**Л.А. Игнаточкина, А.В. Никифорова**

# ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ МНОГООБРАЗИЙ

*Учебное пособие*

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

**Москва**
**2017**

**УДК 514.76**
**ББК 22.151я73**
**И26**

**И26** **Игнаточкина Л.А., Никифорова А.В.** Введение в геометрию многообразий: Учебное пособие. — М.: Прометей, 2017. — С. 80.

Учебное пособие написано для студентов четвертого курса МПГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Математика». В пособии рассматривается классический пример многообразия – гиперповерхность в арифметическом пространстве. С помощью этого несложного примера студенты знакомятся с понятиями параметризованной кривой, векторного поля, ковариантного дифференцирования векторных полей, параллельного переноса.

ISBN 978-5-906879-93-6

# Содержание

# 1. Арифметическое пространство

## 1.1. Определения

Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел.

Напомним, что *(вещественным) векторным пространством* называется непустое множество $V$ произвольной природы (что за элементы там находятся нас не интересует; это могут быть числа, многочлены, функции, матрицы, камни, яблоки и т.п.), если на нем заданы две операции. Первая операция – *сложение элементов* из $V$. Это отображение вида

$$+ : V \times V \to V$$

(любым двум элементам из $V$ ставится в соответствие элемент из $V$; пишут $x + y = z$, где $x, y, z \in V$). Вторая операция – *умножение на вещественное число.* Это операция вида

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$

(любому вещественному числу и любому элементу из $V$ ставится в соответствие элемент из $V$; пишут $\lambda x = y$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$). Алгоритмы вычисления элементов в этих операциях могут быть какими угодно, но для них должны выполняться 8 условий (*аксиом векторного пространства*). Перечислим их.

$1^0$. $x + y = y + x$ (коммутативность);

$2^0$. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);

$3^0$. Существует элемент $0 \in V$, такой что для любого элемента $x \in V$ выполняется $x + 0 = x$ (элемент 0 называется *нуль-вектором*);

$4^0$. Для любого элемента $x \in V$ существует элемент $-x \in V$, такой что $x + (-x) = 0$ (элемент $-x$ называется *противоположным* элементу $x$);

$5^0$. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

$6^0$. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

$7^0$. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

$8^0$. $1x = x$,

где $x, y \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – произвольные элементы. Элементы векторного пространства $V$ называются *векторами.*

**Замечание** 1.1. В курсе аналитической геометрии термин «вектор» уже встречался, и там он обозначался буквой со стрелкой. Это обусловлено тем, что в аналитической геометрии под вектором понимается конкретный объект – множество всех направленных отрезков окружающего нас пространства, равных по длине и направлению. Так как в определении векторного пространства вектора являются объектами произвольной природы, стрелку над буквой, обозначающей вектор, мы ставить не будем. Оставим ее для конкретных векторов, а именно для векторов, которые состоят из направленных отрезков.

*Линейной комбинацией* векторов $a_1, \ldots, a_k$ векторного пространства $V$ называется вектор

$$b = \alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \ldots + \alpha^k a_k,$$

где $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ – произвольные вещественные числа. Будем называть их коэффициентами линейной комбинации. Заметим, что верхний индекс у буквы $\alpha$ – это номер коэффициента, а не степень.

Система векторов $a_1, \ldots, a_k \in V$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha^1 a_1 + \ldots + \alpha^k a_k = 0. \qquad (*)$$

Если равенство $(*)$ выполняется только в случае, когда $\alpha^1 = \ldots = \alpha^k = 0$, то система векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется *линейно независимой*. Векторы линейно зависимой системы называются *линейно зависимыми*, а линейно независимой системы – *линейно независимыми*.

Добавим к 8 аксиомам векторного пространства еще две аксиомы, которые называются *аксиомами размерности*.

$9^0$. В векторном пространстве $V$ существует линейно независимая система из $k$ векторов.

$10^0$. В векторном пространстве $V$ любая система из $k+1$ вектора линейно зависима.

Векторное пространство $V$, которое удовлетворяет аксиомам $9^0$, $10^0$, называется *$k-$мерным векторным пространством* и обозначается $V^k$. Число $k$ называется *размерностью* векторного пространства $V^k$.

*Базисом* $k-$ мерного векторного пространства $V^k$ называется упорядоченная линейно независимая система векторов $(e_1, \ldots, e_k)$ из $V^k$, такая что любой вектор $x \in V^k$ представим в виде линейной комбинации

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^k e_k.$$

Упорядоченная система вещественных чисел $(x^1, \ldots, x^k)$ называется *координатами вектора* $x$ в базисе $(e_1, \ldots, e_k)$. Будем говорить в этом случае, что *вектор* $x$ *раскладывается по базису* $(e_1, \ldots, e_k)$.

**Замечание** 1.2. Если доказать, что в векторном пространстве $V$ существует базис, то оно будет $k$-мерным, причем $k$ равно количеству векторов в базисе. В дальнейшем, определяя размерность пространства, мы будем искать его базис и по количеству векторов базиса узнавать размерность векторного пространства.

## 1.2. Арифметическое пространство

*Арифметическим пространством* называется множество

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) : x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}\}.$$

Другими словами, арифметическое пространство – это множество, состоящее из упорядоченных $n$-ок вещественных чисел.

**Теорема** 1.1. *Арифметическое пространство является $n$-мерным векторным пространством.*

*Доказательство.* Посмотрим на определение векторного пространства. Мы видим, что для превращения множества $\mathbb{R}^n$ в векторное пространство (пока не задумываемся о размерности), нужно ввести на нем две операции сложения и умножения на вещественное число, которые удовлетворяли бы восьми аксиомам векторного пространства.

Определяем операцию сложения, то есть алгоритм, по которому каждой паре $n$-ок вещественных чисел ставится однозначно определенная $n$-ка чисел. Пусть

$$x = (x^1, \dots, x^n);\ y = (y^1, \dots, y^n)$$

два произвольных элемента из $\mathbb{R}^n$. Тогда положим по определению

$$x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n). \tag{1.1}$$

Говорят, что сложение $n$-ок чисел происходит поэлементно.

Определяем умножение на вещественное число $\lambda$ аналогичным образом, поэлементно:

$$\lambda x = (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n). \tag{1.2}$$

Используя эти определения операций, легко доказать, что для множества $\mathbb{R}^n$ с введенными операциями все восемь аксиом векторного пространства выполняются (см. задачи). Отметим только, что нуль-вектором является $n$-ка нулей $(0, \dots, 0)$, а противоположным для элемента $x = (x^1, \dots, x^n)$ является элемент

$$-x = (-x^1, \dots, -x^n).$$

Обратимся к аксиомам размерности ($9^0$ и $10^0$). Нам нужно указать такую систему из $k$ линейно независимых векторов, причем подобрать $k$ таким, чтобы любая система из $k+1$ вектора была бы линейно зависимой. Оказывается, что в случае арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ $k=n$. Возьмем следующие $n$-ки чисел

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0);\ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0);\ \ldots,\ \varepsilon_n = (0, \ldots, 0, 1), \tag{1.3}$$

то есть у первой $n$-ки на первом месте единица, а на остальных нули, у второй – на втором месте единица, а на остальных нули, и так далее. Покажем, что такая система векторов линейно независима. Составляем линейную комбинацию этих векторов с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ и приравниваем ее нуль-вектору:

$$\alpha^1 \varepsilon_1 + \ldots + \alpha^n \varepsilon_n = 0. \tag{1.4}$$

Воспользуемся определениями операций умножения на вещественное число (1.2) и суммы двух $n$-ок (1.1):

$$(\alpha^1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, \alpha^n) = (0, \ldots, 0); (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) = (0, \ldots, 0).$$

Две $n$-ки равны тогда и только тогда, когда равны их элементы, стоящие на соответствующих местах. В результате получаем

$$\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0.$$

Следовательно, равенство (1.4) верно тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ равны нулю. По определению это означает, что система векторов $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ является линейно независимой. Итак, мы предъявили $n$ линейно независимых векторов.

Покажем теперь, что любая система из $n+1$ вектора будет линейно зависимой. Возьмем произвольную систему из $n+1$ вектора

$$x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n), \ldots, x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^n),\ x_{n+1} = (x_{n+1}^1, \ldots, x_{n+1}^n).$$

Здесь нижний индекс является номером вектора в системе, а верхний индекс – номером элемента в $n$-ке. Запишем данные $n$-ки чисел по строкам в матрицу

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n \\ & \ldots & \\ x_n^1 & \ldots & x_n^n \\ x_{n+1}^1 & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Это матрица содержит $n$ столбцов и $n+1$ строку. Как известно из курса алгебры, ранг матрицы не может превышать наименьшего из значений количества строк и столбцов, то есть в нашем случае не может быть больше $n$. Тогда одна из строк этой матрицы будет линейно выражаться через другие строки матрицы. Следовательно, один из векторов $x_1, \ldots, x_{n+1}$ будет представим в виде линейной комбинации остальных векторов. Пусть, например, это будет $x_{n+1}$ (для других векторов рассуждения аналогичны). Тогда

$$x_{n+1} = \alpha^1 x_1 + \ldots + \alpha^n x_n.$$

Переносим все слагаемые в одну сторону

$$\alpha^1 x_1 + \ldots + \alpha^n x_n - 1x_{n+1} = 0.$$

Мы видим, что линейная комбинация в этом равенстве равна нуль-вектору, причем последний коэффициент отличен от нуля. Следовательно, эта система векторов линейно зависима.

Итак, мы показали, что аксиомы размерности выполняются в $\mathbb{R}^n$ при $k = n$. Следовательно, арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ является $n$-мерным векторным пространством. $\square$

**Замечание** 1.3. При доказательстве теоремы мы доказали, что система векторов (1.3) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ является линейно независимой. Докажем, также что любая $n$-ка $x = (x^1, \ldots, x^n)$ может быть представлена в виде линейной комбинации векторов $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Действительно, по определениям операций сложения и умножения на вещественное число имеем

$$\begin{aligned} x = (x^1, \ldots, x^n) = (x^1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x^n) = \\ = x^1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x^n(0, \ldots, 0, 1) = x^1\varepsilon_1 + \ldots + x^n\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Итак, по определению мы получили, что система векторов $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ является базисом. Этот базис называется *каноническим базисом* арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

**Замечание** 1.4. Вернемся к арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$ как просто множеству упорядоченных $n$-ок вещественных чисел. «Забудем», что его элементы мы умеем складывать и умножать на вещественные числа. В этом случае будем называть элементы $\mathbb{R}^n$ *точками*. Итак, арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ будет у нас работать в двух видах: во-первых, в виде $n$-ок чисел, с которыми мы не умеем проводить никаких операций (в этом случае $n$-ки будем называть точками арифметического пространства) и, во-вторых, в виде $n$-ок чисел, которые мы умеем складывать и умножать на вещественные числа (в этом случае $n$-ки чисел будем называть векторами арифметического пространства).

В случае, когда мы рассматриваем элементы $\mathbb{R}^n$ как точки, для $n = 1, 2, 3$ мы можем изображать эти точки на рисунке. Это делается следующим образом. Рассмотрим произвольную прямую $d$ в обычном пространстве. Фиксируем на ней точку $O$ и какой-нибудь ненулевой вектор $\vec{i}$ (над буквой ставим стрелку, так как это вектор из курса аналитической геометрии), параллельный этой прямой. Тогда каждой точке $X$ этой прямой взаимно однозначно ставится в соответствие вещественное число $x$, такое, что

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{i}.$$

Другими словами, мы получаем взаимно однозначное соответствие между точками прямой $d$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$. Поэтому будем называть множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ *вещественной прямой* или, просто, прямой. Проводя рассуждения с прямой, мы будем изображать ее на листе бумаги как обычную прямую, а ее точки воспринимать и как маленькие кружочки на рисунке, и как вещественные числа.

Аналогичным образом, если на плоскости $\pi$ фиксировать произвольную аффинную систему координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то возникает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости $\pi$ и множеством упорядоченных пар вещественных чисел $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{OX} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2,\ X \to (x^1, x^2).$$

Будем называть это множество плоскостью. Так же как и в случае прямой, для плоскости $\mathbb{R}^2$ мы будем использовать для ее точек и визуальное представление в виде маленьких кружочков на рисунке, и представление в виде упорядоченной пары двух вещественных чисел.

Отождествляя точки пространства с упорядоченными тройками вещественных чисел из $\mathbb{R}^3$, будем говорить о пространстве $\mathbb{R}^3$.

Для остальных значений $n$ точки арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ будем воспринимать только как упорядоченные $n$-ки чисел.

*Стандартным скалярным произведением* двух элементов $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ из $\mathbb{R}^n$ называется число, которое вычисляется по формуле

$$xy = x^1y^1 + \ldots + x^ny^n. \tag{1.5}$$

Имея скалярное произведение, можно ввести понятия длины $|x|$ вектора $x$ и угла $\alpha$ между векторами $x$ и $y$ соответственно по формулам

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2};\ \cos\alpha = \frac{xy}{|x||y|}.$$

Два вектора из $\mathbb{R}^n$ называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

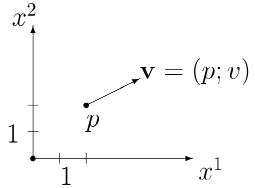
Из формулы для вычисления скалярного произведения мы видим, что два вектора являются перпендикулярными тогда и только тогда, когда их стандартное скалярное произведение равно нулю.

# 2. Векторные поля на $\mathbb{R}^n$

## 2.1. Вектор в точке. Касательное пространство

Пусть дано арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть $p \in \mathbb{R}^n$ – произвольная фиксированная точка в $\mathbb{R}^n$ (см. замечание 1.4). *Вектором в точке* $p$ называется пара $\mathbf{v} = (p; v)$, где $v \in \mathbb{R}^n$ – вектор арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.

**Пример** 2.1.




В случае $n = 2$ вектор можно представить себе как направленный отрезок, отложенный от точки $p \in \mathbb{R}^2$. На рисунке изображен вектор $\mathbf{v} = (2,2;2,1)$. Первые два числа – это точка $p$, а вторые два числа – это «стрелка» $v$.

Используя это наглядное представление о векторе в точке для плоскости $\mathbb{R}^2$, мы в дальнейшем будем говорить, что «вектор в точке состоит из двух частей: точки и стрелки».

Будем обозначать множество всех векторов в точке $p \in \mathbb{R}^n$ через $T_p(\mathbb{R}^n)$. Введем в этом множестве две операции: сложение векторов по формуле

$$(p; v) + (p; w) = (p; v + w) \tag{2.1}$$

и умножение на вещественное число $\lambda$ по формуле

$$\lambda(p; v) = (p; \lambda v). \tag{2.2}$$

Так как элементы $v$ и $w$ – это элементы из $\mathbb{R}^n$, рассматриваемого как векторное пространство, складывать и умножать на число мы их умеем. Нетрудно проверить, что при таком определении операции во множестве $T_p(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют всем 8 аксиомам векторного пространства. Векторное пространство $T_p(\mathbb{R}^n)$ называется *касательным пространством к арифметическому пространству* $\mathbb{R}^n$ (здесь элементы $\mathbb{R}^n$ рассматриваются как точки).

Отметим, что складывать вектора, заданные в разных точках мы не умеем.

Покажем, что касательное пространство $T_p(\mathbb{R}^n)$ имеет размерность $n$. Для этого нам достаточно найти какой-нибудь базис этого пространства. Способ построения базисов дает следующая теорема.

**Теорема** 2.1. *Упорядоченная система векторов в точке* $\{(p; v_1), \ldots, (p; v_n)\}$ *будет базисом в касательном пространстве* $T_p(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда упорядоченная система векторов* $(v_1, \ldots, v_n)$ *является базисом в векторном пространстве* $\mathbb{R}^n$.

*Доказательство.* Пусть упорядоченная система $(v_1, \ldots, v_n)$ является базисом арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Покажем, что система векторов

$$(\mathbf{v}_1 = (p; v_1), \ldots, \mathbf{v}_n = (p; v_n))$$

является базисом векторного пространства $T_p(\mathbb{R}^n)$. Покажем, сначала, что векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно независимы. Составим их линейную комбинацию с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{R}$:

$$\alpha^1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha^n \mathbf{v}_n = (p; 0).$$

В силу определения операций с векторами из $T_p(\mathbb{R}^n)$ (см. формулы (2.1) и (2.2)) получим

$$(p; \alpha^1 v_1 + \ldots + \alpha^n v_n) = (p; 0).$$

Следовательно,

$$\alpha^1 v_1 + \ldots + \alpha^n v_n = 0$$

и в силу линейной независимости векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ получим, что

$$\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0.$$

Аналогичным образом показывается, что любой вектор $\mathbf{v}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Проведите доказательство самостоятельно.

Обратно, пусть система векторов $\mathbf{v}_1 = (p; v_1), \ldots, \mathbf{v}_n = (p; v_n)$ образует базис касательного пространства $T_p(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что векторы $(v_1, \ldots, v_n)$ образуют базис арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Покажем, что любой элемент $v \in \mathbb{R}^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $(v_1, \ldots, v_n)$. Линейную независимость данных элементов докажите самостоятельно.

Рассмотрим вектор $\mathbf{v} = (p; v)$. Он может быть разложен по базису $(\mathbf{v}_1 = (p; v_1), \ldots, \mathbf{v}_n = (p; v_n))$, то есть существуют вещественные числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, такие, что

$$(p; v) = \alpha^1 (p; v_1) + \ldots + \alpha^n (p; v_n).$$

В силу определений операций с векторами из касательного пространства $T_p(\mathbb{R}^n)$ получим

$$(p, v) = (p; \alpha^1 v_1 + \ldots + \alpha^n v_n),$$

то есть $v = \alpha^1 v_1 + \ldots + \alpha^n v_n$. Мы получили разложение по базису для вектора $v \in \mathbb{R}^n$. □

Обозначим множество всех векторов $\mathbf{v} \in T_p(\mathbb{R}^n)$ во всех точках $p \in \mathbb{R}^n$ через $T\mathbb{R}^n$. Это множество не является векторным пространством, так как складывать векторы, определенные в разных точках, мы не умеем. Итак,

$$T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n, v\in\mathbb{R}^n} (p; v).$$

Множество всех векторов $T\mathbb{R}^n$ может быть отождествлено (как множество) с декартовым произведением $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Другими словами, каждый элемент этого множества является упорядоченной системой $2n$-чисел

$$(p^1, \dots, p^n; v^1, \dots, v^n),$$

где первая $n$-ка задает точку, а вторая $n$-ка задает «стрелку».

Для двух векторов $(p; v)$ и $(p; w)$, определенных в одной и той же точке $p$ определим понятие *скалярного произведения* по формуле

$$\mathbf{vw} \equiv (p; v)(p; w) = vw = v^1w^1 + \dots + v^nw^n, \tag{2.3}$$

где $v = (v^1, \dots, v^n), w = (w^1, \dots, w^n) \in \mathbb{R}^n$ и $vw = v^1w^1 + \dots + v^nw^n$. Другими словами, с точкой $p$ ничего не делаем, а для векторов $v, w \in \mathbb{R}^n$ находим стандартное скалярное произведение.

Используя скалярное произведение, введем понятия длины $|\mathbf{v}|$ и угла $\theta$ между векторами $(p; v)$ и $(p; w)$, определенными в одной точке $p$, по формулам

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{vv}}; \;\; \cos\theta = \tfrac{\mathbf{vw}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}.$$

## 2.2. Векторное поле

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное подмножество в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ (смотрим на его элементы как на точки). *Векторным полем* $\mathbf{X}$ на множестве $U$ называется отображение, которое каждой точке $p \in U$ ставит в соответствие некоторый вектор из касательного пространства $T_p(\mathbb{R}^n)$ в этой точке. Другими словами, векторное поле $\mathbf{X}$ – это отображение вида

$$U \subset \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n,$$

которое задается по формуле

$$\mathbf{X}(p) = (p; X(p)). \tag{2.4}$$

Заметим, что в правой части этого равенства стоит вектор в точке $(p; X(p))$. Если точка $p$ меняется, то «стрелка» $X(p)$ этого вектора тоже меняется. В результате мы получаем отображение вида $X : U \to \mathbb{R}^n$. Оно называется *ассоциированным* с векторным полем $\mathbf{X}$.

Очевидно, что задание векторного поля $\mathbf{X}$ равносильно заданию ассоциированного отображения $v = X(p)$. Ассоциированное отображение $v = X(p)$ показывает, как меняется «стрелка» $v$ при изменении точки $p$.

«Стрелка» $v$ – это $n$ чисел, причем эти числа меняются в зависимости от изменения точки $p = (x^1, \ldots, x^n)$. В связи с этим мы можем ввести обозначение

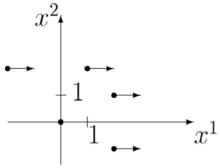
$$v = X(p) = (X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)).$$

В этих обозначениях формула (2.4) примет вид

$$\mathbf{X}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n; X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)).$$

Функции $n$ переменных $X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)$ называются *компонентами* векторного поля $\mathbf{X}$.

**Пример** 2.2. Рассмотрим арифметическое пространство $\mathbb{R}^2$ (его элементы сейчас точки) и зададим на нем векторное поле $\mathbf{X}$




с помощью ассоциированного отображения $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ по формуле $X(p) = (1, 0)$. Тогда само векторное поле $\mathbf{X}$ задается формулой

$$\mathbf{X}(p) = (p; 1, 0).$$

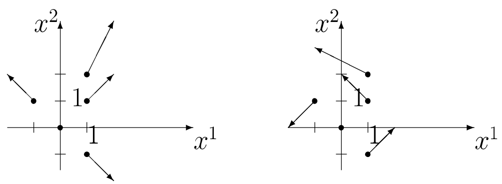
Так как точка $p = (x^1, x^2)$, то последнее равенство можно записать и в таком виде

$$\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 1, 0).$$

Изобразим несколько векторов для этого векторного поля. Векторы векторного поля $\mathbf{X}$ будут строиться следующим образом: от каждой точки $p$ откладываем вектор с координатами $(1, 0)$ в базисе фиксированной прямоугольной декартовой системы координат.

Изобразим аналогичным образом векторные поля $\mathbf{X}$, для которых ассоциированное отображение $X$ задана следующим образом:

а) $X(p) = p$ б) $X(x^1, x^2) = (-x^2, x^1)$




## 2.3. Гладкие векторные поля

Пусть $\mathbb{R}^n$ – арифметическое пространство, на элементы которого мы смотрим как на точки.

Напомним, что $\mathbb{R}^n$ можно ввести понятие расстояния $\rho(p,q)$ между его точками $p = (p^1, \dots, p^n), q = (q^1, \dots, q^n)$ по формуле

$$\rho(p,q) = \sqrt{(p^1 - q^1)^2 + \ldots + (p^n - q^n)^2}.$$

Будем называть *открытым шаром* $B_r(p)$ с центром в точке $p$ и радиусом $r \in \mathbb{R}^+$ множество точек $q$ из $\mathbb{R}^n$, таких что расстояние между точками $p$ и $q$ меньше $r$, то есть

$$|p - q| < r.$$

Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *открытым*, если вместе с каждой своей точкой $q$ оно содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке.

Для открытых множеств $U \subset \mathbb{R}^n$ мы можем ввести понятие гладкой функции и гладкого отображения. А именно, будем называть функцию $f : U \to \mathbb{R}$, заданную формулой $y = f(x^1, \dots, x^n)$, *гладкой*, если функция $n$ переменных $f(x^1, \dots, x^n)$ имеет частные производные любых порядков по каждой переменной $x^i$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое открытое множество. Оно каждой точке $x = (x^1, \dots, x^n) \in U$ ставит в соответствие точку $y = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Тогда отображение $f$ однозначно задается с помощью $m$ функций от $n$ переменных

$$y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \ \ \ldots \ \ y^m = f^m(x^1, \dots, x^n),$$

определенных на множестве $U$. Будем говорить, что отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ *гладкое*, если гладкими являются функции $f^i$, $i = 1, \dots, m$, определяющие это отображение, то есть они имеют частные производные любого порядка по переменным $x^1, \dots, x^n$. Если кроме того отображение $f$ является биекцией и обратное отображение $f^{-1}$ тоже является гладким, то отображение $f$ называется *диффеоморфизмом*.

В частности, отображение $f : U \to \mathbb{R}$ называется *гладкой функцией*, если эта функция $y = f(x^1, \dots, x^n)$ имеет частные производные любого порядка по переменным $x^1, \dots, x^n$. Множество всех гладких функций, определенных на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ обозначается $C^\infty(U)$.

**Пример** 2.3. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, заданное формулой $y = \sqrt{x}$, где $\mathbb{R}^+$ – множество положительных вещественных чисел. Выясним, будет ли это отображение диффеоморфизмом. Сначала заметим, что $\mathbb{R}^+$ является открытым множеством в $\mathbb{R}$ (почему?). Далее, функция $y = \sqrt{x}$ (в этом примере она одна) имеет все производные по переменной $x$ (она тоже здесь одна). Действительно, первая производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

определена при любом положительном $x$ (проблемы здесь могли быть только с числом нуль, но оно не входит во множество $\mathbb{R}^+$). Находя следующие производные, мы убеждаемся, что все они существуют. Следовательно, функция $f$ будет гладкой.

Найдем обратную функцию. Для этого нужно выразить $x$ через $y$. Получаем, что $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ задается формулой $x = y^2$ (игрек возводится в квадрат). Эта функция так же дифференцируема любое число раз по переменной $y$ (найдите производные самостоятельно и убедитесь в этом). Так как мы смогли выразить букву $x$ через букву $y$, отображение $f$ является биекцией, то есть взаимно однозначным соответствием. Сравнивая полученную информацию с определением диффеоморфизма, мы убеждаемся, что $f$ – диффеоморфизм.

Посмотрим еще один пример отображения. Зададим отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ формулами

$$y^1 = x^1 + x^2;\ y^2 = x^1 - x^2;\ y^3 = x^1 x^2. \tag{2.5}$$

Выясним, будет ли это отображение диффеоморфизмом. Во-первых, гладкость этого отображения очевидна: частные производные данных трех функций по переменным $x^1$ и $x^2$ легко находятся и всегда существуют. Например,

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^2} = 1;\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} = x^2.$$

Далее, чтобы работать с обратным отображением, пытаемся выразить буквы $x^1$ и $x^2$ через $y^1$, $y^2$, $y^3$. Все очень хорошо проходит с первыми двумя равенствами, но наличие третьего смущает. Что-то здесь не так. Вспоминаем, что биективное отображение – это инъективное и сюръективное отображение. Проверим на сюръективность отображение $f$. Возьмем точку $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Попробуем найти для нее прообраз. Для этого подставим эту точку вместо игреков в формулы (2.5). Значения иксов – это прообраз данной точки:

$$0 = x^1 + x^2;\ 0 = x^1 - x^2;\ 1 = x^1 x^2.$$

Мы видим, что таких $x^1$ и $x^2$ не существует (система противоречива). Следовательно, точка $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ не имеет прообраза при отображении $f$. Значит, отображение $f$ не является сюръективным, следовательно, оно и не биективно. Итак, отображение $f$ не подходит под определение диффеоморфизма, то есть им не является.

Векторное поле $\mathbf{X}$ будем называть *гладким*, если его компоненты $X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)$ являются гладкими функциями. Другими словами, если все функции $X^1(x^1, \ldots, x^n)$ имеют частные производные любого порядка по переменным $x^1, \ldots, x^n$, то векторное поле

$$\mathbf{X}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n; X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n))$$

называется гладким.

**Пример** 2.4. Пусть дано векторное поле

$$\mathbf{X}(x^1, x^2) = \left(x^1, x^2; \frac{x^1 + x^2}{2}, \frac{x^1 - x^2}{2}\right),$$

где $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$. Докажем, что оно гладкое. Согласно определению векторного поля нам нужно проверить, что функции

$$y^1 = \frac{x^1 + x^2}{2},\ y^2 = \frac{x^1 - x^2}{2}$$

имеют частные производные любого порядка по переменным $x^1, x^2$ в каждой точке $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$. Это действительно так, потому что

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{1}{2};\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = \frac{1}{2};\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{1}{2};\ \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Для производных второго порядка и далее получим нули. Итак, мы получили, что данное векторное поле является гладким.

**Пример** 2.5. Пусть дано векторное поле

$$\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; \sqrt{x^1 x^2}, x^1 + x^2),$$

где $(x^1, x^2 \in \mathbb{R}^2$, такие что $x^1 x^2 \geq 0$. Другими словами, множество $U$, на котором определено векторное поле $\mathbf{X}$, задается так

$$U = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^1 x^2 \geq 0\}.$$

Заметим, что множество $U$ не является открытым в $\mathbb{R}^2$. Более того, вычисляя частные производные

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^1 x^2}};\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = \frac{x^1}{2\sqrt{x^1 x^2}};\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = 1;\ \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = 1,$$

мы видим, что при $x^1 = 0$ или $x^2 = 0$ производные $\frac{\partial y^1}{\partial x^1}$ и $\frac{\partial y^1}{\partial x^2}$ не существуют. Следовательно, заданное векторное поле не является гладким.

Если определить векторное поле $\mathbf{X}$ на множестве

$$\tilde{U} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^1 x^2 > 0\},$$

то такое векторное поле будет гладким.

**Пример** 2.6. Рассмотрим гладкую функцию $f : U \to \mathbb{R}^n$, определенную на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. По определению гладкой функции получим, что функции

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \tag{2.6}$$

будут гладкими. Тогда отображение $\nabla f$, которое каждой точке $p \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие вектор

$$\left(p; \left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial f}{\partial x^n}\right|_p\right),$$

будет гладким векторным полем на $U$. Здесь запись $\left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p$ обозначает, что сначала вычисляется частная производная функции $f$ по переменной $x^1$, а затем вычисляется значение полученной производной в точке $p = (x^1, \ldots, x^n)$. То же самое будем еще обозначать так:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p \equiv \frac{\partial f}{\partial x^1}(p).$$

Будем обозначать полученное векторное поле $\nabla f$ (еще оно обозначается $grad\, f$), то есть

$$(\nabla f)(p) = \left(p; \left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial f}{\partial x^n}\right|_p\right).$$

Это векторное поле называется *градиентом* функции $f$.

## 2.4. Операции с векторными полями

Пусть дано открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathfrak{X}(U)$ множество всех векторных полей, определенных на этом множестве. В множестве $\mathfrak{X}(U)$ можно ввести две операции: сложение векторных полей и умножение векторного поля на гладкую функцию. А именно, *суммой двух векторных полей* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ назовем векторное поле $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$, которое задается формулой

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(p) = \mathbf{X}(p) + \mathbf{Y}(p),\ p \in U.$$

Очевидно, что сумма двух гладких векторных полей также будет гладким векторным полем. Определим еще одну операцию: умножение векторного поля $\mathbf{X}$ на гладкую функцию $f : U \to \mathbb{R}$. Эта операция будет ставить в соответствие векторному полю $\mathbf{X}$ и функции $f$ векторное поле $f\mathbf{X}$ по формуле

$$(f\mathbf{X})(p) = f(p)\mathbf{X}(p),\ p \in U.$$

Введенные операции удовлетворяют всем восьми аксиомам векторного пространства (см. п. 1.1.). Только вместо вещественных чисел в этих аксиомах будут функции, а вместо векторов – векторные поля. Множество $\mathfrak{X}(U)$ с введенными операциями называется $C^\infty(U)$-*модулем.* Напомним, что $C^\infty(U)$ обозначает множество всех гладких функций, определенных на открытом множестве $U$. Эта добавка к слову модуль напоминает нам, что векторные поля мы умеем умножать на гладкие функции. Вещественные числа тоже можно рассматривать как частный случай гладкой функции: будем смотреть на число $a \in \mathbb{R}$ как на функцию вида $f(x^1, \ldots, x^n) = a$, то есть как на постоянную функцию. Таким образом, научившись умножать векторные поля на функции, мы, в частности, научились умножать их на вещественные числа.

Пусть даны гладкие векторные поля

$$\mathbf{X}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n; X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)); \tag{2.7}$$
$$\mathbf{Y}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n; Y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, Y^n(x^1, \ldots, x^n)),\ (x^1, \ldots, x^n) \in U$$

и гладкая функция $f$. Найдем компоненты векторных полей $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ и $f\mathbf{X}$.

Фиксируем произвольную точку $(x^1, \ldots, x^n) \in U$. Тогда по определению суммы векторных полей

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(x^1, \ldots, x^n) = \mathbf{X}(x^1, \ldots, x^n) + \mathbf{Y}(x^1, \ldots, x^n) =$$

используем (2.7)

$$= (x^1, \ldots, x^n; X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)) + \\ + (x^1, \ldots, x^n; Y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, Y^n(x^1, \ldots, x^n)) =$$

Здесь стоит сумма двух векторов в точке $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда по определению суммы векторов

$$= (x^1, \ldots, x^n; X^1(x^1, \ldots, x^n) + Y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n) + Y^n(x^1, \ldots, x^n)).$$

Итак, мы получаем

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n; \\ X^1(x^1, \ldots, x^n) + Y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n) + Y^n(x^1, \ldots, x^n)). \tag{2.8}$$

Мы видим, что компоненты суммы векторных полей равны сумме компонент слагаемых векторных полей.

Аналогично получаем, что компоненты произведения функции на векторное поле равны произведению функции на компоненты исходного векторного поля:

$$(f\mathbf{X})(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n; \\ f(x^1, \ldots, x^n) X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f(x^1, \ldots, x^n) X^n(x^1, \ldots, x^n)). \tag{2.9}$$

**Пример** 2.7. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ даны два векторных поля

$$\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 1, 2);\ \mathbf{Y}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; x^2, x^1)$$

и функция $f(x^1, x^2) = x^1$. Легко видеть, что эти векторные поля и функция гладкие. Найдем сумму векторных полей и произведение функции $f$ на векторное поле $\mathbf{X}$. Для этого воспользуемся формулами (2.8) и (2.9):

$$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 1 + x^2, 2 + x^1);$$
$$(f\mathbf{X})(x^1, x^2) = (x^1, x^2; x^1 \cdot 1, x^1 \cdot 2) = (x^1, x^2; x^1, 2x^1).$$

## 2.5. Интегральная кривая векторного поля

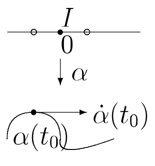
Пусть $\mathbb{R}^n$ – арифметическое пространство, элементы которого рассматриваются как точки.

*Параметризованной кривой* (или, короче, *кривой*) в $\mathbb{R}^n$ называется гладкое отображение $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, где $I$ – некоторый открытый интервал в $R$. Образ этого отображения, то есть множество точек $\alpha(I)$ мы также будем называть *кривой* и обозначать $\alpha$.

Отображение $\alpha$ каждому вещественному числу $t$ из $I$ ставит в соответствие $n$-ку чисел $x^1, \dots, x^n$. При изменении числа $t$, эта $n$-ка чисел изменяется, то есть мы получаем, что отображение $\alpha$ задается $n$ функциями одного аргумента $t$:

$$\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)). \tag{2.10}$$

Гладкость этого отображения означает существование производных любого порядка функций $x^1(t), \dots, x^n(t)$ по переменной $t$. Эта переменная называется *параметром.*




*Касательным вектором* в точке со значением параметра $t_0 \in I$ (то есть в точке $\alpha(t_0)$) к параметризованной кривой $\alpha$ называется вектор

$$\dot{\alpha}(t_0) = \left(\alpha(t_0); \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) = \left(\alpha(t_0); \left.\frac{dx^1}{dt}\right|_{t_0}, \dots, \left.\frac{dx^n}{dt}\right|_{t_0}\right). \tag{2.11}$$

Запись $\left.\frac{dx^1}{dt}\right|_{t_0}$ обозначает, что сначала берется производная функции $x^1(t)$ по $t$, а затем вместо $t$ подставляется $t_0$.

**Пример** 2.8. Рассмотрим отображение $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой

$$\alpha(t) = (p^1 t + a^1, p^2 t + a^2, \dots, p^n t + a^n),$$

где $p^1, \dots, p^n$ – некоторые вещественные числа, не равные нулю одновременно, а $a^1, \dots, a^n$ – просто вещественные числа без каких-либо ограничений. Легко видеть, что это параметризованная кривая. В частности, для $n = 2$

мы получим

$$\alpha(t) = (p^1 t + a^1, p^2 t + a^2)$$

или в более привычном виде (обозначая $x^1 = x$, $x^2 = y$, $a^1 = x_0$, $a^2 = y_0$)

$$x = p^1 t + x_0;\ y = p^2 t + y_0.$$

Это параметрические уравнения прямой на плоскости $\mathbb{R}^2$.

В случае произвольного $n$ мы также получаем параметризованную кривую, которая называется *прямой* в $\mathbb{R}^n$. В каждой ее точке определен касательный вектор

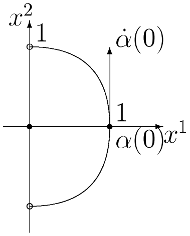
$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t); p^1, \ldots, p^n).$$

**Пример** 2.9. Рассмотрим отображение

$$\alpha : I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2,$$

заданное формулой

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t).$$

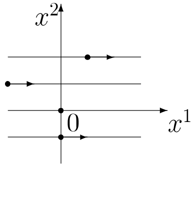



Функции $x^1 = \cos t$ и $x^2 = \sin t$ имеют производные по $t$ любого порядка, следовательно, отображение $\alpha$ является гладким. Тогда по определению оно является параметризованной кривой. Найдем касательный вектор к этой параметризованной кривой в точке $\alpha(0)$ (значение параметра $t = 0$). Находим производные функций $x^1(t)$, $x^2(t)$ и вычисляем их значения при $t = 0$. Тогда касательный вектор в точке $\alpha(0) = (1, 0)$ будет иметь вид

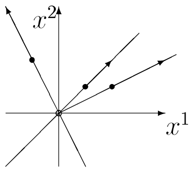
$$\dot{\alpha}(0) = (1, 0; 0, 1).$$

Параметризованная кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ называется *интегральной кривой* векторного поля $\mathbf{X}$, заданного на некотором открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, если $\alpha(t) \subset U$ для любого $t \in I$ и $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ для любого $t \in I$. Другими словами, в каждой точке кривой $\alpha$ касательный вектор этой кривой совпадает с вектором векторного поля $\mathbf{X}$ в этой точке.

**Пример** 2.10. В некоторых случаях интегральную кривую легко «угадать».




Например, для векторного поля $\mathbf{X}(p) = (p; 1, 0)$ интегральными кривыми будут прямые, параллельные оси $Ox^1$, включая ее саму.




Для векторного поля $\mathbf{X}(p) = (p; p)$ интегральными кривыми будут лучи (их начало им не принадлежит), выходящие из точки $0 = (0, 0)$.

Для векторного поля $\mathbf{X}(p) = (x^1, x^2; -x^2, x^1)$ «угадать» интегральную кривую уже сложнее. Хотя пока еще можно увидеть, что интегральными кривыми будут концентрические окружности с центром в нуле и сама точка 0. Поэтому нужен алгоритм для нахождения интегральных кривых векторного поля. Следующая наша задача: найти этот алгоритм.

Пусть дано гладкое векторное поле $\mathbf{X}$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Это гладкое отображение $\mathbf{X} : U \to T\mathbb{R}^n$, задаваемое формулой

$$\mathbf{X}(p) = (p; X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)). \tag{2.12}$$

Пусть дана параметризованная кривая

$$\alpha(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

($\alpha(t) \subset U$ для всех $t \in I$) с касательным вектором $\dot{\alpha}(t)$ в точке $\alpha(t)$, который определяется формулой

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t); \frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right). \tag{2.13}$$

Тогда кривая $\alpha$ будет интегральной кривой векторного поля тогда и только тогда, когда

$$\dot{\alpha}(t) = \mathbf{X}(\alpha(t)).$$

Подставим в это равенство соотношения (2.12) и (2.13):

$$(\alpha(t); X^1(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \ldots, X^n(x^1(t), \ldots, x^n(t))) = \left(\alpha(t); \frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right).$$

Для каждого фиксированного $t$ в левой и правой частях этого равенства стоят $2n$-ки чисел. Две таких $2n$-ки равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы. Таким образом, мы получаем

$$\begin{gathered} \frac{dx^1}{dt} = X^1(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \\ \ldots \\ \frac{dx^n}{dt} = X^n(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \end{gathered} \tag{2.14}$$

Добавим к этой системе дифференциальных уравнений условие

$$x^1(t_0) = x_0^1, \ldots, x^n(t_0) = x_0^n, \tag{2.15}$$

то есть при $t = t_0$ кривая $\alpha$ проходит через фиксированную точку $p_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Тогда система дифференциальных уравнений (2.14) будет иметь единственное решение $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ удовлетворяющее начальному условию (2.15), при $t$, меняющемся в некотором интервале $I$. Это решение является интегральной кривой $\alpha$ векторного поля $\mathbf{X}$, проходящей через точку $p_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

Итак, мы доказали следующую теорему

**Теорема** 2.2. *Пусть $\mathbf{X}$ – гладкое векторное поле, определенное на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}$. Тогда для любой точки $p_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in U$ существует единственная интегральная кривая $\alpha(t)$ векторного поля $\mathbf{X}$, проходящая через точку $p_0$.*

**Замечание** 2.1. Интегральная кривая $\alpha(t)$ векторного поля $\mathbf{X}$ определена на некотором интервале $I = (a, b)$. Предположим, что точке $p_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ соответствует значение параметра $t_0$, то есть

$$\alpha(t_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^n).$$

Заменим параметр $t$ на параметр $\tilde{t}$ по формуле $\tilde{t} = t - t_0$. Тогда $\alpha(t) = \alpha(\tilde{t} + t_0)$. Параметр $\tilde{t}$ будет меняться в интервале $\tilde{I} = (a - t_0, b - t_0)$. Выясним, через какую точку пройдет интегральная кривая при $\tilde{t} = 0$:

$$\alpha(0 + t_0) = \alpha(t_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^n).$$

Таким образом, мы получаем, что нулевому значению параметра $\tilde{t}$ соответствует точка $p_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Как мы показали, такая параметризация существует для любой интегральной кривой.

При решении конкретных задач мы сразу будем предполагать, что для интегральной кривой выбрана такая параметризация, что значению параметра $t = 0$ соответствует фиксированная точка $p_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

**Пример** 2.11. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; -4x^2, x^1)$. Найдем его интегральную кривую, проходящую через точку $p = (1, 1)$. Для этого нам нужно решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{dt} = -4x^2(t); \ \frac{dx^2}{dt} = x^1(t) \tag{2.16}$$

с начальным условием $x^1(0) = 1$, $x^2(0) = 1$. Применяем стандартный алгоритм из курса дифференциальных уравнений. Продифференцируем второе уравнение из (2.16):

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} = \frac{dx^1}{dt}$$

и подставим в первое уравнение

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} + 4x^2(t) = 0.$$

Обозначая функцию $x^2(t)$ через $k$ в нулевой степени (то есть $k^0 = 1$), первую производную $x^2(t)$ через $k$ в первой степени, вторую производную $x^2(t)$ через $k$ во второй степени и так далее (если потребуется), получаем так называемое характеристическое уравнение

$$k^2 + 4 = 0.$$

Оно имеет два комплексных корня $\pm 2i$. Тогда общее решение для функции $x^2(t)$ имеет вид

$$x^2(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t,$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные константы. Подставляя это выражение $x^2(t)$ в (2.16), находим выражение для $x^1(t)$:

$$x^1(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t.$$

Итак, все кривые $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t))$, являющиеся интегральными для векторного поля $\mathbf{X}$ задаются уравнениями

$$x^1(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t;\ \ x^2(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t,$$

где $t$ принимает все вещественные значения, то есть $t \in \mathbb{R}$. Здесь заданы сразу все интегральные кривые. Чтобы выделить одну из них, нужно придать конкретные значения константам $C_1$ и $C_2$.

Нам нужна кривая, проходящая через точку $p_0 = (1, 1)$, то есть $\alpha(0) = (1, 1)$. Имеем

$$1 = x^1(0) = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0;\ \ 1 = x^2(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0.$$

Откуда вычисляем $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Итак, интегральная кривая, проходящая через точку $(1, 1)$, имеет уравнения

$$x^1(t) = -2\sin 2t + \cos 2t;\ \ x^2(t) = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Выясним вид интегральной кривой данного векторного поля, которая проходит через точку $(1, 1)$. Для этого перейдем от параметрических уравнений кривой $\alpha$ к ее общему уравнению.

Умножим обе части второго равенства на 2:

$$x^1(t) = -2\sin 2t + \cos 2t;\ \ 2x^2(t) = 2\cos 2t + \sin 2t.$$

Возведем оба равенства в квадрат и сложим (воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством)

$$(x^1)^2 + 4(x^2)^2 = 5.$$

Это уравнение эллипса. Чтобы лучше разглядеть эллипс в этом уравнении, обозначим $x^1 = x$, $x^2 = y$ и разделим обе части этого уравнения на 5:

$$x^2 + \frac{4}{5}y^2 = 1.$$

**Пример** 2.12**.** Рассмотрим векторное поле $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 4x^2, x^1)$. Найдем его интегральную кривую, проходящую через точку $p = (1, 0)$. Для этого нам нужно решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{dt} = 4x^2(t); \ \frac{dx^2}{dt} = x^1(t) \tag{2.17}$$

с начальным условием $x^1(0) = 1$, $x^2(0) = 0$. Применяем стандартный алгоритм из курса дифференциальных уравнений. Продифференцируем второе уравнение из (2.17):

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} = \frac{dx^1}{dt}$$

и подставим в первое уравнение

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} - 4x^2(t) = 0.$$

Обозначая функцию $x^2(t)$ через $k$ в нулевой степени (то есть $k^0 = 1$), первую производную $x^2(t)$ через $k$ в первой степени, вторую производную $x^2(t)$ через $k$ во второй степени и так далее (если потребуется), получаем так называемое характеристическое уравнение

$$k^2 - 4 = 0.$$

Оно имеет два корня $\pm 2$. Тогда общее решение для функции $x^2(t)$ имеет вид

$$x^2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t},$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные константы. Подставляя это выражение $x^2(t)$ в (2.17), находим выражение для $x^1(t)$:

$$x^1(t) = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

Итак, все кривые $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t))$, являющиеся интегральными для векторного поля $\mathbf{X}$ задаются уравнениями

$$x^1(t) = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}; \ x^2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t},$$

где $t$ принимает все вещественные значения, то есть $t \in \mathbb{R}$. Здесь заданы сразу все интегральные кривые. Чтобы выделить одну из них, нужно придать конкретные значения константам $C_1$ и $C_2$.

Нам нужна кривая, проходящая через точку $p_0 = (1,0)$, то есть $\alpha(0) = (1,0)$. Имеем

$$1 = x^1(0) = 2C_1e^{2\cdot 0} - 2C_2e^{-2\cdot 0};\ 0 = x^2(0) = C_1e^{2\cdot 0} + C_2e^{-2\cdot 0}.$$

Откуда вычисляем $C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - 2C_2 = 1$. Тогда $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = -\frac{1}{4}$. Итак, интегральная кривая, проходящая через точку $(1,1)$, имеет уравнения

$$x^1(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t};\ x^2(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Выясним вид интегральной кривой данного векторного поля, которая проходит через точку $(1,0)$. Умножим первое равенство на 2, второе – на 4, оба возведем в квадрат и вычтем из первого второе:

$$(x^1)^2 - 4(x^2)^2 = 1.$$

Это уравнение гиперболы. Но вернемся к параметрическим уравнениям (2.18). В правой части первого равенства для любого значения $t$ получаем положительное вещественное число (так как экспонента дает только положительные числа). Следовательно, интегральной кривой будет не вся гипербола, а только ее правая ветвь.

Возьмем другую точку $p = (2,1)$ и определим вид интегральной кривой, проходящей через эту точку. Аналогично предыдущему случаю находим значения $C_1$ и $C_2$:

$$\begin{cases} 2 = 2C_1 - 2C_2 \\ 1 = C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, параметрические уравнения интегральной кривой имеют вид

$$x^1(t) = 2e^{2t};\ x^2(t) = e^{2t}.$$

Определим ее вид. Перейдем к общему уравнению этой кривой. Запишем его, обозначив $x^1 = x$ и $x^2 = y$:

$$x - 2y = 0.$$

Это уравнение прямой. Но, возвращаясь к параметрическим уравнениям, мы видим, что переменные $x$ и $y$ могут принимать только положительные значения. Следовательно, интегральной кривой данного векторного поля, проходящей через точку $p = (1,1)$, будет луч прямой $x - 2y = 0$ с началом в нуле и находящийся в первой четверти.

## 2.6. Однопараметрическая группа гладкого векторного поля

Пусть на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задано гладкое векторное поле $\mathbf{X}$. Если все его интегральные кривые определены для любого вещественного значения параметра $t$ (то есть $t \in \mathbb{R}$), то такое векторное поле называется *полным*.

Пусть дано полное гладкое векторное поле $\mathbf{X}$ на открытом множестве $U$ пространстве $\mathbb{R}^n$. Определим отображение

$$\varphi_t : U \subset \mathbb{R}^n \to U \subset \mathbb{R}^n$$

по формуле $\varphi_t(p) = \alpha_p(t)$, где $\alpha_p$ – это интегральная кривая векторного поля $\mathbf{X}$, проходящая через точку $p$ (ей соответствует значение параметра $t = 0$, то есть $\alpha_p(0) = p$), $t$ – произвольное фиксированное вещественное число.

**Пример** 2.13. Пусть дано векторное поле $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 1, 2)$. Это векторное поле определено на всем арифметическом пространстве $\mathbb{R}^2$, а значит для каждого $t \in \mathbb{R}$ задает отображение $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Найдем явную формулу, по которой задается это отображение. Для этого нам нужно сначала найти интегральные кривые векторного поля $\mathbf{X}$. Используем для этого дифференциальные уравнения (2.14). В нашем случае они принимают вид

$$\frac{dx^1}{dt} = 1; \ \frac{dx^2}{dt} = 2.$$

Интегрируя данную систему дифференциальных уравнений, находим параметрические уравнения интегральных кривых векторного поля $\mathbf{X}$

$$x^1(t) = t + C_1; \ x^2(t) = 2t + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$ – произвольные константы. Пусть точка $p = (a, b)$. Находим интегральную кривую, проходящую через точку $p$. Как мы договорились, точке $p$ мы приписываем значение параметра $t = 0$ (см. замечание 2.1). Тогда мы можем найти значения констант $C_1$ и $C_2$, определяющих нужную нам кривую:

$$a = 0 + C_1; \ b = 2 \cdot 0 + C_2.$$

Откуда находим, что $C_1 = a$, $C_2 = b$. Тогда интегральная кривая $\alpha_p(t)$ задается так: $\alpha_p(t) = (t + a, 2t + b)$ (см. формулу (2.10)). Значит, отображение $\varphi_t$ задается такой формулой:

$$\varphi_t(a, b) = (t + a, 2t + b).$$

Итак, отображение $\varphi_t$ переводит точку $p = (a, b)$ в точку $p' = (t + a, 2t + b)$.

Пусть $t = 1$. Тогда $\varphi_1(a, b) = (a+1, b+2)$. Это равенство можно записать в другом виде:

$$a' = a + 1;\ b' = b + 2.$$

Это формулы параллельного переноса на вектор $(1, 2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ (если еще не увидели этого, обозначьте $a = x$, $b = y$). Итак, мы выяснили, что $\varphi_1$ – это параллельный перенос на вектор $(2, 1)$. Теперь легко видеть, что $\varphi_t$ для произвольного фиксированного $t$ – это параллельный перенос на вектор $(t, 2t)$ и этот параллельный перенос задается векторным полем $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 1, 2)$.

**Пример** 2.14. Пусть дано векторное поле $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2; -4x^2, x^1)$. Определим, что за отображение $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задает это векторное поле. В примере 2.11 мы уже нашли параметрические уравнения его интегральных кривых:

$$x^1(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t;\ \ x^2(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t,$$

где $C_1$, $C_2$ – произвольные константы. Возьмем произвольную точку $p = (a, b)$. Найдем интегральную кривую данного векторного поля, проходящую через эту точку:

$$a = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0;\ \ b = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0.$$

Тогда $C_1 = b$, $C_2 = \frac{a}{2}$. Итак, интегральная кривая, проходящая через точку $p = (a, b)$ имеет параметрические уравнения

$$x^1(t) = -2b \sin 2t + a \cos 2t;\ \ x^2(t) = b \cos 2t + \frac{a}{2} \sin 2t.$$

Тогда отображение $\varphi_t$ будет задаваться такой формулой:

$$\varphi_t(a, b) = (-2b \sin 2t + a \cos 2t, b \cos 2t + \frac{a}{2} \sin 2t).$$

Чтобы определить вид этого преобразования плоскости, обозначим $a = x$, $b = y$ и запишем последнюю формулу в виде:

$$x' = x \cos 2t - 2y \sin 2t;\ y' = \frac{x}{2} \sin 2t + y \cos 2t. \tag{2.19}$$

Это линейные формулы, причем

$$\begin{vmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t \end{vmatrix} = \cos^2 2t + \sin^2 2t = 1 \neq 0.$$

Следовательно, эти формулы задают аффинное преобразование плоскости. Проверим, может быть это движение? Вычисляем

$$(\cos 2t)^2 + (\frac{1}{2} \sin 2t)^2 \neq 1.$$

Сумма квадратов элементов в первом столбце матрицы аффинного преобразования не равна единице. Следовательно, эта матрица не является ортогональной и формулы (2.19) задают аффинное преобразование, отличное от движения.

Посмотрим, во что перейдет квадрат с вершинами в точках $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ при преобразовании $\varphi_{\frac{\pi}{4}}$. Сначала запишем вид формул для этого преобразования (в формулах (2.19) вместо $t$ подставляем $\frac{\pi}{4}$):

$$x' = -2y;\ y' = \frac{x}{2}. \tag{2.20}$$

Далее, вспоминаем, что любое аффинное преобразование переводит прямую в прямую и отрезок в отрезок. Значит, нам достаточно найти образы вершин и соединить их отрезками. Находим образы вершин по формулам (2.20):

$$(1,1) \to (-2, \frac{1}{2});\ (1,2) \to (-4, \frac{1}{2});\ (2,1) \to (-2,1);\ (2,2) \to (-4,1).$$

Мы получили прямоугольник.

Докажем два свойства отображений $\varphi_t$.

**Теорема** 2.3. *Пусть дано полное векторное поле* $\mathbf{X}$ *на открытом множестве* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда для любых вещественных чисел* $t_1$, $t_2$, $t$ *имеем*

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2};\ (\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}.$$

*Доказательство.* Докажем первое равенство. Фиксируем произвольное вещественное число $t_2$. Чтобы доказать равенство двух отображений, нужно показать, что они одинаково действуют на произвольный аргумент, то есть нам нужно доказать, что для любой точки $p \in U$

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}(p) = \varphi_{t_1+t_2}(p).$$

Воспользуемся определением отображения $\varphi_t$:

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}(p) = \varphi_{t_1}(\alpha_p(t_2)) = \alpha_{\alpha_p(t_2)}(t_1).$$

Тогда мы получаем, что нам нужно доказать такое равенство:

$$\alpha_{\alpha_p(t_2)}(t_1) = \alpha_p(t_1 + t_2). \tag{2.21}$$

Так как $t_2$ зафиксировано, $\alpha_p(t_2)$ – это фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$. В левой части равенства (2.21) стоит интегральная кривая векторного поля $\mathbf{X}$, которая проходит через точку $\alpha_p(t_2)$ (эта точка получается, если подставить $t_1 = 0$). В правой части этого равенства стоит интегральная кривая того же самого векторного поля, проходящая через ту же точку $(\alpha_p(0+t_2) = \alpha(t_2)))$.

Так как в силу теоремы 2.2 через каждую точку проходит единственная интегральная кривая, интегральные кривые левой и правой частей равенства (2.21) действительно совпадают, то есть они выдают одни и те же точки при каждом значении $t_1$ (а не только при нуле). Так как в начале рассуждения мы фиксировали произвольное значение $t_2$, мы доказали первое равенство теоремы полностью.

Прежде чем доказывать второе равенство теоремы, покажем, что $\varphi_0$ является тождественным преобразованием $\mathbb{R}^n$, то есть

$$\varphi_0 = id.$$

Действительно,

$$\varphi_0(p) = \alpha_p(0) = p = id(p).$$

Теперь перейдем к доказательству равенства $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$. Нам нужно показать, что обратным отображением к отображению $\varphi_t$ будет отображение $\varphi_{-t}$. По определению обратного отображения это означает, что нам нужно показать, что

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = id.$$

Рассмотрим первую композицию, вторая рассматривается аналогичным образом. Используем уже доказанное равенство из этой теоремы. Имеем

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{t-t} = \varphi_0 = id.$$

Что и требовалось доказать. □

**Следствие** 2.1. Отображения $\varphi_t$ являются диффеоморфизмами.

*Доказательство.* В предыдущей теореме мы показали, что отображения $\varphi_t$ обратимы, следовательно, это биекции. Так как по определению отображения $\varphi_t$ они определяются интегральной кривой гладкого векторного поля, а она является гладкой, то отображения $\varphi_t$ являются гладкими. Так как обратное к $\varphi_t$ – это отображение такого же типа, только с противоположным $t$, то оно также является гладким. Собирая все вместе получаем, что отображения $\varphi_t$ – диффеоморфизмы по определению. □

**Следствие** 2.2. Множество $\{\varphi_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ является группой относительно операции композиции. Единицей этой группы является отображение $\varphi_0 = id$, а обратным для отображения $\varphi_t$ является отображение $\varphi_{-t}$. Эта группа называется *однопараметрической группой диффеоморфизмов*, порожденных векторным полем $\mathbf{X}$.

# 3. n-поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}$

## 3.1. Определение и примеры

Пусть дано арифметическое пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Напомним, что функция $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, определенная на некотором открытом множестве $U$ из $\mathbb{R}^{n+1}$ называется гладкой, если она имеет частные производные любого порядка по всем своим аргументам, то есть если правую часть равенства

$$y = f(x^1, \ldots, x^{n+1})$$

можно дифференцировать по любым аргументам $x^1, \ldots, x^{n+1}$ любое число раз.

Будем называть множество точек

$$S = \{(x^1, \ldots, x^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}\ f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0\}$$

*$n$-поверхностью* в $\mathbb{R}^{n+1}$, если $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ – гладкая функция на некотором открытом множестве $U$, и градиент $\nabla f$ этой функции отличен от нуля в каждой точке множества $S$. Равенство $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$ будем называть *уравнением* $n$-поверхности.

**Пример** 3.1. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задано множество точек

$$S = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2\ (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}.$$

Выясним, будет ли это множество $n$-поверхностью. Сначала найдем функцию $f$ для этого условие, которые выделяет точки для $S$ запишем в виде

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0.$$

Тогда левая часть этого равенства и будет функцией $f$, то есть

$$f(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1.$$

Для этой функции существуют частные производные любых порядков, значит, эта функция гладкая. Найдем градиент:

$$\nabla f(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 2x^1, 2x^2).$$

Градиент $\nabla f$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $2x^1 = 0$ и $2x^2 = 0$, то есть он обращается в нуль только в точке $(0, 0)$. Но эта точка не принадлежит множеству $S$, так как $0^2 + 0^2 \neq 1$ (мы подставили эту точку в равенство, которое определяет множество $S$). Следовательно, во всех точках множества $S$ градиент функции $f$ отличен от нуля. Итак, все условия определения $n$-поверхности выполняются. Значит, $S$ является $n$-поверхностью. Более того, мы можем сказать, что $S$ является 1-поверхностью. Это окружность.

**Пример** 3.2. Построим обобщение предыдущего примера. Рассмотрим множество

$$S = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ (x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = R^2\},$$

где $R$ – фиксированное положительное вещественное число. Аналогично предыдущему примеру убеждаемся, что это $n$-поверхность. Она называется *$n$-мерной сферой* радиуса $R$ (или, короче, *$n$-сферой*).

**Пример** 3.3. Пусть задано множество

$$S = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ a_1 x^1 + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} + b = 0\},$$

где $a_1, \dots, a_{n+1}, b$ – некоторые вещественные числа, причем $a_1, \dots, a_{n+1}$ одновременно не равны нулю. Очевидно, что функция

$$f(x^1, \dots, x^{n+1}) = a_1 x^1 + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} + b$$

является гладкой и ее градиент

$$\nabla f(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{n+1}; a_1, \dots, a_{n+1})$$

отличен от нуля для любой точки $\mathbb{R}^{n+1}$, а значит, и для любой точки из $S$. Множество $S$ называется $n$-плоскостью в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ (или *гиперплоскостью*).

Если положить $n = 1$, то получим множество

$$S = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2\ a_1 x^1 + a_2 x^2 + b = 0\}.$$

Это хорошо знакомая нам прямая на плоскости (если в таких обозначениях трудно это увидеть, то переобозначим буквы в уравнении так: $Ax + By + C = 0$). Другими словами, прямая на плоскости – это 1-плоскость в пространстве $\mathbb{R}^2$.

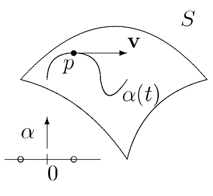
Если положить $n = 2$, то получим множество

$$S = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3\ a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + b = 0\}.$$

Это плоскость в пространстве.

## 3.2. Касательное пространство

Пусть дана $n$-поверхность $S$, заданная уравнением $f(x^1, \dots, x^{n+1}) = 0$.




Вектор $\mathbf{v}$ в точке $p$ называется *касательным вектором к $n$-поверхности* $S$, если он является касательным вектором некоторой параметризованной кривой в $\mathbb{R}^{n+1}$, образ которой лежит на поверхности $S$.

**Пример** 3.4. Пусть в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ дана поверхность

$$S = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}.$$

Это сфера с центром в точке $(0,0,0)$ радиуса 1. Легко видеть (проведите рассуждения самостоятельно), что это 2-поверхность. Возьмем точку $p = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Она удовлетворяет уравнению сферы, следовательно, лежит на ней. Приведем пример касательного вектора в этой точке на сфере. Нам потребуется задать параметризованную кривую, которая лежит на сфере и проходит через точку $p$. Рассмотрим, например, такую параметризованную кривую

$$\alpha(t) = (\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t).$$

Ее параметрические уравнения имеют вид:

$$x^1(t) = \cos t;\ x^2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t;\ x^3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t.$$

Эта кривая лежит на сфере. Действительно, если подставить параметрические уравнения кривой $\alpha$ в уравнение сферы, то получим тождество (проведите вычисления самостоятельно). Кроме того, эта кривая проходит через точку $p = (1,0,0)$. В самом деле, система уравнений

$$\begin{cases} \cos t = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t = 0 \end{cases}$$

имеет решение $t = 0$. Значит, значение параметра $t$, соответствующее точке $p$, равно нулю. Чтобы найти касательный вектор к кривой $\alpha$, нужно продифференцировать параметрические уравнения кривой и подставить вместо $t$ значение нуль (см. формулу (2.11)):

$$\dot{\alpha}(0) = (\alpha(0); -\sin 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 0) = (1,0,0; 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

По определению этот вектор будет касательным к сфере.

В предыдущем примере мы, имея $n$-поверхность, смогли найти касательный вектор в точке этой $n$-поверхности. Теперь подумаем, как решить обратную задачу: есть $n$-поверхность, точка на ней и вектор в этой точке. Нужно выяснить, является ли этот вектор касательный к данной $n$-поверхности. Если в этом случае пытаться действовать по определению, то для данного вектора придется подбирать кривую на поверхности так, чтобы вектор был к ней касательным. Если данный вектор действительно является касательным к поверхности, то такая кривая рано или поздно найдется. А если нет. Как тогда доказать, что такой кривой не существует? Значит, нужен другой способ для проверки данного вектора на касательность к данной поверхности.

Докажем удобный критерий касательного вектора к $n$-поверхности.

**Теорема** 3.1. *Пусть дана $n$-поверхность $S$ и $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$ – ее уравнение. Вектор $\mathbf{v}$ в точке $p = (x_0^1, \ldots, x_0^{n+1})$ является касательным к поверхности $S$ в этой точке тогда и только тогда, когда он перпендикулярен градиенту функции $f$ в этой точке, то есть $\mathbf{v} \perp \nabla f(p)$.*

*Доказательство.* $\Rightarrow$). Пусть вектор $\mathbf{v}$ является касательным к $n$-поверхности $S$. Покажем, что он будет перпендикулярен значению градиента функции $f$ в точке $p$, то есть перпендикулярен вектору $\nabla f(p)$. Вспомним, что перпендикулярность двух векторов помогает определить скалярное произведение этих векторов: два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Значит, нам нужно вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{v}$ и $\nabla f(p)$.

Вспоминаем определение касательного вектора к поверхности: касательный вектор к поверхности в данной точке $p$ – это касательный вектор в точке $p$ к кривой, лежащей на этой поверхности. Значит, вектор $\mathbf{v}$ – это вектор $\dot{\alpha}(t_0)$ для некоторой параметризованной кривой $\alpha$, которая лежит на поверхности $S$ ($t_0$ – это значение параметра $t$, которое соответствует точке $p$, то есть $\alpha(t_0) = p$). Запишем в виде равенства тот факт, что кривая $\alpha$ лежит на поверхности $S$. Напомним, что кривая $\alpha$ – это отображение, которое перерабатывает числа $t$ в точки

$$\alpha(t) = (x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t))$$

арифметического пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Так как кривая лежит на поверхности, то эти точки удовлетворяют уравнению поверхности, то есть

$$f(\alpha(t)) = 0 \Leftrightarrow f(x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t)) = 0.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по $t$ (пользуемся правилом дифференцирования сложной функции):

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t))\frac{dx^1}{dt}(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}(x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t))\frac{dx^{n+1}}{dt}(t) = 0.$$

В левой части этого равенства записано скалярное произведение градиента функции $f$, вычисленного в точке $\alpha(t)$ и касательного вектора к кривой $\alpha$ в точке $\alpha(t)$ (см. формулу (2.3)), то есть

$$\nabla f(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) = 0.$$

Это равенство верно, в частности, для $t = t_0$, то есть

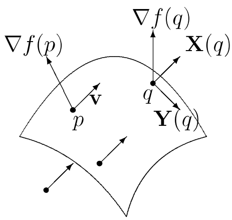
$$\nabla f(\alpha(t_0))\dot{\alpha}(t_0) = 0.$$

При $t = t_0$ мы видели, что $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$, то есть касательный вектор к кривой $\alpha$ – это данный вектор $\mathbf{v}$ в точке $p = \alpha(t_0)$. Так как их скалярное произведение равно нулю, эти векторы перпендикулярны.

$\Leftarrow$). Пусть дан вектор $\mathbf{v}$ в точке $p$ поверхности $S$, который перпендикулярен градиенту функции $f$ в этой точке, то есть

$$\mathbf{v} \perp \nabla f(p).$$

Нам нужно доказать, что вектор $\mathbf{v}$ является касательным к поверхности $S$. Будем действовать по определению касательного вектора к поверхности. Другими словами, нам нужно построить для вектора $\mathbf{v}$ параметризованную кривую $\alpha$ на поверхности $S$, для которой $\mathbf{v}$ является касательным в точке $p$.




Откуда взять параметризованную кривую? Мы умеем находить интегральные кривые векторных полей. Значит, нам нужно сначала построить векторное поле из тех данных, которые есть. Вспоминаем, что касательный вектор $\mathbf{v}$ – это пара $(p; v)$, где $p, v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть

$$\mathbf{X}(q) = (q; v),\ q \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{3.1}$$

Это векторное поле строиться так: каждой точке $q$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ ставим в соответствие вектор $(q; v)$ с одной и той же «стрелкой» $v$.

Прежде чем вести построения векторных полей дальше, вспомним один прием из курса многомерной геометрии. Пусть дано произвольное векторное пространство $V$, ненулевой фиксированный вектор $\vec{a} \in V$ и множество $L$ всех векторов из $V$, перпендикулярных вектору $\vec{a}$. Возьмем произвольный вектор $\vec{x} \in V$ и разложим его в сумму вектора, коллинеарного вектору $\vec{a}$ и вектора $\vec{y} \in L$, то есть

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{y},$$

где $\lambda$ – пока не известное нам число, которое нужно найти. Найдем его. Заметим, что вектор $\vec{x} - \lambda\vec{a}$ должен принадлежать множеству векторов, перпендикулярных $\vec{a}$, следовательно, скалярное произведение этого вектора и вектора $\vec{a}$ равно нулю, то есть

$$(\vec{x} - \lambda\vec{a})\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{x}\vec{a} = \lambda(\vec{a}\vec{a}).$$

Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, мы получаем, что

$$\lambda = \frac{\vec{x}\vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

Тогда вектор $\vec{y} \in L$ имеет вид

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x}\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}. \tag{3.2}$$

Возвращаемся к доказательству теоремы. Сейчас у нас есть векторное поле $\mathbf{X}$, все «стрелки» векторов которого одинаковы. Вычтем из каждой «стрелки» такой вектор, параллельный значению градиента функции $f$ в этой точке, чтобы разность оказалась перпендикулярна градиенту. Другими словами, применяем формулу (3.2) в нашем случае:

$$\mathbf{Y}(q) = \mathbf{X}(q) - \frac{\mathbf{X}(q)\nabla f(q)}{|\nabla f(q)|^2}\nabla f(q). \tag{3.3}$$

Тем самым мы задали новое векторное поле $\mathbf{Y}$. Для этого векторного поля через каждую точку арифметического пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ проходит интегральная кривая. В частности, через точку $p \in S$ (в которой был задан вектор $\mathbf{v}$) также проходит интегральная кривая векторного поля $\mathbf{Y}$. Обозначим ее $\alpha$. Мы подозреваем, что это та кривая, которая нужна для проверки выполнения условий определения касательного вектора для $\mathbf{v}$. Нам осталось убедиться в том, что кривая $\alpha$ лежит на поверхности $S$ и ее касательный вектор в точке $p$ совпадает с данным вектором $\mathbf{v}$.

Утверждение, что кривая $\alpha$ лежит на поверхности $S$ означает, что точки, которые выдает отображение $\alpha$, перерабатывая $t$, удовлетворяют уравнению поверхности $S$, то есть нам нужно доказать, что

$$f(\alpha(t)) = 0.$$

Как доказать это равенство? В его левой части стоит обычная функция одного аргумента. Покажем сначала, что эта функция – константа. Для этого нужно показать, что ее производная по аргументу $t$ равна нулю. Вычисляем (мы уже проводили аналогичное вычисление выше)

$$\frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) = \frac{d}{dt}f(x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}\frac{dx^{n+1}}{dt} = \\ = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha(t) =$$

Так как $\alpha$ – интегральная кривая векторного поля $\mathbf{Y}$, по определению интегральной кривой получаем, что $\cdot\alpha(t) = \mathbf{Y}(\alpha(t))$. Тогда

$$= \nabla f(\alpha(t))\mathbf{Y}(\alpha(t)) =$$

Подставляем вместо $\mathbf{Y}$ его выражение из (3.3):

$$= \nabla f(\alpha(t)) \left(\mathbf{X}(\alpha(t)) - \frac{\mathbf{X}(\alpha(t))\nabla f(\alpha(t))}{|\nabla f(\alpha(t))|^2}\nabla f(\alpha(t))\right) = \\ = \nabla f(\alpha(t))\mathbf{X}(\alpha(t)) - \frac{\mathbf{X}(\alpha(t))\nabla f(\alpha(t))}{|\nabla f(\alpha(t))|^2}|\nabla f(\alpha(t))|^2 = 0. \tag{3.4}$$

Итак, мы показали, что $f(\alpha(t)) = const$. Чему она равна? Вычислим значение функции $f(\alpha(t))$ при $t = 0$. Это значение параметра соответствует точке $p$, то есть $\alpha(0) = p$, а точка $p$ – это точка, принадлежащая поверхности $S$, то есть она удовлетворяет уравнению поверхности. Следовательно,

$$const = f(\alpha(0)) = f(p) = 0,$$

то есть константа есть нуль (и она одна и та же для всех $t$), и мы показали, что кривая $\alpha$ лежит на поверхности $S$. Нам осталось проверить, что касательный вектор к $\alpha$ в точке $p = \alpha(0)$ совпадает с вектором $\mathbf{v}$. Вычисляем (пользуемся определением интегральной кривой и формулой, задающей векторное поле $\mathbf{Y}$)

$$\dot{\alpha}(0) = \mathbf{Y}(p) = \mathbf{X}(p) - \frac{\mathbf{X}(p)\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|^2}\nabla f(p) =$$

Согласно формуле (3.1) имеем

$$\mathbf{X}(p) = (p; v) = \mathbf{v} \perp \nabla f(p).$$

Тогда, продолжая цепочку равенств получим

$$= \mathbf{v} - \frac{0}{|\nabla f(p)|^2}\nabla f(p) = \mathbf{v}.$$

Итак, для вектора $\mathbf{v} = (p; v)$ мы нашли параметризованную кривую $\alpha$, лежащую на поверхности $S$ и имеющую $\mathbf{v}$ своим касательным вектором в точке $p$. Тогда $\mathbf{v}$ является касательным вектором к поверхности $S$ по определению. □

Доказанная теорема позволяет нам решать следующие задачи:
1. Выяснять, является ли данный вектор касательным к данной $n$-поверхности (нужно проверить, является ли он перпендикулярным к градиенту функции в этой точке).
2. Раскладывать данный вектор в сумму двух векторов, один из которых параллелен градиенту функции в данной точке, а второй – перпендикулярен.

Рассмотрим решение этих задач на конкретных примерах.

**Пример** 3.5. Пусть дан эллиптический параболоид в пространстве $\mathbb{R}^4$

$$x^4 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Возьмем на нем точку $p = (1, 1, 1, 3)$ и возьмем вектор в этой точке $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 3; 1, 2, 3, 4)$. Сначала выясним, является ли он касательным к данному параболоиду. Для этого нам нужно найти градиент функции, задающей параболоид. Приведем уравнение параболоида к виду

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - x^4 = 0.$$

Тогда легко видеть, что искомая функция $f$ имеет вид:

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - x^4.$$

Находим градиент этой функции

$$\nabla f(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1, x^2, x^3, x^4; 2x^1, 2x^2, 2x^3, -1).$$

В точке $p = (1, 1, 1, 3)$ градиент будет таким:

$$\nabla f(1, 1, 1, 3) = (1, 1, 1, 3; 2, 2, 2, -1).$$

Проверяем перпендикулярность данного вектора $\mathbf{v}$ и $\nabla f(1, 1, 1, 3)$ с помощью скалярного произведения

$$\mathbf{v}\nabla f(1, 1, 1, 3) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \neq 0,$$

следовательно, $\mathbf{v}$ и $\nabla f(p)$ не перпендикулярны, следовательно, вектор $\mathbf{v}$ не является касательным к параболоиду по доказанной теореме.

Разложим вектор $\mathbf{v}$ в сумму касательного к параболоиду и параллельного градиенту. Для этого воспользуемся формулой (3.2):

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|^2}\nabla f(p)$$

будет касательным вектором к параболоиду. Находим его:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = (1, 1, 1, 3; 1, 2, 3, 4) - \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1}{2^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2}(1, 1, 1, 3; 2, 2, 2, -1) = \\ = (1, 1, 1, 3; 1, 2, 3, 4) - \left(1, 1, 1, 3; \frac{16}{13}, \frac{16}{13}, \frac{16}{13}, \frac{-8}{13}\right) = \\ = \left(1, 1, 1, 3; -\frac{3}{13}, \frac{10}{13}, \frac{23}{13}, 4\frac{8}{13}\right).\end{aligned} \quad (3.5)$$

Параллельным градиенту будет вектор

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|^2}\nabla f(p).$$

Мы его уже вычислили:

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \left(1, 1, 1, 3; \frac{16}{13}, \frac{16}{13}, \frac{16}{13}, \frac{-8}{13}\right)$$

Пусть в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ дана $n$-поверхность $S$, заданная уравнением $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$. Фиксируем произвольную точку $p \in S$. В этой точке определено касательное пространство $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ к арифметическому пространству $\mathbb{R}^{n+1}$. Как мы выяснили, оно имеет размерность $n + 1$ (см.

теорему 2.1). Все касательные вектора к поверхности $S$ в точке $p$ являются подмножеством векторного пространства $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ (Будем обозначать это подмножество $T_p(S)$). Выясним, каким аналитическим условием задается это подмножество.

Пусть $\mathbf{v} = (p; v^1, \dots, v^{n+1})$ – произвольный элемент множества $T_p(S)$. По определению градиента имеем

$$(\nabla f)(p) = \left(p; \left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}\right|_p\right),$$

где $\left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_p = a_1, \dots, \left.\frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}\right|_p = a_{n+1}$ – это вещественные числа, не равные нулю одновременно (мы здесь ввели здесь для них более короткое обозначение). Вектор $\mathbf{v} \in T_p(S)$ тогда и только тогда, когда он перпендикулярен вектору $\nabla f(p)$, то есть их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$a_1 v^1 + \ldots + a_{n+1} v^{n+1} = 0.$$

Это линейное однородное уравнение с переменными $v^1, \dots, v^{n+1}$. Как мы знаем из курса многомерной геометрии (или из курса алгебры) одно линейное уравнение в $(n+1)$-мерном векторном пространстве задает $(n+1-1)$-мерное (то есть $n$-мерное) векторное подпространство. Следовательно, множество $T_p(S)$ является $n$-мерным векторным подпространством в пространстве $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$.

Итак, мы показали, что множество всех касательных к $n$-поверхности векторов образует $n$-мерное векторное подпространство в векторном пространстве $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$. В частности, $T_p(S)$ само является $n$-мерным векторным пространством.

Кроме того, мы получаем, что

$$T_p(\mathbb{R}^{n+1}) = T_p(S) \oplus L(\nabla f(p)),$$

где $L(\nabla f(p))$ обозначает линейную оболочку вектора $\nabla f(p)$, то есть множество всех векторов, коллинеарных вектору $\nabla f(p)$. Это 1-мерное векторное пространство. Знак $\oplus$ обозначает прямую сумму векторных подпространств, то есть любой вектор из касательного пространства $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ к $\mathbb{R}^{n+1}$ можно однозначно представить в виде суммы вектора из касательного пространства $T_p(S)$ к $n$-поверхности $S$ и вектора, коллинеарного градиенту функции $f$ в точке $p$. При этом эти два вектора взаимно перпендикулярны.

**Замечание** 3.1. В случаях $n = 1$ и $n = 2$ мы уже встречались с касательными пространствами к $n$-поверхностям. Действительно, при $n = 1$ 1-поверхность – это кривая на плоскости. Тогда касательное пространство к кривой в ее точке – это множество всех векторов, параллельных касательной к ней в этой точке. Очевидно, что размерность такого пространства векторов равна единице. При $n = 2$ мы получаем поверхность в трехмерном пространстве (это курс дифференциальной геометрии). Касательным пространством в точке поверхности будет множество всех векторов, параллельных касательной плоскости в этой точке.

Рассмотрим еще один пример $n$-поверхности и найдем касательное пространство к ней.

**Пример** 3.6. Рассмотрим множество $2 \times 2$-матриц

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{pmatrix} x^1x^4 - x^2x^3 = 1 \right\}.$$

Это множество образует группу по обычному умножению матриц. Эта группа называется *специальной линейной группой порядка* 2. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ является 3-поверхностью в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$. Действительно, запишем матрицу в виде строки $(x^1, x^2, x^3, x^4)$, то есть каждую матрицу можно рассматривать как элемент из $\mathbb{R}^4$. Тогда множество $SL(2, \mathbb{R})$ будет задаваться уравнением

$$x^1x^4 - x^2x^3 - 1 = 0,$$

то есть $f(x^1, x^2, x^3, x^3) = x^1x^4 - x^2x^3 - 1$ и ее градиент

$$\nabla f(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1, x^2, x^3, x^4; x^4, -x^3, -x^2, x^1) \tag{3.6}$$

отличен от нуля во всех точках множества $SL(2, \mathbb{R})$ (вообще единственная точка из $\mathbb{R}^4$, в которой градиент обращается в нуль – это точка $(0, 0, 0, 0)$, а она не принадлежит множеству $SL(2, \mathbb{R})$). Итак, специальная линейная группа $SL(2, \mathbb{R})$ является 3-поверхностью. Следовательно, можно говорить о касательном пространстве к этой поверхности в любой ее точке. Возьмем точку

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и найдем касательное пространство к поверхности $SL(2, \mathbb{R})$ в этой точке. Рассмотрим два способа.

1 способ (по определению касательного вектора к поверхности). Проводим через точку $p$ произвольную параметризованную кривую $\alpha$, лежащую на поверхности $SL(2, \mathbb{R})$. Она имеет вид

$$\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)).$$

Мы опять записали элементы $2 \times 2$-матрицы в одну строку (пишем сначала первую строку матрицы, а затем вторую), как делали это выше. Так как кривая $\alpha$ проходит через точку $p$, получим

$$(1,0,0,1) = p = \alpha(0) = (x^1(0), x^2(0), x^3(0), x^4(0)),$$

то есть

$$x^1(0) = 1;\ x^2(0) = 0;\ x^3(0) = 0;\ x^4(0) = 1. \tag{3.7}$$

Кроме того, кривая $\alpha$ должна лежать на $SL(2,\mathbb{R})$, то есть ее точки должны удовлетворять для любого числа $t$ условию

$$x^1(t)x^4(t) - x^2(t)x^3(t) = 1. \tag{3.8}$$

По определению касательного вектора к параметризованной кривой в точке со значением параметра $t$ получим

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t); \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}, \frac{dx^4}{dt}\right).$$

Тогда в точке $p$ (значение параметра $t = 0$ имеем

$$\dot{\alpha}(0) = \left(\alpha(0); \frac{dx^1}{dt}(0), \frac{dx^2}{dt}(0), \frac{dx^3}{dt}(0), \frac{dx^4}{dt}(0)\right).$$

Чтобы получить соотношение, которому будут удовлетворять эти производные, нужно продифференцировать по $t$ условие (3.8) и вычислить его значение в нуле:

$$\frac{dx^1}{dt}(0)x^4(0) + x^1(0)\frac{dx^4}{dt}(0) - \frac{dx^2}{dt}(0)x^3(0) - x^2(0)\frac{dx^3}{dt}(0) = 0.$$

Подставим (3.7):

$$\frac{dx^1}{dt}(0) + \frac{dx^4}{dt}(0) = 0.$$

Итак, мы получили, что касательное пространство к 3-поверхности $SL(2,\mathbb{R})$ в точке $p = (1,0,0,1)$ состоит из векторов вида

$$\left(p; \frac{dx^1}{dt}(0), \frac{dx^2}{dt}(0), \frac{dx^3}{dt}(0), \frac{dx^4}{dt}(0)\right),\ \frac{dx^1}{dt}(0) + \frac{dx^4}{dt}(0) = 0.$$

Введем обозначения

$$\frac{dx^1}{dt}(0) = a;\ \frac{dx^2}{dt}(0) = b;\ \frac{dx^3}{dt}(0) = c;\ \frac{dx^4}{dt}(0) = d$$

и запишем касательный вектор в виде матрицы (первые два числа вектора – первая строчка матрицы, два последних числа – вторая строчка). Тогда касательное пространство в точке $p$ к 3-поверхности $SL(2,\mathbb{R})$ будет обозначаться так:

$$T_p(SL(2,\mathbb{R})) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a + d = 0\right\}.$$

Матрицы, сумма элементов главной диагонали которых равна нулю, называются *бесследными*. Используя введенное определение, мы можем сказать, что касательное пространство в единице специальной линейной группы $SL(2,\mathbb{R})$ состоит из бесследных матриц.

2 способ (по теореме). Мы знаем, что множество касательных векторов к $n$-поверхности в точке $p$ совпадает с множеством векторов, перпендикулярных градиенту функции $f$ в точке $p$. Найдем градиент функции $f$ в точке $p = (1,0,0,1)$ (используем формулу (3.6)):

$$\nabla f(p) = (p; 1, 0, 0, 1).$$

Тогда множество всех векторов $\mathbf{v} = (p; a, b, c, d)$, перпендикулярных вектору $\nabla f(p)$ будет задаваться уравнением

$$1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 \cdot d = 0 \Leftrightarrow a + d = 0.$$

Мы получили такой же ответ, как и в первом случае, но более простым способом.

Отметим, что хотя второй способ оказался короче, про первый способ забывать нельзя. Обобщая понятие $n$-поверхности (вводя понятие гладкого многообразия) и отказываясь от объемлющего пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, мы теряем возможность применять для отыскания касательного пространства второй способ. Зато первый способ останется в силе.

## 3.3. Экстремум функции на $n$-поверхности

Напомним понятие экстремума из курса математического анализа. Пусть дана функция $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная на некотором промежутке $U$ из $\mathbb{R}$. Пусть $p \in U$ – фиксированная точка. Точка $p$ называется точкой *экстремума*, если для всех достаточно близких к ней точек $q \in U$ (то есть расстояние от точки $q$ до точки $p$ меньше некоторого положительного числа $\varepsilon$) выполняется либо $f(q) \geq f(p)$, либо $f(q) \leq f(p)$. Если неравенства строгие, то и экстремум называется строгим. Другими словами, если функция $f$ в точке $p$ дает либо самое маленькое, либо самое большое значение среди близко расположенных к $p$ точек, то точка $p$ называется *точкой экстремума*.

Мы перенесем понятие экстремума функции, заданной на промежутке, на функцию, заданную на $n$-поверхности. Определение переносится почти дословно. Только промежуток $U$ заменяется на кусок $n$-поверхности $S$. Итак, мы получаем такое определение.

Пусть на $n$-поверхности $S$ задана функция $f : S \to \mathbb{R}$. Точка $p \in S$ называется точкой *экстремума*, если для всех достаточно близких к ней точек $q \in S$ (то есть расстояние от точки $q$ до точки $p$ меньше некоторого положительного числа $\varepsilon$; расстояния вычислять мы умеем, так как точки $p$ и $q$ лежат в $\mathbb{R}^{n+1}$) выполняется либо $f(q) \geq f(p)$, либо $f(q) \leq f(p)$. Если неравенства строгие, то и экстремум называется строгим.

Для вычисления экстремума на $n$-поверхности нам потребуется следующая теорема.

**Теорема** 3.2. *Пусть $S$ – некоторая $n$-поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданная уравнением $f(x^1, \dots, x^{n+1}) = 0$. Пусть на задана гладкая функция $g : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ и $p \in S$ – точка экстремума $g$ на $S$, то есть $g(q) \leq g(p)$ для всех точек $q \in S$ или $g(q) \geq g(p)$ для всех точек $q \in S$. Тогда существует действительное число $\lambda$, такое что $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$. Число $\lambda$ называется множителем Лагранжа.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную параметризованную кривую $\alpha : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ проходящую через точку $p$ (пусть этой точке соответствует значение параметра $t = 0$) и целиком лежащую на поверхности $S$. Тогда композиция $g \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ будет обычной функцией одного переменного $t$. Тогда $t = 0$ будет точкой экстремума для функции $g \circ \alpha$. Действительно, числа $t$ отображением $\alpha$ переводятся в точки $q$ поверхности $S$, с которыми работает функция $g$. Так как функция $g$ выдает самое маленькое (или самое большое) значение в точке $p$, то отображение $g \circ \alpha$ выдает самое маленькое (или самое большое) значение для $t$, соответствующего точке $p$, то есть при $t = 0$. Как мы знаем из курса математического анализа, для функции одной переменной если точка $t$ является точкой экстремума, то значение производной этой функции по $t$ в этой точке должно быть равно нулю, то есть

$$0 = \frac{d}{dt}(g \circ \alpha)(0) = \frac{d}{dt}(g(x^1(t), \dots, x^{n+1}(t)))(0) =$$

Продифференцируем сложную функцию.

$$= \frac{\partial g}{\partial x^1}(\alpha(0))\frac{dx^1}{dt}(0) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x^{n+1}}(\alpha(0))\frac{dx^{n+1}}{dt}(0) =$$

Применяем определение скалярного произведения векторов в точке и определение градиента функции.

$$= \nabla g(\alpha(0))\dot{\alpha}(0) = \nabla g(p)\dot{\alpha}(0).$$

Итак, мы получили, что градиент функции $g$ в точке $p$ перпендикулярен касательному вектору произвольной кривой, проходящей через точку $p$ и лежащей на поверхности $S$, то есть перпендикулярен любому касательному вектору к поверхности $S$ в точке $p$. Следовательно, вектор $\nabla g(p)$ коллинеарен вектору $\nabla f(p)$, следовательно, существует число $\lambda$, такое, что

$$\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p).$$

Что и требовалось доказать. □

**Замечание** 3.2. Если поверхность $S$ компактна (в арифметическом векторном пространстве это требование эквивалентно замкнутости и ограниченности), то каждая гладкая функция $g : U \to \mathbb{R}$ достигает на $S$ минимума и максимума. Тогда доказанная теорема может быть использована для нахождения точек наибольшего и наименьшего значения этой функции.

**Пример** 3.7. Пусть $S$ – единичная окружность, заданная уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$. Определим функцию $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ равенством

$$g(x^1, x^2) = x^1 + x^2.$$

Найдем максимальное и минимальное значения этой функции на окружности $S$. Пусть точка $p = (x^1, x^2)$ – точка экстремума. Тогда по доказанной теореме существует число $\lambda$, такое, что

$$\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p).$$

Ищем градиенты

$$\nabla f(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 2x^1, 2x^2)$$
$$\nabla g(x^1, x^2) = (x^1, x^2; 1, 1)$$

Применяем теорему

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x^1; \\ 1 = \lambda 2x^2 \end{cases}$$

Откуда получаем, что для точки $p$ должно быть $x^1 = x^2$. Кроме того, точка $p$ лежит на окружности, то есть $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$. Подставляем $x^1 = x^2$ и получаем $x^1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Теперь легко вычислить наименьшее и наибольшее значения функции $f$: $g(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ и $g(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$.

# 4. Векторные поля на $n$-поверхностях

## 4.1. Определения

*Векторным полем* $\mathbf{X}$ *на* $n$*-поверхности* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется отображение, которое сопоставляет каждой точке $p \in S$ некоторый вектор $\mathbf{X}(p)$ из множества $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ всех векторов в точке $p$. Если вектор $X(p)$ касательный к $S$ (то есть $\mathbf{X}(p) \in T_p(S)$) для каждой точки $p \in S$, то $X$ называется *касательным векторным полем* на $S$. Если $\mathbf{X}(p)$ ортогонален $S$ (то есть коллинеарен вектору $\nabla f(p)$) в каждой точке $p \in S$, то векторное поле $\mathbf{X}$ называется *нормальным векторным полем* на $S$.

**Пример** 4.1. Пусть $n$-поверхность $S$ задана уравнением $f(x^1, \dots, x^{n+1}) = 0$. Тогда векторное поле

$$\nabla f(p) = \left(p; \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}\right)$$

будет примером нормального векторного поля на поверхности $S$.

**Теорема** 4.1. *Любое векторное поле на n-поверхности S можно разложить в сумму касательного и нормального векторных полей.*

*Доказательство.* Пусть на поверхности $S$ задано произвольное векторное поле $\mathbf{X}$. Рассмотрим произвольную точку $p \in S$ и фиксируем ее. Тогда по формуле (3.2) вектор

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{X}(p) - \frac{\mathbf{X}(p)\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|^2}\nabla f(p)$$

будет касательным вектором к поверхности $S$, в вектор

$$\mathbf{Z}(p) = \frac{\mathbf{X}(p)\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|^2}\nabla f(p)$$

будет параллелен значению градиента функции $f$ в точке $p$, а значит, перпендикулярным к касательному пространству в этой точке. Отпуская точку $p$, получим два нужных нам векторных поля. $\square$

Как обычно мы будем иметь дело только с гладкими векторными полями и гладкими отображениями на поверхностях. Отображение $g : S \to \mathbb{R}^k$ будем называть *гладким*, если оно является ограничением на $S$ некоторого гладкого отображения $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}^k$, где $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащее $S$. Аналогично, векторное поле $\mathbf{X}$ на $S$ называется *гладким*, если оно является ограничением на $S$ некоторого гладкого векторного поля, определенного на открытом множестве из $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащем $S$. Таким образом, векторное поле $X$ является гладким тогда и только тогда, когда гладким является отображение $X : S \to \mathbb{R}^{n+1}$, где $\mathbf{X}(p) = (p; X(p))$ для всех $p \in S$.

**Пример** 4.2. Рассмотрим двуполостный гиперболоид $S$, заданный уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1$ и векторное поле

$$\mathbf{X}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; x^1, x^2, x^3),\ (x^1, x^2, x^3) \in S.$$

Это пример векторного поля на гиперболоиде. Оно будет гладким, так как если снять условие $(x^1, x^2, x^3) \in S$, то мы получим векторное поле на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. При этом все три функции, задающие ассоциированное отображение ($y^1 = x^1$, $y^2 = x^2$, $y^3 = x^3$) будут иметь частные производные любого порядка. Проверим, будет ли оно касательным или нормальным к гиперболоиду. Для этого найдем градиент функции

$$f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + 1,$$

которая задает гиперболоид:

$$\nabla f(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; 2x^1, 2x^2, -2x^3).$$

Фиксируем точку $p = (x^1, x^2, x^3)$ и проверяем векторы $\nabla f(p)$ и $\mathbf{X}(p)$ на коллинеарность. Для этого нужно выяснить, являются ли равными отношения

$$\frac{2x^1}{x^1};\ \frac{2x^2}{x^2};\ \frac{-2x^3}{x^3}.$$

Первые два отношения равны, но они не равны третьему отношению. Следовательно, векторы не коллинеарны и данное векторное поле $\mathbf{X}$ не является нормальным. Проверим, будет ли оно касательным, то есть являются ли его векторы $\mathbf{X}(p)$ касательными для каждой точки $p \in S$. Для этого нужно проверить, являются ли эти векторы перпендикулярными градиенту функции $f$ в той же точке. Для проверки вычисляем скалярное произведение векторов $\mathbf{X}(p)$ и $\nabla f(p)$:

$$\mathbf{X}(p)\nabla f(p) = 2x^1 \cdot x^1 + 2x^2 \cdot x^2 + (-2x^3) \cdot x^3 = 2((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2) = -2 \neq 0.$$

Следовательно, касательным данное векторное поле не является.

Наконец, разложим векторное поле $\mathbf{X}$ в сумму двух векторных полей, одно $\mathbf{Y}$ из которых касательное к $S$, а другое $\mathbf{Z}$ – нормальное. Воспользуемся формулой (3.2). Тогда

$$\mathbf{Z}(p) = \frac{\mathbf{X}(p)\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|^2}\nabla f(p) = \frac{-2}{4(x^1)^2 + 4(x^2)^2 + 4(x^3)^2}(p; 2x^1, 2x^2, -2x^3) =$$
$$= \left(p; \frac{-x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \frac{x^3}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\right)$$

нормальное векторное поле на гиперболоиде. А

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{X}(p) - \mathbf{Z}(p) = (p; x^1, x^2, x^3) -$$
$$- \left(p; \frac{-x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \frac{x^3}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\right) =$$
$$= \left(x^1\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, x^2\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},\right.$$
$$\left. x^3\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\right)$$

касательное векторное поле к гиперболоиду.

## 4.2. Касательное векторное поле на $n$-поверхности

Для касательных к $n$-поверхности векторных полей можно ввести понятие интегральной кривой. Пусть на $n$-поверхности $S$ задано гладкое касательное векторное поле $\mathbf{X}$. Параметризованную кривую $\alpha$ будем называть *интегральной кривой касательного векторного поля* $\mathbf{X}$, если, во-первых, она лежит на поверхности $S$, и, во-вторых, касательный вектор к этой кривой в каждой ее точке совпадает со значением векторного поля $\mathbf{X}$ в этой точке. Другими словами, параметризованная кривая $\alpha$ будет интегральной кривой касательного векторного поля $\mathbf{X}$, заданного на поверхности $S$, если

$$1)\, \alpha(t) \in S\, \forall t \in I;\;\; \dot{\alpha}(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))\, \forall t \in I.$$

По сути интегральная кривая касательного векторного поля – это такая же интегральная кривая, как для векторного поля, заданного на $\mathbb{R}^n$, но с дополнительным требованием: ее точки должны лежать на поверхности $S$. Докажем следующую теорему, которая говорит о существовании и единственности интегральной кривой касательного векторного поля.

**Теорема** 4.2. *Пусть $S$ – некоторая $n$-поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{X}$ – гладкое касательное векторное поле на $S$, $p \in S$ – произвольная фиксированная точка. Тогда существует открытый интервал $I$, содержащий нуль, и параметризованная кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^{n+1}$, такие что*

*(i)* $\alpha(0) = p$ *(кривая $\alpha$ проходит через точку $p$);*

*(ii)* $\dot{\alpha}(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))$ *для всех $t \in I$ (касательный вектор к кривой $\alpha$ совпадает со значением векторного поля в той же точке);*

*(iii)* $\forall t \in I\;\; \alpha(t) \in S$ *(все точки кривой $\alpha$ лежат на поверхности $S$).*

*Доказательство.* Пусть $n$-поверхность $S$ задана уравнением $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$, где $f(x^1, \ldots, x^{n+1})$ – гладкая функция на некотором открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (мы воспользовались определением $n$-поверхности). Так как касательное векторное поле $\mathbf{X}$, заданное на $n$-поверхности $S$, является гладким, существует открытое множество $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$, содержащее $S$, и гладкое векторное поле $\tilde{X}$ на $V$, такое что $X(q) = \tilde{X}(q)$ для всех точек $q \in S$.

Положим

$$W = U \cap V.$$

Множество $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является открытым как пересечение таковых. Это множество содержит поверхность $S$ и на нем определено векторное поле $\tilde{\mathbf{X}}$, которое в точках поверхности $S$ совпадает с векторным полем $\mathbf{X}$.

Определим на $W$ векторное поле $\mathbf{Y}$ по формуле

$$\mathbf{Y}(q) = \tilde{\mathbf{X}}(q) - \frac{\tilde{\mathbf{X}}(q) \cdot \nabla f(q)}{|\nabla f(q)|^2} \nabla f(q). \tag{4.1}$$

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ – интегральная кривая векторного поля $Y$, проходящая через точку $p$. Она существует согласно теореме 2.2.

Покажем, что эта кривая $\alpha$ удовлетворяет всем трем требованиям теоремы. Требованию $(i)$ она удовлетворяет по построению (мы взяли кривую, проходящую через точку $p$ при значении параметра $t = 0$).

Проверим выполнение второго требования. Так как для точек $q \in S$ векторные поля $\tilde{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{X}$ совпадают, а векторное поле $\mathbf{X}$ является касательным к $S$ (следовательно, перпендикулярно градиенту $\nabla f$ в каждой точке поверхности), мы получим из (4.1)

$$\mathbf{Y}(q) = \tilde{\mathbf{X}}(q) = \mathbf{X}(q).$$

По определению интегральной кривой векторного поля получаем

$$\dot{\alpha}(t) = \mathbf{Y}(\alpha(t)) = \mathbf{X}(\alpha(t)).$$

Итак, второе условие выполнено.

Наконец, проверим выполнение третьего условия, то есть проверим, что интегральная кривая $\alpha$ целиком лежит на поверхности $S$. Для этого нужно проверить, что точки $\alpha(t)$ для любого $t \in I$ принадлежат поверхности $S$, то есть удовлетворяют уравнению этой поверхности:

$$f(\alpha(t)) = 0 \Leftrightarrow f \circ \alpha(t) = 0.$$

Докажем это. Сначала убедимся, что функция $f \circ \alpha(t)$ является константой, то есть принимает одно и то же значение для любого $t$. Для этого нужно показать, что производная по $t$ этой функции всегда равна нулю. Проверяем.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t)) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\alpha(t)) \frac{dx^1}{dt}(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}(\alpha(t)) \frac{dx^{n+1}}{dt}(t) = \\ = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \mathbf{X}(\alpha(t)) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $f(\alpha(t)) = const$ для любого $t \in I$. В частности, это верно для $t = 0$. Как мы знаем, точка $p = \alpha(0)$ принадлежит поверхности $S$, то есть $f(\alpha(0)) = 0$. Тогда

$$const = f(\alpha(0)) = 0,$$

то есть $cosnt = 0$, и мы доказали, что параметризованная кривая $\alpha(t)$ лежит на поверхности $S$. $\square$

## 4.3. Нормальные векторные поля на $n$-поверхности. Ориентация

Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *связным*, если для каждой пары точек $p, q \in S$ существует непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to S$, такое, что $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Другими словами, множество $S$ является связным, если любая пара точек из $S$ может быть соединена непрерывной, но не обязательно гладкой кривой, целиком лежащей в $S$. Примерами связных подмножеств являются окружность, отрезок, $n$-сфера ($n \geq 1$).

**Теорема** 4.3. *Пусть $S$ – некоторая связная $n$-поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда на $S$ существует ровно два гладких единичных нормальных векторных поля $\mathbf{N_1}$ и $\mathbf{N_2}$. При этом $\mathbf{N_1}(p) = -\mathbf{N_2}(p)$ для любой точки $p \in S$.*

*Доказательство.* Пусть $n$-поверхность $S$ задана уравнением $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$. Зададим два векторных поля следующими формулами.

$$\mathbf{N_1}(p) = \tfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}; \mathbf{N_2}(p) = -\tfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}.$$

Эти векторные поля гладкие, так как гладким векторным полем является градиент функции. Они нормальные, так как их значения в каждой точке коллинеарны градиенту функции $f$ в этой точке. Наконец, они являются единичными, то есть для каждой точки $p \in S$ длина вектора $\mathbf{N_1}(p)$ (также как и вектора $\mathbf{N_2}(p)$) равна единице.

Покажем, что третьего такого векторного поля не существует. Проведем доказательство от противного. Пусть существует еще одно векторное поле $\mathbf{N_3}$, удовлетворяющее условиям теоремы (то есть является гладким, нормальным и единичным). Фиксируем произвольную точку $p \in S$. Тогда вектор $\mathbf{N_3}(p)$ будет коллинеарен градиенту $\nabla f(p)$ в этой точке, а значит, существует число $g(p)$, такое, что

$$\mathbf{N_3}(p) = g(p)\nabla f(p).$$

Отпускаем точку точку $p$. Тогда числа $g(p)$ начинают меняться и $g$ становится функцией. Итак, векторное поле $\mathbf{N_3}$ связано с градиентом $\nabla f$ по формуле

$$\mathbf{N_3}(p) = g(p)\nabla f(p),\ p \in S.$$

Тогда

$$\mathbf{N_3}(p) = g(p)\nabla f(p) = g(p)|\nabla f(p)|\frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|} = h(p)\mathbf{N_1}(p),$$

где $h(p) = g(p)|\nabla f(p)|$ – новое обозначение. Так как оба векторных поля $\mathbf{N_3}$ и $\mathbf{N_1}$ единичные, получим

$$|\mathbf{N_3}(p)| = |h(p)||\mathbf{N_1}(p)| \Leftrightarrow 1 = |h(p)|1,$$

то есть функция $h(p)$ может принимать значения 1 или $-1$. Так как $n$-поверхность предполагается связной, а функция $h(p)$ – непрерывная, $h(p)$ либо везде на $S$ равна 1, либо везде на $S$ равна $-1$. В первом случае векторное поле $\mathbf{N_3}$ совпадает с векторным полем $\mathbf{N_1}$, а во втором – с векторным полем $\mathbf{N_2}$. Тем самым мы показали, что третьего нормального гладкого единичного векторного поля на $n$-поверхности не существует. □

Каждое из векторных полей $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_2}$ называется *ориентацией* на $n$- поверхности. Если выбрано одно из них и зафиксировано на $S$, то говорят, что на $n$-поверхности фиксирована ориентация. Из доказанной теоремы следует, что на любой связной $n$-поверхности существует две и только две ориентации.

Если на $n$-поверхности $S$ фиксирована ориентация, то для каждой точки $p \in S$ касательное пространство $T_p(S)$ (которое является $n$-мерным векторным пространством) становится ориентированным.

**Замечание** 4.1. Напомним, что называется ориентацией векторного пространства. Пусть дано $n$-мерное векторное пространство $V$. Тогда для любой пары базисов $I = (e_1, \dots, e_n)$ и $II = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ этого пространства можно составить матрицу перехода от первого базиса ко второму. Для этого векторы второго базиса раскладывают по векторам первого базиса:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 = C_1^1 e_1 + \ldots + C_1^n e_n;\\ &\ldots\\ &\varepsilon_n = C_n^1 e_1 + \ldots + C_n^n e_n.\end{aligned}$$

Коэффициенты разложения (то есть вещественные числа $C_i^j$) в этих равенствах нумеруются следующим образом: нижний индекс – номер вектора, верхний индекс – номер координаты вектора. Запишем эти коэффициенты в виде матрицы (координаты векторов записываем по столбцам):

$$C = \begin{pmatrix} C_1^1 & \ldots & C_n^1 \\ & \ldots & \\ C_1^n & \ldots & C_n^n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется матрицей перехода от первого базиса ко второму. Коротко ее записывают так: $C = (C_i^j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Определитель матрицы перехода является числом либо положительным, либо отрицательным. Если он положителен, то базисы называются одинаково ориентированными, а если отрицателен, то противоположно ориентированными. Если взять все базисы векторного пространства $V$, то они разбиваются на два класса (то есть на два множества): в каждом классе базисы одинаково ориентированы друг с другом, а любые два базиса из разных классов – противоположно ориентированы. Каждый класс называется ориентацией векторного пространства. Если один из классов фиксирован (его базисы названы правыми), то говорят, что векторное пространство ориентировано. Базисы другого класса называются левыми. Итак, говоря неформально, ориентировать векторное пространство – это значит разделить все базисы этого пространства на два класса и один из этих классов выделить (назвать его базисы правыми).

Вернемся к касательному пространству $T_p(S)$ в точке $p$ поверхности $S$ и посмотрим, каким образом в нем можно разделить все базисы на два класса.

Пусть поверхность $S$ арифметического пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ ориентирована, то есть мы выбрали и зафиксировали на ней одно из нормальных гладких единичных векторных полей $\mathbf{N_1}$ или $\mathbf{N_2}$. Так как другое векторное поле нам пока больше не понадобится, выбранное нормальное векторное поле мы обозначим $\mathbf{N}$. Фиксируем точку $p \in S$. Тогда значение векторного поля $\mathbf{N}$ в точке $p$ – это вектор

$$\mathbf{N}(p) = (p; v) \equiv (p; v^1, \ldots, v^{n+1}).$$

Рассмотрим базис $((p; e_1), \ldots, (p; e_n))$ касательного пространства $T_p(S)$ (мы помним, что оно $n$-мерно, а значит любой его базис состоит из $n$ векторов в точке $p$). Напомним, что каждый вектор в точке представляет из себя пару: первые $(n+1)$ чисел – это точка $p$, а вторые $(n+1)$ чисел – «стрелка». Распишем подробнее в векторах данного базиса «стрелки», оставив точку в сокращенном обозначении:

$$\begin{aligned}
&(p; e_1) = (p; e_1^1, \ldots, e_1^{n+1})\\
&\ldots\\
&(p; e_n) = (p; e_n^1, \ldots, e_n^{n+1}).
\end{aligned}$$

Составим $(n+1) \times (n+1)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} v^1 & \ldots & v^{n+1} \\ e_1^1 & \ldots & e_1^{n+1} \\ & \ldots & \\ e_n^1 & \ldots & e_n^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Вычислим ее определитель. Будем называть базис *согласованным с ориентацией*, если определитель этой матрицы положителен и *не согласованным с ориентацией*, если отрицателен. Тем самым мы выделили в векторном пространстве $T_p(S)$ класс базисов, которые назвали правыми. Остальные базисы называются левыми (то есть базисы, для которых определитель матрицы (4.2) отрицателен). Нетрудно проверить (см. дополнительные задачи), что выделенные таким образом два класса базисов удовлетворяют требованиям замечания 4.1. Следовательно, на касательном пространстве $T_p(S)$ задана ориентация.

**Пример** 4.3. На 2-поверхности в $\mathbb{R}^3$ ориентация может быть использована для определения направления положительного вращения в касательном пространстве к поверхности в каждой ее точке. Для данного $\theta \in \mathbb{R}$ *положительным $\theta$-вращением* в точке $p \in S$ ориентированной 2-поверхности называется отображение $R_\theta : T_p(S) \to T_p(S)$, определенное формулой

$$R_\theta(\mathbf{v}) = (\cos\theta)\mathbf{v} + (\sin\theta)[\mathbf{N}(p), \mathbf{v}],$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов в трехмерном векторном пространстве.

## 4.4. Гауссово отображение

Пусть $S$ – ориентированная $n$-поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{N}(p)$ – единичное нормальное гладкое векторное поле, задающее ориентацию на $S$. Обозначим отображение, ассоциированное векторному полю $\mathbf{N}(p)$ через $N(p)$, то есть $\mathbf{N}(p) = (p; N(p))$. Это отображение $N : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ в действительности отображает поверхность $S$ в единичную $n$-сферу $S^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, так как длина каждого вектора $N(p)$ равна 1. Таким образом, каждой ориентированной $n$-поверхности $S$ сопоставляется гладкое отображение $N : S \to S^n$ этой поверхности в единичную $n$-сферу, называемое *гауссовым отображением.* Отображение $N$ можно представлять себе как отображение, которое каждой точке $p \in S$ ставит в соответствие точку в $\mathbb{R}^{n+1}$, полученную «переносом» единичного вектора $N(p)$ в начало координат.

Образ $n$-поверхности, полученный при гауссовом отображении называется *сферическим образом* ориентированной $n$-поверхности. Другими словами, сферический образ – это множество точек на $n$-сфере, у которых есть прообразы на $n$-поверхности $S$ при гауссовом отображении.

**Пример** 4.4. Рассмотрим простейшую 1-поверхность на $\mathbb{R}^2$ – прямую. Ее уравнение имеет вид

$$a_1x^1 + a_2x^2 + b = 0,$$

где $a_1, a_2, b$ – вещественные числа, причем $a_1$ и $a_2$ одновременно не равны нулю. Зададим на ней ориентацию с помощью векторного поля

$$\mathbf{N}(x^1, x^2) = \frac{\nabla f(x^1, x^2)}{|\nabla f(x^1, x^2)|}.$$

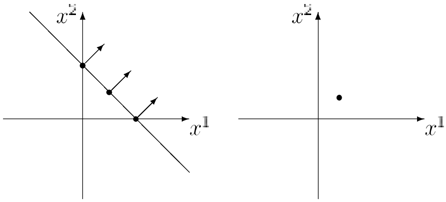
Заметим, что в нашем случае

$$f(x^1, x^2) = a_1x^1 + a_2x^2 + b,$$

а значит,

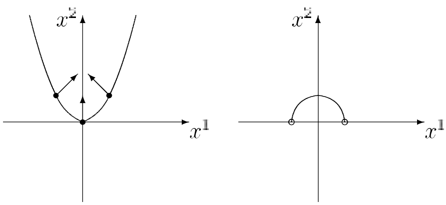
$$\nabla f(x^1, x^2) = (x^1, x^2; a_1, a_2).$$

Тогда
$$|\nabla f(x^1, x^2)| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$
и
$$\mathbf{N}(x^1, x^2) = \left(x^1, x^2; \frac{a_1}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}\right).$$




Каждой точки $p = (x^1, x^2)$ векторное поле $\mathbf{N}$ ставит в соответствие вектор с одной и той же «стрелкой» $\left(\frac{a_1}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}}\right)$. Значит, сферический образ прямой есть одна точка.

**Пример** 4.5. Как мы видели в предыдущем примере, прямая (то есть 1-поверхность, которая совсем не искривлена) на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет сферическим образом одну точку. Посмотрим пример «более кривой» 1-поверхности на плоскости. Рассмотрим параболу. Это 1-поверхность, которая имеет уравнение
$$x^2 - (x^1)^2 = 0.$$
Найдем ее сферический образ аналогично предыдущему примеру. Вычисляем
$$\nabla f(x^1, x^2) = (x^1, x^2; -2x^1, 1);\ |\nabla f(x^1, x^2)| = \sqrt{4(x^1)^2 + 1}.$$
Тогда
$$\mathbf{N}(x^1, x^2) = \left(x^1, x^2; \frac{-2x^1}{\sqrt{4(x^1)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4(x^1)^2 + 1}}\right).$$
Первая координата «стрелки» вектора $\mathbf{N}(x^1, x^2)$ может принимать все значения от -1 до 1. Выясним, может ли для каких-нибудь значений $x^1$ она быть равна 1 и -1. Если это так, то получаем
$$\frac{-2x^1}{\sqrt{4(x^1)^2 + 1}} = \pm 1 \Rightarrow 4(x^1)^2 = 4(x^1)^2 + 1.$$




Мы получили противоречивое равенство. Следовательно, таких значений $x^1$, в которых первая координата «стрелки» равна $\pm 1$ нет. Вторая координата стрелки всегда принимает положительные значения и меняется от нуля до единицы.

Тогда сферический образ параболы представляет из себя верхнюю полуокружность без концов.

**Пример** 4.6. Рассмотрим эллипсоид $(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0$. Легко видеть, что нормальное векторное поле $\mathbf{N}(x^1, x^2, x^3)$ пробегает все возможные направления (проверьте это утверждение вычислениями). Следовательно, сферическим образом эллипсоида будет вся сфера.

Сферический образ ориентированной $n$-поверхности $S$ содержит множество направлений, которые встречаются в качестве нормальных направлений к $S$. Поэтому его размеры позволяют судить, в какой степени поверхность $S$ искривлена в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для $n$-плоскости, которая вовсе не искривлена, сферический образ состоит из одной точки. Если $n$-поверхность компактна (напомним, что в арифметическом векторном пространстве это эквивалентно замкнутости и ограниченности), то она должна искривляться, «проходя» через все направления: ее сферический образ должен совпасть со всей сферой $S^n$. Строгое доказательство этого факта мы опускаем.

# 5. Векторные поля на параметризованных кривых

## 5.1. Операции с векторными полями, заданными вдоль параметризованных кривых

*Векторным полем* $\mathbf{X}$ *вдоль параметризованной кривой* $\alpha : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется отображение, которое сопоставляет каждому значению $t \in I$ некоторый вектор $\mathbf{X}(t)$ в точке $\alpha(t)$ этой кривой, то есть

$$\mathbf{X}(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^{n+1})$$

для всех $t \in I$.

Векторное поле $\mathbf{X}(t)$ вдоль параметризованной кривой $\alpha$ каждому $t$ ставит в соответствие некоторой вектор в точке $\alpha(t)$, то есть

$$\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); v(t)),$$

где «стрелка» $v(t)$ меняется при изменении $t$ и представляет собой $(n+1)$ вещественное число при каждом фиксированном $t$. Когда $t$ меняется, меняются и эти числа, то есть они превращаются в функции переменной $t$. Обозначим их $X^1(t), \ldots, X^{n+1}(t)$. Тогда векторное поле $\mathbf{X}$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); X^1(t), \ldots, X^{n+1}(t)).$$

Функции $X^1(t), \ldots, X^{n+1}(t)$ будем называть *компонентами векторного поля.*

*Функцией* $f$ *вдоль кривой* $\alpha : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ назовем любое отображение вида $f : I \to \mathbb{R}$.

**Пример** 5.1. Пусть дана параметризованная кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда в каждой точке $\alpha(t)$ этой кривой определен касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$. Отображение $\mathbf{X}(t)$, которое каждому $t \in I$ ставит в соответствие касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$ будет примером векторного поля вдоль кривой $\alpha$. Это векторное поле называется *векторным полем касательных векторов кривой* $\alpha$.

Пусть $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Это параметризованная кривая в $\mathbb{R}^3$. Тогда для каждого $t \in \mathbb{R}$ определен касательный вектор

$$\dot{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, t; -\sin t, \cos t, 1).$$

Векторное поле

$$\mathbf{X}(t) = (\cos t, \sin t, t; -\sin t, \cos t, 1)$$

будет векторным полем касательных векторов вдоль кривой $\alpha$.

Функция $f$, которая каждому значению $t \in I$ ставит в соответствие длину $|\dot{\alpha}(t)|$ касательного вектора к кривой $\alpha$, будет функцией вдоль кривой $\alpha$. Для кривой, рассмотренной в данном примере эта функция будет иметь вид

$$f(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \Leftrightarrow f(t) = \sqrt{2}.$$

Векторные поля и функции вдоль параметризованных кривых часто появляются как ограничения векторных полей и функций, заданных на открытых множествах из $\mathbb{R}^{n+1}$ (в частности, на всем $\mathbb{R}^{n+1}$). Пусть дано гладкое векторное поле $\mathbf{X}(p)$, заданное на открытом множестве $U$ и параметризованная кривая $\alpha$, заданная на интервале $I$, таком, что $\alpha(I) \subset U$ (то есть все точки кривой $\alpha$ лежат в открытом множестве $U$, на котором задано векторное поле $\mathbf{X}$). Тогда определяется отображение $\mathbf{X} \circ \alpha$, которое каждому значению $t$ ставит в соответствие вектор векторного поля $\mathbf{X}$ в точке $\alpha(t)$. Это отображение будет векторным полем вдоль параметризованной кривой $\alpha$. Оно называется *ограничением* векторного поля $\mathbf{X}$ на параметризованную кривую $\alpha$.

Аналогичным образом определяется ограничение функции $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ на параметризованную кривую $\alpha$. А именно, это будет композиция $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$.

**Пример** 5.2. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{X}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; (x^1)^2 + (x^2)^2, (x^1)^2 - (x^2)^2, x^3).$$

Оно определено на всем $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим параметризованную кривую

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Тогда ограничение векторного поля $\mathbf{X}$ на кривую $\alpha$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \circ \alpha(t) = (\cos t, \sin t, t; (\cos t)^2 + (\sin t)^2, (\cos t)^2 - (\sin t)^2, t) = \\ = (\cos t, \sin t, t; 1, \cos 2t, t).\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию, определенную на всем $\mathbb{R}^3$ по формуле

$$f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - x^3.$$

Тогда ограничением функции $f$ на кривую $\alpha$ будет отображение

$$(f \circ \alpha)(t) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 - t = 1 - t.$$

Рассмотрим множество всех векторных полей вдоль параметризованной кривой $\alpha$. Введем на этом множестве три операции с векторными полями:
1. *Сложение векторных полей* определим формулой

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t).$$

2. *Умножение векторного поля на функцию, заданную вдоль параметризованной кривой*, определим формулой

$$(f\mathbf{X})(t) = f(t)\mathbf{X}(t).$$

3. *Скалярное произведение векторных полей вдоль параметризованной кривой* определим по формуле

$$(\mathbf{X}\mathbf{Y})(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t),$$

где $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ – векторные поля вдоль кривой $\alpha$, $f$ – функция вдоль кривой $\alpha$. Обратите внимание, что в правых частях всех трех равенств стоят операции с векторами в точке (сложение, умножение на число и скалярное произведение, которые уже были определены выше). Прочитаем первую формулу (определение суммы векторных полей): суммой двух векторных полей называется векторное поле, которое обозначается $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$, ставящее каждому значению $t \in I$ вектор в точке $\alpha(t)$, равный сумме векторов, которые ставятся в соответствие $t$ векторными полями $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно. Остальные два равенства читаются аналогичным образом.

Первые две операции удовлетворяют стандартному набору свойств из определения векторного пространства, а третья операция линейна относительно умножения на функции, а также коммутативна.

Векторное поле $\mathbf{X}$ вдоль кривой $\alpha$ называется *гладким*, если все его компоненты $X^i : I \to \mathbb{R}$ гладкие функции. *Производной* гладкого векторного поля $\mathbf{X}$ вдоль $\alpha$ называется векторное поле $\dot{\mathbf{X}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)$ вдоль $\alpha$, определенное следующим образом

$$\dot{\mathbf{X}}(t) \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \left(\alpha(t); \frac{dX^1}{dt}(t), \ldots, \frac{dX^{n+1}}{dt}(t)\right).$$

**Пример** 5.3. Пусть дана параметризованная кривая в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\alpha(t) = (x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t)).$$

Мы уже знаем одно векторное поле вдоль нее. Это векторное поле касательных векторов вдоль нее:

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t); \frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^{n+1}}{dt}\right).$$

Так как с точки зрения физики первая производная пути по времени – это скорость, то векторное поле $\dot{\alpha}$ также называют *векторным полем скорости.*

Построим еще одно векторное поле вдоль $\alpha$:

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t); \frac{d^2x^1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2x^{n+1}}{dt^2}\right).$$

Это векторное поле называется *векторным полем ускорения* вдоль $\alpha$. Очевидно, оно является гладким. Вектор, который выдает это векторное поле для каждого $t$, называется *вектором ускорения.*

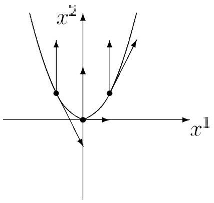
**Пример** 5.4. Пусть дана парабола $x^2 - (x^1)^2 = 0$. Найдем векторные поля скорости и ускорения вдоль нее. Мы видим, что парабола задана нам как 1-поверхность, а нам нужно задать ее как параметризованную кривую. Другими словами, перейти от общего уравнения параболы к параметрическим. Для этого обозначим $x^1 = t$. Тогда $x^2 = t^2$ (в правой части этого равенства двойка обозначает квадрат). Итак, парабола будет задаваться так:

$$\alpha(t) = (t, t^2).$$

Находим векторные поля $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$:

$$\dot{\alpha}(t) = (t, t^2; 1, 2t);\ \ddot{\alpha}(t) = (t, t^2; 0, 2). \tag{5.1}$$

Изобразим несколько векторов данных векторных полей.




Возьмем значение $t = 0$. Ему соответствует точка $\alpha(0) = (0, 0)$. В этой точке получаем по формулам (5.1)

$$\dot{\alpha}(0) = (0, 0; 1, 0);\ \ddot{\alpha}(0) = (0, 0; 0, 2).$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем вектора в точках со значениями $t = 1$ и $t = -1$

$$\dot{\alpha}(1) = (1, 1; 1, 2);\ \ddot{\alpha}(1) = (1, 1; 0, 2);$$
$$\dot{\alpha}(-1) = (-1, 1; 1, -2);\ \ddot{\alpha}(1) = (-1, 1; 0, 2);$$

Перечислим правила дифференцирования векторных полей. Они полностью аналогичны правилам дифференцирования функций:

1) $\frac{d}{dt}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \frac{d}{dt}\mathbf{X} + \frac{d}{dt}\mathbf{Y}$;

2) $\frac{d}{dt}(f\mathbf{X}) = \left(\frac{d}{dt}f\right)\mathbf{X} + f\left(\frac{d}{dt}\mathbf{X}\right)$;

3) $\frac{d}{dt}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{X}\right)\mathbf{Y} + \mathbf{X}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{Y}\right)$,

где $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ – векторные поля вдоль кривой $\alpha$, $f$ – функция вдоль кривой $\alpha$. Третья формула носит название *правила Лейбница*. Докажем правило Лейбница. Два остальных правила доказываются аналогично (см. дополнительные задачи).

Пусть даны два векторных поля

$$\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); X^1(t), \ldots, X^{n+1}(t));\ \mathbf{Y}(t) = (\alpha(t); Y^1(t), \ldots, Y^{n+1}(t)).$$

вдоль кривой $\alpha$. Тогда их скалярное произведение будет вычисляться по формуле (здесь мы используем формулу для вычисления скалярного произведения вектора в точке)

$$(\mathbf{XY})(t) = X^1Y^1(t) + \ldots + X^{n+1}Y^{n+1}(t).$$

В правой части этого равенства стоит сумма произведений обычных функций одной переменной $t$. Дифференцируем ее по $t$, используя привычные нам правила дифференцирования функций:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{XY})(t) = \frac{dX^1}{dt}Y^1(t) + X^1(t)\frac{dY^1}{dt} + \ldots + \frac{dX^{n+1}}{dt}Y^{n+1}(t) + X^{n+1}(t)\frac{dY^{n+1}}{dt} =$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$= \left(\frac{dX^1}{dt}Y^1(t) + \ldots + \frac{dX^{n+1}}{dt}Y^{n+1}(t)\right) + \left(X^1(t)\frac{dY^1}{dt} + \ldots + X^{n+1}(t)\frac{dY^{n+1}}{dt}\right) =$$

Первая скобка – это скалярное произведение векторных полей $\frac{d}{dt}\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, а вторая – скалярное произведение векторных полей $\mathbf{X}$ и $\frac{d}{dt}\mathbf{Y}$. Таким образом, получаем

$$= \frac{d}{dt}\mathbf{XY}(t) + \mathbf{X}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{Y}.$$

## 5.2. Геодезические линии на $n$-поверхностях

Пусть дана $n$-поверхность $S$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$ – ее уравнение.

*Геодезической линией* (или, короче, *геодезической*) на поверхности $S$ называется параметризованная кривая $\alpha : I \to S$, вектор ускорения $\ddot{\alpha}(t)$ которой ортогонален к касательному пространству $T_{\alpha(t)}(S)$ для любого $t \in I$ (или, что эквивалентно, коллинеарен градиенту $\nabla f$ в каждой точке $\alpha(t)$).

**Замечание** 5.1. Пусть на $n$-поверхности $S$ живет разумное существо $A$. Вне $n$-поверхности оно выходить не может и даже не подозревает, что существует еще одно измерение, кроме $n$ измерений его поверхности. Это разумное существо может оперировать только с точками поверхности $S$ и векторами касательных пространств к этой поверхности (это так называемая внутренняя геометрия поверхности). Если в какой-то точке поверхности $S$ задан вектор, не принадлежащий касательному пространству в этой точке, наше разумное существо от этого вектора воспринимает только его ортогональную проекцию на касательное пространство.

Пусть существо $A$ двигается по геодезической $\alpha$ на поверхности $S$. Выясним, чем эта геодезическая для него представляется. В каждой точке геодезической вектор ускорения ортогонален касательному пространству. Значит, его проекция на касательное пространство нулевая. Существо $A$ считает, что в каждой точке кривой $\alpha$ ускорение нулевое. Так как ускорение – это мера изменения скорости, то для $A$ скорость вдоль $\alpha$ не меняется (ни по величине, ни по направлению). Значит, существо $A$ считает, что оно движется по «прямой». Итак, мы получаем, что геодезическая на $n$-поверхности – это аналог прямой евклидова пространства.

**Пример** 5.5. Покажем, что прямая будет геодезической на любой $n$- поверхности.

Пусть дана $n$-поверхность $S$ и прямая $\alpha$ на ней. Как мы видели в примере 2.8, прямая задается так:

$$\alpha(t) = (\alpha(t); p^1 t + a^1, \dots, p^{n+1} t + a^{n+1}),$$

где $p^1, \dots, p^{n+1}$ – некоторые вещественные числа, не равные нулю одновременно (это направляющий вектор прямой), $a^1, \dots, a^{n+1}$ – некоторые вещественные числа (это фиксированная точка на прямой). Находим для каждого $t$ скорость и ускорение:

$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t); p^1, \dots, p^{n+1});\ \ddot{\alpha}(t) = (\alpha(t); 0, \dots, 0).$$

Мы получили, что векторное поле ускорения на прямой является нулевым. Так как нуль-вектор перпендикулярен любому вектору, для каждого $t$ ускорение будет перпендикулярно касательному пространству к $S$ в точке $\alpha(t)$. Следовательно, прямая на любой поверхности будет геодезической.

**Пример** 5.6. Покажем, что для произвольных $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ параметризованная кривая $\alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d)$ являются геодезическими на цилиндре $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$.

Найдем векторное поле ускорения для винтовой линии:

$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t); -a\sin(at+b), a\cos(at+b), c);$$
$$\ddot{\alpha}(t) = (\alpha(t); -a^2\cos(at+b), -a^2\sin(at+b), 0).$$

Так как цилиндр задается уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2 = 1$, функция $f(x^1, x^2, x^3)$ имеет вид

$$f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1.$$

Вычисляем ее градиент

$$\nabla f(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; 2x^1, 2x^2, 0)$$

и находим его значения в точках кривой $\alpha$:

$$\nabla f(\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d) = \\ = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d; 2\cos(at+b), 2\sin(at+b), 0).$$

Сравнивая полученные результаты, получаем

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{-2}{a^2}\nabla f(\alpha(t)).$$

Итак, векторное поле ускорения кривой $\alpha$ коллинеарно градиенту функции $f$ в точках кривой $\alpha$. Следовательно, параметризованная кривая $\alpha$ является геодезической. Итак, мы показали, что кривые $\alpha$ являются геодезическими на цилиндре. Выясним, что это за линии.

1. Пусть $a = 0$ и $c \neq 0$. Тогда

$$\alpha : x^1 = const;\ x^2 = const;\ x^3 = ct + d.$$

Эти параметрические уравнения задают прямые на цилиндре, то есть его прямолинейные образующие.

2. Пусть $a \neq 0$ и $c = 0$. Тогда

$$\alpha : x^1 = \cos(at+b);\ x^2 = \sin(at+b);\ x^3 = d.$$

Все точки этой кривой лежат в плоскости $x^3 = d$. В ней индуцируется система координат $x^1, x^2$, в которой кривая $\alpha$ задается уравнениями $x^1 = \cos(at+b)$; $x^2 = \sin(at+b)$. Это окружность радиуса 1 с центром в точке $(0, 0, d)$.

3. Пусть $a \neq 0$ и $c \neq 0$. Тогда мы получаем кривую, которая закручивается вокруг цилиндра и поднимается вверх. Это знакомая нам из курса дифференциальной геометрии винтовая линия.

**Пример** 5.7. Для каждой пары единичных (длина каждого равна 1) ортогональных (перпендикулярны друг другу) векторов $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ и каждого числа $a \in \mathbb{R}$ окружность большого круга (или точка, если $a = 0$)

$$\alpha(t) = (\cos at)e_1 + (\sin at)e_2$$

является геодезической на 2-сфере

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

в $\mathbb{R}^3$.

Действительно, находим градиент функции $f$ для сферы:

$$f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1;$$
$$\nabla f(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; 2x^1, 2x^2, 2x^3).$$

Находим векторное поле ускорения для кривой. Для этого нам потребуются функции $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$, которые задают кривую $\alpha$. Векторы $e_1$ и $e_2$ – это упорядоченные тройки чисел $(p^1, p^2, p^3)$ и $(q^1, q^2, q^3)$ соответственно. Так как это фиксированные векторы, эти числа являются постоянными (не зависят от $t$). Тогда

$$\alpha(t) = (\cos(at)p^1 + \sin(at)q^1, \cos(at)p^2 + \sin(at)q^2, \cos(at)p^3 + \sin(at)q^3).$$

Дифференцируя два раза, находим векторное поле ускорения:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}(t) = (\alpha(t); -a^2(\cos(at)p^1 + \sin(at)q^1),\\ - a^2(\cos(at)p^2 + \sin(at)q^2), -a^2(\cos(at)p^3 + \sin(at)q^3)).\end{aligned}$$

Градиент функции $f$ в точках кривой $\alpha$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\nabla f(\alpha(t)) = (\alpha(t); 2(\cos(at)p^1 + \sin(at)q^1),\\ 2(\cos(at)p^2 + \sin(at)q^2), 2(\cos(at)p^3 + \sin(at)q^3)).\end{aligned}$$

Сравнивая результаты, получаем

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{-a^1}{2}\nabla f(\alpha(t)).$$

Откуда мы делаем вывод, что большие окружности 2-сферы являются геодезическими.

Геодезических на $n$-поверхностях много, а именно, через каждую точку поверхности в направлении любого касательного вектора в этой точке проходит геодезическая. Строго сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы.

**Теорема** 5.1. *Пусть $S$ – некоторая $n$-поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданная уравнением $f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$, $p \in S$ – произвольная фиксированная точка, $\mathbf{v} \in T_p(S)$ – произвольный фиксированный вектор в точке $p$. Тогда существует интервал $I \subset \mathbb{R}$, содержащий нуль, и геодезическая $\alpha : I \to S$, такая, что $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}$.*

*Доказательство.* Пусть дана $n$-поверхность $S$, на ней фиксирована точка $p$ и в точке $p$ фиксирован касательный вектор $\mathbf{v}$. Рассмотрим единичное нормальное гладкое векторное поле

$$\mathbf{N}(q) = \frac{\nabla f(q)}{|\nabla f(q)|}.$$

Если параметризованная кривая $\alpha$ будет геодезической, то в каждой своей точке ее вектор ускорения коллинеарен градиенту функции $f$ в этой точке, а значит, коллинеарен и вектору векторного поля $\mathbf{N}$. Запишем этот факт в виде равенства

$$\ddot{\alpha}(t) = g(t)\mathbf{N}(\alpha(t)), \tag{5.2}$$

где $g(t)$ – некоторая функция вдоль кривой $\alpha(t)$. Найдем эту функцию (заодно еще убедимся, что она будет гладкой). Для этого умножим скалярно обе части равенства (5.2) на $\mathbf{N}(\alpha(t))$. Так как векторное поле $\mathbf{N}$ единичное, справа получим функцию $g(t)$:

$$g(t) = \ddot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)) =$$

По правилу Лейбница имеем

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t))) = \ddot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)). \tag{5.3}$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получим

$$= \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t))) - \dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) =$$

Так как $\dot{\alpha}(t)$ – это касательный вектор к кривой $\alpha$, а кривая $\alpha$ должна лежать на поверхности $S$, вектор $\dot{\alpha}(t)$ будет касательным к поверхности и перпендикулярным вектору $\mathbf{N}(\alpha(t))$. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю. Тогда

$$= -\dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)).$$

Подставим полученное выражение для $g(t)$ в равенство (5.2)

$$\ddot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))\mathbf{N}(\alpha(t)) = 0. \tag{5.4}$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t)$, которые задают кривую $\alpha$. Как мы знаем из курса дифференциальных уравнений, если эту систему дополнить начальными условиями на сами функции и их первые производные, то она будет всегда иметь единственное решение в некоторой окрестности точки $p$. Эти условия у нас есть:

$\alpha(0) = p$ (условие на функции $x^1(t), \dots, x^{n+1}(t)$) и $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}$ (условие на первые производные этих функций, так как они задают касательный вектор к $\alpha$ в точке $\alpha(0)$). Итак, мы получаем, что система дифференциальных уравнений (5.4), с начальными условиями $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}$ выдаст кривую, которая в каждой своей точке будет иметь векторное поле ускорения коллинеарным единичному векторному полю $\mathbf{N}$ (то есть одно из условий определения геодезической выполняется). Нам остается проверить, что эта кривая будет лежать на поверхности $S$.

Вернемся к правилу Лейбница (5.3) и используем то, что кривая $\alpha$ удовлетворяет уравнению (5.4):

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t))) = \ddot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) =$$
$$= -(\dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))\mathbf{N}(\alpha(t))\mathbf{N}(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) =$$

Так как векторное поле $\mathbf{N}$ единичное, его скалярный квадрат равен единице.

$$= -(\dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) = 0.$$

Таким образом, мы получаем, что функция $\dot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t))$ является постоянной вдоль $\alpha$ (то есть при любом значении $t$ выдает одну и ту же константу $c$). Найдем ее. В частности, имеем (используем условие теоремы)

$$c = \dot{\alpha}(0)\mathbf{N}(\alpha(0)) = \mathbf{v}\mathbf{N}(\alpha(0)) = 0.$$

Последнее равенство обосновывается тем, что вектор $\mathbf{v}$ по условию теоремы является касательным к поверхности $S$, а вектор $\mathbf{N}(\alpha(0))$ является перпендикулярным к касательному пространству, следовательно, их скалярное произведение нулевое. Итак, мы получаем, что

$$\dot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)) = 0.$$

Используя этот факт, убедимся, что функция $f \circ \alpha(t)$ также является константой. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции получим (подробно мы уже несколько раз выше это проделывали, поэтому здесь напишем только конечный ответ)

$$\frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) = \nabla f(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) =$$

Градиент функции $f$ с нормальным векторным полем $\mathbf{N}$ связан так:

$$\nabla f(\alpha(t)) = \mathbf{N}(\alpha(t))|\nabla f(\alpha(t))|.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получим

$$= (\mathbf{N}(\alpha(t))|\nabla f(\alpha(t))|)\dot{\alpha}(t) = |\nabla f(\alpha(t))|(\mathbf{N}(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)) = 0.$$

Таким образом, функция $f \circ \alpha(t)$ является постоянной, то есть $f(\alpha(t)) = const$. Найдем эту константу. Вычислим значение этой функции при $t = 0$. Мы знаем, что $\alpha(0) = p$ и $p$ принадлежит поверхности $S$, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности. Следовательно,

$$const = f(\alpha(0)) = f(p) = 0.$$

Итак, для любого $t \in I$ имеем $f(\alpha(t)) = 0$, следовательно, любая точка кривой $\alpha$ лежит на поверхности $S$. В результате получаем, что нам удалось построить геодезическую, проходящую через точку $p$ в направлении вектора $\mathbf{v}$. □

**Пример** 5.8**.** Дифференциальное уравнение (5.4) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений относительно функций $x^1(t), \ldots, x^{n+1}(t)$, задающих геодезическую $\alpha(t)$. В общем случае получается достаточно громоздкая система. Посмотрим, как она выглядит на конкретном примере. В качестве $n$-поверхности $S$ возьмем 2-сферу

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

в $\mathbb{R}^3$. Точка $p = (0, 0, 1) \in S$ и $\mathbf{v} = (p; 1, 0, 0)$. Сначала убедимся, что этот вектор действительно является касательным к сфере $S$. Для этого нужно проверить, что он перпендикулярен градиенту функции $f$ в этой точке. Вычисляем

$$\nabla f(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; 2x^1, 2x^2, 2x^3).$$

В точке $p = (0, 0, 1)$

$$\nabla f(0, 0, 1) = (0, 0, 1; 0, 0, 2).$$

Вычисляя скалярное произведение векторов $\nabla f(0, 0, 1)$ и $\mathbf{v}$, мы убеждаемся, что оно равно нулю, а значит, эти векторы перпендикулярны. Следовательно, вектор $\mathbf{v}$ действительно является касательным вектором к сфере.

Пусть $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ – геодезическая, проходящая через точку $p$ в направлении вектора $\mathbf{v}$. Запишем уравнение (5.4) в терминах функций $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$. Имеем

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t); \frac{d^2x^1}{dt^2}, \frac{d^2x^2}{dt^2}, \frac{d^2x^3}{dt^2}\right).$$

Нормальное векторное поле $\mathbf{N}$ в точках кривой $\alpha(t)$:

$$\mathbf{N}(\alpha(t)) = \frac{\nabla f(\alpha(t))}{|\nabla f(\alpha(t))|} = (\alpha(t); x^1(t), x^2(t), x^3(t))$$

и его производная по $t$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) = \left(\alpha(t); \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right).$$

Вычисляем скалярное произведение

$$\dot{\alpha}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) = \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2.$$

Подставляем все вычисленное в (5.4):

$$\left(\alpha(t); \frac{d^2x^1}{dt^2}, \frac{d^2x^2}{dt^2}, \frac{d^2x^3}{dt^2}\right) +$$
$$+\left(\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right)(\alpha(t); x^1(t), x^2(t), x^3(t)) = (\alpha(t); 0, 0, 0).$$

Мы получаем равенство двух 6-к чисел. Первые три равенства тривиальны (они имеют вид $x^1(t) = x^1(t)$, $x^2(t) = x^2(t)$, $x^3(t) = x^3(t)$). Последние три равенства дают систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x^1}{dt^2} + \left(\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right)x^1(t) = 0;\\
&\frac{d^2x^2}{dt^2} + \left(\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right)x^2(t) = 0;\\
&\frac{d^2x^3}{dt^2} + \left(\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right)x^3(t) = 0;
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Так как мы рассматриваем геодезическую, проходящую через точку $p = (0, 0, 1)$ в направлении вектора $\mathbf{v} = (p; 1, 0, 0)$, эту систему уравнений нужно дополнить следующими начальными условиями.

$$\begin{gathered}
x^1(0) = 0;\ x^2(0) = 0;\ x^3(0) = 1;\\
\frac{dx^1}{dt}(0) = 1;\ \frac{dx^2}{dt}(0) = 0;\ \frac{dx^3}{dt}(0) = 0.
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Как мы показали в примере 5.7 геодезическими на сфере будут большие окружности (так как через каждую точку в каждом направлении проходит такая окружность, то только они будут геодезическими), следовательно решением системы дифференциальных уравнений будут функции, задающие такую окружность. Это будет окружность, лежащая в плоскости $Oxz$

с центром в нуле. Ее можно задать единичными ортогональными векторами $e_1 = (1, 0, 0)$ и $e_2 = (0, 0, 1)$ (см. пример 5.7). Тогда функции, задающие геодезическую будут иметь вид

$$x^1(t) = \cos at;\ x^2(t) = 0;\ x^2(t) = \sin at.$$

Посмотрим на то, что мы получили с точки зрения курса дифференциальных уравнений: у нас была достаточно сложная система дифференциальных уравнений с начальными условиями и мы смогли написать для нее решение. Решили достаточно сложную систему дифференциальных уравнений, используя геометрию.

## 5.3. Ковариантная производная

Векторное поле $\mathbf{X}$ вдоль параметризованной кривой $\alpha : I \to S$ на $n$- поверхности $S$ называется *касательным к $S$ вдоль $\alpha$*, если $\mathbf{X}(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$ для всех $t \in I$. Другими словами, мы требуем, чтобы векторы векторного поля $\mathbf{X}$ принадлежали касательным пространствам к поверхности $S$ в соответствующих точках.

**Пример** 5.9. Рассмотрим 2-сферу $S$, заданную уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$, параметризованную кривую $\alpha(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ на ней и векторное поле $\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); -\sin t, 0, \cos t)$ вдоль нее. Находим его производную

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); -\cos t, 0, -\sin t)$$

и убеждаемся, что она не будет перпендикулярна градиенту функции $f$ в точках этой кривой

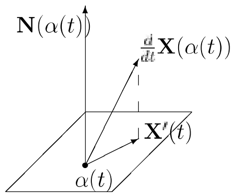
$$(\nabla f \circ \alpha)(t) = (\alpha(t); 2\cos t, 0, 2\sin t).$$

Действительно,

$$-2\cos^2 t - 2\sin^2 t = -2 \neq 0.$$

А значит, производная векторного поля $\mathbf{X}$, касательного к сфере, не будет таковым.

Как показывает предыдущий пример, производная $\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)$ касательного векторного поля, вообще говоря, не является касательным векторным полем. Тем не менее мы можем получить векторное поле, касательное к $S$, если будем проектировать каждый вектор поля $\frac{d}{dt}\mathbf{X}$ ортогонально на касательное пространство $T_{\alpha(t)}(S)$.




Этот процесс дифференцирования с последующим проектированием на касательное пространство к $S$ определяет некоторую операцию с теми же свойствами, что и дифференцирование, с тем уточнением, что теперь дифференцирование векторных полей, касательных к $S$, снова приводит к касательному к $S$ векторному полю.

Эта операция называется *ковариантным дифференцированием векторного поля, заданного вдоль параметризованной кривой.*

Пусть в $\mathbb{R}^{n+1}$ дана $n$-поверхность $S$ и пусть $\alpha : I \to S$ – параметризованная кривая на $S$, $\mathbf{X}(t)$ – гладкое векторное поле, касательное к $S$ вдоль $\alpha$. *Ковариантной производной* векторного поля $\mathbf{X}(t)$ называется векторное поле $\mathbf{X}'(t)$, определенное равенством

$$\mathbf{X}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) - (\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{N}(\alpha(t)))\mathbf{N}(\alpha(t)), \tag{5.7}$$

где $\mathbf{N}$ – одна из двух ориентаций на $S$ (см. формулу (3.2)). Отметим, что ковариантная производная не зависит от выбора ориентации, так как замена $\mathbf{N}$ на $-\mathbf{N}$ не меняет результат в формуле (5.7) (проверьте самостоятельно).

Легко проверить, что ковариантное дифференцирование обладает привычными свойствами всех дифференцирований:

1) $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})'(t) = \mathbf{X}'(t) + \mathbf{Y}'(t)$;

2) $(f\mathbf{X})'(t) = \frac{df}{dt}\mathbf{X}(t) + f(t)\mathbf{X}'(t)$;

3) $\frac{d}{dt}(\mathbf{XY}) = \mathbf{X}'(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{Y}'(t)$

для любых векторных полей $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ и функции $f(t)$, заданных вдоль параметризованной кривой $\alpha$.

Докажем 3). Остальные два свойства доказываются аналогично. Рассмотрим левую часть этого равенства. По правилу Лейбница для дифференцирования скалярного произведения векторных полей получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{XY}) = \frac{d}{dt}\mathbf{XY} + \mathbf{X}\frac{d}{dt}\mathbf{Y} =$$

Подставляем (5.7):

$$= \left(\mathbf{X}'(t) + (\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)))\mathbf{N}(\alpha(t))\right)\mathbf{Y}(t) +$$

$$+ \mathbf{X}(t)\left(\mathbf{Y}'(t) + (\frac{d}{dt}\mathbf{Y}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)))\mathbf{N}(\alpha(t))\right) =$$

Так как векторные поля $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ являются касательными к поверхности $S$, следовательно, ортогональны нормальному векторному полю $\mathbf{N}$, получим, что их скалярные произведения с $\mathbf{N}$ равны нулю. Тогда, раскрывая скобки в последнем выражении цепочки равенств, получим

$$= \mathbf{X}'(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{X}(t)\mathbf{Y}'(t).$$

Что и требовалось доказать.

**Замечание** 5.2. Наглядно можно сказать, что ковариантная производная $\mathbf{X}'(t)$ определяет скорость изменения $\mathbf{X}(t)$ вдоль $\alpha$ так, как это видно на поверхности $S$ (то есть при пренебрежении составляющей вектора $\frac{d}{dt}\mathbf{X}$, нормальной к $S$).

Пусть дана параметризованная кривая $\alpha : I \to S$ на $n$-поверхности $S$. Назовем *ковариантным ускорением* этой кривой ковариантную производную векторного поля скорости $\dot{\alpha}$ этой кривой, то есть

$$(\dot{\alpha})'(t) = \ddot{\alpha}(t) - (\ddot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)))\mathbf{N}(\alpha(t)). \tag{5.8}$$

**Теорема** 5.2. *Параметризованная кривая $\alpha$ на $n$-поверхности $S$ является геодезической тогда и только тогда, когда ее ковариантное ускорение равно нулю.*

*Доказательство.* Пусть параметризованная кривая $\alpha$ является геодезической. Покажем, что в этом случае ее ковариантное ускорение равно нулю. По определению геодезической векторное поле ускорения $\ddot{\alpha}$ коллинеарно векторному полю $\mathbf{N}$, то есть

$$\ddot{\alpha}(t) = \lambda(t)\mathbf{N}(\alpha(t)), \tag{5.9}$$

где $\lambda(t)$ для каждого фиксированного $t$ есть некоторое вещественное число. При изменении $t$ это число меняется (этот факт мы подчеркнули, написав рядом с $\lambda$ в круглых скобках $t$), образуя функцию. Найдем эту функцию. Для этого умножим скалярно обе части последнего равенства на $\mathbf{N}(\alpha(t))$. Так как векторное поле $\mathbf{N}$ единичное, его скалярный квадрат равен единице. Тогда

$$\lambda(t) = \ddot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)).$$

Подставим найденное $\lambda(t)$ в (5.9), а полученный результат подставим в (5.8). Тогда

$$(\dot{\alpha})'(t) = 0.$$

Обратно, пусть дано, что $(\dot{\alpha})'(t) = 0$. Покажем, что $\alpha$ является геодезической, то есть, что векторное поле ускорения $\ddot{\alpha}(t)$ коллинеарно нормальному векторному полю $\mathbf{N}(\alpha(t))$ в точках кривой $\alpha$. Согласно (5.8) получим

$$\ddot{\alpha}(t) = (\ddot{\alpha}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)))\mathbf{N}(\alpha(t)),$$

что и означает коллинеарность векторных полей $\ddot{\alpha}(t)$ и $\mathbf{N}(\alpha(t))$. $\square$

## 5.4. Параллельность

В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ векторы $\mathbf{v} = (p, v) \in T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathbf{w} = (q, w) \in T_q(\mathbb{R}^{n+1})$ называются *параллельными в евклидовом смысле*, если $v = w$.

Векторное поле $\mathbf{X}(t)$ вдоль параметризованной кривой $\alpha : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется *евклидово-параллельным*, если $X(t_1) = X(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \in I$.

**Пример** 5.10. Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана окружность

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ t \in [-\pi, \pi).$$

Рассмотрим векторное поле в $\mathbb{R}^3$, заданное формулой

$$\mathbf{X}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; (x^1)^2 + (x^2)^2, x^1x^3, x^2x^3).$$

Тогда его сужение на кривую $\alpha$, то есть векторное поле $\mathbf{X} \circ \alpha(t)$ вдоль кривой $\alpha$ будет иметь вид

$$\mathbf{X} \circ \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0; 1, 0, 0).$$

Оно является евклидово-параллельным, так как для любых $t \in [-\pi, \pi)$ выдает одну и ту же «стрелку» $(1, 0, 0)$.

**Теорема** 5.3. *Векторное поле $\mathbf{X}(t)$, заданное вдоль кривой $\alpha$ является евклидово-параллельным вдоль $\alpha$ тогда и только тогда, когда $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{0}$.*

*Доказательство.* Пусть векторное поле $\mathbf{X}(t)$ евклидово-параллельно вдоль кривой $\alpha$. Тогда по определению параллельности оно имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); C^1, \dots, C^{n+1}),$$

где $C^1, \dots, C^{n+1}$ – константы (они не меняются при изменении $t$). Так как производная константы равна нулю, получаем, что

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); 0, \dots, 0),$$

то есть векторное поле нулевое.

Обратно, пусть $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Тогда для

$$\mathbf{X}(t) = \left(\alpha(t); \frac{dX^1}{dt}, \dots, \frac{dX^{n+1}}{dt}\right)$$

Получаем, что

$$\frac{dX^1}{dt} = 0,\ \dots,\ \frac{dX^{n+1}}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); const_1, \dots, const_{n+1})$$

и для любых значений $t_1$ и $t_2$ мы получим одинаковые «стрелки» в $\mathbf{X}(t_1)$ и $\mathbf{X}(t_2)$. Следовательно, это векторное поле является евклидово-параллельным. $\square$

Пусть теперь дана $n$-поверхность $S$ и касательное векторное поле $\mathbf{X}(t)$ к ней, заданное вдоль параметризованной кривой $\alpha : I \to S$ этой поверхности. Если перенести дословно определение параллельности векторного поля, то получим, что таких полей «очень мало», а те, которые есть не представляют существенного интереса. Если поверхность отлична от плоскости, то параллельными будут только поля вдоль прямых этой поверхности. Например, на сфере параллельных векторных полей не будет. Представим себе сферу и большую окружность на ней. Если попытаться нарисовать касательное параллельное векторное поле вдоль этой окружности, то из-за «одинаковости» «стрелок» векторы этого поля перестают быть касательными к сфере. Образно говоря, на искривленных поверхностях вдоль кривых одинаковость стрелок и требование касательности к поверхности не совместимы. Поэтому определение параллельности нужно менять.

Гладкое векторное поле $\mathbf{X}(t)$, касательное к $S$ вдоль $\alpha$, называется *параллельным в смысле Леви-Чивита* или просто *параллельным*, если его ковариантная производная $\mathbf{X}'(t) = 0$.

**Замечание** 5.3. Наглядно, поле $\mathbf{X}$ параллельно вдоль $\alpha$, если $\mathbf{X}$ является постоянным векторным полем вдоль $\alpha$ так, как это видно с $S$.

**Пример** 5.11. Пусть сфера $S$ задана уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = 1$ и параметризованная кривая $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ – экватор этой сферы. Зададим на этой кривой касательно к $S$ векторное поле (убедитесь самостоятельно, что оно действительно будет касательным векторным полем)

$$\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); \sin t, -\cos t, 1).$$

Выясним, будет ли оно параллельным в смысле Леви-Чивита. Для этого нужно вычислить его ковариантную производную. Смотрим на формулу (5.7) и вычисляем все, что там требуется:

$$\mathbf{N}(\alpha(t)) = (\alpha(t); \cos t, \sin t, 0);\ \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = (\alpha(t); \cos t, \sin t, 0);$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\mathbf{N}(\alpha(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + 0 = 1. \tag{5.10}$$

Тогда

$$\mathbf{X}'(t) = (\alpha(t); \cos t - 1\cos t, \sin t - 1\sin t, 0-0) = (\alpha(t); 0, 0, 0).$$

Итак, ковариантная производная векторного поля $\mathbf{X}$ равна нулю, следовательно, это векторное поле параллельно (в смысле Леви-Чивита) вдоль большой окружности на сфере.

Отметим следующие свойства параллельности Леви-Чивита:

1) Если векторное поле $\mathbf{X}(t)$ параллельно вдоль $\alpha$, то $\mathbf{X}$ имеет постоянную длину, так как
$$\frac{d}{dt}|\mathbf{X}|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{X}\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}'\mathbf{X} = 0.$$
Следовательно, функция $|\mathbf{X}(t)|$ постоянна.

2) Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – два параллельных векторных поля вдоль $\alpha$, то их скалярное произведение постоянно вдоль $\alpha$, так как
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) = \mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{Y}' = 0.$$

3) Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – два параллельных векторных поля вдоль $\alpha$, то угол между ними постоянен. Это следует из того, что угол между векторными полями определяется по формуле
$$\cos\angle(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\mathbf{X}\mathbf{Y}}{|\mathbf{X}||\mathbf{Y}|},$$
а числитель и знаменатель этой дроби являются постоянными функциями по пунктам 1) и 2).

4) Если поля $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ параллельны вдоль $\alpha$, то параллельными являются также поля $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ и $c\mathbf{X}$,где $c \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Это означает, что множество параллельных векторных полей вдоль кривой $\alpha$ образует вещественное векторное пространство.

5) Векторное поле скорости $\dot{\alpha}$ кривой $\alpha$ на $S$ является параллельным в том и только том случае, когда $\alpha$ – геодезическая. (Докажите самостоятельно)

Чтобы ввести операцию параллельного переноса на $n$-поверхности $S$ вдоль параметризованной кривой $\alpha$, нам потребуется следующая теорема.

**Теорема** 5.4. *Пусть $S$ – некоторая $n$-поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha : I \to S$ – параметризованная кривая на $S$, $t_0 \in I$ – произвольное фиксированное число и $\mathbf{v} \in T_{\alpha(t_0)}(S)$ – произвольный фиксированный вектор в точке $\alpha(t_0)$. Тогда существует единственное векторное поле $\mathbf{V}$, касательное к $S$ вдоль $\alpha$, которое параллельно и для которого $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{v}$.*

*Доказательство.* Мы ищем векторное поле $\mathbf{V}$, касательное к $S$ вдоль $\alpha$ и удовлетворяющее условию $\mathbf{V}' = 0$. По определению ковариантной производной имеем
$$\mathbf{V}' = \frac{d}{dt}\mathbf{V} - \left(\left(\frac{d}{dt}\mathbf{V}\right)\mathbf{N}(\alpha(t))\right)\mathbf{N}(\alpha(t)).$$

По правилу Лейбница имеем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{VN}(\alpha(t))) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{V}\right)\mathbf{N}(\alpha(t)) + \mathbf{V}\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)).$$

Тогда

$$\mathbf{V}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{V} - \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{VN}(\alpha(t))) - \mathbf{V}\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))\right)\mathbf{N}(\alpha(t)) =$$

Так как $\mathbf{V}$ – касательное векторное поле, оно перпендикулярно нормальному векторному полю $\mathbf{N}$, и их скалярное произведение равно нулю.

$$= \frac{d}{dt}\mathbf{V} + \mathbf{V}\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))\mathbf{N}(\alpha(t)).$$

Итак, мы получаем, что касательное векторное поле $\mathbf{V}$, заданное вдоль кривой $\alpha$, имеет нулевую ковариантную производную тогда и только тогда, когда удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V} + \left(\mathbf{V}\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))\right)\mathbf{N}(\alpha(t)) = 0. \tag{5.11}$$

Это векторное дифференциальное уравнение первого порядка относительно векторного поля $\mathbf{V}$. Если иметь в виду, что

$$\mathbf{V}(t) = (\alpha(t); V^1(t), \ldots, V^{n+1}(t)),$$

то это векторное дифференциальное уравнение превращается в систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dV^i}{dt} + \left(\sum_{j=1}^{n+1} V^j\frac{d}{dt}(N^j(\alpha(t)))\right)(N^i(\alpha(t))) = 0,$$

где $j = 1, \ldots, n+1$ и

$$\mathbf{N}(\alpha(t)) = (\alpha(t); N^1(t), \ldots, N^{n+1}(t)).$$

По теореме о существовании и единственности решения системы уравнений первого порядка, найдется единственное векторное поле $\mathbf{V}$ вдоль $\alpha$, удовлетворяющее уравнению (5.11) и начальному условию $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{v}$. Однако теорема о существовании и единственности не гарантирует, что полученное векторное поле будет касательным к $S$. Чтобы убедиться, что это действительно так, заметим, что согласно (5.11) имеем (кроме того, учитываем, что $\mathbf{N}$ единичное)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{VN}(\alpha(t))) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{V}\right)\mathbf{N}\alpha(t) + \mathbf{V}\frac{d}{dt}\mathbf{N}\alpha(t) =$$

$$= -\mathbf{V}\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t))\cdot 1 + \mathbf{V}\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha(t)) = 0,$$

так что $\mathbf{VN}(\alpha(t))$ постоянная функция вдоль $\alpha$. Так как

$$\mathbf{V}(t_0)\mathbf{N}\alpha(t_0) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{N}(\alpha(t_0)) = 0,$$

эта постоянная должна равняться нулю. Откуда получаем, что векторное поле $\mathbf{V}$ касательно к $S$. □

**Следствие** 5.1. Пусть $S$ – 2-поверхность в $\mathbb{R}^3$, и пусть $\alpha : I \to S$ – геодезическая на $S$, для которой касательный вектор для каждого $t \in I$ отличен от нуля (то есть $\dot\alpha(t) \neq 0$). Тогда векторное поле $\mathbf{X}$, касательное к $S$ вдоль $\alpha$, параллельно (в смысле Леви-Чивита) вдоль $\alpha$ в том и только том случае, когда его длина $|\mathbf{X}|$ и угол между векторами $\mathbf{X}(t)$ и $\dot\alpha(t)$ постоянны вдоль $\alpha$.

*Доказательство.* Пусть векторное поле $\mathbf{X}$ параллельно вдоль геодезической. Так как оно параллельно, то по свойству 1) параллельных векторных полей его длина постоянна. Так как $\alpha$ – геодезическая, то для любого $t$ значение $\dot\alpha(t)$ будет одним и тем же (см. задачу **??**). Наконец, угол будет постоянным по свойствам 5) и 3) параллельности.

Обратно, пусть длина $|\mathbf{X}|$ и угол между векторами $\mathbf{X}(t)$ и $\dot\alpha(t)$ вдоль $\alpha$ постоянны. Обозначим этот угол через $\theta$.

Фиксируем произвольное число $t_0 \in I$ и $\mathbf{v} \in T_{\alpha(t_0)}(S)$ – единичный вектор, ортогональный к $\dot\alpha(t_0)$. Пусть $\mathbf{V}$ – единственное параллельное вдоль $\alpha$ векторное поле, такое, что $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{v}$ (оно существует и единственно по доказанной теореме). Тогда $|\mathbf{V}| = 1$ (параллельное векторное поле имеет постоянную длину и длина его вектора $\mathbf{v}$ равна 1) и $\mathbf{V}\dot\alpha = 0$ вдоль $\alpha$ (угол между параллельными векторными полями постоянный и два их вектора $\mathbf{v}$ и $\dot\alpha(t)$ перпендикулярны). Поэтому пара $(\dot\alpha(t), \mathbf{V}(t))$ является ортогональным (то есть векторы взаимно перпендикулярны) базисом в $T_{\alpha(t)}(S)$ при каждом $t \in I$. Тогда каждый вектор $\mathbf{X}(t)$ ($t$ фиксировано) можно разложить по этому базису с коэффициентами $f(t)$ и $g(t)$ (это вещественные числа):

$$\mathbf{X}(t) = f(t)\dot\alpha(t) + g(t)\mathbf{V}(t). \tag{5.12}$$

Отпускаем $t$. Для разных $t$ числа $f(t)$ и $g(t)$, вообще говоря, могут быть разными, следовательно, мы получаем две функции на интервале $I$. Покажем, что на самом деле эти функции являются постоянными. Вычислим угол $\theta$ между векторными полями $\dot\alpha$ и $\mathbf{X}$. Используем разложение (5.12) и перпендикулярность векторных полей $\dot\alpha$ и $\mathbf{V}$:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{X}(t)\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)||\mathbf{X}(t)|} = \frac{(f(t)\dot\alpha(t) + g(t)\mathbf{V}(t))\dot\alpha}{|\dot\alpha||\mathbf{X}|} = \frac{f(t)|\dot\alpha(t)|^2}{|\dot\alpha||\mathbf{X}|}.$$

Выражаем из полученного соотношения $f(t)$:

$$f(t) = \frac{|\mathbf{X}(t)|\cos\theta}{|\dot\alpha|}. \tag{5.13}$$

Так как длина вектора скорости геодезической постоянна (см. задачу **??**), а $\cos\theta$ и $|\mathbf{X}(t)|$ постоянны по условию, получаем, что в правой части равенства (5.13) стоит константа. Следовательно, $f(t)$ постоянная функция. Чтобы убедиться в постоянстве функции $g(t)$, вычислим квадрат длины вектора $\mathbf{X}(t)$, используя разложение (5.12)

$$|\mathbf{X}(t)|^2 = (\mathbf{X}(t))^2 = (f(t)\dot{\alpha}(t) + g(t)\mathbf{V}(t))(f(t)\dot{\alpha}(t) + g(t)\mathbf{V}(t)) =$$

Раскрываем скобки, учитывая, что для каждого $t$ векторы $\dot{\alpha}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$ перпендикулярны

$$= f^2(t)|\dot{\alpha}(t)|^2 + g^2(t)|\mathbf{V}(t)|^2 =$$

Так как векторное поле $\mathbf{V}$ мы строили единичным, получим

$$= f^2(t)|\dot{\alpha}(t)|^2 + g^2(t).$$

Выражаем $g^2(t)$:

$$g^2(t) = |\mathbf{X}(t)|^2 - f^2(t)|\dot{\alpha}(t)|^2.$$

Так как все величины в правой части равенства постоянны, постоянной будет $g^2(t)$, а следовательно, и сама функция $g(t)$.

Наконец, используем свойство 4) параллельности (линейная комбинация параллельных векторных полей с числовыми коэффициентами является параллельным векторным полем). Тогда $\mathbf{X}$ параллельно вдоль геодезической $\alpha$. □

Используя понятие параллельности векторного поля вдоль кривой, введем операцию параллельного переноса касательных векторов $n$-поверхности $S$ вдоль параметризованной кривой из одной точки в другую.

Пусть дана $n$-поверхность $S$, две точки $p, q \in S$ и отображение $\alpha : [a, b] \to S$, такое, что $\alpha(a) = p$ и $\alpha(b) = q$. Потребуем, чтобы отображение $\alpha$ было сужением некоторого гладкого отображения $I \to S$, где $I$ – некоторый интервал, содержащий отрезок $[a, b]$. Будем называть отображение $\alpha$ (гладкой) параметризованной кривой, соединяющей точки $p$ и $q$ на поверхности $S$.

Определим отображение

$$P_\alpha : T_p(S) \to T_q(S)$$

касательных пространств к $S$ в точках $p$ и $q$ по формуле

$$P_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{V}(b),$$

где для каждого вектора $\mathbf{v} \in T_p(S)$ векторное поле $\mathbf{V}$ является единственным параллельным векторным полем вдоль $\alpha$, совпадающим в точке $p$ с вектором $\mathbf{v}$, то есть $\mathbf{V}(a) = \mathbf{v}$. Про вектор $P_\alpha(\mathbf{v})$ говорят, что он получен *параллельным переносом* (или *параллельным перенесением*) вектора $\mathbf{v}$ вдоль $\alpha$ из точки $p$ в точку $q$.

**Пример** 5.12. Пусть единичная 2-сфера $S$ в $\mathbb{R}^3$ задана уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Напомним понятие сферических координат на сфере $S$. Представим сферу $S$ с центром в начале правой прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда каждая точка $M$ может быть однозначно определена парой чисел $(\theta, t)$, где $\theta$ – угол между осью $Ox$ и вектором $\overrightarrow{OM}$, $t$ – угол между осью $Oz$ и вектором $\overrightarrow{OM}$. Тогда в системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ точка $M$ будем иметь координаты $(\sin t \cos\theta, \sin t \sin\theta, \cos t)$.

Фиксируем угол $\theta$ и будем менять $t$. Тогда мы получим большие окружности, проходящие через северный $p$ и южный $q$ полюса сферы (точки $p$ и $q$ определяются пересечением сферы $S$ с осью $Oz$ системы координат). Таким образом, мы получаем параметризованную кривую

$$\alpha_\theta(t) = (\sin t \cos\theta, \sin t \sin\theta, \cos t),$$

где $t \in [0, \pi]$. Эта кривая соединяет северный $p = (0, 0, 1)$ и южный $q = (0, 0, -1)$ полюса сферы. Рассмотрим вектор $\mathbf{v} = (p; 1, 0, 0) \in T_p(S)$. Подвергнем его параллельному переносу из точки $p$ в точку $q$ вдоль кривой $\alpha_\theta$. Для этого нужно найти векторное поле $\mathbf{V}$, параллельное вдоль кривой $\alpha_{\boldsymbol{\theta}}$, причем $\mathbf{V}(0) = \mathbf{v}$. Как мы знаем такое векторное поле существует и единственно. Оно получается как решение векторного дифференциального уравнения (5.11). Запишем это векторное уравнение в виде системы для нашего случая. Обозначим искомое векторное поле

$$\mathbf{V}(t) = (\alpha(t); V^1(t), V^2(t), V^3(t)).$$

Вычисляем

$$\mathbf{N} = (x^1, x^2, x^3; \frac{2x^1}{2}, \frac{2x^2}{2}, \frac{2x^3}{2}) = (x^1, x^2, x^3; x^1, x^2, x^3; ).$$

Тогда

$$\mathbf{N}(\alpha_{\boldsymbol{\theta}}(t)) = (\alpha_\theta(t); \sin t \cos\theta, \sin t \sin\theta, \cos t);$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{N}(\alpha_{\boldsymbol{\theta}}(t)) = (\alpha_\theta(t); \cos t \cos\theta, \cos t \sin\theta, -\sin t).$$

Подставляем найденные поля в (5.11) и расписываем его в систему дифференциальных уравнений.

$$\frac{dV^1}{dt} + (V^1(t)\cos t\cos\theta + V^2(t)\cos t\sin\theta - V^3(t)\sin t)\sin t\cos\theta = 0;$$
$$\frac{dV^2}{dt} + (V^1(t)\cos t\cos\theta + V^2(t)\cos t\sin\theta - V^3(t)\sin t)\sin t\sin\theta = 0;$$
$$\frac{dV^3}{dt} + (V^1(t)\cos t\cos\theta + V^2(t)\cos t\sin\theta - V^3(t)\sin t)\cos t = 0.$$

Получилась сложная система дифференциальных уравнений и как ее решать – не понятно. Поэтому попробуем найти векторное поле $\mathbf{V}$, используя следствие 5.1. Так как $\alpha_{\boldsymbol{\theta}}$ является геодезической на $S$, векторное поле $\mathbf{V}$, касательное к $S$ вдоль $\alpha_{\boldsymbol{\theta}}$, будет параллельным вдоль $\alpha_{\boldsymbol{\theta}}$ тогда и только тогда, когда оно имеет постоянную длину и сохраняет постоянный угол с $\dot{\alpha}_\theta$. Представим векторное поле $\mathbf{V}$ в виде линейной комбинации

$$\mathbf{V}(t) = f(t)\dot{\alpha}(t) + g(t)[\mathbf{N}(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)], \tag{5.14}$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов, а функции $f$ и $g$ нужно найти. Вычислим векторное поле $[\mathbf{N}(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)]$ (в каждой точке кривой этот вектор будет принадлежать касательному пространству, так как он будет перпендикулярен вектору $\mathbf{N}(\alpha_\theta)$). Имеем

$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t); \cos t \cos\theta, \cos t \sin\theta, -\sin t),$$

Используя формулу для вычисления векторного произведения векторов в правом ортонормированном базисе, получим

$$[\mathbf{N}(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)] = \left(\alpha_\theta(t); \begin{vmatrix} \sin\theta\sin t & \sin\theta\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix},\right.$$
$$\left. -\begin{vmatrix} \cos\theta\sin t & \cos\theta\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin\theta\sin t & \sin\theta\cos t \\ \sin\theta\sin t & \sin\theta\cos t \end{vmatrix}\right) =$$
$$= (\alpha_\theta(t); -\sin\theta, \cos\theta, 0).$$

Далее, так как $\mathbf{V}(0) = \mathbf{v} = (p; 1, 0, 0)$, получим $|\mathbf{V}|(0) = 1$. Так как для параллельного векторного поля длина должна быть постоянна вдоль кривой $\alpha_\theta$ (см. свойство 1)), получим $|\mathbf{V}| = 1$ вдоль $\alpha_\theta$. С другой стороны, из (5.14) мы получаем, что

$$|\mathbf{V}(t)|^2 = f^2(t)|\dot{\alpha}_\theta(t)|^2 + g^2(t)|[\mathbf{N}(\alpha_\theta(t)), \dot{\alpha}_\theta(t)]|^2$$

или

$$1 = f^2(t) + g^2(t).$$

Вспомним, что угол между $\mathbf{V}$ и $\dot{\alpha}_\theta$ должен быть постоянным. Обозначим этот угол через $\psi$. Тогда

$$\cos\psi = \frac{\mathbf{V}(t)\dot{\alpha}_\theta(t)}{|\mathbf{V}(t)||\dot{\alpha}_\theta(t)|} =$$
$$= \frac{(f(t)\dot{\alpha}_\theta(t) + g(t)[\mathbf{N}(\alpha_\theta(t)), \dot{\alpha}_\theta(t)])\dot{\alpha}_\theta(t)}{1\cdot 1} = f(t)\cdot 1 + 0 = f(t).$$

Таким образом, $f(t) = \cos\psi$, $g(t) = \pm\sin\psi$ – константы. Наконец, учтем, что $\mathbf{V}(0) = f\dot{\alpha}_\theta(0) + g[\mathbf{N}\circ\alpha_\theta, \dot{\alpha}_\theta](0) = \mathbf{v} = (p; 1, 0, 0)$, то есть

$$\begin{cases} \cos\psi\cos\theta \mp \sin\psi\sin\theta = 1 \\ \cos\psi\sin\theta \pm \sin\psi\cos\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\psi\pm\theta) = 1 \\ \sin(\psi\pm\theta) = 0 \end{cases}$$

Откуда получаем, что $\psi = \mp\theta$. В обоих случаях для векторного поля $\mathbf{V}$ имеем

$$\mathbf{V}(t) = \cos\theta\dot{\alpha}_\theta(t) - \sin\theta[\mathbf{N}(\alpha_\theta(t)), \dot{\alpha}_\theta(t)].$$

Таким образом, мы включили исходный вектор $\mathbf{v} = (0, 0, 1; 1, 0, 0)$ в параллельное векторное поле $\mathbf{V}$. Теперь мы можем найти результат параллельного переноса вектора $\mathbf{v}$ вдоль полуокружностей больших кругов из северного полюса в южный. Получим

$$P_{\alpha_\theta}(\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\pi) = \cos\theta(q; -\cos\theta, -\sin\theta, 0) - \sin\theta(q; -\sin\theta, \cos\theta, 0) = \\ = (q; -\cos 2\theta, -\sin 2\theta, 0).$$

Самостоятельно изобразите на рисунке результаты параллельного переноса вектора $\mathbf{v}$ из точки $p$ в точку $q$ вдоль геодезических $\alpha_0$, $\alpha_{\frac{\pi}{4}}$ и $\alpha_{\frac{\pi}{2}}$; убедитесь, что результаты параллельного переноса будут различными.

# 6. Ковариантное дифференцирование

## 6.1. Производная функции в направлении вектора

Мы приступаем теперь к локальному изучению кривизны $n$-поверхностей. Искривление $n$-поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}$ измеряется тем, как изменяется нормальное направление, когда мы на поверхности переходим от точки к точке. Для того чтобы измерить скорость изменения нормального направления, нам придется дифференцировать векторные поля на $n$-поверхности.

Пусть дана гладкая функция $f$, заданная на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и дан вектор $\mathbf{v} \in T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ в точке $p$, где $p \in U$ – произвольная фиксированная точка.

*Производной* функции $f$ в направлении вектора $\mathbf{v}$ называется вещественное число $\nabla_{\mathbf{v}} f$, задаваемое формулой

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0),$$

где $\alpha : I \to U$ – любая параметризованная кривая в $U$, удовлетворяющая условиям $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$ и $\alpha(t_0) = p$, то есть эта кривая проходит через точку $p$ и имеет касательный вектор в этой точке, равный $\mathbf{v}$.

Это определение корректно в смысле независимости от выбора кривой $\alpha$. Действительно, по правил дифференцирования сложной функции получим

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\alpha(t_0))\frac{dx^1}{dt}(t_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}(\alpha(t_0))\frac{dx^{n+1}}{dt}(t_0) = \\ = \nabla f(\alpha(t_0))\dot{\alpha}(t_0) = \nabla f(p)\mathbf{v}.$$

Эта формула, выражающая число $\nabla_{\mathbf{v}} f$ через градиент функции $f$, показывает, что значение $\nabla_{\mathbf{v}} f$ не зависит от выбора кривой $\alpha$, проходящей через точку $p$ с вектором скорости $\mathbf{v}$. Эта формула также показывает, что операция, которая ставит в соответствие вектору $\mathbf{v}$ число $\nabla_{\mathbf{v}} f$, является линейным отображением из $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ в $\mathbb{R}$ (докажите самостоятельно), то есть

$$\nabla_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} f = \nabla_{\mathbf{v}} f + \nabla_{\mathbf{w}} f; \;\; \nabla_{c\mathbf{v}} f = c\nabla_{\mathbf{v}} f,$$

где $c$ – произвольное вещественное число.

**Замечание** 6.1. Заметим, что число $\nabla_{\mathbf{v}} f$ зависит как от направления, так и от длины вектора $\mathbf{v}$. Например, равенство

$$\nabla_{2\mathbf{v}} f = 2\nabla_{\mathbf{v}} f$$

выражает тот факт, что если мы будем двигаться через $p$ с вдвое большей скоростью, то наблюдаемая скорость изменения $f$ удвоится.

Если длина $|\mathbf{v}| = 1$, то производная $\nabla_{\mathbf{v}} f$ называется *производной* $f$ в точке $p$ по направлению $\mathbf{v}$.

Пусть дана $n$-поверхность $S$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, гладкая функция $f : S \to \mathbb{R}$, определенная на $S$, и касательный вектор $\mathbf{v}$ к поверхности $S$. Напомним, что функция $f$, заданная на поверхности $S$, называется гладкой, если существует гладкая функция $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ (имеет частные производные любого порядка), определенная на открытом множестве $U \supset S$, совпадающая на $S$ с функцией $f$, то есть $f(p) = \tilde{f}(p)$ для любой точки $p \in S$.

*Производной функции* $f$ *в направлении касательного вектора* $\mathbf{v}$ к поверхности $S$ называется число

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{d}{dt}(\tilde{f} \circ \alpha)(t_0),$$

где $\alpha : I \to S$ – любая параметризованная кривая на $S$ с касательным вектором $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$.

Это определение не зависит от выбора параметризованной кривой $\alpha$ на поверхности $S$. Действительно,

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{d}{dt}(\tilde{f} \circ \alpha)(t_0) = \nabla \tilde{f}(\alpha(t_0))\dot{\alpha}(t_0) = \nabla \tilde{f}(p)\mathbf{v}.$$

Таким образом, производная функции $f$ в направлении касательного вектора $\mathbf{v}$ выражается через градиент функции $\tilde{f}$. Из этой формулы следует (докажите самостоятельно), что отображение, которое каждому касательному вектору $\mathbf{v}$ ставит в соответствие число $\nabla_{\mathbf{v}} f$ является линейным отображением $T_p(S)$ в $\mathbb{R}$.

## 6.2. Ковариантная производная векторного поля

*Производной гладкого векторного поля* $\mathbf{X}$, заданного на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в направлении вектора $\mathbf{v}$ в точке $p \in U$ называется вектор, определенный по формуле

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = \frac{d}{dt}(\mathbf{X} \circ \alpha)(t_0),$$

где $\alpha : I \to U$ – любая параметризованная кривая в $U$, такая, что $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$. Для гладкого векторного поля $\mathbf{X}$ на $n$-поверхности $S$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и касательного к $S$ в точке $p \in S$ вектора $\mathbf{v} \in T_p(S)$ *производной* $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ векторного поля $\mathbf{X}$ в направлении вектора $\mathbf{v}$ называется вектор, определенный по той же самой формуле в предположении, что теперь $\alpha$ является параметризованной кривой на $S$ с касательным вектором $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$. Отметим, что согласно (6.1) получаем

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = \left(\alpha(t_0); \frac{d}{dt}(X^1 \circ \alpha)(t_0), \ldots, \frac{d}{dt}(X^{n+1} \circ \alpha)(t_0)\right) = \\ = (p; \nabla_{\mathbf{v}}X^1(t_0), \ldots, \nabla_{\mathbf{v}}X^{n+1}(t_0)) = (p; \nabla X^1(p)\mathbf{v}, \ldots, \nabla X^{n+1}(p)\mathbf{v}), \quad (6.1)$$

где $\mathbf{X}(q) = (q; X^1(q), \ldots, X^{n+1}(q))$. В частности, вектор $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ не зависит от выбора $\alpha$.

Итак, мы получили формулу для вычисления производной векторного поля

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = (p; \nabla X^1(p)\mathbf{v}, \ldots, \nabla X^{n+1}(p)\mathbf{v}). \quad (6.2)$$

Легко проверить, что операция дифференцирование векторных полей обладает следующими свойствами (проверьте самостоятельно)

1) $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}$;

2) $\nabla_{\mathbf{v}}(f\mathbf{X}) = (\nabla_{\mathbf{v}}f)\mathbf{X}(p) + f(p)(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X})$;

2) $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}\mathbf{Y}(p) + \mathbf{X}(p)\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}$

для всех гладких векторных полей $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ на $U$ (или на $S$) всех гладких функций $f : U \to \mathbb{R}$ (или $f : S \to \mathbb{R}$).

Заметим, что производная $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ касательного векторного поля $\mathbf{X}$ на $n$-поверхности $S$ относительно касательного к $S$ в точке $p \in S$ вектора $\mathbf{v}$ общем случае не будет касательным к $S$ вектором. Действительно, возьмем 2-сферу $S$, заданную уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 3$, точку $p = (1, 1, 1)$ на ней и вектор $\mathbf{v} = (1, 1, 1; 0, -1, 1)$ в этой точке. Найдем производную касательного векторного поля

$$\mathbf{X}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; -(x^2)^2x^1, (x^1)^2x^2, 0)$$

в точке $p$ в направлении вектора $\mathbf{v}$. Сначала вычислим $\nabla X^1$, $\nabla X^2$, $\nabla X^3$:

$$\nabla X^1(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; -(x^2)^2, -2x^1x^2, 0);$$
$$\nabla X^2(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; 2x^1x^2, (x^1)^2, 0);$$
$$\nabla X^3(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3; 0, 0, 0).$$

и

$$\nabla X^1(p) = (p; -1, -2, 0);\ \nabla X^2(p) = (p; 2, 1, 0);\ \nabla X^3(p) = (p; 0, 0, 0).$$

Тогда

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = (1, 1, 1; 2, -1, 0).$$

Этот вектор не перпендикулярен градиенту функции $f$ в точке $p$, следовательно, не является касательным.

Чтобы получать из касательных векторных полей на поверхности касательные векторы к поверхности, введем еще одну операцию дифференцирования. Спроектируем производную $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ на касательное пространство к $S$ в точке $p$ и обозначим полученный вектор $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$. Тогда вектор $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ определяется по формуле

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} - (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}\mathbf{N}(p))\mathbf{N}(p)$$

и называется *ковариантной производной касательного векторного поля* $\mathbf{X}$ в направлении вектора $\mathbf{v} \in T_p(S)$. Сравнивая эту формулу с формулой (5.7), легко видеть, что

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = (\mathbf{X} \circ \alpha)'(t_0),$$

где $\alpha : I \to S$ – любая параметризованная кривая на $S$ с вектором скорости $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$. Ковариантное дифференцирование имеет те же свойства 1) – 3) с заменой $\nabla$ на $D$ (докажите самостоятельно).

## Литература


1. *Э.Р. Розендорн* Теория поверхностей. — М.: Физматлит, 2006. — 304 с.

2. *Дж.Торп* Начальные главы дифференциальной геометрии. — М.: Платон, 1998. — 360 с.

3. *Л.Э.Эльсгольц* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

**Игнаточкина Лия Анатольевна**
**Никифорова Анна Валентиновна**

# ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ МНОГООБРАЗИЙ

*Учебное пособие*

Издательство «Прометей»
115035 Москва, ул. Садовническая, д.72, стр.1, офис 6.
Тел./факс: 8(495) 799-54-29
E-mail: info@prometey.su

Подписано в печать 04.10.2017
Формат 60 × 84/16. Объем 4,6 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 642.

ISBN 978-5-906879-93-6
9 785906 879936