

Л.А. Игнаточкина

ТОПОЛОГИЯ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие



Москва
2016

УДК 515.12
ББК 22.152я73
И265

И265 Игнаточкина Л.А. Топология для бакалавров математики: Учебное пособие. — М.: Прометей, 2016. — С. 88.

Учебное пособие написано для студентов второго курса МПГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Математика». В доходчивой для студентов младших курсов форме объясняются основные понятия общей топологии. Пособие содержит множество примеров и задач, помогающих читателю самостоятельно разобраться в непростых для начинающего математика идеях топологии. Для студентов учреждений высшего образования, а также желающих овладеть основными понятиями общей топологии.

ISBN 978-5-9907453-1-5

© Игнаточкина Л.А., 2016.

© Издательство «Прометей», 2016.

Содержание

1. Метрические пространства.	6
1.1. Понятие метрического пространства.	6
1.2. Подпространства метрических пространств.	12
1.3. Шары и сферы в метрических пространствах.	13
1.4. Задачи	15
1.5. Дополнительные задачи	19
2. Непрерывные отображения метрических пространств.	20
2.1. Обобщение понятия непрерывности функции из анализа.	20
2.2. Гомеоморфизмы в метрических пространствах.	25
2.3. Открытые множества в метрических пространствах.	26
2.4. Задачи.	31
2.5. Дополнительные задачи	33
3. Топологические пространства и непрерывные отображения.	35
3.1. Топологические пространства. База топологии.	35
3.2. Непрерывные отображения топологических пространств.	40
3.3. Задачи	46
3.4. Дополнительные задачи	51
4. Различные виды множеств в топологических пространствах.	52
4.1. Открытые и замкнутые множества.	52
4.2. Внутренность множества, замыкание и граница множества.	54
4.3. Предельные и изолированные точки.	60
4.4. Всюду плотные множества.	61
4.5. Задачи	63
4.6. Дополнительные задачи	65
5. Связность топологических пространств	67
5.1. Определение и критерий	67
5.2. Связность – топологический инвариант.	72

5.3. Связные множества на прямой $\mathbb{R}$	74
5.4. Компоненты связности	74
5.5. Применение понятия связности для доказательства негомеоморфности топологических пространств	75
5.6. Задачи	76
6. Компактность.	77
6.1. Определение и примеры.	77
6.2. Компактность в метрических пространствах.	81
6.3. Задачи	85
Литература	87

Введение.

Топология достаточно молода. Она как наука сформировалась в трудах великого французского математика Анри Пуанкаре в конце XIX века, хотя первые наблюдения топологического характера, восходящие к исследованиям, Л.Эйлера, К.Гаусса, Б.Римана и других, относятся к середине XIX века. Но только А.Пуанкаре, исходя из потребностей теории функций и дифференциальных уравнений, ввел целый ряд важнейших топологических понятий, развил содержательную теорию и применил ее к различным разделам математики и механики. А. Пуанкаре назвал новый раздел математики *Analysis situs* – геометрия положения. Термин «топология» (от греческих слов место и закон) ввел И. Листинг (в качестве первого упоминания этого термина указываются различные годы от 1836 до 1847).

А.Пуанкаре так определил содержание *Analysis situs*: «*Analysis situs* есть наука, которая позволяет нам узнавать качественные свойства геометрических фигур не только в обычном пространстве, но также и в пространстве более трех измерений. *Analysis situs* в трех измерениях является для нас познанием почти интуитивным; напротив, *Analysis situs* в более чем трех измерениях представляет громадные трудности, и чтобы начать пытаться их преодолевать, нужно быть очень убежденным в крайней важности этой науки. Если эта важность не всеми понята, то это потому, что об этом недостаточно размышляли».

В настоящее время топология широко используется не только в других разделах математики, но и в физике, химии, биологии. Сама топология приобрела различные разделы, такие как общая топология, теория гомологий, теория гомотопий, теория расслоений, дифференциальная топология. Мы начнем знакомство с общей топологии. Этот раздел топологии стал неотъемлемой частью общематематического языка. Термин общая топология обозначает топологию, которая используется большинством математиков. Она учит понятно и точно говорить о вещах, связанных с идеей непрерывности. Как область активных научных исследований общая топология практически завершена. Постоянное использование ее в качестве общего математического

языка отполировали систему ее определений и теорем. В наши дни ее изучение напоминает скорее изучение языка, нежели математики: приходится выучивать много новых слов, тогда как доказательства большинства теорем чрезвычайно просты. Зато теорем этих очень много. Это и не удивительно – они играют роль правил, регулирующих употребление слов.

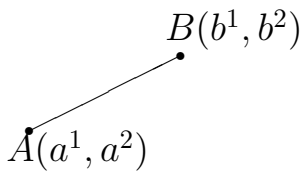
Основными понятиями топологии являются топологическое пространство и непрерывность. Прежде чем перейти к ним, мы познакомимся с более простым понятием метрического пространства (его ввел в 1906 году французский математик М.Фреше) и посмотрим откуда оно возникло.

1. Метрические пространства.

1.1. Понятие метрического пространства.

В курсе аналитической геометрии мы изучали евклидову плоскость π . Ее элементами являются точки. Мы определяли расстояние между точками плоскости как длину отрезка, соединяющего эти точки. Если мы обозначим расстояние между точками A и B через $\rho(A, B)$, а длину отрезка $[AB]$ через AB , то предыдущую фразу мы сможем записать в виде равенства

$$\rho(A, B) = AB. \quad (1.1)$$



Если на плоскости π фиксирована прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$, а значит, для точек определены координаты относительно этой системы координат $A(a^1, a^2)$ и $B(b^1, b^2)$, то расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a^1 - b^1)^2 + (a^2 - b^2)^2}. \quad (1.2)$$

Таким образом, мы получаем отображение $\rho : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$ (оно каждой паре точек плоскости ставит в соответствие неотрицательное вещественное число), определяемое формулой (1.1) (или, что эквивалентно, формулой (1.2)). Для любых точек плоскости это отображение обладает следующими свойствами:

(1) $\rho(A, B) \geq 0$ (расстояние между любой парой точек неотрицательно). При

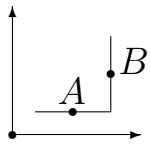
этом $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

(2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ (расстояние между точками A и B совпадает с расстоянием между точками B и A).

(3) $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$ (неравенство треугольника).

Число, которое ставится в соответствие паре точек, называется *расстоянием* между этими точками.

А давайте представим себе другую ситуацию:



букашка, не умеющая ни летать, ни плавать, сидит вблизи одного из углов узкого бортика большого и глубокого бассейна.

Она хочет перебраться из точки A в точку B . Каково расстояние между этими точками для букашки? Перелететь из точки A в точку B она не может, а значит, способ измерения расстояния с помощью прикладывания линейки к этим точкам (как мы это делали в формуле (1.1)) для нее не актуален.

Букашка будет вычислять расстояние так: сколько нужно проползти от точки A до угла бассейна плюс сколько нужно проползти от угла до точки B . Если ввести прямоугольную декартову систему координат, то расстояние между точками $A(a^1, a^2)$ и $B(b^1, b^2)$ с точки зрения букашки будет вычисляться по формуле

$$\tilde{\rho}(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|.$$

Абстрагируясь от этой конкретной ситуации (забывая про бассейн и букашку), мы получаем следующую картину: пусть на плоскости π фиксирована прямоугольная декартова система координат. Тогда определяется отображение $\tilde{\rho} : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$, которое любой паре точек $A(a^1, a^2)$ и $B(b^1, b^2)$ этой плоскости ставит в соответствие (неотрицательное) число, определяемое формулой

$$\tilde{\rho}(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|. \quad (1.3)$$

Это отображение удовлетворяет всем трем свойствам (1) – (3). Хотя числа $\rho(A, B)$ и $\tilde{\rho}(A, B)$, вообще говоря, различны для конкретной пары точек A и B , они имеют одинаковые права называться расстоянием от точки A до

точки B . Но в каждом из этих двух случаев мы должны говорить о том, как мы вычисляли это расстояние, то есть каким отображением ρ или $\tilde{\rho}$ пользовались. Эти отображения называют *метриками* и говорят о *расстоянии, вычисленном относительно той или иной метрики*.

Итак, мы увидели, что расстояния между точками плоскости можно определять различными способами. Идем дальше: понятие расстояния можно ввести не только между точками плоскости (ну и конечно же пространства), но и между другими объектами. Например, в математике используется понятие расстояния между непрерывными на отрезке функциями. Поэтому мы введем следующее определение.

Пусть дано непустое множество X произвольной природы (точки плоскости, функции, апельсины и т.д., нам не важно что) и задано отображение $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой паре элементов из X ставит в соответствие вещественное число. При этом потребуем, чтобы отображение ρ удовлетворяло трем условиям:

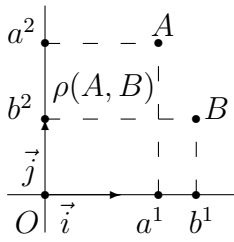
- (1) $\rho(x, y) \geq 0$ (расстояние между любой парой точек неотрицательно). При этом $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (расстояние между точками x и y совпадает с расстоянием между точками y и x).
- (3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника),

где $x, y, z \in X$ – произвольные элементы из X . Отображение ρ называется *метрикой*, число $\rho(x, y)$ – *расстоянием от точки x до точки y* . Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*, элементы множества X называются *точками* метрического пространства (X, ρ) . Если метрика ρ понятна из контекста, мы будем обозначать метрическое пространство просто X .

Приведем еще примеры метрических пространств.

Пример 1.1. Пусть дана плоскость π , прямоугольная декартова система координат на ней и отображение $\rho_1 : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$ задано формулой

$$\rho_1(A, B) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}, \quad (1.4)$$



то есть нужно вычислить модули разностей соответствующих координат точек A и B и взять среди них наибольшее. Непосредственно проверяется, что такое отображение ρ_1 удовлетворяет свойствам (1) – (3). Изобразим полученное расстояние (1.4) на рисунке.

Еще один пример метрики, которую можно задать на любом множестве.

Пример 1.2. Пусть X – непустое множество произвольной природы (например, множество студентов, присутствующих на лекции). Отображение ρ_2 зададим следующим образом: $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$ и $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$. Легко видеть, что все три условия метрического пространства выполняются. Эта метрика называется *тривиальной*.

Замечание 1.1. Введем одну очень удобную договоренность. Мы уже знаем, что означает запись $x \in \mathbb{R}$ – « x принадлежит множеству вещественных чисел (или x является вещественным числом)». Рассмотрим произвольную прямую d в пространстве. Фиксируем на ней точку O и какой-нибудь ненулевой вектор $\vec{i}$, параллельный этой прямой. Тогда каждой точке X этой прямой взаимно однозначно ставится в соответствие вещественное число x , такое, что $\overrightarrow{OX} = x\vec{i}$. Другими словами, мы получаем взаимно однозначное соответствие между точками прямой d и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$. Поэтому будем называть множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ вещественной прямой или, просто, прямой. Проводя рассуждения с прямой, мы будем изображать ее на листе бумаги как обычную прямую, а ее точки воспринимать и как маленькие кружочки на рисунке, и как вещественные числа.

Аналогичным образом, если на плоскости π фиксировать произвольную аффинную систему координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то возникает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости π и множеством упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\overrightarrow{OX} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2, X \rightarrow (x^1, x^2).$$

Множество пар вещественных чисел обозначается так:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x^1, x^2), x^1, x^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Будем называть это множество плоскостью. Так же как и в случае прямой, для плоскости $\mathbb{R}^2$ мы будем использовать для ее точек и визуальное представление в виде маленького кружочка на рисунке, и представление в виде упорядоченной пары двух вещественных чисел.

Отождествляя точки пространства с упорядоченными тройками вещественных чисел

$$\mathbb{R}^3 = \{(x^1, x^2, x^3), x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}\},$$

будем говорить о пространстве $\mathbb{R}^3$.

Здесь логично возникает вопрос: почему бы не рассматривать упорядоченные четверки вещественных чисел, пятерки и т.д.? Действительно, в математике для любого натурального n рассматриваются множества

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n), x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}\},$$

состоящие из упорядоченных наборов n вещественных чисел. Такие множества называются *n -мерными арифметическими пространствами*. В случаях $n = 1, 2, 3$ мы смогли создать себе визуальное представление о таких пространствах. В больших n будем работать с ними как с n -ками чисел без наглядных представлений.

В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ тоже можно ввести метрику.

Пример 1.3. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$. Зададим в этом пространстве метрику $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2} \equiv \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2},$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$. Докажем, что отображение ρ удовлетворяет условиям (1) – (3) из определения метрического пространства. Первые два условия выполняются очевидным образом. Докажем (3). Нам потребуются две леммы.

Лемма 1.1. (*неравенство Коши-Буняковского*) Для любых элементов

$a = (a^1, \dots, a^n)$, $b = (b^1, \dots, b^n)$ из $\mathbb{R}^n$ имеем

$$\left| \sum_{i=1}^n a^i b^i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b^i)^2}.$$

Доказательство. Определим функцию вещественного переменного $F(t)$ следующим образом

$$F(t) = \sum_{i=1}^n (a^i t + b^i)^2 \geq 0.$$

Применим формулу квадрата суммы

$$F(t) = t^2 \sum_{i=1}^n (a^i)^2 + 2t \sum_{i=1}^n a^i b^i + \sum_{i=1}^n (b^i)^2.$$

Если все a^i равны нулю, то неравенство Коши-Буняковского выполняется очевидным образом. Предположим, что $\sum_{i=1}^n (a^i)^2 > 0$. Так как $F(t) \geq 0$ (сумма квадратов), то дискриминант уравнения $F(t) = 0$ должен быть меньше или равен нулю. Так как

$$D = 4 \left(\sum_{i=1}^n a^i b^i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^n (a^i)^2 \sum_{i=1}^n (b^i)^2,$$

то

$$\left(\sum_{i=1}^n a^i b^i \right)^2 - \sum_{i=1}^n (a^i)^2 \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \leq 0.$$

Переносим вторую группу слагаемых в правую часть и извлекая корень, получим требуемое неравенство. $\square$

Лемма 1.2. (неравенство Минковского) Для любых элементов $a = (a^1, \dots, a^n)$, $b = (b^1, \dots, b^n)$ из $\mathbb{R}^n$ имеем

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i + b^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (b^i)^2}.$$

Доказательство. Используя формулу квадрата суммы и неравенство Коши-

Буныковского, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a^i + b^i)^2 &= \sum_{i=1}^n (a^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n a^i b^i + \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (a^i)^2 + 2 \left| \sum_{i=1}^n a^i b^i \right| + \sum_{i=1}^n (b^i)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (a^i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (b^i)^2} + \sum_{i=1}^n (b^i)^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (b^i)^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Извлекая квадратные корни из крайних частей цепочки неравенств, получим неравенство Минковского. $\square$

Теперь мы можем доказать свойство (3). Для $\mathbb{R}^n$ оно принимает вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - z^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z^i - y^i)^2}. \quad (1.5)$$

Это неравенство нам нужно доказать. Для этого возьмем неравенство Минковского

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i + b^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (b^i)^2}.$$

Оно верно для любых чисел a^i и b^i . Положим в нем $a^i = x^i - z^i$, $b^i = z^i - y^i$. В результате получим (1.5).

Итак, пара $(\mathbb{R}^n, \rho)$ является метрическим пространством. Построенная метрика на $\mathbb{R}^n$ называется *канонической*.

В частности, при $n = 1, 2, 3$ мы получаем знакомы нам формулы для вычисления расстояния между точками прямой, плоскости и пространства:

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \rho(x, y) &= |x^1 - y^1|, \quad x = x^1, \quad y = y^1; \\ n = 2 \quad \rho(x, y) &= \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}, \quad x = (x^1, x^2), \quad y = (y^1, y^2); \\ n = 3 \quad \rho(x, y) &= \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}, \\ &\quad x = (x^1, x^2, x^3), \quad y = (y^1, y^2, y^3). \end{aligned}$$

1.2. Подпространства метрических пространств.

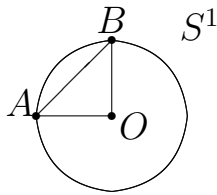
Пусть дано метрическое пространство (X, ρ) . Рассмотрим непустое подмножество $A \subset X$. Тогда отображение $\rho|_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое формулой

$$\rho|_A(x, y) = \rho(x, y), \quad x, y \in A,$$

будет задавать метрику на множестве A . Эту метрику можно представить себе так: берем два элемента из A , вспоминаем, что они лежат в X , и измеряем расстояние между ними с помощью метрики ρ , которая работает в X . Другими словами, эта та же метрика ρ из X , но применяемая только для элементов множества A .

Введенная метрика называется *индуцированной*. Метрическое пространство $(A, \rho|_A)$ называется *метрическим подпространством* метрического пространства (X, ρ) . Итак, расстояние между точками подмножества A – это расстояние между этими же точками в метрическом пространстве X .

Пример 1.4. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Пусть $A = S^1$ – окружность на плоскости.



В индуцированной метрике расстояние между точками окружности A и B – это длина отрезка AB . Мы договорились обозначать ее ρ_{S^1} .

На окружности легко указать и другую метрику $\tilde{\rho}$: расстояние между точками A и B – длина дуги, стягивающей угол $\angle AOB$. Все три условия метрики выполняются здесь очевидным образом. Причем третье условие – неравенство треугольника превращается в равенство.

1.3. Шары и сферы в метрических пространствах.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $x_0 \in X$ – произвольная фиксированная точка, r – положительное вещественное число.

Открытым шаром с центром в точке x_0 радиуса r в метрическом пространстве X называется множество

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}.$$

Замкнутым шаром с центром в точке x_0 радиуса r в метрическом пространстве X называется множество

$$\bar{B}_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

Сферой с центром в точке x_0 радиуса r в X называется множество

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) = r\}.$$

Пример 1.5. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с канонической метрикой. Напомним, что $\mathbb{R}^3$ мы можем рассматривать как евклидово пространство с фиксированной прямоугольной декартовой системой координат, в котором каноническая метрика задается формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2},$$

где (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3) мы можем представлять себе как координаты точек x и y . Тогда множества $B_r(x_0)$, $\bar{B}_r(x_0)$, $S_r(x_0)$ задаются условиями

$$\begin{aligned} (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 &< r^2; \\ (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 &\leq r^2; \\ (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

где $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что такие неравенства и уравнение в пространстве задают открытый шар, замкнутый шар и сферу соответственно. Этот факт объясняет перенос терминов шар и сфера в общую теорию метрических пространств.

Пример 1.6. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Изобразим открытый шар, замкнутый шар и сферу в этом метрическом пространстве. Напомним, что $\mathbb{R}^2$ мы можем рассматривать как плоскость с фиксированной прямоугольной декартовой системой координат, а каноническая метрика задается формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2},$$

где (x^1, x^2) и (y^1, y^2) мы можем представлять себе как координаты точек x и y . Тогда множества $B_r(x_0)$, $\bar{B}_r(x_0)$, $S_r(x_0)$ задаются условиями

$$\begin{aligned} (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 &< r^2; \\ (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 &\leq r^2; \\ (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

где $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ – центр открытого шара (замкнутого шара, сферы). Из курса аналитической геометрии мы знаем, что такие неравенства и уравнение на плоскости задают открытый круг, замкнутый круг и окружность соответственно. Таким образом, на плоскости открытый шар – это открытый круг, замкнутый шар – замкнутый круг, сфера – окружность. На плоскости эти термины употребляются как синонимы.

1.4. Задачи

1. Будет ли плоскость метрическим пространством, если в формуле (1.4) заменить максимум на минимум? Ответ обосновать.
2. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано отображение $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\rho(A, B) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|, |a^3 - b^3|\},$$

где $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$. Изобразите на рисунке расстояние между точками A и B для метрики ρ .

3. Найдите множество точек, являющихся шарами и сферой в метрическом пространстве с метрикой из примера 1.2.
4. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $B_r(x)$ и $B_R(x)$ – два открытых шара с общим центром. Докажите, что если $r = R$, то $B_r(x) = B_R(x)$. Докажите, что обратное, вообще говоря, не верно. Докажите, что если $r < R$, то $B_r(x) \subset B_R(x)$. Другими словами, из двух открытых шаров с общим центром шар меньшего радиуса лежит внутри шара большего радиуса. Заметим, что для шаров с различными центрами это утверждение вообще говоря не верно (см. задачу 10).

Решение. Докажем первое утверждение. Пусть $r = R$. Тогда определения шаров $B_r(x)$ и $B_R(x)$ выглядят одинаково, а значит, $B_r(x) = B_R(x)$. В качестве контрпримера для обратного утверждения рассмотрим произвольное метрическое пространство с тривиальной метрикой. Так как для любых различных точек такого пространства расстояние равно 1, то все открытые шары радиуса меньше 1, будут состоять из одной точки. Тогда

фиксируем какую-либо точку x пространства. Шары с центром в точке x радиусов $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ будут состоять из одной точки x , то есть совпадать, хотя они и имеют различные радиусы.

Докажем второе утверждение. Пусть $y \in B_r(x)$ – произвольная точка. Тогда по определению открытого шара имеем

$$\rho(x, y) < r < R,$$

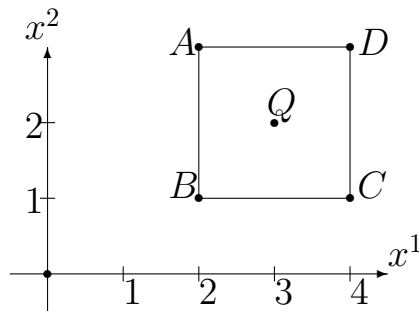
то есть $y \in B_R(x)$ по определению. $\square$

5. Изобразите шары и сферу на прямой $\mathbb{R}$ с канонической метрикой. Каковы их традиционные названия?
6. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика ρ по формуле

$$\rho(A, B) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\},$$

где $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$. Изобразите шары и сферу в этом метрическом пространстве с центром в точке $Q(3, 2)$ радиуса 1.

Решение. Начнем с изображения сферы $S_1(Q)$.



Из определения сферы следует, что $S_1(Q)$ – это множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии 1 от точки Q , то есть нужно найти все точки $X(x^1, x^2)$ плоскости, такие что для них выполняется

$$\rho(X, Q) = \max\{|x^1 - 3|, |x^2 - 2|\} = 1.$$

Это равенство выполняется в одном из трех следующих случаев:

- 1) $|x^1 - 3| = 1, |x^2 - 2| < 1$;
- 2) $|x^1 - 3| < 1, |x^2 - 2| = 1$;
- 3) $|x^1 - 3| = 1, |x^2 - 2| = 1$.

Изобразим множество точек в каждом из перечисленных случаев.

- 1) Раскрываем модуль в равенстве: $x^1 - 3 = \pm 1$, то есть $x^1 = 4$ или $x^1 = 2$.
Раскрываем модуль в неравенстве: $-1 < x^2 - 2 < 1$, то есть $1 < x^2 < 3$.

В результате здесь мы получаем два интервала AB и CD (см. рисунок). На интервале AB у всех точек первая координата x^1 равна 2, а вторая x^2 меняется от 1 до 3. Аналогично получается второй интервал CD .

2) Аналогично пункту 1) получаем интервалы AD и BC .

3) Здесь мы раскрываем модуль в двух равенствах и получаем четыре точки A, B, C, D .

Итак, в рассматриваемом метрическом пространстве сферой $S_1(Q)$ является квадрат $ABCD$.

Рассмотрим открытый шар $B_1(Q)$. По определению открытого шара мы получаем, что точка $X(x^1, x^2)$ будет принадлежать ему тогда и только тогда, когда

$$\rho(X, Q) = \max\{|x^1 - 3|, |x^2 - 2|\} < 1. \quad (1.6)$$

Если максимальным является число $|x^1 - 3|$, то согласно (1.6) оно должно быть меньше 1. Тогда число $|x^2 - 2|$, которое будет в этом случае меньше $|x^1 - 3|$ тем более должно быть меньше 1. В результате получаем, что в этом случае неравенство (1.6) равносильно выполнению двух неравенств $|x^1 - 3| < 1$ и $|x^2 - 2| < 1$.

Точно такие же неравенства мы получаем в случаях, когда максимальным является число $|x^2 - 2|$ и когда оба числа равны.

Таким образом, открытый шар $B_1(Q)$ задается системой двух неравенств

$$\begin{cases} |x^1 - 3| < 1 \\ |x^2 - 2| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^1 - 3 < 1 \\ -1 < x^2 - 2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x^1 < 4 \\ 1 < x^2 < 3. \end{cases}$$

Это множество точек представляет собой множество внутренних точек квадрата $ABCD$.

Наконец, замкнутый шар $\bar{B}_1(Q)$ – это множество точек, для которых выполняется неравенство

$$\rho(X, Q) = \max\{|x^1 - 3|, |x^2 - 2|\} \leq 1.$$

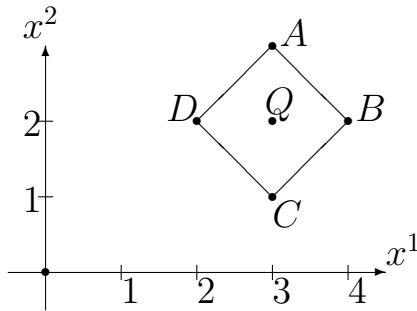
Он представляет из себя квадрат $ABCD$ с внутренними точками. $\square$

7. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана метрика ρ по формуле

$$\rho(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|,$$

где $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$. Изобразите шары и сферу с центром в точке $Q(3, 2)$ радиуса 1 в этом метрическом пространстве.

Решение. Начнем с изображения сферы $S_1(Q)$.



Из определения сферы следует, что $S_1(Q)$ – это множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии 1 от точки Q , то есть нужно найти все точки $X(x^1, x^2)$ плоскости, такие, что для них выполняется

$$\rho(X, Q) = |x^1 - 3| + |x^2 - 2| = 1.$$

Раскроем модули в полученном равенстве.

Мы получим 4 случая:

1) $x^1 - 3 \geq 0$, $x^2 - 2 \geq 0$. В этом случае оба модуля раскрываются со знаком плюс: $x^1 + x^2 - 6 = 0$. Это уравнение прямой. Построим эту прямую. Для этого возьмем две ее точки $A(3, 3)$ и $B(4, 2)$ (их координаты удовлетворяют уравнению прямой). Вспоминаем, что в рассматриваемом случае нам нужны те точки прямой, для которых выполняются неравенства $x^1 \geq 3$ и $x^2 \geq 2$. В результате получаем отрезок AB .

2) $x^1 - 3 \leq 0$, $x^2 - 2 \geq 0$. Первый модуль раскрывается с минусом, а второй с плюсом: $x^1 - x^2 = 0$. Строим прямую по точкам $A(3, 3)$, $D(2, 2)$. Так как $x^1 \leq 3$ и $x^2 \geq 2$ нам требуется только отрезок AD этой прямой.

3), 4) случаи рассмотрите самостоятельно.

В результате мы получаем, что искомой сферой является квадрат $ABCD$.

□

8. Изобразите шары и сферу в метрическом пространстве (S^1, ρ_{S^1}) и $(S^1, \tilde{\rho})$ (обозначения из примера 1.4).

9. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что для любых точек $x, a \in X$ и любого числа $r > \rho(x, a)$ имеют место включения

$$B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a); \quad \bar{B}_{r-\rho(x,a)}(x) \subset \bar{B}_r(a).$$

Нарисуйте указанные шары в случае плоскости.

10. Найдите такое метрическое пространство и два таких шара в нем, чтобы шар большего радиуса содержался в шаре меньшего радиуса.

Указания. В качестве метрического пространства рассмотрите интервал $(-1, 1)$ прямой $\mathbb{R}^1$ с индуцированной метрикой.

1.5. Дополнительные задачи

1. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (обычная функция из математического анализа) удовлетворяет условиям

- $f(0) = 0$;
- f монотонно возрастает;
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Докажите, что для метрического пространства (X, ρ) пространство $(X, \tilde{\rho})$, где $\tilde{\rho}(x, y) = f(\rho(x, y))$ также будет метрическим пространством.

2. Используя предыдущую задачу, докажите, что если (X, ρ) является метрическим пространством, то также метрическим пространством является пара $(X, \tilde{\rho})$, где $\tilde{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$.
3. Пусть дана плоскость $(\mathbb{R}^2, \rho)$ с канонической метрикой. Опишите окружности и круги в метрике задачи 2.
4. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дана тривиальная метрика. Найдите множество точек, равноудаленных от двух данных различных точек.
5. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дана метрика $\rho(x, y) = |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|$. Найдите множество точек, равноудаленных от а) точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$, б) точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

6. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дана метрика $\rho(x, y) = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$.
Найдите множество точек, равноудаленных от а) точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$, б) точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

2. Непрерывные отображения метрических пространств.

2.1. Обобщение понятия непрерывности функции из анализа.

Напомним, что в курсе математического анализа мы познакомились с понятием непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ (в математическом анализе функция одной переменной – это отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Определение непрерывности давалось на языке $\varepsilon - \delta$: Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для всех x , таких, что $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке из своей области определения.

Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ – это арифметическое пространство $\mathbb{R}^1$ из примера 1.3. При этом каноническая метрика на $\mathbb{R}^1$ имеет вид

$$\rho(x, x_0) = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0|.$$

Тогда определение непрерывности функции в точке x_0 можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Теперь все готово, чтобы перенести это определение на произвольные метрические пространства. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ будем называть *непрерывным в точке $x_0 \in X$* , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Отображение $f : X \rightarrow Y$ будем называть *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке из X .

Определение непрерывности отображения в точке можно сформулировать в терминах открытых шаров. Это поможет нам в дальнейшем перенести определение непрерывности отображения на топологические пространства.

Теорема 2.1. *Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)). \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке x_0 . Покажем, что условие (2.1) выполняется. Другими словами, для любого шара $B_\varepsilon(f(x_0))$ мы должны предъявить шар $B_\delta(x_0)$, такой, что его образ $f(B_\delta(x_0))$ при отображении f содержится в шаре $B_\varepsilon(f(x_0))$.

Рассмотрим произвольный открытый шар $B_\varepsilon(f(x_0))$ с центром в точке $f(x_0)$ радиуса ε . По определению непрерывности отображения f в точке x_0 для выбранного положительного числа ε существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\forall x \in X : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Множество точек $x : \rho_X(x, x_0) < \delta$ – это по определению открытый шар с центром в точке x_0 радиуса δ , то есть $B_\delta(x_0)$. Тем самым мы показали, что шар $B_\delta(x_0)$ существует (предъявили его). Нам осталось показать, что

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Нам нужно доказать включение одного множества в другое, то есть $A \subset B$. Напомним, что для этого нужно взять произвольный элемент $a \in A$ и показать, что он принадлежит множеству B . Приступим к этому доказательству в нашем случае.

Пусть $y \in f(B_\delta(x_0))$ – произвольная точка, то есть $y = f(x)$, где $x \in B_\delta(x_0)$, то есть удовлетворяет неравенству $\rho_X(x, x_0) < \delta$. Тогда из определения непрерывности следует, что для таких x имеем $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, то есть $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$. Таким образом, выполняется условие (2.1).

Обратно, пусть выполнено условие (2.1). Нам нужно доказать, что отображение f будет непрерывным в точке x_0 , то есть проверить выполнение определения. Другими словами, для любого положительного числа ε мы должны предъявить положительное число δ , такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho_X(x, x_0) < \delta$, их образы $f(x)$ удовлетворяют условию $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Это число однозначно определяет открытый шар $B_\varepsilon(f(x_0))$. Согласно условию (2.1) существует открытый шар $B_\delta(x_0)$, а значит, и число $\delta > 0$. Другими словами, это множество можно охарактеризовать как множество точек $x : \rho_X(x, x_0) < \delta$. По условию (2.1) образы таких точек x , то есть $f(x)$, принадлежат открытому шару $B_\varepsilon(f(x_0))$. Другими словами, для них выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Собираем все вместе

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Это определение непрерывного отображения в точке x_0 . □

Замечание 2.1. Доказанная теорема является критерием непрерывного отображения в точке x_0 . Как мы знаем, критерий и определение можно поменять местами, то есть построить теорию по-другому: критерий сделать определением, а прежнее определение доказать, как теорему. Другими словами, оно станет критерием. Исходя из этого будем называть доказанный критерий непрерывного отображения *альтернативным определением непрерывного отображения в терминах открытых шаров*.

Пример 2.1. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – это плоскость $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Фиксируем на плоскости точку O и фиксируем ненулевое число m . Зададим отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ следующим образом: каждой точке M плоскости поставим в соответствие точку M' , такую что

$$\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}.$$

Напомним, что вектор – это класс эквивалентных направленных отрезков трехмерного евклидова пространства (как их ввели на первом курсе). Сейчас мы рассматриваем только те из векторов, которые параллельны плоскости $\mathbb{R}^2$.

Как мы помним, отображение f называется гомотетией. Проверим, является ли гомотетия непрерывным отображением, используя условие (2.1). Напомним, что в канонической метрике на плоскости открытые шары – это открытые круги.

Пусть M – произвольная фиксированная точка плоскости, $M' = f(M)$ – ее образ. Рассмотрим открытый круг $B_\varepsilon(M')$ с центром в точке M' произвольного радиуса $\varepsilon > 0$. Пусть $B_\delta(M)$ – открытый круг с центром в точке M радиуса $\delta = \frac{\varepsilon}{2|m|}$. Тогда по свойству гомотетии круг $B_\delta(M)$ перейдет в круг с центром в точке M' радиуса $|m| \cdot \frac{\varepsilon}{2|m|} = \frac{\varepsilon}{2}$, а значит, $f(B_\delta(M)) \subset B_\varepsilon(M')$. Собираем все вместе:

$$\forall B_\varepsilon(M') \exists B_{\frac{\varepsilon}{2|m|}}(M) : f(B_{\frac{\varepsilon}{2|m|}}(M)) \subset B_\varepsilon(M').$$

Это означает, что отображение f непрерывно в каждой точке.

Пример 2.2. Рассмотрим в качестве метрического пространства X плоскость $\mathbb{R}^2$ с тривиальной метрикой ρ , а в качестве пространства Y плоскость $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Выясним, является ли гомотетия $f : X \rightarrow Y$ непрерывным отображением.

Пусть M – произвольная точка и $M' = f(M)$. Возьмем произвольный открытый круг $B_\varepsilon(M')$. Попробуем подобрать открытый круг $B_\delta(M)$ так, чтобы его образ лежал внутри круга $B_\varepsilon(M')$. Возьмем $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда $B_\delta(M) = \{N \in \mathbb{R}^2 : \rho(M, N) < \frac{1}{2}\}$. Получаем, что $B_\delta(M) = \{M\}$. Тогда, очевидно, $f(B_\delta(M)) \subset B_\varepsilon(M')$. Опять получаем выполнение условия (2.1) и непрерывность отображения f .

Поменяем местами метрики, то есть пространство $X = \mathbb{R}^2$ будем рассматривать с канонической метрикой, а пространство $Y = \mathbb{R}^2$ с метрикой ρ . Оказывается, что в этом случае гомотетия не будет являться непрерывным отображением ни в одной точке из $\mathbb{R}^2$. Фиксируем произвольную точку $M \in \mathbb{R}^2$ и обозначим $M' = f(M)$. Мы должны предъявить открытый круг $B_\varepsilon(M')$, для которого не найдется открытого круга $B_\delta(M)$, такого, что $f(B_\delta(M)) \subset B_\varepsilon(M')$. Рассмотрим круг $B_{\frac{1}{2}}(M')$. Как мы видели выше в метрике ρ этот круг состоит из одной точки M' . Так как любой открытый круг $B_\delta(M)$ в канонической метрике кроме точки M содержит другие точки из $\mathbb{R}^2$, отобразить все эти точки в точку M' мы не сможем (нарушится условие биективности гомотетии, а именно инъективность). Таким образом, мы получили, что условие (2.1) не выполняется, а значит, отображение f не является

непрерывным.

Замечание 2.2. Последний пример показывает, что понятие непрерывности отображения тесно связано с метрикой введенной на множестве. Отображения для одних и тех же множеств для одних метрик может быть непрерывным, а для других – нет.

Пусть теперь даны три метрических пространства (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) , (Z, ρ_Z) . Рассмотрим два отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Для упрощения рассуждений предположим, что f отображает пространство X на все пространство Y . Тогда определено отображение $g \circ f : X \rightarrow Z$. (Это композиция отображений: точка $x \in X$ под действием f переходит в точку $y = f(x)$, а затем отображение g переводит точку y в точку $z = g(y) \in Z$. Точка z является образом точки x при отображении $g \circ f$.) Пусть отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$, а отображение g непрерывно в точке $y_0 = f(x_0)$. Возникает вопрос: будет ли композиция $g \circ f$ непрерывным отображением в точке x_0 ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) , (Z, ρ_Z) – произвольные метрические пространства. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке x_0 и отображение $g : Y \rightarrow Z$ непрерывно в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f : X \rightarrow Z$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Проведем доказательство, используя теорему 2.1, то есть будем вести рассуждения о непрерывности отображений в терминах открытых шаров. Нам нужно доказать, что отображение $g \circ f$ непрерывно в точке x_0 , то есть

$$\forall B_\varepsilon(g \circ f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : g \circ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(g \circ f(x_0)). \quad (2.2)$$

Возьмем произвольный шар

$$B_\varepsilon(g \circ f(x_0)) \equiv B_\varepsilon(g(f(x_0))) \equiv B_\varepsilon(g(y_0))$$

(разные обозначения для одного и того же шара). Так как отображение g непрерывно в точке y_0 (смотрим на последнее обозначения шара и применяем определение непрерывного отображения в терминах открытых шаров) для

отображения g : существует открытый шар $B_\eta(y_0)$, такой, что $g(B_\eta(y_0)) \subset B_\varepsilon(g(y_0))$. Посмотрим на шар $B_\eta(y_0) \equiv B_\eta(f(x_0))$. Так как отображение f непрерывно в точке x_0 , существует шар $B_\delta(x_0)$, такой что $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\eta(y_0)$. Смотрим на полученные включения

$$g(B_\eta(y_0)) \subset B_\varepsilon(g(y_0)); \quad f(B_\delta(x_0)) \subset B_\eta(y_0)$$

и сравниваем с тем, что нужно (2.2). Мы видим, что во втором включении слева не хватает отображения g . Действуем этим отображением на обе части (включение при этом сохраняется):

$$g \circ f(B_\delta(x_0)) \subset g(B_\eta(y_0))$$

и пользуемся первым включением:

$$g \circ f(B_\delta(x_0)) \subset g(B_\eta(y_0)) \subset B_\varepsilon(g(y_0)) \equiv B_\varepsilon(g \circ f(x_0)).$$

Что и требовалось доказать. □

2.2. Гомеоморфизмы в метрических пространствах.

Пусть даны метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) .

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если f – биекция, f и f^{-1} – непрерывны.

Метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$.

Теорема 2.3. *Отношение гомеоморфности метрических пространств является отношением эквивалентности, то есть рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. 1. Рефлексивность. Нам нужно доказать, что каждое метрическое пространство (X, ρ) гомеоморфно самому себе. В качестве гомеоморфизма можно взять тождественное преобразование id пространства X (см. задачу 1).

2. Симметричность. Нам нужно доказать, что если метрическое пространство (X, ρ_X) гомеоморфно метрическому пространству (Y, ρ_Y) , то метрическое пространство (Y, ρ_Y) гомеоморфно метрическому пространству (X, ρ_X) .

Так как (X, ρ_X) гомеоморфно (Y, ρ_Y) , то существует гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$. Обратное к нему отображение f^{-1} также будет гомеоморфизмом вида $Y \rightarrow X$, то есть будут гомеоморфны пространства (Y, ρ_Y) и (X, ρ_X) .

3. Транзитивность. Нужно доказать: если (X, ρ_X) гомеоморфно (Y, ρ_Y) и (Y, ρ_Y) гомеоморфно (Z, ρ_Z) , то (X, ρ_X) гомеоморфно (Z, ρ_Z) .

Получаем два гомеоморфизма $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Тогда $g \circ f : X \rightarrow Z$ биекция как композиция таковых и по теореме 2.2 $g \circ f$ непрерывно и $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ непрерывно. $\square$

2.3. Открытые множества в метрических пространствах.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется *открытым в метрическом пространстве (X, ρ)* , если оно с каждой своей точкой содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке.

Замечание 2.3. Из определения следует, что любое открытое множество можно представить как объединение некоторой совокупности (не обязательно конечной) открытых шаров.

Теорема 2.4. *Открытые шары в метрическом пространстве (X, ρ) являются открытыми множествами.*

Доказательство. Пусть $B_r(x)$ – произвольный открытый шар в метрическом пространстве (X, ρ) . Нам нужно доказать, что он является открытым множеством. Для открытого множества у нас пока есть только определение. Поэтому нам нужно будет показать, что открытый шар удовлетворяет определению открытого множества. Другими словами, нам нужно показать, что каждую точку шара $B_r(x)$ можно окружить «маленьким» шаром, целиком лежащим в нем.

Возьмем произвольную точку $y \in B_r(x)$ и зафиксируем ее. Для нее нужно предъявить «маленький» шар. Его центр уже есть – это точка y . Значит, нужно найти подходящий радиус. Заметим, что по определению открытого шара для точки y имеем

$$\rho(x, y) < r \Leftrightarrow r - \rho(x, y) > 0.$$

Мы получили положительное число. Следовательно, существует открытый шар такого радиуса. Скорее всего именно этот шар нам и нужен, но это нужно доказать. Другими словами, мы должны доказать, что

$$B_{r-\rho(x,y)}(y) \subset B_r(x).$$

Это включение одного множества в другое. Нужно взять любую точку первого множества и показать, что она принадлежит второму множеству.

Пусть $z \in B_{r-\rho(x,y)}(y)$ – произвольная точка. По определению открытого шара это означает, что

$$\rho(y, z) < r - \rho(x, y) \Leftrightarrow \rho(y, z) + \rho(x, y) < r \Leftrightarrow \rho(x, z) < \rho(y, z) + \rho(x, y) < r$$

(слева применили правило треугольника из определения метрического пространства). Смотрим на крайние части последней цепочки неравенств:

$\rho(x, z) < r$. Это в точности означает, что точка z принадлежит открытому шару с центром в точке x и радиусом r , то есть шару $B_r(x)$. Что и требовалось доказать.

Итак, для каждой точки $y \in B_r(x)$ исходного открытого шара мы предъявили открытый шар $B_{r-\rho(x,y)}(y)$ с центром в этой точке, целиком включенный в шар $B_r(x)$. По определению это означает, что открытый шар $B_r(x)$ является открытым множеством. $\square$

Теорема 2.5. *Открытые множества метрического пространства (X, ρ) обладают следующими свойствами:*

- (1) *Пустое множество и X являются открытыми;*
- (2) *Объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством;*
- (3) *Пересечение любых двух открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. (1) Так как пустое множество не содержит ни одной точки (окружать открытым шаром нечего), оно будет открытым по определению.

Само пространство X открыто, так как для любой точки $x \in X$ любой открытый шар с центром в этой точке принадлежит X (других точек, кроме точек множества X , у нас нет!).

(2) Пусть $\{U_\alpha\}$, где $\alpha \in A$ (A – это некоторое множество нумерующее открытые множества. Оно не обязательно конечно, счетно и т.д. Оно произвольно.) Нам нужно доказать, что $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ будет открытым множеством. Пользуемся определением открытого множества: нам нужно показать, что любую точку множества $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ можно окружить открытым шаром, целиком лежащим в этом множестве.

Рассмотрим произвольную точку $x \in \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тогда существует такой элемент $\beta \in A$, что $x \in U_\beta$ (точка x попадает хотя бы в одно множество из объединения, его мы и берем; если их оказалось больше одного, то берем какое-нибудь одно из них). Так как множество U_β открыто, существует открытый шар $B_\varepsilon(x) \subset U_\beta$. Так как $U_\beta \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, получим

$$B_\varepsilon(x) \subset U_\beta \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

то есть множество $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ открыто по определению.

(3) Пусть U_1 и U_2 – открытые множества. Нам нужно доказать, что их пересечение $U_1 \cap U_2$ открыто. Если $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, то оно открыто по пункту (1). В противном случае (оно не пусто) там есть хотя бы одна точка. Пусть $x \in U_1 \cap U_2$ – произвольная точка из пересечения. Тогда $x \in U_1$ и $x \in U_2$. Так как множества U_1 и U_2 открыты, существуют открытые шары $B_\varepsilon(x)$ и $B_\delta(x)$, содержащиеся соответственно в U_1 и U_2 . Согласно задаче из § 1. шары $B_\varepsilon(x)$ и $B_\delta(x)$ либо совпадают ($\varepsilon = \delta$), либо шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса. Если шары совпадают, то любой из них принадлежит пересечению $U_1 \cap U_2$, а значит, это множество открыто по определению. Если они не совпадают, то пусть для определенности шар $B_\varepsilon(x)$ имеет меньший радиус. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x) \subset U_2$. Таким образом, шар $B_\varepsilon(x)$ принадлежит и множеству U_1 и множеству U_2 , то есть принадлежит их пересечению. В результате получаем, что пересечение $U_1 \cap U_2$ вместе с каждой своей точкой содержит открытый шар с центром в этой точке, то есть является открытым. $\square$

Определение непрерывности отображения $f : X \rightarrow Y$ метрических пространств в каждой точке из X мы можем сформулировать в терминах открытых множеств (это уже третий способ говорить о непрерывных отображениях: первый – на языке $\varepsilon - \delta$, второй – на языке открытых шаров). Для этого нам потребуется еще одно понятие.

Пусть X и Y – произвольные множества (как там измеряются расстояния и измеряются ли они вообще – нас сейчас не волнует), $f : X \rightarrow Y$ – отображение множества X во множество Y . Множество

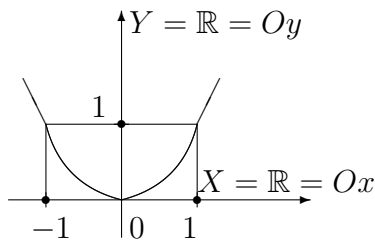
$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

называется *полным прообразом* точки $y \in Y$. Другими словами, полный прообраз точки $y \in Y$ – это множество всех элементов $x \in X$, которые отображаются в y при отображении f . *Полным прообразом множества $V \subset Y$* называется множество

$$f^{-1}(V) = \cup_{y \in V} f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) \in V\}.$$

Другими словами, полный прообраз подмножества $V \subset Y$ – это объединение полных прообразов всех точек $y \in V$.

Пример 2.3. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $y = x^2$ (игрек равно икс в квадрате).



Здесь множество X – это ось Ox , а множество Y – ось Oy . Каждой точке на оси Ox ставится в соответствие его квадрат, находящийся на оси Oy . Возьмем точку $1 \in Oy = Y$ и найдем ее полный прообраз. Задаемся вопросом: какие точки оси $Ox = X$ отображаются в точку 1?

Очевидно, что это точки 1 и -1 . Таким образом, полный прообраз точки $1 \in Oy = Y$ – это множество, состоящее из точек 1 и -1 . Запишется это так:

$$f^{-1}(1) = \{1, -1\}.$$

Рассуждая аналогично, мы видим, что полным прообразом точки $-1 \in Oy =$

Y является пустое множество, так как ни одна точка с оси Ox не отображается в точку -1 (ни одно вещественное число в квадрате не даст -1).

Докажите самостоятельно, что полный прообраз отрезка $[0, 1] \subset Oy = Y$ является отрезок $[-1, 1]$. Найдите полный прообраз луча $(0, +\infty)$.

Используя введенное понятие полного прообраза точки, мы можем сформулировать еще один критерий непрерывного отображения для метрических пространств.

Теорема 2.6. Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ будет непрерывно в каждой точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X .

Доказательство. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. По определению это означает, что отображение f непрерывно в каждой точке. Рассмотрим произвольное открытое подмножество $V \subset Y$ и обозначим через U его полный прообраз, то есть

$$U = f^{-1}(V) \subset X.$$

Нам надо доказать, что U является открытым множеством в метрическом пространстве X , то есть что любую его точку можно окружить открытым шаром, целиком лежащим в этом множестве U .

Пусть $x \in U$ – произвольная точка. Тогда $f(x) \in V$ (определение полного прообраза). Так как V открыто, существует шар $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. По критерию непрерывного отображения в точке (2.1) существует открытый шар $B_\delta(x)$, такой что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. По определению полного прообраза получаем, что $B_\delta(x) \subset U$. Таким образом, множество U с каждой своей точкой содержит открытый шар с центром в этой точке, а значит, открыто по определению. В результате получаем, что для любого открытого множества $V \subset Y$ его полный прообраз U открыт в X .

Обратно, пусть дано, что полный прообраз $U = f^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \subset Y$ открыт в X . Нам нужно доказать, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Фиксируем произвольную точку $x \in X$ и рассмотрим произвольный открытый шар $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ с центром в точке $f(x)$. Так как открытый шар $B_\varepsilon(f(x))$ является открытым множеством (см. теорема 2.4), по условию полный его прообраз $U = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ будет открытым множеством в X , причем $x \in U$. Тогда существует шар $B_\delta(x) \subset U = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Тогда по определению полного прообраза получим, что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Собираем все вместе: для любого открытого шара $B_\varepsilon(f(x))$ существует открытый шар $B_\delta(x)$, такой что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Это в точности условие (2.1), а значит, отображение f непрерывно в точке x . Так как точка x выбиралась произвольной, отображение f непрерывно по определению. $\square$

Замечание 2.4. Последняя теорема дает критерий непрерывности отображения метрических пространств, явным образом не используя понятия метрики. Это поможет нам перенести понятие непрерывности на более общий класс топологических пространств.

2.4. Задачи.

1. Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Докажите, что тождественное отображение $id : X \rightarrow X$ является непрерывным. Напомним, что тождественное отображение задается формулой $id(x) = x$ для любого $x \in X$.
2. Докажите, что параллельный перенос на плоскости $\mathbb{R}^2$ с канонической метрикой является непрерывным отображением.
3. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с метрикой ρ , заданной формулой

$$\rho(X, Y) = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}, \quad (2.3)$$

где $X(x^1, x^2)$, $Y(y^1, y^2)$. Будет ли параллельный перенос на $\mathbb{R}^2$ с такой метрикой непрерывным отображением?

4. Рассмотрим два метрических пространства: $X = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой и $Y = \mathbb{R}^2$ с метрикой (2.3). Будет ли параллельный перенос $f : X \rightarrow Y$ непрерывным отображением?

5. Рассмотрим два метрических пространства: $X = \mathbb{R}^2$ с тривиальной метрикой ρ и пространство $Y = \mathbb{R}^2$ с канонической метрикой. Будет ли параллельный перенос непрерывным отображением?
6. Какие отображения из задач 1, 2, 3, 4, 5 являются гомеоморфизмами?
7. Пусть на прямой $\mathbb{R}$ задана 1) каноническая метрика, 2) тривиальная метрика. Будет ли промежуток $A = [1, 2)$ прямой $\mathbb{R}$ открытым множеством в каждом из двух метрических пространств? Ответ обосновать.

Решение. 1) Пусть на $\mathbb{R}$ задана каноническая метрика. В общем случае n -мерного арифметического пространства эта метрика задается формулой $\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$.

Так как $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, получим при $n = 1$ формула принимает вид

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Выясним, как выглядит открытый шар в метрике ρ . По определению имеем

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Решаем неравенство с модулем $|x - x_0| < r$. Получим $-r < x - x_0 < r$ или $x_0 - r < x < x_0 + r$. Мы видим, что открытый шар на прямой $\mathbb{R}$ — это интервал $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Теперь все готово, чтобы исследовать промежуток $A = [1, 2)$ на открытость. Пусть x — любая точка интервала $(1, 2)$. Для нее мы можем построить открытый шар с центром в этой точке целиком лежащий в множестве A . Он строится так. Возьмем из чисел $x - 1$ и $2 - x$ меньшее (если равны, то любое из них). Допустим, что это $x - 1$. Тогда в качестве r возьмем число $\frac{x-1}{2}$. Очевидно, что интервал $(x - \frac{x-1}{2}, x + \frac{x-1}{2})$ содержится в множестве A . Рассмотрим теперь точку 1. Любой интервал вида $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ (то есть любой открытый шар с центром в точке 1) не может содержаться в множестве A , то есть для точки 1 нарушаются требования определения

открытого множества. Следовательно, в канонической метрике промежутков $A = [1, 2)$ не является открытым множеством.

2) Пусть на $\mathbb{R}$ задана тривиальная метрика (то есть между совпавшими точками расстояние кладем равным 0, а между различными – 1). Открытые шары $B_r(x_0)$ в этом метрическом пространстве выглядят следующим образом: а) если $r \leq 1$, то это точка x_0 , б) если $r > 1$, то это все множество точек $\mathbb{R}$ (почему?).

Переходим к множеству A . Рассмотрим любую точку $x \in A$. Тогда для нее возьмем открытый шар $B_{\frac{1}{2}}(x)$. Это будет сама точка x . Она принадлежит множеству A . Таким образом, для каждой точки множества A существует открытый шар с центром в этой точке, содержащийся в множестве A . Следовательно, A является открытым множеством. $\square$

8. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дан отрезок. Будет ли этот отрезок открытым множеством, если на $\mathbb{R}^2$ задана 1) каноническая метрика, 2) тривиальная метрика, 3) метрика $\rho(A, B) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$, 4) метрика $\rho(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$? Ответ обосновать.
9. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ множество A представляет собой часть плоскости, ограниченную сторонами некоторого треугольника (точки сторон треугольника не входят в множество A). Будет ли множество A открытым множеством, если на $\mathbb{R}^2$ задана 1) каноническая метрика, 2) тривиальная метрика, 3) метрика $\rho(A, B) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$, 4) метрика $\rho(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$? Ответ обосновать.
10. Будем называть множество A метрического пространства (X, ρ) *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ является открытым множеством. Являются ли множества из задач 8 и 9 замкнутыми множествами? Ответ обосновать.

2.5. Дополнительные задачи

1. Верно ли, что для гомеоморфных метрических пространств существует единственный гомеоморфизм?

2. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *изометрическим вложением*, если $\rho_Y(f(a), f(b)) = \rho_X(a, b)$ для любых $a, b \in X$. Биекция, являющаяся изометрическим вложением, называется *изометрией*. Докажите, что изометрическое вложение непрерывно. Докажите, что изометрия является гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть $a \in X$ – произвольная точка. Рассмотрим точку $f(a)$ и произвольный открытый шар $B_\varepsilon(f(a))$ с центром в точке $f(a)$. Пусть $B_\varepsilon(a)$ – открытый шар того же радиуса ε с центром в точке a , то есть

$$B_\varepsilon(a) = \{b \in X : \rho_X(a, b) < \varepsilon\}.$$

Так как f – изометрическое вложение, получим

$$f(B_\varepsilon(a)) = \{f(b) \in Y : \rho_Y(f(a), f(b)) = \rho_X(a, b) < \varepsilon\},$$

то есть $f(B_\varepsilon(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ (и даже совпадать с ним, что не возбраняется. Если очень хочется избавиться от совпадения, получить шар с центром в a , лежащий внутри шара с центром в $f(a)$, то нужно взять $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$). Таким образом, изометрическое вложение f является непрерывным отображением в каждой точке $a \in X$, то есть является непрерывным отображением.

Для доказательства второго утверждения заметим, что f^{-1} также является изометрией, а значит непрерывно. $\square$

3. Отображение $f : X \rightarrow X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим*, если существует такое число $\alpha \in (0, 1)$, что

$$\rho(f(a), f(b)) \leq \alpha \rho(a, b)$$

для любых $a, b \in X$. Докажите, что сжимающее отображение непрерывно.

4. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *гёльдеровым*, если найдутся такие числа $C > 0$ и

$\alpha > 0$, что $\rho_Y(f(a), f(b)) \leq C\rho_X(a, b)^\alpha$ для любых $a, b \in X$. Докажите, что гёльдерово отображение непрерывно.

3. Топологические пространства и непрерывные отображения.

3.1. Топологические пространства. База топологии.

В предыдущем параграфе мы ввели в метрическом пространстве понятие открытого множества и получили их три основных свойства. Открытые множества в метрическом пространстве мы получали с помощью метрики и с их помощью сформулировали критерий непрерывности отображения. А если на множестве X нет метрики, а понятие непрерывности ввести на нем нужно? Поступим следующим образом: мы перечислим все подмножества, которые будут удовлетворять свойствам (1) – (3) из теоремы 2.5, и с их помощью введем понятие непрерывности как в теореме 2.6. Тем самым мы сможем расширить класс пространств (кроме метрических в него будут входить и другие пространства) и оставить в этом классе понятие непрерывности. Теперь перейдем к строгим формулировкам.

Пусть X – непустое множество произвольной природы. Обозначим $\tau = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство его подмножеств, удовлетворяющих свойствам:

- (1) Пустое множество и X принадлежат τ ;
- (2) Объединение любого семейства множеств из τ является множеством из τ ;
- (3) Пересечение любых двух множеств из τ является множеством из τ .

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*, семейство τ – *топологией* на множестве X . Множества, находящиеся в семействе τ называются *открытыми*. Мы будем обозначать топологическое пространство (X, τ) также через X , если топология этого пространства ясна из контекста.

Создание семейства τ можно представить себе так: берем из множества X набор элементов. При этом они из X не исчезают, а как бы удваиваются, X остается прежним, а у нас в руках оказывается подмножество как единый

объект («мешок с точками из X »), который мы кладем в τ . Затем процесс повторяется со следующим подмножеством. В результате мы получаем «ящик» τ , наполненный «мешками с точками». Только множества, помещенные в топологию, мы будем называть открытыми.

Замечание 3.1. Давайте еще раз посмотрим на определение открытого множества в топологическом пространстве. В отличие от метрического пространства, у нас появилась большая свобода действия. Если в метрическом пространстве, после того как была зафиксирована метрика, открытые множества ею были жестко определены, то в для топологического пространства мы можем сами выбирать семейства множеств, которые будем называть открытыми. Одно ограничение: они должны удовлетворять условиям (1) – (3). Захотим – одни множества назовем открытыми, а захотим – другие. И все-таки аналогия с метрическим пространством есть: там мы также были свободны в выборе отображения ρ , которое хотели назвать метрикой (и опять наш выбор был ограничен лишь тремя условиями).

Вернемся на минутку к открытым множествам метрического пространства: они определялись с помощью открытых шаров. В топологическом пространстве мы не умеем измерять расстояния, а значит открытых шаров здесь нет. Зато возможно ввести аналог открытого шара, который позволит сформулировать нам критерий открытого множества в топологическом пространстве. Это мы сейчас и сделаем.

Будем называть (*открытой*) *окрестностью* точки $x \in X$ любой элемент семейства τ , который содержит точку x . Другими словами, окрестностью точки x называется любое открытое множество, содержащее x . Будем обозначать окрестности Ω или $\Omega(x)$.

С помощью окрестностей можно сформулировать критерий открытого множества. Отметим, что взять этот критерий в качестве определения открытого множества нельзя, так как для определения окрестности точки требуется понятие открытого множества. Несмотря на это в ряде задач этот критерий является весьма полезным.

Теорема 3.1. *Множество U является открытым в топологическом пространстве (X, τ) тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in U$ существует окрестность $\Omega(x)$, содержащаяся в U .*

Доказательство. Пусть U открыто. Тогда для каждой точки $x \in U$ в качестве окрестности $\Omega(x)$ можно взять само U . Таким образом, мы нашли окрестность точки x , содержащуюся в U .

Обратно, пусть выполнено условие

$$\forall x \in U \exists \Omega(x) \subset U,$$

то есть для любой точки $x \in U$ существует окрестность $\Omega(x)$, содержащаяся в U . Надо доказать, что U открыто, то есть что оно принадлежит семейству τ . По определению окрестности точки имеем: для каждой точки $x \in U$ получаем открытое множество $\Omega(x)$, содержащееся в U (помним, что открытое – значит принадлежащее τ). Тогда множество U мы можем представить как объединение всех таких окрестностей (пробежались по всем точкам U , окружили их окрестностями и объединили эти окрестности). Запишется это так:

$$U = \cup_{x \in U} \Omega(x).$$

Тогда U является объединением множеств, принадлежащих τ . По условию (2) из определения топологического пространства это означает, что U и само принадлежит τ . □

Итак, открытое множество U в топологическом пространстве – это, с одной стороны, множество, которое содержится в семействе τ , а, с другой стороны – это множество U , каждую точку которого можно окружить множеством из τ , целиком лежащим в U .

Приведем примеры различных топологий и топологических пространств.

Пример 3.1. Пусть X – произвольное непустое множество. В семейство τ мы положим всего лишь два множества: пустое и само X , то есть

$$\tau = \{\emptyset, X\}.$$

Непосредственная проверка показывает, что при таком выборе τ условия (1) – (3) выполняются, следовательно, семейство τ является топологией. Такая топология называется *антидискретной топологией*, а пара (X, τ) называется *антидискретным топологическим пространством*. Антидискретную топологию мы можем ввести в любом множестве. Это топология с наименьшим числом элементов.

Пример 3.2. Пусть X – произвольное непустое множество. В семейство τ положим все-все подмножества, которые достанем из X . Убедитесь самостоятельно, что такое семейство подмножеств τ удовлетворяет условиям (1) – (3), а значит является топологией. Такая топология называется *дискретной*, а пара (X, τ) называется *дискретным топологическим пространством*. Дискретная топология самая большая из всех, которые можно ввести на множестве X .

Мы видим, что на любом множестве можно ввести как минимум две топологии. Перейдем к более содержательным примерам топологий.

Пример 3.3. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. В нем мы уже выделили семейство подмножеств, которые называли открытыми. Кроме того, доказали, что для них выполняются условия (1) – (3) топологического пространства. Значит, семейство этих множеств является топологией на множестве X . Такая топология на метрическом пространстве называется *метрической топологией*. В частности, если $X = \mathbb{R}^n$ – арифметическое пространство, а ρ – каноническая метрика на нем, то такая метрическая топология называется *естественной топологией*.

Пример 3.4. Пусть $X = \{0, 1\}$ и $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Эта топология называется *топологией связного двоеточия* или *топологией Серпинского*.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство и A – произвольное подмножество множества X . Пересечем множество A по очереди со всеми множествами из топологии τ . Полученное семейство подмножеств множества A обозначим так:

$$\tau_A = \{U \cap A | U \in \tau\}.$$

Проверьте самостоятельно, что для семейства множеств τ_A выполняются условия (1) – (3) из определения топологии. Следовательно, это семейство является топологией на A . Она называется *индуцированной топологией*, а пара (A, τ_A) называется *топологическим подпространством* топологического пространства (X, τ) .

При работе с конкретными примерами топологических пространств бывает трудно перечислить все множества, которые будут называться открытыми. Хотелось бы задавать лишь часть открытых множеств, но так, чтобы остальные открытые множества получались как объединения заданных. Эти соображения приводят нас к определению базы топологии.

Базой топологии τ называется подсемейство $\mathcal{B}$ в топологии τ , такое что любое непустое множество $U \in \tau$ является объединением множеств из $\mathcal{B}$.

Очевидно, что любая топология τ имеет базу (например, в качестве базы можно взять само семейство τ). Также очевидно, что база однозначно определяет топологию. Другими словами, одно семейство $\mathcal{B}$ не может быть базой двух различных топологий. С другой стороны, одна топология может иметь не одну базу.

Пример 3.5. Пусть $X = \mathbb{R}$ – прямая с естественной топологией. Напомним, что открытые шары на прямой – это интервалы. Тогда открытым множеством на прямой будет такое множество, которое вместе с каждой своей точкой будет содержать некоторый интервал с серединой в этой точке. Откуда следует, что любое открытое множество на прямой можно получить как объединение интервалов. Следовательно, множество всех интервалов прямой будет базой естественной топологии на ней.

Построенную базу естественной топологии на прямой можно уменьшить, взяв лишь интервалы с рациональными концами. Действительно, каждую точку интервала с произвольными концами можно окружить интервалом с рациональными концами, а значит, этот интервал получается как объединение интервалов с рациональными концами. Следовательно, любое открытое множество на $\mathbb{R}$ можно представить как объединение интервалов с рациональными концами.

Оказывается, что любую базу естественной топологии на $\mathbb{R}$ можно уменьшить (см. задачи).

Замечание 3.2. Пусть (A, τ_A) – топологическое подпространство топологического пространства (X, τ) , $\mathcal{B}$ – база топологии τ . Тогда семейство множеств $\mathcal{B}_A = \{V \cap A \mid V \in \mathcal{B}\}$ будет базой топологии $\mathcal{B}_A$ (докажите самостоятельно).

3.2. Непрерывные отображения топологических пространств.

Для того чтобы ввести понятие непрерывного отображения топологических пространств, у нас все готово. Вспомним, что во втором критерии непрерывного отображения метрических пространств (непрерывность в терминах открытых множеств) непосредственно метрику мы не упоминаем. Этот критерий дословно перенесем в качестве определения в топологические пространства.

Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если для любого элемента $V \in \tau_Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V)$ принадлежит τ_X . Другими словами, отображение f называется *непрерывным*, если полный прообраз любого открытого в Y множества открыт в X .

Итак, вслед за распространением понятия открытого множества с класса метрических пространств на более широкий класс топологических пространств, теперь на него мы распространили и определение непрерывного отображения.

Изучение непрерывных отображений топологических пространств начнем с того, что облегчим себе жизнь при решении задач.

Теорема 3.2. Пусть (X, τ_X) , (Y, τ_Y) – топологические пространства, $\mathcal{B}$ – база топологии τ_Y . Отображение $f : X \rightarrow Y$ является непрерывным тогда и только тогда, когда для любого элемента $V \in \mathcal{B}$ его полный прообраз принадлежит τ_X . (Другими словами, чтобы проверить непрерывность отображения, нам не нужно перебирать все открытые множества, достаточно только множеств базы)

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно. Так как элементы базы являются открытыми множествами, их полные прообразы открыты в X по определению непрерывного отображения.

Обратно, пусть для любого элемента $V \in \mathcal{B}$ базы его полный прообраз принадлежит τ_X . Нам нужно доказать, что отображение f непрерывно, то есть полный прообраз любого множества из τ_Y (а не только базового) открыт в X . Пусть W – произвольное открытое множество в Y , то есть $W \in \tau_Y$. Тогда по определению базы W можно представить как объединение некоторого семейства элементов базы, то есть $W = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $V_\alpha \in \mathcal{B}$. По определению полного прообраза имеем $f^{-1}(W) = \cup_{\alpha} f^{-1}(V_\alpha)$. По условию все множества $f^{-1}(V_\alpha)$ открыты в X , а значит, по определению топологии их объединение также открыто в X . $\square$

Пример 3.6. Пусть X – полуокружность с концевыми точками, топология на ней индуцирована естественной топологией плоскости $\mathbb{R}^2$; Y – диаметр полуокружности, также с индуцированной топологией. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ задается следующим образом: каждой точке x полуокружности ставится в соответствие ее ортогональная проекция на диаметр. Докажем, что отображение f непрерывно.

Во-первых, разберемся с топологиями полуокружности и отрезка. Нам достаточно указать какие-нибудь базы этих топологий. Чтобы получить множества из базы топологии полуокружности, нужно пересечь множества базы топологии плоскости с полуокружностью. На плоскости базой естественной топологии являются открытые круги. Пересекая открытые круги плоскости с полуокружностью получим открытые дуги (если открытый круг не содержит концы полуокружности) и дуги с одним включенным концом (если открытый круг содержит конец полуокружности). Аналогичным образом базой топологии на диаметре будут интервалы и промежутки с одним включенным концом.

Переходим к доказательству непрерывности отображения f . Берем произвольный интервал (или промежуток с одним включенным концом) и находим его полный прообраз. Это дуга (открытая или с одним включенным концом)

на полуокружности, то есть открытое множество.

Самостоятельно нарисуйте рисунки к проведенным рассуждениям.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Подмножество $F \subset X$ называется *замкнутым* в нем, если его дополнение $X \setminus F$ открыто, то есть принадлежит топологии τ .

Теорема 3.3. (*критерий непрерывности в терминах замкнутых множеств*)

Отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F из Y его полный прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X .

Доказательство. Пусть f – непрерывное отображение. Рассмотрим произвольное множество F , замкнутое в Y , то есть $Y \setminus F$ открыто в Y . Тогда в силу задачи 25 получим $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$. Так как отображение f непрерывно, множество $f^{-1}(Y \setminus F)$ открыто в X , следовательно, открыто и множество $X \setminus f^{-1}(F)$. Тогда $f^{-1}(F)$ замкнуто по определению.

Обратно, пусть полный прообраз любого замкнутого в Y множества замкнут в X .

Рассмотрим произвольное множество V , открытое в Y . Тогда $Y \setminus V$ является замкнутым множеством в Y . Следовательно, $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ замкнуто в X , следовательно, множество $f^{-1}(V)$ открыто в X . Таким образом, мы получили, что отображение f непрерывно по определению. $\square$

Пусть даны топологические пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y) . Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом* топологических пространств, если f – биекция (то есть взаимно однозначное отображение), f и f^{-1} непрерывны. Два топологических пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y) называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$.

Замечание 3.3. Гомеоморфные топологические пространства можно понимать как «одинаковые» с точки зрения топологии. Поясним это на примере евклидовой геометрии. На плоскости два треугольника, которые переводятся друг в друга движением считаются одинаковыми. Действительно, у них одинаковые длины сторон, углов, площади, длины соответствующих медиан, и

т.д. Нам все равно какой из них изучать с точки зрения евклидовой геометрии, их характеристики получатся одинаковыми. То же самое происходит с гомеоморфными топологическими пространствами. Их характеристики, которые интересны топологии, будут одинаковыми. Поэтому одной из основных задач топологии является выявление гомеоморфных и не гомеоморфных пространств. Алгоритм, с помощью которого можно было бы определить для любой пары топологических пространств гомеоморфны они или нет, не создан до сих пор. Доказательство гомеоморфности пространств проще, чем доказательство не гомеоморфности. Действительно, если два топологических пространства гомеоморфны, то рано или поздно гомеоморфизм обнаружить можно. Что делать с не гомеоморфными пространствами? У топологических пространств ищут свойства, которые инвариантны относительно гомеоморфизмов. Такие свойства называются *топологическими инвариантами*. Если у одного пространства такое свойство есть, а у другого – нет, то такие топологические пространства не гомеоморфны.

Приведем простейший пример топологического инварианта. Заметим, что гомеоморфизм, в частности, является биекцией. Тогда мощность множества X топологического пространства (X, τ) является топологическим инвариантом (два множества имеют равные мощности тогда и только тогда, когда между ними можно задать биективное соответствие). Следовательно, если одно топологическое пространство имеет счетное число элементов, а другое – континуум, то такие топологические пространства не гомеоморфны. В дальнейшем мы постараемся набрать как можно больше топологических инвариантов для доказательства не гомеоморфности различных пар топологических пространств.

Вспомним, что в определении гомеоморфизма кроме требования взаимной однозначности отображения, есть еще требования непрерывности f и обратного к нему. Это требование позволяет установить взаимно однозначное соответствие между открытыми множествами гомеоморфных топологических пространств.

Действительно, пусть U открыто в X . Так как отображение f^{-1} является

непрерывным, полный прообраз U при отображении f^{-1} , то есть $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ открыт в Y .

Обратно, пусть $U \subset X$, такое что $f(U)$ открыто в Y . Так как f непрерывно и является биекцией полный прообраз $f^{-1}(f(U)) = U$ открыт в X .

Итак, в случае гомеоморфных пространств не только их точки разделяются на пары, соответствующих друг другу при отображении f , но и открытые множества.

Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если для любых его двух различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

Пример 3.7. Примерами хаусдорфовых топологических пространств являются прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией и дискретное пространство. Примерами не хаусдорфовых пространств являются антидискретное пространство и связное двоеточие, а также прямая $\mathbb{R}$ с топологией Зариского. Докажите это самостоятельно.

Теорема 3.4. *Свойство хаусдорфовости топологического пространства является топологическим инвариантом. Другими словами, пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – топологические пространства, причем (X, τ_X) – хаусдорфово. Пусть $f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм. Тогда (Y, τ_Y) также является хаусдорфовым.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что Y является хаусдорфовым пространством, то есть для любых его двух различных точек нужно построить не пересекающиеся окрестности. Фиксируем две произвольные различные точки $y_1, y_2 \in Y$. Так как гомеоморфизм f является, в частности, биекцией, существуют две различные (почему они не могут совпадать?) точки $x_1, x_2 \in X$, такие, что $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. Топологическое пространство X является хаусдорфовым, следовательно, для его точек x_1 и x_2 существуют не пересекающиеся окрестности $\Omega(x_1)$ и $\Omega(x_2)$. Применим к ним гомеоморфизм f . Множества $f(\Omega(x_1))$ и $f(\Omega(x_2))$ будут по-прежнему не пересекаться, так как f является взаимно однозначным отображением, и содержать, соответственно, точки y_1 и y_2 . Кроме того, согласно замечанию 3.3 эти множества будут

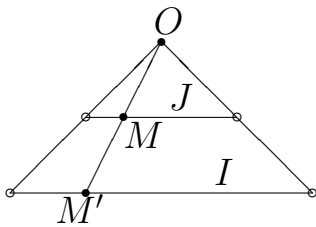
открыты в Y . Итак, мы нашли для каждой из точек y_1 и y_2 непересекающиеся окрестности. Следовательно, топологическое пространство Y является хаусдорфовым по определению. $\square$

Используя эту теорему мы сразу можем сказать, что прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией и топологией Зариского не гомеоморфны.

Посмотрим на примеры гомеоморфных пространств (то есть одинаковых с точки зрения топологии).

Пример 3.8. Пусть дана прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Рассмотрим два интервала I и J на этой прямой. На них индуцируется топология, которую мы тоже будем называть естественной. Открытыми множествами этой топологии будут всевозможные «маленькие» интервалы, содержащиеся в данных интервалах I и J , а также всевозможные объединения «маленьких» интервалов. Множество всех «маленьких» интервалов будет являться базой этой топологии.

Покажем, что интервалы I и J гомеоморфны.



Расположим данные интервалы на параллельных прямых, как показано на рисунке. Рассмотрим гомотетию с центром в точке O (эта точка получится, если соединить концы интервалов). Тогда произвольной точке M интервала J будет соответствовать точка M' интервала I .

Покажем, что заданная гомотетия будет непрерывным отображением. Для этого достаточно показать, что для любого элемента базы топологии на интервале I (это «маленький» интервал) его полный прообраз при гомотетии является открытым множеством на интервале J . Заметим, что полный прообраз интервала при гомотетии есть интервал (чтобы найти полный прообраз, задаемся вопросом: какие точки из интервала J переходят в «маленький» интервал). Это тоже интервал, а значит открытое множество в естественной топологии интервала J . По критерию непрерывности это означает, что гомотетия, переводящая J в I является непрерывным отображением. Обрат-

ное отображение также является гомотетией с тем же центром (но с обратным коэффициентом). Точно также доказывается, что это будет непрерывное отображение.

Заметим, что наше доказательство не проходит для интервалов одной и той же длины. Что делать? Может быть они не гомеоморфны? Оказывается, что гомеоморфны. Докажите это самостоятельно.

Итак, с точки зрения топологии любые два интервала (с естественной топологией) одинаковы. Эта наука их не различает (также как евклидова геометрия не различала равные треугольники, нарисованные в разных частях доски).

Позже мы докажем, что отрезок и интервал (с топологией, индуцированной естественной топологией прямой) не гомеоморфны. А вот отрезок и интервал с дискретными топологиями всегда гомеоморфны (см. задачи).

3.3. Задачи

1. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Будут ли следующие семейства подмножеств являться топологией на X : а) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, б) $\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a\}, \{d\}, \{a, b, d\}\}$, в) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$?
2. Пусть $X = [0, +\infty)$, τ состоит из $\emptyset$, X и всевозможных лучей вида $(a, +\infty)$, где $a \geq 0$. Докажите, что τ – топология. Топологическое пространство (X, τ) называется *стрелкой*.
3. Пусть $X = \mathbb{R}$, τ состоит из $\emptyset$ и всевозможных а) бесконечных подмножеств в $\mathbb{R}$, б) конечных подмножеств в $\mathbb{R}$. Является ли τ топологией?
4. Пусть $X = \mathbb{R}$, τ состоит $\emptyset$ и из дополнений конечных множеств на $\mathbb{R}$. Докажите, что τ является топологией. Эта топология называется *топологией Зариского*.

Решение. Представим себе эту топологию. Саму прямую $\mathbb{R}$ мы будем представлять себе начерченной на узкой деревянной палке. И возьмем еще много-много таких же заготовок для множеств, которые мы будем складывать в топологию (мы представляем ее себе как ящик, в котором

лежат все открытые множества). Чтобы получить открытое множество в топологии Зариского, нужно из прямой удалить конечное множество точек. Берем первую палку-заготовку и просверливаем в ней одну маленькую дырку на начерченной прямой. Мы получили наглядное представление для одного из открытых множеств топологии Зариского: все точки прямой, начерченной на палке, кроме одной дырки. Берем вторую заготовку и просверливаем дырку в другом месте. Получаем модель еще одного открытого множества. В следующей заготовке просверливаем две дырки. Процесс продолжаем дальше. В палках-заготовках мы должны просверлить любое конечное число дырок во всевозможных местах. В результате мы получим модели всех открытых множеств прямой в топологии Зариского.

Проверим, что построенное семейство множеств τ является топологией, то есть, что выполняются все три условия из определения топологии.

Пустое множество мы положили в топологию сразу, а значит, оно там есть. Все множество $\mathbb{R}$ – это прямая с нулем дырок, то есть тоже лежит в топологии. Таким образом, первое условие выполняется.

Проверим выполнение второго условия. Возьмем произвольное семейство элементов из τ (берем палки с дырками, их количество может быть любым: конечным, счетным, континуальным и т.д.). Берем одно множество из выбранного семейства (палка с конечным числом дырок) и добавляем к нему другое множество из выбранного семейства (на первую палку накладываем вторую). Возможно, что во втором множестве есть часть элементов, которых нет в первом множестве. Тогда они добавятся и в объединении будет больше элементов (часть дырок первой палки закроются второй палкой). Возможно, что ни одна из дырок первой палки не закроется. Но в обоих случаях мы получим палку с тем же, либо меньшим числом дырок. Продолжаем процесс до исчерпания всех открытых множеств в выбранном семействе. На каждом шаге дырок либо остается столько же, либо их количество уменьшается. В результате мы получим палку с конечным числом дырок (то есть прямую $\mathbb{R}$ с конечным числом

удаленных точек). Это элемент из τ .

Проверим выполнение третьего условия. Берем два множества из τ (две палки с конечным числом дырок). Рассматриваем их пересечение (накладываем одну палку на другую; каждая дырка этих палок вспыхивает и прожигает для себя пару в другой палке; оставшиеся точки будут пересечением двух выбранных множеств). Смотрим на соединенные вместе палки и видим конечное число дырок. Другими словами, в результате пересечения множеств из τ мы снова получили множество из τ .

Итак, все три условия из определения топологии выполняются, следовательно, τ является топологией. $\square$

5. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, Y – множество, получающееся из X добавлением одной точки a . Будет ли семейство $\{\{a\} \cup U \mid U \in \tau\} \cup \{\emptyset\}$ топологией на Y ?
6. Пусть дана плоскость $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией и прямая $\mathbb{R}$ рассматривается как подмножество в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что естественная топология на $\mathbb{R}$ совпадает с индуцированной из $\mathbb{R}^2$ топологией.
7. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство с тривиальной метрикой. Опишите все открытые множества его метрической топологии.
8. Укажите какую-нибудь базу естественной топологии а) на плоскости $\mathbb{R}^2$, б) в пространстве $\mathbb{R}^3$ и в) в $\mathbb{R}^n$.
9. Укажите какую-нибудь базу дискретной и антидискретной топологии.
10. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дана окружность S^1 . Приведите примеры открытых множеств на окружности в индуцированной топологии, если на $\mathbb{R}^2$ задана метрическая топология а) канонической метрики, б) тривиальной метрики, в) метрики $\rho(A, B) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$, г) метрики $\rho(A, B) = |a^1 - b^1| + |a^2 - b^2|$.
11. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дано множество A а) отрезок, б) все внутренние точки некоторого квадрата, в) квадрат. Будет ли это множество A открытым, если на плоскости $\mathbb{R}^2$ введена а) дискретная топология,

б) антидискретная топология, в) метрическая топология тривиальной метрики? Ответ обосновать.

Указания. Воспользуйтесь критерием открытого множества.

12. Пусть на прямой $\mathbb{R}$ дан интервал $(1, 2)$. Будет ли он открытым множеством, если на прямой $\mathbb{R}$ введена а) дискретная топология, б) антидискретная топология, в) топология Зариского, г) естественная топология? Ответ обосновать.

13. Пусть $X = \Omega \setminus \{N\}$ – окружность с выколотой точкой и топологией, индуцированной естественной топологией плоскости, Y – прямая с естественной топологией, касающаяся окружности Ω в точке S , причем N и S – диаметрально противоположные точки. Зададим отображение $f : X \rightarrow Y$ следующим образом: каждой точке $M \in X$ поставим в соответствие точку пересечения прямой Y и прямой NM . Докажите, что отображение f непрерывно. Это отображение называется *стереографической проекцией*.

14. Заменим в предыдущей задаче естественную топологию прямой на дискретную. Будет ли отображение f непрерывным? А если заменить топологию окружности на дискретную?

15. Докажите, что интервал гомеоморфен прямой $\mathbb{R}$ (топология естественная).

Указания. Используйте стереографическую проекцию.

16. Пусть на прямой $\mathbb{R}$ фиксирована топология Зариского. Будет ли эта топология хаусдорфовой?

17. Пусть на множестве $[0, +\infty)$ задана топология стрелки (см. задачу 2). Будет ли эта топология хаусдорфовой?

18. Докажите, что для любого метрического пространства метрическая топология хаусдорфова.

19. Покажите, что любые два отрезка прямой $\mathbb{R}$ гомеоморфны (индуцированная топология естественной топологией прямой).

20. Будут ли гомеоморфны два интервала, если на одном топология естественная, а на другом – антидискретная?
21. Покажите, что интервал гомеоморфен прямой (естественная топология). Будет ли интервал гомеоморфен прямой, если на интервале дискретная топология, а на прямой – естественная?
22. Докажите, что интервал и отрезок гомеоморфны (топология дискретная).
23. Докажите, что окружность гомеоморфна треугольнику и квадрату (естественная топология). Обобщите этот результат для многоугольников (выпуклых и не выпуклых). А что будет, если еще рассматривать замкнутые ломаные с самопересечениями?
24. Докажите, что круговой цилиндр гомеоморфен сфере с двумя выколотыми точками (естественная топология).
25. Докажите, что для любого отображения $f : X \rightarrow Y$ произвольных множеств X и Y и любых подмножеств $A_\alpha, A, B \subset Y$ имеют место равенства

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in C} f^{-1}(A_\alpha); \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$$

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Решение. Докажем третье равенство (два остальных доказываются аналогичным образом). Чтобы доказать равенство множеств, надо доказать два включения.

1. Докажем, что $f^{-1}(Y \setminus A) \subset X \setminus f^{-1}(A)$. Пусть $x \in f^{-1}(Y \setminus A) \subset X$ – произвольный элемент. Тогда по определению полного прообраза получим, что $f(x) \in Y \setminus A$, то есть $f(x) \notin A$ (определение разности множеств). Следовательно, $x \notin f^{-1}(A)$. Так как $x \in X$, получим, что $x \in X \setminus f^{-1}(A)$.
2. Докажем, что $X \setminus f^{-1}(A) \subset f^{-1}(Y \setminus A)$. Пусть $x \in X \setminus f^{-1}(A)$ – произвольный элемент. Тогда $x \notin f^{-1}(A)$, то есть по определению полного прообраза $f(x) \notin A$, то есть $f(x) \in Y \setminus A$. Следовательно, $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. $\square$

26. Докажите, что сфера с выколотой точкой гомеоморфна плоскости (естественная топология).
27. Докажите, что однополостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ гомеоморфен плоскости с выколотой точкой (естественная топология).
28. Пусть $X = (a, b]$ – промежуток прямой $\mathbb{R}$ (естественная топология) с индуцированной топологией, Y – окружность. Зададим отображение $f : X \rightarrow Y$ следующим образом: возьмем промежуток X и соединим точки a и b так, чтобы получилась окружность. Будет ли это отображение непрерывным? А обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ (разрезаем окружность и распрямляем ее в промежуток)?
29. Приведите пример непрерывного биективного отображения, которое не является гомеоморфизмом.

3.4. Дополнительные задачи

1. Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются *топологически эквивалентными*, если они порождают одну и ту же метрическую топологию. Будут ли топологически эквивалентны а) каноническая и тривиальная метрики на $\mathbb{R}^2$; б) каноническая и $\rho(a, b) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|\}$ на $\mathbb{R}^2$; в) ρ и $\frac{\rho}{1+\rho}$ на $\mathbb{R}^2$, где ρ – каноническая метрика на $\mathbb{R}^2$?
2. Докажите, что любую базу естественной топологии на $\mathbb{R}$ можно уменьшить.

Доказательство. Мы покажем, что при удалении любого элемента из любой базы $\mathcal{B}$ прямой получается база той же топологии. Пусть U – произвольное множество базы. Так как U принадлежит базе топологии, оно открыто, а значит, его можно получить как объединение некоторой совокупности интервалов. Так как интервал является открытым множеством, его можно получить как объединение некоторой совокупности элементов из базы $\mathcal{B}$. Тогда множество U можно получить как объединение элементов из базы $\mathcal{B}$, а значит, элемент U можно удалить из базы. $\square$

3. Сформулируйте утверждение, аналогичное утверждению задачи 2, в случае плоскости $\mathbb{R}^2$, пространства $\mathbb{R}^3$, общем случае $\mathbb{R}^n$ с естественной топологиями. Будут ли они верны? Будет ли аналогичное утверждение верно для произвольной топологии?
4. Пусть $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение топологических пространств и Y – хаусдорфово. Докажите, что X также является хаусдорфовым пространством.

4. Различные виды множеств в топологических пространствах.

4.1. Открытые и замкнутые множества.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Напомним, что элементы множества τ мы называли открытыми множествами.

Напомним, что подмножество $F \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение в X открыто. Другими словами, F замкнуто, если $X \setminus F \in \tau$.

Пример 4.1. Как мы знаем на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией интервал (a, b) является открытым множеством. Тогда дополнение интервала, а именно множество $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ является замкнутым множеством.

Так как лучи $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$ являются открытыми множествами (почему?) на прямой $\mathbb{R}$, отрезок $[a, b]$ будет множеством замкнутым.

Множество $[a, b)$ не будет ни открытым, ни замкнутым. Оно не будет открытым, так как для точки a не существует интервала, содержащегося в промежутке $[a, b)$. Оно также не будет и замкнутым, так как его дополнение $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ не является открытым (проблемы с точкой b).

Пример 4.2. Пустое множество является открытым (по определению топологии). Его дополнение $X \setminus \emptyset = X$ также является открытым, а значит, пустое множество также является и замкнутым. Аналогично рассуждая мы получаем, что само топологическое пространство является и открытым и замкнутым множеством. В следующем примере мы увидим менее тривиальные открыто-замкнутые множества.

Пример 4.3. Пусть $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = [1, 2) \cup [3, 4]$ с индуцированной топологией. Рассмотрим множество $B = [1, 2) \subset A$. Как мы видели в примере 4.1 множество $[1, 2)$ не является ни открытым, ни замкнутым в пространстве X . Теперь посмотрим на это множество как на множество топологического подпространства A . По определению индуцированной топологии получаем, что множество $[1, 2)$ открыто в A , так как $[1, 2) = A \cap (0, 3)$. С другой стороны, множество $[3, 4]$ можно представить в виде $[3, 4] = A \cap (2, 5)$, то есть оно открыто в A . Тогда $[1, 2) = A \setminus [3, 4]$, следовательно, множество $[1, 2)$ замкнуто в A . Итак, мы получаем еще один пример открыто-замкнутого множества – это множество $[1, 2)$ в топологическом подпространстве A . Кроме того, мы увидели, что открытое множество в топологическом подпространстве может не быть открытым в объемлющем топологическом пространстве. Очевидно, что обратное верно: множество открытое в объемлющем пространстве будет открыто и в топологическом подпространстве (определение индуцированной топологии).

Вывод: в топологических пространствах существуют открытые множества, замкнутые множества, не открытые и не замкнутые, открыто-замкнутые множества.

Как мы увидели, открытое множество в подпространстве не обязано быть открытым в объемлющем пространстве. Однако, верна теорема.

Теорема 4.1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $A \subset X$ – открытое подмножество в X с индуцированной топологией. Тогда множество $B \subset A$, открытое в A , будет открыто в X .

Доказательство. Пусть B открыто в A . Тогда $B = A \cap U$, где U открыто в X . Так как A открыто в X , то B открыто в X как пересечение открытых множеств (определение топологии). $\square$

Поставим аналогичный вопрос для замкнутого множества: верно ли, что множество, замкнутое в подпространстве является замкнутым в объемлющем пространстве? Также как в случае открытого множества в общем случае ответ отрицательный (приведите контрпример). Однако имеет место теорема.

Теорема 4.2. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $A \subset X$ – замкнутое подмножество с индуцированной топологией. Если множество F замкнуто в A , то оно замкнуто в X .

Доказательство. Пусть F замкнуто в A . Тогда множество $A \setminus F$ открыто в A . По определению индуцированной топологии оно представимо в виде $A \setminus F = V \cap A$, где V – открытое множество в X . Так как A замкнуто в X , множество $X \setminus A$ открыто в X . Следовательно, множество

$$\begin{aligned} X \setminus F &= (X \setminus A) \cup (A \setminus F) = (X \setminus A) \cup (V \cap A) = \\ &= ((X \setminus A) \cup V) \cap ((X \setminus A) \cup A) = (X \setminus A) \cup V. \end{aligned}$$

открыто в X как объединение открытых множеств. Следовательно, F замкнуто по определению. $\square$

4.2. Внутренность множества, замыкание и граница множества.

Пусть (X, τ) – произвольное топологическое пространство, A – его произвольное подмножество.

Точка $x \in A$ называется *внутренней точкой* множества A , если существует окрестность этой точки, содержащаяся в A .

Замечание 4.1. Понятие внутренней точки зависит от топологического пространства, в котором рассматривается множество A . Пусть $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = (0, 2)$. Тогда точка 1 будет внутренней точкой множества A , так как ее можно окружить интервалом, содержащимся в A . Если $X = \mathbb{R}^2$, то точка 1 не будет внутренней точкой множества A . Открытыми множествами на плоскости $\mathbb{R}^2$ являются открытые круги и их всевозможные объединения. Очевидно, что никакой открытый круг не поместится в интервале $(0, 2)$.

Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается $\text{int } A$ (или $\text{int}_X A$, если нужно подчеркнуть, в каком топологическом пространстве рассматривается внутренность множества).

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества A , если каждая окрестность точки x имеет непустое пересечение с A .

Пример 4.4. Любая точка множества A является его точкой прикосновения (почему?).

Пример 4.5. Пусть $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = (0, 1)$. Точка 0 является точкой прикосновения множества A , так как любой интервал, содержащий эту точку, пересекается с A .

Замечание 4.2. Так же как в случае внутренней точки, понятие точки прикосновения зависит от топологического пространства, в котором рассматривается множество A . Например, если $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = (0, 1)$, то точка 2 не является точкой прикосновения множества A . Если $X = \mathbb{R}$ с топологией Зариского, то точка 2 является точкой прикосновения множества A .

Множество всех точек прикосновения множества A называется *замыканием множества A* и обозначается $cl A$ (также встречается обозначение $\bar{A}$).

Пример 4.6. Пусть $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = (0, 1)$. Тогда $cl A = [0, 1]$ (почему?)

Теорема 4.3. *Замыкание множества является замкнутым множеством.*

Доказательство. Чтобы доказать, что $cl A$ является замкнутым множеством, нам нужно показать, что его дополнение $X \setminus cl A$ является открытым множеством (см. определение).

Пусть $x \in X \setminus cl A$ – произвольная точка. Тогда $x \notin cl A$, то есть не является точкой прикосновения множества A . Следовательно, существует окрестность $\Omega(x) \subset X$, такая, что $\Omega(x) \cap A = \emptyset$ (если бы любая окрестность точки x пересекала A , то точка x была бы точкой прикосновения по определению).

Для окрестности $\Omega(x)$ возможны два случая: 1) $\Omega(x) \subset X \setminus cl A$ и 2) $\Omega(x) \cap cl A \neq \emptyset$. Начнем со второго случая. Если указанное пересечение не пусто, то существует точка $y \in \Omega(x)$, которая принадлежит $cl A$. Тогда точка y является точкой прикосновения множества A . По определению это означает,

что любая ее окрестность пересекается с множеством A . Но окрестность $\Omega(x)$, являясь еще и окрестностью точки y , множество A не пересекает. Полученное противоречие показывает, что случай 2) невозможен.

Следовательно,

$$\Omega(x) \subset X \setminus cl A.$$

Так как это верно для любой точки $x \in X \setminus cl A$, получаем, что множество $X \setminus cl A$ открыто по критерию, а значит, $cl A$ замкнуто по определению. $\square$

Докажите самостоятельно следующую теорему.

Теорема 4.4. *Внутренность множества является открытым множеством.*

Используя понятия внутренней точки множества и замыкания, мы можем сформулировать еще критерии открытости и замкнутости множества в топологическом пространстве.

Теорема 4.5. *Множество U в топологическом пространстве (X, τ) является открытым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренней частью, то есть $int U = U$.*

Доказательство. Пусть $int U = U$. Так как внутренность множества $int U$ является открытым множеством, открытым множеством будет и множество U .

Обратно, пусть U – открытое множество. Нам нужно доказать, что $int U = U$. Для этого нам нужно доказать два включения: $int U \subset U$ (оно очевидным образом следует из определения внутренней точки) и $U \subset int U$. Докажем второе включение. Пусть $x \in U$ – произвольная точка. Так как U открытое множество, по теореме 3.1 существует окрестность $\Omega(x)$, содержащаяся в U . По определению внутренней точки это означает, что x – внутренняя точка множества U , то есть $x \in int U$. $\square$

Теорема 4.6. *Множество F замкнуто в топологическом пространстве (X, τ) тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием, то есть $F = cl F$.*

Доказательство. Пусть $F = cl F$. Так как замыкание множества $cl F$ является замкнутым множеством, замкнутым множеством будет и множество F .

Обратно, пусть F – замкнутое множество. Нам нужно доказать, что $F = cl F$. Для этого надо доказать два включения $F \subset cl F$ (оно очевидным образом следует из определения точки прикосновения) и $cl F \subset F$.

Докажем второе включение. Пусть $x \in cl F$ – произвольная точка. Предположим, что $x \notin F$. Тогда точка x принадлежит открытому множеству $X \setminus F$ (почему оно открыто?). Следовательно, существует окрестность $\Omega(x)$, содержащаяся в множестве $X \setminus F$. Тогда $\Omega(x)$ не пересекает множество F . Следовательно, у точки x нашлась окрестность, которая не пересекает множества F , то есть x не является точкой прикосновения F , то есть $x \notin cl F$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $x \in F$, что и требовалось доказать. $\square$

Точка x называется *граничной точкой* множества A , если каждая ее окрестность пересекается и с множеством A и с множеством $X \setminus A$. Множество всех граничных точек множества A называется *границей* множества A и обозначается ∂A (также встречается обозначения $fr A$).

Пример 4.7. Пусть $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = (0, 1)$. Тогда граница $\partial A = \{0, 1\}$.

Граница множества связана с замыканием и внутренностью этого множества следующим образом.

Теорема 4.7. Пусть (X, τ) – произвольное топологическое пространство, $A \subset X$ – произвольное подмножество. Тогда $\partial A = cl A \setminus int A$.

Доказательство. Докажем включение $\partial A \subset cl A \setminus int A$. Пусть $x \in \partial A$ – произвольная граничная точка. По определению граничной точки любая ее окрестность пересекается с множеством A (а значит, точка x является точкой прикосновения множества A , то есть $x \in cl A$), а также пересекается с множеством $X \setminus A$ (а значит, целиком в A лежать не может, следовательно $x \notin int A$). Следовательно, $x \in cl A \setminus int A$.

Обратно, пусть $x \in cl A \setminus int A$. Так как точка $x \in cl A$, то есть точка x является точкой прикосновения множества A , любая ее окрестность пересекается с множеством A . С другой стороны, так как $x \notin int A$, эта точка не обладает окрестностью целиком лежащей в A , то есть любая ее окрестность пересекается с множеством $X \setminus A$. Объединяя результаты получаем, что каждая окрестность точки x пересекается как с множеством A , так и с множеством $X \setminus A$, то есть является граничной точкой по определению. $\square$

Теорема 4.8. *Граница любого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $A \subset X$ – произвольное подмножество в нем. Тогда

$$X \setminus \partial A = X \setminus (cl A \setminus int A) = (X \setminus cl A) \cup int A.$$

Так как замыкание $cl A$ является замкнутым множеством (см. теорему 4.3), множество $X \setminus cl A$ является открытым. Тогда объединение двух открытых множеств $X \setminus cl A$ и $int A$ является открытым по определению топологии. Следовательно, множество $X \setminus \partial A$ открыто, а значит, множество ∂A замкнуто по определению замкнутого множества. $\square$

Свойство множества быть замкнутым является топологическим инвариантом, то есть образ замкнутого множества при гомеоморфизме является замкнутым множеством. А именно,

Теорема 4.9. *Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – произвольные топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм. Множество F замкнуто в X тогда и только тогда, когда $f(F)$ замкнуто в Y . Другими словами, гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми множествами.*

Доказательство. Пусть F – замкнутое множество в X . Тогда $X \setminus F$ – открыто. Согласно замечанию 3.3 получаем, что $f(X \setminus F)$ является открытым в Y . Следовательно, $Y \setminus f(X \setminus F)$ – замкнуто по определению. Так как f –

биекция, имеем

$$Y \setminus f(X \setminus F) = (Y \setminus f(X)) \cup f(F) = (Y \setminus Y) \cup f(F) = f(F).$$

Таким образом, $f(F)$ – замкнуто в Y .

Обратно, пусть $F \subset X$, такое что $f(F)$ замкнуто в Y . Тогда $Y \setminus f(F)$ – открыто в Y . Согласно замечанию 3.3 получаем, что $f^{-1}(Y \setminus f(F))$ – открыто в X . Так как f – биекция, имеем

$$f^{-1}(Y \setminus f(F)) = X \setminus f^{-1}(f(F)) = X \setminus F,$$

следовательно, F замкнуто. □

Также гомеоморфизмы сохраняют замыкание, внутренность и границу множества.

Теорема 4.10. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – произвольные топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, $A \subset X$ – произвольное подмножество. Тогда

$$1) f(cl A) = cl f(A); \quad 2) f(int A) = int f(A); \quad 3) f(\partial A) = \partial f(A).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Остальные доказываются аналогично (проведите доказательства самостоятельно).

Чтобы доказать равенство 1), нам нужно доказать два включения: $f(cl A) \subset cl f(A)$ и $cl f(A) \subset f(cl A)$.

Докажем первое включение. Пусть $y \in f(cl A)$ – произвольная точка. Нам нужно доказать, что $y \in cl f(A)$, то есть является точкой прикосновения множества $f(A)$, то есть надо доказать, что любая окрестность $\Omega(y)$ пересекает множество $f(A)$. Рассмотрим произвольную окрестность $\Omega(y)$. Так как f – гомеоморфизм, для окрестности $\Omega(y)$ ее полный прообраз $f^{-1}(\Omega(y)) = \Omega(x)$ будет окрестностью точки x , такой что $f(x) = y$. Так как $y \in f(cl A)$, $x \in cl A$, то есть x – точка прикосновения множества A . Тогда по определению точки прикосновения любая ее окрестность, в частности, $\Omega(x)$ пересекает множество A . Тогда $f(\Omega(x)) = f(f^{-1}(\Omega(y))) = \Omega(y)$ пересекает множество $f(A)$. Таким образом, y является точкой прикосновения множества $f(A)$, то есть $y \in cl(f(A))$.

Докажем обратное включение. Пусть $y \in cl f(A)$ – произвольная точка. Нам нужно доказать, что $y \in f(cl A)$, то есть что существует точка $x \in cl A$, такая что $f(x) = y$.

Так как f – биекция, для точки y существует единственная точка x , такая что $f(x) = y$. Надо доказать, что $x \in cl A$, то есть что любая окрестность $\Omega(x)$ точки x пересекает множество A . Рассмотрим произвольную окрестность $\Omega(x)$. Так как f – гомеоморфизм, $f(\Omega(x))$ будет окрестностью точки y . Так как точка y является точкой прикосновения множества $f(A)$, пересечение $f(\Omega(x))$ и $f(A)$ не пусто. Так как f – биекция, пересечение $f^{-1}(f(\Omega(x))) = \Omega(x)$ и $f^{-1}(f(A)) = A$ также не пусто. Таким образом, мы показали, что точка x является точкой прикосновения множества A , то есть $x \in cl A$. $\square$

4.3. Предельные и изолированные точки.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство, A – его произвольное подмножество. Точка x называется *предельной* точкой множества A , если каждая ее открытая окрестность пересекается с множеством $A \setminus \{x\}$.

Теорема 4.11. *Каждая предельная точка множества A является его точкой прикосновения.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ – предельная точка множества A . Нам нужно показать, что она будет точкой прикосновения, то есть что любая окрестность этой точки содержит элементы множества A . Так как x – предельная точка, любая ее окрестность пересекается с множеством $A \setminus \{x\}$, то она тем более пересекается с множеством A , а значит, является точкой прикосновения по определению. $\square$

Утверждение, обратное утверждению доказанной теоремы, не верно. Существуют точки прикосновения, отличные от предельных. Приведем соответствующий пример.

Пример 4.8. Пусть $A = (0, 1] \cup \{2\}$ – множество на прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Тогда любая открытая окрестность точки 2 будет пересекаться с множеством A , то есть эта точка является точкой прикосновения множества

A . С другой стороны, например, открытая окрестность $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ не пересекает множества $A \setminus \{2\}$, а значит, точка 2 не является предельной точкой.

Точки прикосновения множества A , не являющиеся предельными точками, будем называть *изолированными*. Из определений предельной точки и точки прикосновения следует, что точка x является изолированной точкой тогда и только тогда, когда существуют окрестности этой точки, не имеющие с A никаких общих точек кроме x .

Замечание 4.3. В определении изолированной точки мы брали точки x из замыкания множества A . Но их местоположение можно еще ограничить: изолированная точка всегда принадлежит множеству A (почему?). Поэтому в учебниках встречается такое определение изолированной точки (эквивалентное данному выше): точка x , принадлежащая множеству A , называется *изолированной*, если она имеет окрестность, не содержащую точек множества A , отличных от x .

4.4. Всюду плотные множества.

Пусть A – подмножество топологического пространства (X, τ) . Множество A называется *всюду плотным* в X , если $cl A = X$.

Теорема 4.12. *Множество A всюду плотно в топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда оно пересекается с каждым непустым открытым подмножеством этого пространства.*

Доказательство. Пусть A всюду плотно, то есть его замыкание $cl A$ совпадает со всем X . Тогда каждая точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества A , следовательно, любая ее окрестность (то есть любое открытое множество, содержащее эту точку) будет пересекаться с A . Так как это выполняется для каждой точки $x \in X$, получаем, что любое открытое множество пересекается с A .

Обратно, пусть любое открытое множество пересекается с A . Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Тогда любая ее окрестность пересекается с A (так как это открытое множество, содержащее точку), следовательно, x – точка

прикосновения множества A . Тогда любая точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества A , следовательно, $cl A = X$ и A является всюду плотным множеством по определению. $\square$

Следствие 4.1. Множество A всюду плотно в топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда оно пересекается с каждым непустым элементом базы топологии.

Доказательство. Пусть множество A всюду плотно в X . Тогда по доказанной теореме A пересекается с любым непустым открытым множеством из X . В частности, оно пересекается с любым непустым элементом базы топологии.

Пусть A пересекается с любым элементом базы топологии. Докажем, что оно всюду плотно, то есть, что A пересекается с любым непустым открытым множеством из X . Пусть U – любое непустое открытое множество. Тогда по определению базы топологии его можно представить как объединение множеств U_α из базы. Каждый элемент U_α пересекается с A , следовательно, с A пересекается и их объединение U . $\square$

Пример 4.9. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$ (с естественной топологией).

Действительно, базой естественной топологии являются всевозможные интервалы. Как мы знаем из курса анализа, любой интервал содержит рациональное число. Следовательно, $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$ в силу следствия 4.1.

Если топологическое пространство X имеет не более чем счетное всюду плотное подмножество A , то оно называется *сепарабельным*.

Замечание 4.4. Из теоремы 4.10 следует, что сепарабельность является топологическим инвариантом. Другими словами, если топологические пространства X и Y гомеоморфны и X сепарабельно, то Y также сепарабельно.

Из примера 4.9 следует, что прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией является сепарабельным топологическим пространством.

4.5. Задачи

1. Укажите замкнутые множества в топологическом пространстве $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.
2. Пусть прямая $\mathbb{R}$ рассматривается как топологическое подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$ (естественная топология). Существуют ли на $\mathbb{R}$ множества открытые в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ одновременно? Если да, укажите их. Каким множеством (открытым, замкнутым) будет а) (a, b) , б) $[a, b]$, в) $[a, b)$ прямой $\mathbb{R}$ в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^2$?
3. Будет ли а) отрезок, б) интервал, в) луч, г) множество рациональных точек прямой $\mathbb{R}$ замкнутым (открытым), если на ней задана а) естественная топология, б) дискретная топология, в) антидискретная топология, г) топология Зариского?
4. Будет ли треугольник (множество внутренних точек треугольника) замкнутым (открытым) множеством на плоскости $\mathbb{R}^2$, если на ней задана а) естественная топология, б) дискретная топология, в) антидискретная топология, г) метрическая топология тривиальной метрики?
5. Найдите внутренность, замыкание, и границу интервала $(0, 1)$ на прямой $\mathbb{R}$ а) с топологией Зариского, б) с дискретной топологией, в) с антидискретной топологией, в) с метрической топологией, индуцированной тривиальной метрикой.

Решение. Пусть на $\mathbb{R}$ задана топология Зариского. Обозначим $(0, 1) = A$. Начнем с внутренности множества A . По определению это множество внутренних точек множества A . Внимательно читая определение внутренней точки, мы понимаем, что искать их нужно в множестве A . Берем произвольную точку $x \in A$ и пытаемся окружить ее окрестностью, целиком лежащей в A . Вспоминаем, что в топологии Зариского открытыми множествами (а значит и окрестностями точек) будут дополнения конечных множеств прямой («палки с конечным числом дырок»). Так как каждое такое множество за крайней левой выколотой точкой и за край-

ней правой выколотой точкой содержит целый луч точек, ни одна «палка с конечным числом дырок» не может уместиться в интервал $(0, 1)$. Следовательно, ни одна точка интервала A не имеет окрестности, целиком лежащей в A . Значит, A не имеет ни одной внутренней точки и внутренность множества A есть пустое множество.

Найдем замыкание множества A . Это все точки прикосновения. Точки прикосновения множества могут находиться во всем топологическом пространстве X . Значит, нам нужно перебрать все точки прямой $\mathbb{R}$. Берем любую точку x на прямой $\mathbb{R}$ и рассматриваем любую ее окрестность. Эта окрестность представляет из себя «палку с конечным числом дырок». Если бы она не пересекалась с интервалом $(0, 1)$, ее «дырками» были бы все точки этого интервала. Но их не конечное множество (их целый континуум). Значит, любая окрестность точки x пересекается с интервалом A , то есть любая точка прямой $\mathbb{R}$ является точкой прикосновения интервала A . Итак, замыкание интервала A – это все множество $\mathbb{R}$.

Границу множества мы можем найти двумя способами: по определению и по теореме 4.7. Если уже найдены замыкание и внутренность, то второй способ проще. Воспользуемся им.

$$\partial A = cl A \setminus int A = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

Итак, границей интервала $(0, 1)$ на прямой с топологией Зариского является вся прямая $\mathbb{R}$. □

6. Докажите, что в $\mathbb{R}$ с естественной топологией $int [0, 1) = (0, 1)$, $int \mathbb{Q} = \emptyset$, $int (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.
7. Найдите замыкание, внутренность и границу множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на прямой $\mathbb{R}$ а) с топологией Зариского, б) с дискретной топологией, в) с антидискретной топологией, г) с метрической топологией, индуцированной тривиальной метрикой.
8. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дан отрезок. Найдите его замыкание, внутренность и границу, если на $\mathbb{R}^2$ задана а) дискретная топология, б) анти-

дискретная топология, в) метрическая топология, индуцированная тривиальной метрикой.

9. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дано множество A , являющееся частью плоскости, ограниченной некоторым квадратом (стороны квадрата входят в множество). Найдите замыкание множества A , внутренность и границу, если на $\mathbb{R}^2$ задана а) дискретная топология, б) антидискретная топология, в) метрическая топология, индуцированная тривиальной метрикой.
10. Найдите замыкание, внутренность и границу множества $\{1\}$ в топологическом пространстве $X = \{0, 1\}$ с топологией $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$.
11. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $A \subset X$ – произвольное подмножество. Докажите, что $cl A = X \setminus int(X \setminus A)$.
12. Приведите примеры всюду плотных множеств в а) антидискретном пространстве, б) в стрелке.
13. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотным в $\mathbb{R}$ с топологией Зариского?
14. Будет ли множество целых чисел всюду плотным в $\mathbb{R}$ а) с естественной топологией, б) с топологией Зариского?
15. Докажите, что топологическое пространство дискретно тогда и только тогда, когда в нем имеется единственное всюду плотное подмножество.
16. Укажите предельные и изолированные точки множеств $(0, 1] \cup \{2\}$ и $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}$ а) с естественной топологией, б) с топологией Зариского, в) с дискретной топологией.
17. Укажите предельные и изолированные точки множества натуральных чисел в $\mathbb{R}$ а) с естественной топологией, б) с топологией Зариского.

4.6. Дополнительные задачи

1. С помощью замкнутых множеств можно дать эквивалентное определение топологии. Пусть X – непустое множество произвольной природы. Рассмотрим семейство $\tau_F = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$, такое что

- (1) $\emptyset, X \in \tau_F$;
- (2) объединение любых двух множеств из τ_F принадлежит τ_F ;
- (3) пересечение любого семейства множеств из τ_F принадлежит τ_F .

Элементы семейства τ_F называются *замкнутыми множествами*. Докажите.

Указания. Покажите, что семейство τ_F позволяет однозначно определить семейство τ , удовлетворяющее условиям определения топологии. Для этого воспользуйтесь формулами де Моргана.

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus W_\alpha); \quad X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus W_\alpha).$$

2. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Докажите, что U открыто в X тогда и только тогда, когда каждая его точка обладает в X такой окрестностью Ω , что множество $U \cap \Omega$ открыто в топологическом подпространстве Ω . Другими словами, множество открыто тогда и только тогда, когда оно открыто в некоторой окрестности каждой своей точки. Имея в виду этот факт, говорят, что открытость множества является локальным свойством.

Доказательство. Пусть $U \subset X$ открыто в X . Пусть $x \in U$ – произвольная точка. В качестве окрестности Ω этой точки возьмем само множество U , то есть $\Omega = U$. Следовательно, $U \cap \Omega = \Omega$. Так как множество Ω открыто в топологическом подпространстве Ω (определение топологии), мы получаем, что

$$\forall x \in U \exists \Omega \in \tau : U \cap \Omega \in \tau_\Omega. \quad (4.1)$$

Обратно, пусть выполняется условие (4.1). Нам нужно доказать, что множество U открыто в X . Пусть $x \in U$ – произвольная точка. Тогда по условию существует окрестность $\Omega(x)$, такая что $U \cap \Omega(x)$ открыто в топологическом подпространстве $\Omega(x)$. Тогда по теореме 4.1 множество $U \cap \Omega(x)$ открыто в X (так как $\Omega(x)$ открыто в X). Построим такие множества для каждой точки $x \in U$. Тогда

$$U = \bigcup_{x \in U} (U \cap \Omega(x)).$$

Это множество открыто в X как объединение открытых множеств. $\square$

3. Докажите, что замкнутость не является локальным свойством.

Доказательство. Покажем, что любое открытое множество U в X является локально замкнутым, то есть для каждой его точки найдется окрестность Ω , такая что $U \cap \Omega$ является замкнутым множеством в топологическом подпространстве Ω . А значит, замкнутость в окрестностях не гарантирует замкнутости во всем пространстве X .

Пусть $x \in U$ – произвольная точка. Тогда в качестве открытой в X окрестности $\Omega(x)$ можно взять само множество U . Так как U в самом себе является дополнением пустого множества, оно является замкнутым в индуцированной топологии. $\square$

4. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с естественной топологией. Докажите, что сфера $S_r(x_0)$ является границей открытого шара $B_r(x_0)$ с тем же центром и радиусом.
5. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с естественной топологией. Докажите, что сфера $S_r(x_0)$ является границей замкнутого шара $\bar{B}_r(x_0)$ с тем же центром и радиусом.
6. Найдите сферу, не пересекающуюся с замыканием открытого шара с тем же центром и радиусом.

5. Связность топологических пространств

5.1. Определение и критерий

Понятие связности и несвязности (по крайней мере для естественной топологии) интуитивно очень хорошо понятно. Несвязное, то есть не связанное вместе, то есть распадающееся на куски. В противном случае (на куски не распадается) – связное. Теперь дадим строгие определения.

Топологическое пространство X называется *несвязным*, если его можно представить в виде объединения двух непустых, открытых, непересекающихся множеств. В противном случае X называется *связным*. Другими словами,

топологическое пространство X называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непустых непересекающихся множеств.

Пример 5.1. Рассмотрим прямую $\mathbb{R}$ с дискретной топологией. Напомним, что в дискретной топологии любое множество является открытым. Тогда прямую $\mathbb{R}$ можно представить в виде такого объединения

$$\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty).$$

Оба множества, стоящие в правой части равенства не пусты, открыты и не пересекаются. Следовательно, прямая с дискретной топологией является несвязным топологическим пространством.

Немного позже мы докажем, что прямая с естественной топологией является связной.

Понятия связности и несвязности хотелось бы ввести не только для топологических пространств, но и для подмножеств в них (формализовать наглядное представление о множестве, которое состоит из одного куска или распадается на куски). Первое, что приходит на ум – назвать несвязным множеством в топологическом пространстве X такое множество A , которое можно представить в виде объединения непустых, не пересекающихся, открытых в X множеств. Но посмотрим такой пример: $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = (0, 1] \cup [4, 6]$. Хотелось бы чтобы такое множество оказалось несвязным, так как интуиция подсказывает, что оно распадается на два куска: $(0, 1]$ и $[4, 5]$. Но эти куски не являются открытыми на прямой с естественной топологией. Значит, введенное нами «определение» требует изменений. Оно должно быть изменено так, чтобы множества $(0, 1]$ и $[4, 6]$ оказались открытыми. Открытыми они будут в топологии, которая индуцируется на A объемлющим пространством X . Эти соображения приводят нас к следующему: сначала индуцировать на A топологию, а затем к A , уже как топологическому пространству, применить определение связности (несвязности), данное выше. Формулируем строгое определение.

Подмножество A топологического пространства X называется *несвязным*,

если оно несвязно как топологическое пространство с топологией, индуцированной пространством X .

Подмножество A называется *связным*, если оно связно как топологическое пространство с топологией, индуцированной пространством X .

Пример 5.2. Пусть $X = \mathbb{R}$ с естественной топологией, $A = [0, 1) \cup (2, 3)$. По определению несвязного множества на множестве A сначала нужно индуцировать топологию. Пересекаем множество A со всевозможными интервалами прямой (и их объединениями). Мы получим всевозможные интервалы, целиком лежащие в A (и их объединения), а также множества вида $[0, a)$, где $0 < a < 1$ и $[0, 1) \cup (2, 2 + a)$. В частности, в индуцированной топологии на множестве A будут открытыми множества $[0, 1)$ и $(2, 3)$. Тогда как топологическое пространство с индуцированной топологией множество A будет несвязным, так его можно представить в виде объединения множеств $[0, 1)$ и $(2, 3)$. Следовательно, оно будет несвязным и как подмножество прямой.

Теорема 5.1. (*критерий несвязности*) *Топологическое пространство X несвязно тогда и только тогда, когда на X существует непрерывная ровно двузначная вещественная функция.*

Доказательство. Пусть X несвязно. По определению это означает, что X может быть представлено в виде

$$X = U_1 \cup U_2,$$

где U_1, U_2 – непустые, открытые, не пересекающиеся множества. Нам нужно задать отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, которое будет принимать ровно два значения и будет непрерывным (как отображение топологических пространств, причем на $\mathbb{R}$ берется естественная топология). Зададим отображение f по формуле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_1 \\ 1, & x \in U_2. \end{cases}$$

Нам осталось доказать, что это отображение непрерывно. Будем действовать по определению, то есть докажем, что для любого открытого множества из $\mathbb{R}$ его полный прообраз открыт в X . Пусть I – произвольное открытое

множество на $\mathbb{R}$. Для него возможны следующие четыре случая: $0, 1 \in I$, $0 \in I, 1 \notin I$, $0 \notin I, 1 \in I$, $0, 1 \notin I$. Заметим, что точки топологического пространства X отображаются либо в 0, либо в 1. В другие числа из $\mathbb{R}$ они не отображаются. Следовательно, непустые полные прообразы есть только у двух чисел: нуля и единицы. Остальные числа прямой $\mathbb{R}$ имеют пустые полные прообразы. Первый случай: в нуль отображаются все точки из U_1 , в единицу отображаются все точки из U_2 . В остальные числа из множества I не отображается ни одна точка из X . Собираем все вместе:

$$f^{-1}(I) = U_1 \cup U_2 = X.$$

Это открытое множество по определению топологии. Следовательно, полный прообраз I есть открытое множество. Остальные три случая разбираются аналогично. В результате получим следующее:

$$f^{-1}(I) = \begin{cases} \emptyset, & 0 \notin I, 1 \notin I, \\ U_1, & 0 \in I, 1 \notin I, \\ U_2, & 0 \notin I, 1 \in I, \\ X, & 0 \in I, 1 \in I. \end{cases}$$

Во всех четырех случаях полный прообраз I является открытым множеством. Следовательно, отображение f является непрерывным.

Итак, мы построили непрерывную ровно двузначную вещественную функцию на X .

Обратно, пусть на топологическом пространстве X задана непрерывная, ровно двузначная вещественная функция. Другими словами, на X задано отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, которое каким-то точкам $x \in X$ ставит в соответствие число a , а остальным точкам из X ставит в соответствие число $b \neq a$. Нам нужно доказать, что X является несвязным, то есть, что его можно представить в виде объединения двух непустых, непересекающихся, открытых множеств. Пусть для определенности $a < b$. Рассмотрим число $c = \frac{a+b}{2}$. Обозначим $U_1 = f^{-1}((-\infty, c))$ и $U_2 = f^{-1}((c, +\infty))$. Это непустые ($f^{-1}(a) \subset U_1$, $f^{-1}(b) \subset U_2$), открытые (как полные прообразы открытых множеств при непрерывном отображении f). Если предположить, что пересече-

ние множеств U_1 и U_2 не пусто, то есть существует $x \in U_1 \cap U_2$, то получим, что $f(x) \in (-\infty, c) \cap (c, +\infty) = \emptyset$, что противоречит определению f . Наконец,

$$X = (f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)) \subset (U_1 \cup U_2).$$

Так как $U_1, U_2 \subset X$, получим $X = U_1 \cup U_2$. Таким образом, мы показали, что пространство X несвязно. $\square$

Теорема 5.2. *Замыкание связного множества связно. Другими словами, если A – связное множество в топологическом пространстве X , то $cl A$ также связное множество в X .*

Доказательство. Предположим, что множество $cl A$ несвязно. Тогда $cl A = U_1 \cup U_2$, где U_1, U_2 – непустые, непересекающиеся, открытые в $cl A$ множества. По определению индуцированной топологии существуют открытые в X множества V_1 и V_2 , такие что $U_1 = V_1 \cap cl A$, $U_2 = V_2 \cap cl A$. Так как множество U_1 не пусто, множество V_1 содержит хотя бы одну точку из $cl A$, то есть является открытой окрестностью некоторой точки прикосновения множества A . Тогда по определению точки прикосновения пересечение множеств V_1 и A не пусто. Далее, так как $A \subset cl A$, получим что $(V_1 \cap A) \subset (V_1 \cap cl A) = U_1$. Аналогичным образом получаем, что непустое множество $V_2 \cap A \subset U_2$. По определению индуцированной топологии множества $V_1 \cap A$ и $V_2 \cap A$ открыты в A . Они не пересекаются, так как являются подмножествами не пересекающихся множеств U_1 и U_2 . Кроме того, мы показали, что эти множества не пусты.

Наконец, покажем, что $A = (V_1 \cap A) \cup (V_2 \cap A)$. Имеем

$$\begin{aligned} A = cl A \cap A &= (U_1 \cup U_2) \cap A = ((V_1 \cap cl A) \cup (V_2 \cap cl A)) \cap A = \\ &= (V_1 \cap cl A \cap A) \cup (V_2 \cap cl A \cap A) = (V_1 \cap A) \cup (V_2 \cap A). \end{aligned}$$

Итак, мы получаем, что A представимо в виде объединения непустых, непересекающихся, открытых множеств, то есть A несвязно по определению. Это противоречит условию. Следовательно, наше предположение не верно и $cl A$ связно. $\square$

5.2. Связность – топологический инвариант.

Свойство связности сохраняется при непрерывных отображениях. Чтобы доказать это, нам потребуются некоторые вспомогательные понятия.

Если A – подмножество множества X , а B – подмножество множества Y , то всякому отображению $f : X \rightarrow Y$, такому, что $f(A) \subset B$, отвечает отображение $ab(f) : A \rightarrow B$ ($x \in A \rightarrow f(x)$), которое называется *сокращением отображения f на A, B* или *подотображением*. Если $B = Y$, то отображение $ab(f) : A \rightarrow Y$ обозначается $f|_A$ и называется *сужением* отображения f на множество A .

Лемма 5.1. *Подотображение непрерывного отображения непрерывно. Другими словами, если $f : X \rightarrow Y$ непрерывное отображение топологических пространств, то для любых подмножеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ ($f(A) \subset B$) отображение $ab(f) : A \rightarrow B$ непрерывно (относительно индуцированных топологий).*

Доказательство. Пусть V – произвольное открытое подмножество в B . Тогда $V = U \cap B$, где U – некоторое открытое подмножество в Y и

$$ab(f)^{-1}(V) = ab(f)^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U) \cap A$$

является открытым подмножеством в A по определению индуцированной топологии. Таким образом, отображение $ab(f)$ является непрерывным по определению. $\square$

Следствие 5.1. Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $ab(f) : X \rightarrow f(X)$.

Доказательство. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то отображение $ab(f)$ непрерывно по доказанной лемме.

Обратно, пусть отображение $ab(f) : X \rightarrow f(X)$ непрерывно. Покажем, что непрерывно отображение f . Пусть V – произвольное открытое множество в Y . Если $V \cap f(X) = \emptyset$, то полный прообраз $f^{-1}(V)$ есть пустое множество, а значит открыто в X по определению топологии. Если $V \cap f(X) \neq \emptyset$, то,

во-первых, множество $V \cap f(X)$ открыто в $f(X)$ и, во-вторых,

$$f^{-1}(V) = ab(f)^{-1}(V \cap f(X)).$$

Это множество открыто в X , так как отображение $ab(f)$ непрерывно. Таким образом, полный прообраз любого открытого множества в Y открыт в X , то есть отображение f непрерывно по определению. $\square$

Теперь мы можем приступить к доказательству сохранения свойства связности топологического пространства при непрерывных отображениях.

Теорема 5.3. *Если $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение топологических пространств и X связно, то $f(X)$ является связным множеством в Y .*

Доказательство. Предположим, что множество $f(X)$ несвязно. По определению несвязности его можно представить в виде $f(X) = V_1 \cup V_2$, где V_1, V_2 – непустые, непересекающиеся открытые множества (в топологии индуцированной топологией Y). Рассмотрим множества $U_1 = ab(f)^{-1}(V_1)$ и $U_2 = ab(f)^{-1}(V_2)$ – полные прообразы множеств V_1 и V_2 . По следствию 5.1 множества U_1 и U_2 открыты. Очевидно, что они не пусты. Докажем, что множества U_1 и U_2 не пересекаются. Предположим противное, то есть существует точка $x \in U_1 \cap U_2$. Так как x принадлежит полному прообразу множества V_1 , ее образ $f(x)$ принадлежит множеству V_1 . Аналогично получаем, что $f(x)$ принадлежит V_2 . По определению отображения точка $f(x)$ однозначно определена, а значит, она принадлежит множеству $V_1 \cap V_2$. Мы получаем, что пересечение этих множеств не пусто, что противоречит условию. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно наше предположение было не верно и множества U_1 и U_2 не пересекаются. В результате мы получили, что топологическое пространство X представимо в виде объединения двух открытых, непустых, непересекающихся множеств, то есть оно несвязно. Это противоречит условию теоремы. Следовательно, множество $f(X)$ связно. $\square$

Следствие 5.2. Связность топологический инвариант. Другими словами, если топологические пространства X и Y гомеоморфны и X связно, то Y также связно.

5.3. Связные множества на прямой $\mathbb{R}$.

Будем называть *промежутками* на прямой $\mathbb{R}$ множества (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, где a, b – вещественные числа или бесконечности. Обозначать промежутки будем $\langle a, b \rangle$.

Теорема 5.4. *Все промежутки на $\mathbb{R}$ (с естественной топологией) связны.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что промежуток $\langle a, b \rangle$ несвязен. Тогда на нем существует ровно двузначная непрерывная функция $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим ее значения c и d ($c < d$). Тогда существуют числа $\alpha, \beta \in \langle a, b \rangle$, такие, что $f(\alpha) = c$, $f(\beta) = d$, причем $\alpha \neq \beta$. Следовательно определяется отрезок $[\alpha, \beta]$ или $[\beta, \alpha]$ (в зависимости от того какое число меньше). Обозначим этот отрезок через I . Сужение $f|_I$ будет непрерывной функцией, а значит она принимает на этом отрезке все значения между c и d . Таким образом, мы получаем противоречие с ровно двузначностью функции f . Следовательно, промежуток $\langle a, b \rangle$ является связным множеством.

Для прямой $\mathbb{R}$ рассуждения проводятся дословно. □

Пример 5.3. Покажем, что окружность S является связным множеством на плоскости $\mathbb{R}^2$ (с естественной топологией). Как мы знаем, окружность с выколотой точкой $S \setminus \{x\}$ гомеоморфна прямой $\mathbb{R}$ (здесь гомеоморфизмом является стереографическая проекция). Так как $\mathbb{R}$ связное множество, множество $S \setminus \{x\}$ также является связным. Так как $S = cl(S \setminus \{x\})$ (почему?), S является связным множеством в силу теоремы 5.2.

5.4. Компоненты связности

Компонентой связности топологического пространства (X, τ) называется всякое его связное подмножество, не содержащееся ни в каком другом (строго большем) связном подмножестве пространства X .

Из определения компонент связности следуют свойства:

1) Каждая точка топологического пространства содержится в некоторой компоненте связности, причем только в одной: эта компонента связности полу-

чается как объединение всех связных множеств, содержащих эту точку.

2) Любые две компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают.

Пример 5.4. Пусть $A = (0, 1] \cup [4, 6]$ – подмножество прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Тогда множество A состоит из двух компонент: $(0, 1]$ и $[4, 6]$.

Если поменять на $\mathbb{R}$ топологию на дискретную, то A будет иметь бесконечно много компонент связности. Каждая точка этого множества будет отдельной компонентой связности.

5.5. Применение понятия связности для доказательства негомеоморфности топологических пространств

Лемма 5.1 и теорема 5.3 дает прием для доказательства негомеоморфности некоторых топологических пространств. Пусть даны два связных топологических пространства X и Y . Допустим, что они гомеоморфны. Тогда существует гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$. Удалим из пространства X некоторую точку $\{x\}$, а из пространства Y точку $f(x)$. Обозначим множества $X \setminus \{x\} = A$, $Y \setminus \{f(x)\} = B$. При этом выберем точку x так, чтобы множество A осталось связным, а множество B стало несвязным. Отображение $ab(f) : A \rightarrow B$ будет непрерывным, следовательно должно сохранять связность. Но $ab(f)(A) = B$, A связно и B несвязно. Мы получаем противоречие. Следовательно, исходные топологические пространства не гомеоморфны.

Пример 5.5. Пусть $X = S$ – окружность (с топологией, индуцированной естественной топологией плоскости), Y – прямая $\mathbb{R}$. Покажем, что они не гомеоморфны.

Предположим противное, то есть предположим, что окружность и прямая гомеоморфны. Тогда существует гомеоморфизм $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. В частности, f непрерывно. Тогда в силу леммы 5.1 отображение $ab(f) : S \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ является непрерывным биективным отображением. Как мы видели в примере 5.3 множество $S \setminus \{x\}$ связно. Множество $\mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ несвязно (почему?). Мы получаем противоречие с теоремой 5.3. Следовательно, прямая и окружность не гомеоморфны.

5.6. Задачи

1. Являются ли связными топологическое пространство а) с антидискретной топологией, б) с дискретной топологией?

Решение. Пусть X – топологическое пространство с антидискретной топологией. Вспоминаем, что в антидискретной топологии всего два открытых множества – пустое и само X , то есть не пустое множество всего одно. Следовательно, представить X в виде объединения двух непустых непесекающихся открытых множеств мы не сможем. Значит, X – связное топологическое пространство.

Пусть X – топологическое пространство с дискретной топологией. В дискретной топологии все множества являются открытыми. Возьмем любое непустое множество A , отличное от X . Тогда $X = A \cup (X \setminus A)$. Множество $X \setminus A$ тоже открыто и не пусто. Следовательно, по определению получаем, что X является несвязным. $\square$

2. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ связно на прямой $\mathbb{R}$ (с естественной топологией)?
3. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ связно на прямой $\mathbb{R}$ (с топологией Зариского)?
4. Будет ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ связно на прямой $\mathbb{R}$ (с дискретной топологией)?
5. Будет ли множество $(1, 2) \cup (4, 5]$ связным на прямой $\mathbb{R}$ а) с естественной топологией, б) с дискретной топологией, в) с антидискретной топологией, в) с топологией Зариского, г) с метрической топологией, индуцированной тривиальной метрикой? Ответ обосновать.
6. Докажите, что интервал $(0, 1)$ не гомеоморфен отрезку $[0, 1]$ (топология естественная).
7. Докажите, что множество $[0, +\infty)$ не гомеоморфно прямой $\mathbb{R}$ (естественная топология).

8. Докажите, что отрезок и квадрат не гомеоморфны (естественная топология).
9. Докажите, что прямая $\mathbb{R}$ и плоскость $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфны (естественная топология).
10. Докажите, что окружность и восьмерка не гомеоморфны (топология естественная).

6. Компактность.

6.1. Определение и примеры.

Открытым покрытием топологического пространства X называется семейство $\lambda = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ открытых подмножеств этого пространства, такое, что $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Другими словами, семейство открытых подмножеств из пространства X называется его открытым покрытием, если объединение точек всех этих выбранных множеств дает все X .

Если в семействе λ существует подсемейство μ , также образующее открытое покрытие пространства X , то μ называется (*открытым*) *подпокрытием* покрытия λ .

Пример 6.1. Рассмотрим в качестве топологического пространства прямую $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Рассмотрим семейство

$$\lambda = \{(-\infty, 2), (1, 4), (2, 3), (3, +\infty)\}.$$

Это семейство является открытым покрытием прямой, так как, во-первых, все множества этого семейства открыты и, во-вторых, объединение этих множеств совпадает с $\mathbb{R}$.

Подсемейство

$$\mu = \{(-\infty, 2), (1, 4), (3, +\infty)\}$$

семейства λ является подпокрытием, так как объединение его элементов также совпадает с $\mathbb{R}$. Это покрытие конечно, так как количество его элементов конечно (равно трем).

Семейство

$$\mu_1 = \{(-\infty, \frac{3}{2}), (1, 4), (3, +\infty)\}$$

является открытым покрытием прямой, но не является подпокрытием покрытия λ , так как множества $(-\infty, \frac{3}{2})$ нет в списке множеств λ .

Открытое покрытие

$$\lambda = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

(числа a и b принимают всевозможные вещественные значения) является бесконечным, так как количество его элементов бесконечно (континуум). Ниже мы увидим, что из этого открытого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие, но можно выделить, например, счетное подпокрытие

$$\mu = \{(a, a + 2), a \in \mathbb{Z}\}.$$

Здесь a принимает всевозможные целые значения.

Открытым покрытием подмножества A топологического пространства X называется семейство λ открытых множеств из X , таких что множество A содержится в их объединении.

Пример 6.2. Возьмем в качестве топологического пространства прямую $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Рассмотрим множество $A = [1, 3]$ – отрезок этой прямой. Семейства

$$\lambda_1 = \{(0, 2), (1, 4)\}; \quad \lambda_2 = \{(1 - \varepsilon, 3 + \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1\}$$

(ε принимает всевозможные значения от 0 до 1) являются примерами покрытий множества A , соответственно, конечным и бесконечным.

Топологическое пространство (подмножество топологического пространства) называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Компактное хаусдорфово пространство называется *компактом*.

Например, пустое множество и любое конечное множество компактны (почему?).

Теорема 6.1. *Прямая $\mathbb{R}$ с естественной топологией не компактное топологическое пространство.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда из любого открытого покрытия пространства $\mathbb{R}$ можно выделить конечное подпокрытие. Возьмем в качестве такого покрытия покрытие $\lambda = \{(a, b), a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. В силу предположения существует подпокрытие $\mu = \{(a_i, b_i), i = 1, \dots, n\}$ (из всех интервалов, находящихся в семействе λ мы выбираем конечное число интервалов, причем объединив точки этих интервалов, мы получим всю прямую). Обозначим $\alpha = \min\{a_i\}$, $\beta = \max\{b_i\}$. Тогда объединение интервалов из подпокрытия μ будет содержаться в интервале (α, β) , а значит не будет покрытием всей прямой $\mathbb{R}$. Это противоречие. Значит, наше предположение было не верным и прямая $\mathbb{R}$ не является компактной. $\square$

Теорема 6.2. *Отрезок $I = [a, b]$ прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией компактен.*

Доказательство. Предположим противное, то есть предположим, что отрезок I не компактен. Тогда существует его открытое покрытие λ , из которого невозможно выделить конечное подпокрытие.

Введем новый термин. Пусть дано множество A и какое-то его открытое покрытие λ . Будем называть множество A *не конечно покрываемым покрытием λ* (короче, НКП), если для любой конечной подсистемы $\mu = \{\mu_i\}$ покрытия λ имеем $A \not\subset \cup \mu_i$. Другими словами, какие бы конечные подсистемы покрытия λ мы не брали, покрыть множество A ими мы не сможем.

В нашем случае I с покрытием λ является НКП. Тогда НКП является хотя бы одна из его половинок. Действительно, если бы каждую половину отрезка можно было бы покрыть конечным семейством множеств из λ , то объединив их, мы получили конечное семейство подмножеств из λ , которое покрывало бы все I .

Обозначим через $I_1 = [a_1, b_1]$, где a_1 и b_1 – либо точки a и $\frac{a+b}{2}$, либо $\frac{a+b}{2}$ и b , который является НКП. Делим I_1 пополам. Одна из половинок НКП.

Продолжая этот процесс дальше, получим для любого натурального n НКП отрезок $I_n = [a_n, b_n]$, причем

$$I \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

и длины этих отрезков $\frac{b-a}{2^n}$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Мы получаем систему вложенных отрезков. Тогда существует точка ξ , такая что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\xi\}.$$

Точка ξ принадлежит исходному отрезку I , а значит, попадает в некоторый элемент U покрытия λ . Так как U – открытое множество, существует открытый шар $B_\varepsilon(\xi) \subset U$. Также существует натуральное число n_0 , такое, что длина отрезка I_{n_0} будет удовлетворять неравенству $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Тогда $I_{n_0} \subset B_\varepsilon(\xi) \subset U$. Таким образом, получаем, что НКП отрезок I_{n_0} содержится в одном элементе покрытия λ , а значит, он конечно покрываем. Полученное противоречие показывает, что I не является НКП, а значит, компактен. $\square$

n -мерным кубом в $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$I^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^i \in [a, b]\}.$$

Замечание 6.1. Разбивая n -мерный куб на 2^n половинных кубиков аналогично предыдущей теореме можно доказать, что множество I^n компактно.

Компактность является топологическим инвариантом.

Теорема 6.3. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) – гомеоморфные топологические пространства и (X, τ_X) – компактно. Тогда (Y, τ_Y) также компактно.

Доказательство. Обозначим гомеоморфизм данных топологических пространств $f : X \rightarrow Y$. Пусть $\lambda = \{V_\alpha\}$ – произвольное открытое покрытие пространства Y . Так как отображение f , в частности, является биективным и непрерывным, семейство

$$\tilde{\lambda} = \{U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)\}$$

будет открытым покрытием топологического пространства X . Так как X компактно, из покрытия $\tilde{\lambda}$ можно выделить конечное подпокрытие

$$\tilde{\mu} = \{U_1, \dots, U_n\}.$$

Применим к каждому открытому множеству $U_1, \dots, U_n$ отображение f . Так как f – биекция, образами этих множеств будут множества из семейства λ

(отображение f вернет на место переброшенные в X множества). Другими словами, мы получим семейство

$$\mu = \{V_1 = f(U_1), \dots, V_n = f(U_n)\} \subset \lambda,$$

которое является подпокрытием покрытия λ топологического пространства Y . Итак, мы смогли из произвольного открытого покрытия пространства Y выделить конечное подпокрытие, следовательно, пространство Y компактно. $\square$

Пример 6.3. Так как интервал гомеоморфен прямой (топология естественная), из теоремы 6.1 следует, что интервал не является компактным множеством.

Докажем еще одно свойство компактных множеств, которое пригодится нам в дальнейшем.

Теорема 6.4. *Замкнутое подмножество компактного пространства является компактным.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство (X, τ) компактно, множество $A \subset X$ замкнуто в X . Рассмотрим произвольное открытое покрытие множества A открытыми множествами из X . Обозначим это покрытие через $\lambda = \{U_\alpha\}$. Так как A замкнуто в X , множество $X \setminus A$ открыто и семейство $\lambda \cup \{X \setminus A\}$ образует открытое покрытие пространства X . Так как пространство X компактно, из покрытия $\lambda \cup \{X \setminus A\}$ можно выделить конечное подпокрытие μ . Если μ содержит множество $X \setminus A$, то выбросив его получим конечное подпокрытие покрытия λ . В противном случае само μ будет конечным подпокрытием λ . Таким образом, из произвольного открытого покрытия A мы выбрали конечное подпокрытие, следовательно, A компактно. $\square$

6.2. Компактность в метрических пространствах.

Множество A метрического пространства (X, ρ) называется *ограниченным*, если существует такое число $C > 0$, что для любых точек $x, y \in A$ имеем $\rho(x, y) < C$. Легко видеть, что множество A ограничено тогда и только тогда,

когда оно является подмножеством некоторого открытого шара (докажите самостоятельно).

Замечание 6.2. Пусть A – подмножество в $\mathbb{R}^n$. Оно является ограниченным тогда и только тогда, когда содержится внутри некоторого n -мерного куба. Действительно, как мы видели, подмножество A является ограниченным тогда и только тогда, когда оно содержится внутри некоторого шара $B_r(x_0)$. Рассмотрим куб

$$I^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) | x^i \in [x_0^i - r, x_0^i + r]\},$$

где $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Покажем, что шар $B_r(x_0)$ является подмножеством куба I^n . Пусть $y = (y^1, \dots, y^n)$ – произвольная точка шара $B_r(x_0)$. Тогда $\rho(x_0, y) < r$, то есть

$$(y^1 - x_0^1)^2 + \dots + (y^n - x_0^n)^2 < r^2.$$

Так как все слагаемые в левой части неравенства неотрицательны, получим, что для любого $i = 1, \dots, n$ $|y^i - x_0^i| < r$ или $x_0^i - r < y^i < x_0^i + r$. Это означает, что $y \in I^n$.

Обратно, пусть множество A является подмножеством некоторого куба $I^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) | x^i \in [a, b]\}$. Покажем, что оно ограничено. Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ – произвольные точки множества A . Так как они являются точками куба I^n , получим $x^i \in [a, b]$, $y^i \in [a, b]$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда $|x^i - y^i| < b - a$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$(\rho(x, y))^2 = (x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2 < n(b - a)^2,$$

то есть $\rho(x, y) < \sqrt{n}(b - a)$. Следовательно, множество A ограничено по определению.

Теорема 6.5. Компактное метрическое пространство с метрической топологией ограничено.

Доказательство. Пусть (X, ρ) – компактное метрическое пространство.

Рассмотрим его открытое покрытие $\lambda = \{B_1(x), x \in X\}$ открытыми шарами единичного радиуса. Так как X компактно, в нем существует конечное

подпокрытие $\mu = \{B_1(x_1), \dots, B_1(x_n)\}$. Обозначим через $c = \max\{\rho(x_i, x_j)\}$ для точек $x_1, \dots, x_n$ (это центры шаров) и положим $C = c + 2$.

Пусть $x, y \in X$ – произвольные точки. Тогда существуют индексы i и j , такие что $x \in B_1(x_i)$, $y \in B_1(x_j)$. Имеем

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x_j) + \rho(x_j, y) < 1 + c + 1 = C.$$

Таким образом, существует число $C > 0$, такое что $\rho(x, y) < C$ для любых $x, y \in X$, а значит, ограничено. $\square$

Следствие 6.1. Компактное подмножество метрического пространства ограничено (топология на подмножестве индуцирована метрической топологией объемлющего пространства).

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Будем называть *открытой окрестностью множества* $A \subset X$ любое открытое множество в X , содержащее A . Будем обозначать открытую окрестность множества A через $\Omega(A)$.

Лемма 6.1. Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство и $A \subset X$ – компактно. Тогда для любого элемента $x \in X \setminus A$ существует открытая окрестность $\Omega(x)$ и открытая окрестность $\Omega^x(A)$ множества A (которая зависит от выбора элемента x), такие что $\Omega(x) \cap \Omega^x(A) = \emptyset$.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in X \setminus A$. Пусть $y \in A$ – произвольная точка. Так как X хаусдорфово и точки x и y различны, существуют окрестность $\Omega(y)$ точки y и окрестность $\Omega^y(x)$ точки x (окрестность точки x меняется в зависимости от выбора точки y), такие, что

$$\Omega^y(x) \cap \Omega(y) = \emptyset.$$

Тогда $A \subset \cup\{\Omega(y), y \in A\}$. Рассмотрим открытое покрытие

$$\lambda = \{A \cap \Omega(y), y \in A\}.$$

Так как A компактно, существует конечное подпокрытие

$$\mu = \{A \cap \Omega(y_i), i = 1, \dots, n\}.$$

Тогда $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap \Omega(y_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n \Omega(y_i) \equiv \Omega^x(A)$ – требуемая окрестность множества A (открытое множество, содержащее A). Обозначим $\Omega(x) = \bigcap_{i=1}^n \Omega^{y_i}(x)$.
Имеем

$$\begin{aligned} \Omega^x(A) \cap \Omega(x) &= (\bigcup_{i=1}^n \Omega(y_i)) \cap \Omega(x) = \bigcup_{i=1}^n (\Omega(y_i) \cap \Omega(x)) \subset \\ &\subset \bigcup_{i=1}^n (\Omega(y_i) \cap \Omega^{y_i}(x)) = \emptyset. \end{aligned}$$

□

Теорема 6.6. *Если подмножество A хаусдорфова топологического пространства X компактно, то A замкнуто в X .*

Доказательство. Покажем, что дополнение A в X , то есть множество $X \setminus A$, открыто в X . Тогда по определению получим, что A замкнуто.

По доказанной лемме для любой точки $x \in X \setminus A$ существуют непересекающиеся окрестности $\Omega(x)$ и $\Omega^x(A)$. Тогда окрестность $\Omega(x)$ не пересекается и с множеством A , а значит, целиком лежит в множестве $X \setminus A$. Тогда $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} \Omega(x)$, а значит, открыто в X . □

Следствие 6.2. Компактное подмножество метрического пространства замкнуто.

Замечание 6.3. Следствия 6.1 и 6.2 утверждают, что любое компактное подмножество метрического пространства ограничено и замкнуто. Обратное, вообще говоря, не верно. В качестве контрпримера рассмотрим множество $X = (0, 1) \cup [2, 3]$ с метрикой, индуцированной канонической метрикой прямой $\mathbb{R}$. Это метрическое пространство. Множество $(0, 1)$ замкнуто и ограничено в X , но не является компактным (см. пример 6.3).

Однако в пространствах $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией компактность и ограниченность+замкнутость эквивалентны.

Теорема 6.7. *Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Пусть подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$ компактно. Так как $\mathbb{R}^n$ является метрическим пространством (метрика каноническая), согласно следствиям 6.1 и 6.2 множество A ограничено и замкнуто.

Обратно, пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто. Так как оно ограничено, A является подмножеством некоторого n -мерного куба I^n . Так как куб компактен и A замкнуто, то A компактно согласно теореме 6.4. $\square$

6.3. Задачи

1. Компактна ли прямая $\mathbb{R}$ 1) с антидискретной топологией, 2) с дискретной топологией, 3) с топологией Зариского?

Решение. 1) В антидискретной топологии всего два открытых множества – пустое и само $\mathbb{R}$. Тогда любое открытое покрытие прямой состоит из какого-либо числа экземпляров множества $\mathbb{R}$. В качестве открытого подпокрытия из любого такого покрытия выделяется подпокрытие $\mu = \{\mathbb{R}\}$. Следовательно, прямая $\mathbb{R}$ с антидискретной топологией компактна.

2) Напомним, что дискретная топология прямой состоит из всех подмножеств прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим открытое покрытие λ , состоящее из всех одноточечных подмножеств $\mathbb{R}$, то есть

$$\lambda = \{\{x\}, x \in \mathbb{R}\}.$$

Предположим, что из него можно выделить конечное подпокрытие

$$\mu = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Тогда по определению подпокрытия $\mathbb{R} = \cup_{i=1}^N x_i$, то есть прямая состоит из конечного числа точек. Что не верно. Полученное противоречие показывает, что из предъявленного покрытия λ нельзя выделить конечное подпокрытие, следовательно, прямая $\mathbb{R}$ с дискретной топологией не компактна.

3) Напомним, что в топологии Зариского открытыми множествами являются прямые с конечным числом выколотых точек (а также пустое множество и само $\mathbb{R}$). Любое открытое покрытие состоит из прямых такого вида. Опишем алгоритм, по которому из любого такого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Пусть дано открытое покрытие λ . Возьмем любой элемент этого покрытия. Если нам попала сама

прямая $\mathbb{R}$, то конечное подпокрытие имеет вид $\mu = \{\mathbb{R}\}$. Если мы вытащили прямую с конечным числом выколотых точек $U_1 = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, то на следующем шаге возьмем из покрытия λ такой элемент U_2 , чтобы хотя бы одна из точек $x_1, \dots, x_N$ ему принадлежала. Если объединение $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$, то нужное подпокрытие имеет вид $\mu = \{U_1, U_2\}$. В противном случае процесс продолжается аналогичным образом (надо найти элемент $U_3 \in \lambda$, который содержал бы еще хотя бы одну из оставшихся не закрытых точек). Так как число выколотых точек в U_1 конечно, описанный алгоритм конечен. Он позволяет получить конечное подпокрытие μ . Следовательно, прямая с топологией Зариского является компактной. $\square$

2. Будет ли множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел на прямой $\mathbb{R}$ 1) с топологией Зариского, 2) антидискретной топологией, 3) дискретной топологией компактным?
3. Будет ли множество $A = [1, 2)$ на прямой $\mathbb{R}$ 1) с топологией Зариского, 2) антидискретной топологией, 3) дискретной топологией компактным?
4. Будет ли множество $A = \{1\}$ на прямой $\mathbb{R}$ 1) с топологией Зариского, 2) антидискретной топологией, 3) дискретной топологией 4) естественной топологией компактным?
5. Приведите пример незамкнутого компактного подмножества какого-либо топологического пространства.
6. Компактно ли множество $[1, 2)$ в $\mathbb{R}$ (с естественной топологией)?
7. Пусть S – окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ (с естественной топологией). Докажите, что она компактна.
8. Пусть $\bar{B}_r(x_0)$ – замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^3$ (с естественной топологией). Докажите, что он компактен.
9. Пусть S – окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ (с дискретной топологией). Будет ли S компактным множеством?

10. Пусть $\bar{B}_r(x_0)$ – замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^3$ (с дискретной топологией). Будет ли $\bar{B}_r(x_0)$ компактным множеством?

Литература

1. *Ю.Г. Борисович, Н.М.Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко* Введение в топологию. — М.: Наука, Физматлит, 1995. — 416 с.
2. *О.Я.Виро, О.А.Иванов, Н.Ю.Нецветаев, В.М.Харламов* Элементарная топология. — М.: Издательство МЦНМО, 2010. — 356 с.
3. *Н.И.Гусева, Н.С.Денисова, О.Ю.Тесля* Сборник задач по геометрии Часть 2. — М.: Кнорус, 2012 — 528 с.

Игнаточкина Лия Анатольевна

ТОПОЛОГИЯ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Издательство «Прометей»
115035 Москва, ул. Садовническая, д.72, стр.1, офис 6.
Тел./факс: 8(495) 799-54-29
E-mail: info@prometey.su

Подписано в печать 7.12.2015
Формат 60 × 84/16. Объем 4,2 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 521.

ISBN 978-5-9907453-1-5

