МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

П.А. Зиновьев, А.А. Смердов

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия по курсу «Проектирование композитных конструкций. Часть II» для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 652600 «Ракетостроение и космонавтика», специальностям 130600 «Ракетостроение» и 130700 «Космические летательные аппараты и разгонные блоки»

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2006

УДК 620.22-419.8(075.8)
ББК 34.42:30.36
З-63

Рецензенты: *Б.Г. Попов, В.А. Бунаков*

Зиновьев П.А., Смердов А.А.

З-63 Оптимальное проектирование композитных материалов: Учебное пособие по курсу «Проектирование композитных конструкций. Ч. II». – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 103 с.: ил.

ISBN 5-7038-2840-6

Изложены основные принципы оптимального проектирования композитных материалов. Рассмотрены задачи создания однонаправленных волокнистых композитов и многослойных материалов с оптимальным набором характеристик. Приведены примеры управления свойствами типичных углепластиков, стеклопластиков и органопластиков.

Для студентов старших курсов высших технических учебных заведений, изучающих механику композитных материалов, методы проектирования конструкций из композитных материалов.

Ил. 34. Табл. 3. Библиогр. 21 назв.

УДК 620.22-419.(075.8)
ББК 34.42:30.36

ISBN 5-7038-2840-6

ВВЕДЕНИЕ

Возможность проектирования *материалов* с оптимальными характеристиками — одна из отличительных особенностей проектирования композитных конструкций.

Свойства любого традиционного материала можно определить набором констант, а проектируемый композитный материал (композит) представляет собой материал с варьируемой внутренней структурой. Целенаправленно изменяя структурные параметры композита, можно управлять его свойствами.

Как отмечалось в начале курса [1], при проектировании композитных объектов возникают задачи различных типов:

– прямой расчет характеристик;

– параметрический анализ;

– скалярная оптимизация;

– исследование предельных возможностей.

В данной книге рассматриваются эти задачи применительно к композитным материалам с варьируемой структурой.

Для разных классов композитных материалов задача управления свойствами ставится и решается по-разному. Ниже рассмотрены такие задачи для двух наиболее широко применяемых классов композитов: однонаправленных волокнистых материалов и многослойных пакетов.

При оптимизации любого типа композитной структуры должна быть составлена модель макрооднородного материала с приведенными характеристиками. Эти характеристики зависят как от свойств компонентов композитного материала, так и от его структурных параметров, определяющих соотношения между этими компонентами, их взаимное расположение и т. п. При этом характеристики компонентов композита считаются неизменными, а структурные параметры могут варьироваться при поиске оптимального проекта, обеспечивая требуемое изменение его свойств.

Изложение вопросов оптимального проектирования композитов будет следовать общей схеме постановки и решения задач оптимизации композитных материалов и конструкций, рассмотренной в [1]. Согласно этой схеме, для корректной формулировки задачи оптимального проектирования необходимо последовательно выбрать:

– объект проектирования;
– варьируемые параметры;
– критерии качества.

Возможные варианты выбора зависят от типа проектируемого материала.

Расчетные модели, используемые для описания отдельных характеристик проектируемого материала, большей частью соответствуют работам [2 – 4], в иных случаях каждый расчетный алгоритм имеет соответствующую ссылку.

В рассматриваемых примерах, как правило, описаны волокнистые армированные композиты с полимерной матрицей. Многие положения сохраняют свой смысл и для более широкого класса композитных материалов.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

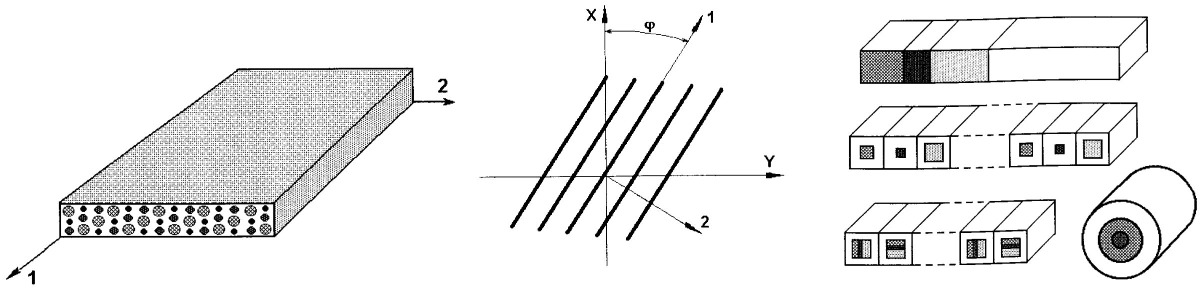
1.1. Постановки задач оптимизации

Объект проектирования — однонаправленный волокнистый композит, представляющий собой совокупность волокон, ориентированных в одном направлении и расположенных в связывающей их матрице (рис. 1.1, *а*). Основное назначение волокон — обеспечение требуемых высоких характеристик материала, основное назначение матрицы — обеспечение совместной работы волокон. Свойства матрицы также влияют на характеристики композита, особенно в поперечном направлении и при сдвиге.

Будем рассматривать плоский слой однонаправленного материала и исследовать только его характеристики в плоскости армирования. Такой объект принято называть *монослоем*. Оси системы координат монослоя показаны на рис. 1.1, *а*. Ось *1* направлена вдоль армирующих волокон, ось *2* — по нормали к ним в плоскости армирования. Такая система координат называется *естественной* для однонаправленного волокнистого композита.

В ряде случаев представляют интерес свойства однонаправленного монослоя в иной системе координат, повернутой на угол φ относительно оси *1* естественной системы (рис. 1.1, *б*). Вообще говоря, проектирование материалов, состоящих из произвольно ориентированных слоев, рассматривается в следующей главе данной книги, однако этот простейший случай будем относить к проектированию однонаправленных материалов.

В общем случае объект оптимизации может содержать одновременно n различных типов волокон (углеродных, стеклянных и др.);



а *б* *в*

Рис. 1.1. Однонаправленный волокнистый композит в естественной (*а*) и повернутой (*б*) системах координат; различные модели однонаправленного монослоя (*в*) такой материал называется *гибридным*. Важным частным случаем является *двухкомпонентный материал*, для которого $n = 1$. Именно такие материалы находят применение в подавляющем большинстве реальных конструкций.

Существуют различные математические модели для описания характеристик монослоя в зависимости от характеристик волокон и матрицы [5]. В основном эти модели можно разделить на три группы:

– модели «осреднения», исходящие из регулярного расположения волокон в матрице и их идеальной связи;

– модели, учитывающие свойства границы раздела сред;

– модели, учитывающие статистическое распределение свойств армирующих волокон, а также нерегулярность их расположения в слое.

Разные модели обеспечивают расчет разных свойств монослоя с различной точностью. Так, на основе алгоритмов осреднения могут быть с большей или меньшей точностью описаны такие интегральные характеристики слоя, как его плотность, теплоемкость, жесткостные свойства, термо- и гигроупругие характеристики, коэффициенты диссипации, отчасти — коэффициенты теплопроводности и некоторые другие величины. Вместе с тем, для описания характеристик прочности недостаточно знать только свойства волокон и матрицы в идеальном модельном материале; необходим учет и остальных перечисленных факторов [6, 7].

Следует иметь в виду, что на стадии проектирования материала, как правило, отсутствует достоверная информация о свойствах границы раздела сред, распределении дефектов в слое и т. п. Кроме того, характеристики армирующих волокон, особенно в поперечном направлении, обычно известны с невысокой точностью. Как правило, эти величины не определяются непосредственно, а рассчитываются на основании экспериментальных данных, полученных для однонаправленного слоя. Результат такого пересчета зависит от выбранной расчетной модели [8].

Исходя из того, что точность описания характеристик слоя ограничивается точностью исходной информации, в проектных расчетах целесообразно использовать простые расчетные модели, в которых свойства слоя полностью определяются свойствами компонентов и их объемными соотношениями, а реальный материал с неизвестным расположением волокон заменяется неким модельным материалом с регулярной структурой. Некоторые примеры таких модельных материалов показаны на рис. 1.1, *в*; соответствующие модели описаны в работах [3, 5, 6, 8 – 10]. Для расчета различных свойств слоя можно применять разные модели; выбор их определяется соответствием имеющимся экспериментальным результатам для каждой характеристики слоя.

Приведенные в настоящей главе результаты расчетов получены с помощью разработанной авторами компьютерной программы Designer of Layers (© Институт композитных технологий, 2002 – 2004). Для расчета жесткостных, термоупругих и диссипативных характеристик в программе используется простейшая модель, основанная на гипотезах Фойхта об однородности поля перемещений для продольного направления в однонаправленном композите и Рейсса об однородности поля обобщенных сил для сдвиговых напряжений и напряжений, нормальных к волокнам [2, 3, 11]:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \varepsilon_{m1} = \varepsilon_{f1}^{(i)};\;\; \varepsilon_2 = \varepsilon_{m2} v_m + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{f2}^{(i)} v_f^{(i)};\\
&\gamma_{12} = \gamma_{m12} v_m + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{f12}^{(i)} v_f^{(i)};\\
&\sigma_1 = \sigma_{m1} v_m + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f1}^{(i)} v_f^{(i)};\;\; \sigma_2 = \sigma_{m2} = \sigma_{f2}^{(i)};\\
&\tau_{12} = \tau_{m12} = \tau_{f12}^{(i)},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где ε_1, ε_2, γ_{12} — деформации, а σ_1, σ_2, τ_{12} — напряжения в осях естественной системы координат; здесь и далее величины с индексами «m» относятся к матрице, а с индексами «f» и «(i)» — к i-му волокну; если эти индексы отсутствуют — значит речь идет об однонаправленном композите. Символом v_m обозначена относительная объемная доля матрицы, $v_f^{(i)}$ — относительная объемная доля i-го волокна, n — число типов волокон в материале.

Для расчета тепло-, электропроводности и диэлектрической проницаемости применяют более сложную модель армированного слоя, учитывающую преимущественное влияние матрицы на трансверсальную проводимость [8].

Варьируемые параметры проектируемого объекта представляют собой относительные объемные доли матрицы v_m и каждого из волокон $v_f^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Если допускается поворот слоя, к числу варьируемых параметров добавляют также угол поворота φ.

С учетом условия связи

$$v_m + \sum_{i=1}^{n} v_f^{(i)} = 1 \tag{1.2}$$

размерность задачи оптимизации (число независимых варьируемых параметров) однонаправленного материала в общем случае при варьировании всех структурных параметров равна числу типов волокон n, если не разрешается поворот слоя, и $n+1$, если поворот слоя возможен.

Важным частным случаем является одномерная задача оптимизации характеристик двухкомпонентного однонаправленного материала в естественной системе координат. В этом случае возможно проведение полного исследования задачи методами параметрического анализа. Соответствующие примеры для типичных современных материалов приводятся при исследовании каждой рассматриваемой задачи.

Локальные критерии эффективности — требования к свойствам оптимизируемого объекта — выбираются в каждой конкретной задаче из общего списка характеристик монослоя. В рамках данного курса будем рассматривать следующий список свойств:

– жесткостные характеристики (модули упругости и коэффициенты Пуассона);

– термоупругие свойства (коэффициенты линейного термического расширения (КЛТР) и коэффициенты термических напряжений);

– гигромеханические характеристики (коэффициенты линейного влажностного расширения (КЛВР) и коэффициенты гигромеханических напряжений);

– плотность;

– скорости распространения волн в однонаправленном материале;

– характеристики демпфирования (коэффициенты диссипации и мощности диссипации);

– коэффициенты теплопроводности;

– удельные электрические сопротивления;

– диэлектрическая проницаемость в продольном и поперечном направлениях;

– удельная стоимость;

– удельная теплоемкость.

Основные принципы построения расчетных алгоритмов для каждого свойства рассмотрены выше. Расчетные алгоритмы будут иллюстрироваться графиками исследуемых характеристик, построенными для типичных однонаправленных материалов: углепластика, стеклопластика, органопластика и боропластика. На всех графиках для большей наглядности объемная доля матрицы изменяется от 10 до 99 %; для реальных композитов возможный диапазон варьирования, конечно же, гораздо уже. Использованные для расчетов характеристики типичных волокон и матриц приведены в табл. 1.1. Эти сведения взяты из различных литературных источников.

1.2. Расчет свойств однонаправленного монослоя

1.2.1. Жесткостные характеристики

Однонаправленный монослой *в естественной системе координат* является ортотропным материалом. Его жесткостные свойства характеризуются четырьмя техническими константами упругости:

– модулем упругости в продольном направлении E_1;

– модулем упругости в поперечном направлении E_2;

– модулем сдвига G_{12};

– коэффициентом Пуассона ν_{12}.

Таблица 1.1

Свойства типичных волокон и матриц

Свойства	Углеволокно	Стекловолокно	Борное волокно	Органоволокно	Полимерная матрица
Плотность, кг/м^3	1700...1900	2400...2600	2600	1400...1500	1200...1300
Продольный модуль упругости E_1, ГПа	200...400	70...100	400...420	120...160	2,5...4
Поперечный модуль упругости E_2, ГПа	8...15	70...100	400...420	4...7	2,5...4
Модуль сдвига G_{12}, ГПа	8...20	30...40	170...180	3...5	1...1,4
Коэффициент Пуассона ν_{12}	0,2...0,25	0,2...0,25	0,2...0,25	0,3...0,4	0,35...0,45
Продольный КЛТР α_1, К$^{-1}$	0 ... –1$\times10^{-6}$	5...10$\times10^{-6}$	5$\times10^{-6}$	0 ... –8$\times10^{-6}$	60...100$\times10^{-6}$
Поперечный КЛТР α_2, К$^{-1}$	10...25$\times10^{-6}$	5...10$\times10^{-6}$	5$\times10^{-6}$	50...70$\times10^{-6}$	60...100$\times10^{-6}$
Продольный коэффициент теплопроводности λ_1, Вт/(м$\cdot$К)	10...25	2...4	3,2	0,5...2	0,2
Поперечный коэффициент теплопроводности λ_2, Вт/(м$\cdot$К)	1...3	2...4	3,2	0,1...0,2	0,2
Продольный коэффициент диссипации ψ_1, %	0,4	2,5	1,8	Нет данных	7...10
Поперечный коэффициент диссипации ψ_2, %	2,4	2,5	1,8	Нет данных	7...10
Сдвиговый коэффициент диссипации ψ_6, %	3,3	2,5	1,8	Нет данных	7...10
Удельная теплоемкость c, Дж/(кг$\cdot$К)	850	700	1300	1000	1000...1100

Второй коэффициент Пуассона определяется из соотношения $\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$.

Для расчета жесткостных характеристик однонаправленного слоя необходимо знать технические константы жесткости каждого волокна $E_{f1}^{(i)}$, $E_{f2}^{(i)}$, $G_{f12}^{(i)}$, $\nu_{f12}^{(i)}$ ($E_{f1}^{(i)}\nu_{f21}^{(i)} = E_{f2}^{(i)}\nu_{f12}^{(i)}$) и матрицы E_{m1}, E_{m2}, G_{m12}, ν_{m12} ($E_{m1}\nu_{m21} = E_{m2}\nu_{m12}$); для изотропной матрицы $E_{m1} = E_{m2}$, $\nu_{m12} = \nu_{m21}$, $G_{m12} = E_{m1}/2(1+\nu_{m12})$.

Сначала по известным значениям технических констант жесткости вычисляют коэффициенты матрицы жесткости для каждого из компонентов композита:

$$
\begin{aligned}
&g_{f11}^{(i)} = \frac{E_{f1}^{(i)}}{1-\nu_{f12}^{(i)}\nu_{f21}^{(i)}}; \quad g_{f22}^{(i)} = \frac{E_{f2}^{(i)}}{1-\nu_{f12}^{(i)}\nu_{f21}^{(i)}};\\
&g_{f12}^{(i)} = \nu_{f12}^{(i)}g_{f22}^{(i)} = \nu_{f21}^{(i)}g_{f11}^{(i)}; \quad g_{f66}^{(i)} = G_{f12}^{(i)};\\
&g_{m11} = \frac{E_{m1}}{1-\nu_{m12}\nu_{m21}}; \; g_{m22} = \frac{E_{m2}}{1-\nu_{m12}\nu_{m21}};\\
&g_{m12} = \nu_{m12}g_{m22} = \nu_{m21}g_{m11}; \; g_{m66} = G_{m12}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Записав закон Гука для каждого волокна, матрицы и композита в целом, с учетом соотношений (1.1) после некоторых преобразований можно получить следующие формулы для коэффициентов матрицы жесткости однонаправленного слоя [11]:

$$
g_{11} = E_{m1}\,v_m + \sum_{i=1}^{n} E_{f1}^{(i)}\,v_f^{(i)} + \frac{\left(\nu_{m12}\,v_m + \sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{f12}^{(i)}\,v_f^{(i)}\right)^2}{\dfrac{v_m}{g_{m22}} + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{v_f^{(i)}}{g_{f22}^{(i)}}};
$$

$$
g_{12} = \frac{\nu_{m12}\,v_m + \sum\limits_{i=1}^{n}\nu_{f12}^{(i)}\,v_f^{(i)}}{\dfrac{v_m}{g_{m22}} + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{v_f^{(i)}}{g_{f22}^{(i)}}}; \tag{1.4}
$$

$$g_{22} = \frac{1}{\dfrac{v_m}{g_{m22}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{v_f^{(i)}}{g_{f22}^{(i)}}}; \quad g_{66} = \frac{1}{\dfrac{v_m}{g_{m66}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{v_f^{(i)}}{g_{f66}^{(i)}}}.$$

Технические константы жесткости однонаправленного монослоя

$$\begin{gathered} E_1 = g_{11} - g_{12}^2/g_{22}; \;\; E_2 = g_{22} - g_{12}^2/g_{11}; \\ \nu_{12} = g_{12}/g_{22}; \;\; \nu_{21} = g_{12}/g_{11}; \;\; G_{12} = g_{66}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Для продольного модуля упругости E_1 и коэффициента Пуассона ν_{12} вычисление по зависимостям (1.4), (1.5) эквивалентно использованию простого правила смеси.

Возможные пределы изменения свойств типичных двухкомпонентных материалов в зависимости от изменения относительной объемной доли матрицы в монослое v_m показаны на рис. 1.2.

В целом следует констатировать удовлетворительное совпадение расчетных результатов с известными экспериментальными данными. Некоторым исключением может быть модуль сдвига: примененная модель осреднения часто приводит к несколько заниженным значениям данной характеристики.

При повороте монослоя число его технических констант жесткости увеличивается до шести. Поскольку слой не является ортотропным в осях x, y, продольные растягивающие напряжения вызывают в нем сдвиговые деформации, и наоборот. Эти эффекты описываются продольно-сдвиговыми и поперечно-сдвиговыми коэффициентами Пуассона (коэффициенты Ченцова) ν_{xs} и ν_{ys} $(\nu_{sx}E_x = \nu_{xs}G_{xy}, \nu_{sy}E_y = \nu_{ys}G_{xy})$.

Технические константы жесткости $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{xs}, \nu_{ys}$ рассчитывают согласно формулам

$$E_x = \frac{\left(g_{xx} - \dfrac{g_{xs}^2}{g_{ss}}\right)\left(g_{yy} - \dfrac{g_{ys}^2}{g_{ss}}\right) - \left(g_{xy} - \dfrac{g_{xs}g_{ys}}{g_{ss}}\right)^2}{g_{yy} - \dfrac{g_{ys}^2}{g_{ss}}}; \tag{1.6}$$

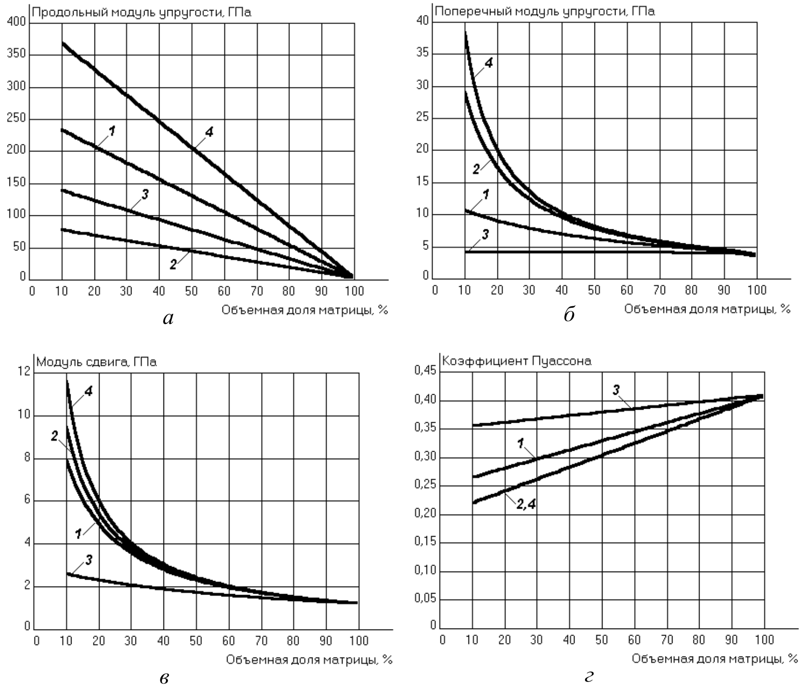


Рис. 1.2. Типичные жесткостные характеристики однонаправленного монослоя в естественной системе координат:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

$$
\begin{aligned}
&E_y = \frac{\left(g_{xx} - \dfrac{g_{xs}^2}{g_{ss}}\right)\left(g_{yy} - \dfrac{g_{ys}^2}{g_{ss}}\right) - \left(g_{xy} - \dfrac{g_{xs}g_{ys}}{g_{ss}}\right)^2}{g_{xx} - \dfrac{g_{xs}^2}{g_{ss}}};\\
&G_{xy} = g_{ss}\frac{\left(g_{xx} - \dfrac{g_{xs}^2}{g_{ss}}\right)\left(g_{yy} - \dfrac{g_{ys}^2}{g_{ss}}\right) - \left(g_{xy} - \dfrac{g_{xs}g_{ys}}{g_{ss}}\right)^2}{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2};\\
&\nu_{xy} = \frac{g_{xy}g_{ss} - g_{xs}g_{ys}}{g_{yy}g_{ss} - g_{ys}^2};\quad \nu_{xs} = \frac{g_{yy}g_{xs} - g_{xy}g_{ys}}{g_{yy}g_{ss} - g_{ys}^2};\\
&\nu_{ys} = \frac{g_{xx}g_{ys} - g_{xy}g_{xs}}{g_{xx}g_{ss} - g_{xs}^2}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Входящие в последнее выражение коэффициенты матрицы жесткости слоя, вычисленные в осях x, y, определяются по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
g_{xx} &= g_{11}\cos^4\varphi + g_{22}\sin^4\varphi + (2g_{12}+4g_{66})\cos^2\varphi\ \sin^2\varphi;\\
g_{xy} &= (g_{11}+g_{22}-4g_{66})\cos^2\varphi\ \sin^2\varphi+\\
&\quad + g_{12}\left(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi\right);\\
g_{xs} &= \Big[g_{11}\cos^2\varphi - g_{22}\sin^2\varphi+\\
&\quad + (g_{12}+2g_{66})\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)\Big]\cos\varphi\ \sin\varphi;\\
g_{yy} &= g_{11}\sin^4\varphi + g_{22}\cos^4\varphi + (2g_{12}+4g_{66})\cos^2\varphi\ \sin^2\varphi;\\
g_{ys} &= \Big[g_{11}\sin^2\varphi - g_{22}\cos^2\varphi-\\
&\quad - (g_{12}+2g_{66})\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)\Big]\cos\varphi\ \sin\varphi;\\
g_{ss} &= (g_{11}+g_{22}-2g_{12})\cos^2\varphi\ \sin^2\varphi+\\
&\quad + g_{66}\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)^2,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

где коэффициенты матрицы жесткости слоя в естественной системе координат рассчитывают по формулам (1.4).

Графики зависимостей характеристик типичных армированных материалов от угла поворота системы координат при фиксированной величине объемной доли матрицы $v_m = 40\,\%$ показаны на рис. 1.3. Следует обратить внимание на очень большие значения продольно-сдвигового коэффициента Пуассона: в некоторых случаях сдвиговая деформация при растяжении может в три-четыре раза превосходить продольную.

1.2.2. Термоупругие свойства

Однонаправленный монослой *в естественной системе координат* является ортотропным материалом. Его термоупругие свойства характеризуются двумя константами:

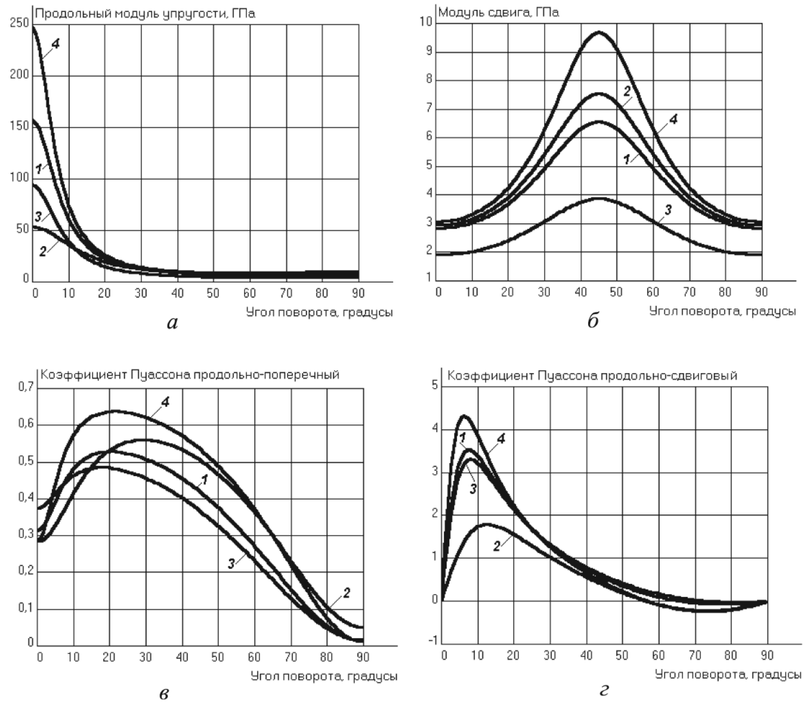


Рис. 1.3. Типичные жесткостные характеристики однонаправленного монослоя в повернутой системе координат при объемной доле матрицы 40 %:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

– КЛТР в продольном направлении α_1;

– КЛТР в поперечном направлении α_2.

Для описания термоупругих характеристик можно применять также коэффициенты термических напряжений в продольном и поперечном направлениях β_1 и β_2. Коэффициенты линейного расширения численно равны деформациям в соответствующих направлениях при нагреве на 1 К свободно расширяющегося материала. В свою очередь, коэффициенты термических напряжений численно равны напряжениям в продольном и поперечном направлениях при нагреве на 1 К материала, в котором отсутствуют деформации (например, помещенного в жесткую обойму).

Для расчета термоупругих характеристик однонаправленного слоя необходимо знать технические константы жесткости и КЛТР каждого волокна $E_{f1}^{(i)}$, $E_{f2}^{(i)}$, $G_{f12}^{(i)}$, $\nu_{f12}^{(i)}$ ($E_{f1}^{(i)}\nu_{f21}^{(i)} = E_{f2}^{(i)}\nu_{f12}^{(i)}$), $\alpha_{f1}^{(i)}$, $\alpha_{f2}^{(i)}$ и матрицы E_{m1}, E_{m2}, G_{m12}, ν_{m12} ($E_{m1}\nu_{m21} = E_{m2}\nu_{m12}$), α_{m1}, α_{m2}; для изотропной матрицы $E_{m1} = E_{m2}$, $\nu_{m12} = \nu_{m21}$, $G_{m12} = E_{m1}/2(1+\nu_{m12})$, $\alpha_{m1} = \alpha_{m2}$.

Коэффициенты термических напряжений волокон и матрицы β вычисляются на основе их коэффициентов матрицы жесткости и КЛТР:

$$\begin{aligned}
&\beta_{f1}^{(i)} = g_{f11}^{(i)}\alpha_{f1}^{(i)} + g_{f12}^{(i)}\alpha_{f2}^{(i)};\;\; \beta_{f2}^{(i)} = g_{f12}^{(i)}\alpha_{f1}^{(i)} + g_{f22}^{(i)}\alpha_{f2}^{(i)};\\
&\beta_{m1} = g_{m11}\alpha_{m1} + g_{m12}\alpha_{m2};\;\; \beta_{m2} = g_{m12}\alpha_{m1} + g_{m22}\alpha_{m2}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Записав соотношения Дюамеля — Неймана [2] для каждого волокна, матрицы и композита в целом, после некоторых преобразований с учетом выражений (1.1) можно получить следующие формулы для коэффициентов термических напряжений армированного слоя:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (\beta_{m1} - \nu_{m12}\,\beta_{m2})\,v_m + \sum_{i=1}^{n}\left(\beta_{f1}^{(i)} - \nu_{f12}^{(i)}\,\beta_{f2}^{(i)}\right)v_f^{(i)} + \\
&\quad + g_{12}\left(\frac{\beta_{m2}\,v_m}{g_{m22}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_{f2}^{(i)}\,v_f^{(i)}}{g_{f22}^{(i)}}\right);\\
\beta_2 &= g_{22}\left(\frac{\beta_{m2}\,v_m}{g_{m22}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_{f2}^{(i)}\,v_f^{(i)}}{g_{f22}^{(i)}}\right).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Коэффициенты линейного термического расширения слоя

$$\alpha_1 = (\beta_1 - \nu_{12}\beta_2)/E_1;\;\; \alpha_2 = (\beta_2 - \nu_{21}\beta_1)/E_2. \tag{1.10}$$

В последних формулах используют технические константы жесткости монослоя, рассчитанные по зависимости (1.5).

Для продольного КЛТР α_1 вычисление по формулам (1.9), (1.10) эквивалентно применению простого правила смеси (для произведений $\alpha_1 \times E_1$).

Возможные пределы изменения свойств типичных двухкомпонентных материалов в зависимости от изменения относительной объемной доли матрицы в монослое v_m показаны на рис. 1.4, *а*, *б*. Результаты расчета по формулам (1.8) — (1.10) хорошо совпадают с известными экспериментальными данными.

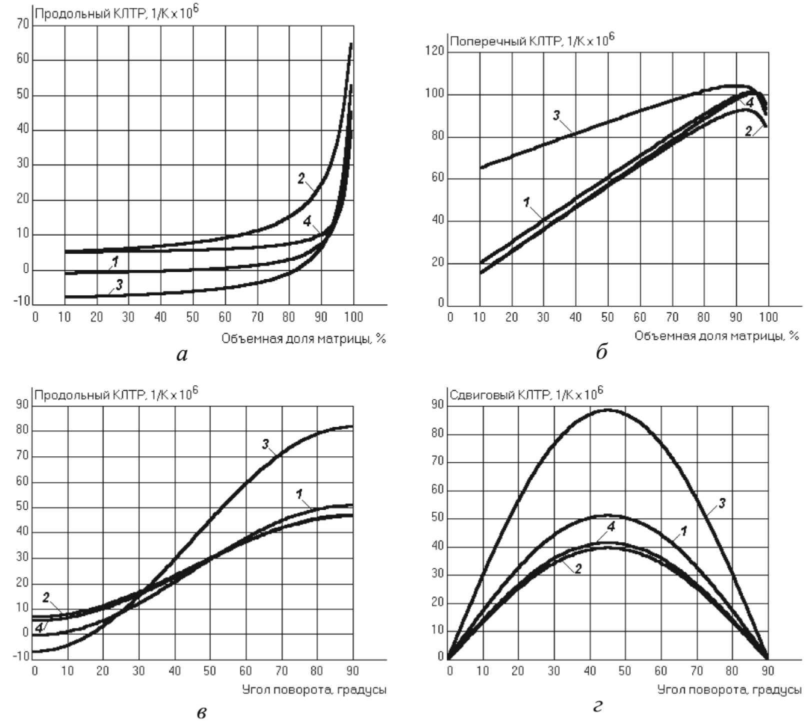


Рис. 1.4. Типичные значения коэффициентов линейного термического расширения однонаправленного монослоя в естественной системе координат в зависимости от объемной доли матрицы (*а*, *б*) и в повернутой системе координат при объемной доле матрицы 40 % (*в*, *г*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

Согласно графикам, показаным на рис. 1.4, рассматриваемые композиты можно разделить на две группы. Однонаправленные углепластики и органопластики при определенных сочетаниях волокон и матрицы имеют отрицательный продольный КЛТР α_1. Эта особенность может приводить к интереснейшим эффектам при проектировании многослойных материалов и конструкций из таких однонаправленных композитов; некоторые из таких эффектов будут показаны ниже. Напротив, стеклопластики и боропластики, хотя и являются анизотропными материалами, все же могут иметь только положительные коэффициенты линейного расширения.

При повороте монослоя число констант, определяющих его термоупругие свойства, увеличивается до трех. Поскольку слой не является ортотропным в осях x, y, при нагреве в нем возникают сдвиговые деформации, а если они невозможны — напряжения сдвига. Для описания этих эффектов применяют сдвиговый КЛТР α_{xy} или сдвиговый коэффициент термических напряжений β_{xy}.

Коэффициенты термических напряжений β_x, β_y, β_{xy} рассчитывают по следующим формулам [12]:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \beta_1 \cos^2\varphi + \beta_2 \sin^2\varphi; \\ \beta_y &= \beta_1 \sin^2\varphi + \beta_2 \cos^2\varphi; \\ \beta_{xy} &= (\beta_1 - \beta_2) \sin\varphi \cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.11}$$

КЛТР слоя в повернутой системе координат определяют по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\beta_x - \nu_{xy}\beta_y - \nu_{xs}\beta_{xy}}{E_x}; \\ \alpha_y &= \frac{\beta_y - \nu_{yx}\beta_x - \nu_{ys}\beta_{xy}}{E_y}; \\ \alpha_{xy} &= \frac{\beta_{xy} - \nu_{sx}\beta_x - \nu_{sy}\beta_y}{G_{xy}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

В зависимости (1.12) входят технические константы жесткости монослоя, вычисляемые согласно (1.6).

Графики зависимостей КЛТР типичных армированных материалов от угла поворота системы координат при фиксированной объемной доле матрицы $v_m = 40\,\%$ показаны на рис. 1.4, *в*, *г*. Следует обратить внимание на весьма большие значения сдвигового КЛТР.

1.2.3. Гигромеханические характеристики

Гигромеханические характеристики композитов определяют изменение их линейных размеров при впитывании влаги. Ортотропный однонаправленный монослой *в естественной системе координат* характеризуется двумя константами:

– КЛВР в продольном направлении δ_1;

– КЛВР в поперечном направлении δ_2.

Указанные значения численно равны деформациям в соответствующих направлениях при увеличении влагосодержания в свободно расширяющемся материале на 1 %.

Механизм влажностного расширения аналогичен механизму температурного расширения материала; соответствующие расчетные алгоритмы также совпадают.

Для расчета гигромеханических характеристик однонаправленного слоя необходимо знать технические константы жесткости и КЛВР каждого волокна $E_{f1}^{(i)}$, $E_{f2}^{(i)}$, $G_{f12}^{(i)}$, $\nu_{f12}^{(i)}$ $(E_{f1}^{(i)}\nu_{f21}^{(i)} = E_{f2}^{(i)}\nu_{f12}^{(i)})$, $\delta_{f1}^{(i)}$, $\delta_{f2}^{(i)}$ и матрицы E_{m1}, E_{m2}, G_{m12}, ν_{m12} $(E_{m1}\nu_{m21} = E_{m2}\nu_{m12})$, δ_{m1}, δ_{m2}, для изотропной матрицы $E_{m1} = E_{m2}$, $\nu_{m12} = \nu_{m21}$, $G_{m12} = E_{m1}/2(1+\nu_{m12})$, $\delta_{m1} = \delta_{m2}$.

Коэффициенты гигромеханических напряжений волокон и матрицы η вычисляют исходя из их коэффициентов матрицы жесткости и КЛВР:

$$\begin{aligned}
\eta_{f1}^{(i)} &= g_{f11}^{(i)}\delta_{f1}^{(i)} + g_{f12}^{(i)}\delta_{f2}^{(i)};\\
\eta_{f2}^{(i)} &= g_{f12}^{(i)}\delta_{f1}^{(i)} + g_{f22}^{(i)}\delta_{f2}^{(i)};\\
\eta_{m1} &= g_{m11}\delta_{m1} + g_{m12}\delta_{m2};\\
\eta_{m2} &= g_{m12}\delta_{m1} + g_{m22}\delta_{m2}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось при выводе формул для КЛТР, можно получить следующие соотношения для коэффициентов гигромеханических напряжений слоя:

$$\eta_1 = (\eta_{m1} - \nu_{m12}\,\eta_{m2})\,v_m + \sum_{i=1}^{n}\left(\eta_{f1}^{(i)} - \nu_{f12}^{(i)}\,\eta_{f2}^{(i)}\right) v_f^{(i)} +$$
$$+ g_{12}\left(\frac{\eta_{m2}\,v_m}{g_{m22}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{f2}^{(i)}\,v_f^{(i)}}{g_{f22}^{(i)}}\right); \qquad (1.14)$$
$$\eta_2 = g_{22}\left(\frac{\eta_{m2}\,v_m}{g_{m22}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{f2}^{(i)}\,v_f^{(i)}}{g_{f22}^{(i)}}\right);$$

КЛВР однонаправленного слоя

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (\eta_1 - \nu_{12}\eta_2)/E_1; \\ \delta_2 &= (\eta_2 - \nu_{21}\eta_1)/E_2. \end{aligned} \qquad (1.15)$$

В последних формулах используются технические константы жесткости монослоя, рассчитанные согласно зависимости (1.5).

Для продольного КЛВР δ_1 вычисление по формулам (1.14), (1.15) эквивалентно использованию простого правила смеси (для произведений $\delta_1 E_1$).

При повороте монослоя число констант, определяющих его гигромеханические характеристики, увеличивается до трех. Поскольку слой не является ортотропным в осях x, y, при изменении влагосодержания в нем возникают сдвиговые деформации, а если они невозможны — напряжения сдвига. Для описания этих эффектов используется сдвиговый КЛВР δ_{xy} или сдвиговый коэффициент гигромеханических напряжений η_{xy}.

Коэффициенты гигромеханических напряжений η_x, η_y, η_{xy} рассчитывают по формулам

$$\begin{aligned} \eta_x &= \eta_1 \cos^2\varphi + \eta_2 \sin^2\varphi; \\ \eta_y &= \eta_1 \sin^2\varphi + \eta_2 \cos^2\varphi; \\ \eta_{xy} &= (\eta_1 - \eta_2)\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (1.16)$$

КЛВР слоя в повернутой системе координат определяют по формулам

$$\delta_x = \frac{\eta_x - \nu_{xy}\eta_y - \nu_{xs}\eta_{xy}}{E_x};$$
$$\delta_y = \frac{\eta_y - \nu_{yx}\eta_x - \nu_{ys}\eta_{xy}}{E_y}; \qquad (1.17)$$
$$\delta_{xy} = \frac{\eta_{xy} - \nu_{sx}\eta_x - \nu_{sy}\eta_y}{G_{xy}}.$$

В зависимости (1.17) входят технические константы жесткости монослоя, вычисляемые согласно (1.6).

Исследования влажностного деформирования композитов начались сравнительно недавно, и сегодня в литературе отсутствуют данные, по которым можно было бы провести расчеты свойств типичных композитов. Однако, поскольку эта тематика весьма актуальна для создания прецизионных композитных конструкций, появление таких данных — лишь вопрос времени.

1.2.4. Плотность

Средняя плотность однонаправленного монослоя представляет собой отношение массы представительного элемента к его объему.

Для расчета средней плотности армированного материала необходимо знать плотность материала каждого волокна $\rho_f^{(i)}$ и матрицы ρ_m.

Среднюю плотность вычисляют по формуле

$$\rho = \rho_m \, v_m + \sum_{i=1}^{n} \rho_f^{(i)} \, v_f^{(i)}. \qquad (1.18)$$

Типичные значения плотности однонаправленных углепластиков, стеклопластиков, органопластиков и боропластиков показаны на рис. 1.5.

Плотность материала не зависит от поворота системы координат.

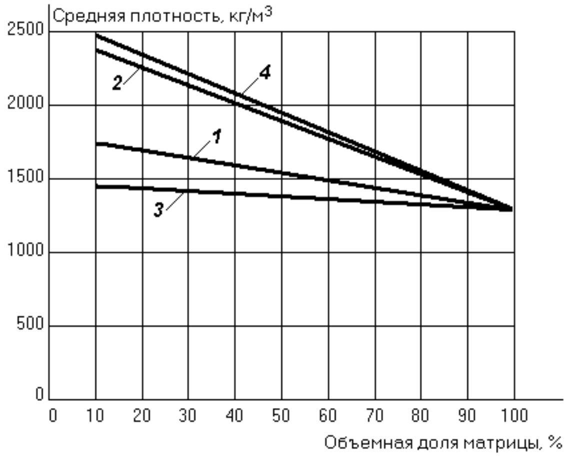


Рис. 1.5. Средняя плотность двухкомпонентных композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

1.2.5. Скорости распространения волн в материале

Скорость распространения волн в заданном направлении материала определяет частоты собственных колебаний стержневых элементов, выполненных из данного материала [13]. Для ортотропного однонаправленного монослоя могут быть найдены три величины, характеризующие скорости распространения продольных волн в стержнях, ориентированных в направлениях осей естественной системы координат ξ_1 и ξ_2, а также скорость распространения волн при крутильных колебаниях, равную скорости распространения деформации сдвига ξ_6.

Для расчета указанных характеристик однонаправленного слоя необходимо знать технические константы жесткости и плотности каждого волокна $E_{f1}^{(i)}$, $E_{f2}^{(i)}$, $G_{f12}^{(i)}$, $\nu_{f12}^{(i)}$ ($E_{f1}^{(i)}\nu_{f21}^{(i)} = E_{f2}^{(i)}\nu_{f12}^{(i)}$), $\rho_f^{(i)}$ и матрицы E_{m1}, E_{m2}, G_{m12}, ν_{m12} ($E_{m1}\nu_{m21} = E_{m2}\nu_{m12}$), ρ_m; для изотропной матрицы $E_{m1} = E_{m2}$, $\nu_{m12} = \nu_{m21}$, $G_{m12} = E_{m1}/2(1 + \nu_{m12})$.

Сначала по формулам (1.4), (1.5) рассчитывают технические константы жесткости однонаправленного монослоя E_1, E_2, G_{12}, а по зависимости (1.18) определяют его среднюю плотность ρ. Затем находят скорости распространения волн *в естественной системе координат* монослоя:

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}; \;\; \xi_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho}}; \;\; \xi_6 = \sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}}. \tag{1.19}$$

При повороте системы координат указанные величины определяют согласно формулам

$$\xi_x = \sqrt{\frac{E_x}{\rho}}; \;\; \xi_y = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}; \;\; \xi_s = \sqrt{\frac{G_{xy}}{\rho}}, \tag{1.20}$$

в которые подставляют технические константы жесткости, рассчитанные согласно зависимостям (1.6).

Графики параметрического анализа типичных двухкомпонентных материалов в естественной системе координат показаны на рис. 1.6, а в повернутой системе координат — на рис. 1.7.

Следует иметь в виду, что точность расчетных формул (1.19), (1.20) неодинакова. Так, последняя из формул (1.19), как и последняя из (1.20), может давать заниженные оценки. Это связано с невысокой точностью последней из формул (1.4).

1.2.6. Характеристики демпфирования

Характеристики демпфирования материала — это его коэффициенты диссипации и мощности диссипации. Коэффициентом диссипации, или коэффициентом поглощения любой механической системы, называют отношение энергии, рассеянной за один период гармонических затухающих колебаний, к максимальной упругой энергии в этом периоде [13]. Если коэффициент диссипации не зависит от амплитуды, то логарифмический декремент колебания постоянен и последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию. Именно такая картина обычно возникает при малых колебаниях композитных конструкций.

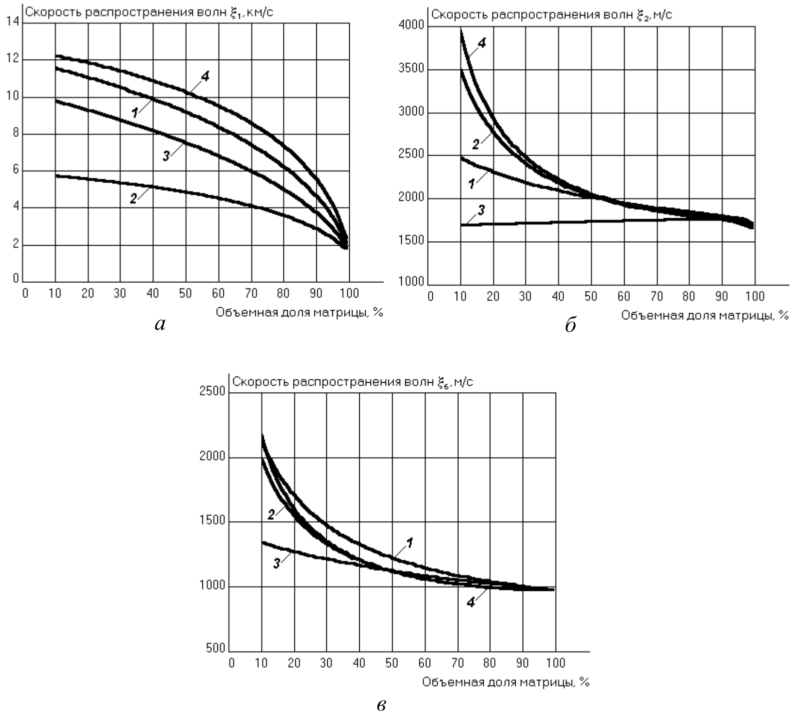


Рис. 1.6. Типичные значения скоростей распространения волн в однонаправленном материале в естественной системе координат ξ_1 (*а*), ξ_2 (*б*), ξ_6 (*в*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

При свободных затухающих продольных колебаниях стержня из исследуемого материала коэффициенты диссипации одинаковы для различных форм колебаний. Для большинства современных композитов коэффициенты диссипации практически не зависят от частоты [14], что позволяет рассматривать их как характеристики материала.

В соответствии с простейшей энергетической моделью [11], однонаправленный слой характеризуется тремя независимыми константами ψ_1, ψ_2 и ψ_6, описывающими потери энергии при одноосных колебаниях в направлении осей естественной системы координат, а также при сдвиговых колебаниях.

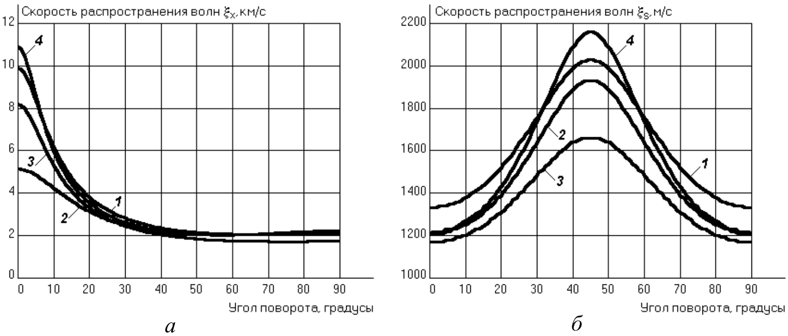


Рис. 1.7. Типичные значения скоростей распространения волн в однонаправленном материале в повернутой системе координат ξ_x (*а*), ξ_s (*б*) при объемной доле матрицы 40 %:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

В отличие от коэффициентов диссипации, мощности диссипации зависят от частоты колебаний. Эти величины характеризуют относительную долю энергии, рассеянной за единицу времени при соответствующих типах колебаний. Они равны произведениям коэффициентов диссипации на число периодов за единицу времени, т. е. на частоту собственных колебаний.

Для расчета коэффициентов диссипации однонаправленного композита необходимо знать технические константы жесткости и коэффициенты диссипации каждого волокна $E_{f1}^{(i)}$, $E_{f2}^{(i)}$, $G_{f12}^{(i)}$, $\nu_{f12}^{(i)}$ ($E_{f1}^{(i)}\nu_{f21}^{(i)} = E_{f2}^{(i)}\nu_{f12}^{(i)}$), $\psi_{f1}^{(i)}$, $\psi_{f2}^{(i)}$, $\psi_{f6}^{(i)}$ и матрицы E_{m1}, E_{m2}, G_{m12}, ν_{m12} ($E_{m1}\nu_{m21} = E_{m2}\nu_{m12}$), ψ_{m1}, ψ_{m2}, ψ_{m6}; для изотропной матрицы $E_{m1} = E_{m2}$, $\nu_{m12} = \nu_{m21}$, $G_{m12} = E_{m1}/2(1+\nu_{m12})$, $\psi_{m1} = \psi_{m2} = \psi_{m6}$. Для расчета мощностей диссипации ко всем указанным величинам добавляют также плотности материала каждого волокна $\rho_f^{(i)}$ и матрицы ρ_m.

В общем случае колебаний расчет относительной доли рассеянной энергии за один период может быть проведен по формуле

$$\Delta w = \frac{1}{2}\left(\psi_1\sigma_1\varepsilon_1 + \psi_2\sigma_2\varepsilon_2 + \psi_{12}\tau_{12}\gamma_{12}\right). \qquad (1.21)$$

Формулы для коэффициентов диссипации композита *в естественной системе координат* могут быть выведены непосредственно из анализа последнего выражения, записанного для каждого из волокон, матрицы и композита в целом. При этом для вывода каждого из трех коэффициентов ψ_1, ψ_2 и ψ_6 поочередно рассматривают одноосные колебания материала:

$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \tau_{12} = 0$ — при выводе зависимости для ψ_1;
$\sigma_2 \neq 0, \sigma_1 = \tau_{12} = 0$ — при выводе зависимости для ψ_2;
$\tau_{12} \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ — при выводе зависимости для ψ_6.

Полученные с учетом (1.1) формулы имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 = \psi_{m1}\, v_m\, \frac{E_{m1}}{E_1} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{f1}^{(i)}\, v_f^{(i)}\, \frac{E_{f1}^{(i)}}{E_1};\\
&\psi_2 = v_m \Bigg\{ \psi_{m1} \left(\frac{E_{m1}}{E_1}\, \nu_{12}\, \nu_{21} - \nu_{m12}\, \nu_{21} \right) + \\
&\quad + \psi_{m2} \left[\frac{E_2}{E_{m2}} \left(1 - \nu_{m12}\, \nu_{m21}\right) + \nu_{m12}\, \nu_{21} \right] \Bigg\} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} v_f^{(i)} \Bigg\{ \psi_{f1}^{(i)} \left(\frac{E_{f1}^{(i)}}{E_1}\, \nu_{12}\, \nu_{21} - \nu_{f12}^{(i)} \nu_{21} \right) + \\
&\quad + \psi_{f2}^{(i)} \left[\frac{E_2}{E_{f2}^{(i)}} \left(1 - \nu_{f12}^{(i)} \nu_{f21}^{(i)}\right) + \nu_{f12}^{(i)} \nu_{21} \right] \Bigg\};\\
&\psi_6 = \psi_{m6}\, v_m\, \frac{G_{12}}{G_{m12}} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{f6}^{(i)}\, v_f^{(i)}\, \frac{G_{12}}{G_{f12}^{(i)}}.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Входящие в выражения (1.22) технические константы жесткости однонаправленного материала $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ и ν_{21} определяют по формулам (1.4), (1.5).

Три мощности диссипации однонаправленного монослоя q_1, q_2, q_6 определяют значения относительного рассеяния энергии в единицу времени при одноосных колебаниях соответственно вдоль направления армирования, в поперечном направлении и при сдвиге [14].

Относительная мощность диссипации при продольных колебаниях определяется как отношение продольного коэффициента диссипации к периоду продольных колебаний однонаправленного элемента единичной длины:

$$q_1 = \frac{\psi_1}{2}\sqrt{\frac{E_1}{\rho}}. \tag{1.23}$$

Относительная мощность диссипации при поперечных колебаниях определяется как отношение поперечного коэффициента диссипации к периоду колебаний в поперечном направлении однонаправленного элемента единичной длины:

$$q_2 = \frac{\psi_2}{2}\sqrt{\frac{E_2}{\rho}}. \tag{1.24}$$

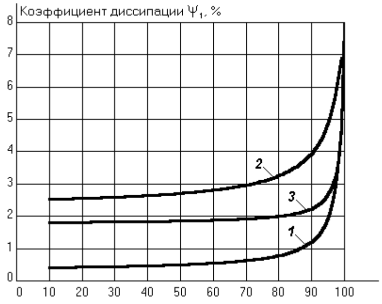
Относительная мощность диссипации при сдвиговых колебаниях определяется как отношение сдвигового коэффициента диссипации к периоду сдвиговых колебаний однонаправленного элемента единичной длины:

$$q_6 = \frac{\psi_6}{2}\sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}}. \tag{1.25}$$

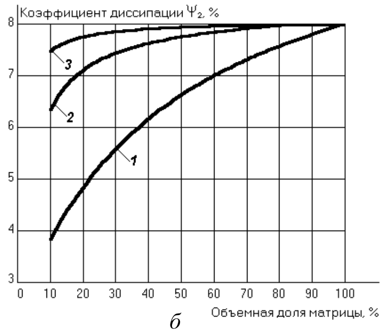
В выражениях (1.23) — (1.25) символом ρ обозначена плотность однонаправленного композита, вычисляемая согласно (1.18).

Графики зависимости коэффициентов диссипации и мощностей диссипации типичных двухкомпонентных однонаправленных материалов от относительной доли матрицы в них показаны на рис. 1.8, 1.9. В современной научной литературе приведены лишь редкие и разрозненные сведения о коэффициентах диссипации армирующих волокон [14], поэтому представленные графики следует воспринимать как ориентировочные.

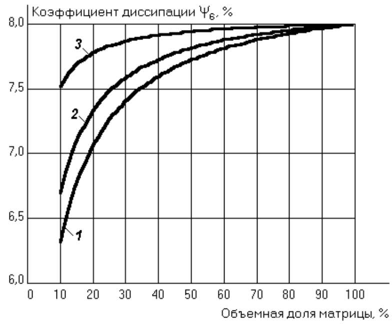
Выражения для коэффициентов диссипации монослоя *в повернутой системе координат* ψ_x, ψ_y и ψ_s нетрудно получить, рассматривая последовательно одноосные напряженные состояния в осях x, y и учитывая связь между деформациями в осях *1*, *2* и деформациями ε_x, ε_y, γ_{xy} [3]:



а



б



в

Рис. 1.8. Типичные значения коэффициентов диссипации однонаправленного материала в естественной системе координатψ_1 (*а*), ψ_2 (*б*), ψ_6 (*в*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — боропластик

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \gamma_{xy}\cos\varphi\sin\varphi;\\
&\varepsilon_2 = \varepsilon_x \sin^2\varphi + \varepsilon_y \cos^2\varphi - \gamma_{xy}\cos\varphi\sin\varphi;\\
&\gamma_{12} = -2\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\cos\varphi\sin\varphi + \gamma_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

а также закон Гука для монослоя.

Так, из рассмотрения одноосного напряженного состояния $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$; $\varepsilon_x = \sigma_x/E_x$, $\varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x$, $\gamma_{xy} = -\nu_{xs}\varepsilon_x$ следует:

$$\psi_x = \frac{\psi_1 g_{11} C_x^2 + \left(\psi_1 + \psi_2\right) g_{12} C_x S_x + \psi_2 g_{22} S_x^2 + \psi_6 g_{66} T_x^2}{E_x}, \tag{1.27}$$

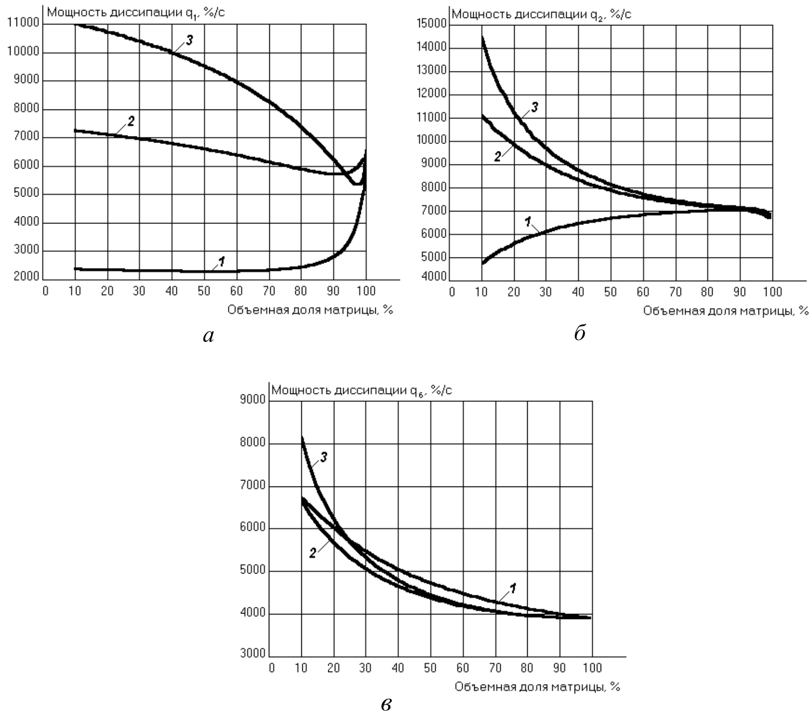


Рис. 1.9. Типичные значения мощностей диссипации однонаправленного материала в естественной системе координат q_1 (*а*), q_2 (*б*), q_6 (*в*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — боропластик

где

$$
\begin{aligned}
&C_x = \cos^2\varphi - \nu_{xy}\sin^2\varphi - \nu_{xs}\sin\varphi\cos\varphi;\\
&S_x = \sin^2\varphi - \nu_{xy}\cos^2\varphi + \nu_{xs}\sin\varphi\cos\varphi;\\
&T_x = 2\left(1+\nu_{xy}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \nu_{xs}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right).
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Аналогично могут быть получены выражения для ψ_y и ψ_s:

$$
\begin{aligned}
&\psi_y = \frac{\psi_1 g_{11} C_y^2 + (\psi_1+\psi_2)\, g_{12} C_y S_y + \psi_2 g_{22} S_y^2 + \psi_6 g_{66} T_y^2}{E_y};\\
&\psi_s = \frac{\psi_1 g_{11} C_{xy}^2 + (\psi_1+\psi_2)\, g_{12} C_{xy} S_{xy} + \psi_2 g_{22} S_{xy}^2 + \psi_6 g_{66} T_{xy}^2}{G_{xy}},
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&C_y = \sin^2\varphi - \nu_{yx}\cos^2\varphi - \nu_{ys}\sin\varphi\cos\varphi;\\
&S_y = \cos^2\varphi - \nu_{yx}\sin^2\varphi + \nu_{ys}\sin\varphi\cos\varphi;\\
&T_y = 2\left(1+\nu_{yx}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \nu_{ys}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right);\\
&C_{xy} = \sin\varphi\cos\varphi - \nu_{sx}\cos^2\varphi - \nu_{sy}\sin^2\varphi;\\
&S_{xy} = -\sin\varphi\cos\varphi - \nu_{sx}\sin^2\varphi - \nu_{sy}\cos^2\varphi;\\
&T_{xy} = 2\left(\nu_{sx} - \nu_{sy}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi.
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

Входящие в выражения (1.27) и (1.29) коэффициенты диссипации однонаправленного слоя в естественной системе координат ψ_1, ψ_2 и ψ_6 вычисляют согласно (1.22), а технические константы жесткости монослоя в повернутой системе координат — по формулам (1.6).

Типичные зависимости для продольного и сдвигового коэффициентов диссипации двухкомпонентных композитов при объемной доле матрицы 40 % показаны на рис. 1.10, *а*, *б*.

При повороте слоя мощности диссипации энергии при одноосных колебаниях вдоль осей x, y и при чистом сдвиге в этих осях определяют согласно формулам

$$
q_x = \frac{\psi_x}{2}\sqrt{\frac{E_x}{\rho}};\quad q_y = \frac{\psi_y}{2}\sqrt{\frac{E_y}{\rho}};\quad q_s = \frac{\psi_s}{2}\sqrt{\frac{G_{xy}}{\rho}}. \tag{1.31}
$$

Типичные зависимости для мощности диссипации композитов при продольных и сдвиговых колебаниях показаны на рис. 1.10, *в*, *г*.

1.2.7. Коэффициенты теплопроводности

Коэффициент теплопроводности материала численно равен количеству теплоты, переносимому через единицу поверхности за единицу времени при единичном температурном градиенте [15]. Однонаправленный ортотропный монослой в естественной системе координат характеризуется двумя коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_2, определяющими перенос теплоты в направлениях соответствующих осей координат.

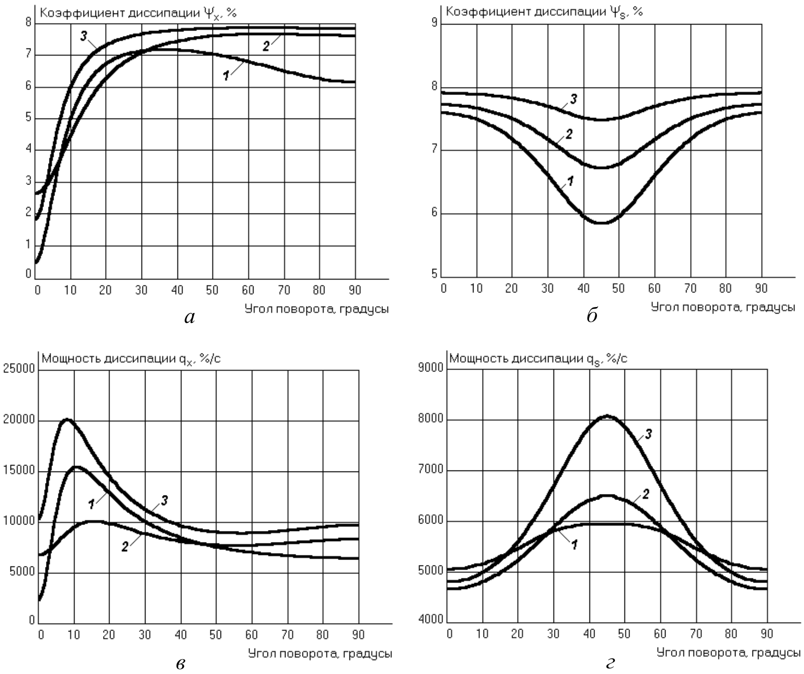


Рис. 1.10. Изменение коэффициентов диссипации (*а*, *б*) и мощностей диссипации (*в*, *г*) при повороте однонаправленного слоя с объемной долей матрицы 40 %: *1* — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — боропластик

Для расчета коэффициентов теплопроводности однонаправленного слоя необходимо знать коэффициенты теплопроводности каждого волокна $\lambda_{f1}^{(i)}$, $\lambda_{f2}^{(i)}$ и матрицы λ_{m1}, λ_{m2} (для изотропной матрицы $\lambda_{m1} = \lambda_{m2}$).

Коэффициенты теплопроводности монослоя *в естественной системе координат* рассчитывают по формулам [8]

$$\lambda_1 = \lambda_{m1}\, v_m + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{f1}^{(i)}\, v_f^{(i)};$$

$$\lambda_2 = \lambda_{m2} \left(1 - \sqrt{1 - v_m} + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - v_m}} - 1 + \dfrac{\lambda_{m2}}{\Lambda}} \right), \qquad (1.32)$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{2\,(1 - v_m)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{f2}^{(i)}\, v_f^{(i)} + \frac{1 - v_m}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{v_f^{(i)}}{\lambda_{f2}^{(i)}} \right)^{-1}. \qquad (1.33)$$

Возможные пределы изменения теплопроводности типичных двухкомпонентных материалов в зависимости от изменения относительной объемной доли матрицы в монослое v_m показаны на рис. 1.11, *а*, *б*. Следует иметь в виду, что для различных типов углеволокон приводимые в литературе значения коэффициентов

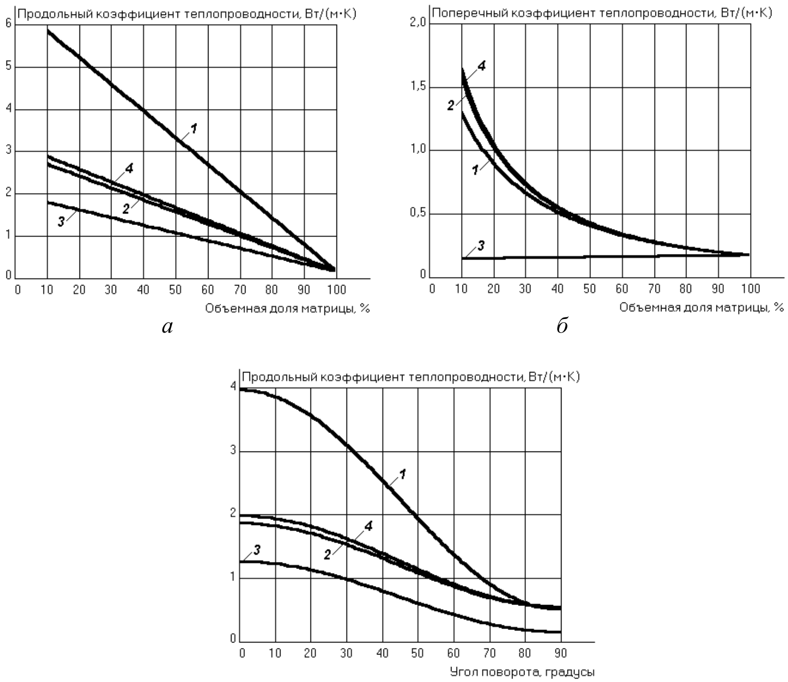


Рис. 1.11. Типичные значения коэффициентов теплопроводности однонаправленного монослоя в естественной системе координат в зависимости от объемной доли матрицы (*а*, *б*) и в повернутой системе координат при объемной доле матрицы 40 % (*в*):

1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик теплопроводности могут отличаться более чем на порядок; показанные на графиках значения соответствуют примерно середине этого диапазона.

При повороте слоя на угол φ коэффициенты теплопроводности рассчитываются по формулам [11]

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi; \\ \lambda_y &= \lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Графики коэффициентов теплопроводности типичных армированных материалов в повернутой системе координат при фиксированной объемной доле матрицы $v_m = 40\,\%$ показаны на рис. 1.11, *в*.

1.2.8. Удельные электрические сопротивления

Удельное электрическое сопротивление материала определяют как отношение напряженности электрического поля к плотности тока в этом материале [15].

Однонаправленный монослой *в естественной системе координат* характеризуется двумя константами r_1 и r_2, определяющими свойства материала при прохождении тока в соответствующих направлениях.

Для расчета удельных электрических сопротивлений однонаправленного композита необходимо знать удельные сопротивления каждого волокна $r_{f1}^{(i)}$, $r_{f2}^{(i)}$ и матрицы r_{m1}, r_{m2} (для изотропной матрицы $r_{m1} = r_{m2}$).

Удельные электрические сопротивления определяют по формулам

$$r_1 = \frac{1}{\iota_1}; \;\; r_2 = \frac{1}{\iota_2}, \tag{1.35}$$

где

$$\iota_1 = \frac{v_m}{r_{m1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{v_f^{(i)}}{r_{f1}^{(i)}};$$

$$\iota_2 = \frac{1}{r_{m2}} \left(1 - \sqrt{1 - v_m} + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - v_m}} - 1 + \dfrac{1}{r_{m2}\, I}} \right); \tag{1.36}$$

$$I = \frac{1}{2\,(1 - v_m)} \sum_{i=1}^{n} \frac{v_f^{(i)}}{r_{f2}^{(i)}} + \frac{1 - v_m}{2 \sum\limits_{i=1}^{n} v_f^{(i)}\, r_{f2}^{(i)}}.$$

При повороте слоя на угол φ удельные электрические сопротивления рассчитывают по формулам

$$r_x = \frac{1}{\iota_1 \cos^2 \varphi + \iota_2 \sin^2 \varphi};$$
$$r_y = \frac{1}{\iota_1 \sin^2 \varphi + \iota_2 \cos^2 \varphi}, \tag{1.37}$$

в которых ι_1 и ι_2 определяются согласно (1.36).

Следует помнить, что полученные формулы имеют удовлетворительную точность только в тех случаях, когда характеристики всех компонентов однонаправленного композита близки между собой. Если же свойства их различаются на несколько порядков (например, волокно-проводник в матрице-изоляторе) — характеристики композита будут определяться не столько регулярной структурой, сколько дефектами этой структуры (случайными соприкосновениями волокон, их разрывами и т. п.). В этих случаях для описания характеристик электрической проводимости следует использовать более сложные методы.

1.2.9. Характеристики диэлектрической проницаемости

Диэлектрическая проницаемость среды — величина, показывающая, во сколько раз в данной среде уменьшается сила взаимодействия между двумя точечными электрическими зарядами по сравнению с их взаимодействием в вакууме [15].

Диэлектрическая проницаемость однонаправленного монослоя *в естественной системе координат* определяется двумя константами e_1 и e_2.

Для расчета величин диэлектрической проницаемости однонаправленного композита необходимо знать соответствующие характеристики для каждого волокна $e_{f1}^{(i)}$, $e_{f2}^{(i)}$ и матрицы e_{m1}, e_{m2} (для изотропной матрицы $e_{m1} = e_{m2}$).

Величины диэлектрической проницаемости в плоскости слоя однонаправленного композита определяются по формулам

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{m1}\, v_m + \sum_{i=1}^{n} e_{f1}^{(i)}\, v_f^{(i)}; \\ e_2 &= e_{m2} \left(1 - \sqrt{1 - v_m} + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - v_m}} - 1 + \dfrac{e_{m2}}{\Xi}} \right), \end{aligned} \tag{1.38}$$

где

$$\Xi = \frac{1}{2\,(1 - v_m)} \sum_{i=1}^{n} e_{f2}^{(i)}\, v_f^{(i)} + \frac{1 - v_m}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{v_f^{(i)}}{e_{f2}^{(i)}} \right)^{-1}. \tag{1.39}$$

Диэлектрическая проницаемость в направлении нормали к плоскости слоя приближенно может быть определена по второй из формул (1.38).

При повороте слоя на угол φ значения диэлектрической проницаемости в плоскости слоя рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} e_x &= e_1 \cos^2\varphi + e_2 \sin^2\varphi; \\ e_y &= e_1 \sin^2\varphi + e_2 \cos^2\varphi. \end{aligned} \tag{1.40}$$

1.2.10. Удельная теплоемкость и удельная стоимость

Удельная теплоемкость — это отношение элементарного количества теплоты, сообщенного единице массы тела, к соответствующему изменению температуры тела [15].

Для расчета удельной теплоемкости композита необходимо знать плотность и удельную теплоемкость материала каждого волокна $\rho_f^{(i)}$, $c_f^{(i)}$, а также плотность и удельную теплоемкость материала матрицы ρ_m, c_m.

Удельная теплоемкость однонаправленного монослоя

$$c = \frac{\rho_m\, c_m\, v_m + \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_f^{(i)}\, c_f^{(i)}\, v_f^{(i)}}{\rho}, \tag{1.41}$$

где ρ — средняя плотность композита (1.18).

Типичные значения удельной теплоемкости однонаправленных углепластиков, стеклопластиков, органопластиков и боропластиков показаны на рис. 1.12.

Расчет удельной стоимости материала на стадии его проектирования может быть проведен лишь весьма приблизительно. Наиболее просто определить стоимость материалов компонентов композита без учета стоимости технологии их переработки. В этом случае для расчета удельной стоимости композита необходимо знать плотность и удельную стоимость материала каждого волокна $\rho_f^{(i)}$, $s_f^{(i)}$, а также плотность и удельную стоимость материала матрицы ρ_m, s_m.

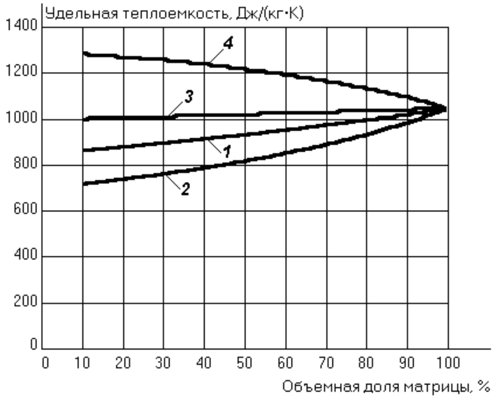


Рис. 1.12. Удельная теплоемкость двухкомпонентных композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

Удельную стоимость однонаправленного композита вычисляют как

$$s = \frac{\rho_m\, s_m\, v_m + \sum_{i=1}^{n} \rho_f^{(i)}\, s_f^{(i)}\, v_f^{(i)}}{\rho}, \tag{1.42}$$

где ρ — средняя плотность композита (1.18).

Удельная теплоемкость и удельная стоимость материала не зависят от поворота системы координат.

1.3. Оптимизация и предельные возможности однонаправленных композитов

Как отмечалось [1], характеристиками материалов с варьируемой структурой свойств являются зависимости, связывающие между собой возможные или доступные значения различных свойств материала. Графически такие зависимости могут быть представлены в виде карт свойств или поверхностей предельных возможностей армированного материала.

1.3.1. Карты свойств монослоя

Наиболее просто провести оптимизацию в одномерных задачах, когда изменение проектируемого объекта описывается одним независимым варьируемым параметром. Таковы задачи проектирования однонаправленных материалов, армированных одним семейством волокон, в том случае, когда свойства армированного слоя рассматривают в его естественной системе координат.

Исходным материалом для исследования одномерных задач служат графики параметрического анализа, показывающие зависимость всех интересующих проектанта свойств от единственного независимого варьируемого параметра (доли волокон или матрицы). Они могут быть перестроены в так называемые *карты свойств материала* [16], которые строятся в координатах его характеристик. Анализируя карты свойств, можно выделить области компромиссов в задачах максимизации или минимизации исследуемых характеристик.

Для примера воспользуемся графиками параметрического анализа четырех двухкомпонентных однонаправленных материалов — углепластика, органопластика, стеклопластика и боропластика, приведенными на рис. 1.2, *а* и 1.5. Перестроим эти графики в зависимости плотности каждого двухкомпонентного материала от его продольного модуля упругости. Соответствующие карты свойств двухкомпонентных композитов в координатах «продольный модуль упругости — плотность» приведены на рис. 1.13.

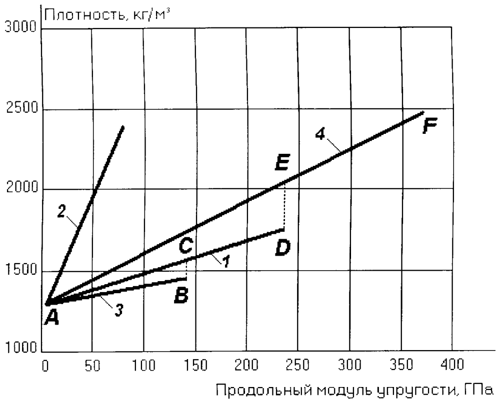


Рис. 1.13. Карты свойств двухкомпонентных композитов в координатах «продольный модуль упругости — плотность»:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик; *4* — боропластик

В случае необходимости минимизации плотности и одновременной максимизации модуля упругости на графике может быть выделена область компромиссов. В данном случае эта область разрывна и включает в себя линии AB, CD и EF. Наилучшими материалами являются органопластик (для него в зависимости от сочетания требований к плотности и жесткости объемная доля матрицы может принимать любые значения) или углепластик с долей матрицы не более 47 %, а при экстремально высоких требованиях к жесткости — боропластик с содержанием матрицы не более 43 %.

Стеклопластик не может обеспечить компромиссное удовлетворение данных требований ни при каких значениях своих структурных параметров.

1.3.2. Построение границ предельных возможностей

Если допустить возможность проектирования гибридных композитов или поворот осей координат, задача оптимального проектирования однонаправленного материала станет многомерной.

В общем случае границы предельных возможностей гибридных материалов могут быть построены численно с помощью тактики гибких приоритетов [1]. Для этого последовательно решают цикл задач скалярной оптимизации, в которых одно из интересующих свойств выступает в качестве целевой функции, а другое — в качестве ограничения; при этом исследуют зависимость предельно достижимого значения целевой функции от текущего уровня этого ограничения.

Однако при проектировании однонаправленных композитов встречаются и более простые случаи. Так, в рассмотренном примере минимизации плотности с одновременной максимизацией модуля упругости каждая из локальных скалярных задач является задачей линейного программирования [17], что позволяет провести аналитическое решение.

Поверхность предельных возможностей в данном случае имеет вид, показанный на рис. 1.14. Граница предельных возможностей композита — линия $GABDFH$. Эту границу можно рассматривать как обобщение компромиссных решений, показанных на рис. 1.13. Она включает в себя как участки, соответствующие двухкомпонентным материалам (линия GAB для органопластика, точка D для углепластика и линия FH для боропластика), так и участки, соответствующие гибридным композитам (линии BD для органоуглепластика и DF для углебороопластика). Как и следовало ожидать по результатам предыдущего анализа, стекловолóкна не используются в оптимальных материалах. На рис. 1.14 затенением выделена область доступных требований к свойствам материалов, использующих данные типы волокон.

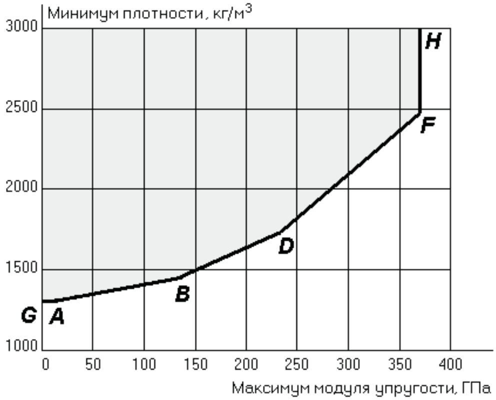
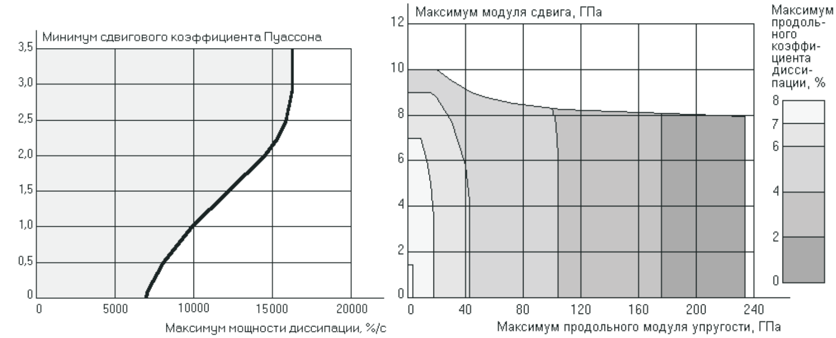


Рис. 1.14. Поверхность предельных возможностей однонаправленных композитов в пространстве требований «максимум продольного модуля упругости — минимум плотности»

Аналогичным образом могут быть построены границы предельных возможностей для любых других наборов требований к свойствам армированного слоя. Например, на рис. 1.15, a показана граница предельных возможностей однонаправленного углепластика (с возможностью поворота слоя) при компромиссном удовлетворении двух противоречащих друг другу требований. С одной стороны, желательно иметь наибольшую мощность диссипации продольных колебаний в слое. С другой — по мере возможности уменьшить при растяжении-сжатии возникновение сдвиговых деформаций, мерой которых является продольно-сдвиговый коэффициент Пуассона ν_{xs}.

Каждая точка границы получена путем численного решения одной из частных задач оптимизации: максимизации мощности диссипации при ограничении на величину ν_{xs} либо минимизации продольно-сдвигового коэффициента Пуассона при ограничении на q_x.

Оптимальные структуры слоя в данном случае характеризуются постепенным уменьшением угла поворота от 90° при $\max q_x \approx \approx 7000$ %/с и $\min \nu_{xs} = 0$ до 12° при $\max q_x = 16300$ %/с и



а *б*

Рис. 1.15. Примеры построения границ предельных возможностей однонаправленных композитов в произвольной системе координат: граница предельных возможностей однонаправленного углепластика в пространстве требований «максимум продольной мощности диссипации — минимум сдвигового коэффициента Пуассона» (*а*) и поверхность предельных возможностей однонаправленного углепластика в пространстве требований «максимум продольного модуля упругости — максимум модуля сдвига — максимум продольного коэффициента диссипации» (*б*)

$\min \nu_{xs} = 2,93$. Что касается доли армирующих волокон, то она постепенно увеличивается от своего наименьшего значения по мере роста требований к $\max q_x$; после достижения максимально возможного значения при $\max q_x \approx 15000$ %/с она снова начинает уменьшаться.

В случае если требования предъявляются сразу к трем характеристикам армированного слоя, граница предельных возможностей приобретает вид поверхности в трехмерном пространстве, как, например, показано на рис. 1.15, *б*.

Для однонаправленного углепластика в произвольной системе координат ставят условия максимизации продольного модуля упругости, модуля сдвига и продольного коэффициента диссипации. Все три требования противоречат друг другу, так что задача проектирования сводится к выбору одного из компромиссных решений, принадлежащих границе предельных возможностей материала.

Трехмерная поверхность предельных возможностей показана на рисунке линиями уровня, как на топографической карте, в соответствии с приведенной шкалой высот. Основание этой поверхности соответствует структурам с максимально возможным содержанием армирующих волокон, наивысшая точка ее — структура с минимальным их содержанием; прочие точки поверхности реализуются для промежуточных значений соотношения компонентов материала. Углы поворота оптимальных структур изменяются от 0 до 45°, постепенно увеличиваясь с ростом требований к модулю сдвига.

Построение границ предельных возможностей армированных материалов является первым, начальным этапом проектирования таких материалов [11]. На этом этапе выявляются связи между возможными значениями различных характеристик материала, доступными при его оптимизации. На базе такой информации может быть принято решение о выборе того или иного компромиссного сочетания требований к однонаправленному слою и затем выбраны его структурные параметры.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТОВ

2.1. Постановки задач оптимизации

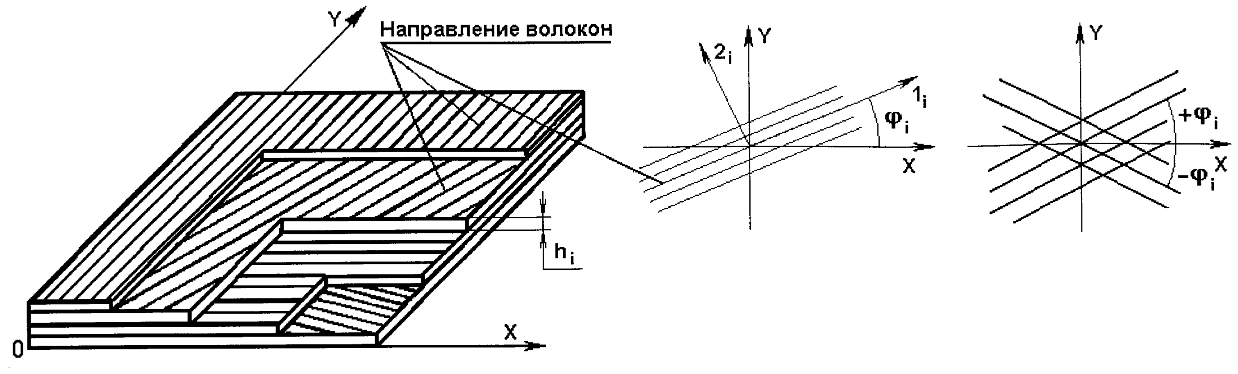
Объект проектирования — многослойный композит, изображен на рис. 2.1, a. Он представляет собой набор плоских слоев, каждый из которых отличается от остальных либо свойствами материала, либо направлением их ориентации.

Будем интересоваться только характеристиками материала в плоскости армирования. В этом случае свойства пакета не зависят от порядка чередования его слоев. В частности, если в пакете имеются одинаково ориентированные слои из одного и того же материала, их можно переставить вместе и объединить в один общий слой. В дальнейшем будем полагать, что все слои в пакете отличаются друг от друга.

Всего в пакете содержится n различных слоев. Каждый слой представляет собой однонаправленный материал, свойства которого считаются заданными. Эти свойства не изменяются при оптимизации многослойного пакета.

На рис. 2.1, $б$ показаны две системы координат: система координат пакета x, y и система координат однонаправленного слоя 1_i, 2_i, где i — номер текущего слоя. Оси естественной системы координат слоя 1_i и 2_i совпадают с направлением по направлению армирующих волокон в слое и нормалью к нему в плоскости слоя. Угол φ_i между осью x и осью 1_i определяет ориентацию i-го слоя в системе координат пакета.

В подавляющем большинстве случаев представляет интерес проектирование *ортотропных* пакетов, т. е. таких материалов, для которых оси координат x, y являются осями симметрии: свойства



а *б* *в*

Рис. 2.1. Многослойный пакет (*а*) и его слои в различных системах координат (*б*); ортотропный перекрестно армированный слой (*в*) материала одинаковы в любых двух направлениях, симметричных относительно этих осей. В данном курсе мы будем рассматривать только многослойные материалы, состоящие из ортотропных (в осях пакета) слоев. Таким образом, проектируемый материал может содержать следующие слои:

– продольные слои однонаправленного материала, ориентированные в направлении оси x пакета ($\varphi = 0$);

– поперечные слои однонаправленного материала, ориентированные в направлении оси y пакета ($\varphi = 90^\circ$);

– перекрестно армированные слои $[\pm\varphi_i]$, в которых половина волокон ориентирована под углом $+\varphi_i$ к направлению оси x, а вторая половина — под углом $-\varphi_i$. Такой слой показан на рис. 2.1, *в*.

Каждый слой пакета характеризуется толщиной h_i. Поскольку мы проектируем материал, свойства которого приводятся к элементарному объему, будем рассматривать не абсолютные, а относительные толщины:

$$\tilde{h}_i = \frac{h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i}. \tag{2.1}$$

Математическая модель многослойного пакета не содержит столько условностей, сколько необходимо для однонаправленного монослоя. Практически единственное допущение — сохранение идеального контакта слоев при любых процессах, происходящих с материалом. Соответственно, расчетные алгоритмы для многослойного пакета отличаются гораздо большей достоверностью. Любое свойство, включая характеристики прочности, может быть определено с точностью, достаточной для инженерных расчетов.

Приводимые в настоящей книге результаты расчетов получены с помощью разработанных авторами компьютерных программ Designer of Laminates (© Институт композитных технологий, 2003 – 2004) и General Composite Analyser & Designer (© Институт композитных технологий, 1991 – 2004). Все расчетные алгоритмы, используемые в этих программах, прошли многократное тестирование и удовлетворительно описывают имеющиеся экспериментальные результаты.

Варьируемые параметры проектируемого объекта включают относительные толщины и углы армирования отдельных слоев. При любых изменениях структуры пакета должно соблюдаться условие нормирования относительных толщин

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i = 1. \tag{2.2}$$

Таким образом, в самом общем случае, если варьируются все параметры многослойной структуры, число независимых варьируемых параметров, определяющее размерность задачи оптимизации, равно $2n - 1$.

Увеличивая число слоев n, мы повышаем возможности структуры по компромиссному удовлетворению предъявляемых к ней требований. Вместе с тем возрастает сложность задачи и уменьшается наглядность получаемых результатов. Ясно, что неограниченное наращивание числа слоев бесполезно: начиная с некоторого значения n дальнейшее прибавление слоев не приведет к улучшению свойств проектируемой структуры. В подавляющем большинстве практических расчетов для исследования предельных возможностей композитных структур достаточно сформулировать трехмерную задачу оптимизации. Наиболее употребительны две структуры, приводящие к таким задачам:

– структура $[0/90^\circ/\pm\varphi]$, для которой $n = 3$, варьируются все три относительные толщины и лишь один угол ориентации, два остальных угла фиксированы и соответствующие слои ориентированы по направлению осей x и y пакета;

– структура $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$, для которой $n = 2$ и варьируются обе относительные толщины и оба угла ориентации перекрестно армированных слоев.

Обе эти структуры можно рассматривать как обобщение двух одномерных структур, исследование которых чрезвычайно полезно в любой задаче проектирования многослойных пакетов:

– *перекрестно армированная структура*, для которой $n = 1$, и имеется единственный варьируемый параметр — угол $\pm\varphi$;

– *ортогонально армированная структура*, для которой $n = 2$, но оба угла фиксированы и сохраняют постоянные значения 0 и 90°, так что с учетом (2.2) остается единственный независимый варьируемый параметр — относительная толщина продольного слоя $\tilde{h}_0$.

Две эти одномерные структуры представляют собой как бы два полюса, к которым стремится большинство решений задач оптимизации: формулируя многомерную задачу общего вида в качестве решения часто (но не всегда!), мы будем получать одну из этих структур. Для каждой из них решение задачи исследования предельных возможностей может быть получено методами параметрического анализа. Соответствующие графики свойств типичных композитов будут иллюстрировать расчетные алгоритмы для критериев качества композитов.

Локальные критерии эффективности — требования к свойствам оптимизируемого объекта. Выбираются в каждой конкретной задаче из общего списка характеристик многослойного ортотропного материала. В рамках данного курса мы будем рассматривать следующий список свойств:

– жесткостные свойства (модули упругости и коэффициенты Пуассона);

– термоупругие свойства (коэффициенты линейного термического расширения и коэффициенты термических напряжений);

– гигромеханические характеристики (коэффициенты линейного влажностного расширения и коэффициенты гигромеханических напряжений);

– плотность;

– скорости распространения волн в материале;

– характеристики демпфирования (коэффициенты диссипации и мощности диссипации);

– коэффициенты теплопроводности;

– удельные электрические сопротивления;

– удельная теплоемкость и удельная стоимость;

– характеристики прочности при различных случаях нагружения.

Основные принципы построения расчетных алгоритмов для каждого свойства рассмотрена в работах [2, 3, 18]. Расчетные алгоритмы будут проиллюстрированы графиками исследуемых характеристик, построенными для одномерных структур из типичных композитов: углепластика, стеклопластика и органопластика. Использованные для расчетов характеристики типичных однонаправленных материалов даны в табл. 2.1. Эти сведения взяты из различных литературных источников. Характеристики приведены в естественной системе координат однонаправленного слоя (ось *1* направлена вдоль армирующих волокон, ось *2* — по нормали к ней в плоскости слоя).

Комментарии к содержащимся в таблице значениям будут даны при изложении соответствующих расчетных алгоритмов.

Таблица 2.1

Свойства типичных однонаправленных композитов

Свойства	Углепластик	Стеклопластик	Органопластик
Плотность, кг/м^3	$1450\ldots1550$	$1800\ldots2100$	$1350\ldots1400$
Продольный модуль упругости E_1, ГПа	$130\ldots240$	$35\ldots60$	$60\ldots110$
Поперечный модуль упругости E_2, ГПа	$7\ldots12$	$7\ldots12$	$4{,}5\ldots7$
Модуль сдвига G_{12}, ГПа	$4\ldots7$	$4\ldots7$	$2\ldots4$
Коэффициент Пуассона ν_{12}	$0{,}25\ldots0{,}3$	$0{,}25\ldots0{,}3$	$0{,}3\ldots0{,}4$
Продольный КЛТР α_1, К$^{-1}$	$-1\ \ldots+1\times10^{-6}$	$5\ldots\ 10\times10^{-6}$	$-4\ \ldots-2\times10^{-6}$
Поперечный КЛТР α_2, К$^{-1}$	$25\ldots\ 40\times10^{-6}$	$20\ldots\ 30\times10^{-6}$	$50\ldots\ 80\times10^{-6}$
Продольный коэффициент теплопроводности λ_1, Вт(м $\cdot$ К)	$0{,}6\ldots4$ (до 50)	$0{,}5\ldots1$	$0{,}4\ldots0{,}8$
Поперечный коэффициент теплопроводности λ_2, Вт(м $\cdot$ К)	$0{,}3\ldots0{,}4$	0,3	0,2
Продольный коэффициент диссипации ψ_1, %	$0{,}4\ldots0{,}5$	$0{,}6\ldots1$	Нет данных

Окончание табл. 2.1

Свойства	Углепластик	Стеклопластик	Органопластик
Поперечный коэффициент диссипации ψ_2, %	2,5 ... 4	3 ... 5	Нет данных
Сдвиговый коэффициент диссипации ψ_6, %	3,5 ... 7	5 ... 7	Нет данных
Предел прочности при растяжении вдоль волокон F_1^+, МПа	700 ... 3000	1500 ... 1800	1600 ... 3000
Предел прочности при сжатии вдоль волокон F_1^-, МПа	600 ... 2000	500 ... 1000	250 ... 400
Предел прочности при растяжении поперек волокон F_2^+, МПа	30 ... 60	30 ... 70	20 ... 40
Предел прочности при сжатии поперек волокон F_2^-, МПа	140 ... 200	120 ... 200	100 ... 150
Предел прочности при сдвиге F_{12}, МПа	50 ... 90	60 ... 90	30 ... 50

2.2. Расчет свойств многослойного пакета

Во всех нижеследующих формулах верхним индексом *i* обозначены характеристики i-го слоя; символы без верхнего индекса соответствуют свойствам многослойного пакета.

2.2.1. Жесткостные характеристики

Жесткостные свойства многослойного ортотропного материала характеризуются четырьмя техническими константами упругости E_x, E_y, G_{xy} и ν_{xy} ($E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy}$).

Для расчета жесткостных характеристик пакета необходимо знать технические константы жесткости каждого слоя $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$ ($E_1^{(i)} \nu_{21}^{(i)} = E_2^{(i)} \nu_{12}^{(i)}$).

Сначала по известным значениям технических констант жесткости вычисляют коэффициенты матрицы жесткости каждого слоя в его естественной системе координат:

$$g_{11}^{(i)}=\frac{E_1^{(i)}}{1-\nu_{12}^{(i)}\nu_{21}^{(i)}};\;\; g_{22}^{(i)}=\frac{E_2^{(i)}}{1-\nu_{12}^{(i)}\nu_{21}^{(i)}};$$
$$g_{12}^{(i)}=\nu_{12}^{(i)}g_{22}^{(i)}=\nu_{21}^{(i)}g_{11}^{(i)};\;\; g_{66}^{(i)}=G_{12}^{(i)}. \tag{2.3}$$

Затем определяют коэффициенты матриц жесткости слоев в системе координат многослойного материала:

$$\begin{aligned}
g_{xx}^{(i)}&=g_{11}^{(i)}\cos^4\varphi_i+g_{22}^{(i)}\sin^4\varphi_i+\left(2g_{12}^{(i)}+4g_{66}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i;\\
g_{xy}^{(i)}&=\left(g_{11}^{(i)}+g_{22}^{(i)}-4g_{66}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i+\\
&\quad+g_{12}^{(i)}\left(\sin^4\varphi_i+\cos^4\varphi_i\right);\\
g_{yy}^{(i)}&=g_{11}^{(i)}\sin^4\varphi_i+g_{22}^{(i)}\cos^4\varphi_i+\left(2g_{12}^{(i)}+4g_{66}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i;\\
g_{ss}^{(i)}&=\left(g_{11}^{(i)}+g_{22}^{(i)}-2g_{12}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i+\\
&\quad+g_{66}^{(i)}\left(\sin^2\varphi_i-\cos^2\varphi_i\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Следующий шаг — вычисление коэффициентов матрицы жесткости многослойного пакета:

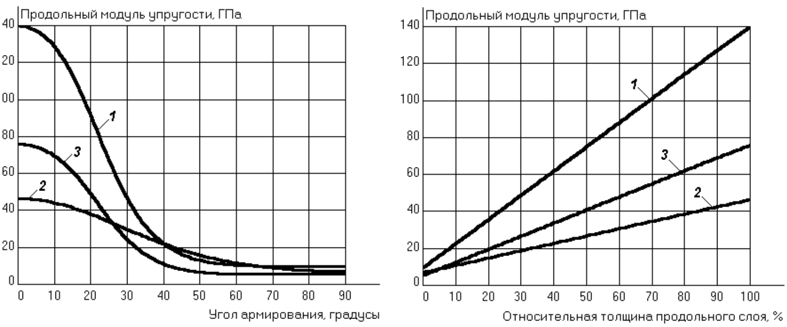
$$g_{xx}=\sum_{i=1}^{n}g_{xx}^{(i)}\,\tilde h_i;\;\; g_{xy}=\sum_{i=1}^{n}g_{xy}^{(i)}\,\tilde h_i;$$
$$g_{yy}=\sum_{i=1}^{n}g_{yy}^{(i)}\,\tilde h_i;\;\; g_{ss}=\sum_{i=1}^{n}g_{ss}^{(i)}\,\tilde h_i. \tag{2.5}$$

Технические константы жесткости многослойного ортотропного пакета

$$E_x=g_{xx}-g_{xy}^2/g_{yy};\;\; E_y=g_{yy}-g_{xy}^2/g_{xx};$$
$$\nu_{xy}=g_{xy}/g_{yy};\;\; \nu_{yx}=g_{xy}/g_{xx};\;\; G_{xy}=g_{ss}. \tag{2.6}$$

Следует подчеркнуть, что формулы (2.4) — (2.6) справедливы только для ортотропных пакетов; если в пакете имеются слои общего вида (см. рис. 2.1, *б*), нужно применять более общие зависимости [2].

Возможные пределы изменения жесткостных характеристик типичных перекрестно армированных и ортогонально армированных материалов показаны на рис. 2.2, 2.3.



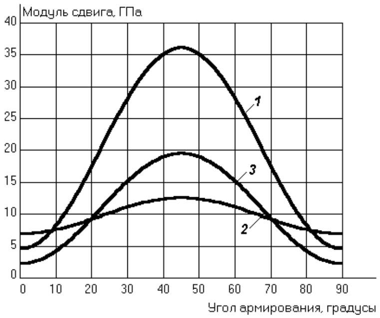
а *б*

Рис. 2.2. Типичные значения модулей упругости перекрестно армированных (*а*) и ортогонально армированных композитов (*б*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

Кривые для углепластика соответствуют низкомодульным материалам типа КМУ-4л, имеющимся сегодня в отечественной промышленности; при использовании высокомодульных углепластиков типа «Кулон» или зарубежных материалов возможно достижение значительно более высоких значений модулей упругости и модуля сдвига.

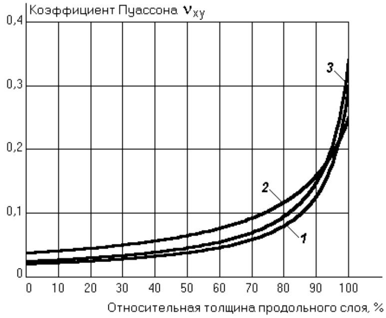
Графики изменения поперечного модуля упругости E_y симметричны соответствующим зависимостям для E_x. Продольный и поперечные модули упругости обеих одномерных структур изменяются в пределах от E_2 до E_1, однако характер и скорость их изменения существенно различаются.

Модуль сдвига перекрестно армированного материала при $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$ равен модулю сдвига однонаправленного материала G_{12}; при приближении угла армирования к $\pm 45^\circ$ модуль сдвига материала определяется в большей мере значением E_1, что и объясняет характер приведенных кривых. Модуль сдвига ортогонально армированного материала не зависит от относительных толщин



а

б



в

Рис. 2.3. Типичные значения модулей сдвига перекрестно армированных композитов (*а*) и коэффициентов Пуассона перекрестно армированных (*б*) и ортогонально армированных композитов (*в*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

слоев и равен модулю сдвига монослоя G_{12}, поэтому соответствующие графики не приводятся.

Следует обратить внимание на весьма большие значения коэффициента Пуассона для перекрестно армированных углепластиков и органопластиков: при углах армирования $20\ldots30^{\circ}$ они могут существенно превосходить единицу. Коэффициенты Пуассона ортогонально армированных материалов всегда находятся в диапазоне от ν_{21} до ν_{12}.

2.2.2. Термоупругие свойства

Термоупругие свойства многослойного ортотропного материала характеризуются двумя коэффициентами линейного термического расширения α_x и α_y или двумя коэффициентами термических напряжений β_x и β_y [12].

Для расчета термоупругих характеристик пакета необходимо знать коэффициенты линейного расширения и технические константы жесткости каждого слоя $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$ ($E_1^{(i)}\nu_{21}^{(i)} = E_2^{(i)}\nu_{12}^{(i)}$).

Сначала по известным значениям КЛТР слоя вычисляют его коэффициенты термических напряжений в естественной системе координат:

$$\begin{aligned} \beta_1^{(i)} &= g_{11}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + g_{12}^{(i)}\alpha_2^{(i)}; \\ \beta_2^{(i)} &= g_{12}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + g_{22}^{(i)}\alpha_2^{(i)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где коэффициенты матрицы жесткости слоя определяют согласно (2.3).

Затем находят коэффициенты термических напряжений многослойного пакета:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_1^{(i)}\cos^2\varphi_i + \beta_2^{(i)}\sin^2\varphi_i\right)\,\tilde{h}_i; \\ \beta_y &= \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_1^{(i)}\sin^2\varphi_i + \beta_2^{(i)}\cos^2\varphi_i\right)\,\tilde{h}_i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

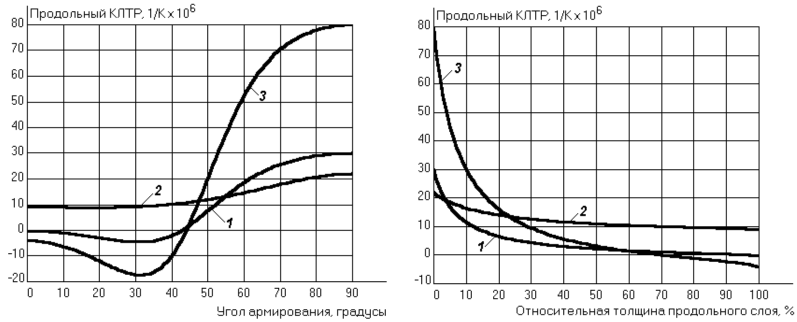
Последний шаг — вычисление КЛТР многослойного материала:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= (\beta_x - \nu_{xy}\beta_y)/E_x; \\ \alpha_y &= (\beta_y - \nu_{yx}\beta_x)/E_y, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где технические константы жесткости пакета рассчитывают по формулам (2.3) — (2.6).

Следует подчеркнуть, что формулы (2.8), (2.9) справедливы только для ортотропных пакетов; если в пакете имеются слои общего вида (см. рис. 2.1, *б*), нужно применять более общие зависимости [12].

Возможные пределы изменения КЛТР типичных перекрестно армированных и ортогонально армированных материалов показаны на рис. 2.4.



а *б*

Рис. 2.4. Типичные значения коэффициентов линейного термического расширения перекрестно армированных (*а*) и ортогонально армированных (*б*) композитов: *1* — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

Следует обратить внимание на существенные особенности изменения термоупругих характеристик композитов:

– чрезвычайно широкий диапазон, в котором возможно управление коэффициентами линейного расширения материала (для сравнения следует вспомнить, что КЛТР различных сортов стали составляет примерно $(10\ldots15)\cdot10^{-6}\,\text{К}^{-1}$, а алюминиевых сплавов $(20\ldots25)\cdot10^{-6}\,\text{К}^{-1}$);

– возможность получения углепластиков и органопластиков с отрицательными значениями КЛТР в достаточно широких диапазонах углов армирования и относительных толщин как для перекрестно армированных, так и для ортогонально армированных материалов;

– достижение для перекрестно армированных углепластиков отрицательных значений КЛТР до $-5\cdot10^{-6}\,\text{К}^{-1}$, а для перекрестно армированных органопластиков — менее $-15 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$ при углах армирования около 30°;

– возможность получения перекрестно армированных углепластиков и органопластиков с нулевыми значениями продольного КЛТР при значениях углов армирования $42 \ldots 44^{\circ}$ и ортогонально армированных углепластиков и органопластиков с нулевыми значениями продольного КЛТР при $\tilde{h}_0 \approx 70\,\%$ для органопластиков и 95 % для углепластиков;

– немонотонный характер изменения КЛТР перекрестно армированных материалов, что приводит к возможности получения материала с отрицательным КЛТР при положительных значениях как α_1, так и α_2 (например, для углепластиков с небольшим положительным α_1).

Все эти особенности могут быть использованы для создания конструкций с уникальными свойствами, в частности, размеростабильных конструкций, не изменяющих свои размеры при температурном воздействии. Такие конструкции находят сегодня применение при создании высокоточных спутниковых платформ, агрегатов для размещения физической аппаратуры и некоторых других изделий.

2.2.3. Гигромеханические характеристики

Гигромеханические характеристики многослойного ортотропного композита — это его коэффициенты линейного влажностного расширения δ_x и δ_y, которые определяют изменение линейных размеров при впитывании влаги и численно равны деформациям в соответствующих направлениях при увеличении влагосодержания в материале на 1 %.

Механизм влажностного расширения аналогичен механизму температурного расширения материала, соответствующие расчетные алгоритмы также совпадают.

Для расчета гигромеханических характеристик пакета необходимо знать КЛВР и технические константы жесткости каждого слоя $\delta_1^{(i)}$, $\delta_2^{(i)}$, $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$ $(E_1^{(i)}\nu_{21}^{(i)} = E_2^{(i)}\nu_{12}^{(i)})$.

Сначала по известным значениям КЛВР слоя вычисляют его коэффициенты гигромеханических напряжений в естественной системе координат:

$$\begin{aligned} \eta_1^{(i)} &= g_{11}^{(i)} \delta_1^{(i)} + g_{12}^{(i)} \delta_2^{(i)}; \\ \eta_2^{(i)} &= g_{12}^{(i)} \delta_1^{(i)} + g_{22}^{(i)} \delta_2^{(i)}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где коэффициенты матрицы жесткости слоя определяют согласно (2.3).

Затем находят коэффициенты гигромеханических напряжений многослойного пакета:

$$\begin{aligned} \eta_x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\eta_1^{(i)} \cos^2\varphi_i + \eta_2^{(i)} \sin^2\varphi_i \right) \tilde{h}_i; \\ \eta_y &= \sum_{i=1}^{n} \left(\eta_1^{(i)} \sin^2\varphi_i + \eta_2^{(i)} \cos^2\varphi_i \right) \tilde{h}_i. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Последний шаг — вычисление КЛВР многослойного материала:

$$\begin{aligned} \delta_x &= (\eta_x - \nu_{xy}\eta_y)/E_x; \\ \delta_y &= (\eta_y - \nu_{yx}\eta_x)/E_y, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где технические константы жесткости пакета рассчитывают по формулам (2.3) — (2.6).

На сегодняшний день гигромеханические характеристики композитов изучены недостаточно. Некоторое исключение составляют углепластики, для которых экспериментально определены значения $\delta_1 \approx 0,5 \cdot 10^{-3}$ 1/% и $\delta_2 \approx 30 \cdot 10^{-3}$ 1/%.

2.2.4. Плотность

Средняя плотность композита представляет собой отношение массы представительного элемента к его объему.

Для расчета средней плотности пакета необходимо знать плотность материала каждого слоя $\rho^{(i)}$.

Среднюю плотность определяют по формуле

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho^{(i)} \tilde{h}_i. \tag{2.13}$$

Значения плотности типичных углепластиков, стеклопластиков и органопластиков приводятся в табл. 2.1.

2.2.5. Скорости распространения волн в материале

Скорость распространения волн в заданном направлении материала определяет часто́ты собственных колебаний стержневых элементов, выполненных из данного материала [13]. Для ортотропного многослойного пакета существуют три величины, характеризующие скорости распространения продольных волн в стержнях, ориентированных в направлениях осей координат ξ_x и ξ_y, а также скорость распространения волн при крутильных колебаниях, равную скорости распространения деформации сдвига ξ_s.

Для расчета указанных характеристик пакета необходимо знать технические константы жесткости и плотности каждого слоя $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$ ($E_1^{(i)}\nu_{21}^{(i)} = E_2^{(i)}\nu_{12}^{(i)}$).

Сначала по формулам (2.3) — (2.6) рассчитывают технические константы жесткости пакета E_x, E_y, G_{xy}, а по зависимости (2.13) определяют его среднюю плотность ρ. Затем находят скорости распространения волн:

$$\xi_x = \sqrt{\frac{E_x}{\rho}};\ \ \xi_y = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}};\ \ \xi_s = \sqrt{\frac{G_{xy}}{\rho}}. \tag{2.14}$$

Графики параметрического анализа типичных перекрестно армированных и ортогонально армированных углепластиков, стеклопластиков и органопластиков показаны на рис. 2.5. Графики для ξ_y не приводятся, поскольку эти графики симметричны графикам для ξ_x. Скорость распространения волн ξ_s в ортогонально армированном материале, как и модуль сдвига G_{xy}, не зависит от изменения относительных толщин.

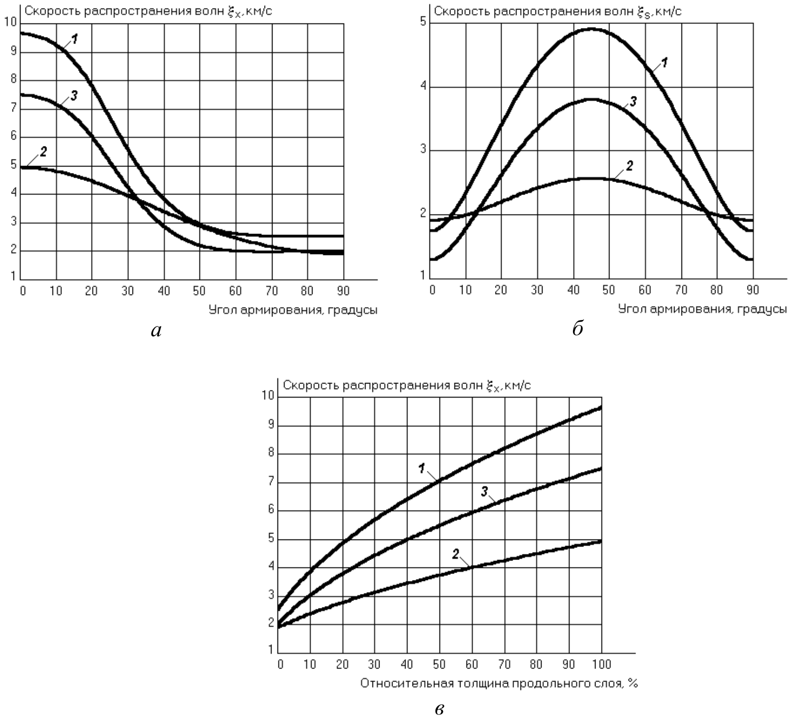


Рис. 2.5. Типичные значения скоростей распространения волн в перекрестно армированных (*а*, *б*) и ортогонально армированных (*в*) композитах:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

2.2.6. Характеристики демпфирования

Характеристики демпфирования многослойного пакета — это его коэффициенты диссипации при одноосных колебаниях в направлении осей координат пакета ψ_x, ψ_y и при сдвиговых колебаниях ψ_s, а также соответствующие мощности диссипации q_x, q_y и q_s [18].

Для расчета коэффициентов диссипации многослойного композита необходимо знать технические константы жесткости и коэффициенты диссипации каждого волокна $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$ ($E_1^{(i)}\nu_{21}^{(i)} = E_2^{(i)}\nu_{12}^{(i)}$), $\psi_1^{(i)}$, $\psi_2^{(i)}$, $\psi_6^{(i)}$. Для расчета мощностей диссипации ко всем указанным величинам добавляют также плотности материала каждого слоя $\rho^{(i)}$.

Для расчета характеристик демпфирования сначала следует определить по формулам (2.3) коэффициенты матриц жесткости отдельных слоев, а также коэффициенты матриц упруго-диссипативных характеристик (УДХ) слоев в своих естественных системах координат:

$$
\begin{aligned}
&p_{11}^{(i)} = \psi_1^{(i)} g_{11}^{(i)};\;\; p_{22}^{(i)} = \psi_2^{(i)} g_{22}^{(i)};\\
&p_{12}^{(i)} = 1/2(\psi_1^{(i)} + \psi_2^{(i)}) g_{12}^{(i)};\;\; p_{66}^{(i)} = \psi_6^{(i)} g_{66}^{(i)}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Затем находят коэффициенты матриц УДХ слоев в системе координат пакета:

$$
\begin{aligned}
&p_{xx}^{(i)} = p_{11}^{(i)}\cos^4\varphi_i + p_{22}^{(i)}\sin^4\varphi_i + \left(2p_{12}^{(i)} + 4p_{66}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i;\\
&p_{xy}^{(i)} = \left(p_{11}^{(i)} + p_{22}^{(i)} - 4p_{66}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i + p_{12}^{(i)}\left(\sin^4\varphi_i + \cos^4\varphi_i\right);\\
&p_{yy}^{(i)} = p_{11}^{(i)}\sin^4\varphi_i + p_{22}^{(i)}\cos^4\varphi_i + \left(2p_{12}^{(i)} + 4p_{66}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i;\\
&p_{ss}^{(i)} = \left(p_{11}^{(i)} + p_{22}^{(i)} - 2p_{12}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i + p_{66}^{(i)}\left(\sin^2\varphi_i - \cos^2\varphi_i\right)^2.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

После этого могут быть определены коэффициенты диссипации пакета:

$$
\begin{aligned}
&\psi_x = \frac{1}{E_x}\sum_{i=1}^{n}\left[p_{xx}^{(i)} - 2p_{xy}^{(i)}\nu_{xy} + p_{yy}^{(i)}\nu_{xy}^2\right]\tilde{h}_i;\\
&\psi_y = \frac{1}{E_y}\sum_{i=1}^{n}\left[p_{yy}^{(i)} - 2p_{xy}^{(i)}\nu_{yx} + p_{xx}^{(i)}\nu_{yx}^2\right]\tilde{h}_i;\\
&\psi_s = \frac{1}{G_{xy}}\sum_{i=1}^{n}p_{ss}^{(i)}\,\tilde{h}_i
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

и мощности диссипации

$$
q_x = \frac{\psi_x}{2}\sqrt{\frac{E_x}{\rho}};\;\; q_y = \frac{\psi_y}{2}\sqrt{\frac{E_y}{\rho}};\;\; q_s = \frac{\psi_s}{2}\sqrt{\frac{G_{xy}}{\rho}}. \tag{2.18}
$$

В выражениях (2.17), (2.18) E_x, E_y, G_{xy}, ν_{xy}, ν_{yx} — технические константы жесткости многослойного ортотропного пакета, которые вычисляются согласно (2.3) — (2.6); символом ρ обозначена средняя плотность, вычисляемая согласно (2.13).

Графики коэффициентов диссипации и мощностей диссипации типичных перекрестно армированных и ортогонально армированных материалов показаны на рис. 2.6, 2.7.

Характеристики демпфирования показаны только для углепластиков и стеклопластиков, поскольку для органопластиков на сегодняшний день отсутствует достоверная информация о свойствах материала.

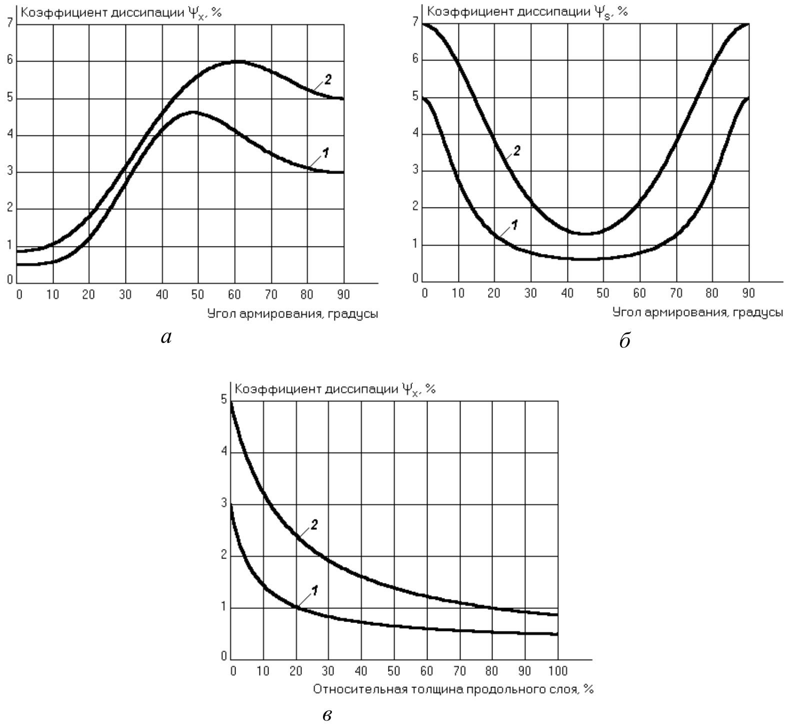
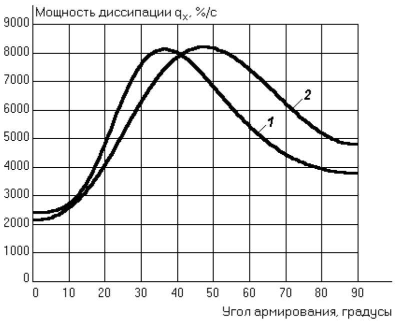
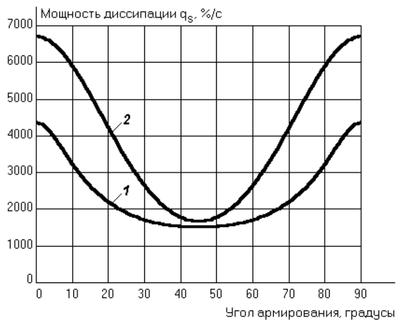


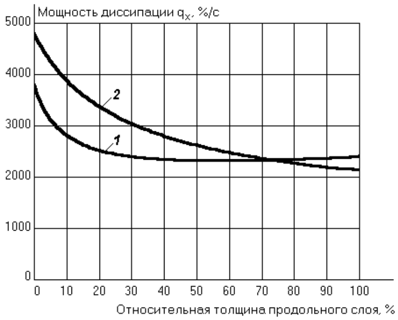
Рис. 2.6. Типичные величины коэффициентов диссипации перекрестно армированных (*а*, *б*) и ортогонально армированных (*в*) композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик



а



б



в

Рис. 2.7. Типичные величины мощностей диссипации перекрестно армированных (*а*, *б*) и ортогонально армированных (*в*) композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик

Графики для ψ_y не приводятся, поскольку они симметричны графикам для ψ_x. Коэффициент диссипации ψ_s и мощность диссипации q_s в ортогонально армированном материале не зависят от изменения относительных толщин.

Графики показывают, что способность материала гасить продольные и сдвиговые вибрации существенно зависит от угла армирования перекрестно армированного материала. Продольный коэффициент диссипации у стеклопластика больше, чем у углепластика, однако по мощности диссипации более жесткий углепластик догоняет стеклопластик.

2.2.7. Коэффициенты теплопроводности

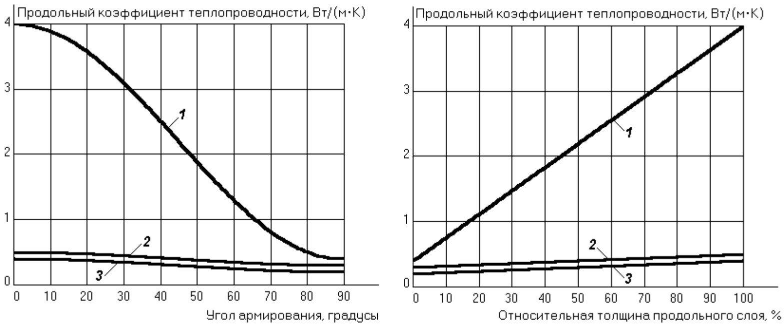
Многослойный композит характеризуется двумя коэффициентами теплопроводности λ_x и λ_y, определяющими характеристики переноса тепла в направлениях соответствующих осей координат.

Для расчета коэффициентов теплопроводности пакета необходимо знать коэффициенты теплопроводности каждого слоя $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$.

Коэффициенты теплопроводности многослойного пакета определяют по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_1^{(i)} \cos^2 \varphi_i + \lambda_2^{(i)} \sin^2 \varphi_i \right) \tilde{h}_i; \\ \lambda_y &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_1^{(i)} \sin^2 \varphi_i + \lambda_2^{(i)} \cos^2 \varphi_i \right) \tilde{h}_i. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Возможные пределы изменения коэффициентов теплопроводности типичных перекрестно армированных и ортогонально армированных материалов показаны на рис. 2.8. Зависимости для λ_y симметричны приведенным зависимостям для λ_x.



а *б*

Рис. 2.8. Типичные значения коэффициентов теплопроводности перекрестно армированных (*а*) и ортогонально армированных (*б*) композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

Следует иметь в виду, что теплопроводность углепластиков может существенно различаться в зависимости от марки конкретного материала. В частности, имеются углепластики с высокой теплопроводностью, для которых λ_x могут на один-два порядка превосходить приведенные на графиках значения.

2.2.8. Удельные электрические сопротивления

Многослойный композит характеризуется двумя величинами удельного сопротивления r_x и r_y, определяющими электрофизические свойства материала в направлениях соответствующих осей координат.

Для расчета удельных сопротивлений пакета необходимо знать соответствующие характеристики каждого слоя в его естественной системе координат $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$.

Удельные сопротивления многослойного пакета определяют по формулам

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\cos^2 \varphi_i}{r_1^{(i)}} + \dfrac{\sin^2 \varphi_i}{r_2^{(i)}} \right) \tilde{h}_i}; \\ r_y &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\sin^2 \varphi_i}{r_1^{(i)}} + \dfrac{\cos^2 \varphi_i}{r_2^{(i)}} \right) \tilde{h}_i}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2.9. Удельная теплоемкость и удельная стоимость

Для расчета удельной теплоемкости композита необходимо знать плотность и удельную теплоемкость материала каждого слоя $\rho^{(i)}$, $c^{(i)}$.

Удельную теплоемкость многослойного пакета рассчитывают по формуле

$$c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho^{(i)} c^{(i)} \tilde{h}_i}{\rho}, \tag{2.21}$$

где ρ — средняя плотность композита (2.13).

Расчет удельной стоимости материала на стадии его проектирования может быть проведен лишь весьма приблизительно. Наиболее просто определить стоимость материалов компонентов композита без учета стоимости технологии их переработки. В этом случае для расчета удельной стоимости многослойного материала необходимо знать плотность и удельную стоимость материала каждого слоя $\rho^{(i)}$, $s^{(i)}$.

Удельную стоимость многослойного пакета находят по формуле

$$s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho^{(i)} s^{(i)} \tilde{h}_i}{\rho}. \tag{2.22}$$

Стоимость современных композитов сильно различается в зависимости от марки конкретного материала. В общем можно сказать, что стоимость стеклопластиков не слишком отличается от стоимости традиционных конструкционных материалов, тогда как стоимость углепластиков и органопластиков примерно на порядок выше.

2.2.10. Характеристики прочности

Расчет прочности композитов — весьма сложная задача. Сегодня в мире существует множество разных подходов и созданных на их базе методик и алгоритмов расчета прочности многослойного композита, причем во многих случаях эти алгоритмы приводят к существенно различающимся результатам [19].

Дело в том, что процесс разрушения сложноармированного материала может быть многостадийным, так что само понятие прочности каждый раз приходится формулировать заново применительно к данным условиям нагружения и требованиям к композитному объекту.

Рассмотрим жизненный цикл какого-либо композитного изделия, например отсека ракеты. За время своего существования он проходит несколько *расчетных случаев нагружения*, для каждого из которых требуется проведение расчетов на прочность:

– изготовление, во время которого изделие подвергается нагреву до значительных температур, а затем остывает на оправке, в результате чего в слоях материала появляются напряжения;

– испытания, во время которых изделие нагружается самыми различными совокупностями нагрузок;

– сборку, когда на отсек действуют монтажные напряжения;

– транспортировку с вибронагружением поперечными силами;

– старт, когда на отсек действует значительная осевая сжимающая сила;

– полет, во время которого осевая сила уменьшается, но добавляется аэродинамическое давление, изгибающие моменты и перерезывающие силы;

– разделение ступеней, когда на отсек может действовать ударная нагрузка.

Во всех этих случаях на отсек не только воздействуют различные нагрузки (силовые и температурные), но также формулируются различные требования к сохранению прочности. Так, при испытаниях необходимо, чтобы после прекращения действия нагрузок материал полностью восстановил исходные свойства. Напротив, в последних расчетных случаях достаточно сохранения несущей способности, пусть даже ценой растрескивания связующего в отдельных слоях. Наконец, при отделении от ракеты отсек может даже разрушиться, но характер разрушения должен быть таким, чтобы исключить повреждения каких-либо агрегатов верхней ступени.

При переходе от конструкции к материалу также можно сформулировать несколько расчетных случаев нагружения, для каждого из которых устанавливаются свои требования к прочности и свои соотношения между действующими на материал силовыми факторами.

Для материала силовые нагрузки трансформируются в *средние напряжения* σ_x, σ_y, τ_{xy}, которые могут действовать в различной последовательности. Наиболее распространен случай *пропорционального нагружения*, когда все три напряжения возрастают от нулевых до максимальных значений пропорционально одному *параметру нагрузки* P:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x^{(0)} \\ \sigma_y^{(0)} \\ \tau_{xy}^{(0)} \end{array} \right\}, \qquad (2.23)$$

где $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$ – так называемые начальные напряжения, определяющие соотношения между компонентами напряженного состояния пакета.

Например, для случая одноосного растяжения вдоль продольной оси пакета

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x^{(0)} \\ \sigma_y^{(0)} \\ \tau_{xy}^{(0)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\},$$

для случая поперечного сжатия

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x^{(0)} \\ \sigma_y^{(0)} \\ \tau_{xy}^{(0)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\},$$

а для случая, когда материал представляет собой боковую стенку нагруженного внутренним давлением цилиндрического сосуда,

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x^{(0)} \\ \sigma_y^{(0)} \\ \tau_{xy}^{(0)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Таким образом, задание расчетного случая сводится к определению вектора начальных напряжений и установлению прочих факторов, действующих на материал (температуры, радиации и т. п.), а смысл расчета на прочность заключается в нахождении предельного значения параметра нагрузки $P_{\text{пр}}$, по достижении которого материал теряет свои эксплуатационные качества или просто разрушается.

При воздействии средних напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} в каждом слое материала возникает свое напряженное состояние, которое определяется напряжениями, действующими в осях естественной системы координат данного слоя $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$, $\tau_{12}^{(i)}$. Именно эти напряжения могут вызывать разрушение слоя, поэтому для расчета прочности пакета необходимо сформулировать *критерий прочности для монослоя,* определяющий такое напряженно-деформированное состояние в слое, которое приводит к его разрушению.

Сегодня существует большое число критериев прочности [19, 20], для использования которых необходимо знать различные наборы констант, описывающих прочность монослоя. В простейшем случае это пять характеристик F_1^+, F_1^-, F_2^+, F_2^- и F_{12}, соответствующих предельным напряжениям при одноосном растяжении и сжатии вдоль осей естественной системы координат и чистом сдвиге в этих осях. Для более сложных критериев к ним добавляют характеристики, описывающие прочность материала при совместном действии напряжений σ_1, σ_2, τ_{12}. В любом случае критерий прочности для монослоя записывают в виде уравнения, связывающего три действующих напряжения:

$$F(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \tau_{12}) = 0. \tag{2.24}$$

Условие (2.24) можно трактовать как уравнение некой поверхности в пространстве напряжений. Тогда нагружение монослоя в соответствии с условием (2.23) означает продвижение по *лучу нагружения* в пространстве напряжений от начала координат до пересечения с поверхностью (2.24), причем пока действующие значения напряжений находятся внутри поверхности, — слой продолжает сохранять исходные характеристики, а при пересечении с поверхностью слой разрушается. Поскольку для большинства критериев условие (2.24) имеет вид полинома второй степени, поверхность прочности, как правило, представляет собой эллипсоид. Пересечение этого эллипсоида с осями должно происходить при значениях напряжений F_1^+, F_1^-, F_2^+, F_2^- и F_{12}, определяющих прочность при одноосных напряженных состояниях.

Значение пределов прочности типичных современных композитов приводятся в табл. 2.1. Для таких материалов поверхность прочности оказывается сильно вытянутой вдоль оси σ_1, как это показано на рис. 2.9, *а*. При таких соотношениях оказывается не слишком важной форма поверхности, так что можно аппроксимировать ее параллелепипедом [6], как это показано на рис. 2.9, *б*. Такой параллелепипед определяет *критерий максимальных напряжений для монослоя*:

$$F_1^- \leqslant \sigma_1 \leqslant F_1^+; \quad F_2^- \leqslant \sigma_2 \leqslant F_2^+; \quad |\tau_{12}| \leqslant F_{12}. \tag{2.25}$$

Дополнительным аргументом в пользу критерия максимальных напряжений является то, что для пользования им достаточно знать пять характеристик прочности материала, которые могут быть определены из простых экспериментов. Более сложная информация, как правило, недоступна на стадии проектирования материала.

Несмотря на кажущуюся грубость сделанной аппроксимации, критерий (2.25) и основанная на нем модель деформирования монослоя [3] достаточно точно описывают прочность многослойных композитов при самых разных типах напряженных состояний [21]. Ознакомимся с этой моделью подробнее.

На рис. 2.9, *в* показаны диаграммы деформирования монослоя в составе многослойного пакета при различных нагружениях.

При продольном нагружении (первая диаграмма) разрушение происходит при достижении предела прочности материала при растяжении F_1^+ или при сжатии F_1^-; при этом материал линейно упруг вплоть до разрушения. При поперечном нагружении и при сдвиге (вторая и третья диаграммы) деформирование линейно упруго только до начала образования трещин в материале, которое происходит при достижении напряжений $\sigma_2 = \sigma_2^*$ или $\tau_{12} = \tau_{12}^*$. Напряжения σ_2^* и τ_{12}^* характеризуют наивысшие достижимые уровни напряжений в слое и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_2^* \leqslant F_2^+, &\quad \text{если} \quad |\tau_{12}^*| = F_{12}; \\ |\tau_{12}^*| \leqslant F_{12}, &\quad \text{если} \quad \sigma_2^* = F_2^+. \end{aligned}$$

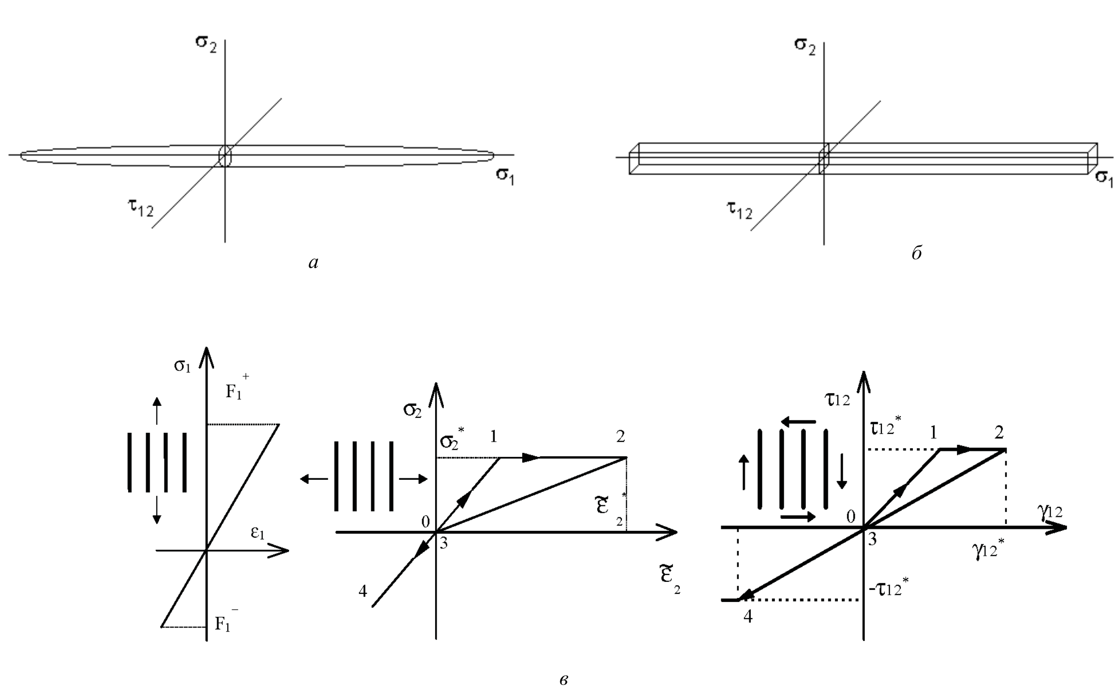


Рис. 2.9. К расчету прочности многослойных композитов: эллипсоид прочности (*а*) и параллелепипед, соответствующий критерию максимальных напряжений (*б*); диаграммы деформирования монослоя в составе пакета (*в*)

Деформации $\tilde{\varepsilon}_2^*$ $(\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1)$ и γ_{12}^* — это максимальные деформации, достигнутые за предысторию деформирования. Линия *1 — 2* на диаграммах соответствует развитию трещин в материале (поскольку слой находится в составе многослойного пакета, он продолжает выдерживать достигнутый уровень напряжений). Разгрузка от достигнутых значений $\tilde{\varepsilon}_2^*$ и γ_{12}^* происходит с секущими модулями

$$E_2^{(\text{c})} = \frac{1}{\dfrac{\tilde{\varepsilon}_2^*}{\sigma_2^*} + \dfrac{\nu_{12}^2}{E_1}}; \quad G_{12}^{(\text{c})} = \frac{\tau_{12}^*}{\gamma_{12}^*}. \tag{2.26}$$

Разница между линиями *2 — 3 — 4* на второй и третьей диаграммах объясняется тем, что при сжатии в поперечном направлении трещины закрываются и не влияют на жесткость слоя. Напротив, при сдвиге влияние трещин не зависит от знака напряжения τ_{12}.

Нагружение продолжается до тех пор, пока в одном из слоев не будет достигнут один из пределов прочности F_1^+, F_1^- или F_2^-, либо пока многослойный пакет не перестанет сопротивляться возрастающей нагрузке; достижение любого из этих условий трактуется как исчерпание несущей способности многослойного материала.

Кроме двух естественных состояний слоя (начального линейно упругого и конечного, в котором материал разрушен) в модели [3] рассматриваются еще шесть промежуточных состояний слоя с трещинами. Все эти состояния могут быть описаны вектором параметров эффективной жесткости материала $\{\xi_1, \xi_2, \xi_{12}\}$, компоненты которого представляют собой отношения текущих значений касательных модулей упругости монослоя к начальным значениям модулей упругости:

$$\xi_1 = \frac{E_1^{(\text{к})}}{E_1}; \quad \xi_2 = \frac{E_2^{(\text{к})}}{E_2}; \quad \xi_{12} = \frac{G_{12}^{(\text{к})}}{G_{12}}. \tag{2.27}$$

Значение параметров (2.27) определяются в зависимости от знака напряжений σ_2, величин $\tilde{\varepsilon}_2$, γ_{12} и знака их приращений; для всех возможных состояний монослоя в составе пакета эти параметры представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Параметры эффективной жесткости однонаправленного слоя

<table>
<tr><th rowspan="2">Состояние монослоя</th><th colspan="2">Деформации</th><th rowspan="2">ξ_1</th><th rowspan="2">ξ_2</th><th rowspan="2">ξ_{12}</th></tr>
<tr><th>Поперечная</th><th>Сдвиговая</th></tr>
<tr><td>Начальное,
$F_1^- < \sigma_1 < F_1^+$,
$F_2^- < \sigma_2 < F_2^+$,
$\lvert\tau_{12}\rvert < F_{12}$</td><td>–</td><td>–</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Трещины открыты,
$\sigma_2 > 0$</td><td>$\tilde{\varepsilon}_2 < \tilde{\varepsilon}_2^*$</td><td rowspan="2">$\lvert\gamma_{12}\rvert < \lvert\gamma_{12}^*\rvert$</td><td>1</td><td>$E_2^{(\text{c})}/E_2$</td><td>$G_{12}^{(\text{c})}/G_{12}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\tilde{\varepsilon}_2^* = \tilde{\varepsilon}_2$
$\Delta\tilde{\varepsilon}_2 = 0$</td><td>1</td><td>0</td><td>$G_{12}^{(\text{c})}/G_{12}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\lvert\gamma_{12}\rvert = \lvert\gamma_{12}^*\rvert$
$\Delta\lvert\gamma_{12}\rvert > 0$</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\tilde{\varepsilon}_2 < \tilde{\varepsilon}_2^*$</td><td>1</td><td>$E_2^{(\text{c})}/E_2$</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Трещины закрыты</td><td rowspan="2">$\tilde{\varepsilon}_2 < 0$</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\lvert\gamma_{12}\rvert < \lvert\gamma_{12}^*\rvert$</td><td>1</td><td>1</td><td>$G_{12}^{(\text{c})}/G_{12}$</td></tr>
<tr><td>Разрушение
$\sigma_1 = F_1^+$ или
$\sigma_1 = F_1^-$ или
(и) $\sigma_2 = F_2^-$</td><td>–</td><td>–</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Связь между приращениями напряжений и деформаций в монослое может быть записана с использованием текущей матрицы жесткости монослоя, которая зависит от параметров эффективной жесткости

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\xi_1 E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{\xi_2 \nu_{12} E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\xi_2 \nu_{12} E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{\xi_2 E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{12} G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix}. \qquad (2.28)$$

В соответствии с рассматриваемой моделью, в каждом расчетном случае может быть использован один из двух алгоритмов расчета прочности:

– *расчет прочности по первому разрушению материала*, при котором определяется значение параметра нагрузки $P_{\text{пр}}$, соответствующее началу необратимых изменений в одном из слоев многослойного пакета;

– *расчет предельной несущей способности материала*, когда допускается растрескивание слоев и значение параметра нагрузки $P_{\text{пр}}$ соответствует достижению одного из пределов прочности F_1^+, F_1^- или F_2^- в каком-либо слое или вырождению текущей матрицы жесткости многослойного пакета (в последнем случае пакет начинает неограниченно деформироваться при постоянной нагрузке).

Выбор одного из этих алгоритмов определяется характером требований к композиту в данном расчетном случае (допускается ли необратимое деформирование или материал должен сохранить исходные характеристики после снятия нагрузки), а также типом первого разрушения материала.

Рассмотрим подробнее оба алгоритма. Ограничимся случаем, когда на материал действуют только силовые нагрузки, т. е. нагружение полностью описывается условием (2.23).

Если необратимое деформирование материала недопустимо, расчет прочности по первому разрушению сводится к последовательности операций.

1. По формулам (2.3) — (2.6) рассчитываются технические константы жесткости многослойного ортотропного пакета.

2. Определяют начальные деформации пакета, соответствующие начальным напряжениям (2.23), т. е. единичному значению параметра нагрузки:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^{(0)} = \frac{\sigma_x^{(0)} - \nu_{xy}\sigma_y^{(0)}}{E_x}; \quad \varepsilon_y^{(0)} = \frac{\sigma_y^{(0)} - \nu_{yx}\sigma_x^{(0)}}{E_y};\\
&\gamma_{xy}^{(0)} = \frac{\tau_{xy}^{(0)}}{G_{xy}}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

3. Рассчитывают деформации отдельных слоев при единичном значении параметра нагрузки:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{1i}^{(0)} = \varepsilon_x^{(0)}\cos^2\varphi_i + \varepsilon_y^{(0)}\sin^2\varphi_i + \gamma_{xy}^{(0)}\cos\varphi_i\sin\varphi_i;\\
&\varepsilon_{2i}^{(0)} = \varepsilon_x^{(0)}\sin^2\varphi_i + \varepsilon_y^{(0)}\cos^2\varphi_i - \gamma_{xy}^{(0)}\cos\varphi_i\sin\varphi_i;\\
&\gamma_{12i}^{(0)} = -\left(\varepsilon_x^{(0)} - \varepsilon_y^{(0)}\right)\sin 2\varphi_i + \gamma_{xy}^{(0)}\cos 2\varphi_i.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Если слой представляет собой перекрестно армированный материал с углом армирования $\pm\varphi_i$, то в соответствии с (2.30) напряжения в части слоя, ориентированной под углом $+\varphi_i$, отличаются от напряжений в части слоя, ориентированной под углом $-\varphi_i$. Для такого слоя расчет на прочность следует проводить дважды, принимая в (2.30) $\varphi = +\varphi_i$ и $\varphi = -\varphi_i$. Если в векторе начальных напряжений $\tau_{xy}^{(0)} = 0$, то можно ограничиться однократным расчетом, поскольку в этом случае напряжения для $+\varphi_i$ и $-\varphi_i$ одинаковы.

4. Определяют напряжения в слоях пакета, соответствующие $P = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{1i}^{(0)} &= g_{11}^{(i)}\varepsilon_{1i}^{(0)} + g_{12}^{(i)}\varepsilon_{2i}^{(0)}; \\ \sigma_{2i}^{(0)} &= g_{12}^{(i)}\varepsilon_{1i}^{(0)} + g_{22}^{(i)}\varepsilon_{2i}^{(0)}; \\ \tau_{12i}^{(0)} &= g_{66}^{(i)}\gamma_{12i}^{(0)}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

где коэффициенты матрицы жесткости каждого слоя в его естественной системе координат находят по формулам (2.3).

5. Используют критерий прочности для монослоя (2.25). Поскольку напряжения в слоях, как и средние напряжения в пакете (2.23), пропорциональны величине параметра нагрузки, предельное значение этого параметра показывает, во сколько раз необходимо увеличить напряжения (2.31) для того, чтобы в одном из слоев выполнилось в виде равенства одно из условий (2.25):

$$P_{\text{пр}} = \min_i \, \min \left\{ \frac{\left[\sigma_1^{(i)}\right]}{\sigma_{1i}^{(0)}}, \; \frac{\left[\sigma_2^{(i)}\right]}{\sigma_{2i}^{(0)}}, \; \frac{F_{12}^{(i)}}{\left|\tau_{12i}^{(0)}\right|} \right\}, \tag{2.32}$$

где

$$\left[\sigma_1^{(i)}\right] = \begin{cases} F_1^{(i)-}, & \text{если } \sigma_{1i}^{(0)} < 0; \\ F_1^{(i)+}, & \text{если } \sigma_{1i}^{(0)} > 0, \end{cases}$$

$$\left[\sigma_2^{(i)}\right] = \begin{cases} F_2^{(i)-}, & \text{если } \sigma_{2i}^{(0)} < 0; \\ F_2^{(i)+}, & \text{если } \sigma_{2i}^{(0)} > 0\,. \end{cases}$$

Если задать вектор начальных напряжений так, чтобы одна из его компонент была равна ± 1, а прочие компоненты — нулю, в результате пяти последовательных расчетов будут определены значения пределов прочности пакета при одноосных нагружениях. Соответствующие значения прочности по первому разрушению, вычисленные для типичных перекрестно армированных и ортогонально армированных композитов, показаны на рис. 2.10, *а* и *б*, 2.11, *а* и *б* и 2.12, *а*. Графики для прочности в поперечном направлении не приводятся, поскольку эти графики симметричны графикам для продольной прочности.

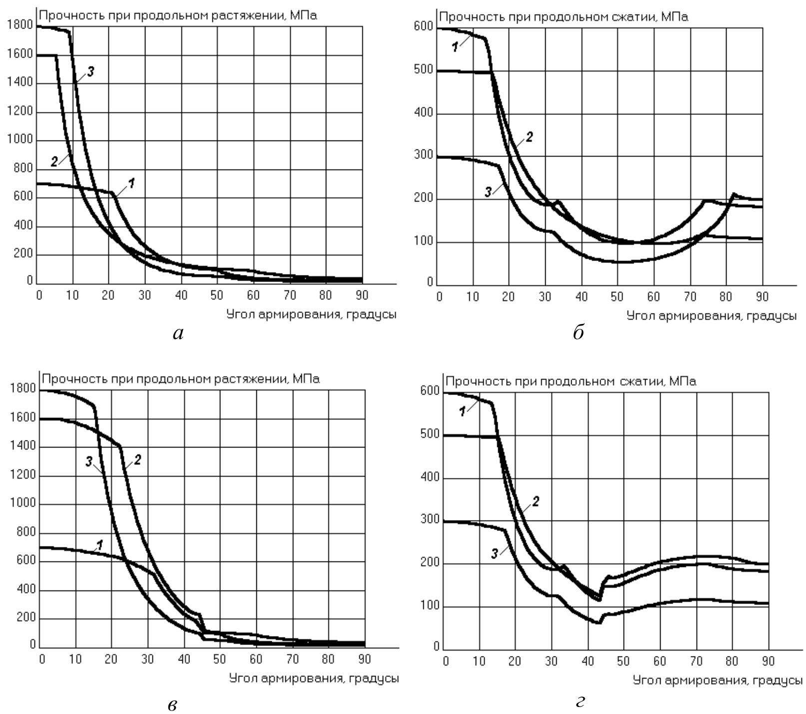


Рис. 2.10. Типичные значения прочности по первому разрушению (*а*, *б*) и предельной несущей способности (*в*, *г*) при одноосном растяжении и сжатии для перекрестно армированных композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

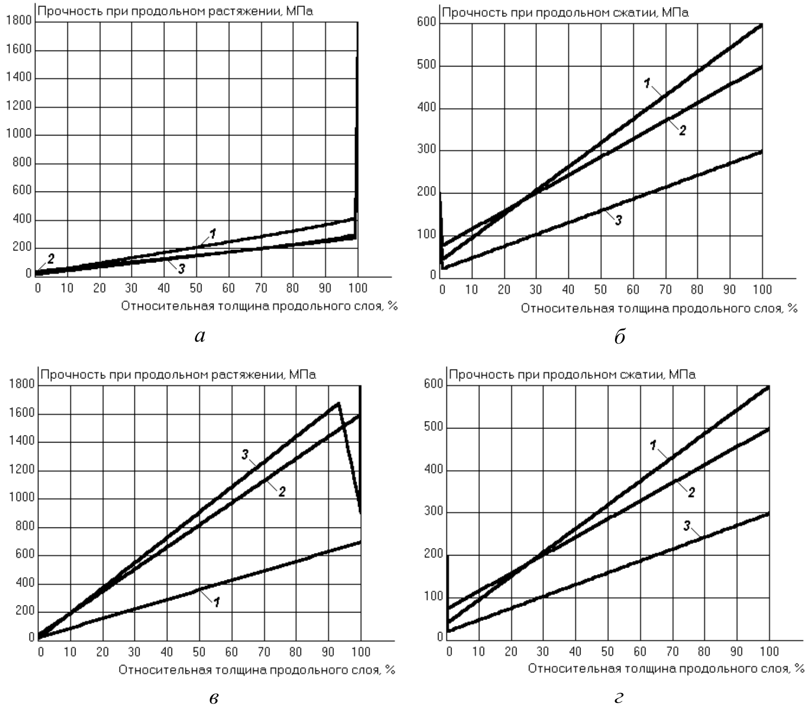


Рис. 2.11. Типичные величины прочности по первому разрушению (*а*, *б*) и предельной несущей способности (*в*, *г*) при одноосном растяжении и сжатии для ортогонально армированных композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

Кривые для углепластика соответствуют материалам с низкой прочностью типа КМУ-4л, имеющимся сегодня в отечественной промышленности; при использовании зарубежных материалов возможно достижение значительно более высоких значений прочности.

Все графики прочности представляют собой ломаные линии, составленные из отрезков, каждый из которых соответствует какому-либо механизму разрушения. Так, прочность при продольном растяжении перекрестно армированных композитов для малых углов армирования определяется разрушением однонаправленных слоев при растяжении вдоль волокон; с увеличением углов на пер-

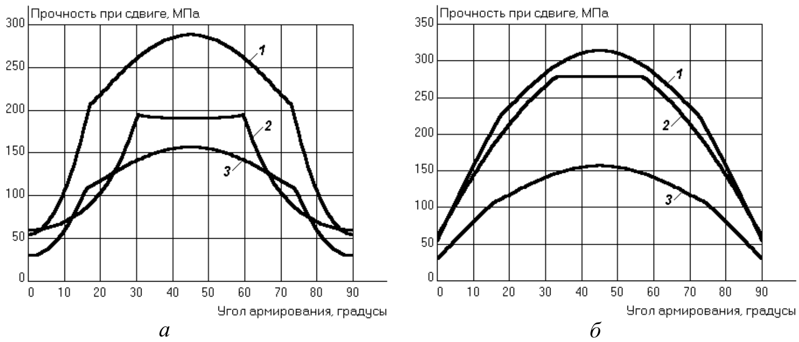


Рис. 2.12. Типичные величины прочности по первому разрушению (*а*) и предельной несущей способности (*б*) при чистом сдвиге для перекрестно армированных композитов:
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

вый план выходит разрушение от сдвиговых напряжений, а при дальнейшем возрастании углов первое разрушение происходит от растяжения в поперечном направлении. При одноосном сжатии перекрестно армированных материалов по мере возрастания угла армирования реализуются следующие механизмы разрушения: сжатие вдоль волокон, растяжение поперек волокон (для некоторых материалов), сдвиг и сжатие поперек волокон. При сдвиге перекрестно армированных материалов если углы не слишком сильно отличаются от 0 или 90°, то первое разрушение связано со сдвигом; если же угол армирования ближе к 45°, то причиной первого разрушения для некоторых материалов может быть сжатие вдоль волокон, для других материалов — растяжение поперек волокон. Все зависит от соотношений между модулями упругости и пределами прочности для каждого конкретного композита.

Для ортогонально армированных материалов первое разрушение при растяжении, как правило, происходит в слое, армированном перпендикулярно к направлению растяжения. Этим объясняется медленный рост прочности по мере увеличения доли продольных слоев: прочность возрастает только за счет постепенного уменьшения напряжений в поперечном слое. Лишь когда доля продольных слоев сравнивается с единицей, прочность по первому разрушению скачкообразно увеличивается до значения F_1^+. При сжатии такого материала, напротив, разрушение обычно связано со сжатием вдоль волокон продольного слоя. При уменьшении доли продольных слоев наступает момент, когда прочность перекрестно армированного материала становится меньше прочности однонаправленного слоя при поперечном сжатии: добавление продольных слоев лишь ухудшает прочность по сравнению с прочностью однонаправленного материала, ориентированного перпендикулярно к действию нагрузки. Этот эффект объясняется тем, что более жесткий продольный слой оттягивает на себя напряжения и разрушается раньше, чем мог бы разрушиться поперечный слой, обладающий большей податливостью. Прочность при сдвиге ортогонально армированных композитов, как и модуль сдвига, не зависит от изменения относительных толщин.

При анализе представленных графиков следует помнить, что прочность многослойной структуры при сложном напряженном состоянии не может быть рассчитана как комбинация пяти пределов прочности при одноосных нагружениях. В этом случае следует использовать описанный алгоритм, задавая в нем начальные напряжения, соответствующие заданному типу нагружения.

Показанные на рассмотренных графиках величины пределов прочности по первому разрушению материала не всегда определяют его действительную несущую способность. Для анализа последней следует использовать *алгоритм пошагового нагружения*, блок-схема которого представлена на рис. 2.13. Основные положения этого алгоритма сводятся к следующему.

1. Задают исходные данные: относительные толщины и углы армирования каждого слоя, характеристики жесткости и прочности каждого слоя $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $G_{12}^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$ $(E_1^{(i)}\nu_{21}^{(i)} = E_2^{(i)}\nu_{12}^{(i)})$, $F_1^{+(i)}$, $F_1^{-(i)}$, $F_2^{+(i)}$, $F_2^{-(i)}$, $F_{12}^{(i)}$, а также вектор начальных средних напряжений в пакете $\{\sigma_{xy}^{(0)}\}$ и шаг по параметру нагрузки ΔP. Формируют начальные матрицы жесткости слоев $[G_{12}^{(i)}]_0$ (2.3) и начальную матрицу жесткости пакета $[G_{xy}]_0$ (2.4), (2.5). Обнуляют начальные значения векторов напряжений в слоях $\{\sigma_{12}^{(i)}\}_0$, деформаций в слоях $\{\varepsilon_{12}^{(i)}\}_0$ и деформаций пакета $\{\varepsilon_{xy}\}_0$. Обнуляется счетчик шагов k.

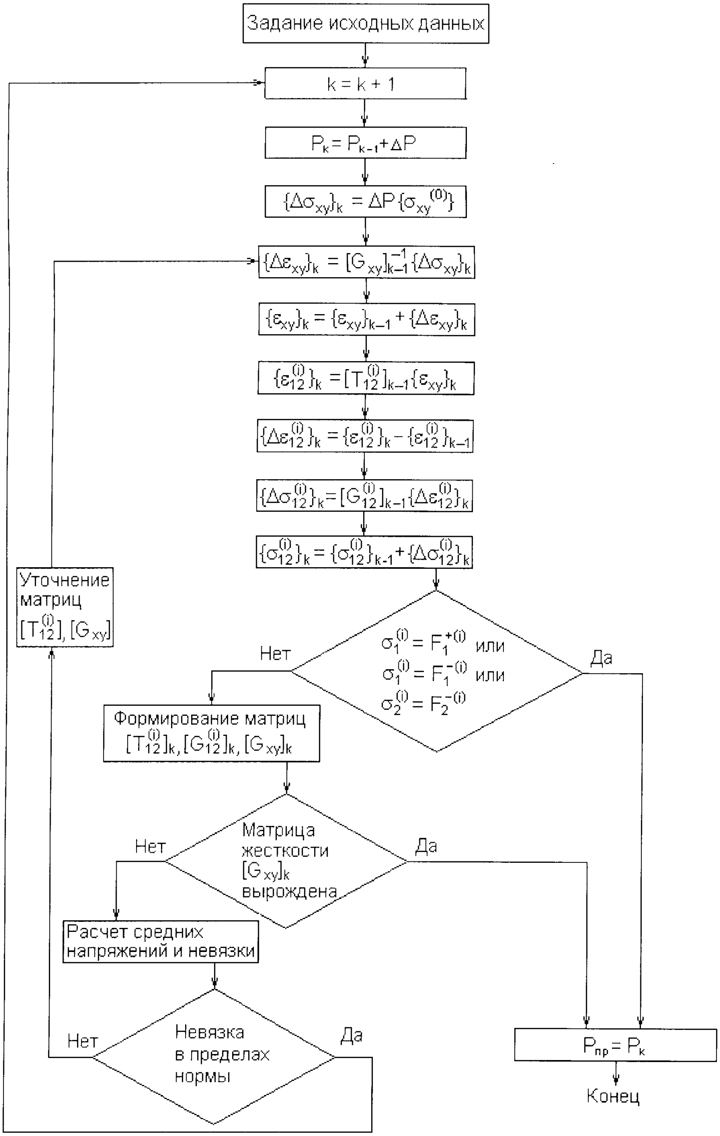


Рис. 2.13. Блок-схема алгоритма пошагового нагружения для расчета предельной несущей способности многослойных композитов

2. Делают шаг по нагрузке. Счетчик шагов увеличивается на единицу. Параметр нагрузки увеличивается на длину шага ΔP. Получают вектор приращений средних напряжений в пакете $\{\Delta\sigma_{xy}\}_k = \Delta P\{\sigma_{xy}^{(0)}\}$ и соответствующие приращения деформаций пакета $\{\Delta\varepsilon_{xy}\}_k = [G_{xy}]_{k-1}^{-1}\{\Delta\sigma_{xy}\}_k$, для чего обращают матрицу жесткости пакета $[G_{xy}]_{k-1}$, вычисленную на предыдущем шаге. Полные деформации пакета находят суммированием деформаций пакета на предыдущем шаге и вычисленных приращений деформаций $\{\varepsilon_{xy}\}_k = \{\varepsilon_{xy}\}_{k-1} + \{\Delta\varepsilon_{xy}\}_k$.

3. Рассчитывают полные деформации в слоях $\{\varepsilon_{12}^{(i)}\}_k = [T_{12}^{(i)}]_{k-1}\{\varepsilon_{xy}\}_k$, для чего используют матрицу преобразования координат [3]

$$\left[T_{12}^{(i)}\right] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi_i & \sin^2\varphi_i & \sin\varphi_i\cos\varphi_i \\ \sin^2\varphi_i & \cos^2\varphi_i & -\sin\varphi_i\cos\varphi_i \\ -2\sin\varphi_i\cos\varphi_i & 2\sin\varphi_i\cos\varphi_i & \cos^2\varphi_i - \sin^2\varphi_i \end{bmatrix},$$

в которую подставляют значения углов, соответствующие предыдущему шагу нагружения. Для каждого перекрестно армированного слоя отдельно определяют деформации в частях слоя, армированных под углами $+\varphi$ и $-\varphi$, и все дальнейшие действия выполняют для каждой из этих частей. Определяют приращения деформаций в слоях $\{\Delta\varepsilon_{12}^{(i)}\}_k = \{\varepsilon_{12}^{(i)}\}_k - \{\varepsilon_{12}^{(i)}\}_{k-1}$ и соответствующие им приращения напряжений в слоях $\{\Delta\sigma_{12}^{(i)}\}_k = [G_{12}^{(i)}]_{k-1}\{\Delta\varepsilon_{12}^{(i)}\}_k$, причем в последних уравнениях используются матрицы жесткости слоев, определенные на предыдущем шаге. Полные напряжения в слоях находят суммированием соответствующих напряжений, вычисленных на предыдущем шаге с найденными приращениями напряжений $\{\sigma_{12}^{(i)}\}_k = \{\sigma_{12}^{(i)}\}_{k-1} + \{\Delta\sigma_{12}^{(i)}\}_k$.

4. Проверяют условия фатального разрушения $\sigma_1^{(i)} = F_1^{+(i)}$, $\sigma_1^{(i)} = F_1^{-(i)}$, $\sigma_2^{(i)} = F_2^{-(i)}$ для каждого слоя. В случае выполнения одного из этих условий дальнейшее нагружение прекращают и достигнутый уровень параметра нагрузки считают предельным.

5. Если условия, проверяемые в предыдущем пункте, не выполнены, то проводят учет структурной нелинейности [3]: изменяют

углы армирования слоев $\varphi_i^{(k)} = \varphi_i^{(k-1)} + 1/2\Delta\gamma_{12}^{(i)}$и находят текущие матрицы преобразования координат $[T_{12}(i)]_k$ (отдельно для углов $+\varphi$ и $-\varphi$ каждого перекрестно армированного слоя). Затем по табл. 2.2 определяют параметры эффективной жесткости для текущего состояния каждого слоя. После этого формируют текущие матрицы жесткости слоев $[G_{12}^{(i)}]_k$ (2.28) и по ним находят текущую матрицу жесткости многослойного пакета $[G_{xy}]_k$ в соответствии с процедурой (2.4), (2.5).

6. Проводят проверку вырожденности текущей матрицы жесткости пакета. Если хотя бы один из ее стоящих на главной диагонали коэффициентов или определитель матрицы равны нулю, то считают, что такой материал не может больше воспринимать возрастающую нагрузку. В этом случае нагружение прекращают, и достигнутый уровень параметра нагрузки считают предельным.

7. Если матрица жесткости не вырождена, то по найденным величинам полных напряжений в слоях рассчитывают средние напряжения в многослойном пакете [3]

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_1^{(i)} \cos^2\varphi_i + \sigma_2^{(i)} \sin^2\varphi_i - 2\tau_{12}^{(i)} \cos\varphi_i \sin\varphi_i\right) \tilde{h}_i;$$

$$\sigma_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_1^{(i)} \sin^2\varphi_i + \sigma_2^{(i)} \cos^2\varphi_i + 2\tau_{12}^{(i)} \cos\varphi_i \sin\varphi_i\right) \tilde{h}_i;$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \Big[\sigma_1^{(i)} \cos\varphi_i \sin\varphi_i - \sigma_2^{(i)} \cos\varphi_i \sin\varphi_i + {}$$
$$+ \tau_{12}^{(i)} \left(\cos^2\varphi_i - \sin^2\varphi_i\right)\Big] \tilde{h}_i$$

(в последних выражениях индекс k опущен). Поскольку известны точные значения этих напряжений, равные произведениям параметра нагрузки на начальные напряжения, разность между точными и приближенными значениями напряжений составляет невязку, значение которой определяет точность расчета. Если точность недостаточна, то вычисления повторяют с уточненными матрицами (такую итерационную процедуру можно проводить несколько раз). Если же точность достаточна, то делают следующий шаг и повторяют действия по пп. 2 — 7.

Значения пределов прочности типичных перекрестно армированных и ортогонально армированных композитов при одноосных нагружениях, вычисленные в соответствии с приведенным алгоритмом, показаны на рис. 2.10, *в* и *г*, 2.11, *в* и *г* и 2.12, *б*. Графики для прочности в поперечном направлении не приведены, поскольку эти графики симметричны графикам для продольной прочности.

Сопоставление графиков прочности, рассчитанных по первому разрушению и с использованием нелинейного алгоритма, показывает, что при допущении необратимого деформирования перекрестно армированного материала увеличение его прочности происходит лишь в ограниченном диапазоне углов. Так, при растяжении нижняя граница этой зоны догрузки составляет в зависимости от типа материала от 5 до 21°, а верхняя граница для всех материалов соответствует 45°. При $\varphi < 45^\circ$ слои однонаправленного композита сжаты в поперечном направлении, и после начала растрескивания от сдвига имеют ненулевую жесткость в поперечном направлении. Напротив, при $\varphi > 45^\circ$ $\sigma_2 > 0$ и после начала растрескивания происходит вырождение матрицы жесткости, так что дальнейшее увеличение нагрузки оказывается невозможным. При сжатии зона догрузки составляет от 45° до $75 \ldots 82^\circ$, т. е. охватывает тот диапазон углов, в котором первое разрушение происходит от сдвига, и при этом $\sigma_2 < 0$. При сдвиге перекрестно армированного органопластика прочность увеличивается лишь в диапазонах углов от 0 до 17° и от 73 до 90°, где первое разрушение происходит от сдвига. Поскольку при $\varphi = 17 \ldots 73^\circ$ первое разрушение этого материала происходит от сжатия вдоль волокон, в этом диапазоне углов догрузки не происходит. В отличие от органопластика, для углепластика и стеклопластика зона догрузки охватывает весь диапазон углов, так как первое разрушение при сдвиге для этих материалов всегда связано либо со сдвигом, либо с поперечным растяжением в естественной системе координат. Более подробная характеристика графиков прочности перекрестно армированного материала приведена в [3].

При растяжении ортогонально армированных материалов (см. рис. 2.11, *в*) зона догрузки охватывает весь диапазон изменения относительных толщин, кроме его крайних точек, которые соответствуют однонаправленному материалу. Первое разрушение всех материалов связано с растрескиванием от поперечного растяжения в слое с углом 90°, затем после некоторой догрузки растрескивается и второй слой; наконец, происходит разрушение слоя с углом 0° от продольного растяжения, что влечет за собой исчерпание несущей способности всего пакета. Исключением является органопластик с долей продольного слоя свыше 93 %: причиной исчерпания несущей способности пакета в этом случае становится разрушение поперечного слоя от сжатия в направлении армирования. Изменение характера разрушения хорошо видно на графике.

При сжатии ортогонально армированных материалов обычно уже первое разрушение является фатальным для пакета. Таким образом, графики на рис. 2.11, *г* не отличаются от соответствующих зависимостей на рис. 2.11, *б*. Прочность при сдвиге ортогонально армированных композитов, как и модуль сдвига, не зависит от изменения относительных толщин.

2.3. Оптимизация и предельные возможности многослойных композитов

Техника оптимального проектирования многослойных материалов иллюстрируется в настоящем разделе примерами оптимизации различных характеристик многослойных структур. Во всех случаях целесообразно начинать исследование с анализа простейших одномерных структур: перекрестно армированных и ортогонально армированных материалов. Графики параметрического анализа этих структур дают возможность увидеть связь и возможные пределы изменения исследуемых характеристик. Во многих случаях карты свойств указанных типов структур ограничивают область, в которой лежат все возможные значения свойств проектируемого материала.

Для проверки последнего утверждения и определения оптимальных структур в том случае, когда оно оказывается несправедливым, следует провести исследование предельных возможностей для структур общего вида: $[0/90^{\circ}/\pm\varphi]$ и (или) $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$.

Во всех примерах расчетов используются свойства однонаправленных материалов из табл. 2.1, а также вышеприведенные графики параметрического анализа. Для простоты рассматриваются только структуры, состоящие из монослоев одного типа.

2.3.1. Оптимизация жесткостных характеристик

Требования к жесткости материала предъявляются при проектировании почти всех композитных конструкций. Как правило, это требования максимизации модулей упругости. Оптимальные структуры подбирают в зависимости от количества оптимизируемых характеристик.

Максимизация одного модуля упругости материала не представляет сложности. Это обычная задача скалярной оптимизации. Если других требований к свойствам материала не предъявляется, очевидное решение задачи безусловной оптимизации соответствует однонаправленному материалу, армированному в направлении требуемой оси; для модуля сдвига оптимальной является структура $\pm45^{\circ}$. Если имеются другие требования к материалу, то решают задачу скалярной оптимизации с ограничениями; решение ее определяется видом ограничений.

Максимизация двух модулей упругости E_x и E_y приводит к задаче исследования предельных возможностей материала. Исходным материалом для анализа одномерных структур являются графики параметрического анализа, приведенные на рис. 2.2, а также графики зависимостей $E_y(\varphi)$ и $E_y(\tilde{h}_0)$, симметричные приведенным графикам $E_x(\varphi)$ и $E_x(\tilde{h}_0)$. Эти графики могут быть перестроены в карты свойств $E_y(E_x)$, показанные для обеих структур на рис. 2.14, *а* (здесь и в следующем примере ограничимся только углепластиком). Очевидно, что ортогонально армированная структура в данном случае оказывается предпочтительнее перекрестно армированной; область компромиссов включает в себя все решения для ортогонально армированных структур от точки A до точки B (эти точки соответствуют однонаправленному материалу, развернутому в направлении одной из осей пакета). Если рассматривать любые структуры общего вида, свойства их будут соответствовать области, ограниченной показанными линиями. Исследование предельных возможностей, проведенное для материалов вида $[0/90^\circ/\pm\varphi]$ или $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$, приводит во всех случаях к ортогонально армированным структурам; граница предельных возможностей показана на рис. 2.14, *б*. Эта граница отделяет затемненную область с доступными значениями характеристик от части пространства требований, в которой сочетания требований к материалу не могут быть удовлетворены.

Максимизацию модуля упругости и модуля сдвига материала E_x и G_{xy} также сначала проводят для одномерных структур. При этом используют графики $E_x(\varphi)$ и $E_x(\tilde{h}_0)$, показанные на рис. 2.2, а также графики $G_{xy}(\varphi)$ и $G_{xy}(\tilde{h}_0)$ (см. рис. 2.3). Эти графики могут быть перестроены в карты свойств $G_{xy}(E_x)$, показанные для обеих структур на рис. 2.14, *в*. В отличие от предыдущей задачи, в данном случае перекрестно армированная структура предпочтительнее ортогонально армированной. Область компромиссов включает в себя линию BA, соответствующую перекрестно армированным структурам с углом ориентации от 0 до $\pm 45^\circ$. Исследование предельных возможностей структур $[0/90^\circ/\pm\varphi]$ или $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$ не позволяет улучшить полученные решения, так что граница предельных возможностей имеет вид, показанный на рис. 2.14, *г*.

Максимизация трех жесткостных характеристик E_x, E_y и G_{xy} приводит к трехмерной поверхности предельных возможностей. Такие поверхности строят в соответствии с подробно описанной в [1] тактикой гибких приоритетов. Поверхности предельной жесткости, построенные в пространстве требований «максимум продольного модуля упругости — максимум поперечного модуля упругости — максимум модуля сдвига» для типичных углепластика, стеклопластика и органопластика показаны на рис. 2.15. Поверхности показаны линиями уровня в соответствии с приведенной шкалой сдвиговой жесткости. В основании каждой поверхности

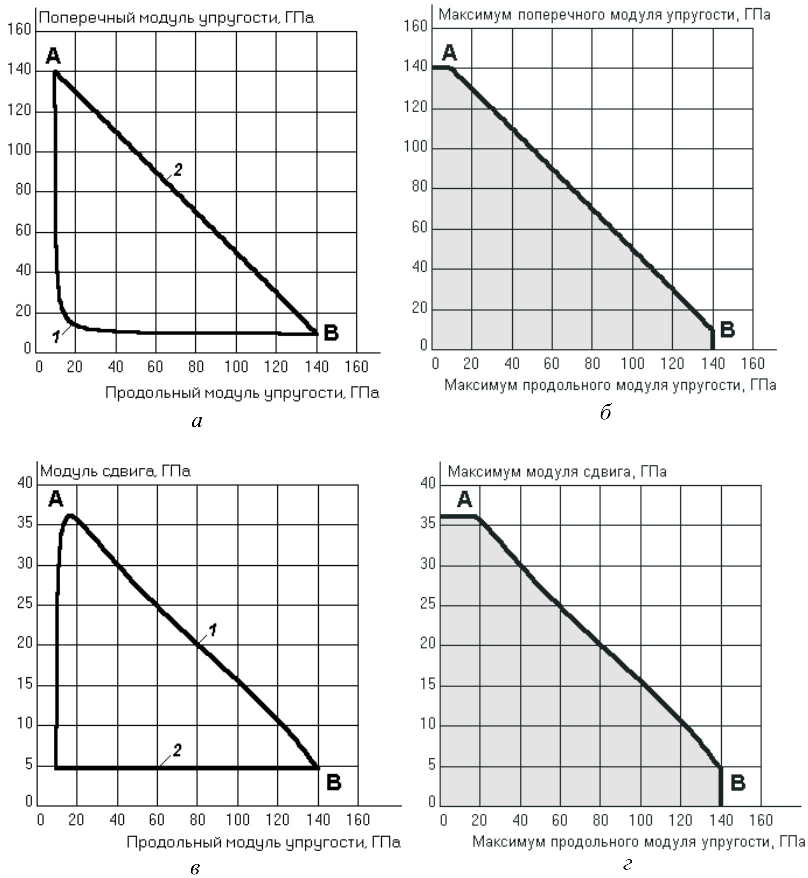


Рис. 2.14. Карты свойств (*а*, *в*) и границы предельных возможностей (*б*, *г*) при максимизации двух модулей упругости типичного многослойного углепластика: *1* — перекрестно армированные структуры, *2* — ортогонально армированные структуры

лежат ортогонально армированные структуры, вершине «холма» соответствуют структуры $\pm 45^{\circ}$, а склон этого «холма» образуют структуры общего вида.

В сущности, именно подобные поверхности являются характеристиками жесткости многослойных структур, образованных монослоями того или иного типа.

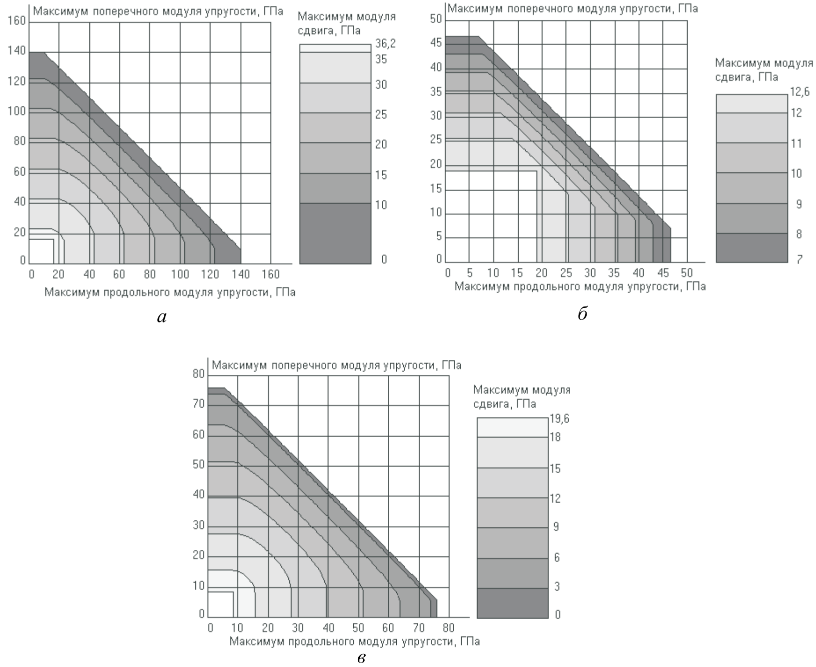


Рис. 2.15. Поверхности предельных возможностей при максимизации трех жесткостных характеристик типичных многослойных материалов: углепластика (*а*), стеклопластика (*б*) и органопластика (*в*)

Совместный анализ поверхностей предельных возможностей, построенных для различных материалов, позволяет выявить области предпочтительного применения каждого из них. Если речь идет о жесткостях, углепластик способен обеспечить сочетания требований, недоступные для материала двух других типов.

2.3.2. Оптимизация термоупругих характеристик

Задачи оптимизации термоупругих характеристик многослойных композитов весьма разнообразны. В зависимости от требуемых эксплуатационных характеристик конкретной конструкции могут быть сформулированы следующие требования к материалу:

– наиболее близкие к нулю КЛТР в одном или двух направлениях;

– минимизация КЛТР в одном или двух направлениях;

– максимизация КЛТР в одном или двух направлениях.

Наиболее часто встречаются задачи первого типа. Это задачи проектирования материалов для *размеростабильных конструкций*, т. е. конструкций, размеры которых не изменяются при изменении параметров окружающей среды (прежде всего температуры). Эти задачи отличаются от задач минимизации КЛТР, где наилучшие решения характеризуются отрицательными значениями минимизируемой характеристики. В данном случае речь идет о минимизации абсолютных величин КЛТР.

Минимизация абсолютной величины одного КЛТР соответствует задаче скалярной оптимизации. Оптимальные решения, соответствующие нулевому значению целевой функции, могут быть получены уже для простейших одномерных (перекрестно армированных и ортогонально армированных) структур. Эти решения показаны на графиках рис. 2.4.

Для перекрестно армированных композитов значения угла φ, обеспечивающего нулевое значение коэффициента α_x, может быть получено как решение квадратного уравнения [12]

$$\operatorname{tg}^2\varphi + \left\{ \frac{4g_{66}\left[g_{11}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + \left(1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)g_{12} + g_{22}\right]}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 1\right) \right\} \operatorname{tg}\varphi + \\ + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0. \qquad (2.33)$$

Если перекрестно армированные материалы изготовлены на основе монослоев со свойствами, перечисленными в табл. 2.1, нулевые значения КЛТР могут быть достигнуты для углепластика и органопластика.

При проектировании ортогонально армированных материалов структурные параметры, обеспечивающие нулевое значение коэффициента α_x, могут быть определены из решения квадратного уравнения [12]

$$(\beta_1 - \beta_2)\,\tilde{h}_0^2 + \frac{\beta_2\,(2g_{11} - g_{22} + g_{12}) - \beta_1\,(g_{11} + g_{12})}{g_{11} - g_{22}}\tilde{h}_0 + \\ + (\beta_1 g_{12} - \beta_2 g_{11}) = 0, \qquad (2.34)$$

причем действительные решения этого уравнения также возможны для углепластика и органопластика.

В общем случае многослойного ортотропного материала структуры с одним нулевым КЛТР могут быть созданы при различных сочетаниях параметров композита. Так, для материалов, содержащих осевые и перекрестно армированные слои или поперечные и перекрестно армированные слои, существует бесконечное множество сочетаний структурных параметров, соответствующих условию $\alpha_x = 0$. Из этого множества могут быть выбраны решения, наилучшим образом отвечающие прочим требованиям к проектируемому материалу.

При *минимизации абсолютной величины двух КЛТР* анализ приведенных в подразд. 2.2.2 зависимостей показывает, что оба КЛТР одновременно могут быть равны нулю только для таких материалов, для которых коэффициенты термических напряжений монослоя β_1 и β_2 равны по модулю и противоположны по знаку [12]. Используя зависимости (1.9) для существующих типов волокон и матриц, можно убедиться, что условие $\beta_1 = -\beta_2$ может быть выполнено для углепластиков и органопластиков с объемной долей волокон около 80 %. Поскольку реализовать такие объемные соотношения сегодня не представляется возможным, создание материалов с нулевым КЛТР во всех направлениях остается задачей будущего. При компромиссном удовлетворении требований минимизации абсолютной величины α_x и α_y возникает задача исследования предельных возможностей проектируемых структур. Возможные варианты границы предельных возможностей для материалов каждого типа показаны на рис. 2.16, *а*.

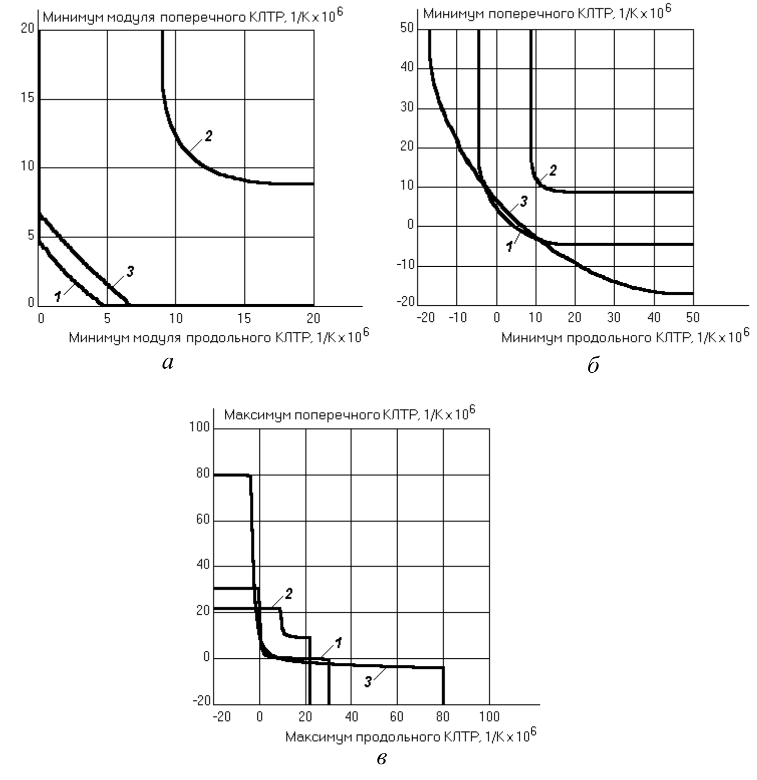


Рис. 2.16. Исследование предельных возможностей многослойных композитов в пространстве «$\min|\alpha_x| - \min|\alpha_y|$» (*а*), «$\min\alpha_x - \min\alpha_y$» (*б*), «$\max\alpha_x - -\max\alpha_y$» (*в*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

Задачи *минимизации и максимизации обоих КЛТР* возникают реже. Границы предельных возможностей в этих случаях показаны на рис. 2.16, *б*, *в*. Минимальные значения КЛТР могут быть достигнуты на перекрестно армированных структурах, максимальные — на ортогонально армированных. При минимизации КЛТР наилучшими материалами являются органопластик и углепластик, при максимизации — стеклопластик и органопластик.

Следует помнить, что коэффициент α_{xy}, определяющий сдвиг при нагреве-охлаждении, равен нулю для любых ортотропных материалов.

При проектировании размеростабильных конструкций необходимо подбирать такие структуры материала, которые не только имели бы наиболее близкие к нулю КЛТР, но и обеспечивали бы наибольшую стабильность при неизбежных отклонениях конструктивно-технологических параметров и характеристик исходных материалов. Эти вопросы рассматриваются в разделах курса, посвященных проектированию композитных конструкций.

2.3.3. Оптимизация характеристик демпфирования

Требования к характеристикам демпфирования композитов, как правило, сводятся к максимизации коэффициентов диссипации либо мощностей диссипации материала. В первом случае речь идет о максимуме рассеивания энергии за один цикл колебаний, во втором — за единицу времени. Если материал предназначается для конструкции, для которой актуально гашение вибраций при одном каком-либо типе колебаний, то может быть проведена максимизация коэффициента диссипации для заданной формы колебаний (подробнее эти вопросы рассматриваются при проектировании композитных конструкций). Более частым является случай, когда от материала требуется эффективное гашение любых вибраций: тогда речь может идти о задаче исследования предельных возможностей при требованиях «$\max\psi_x - \max\psi_y - \max\psi_s$» согласно (2.17), либо «$\max q_x - \max q_y - \max q_s$» согласно (2.18).

Как всегда, исследование полезно начинать с простейших одномерных структур. Карты свойств перекрестно армированного и ортогонально армированного углепластика показаны на рис. 2.17, *а, б*. Точки A и B соответствуют однонаправленному материалу, ориентированному вдоль осей x и y. Видно, что перекрестно армированный материал выигрывает у ортогонально армированного во всех случаях, когда речь идет о максимизации характеристик демпфирования в направлениях осей координат пакета.

Иначе обстоит дело в тех случаях, когда необходимо максимизировать характеристики демпфирования при сдвиге. Если ставится задача скалярной оптимизации величин ψ_s или q_s, то решением такой задачи является любая из ортогонально армированных структур. Если же представляет интерес одновременная максимизация всех трех характеристик демпфирования, то компромиссные решения представляют собой структуры общего вида $[0/90^{\circ}/\pm\varphi]$.

Поверхности предельных возможностей углепластика в пространстве требований максимизации всех трех коэффициентов диссипации и трех мощностей диссипации показаны на рис. 2.17, *в*, *г*. Обе эти поверхности представляют собой склон «холма», прорезанный угловым «оврагом», идущим в направлении биссектрисы первого квадранта координатной плоскости. Разница между двумя графиками заключается в том, что глубина углового «оврага», прорезающего склон, на рис. 2.17, *в* монотонно возрастает, тогда как на рис. 2.17, *г* — постепенно уменьшается до нуля с тем, чтобы после этого вновь начать возрастать. Эта разница связана с разницей в зависимостях коэффициентов диссипации и мощностей диссипации перекрестно армированного материала, карты свойств которого приведены рядом. При наложении требований по сдвиговым характеристикам становится доступной лишь часть точек, образующих данные карты. Таким образом, линии, показанные на рис. 2.17, *а*, *б*, образуют верхние кромки «оврагов» поверхностей предельных возможностей.

2.3.4. Композиты, оптимальные по прочности

Задачи оптимизации прочностных характеристик многослойных композитов могут формулироваться по-разному. Неоднозначность подходов к прочности композита, весьма сложный характер зависимостей прочности от структурных параметров, возможность нескольких расчетных случаев нагружения порождают многообразие и сложность проектных задач. Рассмотренные ниже примеры,

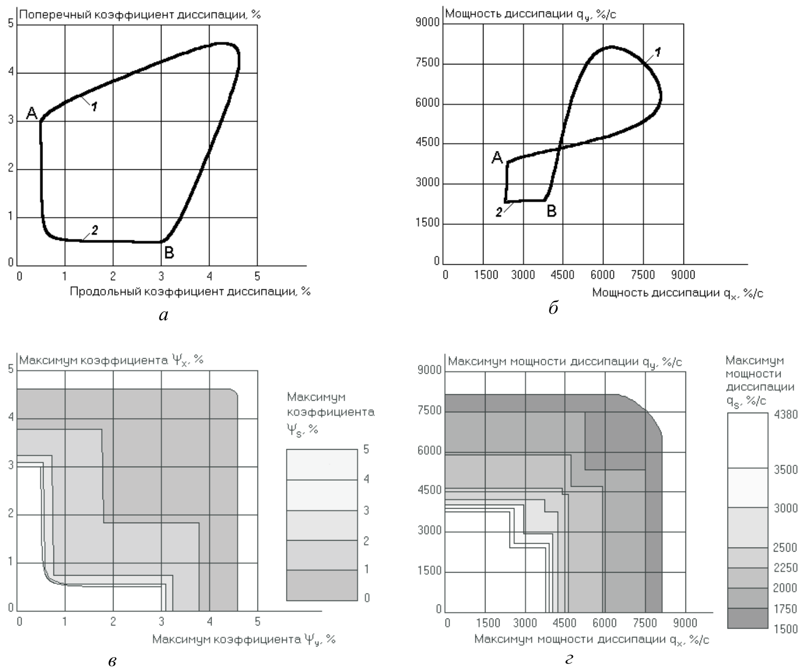


Рис. 2.17. Оптимизация характеристик демпфирования: карты свойств (*а*, *б*) и поверхности предельных возможностей (*в*, *г*) углепластика:
1 — перекрестно армированный материал, *2* — ортогонально армированный материал

разумеется, не исчерпывают все это многообразие, однако дают возможность увидеть некоторые основные закономерности, которым подчиняются оптимальные по прочности многослойные композиты.

Один расчетный случай нагружения. Как уже отмечалось, расчетный случай нагружения определяется соотношениями между начальными напряжениями $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$ (2.23). Если в единственном расчетном случае задано одноосное растяжение или сжатие в каком-либо направлении, то очевидное решение для оптимальной структуры соответствует однонаправленному материалу, ориентированному в направлении действующей нагрузки. В случае чистого сдвига решение также очевидно — это перекрестно армированная структура с углом армирования $\pm 45^{\circ}$.

Если в векторе начальных напряжений задано больше одной компоненты, то оптимизацию прочности понимают как задачу математического программирования [1], в которой целевая функция соответствует максимизации параметра нагрузки P (2.23), или, что то же самое,

$$M\left(\boldsymbol{X}\right) = \max\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \tau_{xy}^2}, \tag{2.35}$$

где $\boldsymbol{X}$ — вектор варьируемых параметров проектируемого материала [1].

Если интерпретировать данный расчетный случай как продвижение по лучу нагружения в пространстве напряжений, то такая целевая функция означает максимизацию длины луча до пересечения его с поверхностью прочности, соответствующей данной структуре композита.

Для материала с варьируемой структурой представляет большой интерес исследование предельной поверхности, образуемой концом луча нагружения при сканировании этим лучом всего пространства напряжений. При этом для каждого фиксированного положения луча нагружения должна проводиться оптимизация многослойной структуры в соответствии с условием (2.35). Полученная поверхность не является, строго говоря, границей предельных возможностей композита, поскольку при ее построении не исследовалась задача векторной оптимизации. Эту поверхность можно назвать *поверхностью максимальной прочности*; она характеризует предельную прочность, достижимую материалом, создаваемым на базе заданных монослоев, при различных типах напряженного состояния.

Примеры построения описанных поверхностей показаны на рис. 2.18. Здесь изображены поверхности максимальной прочности углепластика, стеклопластика и органопластика в первом квадранте плоскости напряжений. Первая из этих поверхностей построена при расчете прочности по первому разрушению материала, вторая — отражает расчет предельной несущей способности с учетом растрескивания связующего.

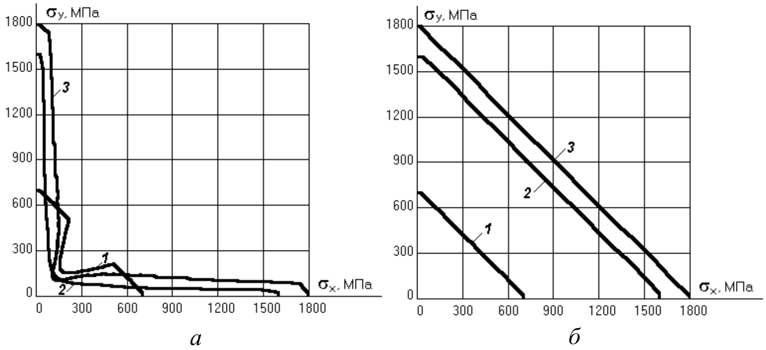


Рис. 2.18. Поверхности максимальной прочности, вычисленные по первому разрушению (*а*) и соответствующие максимальной несущей способности (*б*):
1 — углепластик; *2* — стеклопластик; *3* — органопластик

Несколько расчетных случаев нагружения. Если задано два или более расчетных случаев, то оптимизация прочности материала приводит к задаче исследования предельных возможностей при компромиссном удовлетворении требований по прочности во всех этих случаях.

Наиболее проста задача максимизации трех пределов прочности при трех последовательных нагружениях, когда вектор эффективности [1] имеет вид

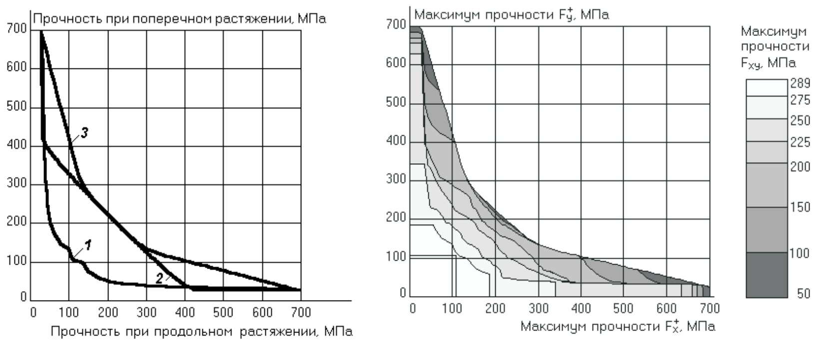
$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}) = \{\max|[\sigma_x](\boldsymbol{X})|, \max|[\sigma_y](\boldsymbol{X})|, \max|F_{xy}(\boldsymbol{X})|\}, \quad (2.36)$$

где

$$[\sigma_x] = \begin{cases} F_x^-, & \text{если } \sigma_x < 0 \ ; \\ F_x^+, & \text{если } \sigma_x > 0 \ , \end{cases}$$

$$[\sigma_y] = \begin{cases} F_y^-, & \text{если } \sigma_y < 0 \\ F_y^+, & \text{если } \sigma_y > 0 \ . \end{cases}$$

Исследование предельных возможностей по прочности углепластика при одновременной максимизации пределов прочности F_x^+ и F_y^+ показано на рис. 2.19, *а*. Линии *1* и *2* на графике соответствуют картам прочности для простейших типов одномерных структур: перекрестно армированных и ортогонально армированных. Третья линия представляет собой границу предельных возможностей, построенную для структур [0/90/$\pm\varphi$] при одновременной максимизации обеих рассматриваемых характеристик. Нетрудно заметить, что эта линия включает в себя участки, соответствующие как ортогонально армированному материалу, так и структурам общего вида.



а *б*

Рис. 2.19. Границы предельных возможностей многослойного углепластика при максимизации двух (*а*) и трех (*б*) пределов прочности:
1 — перекрестно армированный материал; *2* — ортогонально армированный материал; *3* — материал общего вида

Первый октант поверхности предельных возможностей, соответствующий задаче (2.36), показан на рис. 2.19, *б*. Поверхность имеет достаточно сложный вид; заметно, как по мере возрастания сдвиговой прочности оптимальных структур происходит потеря прочности при расчетных случаях, соответствующих одноосному растяжению.

Оба графика на рис. 2.19 построены при расчете прочности по первому разрушению. Вообще, при нескольких случаях нагружения прочность, как правило, следует рассчитывать по первому разрушению, поскольку материал должен сохранить свои свойства для восприятия нагрузок в следующих расчетных случаях. Исключением может быть лишь последний по порядку нагружения расчетный случай.

Если нагружение материала в нескольких расчетных случаях происходит не вдоль осей координат, а соответствует произвольным сочетаниям напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}, то вектор эффективности включает в себя предельные значения параметра нагрузки (2.23) в каждом из расчетных случаев. Исследование предельных возможностей многослойного материала в таких задачах проводится аналогичным образом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вы ознакомились с основными приемами и возможностями оптимизации характеристик композитных материалов. Разумеется, ограниченный объем этой книги не мог вместить все интересные и практически важные случаи, возникающие при проектировании композитов с оптимальными свойствами. Однако приведенные алгоритмы расчета и графики параметрического анализа дают возможность самостоятельно продолжить исследование оптимальных композитных структур. Эти алгоритмы и графики вы сможете использовать при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Задачи проектирования *материалов* представляют собой необходимую ступень на пути к проблеме проектирования *композитных конструкций*. Вооружившись знаниями о свойствах оптимальных композитов, можно приступать к рассмотрению более общих вопросов, касающихся выбора оптимальных параметров той или иной конструкции и размещению в ней материала с оптимальными свойствами. Эти вопросы будут рассмотрены в следующих разделах курса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смердов А.А.* Основы оптимального проектирования композитных конструкций: Учебн. пособие по курсу «Проектирование композитных конструкций. Ч. I». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 88 с.
2. Композиционные материалы: Справ. / Под ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
4. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. *Скудра А.М., Булавс Ф.Я.* Структурная теория армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 192 с.
6. *Зиновьев П.А.* Расчет конструкций из композиционных материалов: Учеб. пособ. по курсу «Строительная механика». М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1982. 62 с.
7. *Овчинский А.С.* Процессы разрушения композиционных материалов: имитация микро- и макромеханизмов на ЭВМ. М.: Наука, 1988. 278 с.
8. *Смердов А.А.* Сравнительный анализ моделей трансверсальной проводимости для оптимизации однонаправленных волокнистых композитов // Механика композитных материалов. 1994. Т. 30, № 1. С. 127–131.
9. *Максимов Р.Д., Плуме В.З., Пономарев В.М.* Характеристики упругости однонаправленно армированных гибридных композитов // Механика композитных материалов. 1983. № 1. С. 13–19.
10. *Кочетков В.А.* Эффективные характеристики упругих и теплофизических свойств однонаправленного гибридного композита. Сообщение 1 // Механика композитных материалов. 1987. № 1. С. 38–46.
11. *Zinoviev P.A., Smerdov A.A.* Ultimate properties of unidirectional fiber composites // Composite science and technology. 1999. Vol. 59. P. 625–634.

12. *Зиновьев П.А.* Термостабильные структуры многослойных композитов // Механика конструкций из композиционных материалов: Сб. научн. ст. / Под ред. В.Д. Протасова. М.: Машиностроение, 1992. С. 193–207.
13. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
14. *Zinoviev P, Ermakov Yu.* Energy Dissipation in Composite Materials. Lancaster-Basel. Technomic Publishing Co., 1994. 246 p.
15. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике. М.: Наука, 1965. 848 с.
16. *Chou T-W.* Microstructural Design of Fiber Composites. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 569 p.
17. *Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С.* Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 440 с. (Сер.«Математика в техн. университете»).
18. *Зиновьев П.А., Смердов А.А.* Предельные возможности многослойных композитных структур // Механика твердого тела. 1994. № 1. С. 7–17.
19. *Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S* A Comparison of the Predictive Capabilities of Current Failure Theories for Composite Laminates // Composites Science and Technology, 1999. Vol. 58. P. 1225–1254.
20. *Гольденблат И.И., Копнов В.А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
21. *Zinoviev P.A., Lebedeva O.V., Tairova L.P.* A Coupled Analysis of Experimental and Theoretical Results on the Deformation and Failure of Composite Laminates under a State of Plane Stress // Composites Science and Technology, 2002. Vol. 62. P. 1711–1723.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Петр Алексеевич Зиновьев

Андрей Анатольевич Смердов

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор *С.А. Серебрякова*
Корректор *Л.И. Малютина*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 20.02.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 6,5. Усл. печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 5,85.
Тираж 200 экз. Изд. № 155. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.