (p,τ) такая, что $p \in B_\alpha$ и $V(p,\tau) > 0$.

Покажем, что решение $x(p, \tau, t)$ при возрастании времени покинет шар B_ε, что и будет соответствовать неустойчивости начала координат системы (4.15). Предположим напротив, что выполняется неравенство

$$\| x(p,\tau,t) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq \tau. \tag{4.16}$$

В этом случае согласно предположению 4) будет иметь место неравенство

$$V(x(p,\tau,t),t) \geq V(p,\tau) > 0, \ \ \forall t \geq \tau. \tag{4.17}$$

Отсюда ясно, что на основании предположения 1) можно указать число $\mu > 0$, для которого справедливо неравенство

$$\| x(p,\tau,t) \| \geq \mu > 0, \quad \forall t \geq \tau. \tag{4.18}$$

Рассмотрим два случая.

а) Предположим, что существует последовательность моментов времени $(t_n)_{n\geq 1}$, ($t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$) такая, что $d(Y, x(p,\tau,t_n)) \to 0$ при $n \to +\infty$. Тогда с учетом неравенства (4.16) можно, не нарушая общности рассуждений, считать, что последовательность точек $(x(p,\tau,t_n))_{n\geq 1}$ сходится к точке q, причем $q \in A_Y(0)$. Поэтому по числу $\mu > 0$ найдется число $T > 0$ такое, что

$$\| x(q,t^*,t) \| < \mu / 2 \quad \forall t \geq t^* + T \quad \text{и} \quad \forall t^* \geq 0. \tag{4.19}$$

Из равномерной интегральной непрерывности решений системы (4.15) следует, что для заданных выше чисел μ и T существует число $\nu > 0$ такое, что если

$$\| x(p,\tau,t_n) - q \| < \nu,$$

то выполняется неравенство

$$\| x(x(p,\tau,t_n),t_n,t_n+T) - x(q,t_n,t_n+T) \| < \mu / 2.$$

В результате, используя неравенство треугольника, получим оценку

$$\| x(p,\tau,t_n+T) \| \leq \| x(q,t_n,t_n+T) \| +$$
$$+ \| x(x(p,\tau,t_n),t_n,t_n+T) - x(q,t_n,t_n+T) \| < \mu/2 + \mu/2 = \mu.$$

Однако так как последовательность $(t_n)_{n\geq 1}$ неограниченная, то при достаточно большом n будет $t_n > \tau$, и тогда такая оценка будет противоречить установленному неравенству (4.18).

б) Пусть теперь в отличие от случая а) для некоторого числа $\eta > 0$ выполняется соотношение

$$d(Y, x(p,\tau,t)) \geq \eta \quad \forall t \geq \tau.$$

Тогда на основании предположения 4) для всех $t \geq \tau$ можем записать

$$V(x(p,\tau,t),t) \geq V(p,\tau) + \int_{\tau}^{t} c(d(Y, x(p,\tau,s))ds \geq V(p,\tau) + c(\eta)(t - t_0).$$

Отсюда при $t \to +\infty$ получаем, что $V(x(p,\tau,t),t) \to +\infty$. Однако это невозможно в силу предположения 1) об ограниченности функции Ляпунова в области U и условия $x(p,\tau,t) \in B_\varepsilon \subset U$.

Таким образом, каждый из взаимоисключающих случаев приводит нас к противоречию, а значит, имеет место неустойчивость.

4.7. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Из теорем 4.3.1, 4.3.2 и 4.3.3 вытекают следующие результаты [137].

Предложение 4.1. *Пусть существуют непрерывно дифференцируемая функция* $V : D \to \mathbb{R}$ *и непрерывная функция* $W : D \to \mathbb{R}$ *такие, что*:

1) $V(x) \geq 0$ для всех $x \in D$ *и* $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq W(x) \leq 0$ *для всех* $(x,t) \in D \times \mathbb{R}$;

3) *нулевое решение асимптотически устойчиво относительно наибольшего положительно инвариантного подмножества*

$$E = \{x \in D : W(x) = 0\};$$

4) *на множестве* $E = \{x \in D : W(x) = 0\}$ *функция* f *не зависит от времени* (*т. е.* $f(x,t) = f(x,t_0)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$ *и* $x \in E$).

Тогда нулевое решение уравнения (4.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Предложение 4.2. *Пусть для системы* (4.1) *существует окрестность* Ω *начала координат и непрерывно дифференцируемая функция* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что*:

1) $V(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$ *и* $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq 0$ *для всех* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$;

3) *нулевое решение асимптотически устойчиво относительно положительно инвариантного множества* $M = \{x \in \Omega : V(x) = 0\}$;

Тогда нулевое решение уравнения (4.1) *равномерно устойчиво.*

Соответственно теорема 4.3.2 дает следующее утверждение.

Предложение 4.3. *Пусть для системы* (4.1) *существуют окрестность* Ω *начала координат, непрерывно дифференцируемая функция* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *и функция* $a \in \mathbf{K}$ *такие, что*:

1) $V(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$ *и* $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq -a(\| x \|)$ *для всех* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$;

3) *нулевое решение асимптотически устойчиво относительно положительно инвариантного множества* $M = \{x \in \Omega : V(x) = 0\}$;

Тогда нулевое решение уравнения (4.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

4.8. ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем теоремы метода знакопостоянных функций на примерах.

Пример 4.1. Пусть движения некоторой механической системы описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{z} + \frac{d}{dt} H(z,t) = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.20}$$

где z и $\dot{z}$ – векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица вместе со всеми своими частными производными. Предположим, что

$$H(0,t) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t}(0,t) = 0, \ \forall t \geq 0.$$

К таким системам сводятся, например, уравнения Лагранжа 2-го рода, описывающие движения механической системы, находящейся под действием диссипативных и гироскопических сил [17, 91]. Очевидно, система обладает первым интегралом $\dot{z} + H(z,t) = c$.

Для исследования устойчивости равновесия $z = \dot{z} = 0$ рассмотрим знакопостоянную функцию Ляпунова

$$V(z,\dot{z},t) = (\dot{z} + H(z,t))'(\dot{z} + H(z,t)) \geq 0.$$

Ясно, что полная производная по времени в силу уравнений движения $\dot{V}(z,\dot{z},t)$ тождественно равна нулю. На множестве, где $V(z,\dot{z},t) = 0$, система сводится к дифференциальному уравнению

$$\dot{z} = -H(z,t). \tag{4.21}$$

На основании теоремы 4.1 делаем следующий вывод.

Предложение 4.4. *Если решение* $z = 0$ *уравнения* (4.21) *равномерно асимптотически устойчиво*, *то равновесие* $z = \dot{z} = 0$ *системы* (4.20) *равномерно устойчиво*.

Для автономного случая докажем следующее утверждение.

Предложение 4.5. *Если функция H не зависит от времени t, т. е. $H = H(z)$, и матрица $\frac{\partial H}{\partial z}(0)$ определенно положительная, то равновесие $z = \dot{z} = 0$ системы* (4.20) *устойчиво относительно координат z и асимптотически устойчиво относительно скоростей $\dot{z}$.*

Доказательство. В силу предположений относительно функции $H(z)$ уравнение (4.16) можно записать в виде

$$\dot{z} = -\frac{\partial H(0)}{\partial z} z + o(\| z \|).$$

По условию матрица $\frac{\partial H}{\partial z}(0)$ определенно положительная, а значит, собственные значения матрицы $-\frac{\partial H}{\partial z}(0)$ имеют отрицательные вещественные части. По теореме об устойчивости по первому приближению нулевое решение системы (4.21) будет асимптотически устойчивым. Отсюда согласно предложению 4.1 следует устойчивость равновесия $z = \dot{z} = 0$ системы (4.20).

Заметим, что в предполагаемом автономном случае уравнения движения записываются в следующей форме

$$\ddot{z} + \frac{\partial H(z)}{\partial z}\dot{z} = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{4.22}$$

Рассмотрим определенно положительную относительно скоростей $\dot{z}$ функцию Ляпунова $V_1(z, \dot{z}) = \dot{z}' \dot{z}$. Ее производная по времени в силу уравнений движения (4.22) имеет вид

$$\dot{V}_1(z, \dot{z}) = -\dot{z}' \frac{\partial H(z)}{\partial z} \dot{z}.$$

Так как функция $H(z)$ непрерывно дифференцируемая, то с учетом условия 2) предложения 4.2 матрица $\frac{\partial H(z)}{\partial z}$ будет определенно положительной в некоторой окрестности точки $z = 0$. Таким образом, асимптотическая устойчивость равновесия $z = \dot{z} = 0$ относительно скоростей следует на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по отношению к координатам вектора $\dot{z}$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, получаем следующий результат.

Следствие 4.1. *Пусть функция* $H(z,t) = Bz + Gz$ *, где B и G соответственно постоянная матрица сил полной диссипации и постоянная кососимметрическая матрица гироскопических сил, т. е. выполняются соотношения*

$$\dot{z}'B\dot{z} < 0,\ z \neq 0; \quad \dot{z}'G\dot{z} \equiv 0,\ \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда равновесие системы асимптотически устойчиво относительно скоростей и устойчиво относительно координат.

Пример 4.2. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = P(x,y,t), \quad \dot{y} = yQ(x,y,t), \ \ B_h, \ \ h > 0. \tag{4.23}$$

на плоскости переменных $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, где

$$Q(x, y, t) = \prod_{j=1}^{m} (y - \alpha_j(x,t))^{2n}, \quad m,n \in \mathbb{N},$$

$\alpha_j(x,t)$ – непрерывные, равномерно ограниченные по $t \in \mathbb{R}^+$ функции на интервале $-h \le x \le h$, причем $\alpha_j(0,t) = 0,\ \forall t \ge 0$.

Возьмем знакопостоянную функцию $V = 0{,}5y^2$. Ее производная в силу уравнений

$$\dot{V} = -y^2 \prod_{j=1}^{m} (y - \alpha_j(x,t))^{2n}.$$

Функция V удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 4.2. На множестве, где $V = 0$, имеем $y = 0$, и система превращается в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = P(x,0,t)\ , \ \ |x| < h, \ \ h > 0. \tag{4.24}$$

Потребуем выполнения условия

$$xP(x,0,t) \le -\sigma < 0, \ \ \text{при} \ \ t \ge 0 \ \ \text{и} \ \ 0 < |x| < h \quad \forall j = \overline{0,\ m}, \tag{4.25}$$

где σ – некоторая положительная постоянная. Тогда нулевое решение уравнения (4.24) будет равномерно асимптотически устойчивым.

В силу предположений относительно функций $\alpha_j(x,t)$ можно указать положительные числа $c_j > 0$, $j = \overline{0,\ m}$, такие, что в окрестности $(x, y) \in B_h$ будут выполнены следующие условия:

$$|\, y - \alpha_j(x,t)\,| \le c_j, \ \ \forall j = \overline{0,\ m}. \tag{4.26}$$

Тогда будет выполнено и условие 3) теоремы 4.2, а, следовательно, предположения (4.25) и (4.26) обеспечивают равномерную асимптотическую устойчивость начала координат системы (4.23).

Пример 4.3 (Задача стабилизации). Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2^3, \quad \dot{x}_2 = x_3^3, \quad \dot{x}_3 = u, \tag{4.27}$$

Требуется указать функцию управления $u = u(x_1, x_2, x_3)$, стабилизирующую нулевое решение до свойства равномерной глобальной асимптотической устойчивости.

В качестве знакоположительной функции Ляпунова выберем

$$V = (x_1 + 2x_2 + x_3)^4/\,4,$$

тогда для функции управления

$$u = -\,x_2^3 - x_3^3 - (x_1 + 2x_2 + x_3)^3 \tag{4.28}$$

будем иметь производную от V по времени, равную $\dot{V} = -(x_1 + 2x_2 + x_3)^4$. Ясно, что движение на подмножестве $Y_0 = 0$, где функция $V = 0$, описывается системой

$$\dot{x}_1 = x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -(x_1 + 2x_2)^3.$$

Такая система асимптотически устойчива, а в силу однородности правых частей и глобально асимптотически устойчива. Действительно, если взять знакоположительную функцию $W = (x_1 + 2x_2)^2/\ 2$, то ее производная вдоль движений системы (4.21) определится соотношением

$$\dot{W} = -(x_1 + 2x_2)^2\,(\,x_2^2 + x_2\,(x_1 + 2x_2) + (x_1 + 2x_2)^2) \le 0.$$

На множестве, где $W = 0$, имеем $x_1 + 2x_2 = 0$, а значит, здесь система (4.27) сводится к скалярному дифференциальному уравнению $\dot{x}_1 = -x_1^3$, нулевое решение которого глобально асимптотически устойчиво. По теореме 4.2 заключаем, что система (4.27) является асимптотически устойчивой. Более того, с учетом однородности выбранного закона управления, согласно теореме 4.3 такая система будет и глобально асимптотически устойчивой. Таким образом, управление (4.28) решает задачу стабилизации.

Пример 4.4 (Задача автоматического регулирования). Рассмотрим систему прямого управления второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, t) - \varphi(\sigma), \end{aligned} \tag{4.29}$$

которая в автономном случае $f(x_1, x_2, t) = x_1 + x_2$ описывает движения гироскопического креновыравнивателя с законом $\varphi(\sigma)$ изменения корректирующего момента [103], где $\sigma = x_1 + x_2$. Здесь функция f непрерывна, удовлетворяет локальному условию Липшица и

$$f(0, 0, t) = 0, \ \ \forall t \geq 0.$$

Функция φ удовлетворяет условию

$$\varphi(0) = 0, \ \ \sigma\varphi(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \neq 0. \tag{4.30}$$

Известная задача абсолютной устойчивости [3] требует: найти условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4.29) при любых начальных возмущениях и при любом выборе функции φ, удовлетворяющей условию (4.30).

Для решения поставленной задачи рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V(x_1, x_2) = 0{,}5(x_1 + x_2)^2 \geq 0.$$

Ее производная в силу системы преобразуется к виду

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -(x_1 + x_2)\varphi(\sigma) = -\sigma\varphi(\sigma) \leq 0.$$

На множестве, где $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, имеем $\sigma = 0$, и исходная система редуцируется в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_1 = -f(x_1, -x_1, t). \tag{4.31}$$

Если предположить, что выполняются следующие соотношения

$$\frac{f(x_1, -x_1, t)}{x_1} \geq \alpha > 0, \ \ \forall x_1 \neq 0 \ \text{ и } \ \forall t \geq 0, \tag{4.32}$$

то нулевое решение уравнения (4.31) будет равномерно асимптотически устойчивым. В этом можно убедиться, рассмотрев функцию Ляпунова $V_1(x_1) = x_1^2$. Поэтому, опираясь на теорему 4.2, получаем равномерную асимптотическую устойчивость начала координат системы (4.29).

Для получения условий глобальной асимптотической устойчивости заметим, во-первых, что из свойств функции (4.30) вытекает ограниченность выражения $|x_1 + x_2|$ вдоль решений исходной системы. Последнее означает, в частности, что если одна из координат решения ограничена при $|x_1 + x_2| < M$, то вторая также ограничена. Поэтому, если, например, дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, t) \geq 0 \textit{ при достаточно больших } |x_1| \\ &\textit{и ограниченных } |x_1 + x_2|, \end{aligned} \tag{4.33}$$

то всякое решение исследуемой системы будет ограниченным по координате x_1. Для подтверждения достаточно использовать функцию Ляпунова $V_1(x_1) = x_1^2$.

Таким образом, на основании теоремы 4.4.3 условия (4.30), (4.32) и (4.33) обеспечивают решение задачи абсолютной устойчивости системы (4.29).

В заключение этого раздела приведем утверждения второго метода в классе знакопостоянных функций Ляпунова, вытекающие из общих результатов для абстрактных полудинамических систем [63].

Теорема 4.8.2. *Предположим, что существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *функции* $V \in \mathbf{C^1}(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ и a, $b \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех* $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|)$, *где* $Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0 \ \forall t \geq 0\}}$;

2) $\dot{V}(x,t) \leq 0$;

3) $x = 0$ *притягивающее относительно множества* Y_0;

4) *для любого* $y \in Y_0$ *существует* $\delta = \delta(y) > 0$ *такое, что, если* $V(x_0, t_0) \neq 0$ *для* $x_0 \in B(y, \delta)$ *и* $t_0 \geq 0$, *то* $V(\varphi(x_0, t_0, t), t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (4.1) *асимптотически устойчиво*.

Теорема 4.8.2.1. *Предположим, что существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *функции* $V \in \mathbf{C^1}(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ и a, $b \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех значений* $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|)$, *где*

$$Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0 \ \forall t \geq 0\}};$$

2) $\dot{V}(x,t) \leq 0$;

3) $x = 0$ *равномерно притягивающее относительно множества* Y_0;

4) *существует* $\delta > 0$ *такое, что если* $V(x_0, t_0) \neq 0$ *для* $x_0 \in B(Y_0, \delta)$ *и* $t_0 \geq 0$, *то* $V(\varphi(x_0, t_0, t), t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *равномерно по* $t_0 \geq 0$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (4.1) *равномерно асимптотически устойчиво*.

5. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

5.1. УРАВНЕНИЯ С НЕИЗОЛИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

Системы дифференциальных уравнений, обладающие неизолированными состояниями равновесия, имеют ряд особенностей. Проблема устойчивости неизолированной точки покоя исследовалась А. М. Ляпуновым применительно к возникающим ситуациям критических случаев. Матросов В. М. [90] изучил проблему устойчивости замкнутого множества состояний равновесия. В работах [40, 60, 66, 67] рассмотрена задача устойчивости точки покоя, принадлежащей множеству состояний равновесия, определяемой некоторой поверхностью.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y, t), \quad x \in U_x \subset \mathbb{R}^p, \\ \dot{y} = Y(x, y, t)x, \ \ y \in U_y \subset \mathbb{R}^q, t \geq 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $U = (U_x, U_y)$ – некоторая окрестность начала координат пространства $\mathbb{R}^{p+q}$. Предположим, что правая часть системы ($X(x, y, t)$, $Y(x, y, t)x$) суть непрерывная функция, ограниченная по $t \geq 0$ в U, и удовлетворяет равномерному условию Липшица. Пусть, кроме того, для всех $t \geq 0$ и $y \in U_y$ выполняется равенство:

$$X(0, y, t) = 0. \tag{5.2}$$

Тогда система (5.1) имеет семейство точек покоя $x = 0$, $y = \mathrm{const}$, среди которых находится нулевое решение $x = 0$, $y = 0$.

Проблема устойчивости нулевого решения системы (5.1) с неизолированным положением равновесия рассматривается в работах [4, 40, 81, 84]. Предполагается, что функции X и Y аналитические по переменным x, y, причем в [81, 84] изучается система, где первая группа уравнений представима в виде $X(x, y, t) = Ax + X_1(x, y, t)$ с постоянной матрицей линейного приближения A, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части. В [40] автором рассмотрена система, в которой множество неизолированных состояний равновесия принадлежит заданной гладкой поверхности. В работе [4] решается задача устойчивости по нелинейному приближению системы, в которой $X(x, y, t) = F(x) + G(x, y, t)$ с однородной функцией $F(x)$ порядка $\mu \geq 1$, а второе уравнение $-Y(x, y, t) = Q(y, t) + D(x, y, t)$. Относительно этой системы предполагается, что $Q(0, t) = 0$, $\forall t \geq 0$, и

$$\| G \| \leq c_1(x, y) \| x \|^{\mu} \quad (c_1(x, y) \to 0 \text{ при } \| x \| + \| y \| \to 0),$$

$$\| D \| \leq c_2 \| x \|^{\lambda}, \; c_2 > 0, \; \lambda > 0.$$

Если $Q(t, y) \equiv 0$, то выполняется равенство (5.2), изучаемая в [4] система имеет семейство состояний равновесия и является частным случаем системы (5.1).

5.1.1. УСТОЙЧИВОСТЬ

Теорема 5.1.1 [60]. *Предположим, что существует число* $\Delta > 0$ *и определенно положительная форма m-й степени* $V(x)$ $(V: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R})$ *такая, что для любой пары чисел* μ_1, μ_2 $(0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \Delta)$ *найдется число* $\sigma > 0$, *для которого выполняется неравенство*

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)' X(x, y, t) \leq -\sigma V(x), \; \forall t \geq 0,$$

и

$$\mu_1 \leq \|x\| \leq h, \; \mu_2 \leq \|y\| \leq h. \tag{5.3}$$

Тогда нулевое решение системы (5.1) *устойчиво, причем устойчивость будет равномерно асимптотическая относительно координат вектора* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

Доказательство. В первой группе уравнений (5.1) сделаем замену переменных

$$Z = xe^{\alpha t}, \; \alpha > 0, \; t \geq 0, \tag{5.4}$$

для достаточно малого числа α. Тогда получим

$$\dot{z} = \alpha z + e^{\alpha t} X(ze^{-\alpha t}, y, t). \tag{5.5}$$

Вычислим производную по времени от функции $V(z)$ в силу системы (5.5). Имеем

$$\dot{V}_{(5.5)}(z) = \alpha\, z' \frac{\partial V(z)}{\partial z} + e^{\alpha t} \left(\frac{\partial V(z)}{\partial z} \right)' X(ze^{-\alpha t}, y, t)\,. \qquad (5.6)$$

Оценим правую часть (5.6). С этой целью подставим (5.4) в (5.3):

$$\left(\frac{\partial V(ze^{-\alpha t})}{\partial x} \right)' X(ze^{-\alpha t}, y, t) \le -\sigma V(ze^{-\alpha t}).$$

Отсюда в силу однородности функций $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ и $V(x)$ имеем:

$$(e^{-\alpha t})^{m-1} \left(\frac{\partial V(z)}{\partial z} \right)' X(ze^{-\alpha t}, y, t) \le -\sigma (e^{-\alpha t})^m\, V(z),$$

или, с учетом ограничений в (5.3), можем записать соотношения:

$$\begin{cases} e^{\alpha t} \left(\dfrac{\partial V(z)}{\partial z} \right)' X(ze^{-\alpha t}, y, t) \le -\sigma\, V(z), \\ \mu_1 e^{\alpha t} \le \| z \| \le h e^{\alpha t},\ \mu_2 \le \| y \| \le h,\ t \ge 0. \end{cases} \qquad (5.7)$$

Кроме того, по теореме Эйлера об однородных функциях

$$z' \frac{\partial V(z)}{\partial z} = mV(z), \qquad (5.8)$$

и поэтому из (5.7), (5.8) для (5.6) имеем следующую оценку

$$\dot{V}_5(z) \le -(\sigma - m\alpha)V(z) \text{ при } \mu_1 e^{\alpha t} \le \|z\| \le h e^{\alpha t},\ \mu_2 \le \|y\| \le h. \qquad (5.9)$$

Пусть $\delta > 0$ некоторое достаточно малое число. Выберем решение $x(t)$, $y(t)$ с начальными данными $t_0 \ge 0$, $x^0 = x(t_0)$, $y^0 = y(t_0)$, подчинив их условиям

$$\mu_1 e^{-\alpha t_0} < \|x^0\| < \delta,\ \mu_2 < \|y^0\| < \delta,\ \mu_i < \delta < h,\ i = 1,2. \qquad (5.10)$$

Тогда существует такой момент времени $T > 0$, что для решения $z(t)$, $y(t)$ ($z(t_0) = z^0 = x^0 e^{\alpha t_0}$) будут выполняться неравенства

$$\|z(t)\| \ge \mu,\ \|y(t)\| \ge \mu,\ t_0 \le t \le t_0 + T, \qquad (5.11)$$

$$\|z(t)\| \le h,\ \|y(t)\| \le h,\ t_0 \le t \le t_0 + T, \qquad (5.12)$$

где $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$.

Потребуем, чтобы α было настолько малым, чтобы

$$\sigma - m\alpha > 0. \tag{5.13}$$

При выполнении (5.11), (5.12) и (5.13) из (5.9) следует, что

$$V(z(t)) \le V(z^0)e^{-(\sigma - m\alpha)t} \text{ для } t_0 \le t \le t_0 + T \text{ и } \forall t_0 \ge 0. \tag{5.14}$$

Более того, поскольку $V(z)$ определенно положительная функция, то можно указать функцию Хана $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такую, что

$$a(\|z\|) \le V(z) \text{ для } \|z\| \le he^{\alpha T},\ t_0 \le t \le t_0 + T \text{ и } \forall t_0 \ge 0. \tag{5.15}$$

В силу непрерывности V и равенства $V(0) = 0$ существует величина $c = c(\mu_1) > 0$ такая, для которой имеет место неравенство

$$V(z^0) \le c\|z^0\| \text{ для всех } \|z^0\| < \delta. \tag{5.16}$$

Соотношения (5.15) и (5.16) позволяют из (5.14) выписать неравенство

$$a(\|z(t)\|) \le c\|z^0\|,\ t_0 \le t \le t_0 + T,$$

а отсюда получить следующую оценку:

$$\|z(t)\| \le a^{-1}(c\|z^0\|),\ t_0 \le t \le t_0 + T, \forall t_0 \ge 0, \tag{5.17}$$

где a^{-1} – функция, обратная к функции a. Отметим, что $a^{-1}(0) = 0$, причем, a^{-1} – также строго монотонно возрастающая функция.

Из (5.17) с учетом (5.4) будем иметь неравенство

$$\|x(t)\| \le a^{-1}(c\|x^0\| e^{\alpha t_0})\, e^{-\alpha t},\ t_0 \le t \le t_0 + T\ \ \forall t_0 \ge 0. \tag{5.18}$$

Поэтому при выполнении (5.11) и (5.12) будет иметь место оценка

$$\|Y(x(t), y(t), t)x(t)\| \le Aa^{-1}(c\|x^0\| e^{\alpha t_0})e^{-\alpha t},\ t_0 \le t \le t_0 + T,\ \forall t_0 \ge 0, \tag{5.19}$$

где A – некоторая положительная постоянная, причем она ограничена для всех достаточно малых $\mu > 0$.

Из второго уравнения (5.1) с учетом (5.19) имеем неравенства

$$\|y(t)\| \le \|y^0\| + \int_{t_0}^{t} \|Y(x(\tau), y(\tau), \tau)x(\tau)\| d\tau \le$$

$$\le \|y^0\| + Aa^{-1}(c\|x^0\| e^{\alpha t_0}) \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha\tau} d\tau =$$

$$= \|y^0\| + Aa^{-1}(c\|x^0\|\, e^{\alpha t_0})\,\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} < \|y^0\| + \frac{A}{\alpha}\,a^{-1}(c\|x^0\|\, e^{\alpha t_0}), \qquad (5.20)$$

при всех $t_0 \le t \le t_0 + T$ и $t_0 \ge 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, меньшее чем h. Выберем $\mu > 0$ и $\delta > 0$ в неравенствах (5.10) настолько малыми, чтобы выполнялось условие

$$\max\{a^{-1}(c\|x^0\|\, e^{\alpha t_0}),\ \|y^0\| + \frac{A}{\alpha}\,a^{-1}(c\|x^0\|\, e^{\alpha t_0})\} < \varepsilon. \qquad (5.21)$$

Тогда из (5.17), (5.20) и (5.21) получим неравенства

$$\|z(t)\| < \varepsilon,\ \ \|y(t)\| < \varepsilon,\ \ t_0 \le t \le t_0 + T. \qquad (5.22)$$

Покажем сначала, что если неравенства (5.11) выполняются при всех $t \ge t_0$, то (5.12) и (5.22) также выполняются при всех $t \ge t_0$. Действительно, пусть в противоположность (5.12) существует момент времени $t^* > t_0$ такой, что либо $\|z(t^*)\|$ равно h, либо $\|y(t^*)\|$ равно h. Очевидно, что, не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать t^* первым, начиная от $t = t_0$, таким моментом времени. Тогда согласно проделанным построениям неравенство (5.22) будет верным при $t_0 \le t \le t^*$, а значит, и $\|z(t)\|$, и $\|y(t)\|$ будут меньше ε при всех $t \in [t_0, t^*]$, что невозможно, поскольку $\varepsilon < h$.

Таким образом, при неограниченном возрастании $t \ge t_0$ неравенства (5.12) и (5.22) не могут нарушиться раньше, чем нарушатся неравенства (5.11). Пусть $t_1 \ge t_0$ первое из значений $t > t_0$, при котором либо $\|z(t_1)\|$, либо $\|y(t_1)\|$ равно μ. Тогда, положив $\mu^{(1)} = 2^{-1}\mu$ и повторив все предыдущие построения, мы снова придем к тому, что либо (5.11) остается справедливым при $t \ge t_0$, либо найдется момент времени $t_2 > t_1$, при котором либо $\|z(t_2)\|$, либо $\|y(t_2)\|$ будет равно $\mu^{(1)}$.

Положим последовательно

$$\mu^{(2)} = 2^{-2}\mu,\ \ \mu^{(3)} = 2^{-3}\mu,\ \ \ldots,\ \ \mu^{(k)} = 2^{-k}\mu,\ \ldots .$$

Тогда получим возрастающую последовательность моментов времени $(t_k)_{k\ge1}$ такую, что (5.11), (5.12) и (5.22) будут справедливыми для всех $t_0 \le t \le t_k$ при $\mu = \mu^{(k)}$. Последнее, как нетрудно видеть, и соответствует выполнению (5.12) и (5.22) при всех $t \ge t_0$. Следовательно, нулевое решение системы (5.1) устойчиво. Более того, по построению соотношение (5.18) также остается верным при всех $t \ge t_0$, а значит, имеет место равномерная асимптотическая устойчивость относительно координат вектора x.

Замечание 5.1. а) Если функция $X(x, y, t) = Ax + X_1(x, y, t)$, где A – постоянная $(n \times n)$-матрица, собственные значения которой имеют только отрицательные вещественные части, а $X_1(0, y, t) = 0$, то в качестве формы $V(x)$ можно взять квадратичную форму, которая всегда существует. При этом число μ_1 можно положить нулем. Более того, в этом случае нулевое решение системы (5.1) будет экспоненциально устойчивым относительно вектора $x(t)$.

б) Если постоянная c, используемая при доказательстве теоремы, не зависит от μ_1, то на основании неравенства (5.18) асимптотическая устойчивость вектора $x(t)$ будет экспоненциальной.

Пример 5.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^4\varphi(t), \\ \dot{y} = xy^2. \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная функция, такая, что $0 \le a \le \varphi(t) \le A < +\infty\ \forall t \ge 0$. Функция $V(x, y) = x^2$ имеет производную $\dot{V}(x, y) = -2x^2(x^2 + y^4\varphi(t))$. Поэтому можно указать число $\sigma > 0$ такое, что $\dot{V}(x, y) \le -\sigma V(x, y)$ во множестве, где $x^2 + y^4 \ge 0,5(\mu_1^2 + a\mu_2^4)$. В соответствии с доказанным утверждением нулевое решение системы устойчиво, причем оно асимптотически устойчиво по координате x.

Отметим, что для данного примера не выполняются требования ни одного из утверждений работ [4, 40].

5.1.1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x,t),\ x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ t \ge 0, \tag{5.23}$$

где D - некоторая окрестность начала координат пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что правая часть системы $X(x, t)$ суть непрерывная функция, ограниченная по $t \ge 0$ в D и удовлетворяет равномерному условию Липшица. Предположим, что $X(0, t) = 0$ для всех $t \ge 0$ и $x \in D$. Тогда система (5.23) имеет состояние равновесия $x = 0$.

Теорема 5.1.4. *Предположим, что существует число* $\Delta > 0$ *и определенно положительная форма m-ой степени* $V(x)$ (V: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) *такая, что для любого числа* μ, $0 < \mu < \Delta$, *найдется число* $\sigma > 0$, *для которого выполняется неравенство*

$$\dot V(x)=\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)' X(x,t)\ \geq \sigma \mathrm{V(x)}\ \text{ для } \ \mathrm{t} \geq 0 \ \text{ и } \ \mu \leq \|\mathrm{x}\| \leq \Delta. \qquad (5.24)$$

Тогда нулевое решение системы (5.23) *неустойчиво*.

Доказательство. Пусть ε > 0 – произвольное число, такое, что $\mu < \varepsilon < \Delta$. Сделаем замену переменных

$$z = xe^{\alpha t},\ \ \alpha > 0,\ \ t \geq 0, \qquad (5.25)$$

для достаточно малого числа α. Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\dot z\ = \alpha z + e^{\alpha t}X(ze^{-\alpha t},\ t). \qquad (5.26)$$

Вычислим производную по времени от функции $V(z)$ в силу системы (4.26):

$$\dot V_5(z) = \ \alpha\, z' \frac{\partial V(z)}{\partial z}\ + \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right)' X(ze^{-\alpha t},t)\ . \qquad (5.27)$$

Оценим правую часть (5.27). С этой целью подставим (5.25) в (5.24):

$$\left(\frac{\partial V(ze^{-\alpha t})}{\partial x}\right)' X(ze^{-\alpha t},t)\ \geq \sigma V(ze^{-\alpha t}).$$

Отсюда в силу однородности функций $\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}$ и $V(x)$ имеем:

$$(e^{-\alpha t})^{m\text{-}1}\left(\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right)' X(ze^{-\alpha t},t) \geq \sigma\,(e^{-\alpha t})^m V(z),$$

или, с учетом ограничений в (5.24) можем записать соотношения

$$e^{\alpha t}\left(\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right)' X(ze^{-\alpha t},t) \geq \sigma\, V(z),\quad \mu\, e^{\alpha t} \leq \|z\| \leq \Delta e^{\alpha t},\, t \geq 0. \qquad (5.28)$$

Кроме того, по теореме Эйлера об однородных функциях выполняется тождество

$$z' \frac{\partial V(z)}{\partial z} = mV(z), \qquad (5.29)$$

поэтому из (5.28), (5.29) для (5.27) имеем неравенство

$$\dot{V}_5(z) \geq (\sigma + m\alpha)V(z) \text{ при } \mu e^{\alpha t} \leq \|z\| \leq \Delta e^{\alpha t}. \tag{5.30}$$

Пусть $\delta > 0$ некоторое достаточно малое число, меньшее $\varepsilon > 0$. Выберем решение $x(t)$ с начальными данными $t_0 \geq 0$, $x^0 = x(t_0)$, подчинив их условиям:

$$\mu\, e^{-\alpha t_0} < \|x^0\| < \delta,\ \ \mu < \delta < \Delta. \tag{5.31}$$

Покажем, что это решение с течением времени выйдет за переделы шара B_ε. Действительно, в силу предположения (5.24) норма решения $\|x(t)\|$ не убывает, до тех пор, пока она находится в интервале $[\mu, \Delta]$.

Предположим противное, т. е. решение $x(t)$ не покидает шар B_ε. Тогда для решения $z(t)$, где $z(t_0) = z^0 = x^0 e^{\alpha t_0}$, будут выполняться неравенства

$$\mu \leq \|z(t)\| \leq \Delta,\ \ \forall t \geq t_0. \tag{5.32}$$

Из соотношений (5.32) и (5.30) следует, что

$$V(z(t)) \geq V(z^0)e^{(\sigma + m\alpha)t},\ \ \forall t \geq t_0. \tag{5.33}$$

Более того, поскольку $V(z)$ определенно положительная форма m-й степени, то можно указать положительные постоянные A и B такие, что

$$A\|z\|^m \leq V(z) \leq B\|z\|^m,\ \ \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{5.34}$$

Соотношение (5.34) позволяет из (5.33) вывести неравенство

$$B\|z(t)\|^m \geq A\|z^0\|^m\, e^{(\sigma + m\alpha)t},\ \ \forall t \geq t_0$$

а отсюда – оценку

$$\|z(t)\| \geq c\|z^0\|\, e^{(\sigma + m\alpha)t/m},\ \ \forall t \geq t_0.$$

где $c = \sqrt[m]{A/B} \leq 1.$ Поэтому с учетом замены переменных (5.25) имеем

$$\|x(t)\|\, e^{\alpha t} \geq c\|x^0\|\, e^{\alpha t_0}\, e^{(\sigma + m\alpha)t/m},\ \ \forall t \geq t_0,$$

откуда на основании (5.31) получаем следующую оценку:

$$\|x(t)\| \geq c\|x^0\|\, e^{\frac{\sigma t + m\alpha t_0}{m}} > c\mu\, e^{\frac{\sigma t + m\alpha t_0}{m}}\ e^{-\alpha t_0} = c\mu\, e^{\frac{\sigma t}{m}},\ \ \forall t \geq t_0.$$

Полученное неравенство и означает, что решение $x(t)$ покидает шар B_ε при $t \geq (m/\sigma)\ln(\varepsilon / c\mu) > 0$. Таким образом, начало координат системы (5.23) неустойчиво.

Пример 5.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + xy^4\varphi(t), \\ \dot{y} = xy^2, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная функция, для которой $0 \le a \le \varphi(t) \le A < +\infty$, $\forall t \ge 0$. Функция $V(x, y) = x^2$ имеет производную по времени $\dot{V}(x,y) = 2x^2(x^2 + y^4\varphi(t))$. Поэтому можно указать число $\sigma > 0$ такое, что $\dot{V}(x,y) \ge \sigma V(x, y)$, если только $\sigma \le 2(x^2 + y^4)$. В соответствии с доказанным утверждением нулевое решение системы неустойчиво.

5.1.3. МНОЖЕСТВО НЕИЗОЛИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Пусть X и X_1 метрические пространства, на которых заданы две динамические системы $(X,\mathbb{R},\pi)$ и $(X_1,\mathbb{R},\sigma)$. Рассмотрим ситуацию, когда первая из этих систем получена из второй методом «замораживания». А именно, пусть Y – множество точек покоя системы, определяемой отображением π и M – точка покоя из Y. Предположим, что для некоторой окрестности U точки M и числа $T > 0$ имеют место следующие условия:

1) множество $\wp = \sigma(Y \cap U, [-T, T])$ является окрестностью точки M;

2) для любого $x \in \wp \cap Y$ будет $\sigma(x, [-T, T]) \cap Y = x$;

3) отрезки траекторий $\sigma(x, [-T, T])$, $\sigma(x,]-T, T])$ совпадают соответственно с одной из полутраекторий $\pi(\sigma(x, -T), \mathbb{R}^{\pm})$, $\pi(\sigma(x, T), \mathbb{R}^{\pm})$ системы $(X,\mathbb{R},\pi)$ для всех $x \in \wp \cap Y$, причем знак «+», или «–» принимается постоянным в каждом из множеств

$$\wp^{+} = \sigma(Y \cap U, [-T, 0]) \text{ и } \wp^{-} = \sigma(Y \cap U, [0, T]).$$

Последнее, в силу свойств точек покоя означает, в частности, что

$$\lim_{t\to+\infty} \pi(\sigma(x, -T), t) \in Y \text{ либо } \lim_{t\to-\infty} \pi(\sigma(x, -T), t) \in Y$$

сразу для всех начальных состояний $\sigma(x, -T) \in \wp^{-}$. Поэтому естественным является следующее

Определение 5.1. Будем говорить, что направления движений динамических систем $(X,\mathbb{R},\pi)$ и $(X_1,\mathbb{R},\sigma)$ совпадают во множестве $\wp^{+}$ (в $\wp^{-}$), если $\sigma(x, [0, T]) = \pi(\sigma(x, T),\mathbb{R}^{+})$ (соответственно, $\sigma(x, [-T, 0]) = \pi(\sigma(x, -T), \mathbb{R}^{+}))$ и противоположны, если вместо $\mathbb{R}^{+}$ берется $\mathbb{R}^{-}$.

Лемма 5.1 [40].

1) *Если направления движений динамических систем* $(X,\mathbb{R},\pi)$ *и* $(X_1,\mathbb{R},\sigma)$ *совпадают в* $\wp^-$ *и противоположны в* $\wp^+$, *то точка покоя M динамической системы* $(X,\mathbb{R},\pi)$ *устойчива*.

2) *Если направления движений динамических систем* $(X,\mathbb{R},\pi)$ *и* $(X_1,\mathbb{R},\sigma)$ *противоположны в* $\wp^-$ *или совпадают в* $\wp^+$, *то точка покоя M динамической системы* $(X,\mathbb{R},\pi)$ *неустойчива*.

Рассмотрим пример использования леммы при исследовании задачи устойчивости множества неизолированных точек покоя для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, определяемых некоторой поверхностью.

Пусть D – открытое подмножество вещественного n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, а $\varphi : D \to \mathbb{R}$ и $\chi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемые функции. Предположим, что дифференциальные системы

$$\dot{x} = \chi(\varphi(x)) f(x), \quad x \in D, \tag{5.35}$$

и

$$\dot{y} = f(y), \quad y \in D, \tag{5.36}$$

обладают свойством единственности решений. Кроме того, пусть $M \in D$ – точка, где $\varphi(M) = 0$ и существует окрестность U точки M в D, для которой поверхность

$$\varphi(x) = 0 \tag{5.37}$$

делит U на два непустых связных множества $U^+ = \{x \in U : \varphi(x) > 0\}$, $U^- = \{x \in U: \varphi(x) < 0\}$. Отметим, что поверхность (5.37) задает множество точек покоя системы (5.35) и M – неизолированная точка этого множества.

Покажем, опираясь на лемму, что справедливо утверждение.

Теорема 5.2 [40]. *Точка покоя M системы* (5.35) *устойчива*, *если*

$$\mathrm{r}\chi(\mathrm{r}) > 0, \mathrm{r} \neq 0, \text{ и } (f(M))' \frac{\partial\varphi(M)}{\partial x} < 0, \tag{5.38}$$

и она неустойчива в каждом из следующих случаев:

1) $\chi(r) > 0$ (либо $\chi(r) < 0$) для всех $r \neq 0$ и $f(M) \neq 0$;

2) $r\chi(r) > 0$, $r \neq 0$, *и* $\left(f(M)\right)' \dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial x} > 0.$ (5.39)

Доказательство. Используя стандартные приемы нетрудно определить две динамические системы для (5.35) и (5.36) (обозначим их соответственно π и σ). Кроме того, из (5.38) и (5.39) следует, что $f(M) \neq 0$. Поэтому в каждом из случаев можно указать окрестность U точки M в D, не содержащую точек покоя системы σ. Пусть Y означает множество точек покоя системы π в U. Тогда легко видеть, что с учетом сложившихся условий мы находимся в радиусе действия леммы 5.23 и для завершения доказательства теоремы 5.15 достаточно привести в соответствие утверждение леммы 5.23 для устойчивости и неустойчивости точки покоя M.

Случай равенства нулю скалярного произведения в левой части (5.38) будем именовать в дальнейшем *критическим*. Помимо работы автора [40] такая ситуация рассматривалась в [66]. Один из простейших критических случаев, по-видимому, представляет система «первого приближения» для (5.35), а именно, система

$$\dot{x} = \chi(c'x)(Ax + b), \ \ b \neq 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.40}$$

где b и c – постоянные n-мерные векторы, A – $(n\times n)$ постоянная матрица, и $\chi(r) \neq 0$ для $r \neq 0$.

Сразу отметим, что при $\chi(r) = r$ система (5.40) соответствует критическому случаю $(n-1)$-го нулевого корня в обычном понимании [81] исследования устойчивости нулевого решения.

Теорема 5.3 [40]. *Пусть* $\chi(r) \neq 0$ *для* $r \neq 0$. *Для того чтобы нулевое решение системы* (4.40) *было устойчивым*, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

1) $r\chi(r) > 0, \ \ r \neq 0$ (5.41)

2) *существует четное число* $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ *такое*, *что* $c'A^jb = 0$ *для всех* $j = 0, 1, 2, ..., k-1$ *и* $c'A^kb < 0$.

(5.42)

Доказательство. Пусть выполнены условия (5.41), (5.42). Обозначим через π динамическую систему, соответствующую (5.10), а через σ – соответствующую системе

$$\dot{y} = b + Ay, \ \ b \neq 0, y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.43}$$

Рассмотрим скалярное произведение $\psi(t) = c'\sigma(0,t)$, $0 \in \mathbb{R}^n$. Легко сосчитать, что функция ψ в каждый момент времени t представима в виде

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} c^T A^m b \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Смена знака функции $\psi(t)$ в окрестности точки $t = 0$ зависит от первого, отличного от нуля коэффициента ее разложения в ряд Тейлора. Это в свою очередь влияет на соответствие между направлением движений в системах π и σ. Отсюда на основании леммы 5.23 и следует устойчивость тривиального решения $x = 0$ системы (5.40).

Необходимость условий (5.41), (5.42), притом, что $x = 0$ устойчива, также следует из леммы 5.23 в тех ситуациях, когда число k в требовании (5.42) конечное и меньше, чем n.

Покажем, что если

$$c^T A^j b = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, ..., n-1, \tag{5.44}$$

то нулевое решение (4.40) устойчиво. На самом деле, рассмотрим функцию $\Theta_\mu(t) = c'\sigma(\mu c, t)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Из (5.44) в силу известной теоремы Кэлли [32] следует, что $c'A^j b = 0$ для любого $j = 0, 1, 2, ...$. Поэтому разложение функции $\Theta_\mu(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$ имеет вид $\Theta_\mu(t) = \mu\Theta(t)$, где функция $\Theta(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} c'A^j c \frac{t^j}{j!}$. Так как $c \neq 0$, то $\Theta(0) > 0$, а значит, существует число $T > 0$ такое, что $\Theta(t) > 0$ при всех $-T \leq t \leq T$. Следовательно, $\Theta_\mu(t) > 0$, если $-T \leq t \leq T$ и $\mu > 0$.

Далее, так как $b \neq 0$, то $y = 0$ не является стационарной точкой системы (5.42), а поэтому по числу $T > 0$ можно указать числа $\Delta > 0$, $\tau_1 \in [-T, 0]$ и $\tau_2 \in [0, T]$ такие, что $\sigma(0, \tau_i) \notin \overline{B(0,\Delta)}$, $i = 1, 2$. В силу интегральной непрерывности выберем число $\mu_1 > 0$ для которого $\sigma(y, \tau_i) \notin \overline{B(0,\Delta)}$ для любого $y \in B(0, \mu_1)$, $i = 1, 2$.

Зафиксируем число $\varepsilon \in\ ]0, \Delta[$. Тогда для любого $\delta > 0$ можно указать число $\mu > 0$, $\mu < \mu_1$, и такое, что $\mu c \in B(0, \delta)$. В силу того, что $\mu\Theta(t) > 0$ при всех $-T \leq t \leq T$ движение $\sigma(\mu c, t)$ не пересекает поверхность $c'y = 0$ на участке $[-T, T]$ и, более того, $\sigma(\mu c, \tau_i) \notin \overline{B(0,\Delta)}$, $i = 1, 2$, а значит, $\sigma(\mu c, \tau_i) \notin \overline{B(0,\varepsilon)}$, $i = 1, 2$. Поэтому, так как $\chi(\Theta_\mu(t))$ не меняет знак на интервале $-T \leq t \leq T$, то для соответствующего движения $\pi(\mu c, t)$ системы (5.10) будет выполнено условие: существует момент $\tau^* > 0$, такой, что $\pi(\mu c, \tau^*) \notin \overline{B(0,\varepsilon)}$. Другими словами, тривиальное решение (5.40) неустойчиво. Теорема доказана.

Рассмотрим более сложный критический случай системы (5.35), а именно систему «второго приближения»

$$\dot{x} = \chi(c'x)Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.45}$$

где по-прежнему $\chi(r) \neq 0$ для $r \neq 0$, A – постоянная $(n \times n)$-матрица, c – постоянный вектор.

Наряду с этим будем рассматривать векторное уравнение

$$\dot{y} = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{5.46}$$

с той же матрицей A.

Предварительно докажем следующий результат.

Теорема 5.4 [40]. *Для того чтобы всякое решение* $\sigma(y, t)$ *системы* (5.46) *попадало бы за конечное время* $t > 0$ *на гиперплоскость* $c' y = 0$, *необходимо и достаточно*, *чтобы все вещественные серии собственных векторов относительно матрицы* A [25] *были ортогональны вектору* c.

Доказательство. Запишем все различные собственные векторы матрицы A в виде двух групп (соответственно, вещественные и комплексные) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ и $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = \overline{1, r}$, где i – мнимая единица. Тогда общее решение (4.16) можно представить в виде прямой суммы

$$\sigma(y, t) = P(y, t) + Q(y, t),$$

где P и Q отвечают соответственно группам собственных чисел λ_j, $j = \overline{1, s}$, и μ_j, $j = \overline{1, r}$. При умножении обеих частей разложения $\sigma(y, t)$ скалярно на вектор c первое слагаемое в правой части в силу требования теоремы даст нуль. Поэтому после такого умножения, очевидно, можем записать

$$c' \sigma(y, t) = \sum_{j=1}^{r} (P_j(t)\cos(\beta_j t) + Q_j(t)\sin(\beta_j t))\exp(\alpha_j t), \tag{5.47}$$

где P_j и Q_j – скалярные полиномиальные функции, степени которых ограничены кратностями соответствующих собственных чисел μ_j, $j = \overline{1, r}$. Предположим сначала, что не все собственные числа имеют нулевую вещественную часть. Тогда, без потери общности считаем, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_l > \alpha_{l+1} \geq ... \geq \alpha_r, \ \ 1 \leq l \leq r.$$

Выделим в правой части равенства (5.47) слагаемое $H(t)\exp(\alpha_1 t)$, где

$$H(t) = \sum_{j=1}^{l} (\tilde{P}_j(t)\cos(\beta_j t) + \tilde{P}_j(t)\cos(\beta_j t))\exp(\alpha_j t)\ ,$$

а функции $\tilde{P}_j$ и $\tilde{Q}_j$ такого же типа, что и P_j и Q_j. Пусть максимальная степень полиномов $\tilde{P}_j$ и $\tilde{Q}_j$, $1 \leq j \leq l$, равна m. Запишем H в виде

$$H(t)=\sum_{k=0}^{m} t^k \sum_{j\in\Gamma_k} (h_{kj}\cos(\beta_j t)+g_{kj}\sin(\beta_j t)) \qquad (5.48)$$

и выделим в (5.17) слагаемое $t^m\varphi(t)$, где

$$\varphi(\mathrm{t})=\sum_{j\in I_m} (a_j\cos(\beta_j t)+b_j\sin(\beta_j t)). \qquad (5.49)$$

Здесь a_j и b_j – постоянные коэффициенты, множество индексов I_m конечно. Отметим, что функция (5.49) является почти периодической в смысле Бора [19], причем, ее среднее значение на $\mathbb{R}^+$ равно нулю. Поэтому для некоторого $\varepsilon > 0$ можно указать число $T > 0$ такое, что на любом интервале длины T из $\mathbb{R}$ существуют точки, в которых функция (5.49) будет принимать значения меньше $-\varepsilon$ и больше $+\varepsilon$. Это свойство позволяет утверждать, что при достаточно большом значении $t > 0$ знак скалярного произведения (5.47) будет определяться знаком выражения (5.48), а значит, – знаком (5.49). Поэтому, в частности, при достаточно большом значении времени $t > 0$ на интервале длины $T > 0$ существует нуль функции (5.47), что и требовалось доказать.

Если все собственные числа μ_1, μ_2, ..., μ_r матрицы A имеют нулевую вещественную часть, т. е. $l = r$, но существуют кратные, т. е. $m \geq 1$, то все предыдущие рассуждения остаются в силе.

Это же будет верно, если имеет место последняя из оставшихся возможностей. А именно, если $\alpha_j = 0$ для любого $j = \overline{1,r}$ и среди комплексных собственных чисел μ_j нет кратных, т. е. $m = 0$, то в вышеизложенной схеме доказательства следует положить $\varphi(t) = \sigma(y, t)$.

Докажем обратно утверждение. Пусть каждое решение $\sigma(y, t)$ системы (5.46) пересекает поверхность $c'y = 0$ за конечное время. Покажем, что все собственные векторы и их серии, отвечающие вещественным собственным значениям, ортогональны вектору c. На самом деле, если это не так, то существует собственное число $\lambda_{j(0)} \in \mathbb{R}$ и соответствующая ему серия векторов h_1, ..., h_k, для которой

$$c'h_j = 0 \text{ при } j = 1, 2, ..., m-1 \text{ и } c'h_m \neq 0, \text{ где } 1 \leq m \leq k.$$

Поэтому в силу известных свойств функция $y(t) = t^{m-1}\exp(\lambda_{j(0)}t)h_m$ является решением (5.46). Более того, ясно, что решение $\sigma(y, t)$ ни при каком конечном значении $t > 0$ не пересекает поверхность $c'y = 0$. Однако это противоречит исходным предположениям. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *При выполнении всех требований теоремы* 5.17 *всякое решение системы* (5.46) *попадает за конечное время на гиперплоскость* $c'y = 0$ *как при* $t > 0$, *так и при* $t < 0$.

Лемма 5.2. *Если каждое решение* (5.46) *попадает за конечное время* $t > 0$ ($t < 0$) *на гиперплоскость* $c'y = 0$, *то существует число* $T > 0$ *такое, что всякое решение* $\sigma(y, t)$ *системы* (4.46) *пересекает поверхность* $c'y = 0$ *на интервале* $[0, T]$ (*соответственно на интервале* $[-T, 0]$).

Доказательство. В силу свойств решений линейных систем

$$\sigma(y, t) = \exp(At)y = \exp(At)(y \setminus \|y\|)\|y\|$$

и поэтому достаточно провести доказательство для решений вида $\sigma(y, t)$, $\|y\| = 1$. С этой целью предположим напротив, что утверждение леммы 5.24 неверно. Тогда можно указать последовательность чисел $(T_n) \subset \mathbb{R}^+$, $T_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, и последовательность начальных состояний $(y_n) \subset \mathbb{R}^n$, $\|y_n\| = 1$, такие, что

$$c'\sigma(y, t) \neq 0 \ \text{ при } \ 0 \leq t < T_n \ \text{ и } \ c'\sigma(y_n, T_n) = 0, \ \forall n \geq 1.$$

Ограниченная последовательность (y_n) имеет сходящуюся подпоследовательность (пусть это сама последовательность (y_n)), т. е. $y_n \to y$, $\|y\| = 1$. Заметим, что последовательность функций $(\sigma(y_n, t))$ сходится равномерно к функции $\sigma(y, t)$ на любом интервале $[0, T]$ фиксированной длины $T > 0$. Используя доказательство теоремы 4.17 можно показать, что существует число $T > 0$ такое, что функция $c'\sigma(y, t)$ принимает на отрезке $[0, T]$ значение меньше $-\varepsilon$ и больше $+\varepsilon$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Отсюда в силу интегральной непрерывности решений (4.16) при достаточно большом значении номера n ($n \geq N$) этим же свойством будут обладать и функции $c'\sigma(y_n, t)$ на интервале $[0, T]$. Однако по построению последовательности (y_n) при достаточно большом n ($T_n > T$) функция $c'\sigma(y, t)$ не может менять знак на участке $[0, T]$, что приводит к противоречию.

Случай $t < 0$ симметричен рассмотренному случаю.

Для формулировки основного результата об устойчивости нулевого решения системы (5.45) предварительно введем следующее понятие.

Определение 5.2. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *– все различные собственные значения матрицы* A. *Будем говорить, что собственное число* λ_j, $j = \overline{1, s}$, *устойчиво, если всякое совпадающее с* λ_j *собственное значение* A *удовлетворяет одному из условий*:

1) $Re\,\lambda_j < 0$;

2) $Re\ c'\sigma\,\lambda_j \le 0$, *причем соответствующие элементарные делители простые.*

Будем говорить, что собственное число λ_j, $j = \overline{1,s}$, *неустойчиво, если оно является устойчивым для матрицы* $-A$.

Теорема 5.5 [40]. *Нулевое решение системы* (5.45) *устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) *все вещественные серии векторов относительно матрицы A* [25] *ортогональны вектору c*;

2) *существует хотя бы один вектор серии относительно матрицы A, не ортогональный вектору c, все вещественные собственные значения матрицы A устойчивы и* $r\chi(r) > 0$, $r \ne 0$ (*все вещественные собственные значения матрицы A неустойчивы и* $r\chi(r) < 0$, $r \ne 0$).

Доказательство. Пусть выполнено условие 1). Покажем, что решение $x = 0$ системы (5.45) устойчиво. Действительно, в этом случае всякое решение $\sigma(y, t)$ системы (5.46) попадает согласно теореме 5.4 на гиперплоскость $c'y = 0$ при некотором значении $t \in [0, T]$, а также и при $t \in$ $\in [-T, 0]$, где число $T > 0$ можно выбрать не зависящим от y. Поэтому, обозначив через $t^+ > 0$ и $t^- < 0$ моменты времени, в которые указанное решение первый раз, считая от точки $t = 0$, попадает на поверхность $c'y =$ 0, будем иметь неравенство $\|\sigma(y, t)\| \le \alpha\|y\|$ для любого $t \in [t^-, t^+] \subset\subset [-T, T]$, где α зависит лишь от T. Получаем, что вне зависимости от знака $\chi(r)$ при $r \ne 0$ решение $\pi(y, t)$ системы (5.40) будет обладать следующим свойством:

$$\| c'\pi(y,t) \| \to 0 \ \text{при}\ t \to +\infty,\ \text{при этом}\ \| \pi(y,t) \| \le \alpha\|y\|,\ \ \forall t \ge 0.$$

Отсюда легко следует устойчивость нулевого решения системы (5.40).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда выполняется условие 2). Предположим, что все вещественные собственные значения матрицы A устойчивы, $r\chi(r) > 0$ для $r \ne 0$, и существует вектор из серии относительно матрицы A, не ортогональный вектору c. Тогда общее решение системы (5.46) согласно [109] может быть записано в виде

$$\sigma(y, t) = P(y, t) + Q(y, t),$$

где вектор-функция $P(y, t)$ порождена всеми сериями относительно матрицы A, куда входят все комплексные серии и те, которые ортогональны вектору c. Отсюда получаем неравенство

$$\|\sigma(y, t)\| \le \|P(y, t)\| + \|Q(y, t)\|. \tag{5.50}$$

Аналогично рассуждениям, приведенным в начале доказательства, можно получить неравенство $\|P(y, t)\| \le \alpha\|y\|$ для любого $t \ge 0$. Отсюда, принимая во внимание неравенство (5.49), следует оценка $\|\sigma(y, t)\| \le \alpha\|y\|$ для любого $t \ge 0$. Поэтому, так как $r\chi(r) > 0$ для $r \ne 0$, то для решений системы (5.45) из предыдущего вытекает соотношение $\|\pi(y, t)\| \le c\|y\|$ для любого $t \ge 0$, что и соответствует устойчивости нулевого решения системы (5.45).

Случай, когда все вещественные собственные значения матрицы A неустойчивы и $r\chi(r) < 0$ для $r \ne 0$ симметричен рассмотренному.

Докажем обратное утверждение, т. е. в предположении устойчивости нулевого решения системы (5.45) нужно показать, что выполняется одно из условий 1) либо 2). С этой целью, предположим противное, т. е. ни условие 1), ни условие 2) не выполняется. Последнее возможно лишь тогда, когда существует хотя бы один вектор серии относительно матрицы A, не ортогональный вектору c, и выполняется одно из следующих условий:

3) *существует хотя бы одно неустойчивое вещественное собственное значение матрицы A и $r\chi(r) > 0$ для $r \ne 0$;*

4) *существует хотя бы одно устойчивое вещественное собственное значение матрицы A и $r\chi(r) < 0$ для $r \ne 0$.*

Очевидно, достаточно рассмотреть только одно из этих условий, например 3), которое аналогично 4). Пусть h – вектор серии относительно матрицы A такой, что $c'h \ne 0$, и g – вектор серии относительно матрицы A, отвечающий неустойчивому собственному значению матрицы согласно предположению 3). Тогда [109] можно выбрать решение

$$\sigma(y, t) = h\alpha(t) + g\beta(t)$$

системы (5.46), где α и β – скалярные функции. Ясно, что такое решение будет отвечать определению неустойчивости нулевого решения (5.46).

Кроме того, так как по предположению скалярное произведение

$$c'\sigma(y,t) = (c'h)\alpha(t) + (c'g)\beta(t) \ne 0,$$

вне зависимости от величины $c'g$, то выбранное решение не попадает на гиперплоскость $c'y = 0$. А поэтому, так как $r\chi(r) > 0$ при $r \ne 0$, то решение $\pi(y, t)$ системы (5.45) будет также удовлетворять условиям неустойчивости решения $x = 0$ системы (5.45). Пришли к противоречию, что и доказывает теорему.

5.2. *B*-УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t),\ x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ \ f(0,t) = 0,\ \ t \geq 0, \tag{5.51}$$

определенную в открытой связной окрестности D начала координат $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f: D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x. Тогда через каждую точку (x_0, t_0) области определения системы проходит единственное решение $x(x_0, t_0, t)$, $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$.

5.2.1. *B*-УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть система (5.51) автономна, $f(x,t) = f(x)$, т. е.

$$\dot{x} = f(x),\ \ x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ \ f(0) = 0, \tag{5.52}$$

и $x(x_0,t)$ $x(x_0,0) = x_0$, означает решение такой системы.

Понятие *B*-устойчивости впервые дано в работе автора [39] для динамических систем на метрическом пространстве. Для систем автономных дифференциальных уравнений *B*-устойчивость нулевого решения представляется следующими определениями.

Определение 5.3. Будем говорить, что для системы (5.52) окрестность W точки $x = 0$ – *выталкивающая при* $t < 0$ *окрестность*, если для любого начального состояния $x_0 \in \mathrm{Fr}W$ существует число $\tau < 0$ такое, что $x(x_0,\tau) \notin \overline{W}$.

Нулевое решение автономной системы (5.52) называется *B-устойчивым*, если всякая окрестность начала координат содержит положительно инвариантную, выталкивающую при $t < 0$ окрестность точки $x = 0$.

В работе [64] показано, что свойство *B*-устойчивости влечет свойство устойчивости, а из асимптотической устойчивости нулевого решения вытекает его *B*-устойчивость. Более того, в работе [53] доказан следующий результат.

Теорема 5.6. *Нулевое решение автономной системы* (5.52) *B-устойчиво тогда и только тогда*, *когда выполняются следующие условия*:

1) $x = 0$ *устойчиво*;

2) *каждая окрестность точки* $x = 0$ *содержит компактное, асимптотически устойчивое множество* K *такое, что* $0 \in K$.

Пример 5.3. Пусть динамическая система задана на плоскости $\mathbb{R}^2$ дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 f(x), \ \dot{x}_2 = -x_2 g(x), \ x = (x_1, x_2),$$

где полагаем $r^2 = x_1^2 + x_2^2$,

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2}{1+r^2}\sin\dfrac{1}{r}, & \text{если } \ x_1 \le 0 \ \text{ и } r \ne 0; \\ \dfrac{x_2^2}{1+r^2}\sin\dfrac{1}{|x_2|} + \dfrac{x_1^2}{1+r^2}, & \text{если } \ x_1 > 0, x_2 \ne 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x_1^2}{1+r^2}, \ g(x) = 0, \text{ если } \ x_1 > 0, x_2 = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что правые части системы непрерывны и обладают свойством существования и единственности решений в пространстве $\mathbb{R}^2$. Фазовый портрет расположения траекторий изображен на рис. 5.2, где в силу симметрии направление движений вдоль траекторий системы указано лишь в верхней полуплоскости.

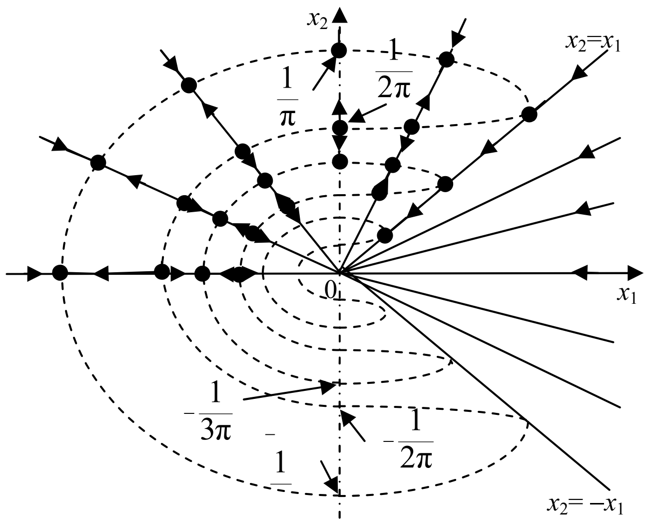

Рис. 5.2. B-устойчивая точка покоя (0, 0)

В качестве пояснения отметим, что всякая траектория рассматриваемой системы принадлежит одной из прямых линий, проходящих через начало координат. Однако лучи, исходящие из начала, неоднородны. Сектор $S = \{x\in \mathbb{R}^2 : x_1 > |x_2| > 0\}$ определяет область притяжения A точки покоя (0, 0). Каждая прямая $ax_1 + bx_2 = 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, не имеющая общих точек с S, содержит счетное множество точек покоя, для которых начало координат является предельной точкой. В полуплоскости $x_1 \leq 0$ все точки покоя располагаются на окружностях $r = 1/(\pi n)$, n =1, 2, 3, ... , и $r = 0$. Направления движения на лучах между соседними положениями равновесия чередуются (к началу координат или от него), и указаны стрелками.

составляют граничные лучи сектора S. Точка покоя (0, 0) является B-устойчивой, в чем легко убедиться, рассмотрев семейство окрестностей вида

$$W_n = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : r \leq 1/(2\pi m + \pi/2)\right\},\ n = 1,2,3,...,$$

каждая из которых является выталкивающей при $t < 0$ окрестностью начала координат.

5.2.2. *B*-УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введем в рассмотрение свойство B-устойчивости для неавтономных систем дифференциальных уравнений.

Определение 5.4. *Пусть Y – замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Нулевое решение системы* (5.51) *называется*:

– ***равномерно B-притягивающее относительно Y****, если всякая окрестность начала координат содержит замкнутое положительно инвариантное равномерно притягивающее относительно Y подмножество K такое, что* $0 \in K$.

– ***равномерно B-устойчивым относительно Y****, если оно равномерно устойчиво относительно Y и для любой окрестности U начала координат существует компактное, положительно инвариантное, равномерно асимптотически устойчивое относительно Y множество K такое, что* $0 \in K$.

Если при этом $Y = \mathbb{R}^n$, *то будем говорить, что нулевое решение системы* (5.51) *соответственно* ***равномерно B-притягивающее и равномерно B-устойчивое***.

Заметим, что если нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво, то в соответствии с данным определением оно и равномерно *B*-устойчиво.

С учетом теоремы 5.6 введенное определение 5.4 совпадает с определением 5.3 для автономного случая.

Пример 5.4. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = |y|^{1+\alpha(t)} \sin(\pi / y) \quad (\text{для } y \neq 0 \text{ и } \dot{y} = 0 \text{ для } y = 0), \tag{5.53}$$

где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $0 < \alpha_1 \leq \alpha(t) \leq \alpha_2 < \infty, \forall t \geq 0$. Видно, что это уравнение имеет два счетных множества состояний равновесия $(\pm a_k)_{k \geq 1}$, $a_k = 1/2k$, $k \in \mathbb{N}$. Каждая соседняя пара точек покоя a_{2m}, и $a_{2(m-1)}$ уравнения (5.53) такова, что a_{2m} локально асимптотически устойчива, а $a_{2(m-1)}$ неустойчива. Поэтому в любой достаточно малой окрестности точки $y = 0$ можно выбрать компактное, инвариантное, равномерно асимптотически устойчивое множество вида $K_{2m} = [-a_{2m}, a_{2m}]$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, нулевое решение такого уравнения является равномерно *B*-притягивающим и равномерно *B*-устойчивым. Заметим, что здесь нулевое решение не обладает областью притяжения и поэтому не является асимптотически устойчивым.

Дадим следующую характеристику понятия *B*-устойчивости для неавтономного случая.

Теорема 5.7. *Нулевое решение системы* (5.53) *равномерно B-устойчиво, если для любого достаточно малого числа* $\varepsilon > 0$ *существует компактное множество K* ($0 \in K \subset B_\varepsilon$), *существуют непрерывно дифференцируемая функция* $V : B(K, \varepsilon) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и функции a, b, c* $\in$ ***K*** *такие, что для всех точек* $(x, t) \in B(K, \varepsilon) \times \mathbb{R}^+$ *имеют место следующие условия*:

1) $a(d(x, K)) \leq V(x, t) \leq b(d(x, K))$;

2) $\dot{V}(x, t) \leq -c(d(x, K))$.

Доказательство. Пусть выполнены предположения теоремы. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы шар B_ε содержался бы в области *D*. Тогда с учетом функции Ляпунова с заданными свойствами *K* является равномерно асимптотически устойчивым множеством [121]. Действительно, в силу предположений 1), 2) функция $V(x, t) = 0$, если $x \in K$ для всех $t \geq 0$, и поэтому множество *K* положительно инвариантно. Доказательство равномерной асимптотической устойчивости *K* можно осуществить точно так же, как, например, при доказательстве теоремы о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5.53). Отсюда в силу определения 5.6 и следует требуемое утверждение теоремы.

Пример 5.5. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1+\varphi_1(t))\sin\left(\dfrac{\pi}{x_1^2+x_2^2}\right)+\varphi_2(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = -\varphi_2(t)x_1 + x_2(1+\varphi_3(t))\sin\left(\dfrac{\pi}{x_1^2+x_2^2}\right) \end{cases}$$

при $x_1^2+x_2^2 \neq 0,$ и $\dot{x}_1 = 0,$ $\dot{x}_2 = 0$ при $x_1 = x_2 = 0.$ Здесь $\varphi_s\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – непрерывные функции такие, что

$$0 < \varphi_{1s} \le \varphi_s(t) \le \varphi_{2s} < +\infty \quad \forall t \ge 0 \ (s = 1, 2, 3).$$

Нетрудно видеть, что множества

$$K_m = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1/m\}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

компактны, инвариантны и располагаются в любой достаточно малой окрестности начала координат. Поэтому точка $x = 0$ $y = 0$ не является асимптотически устойчивой. Заметим, кроме того, что для каждого натурального m всякое решение системы $(x_1(x_{10}, x_{20}, t), x_2(x_{10}, x_{20}, t))$ с начальными данными

$$\frac{1}{2m+1} < x_{10}^2 + x_{20}^2 < \frac{1}{2m}, \quad t_0 \ge 0,$$

неограниченно приближается к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1/(2m+1)$ фазового пространства $\mathbb{R}^2$. При этом можно показать, что такое асимптотическое стремление равномерно.

Действительно, в качестве функции Ляпунова, обеспечивающей равномерную асимптотическую устойчивость компактного инвариантного множества K_{2m}, можно взять

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, x_2) \in K_{2m}, \\ x_1^2 + x_2^2, & \text{если } (x_1, x_2) \in \operatorname{int}(K_{2m-1} \setminus K_{2m}). \end{cases}$$

Она имеет полную производную по времени $\dot{V}$ в силу системы, заданную для всех $(x_1, x_2) \in \operatorname{int}(K_{2m-1} \setminus K_{2m})$ формулой

$$\dot{V}(x_1, x_2, t) = -2(x_1^2(1+\varphi_1(t)) + x_2^2(1+\varphi_3(t)))\sin\left(\frac{\pi}{x_1^2+x_2^2}\right).$$

Такая функция вместе со своей производной по времени удовлетворяет всем требованиям теоремы 13 [35] о равномерной асимптотической устойчивости по отношению к K_{2m}. Поэтому множество K_{2m} равномерно асимптотически устойчиво при любом $m \in \mathbb{N}$.

Таким образом, нулевое решение рассматриваемой системы является равномерно B-притягивающим и равномерно B-устойчивым.

5.2.3. УСЛОВИЕ СЕЙБЕРТА И УСТОЙЧИВОСТЬ

В работах [153, 154, 158] П. Сейбертом дано определение понятия «пороговое свойство» ("threshold property"). Для систем неавтономных дифференциальных уравнений оно формулируется следующим образом.

Определение 5.5. *Пусть K и Y – два замкнутых положительно инвариантных множества, причем $K \subset Y$. Будем говорить, что пара (K, Y) обладает* ***свойством Сейберта****, если для любого $\mu > 0$ существует $\nu = \nu(\mu) > 0$ такое, что если решение $x(x_0, t_0, t)$, $x_0 \in B_\nu$, $t_0 \geq 0$, при некотором $T > 0$, удовлетворяет неравенству*

$$d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \nu, \ \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

тогда

$$d(K, x(x_0, t_0, t)) < \mu \ \ \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Другими словами, данное определение означает, что если некоторое решение $x(x_0, t_0, t)$ «удаляется» от множества K, то оно сначала начинает «удаляться» от множества Y.

Лемма 5.3. *Пусть K и Y – два замкнутых положительно инвариантных множества, причем $K \subset Y$. Если множество K равномерно Y-притягивающее, тогда пара (K, Y) обладает свойством Сейберта.*

Определение 5.6. *Пусть K и Y – два замкнутых множества таких, что Y содержит K. Будем говорить, что Y* ***локально устойчиво вблизи*** *K, если существует окрестность U множества K, в которой выполняется следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых начальных состояний $x_0 \in B(K, \delta)$, $t_0 \geq 0$ и любого $T > 0$, удовлетворяющего условию:*

$$d(x(x_0, t_0, t), K) < \varepsilon, \quad \forall \mathrm{t} \in [t_0, t_0 + T],$$

выполняется также и условие

$$d(x(x_0, t_0, t), Y) < \varepsilon, \quad \forall \mathrm{t} \in [t_0, t_0 + T].$$

Лемма 5.4. *Пусть K и Y – два замкнутых положительно инвариантных множества таких, что Y содержит K. Если Y равномерно устойчиво вблизи множества K и пара* (K, Y) *удовлетворяет свойству Сейберта, то множество K равномерно устойчиво.*

Лемма 5.5. *Пусть Y – замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Тогда если нулевое решение равномерно B-притягивающее относительно Y, то пара* (0, Y) *удовлетворяет условию Сейберта.*

Доказательство. Пусть выполнены все предположения леммы, но пара (0, Y) не удовлетворяет условию Сейберта. Тогда существует число $\varepsilon > 0$, существует последовательность состояний $(x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_n \to 0$ при $n \to +\infty$, существуют последовательности моментов времени (t_{0n}), $t_{0n} \ge 0$, и $(t'_n) \in \mathbb{R}^+$, $t'_n > t_{0n}$, $\forall n \ge 1$, такие, что

$$\lim_{n\to+\infty} \sup d_1(x(x_n, t_0, [0, t'_n]), Y) = 0, \quad x(x_n, t_0, t'_n) \notin B_\varepsilon. \tag{5.54}$$

Так как равновесие определяет инвариантное множество, то в силу единственности решений системы можно считать, что $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Кроме того, в силу равномерного B-притяжения начала координат относительно Y существует компактное равномерно притягивающее относительно Y множество K такое, что $K \subset B_\varepsilon$ и $0 \subset K \subset Y$. Поэтому из (5.54) следует существование числа ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, и последовательности $(t_n) \in \mathbb{R}^+$, $0 \le t_n \le t'_n$, таких, что

$$\lim_{n\to+\infty} \sup d_1(x(x_n, t_0, [0, t_n]), Y) = 0, \quad x(x_n, t_0, [0, t_n]) \notin B(K, \varepsilon'). \tag{5.55}$$

Приведенные построения наряду с (5.55) фактически означают, что пара (K, Y) не удовлетворяет свойству Сейберта. Поскольку K − равномерно притягивающее относительно Y, то с учетом леммы 5.4 это приводит к противоречию, что и доказывает утверждение леммы.

Примером ситуации, возникающей в задаче Флорио – Сейберта (см. п. 1.4, гл. 2), могут служить системы дифференциальных уравнений, описывающие движения механических систем при наличии первых интегралов. В этом случае множество Y задается уравнением первого интеграла, содержащего исследуемое на устойчивость инвариантное множество M (например, точку покоя, стационарное движение и т. п.). Отметим, что для таких систем требование асимптотической устойчивости относительно Y является чрезмерно жестким, так как в действительности системы, обладающие первыми интегралами, могут порождать лишь неасимптотическую устойчивость. В числе идей ослабления требования такого жесткого требования напрашивается свойство устойчивости M по отношению к множеству Y. Однако, как показывает следующий пример, такая замена не дает желаемого результата.

Пример 5.6. Пусть система уравнений в $\mathbb{R}^3$ задается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = -y + xz,\ \ \dot{y} = x + xz,\ \ \dot{z} = -\frac{z^3}{1+z^4}.$$

Здесь множество $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ инвариантно, замкнуто и содержит начало координат. Функция Ляпунова $V = z^2$, как нетрудно проверить, имеет вне Y определенно отрицательную производную по времени в силу системы. Поэтому по известной теореме второго метода Ляпунова [121] Y асимптотически устойчиво в $\mathbb{R}^3$, т. е. рассматриваемое требование выполняется с избытком. На множестве Y точка (0, 0) является особой точкой типа «центр» и значит, имеет место условие устойчивости нулевого решения относительно Y. Тем не менее, начало координат не является устойчивым в $\mathbb{R}^3$. Действительно, из третьего уравнения системы получаем, что вдоль всякого решения $z(t)$, $z(0) \neq 0$, выполняется равенство

$$\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{3}z^3(t) + c = \int_0^t z(\tau)d\tau.$$

Поэтому, если $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то $\int_0^t z(\tau)d\tau \to +\infty$, если $t \to +\infty$ и $z(0) > 0$. Отсюда вытекает, что для функции $V(x, y, z) = x^2 + y^2$ с производной по времени $\dot{V}(x, y, z) = (x^2 + y^2)z = V(x, y, z)z$ вдоль решения $(x(t), y(t), z(t))$ с начальными условиями $x^2(0) + y^2(0) \neq 0$, $z(0) > 0$, имеет место условие: $x^2(t) + y^2(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Таким образом, начало координат неустойчиво.

На основе приведенных выше результатов сформулируем и докажем теорему об устойчивости метода знакопостоянных функций Ляпунова.

Теорема 5.2.1. *Предположим, что существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V: U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и функции* $a, b \in \boldsymbol{K}$ *такие, что для всех значений* $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|)$, *где*

$$Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0\ \ \forall t \geq 0\}};$$

2) $\dot{V}(x,t) \le 0$;

3) *решение* $x = 0$ *равномерно B-притягивающее относительно множества* Y_0.

Тогда начало координат системы (5.1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Согласно предположению 1) множество Y непусто, замкнуто и с учетом 2) оно положительно инвариантно. Покажем сначала, что множество Y равномерно устойчиво вблизи начала координат. С этой целью зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\overline{B_\varepsilon} \subset U$. Согласно 1) существует $\lambda > 0$ такое, что $V(x, t) > \lambda$, $\forall t \ge 0$, если $d(Y, x) > \varepsilon$.

Так как $V(0, t) = 0$, то в силу того, что $V(x, t) \le b(\|x\|)$ для числа λ можно указать $\delta > 0$ такое, что $V(x_0, t_0) \le \lambda$, $\forall t_0 \ge 0$, если $\|x_0\| < \delta$ ($\delta = b^{-1}(\lambda)$).

Следовательно, если решение $x(x_0, t_0, t)$ остается в окрестности U на интервале $t_0 \le t \le t_0 + T$ для некоторого числа $T > 0$, то согласно предположению 2) будем иметь:

$$V(x(x_0, t_0, t), t) \le \lambda, \quad t_0 \le t \le t_0 + T, \quad \forall t_0 \ge 0.$$

Таким образом, с учетом предыдущих построений решение $x(x_0, t_0, t)$ удовлетворяет неравенству

$$d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \varepsilon \text{ для } t_0 \le t \le t_0 + T \text{ и } \forall t_0 \ge 0.$$

Следовательно, Y равномерно устойчиво вблизи начала координат. Кроме того, согласно предположению 3) и леммы 5.5 пара $(0, Y)$ удовлетворяет свойству Сейберта. В таком случае, используя лемму 5.4 для случая $K = \{0\}$, получаем равномерную устойчивость состояния равновесия $x = 0$. Теорема доказана.

Следствие 5.2. *Предположим, что существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и функции* $a, b \in \boldsymbol{K}$ *такие, что для всех значений* $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \le V(x, t) \le b(\|x\|)$, *где*

$$Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0 \ \forall t \ge 0\}};$$

2) $\dot{V}(x,t) \le 0$;

3) *решение* $x = 0$ *равномерно притягивающее относительно множества* Y_0.

Тогда начало координат системы (5.1) *равномерно устойчиво.*

Замечание 5.2. *а*) В требовании 3) следствия 5.2 можно заменить свойство равномерного притяжения относительно множества Y_0 свойством равномерной асимптотической устойчивости относительно множества Y_0.

b) Из теоремы 2 или следствия 5.2 при условии, что функция Ляпунова V является определенно положительной, получаем известную теорему К. П. Персидского о равномерной устойчивости [98].

Пример 5.7. Рассмотрим в круге $x^2 + y^2 < 1$ систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = |y|^{1+\alpha(t)}(h(t)x + \sin(1/y)), \text{ при } y \neq 0 \end{cases} \tag{5.56}$$

и $\dot{y} = 0$ при $y = 0$, где функция $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям примера 5.4, а функция $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена при всех $t \geq 0$.

Знакопостоянная функция Ляпунова $V = x^2$ имеет неположительную производную по времени вдоль решений уравнения (5.56), равную $\dot{V} = -2x^2y^2$. На множестве, где функция $V = 0$, система переходит в скалярное дифференциальное уравнение (5.53), нулевое решение которого, как показано выше, является равномерно B-устойчивым.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и, следовательно, нулевое решение системы (5.56) равномерно устойчиво.

Пример 5.8. Рассмотрим задачу стабилизации системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2(x_2^2 + (x_3 + x_4^4))f_1(x,t), \\ \dot{x}_2 = x_1 f_1(x,t) - 2x_3(x_3 + x_4^4), \\ \dot{x}_3 = 2x_2x_3 - 4x_4^4 f_2(x,t), \\ \dot{x}_4 = x_4 f_2(x,t), \\ \dot{x}_5 = u, \end{cases}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $f_s(x,t)$ – непрерывно дифференцируемые функции по всем переменным вектора (x,t) $(t \geq 0)$ в некоторой окрестности D начала координат фазового пространства $\mathbb{R}^5$.

Функция Ляпунова

$$V(x) = x_1^2 + (x_2^2 + (x_3 + x_4^4)^2)^2$$

является первым интегралом системы вне зависимости от управления u. Поэтому стабилизация нулевого решения системы возможна лишь до свойства неасимптотической устойчивости. Покажем это.

Множество, где функция $V(x)$ обращается в нуль, определяется равенствами

$$x_1 = x_2 = 0, \ \ x_3 = -x_4^4.$$

На этом множестве система переходит в систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = x_4 f_2(0,0,-x_4^4,x_4,x_5,t), \\ \dot{x}_5 = u. \end{cases} \tag{5.57}$$

С учетом теоремы 2 задача стабилизации исходной системы уравнений может быть сведена к осуществлению условий, обеспечивающих равномерное B-притяжение редуцированной системы второго порядка. Последнего можно добиться, если выбрать, например, управление $u = -x_5$ и потребовать существование положительных чисел α, β таких, что

$$f_2(0,\, 0,\, -x_4^4,\, x_4,\, x_5,\, t) \le -\alpha, \quad |\, x_4 \,| + |\, x_5 \,| < \beta, \ \ \forall t \ge 0. \tag{5.58}$$

В этом случае для функции $V_1(x_4,x_5) = x_4^2 + x_5^2$ в некоторой достаточно малой окрестности начала координат будут выполнены условия теоремы Ляпунова [81] о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (6). Следовательно, начало координат системы (5.57) будет и равномерно B-притягивающим. Таким образом, на основании теоремы 5.2.1 заключаем, что при подстановке управления в форме обратной связи $u = -x_5$ и выполнении условия (5.58) нулевое решение системы (5.57) равномерно устойчиво и равномерно асимптотически устойчиво по координате x_5.

В заключение этого пункта отметим, что вопрос о развитии теоремы Ляпунова об устойчивости является актуальным. Многочисленные исследования качественного характера поведения траекторий в окрестности состояний равновесия динамических систем выявляют сложность описания имеющегося разнообразия типов таких равновесий и их классификаций в случае неасимптотической устойчивости по сравнению со свойством асимптотической устойчивости [58]. Именно по этой причине возникают трудности в задаче об обращении теоремы о неасимптотической устойчивости второго метода Ляпунова, в частности, об обращении теоремы Лагранжа – Дирихле для механических систем [17, гл. 2], имеющей важное прикладное значение. Если для неавтономных систем дифференциальных уравнений теорема обращения доказана [98], то для автономных уравнений в общем случае невозможно указать независящую от времени функцию Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы Ляпунова об устойчивости. В этой связи удивительным является тот факт, что известные контрпримеры механических систем с устойчивыми состояниями равновесия, не удовлетворяющие наиболее общим теоремам об устойчивости [105, с. 84–86], обладают свойством B-устойчивости этих равновесий.

5.2.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В теории дифференциальных уравнений задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях изучалась многими авторами [1, 27, 32, 70, 75, 84, 110]).

Суть исследуемой проблемы состоит в следующем.

Рассмотрим систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t),\ x \in G \subset \mathbb{R}^n,\ f(0, t) = 0,\ t \geq 0, \tag{5.59}$$

где $f : G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, G – окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x. Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times G$ существует единственное решение $x(x_0, t_0, t)$ системы (5.59), определенное на некотором интервале из $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяющее начальному условию $x(x_0, t_0, t) = x_0$.

Наряду с системой (5.59) рассмотрим также систему

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t), \tag{5.60}$$

где функция $g(x, t)$ определена для всех $t \geq 0$ в некоторой окрестности $G \subset \mathbb{R}^n$ начала координат, и ей отведена роль постоянно действующих возмущений. Относительно функциональных свойств $g(x, t)$ предполагается лишь то, что она не нарушает условий существования и единственности решений системы (5.60). При этом такая функция не обязательно равна нулю в начале координат и, таким образом, возмущенная система (5.36), вообще говоря, не обладает нулевым решением.

Тем не менее, для системы (5.59) вводятся различные понятия устойчивости нулевого решения при постоянно действующих возмущениях. Они основаны на обеспечении малого отклонения решений от исследуемого равновесия с достаточно малыми по норме начальными состояниями при условии, что норма возмущающей функции $g(x, t)$ достаточно мала. В такой постановке речь может идти лишь о локальном свойстве устойчивости, а не асимптотической устойчивости. Причина этого кроется в том, что решения с достаточно малыми по норме начальными состояниями, вообще говоря, не стремятся к нулю, т. е. такие системы могут не обладать областью притяжения.

В большинстве работ используется следующее определение.

Нулевое решение системы (5.59) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют числа $\eta_1(\varepsilon) > 0$ и $\eta_2(\varepsilon) > 0$ такие, что всякое решение уравнения (5.60) с начальными данными (x_0, t_0), $\| x_0 \| \le \eta_1(\varepsilon)$, $t_0 \ge 0$, при произвольной функции $g(x,t)$, удовлетворяющей в области $B_\varepsilon \times \mathbb{R}^+$ неравенству $\| g(x,t) \| \le \eta_2(\varepsilon)$, удовлетворяет также при всех $t > t_0$ неравенству $\| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon$.

Другие задачи, связанные с устойчивостью при воздействии постоянных возмущений на исходную неавтономную систему дифференциальных уравнений, в том числе и соответствующие приложения к задачам механики, рассматривались в книге [9].

Во всех перечисленных работах общим выводом является тот факт, что эффект постоянно действующих возмущений можно парировать, если невозмущенная система (система (5.59)) обладает достаточно сильным свойством устойчивости нулевого решения, а именно, свойством равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 5.9 ([27, 84]). *Если начало координат уравнения* (5.59) *равномерно асимптотически устойчиво*, *то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях*.

В дополнение к этому в работе [84] показано, что для линейных неавтономных систем дифференциальных уравнений вида $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$, где $A(t)$ – непрерывная $(n \times n)$-матрица, свойство устойчивости при постоянно действующих возмущений влечет равномерную асимптотическую устойчивость решения $x = 0$, т. е. для линейных систем справедливо и обратное утверждение. Однако, если исходная невозмущенная система (даже автономная) является нелинейной, то из свойства устойчивости при постоянно действующих возмущений, вообще говоря, не следует асимптотическая устойчивость нулевого решения. Последнее подтверждается примером работы [84].

Таким образом, возникла постановка следующей проблемы: *указать классы динамических систем*, *для которых неасимптотическая устойчивость влечет устойчивость при постоянно действующих возмущениях*. Ответ на поставленный вопрос был дан в работах [70, 110], где по существу использована близкая идея. При этом в [110] речь идет об устойчивости компактных инвариантных множеств абстрактных автономных динамических систем, а в работе [110] рассматривается устойчивость произвольных движений неавтономных систем дифференциальных уравнений, определяемых на дифференцируемых многообразиях.

В настоящем разделе книги выделяется тот случай, когда система уравнений (5.59) может быть устойчивой при постоянно действующих возмущениях и при этом ее нулевое решение не является равномерно асимптотически устойчивым, а лишь равномерно B-устойчивым.

Теорема 5.10. *Предположим, что существует число* $\Delta > 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V:(B_\Delta \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, *последовательность пар чисел* $(\delta_n, \varepsilon_n)$, $0 < \delta_n < \varepsilon_n < \Delta$, $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *числа* (σ_n), $\sigma_n > 0$, *и последовательности функций* (a_n) *и* (b_n) *из* ***K*** *такие, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполняются следующие условия*:

1) $a_n(\| x \|) \le V(x) \le b_n(\| x \|)$ *при* $\delta_n \le \| x \| \le \varepsilon_n$;

2) $\sup\limits_{\delta_n \le \|x\| \le \varepsilon_n,\ t \ge 0} \dot{V}_{(1)}(x,t) \le -\sigma_n$, *где* $\dot{V}_{(1)}(x,t)$ – *производная по времени функции* $V(x)$ *в силу уравнения* (5.59);

3) $b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n)$.

Тогда нулевое решение (5.59) *равномерно B-устойчиво и устойчиво при постоянно действующих возмущениях*.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы 3 следует из того факта, что при выполнении условий 1), 2) и 3) поверхности $V(x) = c_n$ для $b_n(\delta_n) < c_n < a_n(\varepsilon_n)$ расположены в шаровом слое $B_{\varepsilon_n} \setminus \overline{B_{\delta_n}}$, а множество $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le c_n\}$ – компактно, положительно инвариантно и равномерно асимптотически устойчиво [53]. Более того, из свойства функций Хана (a_n) и (b_n) вытекает, что $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, при достаточно большом натуральном n множество K_n располагается в любой достаточно малой окрестности начала координат. Это и доказывает равномерную B-устойчивость нулевого решения системы (5.59).

Докажем вторую часть утверждения теоремы 3. Так как функция V непрерывно дифференцируема, то можно указать число $c > 0$ такое, что $\| \partial V(x) / \partial x \| \le c \quad \forall x \in B_\Delta$. Положим

$$\dot{V}_g(x,t) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)' (f(x,t) + g(x,t)).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Зафиксируем натуральное n из $\mathbb{N}$ так, чтобы $\varepsilon_n < \varepsilon$, и пусть $0 < \eta_1 \le \delta_n$, $0 < \eta_2 < \sigma_n / (2c)$. С учетом 3) для любой точки x, принадлежащей границе множества B_{ε_n}, будем иметь неравенства $V(x) \le b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n)$.

Теперь покажем, что для начальных данных (x_0, t_0), $\| x_0 \| \le \eta_1$, $t_0 \ge 0$, и любой функции возмущения $g(x,t)$ такой, что $\| g(x,t) \| \le \eta_2$, решение $x(x_0, t_0, t)$ уравнения (5.57) будет располагаться в шаре B_ε при всех $t \ge t_0$.

В самом деле, если $\delta_n \le \| x \| \le \varepsilon_n$, то имеем следующие оценки:

$$\dot{V}_g(x,t) \le -\sigma_n + \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)' g(x,t) \le$$

$$\le -\sigma_n + \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \| g(x,t) \| \le -\sigma_n + c \frac{\sigma_n}{2c} < 0.$$

Это значит, что выбранное решение не может выйти на границу шара B_{ε_n} и, следовательно, не покинет шар B_ε. Таким образом, выполнены условия определения устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Обратимся к дифференциальному уравнению примера 1 и покажем, что решение $y = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Действительно, возьмем две последовательности $\delta_n = 1/(2\pi n - 1/n)$, $\varepsilon_n = 1/((2n-1)\pi + 1/n)$, постоянные функции $a_n = b_n = 0{,}5 y^2$ класса $\boldsymbol{K}$ и функцию Ляпунова $2V(y) = y^2$. В этих условиях производная по времени от V, равная $\dot{V}(y,t) = y\,|y|^{1+\alpha(t)} \sin\frac{1}{y}$, будет удовлетворять соотношению

$$\sup_{\delta_n \le \|y| \le \varepsilon_n,\ t \ge 0} \dot{V}(y,t) \le -\sigma_n, \text{ где } \sigma_n = \varepsilon_n^{1+\alpha_1} \sin(1/n^2), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, можно непосредственно проверить, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n)$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы 5.9, а значит, нулевое решение уравнения (5.53) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

5.2.5. ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, ОГРАНИЧЕННЫЕ В СРЕДНЕМ

В монографии [75] изучен случай постоянно действующих возмущений, ограниченных в среднем. А именно, здесь утверждается, что устойчивость нулевого решения можно обеспечить также и в том случае, когда функция $g(x, t)$ не обязательно ограничена в каждый момент времени t, но достаточно мала величина тех интервалов времени, в течение которых возмущения могут принимать довольно большие значения. Соответствующее этому определение формулируется следующим образом.

Нулевое решение системы (5.35) называется [75] устойчивым при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существуют два числа $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon, T) > 0$ и $\eta_2 = \eta_2(\varepsilon, T) > 0$, а также существует непрерывная функция φ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что при условиях

$$\| g(x,t) \| \leq \varphi(t) \quad \text{для } \| x \| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0 \tag{5.61}$$

и

$$\int_t^{t+T} \varphi(t)dt < \eta_2 \tag{5.62}$$

имеем:

$$\| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon \quad \forall x_0 \in B_{\eta_1} \ \ \forall t_0 \geq 0 \text{ и } \ \forall t \geq t_0.$$

Очевидно, что если нулевое решение системы (5.59) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, то оно и устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 5.11. *Предположим, что для любого числа* $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon \subset G$, *существует компактное множество* K, *содержащее начало координат и содержащееся в шаре* B_ε, *существуют непрерывно дифференцируемая функция* $V: B_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *функции Хана* a, b, c *и число* $N > 0$ *такие, что для* $(x, t) \in B_\varepsilon \times \mathbb{R}^+$ *выполняются следующие условия*:

1) $V(x, t) = 0$, *если* $x \in K$;
2) $a(d(x, K)) \leq V(x, t) \leq b(d(x, K))$;
3) $\dot{V}_{(1)}(x,t) \leq -c(d(x,K))$;
4) $\|\partial V(x,t)/\partial x\| \leq N$, *если* $d(x, K) \leq \varepsilon$.

Тогда нулевое решение системы (5.59) *устойчиво при постоянно действующих возмущениях*, *ограниченных в среднем*.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число такое, что $B_\varepsilon \subset G$. По предположению теоремы существует компактное множество K, содержащее начало координат, $K \subset B_\varepsilon$, и функция Ляпунова V, удовлетворяющая условиям 1)–4).

Пусть число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $B(K, \varepsilon_1) \subset B_\varepsilon$. Ясно, что множество $B(K, \varepsilon_1)$ является окрестностью начала координат. Тогда в силу требования 2) теоремы имеем:

$$V(x, t) \geq a(\varepsilon_1) \text{ для } d(x, K) = \varepsilon_1 \text{ и для всех } t \geq 0. \tag{5.63}$$

Из 1), 2) следует существование достаточно малого числа $\eta_1 > 0$ такого, что выполняется условие

$$V(x, t) < a(\varepsilon_1)/(2e^2) \text{ при всех } d(x, K) \leq \eta_1 \text{ и всех } t \geq 0. \tag{5. 64}$$

Положим

$$c = \inf \frac{a(d(x,K))}{d(x,K)},\ c_3 = \inf \frac{c(d(x,K))}{d(x,K)},\ c_4 = \sup \frac{b(d(x,K))}{d(x,K)}$$

при

$$\eta_1 \leq d(x, K) \leq \varepsilon_1. \tag{5. 65}$$

Тогда в области, определяемой неравенствами (5.41), имеем

$$cd(x, K) \leq V(x, t) \leq c_4 d(x, K),\ \ \dot{V}_{(1)}(x,t) \leq -c_3 d(x,K)\ . \tag{5. 66}$$

Функция $v(x, t) = V(x, t) / c_3$ удовлетворяет в области (5.41) неравенствам

$$c_2 d(x, K) \leq v(x, t) \leq c_1 d(x,K),$$

$$\dot{v}_{(1)}(x,t) \leq -d(x,K)\ ,\ \ \| \partial V(x,t)/\partial x \| < N / c_3\ , \tag{5. 67}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные.

Функция $g(x, t)$ в силу (5.61) удовлетворяет неравенству

$$\| g(x,t) \| \leq \varphi(t) d(x,K) / \eta_1 \tag{5. 68}$$

в области (5.65) при всех $t \geq 0$.

Далее воспользуемся схемой доказательства теоремы 24.1 [75].

Положим $F(x, t) = e^{\beta(t)} v(x, t)$ и подберем функцию $\beta(t)$ так, чтобы функция $F(y, t)$ могла служить для доказательства устойчивости решения $x = 0$ при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем (удовлетворяющих оценке (5.62)). Выпишем выражение для производной $\dot{F}_{(2)}(x,t)$ функции $F(x, t)$ по времени в силу системы (5.60) и оценим его сверху с помощью неравенств (5.67), (5.68). Имеем

$$\dot F_{(2)}(x(t),t)=F(x(t),t)\left(\dot\beta(t)+\frac{1}{v(x(t),t)}\dot v_{(1)}(x(t),t)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{v(x(t),t)}\left(\frac{\partial v'(x(t),t)}{\partial x}g(x(t),t)\right)\right)\le F(x(t),t)\left(\dot\beta(t)-\frac{1}{c_1}+\frac{N\varphi(t)}{c_2c_3\eta_1}\right). \quad (5.69)$$

Зафиксируем число $q\in[0,\ 1]$ и определим функцию $\psi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равенством

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T}\psi(t)dt=\int\limits_{kT}^{(k+1)T}\left(\frac{1-q}{c_1}-\frac{N\varphi(t)}{c_2c_3\eta_1}\right)dt. \quad (5.70)$$

Зафиксировав число η_2 в условии (4.62), подчинив его равенству

$$\eta_2=\left(T(1-q)c_2c_3\eta_1\right)/(c_1N), \quad (5.71)$$

получим, что интеграл в левой части равенства (5.70) будет неотрицательным. А тогда ясно, что существует неотрицательная функция $\psi(t)$, удовлетворяющая равенству (5.70), т. е. далее будем предполагать, что имеет место (5.70) и $\psi(t)\ge 0$.

На основании сделанных построений определим функцию

$$\beta(t)=\int\limits_0^t\left(-\psi(s)-\frac{N\varphi(s)}{c_2c_3\eta_1}+\frac{1-q}{c_1}\right)ds. \quad (5.72)$$

Оценим левую часть неравенства (5.69) с помощью представления (5.72). Имеем:

$$\dot F_{(2)}(x,t)\le F(x,t)\left(-\psi(t)-\frac{q}{c_1}\right)\le-\frac{q}{c_1}F(x,t). \quad (5.73)$$

Кроме того, условия (5.71) и (5.72) дают равенства $\beta(kT)=0$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, а значит, справедлива следующая оценка:

$$\left|\beta(t)\right|\le 3(1-q)T/c_1\quad\forall t\ge 0.$$

Уточним теперь число q, подчинив его условию

$$(1-q)T/c_1<1/3.$$

Тогда имеем оценку $\left|\beta(t)\right|\le 1$, $\forall t\ge 0$, и в этом случае функция F будет удовлетворять неравенству

$$v(x,\, t)e^{-1} \le F(x,\, t) \le v(x,\, t)e \tag{5.74}$$

в области (5.41) при всех $t \ge 0$.

В результате мы построили функцию $F(x,\, t)$, стесненную условиями (4.73). Более того, с учетом неравенств (5.63), (5.64), (5.74) выполняется также и неравенство

$$\sup_{d(x,K)\le\eta_1} F(x,t) < \inf_{d(x,K)=\varepsilon_1} F(x,t)\,. \tag{5.75}$$

Проведенные построения позволяют перейти к заключительной части доказательства теоремы. Пусть $x(x_0,\, t_0,\, t)$ – решение системы (5.53), начальное состояние которого удовлетворяет условию: $d(x_0,\, K) < \eta_1$, $\forall t_0 \ge 0$ (заметим, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x,\, K) < \eta_1\}$ определяет окрестность начала координат). Тогда на основании свойства монотонного убывания функции $F(x,\, t)$ вдоль решений системы (5.60), обеспеченного неравенством (5.73) и условием (5.75), это решение не покидает область $d(K,\, \varepsilon_1) \subset B_\varepsilon$. Теорема доказана.

В работе [75] сформулирована соответствующая теорема об устойчивости нулевого решения (теорема 24.1). Основное требование утверждения – равномерная асимптотическая устойчивость исходной невозмущенной системы. Известно, что обратное этому утверждение неверно. Поэтому естественна попытка выделить класс дифференциальных систем, для которых при определенных условиях основное требование может быть ослаблено. Сформулированное выше утверждение показывает, что с учетом теоремы 5.10 используемые в теореме 5.11 предположения обеспечивают лишь равномерную B-устойчивость начала координат.

Из доказательства теоремы 5.11 вытекает следующий результат, который характеризует поведение решений системы (5.60) на бесконечности (когда $t \to +\infty$) для свойства устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Теорема 5.12. *При выполнении условий теоремы* 5.11 *справедливо утверждение*:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\eta_1 = \eta_1(\varepsilon) > 0)(\exists\eta_2 = \eta_2(\varepsilon) > 0)(\forall\gamma > 0)(\exists T = T(\varepsilon,\, \gamma) > 0)$$
$$(\forall x_0 \in B_\varepsilon),\ \forall t_0 \ge 0):\ \Rightarrow\ x(t,\, t_0,\, x_0) \in B_\gamma),\ \forall t > T.$$

Более того, предельные значения такого решения не выходят из области $B(K,\, \gamma)$, *т. е.*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, d(K, x(x_0, t_0, t)) < \gamma.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно несколько видоизменить схему доказательства теоремы 5.11, зафиксировав изначально числа $\gamma > 0$, $\gamma < \varepsilon$, и $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1 < \varepsilon_1$, таким образом, чтобы выполнялось неравенство $b(\gamma_1) < a(\gamma)$. Это приведет лишь к изменению постоянных, используемых в дальнейших рассуждениях, но не нарушит ход этих рассуждений. В результате мы получим дополнительную информацию о том, что $x(x_0, t_0, t) \in B(K, \gamma)$ для всех достаточно больших значений $t > 0$, что и требуется.

Пример 5.9. Рассмотрим в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1+\beta(t))\sin\dfrac{\pi}{x^2+y^2} + y, \\ \dot{y} = -x + y(1+\alpha(t))\sin\dfrac{\pi}{x^2+y^2}, \end{cases}$$

где α: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и β : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – непрерывные, ограниченные при $t \geq 0$, неотрицательные функции. Нетрудно убедиться в том, что множества

$$M_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 / n\},\ \ n = 1, 2, 3, \dots ,$$

являются инвариантными (инвариантные полуцилиндрические тела в пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$). Поэтому начало координат системы не является асимптотически устойчивым. Заметим, кроме того, что для каждого натурального n траектории системы $(x(t, t_0, x_0, y_0), y(t, t_0, x_0, y_0))$ с начальными данными

$$(x_0, y_0),\ 1/(2n) < x_0^2 + y_0^2 < 1/(2n+1),\quad t_0 \geq 0,$$

неограниченно приближаются к окружности $x^2 + y^2 = 1 / 2n$ фазового пространства $\mathbb{R}^2$. Поэтому множество

$$W_{2n}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}\ \text{ для } 1 / (2n) < r^2 < 1 / (2n + 1)$$

может служить выталкивающей при $t < t_0$ окрестностью начала координат, а значит, начало координат равномерно B-устойчиво.

Для множества $K = W_{2n}$ возьмем функцию Ляпунова

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in K, \\ x^2 + y^2, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Ее производная в силу системы для области $x^2 + y^2 \notin K$ равна

$$\dot{V}(x,y,t) = -2(x^2(1+\beta(t)) + y^2(1+\alpha(t)))\sin\frac{\pi}{x^2+y^2}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число меньше единицы. Тогда для достаточно большого натурального числа n ($2n > 1/\varepsilon^2$) множество K будет содержаться в круге $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$. По построению в окрестности круга K производную функции Ляпунова можно оценить неравенством

$$\dot{V}(x,y,t) \le -\sigma(x^2+y^2)^2, \quad \sigma > 0.$$

Таким образом, выполнены все предположения теоремы 5.11 и, следовательно, начало координат такой системы устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Замечание 5.3. Теорема 5.12 обобщает утверждение, приведенное в примечании к теореме 24.1 [75, с. 124]. Однако различие этих двух утверждений носит неформальный характер. В самом деле, предположим, что нулевое решение системы (5.59) равномерно B-устойчиво, причем существует последовательность (K_n) компактных инвариантных равномерно асимптотически устойчивых множеств, такая, что $K_{n+1} \subset \operatorname{int} K_n$, $\forall n \ge 1$ и $\bigcap\limits_{n\ge1} K_n = \{0\}$ (указанная ситуация реализуется в примере 5.9, если принять $K_n = W_n$). Тогда в соответствии с теоремой 5.12 можно уточнить местоположение решения $x(t, t_0, x_0)$ следующим образом. Пусть n – наименьше из натуральных чисел, для которых $K_n \subset B_{\gamma_1}$. Тогда если $x_0 \in B_\varepsilon \setminus K_n$, то при $t \to +\infty$ решение $x(t, t_0, x_0)$ расположено в шаровом слое $B_{\gamma_1} \setminus K_n$. Это предельное свойство решений легко следует из доказательства теоремы 5.5 путем его незначительной модификации.

Пусть $U = (U_x, U_y)$ означает открытую связную окрестность начала координат $\mathbb{R}^{p+q}$, где $U_x \subset \mathbb{R}^p$, $U_y \subset \mathbb{R}^q$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y,t), & x \in \mathbb{R}^p, \\ \dot{y} = Y(x,y,t), & y \in \mathbb{R}^q, \ t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{5.76}$$

Предположим, что функции X и Y локально липшицевы по x и y равномерно по t и исчезают в точках $x = 0$, $y = 0$ для всех $t \ge 0$. Для каждой точки $z_0 = (x_0, y_0)$ из U и начального момента $t_0 \ge 0$ через $z(z_0, t_0, t) = (x(z_0, t_0, t), y(z_0, t_0, t))$ будем обозначать решение системы (2.1) с начальными условиями $z(z_0, t_0, t_0) = z_0$. Пусть $B_\Delta^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \| x \| < \Delta\}$ означает «шар» с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$ и радиусом $\Delta > 0$.

Теорема 5.2.1. [49]. *Пусть для системы* (5.76) *существуют число* $\Delta > 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V:\ B_{\Delta}^{p+q} \times \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$, *непрерывная функция* $\varphi:\ \mathbb{R}^{p} \times \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{q}$ *и функции* a, a_1, $a_2 \in$ ***K*** *такие, что для любых* $(x, y, t) \in B_{\Delta}^{p+q} \times \mathbb{R}^{+}$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(\| y - \varphi(x,t) \|) \le V(x, y, t)$; $V(0,0,t) = 0$ *и* $\varphi(0,t) = 0$;

2) $\dot{V}(x, y, t) \le 0$;

3) $\| X(x, y, t) - X(x, \varphi(x,t), t) \| \le a_1(\| y - \varphi(x,t) \|)$, $\| \varphi(x,t) \| \le a_2(\| x \|)$;

4) *нулевое решение уравнения*

$$\dot{x} = X(x, \varphi(x,t), t),\ \ x \in \mathbb{R}^{p},\ t \ge 0 \tag{5.77}$$

устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Тогда точка покоя $x = 0$, $y = 0$ *системы* (5.76) *устойчива.*

Если, кроме того, существует функция $b \in$ ***K***, *для которой имеет место соотношение*

4) $V(x, y, t) \le b(\| y - \varphi(x,t) \|)$,

то нулевое решение системы (5.76) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Из 1), 2) следует, что решение $x = 0$, $y = 0$ системы (5.76) устойчиво по отношению к разности $y - \varphi(x,t)$.

Далее, согласно требованию 4), для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют два числа: $\mu_1 = \mu_1(\varepsilon) > 0$ и $\mu_2 = \mu_2(\varepsilon) > 0$, таких, что всякое решение $\hat{x}(x_0, t_0, t)$ уравнения

$$\dot{x} = X(x, \varphi(x,t), t) + g(x,t) \tag{5.78}$$

с начальным условием (x_0, t_0), $\| x_0 \| < \mu_1$, при произвольной вектор-функции $g(x,t)$, удовлетворяющей в области $\| x \| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ неравенству $\| R(x,t) \| \le \mu_2$, удовлетворяет условию $\| \hat{x}(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon \ \ \forall t \ge t_0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число и $t_0 \in \mathbb{R}^{+}$. В соответствии с изложенным выше выберем число $\eta > 0$ настолько малым, чтобы для решения $(x(z_0, t_0, t),\ y(z_0, t_0, t))$ системы (5.76) выполнялось неравенство

$$\| y(z_0, t_0, t) - \varphi(x(z_0, t_0, t), t) \| \le \eta \tag{5.79}$$

при всех $t \ge t_0$ и $\| z_0 \| = \| (x_0, y_0) \| < \delta(\eta, t_0)$. Но компонента $x(z_0, t_0, t)$ выбранного решения системы (5.76) удовлетворяет уравнению (5.78), где

$$g(x,t) = X(x, y(z_0, t_0, t), t) - X(x, \varphi(x,t), t).$$

Поэтому с учетом предыдущих построений и требования 3) сразу следует неравенство

$$\| x(z_0, t_0, t) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0, \text{ если } \| z_0 \| < \delta(\eta, t_0).$$

Последнее означает устойчивость нулевого решения системы (5.76) относительно компоненты x.

Устойчивость относительно компоненты y легко следует из 3) и 4).

Аналогично доказывается и случай равномерной устойчивости нулевого решения (5.76).

В качестве примера приложения теоремы рассмотрим следующую ситуацию. Пусть для системы (5.76) задано r, $1 \leq r < p + q$, первых интегралов

$$H_j(x, y, t) = c_j, \, c_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, r}, \tag{5.80}$$

причем

$$H_j(0, 0, t) = 0, \forall t \geq 0, \text{ и } \forall j = \overline{1, r}. \tag{5.81}$$

Будем также предполагать, что уравнения (5.80) однозначно разрешимы в окрестности U и соответствующие непрерывные решения имеют вид

$$y = \psi(x, t, c), \; c = (c_1, c_2, ..., c_1); \quad \psi(0, t, c) = 0, \forall t \geq 0. \tag{5.82}$$

В этом случае систему (5.76) можно заменить векторным уравнением

$$\dot{x} = f(x,t) + h(x,t,c), \quad \dot{c} = 0, \tag{5.83}$$

где

$$f(x,t) = X(x, \psi(x,t,0), t), \; h(x,t,c) = X(x, \psi(x,t,c), t) - f(x,t).$$

Если $c = 0$, то из первого равенства (5.83) получаем систему

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in U_x \subset \mathbb{R}^p, t \geq 0. \tag{5.84}$$

Если для системы (5.84) в теореме 5.2.1 взять знакопостоянную функцию Ляпунова $V(x,c) = c^2$, то придем к следующей теореме Ризито С. [151].

Теорема 5.2.1.1. *Пусть* $U_x = B_\rho^p$, $\rho > 0$, *и существует функция* $a \in$ **K** *такая, что для каждой точки* $(x,t,c) \in B_\rho^p \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *выполняются условия*:

1) $\| \psi(x,t,c) \| \le a(\| (x,c) \|)$;

2) $\| h(x,t,c) \| \le a(\| c \|)$;

3) *нулевое решение* (5.84) *устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (5.76) *устойчиво.*

Теорему 5.2.1 при наличии первых интегралов (5.80), (5.81) можно непосредственно применить к системе (5.76). Это дает следующий результат.

Теорема 5.2.1.2. *Пусть* $U_x = B_\Delta^{p+q}$, $\Delta > 0$, *и существуют функции* a, a_1, a_2 *из множества* **K** *такие, что для любых* $(x,y,t) \in B_\Delta^{p+q} \times \mathbb{R}^+$; *выполняются следующие условия*:

1) $\sum\limits_{j=1}^{r} H_j^2(x,y,t) \ge a(\| y - \psi(x,t,0) \|)$;

2) $\| X(x,y,t) - X(x,\varphi(x,t),t) \| \le a_1(\| y - \varphi(x,t) \|)$,
$\| \psi(x,t,0) \| \le a_2(\| x \|)$;

3) *нулевое решение уравнения* (5.84) *устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Тогда точка покоя $x = 0$, $y = 0$ *системы* (5.76) *устойчива.*

Если, кроме того, существует функция $b \in$ **K**, *такая, что*

4) $\sum\limits_{j=1}^{r} H_j^2(x,y,t) \le b(\| y - \psi(x,t,0) \|)$,

то нулевое решение системы (5.76) *равномерно устойчиво.*

В отличие от теоремы Ризито в формулировке теоремы 5.2.1.2 используется семейство первых интегралов (5.82) только для нулевых значений произвольных постоянных $c = (c_1, c_2, ..., c_1)$.

Замечание 5.4. Известно, что теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях не обращена, а наиболее эффективное достаточное условие существования такого свойства состоит в требовании равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения (5.84) [27, 84]. Приведенная ниже теорема преследует две цели. Во-первых, поскольку требования 1)–3) не гарантируют, вообще говоря, асимптотическую устойчивость нулевого решения (5.84), то тем самым выделен класс дифференциальных систем, для которых неасимптотическая устойчивость влечет за собой устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Во-вторых, становится ясным, что *B*-устойчивость и устойчивость при постоянно действующих возмущениях достаточно близки друг другу. При этом первое из них носит топологический характер, так как оно справедливо для абстрактных динамических систем, а второе существенно зависит от функциональных свойств правых частей дифференциальной системы. Отметим также, что в примере 5.9 нулевое решение является и устойчивы при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 5.13. *Предположим, что существует число* $\Delta > 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V:(B_\Delta \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, *последовательность пар чисел* $(\delta_n, \varepsilon_n)$, $0 < \delta_n < \varepsilon_n < \Delta$, $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *числа* (σ_n), $\sigma_n > 0$, *и последовательности функций* (a_n) *и* (b_n) *из* $\boldsymbol{K}$ *такие, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполняются следующие условия*:

1) $a_n(\|x\|) \le V(x) \le b_n(\|x\|)$ *при* $\delta_n \le \|x\| \le \varepsilon_n$;

2) $\sup\limits_{\delta_n \le \|x\| \le \varepsilon_n,\ t \ge 0} \dot V_{(1)}(x,t) \le -\sigma_n$, *где* $\dot V_{(1)}(x,t)$ – *производная по времени функции* $V(x)$ *в силу уравнения* (5.80);

3) $b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n)$.

Тогда нулевое решение (5.84) *равномерно B-устойчиво*, *и устойчиво при постоянно действующих возмущениях*.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы следует из того факта, что при выполнении условий 1), 2) и 3) поверхности $V(x) = c_n$ для $b_n(\delta_n) < c_n < a_n(\varepsilon_n)$ расположены в шаровом слое $B_{\varepsilon_n} \setminus \overline{B_{\delta_n}}$, а множество $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le c_n\}$ – компактно, положительно инвариантно и равномерно асимптотически устойчиво [53]. Более того, из свойства функций Хана (a_n) и (b_n) вытекает, что $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, при достаточно большом натуральном n множество K_n располагается в любой достаточно малой окрестности начала координат. Это и доказывает равномерную *B*-устойчивость нулевого решения системы (5.84).

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Так как функция V непрерывно дифференцируема, то можно указать число $c > 0$ такое, что $\|\partial V(x)/\partial x\| \le c \quad \forall x \in B_\Delta$. Положим

$$\dot V_g(x,t) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)' (f(x,t) + g(x,t)).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Зафиксируем натуральное n из $\mathbb{N}$ так, чтобы $\varepsilon_n < \varepsilon$, и пусть $0 < \eta_1 \le \delta_n$, $0 < \eta_2 < \sigma_n/(2c)$. С учетом 3) для любой точки x, принадлежащей границе множества B_{ε_n}, будем иметь неравенства $V(x) \le b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n)$.

Теперь покажем, что для начальных данных (x_0, t_0), $\| x_0 \| \le \eta_1$, $t_0 \ge 0$, и любой функции возмущения $R(x,t)$ такой, что $\| g(x,t) \| \le \eta_2$, решение $x(x_0, t_0, t)$ уравнения (5.81) будет располагаться в шаре B_ε при всех $t \ge t_0$. В самом деле, если $\delta_n \le \| x \| \le \varepsilon_n$, то имеем следующие оценки:

$$\dot{V}_g(x,t) \le -\sigma_n + \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)' g(x,t) \le$$

$$\le -\sigma_n + \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \| g(x,t) \| \le -\sigma_n + c \frac{\sigma_n}{2c} < 0.$$

Это значит, что выбранное решение не может выйти на границу шара B_{ε_n} и, следовательно, не покинет шар B_ε.

Таким образом, выполнены условия определения устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Пример 5.10. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = | y |^{1+\alpha(t)} \sin(1/y) \quad (\text{для } y \ne 0 \text{ и } \dot{y} = 0 \text{ для } y = 0), \tag{5.85}$$

где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $0 < \alpha_1 \le \alpha(t) \le \alpha_2 < \infty, \forall t \ge 0$. Видно, что это уравнение имеет два счетных множества состояний равновесия $(a_k)_{k \ge 1}$ и $(b_k)_{k \ge 1}$, сходящихся к нулю, причем $-1 < a_k < 0 < b_k < 1$. Каждая соседняя пара точек покоя уравнения (5.85) такова, что одна из них асимптотически устойчива, а другая неустойчива. Поэтому в любой достаточно малой окрестности точки $y = 0$ можно выбрать компактное, инвариантное, равномерно асимптотически устойчивое множество вида $K = [a_m, b_n]$, $m, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, нулевое решение такого уравнения является равномерно B-притягивающим и равномерно B-устойчивым.

Покажем, что решение $y = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Действительно, возьмем две последовательности чисел

$$\delta_n = 1/(2\pi n - 1/n), \ \ \varepsilon_n = 1/((2n-1)\pi + 1/n),$$

постоянные функции $a_n = b_n = 0,5y^2$ класса $\boldsymbol{K}$ и функцию Ляпунова $2V(y) = y^2$. Тогда производная по времени от функции V в силу уравнения, равная $\dot{V}(y,t) = y\,|\,y\,|^{1+\alpha(t)}\sin\dfrac{1}{y}$, будет удовлетворять соотношению

$$\sup_{\delta_n \le \|y\| \le \varepsilon_n,\ t\ge 0} \dot{V}(y,t) \le -\sigma_n, \text{ где } \sigma_n = \varepsilon_n^{1+\alpha_1} \sin\frac{1}{n^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, можно непосредственно проверить, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n)$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы 3, а значит, нулевое решение уравнения (5.85) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

5.3. МЕТОД СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пусть D – открытая окрестность начала координат пространства $\mathbb{R}^n$ и $f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица, периодическая по t с периодом $\theta > 0$, т. е. подчиненная условию

$$f(x, t + \theta) \equiv f(y, t)\ \ \forall (x, t) \in D \times \mathbb{R}. \tag{5.86}$$

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x, t),\ \ x \in D,\ \ (f(0, t) = 0)\ \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.87}$$

Пусть $\varphi(x_0, t_0, \bullet)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – решение системы (5. 87), определяемое начальным состоянием $(x_0, t_0) \in D \times \mathbb{R}$ с условием $\varphi(x_0, t_0, t_0) = x_0$ определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$. Известно, что для системы (5. 87) с условием (5. 86) выполняется тождество

$$\varphi(x_0, t_0 + k\theta, t + k\theta) \equiv \varphi(x_0, t_0, t)\ \ \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{5.88}$$

Множество всех ω- (α)-предельных точек для $(x_0, t_0) \in D \times \mathbb{R}$ обозначим соответственно $L^+(x_0,t_0)$ и $L^-(x_0,t_0)$, Обозначим через $\gamma^+(x_0,t_0)$ и $\gamma^-(x_0,t_0)$ соответственно положительную полутраекторию и отрицательную полутраекторию решения $\varphi(x_0, t_0, t)$, т. е.

$$\gamma^+(x_0,t_0)=\bigcup_{t\geq t_0}\varphi(x_0,t_0,t)\ ,\ \ \gamma^-(x_0,t_0)=\bigcup_{t\leq t_0}\varphi(x_0,t_0,t)\ ,$$

Прежде чем переходить к теореме сравнения, приведем ряд утверждений общего характера из качественной теории устойчивости дифференциальных уравнений относительно предельных множеств и свойств устойчивости решений.

Известно (см., например [105, 152]), что множества $L^{\pm}(x_0,t_0)$ замкнуты, а в случае ограниченности решения $\varphi(x_0, t_0, t)$ при $t\to\pm\infty$ непусты и связны. Нетрудно показать, что эти множества инвариантны в том смысле, что $\forall y\in L^{\pm}(x_0,t_0)\ \exists\ \tau\in[0,\theta]$, для которого $\gamma(y,\tau)\in L^{\pm}(x_0,t_0)$.

Через $\tilde{L}^{\pm}(x_0,t_0)$ обозначим множество всех пар (y,τ), $y\in L^{\pm}(x_0,t_0)$, $\tau\in[0,\theta]$, таких, что $\gamma(y,\tau)\in L^{\pm}(x_0,t_0)$.

Поскольку система периодических по времени дифференциальных уравнений является примером динамической системы на метрическом пространстве [64, с. 16], то справедливы следующие утверждения, которые вытекают соответственно из следующих утверждений: лемма 4.1 [64, с. 66], лемма 2.2 [64, с. 126], теорема 3.5 [64, с. 129].

Лемма 5.6. *Если нулевое решение* (5.87) *устойчиво*, *то* $\forall x_0\neq 0$ *и* $t_0\in[0,\theta[\ \ 0\notin L^-(x_0,t_0)$.

Лемма 5.7. *Если нулевое решение* (5.87) *неустойчиво*, *то всякая окрестность точки x* = 0 *содержит ненулевую отрицательную полутраекторию*.

Предложение 5.1. *Нулевое решение системы* (5.87) *асимптотически устойчиво*, *тогда и только тогда*, *когда существует шар* B_Δ, $\Delta>0$, *не содержащий отрицательных полутраекторий*.

Предложение 5.2. *Пусть Y* – *замкнутое положительно инвариантное подмножество D*, *содержащее начало координат*. *Нулевое решение системы* (5.87) *асимптотически устойчиво относительно множества Y тогда и только тогда*, *когда существует шар* B_Δ, $\Delta>0$, *не содержащий отрицательных полутраекторий во множестве* $B_\Delta\bigcap Y$.

Предложение 5.3. *Пусть* $D=\mathbb{R}^n$. *Нулевое решение системы* (5.87) *глобально асимптотически устойчиво тогда и только тогда*, *когда выполняются следующие условия*:

1) $\forall(x_0, t_0)\in\mathbb{R}^n\times[0,\theta]$ *решение* $\varphi(x_0, t_0, t)$ *ограничено при* $t\geq t_0$;

2) $\forall(x_0, t_0)\in\mathbb{R}^n\times[0,\theta]$ *решение* $\varphi(x_0, t_0, t)$ *не ограничено при* $t\leq t_0$.

Пусть ψ – окрестность нуля в положительном октанте $\{u : u \geq 0\}$ пространства $\mathbb{R}^m$ и $F : \psi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция, периодическая по t с периодом θ. Наряду с системой (1.4) рассмотрим векторное уравнение сравнения [90]

$$\dot{u} = F(u,t),\ u \in \mathbb{R}^m,\ F(0,t) = 0, t \in \mathbb{R}. \tag{5.89}$$

Будем использовать следующие понятия из [105]:

- вектор-функция $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$ называется квазимонотонно возрастающей, если для каждой пары точек (u, t) и (v, t) в $\psi \times \mathbb{R}$ и всех $i = 1, 2, \ldots, m$ имеем
$$F_i(u,t) \geq F_i(v,t) \text{ как только } u_i = v_i, u \geq v;$$
- $u^+(u_0, t_0, t)$ – максимальное непродолжимое решение уравнения (5.89), проходящее через точку $(u_0, t_0) \in \psi \times [0, \theta]$;
- e – постоянный вектор из $\mathbb{R}^m$ такой, что $\{u : 0 \leq u \leq e\} \subset \psi$;
- решение $u = 0$ называется устойчивым, если
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall t_0 \in [0, \theta])(\forall t \geq t_0) \Rightarrow 0 \leq u^+(u_0, t_0, t) \leq \varepsilon e;$$
- решение $u = 0$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $\exists \Delta > 0$ такое, что
$$u^+(u_0, t_0, t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty \text{ для } 0 \leq u_0 \leq \Delta e \text{ и } t_0 \in [0, \theta];$$
- решение $u = 0$ называется глобально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво, $\psi \supset \{u : u \geq 0\}$ и $u^+(u_0, t_0, t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех $(u_0, t_0) \in \psi \times [0, \theta[$;
- $D^+V(x,t)$ – верхняя правая производная функции $V : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ в силу системы (1).

Лемма 5.7. *Пусть $G : \psi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная квазимонотонно возрастающая функция и $v : [t_0, \omega] \to \mathbb{R}^m$ для некоторого конечного или бесконечного ω есть решение уравнения $\dot{v} = G(v,t)$. Если $w : [t_0, \omega] \to \psi$ – непрерывная функция, такая, что*

1) $w(t_0) \leq v(t_0)$;

2) $D^+w(t_0) < G(w(t_0), t_0)$;

3) $D^-w(t) < G(w(t), t)$ *для* $t \in [t_0, \omega]$,

то $w(t) < v(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \omega]$.

Доказательство. а) Докажем сначала, что для достаточно малого ε имеем $w(t) < v(t)$ при $t \in]t_0, t_0 + \varepsilon[$. Это очевидно по свойству непрерывности, если $w(t_0) < v(t_0)$. Предположим далее, что для некоторого i, $w_i(t_0) = v_i(t_0)$. Имеем

$$D^+ w_i(t_0) < G_i(w(t_0), t_0) \le G_i(v(t_0), t_0) = \frac{dv_i}{dt}(t_0).$$

Поэтому

$$D^+(w_i - v_i)(t_0) < 0 \quad \text{и} \quad w_i(t_0) = v_i(t_0),$$

откуда следует, что для достаточно малого ε и $t \in]t_0, t_0 + \varepsilon[$, справедливо неравенство $w_i(t) < v_i(t)$.

b) Предположим теперь, что существуют значения $t \in [t_0 + \varepsilon, \omega]$, такие, что не выполняется условие $w_i(t) < v_i(t)$. Пусть τ есть точная нижняя грань таких значений t. Отметим, кстати, что предполагаемое нарушение строгого неравенства не означает знак $\ge$! Тогда $\tau \in [t_0 + \varepsilon, \omega]$, $w(t) > v(t)$ для $t \in]t_0, \tau[$ и не выполняется условие $w(\tau) < v(\tau)$. По крайней мере для одного i имеем $w_i(\tau) = v_i(\tau)$. Поэтому, как и выше

$$D^+ w_i(\tau) < G_i(w(\tau), \tau) \le G_i(v(\tau), \tau) = \frac{dv_i}{dt}(\tau),$$

и найдется $\eta > 0$, такое, что для некоторого $t \in [\tau - \eta, \tau[$ выполнено неравенство $w_i(t) > v_i(t)$, что противоречит определению τ.

Лемма сравнения [105, с. 245]. *Пусть F – непрерывная квазимонотонно возрастающая функция и $u^+ : [t_0, \omega] \to \mathbb{R}^m$ – максимальное решение, проходящее через некоторую точку $(u_0, t_0) \in \psi \times \mathbb{R}$. Предположим, что $v : [t_0, \tilde{\omega}] \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{\omega} \le \omega$ – непрерывная функция такая, что $(v(t), t) \in \psi \times \mathbb{R}$ и*

1) $v(t_0) \le u_0$;

2) $Dv(t) \le F(v(t), t)$ *для* $t \in [t_0, \tilde{\omega}]$;

где $Dv(t)$ – какая-либо из производных от $v(t)$. Тогда $v(t) \le u^+(t)$ для любого t из $[t_0, \tilde{\omega}]$.

Доказательство. *a*) Рассмотрим функцию

$$V(t) = v(t) - \int_{t_0}^{t} F(v(\tau))d\tau.$$

Из 2) следует, что V – убывающая функция на $[t_0, \tilde{\omega}[$ и по непрерывности на $[t_0, \tilde{\omega}[$. Поэтому

$$D^+V(t_0) \le 0 \quad \text{и} \quad D^-V(t_0) \le 0 \quad \text{для } t \in [t_0, \tilde{\omega}[.$$

Следовательно, для любого целого числа $\nu \ge 1$ можно написать

$$D^+ v_i(t_0) < F_i(v_i(t_0), t_0) + \frac{1}{\nu}, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$D^- v_i(t) < F_i(v_i(t), t) + \frac{1}{\nu}, \quad t \in [t_0, \tilde{\omega}[, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Пусть $v^{(\nu)} : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^m$ – решение уравнения

$$\dot{v}_i^{(\nu)}(t) = F_i(v^{(\nu)}(t), t) + \frac{1}{\nu} = G_i^{(\nu)}(v^{(\nu)}(t), t),\ v^{(\nu)}(t_0) = u_0.$$

Можно показать, что для достаточно малого a функции $v^{(\nu)}$ равномерно сходятся к максимальному решению u^+. С другой стороны, из леммы 5.3 следует, что

$$v(t) < v^{(\nu)}(t) \quad \text{для} \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

Переходя к пределу при $\nu \to \infty$, получаем, что

$$v(t) < u^+(t) \quad \text{для} \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

b) Остается показать, что (5.3) имеет место для любого $t \in [t_0, \tilde{\omega}]$. Предположим противное и обозначим через τ точную нижнюю грань всех $t \in]t_0 + a, \tilde{\omega}[$ таких, что $v(t) < u^+(t)$. Рассуждения части а) доказательства с заменой t_0 на τ приводит к заключению, что для достаточно малого a' и $t \in]\tau, \tau + a'[$ выполнено $v(t) \le u^+(t)$, что противоречит определению τ. Точно также можно обосновать и следующее утверждение.

Лемма 5.8 [105, с. 246]. *Пусть F – непрерывная квазимонотонно возрастающая функция и $u^- : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}^m$ – минимальное решение, прохо-*

дящее через некоторую точку $(u_0,t_0)\in\psi\times\mathbb{R}$. *Пусть* $v:[t_0,\tilde{\omega}[\to\mathbb{R}^m$, $\tilde{\omega}\le\omega$ – *непрерывная функция такая, что* $(v(t),t)\in\psi\times\mathbb{R}$ *и*

1) $v(t_0)\ge u_0$;

2) $Dv(t)\ge F(v(t),t)$ *для* $t\in[t_0,\tilde{\omega}]$;

где $Dv(t)$ – *какая-либо из производных Дини от* $v(t)$. *Тогда* $v(t)\ge u^+(t)$ *для любого t из* $[t_0,\tilde{\omega}]$.

Теорема сравнения. Пусть существует окрестность *W* точки $x = 0$ *в D и непрерывная локально липшицева по x и периодическая по t с периодом* θ *вектор-функция* $V(x, t)$, $V:W\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ *такая, что*

1) $V(x,t)\ge 0$ $\forall(x, t)\in W\times\mathbb{R}$; $V(0, t) = 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$;

2) $D^+V(x,t)\le F(V(x,t), t)$ $\forall(x, t)\in W\times\mathbb{R}$;

3) *множество* $W\setminus\{0\}$ *не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий* $\gamma^-(y,\tau)$ *таких, что* $V(x(y,\tau,t),t)=0$ $\forall t\le\tau$.

3) *нулевое решение системы* (5.87) *асимптотически устойчиво относительно множества*

$$\{x\in\overline{W}:V(x,t)=0,\forall t\ge 0\}$$

Тогда

a) *устойчивость* $u = 0$ *приводит к устойчивости* $x = 0$;

b) *асимптотическая устойчивость* $u = 0$ *обуславливает асимптотическую устойчивость* $x = 0$;

c) *если* $W=D=\mathbb{R}^n$, $\psi\supset\{u:u\ge 0\}$ *и всякое решение* (5.87) *ограничено при* $t\to+\infty$, *то глобальная асимптотическая устойчивость* $u = 0$ *влечет глобальную асимптотическую устойчивость* $x = 0$.

Доказательство. Пусть выполнены требования 1)–3) и решение $u = 0$ уравнения (5.89) устойчиво. Предположим при этом, что $x = 0$ неустойчиво. Тогда, согласно конструкции доказательства леммы 2.1 [64], для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать последовательности (x_k), $x_k\in\mathbb{R}^n$, $x_k\to 0$; (t_{0k}), $0\le t_{0k}<\theta$, (t_k), $t_k\ge t_{0k}$, $t_k=\tau_k+\sigma(k)\theta$, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $0\le\tau_k<\theta$, такие, что последовательность (y_k), $y_k = x(x_k,t_{0k},t_k)$, $k\in\mathbb{N}$, сходится к точке y, $\|y\|=\varepsilon$, а последовательность (τ_k) сходится к некоторому значению $\tau\in[0,\theta]$, причем $\gamma^-(y,\tau)\subset\overline{B_\varepsilon}$.

Из устойчивости $u = 0$ следует, что $\forall\mu>0$ $\exists\nu>0$, для которого $u^+(u_0,t_0,t)\le\mu e$ $\forall t\ge t_0$, если только $0\le u_0\le \nu e$ и $0\le t_0<0$.

Поэтому в предыдущих построениях число $\varepsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы на основании непрерывности вектор-функции V следовало неравенство $V(x,t) < \nu e$ при всех $(x, t) \in \overline{B_\varepsilon} \times \mathbb{R}$.

Теперь для каждого значения $t \le 0$ при достаточно большом k ($k \ge k_1$) $t_k + t > t_{0k}$, что по лемме сравнения дает неравенство

$$0 \le \max_i V_i(x(x_k, t_{0k}, t_k + t), t_k + t) \le \max_i u_i^+ V_i(x_k, t_{0k}, t_k + t)$$

или же

$$0 \le \max_i V_i(x(x(x_k, t_{0k}, \tau_k, \tau_k + t), \tau_k + t) \le \max_i u_i^+ V_i(x_k, t_{0k}, t_k + t) \quad \forall k \ge k_1.$$

Отсюда с учетом того, что $x_k \to 0$ и $V(x_k, t_{0k}) < \nu$, а также на основании устойчивости $u = 0$ и непрерывности V в пределе получаем равенство $V(x(y, \tau, \tau + t), \tau + t) = 0$, справедливое при всех $t \le 0$.

Однако поскольку $\gamma^-(y,\tau) \subset \overline{B_\varepsilon} \subset W,$ то это равенство противоречит требованию 3) теоремы. Следовательно, $x = 0$ устойчиво.

Докажем теперь утверждение *b*). Действительно, если $u = 0$ асимптотически устойчиво, и устойчиво, а тогда, согласно предыдущему, устойчивым будет и решение $x = 0$ уравнения (5.87).

Пусть шар $\overline{B_\Delta}$, $\Delta > 0$, $\overline{B_\Delta} \subset W,$ обладает тем свойством, что $\forall x \in \overline{B_\Delta}$ вектор $V(x,t)$ принадлежит области притяжения точки $u = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}.$ Покажем, что шар B_Δ не содержит отрицательных полутраекторий (1), кроме $x = 0$. На самом деле, если это не верно, то $\exists \gamma^-(y,\tau) \subset B_\Delta \setminus \{0\}$. Тогда множество $L^-(y,\tau)$ непусто и инвариантно. Поэтому существует пара $(z,\beta) \in \tilde{L}^-(y,\tau)$, т. е. в частности, решение $x(z,\beta,t) \in L^-(y,\tau)$ $\forall t \ge \beta$. По построению $L^+(z,\beta)$ непусто и инвариантно. Более того, поскольку $L^+(z,\beta) \subset \overline{B_\Delta},$ то по лемме сравнения с учетом 1) и асимптотической устойчивости решения $u = 0$ $V(x(z,\beta,t),t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда следует, что для любой пары $(z_1,\beta_1) \in \tilde{L}^-(z,\beta)$ справедливо равенство $V(z_1,\beta_1) = 0$, $\forall t \le \beta_1$. Ясно, что при этом $\beta_1 \ne 0,$ так как $x = 0$ устойчиво и $\{0\} \notin L^-(y,\tau).$ Последнее противоречит требованию 3) теоремы сравнения. Таким образом, *b*) доказано.

Наконец, рассмотрим c). Так как $u = 0$ асимптотически устойчиво, то $x = 0$ также асимптотически устойчиво. Покажем, что $\forall r > 0$, шар B_r не содержит ненулевых отрицательных полутраекторий. Действительно, пусть существует $\gamma^-(y,\tau) \subset B_r \setminus \{0\}$. Тогда множество $L^-(y,\tau)$ непусто, и в силу устойчивости $x = 0$ лемме 5.6 имеем $0 \notin L^-(y,\tau)$. Поэтому существует $(z,\beta) \in L^-(y,\tau)$ пара такая, что $\gamma(z,\beta) \subset L^-(y,\tau) \setminus \{0\}$.

В силу глобальной асимптотической устойчивости $u = 0$ по лемме сравнения следует, что $V(x(z,\beta,t),t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Как и выше, получаем, что для любой пары $(z_1,\beta_1) \in \tilde{L}^-(z,\beta)$ имеем $V(z_1,\beta_1) = 0$ или же $V(x(z_1,\beta_1,t),t) = 0$, $\forall t \le \beta_1$. Последнее противоречит 3, поскольку $\beta_1 \ne 0$. Отсюда с учетом требований c) и следует глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1).

Пример 5.11 [105]. Пусть периодическая система является многосвязной, причем состоит из двух подсистем

$$\dot{x}_\mu = X_\mu(x_\mu,t) + \sum_{\nu=1,\nu\ne\mu}^{m} X_{\mu\nu}(x,y,t)x_\mu, \quad \mu = \overline{1,m}, \tag{5.90}$$

$$\dot{y}_\mu = Y_\mu(x,y_\mu,t) + \sum_{\nu=1,\nu\ne\mu}^{k} Y_{\mu\nu}(x,y,t)y_\mu, \quad \mu = \overline{1,l}, \tag{5.91}$$

где

$$x = (x_1,x_2,\dots,x_m),\ x_\mu \in \mathbb{R}^{n_\mu},\ \sum_{\mu=1}^{m} n_\mu = n,\ \ y_\mu \in \mathbb{R}^{k_\mu},\ \sum_{\mu=1}^{l} k_\mu = k,$$
$$X_\mu(0,t) = 0,\ Y_\mu(0,0,t) = 0.$$

Предположим, что для каждой из систем $\dot{x}_\mu = X_\mu(x_\mu,t)$ могут быть построены функции Красовского $v^i(x_i,t), v^i : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие оценкам, характерным для квадратичных форм:

$$\begin{aligned} &c_{1i} \| x_i \|^2 \le v^i(x_i,t) \le c_{2i} \| x_i \|^2,\ \dot{v}^i(x_i,t) \le -c_{3i} \| x_i \|^2, \\ &\| \partial v^i(x_i,t)/\partial x_i \| \le c_{4i} \| x_i \|. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Предположим, согласно методу Бейли [105], что матрица $P = (p_{ij})$ системы сравнения для (5.90) определяемая коэффициентами

$$p_{ii} = -c_{3i}/(2c_{2i}),\ \ p_{ij} = (c_{4i}^2/(2c_{1i}c_{3i}))\sum_{\mu=1}^{m}\overline{c}_{\mu i}^2 \quad (j \neq i, \mu \neq i),$$

$$\overline{c}_{\mu i} = \sup_{x,y,t} \| X_{\mu i}(x,y,t) \|,$$

гурвицева.

Рассмотрим вектор-функцию $v = \mathrm{col}(v^1, v^2, \ldots v^m, 0, \ldots, 0)$ размерности $m + k$. Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет требованиям 1), 2) доказанной теоремы сравнения с системой сравнения $\dot{u} = Pu$, $\dot{w} = Qw$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^k$, где Q – произвольная $(k \times k)$-гурвицева матрица.

Множество состояний (x, y) $(y = (y_1, y_2, \ldots, y_k))$, где $v(x, y, t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, очевидно, имеет вид $x = 0$ и на нем система (3), (4) преобразовывается в систему

$$\dot{y}_\mu = Y_\mu(0, y_\mu, t) + \sum_{\nu=1, \nu\neq\mu}^{k} Y_{\mu\nu}(0, y, t) y_\mu, \quad \mu = \overline{1, l}, \tag{5.93}$$

Поэтому если нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво, то на основании теоремы 5.1 можно указать шар B в пространстве $\mathbb{R}^{m+k}$ с центром в начале, для которого будет выполнено и требование 3) теоремы сравнения (при $W = B$).

Кроме того, заметим, что система (5.93) также является многосвязной системой Бейли. Поэтому нулевое решение системы (5.91), (5.90) будет асимптотически устойчивым, если выполнены условия теоремы Бейли соответственно для подсистем (5.90) и (5.93).

Пример 5.12 [44]. Пусть система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = -\alpha x + y \sin t - x^3 z^2 \sin^2 t,\\
&\dot{y} = x \sin t - \alpha y - x^2 y z^2 \sin^2 t,\\
&\dot{z} = g(x, y, t) + f(z, t), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,
\end{aligned} \tag{5.94}$$

где α – постоянный параметр, $g(0, 0, t) = f(0, t) = 0$.

Вектор-функция $V(x, y, z, t) = ((x + y)^2, (x - y)^2)'$ очевидно знакоположительна в $\mathbb{R}^3$, ее производная по времени в силу системы удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x, y, z, t) \leq 2diag(-\alpha + \sin t, -\alpha - \sin t)V(x, y, z, t).$$

При $\alpha = 0$ система сравнения $\dot{u} = 2diag(-\alpha + \sin t, -\alpha - \sin t)u$ устойчива, а при $\alpha > 0$ асимптотически устойчива (глобально). Множество точек (x, y, z), где $V(x, y, z, t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, совпадает с прямой $x = 0$, $y = 0$. Ясно, что эта прямая является инвариантным множеством. На ней система вырождается в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = f(z, t), \quad z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \tag{5.95}$$

Поэтому из теоремы 5.1 вытекает, что требование 3) теоремы сравнения будет выполнено, если нулевое решение уравнения (5.95) будет асимптотически устойчиво (либо глобально асимптотически устойчиво для случая b).

Для асимптотической устойчивости решения $z = 0$ достаточно потребовать существования числа $\Delta > 0$ такого, что

$$zf(z, t) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < |z| < \Delta. \tag{5.96}$$

Таким образом, при выполнении (5.96) исследуемая система устойчива, если $\alpha = 0$, и асимптотически устойчива, если $\alpha > 0$.

Далее, поскольку множество H_r, определяемое в лемме 5.1, представляет собой в данном случае множество, где ограничены координаты x и y, то для того, чтобы все решения системы были ограниченными, достаточно потребовать, чтобы они были ограниченными по координате z. Этого можно добиться, если предположить выполненным следующее условие:

$$\forall A > 0, \ \exists B > 0 \ \text{такое, что} \ (g(x, y, t) + f(z, t))z < 0$$

$$\text{при} \ |x| + |y| < A \quad \text{и} \quad |z| > B. \tag{5.97}$$

Действительно, при выполнении (5.97) функция $v = 0{,}5z^2$ имеет отрицательную производную в силу системы (5.94) для ограниченных $|x|$ и $|y|$ и достаточно большого значения $|z|$. Следовательно, если $\alpha > 0$, выполнено условие (5.96) для всех $\Delta > 0$ и условие (5.97), то нулевое решение (5.94) глобально асимптотически устойчиво.

6. АВТОНОМНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. КРИТЕРИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задано автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \ \ f(0) = 0, \tag{6.1}$$

где f: $D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, D – окрестность начала координат. Символом $x(x_0, t)$ обозначим решение уравнения (6.1), проходящее через точку x_0 в момент времени $t = 0$.

Нетрудно видеть, что для случая автономной системы (6.1) результаты пп. 1.4 и 1.5, полученные с помощью техники предельных уравнений практически совпадают. Они внешне отличаются лишь условиями 3) (или 4)) во всех утверждениях, однако по существу являются эквивалентными. Для подтверждения этого достаточно воспользоваться критерием асимптотической устойчивости и глобальной асимптотической устойчивости [64] нулевого решения относительно замкнутого положительно инвариантного множества Y_0. Таким образом, воспользовавшись результатами пп. 1.4 и 1.5, получаем следующие формулировки утверждений метода знакопостоянных функций для автономных дифференциальных уравнений.

Теорема 6.1.1 [46]. *Нулевое решение системы* (6.1) *устойчиво*, *если существует шар* B_α, $\alpha > 0$, *и непрерывно дифференцируемая функция* V: $B_\alpha \to \mathbb{R}^+$ *такая*, *что*:

1) $V(x) \geq 0 \ \ \forall x \in B_\alpha$ *и* $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \ \ \forall x \in B_\alpha$;

3) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества*

$$Y_0 = \{x \in \overline{B_\alpha} : V(x) = 0\}\,.$$

Теорема 6.1.2 [46]. *Нулевое решение системы* (6.1) *асимптотически устойчиво*, *если существует шар* B_Δ, $\Delta > 0$, *и непрерывно дифференцируемая функция* V *такие*, *что*:

1) $V(x) \geq 0 \ \ \forall x \in B_\Delta$ *и* $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \ \ \forall x \in B_\Delta$;

3) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества*

$$Y = \{x \in \overline{B_\alpha} : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Теорема 6.1.3 [46]**.** *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$. *Нулевое решение* (6.1) *глобально асимптотически устойчиво*, *если существует непрерывно дифференцируемая функция* V *такая*, *что*:

1) $V(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ *и* $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$;

3) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества*

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\};$$

3) $\forall \alpha > 0$ *всякое решение* $x(x_0, t)$ *уравнения* (6.1), *принадлежащее множеству* $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : V(x) \leq \alpha\}$ *ограничено при* $t \geq 0$.

6.2. КРИТЕРИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ

Несколько иные утверждения, но в определенном смысле дополняющие формулировки п. 5.1 для автономных систем, дает метод разделения переменных (гл. 2). Соответствующие утверждения метода знакопостоянных функций Ляпунова представляются следующим образом.

Пусть $U = (U_x, U_y)$ означает открытую связную окрестность начала координат $\mathbb{R}^{p+q}$, где $U_x \subset \mathbb{R}^p$, $U_y \subset \mathbb{R}^q$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y), & x \in \mathbb{R}^p, \\ \dot{y} = Y(x, y), & y \in \mathbb{R}^q. \end{cases} \tag{6.2}$$

Предположим, что функции $X : U \to \mathbb{R}^p$ и $Y : U \to \mathbb{R}^q$ локально липшицевы по x и y и исчезают в точках $x = 0$, $y = 0$.

Через B_r^m обозначим шар в пространстве $\mathbb{R}^m$ радиусом $r > 0$, где $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 6.2.1 [51]. *Пусть существуют шар* B_Δ^{p+q} $(\Delta > 0,\ B_\Delta^{p+q} \subset U)$, *непрерывная локально липшицева функция* φ: $B_\Delta^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(0) = 0$, *непрерывно дифференцируемая функция* V: $B_\Delta^{p+q} \to \mathbb{R}^+$ *и функция* $a \in \mathbf{K}$ *такие, что для каждой точки* $(x, y) \in B_\Delta^{p+q}$ *выполняются условия*:

1) $a(\|y - \varphi(x)\|) \le V(x, y)$ *и* $V(0, 0) = 0$;
2) $\dot{V}(x, y) \le 0$;
3) *нулевое решение системы*

$$\dot{x} = X(x, \varphi(x)), \qquad x \in U_x, \tag{6.3}$$

асимптотически устойчиво.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (6.2) *устойчиво.*

Теорема 6.2.2 [51]**.** *Пусть существуют шар* B_Δ^{p+q} $(\Delta > 0,\ B_\Delta^{p+q} \subset U)$, *непрерывно дифференцируемая функция* V: $B_\Delta^{p+q} \to \mathbb{R}^+$, *непрерывная локально липшицева функция* φ: $B_\Delta^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(0) = 0$, *функции* $a, c \in \mathbf{K}$ *такие, что для каждой точки* $(x, y) \in B_\Delta^{p+q}$ *выполняются условия*:

1) $a(\|y - \varphi(x)\|) \le V(x, y)$;
2) $\dot{V}(x, y) \le -c(\|y - \varphi(x)\|)$

и условие

3) *нулевое решение системы* (6.3) *асимптотически устойчиво.*

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (6.2) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 6.2.3 [51]. *Пусть* $U = \mathbb{R}^n$. *Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемая функция* V: $\mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^+$, *непрерывная локально липшицева функция* φ: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(0) = 0$, *функции* $a, c \in \mathbf{K}$ *такие, что для каждой точки* $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(\|y - \varphi(x)\|) \le V(x, y)$;
2) $\dot{V}(x, y) \le -c(\|y - \varphi(x)\|)$

и условия:

3) *нулевое решение системы* (6.3) *глобально асимптотически устойчиво*;
4) *всякое решение системы* (6.2) *ограничено при* $t \ge 0$.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (6.2) *глобально асимптотически устойчиво.*

6.3. КРИТЕРИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СЕЙБЕРТА

Утверждения метода знакопостоянных функций, которые можно получить для автономных систем из результатов главы 3 отличаются от соответствующих формулировок, полученных соответствующим образом из глав 1 и 2. Они состоят в следующем.

Пусть задано автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \;\; (f(0) = 0), \tag{6.4}$$

где f: $D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, D – окрестность начала координат.

Пусть $x(x_0, t)$ означает решение уравнения (6.4) с начальными данными $x(x_0, 0) = x_0$, а $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ – функцию расстояния в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 6.3.1. *Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$, функция $V \in \mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^+)$ и функции a, $b \in \mathbf{K}$ такие, что*:

1) $a(d(Y_0, x)) \le V(x) \le b(\|x\|)$ $\forall x \in U$, *где* $Y_0 = \{x \in \bar{U} : V(x) = 0\}$;

2) $\dot{V}(x) \le 0$ $\forall x \in U$;

3) $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества* Y_0.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (6.4) *устойчиво*.

Теорема 6.3.2. *Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$, функции $V \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$* и *$a$, b, $c \in \mathbf{K}$ такие, что для всех $x \in U$ выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \le V(x) \le b(\|x\|)$, *где* $Y_0 = \{x \in \bar{U} : V(x) = 0\}$;

2) $\dot{V}(x) \le -c(d(Y, x))$;

3) $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно* Y_0.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (6.4) *асимптотически устойчиво*.

Теорема 6.3.2.1. *Предположим, что правая часть $f \in \mathbf{C}^1$ и существуют ограниченная окрестность U точки $x = 0$, функции $V \in \mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^+)$, $W \in \mathbf{C}^0(U, \mathbb{R})$ и a, b, $c \in \mathbf{K}$ такие, что для всех $x \in U$ имеют место следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \le V(x) \le b(\|x\|)$, *где* $Y_0 = \{x \in \bar{U} : V(x) = 0\}$;

2) $\dot{V}(x) \le 0$ *пусть* $Y = \{x \in U: \dot{V}(x) = 0\}$;

3) $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно* Y_0;

4) $\max\{d(x, Y), |\dot{W}(x)|\} \ge c(\|x\|)$;

Тогда решение $x = 0$ *системы* (6.4) *асимптотически устойчиво*.

Теорема 6.3.2.2 *Предположим, что существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *функции* $V \in \mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^+)$ и a, $b \in \boldsymbol{K}$ *такие, что для всех* $x \in U$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \le V(x) \le b(\|x\|)$, *где* $Y_0 = \{x \in \bar{U} : V(x) = 0\}$;

2) $\dot{V}(x) \le 0$;

3) $x = 0$ *притягивающее относительно множества* Y_0;

4) *существует* $\delta > 0$ *такое, что если* $x_0 \in B(Y_0, \delta)$, *то* $V(x(x_0, t)) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (6.4) *асимптотически устойчиво*.

Теорема 6.3.3. *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$. *Предположим, что существуют функции* $V \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *и функции* a, b, $c \in \mathbf{K}$ *такие, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y_0, x)) \le V(x) \le b(d(Y_0, x))$ *где* $Y_0 = \{x \in \bar{U} : V(x) = 0\}$;

2) $\dot{V}(x) \le -c(d(Y_0, x))$;

3) $x = 0$ *глобально асимптотически устойчиво относительно* Y_0.

4) *каждое решение* $x(x_0, t)$ *уравнения* (6.4), *удовлетворяющее условию* $V(x(x_0, t)) \le M < +\infty$, *ограничено*.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (6.4) *глобально асимптотически устойчиво*.

6.4. КРИТЕРИИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Результаты п. 1.7 содержат утверждения второго метода Ляпунова, использующие условия на производные высших порядков по времени функций Ляпунова. Для автономного случая они состоят в следующем.

Теорема 6.4.2. *Предположим, что для системы* (6.4) *существуют функция* $V(x)$ *и функция* $a \in \boldsymbol{K}$ *такие, что для всех* $x \in B_\Delta$ *выполняются условия*:

1) $a(\|x\|) \le V(x)$;

2) $\dot{V}(x) \le 0$;

3) *функция* V *удовлетворяет условию*: *множество определяемое равенствами*

$$\{y \in B_\Delta : V(y) = c, \ \overset{(k)}{V}(y) = 0\} \quad k = 1, 2, \ldots, m+1,$$

не содержит положительных полутраекторий уравнения (6.4) *ни при каком* $c > 0$.

Тогда нулевое равновесие уравнения (6.4) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 6.4.3. *Пусть* $B_\Delta = \mathbb{R}^n$ *и система уравнений* (6.4) *автономна в* $\mathbb{R}^n$. *Предположим, что существует функция* $V(x)$ *и бесконечно большая функция* $a \in \boldsymbol{K}$ *такая, что*

1) $a(\| x \|) \le V(x)$ *и* $\forall x \in \mathbb{R}^n$;

2) $\dot{V}(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$;

3) *функция* V *удовлетворяет условию: множество, определяемое равенствами*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c,\ \overset{(k)}{V}(x) = 0\} \quad k = 1, 2, ..., m+1,$$

не содержит положительных полутраекторий уравнения (6.4) *ни при каких* $c > 0$.

Тогда нулевое равновесие системы (6.4) *глобально асимптотически устойчиво.*

Теорема 6.4.4. *Пусть система уравнений* (6.4) *автономна. Предположим, что для системы* (6.4) *существует функция* $V(x)$ *такая, что*:

1) $\forall \delta > 0,\ \exists p \in B_\delta$ *такое, что* $V(p) > 0$;

2) $\dot{V}(x) \ge 0$;

3) *функция* V *удовлетворяет условию: множество*

$$\{y \in B_\Delta : V(y) = c,\ \overset{(k)}{V}(y) = 0\}, \quad k = 1, 2, ..., m+1,$$

не содержит положительных полутраекторий уравнения (6.4) *ни при каком* $c > 0$.

Тогда нулевое равновесие уравнения (6.4) *неустойчиво.*

6.5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

6.5.1. ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим пример автономной динамической системы, для которой теорема об устойчивости метода знакопостоянных функций справедлива без предположения об асимптотической устойчивости относительно множества нулей функции Ляпунова.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y, z), & X(0,0,0) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}^p, \\ \dot{y} = Y(x, y, z), & Y(x, y, 0) = 0, \ \ y \in \mathbb{R}^q, \\ \dot{z} = Az + Z(x, y, z), & Z(x, y, 0) = 0, \ \ z \in \mathbb{R}^r, \end{cases} \tag{6.5}$$

где X: $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^p$ – непрерывная функция, Y и Z – голоморфные по x, y, z функции, причем разложение вектор-функции Z начинается с членов не ниже второй степени; A – квадратная ($n \times n$)-матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части. Соответствующие утверждения являются аналогами результатов п. , гл.

Теорема 6.5.1. *Пусть для системы уравнений* (6.5) *существуют окрестность U точки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и непрерывно дифференцируемая функция V: $U \to \mathbb{R}^+$ такая, что для некоторой функции $a \in \boldsymbol{K}$ и любых $(x, y, z) \in U$ выполняются условия*:

1) $V(x, y, z) \geq a(\|x\|)$, $V(0, 0, 0) = 0$;
2) $\dot{V}(x, y, z) \leq 0$.

Тогда нулевое решение системы (6.5) *устойчиво.*

Более того, если для некоторой функции $b \in \boldsymbol{K}$ и любых $(x, y, z) \in U$ выполняется неравенство

3) $V(x, y, z) \leq b(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$,

то нулевое решение устойчиво и всякое решение, близкое к невозмущенному, стремится при $t \to +\infty$ к одному из установившихся движений $x = 0$, $y_j = c_j$, $z = 0$.

6.5.2. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y), & x \in U_x \subset \mathbb{R}^p, \\ \dot{y} = Y(x, y)x, & y \in U_y \subset \mathbb{R}^q, \end{cases} \tag{6.6}$$

где $U = (U_x, U_y)$ – некоторая окрестность начала координат пространства $\mathbb{R}^{p+q}$. Предположим, что правая часть системы $(X(x, y), Y(x, y)x)$ суть непрерывная функция в U и удовлетворяет условию Липшица. Пусть, кроме того, для всех $y \in U_y$ имеет место равенство

$$X(0, y) = 0.$$

Тогда система (6.6) имеет семейство точек покоя $x = 0$, $y = \mathrm{const}$, среди которых находится неизолированное равновесие $x = 0$, $y = 0$.

Теорема 6.5.1.1. *Предположим, что существует число* $\Delta > 0$ *и определенно положительная форма m-й степени* $V(x)$ ($V\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$) *такая, что для любого числа* μ ($0 < \mu < \Delta$) *найдется число* $\sigma > 0$, *для которого выполняется неравенство*

$$\dot{V}(x) \le -\sigma V(x) \quad \text{при} \;\; 0 < \mu \le \|x\| \le h, \;\; \mu \le \|y\| \le h.$$

Тогда нулевое решение системы (6.6) *устойчиво, причем устойчивость будет асимптотическая относительно* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

6.5.3. ТРЕУГОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть система (2.33) имеет треугольный вид

$$\dot{x} = X(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q, \tag{6.8}$$

$$\dot{y} = Y(y), \quad y \in \mathbb{R}^q, \tag{6.9}$$

Примером таких систем могут служить математические модели разоружения [78, 149]. Предположим, что эти уравнения удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим существование, единственность и неограниченную продолжаемость всех решений при $t \ge 0$. Кроме того, пусть $X(0,0) = 0$, $Y(0) = 0$, т. е. уравнения обладают решением $x = 0$, $y = 0$.

Проиллюстрируем результаты п. 2.1. Для этого предварительно выделим уравнение

$$\dot{x} = X(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}^p. \tag{6.10}$$

Теорема 6.5.1.2 [51]. *Решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (6.8), (6.9) *устойчиво, если*:

1) *решение* $y = 0$ *уравнения* (6.9) *устойчиво*;

2) *решение* $x = 0$ *уравнения* (6.10) *асимптотически устойчиво*.

Теорема 6.5.2 [51]. *Решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (6.8), (6.9) *асимптотически устойчиво, если*:

1) *решение* $y = 0$ *уравнения* (6.9) *асимптотически устойчиво*;

2) *решение* $x = 0$ *уравнения* (6.10) *асимптотически устойчиво*.

Исследуем теперь ситуацию, когда (6.9) обладает лишь свойством локальной асимптотической устойчивости.

Теорема 6.5.2.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *все решения системы* (6.9) *определены при* $t \in \mathbb{R}$;

2) *решение* $y = 0$ *системы* (6.9) *асимптотически устойчиво и* A *–* *есть его область притяжения в* $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$;

3) *решение* $y = 0$ *системы* (6.9) *равномерно притягивающее*;

4) *решение* $x = 0$ *системы* (6.10) *глобально асимптотически устойчиво*;

5) *всякое решение системы* (6.8), (6.9) *с начальными условиями* $(y_0, t_0) \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$ *ограничено при всех* $t \geq t_0$.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ *системы* (6.8), (6.9) *асимптотически устойчиво и* $\mathbb{R}^p \times A$ *– его область притяжения.*

Теорема 6.5.3. *Пусть* $D = \mathbb{R}^n$. *Если нулевое решение уравнения* (6.9) *и нулевое решение уравнения* (6.10) *равномерно глобально асимптотически устойчивы*, *а всякое решение системы* (6.8), (6.9) *ограничено при* $t \geq 0$, *то решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (6.8), (6.9) *глобально асимптотически устойчиво.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Артемьев Н. А.* Осуществимые движения // Известия АН СССР. Серия математическая. 1939, вып. 3.

2. *Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М.* Метод векторных функций в теории устойчивости. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. 312 с.

3. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.

4. *Александров Ф.Ю.* Об устойчивости одного класса нелинейных систем // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 545–550.

5. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 5. С. 796–805.

6. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, №. 2. С. 225–232.

7. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005. 328 с.

8. *Барбашин Е.А.* и *Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Доклады АН СССР. 1952. Т. 86, № 3. С. 453–456.

9. *Барбашин Е.А. и Красовский Н.Н.* О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // ПММ. 1954. Т. *XV*III. С. 345–350.

10. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.

11. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова М.: Наука, 1970. 240 с.

12. *Баулин А.С., Калитин Б.С.* Метод знакопостоянных функций Ляпунова для дискретных неавтономных систем // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2000, № 1. С. 28–34.

13. *Булгаков Н.Г., Калитин Б.С.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 1. Теория // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. 1978. № 3. С. 32–36.

14. *Булгаков Н.Г., Калитин Б.С.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 2. Примеры // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. 1979. № 1. С. 70–74.

15. *Булгаков Н.Г., Калитин Б.С., Покатаев А.В.* К устойчивости дискретных автономных систем. Белорусский ун-т. Минск, 1979. 17 с. Деп. в ВИНИТИ. 26.04.79. № 1543–79.

16. *Булгаков Н.Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Минск: Изд. Университетское, 1984. 79 с.

17. *Бутенин Н.В.*, *Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. М.: Наука, 1991. 256 с.

18. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики (часть вторая). М.: Наука, 1972. 332 с.

19. *Бор Г.* Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1934. 127 с.

20. *Васильев С.Н.* Метод сравнения в анализе систем 1, 2 // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 9. С. 1562–1573; Т. 17, № 11. С. 1545–1554; 1982. Т. 18, № 2. С. 197–205; Т. 18, № 6. С. 938–947.

21. *Васильев С.Н.* Метод редукции и качественный анализ динамических систем, I-II // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 21–29; № 2. С. 5–17.

22. *Веретенников В.Г., Зайцев В.В.* Применение 2 метода Ляпунова для оценок области устойчивости и притяжения // Прикладная математика и механика, 1984. Т. 48, №5. С. 714–724.

23. *Воронов А.А.* Современное состояние и проблемы теории устойчивости // Автоматика и Телемеханика. 1982. № 5. С. 6–28.

24. *Гаврош Е.С.*, *Калитин Б.С.* Теорема о неустойчивости дискретных неавтономных систем // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ. мат. инф. 2012. № 2. С. 111–115.

25. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

26. *Горбунов А.Д.* Об условиях асимптотической устойчивости нулевого решения системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та, 1953. № 9. С. 49–55.

27. *Горшин С. И.* Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями // Известия АН Казахской ССР. Серия мат. и мех. 1948. № 56. Вып. 2. С. 46–73.

28. *Григорьева Н.Б.* Об ослаблении условия знакоопределенности производной в некоторых теоремах второго метода Ляпунова // Прикладная математика и механика, 2004. Т.68, вып. 2. С. 234–253.

29. *Грудо Э.И.* К теории устойчивости обыкновенных дифференциальных систем и систем Пфаффа // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 782–789.

30. *Грудо Э.И., Янчук Л.Ф.* К асимптотической устойчивости положения равновесия систем Пфаффа // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, №10. С. 1891–1893.

31. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

32. *Дубошин Г. Н.* К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений // Тр. Астрономического института им. Штернберга. 1940. Т. 14. Вып. 1. С. 153–164.

33. *Еругин Н.П.* Качественные методы в теории устойчивости // Прикладная математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 5. С. 599–616.

34. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1970. 571 с.

35. *Зубов В.И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). 2-е изд. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.

36. *Изман М.С.* Устойчивость и множества притяжения в дисперсных динамических системах // Математические исследования. Кишинев: РИО АН МССР, 1968. Т. 3, вып. 3. С. 60–78.

37. *Калитин Б.С.* О построении знакопостоянных функций Ляпунова. Минск, 1979. 12с. Деп. в ВИНИТИ. 17.05.79. № 1760–79.

38. *Калитин Б.С.* К устойчивости существенно нелинейных систем // Вестник Белорусского ун-та. Сер.1, физ., мат., мех., 1983. № 1. С. 33–35.

39. *Калитин Б.С.* К устойчивости компактных множеств // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1984. № 3. С. 61–62.

40. *Калитин Б.С.* Устойчивость неизолированной точки покоя // Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех., 1985. № 3. С. 39–41.

41. *Калитин Б.С.* О неасимптотической устойчивости инвариантных множеств // Известия. ВУЗов. Математика. 1986. № 8. С. 31–34.

42. *Калитин Б.С.* Устойчивость при наличии первых интегралов // Вестник Белорусского ун-та. Сер.1, физ., мат., мех., 1986. № 3. С.69–70.

43. *Калитин Б.С.* Устойчивость при наличии интегральной поверхности // Динамические процессы и их устойчивость. Якутск: Якутский государственный университет, 1987. С. 78–86.

44. *Калитин Б.С.* К методу сравнения для задач устойчивости периодических систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 423–428.

45. *Калитин Б.С.* Относительная устойчивость компактных множеств // Вестн. Белорус. ун–та. Сер. 1. 1987. № 1. С. 34–36.

46. *Калитин Б.С.* Устойчивость неавтономных динамических систем // Актуальные задачи теории динамических систем управления. Минск: ИМ АН БССР, 1989. С. 37–46.

47. *Калитин Б.С.* К задаче Флорио – Сейберта // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 4. С. 727–729.

48. *Калитин Б.С.* О решении задач устойчивости методом знакопостоянных функций Ляпунова // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления, Новосибирск, 1991. С. 79–85.

49. *Калитин Б.С.* Развитие теоремы Ляпунова об устойчивости // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 5. С. 758–766.

50. *Калитин Б.С., Калитина Л.В.* Оптимизация оценки области притяжения методом функций Ляпунова // Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1. 1994. № 3. С. 54–57.

51. *Калитин Б.С.* К методу знакопостоянных функций Ляпунова для неавтономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 583–590.

52. *Калитин Б.С.*, *Мурач В.А.* Устойчивость неавтономных систем по части переменных. Метод знакопостоянных функций Ляпунова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 3. С. 71-72.

53. *Калитин Б.С.* *B*-устойчивость и задача Флорио – Сейберта // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 453–463.

54. *Калитин Б.С.* Развитие метода знакопостоянных функций Ляпунова. Выбраныя навуковыя працы БДУ. Т. VI. Матэматыка, Мінск–2001. С. 232–257.

55. *Калитин Б. С.* Равномерная интегральная непрерывность неавтономных дифференциальных уравнений // Вестник Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 64–68.

56. *Калитин Б.С.* Устойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 11. С. 1565–1566.

57. *Калитин Б.С.* Устойчивость динамических систем (Качественная теория). LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 266 с.

58. *Калитин Б.С.* Устойчивость по Ляпунову и орбитальная устойчивость динамических систем // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 8. С. 1033–1042.

59. *Калитин Б.С.* Математические модели экономики. Минск: БГУ, 2004. 182 с.

60. *Калитин Б.С.* Устойчивость неизолированных состояний равновесия // Вестн. Белорус. ун–та. Сер. 1. 2004. № 3. С. 79–83.

61. *Калитин Б.С.* Задачи по теоретической механике. Минск, БГУ, 2005. 199 с.

62. *Калитин Б. С.* О принципе сведения для асимптотически треугольных дифференциальных систем // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 3. С. 389–400.

63. *Калитин Б.С.* Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова // Математические заметки, 2009. Т. 85. Вып. 3 март. С. 382– 394.

64. *Калитин Б.С.* Качественная теория устойчивости движения динамических систем. Минск: БГУ, 2002. 198 с.

65. *Калитин Б.С.* Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова). LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 230 с.

66. *Калитин Б.С.*, *Мороз О.А.* К устойчивости неизолированной точки покоя в критических случаях. Тез. докл. Республиканской научно-технической конф. «Применение вычислительной техники, математических методов и моделирования в автоматизации экспериментальных исследований». Киев, 1987. С. 49–50.

67. *Калитин Б.С.*, *Мороз О.А.* К вопросу устойчивости неизолированных положений равновесия. Тез. докл. Научной школы-семинара «Моделирование и исследование устойчивости физических процессов», Киев, 1991. С. 38–39.

68. *Калитин Б.С., Шабур Р.* Метод знакопостоянных функций Ляпунова для систем неавтономных дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. 2012. №5. С. 28–39.

69. *Каменков Г.В.* Избранные труды в двух томах: Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. Т. 1. М.: Наука, 1972. 258 с.

70. *Касперов В. Н., Хусаинов Д. Я.* Об исследовании устойчивости вторым методом Ляпунова // Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. Киев, 1973. С. 54–62.

71. *Касперов В.Н.*, *Шарковский А.Н.* Об орбитальной устойчивости // Тр. V междунар. конф. по нелин. колебаниям, 2, Киев, 1973.

72. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. 6-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 624 с. стр. 295

73. *Косов А.А.* О глобальной устойчивости неавтономных систем I. // Изв. Вузов. Математика. 1997. № 7 (422). С. 28–35.

74. *Косов А.А.* О глобальной устойчивости неавтономных систем. II // Известия вузов. Математика. 1997. № 8. С. 3342.

75. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИФМЛ, 1959. 211 с.

76. *Кузьмин П.А.* К теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. 1954. XVIII. С. 125–127.

77. *Курцвейль Я.* Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения // Чехослов. матем. журнал. 1956. Т. 6 (81), № 2. С. 217–259; № 4. С. 455–484.

78. *Лакшмикантам В*., *Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Навук. думка, 1991. 248 с.

79. *Леваков А.А.* Использование знакопостоянных функций Ляпунова для исследования устойчивости дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2083–2090.

80. *Леваков А.А.* Устойчивость дифференциально-функциональных включений // Дифференц. уравнения . 1989. Т.25, № 8. С. 1312–1321.

81. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

82. *Ля-Салль, Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.

83. *J.P. LaSalle,* The Stability of Dynamical Systems, With an appendix: “Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations” by Z. Artstein, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., 25, Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, Pa., 1976.

84. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

85. *Массера Х.Л.* К теории устойчивости // Сб. переводов «Математика». ИЛ. 1957. Т. 1, вып. 4. С. 81–101.

86. *Матросов В.М.* К вопросу устойчивости гороскопических систем с диссипацией // Труды Казанского авиац. ин-та, 1959. Вып. 45.

87. *Матросов В.М.* Об устойчивости движения // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 5. С. 885–895.

88. *Матросов В.М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова 1, 2 // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1374–1386; Т. 4, № 10. С. 1739–1752; 1969. Т. 5, № 7. С. 1171–1185; Т. 5, № 12. С. 2129–2143.

89. *Матросов В.М.*, *Анапольский Л.Ю.*, *Козлов Р.И.* Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск, 1984. С. 16–33.

90. *Матросов В.М.* Метод векторных функций в теории устойчивости. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. 312 с.

91. *Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смирнов А.Л.* Задачи по теории устойчивости. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002,128 с.

92. *Немыцкий В.В.* Топологические проблемы теории динамических систем // Успехи Математических Наук. 1949, № 4. С. 91–153.

93. *Немыцкий В.В.* О проблеме качественного исследования в целом методами функций Ляпунова // Вестник МГУ. 1962. № 6. С. 26–28.

94. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТЛ, 1949. 550 с.

95. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 240 с.

96. *Огурцов А.И.* Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 1. С. 179–181.

97. *Павликов С.В.* Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации. Набережные Челны. 2010. 393 с.

98. *Персидский К.П.* Избранные труды: В 2-х т. Алма-Ата. Т. 1:Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Теория вероятностей. 272 с.; Т. 2: Бесконечные системы дифференциальных уравнений, Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. 248 с. Алма-Ата: Наука, 1976.

99. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1964. Т. 28, № 6. С. 1297–1324.

100. *Пуанкаре А.О.* кривых определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ГТТИ, 1947. 392 с.

101. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. 1957. № 4. С. 9–16.

102. *Румянцев В.В.* О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, № 5. С.739–776.

103. *Румянцев В.В.*, *Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.

104. *Русев Э.* О некоторых вопросах устойчивости дискретных систем, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Пловдив, 1987.

105. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

106. *Савченко А.Я.*, *Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев, 1989. 208 с.

107. *Седова Н.О.* Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2008. № 11. С. 68-79.

108. *Тузов А.П.* Вопросы устойчивости для одной системы регулирования // Вестник ЛГУ. 1955, вып. 2. С.

109. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

110. *Хусаинов Д.Я.* Устойчивость движений неавтономных систем при постоянно действующих возмущениях // Некоторые вопросы моделирования и управления систем. Киев, 1973. С.129–133.

111. *Хусаинов Д.Я.*, *Шарковский А.Н.* Об устойчивости движения относительно части переменных // Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. Киев, 1973. С. 122–127.

112. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: ГИТТЛ, 1955. 207 с.

113. *Шестаков А.А.* Некоторые теоремы о неустойчивости в смысле Ляпунова // Доклады АН СССР. 1951. Т. 79, № 1. С. 25–28.

114. *Шестаков А.А.* Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 14–48.

115. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990. 320 с.

116. *Artstein Z.* Topological dynamics of a ordinary differential equations // J. Diff. Equ. 1977. Vol. 23, № 2. P. 216–223.

117. *Artstein Z.* The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Diff. Equ. 1977. Vol. 25, № 2. P. 184–193.

118. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Diff. Equ. 1978. Vol. 27, № 2. P. 172–180.

119. *Auslander J., Seibert P.* Prolongations and stability dynamical systems // Grenoble: Ann. Inst. Fourier. 1964. Vol. 14, № 2. P. 237–267.

120. *Radu Balan.* An Extension of Barbachin – Krasovski – LaSalle Theorem to a Class of Nonautonomous Systems/ Princeton University. Program in Appliedand Computational Mathematics/ Washington Road, Fine Hall, Princeton NJ 08544, October 19, 1995. P. 1–12.

121. *Bhatia N.P., Szegö G.* Stability theory of Dynamical systems. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer, 1970. 225 p.

122. *Bensoubaya M., Ferfera A. and Iggidr A.* Stabilization of nonlinear systems by use semi definite Lyapunov functions // Applied Math. Letters, 12, pp. 11–17. 1999.

123. *Birkhoff G.D.* Collected Works, vol. 1,2,3 // Amer. Math. Soc., New York, 1950. Reprint, New York: Dover 1968.

124. *Birnes C.I.*, *Isidori A.* Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. P. 1133–1137.

125. *Brio et Bouquet.* Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. I. Ecol Polytech., 1856. V. 21.

126. *Carr J.* Applications of Centre Manifold Theory. Springer-Verlag New York Inc. 1981.

127. *Chabour R., Kalitine B.* Semi-Definite Lyapunov Functions. Stability and Stabilizability. Metz, 2001. 19 P. (Prépublication Mathématiques / Université de Metz, lab. M.M.A.S.; № 2).

128. *Corduneanu C.* Principles of differential and integral equaions. Allyn and Bacon Inc. Massachusetts, 1971.

129. *U. D`Ambrosio and V. Lakshmicantham.* On ψ-stability and differential inequalities. In: Topological Dynamics, J. Auslander and W.H. Gottschalk (Editor). New York-Amsterdam: Benjamin 1968. P. 155–164;

130. *Florio J. S., Seibert P.* Some aspects of the reduction problem of stability // Aport. Mat. Ser. Com. 1994. V. 14. P. 269–281.

131. *Hahn W.* Stability of motion. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer, 1967. 446 p.

132. *Hale J.K.* Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag. 1971.

133. *Hastings A. and T. Powell*. Chaos in a three-species food chain // Ecology. V. 72. No. 3. 1991. P. 896–903.

134. *Iggidr A., Kalitine B.S., Outbib R.* Semi definite Lyapunov functions. Stability and stabilization // Math. Control Signal Systems, 9. 1996. P. 95–106.

135. *Iggidr A., Kalitine B.S. and Sallet G.* Lyapunov theorems with semi definite functions. // IFAC 14th Triennial World Congress. Beijing, P.R. China, 1999. P. 231-236.

136. *Iggidr A., Kalitine B.S. and Vivalda J.C.* New Lyapunov-lik theorems for non lipschitz vector fields. // 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix (Arizona, USA), 1999. P. 5235–5236.

137. *Iggidr A., Sallet G.* On the stability of nonautonomous systems // Automatica. 2003. № 39. P. 167-171.

138. *Kayande A.A., Lakshmicantham V.* Conditionally invariant sets and vector Liapunov functions // J. Math. Anal. Appl. 1966. **14** P. 285–293.

139. *Kalitine B.S.* Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques // R.A.I.R.O. Automatique/Systems Analisys and Control. 1982. V. 16, № 3. P. 275–286.

140. *Kalitine B.* Sur le théorème de la stabilité non asymptotique dans la méthode directe de Lyapunov // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. 1, Mathématiques. 2004. Vol. 338. P. 163–166.

141. *Kalitine B.S., Chabour R.* Method of semi definite Lyapunov's function systems of nonautonomous differential equations // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тез. докл., Минск, 24- 28 август 2009. Минск, 2009. С. 175-177.

142. *Kalitin B., Vivalda J-C.* A Theorem of Unstability // Вестник Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. 2008. № 1. С. 55–58.

143. *Khaled H. Ahmad.* Staility Relative to a Set and to the Whol Space Revisited // Applied Mathematics and Computation/ 1987. **24** P. 91–99.

144. *Ladyzhenskaya O.* Attractors for Semigroups and Evolution Equations, Accad. Naz. Lincei, Cambridge University Press, 1991.

145. Lakshmicantham V. Vector Liapunov functions and conditional stability. J. Math. Anal. Appl. 1965. **10** P. 368–377.

146. *La Salle J.P.* Some extensions of Liapunov`s second method // IRE Trans. Circuit. Theory CT. 1960. Vol. 7. P. 520–527.

147. *Markov A.* Sur une proprietè générale des ensembles minimaux de Birkhoff // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. 1, Mathématiques. 1931. Vol. 193. P. 163–166.

148. *Miller R.K.* Asymptotic behavior of solution of nonlinear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 115. P. 400–416. *Richardson L.F.* Arms and Insecurity. Chicago: Boxwood Press, 1960. 240 p.

149. *Risito C.* On the Liapunov stability of a system with known first integrals // Mecanica. 1967. V. 2. P. 197–200.

150. *Risito C.* Metodi per lo studio dellà stabilità di sistemi con integrali primi noti // Annali di Mat. Рига ed Appl. 1976. V. 107. P. 49–94.

151. *Saperstone S.H.* Semidynamical Systems in Infinite Dimentional Space, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

152. *Seibert P.* On stability relative a set and to the whole space. Pepers presented at the 5th Int. Conf. on Nonlin. Oscilations. Kiev, 1969. V. 2. P. 448-457; Izdat. Inst. Mat. Akad. Nauk USSR (1970).

153. *Seibert P.* Relative stability and stability of closed sets // Seminar on Differential Equations and Dynamical systems II. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1970. Vol. 144. P. 185–189.

154. *Seibert P.*, *Florio J.S.* On the Reduction to a Subspace of Stability Properties of Systems in metric Spaces // Annali di Matematica pura ed applicata. 1995. (IV), v. CLXIX. P. 291–320.

155. *Seibert P.*, *Suáres R.* On the problem of stability in the presence of an invariant manifold. Application to stability of nonlinear systems // Report de Invest., UAM-I. 1988. V. 4. № 4. P. 1–18.

156. *Seibert P.*, *Suárez R.* Global stabilization of nonlinear cascade systems // Systems Control Lett., 1990. V. 14. P. 347–352.

157. *Seibert P.* Reduction Theorems for Stability of Systems in General Spaces // Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. 1997. Vol. 30, № 7. P. 4675–4681.

158. *Sell G.R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamic. I. The basic theory // Trans. Amer. Math. Soc. - 1967. - Vol. 127, № 2. - P. 241-262; 263–283.

159. *Szegö G.P.* New methods for constructing Lyapunov functions for time-invariant control systems, Automat. and Rem. Control. Theory. London, Butterwoth. 1964, 584–588. Discuss., 589.

160. *Sontag E.D.* Remark on stabilization and input-to-state stability // Proc. 28th Conf. Decision and Control. Tampa, FL. 1989. P. 1376–1378.

161. *Vidyasagar M.* Decomposition techniques for large-scale systems with non-additive interactions: Stability and stabilizability // IEEE Trans. Automat. Control., 1980. V. 25. P. 773–779.

162. *Viel F.* Stability of nonlinear systems controlled by estimated state feedback. Application to distillation columsand polymetrization reactor // PhD thesis, University of Rouen, 1994.

163. *Vivalda J-C.*, *Kalitine B.* La-Sall`s invariance principle and method of semi definite functions // Вестник Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. 2006. № 1. С. 62–67.

164. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control – A Geometric Approach. Third Edition. (Applications of mathematics; 10) Springer Verlag–New York, 1985.

165. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov`s second method. Tokyo: Publ. Of the Math. Soc. Japan, 1966. 223 p.