Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Е. Зима, Е.А. Зима

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2005

УДК 621.3.01 (075.8)
З–62

Рецензенты: *Л.И. Малинин*, д-р техн. наук, проф.,
В.В. Панкратов, д-р техн. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре
теоретических основ электротехники для студентов II курса
электроэнергетических специальностей

Зима Т.Е., Зима Е.А.
З–62 Теоретические основы электротехники. Основы теории электромагнитного поля: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 198 с.

В пособии рассматриваются основные понятия и законы теории электромагнитного поля. Приводятся конкретные примеры, поясняющие излагаемый теоретический материал.

УДК 621.3.01 (075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая часть пособия посвящена макроскопической теории электромагнитного поля.

Теория цепей является лишь первым приближением теории электромагнитного поля, описывающим все явления с помощью *интегральных* понятий, таких как ток, напряжение, ЭДС.

Существует множество практических ситуаций, когда теряют смысл самые основные понятия теории цепей, когда анализ электромагнитных явлений может быть произведен только путем детального исследования электромагнитного поля, исследования поля от точки к точке, т.е. с помощью *дифференциальных* понятий. Вот несколько характерных примеров: исследование процессов в волноводах, распространение радиоволн, расчет полей в электронных устройствах (определение частичных емкостей и т.д.). Большинство задач в технике высоких напряжений решается методами теории поля (расчет сопротивлений заземлителей, исследование растекания потенциала и т.п.). Внедрение новых технологий непосредственно связано с применением магнитных и электрических полей.

Ключевым моментом теории цепей являются их параметры: индуктивность, емкость, сопротивление, магнитное сопротивление, причем значения параметров принимаются как нечто данное, в то время как рассчитать их можно только методами теории поля.

Таким образом, во всех случаях, когда требуется глубокое изучение электромагнитных явлений, происходящих в том или ином техническом устройстве, необходимо знание теории электромагнитного поля. Теория поля является более высоким уровнем изучения электромагнитных явлений, нежели теория цепей.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ [2, 6]

При описании физических явлений часто используется понятие вектора, т.е. величины, характеризующейся не только числовым значением, но и направлением в пространстве. Примерами таких величин могут служить скорость движения материальной точки, сила, действующая на тело, ускорение и т.д.

Итак, ***вектором*** называется величина, характеризующаяся числовым значением и направлением. Введем следующее обозначение векторных величин:

$$\overline{a} = a \cdot \overline{1}_a,$$

где a – числовое значение векторной переменной, $\overline{1}_a$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$.

Величины, не имеющие направления, называются ***скалярами***. Их примерами служат масса, энергия, сила электрического тока, электрический заряд, потенциал и т.д. Значение скалярной величины может быть изображено положительным либо отрицательным числом.

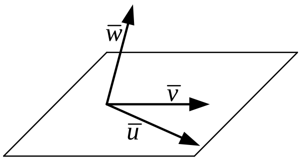


Рис. 1.1

Любой вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом разложен на сумму трех векторов, параллельных трем данным векторам $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ (рис. 1.1):

$$\overline{a} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} + \gamma\overline{w}; \tag{1.1}$$

слагаемые $\alpha\overline{u}$, $\beta\overline{v}$, $\gamma\overline{w}$ называются компонентами вектора $\overline{a}$; векторы $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ образуют трехмерную координатную систему, а скаляры α, β и γ являются проекциями вектора $\overline{a}$ на соответствующие оси координатной системы. Векторы, параллельные одной плоскости, могут быть представлены в двумерной координатной системе в виде

$$\bar{a} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} ,$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$ – два данных неколлинеарных вектора.

В соответствии с (1.1) каждый вектор можно разложить на сумму векторов, параллельных ортам $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис. 1.2):

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} , \tag{1.2}$$

скаляры a_x, a_y, a_z являются его проекциями на координатные оси $0x$, $0y$, $0z$ и называются прямоугольными декартовыми координатами вектора $\bar{a}$ в системе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

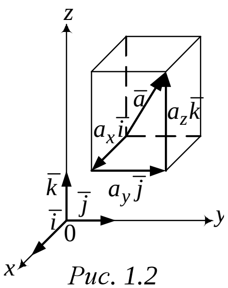


Рис. 1.2

$$a_x = a\cos(\bar{a}\,\widehat{,}\,0x) , \quad a_y = a\cos(\bar{a}\,\widehat{,}\,0y) ,$$

$$a_z = a\cos(\bar{a}\,\widehat{,}\,0z) , \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Сумма двух векторов, представленных в декартовой системе координат в виде (1.2), записывается следующим образом:

$$\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} ,$$

при этом

$$s_x = a_x + b_x , \quad s_y = a_y + b_y , \quad s_z = a_z + b_z .$$

Аналогично, *разность* двух векторов имеет вид:
$\bar{r} = \bar{a} - \bar{b}$,

$$r_x = a_x - b_x , \quad r_y = a_y - b_y , \quad r_z = a_z - b_z .$$

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется скаляр, определяемый равенством

$$\bar{a}\bar{b} = ab\cos(\bar{a}\,\widehat{,}\,\bar{b}) ,$$

где a, b – длины соответствующих векторов, $\cos(\bar{a}\,\widehat{,}\,\bar{b})$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенными к общему началу. В декартовой системе координат

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, длина которого равна $ab\sin(\bar{a}\hat{,}\bar{b})$ и который направлен перпендикулярно плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в такую сторону, чтобы три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образовали правую тройку (т.е. чтобы после совмещения начал трех векторов кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ казался наблюдателю, смотрящему с конца вектора $\bar{c}$, идущим против часовой стрелки (рис. 1.3). Таким образом,

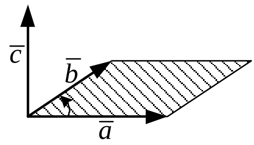


Рис. 1.3

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = ab\sin(\bar{a}\hat{,}\bar{b}) \cdot \bar{1}_n = c\bar{n},$$

где $\bar{n} = \bar{1}_n$ – нормаль к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. В прямоугольных декартовых координатах

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\bar{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\bar{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\bar{k}.$$

Кроме декартовой координатной системы, широкое применение в теории поля получили цилиндрическая и сферическая системы координат [2].

1.2. ПОНЯТИЕ ПОЛЯ. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Говорят, что в пространстве задано поле некоторой величины, если в каждой его точке определено значение этой величины.

Физическое поле – это любая физическая величина, которая может быть определена для каждой точки пространства. Другими словами, это область пространства, с каждой точкой которой связано значение некоторой физической величины. Примером физического поля может служить температура. В каждой точке пространства температура имеет определенное значение, т.е. в пространстве существует температурное поле, которое математически описывается в виде $T(x, y, z)$. Другим примером является электрическое поле, напряженность $\bar{E}$ которого также можно определить для каждой точки пространства.

Физическое поле – это физическая реальность. Так, электромагнитное поле – это особый вид материи, оно обладает энергией и переносит ее. В зависимости от исследуемой величины, характеризующей физическое поле, оно может описываться несколькими математическими полями.

Различают векторные и скалярные математические поля. ***Векторным полем*** называют область пространства, каждой точке которой отнесено значение некоторого вектора. Соответственно ***скалярным полем*** называют область пространства, каждой точке которой отнесено значение некоторого скаляра.

Одно и то же физическое поле, с математической точки зрения, может быть как скалярным, так и векторным. Например, электростатическое, магнитное и гравитационное поля являются скалярными, если их описывать энергией, распределенной в поле. Те же поля являются векторными, если их характеризовать силами, действующими в них, напряженностями и т. д. Таким образом, векторные и скалярные поля описывают различные свойства физического поля.

1.3. ПОНЯТИЕ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИИ

Рассмотрим скалярное поле, т.е. поле некоторого скаляра φ.

Поверхностью уровня некоторого скаляра φ называют поверхность, проходящую через точки, в которых значения скаляра одинаковы. В температурном поле поверхности уровня объединяют точки с одинаковой температурой и называются изотермическими поверхностями. В случае плоского (двумерного) поля используется понятие изотерм – линий, соединяющих точки с одинаковой температурой. В электрическом поле поверхности уровня называются эквипотенциальными, поскольку проходят через точки с равными потенциалами. На плоскости эквипотенциальные поверхности вырождаются в эквипотенциальные линии.

Одной из существенных характеристик скалярного поля является производная скаляра по направлению [2, 13]. Пусть скаляр φ в точке P_0 имеет значение φ_0, а в точке P_l – значение φ_l. Приращение φ при перемещении из точки P_0 в точку P_l определяется выражением $\Delta\varphi = \varphi_l - \varphi_0$. Производной скаляра φ в точке P_0 по направлению $\overline{l}$ называется предел отношения приращения $\Delta\varphi$ к численной величине перемещения Δl (рис. 1.4):

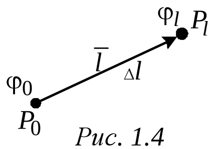


Рис. 1.4

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi_l - \varphi_0}{\Delta l}. \tag{1.3}$$

Очевидно, что значение производной (1.3) существенно зависит от выбора направления $\overline{l}$, и ее нельзя смешивать с обыкновенной частной производной функции по скалярному аргументу l. Производная по направлению характеризует скорость изменения скалярной функции в данном направлении.

Рассмотрим в скалярном поле сечения двух поверхностей уровня, которым соответствуют значения скалярной функции φ_0 и $\varphi_0 + \Delta\varphi$ (рис. 1.5). Обозначим через $\overline{n}$ нормаль к поверхности уровня $\varphi = \varphi_0$, направленную в сторону возрастания φ. Зная производную по направлению нормали $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}}$, можно определить производную скаляра φ по произвольному направлению $\overline{l}$. Действительно, пусть поверхность уровня, проходящая через лежащую в направлении $\overline{l}$ точку P_l, пересекает нормаль $\overline{n}$ в точке P_n. Тогда

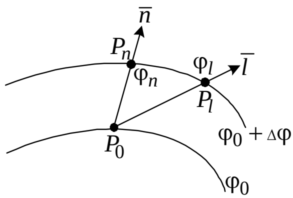


Рис. 1.5

$$P_0P_l = \frac{P_0P_n}{\cos(\overline{l} \,\hat{,}\, \overline{n})}.$$

Поскольку $\varphi_n = \varphi_l$,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{l}}\right)_0 = \lim_{P_0P_l \to 0} \frac{\varphi_l - \varphi_0}{P_0P_l} = \cos(\overline{l} \,\hat{,}\, \overline{n}) \lim_{P_0P_n \to 0} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0P_n} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}}\right)_0 \cos(\overline{l} \,\hat{,}\, \overline{n}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{l}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}} \cos(\overline{l} \,\hat{,}\, \overline{n}), \tag{1.4}$$

где производная $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}}$ характеризует скорость изменения скалярной функции в направлении нормали.

Вектор, численно равный скорости изменения скалярной функции и направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания скаляра φ, называется ***градиентом*** скаляра φ:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}}\overline{n}\,. \tag{1.5}$$

Направление градиента $\overline{n}$ есть направление наиболее быстрого возрастания скаляра φ.

Из (1.5) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{n}} = \left|\operatorname{grad}\varphi\right|$, тогда из выражения (1.4) с учетом (1.5) следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{l}} = \left|\operatorname{grad}\varphi\right|\cos(\overline{l}\,\hat{,}\,\overline{n}) = \operatorname{grad}_l\varphi\,.$$

Таким образом, производная φ по направлению $\overline{l}$ равна проекции вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на направление $\overline{l}$. В декартовой системе координат

$$\operatorname{grad}_x\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \operatorname{grad}_y\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \operatorname{grad}_z\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{k}\,, \tag{1.6}$$

$$\left|\operatorname{grad}\varphi\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\,.$$

Пример. Из курса физики известно, что напряженность электростатического поля связана с потенциалом следующим образом:

$$\overline{E} = -\operatorname{grad}\varphi\,.$$

Если известно расположение эквипотенциальных поверхностей (поверхностей уровня), то легко изобразить направление на-

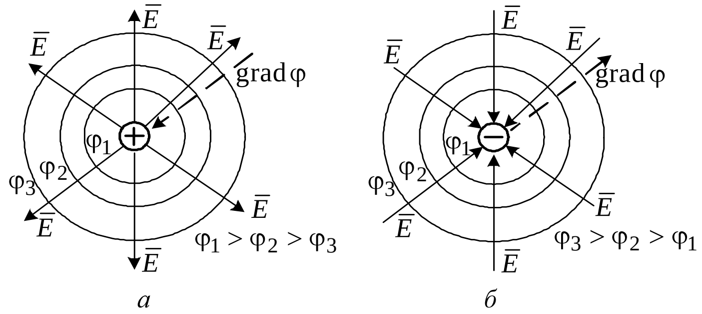


Рис. 1.6

пряженности поля $\overline{E}$. Для положительного и отрицательного точечных зарядов картина поля представлена на рис. 1.6,*а* и 1.6,*б* соответственно.

На рис. 1.6 φ_1, φ_2, φ_3 – соответствующие значения потенциалов на эквипотенциальных поверхностях.

1.4. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим векторное поле $\overline{a}(\overline{r})$. В поле некоторого вектора $\overline{a}(\overline{r})$ (рис. 1.7,*а*) мысленно выделим бесконечно малую плоскую площадку dS, т.е. площадку столь малую, что во всех ее точках вектор $\overline{a}$ с заданной степенью точности остается постоянным по величине и направлению [13]. К этой площадке проведем нормаль, одно из направлений которой будем считать положительным, или внешним, а другое – отрицательным, или внутренним. При этом положительное направление нормали вместе с направлением обхода контура площадки должно образовывать правовинтовую систему (рис. 1.7,*б*). Направление нормали охарактеризуем совпадающим с ней единичным вектором $\overline{n} = \overline{1}_n$.

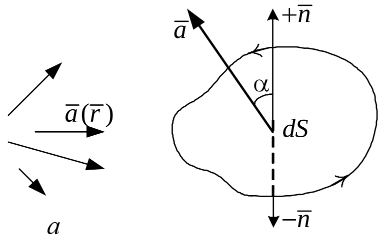


Рис. 1.7

Потоком вектора $\overline{a}$ через бесконечно малую площадку dS называется величина

$$dN = a_n dS = a\cos(\overline{a}\hat{,}\overline{n})dS = \overline{a}\overline{n}dS = \overline{a}d\overline{S} ,$$

где $\overline{a}$ – постоянное значение вектора на площадке dS, a_n – его проекция на направление $\overline{n}$ (проекция вектора на нормаль). Условно считают, что элементарная площадка dS имеет направление, совпадающее с направлением нормали, $d\overline{S} = \overline{n}dS$.

Для определения потока вектора через поверхность конечных размеров необходимо разбить ее на бесконечно малые площадки dS так, чтобы не только вектор $\overline{a}$ оставался постоянным на каждой из них, но и сами площадки могли считаться плоскими (рис. 1.8). Одну из сторон поверхности S называют внутренней, а другую – внешней и выбирают соответствующим образом направления внешних нормалей к каждому из элементов dS.

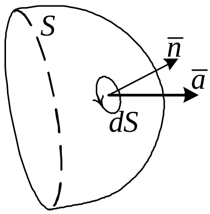


Рис. 1.8

Потоком N вектора $\overline{a}$ через поверхность S называется алгебраическая сумма потоков $a_n dS$ через отдельные элементы этой поверхности, что при числе элементов, стремящихся к бесконечности, тождественно интегралу по поверхности S:

$$N = \int_S a_n dS = \int_S \overline{a}d\overline{S} . \qquad (1.7)$$

Если вычисляется поток вектора через замкнутую поверхность (поверхность шара, куба и пр.), выражение (1.7) принимает вид

$$N = \oint_S a_n dS = \oint_S \overline{a}d\overline{S} . \qquad (1.8)$$

В векторном поле $\overline{a}(\overline{r})$ выделим некоторый физически малый объем ΔV, ограниченный произвольной замкнутой поверхностью ΔS (рис. 1.9). В соответствии с (1.8) поток вектора $\overline{a}$ сквозь замкнутую поверхность ΔS, ограничивающую объем ΔV, записывается как

$$\Delta N = \oint_{\Delta S} a_n dS = \oint_{\Delta S} \bar{a} d\bar{S},$$

откуда можно выразить плотность потока вектора $\bar{a}$, т.е. поток в точке.

Плотность потока вектора $\bar{a}$ называется ***дивергенцией*** $\bar{a}$:

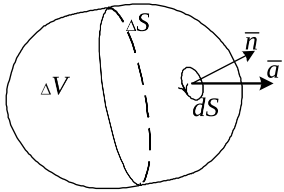


Рис. 1.9

$$\operatorname{div}\bar{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\oint_{\Delta S} \bar{a} d\bar{S} \Big/ \Delta V \right) = \frac{dN}{dV}. \quad (1.9)$$

Другими словами, дивергенция вектора $\bar{a}$ в некоторой точке – это поток $\bar{a}$ на единицу объема, взятого в окрестности этой точки. Как видно из (1.9), дивергенция – это скаляр, следовательно, она образует скалярное поле. Выражение (1.9) является инвариантной записью дивергенции, т. е. записью, не зависящей от выбранной координатной системы. В декартовой системе координат дивергенция вектора $\bar{a}$ имеет вид:

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.10)$$

Физический смысл дивергенции заключается в следующем [3]. Если в некоторой точке P поля $\operatorname{div}\bar{a} \neq 0$, в окрестности этой точки существует поток вектора $\bar{a}$. При этом, если $\operatorname{div}\bar{a} > 0$, в точке P находятся источники, или *истоки*, вектора $\bar{a}$, а его поток направлен из объема, взятого в окрестности данной точки. Если же $\operatorname{div}\bar{a} < 0$, в точке P расположены *стоки* вектора $\bar{a}$, а его поток направлен внутрь объема, взятого в окрестности указанной точки. Если же в точке P $\operatorname{div}\bar{a} = 0$, потока вектора $\bar{a}$ в ее окрестности не существует, а значит, в выделенном объеме нет ни источников, ни стоков вектора $\bar{a}$. Поле, во всех точках которого $\operatorname{div}\bar{a} = 0$, называется соленоидальным, т.е. не имеющим истоков. Численная величина $\operatorname{div}\bar{a}$ характеризует силу, или обильность, источников поля; в зависимости от знака дивергенции сила истоков может быть как положительной, так и отрицательной (сток – отрицательный исток поля).

Впервые понятие "дивергенция" было введено в гидродинамике, где дивергенция скорости жидкости $\overline{v}$ имеет реальное физическое значение. Действительно, в каждой точке жидкости дивергенция скорости равна рассчитанному на единицу объема количеству жидкости, вытекающей из элемента объема dV, окружающего рассматриваемую точку:

$$\operatorname{div}\overline{v} = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\oint_{\Delta S} v_n dS \Big/ \Delta V \right),$$

где $v_n dS$ – поток вектора скорости жидкости через элемент поверхности dS, или объем жидкости, протекающей через этот элемент за единицу времени в направлении внешней нормали к dS (рис. 1.10).

Название "дивергенция" (по латыни – расхождение или расходимость) было избрано для этой величины именно потому, что жидкость растекается, или расходится, из тех и только из тех точек или участков занимаемого ею пространства, в которых $\operatorname{div}\overline{v} > 0$ [13]. Очевидно, что в этих точках должны быть расположены источники жидкости, а при $\operatorname{div}\overline{v} < 0$ – стоки.

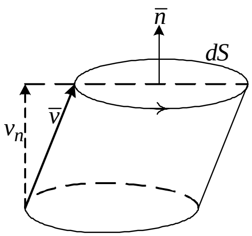
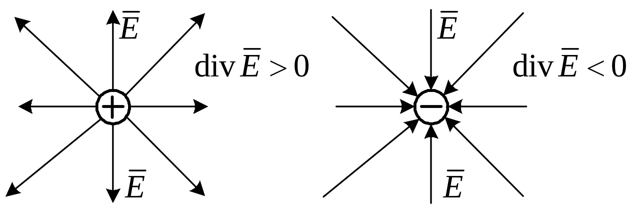


Рис. 1.10

В качестве примера рассмотрим электростатическое поле. Для такого поля обязательно существует некоторая точка, в которой $\operatorname{div}\overline{E} \neq 0$. Физически это означает, что в данной точке электростатическое поле имеет источники: положительные либо отрицательные заряды (рис. 1.11).



а *б*

Рис. 1.11

Для магнитного поля дивергенция напряженности в любой точке равна нулю: $\operatorname{div}\overline{H} = 0$, т. е. магнитное поле не имеет источников, его силовые линии замкнуты (поле соленоидально).

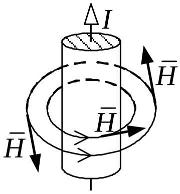


Рис. 1.12

На рис. 1.12 изображено магнитное поле длинного проводника с постоянным током.

Используя выражение (1.9), легко получить соотношение, называемое теоремой Остроградского–Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \overline{a} dV = \oint_S \overline{a} d\overline{S} \,. \tag{1.11}$$

Теорема (1.11) позволяет от достаточно сложного интеграла по объему $\operatorname{div}\overline{a}$ перейти к более простому поверхностному интегралу вектора $\overline{a}$.

1.5. РОТОР ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ

В поле вектора $\overline{a}$ выберем произвольный контур, ограничивающий некоторую площадку ΔS, направление движения вдоль указанного контура будем считать положительным (рис. 1.13).

Линейный интеграл вектора $\overline{a}$ по замкнутому контуру L называется циркуляцией вектора $\overline{a}$:

$$\Delta C = \oint_L a_l dl = \oint_L \overline{a}\, d\overline{l} \,,$$

где a_l – проекция вектора $\overline{a}$ на направление касательной $d\overline{l}$, проведенной в каждой точке контура, $a_l = a\cos\alpha$.

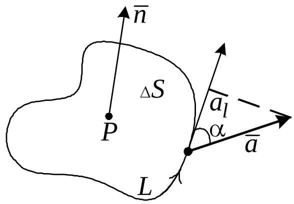


Рис. 1.13

Из точки P проведем нормаль к площадке ΔS так, чтобы направление нормали и направление обхода контура L были связаны "правилом буравчика" (рис. 1.13). Уменьшая площадку ΔS, будем стягивать контур L к точке P, направление нормали $\overline{n}$ при $\Delta S \to 0$ должно оставаться постоянным. С уменьшением площадки уменьшается и контур L, следовательно, уменьшается и циркуляция. Рассмотрим отношение циркуляции контура к его площади.

Предел отношения циркуляции ΔC к площади ΔS представляет собой скалярную величину, равную проекции некоторого вектора, проведенного из точки P, на направление нормали $\overline{n}$. Указанный вектор назвали *ротором*:

$$\mathrm{rot}_n \overline{a} = \mathrm{rot}\,\overline{a} \cdot \overline{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \left(\oint_{\Delta S} \overline{a}\, d\overline{l} \Big/ \Delta S \right) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{dC}{dS}. \qquad (1.12)$$

Таким образом, проекция проведенного из точки поля P вектора $\mathrm{rot}\,\overline{a}$ на данное направление $\overline{n}$ равна пределу отношения циркуляции вектора $\overline{a}$ по контуру произвольной площадки ΔS, проходящей через указанную точку и перпендикулярной $\overline{n}$, к величине поверхности этой площадки.

Поскольку $\dfrac{dC}{dS}$ – есть плотность циркуляции вектора $\overline{a}$, согласно (1.12) проекция проведенного из точки поля P вектора $\mathrm{rot}\,\overline{a}$ на направление нормали равна плотности циркуляции вектора $\overline{a}$ по контуру произвольной площадки ΔS. Другими словами, ротор вектора $\overline{a}$ является векторной функцией, характеризующей циркуляцию $\overline{a}$. Направление $\mathrm{rot}\,\overline{a}$ в любой точке поля перпендикулярно к проходящей через эту точку плоскости, для которой плотность циркуляции максимальна (рис. 1.14).

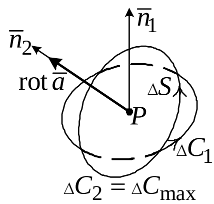


Рис. 1.14

В декартовой системе координат

$$\mathrm{rot}\,\overline{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\overline{k}. \qquad (1.13)$$

На основании (1.13) вектор $\mathrm{rot}\,\overline{a}$ можно назвать векторной пространственной производной вектора $\overline{a}$ (в отличие от его скалярной пространственной производной $\mathrm{div}\,\overline{a}$ (1.10)).

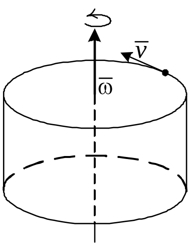


Рис. 1.15

Выясним физический смысл ротора векторной функции [3]. Рассмотрим вращение твердого тела с угловой скоростью $\overline{\omega}$ (рис. 1.15). Вектор $\overline{\omega}$ считают направленным по оси вращения так, чтобы направление вращения составляло с вектором $\overline{\omega}$ правовинтовую систему. Расчет показывает [13], что ротор линейной скорости всех точек твердого тела имеет одинаковое значение и равен удвоенной угловой скорости его вращения:

$$\mathrm{rot}\,\overline{v} = 2\overline{\omega}. \qquad (1.14)$$

Если тело движется поступательно с некоторой скоростью $\overline{v} = \text{const}$, то $\text{rot}\,\overline{v} = 0$ для всех его точек, поскольку ротор является пространственной производной скорости (1.13), т.е. в данном случае циркуляция скорости отсутствует.

В теории упругости доказывается, что соотношение (1.14) справедливо не только для твердого, но и для произвольного деформирующегося тела (например, жидкости), причем в этом случае под $\overline{\omega}$ следует понимать угловую скорость вращения его бесконечно малого элемента, находящегося в рассматриваемой точке пространства [13].

Итак, $\text{rot}\,\overline{a} \neq 0$ в тех и только тех точках, которые принадлежат элементам тела, находящимся во *вращательном* движении. Именно этому обстоятельству векторная функция $\text{rot}\,\overline{a}$ и обязана своим названием *ротора* (от латинского roto – вращаю), или *вихря* вектора $\overline{a}$. Векторное поле, ротор которого не равен нулю, имеет циркуляцию, или завихренность. Такое поле называют вихревым, а ротор определяют как функцию, характеризующую способность поля в рассматриваемой точке к образованию вихрей.

В качестве примера рассмотрим векторное поле скоростей $\overline{v}$ жидкости, в котором $\text{rot}\,\overline{v} \neq 0$. В этом случае вектора скорости имеют примерно следующий вид: $\begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ \uparrow & & \downarrow \\ & \leftarrow & \end{array}$ или $\begin{array}{ccc} & \leftarrow & \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \rightarrow & \end{array}$, и, возможно, налагаются на скорость общего потока, текущего в одном направлении. Например, поле скоростей воды, вытекающей из отверстия, обычно имеет циркуляцию. Его ротор не равен нулю по большей части поверхности и, если по воде плывет какой-либо предмет, он вращается.

Если во всех точках поля вектора $\overline{a}$ $\text{rot}\,\overline{a} = 0$, такое поле называется безвихревым, или потенциальным. Примером является электростатическое поле. Циркуляция вектора напряженности $\overline{E}$ по любому контуру в этом поле равна нулю:

$$\oint_L \overline{E}\, d\overline{l} = 0,$$

следовательно, и $\text{rot}\,\overline{E} = 0$ в любой точке поля. Таким образом, электростатическое поле является безвихревым, или потенциальным. Магнитное поле является вихревым. Итак, значение ротора указывает на характер поля.

Важное значение для расчета и анализа векторных полей имеет формула Стокса, которая легко получается из (1.12). Эта формула связывает циркуляцию вектора поля по замкнутому контуру с потоком его ротора через поверхность, ограниченную указанным контуром:

$$\oint_L \overline{a}\, d\overline{l} = \int_S \operatorname{rot} \overline{a}\, d\overline{S} . \qquad (1.15)$$

Следует отметить, что форма поверхности, ограниченной заданным контуром в (1.15), остается неопределенной, т.е. через две поверхности S_1 и S_2, обладающих одним и тем же контуром L, проходит одинаковый поток ротора любого непрерывного вектора $\overline{a}$, равный циркуляции этого вектора по общему контуру указанных поверхностей. Формула Стокса (1.15) позволяет рассчитать поток ротора через поверхность, не вычисляя самого ротора, на основании информации о циркуляции вектора $\overline{a}$ по указанному замкнутому контуру L.

Выражения (1.6), (1.9) и (1.12) могут быть представлены в следующем виде:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\oint_{\Delta S} \varphi d\overline{S} \Big/ \Delta V \right),$$

$$\operatorname{div} \overline{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\oint_{\Delta S} \overline{a} d\overline{S} \Big/ \Delta V \right),$$

$$\operatorname{rot} \overline{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\oint_{\Delta S} d\overline{S} \times \overline{a} \Big/ \Delta V \right).$$

Таким образом, все они имеют общий смысл плотности поверхностного интеграла некоторой функции.

1.6. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Для упрощения записи и удобства применения операций градиента, дивергенции и ротора в векторном анализе используют символический дифференциальный оператор Гамильтона ∇ (набла), обладающий как свойствами дифференцирования, так и векторными свойствами. В декартовой системе координат оператор имеет вид:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k} . \qquad (1.16)$$

Формально перемножая ∇ на скаляр φ или на вектор $\bar{a}$ (скалярно или векторно), можно получить формулы для градиента (1.6), дивергенции (1.10) и ротора (1.13). Указанные преобразования выполним в декартовой системе координат.

1) Умножение ∇ на скалярную функцию φ:

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k} = \operatorname{grad}\varphi\,;$$

2) скалярное умножение ∇ на вектор $\bar{a}$:

$$\nabla\bar{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{a}\,;$$

3) векторное умножение ∇ на вектор $\bar{a}$:

$$\nabla\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\bar{a}\,.$$

Итак,

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi\,, \tag{1.17}$$

$$\operatorname{div}\bar{a} = \nabla\bar{a}\,, \tag{1.18}$$

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\times\bar{a}\,. \tag{1.19}$$

Используя векторные свойства оператора Гамильтона и учитывая (1.17) – (1.19), легко вычислить следующие соотношения:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\left[\nabla\times\bar{a}\right] = 0\,; \tag{1.20}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\times\operatorname{grad}\varphi = \nabla\times\left(\nabla\varphi\right) = 0\,; \tag{1.21}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\operatorname{grad}\varphi = \nabla\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi\,, \tag{1.22}$$

где $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа (лапласиан).

В декартовой координатной системе

$$\begin{gathered} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \\ \\ \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Выражения градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в различных системах координат [1, 8] приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Операции векторной алгебры	Системы координат		
	Декартова (x, y, z)	Цилиндрическая (r, ψ, z)	Сферическая (R, θ, ψ)
$\mathrm{grad}\,\varphi$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bar{1}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\bar{1}_\psi+$ $+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial R}\bar{1}_R+\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\bar{1}_\theta+$ $+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\bar{1}_\psi$
$\mathrm{div}\,\bar{a}$	$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi}+$ $+\frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 a_R\right)+$ $+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\theta\sin\theta\right)+$ $+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi}$
$\mathrm{rot}\,\bar{a}$	$\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\bar{1}_r/r & \bar{1}_\psi & \bar{k}/r\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\psi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_r & ra_\psi & a_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\frac{\bar{1}_R}{R^2\sin\theta} & \frac{\bar{1}_\theta}{R\sin\theta} & \frac{\bar{1}_\psi}{R}\\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\psi}\\ a_R & Ra_\theta & R\sin\theta a_\psi\end{vmatrix}$
$\Delta\varphi$	$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi}{\partial r})+$ $+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R})+$ $+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+$ $+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}$

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ОБЛАСТИ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Электромагнитное поле – это *особый вид материи*. Всякая электрически заряженная частица окружена электромагнитным полем, составляющим с ней единое целое. Однако электромагнитное поле может существовать и в свободном, отделенном от заряженных частиц, состоянии в виде фотонов или электромагнитных волн, движущихся со скоростью, близкой к скорости света ($3 \cdot 10^8$ м/с). Электромагнитному полю свойственно *непрерывное* распределение в пространстве, но вместе с тем оно обнаруживает и *дискретную* структуру в виде квантов излучения (фотонов).

Электромагнитное поле характеризуется наличием магнитного и электрического полей, связанных непрерывным взаимным превращением. Эти поля представляют собой две стороны единого электромагнитного поля, различные его проявления. Деление объективно существующего (независимо от наших наблюдений) электромагнитного поля на две его составляющие: поле электрическое и поле магнитное – *относительно*, т.е. зависит от условий, при которых осуществляется наблюдение электромагнитного поля с помощью тех или иных устройств.

Электромагнитное поле является носителем определенного количества энергии, которая способна преобразовываться в другие виды: химическую, тепловую, энергию механического движения.

Электромагнитное поле обладает массой, которая соответствует переносимой энергии и может быть определена из общей связи между полной энергией и полной массой (знаменитая формула А. Эйнштейна)

$$W = mc^2,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Однако плотность массы электромагнитного поля несоизмеримо мала по сравнению с плотностью всех известных веществ. Так, при напряженности поля, приблизительно равной 10^8 В/м, плотность массы оказывается равной $10^{-17}...10^{-12}$ кг/м^3, т.е. представляет собой весьма малую величину. Ничтожная плотность массы используемых на практике электромагнитных полей дает основание, как правило, пренебрегать этой характеристикой и обращать внимание лишь на энергетическую сторону рассматриваемых явлений. Благодаря столь малой плотности массы энергия поля легко передается вдоль проводов и в свободном пространстве со скоростью света.

Перечисленные свойства электромагнитного поля свидетельствуют о том, что оно, как и вещество, обладает массой, энергией, количеством движения и моментом количества движения, т. е. является физической реальностью, обладает всеми свойствами материи. Но в то же время, в отличие от вещества, поле характеризуется особым электромагнитным свойством, не рассматриваемым в механике, – способностью оказывать силовое воздействие на заряженные частицы. Сила этого воздействия зависит от скорости частиц.

Свойства электрических и магнитных полей вызывали непонимание у исследователей прошлого. В особенности это относится к открытию А. Эйнштейна о связи массы и энергии, согласно которому электромагнитное поле одновременно можно рассматривать как поток частиц и как волны. Чувства и мысли ученых прошлого очень ярко отражены в следующем четверостишии:

Был этот мир глубокой тьмой окутан.
Да будет Свет! И вот явился Ньютон.
Но Сатана недолго ждал реванша:
Пришел Эйнштейн, и стало все, как раньше.

Вообще, первым исследователям (XVIII в.) электричество казалось удивительным явлением. Демонстрации свойств электрического поля даже посвящались специальные выставки. Так, вероятно, наиболее эффектным номером одной из популярных выставок по электричеству, проводившейся в то время в Англии (Лондон, 1730 г.), была электризация мальчика, подвешенного на шелковых нитях: его волосы вставали дыбом, а с кончика носа можно было снимать искры.

Использование необычных свойств поля в электромагнитных устройствах позволяет управлять большими потоками энергии, создавать сложные быстродействующие кибернетические системы управления и вычислительные машины, передавать огромные объемы информации на большие расстояния, в т. ч. посылать сигналы на сотни миллионов километров в космическое пространство, и т.д.

Примером достижений современной техники, связанных с использованием электромагнитного поля, являются работы по предсказанию, обнаружению и исследованию бесщелевых полупроводников и экситонных фаз, получившие в 1983 г. Государственную премию СССР.

Бесщелевые полупроводники – это, по существу, новый тип вещества. От обычных полупроводников они отличаются отсутствием энергетической щели между валентной зоной и зоной проводимости. Это приводит к тому, что для зарождения пары электрон-дырка требуется значительно меньше энергии, следовательно, свойствами таких полупроводников можно управлять при помощи слабых воздействий: электрическим или магнитным полем, давлением или введением особых примесей.

Эксперименты по созданию нового вещества проводились на установке, создававшей рекордное по напряженности магнитное поле – до 600 тыс. эрстед. Ни в одной лаборатории мира в то время еще не было такого сверхмагнита, в основу создания которого легли идеи академика П.Л. Капицы. С помощью магнитного поля ученые научились "перекраивать" зоны по своему усмотрению, например, превращая диэлектрик в металл, металл в диэлектрик: включили поле – металл, отключили – диэлектрик.

Изменение энергетического спектра, осуществляемое бесконтактным способом (с помощью магнитного поля), происходит за миллиардные доли секунды (10^{-12} с), которые необходимы для перестройки электронной системы вещества. Такая рекордная безынерционность процесса превращения металла в диэлектрик и обратно позволит создавать, например, мгновенно действующие электронные коммутаторы, такие как антенный переключатель для локатора, благодаря чему намного улучшится качество "зрения" подобных устройств. Новые ЭВМ, созданные на основе веществ в бесщелевом состоянии, будут "думать" значительно быстрее.

Приборы, выполненные на бесщелевых полупроводниках, смогут работать при сколь угодно малом напряжении. Уже существуют диоды, способные действовать от обычной термопары, дающей разность потенциалов порядка нескольких милливольт.

Еще одной важной областью практического применения бесщелевых полупроводников является создание приемников и генераторов электромагнитного излучения в самом широком диапазоне частот – от радиочастот до инфракрасных. Большой интерес представляет разработка на основе таких полупроводников лазера инфракрасного диапазона с перестраиваемой при помощи магнитного поля частотой излучения и многое другое.

Все современные технологии непосредственно связаны с использованием электромагнитного поля. Например, фантастические возможности применения магнитных полей открывает явление высокотемпературной проводимости. Сверхпроводящие магниты – это мощные магнитные поля, достаточные для удержания термоядерной плазмы, что позволит в будущем отказаться от использования нефти, газа, урана.

Создание лазерных термоядерных установок импульсного действия уже стало реальностью. В 1995 г. в Московском физико-энергетическом институте создана лазерная установка с ядерной накачкой энергии (ОКУЯН – оптический квантовый усилитель с ядерной накачкой), осуществляющая прямое преобразование ядерной энергии в лазерное излучение. В импульсе установки (так называемого, современного "гиперболоида инженера Гарина") за 40…100 миллионных долей секунды рождается энергия, сравнимая с той, что может дать за столь короткое время вся мировая энергетика.

В настоящее время в Ливерморской лаборатории США действует аналогичная лазерная установка, фокусирующая в одной точке двенадцать лазерных лучей для создания мощного энергетического сгустка. "Стреляет" эта установка один раз в месяц, и при этом, как шутят американцы, "гаснет свет по всей Калифорнии". Занимает этот "монстр" огромное здание.

Российский ОКУЯН способен создать в импульсе аналогичную энергию в одном лазерном луче, и занимает он небольшой зал лабораторного корпуса. Коэффициент полезного действия установки в несколько раз выше, чем у Ливерморской.

Идея использования мощных магнитных полей лежит и в основе разработки сверхскоростных поездов на сверхпроводящей магнитной подушке.

Многие свойства электромагнитного поля все еще остаются не изученными. Возможно, все необъяснимые природные явления связаны с каким-либо его проявлением.

Вот, например, некоторые гипотезы, объясняющие существование Снежного человека:

1) отторженная энергетическая электромагнитная структура человека после его физической смерти;

2) полевая форма жизни, когда человекоподобное существо становится видимым только в определенных метеорологических и геофизических условиях и геометрии окружающего пространства.

Известно о существовании в природе уникумов, подобных слизевику (улитке без панциря). Такая улитка представляет собой группу клеток размером в сотые доли миллиметра, связанных между собой электромагнитным полем. В минуты опасности эти клетки могут принять форму гриба или рассыпаться так, что станут невидимыми. Возможно, феномен Снежного человека или Лохнесского чудовища имеет такое же объяснение.

Согласно учению Е. Блаватской: "Жизнь – это параллельное сосуществование в определенном объеме пространства двух форм существования материи – белковой и полевой". Таким образом, изучение свойств электромагнитного поля полезно не только с научной, но и с мировоззренческой точки зрения.

В теорию электромагнитного поля внесли вклад множество ученых, однако пальма первенства, безусловно, принадлежит Дж. К. Максвеллу, в уравнениях которого заключена вся теория электродинамики.

3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Для характеристики электромагнитного поля в любых средах наряду с вектором напряженности $\bar{E}$ используют вектор электрического смещения, или электрической индукции, $\bar{D}$. Для однородных и изотропных сред $\bar{D}$ и $\bar{E}$ связаны следующим соотношением [4]:

$$\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}, \tag{3.1}$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды ($\Phi/\text{м}$), ε_r – ее относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = 10^7 \big/ 4\pi c^2 \approx 8.856 \cdot 10^{-12}$ $\Phi/\text{м}$ – электрическая постоянная. Вектор электрического смещения не зависит от свойств среды.

Рассмотрим четыре основных закона электродинамики.

3.1.1. Теорема Гаусса (постулат Максвелла)

Поток вектора электрической индукции (вектора электрического смещения) $\bar{D}$ *сквозь произвольную замкнутую поверх-*

ность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, расположенных в объеме, ограниченном этой поверхностью (рис. 3.1):

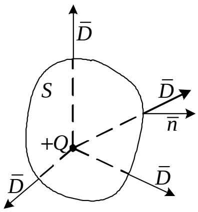


Рис. 3.1

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \sum_{k=1}^{n} Q_k = Q = \int_V \rho dV \,, \qquad (3.2)$$

где Q_k – k-й дискретный свободный заряд, расположенный внутри объема; Q – полный (суммарный) свободный заряд внутри объема; ρ – объемная плотность свободного заряда [4] (для случая его непрерывного распределения),

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \,.$$

Физический смысл выражения (3.2) заключается в следующем. Если поток вектора $\bar{D}$ через замкнутую поверхность S не равен нулю, то внутри объема, ограниченного этой поверхностью, заключены *источники* данного вектора. Иными словами, источниками вектора $\bar{D}$ являются свободные заряды. Если зарядов внутри поверхности нет, то поток вектора $\bar{D}$ сквозь такую поверхность равен нулю.

Геометрический смысл (3.2): линии вектора электрической индукции $\bar{D}$ связаны со свободными зарядами. Они начинаются на свободных зарядах и заканчиваются на них.

Соотношение (3.2), полученное К. Гауссом для неподвижных зарядов (постоянных полей), Дж. Максвелл обобщил (постулировал) на любое электрическое поле. Таким образом, выражение (3.2) справедливо для постоянных и переменных полей.

3.1.2. Принцип непрерывности линий магнитной индукции

Поток вектора магнитной индукции $\bar{B}$ *сквозь любую замкнутую поверхность* S *равен нулю*:

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0\,, \tag{3.3}$$

где для однородных изотропных сред

$$\bar{B} = \mu_a \bar{H}\;; \tag{3.4}$$

$\bar{H}$ – напряженность магнитного поля; $\mu_a = \mu_r \mu_0$ – абсолютная магнитная проницаемость среды; μ_r – относительная магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Геометрический смысл закона (3.3): линии вектора магнитной индукции всюду непрерывны и замкнуты.

Физическое содержание выражения (3.3) заключается в том, что не существует источников вектора $\bar{B}$, т.е. не существует *магнитных* зарядов. Под магнитным зарядом подразумевают магнитный монополь Дирака, т.е. отдельный, самостоятельно существующий "северный" или "южный" полюс (магнит).

Магнитный монополь ученые с особой настойчивостью ищут с тех пор, как в 1931 г. Полю Дираку удалось ввести это понятие в теорию квантовой электродинамики и тем самым показать, что теоретически он может существовать. Магнитный монополь пытаются найти в космических лучах и продуктах ядерных реакций, в метеоритах и грунтах других планет (лунных породах и пр.). Настойчивость этих поисков, в частности, объясняется тем, что без признания его существования в реальном мире невозможно решение проблемы объединения всех физических взаимодействий, доказательства их единой природы. Если все взаимодействия имеют одну основу (это, так называемое, "великое объединение"), то магнитный монополь обязательно должен существовать.

В 1982 г. американский журнал "Физикал Ревью Летерс" ("Physical Review Letters") опубликовал небольшую статью Блеза Кабреры, молодого ученого из Стенфордского университета, в которой описывался следующий эксперимент. В сосуд с жидким гелием была помещена катушка ниобиевой проволоки. В полученный таким образом сверхпроводник ввели порцию энергии, после чего в нем начал циркулировать электрический ток и продолжал циркулировать несколько месяцев без существенных изменений. Ток в катушке измерялся прибором со сверхпроводниковым датчиком, способным улавливать малейшие изменения магнитного потока. Такие изменения случались, например, при добавлении жидкого гелия в охлаждающую систему для компенсации естественных потерь. Кроме того, прибор отметил до трех десятков случайных "всплесков" магнитного потока, после которых поток быстро возвращался к исходному уровню. Но вот однажды ток в ниобиевой сверхпроводящей катушке резко возрос, магнитный поток увеличился в восемь раз! Сам экспериментатор объяснил это явление так: через катушку пролетел магнитный монополь, который навел в ней дополнительную ЭДС, что и привело к резкому возрастанию тока. Достоверность таких выводов Б. Кабрера оценил в 95 %, другие специалисты считают, что вероятность ошибки при эксперименте значительно выше, и предлагают подождать с признанием открытия. Не вдаваясь в суть этих споров, отметим, что многие ученые все же полагают, что общепринятое заявление "магнитный монополь не обнаружен…" следует дополнить оговоркой: "… если не считать не абсолютно достоверных результатов эксперимента Б. Кабреры".

Поиски доказательств существования магнитного монополя в природе – одна из важнейших задач фундаментального естествознания. Три столетия опытов пока не опровергли закона (3.3). Обнаружение магнитного монополя станет революцией в физике элементарных частиц, однако на макроскопической теории поля не отразится, так же как открытие Эйнштейна (теория относительности) не затронуло основ механики Ньютона.

3.1.3. Закон полного тока

Закон полного тока устанавливает связь между электрическим током и напряженностью магнитного поля и формулируется следующим образом.

Циркуляция напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равна полному току сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint_L \overline{H}\,d\overline{l} = i\,. \qquad (3.5)$$

Первоначально под полным током i в (3.5) понималась алгебраическая сумма токов проводимости, пересекающих площадку, ограниченную контуром L (рис. 3.2):

$$i = \sum_{k=1}^{n} i_k = i_1 + i_2 - i_3 ,$$

где со знаком "+" берутся токи, совпадающие по направлению с нормалью к площадке (поверхности) S, т.е. токи, направления которых образуют правоходовую систему с направлением обхода контура L [5].

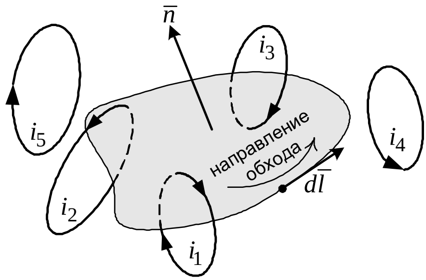


Рис. 3.2

Дж. Максвелл обобщил закон (3.5) на любые среды, под полным током понимая алгебраическую сумму токов проводимости, смещения и переноса [4]:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{см}} + i_{\text{пер}} ,$$

где $i_{\text{пр}} = \int_S \overline{J}_{\text{пр}} d\overline{S}$ – ток проводимости, $\overline{J}_{\text{пр}}$ – его плотность,

$$\overline{J}_{\text{пр}} = \gamma \overline{E} , \tag{3.6}$$

γ – удельная проводимость вещества; $i_{\text{см}} = \int_S \overline{J}_{\text{см}} d\overline{S}$ – ток смещения, $\overline{J}_{\text{см}}$ – плотность тока смещения,

$$\overline{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}; \qquad (3.7)$$

$i_{\text{пер}} = \int\limits_S \overline{J}_{\text{пер}} d\overline{S}$ – ток переноса, $\overline{J}_{\text{пер}}$ – плотность тока переноса, характеризующаяся объемной плотностью заряда ρ и средней скоростью их направленного, упорядоченного движения $\langle \overline{V} \rangle \equiv \overline{V}_{\text{ср}}$:

$$\overline{J}_{\text{пер}} = \rho \langle \overline{V} \rangle = \rho \overline{V}_{\text{ср}}. \qquad (3.8)$$

В соответствии с вышесказанным плотность полного тока в произвольной среде описывается следующим соотношением:

$$\overline{J} = \overline{J}_{\text{пр}} + \overline{J}_{\text{пер}} + \overline{J}_{\text{см}} = \gamma \overline{E} + \rho \overline{V}_{\text{ср}} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}, \qquad (3.9)$$

а полный ток характеризуется выражением

$$i = \int\limits_S \overline{J}\, d\overline{S}. \qquad (3.10)$$

С учетом (3.9) и (3.10) обобщенный на любые среды (любые типы токов) закон (3.5) примет вид

$$\oint\limits_L \overline{H}\, d\overline{l} = i = \int\limits_S \overline{J}\, d\overline{S}. \qquad (3.11)$$

3.1.4. Закон электромагнитной индукции

Закон электромагнитной индукции, или закон Фарадея, формулируется следующим образом.

Электродвижущая сила, возникающая в контуре при изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром, равна скорости изменения потока, взятой со знаком "минус", т.е.

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad (3.12)$$

где электродвижущая сила определяется как

$$e = \oint_L \overline{E}\, d\overline{l}\ , \tag{3.13}$$

магнитный поток [4, 5] записывается в виде

$$\Phi = \int_S \overline{B}\, d\overline{S}\ . \tag{3.14}$$

Закон электромагнитной индукции определяет связь электрического поля с изменяющимся во времени магнитным полем.

С учетом (3.13) и (3.14) закон (3.12) можно представить в форме

$$\oint_L \overline{E}\, d\overline{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \overline{B}\, d\overline{S} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} d\overline{S}\ . \tag{3.15}$$

Аналогично (3.5) закон электромагнитной индукции Дж. Максвелл обобщил на любые среды.

Физическое содержание (3.11) и (3.15): любое изменение магнитного поля во времени вызывает возникновение в той же точке пространства связанного с ним поля электрического.

Запишем (3.2), (3.3), (3.11) и (3.15) в виде системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_S \overline{D} d\overline{S} = \int_V \rho dV;\\
&\oint_S \overline{B} d\overline{S} = 0;\\
&\oint_L \overline{H}\, d\overline{l} = \int_S \overline{J}\, d\overline{S};\\
&\oint_L \overline{E}\, d\overline{l} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} d\overline{S}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

В виде системы (3.16) представлены основные уравнения электромагнитного поля в *интегральной* форме.

3.2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Перейдем к другой математической форме записи основных законов электродинамики – дифференциальной, физический смысл

(3.16) при этом не изменяется. Вообще, выбор формы записи уравнений электродинамики определяется типом решаемой задачи. Часто для решения той или иной задачи удобнее использовать дифференциальные соотношения.

Дифференциальная запись является наиболее точным способом представления законов электромагнитного поля, поскольку она характеризует поле в *точке пространства* и ее окрестности.

Рассмотрим первое уравнение системы (3.16), используя понятие дивергенции (1.9). Определим плотность потока вектора $\overline{D}$, уменьшая объем ΔV так, чтобы заряд ρ в пределах этого объема оставался постоянным, что позволяет вынести ρ за знак интеграла:

$$\operatorname{div}\overline{D} = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\oint_{\Delta S}\overline{D}d\overline{S} \Big/ \Delta V\right) = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\int_{\rho}\rho dV \Big/ \Delta V\right) = \rho ,$$

т.е. в точке поля

$$\operatorname{div}\overline{D} = \rho . \qquad (3.17)$$

Соотношение (3.17) является теоремой Гаусса в дифференциальной форме. Как уже упоминалось выше, физический смысл выражения (3.17) остался неизменным, но, в отличие от первого уравнения системы (3.16), оно несет информацию о векторе $\overline{D}$ в каждой точке пространства, следовательно, и смысл (3.17) становится более очевидным. Используя понятие дивергенции (см. подраздел 1.4), закон (3.17) можно интерпретировать следующим образом. Поле вектора $\overline{D}$ имеет источники, причем его источниками являются свободные заряды. Из точек, в которых $\operatorname{div}\overline{D} > 0$, линии $\overline{D}$ исходят; в точки, где $\operatorname{div}\overline{D} < 0$, – входят. Другими словами, линии вектора $\overline{D}$ начинаются и заканчиваются на свободных зарядах.

Выражение (3.17), как и первое уравнение системы (3.16), справедливо для постоянных и переменных полей.

Аналогичным образом перейдем к дифференциальной форме записи второго уравнения системы (3.16), используя теорему Остроградского–Гаусса (1.11):

$$\oint_S \overline{B}d\overline{S} = \int_V \operatorname{div}\overline{B}\,dV = 0 ,$$

откуда

$$\operatorname{div}\bar{B} = 0\,. \tag{3.18}$$

При использовании понятия дивергенции (см. подраздел 1.4) становится очевидным физический смысл (3.18): источников вектора магнитной индукции $\bar{B}$ не существует, т. е. не существует магнитных зарядов. Линии вектора $\bar{B}$ непрерывны, а его поле является соленоидальным.

Для записи закона полного тока (третье уравнение системы (3.16)) в дифференциальной форме воспользуемся теоремой Стокса (1.15):

$$\oint_L \bar{H}\,d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot}\bar{H}\,d\bar{S} = i = \int_S \bar{J}\,d\bar{S}\,. \tag{3.19}$$

Поскольку интегрирование осуществляется по произвольной поверхности S, подынтегральные выражения в (3.19) равны, следовательно,

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{J} = \bar{J}_{\text{пр}} + \bar{J}_{\text{пер}} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\,. \tag{3.20}$$

Физическое содержание (3.20) следует из определения ротора векторной функции (см. раздел 1.5): магнитное поле порождается не только движущими зарядами (ток проводимости и ток переноса), но и изменяющимся электрическим полем (плотность тока смещения $\bar{J}_{\text{см}} = \dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t}$). Из (3.20) видно, что магнитное поле, созданное токами проводимости и переноса, ничем не отличается от магнитного поля, созданного током смещения. Все три типа токов одинаково связаны с магнитным полем (равноправно входят в уравнение (3.20)), в этом заключается их единственное сходство, поскольку, как уже упоминалось, токи проводимости и переноса связаны с движущимися зарядами (заряженными частицами), а ток смещения – с изменяющимся электрическим полем $\bar{D}$, или $\bar{E}$.

Используя теорему Стокса, перейдем к дифференциальной форме закона электромагнитной индукции (четвертое уравнение системы (3.16)):

$$\oint_L \bar{E}\,d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot}\bar{E}\,d\bar{S} = -\int_S \frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\,d\bar{S}\,,$$

соответственно

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \qquad (3.21)$$

Физический смысл (3.21): электрическое поле возбуждается не только зарядами, но и изменяющимся магнитным полем.

Если электрическое поле порождается только зарядами, т. е. $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$, то выражение (3.21) примет вид

$$\operatorname{rot}\bar{E} = 0,$$

физический смысл которого напрямую следует из физического смысла ротора векторной функции (см. раздел 1.5): электрическое поле, возбуждаемое зарядами, является безвихревым *потенциальным* полем.

Электрическое же поле, порождаемое переменным магнитным полем, является вихревым, поскольку в некоторых точках пространства $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \neq 0$, т.е. $\operatorname{rot}\bar{E} \neq 0$.

Очевидно, что уравнения (3.20) и (3.21) нельзя рассматривать независимо друг от друга. Они описывают две стороны единого электромагнитного поля – поле магнитное и поле электрическое, связанные взаимным превращением. Итак, магнитное и электрическое поля влияют друг на друга. Изменение $\bar{B}$ приводит к возникновению $\bar{E}$, изменение $\bar{D}$ ($\bar{E}$) ведет к возникновению $\bar{H}$ ($\bar{B}$).

Запишем все законы электромагнитного поля в дифференциальной форме (3.17), (3.18), (3.20), (3.21) в единую систему уравнений, поставив на первое место выражения (3.20), (3.21) как наиболее значимые:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{J} = \bar{J}_{\text{пр}} + \bar{J}_{\text{пер}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t};\\
&\operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t};\\
&\operatorname{div}\bar{B} = 0;\\
&\operatorname{div}\bar{D} = \rho.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Система (3.22) образует *систему уравнений Максвелла,* наиболее *полно и точно* (насколько это известно) описывающих *все проявления электромагнитного поля,* в них заключена вся электродинамика.

В физике нет уравнений, подобных по значимости уравнениям Максвелла. Знаменитый физик Л. Больцман писал о них, повторяя вслед за Гёте ("Фауст"): "Тот – Бог, кто эти знаки начертал!"

Известный американский физик Р. Фейнман в своих лекциях пишет [18]: "В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через тысячу лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием".

Явления, описываемые уравнениями Максвелла, могут быть очень сложными. Самым легким для изучения является случай, называемый статическим, когда поле создается неподвижными зарядами или зарядами, движущимися с постоянной скоростью (их ток постоянен). Математически эти условия можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0, \qquad \bar{J} \neq f(t).$$

В этом случае система уравнений Максвелла (3.22) записывается следующим образом:

для электростатического поля, т. е. поля неподвижных зарядов (электростатика)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\bar{E} &= 0; \\ \operatorname{div}\bar{D} &= \rho; \end{aligned}\right\}$$

для магнитного поля постоянного тока, т. е. поля, созданного зарядами, движущимися с постоянной скоростью (магнитостатика)

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{J} = \bar{J}_{\text{пр}} + \bar{J}_{\text{пер}}; \\ \operatorname{div}\bar{B} = 0.\end{array}\right\}$$

Таким образом, система (3.22) распалась на две подсистемы, причем первая подсистема описывает все свойства электрического поля $\bar{E}$, а вторая – все свойства магнитного поля $\bar{B}$, и между собой эти два поля не связаны. Это значит, что если заряды неподвижны и токи не изменяются во времени, то электричество и магнетизм – явления разные, не зависящие друг от друга. Нельзя обнаружить никакой взаимосвязи полей $\bar{E}$ и $\bar{B}$, если не происходят изменения зарядов (в пространстве или во времени) или токов, или магнитное поле остается постоянным, например, пока не начнет заряжаться конденсатор или магнит двигаться.

С математической точки зрения уравнения электростатики и магнитостатики (две подсистемы (3.22)) представляют собой идеальные объекты для изучения, поскольку электростатика – это чистый пример векторного поля с нулевым ротором и заданной дивергенцией, а магнитостатика – поля с нулевой дивергенцией и заданным ротором.

3.3. ТЕОРЕМА УМОВА–ПОЙНТИНГА

Наряду с уравнениями Максвелла большое значение в электродинамике имеет теорема Умова-Пойнтинга, математически выражающая закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Она показывает взаимосвязь изменения энергии в каком-либо объеме с потоком энергии через поверхность, ограничивающую этот объем. Теорема представляет собой своеобразное уравнение энергетического баланса в теории поля подобно уравнению баланса мощностей в электрических цепях.

Рассмотрим электромагнитное поле в проводящей среде и диэлектрике, пренебрегая током переноса, т. е. будем считать, что

$$\bar{J} = \bar{J}_{\text{пр}} + \bar{J}_{\text{см}} = \gamma\bar{E} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \bar{J}_{\text{пр}} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}. \qquad (3.23)$$

Полагая среду однородной и изотропной, т. е.

$$\varepsilon_a = \text{const}, \quad \mu_a = \text{const}, \quad \gamma = \text{const},$$

запишем два первых уравнения системы (3.22) с учетом (3.1) и (3.4):

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\,\overline{H} &= \gamma\overline{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}; \\ \text{rot}\,\overline{E} &= -\mu_a \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Энергия электромагнитного поля $W_{\text{эм}}$ в объеме V

$$W_{\text{эм}} = W_{\text{э}} + W_{\text{м}}, \tag{3.25}$$

где $W_{\text{э}}$ – энергия электрического поля в объеме V,

$$W_{\text{э}} = \int\limits_V \frac{\overline{E}\,\overline{D}}{2} dV, \tag{3.26}$$

плотность которой, т.е. энергия в единице объема, определяется как

$$w_{\text{э}} = \frac{\overline{E}\,\overline{D}}{2}; \tag{3.27}$$

$W_{\text{м}}$ – энергия магнитного поля в объеме V,

$$W_{\text{м}} = \int\limits_V \frac{\overline{H}\,\overline{B}}{2} dV. \tag{3.28}$$

Плотность энергии магнитного поля имеет вид

$$w_{\text{м}} = \frac{\overline{H}\,\overline{B}}{2}. \tag{3.29}$$

С учетом (3.27) и (3.29) плотность энергии электромагнитного поля может быть представлена как

$$w_{\text{эм}} = w_{\text{э}} + w_{\text{м}} = \frac{\overline{E}\,\overline{D}}{2} + \frac{\overline{H}\,\overline{B}}{2}. \tag{3.30}$$

Подставляя (3.26) и (3.28) в (3.25), имеем

$$W_{\text{эм}} = \int\limits_V \left(w_{\text{э}} + w_{\text{м}} \right) dV = \int\limits_V \left(\frac{\bar{E}\,\bar{D}}{2} + \frac{\bar{H}\,\bar{B}}{2} \right) dV\,. \qquad (3.31)$$

Для однородных изотропных сред ($\varepsilon_a = \text{const}$, $\mu_a = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$), учитывая (3.1), (3.4), (3.27) и (3.29), получим

$$w_{\text{э}} = \frac{\varepsilon_a \left(\bar{E}\right)^2}{2} = \frac{\varepsilon_a}{2} E^2\,,$$

$$w_{\text{м}} = \frac{\mu_a \left(\bar{H}\right)^2}{2} = \frac{\mu_a}{2} H^2\,,$$

что при подстановке в (3.31) дает

$$W_{\text{эм}} = \int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_a \left(\bar{E}\right)^2}{2} + \frac{\mu_a \left(\bar{H}\right)^2}{2} \right) dV = \int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_a}{2} E^2 + \frac{\mu_a}{2} H^2 \right) dV\,. \qquad (3.32)$$

Энергия электромагнитного поля непрерывно изменяется во времени. Дифференцируя (3.32) по времени, определим изменение энергии в объеме V:

$$\frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} = \frac{\partial \left(w_{\text{э}} + w_{\text{м}} \right)}{\partial t} = \int\limits_V \bar{E} \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} dV + \int\limits_V \bar{H} \mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} dV\,. \qquad (3.33)$$

Выразив из уравнений (3.24) частные производные напряженностей электрического и магнитного полей по времени, подставим их в (3.33):

$$\frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} = \int\limits_V \left(\bar{E}\,\text{rot}\,\bar{H} - \bar{H}\,\text{rot}\,\bar{E} \right) dV - \int\limits_V \gamma E^2 dV\,. \qquad (3.34)$$

Из векторного анализа известно [2], что

$$\text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) = \bar{H}\,\text{rot}\,\bar{E} - \bar{E}\,\text{rot}\,\bar{H}\,. \qquad (3.35)$$

Используя (3.35), а также теорему Остроградского–Гаусса (1.11) в форме

$$\int\limits_V \text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) dV = \oint\limits_S (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{S}\,,$$

преобразуем (3.34) к следующему виду:

$$-\oint_S (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{S} = \frac{\partial W_{эм}}{\partial t} + \int_V \gamma E^2 dV . \qquad (3.36)$$

Векторное произведение $\bar{E} \times \bar{H}$ обозначим через $\bar{\Pi}$. Вектор $\bar{\Pi}$ называют вектором Пойнтинга, он *одновременно* характеризует электрическое и магнитное поля и имеет размерность поверхностной плотности мощности – $\text{ВА}/\text{м}^2$. Вектор Пойнтинга образует с векторами $\bar{E}$ и $\bar{H}$ правую тройку, или правоходовую систему (рис. 3.3).

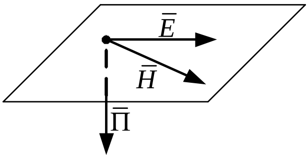


Рис. 3.3

С учетом принятого обозначения уравнение (3.36) запишется как

$$-\oint_S \bar{\Pi} d\bar{S} = \frac{\partial W_{эм}}{\partial t} + \int_V \gamma E^2 dV . \qquad (3.37)$$

Полученное выражение называется *теоремой Умова–Пойнтинга*. Здесь $\frac{\partial W_{эм}}{\partial t}$ – скорость изменения запаса электромагнитной энергии в объеме V, или мощность, затрачиваемая на изменение энергии электромагнитного поля в этом объеме (если $\frac{\partial W_{эм}}{\partial t} > 0$, электромагнитная энергия внутри объема увеличивается); $\int_V \gamma E^2 dV$ – мощность тепловых потерь в объеме V, где $p_д = \gamma E^2$ – количество электромагнитной энергии, переходящей в единицу времени в тепловую энергию в каждой точке пространства, т. е. мощность тепловых потерь в каждой точке пространства (закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме); $\oint_S \bar{\Pi} d\bar{S} = \oint_S (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{S}$ – поток вектора Пойнтинга сквозь поверхность S, равный мощности потока энергии электромагнитного поля, или *мощности излучения*, сквозь замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V.

Под излучением можно понимать электромагнитные волны, свободно распространяющиеся в пространстве. В случае плоских электромагнитных волн направление вектора Пойнтинга совпа-

Рис. 3.4

дает с направлением вектора скорости их распространения $\bar{v}$ (рис. 3.4). Модуль $\bar{\Pi}$ численно равен количеству энергии, проходящей в единицу времени сквозь единичную поверхность, перпендикулярную данному вектору, т.е. представляет собой *удельную мощность* потока электромагнитной энергии, или поверхностную плотность мощности. Если выражения (3.26), (3.28) и (3.31) дают информацию о том, где сосредоточена энергия полей, то вектор Пойнтинга показывает, как электромагнитная энергия перемещается в пространстве.

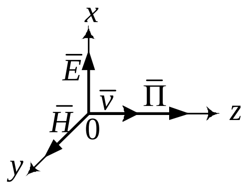


Рис. 3.4.

Вернемся к уравнению (3.37). Теорема Умова–Пойнтинга формулируется следующим образом: *поток вектора Пойнтинга, входящий в некоторый объем V, ограниченный замкнутой поверхностью* S, *равен сумме двух мощностей, одна из которых идет на изменение энергии электромагнитного поля, а другая представляет собой мощность тепловых потерь внутри объема V*. Таким образом, теорема Умова–Пойнтинга является уравнением баланса мощностей для выделенного объема V.

Поскольку положительная нормаль $\bar{n}$ к замкнутой поверхности S и вектор $d\bar{S}$ ($d\bar{S} \parallel \bar{n}$) направлены наружу, поток вектора $\bar{\Pi}$, входящий в объем V сквозь поверхность S, будет положительным, если вектор $\bar{\Pi}$ во всех точках этой поверхности будет преимущественно направлен внутрь указанного объема, т. е. угол между $\bar{\Pi}$ и $d\bar{S}$ в каждой точке поверхности должен быть преимущественно тупым (рис. 3.5). Действительно, в соответствии с правилом скалярного умножения векторов $\bar{\Pi}d\bar{S} = \Pi\cos\alpha\, dS$, где α – угол между $\bar{\Pi}$ и $d\bar{S}$; если $\alpha > 90^\circ$, то $\cos\alpha < 0$ и $-\oint\limits_S \bar{\Pi}d\bar{S} > 0$.

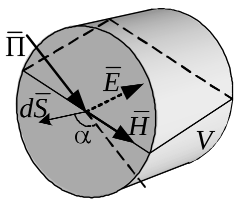


Рис.

В рассмотренном случае вектор Пойнтинга направлен внутрь объема V и энергия в этом объеме потребляется. Если же внутри указанного объема расположены источники энергии, т.е. энергия в нем вырабатывается, то вектор Пойнтинга и поток энергии направлены из объема V в окружающее пространство.

Если учесть существование в объеме V каких-либо источников энергии, а также свободных заряженных частиц (токи переноса), теорема Умова–Пойнтинга (уравнение энергетического баланса) примет следующий вид [14]:

$$p_{\text{ист}} = \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} + \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \overline{J}_{\text{пер}} \overline{E} dV + \oint_S \overline{\Pi} d\overline{S}\,, \qquad (3.38)$$

где $p_{\text{ист}}$ – мгновенная мощность источников энергии; $\int_V \overline{J}_{\text{пер}} \overline{E} dV$ – работа, затраченная в единицу времени на ускорение свободных заряженных частиц в объеме V, т.е. на увеличение кинетической энергии этих частиц в тех областях объема V, где существуют токи переноса. Если частицы сталкиваются с молекулами вещества, то часть сообщенной им кинетической энергии переходит в тепло.

Итак, *энергия, выделяемая в единицу времени источниками (или работа, совершаемая ими), затрачивается на изменение в единицу времени запаса энергии в магнитных и электрических полях в объеме* V *; на выделение теплоты в этом объеме (мощность тепловых потерь); на увеличение кинетической энергии находящихся в объеме* V *свободных заряженных частиц и, кроме того, часть этой энергии передается за пределы области* V *сквозь поверхность* S *в виде излучения.*

Если в объеме V совершается работа по перемещению заряженных тел или проводящих контуров с токами, среда является неоднородной, происходит перемещение отдельных частей среды и т.д., каждое из указанных условий необходимо учесть в уравнении (3.38) соответствующим слагаемым [14].

Теорема Умова–Пойнтинга имеет большое прикладное значение, поскольку позволяет получить информацию о процессе передачи энергии от источника к приемнику. Различные примеры ее использования можно найти в [5]. Рассмотрим простейший случай передачи энергии по прямолинейному длинному (теоретически бесконечно длинному) проводу радиусом a при протекании постоянного тока I (рис. 3.6).

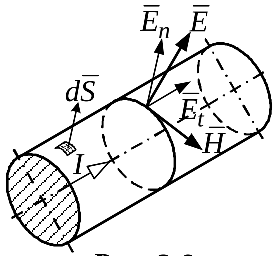


Рис. 3.6

Вокруг проводника с током образуются стационарные магнитное и электрическое поля. Напряженность магнитного поля на поверхности провода равна

$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

и направлена по касательной к окружности сечения (силовая линия магнитного поля радиусом a). Напряженность электрического поля $\overline{E}$ складывается из двух составляющих:

$$\overline{E} = \overline{E}_n + \overline{E}_t \,, \; E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2} \,, \qquad (3.39)$$

где $\overline{E}_n = \overline{n} E_n$ – нормальная составляющая напряженности, E_n – проекция $\overline{E}$ на направление нормали к поверхности провода; $\overline{E}_t = \overline{1}_t E_t$ – тангенциальная составляющая напряженности, E_t – проекция $\overline{E}$ на направление касательной к поверхности провода. Направление тангенциальной составляющей $\overline{E}_t$ совпадает с направлением тока I и в соответствии с (3.6)

$$E_t = \frac{J_{\text{пр}}}{\gamma} \,. \qquad (3.40)$$

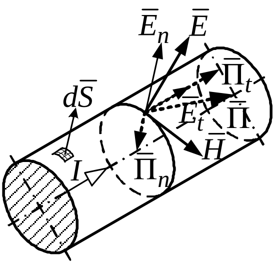


Рис. 3.7

Мощность, поступающая в провод извне, на длине l определяется потоком вектора Пойнтинга сквозь боковую поверхность провода (рис. 3.7), поскольку электромагнитным полем около его торцевых сечений, бесконечно удаленных от рассматриваемого участка, можно пренебречь. По определению вектор Пойнтинга равен:

$$\overline{\Pi} = \overline{E} \times \overline{H} \,.$$

Из рис. 3.7 видно, что

$$\overline{\Pi} = \overline{\Pi}_n + \overline{\Pi}_t = \overline{E}_t \times \overline{H} + \overline{E}_n \times \overline{H} \,,$$

где $\overline{\Pi}_n$ и $\overline{\Pi}_t$ – нормальная и тангенциальная составляющие вектора Пойнтинга соответственно, поскольку $\overline{E}_t \perp \overline{H}$,

$$\overline{\Pi}_n = \overline{E}_t \times \overline{H} = -\overline{n} \cdot E_t H \sin 90^\circ = -\overline{n} \cdot E_t H . \qquad (3.41)$$

Мощность, поступающая в провод извне, на длине l определяется нормальной составляющей вектора Пойнтинга, так как $\overline{\Pi}_t \perp d\overline{S}$ ($d\overline{S} = \overline{n} dS$) и $\oint\limits_{S_{\text{бок}}} \overline{\Pi}_t d\overline{S} = 0$, т.е.

$$-\oint\limits_{S} \overline{\Pi} d\overline{S} = -\oint\limits_{S_{\text{бок}}} \overline{\Pi} d\overline{S} = -\oint\limits_{S_{\text{бок}}} \overline{\Pi}_n d\overline{S} - \cancel{\oint\limits_{S_{\text{бок}}} \overline{\Pi}_t d\overline{S}} = -\oint\limits_{S_{\text{бок}}} \overline{\Pi}_n d\overline{S} .$$

С учетом (3.41) мощность на длине l равна

$$-\oint\limits_{S_{\text{бок}}} \overline{\Pi}_n d\overline{S} = \oint\limits_{S_{\text{бок}}} E_t H dS = E_t H \oint\limits_{S_{\text{бок}}} dS =$$

$$= E_t H S_{\text{бок}} = \frac{J_{\text{пр}}}{\gamma} \frac{I}{2\pi a} 2\pi a l = \frac{J_{\text{пр}}}{\gamma} I l,$$

где $S_{\text{бок}} = 2\pi a l$ – площадь боковой поверхности провода. Поскольку плотность тока проводимости определяется соотношением

$$J_{\text{пр}} = \frac{I}{S_{\text{сеч}}} = \frac{I}{\pi a^2} ,$$

где $S_{\text{сеч}} = \pi a^2$ – площадь сечения провода,

$$-\oint\limits_{S_{\text{бок}}} \overline{\Pi} d\overline{S} = \frac{I^2 l}{\gamma \pi a^2} = I^2 \frac{\rho_{\text{пр}} l}{S_{\text{сеч}}} = I^2 R . \qquad (3.42)$$

Здесь $\rho_{\text{пр}} = \dfrac{1}{\gamma}$ – удельное сопротивление проводника, R – его полное сопротивление. Как ясно из (3.42), мощность, поступающая в провод, равна только мощности тепловых потерь в проводнике (закон Джоуля–Ленца).

В реальных условиях тангенциальная составляющая напряженности электрического поля (3.40) мала по сравнению с его нормальной составляющей (на практике нормальную составляющую рассчитывают как напряженность поля заряженной оси по формуле

$$E_n = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_{\text{пр}}},$$

где τ – заряд провода на единицу длины (линейная плотность заряда), $r_{\text{пр}} = a$ – радиус провода). При передаче энергии по проводам и кабелям

$$\frac{E_n}{E_t} > 10^3.$$

Тангенциальная составляющая напряженности определяет энергию, поступающую в проводник, а нормальная составляющая, как будет показано ниже, характеризует энергию в диэлектрике, окружающем его.

Рассмотрим передачу энергии поля постоянного тока по диэлектрику, выбрав в качестве примера коаксиальный кабель (рис. 3.8).

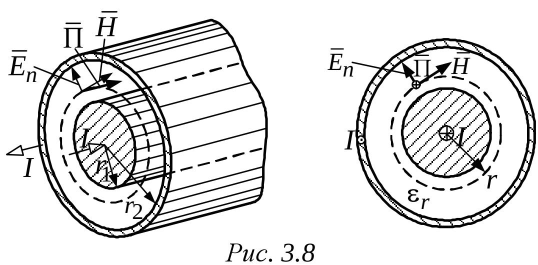


Рис. 3.8

На рис. 3.8 r_1 и r_2 – радиус жилы и внутренний радиус оболочки коаксиального кабеля соответственно. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r. По кабелю протекает ток I, напряжение между жилой и оболочкой равно U, следовательно, мощность, передаваемая от генератора к приемнику, равна $P = UI$. Для простоты рассуждений проводимость материала жилы и оболочки примем настолько большой (теоретически бесконечной), что напряженностью поля E_t в них можно пренебречь (кабель без потерь) [1]. Следовательно, в соответствии с (3.39) напряженность электрического поля равна

$$\bar{E} = \bar{E}_n, \qquad E = E_n.$$

Для расчета напряженности магнитного поля в диэлектрике воспользуемся формулой для магнитного поля одиночного провода (жилы):

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

где $r_1 \le r \le r_2$ (рис. 3.8).

Напряженность электрического поля в любой точке диэлектрика коаксиального кабеля записывается как [17]

$$E = E_n = \frac{U}{r \ln\left(r_2/r_1\right)}.$$

Для некоторой точки диэлектрика, расположенной на расстоянии r от жилы кабеля, найдем вектор Пойнтинга с учетом $\bar{E}_n \perp \bar{H}$ (рис. 3.8):

$$\bar{\Pi} = \bar{E} \times \bar{H} = \bar{1}_{\text{п}} E_n H,$$

где $\bar{1}_{\text{п}}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением тока в жиле. Модуль вектора Пойнтинга определяется соотношением

$$\Pi = E_n H = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln\left(r_2/r_1\right)}.$$

Поток вектора Пойнтинга через кольцо с радиусами r_1 и r_2

$$P = -\int_S \overline{\Pi} d\overline{S} = \int_{r_1}^{r_2} \Pi \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln\left(r_2/r_1\right)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI \, .$$

Таким образом, вся поступающая к приемнику энергия передается по *диэлектрику*. По жиле и оболочке кабеля энергия к приемнику не передается.

В случае конечной проводимости γ ($E_t \neq 0$) следует учитывать поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность кабеля, направленный внутрь жилы. Как было показано выше, в соответствии с (3.42) эта энергия потребляется из диэлектрика на покрытие тепловых потерь в проводнике и она значительно меньше энергии электромагнитного поля в диэлектрике.

Итак, электромагнитная энергия от места ее генерирования к месту потребления передается по *диэлектрику*, окружающему провода, которыми генератор соединен с потребителем. Эти провода (в том числе жилы и оболочки кабелей) ухудшают процесс передачи (джоулевы потери), однако играют роль *направляющих* потока энергии. Чем больше сопротивление провода, тем выше потери при передаче энергии.

4. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Частным случаем электромагнитного поля является поле электростатическое. *Электростатическое поле* – это поле, не изменяющееся во времени, оно создается неподвижными электрическими зарядами.

4.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЗАКОН КУЛОНА.ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ

Как уже упоминалось выше, все свойства электростатического поля описываются подсистемой уравнений Максвелла, являющейся частным случаем системы (3.22):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{E} &= 0; \\ \operatorname{div}\overline{D} &= \rho. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Далее будет показано, что все основные законы электростатического поля отражены в уравнениях (4.1).

Основным законом электростатики является закон Кулона, математически определяющий силу взаимодействия двух *неподвижных точечных зарядов*.

Закон Кулона: *между двумя покоящимися точечными зарядами действует сила, прямо пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Сила направлена по прямой от одного заряда к другому.*

$$\overline{F}_1 = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\overline{1}_r = -\overline{F}_2, \qquad (4.2)$$

где $\overline{F}_1$ – сила, действующая на заряд Q_2; $\overline{F}_2$ – сила, действующая на заряд Q_1, $\overline{F}_2$ равна и противоположна $\overline{F}_1$; $\overline{1}_r$ – единичный вектор, направленный по прямой от одного заряда к другому; r – расстояние между зарядами; k – коэффициент пропорциональности, в системе СИ $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 10^{-7}\cdot C^2 = 9\cdot 10^9$ м^2/с^2 .

Закон Кулона справедлив только для точечных неподвижных заряженных тел или для тел, которые с определенными допущениями можно рассматривать как точечные, например, когда расстояние между заряженными телами столь велико, что их форма не влияет на силу взаимодействия.

Если заряженные тела находятся не в вакууме, а в однородной изотропной непроводящей среде сила взаимодействия между ними уменьшается в ε_r раз, и (4.2) примет вид

$$\overline{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon_r r^2}\overline{1}_r ,$$

где ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость вещества, которая показывает, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами в вакууме больше, чем в данной непроводящей среде, $\varepsilon_r = F_0/F$, F_0 – сила взаимодействия в вакууме. Вообще, $\varepsilon_r \geq 1$, например, для воды $\varepsilon_r = 80$, для масел $\varepsilon_r = 2...7$, для воздуха $\varepsilon_r = 1$. В системе СИ закон Кулона для любой однородной изотропной среды записывается в форме

$$\overline{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\overline{1}_r = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r . \qquad (4.3)$$

Напряженность электростатического поля можно определить как силу, действующую на единицу заряда:

$$\overline{E}_1 = \frac{\overline{F}}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r ,$$

где $\overline{E}_1$ – напряженность поля точечного заряда Q_1. Напряженность поля любого точечного заряда можно записать как

$$\overline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r . \qquad (4.4)$$

Соответственно сила, с которой некоторое электростатическое поле действует на внесенный в заданную точку пространства неподвижный точечный заряд Q, равна

$$\overline{F} = Q\overline{E}\,. \tag{4.5}$$

Формула (4.5) является более общей, чем (4.3), так как здесь $\overline{E}$ – любое электростатическое поле, созданное одним или несколькими зарядами, или распределением зарядов.

Часто под законом Кулона подразумевают формулу (4.4), поскольку напряженность $\overline{E}$ является более общей характеристикой поля, чем сила взаимодействия. Если $Q = 0$, то $\overline{F} = 0$, при этом $\overline{E} \neq 0$. Именно $\overline{E}$ характеризует поле в каждой точке пространства, именно $\overline{E}$ входит в систему уравнений Максвелла.

В случае, когда поле создается не двумя, а большим количеством зарядов, закон Кулона дополняется принципом наложения, или суперпозиции.

Принцип наложения (суперпозиции): *если поле создается несколькими точечными зарядами, то общая напряженность электрического поля в любой точке равна геометрической сумме напряженностей от каждого заряда в отдельности*,

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \ldots + \overline{E}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{E}_k\,, \tag{4.6}$$

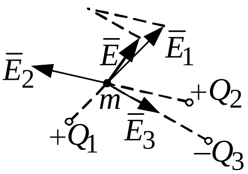


Рис.

где $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$ – напряженности в заданной точке, возбуждаемые точечными зарядами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ (рис. 4.1). Длина вектора $\overline{E}_k$ определяется по формуле

$$E_k = \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon_a r_k^2}\,.$$

Закон Кулона и принцип наложения составляют основу теории электростатического поля.

Система уравнений (4.1) содержит закон Кулона как частный случай. Она описывает поле не только точечных, а *любых* неподвижных зарядов, а также несет дополнительную информацию об его свойствах.

Закон Кулона легко получить из (4.1), используя условие сферической симметрии поля неподвижного точечного заряда (рис. 4.2). Условие сферической симметрии означает, что напряженность поля

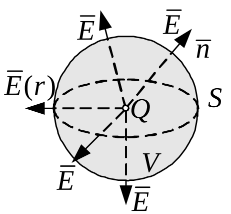


Рис. 4.2

направлена по радиусу сферы (по нормали к поверхности сферы), окружающей точечный заряд ($\bar{E}=\bar{E}_n$, $E=E_n$, $D_n=\varepsilon_a E_n=\varepsilon_a E$). Величина напряженности поля вдоль поверхности сферы радиусом r не изменяется, т. е. $D_n=\text{const}$ для $r=\text{const}$. Перейдем к интегральной форме второго уравнения системы (4.1):

$$\oint_S \bar{D}d\bar{S}=Q, \tag{4.7}$$

тогда

$$Q=\oint_S \bar{D}d\bar{S}=D_n\oint_S dS=DdS=D\cdot 4\pi r^2,$$

откуда $D=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$ и, следовательно, с учетом (3.1)

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}. \tag{4.8}$$

Выражение (4.8) описывает поле неподвижного точечного заряда и является математической записью закона Кулона через напряженность поля (4.4).

Если точечный заряд движется с некоторой скоростью $\bar{v}$, то электрическое поле, возникающее вокруг движущегося заряда, сжимается по направлению его движения (рис. 4.3) [11], т.е. оно не является сферически симметричным. Соответственно, выражение (4.8) не получится из (4.7). Следовательно, для движущихся точечных зарядов закон Кулона не выполняется.

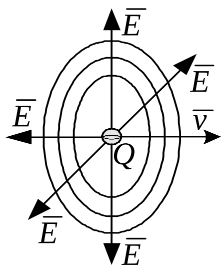


Рис. 4.3

Таким образом, второе уравнение системы (4.1) является более общим законом, чем закон Кулона, оно справедливо как для неподвижных, так и для движущихся зарядов, поскольку входит в полную систему уравнений Максвелла (3.22), описывающих электромагнитные поля, изменяющиеся во времени и пространстве.

Какова точность закона Кулона? Расчеты и физические эксперименты доказывают, что он выполняется с точностью до одной миллиардной (10^{-9}) на расстояниях до 10^{-13} см (размер атома составляет порядка 10^{-8} см). На расстояниях порядка 10^{-14} см и меньше закон Кулона не выполняется. Электрические силы на таких расстояниях оказываются почти в 10 раз слабее, чем должны бы быть, если бы взаимодействие зарядов подчинялось закону Кулона. Существует несколько гипотез, объясняющих это явление.

Первая гипотеза заключается в том, что на очень малых расстояниях ($r \leq 10^{-14}$ см) закон Кулона принципиально невыполним. Другая же состоит в том, что взаимодействующие тела не являются точечными. В экспериментах интервал 10^{-14} см исследовали, бомбардируя протоны очень энергичными электронами, следя за тем, как они рассеиваются. Возможно, заряд протона или заряд электрона "размазан" (а, может, и оба). Большинство физиков предпочитают думать, что "размазан" заряд протона. Известно, что протоны сильно взаимодействуют с мезонами. Это означает, что протон время от времени существует в виде нейтрона с π^{+} мезоном вокруг, т. е. протон выглядит как небольшой шарик положительного заряда, а поле шара нельзя считать меняющимся по закону $1/r^2$ вплоть до самого центра.

Для получения закона Кулона достаточно лишь второго уравнения системы (4.1). Первое же уравнение содержит дополнительную информацию о свойствах электростатического поля. Поскольку $\operatorname{rot}\bar{E} = 0$, электростатическое поле является безвихревым, потенциальным полем (см. раздел 1.5). Интегральная характеристика потенциальности поля может быть получена при переходе от первого уравнения (4.1) к соответствующей интегральной форме

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = 0 . \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) означает, что циркуляция вектора $\bar{E}$ вдоль любого замкнутого контура в электростатическом поле равна нулю.

Поскольку в соответствии с (4.5) напряженность поля – это сила, действующая на единицу заряда, физический смысл (4.9) заключается в следующем. В потенциальном поле работа (энергия), затраченная на перемещение единицы заряда по замкнутому контуру, равна нулю. Иными словами, работа (энергия) в данном поле определяется местоположением точек в пространстве, их энергетическим состоянием и не зависит от пути интегрирования (от вида траектории) (рис. 4.4):

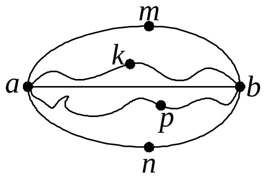


Рис. 4.4

$$\int\limits_{amb} \bar{E}d\bar{l} = \int\limits_{anb} \bar{E}d\bar{l} = \int\limits_{akb} \bar{E}d\bar{l} = \int\limits_{apb} \bar{E}d\bar{l} = \varphi_a - \varphi_b,$$

где φ_a и φ_b – значения некоторой потенциальной функции $\varphi(\bar{r})$ в точках *a* и *b*, называемые потенциалами. С физической точки зрения выражение (4.9) можно трактовать как закон сохранения энергии (невозможность создания "вечного двигателя") для электростатического поля [17].

Итак, система уравнений (4.1) описывает все закономерности и свойства электростатического поля.

4.2. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА

При решении задач электростатики часто бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды всегда существуют в виде отдельных "кусочков", таких как электроны, протоны и т. п., и считать, что они "размазаны", или распределены непрерывно.

Распределение заряда характеризуется его плотностью. В зависимости от того, как заряд распределен, различают понятия объемной (ρ), поверхностной (σ) и линейной (τ) плотностей заряда:

$$\rho = \frac{dQ}{dV}, \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}, \quad \tau = \frac{dQ}{dl}.$$

Следовательно,

$$Q = \int\limits_V \rho dV, \quad Q = \int\limits_S \sigma dS, \quad Q = \int\limits_l \tau dl.$$

Разбив объем *V*, поверхность *S* и линию *l* на соответствующие элементы *dV*, *dS* и *dl*, можно определить величину заряда для каждого элемента. Тогда

для объемного распределения заряда

$$dQ = \rho dV,$$

для его поверхностного распределения

$$dQ = \sigma dS,$$

и, наконец, для линейного распределения заряда

$$dQ = \tau dl\ .$$

Заряд dQ можно считать точечным как бесконечно малый заряд. Применяя закон Кулона (4.4) для точечного заряда dQ, запишем

$$d\overline{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r\ . \tag{4.10}$$

Формула (4.10) определяет напряженность поля в любой точке, расположенной на расстоянии r от элементарного заряда dQ.

Для нахождения напряженности в заданной точке пространства от всего распределения заряда необходимо применить принцип наложения (суперпозиции) (4.6), т. е. просуммировать все $d\overline{E}$. Поскольку для *непрерывного* распределения сумма переходит в интеграл,

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho dV}{\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r \tag{4.11}$$

– для объемного распределения заряда,

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma dS}{\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r \tag{4.12}$$

– для поверхностного распределения и

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int_l \frac{\tau dl}{\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r \tag{4.13}$$

– для линейного распределения заряда.

Согласно (4.11) – (4.13) для нахождения $\overline{E}$ необходимо знать зависимость плотности распределения заряда от координат поля

$$\rho = f(\overline{r}), \sigma = f(\overline{r}), \tau = f(\overline{r})\,.$$

4.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Вернемся к уравнению системы (4.1), математически отражающему потенциальность электростатического поля. Учитывая, что в соответствии с (1.21)

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,$$

приходим к следующему выводу. Для электростатического поля можно найти некоторую скалярную функцию $\varphi(\bar{r})$ такую, что

$$\bar{E} = \pm\operatorname{grad}\varphi .$$

Опыт показывает, что следует выбрать знак "минус", т.е.

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi . \tag{4.14}$$

Скалярная функция φ называется *потенциальной* функцией, или просто *потенциалом*.

Как следует из (4.14), напряженность $\bar{E}$ направлена в сторону убывания скаляра φ перпендикулярно к эквипотенциальным поверхностям (см. рис. 1.6). Используя (4.14), потенциал можно выразить через напряженность электростатического поля с точностью до некоторой постоянной:

$$\varphi = -\int \bar{E}d\bar{l} + \text{const} . \tag{4.15}$$

Выясним физический смысл потенциала. Запишем формулу, определяющую напряжение между двумя произвольными точками поля a и b [4]:

$$u_{ab} = \int_{l} \bar{E}d\bar{l} = \int_{a}^{b} \bar{E}d\bar{l} . \tag{4.16}$$

Напряжение между двумя произвольными точками равно работе (энергии), затраченной полем на перемещение единичного положительного заряда из одной точки в другую. Определим напряжение между точками в электростатическом (потенциальном) поле. Подставляя (4.14) в (4.16), получим

$$u_{ab} = \int_{a}^{b} \bar{E}d\bar{l} = -\int_{a}^{b} \operatorname{grad}\varphi d\bar{l} =$$

$$= -\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = -\int_a^b d\varphi = -\left(\varphi_b - \varphi_a\right) = \varphi_a - \varphi_b$$

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b . \qquad (4.17)$$

В *потенциальном* поле напряжение равно разности потенциалов. Поскольку по определению работа

$$A = u_{ab} = -\left(\varphi_b - \varphi_a\right),$$

при $\varphi_b > \varphi_a$ $A < 0$, т.е. работа совершается против сил поля. В случае, когда $\varphi_b < \varphi_a$, работа совершается силами поля, $A > 0$.

Полагая потенциал некоторой точки *P* поля $\bar{E}$ равным нулю ($\varphi_p = 0$), найдем напряжение между произвольной точкой поля и фиксированной:

$$u_{ap} = \int_a^p \bar{E}d\bar{l} = \varphi_a - \varphi_p = \varphi_a, \qquad u_{bp} = \int_b^p \bar{E}d\bar{l} = \varphi_b - \varphi_p = \varphi_b .$$

Таким образом, ***потенциал*** *некоторой точки есть напряжение между этой точкой и фиксированной,* т. е. *потенциал есть работа (энергия), затрачиваемая полем на перемещение единичного положительного заряда из данной точки в фиксированную.* Именно поэтому потенциал является *энергетической характеристикой поля.*

Определим потенциал поля точечного заряда. Подставляя напряженность $\bar{E}$ поля точечного заряда (4.4) в (4.15), получим

$$\varphi = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}\bar{1}_r d\bar{l} + \text{const} = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}dr + \text{const} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r} + \text{const},$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r} + \text{const} . \qquad (4.18)$$

Пусть фиксированная точка находится на бесконечности, т. е.

$$\varphi\big|_{r=\infty} = \varphi_p = 0,$$

тогда постоянная интегрирования в выражении (4.18) равна нулю:

$$\varphi\big|_{r=\infty} = 0 + \text{const} = 0\,.$$

В этом случае формула для потенциала произвольной точки поля точечного заряда Q примет вид

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r}\,. \tag{4.19}$$

Для потенциалов, как и для напряженностей, справедлив принцип наложения (суперпозиции):

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_k = -\sum_{k=1}^{n} \text{grad}\,\varphi_k = -\text{grad}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k = -\text{grad}\,\varphi\,,$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\,, \tag{4.20}$$

где n – число неподвижных зарядов.

Подставляя (4.19) в (4.20), получим выражение для потенциала поля неподвижных *точечных* зарядов

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon_a r_k}\,. \tag{4.21}$$

В случае непрерывного распределения заряда с учетом (4.11) – (4.13) имеем:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a r} \tag{4.22}$$

– для объемного распределения заряда,

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_a r} \tag{4.23}$$

– для поверхностного распределения,

$$\varphi = \int_l \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_a r} \tag{4.24}$$

– для линейного распределения заряда.

Расчет по формулам (4.22) – (4.24) проще, чем расчет напряженности поля по выражениям (4.11) – (4.13), поэтому при решении задач электростатики обычно рассчитывается потенциал в точках поля, а затем по формуле (4.14) определяется напряженность $\bar{E}$ в этих точках.

4.4. УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА

Решение любой задачи электростатики, с математической точки зрения, состоит в решении двух уравнений Максвелла (4.1), которые можно объединить в одно уравнение путем несложных преобразований.

Для однородной и изотропной среды ($\varepsilon_a \neq f(\bar{r})$, $\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}$) система (4.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \\ &\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

Подставим (4.14) во второе уравнение (4.25) с учетом (1.22), получим

$$\operatorname{div} \bar{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\nabla^2 \varphi,$$

следовательно,

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \tag{4.26}$$

Уравнение (4.26) называется уравнением Пуассона, $\nabla^2 = \Delta$ – лапласиан. С учетом (1.23) в декартовой системе координат (4.26) может быть представлено в форме

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Уравнение Пуассона описывает электростатическое поле в точках расположения свободных зарядов, т. е. в точках, где $\rho \neq 0$. Если $\rho = 0$, то (4.26) преобразуется к виду

$$\nabla^2\varphi = 0\,. \qquad (4.27)$$

Уравнение (4.27) называется уравнением Лапласа. Оно описывает электростатическое поле в областях, где нет свободных зарядов.

Для случая неоднородной среды ($\varepsilon_a = f(\overline{r})$) выполним следующие преобразования. Используя известное соотношение из векторного анализа [2]

$$\operatorname{div} b\overline{a} = b\operatorname{div}\overline{a} + \overline{a}\operatorname{grad} b\,,$$

с учетом (3.1) и (4.14) левую часть второго уравнения (4.1) представим как

$$\operatorname{div}\overline{D} = \operatorname{div}\varepsilon_a\overline{E} = \varepsilon_a\operatorname{div}\overline{E} + \overline{E}\operatorname{grad}\varepsilon_a =$$

$$= -\varepsilon_a\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\varepsilon_a = -\varepsilon_a\nabla^2\varphi - \operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\varepsilon_a. \qquad (4.28)$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение (4.1) и разделив его правую и левую части на ε_a, получим

$$\nabla^2\varphi + \frac{\operatorname{grad}\varepsilon_a}{\varepsilon_a}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}\,. \qquad (4.29)$$

Уравнение (4.29) описывает электростатическое поле в неоднородной среде в точках, где $\rho \neq 0$. Очевидно, что уравнение (4.26) является частным случаем (4.29) при $\varepsilon_a = \mathrm{const}$.

Таким образом, предмет электростатики заключается в изучении одного единственного уравнения (4.29), или (4.26). Зная потенциальную функцию $\varphi(\overline{r})$, по выражению (4.14) легко определить напряженность поля $\overline{E}$. Такой подход к задачам электростатики является более простым, чем непосредственного решение системы уравнений Максвелла (4.1).

4.5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВА. ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ

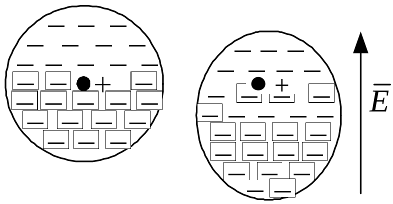
Ранее отмечалось, что сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме в ε_r раз больше, чем в диэлектрике (см. раздел 4.1). Поскольку сила взаимодействия зарядов пропорциональна напряженности возникающего электрического поля, правомерен вопрос: почему напряженность электрического поля в диэлектрике уменьшается?

Изменение напряженности электрического поля вызывается *поляризацией* диэлектрика [1, 10]. Рассмотрим явление поляризации. Что происходит внутри диэлектрика с физической точки зрения, когда он попадает в электрическое поле?

Диэлектрики в зависимости от протекающих в них процессов при внесении их в электрическое поле делятся на две группы. В первую группу входят диэлектрики, состоящие из *неполярных* молекул, во вторую – диэлектрики, состоящие из *полярных* молекул.

Неполярная молекула – это нейтральная молекула вещества, состоящая из нейтральных атомов (атома). Атом имеет ядро с положительным зарядом, окруженное отрицательными электронами (ядро окружено "облаком" электронов). Центры тяжести положительного и отрицательного зарядов в нейтральном атоме совпадают (рис. 4.5,*а*).

В электрическом поле ядро притягивается в одну сторону, а электроны – в другую. Распределение электронов атома сдвигается относительно ядра, центр тяжести отрицательного заряда смещается и больше не совпадает с центром тяжести положительного заряда (рис. 4.5,*б*). Атом (молекула) превращается в диполь.



а *б*

Рис. 4.5

Диполем называют совокупность двух равных зарядов противоположного знака, находящихся друг от друга на расстоянии l_k, малом по сравнению с расстоянием до точек, в которых определяется напряженность электрического поля (рис. 4.6). Диполь характеризуется электрическим моментом.

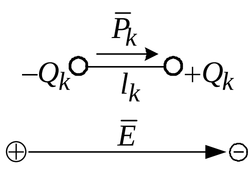


Рис. 4.6

Электрическим моментом диполя $\overline{P}_k$ называется произведение заряда Q_k и плеча диполя $\overline{l_k}$, где плечо диполя – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, длина которого равна расстоянию между зарядами, т. е.

$$\overline{P_k} = Q_k \overline{l_k} . \tag{4.30}$$

Для молекул l_k – это расстояние, на которое центр тяжести отрицательного заряда смещается относительно центра тяжести положительного заряда.

Под действием внешнего электрического поля все неполярные (нейтральные) молекулы диэлектрика превращаются в диполи, которые стремятся ориентироваться в пространстве таким образом, чтобы их электрические моменты были направлены по вектору напряженности электрического поля (рис. 4.6). Это явление и называют *поляризацией* диэлектриков первой группы.

Молекулы диэлектриков второй группы представляют собой диполи даже при отсутствии внешнего поля. Именно поэтому их называют *полярными*. Диэлектриком с полярными молекулами является, например, хлористый водород. Благодаря тепловому движению диполи располагаются хаотично, так что при отсутствии внешнего электрического поля их электрические поля взаимно нейтрализуются. Под действием внешнего поля полярные молекулы (диполи) ориентируются по направлению вектора его напряженности. Так происходит *поляризация* диэлектриков второй группы.

Итак, ***поляризацией*** называется процесс появления под действием электрического поля ориентированных по полю диполей. В результате поляризации электрическое поле возникает и внутри диэлектриков. Для характеристики поляризации используют вектор поляризации $\overline{P}$.

Вектором поляризации $\overline{P}$ называют электрический момент единицы объема,

$$\overline{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{P_k}}{\Delta V} , \tag{4.31}$$

где $\overline{P_k}$ – электрический момент диполя, определяемый (4.30); ΔV – физически малый объем, т.е. очень маленький объем, в котором явления описываются классической физикой (классической электродинамикой, а не квантовой); n – количество диполей в объеме ΔV. Электрический момент единицы объема, в отличие от момента одной молекулы или пары молекул, является макроскопической характеристикой процесса поляризации.

Для однородных и изотропных диэлектриков в относительно слабых полях вектор поляризации $\overline{P}$ пропорционален напряженности электрического поля,

$$\overline{P} = \chi_a \overline{E}\,, \tag{4.32}$$

где $\chi_a = \varepsilon_0 \chi_r$ – абсолютная диэлектрическая восприимчивость среды; χ_r – относительная восприимчивость среды, χ_r связана с ε_r соотношением $\chi_r = \varepsilon_r - 1$, подставляя которое в уравнение (4.32), получим

$$\overline{P} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \overline{E}\,. \tag{4.33}$$

Вектор электрической индукции связан с векторами $\overline{E}$ и $\overline{P}$ следующим образом [16]:

$$\overline{D} = \overline{P} + \varepsilon_0 \overline{E}\,. \tag{4.34}$$

Подставляя (4.33) в (4.34), легко получить известную связь между векторами $\overline{D}$ и $\overline{E}$ для однородных изотропных сред и слабых полей (3.1). Вектор $\overline{D}$ является наиболее общей характеристикой электрического поля в любых средах, именно он входит в уравнения Максвелла. В отличие от напряженности поля $\overline{E}$ вектор $\overline{D}$ не зависит от свойств среды. Так, для точечного заряда в соответствии с (4.4)

$$\overline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}\overline{1}_r\,, \qquad \overline{D} = \varepsilon_a \overline{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\overline{1}_r\,.$$

Вернемся к поляризации диэлектриков. Внесем пластину из диэлектрика в однородное электрическое поле $\overline{E}_0$ (рис. 4.7).

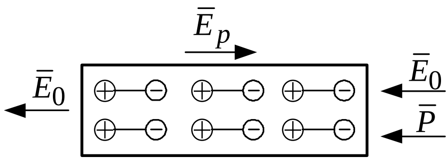


Рис. 4.7

В результате поляризации на торцах появляются так называемые нескомпенсированные (избыточные) *связанные* заряды [4]: на одной торцевой поверхности – отрицательный заряд, на другой – положительный. Связанные заряды создают свое поле, напряженность $\overline{E}_p$ которого направлена против напряженности внешнего поля $\overline{E}_0$. Напряженность результирующего поля (поля внутри диэлектрика) $\overline{E}$ уменьшается по сравнению с $\overline{E}_0$:

$$\overline{E} = \overline{E}_0 + \overline{E}_p, \quad E = E_0 - E_p.$$

Именно поляризацией диэлектрика можно объяснить, почему заряженное тело притягивает маленькие кусочки диэлектрика. Например, если причесываться в сухой день, расческа будет притягивать маленькие кусочки бумаги. Кусочки бумаги около расчески – это кусочки диэлектрика, помещенного в электрическое поле, возникающего вокруг расчески при ее трении о волосы. Вследствие поляризации на поверхности кусочков бумаги возникают заряды обоих знаков, притягиваемые и отталкиваемые расческой. Эффект результирующего притяжения возникает за счет того, что поле вблизи от расчески сильнее, чем вдали от нее, поскольку длина расчески не бесконечна и ее заряд локализован (поле неоднородно). В случае плоскопараллельного конденсатора, поле которого однородно, нейтральный кусочек бумаги не притянется ни к одной из его пластин. *Неоднородность* поля (его изменение) составляет существенную часть механизма притяжения (рис. 4.8).

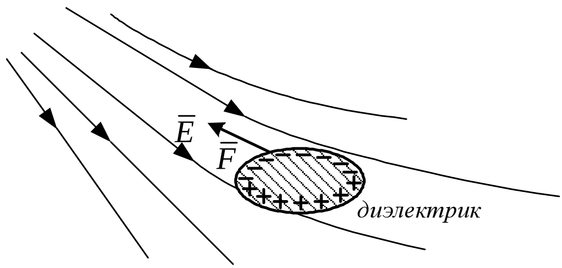


Рис. 4.8

Диэлектрические тела всегда стремятся из области слабого поля в область, где поле сильнее. Сила, действующая на малые объекты, пропорциональна квадрату напряженности электрического поля,

$$\bar{F} = C \operatorname{grad} E^2 ,$$

где C – коэффициент пропорциональности, зависящий от диэлектрической проницаемости и формы диэлектрического тела. Действительно, индуцированный связанный заряд на поверхности диэлектрического тела пропорционален напряженности поля E, сила действия поля на заряды в соответствии с (4.5) также пропорциональна E, следовательно, $F \sim E^2$. Однако, как уже говорилось выше, результирующая сила возникает только в случае, если поле изменяется от точки к точке, т.е. $\operatorname{grad} E^2 \neq 0$.

Математически процесс поляризации диэлектриков описывается соотношением, аналогичным теореме Гаусса, рассмотренной в разделе 3.1.1.

Поток вектора поляризации $\bar{P}$ *сквозь произвольную замкнутую поверхность* S *равен взятой с обратным знаком алгебраической сумме нескомпенсированных (избыточных) связанных зарядов, находящихся в объеме, ограниченном этой поверхностью:*

$$\oint_S \bar{P} d\bar{S} = -\sum_{k=1}^{n} Q_{k\text{связ}} = -Q_{\text{связ}} = -\int_V \rho_{\text{связ}} dV , \tag{4.35}$$

где $Q_{k\text{связ}}$ – k-й дискретный нескомпенсированный связанный заряд, расположенный внутри объема V; $Q_{\text{связ}}$ – полный (суммарный) связанный заряд внутри объема; $\rho_{\text{связ}}$ – объемная плотность избыточного связанного заряда (для случая его непрерывного распределения),

$$\rho_{\text{связ}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q_{\text{связ}}}{\Delta V} = \frac{dQ_{\text{связ}}}{dV} .$$

Соответствующая дифференциальная форма закона (4.35) имеет вид

$$\operatorname{div} \bar{P} = -\rho_{\text{связ}} . \tag{4.36}$$

Физическое и геометрическое содержания (4.35) и (4.36) заключаются в следующем. Источниками вектора $\bar{P}$ являются связанные заряды. Линии вектора $\overline{P}$ начинаются и заканчиваются на *связанных* зарядах.

Используя соотношения (4.34), (4.35), а также второе уравнение системы (4.1) и известное из векторного анализа правило вычисления дивергенции [2]

$$\operatorname{div}(\overline{a}+\overline{b})=\operatorname{div}\overline{a}+\operatorname{div}\overline{b}\,,$$

можно получить обобщенное выражение для напряженности электрического поля $\overline{E}$

$$\operatorname{div}\overline{E}=\frac{\rho+\rho_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}\,. \tag{4.37}$$

Физический смысл выражения (4.37): источниками вектора $\overline{E}$ являются как свободные, так и связанные заряды. Геометрическое содержание (4.37): линии вектора $\overline{E}$ начинаются и заканчиваются на *свободных* и *связанных* зарядах.

Вообще, выражения (4.36), (4.37), как и второе уравнение системы (4.1), прежде всего, необходимо понимать математически: линии векторов $\overline{D}$, $\overline{P}$ и начинаются и заканчиваются соответственно на свободных и связанных зарядах, линии вектора $\overline{E}$ – как на свободных, так и на связанных зарядах. Поля векторов $\overline{D}$, $\overline{P}$ и $\overline{E}$ возбуждаются как свободными, так и связанными зарядами. Если есть вектора $\overline{P}$ и $\overline{E}$, то согласно (4.34) есть и вектор $\overline{D}$.

Можно привести пример, когда свободных зарядов нет, а поле вектора $\overline{D}$ существует. Рассмотрим сегнетоэлектрик (сегнетова соль, $\varepsilon_r \approx 10^4$), помещенный в однородное электрическое поле. Сегнетоэлектрики относятся ко второй группе диэлектриков, т. е. это диэлектрики с готовыми диполями, расположенными хаотично. Сегнетоэлектрик поляризуется, возникает вектор $\overline{P}$, характеризующий поляризацию. Следовательно, появляется и вектор $\overline{D}$, хотя свободных зарядов внутри диэлектрика нет,

$$\operatorname{div}\overline{D}=0\,.$$

Это означает, что линии $\overline{D}$ непрерывны и замкнуты, т. е. нет свободных зарядов – нет начала и конца этих линий, а поле вектора $\overline{D}$ существует.

Для того чтобы определить, где располагаются связанные заряды при поляризации диэлектрика, вернемся к системе уравнений Максвелла (4.1), описывающих все явления, связанные с электростатическим полем. Преобразуем левую часть второго уравнения (4.1), используя (4.28):

$$\operatorname{div}\overline{D} = \operatorname{div}\left(\varepsilon_0\varepsilon_r\overline{E}\right) = \varepsilon_r \operatorname{div}\varepsilon_0\overline{E} + \varepsilon_0\overline{E}\operatorname{grad}\varepsilon_r\ . \qquad (4.38)$$

Из (4.34) следует, что

$$\varepsilon_0\overline{E} = \overline{D} - \overline{P}\ .$$

Подставляя последнее выражение в (4.38), получим

$$\varepsilon_r \operatorname{div}\left(\overline{D} - \overline{P}\right) + \varepsilon_0\overline{E}\operatorname{grad}\varepsilon_r = \varepsilon_r\left(\operatorname{div}\overline{D} - \operatorname{div}\overline{P}\right) + \varepsilon_0\overline{E}\operatorname{grad}\varepsilon_r\ .$$

С учетом (4.36) второе уравнение (4.1) окончательно примет вид

$$\rho_{\text{связ}} = \rho\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}\overline{E}\operatorname{grad}\varepsilon_r\ . \qquad (4.39)$$

Из (4.39) следует, что в безграничной воздушной среде (или в вакууме), где $\varepsilon_r = 1$, связанные заряды не возникают:

$$\rho_{\text{связ}}\Big|_{\varepsilon_r=1} = 0\ .$$

Если в диэлектрике с $\varepsilon_r \neq 1$ имеются свободные заряды, то за счет поляризации появляются и связанные заряды.

Наиболее интересным случаем, описываемым (4.39), является случай, когда в среде, где $\varepsilon_r \neq 1$, свободных зарядов нет, т. е. $\rho = 0$. Рассмотрим процесс поляризации произвольной неоднородной среды под действием только электрического поля $\overline{E}$. Формула (4.39) соответственно будет иметь вид

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}\overline{E}\operatorname{grad}\varepsilon_r\ . \qquad (4.40)$$

1. Пусть $\overline{E} = 0$, тогда $\rho_{\text{связ}} = 0$. Если поля нет, то нет и индуцированных связанных зарядов.

2. Пусть $\overline{E} \neq 0$, $\varepsilon_r = \text{const}$, следовательно, $\rho_{\text{связ}} = 0$. При действии поля любой конфигурации в однородной среде (нет границ раздела) связанные заряды не возникают.

3. Среда неоднородная ($\varepsilon_r = f(\overline{r})$), $\overline{E} \neq 0$. Из (4.40)

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}\bar{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}E\left|\mathrm{grad}\,\varepsilon_r\right|\cos\left(\bar{E}\,\hat{,}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_r\right).$$

а) Направление напряженности поля $\bar{E}$ совпадает с направлением $\mathrm{grad}\,\varepsilon_r$. В этом случае

$$\cos\left(\bar{E}\,\hat{,}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_r\right) = 1, \qquad \rho_{\text{связ}} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}E\left|\mathrm{grad}\,\varepsilon_r\right|.$$

б) Напряженность поля $\bar{E}$ направлена перпендикулярно $\mathrm{grad}\,\varepsilon_r$, тогда

$$\cos\left(\bar{E}\,\hat{,}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_r\right) = 0, \qquad \rho_{\text{связ}} = 0.$$

Связанных зарядов нет ни в одной точке данной среды.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Изоляционную бумагу, неоднородно пропитанную маслом (неоднородная пропитка – брак), поместили в электростатическое поле $\bar{E}$. Вследствие неоднородной пропитки ($\varepsilon_r = f(\bar{r})$, $\mathrm{grad}\varepsilon_r \neq 0$) получили слои бумаги с разными относительными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{r1} < \varepsilon_{r2} < \varepsilon_{r3} < \varepsilon_{r4} < \varepsilon_{r5}$. Определить, где возникают связанные заряды. Рассмотрим два случая.

1. Направление напряженности поля $\bar{E}$ совпадает с направлением $\mathrm{grad}\,\varepsilon_r$ (рис. 4.9,*а*). Связанные заряды ($\rho_{\text{связ}} \neq 0$) появляются на границах раздела сред с разными диэлектрическими свойствами.

2. Напряженность поля $\bar{E}$ направлена перпендикулярно $\mathrm{grad}\varepsilon_r$ (рис. 4.9,*б*), тогда $\rho_{\text{связ}} = 0$, т.е. связанные заряды не возникают.

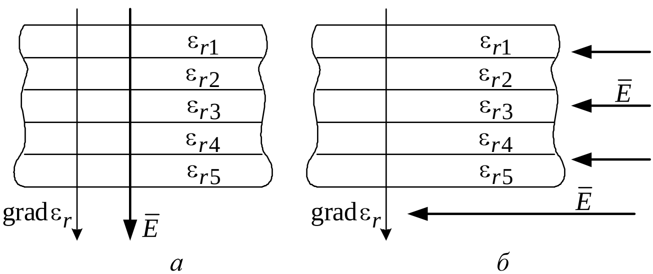


Рис. 4.9

Таким образом, связанные заряды располагаются на границах раздела сред с разными электрическими свойствами (в местах неоднородностей среды), если угол между направлением напряженности электрического поля $\bar{E}$ и направлением $\mathrm{grad}\,\varepsilon_r$ не равен 90°, при этом количество зарядов будет максимальным в случае, когда $\bar{E}$ параллельна $\mathrm{grad}\,\varepsilon_r$.

Пример 2. Пластина из диэлектрика с $\varepsilon_r > 1$ помещена в однородное электростатическое поле $\bar{E}$. Размеры пластины ограничены, окружающая среда – воздух ($\varepsilon_r = 1$) (рис. 4.10). Определить, где появится связанный заряд.

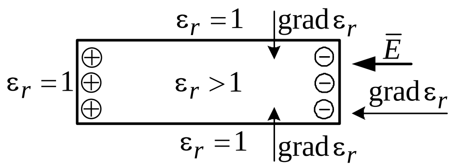


Рис. 4.10

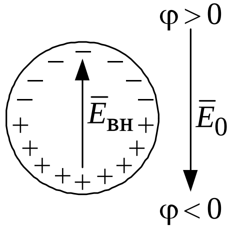
Как ясно из рис. 4.10, связанные заряды появятся на торцах пластины (на границах раздела сред) в местах, где напряженность $\bar{E}$ параллельна $\mathrm{grad}\,\varepsilon_r$.

4.6. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Проводник электричества – это твердое или жидкообразное (жидкость) тело, в котором имеется большое количество свободных зарядов (в твердом теле – это электроны, в жидком – ионы).

Электроны в веществе могут двигаться свободно (хаотическое движение), но не могут покидать поверхности тела. В проводнике (металле) так много свободных электронов, что под действием всякого электрического поля возникает упорядоченное направленное движение многих из них, т.е. возникает электрический ток. Ток электронов должен непрерывно поддерживать свое существование за счет внешних источников энергии, иначе движение электронов прекратится, как только они разрядят источники, создавшие поле. В условиях электростатики, при отсутствии постоянных источников, электроны в проводнике движутся только до тех пор, пока не расположатся таким образом, что повсюду внутри проводника возникнет нулевое электрическое поле. Как правило, это происходит в считанные доли секунды. Следует подчеркнуть, что возможно только такое *электростатическое решение*, когда поле всюду внутри проводника равно нулю.

Поместим твердое проводящее тело (проводящий шар) в однородное электростатическое поле $\overline{E}_0$. Примерная картина расположения зарядов на поверхности шара приведена на рис. 4.11.



$$E_0 = E_{\text{вн}},$$
$$\overline{E} = \overline{E}_0 + \overline{E}_{\text{вн}},$$
$$E = E_0 - E_{\text{вн}} = 0.$$

Рис. 4.11

На поверхности тела, обращенной в сторону более высокого потенциала ($\varphi > 0$), скапливаются отрицательные заряды, а на противоположной стороне ($\varphi < 0$) – положительные. Внутри проводника возникает поле $\overline{E}_{\text{вн}}$, уравновешивающее внешнее электростатическое поле $\overline{E}_0$, вследствие чего результирующее поле внутри шара $\overline{E}$ равно нулю. Хотя сумма зарядов тела равна нулю, заряды, выступившие на его поверхность, оказывают существенное влияние на поле *вне проводника*. Если проводящее тело произвольной формы зарядить положительно (рис. 4.12), заряды на его поверхности распределятся таким образом, что поле внутри проводника $\overline{E}$ будет равно нулю, а вне тела возникнет электростатическое поле $\overline{E}_{\text{внеш}}$. Итак, никакое статическое распределение зарядов снаружи не создает поля внутри проводника.

Рассмотрим поле внутри проводящего тела ($\overline{E} = 0$). Согласно (4.14)

$$\overline{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\overline{n}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

следовательно,

$$\varphi = \text{const}.$$

Таким образом, потенциал φ внутри проводника от точки к точке не изменяется, т.е. *любой проводник – это эквипотенциальная область, и его поверхность является эквипотенциальной*. Вспоминая свойства градиента функции (см. раздел 1.3), приходим к следующему выводу. Электрическое поле возле поверхности проводника не имеет тангенциальной составляющей, т.е. поле направлено по нормали к его поверхности. Этот вывод очевиден и с математической ($\overline{E} = -\operatorname{grad}\varphi$), и с физической точек зрения. Действительно, касательная составляющая напряженности поля привела бы в движение заряды, расположенные на поверхности проводящего тела (возник бы электрический ток по поверхности), что уже не является случаем электростатического поля (поля неподвижных зарядов).

Поскольку в проводящем материале электрическое поле всюду равно нулю, то

$$\operatorname{div}\overline{E} = 0,$$

и в соответствии с теоремой Гаусса (3.17) плотность свободного заряда внутри проводника обращается в нуль, $\rho = 0$. Таким образом, все заряды находятся на поверхности проводящего тела в узком слое толщиной в один – два атома.

Из сказанного ясно, что внутри сплошного проводника и в полом проводящем теле электрического поля нет, внутри проводящей сетки (сетчатый экран) поле также равно нулю. Если полый проводник заземлить, то потенциал во всех точках полости будет нулевым, т.е. полость внутри проводника будет полностью изолирована от влияния внешних электростатических полей. На этом принципе основана электростатическая защита (экранирование) электрического оборудования от влияния внешних полей.

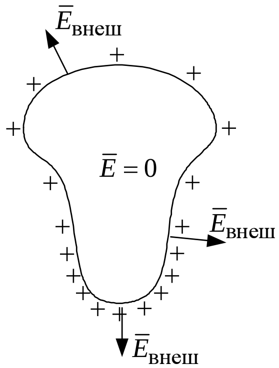


Рис. 4.12

Свойство зарядов располагаться на внешней поверхности проводника используется в электростатических генераторах, предназначенных для накопления больших зарядов и достижения разности потенциалов в несколько миллион вольт. Примером является электростатический генератор Ван-де-Граафа [16].

Как видно из рис. 4.12, на поверхности нижней части проводящего тела скапливается больше зарядов. Это объясняется тем, что заряды под действием кулоновских сил взаимного отталкивания стремятся как можно шире растечься по поверхности проводника (на поверхности заряды удерживаются внутримолекулярными силами), а любые выступы и острия всегда являются наиболее удаленными от остальной поверхности частями. Относительно малое количество зарядов на заостренных частях проводящего тела может создать большую поверхностную плотность, а следовательно, и напряженность электрического поля вблизи таких частей значительно увеличивается. Этим свойством проводников можно объяснить разряды грозовых туч над куполами (заостренными концами) зданий, одиночно стоящими деревьями, столбами и т.д. На этом же свойстве основан принцип действия громоотвода, примером которого может служить очень высокий заземленный проводящий стержень.

4.7. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Уравнения (4.1) и (4.36), описывающие электростатическое поле в произвольной безграничной среде, сведем в единую систему:

$$
\left.\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\overline{E} = 0;\\
&\operatorname{div}\overline{D} = \rho;\\
&\operatorname{div}\overline{P} = -\rho_{\text{связ}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.41}
$$

С математической точки зрения "безграничность" среды означает, что указанные уравнения справедливы в области непрерывности входящих в них функций. В реальных условиях электрические явления протекают в ограниченных средах, т.е. на практике имеются границы раздела сред с разными электрическими свойствами, на которых функции, входящие в уравнения (4.41), терпят разрыв.

Необходимо отметить, что законы поля в безграничной среде и на границах раздела сред неизменны, отличается лишь их вид (математическая запись) в областях непрерывности и разрыва функций, входящих в уравнения (4.41).

Математические формулы, отражающие законы электростатического поля на границах раздела сред с разными электрическими свойствами, называются ***граничными условиями*** *в электростатическом поле.*

Для получения граничных условий обычно переходят к интегральной форме записи законов поля, применяя их на границе раздела сред. Затем, учитывая свойства поля на границе раздела, вновь возвращаются к дифференциальной форме [1, 14, 15, 16]. Обсудим граничные условия без вывода, используя формулы векторного анализа и отдельные выкладки из [1, 14, 15].

4.7.1. Первое граничное условие

Первое граничное условие – это математическая запись второго уравнения системы (4.41) на поверхности раздела сред с разными электрическими свойствами:

$$\operatorname{Div}\overline{D} = \sigma, \tag{4.42}$$

где σ – поверхностная плотность свободного заряда, $\operatorname{Div}\overline{D}$ – поверхностная дивергенция, согласно [1, 2, 14, 15]

$$\operatorname{Div}\overline{D} = \left(\overline{D}_1 - \overline{D}_2\right)\overline{n} = D_{1n} - D_{2n}, \tag{4.43}$$

где $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ – вектора электрической индукции в средах с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_{r1} и ε_{r2} соответственно (рис. 4.13); D_{1n}, D_{2n} – проекции соответствующих векторов на нормаль $\overline{n}$ к поверхности раздела двух сред. На рис. 4.13 $\overline{D}_{1n} = D_{1n}\overline{n}$, $\overline{D}_{2n} = D_{2n}\overline{n}$ – нормальные составляющие векторов $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$; $\overline{D}_{1t} = D_{1t}\overline{1}_t$, $\overline{D}_{2t} = D_{2t}\overline{1}_t$ – их тангенциальные составляющие, D_{1t}, D_{2t} – проекции векторов $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ на касательную
4.13 $\overline{1}_t$, направленную вдоль границы раздела сред.

Подставляя (4.43) в (4.42), получим

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma . \qquad (4.44)$$

Таким образом, *нормальная проекция вектора электрической индукции на границе раздела двух сред претерпевает скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов, распределенных на этой границе*.

Соотношения (4.42) и (4.44) называют ***первым граничным условием*** в электростатическом поле. Для расчетов, как правило, используют форму (4.44).

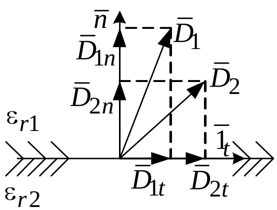


Рис. 4.13

Используя (3.1), аналогичные соотношения легко получить и для вектора напряженности электростатического поля на границе раздела двух сред, поскольку

$$\overline{D}_1 = \varepsilon_{a1}\overline{E}_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\overline{E}_1 ,$$

$$\overline{D}_2 = \varepsilon_{a2}\overline{E}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\overline{E}_2 ,$$

$$D_{1n} = \varepsilon_{a1}E_{1n} = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_{1n} , \quad D_{2n} = \varepsilon_{a2}E_{2n} = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_{2n} ,$$

где E_{1n}, E_{2n} – нормальные проекции векторов $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$ соответственно.

Первое граничное условие несет информацию о том, как ведут себя нормальные проекции векторов $\overline{D}$ и $\overline{E}$ на границе раздела сред с разными электрическими свойствами.

В случае отсутствия свободных зарядов на поверхности раздела сред ($\sigma = 0$) выражение (4.42) примет вид

$$\operatorname{Div}\bar{D} = 0\,, \tag{4.45}$$

тогда из (4.43)

$$D_{1n} - D_{2n} = 0\,,$$

или

$$D_{1n} = D_{2n}\,. \tag{4.46}$$

Соответственно для нормальных проекций вектора $\bar{E}$ имеем:

$$\varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_{a2} E_{2n}\,,$$

$$E_{1n} = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}} E_{2n} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_{2n}\,. \tag{4.47}$$

Итак, в случае отсутствия на границе раздела двух сред свободного заряда нормальная проекция вектора $\bar{D}$ непрерывна, а нормальная проекция напряженности поля $\bar{E}$ терпит разрыв (рис. 4.14).

На рис. 4.14 $\bar{E}_{1n} = E_{1n}\bar{n}$, $\bar{E}_{2n} = E_{2n}\bar{n}$ – нормальные составляющие векторов $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$; $\bar{E}_{1t} = E_{1t}\,\bar{1}_t$, $\bar{E}_{2t} = E_{2t}\,\bar{1}_t$ – их тангенциальные составляющие, E_{1t}, E_{2t} – проекции векторов $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$ на касательную $\bar{1}_t$.

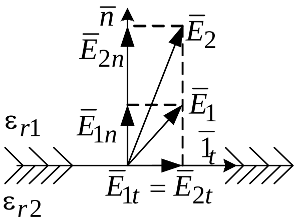


Рис. 4.14

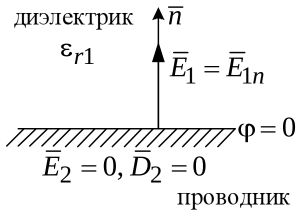


Рис. 4.15

Рассмотрим частный случай электростатического поля на границе раздела "проводник – диэлектрик" (рис. 4.15). В проводящей среде электрическое поле равно нулю (см. раздел 4.6), т.е. $\bar{E}_2 = 0$, $\bar{D}_2 = 0$, $D_{2n} = 0$, следовательно, первое граничное условие (4.44) примет вид

$$D_{1n} = \sigma\,, \tag{4.48}$$

или с учетом (3.1)

$$\sigma = \varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{1n}\,. \tag{4.49}$$

В соответствии с (4.48) *нормальная проекция вектора электрической индукции (смещения) на поверхности проводника равна плотности свободного заряда, расположенного на этой поверхности.*

Свободные заряды появляются на поверхности проводника вследствие их *смещения* под действием электрического поля (см. раздел 4.6). Эти заряды называют индуцированными, т.е. "вызванными" полем. А поскольку на поверхности проводника $D_1 = D_{1n} = \sigma$, то и вектор $\overline{D}$ также называют вектором электрического смещения (индукции). Для расчета индуцированного свободного заряда на границе раздела "проводник – диэлектрик" широко используется формула (4.49).

4.7.2. Второе граничное условие

Второе граничное условие – это математическая запись первого уравнения системы (4.41) на поверхности (границе) раздела сред с разными электрическими свойствами:

$$\mathrm{Rot}\,\overline{E} = 0, \tag{4.50}$$

где $\mathrm{Rot}\,\overline{E}$ – поверхностный ротор.
Согласно векторному анализу [2], а также [15] поверхностный ротор равен:

$$\mathrm{Rot}\,\overline{E} = \overline{n} \times \left(\overline{E}_1 - \overline{E}_2\right) = \overline{E}_{1t} - \overline{E}_{2t},$$

и соотношение (4.50) примет вид:

$$\overline{E}_{1t} - \overline{E}_{2t} = 0,$$

или

$$\overline{E}_{1t} = \overline{E}_{2t}, \quad E_{1t} = E_{2t}. \tag{4.51}$$

Таким образом, *на границе раздела двух непроводящих сред (диэлектриков) тангенциальные составляющие вектора напряженности поля $\overline{E}$ равны* (рис. 4.14). Выражения (4.50) и (4.51) называют ***вторым граничным условием*** в электростатическом поле.

На границе раздела "проводник – диэлектрик", в частном случае, $\overline{E}_2 = 0$, следовательно, $\overline{E}_{2t} = 0$. Тогда из (4.51) получим:

$$\overline{E}_{1t} = \overline{E}_{2t} = 0,$$

т.е. тангенциальная составляющая вектора $\overline{E}$ на поверхности проводника равна нулю. Электрическое поле (вектор $\overline{E}$) направлено по нормали к поверхности проводника (рис. 4.15):

$$\overline{E}_1 = \overline{E}_{1n} = E_{1n}\overline{n} .$$

Все вышесказанное полностью согласуется с рассуждениями, приведенными в разделе 4.6.

4.7.3. Граничное условие для вектора поляризации. Определение плотности связанных зарядов

Граничное условие для вектора поляризации представляет собой математическую запись третьего уравнения системы (4.41) на поверхности (границе) раздела сред с разными электрическими свойствами:

$$\mathrm{Div}\,\overline{P} = -\sigma_{\text{связ}} , \qquad (4.52)$$

где $\sigma_{\text{связ}}$ – поверхностная плотность связанного заряда.

Выражая поверхностную дивергенцию вектора $\overline{P}$ через его нормальные проекции P_{1n} и P_{2n} в первой и второй средах соответственно, получим:

$$\mathrm{Div}\,\overline{P} = P_{1n} - P_{2n} = -\sigma_{\text{связ}} .$$

Последнее соотношение можно представить в виде:

$$\sigma_{\text{связ}} = -\left(P_{1n} - P_{2n}\right) . \qquad (4.53)$$

Итак, *плотность связанного заряда равна взятой со знаком "минус" разности нормальных проекций вектора поляризации в первой (ε_{r1}) и второй (ε_{r2}) средах*. Соотношения (4.52) и (4.53) называют ***граничным условием для вектора поляризации*** $\overline{P}$. Выражение (4.53) используется для расчета плотности индуцированного связанного заряда на границе раздела сред с разными электрическими свойствами.

Используя (4.34), представим нормальные проекции вектора поляризации в следующем виде:

$$P_{1n} = D_{1n} - \varepsilon_0 E_{1n}, \qquad P_{2n} = D_{2n} - \varepsilon_0 E_{2n},$$

а затем с учетом (4.44) преобразуем (4.53) к форме:

$$\sigma_{\text{связ}} = -\left(P_{1n} - P_{2n}\right) = -\left[\left(D_{1n} - D_{2n}\right) - \varepsilon_0\left(E_{1n} - E_{2n}\right)\right] =$$

$$= -\sigma + \varepsilon_0\left(E_{1n} - E_{2n}\right), \qquad (4.54)$$

где σ – плотность свободного заряда, внесенного на границу раздела двух диэлектриков.

Для случая $\sigma = 0$ (наиболее интересного для практики), когда плотность свободного заряда на границе раздела диэлектриков равна нулю, имеем:

$$\sigma_{\text{связ}} = \varepsilon_0\left(E_{1n} - E_{2n}\right). \qquad (4.55)$$

Формулы (4.54) и (4.55) позволяют определить плотность индуцированного связанного заряда по *напряженности* электрического поля на границе раздела сред и широко используются в расчетах.

Все вышесказанное приводит к следующему выводу. Если удалось рассчитать напряженность электрического поля $\overline{E}$, то можно найти все величины, характеризующие исследуемое физическое явление: σ, $\sigma_{\text{связ}}$, ρ, φ и т.д.

4.7.4. Граничные условия для потенциала

Граничные условия для потенциала следуют из первого и второго граничных условий для напряженности электрического поля. Первое граничное условие вытекает из (4.51), согласно которому $\overline{E}_{1t} = \overline{E}_{2t}$. С другой стороны, с учетом (4.14)

$$\overline{E}_{1t} = -\left|\operatorname{grad}\varphi_1\right|_{1_t}\overline{1}_t = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial l}\overline{1}_t, \qquad \overline{E}_{2t} = -\left|\operatorname{grad}\varphi_2\right|_{1_t}\overline{1}_t = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial l}\overline{1}_t.$$

Подставляя последние выражения в (4.51), получим:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial l} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial l},$$

откуда следует, что

$$\varphi_1 = \varphi_2. \qquad (4.56)$$

Соотношение (4.56) есть ***первое граничное условие для потенциала***, согласно которому *на поверхности раздела двух сред с разными электрическими свойствами потенциал непрерывен*.

Выражение (4.56) можно записать, исходя из физического смысла потенциала (см. раздел 4.3). Поскольку потенциал есть энергия (работа), затраченная полем, а энергия скачком изменяться не может (закон природы), следовательно, потенциал должен быть *непрерывен* в любых точках поля, в том числе и на границе раздела сред.

Второе граничное условие для потенциала есть запись первого граничного условия (4.44) через потенциальную функцию. Для случая $\sigma = 0$ с учетом (3.1) и (4.46) имеем:

$$\varepsilon_{r1} E_{1n} = \varepsilon_{r2} E_{2n} .$$

Представляя нормальные составляющие напряженности поля на границе раздела двух сред в виде:

$$\bar{E}_{1n} = -\left|\operatorname{grad}\varphi_1\right|_n \bar{n} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bar{n} , \quad \bar{E}_{2n} = -\left|\operatorname{grad}\varphi_2\right|_n \bar{n} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bar{n} ,$$

получим

$$\varepsilon_{r1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_{r2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} . \tag{4.57}$$

Соотношение (4.57) называется ***вторым граничным условием для потенциала***.

4.8. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Электростатическое поле описывается дифференциальными уравнениями Максвелла (4.1) или уравнениями Пуассона-Лапласа для потенциала (4.26) и (4.27), которые, по сути, являются следствием системы (4.1). Все они являются уравнениями в частных производных. Решение любой задачи электростатики сводится к решению того или иного уравнения в частных производных либо системы таких уравнений.

Уравнения в частных производных, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем случае допускают множество линейно-независимых решений. Однако каждая конкретная задача имеет одно-единственное решение, подразумевает одну-единственную картину поля.

Из множества линейно-независимых решений, допускаемых уравнениями поля, выбор одного-единственного, удовлетворяющего конкретной задаче, производится при помощи граничных условий.

В теории поля существует важное положение, называемое ***теоремой единственности решения*** [1, 8], которое приведем без вывода.

Если найдена некоторая функция, удовлетворяющая уравнениям поля и граничным условиям в данном поле, то эта функция и представляет собой то единственное решение, которое ищется.

4.9. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

Пусть имеются два любых *проводящих* тела, разделенных диэлектриком, которые несут на себе *равные* по величине и *противоположные* по знаку заряды Q. Разность потенциалов (напряжение) между телами, обусловленная этими зарядами, равна U.

Под ***емкостью*** C между двумя телами, на которых имеются равные и противоположные по знаку заряды, понимают *абсолютную величину отношения заряда на одном из тел к напряжению между телами*:

$$C = \frac{Q}{U}. \tag{4.58}$$

Емкость зависит от конфигурации тел, их размеров, расстояния между телами, а также от электрических свойств диэлектрика (от ε_r). Можно говорить и о емкости двух *любых* проводящих тел, разделенным диэлектриком.

В физике существует понятие "емкости уединенного тела", т.е. предполагается, что другое тело с противоположным зарядом ($-Q$) находится на бесконечности (бесконечно удалено) в точке, потенциал которой $\varphi_0 = 0$. Таким образом,

$$U = \varphi - \varphi_0 = \varphi,$$

где φ – потенциал в точке нахождения тела с зарядом $+Q$. Тогда согласно (4.58) емкость уединенного тела равна:

$$C = \frac{Q}{\varphi}. \tag{4.59}$$

Единицей измерения емкости является фарад (Ф):

$$[C] = \text{Кл}/\text{В} = \text{Ф}.$$

Одному фараду ($C = 1\,\text{Ф}$) равна емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на $1\,\text{В}$ при сообщении ему заряда $Q = 1\,\text{Кл}$. Фарад – очень крупная единица. На практике используются более мелкие: $1\,\text{мкФ} = 10^{-6}\ \text{Ф}$, $1\,\text{нФ} = 10^{-9}\ \text{Ф}$, $1\,\text{пФ} = 10^{-12}\ \text{Ф}$ и т.п.

Потенциал уединенного шара радиусом R, находящегося в однородной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r, с учетом (4.18) равен:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R, \tag{4.60}$$

откуда

$$R = C/4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.$$

Следовательно, емкостью $C = 1\,\text{Ф}$ обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме ($\varepsilon_r = 1$) и имеющий радиус $R = 9 \cdot 10^6$ км, что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли. А электроемкость Земли равна

$$C_з = 7 \cdot 10^{-4}\ \text{Ф} = 0.7\ \text{мФ}.$$

4.10. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Физическая реальность электрического поля проявляется в том, что поле обладает энергией. Вообще, энергия измеряется работой. Энергия электрического поля определяется работой внешних сил, затрачиваемой на разделение и перемещение зарядов. Работа этих сил полностью переходит в *потенциальную* энергию электрического поля. Если какой-либо заряд в электрическом поле перемещается под влиянием внешних сил, преодолевающих силы, действующие на заряд со стороны поля, то в результате совершаемой внешними силами работы энергия электрического поля увеличивается. За счет накопленной энергии поле, действуя на заряды, может само совершать работу. При этом, если энергия не приобретается извне, электрическая энергия поля уменьшается, превращаясь, например, в механическую или другие виды.

4.10.1. Энергия взаимодействия зарядов

Пусть имеются два точечных заряда Q_1 и Q_2, находящихся на расстоянии r_{12} друг от друга (рис. 4.16). Эта система зарядов обладает некоторым запасом энергии, поскольку была совершена определенная работа, для того чтобы удерживать их на требуемом расстоянии. Подсчитав эту работу, можно найти энергию электростатического взаимодействия двух зарядов Q_1 и Q_2.

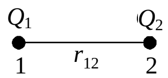


Рис. 4.16

Предположим, что заряд Q_1 неподвижен, а заряд Q_2 перемещается в поле заряда Q_1. Элементарная работа внешних сил по перемещению заряда Q_2 на расстояние dl равна:

$$dA = \overline{F}d\overline{l} = Q_2\overline{E}d\overline{l} \ ,$$

где согласно (4.5) $\overline{F} = Q_2\overline{E}$, $\overline{E}$ – напряженность электростатического поля, созданного зарядом Q_1. Полная работа, совершенная внешними силами, для того чтобы приблизить заряд Q_2 к заряду Q_1 на расстояние r_{12} (поместить его в точку 2), определится как

$$A_{\infty 2} = \int\limits_{\infty}^{2} dA = -A_{2\infty} ,$$

где $A_{\infty 2}$ – работа, совершаемая внешними силами, ($A_{\infty 2} < 0$); $A_{2\infty}$ – работа сил поля, которая и определяет его энергию,

$$A_{2\infty} = \int\limits_{2}^{\infty} dA = Q_2 \int\limits_{2}^{\infty} \overline{E}d\overline{l} \ .$$

Здесь в одном из пределов интегралов стоит бесконечность, поскольку теоретически границами поля являются бесконечно удаленные точки, в которых $\overline{E}=0$, $\varphi_\infty=0$ (φ_∞ – потенциал поля в бесконечно удаленной точке). Учитывая, что электростатическое поле согласно (4.14) является потенциальным, получим:

$$A_{2\infty}=-Q_2\int_2^\infty \operatorname{grad}\varphi d\overline{l}=-Q_2\int_2^\infty d\varphi=-Q_2\left(\varphi_\infty-\varphi_2\right)=Q_2\varphi_2, \quad (4.61)$$

где φ_2 – потенциал поля в точке расположения заряда Q_2.

Поскольку энергия определяется работой, то в соответствии с (4.61) энергия электростатического взаимодействия зарядов Q_1 и Q_2, или энергия электростатического поля зарядов Q_1 и Q_2, равна:

$$W_э=A_{2\infty}=Q_2\varphi_2. \quad (4.62)$$

Очевидно, что можно закрепить заряд Q_2 и перемещать заряд Q_1 в поле заряда Q_2. В этом случае энергия поля зарядов Q_1 и Q_2 определится как

$$W_э=Q_1\varphi_1, \quad (4.63)$$

где φ_1 – потенциал электростатического поля в точке расположения заряда Q_1.

Формулы (4.62) и (4.63) равнозначны друг другу. Действительно, для точечных зарядов с учетом (4.19) имеем:

$$\varphi_1=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_a r_{12}}, \quad \varphi_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_a r_{12}}, \quad W_э=Q_1\varphi_1=Q_2\varphi_2=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_a r_{12}}.$$

Энергию электростатического взаимодействия можно записать в эквивалентном формулам (4.62) и (4.63) виде:

$$W_э=\frac{1}{2}Q_1\varphi_1+\frac{1}{2}Q_2\varphi_2.$$

Тогда для системы n зарядов энергию взаимодействия (энергию электростатического поля n точечных зарядов) можно представить в виде

$$W_э = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k \varphi_k \,, \qquad (4.64)$$

где φ_k – потенциал электростатического поля в точке расположения k -го заряда.

Таким образом, *электрическая энергия поля системы заряженных тел равна полусумме произведений потенциалов тел на их заряды*. Формула (4.64) справедлива для точечных зарядов, а также для заряженных тел, которые с определенным приближением можно рассматривать как точечные заряды.

В случае возбуждения поля непрерывным распределением заряда (объемным или поверхностным) выражение (4.64) преобразуется к следующему виду:

$$W_э = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\, dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma\, dS \,. \qquad (4.65)$$

В качестве примера применения (4.64) получим формулу для расчета энергии электрического поля конденсатора, который можно рассматривать как систему двух тел, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами:

$$Q_1 = Q \,, \quad Q_2 = -Q \,.$$

В этом случае из (4.64) следует:

$$W_э = \frac{\varphi_1 Q_1}{2} + \frac{\varphi_2 Q_2}{2} = \frac{\varphi_1 Q}{2} - \frac{\varphi_2 Q}{2} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) Q}{2} = \frac{U_C Q}{2} \,,$$

где $U_C = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение между пластинами конденсатора.

Заряд рассматриваемой системы связан с напряжением между пластинами соотношением (4.58):

$$Q = CU_C \,,$$

где C – емкость системы двух заряженных тел, т.е. емкость конденсатора.

Тогда энергия электростатического поля конденсатора определится следующим образом:

$$W_э = \frac{CU_C^2}{2}. \qquad (4.66)$$

Формула (4.66) широко применяется в теории цепей.

4.10.2. Связь энергии электростатического поля с его напряженностью

Зададим вопрос: где размещается электрическая энергия? Правда, в ответ можно спросить: а не все ли равно? Если имеется пара взаимодействующих зарядов, то их сочетание обладает некоторой энергией. Неужели нужно непременно уточнять, что энергия сосредоточена на этом заряде или на том, или на обоих сразу, или между ними?

Из физики известно, что на самом деле сохраняется только полная, суммарная, энергия. Представление о том, где она сосредоточена, не так уж и необходимо. Однако данный вопрос не лишен смысла и с физической точки зрения весьма интересен. Оказывается, в природе энергия сохраняется локально, и можно математически показать, где она сосредоточена и как перетекает с места на место (см. раздел 3.3). Такое знание, несомненно, расширяет закон сохранения полной энергии. Кроме того, имеется и физическая причина в требовании указать, где именно заключена энергия. По теории тяготения всякая масса есть источник гравитационного притяжения, и согласно закону Эйнштейна о связи массы и энергии ($W = mc^2$) они вполне равноценны друг другу. *Всякая энергия является источником силы тяготения*. Там, где находится энергия, расположена и масса, являющаяся источником тяготения. Известно, что, ускоряясь, заряды излучают электромагнитные поля. Свет или радиоволны, распространяясь в пространстве, переносят энергию, но в этих электромагнитных волнах нет зарядов.

Исследования показывают, что *энергия сосредоточена в том пространстве, где имеется электромагнитное поле*. Этот факт отражает математическая формула (3.26), которая является следствием выражения (4.65). Для случая изотропных сред, для которых справедливо соотношение (3.1), формула (3.26) примет вид:

$$W_э = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV \,. \qquad (4.67)$$

Если $\bar{E} = 0$, то и $W_э = 0$. Выражения (3.26) и (4.67) позволяют определить энергию электрического поля как в отдельных его областях, так и во всем поле. Для этого необходимо взять лишь соответствующие пределы интегрирования. Плотность электрической энергии определяется соотношением (3.27), а для изотропных сред, как уже упоминалось в разделе 3.3, имеет вид

$$w_э = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \,.$$

Необходимо подчеркнуть, что формула (3.26) справедлива для любых сред и полей, как угодно изменяющихся в пространстве и времени (постулат Максвелла, подтверждаемый современным естествознанием).

4.11. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Если в электрическом поле находятся заряженные тела, то на эти тела действуют электрические силы, стремящиеся их перемещать или деформировать [10]. *Силы, стремящиеся привести тела в движение, называются* ***пондеромоторными****, т.е. силами, движущими весомые тела.*

Силы, действующие на заряженные тела в электростатическом поле, можно определить, используя закон Кулона или соотношения для энергии поля.

Выражение (4.5) позволяет найти силу, действующую на неподвижное малое тело с зарядом Q, находящееся в некотором поле $\bar{E}$. Если заряд распределен по объему тела или его поверхности, то величина силы определяется соотношениями:

$$F = \int_V E \rho \, dV \,, \qquad F = \int_S E \sigma \, dS \,.$$

Проекцию силы F_l на любое направление $\bar{l}$, действующей в поле системы n положительно заряженных тел, можно определить через энергию этой системы как

$$F_l = \pm \frac{\partial W_э}{\partial l}. \qquad (4.68)$$

Согласно (4.68), если при перемещении тела на расстояние ∂l в направлении $\overline{l}$ его энергия изменяется на $\partial W_э$, то отношение изменения энергии к перемещению определяет *проекцию силы* на данное направление $\overline{l}$. Здесь знак "плюс" берется при $\varphi_k = \text{const}$ [см. формулу (4.64)], т.е. когда потенциалы φ_k всех заряженных тел, входящих в систему, остаются неизменными при их перемещении. Такой случай имеет место, если все тела подключены к зажимам внешних источников с постоянными по значению ЭДС ($\varphi_k = e_k = \text{const}$). Знак "минус" в формуле (4.68) берется при $Q_k = \text{const}$ ($Q_k > 0$), т.е. когда заряды всех тел не изменяются при изменении конфигурации n-заряженных тел. На практике это возможно, если все тела после зарядки отключить от источников ЭДС. В этом случае может произойти перераспре-деление зарядов по поверхности тел, однако количество заряда на них не меняется.

Запишем проекции силы $\overline{F}$ в декартовой системе координат:

$$F_x = \pm \frac{\partial W_э}{\partial x}, \quad F_y = \pm \frac{\partial W_э}{\partial y}, \quad F_z = \pm \frac{\partial W_э}{\partial z},$$

тогда сила $\overline{F}$ равна

$$\overline{F} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k} = \pm \left(\overline{i}\,\frac{\partial W_э}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial W_э}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial W_э}{\partial z} \right) = \pm \operatorname{grad} W_э,$$

$$\overline{F} = \pm \operatorname{grad} W_э. \qquad (4.69)$$

Таким образом, сила, действующая на заряженные тела в электрическом поле, пропорциональна градиенту от энергии поля, т.е. сила действует на заряженное тело, если поле неоднородно ($\operatorname{grad} W_э \neq 0$). В свою очередь энергия электрического поля пропорциональна квадрату его напряженности: энергия больше в той точке пространства, где выше напряженность электрического поля. На рис. 4.17 показано действие электрической силы на положительно заряженное тело, внесенное в неоднородное электрическое поле. Тело с положительным зарядом выталкивается полем.

Если же тело заряжено отрицательно, то направление действия силы изменяется на противоположное, но ее величина остается неизменной ($F = \left|\mathrm{grad}\, W_э\right|$).

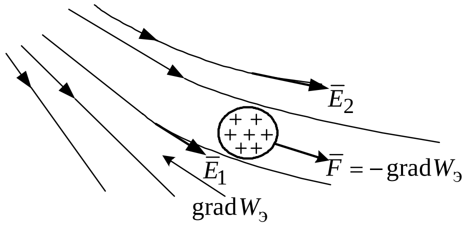


Рис. 4.17

5. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В зависимости от исходных данных и искомых величин задачи электростатики могут быть разделены на три типа.

1. Задачи *первого типа*: по заданному распределению потенциала в пространстве $\varphi(\overline{r})$ найти распределение свободных зарядов, возбудивших электрическое поле. Такого типа задачи можно решить при помощи уравнения Пуассона (4.26) или (4.29). Это наиболее простой тип задач.

2. Задачи *второго типа*: задан закон распределения свободных зарядов в пространстве в функции координат $\rho(\overline{r})$. Найти закон изменения потенциала $\varphi(\overline{r})$. Такая задача является обратной к первой, но значительно сложнее. Принципиально она состоит в решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. На практике задачи первого и второго типов встречаются редко.

3. Задачи *третьего типа*: известны потенциалы (или заряды) и геометрия тел, создающих поле. Требуется найти закон изменения $\overline{E}$ или φ во всех точках поля.

Наиболее общим методом расчета полей в задачах второго и третьего типов является *метод интегрирования* уравнений поля. Однако в ряде случаев можно использовать частные методы, которые позволяют проще и быстрее решить задачу в поставленных условиях. К таким методам относятся: метод наложения, метод изображений, графический метод, применение теоремы Гаусса и др. При решении некоторых задач используются два и более метода одновременно. Далее рассмотрим некоторые из частных методов решения.

5.1. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ

Под *заряженной осью* понимают весьма тонкий, теоретически бесконечно длинный металлический проводник (практическая аналогия – длинная тонкая проволока), на котором равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ.

Пусть заряженная ось находится в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r (рис. 5.1). Заряд, приходящийся на единицу ее длины известен и равен τ. Требуется определить напряженность поля и потенциал в любой его точке, удаленной на расстояние r от оси.

Решение. Поле заряженной оси является однородным, силовые линии поля направлены перпендикулярно заряженной оси (рис. 5.1). Для решения такой задачи достаточно использовать второе уравнение системы (4.1) в интегральной форме, т.е. теорему Гаусса (3.2), или (4.7). Для расчета напряженности электрического поля в некоторой точке, удаленной на расстояние r от оси, проведем через эту точку цилиндрическую поверхность так, чтобы ось цилиндра совпала с заряженной осью (цилиндрическая поверхность соответствует геометрии данной задачи) (рис. 5.1).

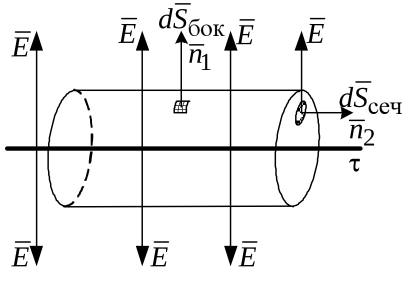


Рис. 5.1

Применим теорему Гаусса (4.7) с учетом линейного распределения заряда (см. раздел 4.2):

$$\oint_{S_ц} \bar{D} d\bar{S} = \tau l ,$$

где $S_ц$ – площадь поверхности цилиндра, l – его высота (длина). Считая среду однородной и изотропной и используя (3.1), получим:

$$\frac{\tau l}{\varepsilon_a} = \oint_{S_ц} \bar{E} d\bar{S} = \oint_{S_{бок}} \bar{E} d\bar{S} + 2 \oint_{S_{сеч}} \bar{E} d\bar{S} , \qquad (5.1)$$

где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности цилиндра, $S_{сеч}$ – площадь его сечения.

Поскольку $\bar{E} \perp d\bar{S}_{сеч}$,

$$\oint_{S_{сеч}} \bar{E} d\bar{S}_{сеч} = 0 ;$$

так как $\bar{E} \parallel d\bar{S}_{бок}$,

$$\oint_{S_{бок}} \bar{E} d\bar{S}_{бок} = E S_{бок} = E \cdot 2\pi r l .$$

Возвращаясь к (5.1), имеем:

$$\frac{\tau l}{\varepsilon_a} = E \cdot 2\pi r l ,$$

откуда

$$E = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_a} , \qquad (5.2)$$

$$\bar{E} = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_a} \bar{1}_r , \qquad (5.3)$$

где $\bar{1}_r$ – единичный вектор, направленный по прямой, соединяющей заряженную ось и данную точку пространства (от оси к точке).

Согласно (5.2) напряженность поля заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию r от точки до оси. Выражения (5.2) и (5.3) определяют напряженность поля в *любой* точке, отстоящей от оси на расстояние r.

Вектор электрической индукции и потенциал в любой точке поля с учетом (3.1) и (4.15) равны соответственно:

$$\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E} = \frac{\tau}{2\pi r}\bar{1}_r,$$

$$\varphi = -\int \bar{E}d\bar{l} = -\int \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\frac{dr}{r} =$$

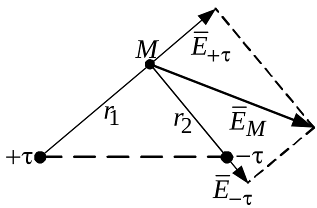
$$= -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln r + \text{const} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{r} + \text{const}. \tag{5.4}$$

5.2. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ. ПОЛЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАЗНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ ОСЕЙ

При исследовании поля двух заряженных осей применяется метод наложения (принцип суперпозиции): зная поле одной оси, находят поле двух заряженных осей.

Пусть две заряженные оси находятся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r. Одна ось имеет заряд на единицу длины, равный $+\tau$, другая заряд $-\tau$. Требуется определить напряженность поля осей в любой точке пространства.

__Решение.__ Возьмем в поле двух осей произвольную точку M, находящуюся на расстоянии r_1 от положительно заряженной оси и на расстоянии r_2 от отрицательно заряженной оси (рис. 5.2). Согласно принципу наложения результирующая напряженность поля двух осей в точке M $\bar{E}_M$ равна геометрической сумме напряженностей от каждой оси:



Рис

$$\bar{E}_M = \bar{E}_{+\tau} + \bar{E}_{-\tau}, \tag{5.5}$$

где $\overline{E}_{+\tau}$, $\overline{E}_{-\tau}$ – напряженности поля от осей с зарядами $+\tau$ и $-\tau$ соответственно. С учетом (5.3)

$$\overline{E}_{+\tau} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_1}\overline{1}_{r_1}, \quad \overline{E}_{-\tau} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_2}\overline{1}_{r_2},$$

где $\overline{1}_{r_1}$ – единичный вектор, направленный от положительно заряженной оси к точке M, $\overline{1}_{r_2}$ – единичный вектор, направленный от отрицательно заряженной оси к заданной точке.
Подставляя последние выражения в (5.5), получим

$$\overline{E}_M = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_1}\overline{1}_{r_1} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_2}\overline{1}_{r_2}. \tag{5.6}$$

Геометрическое определение $\overline{E}_M$ проиллюстрировано на рис. 5.2.

Применяя принцип наложения, с учетом (5.4) рассчитаем потенциал в точке M:

$$\varphi_M = \varphi_{+\tau} + \varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{r_1} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{r_2} + C,$$

где $\varphi_{+\tau}$ – потенциал поля положительно заряженной оси в точке M, $\varphi_{-\tau}$ – потенциал поля отрицательно заряженной оси в заданной точке, C – постоянная интегрирования, определяемая выбором точки нулевого потенциала. В данном случае за точку нулевого потенциала удобно принять точку, где $r_1 = r_2$, т.е. $\varphi = 0$ во всех точках, равноудаленных от осей. Используя это условие, получим

$$\varphi_M\big|_{r_1=r_2} = 0 + C = 0, C = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln k, \tag{5.7}$$

где $k = \dfrac{r_2}{r_1}$.

Построим картину поля двух заряженных осей. *Картина поля* – это графическое изображение совокупности силовых и эквипотенциальных линий.

Из выражения (5.7) очевидно, что уравнением эквипотенциали в поле двух заряженных осей является соотношение

$$k = \frac{r_2}{r_1} = \text{const} . \qquad (5.8)$$

Из курса математики [2] известно, что выражение (5.8) есть уравнение окружности. Запишем (5.8) в декартовой системе координат и убедимся в этом.

Расположение заряженных осей свяжем с декартовой координатной системой так, чтобы координатная ось x совпадала с прямой, соединяющей заряженные оси, а ось y находилась на одинаковом расстоянии a от них (рис. 5.3).

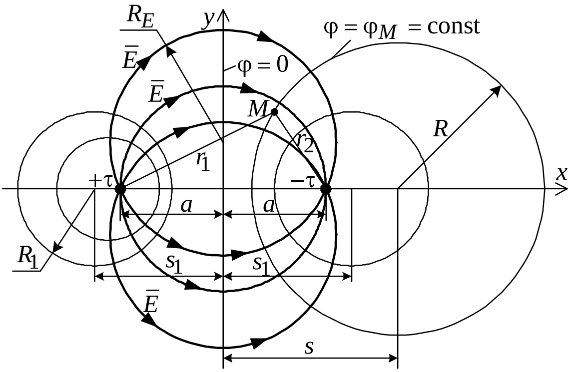


Рис. 5.3

Тогда

$$r_1 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2} , \quad r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} .$$

Подставляя полученные соотношения в (5.8), имеем

$$k = \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} . \qquad (5.9)$$

Возведем обе части (5.9) в квадрат и приведем полученное выражение к общему знаменателю, после несложных преобразований (5.9) примет вид

$$x^2 - 2ax\frac{1+k^2}{1-k^2} + y^2 = -a^2. \tag{5.10}$$

Прибавив к обеим частям уравнения (5.10) $a^2\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2$, окончательно получим

$$\left(x - a\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2a^2}{\left(1-k^2\right)^2}. \tag{5.11}$$

Уравнение окружности в декартовой системе координат имеет вид [2]

$$\left(x - x_{\text{ц}}\right)^2 + \left(y - y_{\text{ц}}\right)^2 = R^2, \tag{5.12}$$

где $x_{\text{ц}}$, $y_{\text{ц}}$ – координаты центра окружности, R – ее радиус.

Сравнивая (5.11) и (5.12), приходим к выводу, что уравнение (5.11) есть уравнение окружности со следующими параметрами:

$$x_{\text{ц}} = s = \pm a\frac{1+k^2}{1-k^2}, \quad y_{\text{ц}} = 0,\ R = \pm\frac{4ka}{1-k^2}. \tag{5.13}$$

Знак "плюс" берется для $k < 1$ ($r_1 > r_2$, область расположения отрицательно заряженной оси), знак "минус" – для $k > 1$ ($r_1 < r_2$, область расположения положительно заряженной оси). Нетрудно проверить, что

$$s^2 - a^2 = R^2. \tag{5.14}$$

Таким образом, как следует из (5.11) и (5.13), эквипотенциальные линии представляют собой окружности с центрами, расположенными на оси абсцисс. Используя (5.13), через любую точку можно провести эквипотенциальную линию на плоскости (или эквипотенциальную поверхность, представляющую собой круговой цилиндр, в пространстве). Ось ординат, вдоль которой потенциал равен нулю, отражает эквипотенциальную плоскость в пространстве, в каждой точке которой $\varphi = 0$ (рис. 5.3).

Для построения силовых линий поля необходимо воспользоваться соотношением (4.14), из которого следует, что силовые и эквипотенциальные линии электростатического поля взаимно ортогональны. При этом надо помнить, что источником силовых линий являются положительные заряды, а стоком – отрицательные. В данном случае на плоскости силовые линии представляют собой семейство окружностей

$$x^2 + \left(y - y_{цE}\right)^2 = a^2 + y_{цE}^2$$

с центрами $y_{цE}$ на оси y и радиусами R_E, равными расстоянию от их центров до заряженных осей (рис. 5.3):

$$x_{цE} = 0, \qquad R_E = \sqrt{a^2 + y_{цE}^2}\ .$$

Для практического применения результатов данной задачи полезно использовать другую зависимость для потенциалов точек поля, отличную от (5.7). Она получается в результате преобразования (5.7) с учетом выражения (5.14), которое связывает параметры эквипотенциальной линии (s и R) с расстоянием между заряженными осями и началом координат (a).

Представим (5.14) в следующем виде:

$$(s-a)(s+a) = R^2, \qquad \frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a}\ .$$

Можно показать [15], что для любой окружности (для любой эквипотенциали) выполняются следующие соотношения:

1) для всех точек, лежащих в полуплоскости положительно заряженной оси ($k > 1$, $r_1 < r_2$),

$$k = \frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a}\ ; \tag{5.15}$$

2) для всех точек, лежащих в полуплоскости отрицательно заряженной оси ($k < 1$, $r_1 > r_2$),

$$k = \frac{R}{s+a} = \frac{s-a}{R}\ . \tag{5.16}$$

Учитывая (5.15) и (5.16), выражение (5.7) можно преобразовать к следующему виду:

$$\varphi_M = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\dfrac{s+a}{R} = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\dfrac{R}{s-a} & \text{при } k > 1; \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\dfrac{R}{s+a} = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\dfrac{s-a}{R} & \text{при } k < 1. \end{cases} \tag{5.17}$$

Формулы (5.17) позволяют определить потенциал любой точки M, лежащей на эквипотенциальной поверхности (линии) радиусом R, а также значение потенциала, соответствующего данной эквипотенциальной поверхности (линии), через ее параметры.

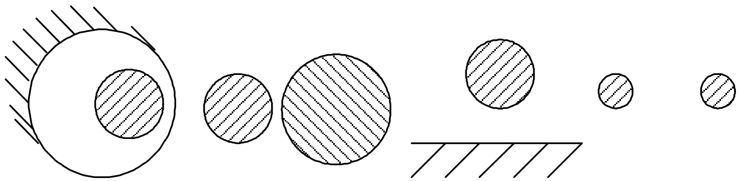
Полученные результаты расчета поля двух заряженных осей применяют для решения самых различных задач электростатики. Как уже было отмечено, линии равного потенциала – это окружности (рис. 5.3), а поверхности равного потенциала представляют собой круговые цилиндры, геометрические оси которых смещены относительно положения заряженных осей. Одна из этих поверхностей вырождается в плоскость с нулевым значением потенциала (ось y).

Если семейство равнопотенциальных поверхностей рассечь параллельными плоскостями, перпендикулярными заряженным осям, то в каждой плоскости получится одна и та же картина линий. Поля, обладающие таким свойством, называют ***плоскопараллельными***.

Величины, характеризующие такое поле, зависят только от двух координат. Поэтому с математической точки зрения *поле называется* ***плоскопараллельным****, если все величины, его характеризующие, зависят только от двух координат.*

Если тонкие металлические листы наложить на эквипотенциальные поверхности в поле двух заряженных осей и установить на них рассчитанные для данных поверхностей значения потенциалов, от их появления электрическое поле осей не изменится, поскольку поверхность металла является также эквипотенциальной. На основе теоремы единственности можно утверждать, что нам известны решения *стольких новых задач*, сколько на картине поля (рис. 5.3) имеется различных по взаимному расположению пар равнопотенциальных поверхностей, которые можно считать поверхностями проводников. Вне замкнутых проводников поле будет таким же, как и рассмотренное нами поле двух заряженных осей.

Варианты задач, которые легко можно решить, используя результаты расчета поля двух заряженных осей, приведены на рис. 5.4.



а *б* *в*

Рис. 5.4

На рис 5.4,*а* представлены системы параллельных цилиндров с несовпадающими осями, на рис. 5.4,*б* – цилиндр над проводящей плоскостью, на рис. 5.4,*в* – двухпроводная линия.

5.3. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

Одной из задач теории поля является расчет параметров устройств и систем, т.е. определение сопротивлений, индуктивностей и емкостей, которые в дальнейшем используют при расчетах методами теории цепей. Рассчитаем поле и емкость систем, приведенных на рис. 5.4.

5.3.1. Поле и емкость двухпроводной линии

Пусть два параллельных провода радиусом R_0 расположены на расстоянии d друг от друга в среде, относительная диэлектрическая проницаемость которой равна ε_r (рис. 5.5). Длина линии равна l, заряд на единицу длины одного провода $+\tau$, другого $-\tau$. Длина l настолько велика, что искажением поля у концов линии можно пренебречь. Рассчитаем поле и емкость линии.

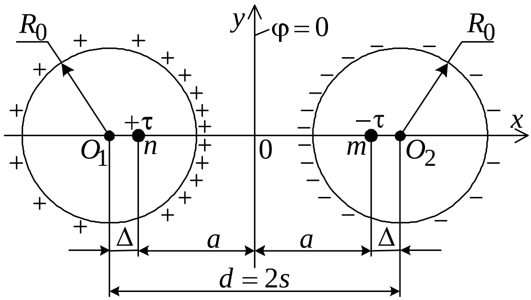


Рис. 5.5

С расположением проводов свяжем декартову систему координат (см. раздел 5.2), обозначив их геометрические центры, как O_1 и O_2 соответственно. Так как заряды влияют друг на друга, их распределение по поверхности проводов будет неравномерным. Заряды распределяются по поверхности с неодинаковой плотностью: положительные заряды притягивают отрицательные и, что понятно физически, наибольшая плотность заряда сосредотачивается на ближайших друг к другу поверхностях проводов (рис. 5.5). Таким образом, на поверхностях проводников индуцируется неравномерно распределенный свободный заряд.

Поверхность каждого провода (проводника) является эквипотенциальной, и, как уже было отмечено, задачу о поле двухпроводной линии можно свести к рассмотренной выше задаче о поле двух заряженных осей (см. раздел 5.2), считая поверхности проводников соответствующими эквипотенциальными поверхностями на картине поля двух осей, поскольку искажением поля у концов линии пренебрегаем по условию задачи. Для этого необходимо определить место расположения воображаемых заряженных осей, которые, в отличие от геометрических осей проводов, проходящих через центры O_1 и O_2, называют электрическими. Итак, ***электрические оси*** *– это такие оси, на которых надо мысленно сосредоточить заряды, чтобы поверхности проводов являлись эквипотенциальными поверхностями этих осей.*

Пусть заряженные оси проходят через точки n и m (рис. 5.5). Местоположение этих осей можно определить, используя выражение (5.14). Поскольку радиус эквипотенциальных окружностей равен радиусу проводов R_0, положение заряженных осей легко найти из следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} s^2 - a^2 &= R_0^2; \\ s &= d/2, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$a = \sqrt{s^2 - R_0^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - R_0^2}\,. \tag{5.18}$$

Из симметрии задачи следует, что электрические оси удалены от геометрических на одинаковое расстояние $\Delta = nO_1 = mO_2$ (рис. 5.5). С учетом (5.18) получим

$$\Delta = s - a = \frac{d}{2} - a = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - R_0^2}\,, \tag{5.19}$$

$$a = \frac{d}{2} - \Delta\,. \tag{5.20}$$

Как ясно из (5.19), если $d \gg R_0$, то $\Delta \to 0$. Таким образом, если расстояние между проводами значительно превосходит их радиус, то электрические оси совпадают с соответствующими геометрическим осями проводов.

Значение потенциала в любой точке поля двухпроводной линии в декартовой системе координат можно определить по формуле (5.7) с учетом (5.9) и (5.20):

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\left(\frac{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\left(\frac{\sqrt{(\frac{d}{2}-\Delta-x)^2+y^2}}{\sqrt{(\frac{d}{2}-\Delta+x)^2+y^2}}\right).$$

Поле вне проводов рассчитывается по выражению (5.6).

Для определения емкости линии на единицу длины воспользуемся соотношением (4.58):

$$C_0 = \frac{\tau}{U}\,, \tag{5.21}$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение между проводами линии.

Найдем φ_1 и φ_2, используя формулу эквивалентной задачи о двух заряженных осях (5.17). Согласно (5.17) потенциал поверхности положительно заряженного провода ($k > 1$) запишется следующим образом:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{s+a}{R_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{d-\Delta}{R_0},$$

поскольку

$$s + a = (s+a) + (s-a) - (s-a) = 2s - (s-a) = d - \Delta .$$

Потенциал поверхности отрицательно заряженного провода ($k < 1$) равен

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{R_0}{s+a} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{R_0}{d-\Delta} .$$

Следовательно, напряжение между проводами определится как

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_a} \ln \frac{d-\Delta}{R_0} . \qquad (5.22)$$

Если в задаче известно напряжение U, а не τ, то по соотношению (5.22) можно рассчитать заряд на единицу длины провода:

$$\tau = U \frac{\pi\varepsilon_a}{\ln \frac{d-\Delta}{R_0}} .$$

В соответствии с (5.21) емкость на единицу длины двухпроводной линии равна

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\varepsilon_a}{\ln \frac{d-\Delta}{R_0}} . \qquad (5.23)$$

Для проводов, подвешиваемых на столбах воздушных линий, обычно $d \gg R_0$, т.е. $\Delta \to 0$ (электрические и геометрические оси практически совпадают). Для таких двухпроводных линий справедливы частные случаи выражений (5.22) и (5.23):

$$U = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_a}\ln\frac{d}{R_0}, \qquad C_0 = \frac{\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{d}{R_0}}.$$

5.3.2. Поле и емкость параллельных цилиндров с несовпадающими осями

Пусть два проводящих цилиндра радиусами R_1 и R_2 соответственно расположены в среде с диэлектрической проницаемостью ε_r на расстоянии d. Напряжение между цилиндрами равно U. Длина цилиндров l столь велика, что искажением поля у торцов цилиндров можно пренебречь ($R_1 \ll l$, $R_2 \ll l$). Рассчитаем электрическое поле и емкость заданных цилиндров.

Возможны два варианта расположения проводящих цилиндров относительно друг друга (рис. 5.4,*а*). Рассмотрим эти варианты, связав расположение цилиндров с декартовой системой координат. По аналогии с предыдущей задачей (раздел 5.3.1) разместим электрические оси так, чтобы поверхности цилиндров стали эквипотенциальными поверхностями в поле этих осей. Геометрические оси цилиндров обозначим соответственно O_1 и O_2 (рис. 5.6). В общем случае электрические и геометрические оси цилиндров не совпадают.

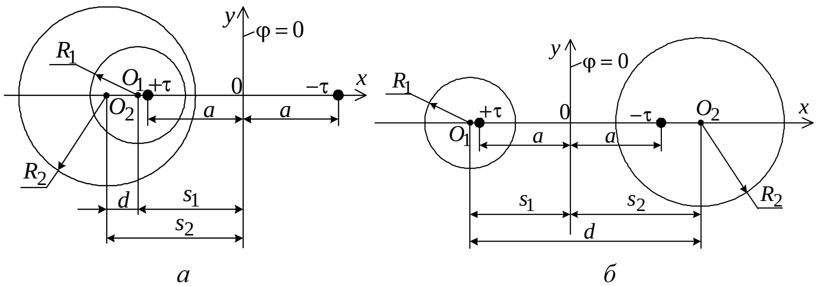


Рис. 5.6

Положение электрических осей относительно геометрических (s_1, s_2, a) определим, используя (5.14). Тогда для цилиндров, представленных на рис. 5.6,*а*, получим:

$$\left.\begin{aligned} s_1^2 - a^2 &= R_1^2; \\ s_2^2 - a^2 &= R_2^2; \\ s_2 - s_1 &= d, \end{aligned}\right\}$$

где s_1, s_2 – расстояния от геометрических осей первого и второго цилиндров соответственно до оси y (плоскости нулевого потенциала).

Для расположения цилиндров, приведенного на рис. 5.6,*б*, имеем:

$$\left.\begin{aligned} s_1^2 - a^2 &= R_1^2; \\ s_2^2 - a^2 &= R_2^2; \\ s_1 + s_2 &= d. \end{aligned}\right\}$$

Значения потенциалов на поверхностях проводящих цилиндров с учетом (5.17) рассчитаем следующим образом.

В первом случае (рис. 5.6,*а*) оба цилиндра расположены в полуплоскости положительно заряженной оси, следовательно, $k > 1$. Тогда потенциал поверхности внутреннего цилиндра равен:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln k = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{s_1 + a}{R_1} .$$

Потенциал поверхности внешнего цилиндра получим в виде

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{s_2 + a}{R_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{R_2}{s_2 - a} .$$

Напряжение между цилиндрами запишем как

$$U=\varphi_1-\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{(s_1+a)(s_2-a)}{R_1R_2}.$$

Поскольку напряжение U известно по условию задачи, найдем заряд на единицу длины τ:

$$\tau=U\frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\frac{(s_1+a)(s_2-a)}{R_1R_2}}.$$

Следовательно, в соответствии с (5.21) емкость цилиндров на единицу длины равна:

$$C_0=\frac{\tau}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\frac{(s_1+a)(s_2-a)}{R_1R_2}}.$$

Аналогично определим потенциалы проводящих цилиндров, расположенных в разных полуплоскостях (рис. 5.6,*б*). Потенциал поверхности цилиндра радиусом R_1, размещенного в полуплоскости положительной электрической оси $+\tau$, определим по формуле (5.17) при $k>1$:

$$\varphi_1=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{s_1+a}{R_1}.$$

Потенциал поверхности цилиндра радиусом R_2, размещенного в полуплоскости отрицательной электрической оси $-\tau$, по формуле (5.17) при $k<1$ равен:

$$\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{R_2}{s_2+a}.$$

Напряжение между цилиндрами имеет вид:

$$U=\varphi_1-\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{(s_1+a)(s_2+a)}{R_1R_2},$$

заряд на единицу длины определяется через напряжение как

$$\tau = U \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln \dfrac{(s_1 + a)(s_2 + a)}{R_1 R_2}}.$$

Наконец, в соответствии с (5.21) емкость цилиндров на единицу длина равна

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln \dfrac{(s_1 + a)(s_2 + a)}{R_1 R_2}}.$$

Зная заряд на единицу длины τ по формуле (5.6) нетрудно рассчитать напряженность поля в любой точке, лежащей вне проводящих цилиндров.

5.3.3. Поле и емкость системы "цилиндр – плоскость"

Пусть проводящий цилиндр радиусом R_0 подвешен на высоте h в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r над проводящей плоскостью (например, над поверхностью Земли). Напряжение между цилиндром и плоскостью равно U. Рассчитаем заряд и емкость данной системы на единицу длины, потенциал цилиндра, а также напряженность электрического поля вне цилиндра (внутри него электрическое поле равно нулю).

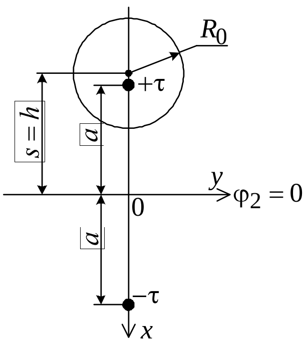


Рис. 5.7

Рис. 5.7

Расположим электрические оси так, чтобы поверхность проводящего цилиндра и проводящая плоскость стали эквипотенциальными поверхностями в поле этих осей (рис. 5.7), при решении используем декартову систему координат.

Положение электрических осей определим из системы уравнений, полученной на основании (5.14) с учетом геометрии системы (рис. 5.7):

$$\left.\begin{aligned} s^2 - a^2 &= R_0^2; \\ s &= h, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$a = \sqrt{s^2 - R_0^2} = \sqrt{h^2 - R_0^2}\ . \tag{5.24}$$

Так как цилиндр расположен в полуплоскости положительной электрической оси, для его поверхности и точек в среде, окружающих его, $k > 1$. В соответствии с (5.17) при $k > 1$ потенциал поверхности цилиндра равен

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{s + a}{R_0},$$

или, с учетом (5.24) и $s = h$,

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - R_0^2}}{R_0}.$$

Потенциал проводящей плоскости $\varphi_2 = 0$. Следовательно, напряжение между цилиндром и плоскостью определится как

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{s + a}{R_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - R_0^2}}{R_0}.$$

Выразим заряд на единицу длины через напряжение:

$$\tau = U \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln \dfrac{s + a}{R_0}} = U \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln \dfrac{h + \sqrt{h^2 - R_0^2}}{R_0}}. \tag{5.25}$$

Тогда в соответствии с (5.21) емкость системы на единицу длины равна

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{s+a}{R_0}} = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{h+\sqrt{h^2-R_0^2}}{R_0}}. \qquad (5.26)$$

В случае тонкого провода ($R_0 \ll h$, $s = a$) выражение (5.26) примет вид

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{2h}{R_0}}.$$

По формуле (5.6) с учетом (5.25) можно рассчитать поле в любой точке вне цилиндра над проводящей плоскостью.

5.4. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Результаты, полученные для поля двух заряженных осей (см. раздел 5.2), можно применить для решения задач, в которых требуется рассчитать поле, возбужденное заряженными телами, расположенными над проводящими поверхностями самого разного вида [17]. На рис. 5.8 представлена часть картины поля двух заряженных осей, приведенной на рис. 5.3. Как уже было сказано (см. раздел 5.2), если на эквипотенциальную поверхность φ_1 наложить тонкий лист металла и установить на нем соответствующее значение потенциала, от его появления поле двух заряженных осей не изменится. На самом деле мы получили решение уже совершенно другой задачи: рассчитали поле заряженной оси, расположенной над поверхностью изогнутого проводника с заданным потенциалом.

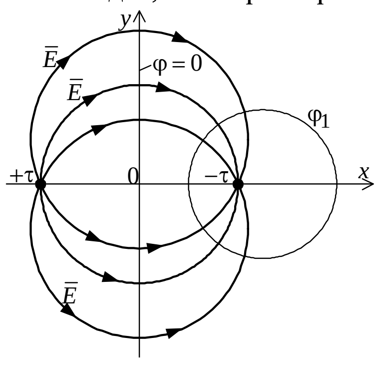


Рис.

Таким образом, решение одной задачи заменяется решением другой эквивалентной задачи. Вместо расчета поля заряженной оси, находящейся над проводящей поверхностью, можно рассчитать поле, созданное заряженной осью $+\tau$ и воображаемой осью $-\tau$, помещенной в подходящее место за указанной поверхностью. Заряженную ось (точечный заряд), которую мысленно помещают за проводящей поверхностью, называют *осью-изображением* (зарядом-изображением), или *фиктивной осью* (фиктивным зарядом).

Рассмотренная аналогия полей лежит в основе *метода изобра-жений*, который для плоских поверхностей получил название *метода зеркальных изображений*.

Суть метода изображений состоит в следующем. *Если в электрическом поле какую-либо эквипотенциальную поверхность заменить проводником той же формы и создать на нем потенциал, равный потенциалу рассматриваемой эквипотенциальной поверхности, то электрическое поле не изменится*.

В литературе часто можно найти длинные перечни решений задач электростатики для гиперболических поверхностей и поверхностей других сложных форм. Можно удивиться, как же это удалось рассчитать поля близ поверхностей столь "ужасной" формы! Однако все они довольно просто были определены "задом наперед": было найдено решение простой
задачи с фиксированными зарядами, а затем обнаружено, что появляются некоторые эквипотенциальные поверхности разных форм. Так и появились работы, в которых указано, что поле снаружи проводника выбранной формы может быть изображено определенным образом.

Математическим обоснованием метода изображений является теорема единственности решения (см. раздел 4.8), из которой следует, что *если поля в двух разных задачах описываются одинаковыми уравнениями поля (системой уравнений Максвелла или уравнением Пуассона-Лапласа) и удовлетворяют одинаковым граничным условиям, то такие поля эквивалентны*. Поле, найденное в одной задаче, является решением для другой задачи, так как найденное поле – единственное.

Примеры решения различных задач методом изображений можно найти в [9, 12]. Здесь рассмотрим решение задачи о поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости, методом *зеркальных* изображений.

Пусть положительно заряженная ось (на практике – тонкий длинный провод) с зарядом τ на единицу длины расположена в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r парал-лельно проводящей плоскости (металлическая стенка, земля) на расстоянии h от нее. Требуется рассчитать электрическое поле в диэлектрике; плотность индуцированных зарядов на проводящей плоскости; силу, с которой наведенные заряды притягивают заряженную ось.

Картина поля заряженной оси известна, ее можно изобразить, используя рис. 5.2 или 5.8, выбрав в качестве проводящей плоскость с нулевым значением потенциала $\varphi = 0$. При этом оси x и y меняем местами (рис. 5.9).

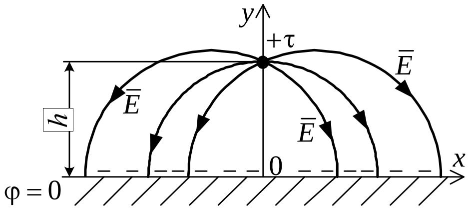


Рис. 5.9

В результате электростатической индукции на поверхности проводящей плоскости появляются свободные заряды, плотность которых изменяется с координатой x. Поле в диэлектрике создает-
ся не только заряженной осью, но и выступившими на поверхность зарядами. Возникает довольно сложная задача: чтобы определить поле, необходимо знать распределение зарядов по поверхности, а его можно найти по первому граничному условию (4.49), зная напряженность поля. Этот замкнутый круг легко разорвать, применив метод зеркальных изображений. Рассматриваемая задача эквивалентна задаче о поле двух заряженных осей, расположенных на равных расстояниях от плоскости нулевого потенциала в *безграничной* среде с относительной диэлектриче-

ской проницаемостью ε_r (см. раздел 5.2). Однако в данной задаче (рис. 5.10) заряженная ось $-\tau$ является *осью-изображением* (фиктивной осью), находящейся на расстоянии h от плоскости нулевого потенциала (имеем *зеркальное* отражение оси $+\tau$). Этим объясняется название "метод зеркальных изображений".

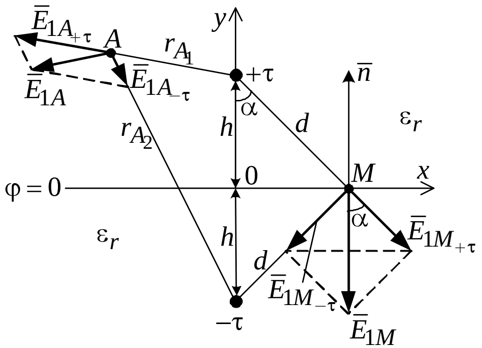


Рис. 5.10

На рис. 5.10 d – расстояние от заряженных осей до точки M, расположенной на плоскости нулевого потенциала, отражающей проводящую плоскость (границу раздела) в исходной задаче; r_{A_1}, r_{A_2} – расстояния от положительно и отрицательно заряженных осей до точки A соответственно; $\bar{E}_{1A_{+\tau}}$, $\bar{E}_{1M_{+\tau}}$ – напряженности поля положительно заряженной оси в точках A и M; $\bar{E}_{1A_{-\tau}}$, $\bar{E}_{1M_{-\tau}}$ – напряженности поля фиктивной оси $-\tau$ в указанных точках; $\bar{E}_{1A}$ и $\bar{E}_{1M}$ – результирующие напряженности поля в точках A и M; $\bar{n}$ – нормаль, направленная от границы раздела сред в полуплоскость оси $+\tau$.

Согласно теореме единственности решения электрическое поле над проводящей плоскостью (рис. 5.9) эквивалентно электрическому полю в верхней полуплоскости на рис. 5.10. Действительно, уравнения, описывающие поля в этих задачах, одинаковы (это или уравнения Максвелла для электростатического поля, или уравнение Лапласа); граничные условия также одинаковы.

Проанализируем поля, изображенные на рис. 5.9 и 5.10, с точки зрения граничных условий. Для картины поля, приведенной на рис. 5.9, первое и второе граничные условия (см. подразделы 4.7.1 и 4.7.2) записываются в форме:

$$D_{1n} = \sigma \neq 0, \quad \bar{E}_{1t} = 0.$$

Для поля, изображенного на рис. 5.10, граничные условия в точке M примут вид

$$D_{1M_n} = \varepsilon_a E_{1M_n} = \sigma_M \neq 0, \tag{5.27}$$

$$\bar{E}_{1M_t} = 0,$$

где D_{1M_n}, E_{1M_n} – нормальные проекции векторов электрической индукции и напряженности в точке M, σ_M – индуцированный (свободный) заряд в этой точке, $\bar{E}_{1M_t}$ – тангенциальная составляющая вектора напряженности в точке M. Очевидно, что граничные условия для двух полей идентичны.

Таким образом, фиктивная ось $-\tau$ математически отражает действие всех индуцированных зарядов, возникающих на границе раздела "диэлектрик-проводник". Используя ось-изображение, переходят к однородной *безграничной* среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r, расчет поля в которой не представляет трудностей, причем от любого количества осей (зарядов). При этом достаточно использовать известные формулы для полей точечных зарядов или заряженных осей, а также принцип наложения.

Вернемся к решению поставленной задачи. Напряженность поля в любой точке над проводящей плоскостью, например в точке A (рис. 5.10), согласно (5.6) равна:

$$\bar{E}_{1A} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_{A_1}} \bar{1}_{r_{A1}} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_{A_2}} \bar{1}_{r_{A2}},$$

где $\bar{1}_{r_{A1}}$, $\bar{1}_{r_{A2}}$ – единичные вектора, направленные по прямым, соединяющим точку A с положительно заряженной и фиктивной осями соответственно.

Рассчитаем индуцированный заряд на границе раздела сред. В любой точке M, принадлежащей поверхности раздела (рис. 5.10), напряженность поля согласно (5.6) равна

$$\bar{E}_{1M} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a d}\bar{1}_{d_{+\tau}} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a d}\bar{1}_{d_{-\tau}},$$

где $\bar{1}_{d_{+\tau}}$, $\bar{1}_{d_{-\tau}}$ – единичные вектора, направления которых совпадают с направлениями $\bar{E}_{1M_{+\tau}}$ и $\bar{E}_{1M_{-\tau}}$ соответственно.

Как видно из рис. 5.10, вектор напряженности поля $\bar{E}_{1M}$ противоположен нормали $\bar{n}$, т.е. нормальная проекция E_{1M_n} определится как

$$E_{1M_n} = -E_{1M} = -2E_{1M_{+\tau}}\cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = \frac{h}{d} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$; x – координата точки M на проводящей поверхности относительно положения заряженной оси; с учетом (5.2)

$$E_{1M_{+\tau}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a d}.$$

Окончательно получаем

$$E_{1M_n} = -\frac{\tau h}{\pi\varepsilon_a d^2} = -\frac{\tau h}{\pi\varepsilon_a\left(h^2 + x^2\right)},$$

откуда согласно (5.27) поверхностная плотность индуцированного заряда имеет вид

$$\sigma = \sigma_M = D_{1M_n} = \varepsilon_a E_{1M_n} = -\frac{\tau h}{\pi\left(h^2 + x^2\right)}. \qquad (5.28)$$

Как ясно из (5.28), индуцированный заряд имеет знак, противоположный знаку оси, что соответствует физике задачи. Распределение заряда по границе раздела зависит от координаты x и представлено на рис. 5.11 кривой $|\sigma| = f(x)$ ($|\sigma|$ – модуль индуцированного заряда).

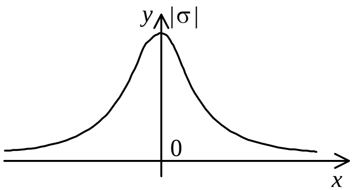


Рис.

Поскольку заряд $-\tau$ отражает в эквивалентной задаче все заряды, индуцированные на границе раздела, силу притяжения положительно заряженной оси к проводящей плоскости определим как силу взаимодействия двух заряженных осей $+\tau$ и $-\tau$:

$$\overline{F} = \tau\overline{E}_{-\tau}, \qquad F = \tau E_{-\tau},$$

где $\overline{E}_{-\tau}$ – напряженность электрического поля, созданного осью $-\tau$ в точке расположения заряженной оси $+\tau$, согласно (5.2)

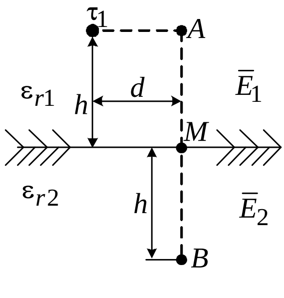
$$E_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a(2h)} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_a h}.$$

Таким образом, заряженная ось испытывает силу притяжения к плоскости, равную по величине

$$F = \frac{\tau^2}{4\pi\varepsilon_a h}.$$

5.5. ЗАДАЧИ СИРЛА. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НАД ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Задачи по расчету электрических полей над границей раздела двух диэлектриков называют *задачами Сирла*. Задачи, решаемые методом зеркальных изображений, являются частным случаем задач Сирла, когда относительная диэлектрическая проницаемость одного из диэлектриков стремится к бесконечности (он является проводником). Математическим обоснованием метода Сирла, как и метода изображений, является теорема единственности (см. раздел 4.8). Обсудим решение одной из простейших задач Сирла.



Рис

Над плоской границей раздела двух диэлектриков с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_{r1} и ε_{r2} соответственно находится положительно заряженная ось, заряд на единицу длины которой равен τ_1. Ось находится в диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{r1} на расстоянии h от границы раздела (рис. 5.12). Требуется определить напряженности электрических полей в двух средах (точки A и B), а также поверхностную плотность индуцированного заряда в точке M, лежащей на границе раздела двух сред с разными электрическими свойствами.

Итак, надо найти поле в двух средах. Само поле создается свободным зарядом τ_1, связанными зарядами, возникающими вокруг него в диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{r1}, а также поверхностным связанным зарядом, индуцированным на границе раздела двух сред. Распределение связанных зарядов неизвестно, индуцированный заряд можно рассчитать по формуле (4.55), куда входят напряженности электрических полей в двух средах. Метод зеркальных изображений здесь не применим, так как граница раздела не является эквипотенциальной (проводящей) поверхностью. Сирл предложил следующий путь решения. Поскольку основная трудность расчета такого поля связана с возникновением связанных зарядов на границе раздела, причиной чего является неоднородность среды (в однородной среде эти заряды не индуцируются), от неоднородности следует избавиться, рассмотрев *несколько* эквивалентных задач о поле в безграничной среде. Эквивалентные задачи должны формулироваться на основе теоремы единственности решения, исходя из условий:

1) эквивалентные задачи должны быть электростатическими, поскольку все задачи электростатики описываются одинаковыми уравнениями поля;

2) граничные условия в исходной задаче и эквивалентных должны быть одинаковы.

При переходе к эквивалентным задачам следует использовать следующее правило. *В области, где рассчитывается поле, никаких изменений производить нельзя, т.е. положение, количество и величины зарядов, принадлежащих этой области, должны оставаться неизменными. В область за границей раздела (другую область) вводят дополнительные фиктивные заряды так, чтобы граничные условия исходной задачи не изменялись.*

Таким образом, поле в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{r1} (рис. 5.12) рассчитывается как поле заряженной оси τ_1 и дополнительной *фиктивной* оси $\tau_2 = -\lambda\tau_1$ (см. раздел 5.4), расположенной за границей раздела на расстоянии h от нее. Оси τ_1 и τ_2 равноудалены от границы раздела и расположены на расстоянии $2h$ друг от друга в *однородной* среде с проницаемостью ε_{r1} (рис. 5.13,*а*). Решение такой задачи не представляет собой особых трудностей (см. раздел 5.4). Поле в любой точке среды с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{r2} рассчитывается как поле *фиктивной* оси τ_3, расположенной в *однородной* среде с проницаемостью ε_{r2} в точке нахождения оси τ_1 (рис. 5.13,*б*).

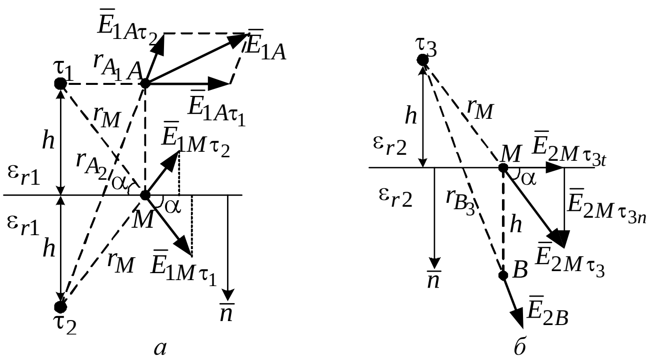


Рис. 5.13

На рис. 5.13,*а* для первой среды с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{r1} $r_{A_1} = d$, r_{A_2} – расстояния от осей τ_1 и τ_2 до точки A соответственно; r_M – расстояние от осей до точки M; $\overline{E}_{1A\tau_1}$, $\overline{E}_{1M\tau_1}$ – напряженности поля от оси τ_1 в точках A и M; $\overline{E}_{1A\tau_2}$, $\overline{E}_{1M\tau_2}$ – напряженности поля фиктивной оси τ_2 в указанных точках; $\overline{E}_{1A}$ – результирующая напряженность поля в точке A. На рис. 5.13,*б* для второй среды с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{r2} $r_{B_3} = r_{A_2}$ расстояние от оси τ_3 до точки B; $\overline{E}_{2B}$ – напряженность поля в указанной точке; $\overline{E}_{2M\tau_3}$ – напряженность поля от оси τ_3 в точке M, $\overline{E}_{2M\tau_{3n}}$, $\overline{E}_{2M\tau_{3t}}$ – ее нормальная и тангенциальная состав-

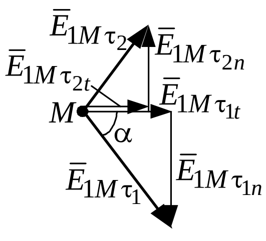


Рис. 5.14

ляющие. За положительное выбрано направление нормали $\bar{n}$ из первой среды во вторую.

На рис. 5.14 в масштабе представлена картина поля в точке M в среде с проницаемостью ε_{r1}. Здесь $\bar{E}_{1M\tau_{1n}}$, $\bar{E}_{1M\tau_{2n}}$, $\bar{E}_{1M\tau_{1t}}$, $\bar{E}_{1M\tau_{2t}}$ – нормальные и тангенциальные составляющие векторов $\bar{E}_{1M\tau_1}$ и $\bar{E}_{1M\tau_2}$ соответственно.

Таким образом, согласно Сирлу от одной сложной задачи (рис. 5.12) можно перейти к двум простым (рис. 5.13), избавившись от неоднородности среды. Величины и знаки зарядов τ_2 и τ_3 определяются из требования неизменности граничных условий в исходной и эквивалентных задачах.

Для рассматриваемой задачи с учетом (4.46) и (4.51) имеем следующие граничные условия:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t}. \tag{5.29}$$

Из рис. 5.13,*а* и рис. 5.14 с учетом (3.1), (5.2) и направления $\bar{n}$ нормальная проекция вектора электрической индукции D_{1n} в произвольной точке M на границе раздела равна:

$$D_{1n} = D_{1M\tau_{1n}} - D_{1M\tau_{2n}} = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\left(E_{1M\tau_{1n}} - E_{1M\tau_{2n}}\right) =$$

$$= \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\left(\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_{a1}r_M}\sin\alpha - \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_{a1}r_M}\sin\alpha\right) = \frac{\sin\alpha}{2\pi r_M}\left(\tau_1 - \tau_2\right),$$

где $\sin\alpha = \dfrac{h}{r_M}$, $r_M = \sqrt{h^2 + d^2}$, т.е.

$$D_{1n} = \frac{h}{2\pi r_M^2}\left(\tau_1 - \tau_2\right). \tag{5.30}$$

Аналогично на основании рис. 5.13,*б* определим D_{2n} в произвольной точке M:

$$D_{2n} = D_{2M\tau_{3n}} = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_{2M\tau_{3n}} = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{\tau_3}{2\pi\varepsilon_{a2}r_M}\sin\alpha = \frac{h}{2\pi r_M^2}\tau_3. \tag{5.31}$$

Соответственно тангенциальные проекции напряженностей полей в двух средах в точке M на границе раздела (рис. 5.13 и 5.14) с учетом (5.2) примут вид:

$$E_{1t} = E_{1M\tau_{1t}} + E_{1M\tau_{2t}} = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_{a1} r_M}\cos\alpha + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_{a1} r_M}\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_{a1} r_M}\left(\tau_1 + \tau_2\right)$$

,

где $\cos\alpha = \dfrac{d}{r_M}$, т.е.

$$E_{1t} = \frac{d}{2\pi\varepsilon_{a1} r_M^2}\left(\tau_1 + \tau_2\right); \qquad (5.32)$$

$$E_{2t} = E_{2M\tau_{3t}} = \frac{\tau_3}{2\pi\varepsilon_{a2} r_M}\cos\alpha = \frac{d}{2\pi\varepsilon_{a2} r_M^2}\tau_3. \qquad (5.33)$$

Подставляя выражения (5.30) – (5.33) в (5.29), получим систему уравнений для определения неизвестных зарядов τ_2 и τ_3:

$$\left.\begin{aligned} &\tau_1 - \tau_2 = \tau_3; \\ &\tau_1 + \tau_2 = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\tau_3, \end{aligned}\right\}$$

решая которую, окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\tau_2 = \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\tau_1; \\ &\tau_3 = \frac{2\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\tau_1, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\tau_2 = -\tau_1\frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}; \\ &\tau_3 = \frac{2\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\tau_1. \end{aligned}\right\}. \qquad (5.34)$$

Поскольку в соответствии с методом зеркальных изображений $\tau_2 = -\lambda\tau_1$, коэффициент пропорциональности λ равен:

$$\lambda = \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}.$$

Анализируя (5.34), можно сделать вывод о том, что знак τ_2 совпадает со знаком τ_1, если $\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$, знаки τ_3 и τ_1 всегда одинаковы.

Если поле будет создаваться не заряженной осью, а точечным зарядом, вся методика расчета сохраняется, но в формулах (5.34) под τ следует понимать величину точечного заряда.

Индуцированный заряд в любой точке M на границе раздела с учетом (3.1), (4.55), (5.30) и (5.31) равен:

$$\sigma_{\text{связ}} = \varepsilon_0 \left(E_{1n} - E_{2n} \right) = \varepsilon_0 \left(E_{1M\tau_{1n}} - E_{1M\tau_{2n}} \right) =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{2\pi r_M} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\varepsilon_{r1}} - \frac{\tau_3}{\varepsilon_{r2}} \right) = \frac{h}{2\pi r_M^2} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\varepsilon_{r1}} - \frac{\tau_3}{\varepsilon_{r2}} \right).$$

Напряженность поля в точке A (рис. 5.13,*а*) согласно (5.5), определится

$$\bar{E}_A = \bar{E}_{1A\tau_1} + \bar{E}_{1A\tau_2},$$

где с учетом (5.3)

$$\bar{E}_{1A\tau_1} = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r_{A_1}} \bar{1}_{r_{A1}} = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} d} \bar{1}_{r_{A1}},$$

$$\bar{E}_{1A\tau_2} = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r_{A_2}} \bar{1}_{r_{A2}} = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\sqrt{4h^2 + d^2}} \bar{1}_{r_{A2}}.$$

Здесь $\bar{1}_{r_{A1}}$, $\bar{1}_{r_{A2}}$ – единичные вектора, направленные по прямым, соединяющим точку A с осями τ_1 и τ_2 соответственно (от осей к точке). Аналогично получим выражение для напряженности поля в точке B (рис. 5.13,*б*):

$$\bar{E}_{2B} = \frac{\tau_3}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r_{B_3}} \bar{1}_{r_{B3}} = \frac{\tau_3}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\sqrt{4h^2 + d^2}} \bar{1}_{r_{B3}},$$

где $\overline{1}_{r_{B3}}$ – единичный вектор, направленный по прямой от оси τ_3 к точке B.

Если относительную диэлектрическую проницаемость ε_{r2} уст-ремить к бесконечности (вторая среда – проводник), то получим все соотношения для расчета поля заряженной оси, расположенной над проводящей плоскостью (см. раздел 5.4). При этом из первого
уравнения системы (5.34) с учетом $\varepsilon_{r2} \to \infty$

$$\tau_2 = -\tau_1 .$$

В нижней полуплоскости поле не исследуется, поскольку оно известно и равно нулю (см. раздел 4.6). Таким образом, метод зеркальных изображений можно рассматривать как частный случай решения задачи Сирла.

5.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ И ЗАРЯДОВ В СИСТЕМЕ ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ

Как пример практического применения метода зеркальных изображений рассмотрим расчет потенциалов и зарядов в системе проводящих тел. Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании процессов в линиях электропередач.

В качестве системы заряженных тел возьмем многопроводную линию из n весьма длинных проводов с зарядами τ_k на единицу длины (индекс заряда соответствует номеру провода), протянутых параллельно поверхности земли (в общем случае параллельно поверхности любой проводящей среды) в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r. Высота подвеса h_k и радиус каждого провода R_k известны (рис. 5.15).

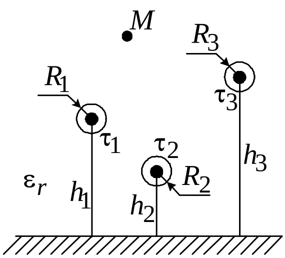


Рис. 5.15

Произвольно выберем в диэлектрике некоторую точку M и рассчитаем ее потенциал методом зеркаль-

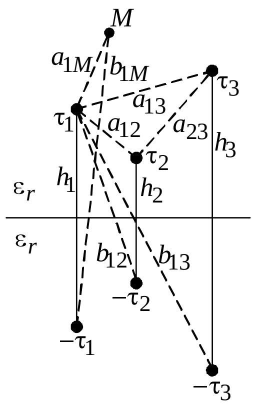


Рис.

ных изображений. Введем оси-изображения и от задачи о заряженных проводах над проводящей плоскостью перейдем к эквивалентной задаче о системе $2n$ заряженных тел, расположенных в диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r (см. раздел 5.4). При этом предположим, что высота подвеса каждого провода над землей много больше его радиуса, т.е. $h_k \gg R_k$, в этом случае электрические оси проводов практически совпадут с геометрическими, следовательно, провода с хорошей степенью точности можно будет считать заряженными осями (рис. 5.16). На рис. 5.16 a_{12}, a_{13}, a_{23} – расстояния между первым и вторым, первым и третьим, вторым и третьим проводами соответственно; b_{12}, b_{13} – расстояния между осью τ_1 и фиктивными осями $-\tau_2$ и $-\tau_3$.

Потенциал в произвольно выбранной точке M по принципу наложения (4.20) равен:

$$\varphi_M = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{Mk}, \tag{5.35}$$

где

$$\varphi_{Mk} = \varphi_{M(+\tau_k)} + \varphi_{M(-\tau_k)},$$

$\varphi_{M(+\tau_k)}$, $\varphi_{M(-\tau_k)}$ – потенциалы в точке M от k-го провода и его зеркального изображения соответственно. Согласно (5.7)

$$\varphi_{Mk} = \frac{\tau_k}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{kM}}{a_{kM}}, \tag{5.36}$$

где a_{kM}, b_{kM} – расстояния от точки M до k-го провода и его зеркального изображения.

Подставляя (5.36) в (5.35), получим

$$\varphi_M = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} + \ldots + \frac{\tau_n}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{nM}}{a_{nM}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{kM}}{a_{kM}}. \tag{5.37}$$

5.6.1. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла

В практических задачах часто требуется определить потенциалы проводов, что довольно просто сделать, поместив произвольную точку M на поверхность каждого из них.

Поместим точку M на поверхность первого провода, тогда расстояние от электрической оси первого провода до точки на его поверхности равно

$$a_{1M} = R_1;$$

расстояние от оси-изображения первого провода до указанной точки:

$$b_{1M} = b_{11} = 2h_1;$$

$$a_{2M} = a_{21} = a_{12}, b_{2M} = b_{21} = b_{12};$$

и наконец, расстояния от k-го провода и его изображения до провода τ_1 определятся по формулам

$$a_{kM} = a_{k1} = a_{1k}, \quad b_{kM} = b_{k1} = b_{1k}.$$

Подставляя указанные соотношения в (5.37), потенциал первого провода получим в виде

$$\varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{2h_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b_{12}}{a_{12}} + \ldots + \frac{\tau_n}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b_{1n}}{a_{1n}} =$$

$$= \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{2h_1}{R_1} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\sum_{k=2}^{n}\tau_k \ln\frac{b_{1k}}{a_{1k}}. \tag{5.38}$$

Аналогично можно записать выражения для потенциала любого k-го провода. Коэффициенты при зарядах τ_k зависят только от геометрических размеров тел, их взаимного расположения и свойств среды. Обозначим их следующим образом:

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{2h_k}{R_k}, \quad \alpha_{km} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b_{km}}{a_{km}}. \tag{5.39}$$

Как было показано выше, $a_{km} = a_{mk}$, $b_{km} = b_{mk}$, следовательно, $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$.

Используя (5.39), формулу (5.38) и выражения для потенциалов других проводов запишем в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1\alpha_{11} + \tau_2\alpha_{12} + \ldots + \tau_n\alpha_{1n}; \\ \varphi_2 &= \tau_1\alpha_{21} + \tau_2\alpha_{22} + \ldots + \tau_n\alpha_{2n}; \\ &\ldots \\ \varphi_k &= \tau_1\alpha_{k1} + \tau_2\alpha_{k2} + \ldots + \tau_n\alpha_{kn}; \\ &\ldots \\ \varphi_n &= \tau_1\alpha_{n1} + \tau_2\alpha_{n2} + \ldots + \tau_n\alpha_{nn}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.40)$$

Систему уравнений (5.40) принято называть первой группой формул Максвелла (не следует смешивать с первым уравнением *Максвелла). Первая группа формул Максвелла позволяет определить потенциалы проводов через их заряды.*

Коэффициенты α называют *потенциальными*, при этом α_{kk} называют собственными коэффициентами, α_{km} – взаимными. Раз-
мерность α равна единице длины, поделенной на фарад. Так как у всех коэффициентов α под знаком логарифма стоит дробь, числитель которой всегда больше знаменателя, все они являются положительными.

Предположим, что все заряды, кроме τ_n, равны нулю, тогда из системы (5.40) следует:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k &= \tau_n\alpha_{kn}; \\ \varphi_n &= \tau_n\alpha_{nn}, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{kn} &= \frac{\varphi_k}{\tau_n}; \\ \alpha_{nn} &= \frac{\varphi_n}{\tau_n}. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, коэффициент α_{nn} численно равен потенциалу n-го провода, если на нем находится единичный заряд

($\tau_n = 1$ Кл/м), а на остальных проводах заряды отсутствуют. Коэффициент α_{kn} численно равен потенциалу k-го провода, если заряд n-го провода равен единице, а остальных проводов – нулю.

5.6.2. Емкостные коэффициенты.
Вторая группа формул Максвелла

На практике может встретиться обратная рассмотренной в подразделе 5.6.1 задача: по известным потенциалам тел определить их заряды. Для решения подобной задачи преобразуем систему уравнений (5.40) относительно зарядов, полагая потенциалы φ_k и коэффициенты α известными:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \varphi_1\beta_{11} + \varphi_2\beta_{12} + \ldots + \varphi_n\beta_{1n}; \\ &\ldots \\ \tau_k &= \varphi_1\beta_{k1} + \varphi_2\beta_{k2} + \ldots + \varphi_n\beta_{kn}; \\ &\ldots \\ \tau_n &= \varphi_1\beta_{n1} + \varphi_2\beta_{n2} + \ldots + \varphi_n\beta_{nn}. \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

Коэффициенты $\beta_{kn} = \Delta_{kn}/\Delta$, Δ – главный определитель системы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kk} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nk} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

алгебраическое дополнение Δ_{kn} получается из определителя системы Δ путем вычеркивания k-й строки и n-го столбца и умножения полученного определителя на $(-1)^{k+n}$.

Систему (5.41) называют *второй группой формул Максвелла*. Она позволяет *рассчитать заряды заряженных тел через их потенциалы*.

Коэффициенты β называют емкостными коэффициентами, их размерность обратна размерности коэффициентов α (фарад на еди-ницу длины). Коэффициенты β с одинаковыми индексами называют собственными, с различными индексами – взаимными. Как следует из свойств определителей и алгебраических дополнений [2],

$$\beta_{kk} > 0\,, \quad \beta_{kn} < 0\,, \quad \beta_{kn} = \beta_{nk}\,.$$

Коэффициентам β можно дать следующее толкование, которое лежит в основе их экспериментального определения. Предположим, что потенциалы всех тел, кроме k-го, равны нулю. Тогда из системы (5.41) получим:

$$\left.\begin{aligned} \tau_k &= \varphi_k \beta_{kk}; \\ \tau_n &= \varphi_k \beta_{nk}, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \beta_{nk} &= \frac{\tau_n}{\varphi_k}; \\ \beta_{kk} &= \frac{\tau_k}{\varphi_k}. \end{aligned}\right\} \tag{5.42}$$

Итак, коэффициент β_{nk} численно равен заряду n-го провода, если потенциал k-го провода равен $1\,\text{В}$, а потенциалы остальных про-
водов – нулю. Коэффициент β_{kk} численно равен заряду k-го провода при этих же условиях. Выражения (5.42) напоминают расчетные формулы для емкости уединенного тела (4.59).

Формулы (5.42) лежат в основе экспериментального определения емкостных коэффициентов. Все провода заземляют, кроме провода A_k, которому сообщают потенциал φ_k (рис. 5.17), присоединив его, например, к полюсу электрической батареи, другой полюс которой также заземлен.

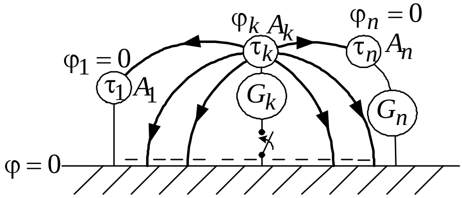


Рис. 5.17

Измерив вольтметром напряжение φ_k между проводом и землей, вольтметр и батарею отключают, разряжая провод A_k через баллистический гальванометр G_k. Первый отброс стрелки баллистического гальванометра пропорционален заряду τ_k. Зная φ_k и τ_k, по (5.42) определяют коэффициент β_{kk}. Если в этом же опыте гальванометром G_n измерить заряд τ_n, который был связан на поверхности провода A_n и освободился при разряде A_k, то можно определить коэффициент β_{nk}.

5.6.3. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла

Систему уравнений (5.41) можно записать в другой форме, выражая заряды на проводящих телах через *разности потенциалов* (напряжения) между некоторым телом и всеми остальными, в т.ч. и землей. Согласно (5.41) заряд k-го провода равен

$$\tau_k = \beta_{kk}\varphi_k + \sum_{\substack{m=1, \\ m\neq k}}^{n} \beta_{km}\varphi_m \,.$$

Слагаемое $\beta_{km}\varphi_m$ представим в виде

$$\beta_{km}\varphi_m = \beta_{km}\left(\varphi_m - \varphi_k + \varphi_k\right) = \beta_{km}\varphi_k - \beta_{km}U_{km},$$

где $U_{km} = \varphi_k - \varphi_m$ – напряжение между k-м и m-м проводами. Тогда заряд τ_k можно записать как

$$\tau_k = \beta_{kk}\varphi_k + \varphi_k \sum_{\substack{m=1,\\ m\neq k}}^{n} \beta_{km} - \sum_{\substack{m=1,\\ m\neq k}}^{n} \beta_{km} U_{km} =$$

$$= \varphi_k \sum_{m=1}^{n} \beta_{km} + \sum_{\substack{m=1,\\ m\neq k}}^{n} \left(-\beta_{km}\right) U_{km} . \qquad (5.43)$$

Введем обозначения

$$C_{kk} = \sum_{m=1}^{n} \beta_{km} , C_{km} = -\beta_{km} .$$

С учетом введенных обозначений выражение (5.43) перепишется в форме:

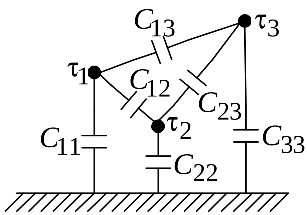
$$\tau_k = \varphi_k C_{kk} + \sum_{\substack{m=1,\\ m\neq k}}^{n} C_{km} U_{km} . \qquad (5.44)$$

При $k = 1, 2, \ldots, n$ получим систему уравнений (5.41) в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1 &= C_{11}\varphi_1 + \ldots + C_{1k}U_{1k} + \ldots + C_{1n}U_{1n};\\
&\ldots\\
\tau_k &= C_{k1}U_{k1} + \ldots + C_{kk}\varphi_k + \ldots + C_{kn}U_{kn};\\
&\ldots\\
\tau_n &= C_{n1}U_{n1} + \ldots + C_{nk}U_{nk} + \ldots + C_{nn}\varphi_n .
\end{aligned}\right\} \qquad (5.45)$$

Систему (5.45) называют третьей группой формул Максвелла. Коэффициенты C_{kk} называют *собственными частичными емкостями*, коэффициенты C_{km} – *взаимными частичными емкостями*. Поскольку $\beta_{km} = \beta_{mk}$, $C_{km} = C_{mk}$. Все частичные емкости положительны, так как $C_{km} = -\beta_{km}$, а $\beta_{km} < 0$. Размерность частичных емкостей совпадает с размерностью коэффициентов β (Ф/м).

Частичные емкости являются важными характеристиками

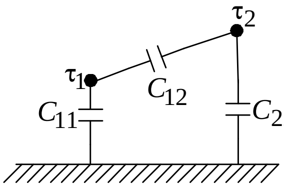


системы заряженных проводящих тел. С их помощью такая система может быть представлена в виде определенной комбинации емкостей. На рис. 5.18 в виде схемы соединений частичных емкостей представлена система проводящих тел, изображенная на рис. 5.15.

В теории и на практике используют понятие *рабочей емкости* системы проводящих тел. *Рабочая емкость равна эквивалентной емкости между проводящими телами*. Например, рабочая емкость двухпроводной линии (рис. 5.19) определяется как

$$C_{\text{раб}} = C_{\text{э}} = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}.$$

Здесь C_{11} и C_{22} соединены последовательно, а затем параллельно с C_{12}.



Рис

О рабочей емкости проводов говорят, когда к проводам подведено напряжение от незаземленного источника, т.е. когда с землей не соединен ни один из проводов. Для двухпроводной линии рабочую емкость также можно найти как отношение линейного заряда на одном из проводов к напряжению между проводами ($C_{\text{раб}} = \tau_1/U$).

На основе системы (5.45) можно дать некоторое толкование частичным емкостям и получить формулу для их экспериментального определения. Согласно выражению (5.44), являющемуся частью (5.45), для нахождения, например, собственной частичной емкости C_{kk} потенциалы всех тел необходимо сделать равными φ_k, тогда все $U_{km} = 0$ и соответственно

$$C_{kk} = \frac{\tau_k}{\varphi_k}. \tag{5.46}$$

Таким образом, для измерения емкости C_{kk} необходимо соединить все тела между собой и создать на них потенциал φ_k (рис. 5.20). Затем, отключив источник ЭДС, разрядить систему на землю. При этом гальванометр G должен быть включен так, чтобы был измерен только заряд τ_k провода A_k. Измерив φ_k и τ_k, по формуле (5.46) легко рассчитать собственную частичную емкость C_{kk}. Взаимные частичные емкости C_{km} определяются из того же опыта, что и коэффициенты β_{km} (рис. 5.17), поскольку $C_{km} = -\beta_{km}$.

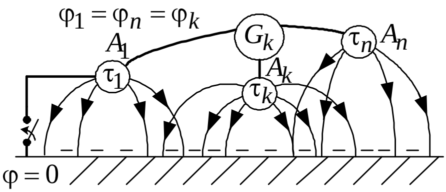


Рис. 5.20

Частичные емкости используют при расчетах не только электростатических полей, но и быстропротекающих процессов в электрических цепях, а также при расчетах таких процессов в электрических цепях, в основу которых положено использование частичных емкостей, например, при емкостном отборе мощности от высоковольтной линии электропередачи. При расчете быстропротекающих процессов учитывают, в частности, емкости между электродами полупроводниковых приборов (тиристоров, транзисторов).

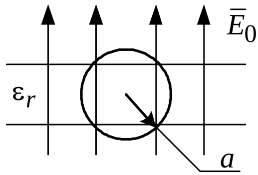
Три группы формул Максвелла (5.40), (5.41), (5.44) справедливы и для системы проводящих заряженных тел произвольной формы с зарядами Q_k, однако размерности коэффициентов α и β, а также частичных емкостей, изменятся. В случае тел произвольной формы потенциальные коэффициенты уже нельзя рассчитывать по формулам (5.39), которые справедливы только для системы линейных параллельных достаточно длинных проводов. Определение рассмотренных выше коэффициентов и частичных емкостей производят, как правило, опытным путем [7, 14, 15].

5.7. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

Наиболее общим методом решения задач электромагнитного поля является метод интегрирования уравнений поля (уравнений Максвелла или уравнений Пуассона-Лапласа) с учетом граничных условий. Рассмотрим применение этого метода на примере двух задач, представляющих как теоретический, так и практический интерес.

5.7.1. Проводящий шар в однородном электростатическом поле

Пусть в однородное электростатическое поле с напряженностью E_0 помещен незаряженный металлический шар радиусом a (рис. 5.21). Диэлектрик, окружающий шар, имеет относительную диэлектрическую про-ницаемость ε_r. Требуется рассчитать поле (определить его напряженность $\overline{E}$, вектор электрической индукции $\overline{D}$ и потенциал φ) в каждой точке диэлектрика, окружающего шар, а также на поверхности шара.



Рис

Решение. Любое однородное поле является бесконечным. При помещении металлического шара в электростатическое поле оно перестает быть однородным. Поле искажается, так как на поверхности шара индуцируется заряд, который, в свою очередь, возбуждает новое поле, накладывающееся на внешнее однородное. Характер искажения зависит, прежде всего от размеров шара. Обсудим влияние шара на поле более детально.

Как уже упоминалось, все явления электростатики описываются уравнениями Максвелла или уравнением Пуассона–Лапласа (см. раздел 4.4). Поле внутри шара равно нулю (шар является проводником):

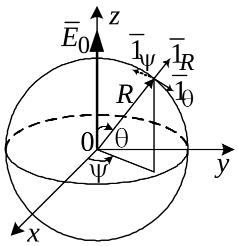
$$\overline{E}_{\text{вн}} = 0\ .$$

В диэлектрике, окружающем его, свободных зарядов нет, поэтому, с математической точки зрения, поле вне шара описывается уравнением Лапласа (4.27):

$$\nabla^2\varphi = 0\,.$$

Потенциал φ, напряженность поля $\bar{E}$ и вектор электрической индукции $\bar{D}$ связаны между собой выражениями (4.14) и (3.1).

Для расчета поля следует выбирать такую систему координат, которая соответствует ***геометрии*** рассматриваемой задачи. В этом случае задача будет решаться наиболее просто, поскольку соответствующая система координат позволит учесть симметрию исследуемого поля (если она есть). Так как шар представляет собой сферу, выберем сферическую систему координат [2], начало которой поместим в центр шара. Координату θ будем отсчитывать по часовой стрелке от направления вектора $\bar{E}_0$ (рис. 5.22).



Рис

Как видно из рис. 5.22, единичный вектор $\bar{1}_R$ в произвольной точке на поверхности шара направлен по прямой, соединяющей эту точку с началом координат. Единичный вектор $\bar{1}_\psi$ направлен по касательной к поверхности шара в указанной точке параллельно плоскости $x0y$. Единичный вектор $\bar{1}_\theta$ направлен по касательной к поверхности шара, проведенной в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной $x0y$.

Запишем граничные условия задачи. Вдали от шара поле остается однородным:

$$\bar{E}\Big|_{R=\infty} = \bar{E}_0\,. \tag{5.47}$$

Поскольку поверхность проводящего шара является эквипотенциальной, ее потенциал не изменяется, т.е.

$$\varphi\Big|_{R=a} = \text{const}\,. \tag{5.48}$$

Исходя из симметрии шара, можно установить, что напряженность поля и потенциал зависят только от двух сферических координат R и θ, т.е. от угла ψ величина φ зависеть не будет:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0\,.$$

Представив уравнение Лапласа (4.27) в сферической системе координат (см. табл. 1.1, раздел 1.6), получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0\,. \qquad (5.49)$$

Таким образом, расчет поля шара сводится к решению уравнения Лапласа в частных производных (5.49) с учетом граничных условий (5.47) и (5.48). Одним из методов решения таких уравнений является *метод разделения переменных*, или метод Фурье, согласно которому решение (5.49) можно найти в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты R, а другая – только от координаты θ, т.е.

$$\varphi = f_1(R)\, f_2(\theta) = f_1 f_2\,. \qquad (5.50)$$

Подставляя (5.50) в (5.49), после соответствующих преобразований [1, 8] получим:

$$\mathrm{F}(R)+\Phi(\theta)=0\,, \qquad (5.51)$$

где $\mathrm{F}(R)=\dfrac{R^2}{f_1}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial R^2}+\dfrac{2R}{f_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial R}$, $\quad \Phi(\theta)=\dfrac{1}{f_2}\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\theta^2}+\dfrac{\cos\theta}{f_2\sin\theta}\dfrac{\partial f_2}{\partial\theta}$.

Из (5.51) следует, что сумма двух функций, независимых друг от друга, равна нулю. Это возможно только в том случае, когда каждая из них равна постоянной величине:

$$\mathrm{F}(R)=k^2, \qquad \Phi(\theta)=-k^2\,.$$

Соответственно можно записать два уравнения:

$$R^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial R^2}+2R\frac{\partial f_1}{\partial R}-k^2 f_1=0\,, \qquad (5.52)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f_2}{\partial\theta}+k^2 f_2=0\,. \qquad (5.53)$$

Уравнение (5.53) есть частный случай широко известного в математике уравнения Лежандра, решение которого имеет вид

$$f_2 = \cos\theta\,. \tag{5.54}$$

Подставляя (5.54) в (5.53), можно определить значение постоянной k:

$$-2\cos\theta + k^2\cos\theta = 0\,,$$

откуда $k^2 = 2$.

С учетом значения постоянной k уравнение (5.52) запишется как

$$R^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial R^2} + 2R\frac{\partial f_1}{\partial R} - 2f_1 = 0\,. \tag{5.55}$$

Перейдем к новой переменной w:

$$R = e^w\,, \qquad dR = e^w dw\,, \qquad \frac{dw}{dR} = e^{-w}\,.$$

Тогда

$$\frac{\partial f_1}{\partial R} = \frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{dw}{dR} = \frac{\partial f_1}{\partial w}e^{-w}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial R^2} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f_1}{\partial R}\right)\frac{\partial w}{\partial R} = e^{-2w}\frac{\partial^2 f_1}{\partial w^2} - e^{-2w}\frac{\partial f_1}{\partial w}\,.$$

Подставляя полученные соотношения в (5.55), получим:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial w^2} + \frac{\partial f_1}{\partial w} - 2f_1 = 0\,. \tag{5.56}$$

Решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения известно:

$$f_1 = A_1 e^{p_1 w} + A_2 e^{p_2 w}\,,$$

где p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения (5.56):

$$p^2 + p - 2 = 0\,,$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}\,, \qquad p_1 = 1\,, \qquad p_2 = -2\,.$$

Тогда

$$f_1 = A_1 e^{w} + A_2 e^{-2w} = A_1 R + \frac{A_2}{R^2}.$$

Подставляя выражение для f_1 в (5.50), найдем окончательное решение уравнения (5.49):

$$\varphi = f_1 f_2 = \left(A_1 R + \frac{A_2}{R^2} \right) \cos\theta. \qquad (5.57)$$

Соотношение (5.57) определяет потенциал любой точки поля вне шара с точностью до постоянных A_1 и A_2.

Напряженность поля $\bar{E}$ вне шара в сферической системе координат складывается из трех составляющих:

$$\bar{E} = \bar{1}_R E_R + \bar{1}_\theta E_\theta + \bar{1}_\psi E_\psi, \; E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2 + E_\psi^2},$$

где E_R – проекция $\bar{E}$ на направление единичного радиус-вектора $\bar{1}_R$; E_θ – проекция $\bar{E}$ на направление единичного вектора $\bar{1}_\theta$, E_ψ – проекция напряженности поля на направление единичного вектора $\bar{1}_\psi$.

С учетом симметрии задачи

$$E_\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = 0,$$

следовательно, в данном случае

$$\bar{E} = \bar{1}_R E_R + \bar{1}_\theta E_\theta, \qquad (5.58)$$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2}.$$

Поскольку электростатическое поле – это потенциальное поле, в соответствии с (4.14), используя выражение для градиента в сферической системе координат, приведенное в табл. 1.1 (см. раздел 1.6), и симметрию задачи, можно записать:

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\bar{1}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\bar{1}_\theta \right). \qquad (5.59)$$

Сравнивая выражения (5.58) и (5.59), с учетом (5.57) получим:

$$\left.\begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\left(A_1 - \frac{2A_2}{R^3}\right)\cos\theta; \\ E_\theta &= -\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(A_1 + \frac{A_2}{R^3}\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.60)$$

Выражение (5.57) и система (5.60) представляют общий вид решения уравнения (5.49) с точностью до постоянных интегрирования A_1 и A_2. Они описывают множество задач электростатики. Решение для поставленной задачи можно найти с помощью граничных условий (5.47) и (5.48).

Поскольку напряженность поля $\bar{E}_0$ направлена по оси z (угол θ равен нулю), из граничного условия (5.47) и выражений (5.60) следует:

$$E\big|_{R=\infty} = E_R = E_0,$$

$$A_1 = -E_0. \qquad (5.61)$$

Граничное условие (5.48) с учетом (5.57) и (5.61) примет вид:

$$\varphi\big|_{R=a} = \left(-E_0 a + \frac{A_2}{a^2}\right)\cos\theta = \mathrm{const}\,.$$

Это условие должно выполняться при любых значениях угла θ, что возможно только в случае, когда

$$-E_0 a + \frac{A_2}{a^2} = 0,$$

откуда

$$A_2 = E_0 a^3. \qquad (5.62)$$

Искомое решение для проводящего шара получим на основании (5.57), (5.60), (3.1) с учетом (5.61) и (5.62):

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi = E_0\left(\frac{a^3}{R^2} - R\right)\cos\theta;\\
&E_R = E_0\left(\frac{2a^3}{R^3} + 1\right)\cos\theta;\\
&E_\theta = E_0\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)\sin\theta;\\
&E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2};\\
&D = \varepsilon_a E.
\end{aligned}\right\}$$

Найдем напряженность электрического поля на поверхности шара:

$$E_R\big|_{R=a} = 3E_0\cos\theta,$$

$$E_\theta\big|_{R=a} = 0,$$

$$E\big|_{R=a} = E_R\big|_{R=a} = 3E_0\cos\theta. \tag{5.63}$$

Из (5.63) следует, что на полюсах шара ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) напряженность поля будет максимальной, т.е.

$$E\big|_{\substack{R=a,\\ \theta=0,\pi}} = 3E_0.$$

Таким образом, напряженность электрического поля на полюсах шара в три раза больше напряженности внешнего поля E_0. Этот результат следует учитывать при разработке конструкции проводящих шаровых крыш, куполов. Именно в полюсах шара следует ожидать удара молнии (пробой) во время грозы. Интересно отметить, что *максимальное значение напряженности поля не зависит от радиуса шара*. Поэтому нетрудно оценить, например, влияние проводящей крупинки, попавшей в изоляцию. Так, капелька воды в баке трансформатора с масляным заполнением вызывает значительное местное увеличение напряженности поля.

Картина силовых и эквипотенциальных линий (картина поля) вокруг проводящего шара представлена на рис. 5.23. Как видно из рисунка, силовые линии перпендикулярны поверхности шара, так как она является эквипотенциальной поверхностью в исследуемом поле.

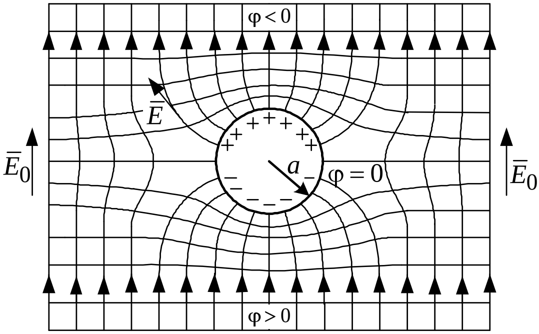
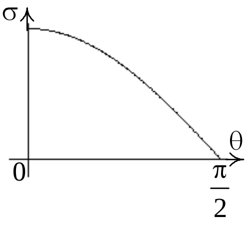


Рис. 5.23

Под действием внешнего поля $\overline{E}_0$ на поверхности шара индуцируется свободный заряд: на верхнем полушарии – положительный заряд, а на нижнем – равный ему по величине отрицательный заряд. В соответствии с (4.48), (3.1) и (5.63) рассчитаем плотность индуцированного заряда на поверхности шара (см. раздел 4.6):

$$\sigma = D_n = D\big|_{R=a} = \varepsilon_a\, E\big|_{R=a} = 3\varepsilon_a E_0 \cos\theta\,. \qquad (5.64).$$

Из (5.64) следует, что плотность свободного заряда пропорциональна $\cos\theta$. На рис. 5.24 приведен график изменения плотности индуцированного заряда для верхнего полушария.



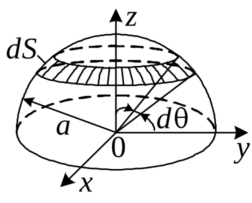


Рис. 5.24 **Рис. 5.25**

Определим полный заряд одного полушария:

$$|Q| = \int_S \sigma dS .$$

Как видно из рис. 5.25, площадь кольца dS равна:

$$dS = 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta ,$$

тогда

$$|Q| = \int_S \sigma dS = \int_0^{\pi/2} \sigma \cdot 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta .$$

С учетом (5.64) получим:

$$|Q| = 2\pi a^2 3\varepsilon_a E_0 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = 3\pi\varepsilon_a a^2 E_0 \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta =$$

$$= -\frac{3}{2}\pi\varepsilon_a a^2 E_0 \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = 3\pi\varepsilon_a a^2 E_0 .$$

Таким образом, полный заряд шара пропорционален квадрату его радиуса, напряженности внешнего поля E_0 и относительной диэлектрической проницаемости окружающей среды ε_r .

5.7.2. Диэлектрический шар в однородном электростатическом поле

Пусть диэлектрический незаряженный шар радиусом a помещен в однородное электростатическое поле с напряженностью $E_0 = \text{const}$. Относительная диэлектрическая проницаемость шара равна $\varepsilon_{\text{ш}}$. Диэлектрик, окружающий шар, имеет относительную ди-электрическую проницаемость ε_r . Требуется определить напряжен-ности поля вокруг шара $E_{\text{вш}}$, внутри шара $E_{\text{вт}}$, а также соответствующие распределения потенциалов $\varphi_{\text{вш}}$ и $\varphi_{\text{вт}}$.

Решение. С математической точки зрения до определения постоянных интегрирования поставленная задача эквивалентна задаче о нахождении поля вокруг проводящего шара, рассмотренной в подразделе 5.7.1. Но поскольку внутри и вне шара нет свободных зарядов, уравнением Лапласа (4.27) описывается поле как снаружи, так и внутри его:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_{\text{вш}} &= 0; \\ \nabla^2 \varphi_{\text{вт}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.65}$$

В соответствии с (5.57) и (5.60), учитывая симметрию задачи, получим следующее решение:

для внешней области ($a \le R \le \infty$)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\text{вш}} &= \left(C_1 R + \frac{C_2}{R^2} \right) \cos\theta; \\ E_{\text{вш}R} &= -\left(C_1 - \frac{2C_2}{R^3} \right) \cos\theta; \\ E_{\text{вш}\theta} &= \left(C_1 + \frac{C_2}{R^3} \right) \sin\theta; \\ E_{\text{вш}\psi} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{5.66}$$

для внутренней области ($0 \le R \le a$)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\text{вт}} &= \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos\theta; \\ E_{\text{вт}R} &= -\left(C_3 - \frac{2C_4}{R^3} \right) \cos\theta; \\ E_{\text{вт}\theta} &= \left(C_3 + \frac{C_4}{R^3} \right) \sin\theta; \\ E_{\text{вт}\psi} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.67}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий и соответствия решения задачи физическому смыслу исследуемого явления.

Поскольку поле во всех точках пространства должно быть конечным, из третьего уравнения системы (5.67) очевидно, что постоянная интегрирования $C_4 = 0$ $\left(\left.\frac{C_4}{R^3}\right|_{R=0} = \infty \right)$. Тогда выражения (5.67) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\text{вт}} &= C_3 R \cos\theta; \\ E_{\text{вт}R} &= -C_3 \cos\theta; \\ E_{\text{вт}\theta} &= C_3 \sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.68)$$

Вдали от шара (при $R \to \infty$) поле остается однородным, и согласно граничному условию (5.47)

$$\left.\bar{E}\right|_{R=\infty} = \bar{E}_0 ,$$

откуда с учетом $\theta = 0$ (см. подраздел 5.7.1) и второго выражения системы (5.66) получим:

$$C_1 = -E_0 .$$

В этом случае (5.66) можно представить как:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\text{вш}} &= \left(-E_0 R + \frac{C_2}{R^2} \right) \cos\theta; \\ E_{\text{вш}R} &= \left(E_0 + \frac{2C_2}{R^3} \right) \cos\theta; \\ E_{\text{вш}\theta} &= \left(-E_0 + \frac{C_2}{R^3} \right) \sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.69)$$

Из граничного условия для потенциала (на поверхности раздела двух сред потенциал непрерывен) имеем:

$$\left.\varphi_{\text{вш}}\right|_{R=a} = \left.\varphi_{\text{вт}}\right|_{R=a} .$$

Следовательно,

$$C_3 a \cos\theta = \left(-E_0 a + \frac{C_2}{a^2} \right) \cos\theta ,$$

$$C_3 = -E_0 + \frac{C_2}{a^3} . \qquad (5.70)$$

С другой стороны, на основании первого граничного условия (4.46) можно записать:

$$D_{\text{вш}R}\big|_{R=a} = D_{\text{вт}R}\big|_{R=a},$$

или с учетом (3.1)

$$\varepsilon_r\left(E_0 + \frac{2C_2}{a^3}\right)\cos\theta = -\varepsilon_{\text{ш}} C_3 \cos\theta,$$

$$C_3 = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}}}\left(E_0 + \frac{2C_2}{a^3}\right). \tag{5.71}$$

Решая совместно (5.70) и (5.71), получим:

$$C_2 = a^3 \frac{\varepsilon_{\text{ш}} - \varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0, \qquad C_3 = -\frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0.$$

Подставляя выражения для постоянных интегрирования в системы (5.68) и (5.69), запишем окончательное решение задачи:

для поля вне шара ($a \le R \le \infty$)

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{\text{вш}} &= \left(-E_0 R + \frac{a^3 \dfrac{\varepsilon_{\text{ш}} - \varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0}{R^2}\right)\cos\theta;\\
E_{\text{вш}R} &= \left(E_0 + \frac{2a^3 \dfrac{\varepsilon_{\text{ш}} - \varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0}{R^3}\right)\cos\theta;\\
E_{\text{вш}\theta} &= \left(-E_0 + \frac{a^3 \dfrac{\varepsilon_{\text{ш}} - \varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0}{R^3}\right)\sin\theta;
\end{aligned}\right\}$$

для поля внутри шара ($0 \le R \le a$)

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{\text{вт}} &= -\frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0 R \cos\theta;\\
E_{\text{вт}R} &= \frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0 \cos\theta;\\
E_{\text{вт}\theta} &= -\frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0 \sin\theta.
\end{aligned}\right\} \oplus$$

Напряженность электрического поля внутри шара равна:

$$E_{\text{вт}} = \sqrt{E_{\text{вт}R}^2 + E_{\text{вт}\theta}^2} = \frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0 . \tag{5.72}$$

Как следует из (5.72), поле внутри шара является однородным, т.е. $E_{\text{вт}} \neq f(R,\theta)$. Если $\varepsilon_{\text{ш}} < \varepsilon_r$, напряженность поля внутри шара $E_{\text{вт}}$ больше напряженности однородного поля E_0, но не более чем в 1.5 раза. Если же $\varepsilon_{\text{ш}} > \varepsilon_r$, $E_{\text{вт}} < E_0$. В частном случае, когда $\varepsilon_{\text{ш}} \gg \varepsilon_r$, напряженность поля $E_{\text{вт}}$ стремится к нулю (переход от диэлектрика к проводнику).

Обсудим полученные результаты с физической точки зрения. Тело из диэлектрика, внесенное во внешнее электростатическое поле, поляризуется (см. раздел 4.5). В результате поляризации на поверхности тела появляются связанные заряды различных знаков, которые создают свое поле как внутри, так и вне тела. Напряженность результирующего поля $\bar{E}$ является геометрической суммой на-пряженностей внешнего поля $\bar{E}_0$ и поля связанных зарядов $\bar{E}_p$, т.е.

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_p . \tag{5.73}$$

Таким образом, если диэлектрическое тело находится в среде, относительная диэлектрическая проницаемость которой меньше диэлектрической проницаемости тела ($\varepsilon_{\text{ш}} > \varepsilon_r$), то внутри тела поле связанных зарядов направлено против внешнего поля:

$$E_{\text{вт}} = E_0 - E_p ,$$

именно поэтому $E_{\text{вт}} < E_0$. Для $\varepsilon_{\text{ш}} < \varepsilon_r$ соответственно

$$E_{\text{вт}} = E_0 + E_p , E_{\text{вт}} > E_0 .$$

Поле связанных зарядов, направленное против внешнего поля, называют ***деполяризующим***. Используя (5.72), легко рассчитать деполяризующее поле для шара при $\varepsilon_{\text{ш}} > \varepsilon_r$:

$$E_p = E_0 - E_{\text{вт}} = E_0 - \frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} E_0 = E_0 \frac{\varepsilon_{\text{ш}} - \varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon_r} ,$$

$$E_p = E_0 \frac{\varepsilon_ш - \varepsilon_r}{\varepsilon_ш + 2\varepsilon_r}. \tag{5.74}$$

На рис. 5.26 представлены картины силовых линий поля диэлектрического шара для случаев $\varepsilon_ш > \varepsilon_r$ (рис. 5.26,*а*) и $\varepsilon_ш < \varepsilon_r$ (рис. 5.26,*б*).

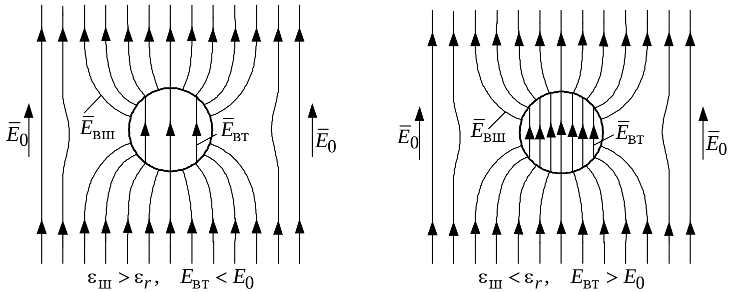


Рис. 5.26

6. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

К частным случаям электромагнитного поля относятся электрическое и магнитное поля постоянного тока. Эти поля являются ***стационарными***, т.е. не зависящими от времени.

Постоянный ток может протекать только в замкнутой проводящей среде (в замкнутой электрической цепи). Рассмотрим электрическое поле постоянного тока в неподвижных проводящих средах, или проводниках. Движение заряда в таких средах характеризуется *токами проводимости* [4]. С движущимися зарядами связано возникновение как электрического, так и магнитного полей. Поскольку постоянный ток – это движение зарядов с постоянной скоростью, в диэлектрике, окружающем проводник с постоянным током, и внутри самого проводника возникают *стационарные* электрическое и магнитное поля. Так как магнитное поле постоянного тока не зависит от времени, явление электромагнитное индукции (см. подраздел. 3.1.4) отсутствует, следовательно, стационарное магнитное поле не оказывает влияния на электрическое поле постоянного тока, и эти поля можно рассматривать отдельно.

6.1. УРАВНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Из полной системы уравнений Максвелла (3.22) выберем только те уравнения, которые описывают электрическое поле постоянного тока в проводящей среде:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{H} &= \overline{J} = \overline{J}_{\text{пр}};\\ \operatorname{rot}\overline{E} &= -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Применим к обеим частям первого уравнения системы (6.1) операцию дивергенции, с учетом (1.20) получим

$$\operatorname{div}\overline{J} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{H} = 0\,.$$

Тогда уравнения Максвелла для электрического поля постоянного тока примут вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{E} &= 0;\\ \operatorname{div}\overline{J} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

где согласно (3.6)

$$\overline{J} = \overline{J}_{\text{пр}} = \gamma\overline{E}\,. \qquad (6.3)$$

Одно из основных отличий электрического поля постоянного тока от электростатического обусловлено наличием внешних источников энергии неэлектростатического происхождения, без которых невозможно возникновение тока. В области действия этих источников, характеризуемых напряженностью $\overline{E}_{\text{стор}}$ [4], (6.3) примет вид

$$\overline{J} = \gamma\left(\overline{E} + \overline{E}_{\text{стор}}\right). \qquad (6.4)$$

Выражение (6.3) представляет собой закон Ома в дифференциальной форме. Соотношение (6.4) является обобщенным законом Ома, или вторым законом Кирхгофа, в дифференциальной форме. Второе уравнение системы (6.2) называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме. Более детально указанные законы будут рассмотрены в разделе 6.4.

Обсудим физическое содержание уравнений Максвелла (6.2). Как следует из первого уравнения системы (6.2), электрическое поле постоянного тока является безвихревым потенциальным полем, как и поле электростатическое. При движении зарядов с *постоянной* скоростью свойство потенциальности сохраняется и, таким образом, справедливы соотношения (4.9), (4.14), (4.16), (4.17):

$$\oint_L \overline{E} d\overline{l} = 0, \qquad \overline{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

$$u = \int_l \overline{E} d\overline{l}, \qquad u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Из второго уравнения системы (6.2) следует, что линии вектора плотности тока непрерывны и замкнуты (см. раздел 1.4).

Используя выражение (4.14), два уравнения (6.2) можно объединить в одно, подобное уравнениям Пуассона-Лапласа (см. раздел 4.4) для разных областей проводящей среды, в которых $\overline{E}_{\text{стор}} = 0$ и $\overline{E}_{\text{стор}} \neq 0$.

1. Область, во всех точках которой $\overline{E}_{\text{стор}} = 0$.

а) Для однородной проводящей среды ($\gamma = \text{const}$) из второго уравнения (6.2) с учетом (6.3) получим:

$$\operatorname{div}\gamma\overline{E} = \gamma \operatorname{div}\overline{E} = 0. \qquad (6.5)$$

Подставляя в (6.5) выражение (4.14), с учетом (1.22) имеем:

$$\gamma \operatorname{div}\overline{E} = -\gamma \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\gamma\nabla^2\varphi = 0,$$

т.е.

$$\nabla^2\varphi = 0. \qquad (6.6)$$

Таким образом, электрическое поле в однородной проводящей среде в области вне источников энергии описывается уравнением Лапласа (6.6), как и электростатическое поле в однородной среде, где нет свободных зарядов (см. (4.27)).

б) Для неоднородной проводящей среды ($\gamma \neq \text{const}$) правая часть второго уравнения (6.2) с учетом (4.14) и известного соотношения из векторного анализа [2] примет вид

$$\operatorname{div}\gamma\bar{E} = \gamma \operatorname{div}\bar{E} + \bar{E}\operatorname{grad}\gamma = -\gamma\nabla^2\varphi - \operatorname{grad}\gamma \operatorname{grad}\varphi.$$

Приравнивая последнее соотношение к нулю, получим:

$$\nabla^2\varphi + \frac{\operatorname{grad}\gamma}{\gamma}\operatorname{grad}\varphi = 0. \tag{6.7}$$

Уравнение (6.7) математически аналогично (4.29) при $\rho = 0$ (см. раздел 4.4), здесь γ соответствует ε_a.

2. Область, где действуют сторонние силы ($\bar{E}_{\text{стор}} \neq 0$). Для однородной проводящей среды ($\gamma = \text{const}$) с учетом (6.4), можно записать:

$$\operatorname{div}\bar{J} = \operatorname{div}\gamma\left(\bar{E} + \bar{E}_{\text{стор}}\right) = \gamma \operatorname{div}\bar{E} + \gamma \operatorname{div}\bar{E}_{\text{стор}}.$$

Так как согласно (4.14)

$$\gamma \operatorname{div}\bar{E} = -\gamma \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\gamma\nabla^2\varphi,$$

второе уравнение системы (6.2) преобразуется к виду:

$$-\nabla^2\varphi + \operatorname{div}\bar{E}_{\text{стор}} = 0,$$

или

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}\bar{E}_{\text{стор}}. \tag{6.8}$$

Уравнение (6.8) аналогично уравнению Пуассона (4.26) для электростатического поля при $\rho \neq 0$.

6.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕД

Система уравнений (6.2) является математической записью законов электрического поля в проводящей среде для областей, в которых функции $\bar{J}$ и $\bar{E}$ непрерывны и дифференцируемы. На границе раздела сред эти функции терпят разрыв, и математическое представление законов электрического поля изменяется. Получим математическую запись законов поля на границе раздела сред, или граничные условия.

6.2.1. Первое граничное условие для электрического поля постоянного тока

Запишем второе уравнение системы (6.2) на границе раздела сред с разными электрическими свойствами, для чего перейдем к поверхностной дивергенции, так как граница раздела представляет собой поверхность. В этом случае имеем:

$$\mathrm{Div}\,\overline{J} = 0\,.$$

Поскольку [2]

$$\mathrm{Div}\,\overline{J} = \left(\overline{J}_1 - \overline{J}_2\right)\overline{n} = J_{1n} - J_{2n}\,,$$

окончательно получим

$$J_{1n} - J_{2n} = 0\,,$$

или

$$J_{1n} = J_{2n}\,. \qquad (6.9)$$

Согласно (6.9) нормальная составляющая вектора плотности тока на границе раздела двух проводящих сред непрерывна (рис. 6.1). На рис. 6.1 положительная нормаль $\overline{n}$ направлена из первой среды во вторую; $\overline{J}_1$ и $\overline{J}_2$ – вектора плотности тока в средах с проводимостями γ_1 и γ_2 соответственно; $\overline{J}_{1n}$ и $\overline{J}_{2n}$ – нормальные составляющие векторов плотности тока в двух средах, $\overline{J}_{1t}$, $\overline{J}_{2t}$ – их тангенциальные составляющие; угол α_1 называется углом падения вектора плотности тока, угол α_2 – углом преломления вектора плотности тока,

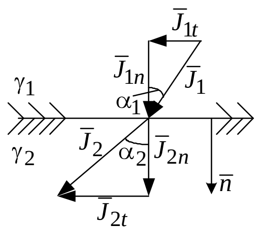


Рис. 6.1

$$J_{1n} = J_1 \cos\alpha_1, \quad J_{2n} = J_2 \cos\alpha_2\,. \qquad (6.10)$$

6.2.2. Второе граничное условие для электрического поля постоянного тока

Переходя к поверхностному ротору, запишем первое уравнение системы (6.2) на границе раздела сред с разными проводи-мостями:

$$\mathrm{Rot}\,\overline{E} = 0\,.$$

Выражая поверхностный ротор через составляющие вектора напряженности [2] как

$$\mathrm{Rot}\,\overline{E} = \overline{n} \times \left(\overline{E}_1 - \overline{E}_2\right) = \overline{E}_{1t} - \overline{E}_{2t}\,,$$

имеем:

$$\overline{E}_{1t} - \overline{E}_{2t} = 0\,,$$

или

$$\overline{E}_{1t} = \overline{E}_{2t}\,. \tag{6.11}$$

Таким образом, если на границе раздела сред нет сторонних сил ($\overline{E}_{\text{стор}} = 0$), касательные составляющие вектора напряженности электрического поля непрерывны (рис. 6.2).

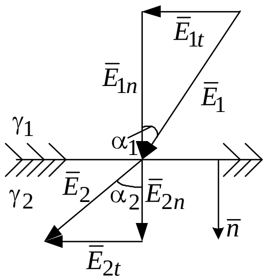


Рис. 6.2

На рис. 6.2 положительная нормаль $\overline{n}$ направлена из первой среды во вторую; $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$ – вектора напряженности электрического поля в средах с удельными проводимостями γ_1 и γ_2; $\overline{E}_{1n}$, $\overline{E}_{2n}$, $\overline{E}_{1t}$, $\overline{E}_{2t}$ – их нормальные и тангенциальные составляющие соответственно. Поскольку согласно (6.3)

$$\overline{J}_1 = \gamma_1 \overline{E}_1\,, \quad \overline{J}_2 = \gamma_2 \overline{E}_2\,, \tag{6.12}$$

угол падения вектора напряженности равен углу падения вектора плотности тока (рис. 6.2), аналогично для углов преломления, тогда

$$E_{1t} = E_1 \sin\alpha_1\,, \quad E_{2t} = E_2 \sin\alpha_2\,. \tag{6.13}$$

Используя соотношения (6.10), (6.13), из граничных условий (6.9) и (6.11) можно записать:

$$\left.\begin{aligned} E_1 \sin\alpha_1 &= E_2 \sin\alpha_2;\\ J_1 \cos\alpha_1 &= J_2 \cos\alpha_2. \end{aligned}\right\}$$

Разделив почленно первое уравнение полученной системы на второе с учетом (6.12), получим:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2}\,. \tag{6.14}$$

Соотношение (6.14) определяет связь между углом падения α_1 и углом преломления α_2. Как следует из (6.14), если ток переходит из среды с большой проводимостью (например, из металла) в среду с малой проводимостью (например, в землю), то тангенс угла преломления будет меньше тангенса угла падения и $\alpha_2 < \alpha_1$. Если удельная проводимость γ_2 весьма мала, то $\alpha_2 \to 0$.

6.3. АНАЛОГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ в проводящей среде С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Проведем сравнение основных уравнений, соотношений и граничных условий для электростатического поля в области, где нет свободных зарядов ($\rho = 0$), и для поля в проводящей среде в области, где нет сторонних сил ($\bar{E}_{\text{стор}} = 0$). Результаты сравнения представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

№ п/п	Электростатическое поле ($\rho = 0$)	Электрическое поле в проводящей среде ($\bar{E}_{\text{стор}} = 0$)
1	$\operatorname{rot}\bar{E} = 0$, $\oint\limits_L \bar{E}d\bar{l} = 0$, $\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi$; $u = \int\limits_l \bar{E}d\bar{l}$, $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$	$\operatorname{rot}\bar{E} = 0$, $\oint\limits_L \bar{E}d\bar{l} = 0$, $\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi$; $u = \int\limits_l \bar{E}d\bar{l}$, $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$
2	$\operatorname{div}\bar{D} = 0$, $\bar{D} = \varepsilon_a\bar{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\bar{E}$	$\operatorname{div}\bar{J} = 0$, $\bar{J} = \gamma\bar{E}$
3	а) $\varepsilon_a = \text{const}$, $\nabla^2\varphi = 0$; б) $\varepsilon_a \neq \text{const}$, $\nabla^2\varphi + \dfrac{\operatorname{grad}\varepsilon_a}{\varepsilon_a}\operatorname{grad}\varphi = 0$	а) $\gamma = \text{const}$, $\nabla^2\varphi = 0$; б) $\gamma \neq \text{const}$, $\nabla^2\varphi + \dfrac{\operatorname{grad}\gamma}{\gamma}\operatorname{grad}\varphi = 0$
4	1) $D_{1n} = D_{2n}$, 2) $E_{1t} = E_{2t}$	1) $J_{1n} = J_{2n}$, 2) $E_{1t} = E_{2t}$

По своей природе электростатическое поле и электрическое поле постоянного тока в проводящей среде различны. Первое из них является полем неподвижных зарядов, второе – полем зарядов, движущихся с постоянной скоростью. Из табл. 6.1 следует, что между величинами, характеризующими эти поля, существует математическая аналогия, т.е. они входят в уравнения *одинаковым образом*. Другими словами, уравнения полей и соотношения, записанные относительно математически аналогичных величин, выглядят одинаково. Если два поля удовлетворяют одним и тем же уравнениям (уравнения Пуассона–Лапласа) и в них выполняются тождественные граничные условия для сходных (математически аналогичных) величин, то при одинаковой форме граничных поверхностей на основе теоремы единственности решения можно сделать вывод о том, что совокупности силовых и эквипотенциальных линий в этих полях (картины полей) будут одинаковыми.

Согласно табл. 6.1 оба поля являются потенциальными. С вектором электрической индукции $\overline{D}$ можно сопоставить вектор плотности тока $\overline{J}$. Электростатическое поле в области, где нет свободных зарядов, описывается уравнением Лапласа так же, как и электрическое поле постоянного тока в области, где нет сторонних сил. Граничные условия для двух полей подобны. Величины ε_a и γ являются математически аналогичными. На основании соотношений (3.10) и (4.7) можно сделать вывод об аналогии между зарядом Q и током I. Существует аналогия и между емкостью C и проводимостью G. Действительно, согласно (4.58) с учетом (4.7) и (4.16) емкость между двумя телами, находящимися в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r, равна

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint\limits_S \overline{D}d\overline{S}}{\int\limits_l \overline{E}d\overline{l}} = \frac{\varepsilon_a \oint\limits_S \overline{E}d\overline{S}}{\int\limits_l \overline{E}d\overline{l}} . \tag{6.15}$$

Проводимость между этими телами, помещенными в проводящую среду с удельной проводимостью γ, в соответствии с [4], используя соотношения (3.10) и (4.16), можно записать как:

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint\limits_S \overline{J}d\overline{S}}{\int\limits_l \overline{E}d\overline{l}} = \frac{\gamma \oint\limits_S \overline{E}d\overline{S}}{\int\limits_l \overline{E}d\overline{l}} . \tag{6.16}$$

Поделив (6.15) на (6.16), получим:

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon_a}{\gamma}. \tag{6.17}$$

Как следует из (6.17), емкость C между двумя телами, разделенными диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_a, так относится к проводимости G между теми же телами, помещенными в среду с удельной проводимостью γ, как ε_a относится к γ.

Математически аналогичные величины, характеризующие электростатическое поле и электрическое поле постоянного тока, сведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Электростатическое поле ($\rho = 0$)		Электрическое поле в проводящей среде ($\bar{E}_{\text{стор}} = 0$)
$\bar{E}$	$\Leftrightarrow$	$\bar{E}$
φ	$\Leftrightarrow$	φ
$\bar{D}$	$\Leftrightarrow$	$\bar{J}$
ε_a	$\Leftrightarrow$	γ
Q	$\Leftrightarrow$	I
C	$\Leftrightarrow$	G

Отмеченная аналогия лежит в основе моделирования полей так называемым *методом электростатической аналогии*. Этот метод позволяет в ряде случаев при расчете токов в проводящей среде воспользоваться готовыми аналитическими решениями соответствующих задач электростатики, и наоборот, заменить исследование электростатического поля *экспериментальным* исследованием поля постоянного тока в проводящей среде. Последнее особенно важно при решении сложных задач электростатики, не имеющих аналитического решения. Так, согласно (6.17) можно рассчитать емкость по формуле

$$C = G\frac{\varepsilon_a}{\gamma}. \tag{6.18}$$

Тогда, экспериментально измерив проводимость G между телами (электродами), помещенными в проводящую среду, а также удельную проводимость среды γ, по выражению (6.18) легко определить емкость между этими телами в среде с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_a, поскольку геометрия полей в обеих задачах одинакова. Рассмотрим несколько примеров использования метода электростатической аналогии.

Пример 1. Определить проводимость между двумя параллельными проводами длиной l и радиусом R_0, находящимися в среде с удельной проводимостью γ на расстоянии d друг от друга.

В электростатике есть аналитическое решение подобной задачи (см. подраздел 5.3.1). Емкость рассматриваемой двухпроводной линии на единицу длины определяется выражением (5.23), а для частного случая, когда $d \gg R_0$, равна:

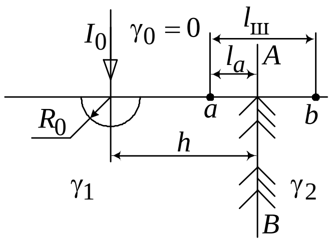
$$C_0 = \frac{\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{d}{R_0}}.$$

Соответственно емкость линии длиной l можно представить как

$$C = C_0 l = \frac{\pi\varepsilon_a l}{\ln\dfrac{d}{R_0}}.$$

По аналогии (табл. 6.2) проводимость между заданными проводами получим в виде:

$$G = \frac{\pi\gamma l}{\ln\dfrac{d}{R_0}}.$$



Рис

Пример 2. Полусферический заземлитель радиусом R_0 зарыт в землю (рис. 6.3). Постоянный ток, стекающий через заземлитель в грунт, равен I_0. Грунт слева от плоскости AB имеет удельную проводимость γ_1, а справа – γ_2 ($\gamma_2 > \gamma_1$), удельная проводимость воздуха $\gamma_0 = 0$. Расстояние от центра полусферы до плоскости AB равно h. Определить шаговое напряжение между точками a и b U_{ab}, находящимися на расстоянии $l_{ш} = 0.8$ м ($l_{ш}$ – среднее расстояние между ногами человека), если точка a удалена от плоскости AB на расстояние l_a.

Воспользуемся методом электростатической аналогии и табл. 6.2. Данную задачу можно рассматривать как задачу Сирла (см. раздел 5.5). Согласно Сирлу от одной сложной задачи (рис. 6.3) можно перейти к нескольким простым, избавившись от неоднородности среды. В соответствии с табл. 6.2 заряд $Q = \tau l$ (l – длина провода в задаче, рассмотренной в разделе 5.5) заменим на ток I, ε_a на γ.

Полусферический заземлитель находится на границе раздела "земля-воздух", для устранения которой отразим полусферу в верхнюю полуплоскость (рис. 6.4). Фиктивный ток I_1, втекающий в получившийся сферический заземлитель, равен сумме тока I_0 и фиктивного тока $I_0^{'}$, который определим по первому выражению (5.34), используя метод электростатической аналогии:

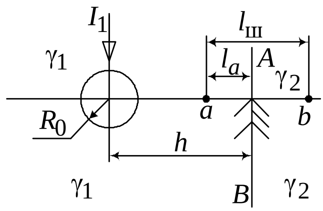


Рис. 6.4

$$I_0^{'} = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1 + \gamma_0} I_0 = I_0, \qquad I_1 = I_0 + I_0^{'} = 2I_0.$$

Для устранения границы раздела сред с удельными проводимостями γ_1 и γ_2 согласно Сирлу от задачи, приведенной на рис. 6.4, перейдем к двум более простым задачам (рис. 6.5 и 6.6) с однородной средой (см. раздел 5.5).

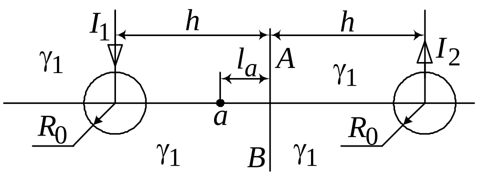


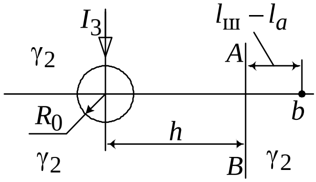
Рис. 6.5

Пренебрежем радиусом заземлителя и сдвигом его электрического центра относительно геометрического. Тогда фиктивные токи I_2 и I_3 найдем, используя соотношения (5.34):

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} I_1; \\ I_3 &= \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} I_1. \end{aligned}\right\}$$

Поскольку $\gamma_2 > \gamma_1$,

$$I_2 = -\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} I_1,$$



т.е. направление тока I_2 противоположно направлению тока I_1 (рис. 6.5). Направления токов I_3 и I_1 совпадают (рис. 6.6).

Рис.

Напряженность и потенциал в любой точке поля определим по формулам (4.8) и (4.19) для точечного заряда, используя математическую аналогию:

$$E = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}, \tag{6.19}$$

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma r}. \tag{6.20}$$

Здесь r – расстояние от провода с током до заданной точки поля.

По схеме, приведенной на рис. 6.5, согласно принципу наложения рассчитаем потенциал поля в точке a:

$$\varphi_a = \varphi_{aI_1} + \varphi_{aI_2},$$

где φ_{aI_1} – потенциал в точке a поля постоянного тока I_1, φ_{aI_2} – потенциал в точке a поля тока I_2, с учетом (6.20)

$$\varphi_{aI_1} = \frac{I_1}{4\pi\gamma_1\left(h - l_a\right)}, \qquad \varphi_{aI_2} = \frac{I_2}{4\pi\gamma_1\left(h + l_a\right)}.$$

Аналогично по расчетной схеме, представленной на рис. 6.6, определим потенциал φ_b:

$$\varphi_b = \frac{I_3}{4\pi\gamma_2\left(h + l_{ш} - l_a\right)}.$$

Шаговое напряжение U_{ab} равно:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I_1}{4\pi\gamma_1\left(h - l_a\right)} + \frac{I_2}{4\pi\gamma_1\left(h + l_a\right)} - \frac{I_3}{4\pi\gamma_2\left(h + l_{ш} - l_a\right)}.$$

Для расчета напряженности в любой точке поля заземлителя следует воспользоваться формулой (6.19) и принципом наложения. При этом необходимо учитывать, что картины силовых линий поля точечных зарядов и поля соответствующих им фиктивных токов полностью совпадают.

6.4. Основные законы и соотношения теории цепей постоянного тока

Выше отмечалось, что теория цепей есть *первое приближение* теории поля, частный случай для тех электромагнитных явлений, которые можно описать посредством таких интегральных понятий, как ток, напряжение, ЭДС [4]. Покажем, что все основные законы теории цепей постоянного тока содержатся в уравнениях (6.2) – (6.4) электрического поля постоянного тока в проводящей среде.

6.4.1. Закон Ома

Убедимся в том, что соотношение (6.3) действительно является законом Ома в дифференциальной форме, получив его известную интегральную форму. Возьмем проводник длиной l и сечением S, по которому протекает ток I (рис. 6.7). Со-

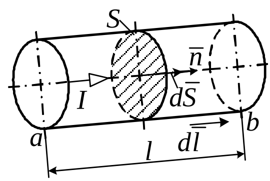


Рис.

гласно (4.16) напряжение на зажимах проводника U_{ab} равно:

$$U_{ab} = \int_a^b \overline{E} d\overline{l} .$$

Направление вектора напряженности электрического поля $\overline{E}$ внутри проводника в соответствии с (6.3) совпадает с направлением движения заряда, т.е. тока I :

$$\overline{E} = \frac{\overline{J}}{\gamma} = \rho_{\text{пр}} \overline{J} , \tag{6.21}$$

где $\rho_{\text{пр}} = \dfrac{1}{\gamma}$ – удельное сопротивление проводника, а также с направлением вектора перемещения $d\overline{l}$. С учетом

$$\overline{E} d\overline{l} = E \cos(\overline{E} \,\widehat{,}\, d\overline{l}) dl = E dl$$

и постоянства напряженности поля по длине проводника для случая постоянного тока (при $\overline{J} = \text{const}$ $\overline{E} = \text{const}$), напряжение на зажимах проводника можно представить в виде

$$U_{ab} = \int_a^b \overline{E} d\overline{l} = \int_a^b E dl = E \int_a^b dl = El . \tag{6.22}$$

Поскольку вектор плотности тока $\overline{J}$ направлен параллельно нормали, проведенной к сечению проводника $\overline{n}$, и элементарная площадка, взятая на сечении проводника, $d\overline{S} = \overline{n} dS$ (рис. 6.7) согласно (3.10) получим:

$$I = \int_S \overline{J} \, d\overline{S} = \int_S J \, dS = J \int_S dS = JS ,$$

т.е.

$$J = I/S . \tag{6.23}$$

Подставляя (6.23) в (6.21), имеем:

$$E = \rho_{\text{пр}} J = \rho_{\text{пр}} \frac{I}{S} ,$$

тогда выражение (6.22) примет вид

$$U_{ab} = \frac{\rho_{\text{пр}} l}{S} I = RI\ , \tag{6.24}$$

где $R = \dfrac{\rho_{\text{пр}} l}{S}$ – электрическое сопротивление проводника.

Итак, выражение (6.24), называемое законом Ома, получается в результате интегрирования соотношения (6.3), следовательно, (6.3) есть дифференциальная запись закона Ома.

6.4.2. Первый закон Кирхгофа

Как уже отмечалось выше, второе уравнение системы (6.2) называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме. Проинтегрируем указанное уравнение по объему V, включающему узел цепи (рис. 6.8), в который втекают постоянные токи I_1, I_n и вытекают I_2, I_k. Применяя теорему Остроградского–Гаусса (1.11),

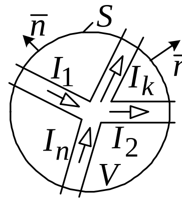


Рис. 6.8

$$\int_V \operatorname{div} \overline{J} d\overline{V} = \oint_S \overline{J} d\overline{S} = 0\,,$$

или

$$\oint_S \overline{J} d\overline{S} = 0\,. \tag{6.25}$$

Выражение (6.25) представляет собой первый закон Кирхгофа в интегральной форме, или частный случай принципа непрерывности полного тока [4], когда плотность полного тока равна плотности тока проводимости.

Приведем (6.25) к знакомому виду. Поверхность S включает сечения тех проводников, которые входят в рассматриваемый узел электрической цепи, т.е. с учетом (3.10)

$$\oint_S \overline{J} d\overline{S} = \int_{S_1} \overline{J}_1 d\overline{S} + \int_{S_2} \overline{J}_2 d\overline{S} + \ldots + \int_{S_k} \overline{J}_k d\overline{S} + \ldots + \int_{S_n} \overline{J}_n d\overline{S} =$$

$$= I_1 + I_1 + \ldots + I_k + \ldots + I_n.$$

Следовательно, (6.25) можно записать как

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \qquad (6.26)$$

где $I_k = \int\limits_{S_k} \overline{J}_k d\overline{S}$.

Таким образом, алгебраическая сумма токов в ветвях, связанных общим узлом, равна нулю. Если направление тока совпадает с положительным направлением нормали $\overline{n}$ к поверхности S (рис. 6.8), т.е. ток выходит из объема V, то в уравнение (6.26) он входит со знаком "плюс".

Как отмечалось в [4], первый закон Кирхгофа – это математическая запись закона сохранения заряда для выделенного объема V в единицу времени. Дифференциальная форма указанного закона (второе уравнение системы (6.2)) наиболее четко отражает его физический смысл. Согласно второму уравнению (6.2) вектор $\overline{J}$ не имеет источников и стоков (линии вектора $\overline{J}$ непрерывны), т.е. заряды не создаются и не уничтожаются, они сохраняются в проводящей среде (цепи).

6.4.3. Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа в интегральной форме связывает напряжения на участках контура цепи и ЭДС, действующие в выбранном контуре. Естественно предположить, что интегральная запись второго закона может быть получена путем интегрирования обобщенного закона Ома, или второго закона Кирхгофа, в дифференциальной форме (6.4) по замкнутому контуру, взятому в области действия сторонних сил ($\overline{E}_{\text{стор}} \neq 0$).

Для доказательства выберем контур, состоящий из ветвей $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots, l_n$ (l_k – участок контура, вдоль которого плотность тока равна J_k). Перепишем (6.4) в следующем виде:

$$\overline{E} + \overline{E}_{\text{стор}} = \frac{\overline{J}}{\gamma}. \qquad (6.27)$$

Проинтегрируем (6.27) по замкнутому контуру L:

$$\oint\limits_L \overline{E} d\overline{l} + \oint\limits_L \overline{E}_{\text{стор}} d\overline{l} = \oint\limits_L \frac{\overline{J}}{\gamma} d\overline{l}.$$

Учитывая условие потенциальности электрического поля постоянного тока (4.9), получим:

$$\oint_L \bar{E}_{\text{стор}} d\bar{l} = \oint_L \frac{\bar{J}}{\gamma} d\bar{l} \,. \tag{6.28}$$

В [4] показано, что

$$\oint_L \bar{E}_{\text{стор}} d\bar{l} = \sum_{k=1}^{n} e_k \,, \tag{6.29}$$

где $e_k = \int\limits_{l_k} \bar{E}_{\text{стор}} d\bar{l}$ – ЭДС, действующая на участке l_k, $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k$ – алгебраическая сумма ЭДС, действующих в выбранном замкнутом контуре.

Так как контур состоит из n ветвей (участков), правую часть уравнения (6.28) можно преобразовать следующим образом:

$$\oint_L \frac{\bar{J}}{\gamma} d\bar{l} = \int_{l_1} \frac{\bar{J}_1}{\gamma_1} d\bar{l} + \int_{l_2} \frac{\bar{J}_2}{\gamma_2} d\bar{l} + \ldots + \int_{l_k} \frac{\bar{J}_k}{\gamma_k} d\bar{l} + \ldots + \int_{l_n} \frac{\bar{J}_n}{\gamma_n} d\bar{l} \,.$$

Для случая постоянного тока (см. подраздел 6.4.1) имеем

$$\int_{l_k} \frac{\bar{J}_k}{\gamma_k} d\bar{l} = \int_{l_k} \frac{J_k}{\gamma_k} dl = \frac{J_k}{\gamma_k} \int_{l_k} dl = \frac{J_k}{\gamma_k} l_k \,,$$

что с учетом (6.23) примет вид

$$\int_{l_k} \frac{\bar{J}_k}{\gamma_k} d\bar{l} = \frac{\rho_{\text{пр}k} l_k}{S_k} I_k = R_k I_k \,. \tag{6.30}$$

Подставляя (6.29) и (6.30) в уравнение (6.28), получим известную математическую запись второго закона Кирхгофа для замкнутого контура электрической цепи постоянного тока:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k I_k = \sum_{k=1}^{n} e_k \,,$$

или в соответствии с (6.24)

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} e_k .$$

Таким образом, основные законы теории цепей постоянного тока, а также информацию о свойствах электрического поля постоянного тока, легко получить из уравнений Максвелла (6.2) и соотношений (6.3), (6.4).

6.4.4. Закон Джоуля–Ленца

Как известно, интегральная запись закона Джоуля–Ленца для цепи постоянного тока имеет следующий вид:

$$P = UI = RI^2 = GU^2, \tag{6.31}$$

где P – мощность, или энергия в единицу времени, переходящая в тепло в проводнике с электрическим сопротивлением R [4]. Соответствующая дифференциальная форма закона может быть представлена как:

$$P_{\text{д}} = \overline{J}\,\overline{E} = \rho_{\text{пр}} J^2 = \gamma E^2 . \tag{6.32}$$

Выражение (6.32) математически отражает мощность в *каждой* точке проводника, или энергию, переходящую в тепло в единицу времени в *каждой* точке проводящей среды.

Очевидно, что для получения (6.31) следует проинтегрировать (6.32) по объему проводника с электрическим сопротивлением R. Учитывая (4.14), имеем:

$$P = \int_V P_{\text{д}} dV = \int_V \overline{J}\,\overline{E} dV = -\int_V \overline{J} \operatorname{grad} \varphi \, dV . \tag{6.33}$$

Используя известное соотношение из векторного анализа [2], подынтегральное выражение в (6.33) запишем в виде

$$\overline{J} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \varphi \overline{J} - \varphi \operatorname{div} \overline{J} ,$$

или с учетом второго уравнения системы (6.2)

$$\bar{J}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \mathrm{div}\,\varphi\bar{J}\,. \qquad (6.34)$$

Подставляя (6.34) в (6.33) и применяя теорему Остроградского-Гаусса (1.11), преобразуем (6.33) к следующей форме:

$$P = -\int\limits_V \bar{J}\,\mathrm{grad}\,\varphi\, dV = -\oint\limits_S \varphi\bar{J}d\bar{S}\,, \qquad (6.35)$$

где S – поверхность, охватывающая рассматриваемый объем, т.е. поверхность проводника (рис. 6.9).

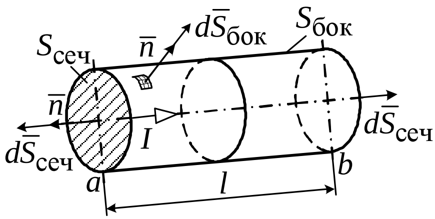


Рис. 6.9

Согласно рис. 6.9 площадь поверхности проводника равна

$$S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{сеч}}\,.$$

Здесь $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности проводника, $S_{\text{сеч}}$ – площадь его сечений (торцов). Для боковой поверхности

$$\bar{J}d\bar{S}_{\text{бок}} = J\cos 90^\circ\, dS_{\text{бок}} = 0\,,$$

для торцов

$$\bar{J}d\bar{S}_{\text{сеч}} = \begin{cases} -JdS_{\text{сеч}}, \text{сечение "}a\text{";} \\ JdS_{\text{сеч}}, \text{сечение "}b\text{".} \end{cases}$$

С учетом последних соотношений, а также выражений (3.10) и (4.17), (6.35) примет вид

$$P = -\oint\limits_S \varphi \bar{J} d\bar{S} = -\int\limits_{S_{\text{бок}}} \varphi \bar{J} d\bar{S}_{\text{бок}} - \int\limits_{S_{\text{сеч}a}} \varphi \bar{J} d\bar{S}_{\text{сеч}} - \int\limits_{S_{\text{сеч}b}} \varphi \bar{J} d\bar{S}_{\text{сеч}} =$$

$$= \varphi_a \int\limits_{S_{\text{сеч}a}} J dS_{\text{сеч}} - \varphi_b \int\limits_{S_{\text{сеч}b}} J dS_{\text{сеч}} = \left(\varphi_a - \varphi_b\right) I = U_{ab} I,$$

где $I = \int\limits_{S_{\text{сеч}a}} J dS_{\text{сеч}} = \int\limits_{S_{\text{сеч}b}} J dS_{\text{сеч}}$, $U_{ab} \equiv U$ – напряжение на зажимах проводника.

Таким образом, интегрируя закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме (6.32), переходим к его интегральной записи (6.31), которая широко используется в электротехнических расчетах.

7. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Возникновение магнитного поля связано с движением электрических зарядов. Движение зарядов с *постоянной скоростью* порождает ***стационарное*** магнитное поле, не зависящее от времени и не связанное с электрическим полем.

7.1. УРАВНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Из полной системы уравнений Максвелла (3.22) выберем лишь уравнения, описывающие магнитное поле постоянного тока:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} = \bar{J}_{\text{пр}}; \\ &\operatorname{div} \bar{B} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Систему (7.1) называют уравнениями Максвелла для магнитного поля постоянного тока, или магнитостатики. Из первого уравнения (7.1) следует, что магнитное поле является вихревым (непотенциальным). Согласно второму уравнению (7.1) магнитное поле не имеет источников, линии вектора магнитной индукции непрерывны и замкнуты.

В интегральной форме система (7.1) может быть представлена следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\oint\limits_L \bar{H} d\bar{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k; \\ &\oint\limits_S \bar{B} d\bar{S} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

Первое уравнение (7.2) также называют законом полного тока (см. подраздел 3.1.3). При вычислении алгебраической суммы в правой части уравнения положительными считаются токи, направления которых образуют правовинтовую систему с направлением обхода контура L. Второе уравнение (7.2) известно как принцип непрерывности линий магнитной индукции (см. подраздел 3.1.2).

Для изучения свойств магнитного поля (7.1) и (7.2) следует дополнить соотношениями (3.4) и (3.28):

$$\bar{B} = \mu_a \bar{H}, \qquad W_{\text{м}} = \int\limits_V \frac{\bar{H}\,\bar{B}}{2} dV.$$

Как известно из курса физики [16, 17, 18], выражение (3.4) является частным случаем более общего соотношения, справедливого для любых (не только изотропных) сред:

$$\bar{B} = \mu_0 \left(\bar{H} + \bar{M}\right), \qquad (7.3)$$

где $\bar{M}$ – вектор намагниченности, или магнитный момент единицы объема.

Вектор $\bar{M}$ характеризует *намагниченность* вещества в магнитном поле подобно тому, как вектор поляризации $\bar{P}$ характеризует поляризацию вещества в электрическом поле (см. раздел 4.5). Вектор намагниченности $\bar{M}$ пропорционален напряженности магнитного поля $\bar{H}$:

$$\bar{M} = \left(\mu_r - 1\right) \bar{H}. \qquad (7.4)$$

Важной характеристикой магнитного поля является магнитный поток Φ сквозь любую поверхность S [16, 18], равный

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S} . \tag{7.5}$$

Напомним размерности обсуждаемых величин в системе СИ:

$$[H] = \text{А}/\text{м} , \ [\Phi] = \text{Вб} , \ [B] = \text{Вб}/\text{м}^2 = \text{Тл} .$$

7.2. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Вернемся к системе (7.1). Как ясно из первого уравнения (7.1), ввести для описания свойств магнитного поля некоторую скалярную функцию $\varphi_{\text{м}}$ подобно тому, как вводится потенциальная функция φ (см. раздел 4.3), невозможно, так как $\operatorname{rot}\bar{H} \neq 0$. Однако из второго уравнения (7.1) следует, что можно ввести некоторую векторную функцию $\bar{A}$, которая связана с вектором магнитной индукции соотношением:

$$\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A} . \tag{7.6}$$

Выражение (7.6) вытекает из второго уравнения (7.1) автоматически, поскольку согласно (1.20) всегда

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{A} = 0 .$$

Векторную функцию $\bar{A}$ называют ***векторным потенциалом***, или ***векторной потенциальной функцией***, магнитного поля.

Как уже отмечалось в разделе 4.3, в соответствии с (4.14) вектор напряженности $\bar{E}$ стационарных электрических полей связан с потенциальной функцией φ с точностью до постоянной:

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\operatorname{grad}(\varphi + \text{const}) = -\operatorname{grad}\varphi_1 ,$$

где $\varphi_1 = \varphi + \text{const}$.

Иными словами, имеется довольно ограниченная свобода выбора функции φ. Связь между $\bar{B}$ и $\bar{A}$ значительно шире. Вектор $\bar{B}$ связан с векторной потенциальной функцией $\bar{A}$ с точностью до $\operatorname{grad}\varphi$ [5, 13]:

$$\overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A} = \operatorname{rot}\overline{A}_1, \qquad (7.7)$$

где $\overline{A}_1 = \overline{A} + \operatorname{grad}\varphi$.

Фактически, это означает, что если к векторному полю (магнитному) прибавить ***любое*** поле потенциальное (электрическое), сам векторный потенциал $\overline{A}$ резко изменится, а магнитное поле $\overline{B}$ – нет. В самом деле, с учетом (1.21)

$$\overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A}_1 = \operatorname{rot}\left(\overline{A} + \operatorname{grad}\varphi\right) = \operatorname{rot}\overline{A} + \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{rot}\overline{A}.$$

Таким образом, векторный потенциал $\overline{A}$ может быть выбран произвольным образом, лишь бы соблюдалось условие (7.6). Это очень удобно, поскольку при расчетах магнитного поля вектору $\overline{A}$ можно присвоить такие свойства, что решение задачи станет значительно проще.

Для векторной функции $\overline{A}$ можно получить уравнения, подобные уравнениям Пуассона-Лапласа. Именно поэтому ее и назвали *векторным потенциалом*. Получим упомянутые уравнения, для чего вернемся к системе (7.1). Рассмотрим случай однородной изотропной среды ($\mu_a = \text{const}$), когда вектора $\overline{B}$ и $\overline{H}$ связаны соотношением (3.4). Умножая первое уравнение (7.1) на μ_a, с учетом (3.4) получим:

$$\operatorname{rot}\overline{B} = \mu_a \overline{J}. \qquad (7.8)$$

Подставляя (7.6) в (7.8), имеем:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A} = \mu_a \overline{J}. \qquad (7.9)$$

В соответствии с правилами векторной алгебры [1,2] левая часть (7.9) может быть преобразована следующим образом:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A} - \nabla^2\overline{A},$$

тогда уравнение (7.9) примет вид:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A} - \nabla^2\overline{A} = \mu_a \overline{J}. \qquad (7.10)$$

Вспоминая о большой свободе выбора векторного потенциала $\overline{A}$, возьмем такой вектор $\overline{A}$, чтобы уравнение (7.10) стало как можно более простым, например, пусть

$$\operatorname{div}\overline{A} = 0.$$

В этом случае уравнение (7.10), а значит, и систему (7.1) можно представить как

$$\nabla^2 \overline{A} = -\mu_a \overline{J} \ . \tag{7.11}$$

Одному векторному уравнению (7.11) соответствуют три скалярных относительно проекций вектора $\overline{A}$ в выбранной системе координат. В декартовой системе получим:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_a J_x; \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_a J_y; \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_a J_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Сравнивая (7.12) с уравнением Пуассона (4.26), можно сделать вывод о том, что между (7.12) и (4.26) существует математическая аналогия, т.е. величины, входящие в уравнения (7.12) и (4.26), математически аналогичны (см. раздел 6.3). Следовательно, решение (7.12) совпадает с решением (4.26) при аналогичных граничных условиях.

Уравнение (7.11) и соответствующая ему система (7.12) определяют вектор $\overline{A}$ в области, где протекают токи ($\overline{J} \neq 0$). В областях, свободных от токов, т.е. при $\overline{J} = 0$, указанные уравнения примут вид:

$$\nabla^2 \overline{A} = 0 \ , \tag{7.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= 0; \\ \nabla^2 A_y &= 0; \\ \nabla^2 A_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

Выражения (7.13) и (7.14) по форме записи совпадают с уравнением Лапласа для скалярной потенциальной функции φ (4.27).

Итак, решение задач, связанных с магнитным полем постоянного тока, заключается либо в решении системы уравнений (7.1), либо в решении уравнений Пуассона-Лапласа для векторного магнитного потенциала $\overline{A}$ в форме (7.11) и (7.12) или в форме (7.13) и (7.14) с учетом (7.6).

Решение уравнения Пуассона известно и имеет вид (4.22):

$$\varphi = \int\limits_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a r}.$$

Используя математическую аналогию между величинами, входящими в (4.26), и рассматриваемыми зависимостями ($\rho/\varepsilon_a \Leftrightarrow \mu_a J_x, \mu_a J_y, \mu_a J_z$, $\varphi \Leftrightarrow A_x, A_y, A_z$), запишем решение уравнений (7.12):

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{J_x dV}{r}; \\ A_y &= \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{J_y dV}{r}; \\ A_z &= \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{J_z dV}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

где $J_x dV$, $J_y dV$, $J_z dV$ – проекции элемента тока $\overline{J}dV$, r – расстояние от элемента тока до точки, в которой определяется магнитное поле. Умножая соотношения (7.15) на соответствующие единичные вектора и складывая их почленно, получим решение (7.11):

$$\overline{A} = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\overline{J}dV}{r}. \tag{7.16}$$

Решение уравнений (7.11), (7.12) в виде (7.16), (7.15) получается и используется при условии существования токов в ограниченном объеме пространства, что на практике всегда имеет место. При этом, как ясно из (7.15) и (7.16), величина векторного потенциала убывает по мере удаления от области, занятой токами, в бесконечность не медленнее, чем $1/r$. Так как магнитная индукция $\overline{B}$ определяется зависимостью (7.6), а операция $\operatorname{rot}\overline{A}$ согласно (1.13) – есть векторно-пространственная производная, то $\overline{B}$ и соответственно напряженность магнитного поля $\overline{H}$ убывают в бесконечность не медленнее, чем $1/r^2$.

Выражение (7.16) может быть упрощено, если токи протекают по контурам, состоящим из *линейных проводников*, или для случая *линейных токов*. ***Линейные проводники*** – это проводники, поперечные размеры которых весьма малы по сравнению с их длиной и по сравнению с расстоянием от проводников до точек, в которых определяется магнитное поле. ***Линейные токи*** – токи, протекающие по линейным проводникам. Можно показать [15], что для линейных токов в формуле (7.16) $\overline{J}dV$ заменяется $Id\overline{l}$, а интеграл по объему V – интегралом по контуру L, поскольку согласно (3.10)

$$I = \int_S \overline{J}\, d\overline{S} .$$

Тогда (7.16) примет вид:

$$\overline{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_L \frac{Id\overline{l}}{r} .$$

7.3. ВЫРАЖЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА И ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Используя связь магнитного потока Φ с вектором магнитной индукции $\overline{B}$ (7.5), выведем соотношение, определяющее магнитный поток через векторный потенциал $\overline{A}$. Подставляя (7.6.) в (7.5) и используя теорему Стокса (1.15), получим:

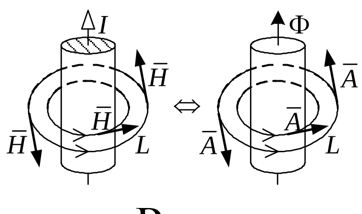
$$\Phi = \int_S \operatorname{rot} \overline{A} d\overline{S} = \oint_L \overline{A}\, d\overline{l} ,$$

или

$$\Phi = \oint_L \overline{A}\, d\overline{l} . \qquad (7.17)$$

Согласно (7.17) *магнитный поток* Φ *сквозь поверхность* S *равен линейному интегралу от векторного потенциала* $\overline{A}$ *по замкнутому контуру, ограничивающему эту поверхность*.

Для вычисления магнитного потока по выражению (7.5) необходимо определить вектор $\overline{B}$ во всех точках поверхности S. При вычислении потока Φ по формуле (7.17) достаточно знать векторный потенциал $\overline{A}$ только на



Рис

контуре, ограничивающем эту поверхность, т.е. интегрирование по поверхности заменяется интегрированием по контуру, что во многих случаях значительно уп-рощает расчеты. Сравнивая (7.17) и первое уравнение (7.2), можно провести формальное сопоставление (7.17) с законом полного тока (3.5), примененным к одиночному проводу с током I: линии вектора $\bar{A}$ охватывают магнитный поток подобно тому, как линии вектора $\bar{H}$ в однородной среде охватывают ток I (рис. 7.1).

Векторный магнитный потенциал применяется и для расчета энергии магнитного поля. Подставляя первое уравнение системы (7.1) и (7.6) в (3.28) и используя формулы векторного анализа [2, 6], можно получить следующее выражение для расчета энергии магнитного поля

$$W_{\text{м}} = \int\limits_{V} \frac{\bar{J}\,\bar{A}}{2} dV\,. \tag{7.18}$$

Преимущество (7.18) перед (3.28) очевидно: в (7.18) интегрирование осуществляется только по той области, где плотность тока проводимости $\bar{J}$ не равна нулю ($\bar{J} \neq 0$), например, по объему проводов (наиболее распространенный случай на практике). В формуле же (3.28) интегрирование ведется по всему объему, где есть поле ($\bar{H} \neq 0$), а, как известно, этот объем бесконечен, так как поле $\bar{H}$ распространяется от источника до бесконечности ($\bar{H}\big|_{r=\infty} = 0$).

Необходимо отметить, что величина $\dfrac{\bar{J}\,\bar{A}}{2}$, стоящая под интегралом в (7.18), *не является* плотностью энергии. Если предположить, что $\dfrac{\bar{J}\,\bar{A}}{2}$ – плотность энергии магнитного поля, то из (7.18) немедленно следует, что вся энергия магнитного поля заключена в области, где $\bar{J} \neq 0$ (например, в проводах). Однако физически данное утверждение неверно, так как энергией обладают все точки, где $\bar{H} \neq 0$, т.е. не только в области, где $\bar{J} \neq 0$, но и вне ее (не только в проводах, но и вокруг них). Выражение (7.18) не отражает физику распространения магнитного поля, оно прочто устанавливает связь между энергией поля и векторным потенциалом $\bar{A}$.

Для системы n контуров с токами, ограничивающих объемы $V_1, V_2, \ldots, V_n$ (рис. 7.2), энергию магнитного поля можно рассчитать по формуле

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\int_{V_1} \bar{A}_1 \bar{J}_1 dV + \frac{1}{2}\int_{V_2} \bar{A}_2 \bar{J}_2 dV + \ldots + \frac{1}{2}\int_{V_n} \bar{A}_n \bar{J}_n dV .$$

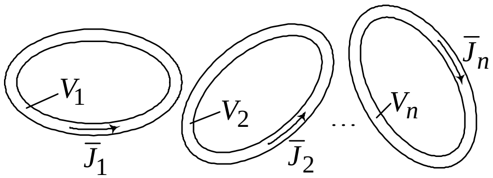


Рис. 7.2

Если контуры образованы линейными проводниками (линейные контуры), меняя $\bar{J}dV$ на $Id\bar{l}$ и переходя к интегралу по контуру L (см. раздел 7.2), получим:

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\oint_{L_1} I_1 \bar{A}_1 d\bar{l} + \frac{1}{2}\oint_{L_2} I_2 \bar{A}_2 d\bar{l} + \ldots + \frac{1}{2}\oint_{L_n} I_n \bar{A}_n d\bar{l} . \qquad (7.19)$$

С учетом (7.17) выражение (7.19) примет вид

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Phi_2 + \ldots + \frac{1}{2} I_n \Phi_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \Phi_k , \qquad (7.20)$$

где I_k – постоянный ток, протекающий по k-му линейному контуру.

Формула (7.20) определяет магнитную энергию взаимодействия n линейных контуров с токами (энергию магнитного поля, созданного системой n контуров с токами).

Как ясно из изложенного выше, использование векторного потенциала $\bar{A}$ упрощает расчет магнитного поля постоянного тока (решение задач магнитостатики) подобно потенциалу φ для электростатического поля и, кроме того, позволяет получить более простые соотношения для определения магнитного потока и энергии магнитного поля.

7.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основные уравнения (уравнения Максвелла) (7.1) и соотношения (7.6), (7.16), описывающие стационарные магнитные поля, можно свести в одну систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J};\\ &\mathrm{div}\,\bar{B} = 0;\\ &\mathrm{rot}\,\bar{A} = \bar{B};\\ &\bar{A} = \frac{\mu_a}{4\pi}\int_V \frac{\bar{J}dV}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

Система (7.21) является математической записью законов магнитного поля постоянного тока для областей, в которых функции $\bar{J}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$ и $\bar{A}$ непрерывны и дифференцируемы. На границе раздела сред с разными магнитными свойствами эти функции терпят разрыв. Получим математическую запись законов поля на границе раздела сред, или граничные условия.

7.4.1. Первое граничное условие для магнитного поля постоянного тока

Запишем второе уравнение системы (7.21) на поверхности раздела сред с разными магнитными свойствами, для чего перейдем к поверхностной дивергенции (см. подраздел 6.2.1):

$$D\mathrm{iv}\,\bar{B} = 0\,.$$

Поскольку [2]

$$\mathrm{Div}\,\bar{B} = \left(\bar{B}_1 - \bar{B}_2\right)\bar{n} = B_{1n} - B_{2n}\,,$$

где B_{1n}, B_{2n} – нормальные проекции векторов магнитной индукции $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ в средах с относительными магнитными проницаемостями μ_{r1}, μ_{r2} (рис. 7.3), получим

$$B_{1n} - B_{2n} = 0,$$

или

$$B_{1n} = B_{2n}. \tag{7.22}$$

Из (7.22) следует, что *нормальная составляющая вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред с разными магнитными свойствами непрерывна.*

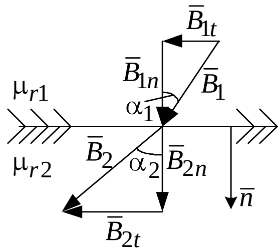


Рис.

На рис. 7.3 положительная нормаль $\bar{n}$ направлена из первой среды во вторую; $\bar{B}_{1n}$ и $\bar{B}_{2n}$ – нормальные составляющие векторов магнитной индукции в двух средах, $\bar{B}_{1t}$, $\bar{B}_{2t}$ – их тангенциальные составляющие,

$$B_{1n} = B_1 \cos\alpha_1, \quad B_{2n} = B_2 \cos\alpha_2, \tag{7.23}$$

$$B_{1t} = B_1 \sin\alpha_1, \quad B_{2t} = B_2 \sin\alpha_2. \tag{7.24}$$

Поскольку в соответствии с (3.4)

$$B_{1n} = \mu_{r1}\mu_0 H_{1n}, \quad B_{2n} = \mu_{r2}\mu_0 H_{2n},$$

очевидно, что

$$H_{2n} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} H_{1n}. \tag{7.25}$$

Из (7.25) следует, что нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля на границе раздела двух сред терпит разрыв, т.е. изменяется скачком, при этом, чем больше магнитная проницаемость среды, тем меньше величина нормальной составляющей напряженности в ней. Так, если имеется граница раздела сред "ферромагнетик – воздух" с магнитными проницаемостями $\mu_{r1} = 1000$ и $\mu_{r2} = 1$ соответственно, то нормальная составляющая напряженности магнитного поля при переходе из ферромагнетика в воздух резко возрастает:

$$H_{2n} = 1000 H_{1n}.$$

В зависимости от конфигурации магнитного поля резкое возрастание нормальной составляющей на границе раздела "ферромагнетик – воздух" может привести к резкому увеличению величины напряженности поля H, что необходимо учитывать при исследовании магнитных полей около стальных поверхностей (электрических машин, электромагнитов и пр.).

7.4.2. Второе граничное условие для магнитного поля постоянного тока

Переходя к поверхностному ротору, запишем первое уравнение системы (7.21) на границе раздела сред с разными магнитными проницаемостями:

$$\operatorname{Rot}\bar{H} = \bar{J}_{\text{пов}},$$

где $\bar{J}_{\text{пов}}$ – поверхностная плотность тока, протекающего по граничной поверхности.

Выражая поверхностный ротор через составляющие вектора напряженности (см. подраздел 6.2.2) в виде

$$\operatorname{Rot}\bar{H} = \bar{n} \times \left(\bar{H}_1 - \bar{H}_2\right) = \bar{H}_{1t} - \bar{H}_{2t},$$

где $\bar{H}_{1t}$, $\bar{H}_{2t}$ – тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$, имеем:

$$\bar{H}_{1t} - \bar{H}_{2t} = \bar{J}_{\text{пов}}. \qquad (7.26)$$

Согласно (7.26) *на границе двух сред тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля претерпевает скачок, равный плотности поверхностного тока, протекающего по границе раздела*.

Если по граничной поверхности ток не протекает, т.е. $\bar{J}_{\text{пов}} = 0$, выражение (7.26) примет вид:

$$\bar{H}_{1t} = \bar{H}_{2t}, \qquad (7.27)$$

или

$$H_{1t} = H_{2t}.$$

Таким образом, при $\bar{J}_{\text{пов}} = 0$ тангенциальная составляющая вектора $\bar{H}$ на границе раздела двух сред непрерывна.

Соотношения (7.26) и (7.27) называют *вторым граничным условием* для магнитного поля постоянного тока.

Так как согласно (3.4)

$$H_{1t} = B_{1t} / \mu_{r1}\mu_0 , \qquad H_{2t} = B_{2t} / \mu_{r2}\mu_0 ,$$

для случая $\bar{J}_{\text{пов}} = 0$

$$B_{1t} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} B_{2t} . \tag{7.28}$$

Используя выражения (7.23) и (7.24), граничные условия (7.22) и (7.28) можно представить в форме:

$$\left.\begin{aligned} B_1 \cos\alpha_1 &= B_2 \cos\alpha_2; \\ B_1 \sin\alpha_1 &= \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} B_2 \sin\alpha_2. \end{aligned}\right\}$$

Разделив почленно второе уравнение указанной системы на первое, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \operatorname{tg}\alpha_2 ,$$

или

$$\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} . \tag{7.29}$$

Соотношение (7.29) представляет собой закон преломления линий вектора $\bar{B}$ на границе двух сред (аналогично выражению (6.14)).

Как уже упоминалось выше, большое практическое значение имеет вопрос о характере магнитного поля в воздухе около поверхностей стальных частей машин, трансформаторов, электромагнитов и других электротехнических устройств [14]. Магнитные проницаемости ферромагнитной среды и воздуха сильно отличаются друг от друга, в рассмотренном выше примере относительная проницаемость ферромагнитной среды $\mu_{r1} = 1000$, проницаемость воздуха $\mu_{r2} = 1$. В этом случае, как следует из (7.29),

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 1000 \operatorname{tg}\alpha_2 .$$

Таким образом, если линии магнитной индукции внутри ферромагнитной среды μ_{r1} составляют с нормалью угол $\alpha_1 = 89^\circ$ (рис. 7.4), то соответствующий угол в воздухе оказывается равным $\alpha_2 \approx 3^\circ 20'$. Поэтому во всех случаях, когда магнитное поле создается токами, протекающими по проводникам, расположенным в воздухе, практически можно принять $\alpha_2 = 0$, т.е. считать, что линии магнитной индукции в воздухе нормальны к поверхности тел из ферромагнитных материалов:

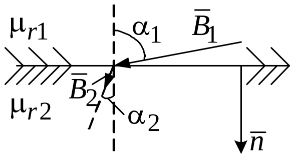


Рис.

$$B_{2t} = 0\,,\ B_2 = B_{2n}\,.$$

7.4.3. Граничные условия для векторного потенциала магнитного поля

Запишем третье уравнение системы (7.21) на поверхности раздела сред с разными магнитными свойствами:

$$R\text{ot}\,\overline{A} = \overline{B}_{n_{\text{пов}}}\,,$$

где $\overline{B}_{n_{\text{пов}}}$ – значение нормальной составляющей вектора магнитной индукции $\overline{B}$ на границе раздела сред [15]. Согласно первому граничному условию (7.22):

$$\overline{B}_{n_{\text{пов}}} = \overline{B}_{1n} - \overline{B}_{2n} = 0\,.$$

Выражая поверхностный ротор через составляющие векторного потенциала $\overline{A}$, получим:

$$R\text{ot}\,\overline{A} = \overline{A}_{1t} - \overline{A}_{2t} = 0\,,$$

или

$$\overline{A}_{1t} - \overline{A}_{2t} = 0\,,$$

$$\overline{A}_{1t} = \overline{A}_{2t}\,,\ \ A_{1t} = A_{2t}\,. \qquad (7.30)$$

Соотношения (7.30) являются граничным условием для векторного потенциала $\overline{A}$. В соответствии с (7.30) *тангенциальная со-*

ставляющая векторного потенциала $\overline{A}$ на границе раздела сред с разными магнитными свойствами непрерывна.

7.5. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. **Математическая аналогия**

Обратимся к системе уравнений Максвелла для магнитного поля постоянного тока (7.1) и запишем ее для области пространства, где нет токов, т.е. $\overline{J} = 0$ (частный случай):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{H} &= 0; \\ \operatorname{div}\overline{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

Для однородных изотропных сред с учетом (3.4) система (7.31) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{H} &= 0; \\ \operatorname{div}\overline{H} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

Как известно, уравнения (7.31) и (7.32) описывают магнитное поле вне проводников. Анализируя первое уравнение (7.32) и учитывая, что в соответствии с (1.21)

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi_{\text{м}} = 0,$$

приходим к следующему выводу. Для магнитного поля постоянного тока, подобно полю электростатическому и электрическому полю постоянного тока, можно найти некоторую скалярную функцию $\varphi_{\text{м}}(\overline{r})$ такую, что

$$\overline{H} = \pm\operatorname{grad}\varphi_{\text{м}}.$$

По аналогии с электростатическим полем в указанном выражении выбирают знак "минус":

$$\overline{H} = -\operatorname{grad}\varphi_{\text{м}}. \qquad 7.33)$$

Скалярную функцию $\varphi_м$ называют скалярным потенциалом магнитного поля, или скалярным магнитным потенциалом, в отличие от векторного потенциала $\overline{A}$.

Подставляя (7.22) во второе уравнение системы (7.32) с учетом (1.22), получим:

$$\operatorname{div}\overline{H} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi_м = -\nabla^2\varphi_м,$$

следовательно,

$$\nabla^2\varphi_м = 0. \qquad (7.34)$$

Уравнение (7.34) есть уравнение Лапласа для скалярного магнитного потенциала, подобно (4.27) для электрического потенциала φ. Однако в отличие от потенциала φ, скалярный магнитный потенциал $\varphi_м$ не имеет физического смысла, он служит удобной математической величиной для расчета магнитного поля. Сравнивая (7.34) и (4.27), можно сделать вывод о том, что между $\varphi_м$ и φ существует математическая аналогия (см. раздел 6.3).

Используя данные табл. 6.1, проведем сравнение основных уравнений, соотношений и граничных условий для электростатического поля в области, где нет свободных зарядов ($\rho = 0$), электрического поля в проводящей среде при отсутствии сторонних сил ($\overline{E}_{стор} = 0$), а также магнитного поля постоянного тока в области, где нет токов ($\overline{J} = 0$), в однородной изотропной среде. Результаты сравнения представлены в табл. 7.1. В табл. 7.2 приведены математически аналогичные величины, характеризующие стационарные электрические и магнитное поля.

Таблица 7.1

№ п/п	Электростатическое поле ($\rho = 0$)	Электрическое поле в проводящей среде ($\overline{E}_{стор} = 0$)	Магнитное поле постоянного тока ($\overline{J} = 0$)
1	$\operatorname{rot}\overline{E} = 0$,	$\operatorname{rot}\overline{E} = 0$,	$\operatorname{rot}\overline{H} = 0$,
2	$\operatorname{div}\overline{D} = 0$,	$\operatorname{div}\overline{J} = 0$,	$\operatorname{div}\overline{B} = 0$,
3	$\overline{D} = \varepsilon_a\overline{E}$	$\overline{J} = \gamma\overline{E}$	$\overline{B} = \mu_a\overline{H}$,
4	$\nabla^2\varphi = 0$,	$\nabla^2\varphi = 0$,	$\nabla^2\varphi_м = 0$,

5	1) $D_{1n} = D_{2n}$, 2) $E_{1t} = E_{2t}$.	1) $J_{1n} = J_{2n}$, 2) $E_{1t} = E_{2t}$.	1) $B_{1n} = B_{2n}$, 2) $H_{1t} = H_{2t}$.

Т а б л и ц а 7.2

Электростатическое поле ($\rho = 0$)		Электрическое поле в проводящей среде ($\bar{E}_{\text{стор}} = 0$)		Магнитное поле постоянного тока ($\bar{J} = 0$)
$\bar{E}$	$\Leftrightarrow$	$\bar{E}$	$\Leftrightarrow$	$\bar{H}$
φ	$\Leftrightarrow$	φ	$\Leftrightarrow$	$\varphi_{\text{м}}$
$\bar{D}$	$\Leftrightarrow$	$\bar{J}$	$\Leftrightarrow$	$\bar{B}$
ε_a	$\Leftrightarrow$	γ	$\Leftrightarrow$	μ_a
Q	$\Leftrightarrow$	I	$\Leftrightarrow$	Φ

Здесь необходимо также упомянуть о двух типах взаимного соответствия электростатического (электрического) поля и магнитного поля постоянного тока в областях, не занятых током [1]. *Первый тип соответствия* возникает, когда распределения линейных зарядов в электростатическом поле и линейных токов в магнитном поле одинаковы. В этом случае одинаковы и картины электростатического и магнитного полей (рис. 7.5). Различие между ними заключается лишь в том, что на месте линий напряженности электрического поля располагаются линии равного магнитного потенциала и на месте линий равного электрического потенциала располагаются линии напряженности магнитного поля [14]. *Второй тип соответствия* возникает, когда одинакова форма граничных эквипотенциальных поверхностей в электростатическом поле и в магнитном поле постоянного тока [1]. В этом случае картины поля оказываются *совершенно одинаковыми*.

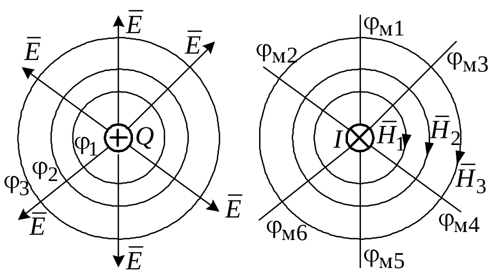


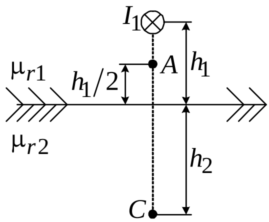
Рис. 7.5

Рассмотренные свойства магнитного поля постоянного тока расширяют область применения метода электростатической аналогии (см. раздел 6.3):

1) при расчете магнитного поля в области вне проводников с постоянными токами можно воспользоваться готовыми аналитическими решениями соответствующих задач электростатики и электрического поля в проводящей среде, а также методами расчета стационарных электрических полей;

2) возникает возможность осуществлять моделирование магнитного поля электрическим полем в проводящей среде (проводящая бумага, электролитическая ванна и пр.), т.е. возникает возможность экспериментального решения тех задач, для которых нет аналитического решения или оно является слишком сложным.

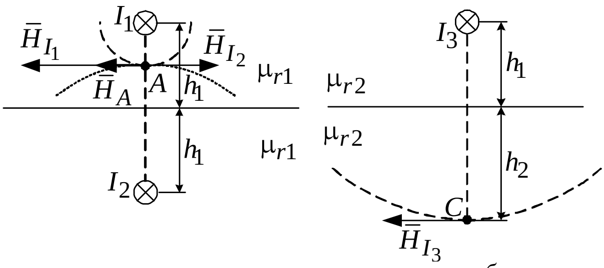
Обсудим применение метода электростатической аналогии при исследовании магнитных полей в некоторых задачах, представляющих практический интерес.



Рис

В соответствии с методом электростатической аналогии задачи по расчету магнитных полей, создаваемых прямолинейными токами, протекающими вблизи стальных масс, можно рассматривать как задачи Сирла (см. раздел 5.5). Допустим, что в воздухе или в какой-либо другой среде с относительной магнитной проницаемостью μ_{r1} параллельно плоскости раздела сред проходит провод с током I_1 на расстоянии h_1 от границы раздела (рис. 7.6). Вторая среда имеет относительную магнитную проницаемость μ_{r2} ($\mu_{r2} > \mu_{r1}$). Требуется определить напряженность поля $\bar{H}_A$ в точке A и магнитную индукцию $\bar{B}_C$ в точке C, если точки A и C удалены от границы раздела на расстояния $h_1/2$ и h_2 соответственно, ток I_1 направлен от наблюдателя (рис. 7.6).

Согласно Сирлу, от сложной задачи (рис. 7.6) можно перейти к двум простым, избавившись от неоднородности среды (рис. 7.7).



а *б*

Рис. 7.7

В [14] показано, что поле прямолинейного тока I, проходящего в воздухе параллельно плоской поверхности массивного тела из ферромагнитного материала ($\mu_{r2} \to \infty$), совпадает в воздухе ($\mu_{r1} = 1$) с полем, которое образуется двумя токами: действительным током I и его зеркальным изображением $I_2 = I$ в поверхности тела, в предположении, что ферромагнитная среда удалена. В этом случае условия на граничной поверхности остаются неизменными. Если вторая среда имеет ограниченную относительную магнитную проницаемость $\mu_{r2} \neq \infty$, эквивалентное поле может быть получено при введении в эту среду фиктивного тока $I_2 = \lambda I$. Таким образом, согласно первому типу соответствия картин электростатического и магнитного полей, задача о расчете поля провода с током, проходящим над границей раздела сред, аналогична задаче о поле заряженной оси, расположенной над поверхностью раздела. И для решения поставленной задачи можно воспользоваться готовым решением, полученным в разделе 5.5.

Подводя итог вышесказанному, для определения фиктивных токов I_2 и I_3 (рис. 7.7) в первом выражении (5.34) заменим заряд $-\tau_1$ на ток I_1, поскольку $I_2 = \lambda I_1$, во втором выражении (5.34) ток I_1 соответствует заряду τ_1 (см. раздел 5.5). В соответствии с табл. 7.2 вместо ε_a подставим μ_a. Окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= \frac{\mu_{r2} - \mu_{r1}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} I_1; \\ I_3 &= \frac{2\mu_{r2}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} I_1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.35)$$

Как следует из (7.35), поскольку $\mu_{r2} > \mu_{r1}$, направление фиктивного тока I_2 совпадает с направлением тока I_1, фиктивный ток I_3 всегда совпадает с I_1 по направлению. Аналогичные выражения для расчета фиктивных токов получены в [1] непосредственно из граничных условий.

Для расчета магнитного поля в точке A следует использовать рис. 7.7,*а*, поле в точке C определим по рис. 7.7,*б*. Силовые линии вектора $\bar{H}$ представляют собой окружности с центром в точке расположения провода с током, их направление связано с направлением тока правилом "правого винта" [16]. Величина напряженности магнитного поля вне провода [8, 16] равна:

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \qquad (7.36)$$

где r – расстояние от точки, в которой рассчитывается напряженность, до провода с током.

В соответствии с (7.35) фиктивные токи I_2 и I_3 меньше заданного тока I_1, тогда из (7.36) следует, что и напряженности H_{I_2} и H_{I_3}, вызываемые этими токами, меньше напряженности H_{I_1}, обусловленной током I_1. Напряженность поля в точке A получим по методу наложения (рис. 7.7,*а*):

$$\bar{H}_A = \bar{H}_{I_1} + \bar{H}_{I_2}.$$

С учетом направлений векторов напряженностей $\bar{H}_{I_1}$ и $\bar{H}_{I_2}$ имеем:

$$H_A = H_{I_1} - H_{I_2},$$

где согласно (7.36)

$$H_{I_1} = \frac{I_1}{2\pi h_1/2} = \frac{I_1}{\pi h_1}, \qquad H_{I_2} = \frac{I_2}{2\pi\left(h_1 + h_1/2\right)} = \frac{I_2}{3\pi h_1}.$$

Окончательно напряженность магнитного поля в точке A определится как

$$H_A = \frac{I_1}{\pi h_1} - \frac{I_2}{3\pi h_1} = \frac{1}{\pi h_1}\left(I_1 - \frac{I_2}{3}\right).$$

Величина напряженности поля в точке C (рис. 7.7,*б*) равна

$$H_C = \frac{I_3}{2\pi\left(h_1 + h_2\right)}.$$

Вектор магнитной индукции в точке C с учетом (3.4) имеет вид

$$\bar{B}_C = \mu_{a2}\bar{H}_C = \mu_0\mu_{r2}\bar{H}_C, \qquad B_C = \frac{\mu_0\mu_{r2}I_3}{2\pi\left(h_1 + h_2\right)}.$$

7.6. НАМАГНИЧИВАНИЕ ТЕЛ РАЗНОЙ ФОРМЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Все вещества обладают магнитными свойствами, которые проявляются при помещении их в магнитное поле. Поведение веществ в магнитном поле характеризуется намагниченностью $\bar{M}$ (см. раздел 7.1). По магнитным свойствам вещества делятся на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Механизмы намагничивания различных веществ подробно изложены в [11, 16, 18], отметим только, что намагниченность, наблюдаемая у ферромагнитных материалов, значительно больше, чем у парамагнетиков и диамагнетиков.

Способность намагничиваться в магнитном поле характеризуется относительной магнитной проницаемостью μ_r. У диамагнитных веществ относительная магнитная проницаемость немного меньше единицы ($\mu_r \le 1$), у парамагнитных веществ – немного больше единицы ($\mu_r \ge 1$). Магнитная проницаемость ферромагнитных веществ значительно превышает единицу ($\mu_r \gg 1$), к таким веществам относят железо, никель, кобальт и их сплавы, ферриты и др., их магнитная проницаемость достигает $10^4 ... 10^5$.

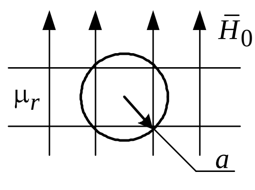
На практике все вещества делят на ферромагнитные ($\mu_r \gg 1$) и неферромагнитные ($\mu_r \approx 1$).

Большой практический интерес представляет намагничивание тел различной формы из ферромагнитного вещества с относительной магнитной проницаемостью $\mu_т$, помещенных в постоянное магнитное поле $\bar{H}_0$. Так, например, в морском деле большое значение имеет дегауссировка кораблей [1]. Это явление заключается в следующем. Корабль, обладая большой ферромагнитной массой, возмущает магнитное поле Земли не только в непосредственной близости от себя, но и на достаточно большом расстоянии. Соответствующие индикаторы возмущения магнитного поля Земли могут привести в действие находящиеся поблизости самодвижущиеся мины (в условиях военного времени), в результате чего корабль может оказаться подорванным. Чтобы этого избежать, на кораблях устанавливают специальные намагничивающие обмотки, которые располагают таким образом, чтобы скомпенсировать возмущение магнитного поля Земли вблизи корабля. Явление намагничивания широко используют и в магнитной дефектоскопии, которая позволяет по картине магнитного поля судить о наличии раковин, трещин и других дефектов в изделиях из ферромагнитных материалов. Применяют магнитную дефектоскопию и на железнодорожном транспорте при контроле целостности рельсов железнодорожного пути.

При решении подобных задач можно воспользоваться методом электростатической аналогии, поскольку они подобны задачам о расчете электрического поля тел из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_т$, помещенных во внешнее постоянное электрическое поле $\bar{E}_0$.

7.6.1. Шар и эллипсоид вращения в однородном магнитном поле

Пусть шар из ферромагнитного вещества с относительной магнитной проницаемостью $\mu_ш$ помещен во внешнее однородное магнитное поле с напряженностью $H_0 = \mathrm{const}$ (рис. 7.8). Радиус шара равен a, относительная магнит-



Рис

ная проницаемость внешней среды равна μ_r, причем $\mu_{ш} > \mu_r$. Требуется определить напряженность H и магнитную индукцию B магнитного поля внутри шара.

Для решения поставленной задачи вос-пользуемся методом электростатической аналогии и формулами, полученными в подразделе 5.7.2. Заменяя согласно табл. 7.2 $\overline{E}$ на $\overline{H}$, ε_r на μ_r, $\varepsilon_{ш}$ на $\mu_{ш}$ в выражении (5.72), имеем:

$$H = \frac{3\mu_r}{\mu_{ш} + 2\mu_r} H_0, \tag{7.37}$$

с учетом (3.4)

$$B = \mu_0 \mu_{ш} H = \frac{3\mu_{ш}}{\mu_{ш} + 2\mu_r} \mu_0 \mu_r H_0 = \frac{3\mu_{ш}}{\mu_{ш} + 2\mu_r} B_0, \tag{7.38}$$

где $B_0 = \mu_0 \mu_r H_0$ – магнитная индукция внешнего поля.

По аналогии с электрическим полем диэлектрического шара (см. подраздел 5.7.2) в соответствии с (5.73) напряженность магнитного поля внутри шара равна

$$\overline{H} = \overline{H}_0 + \overline{H}_{м},$$

где $\overline{H}_{м}$ – размагничивающее поле, которое вызвано намагничиванием шара в магнитном поле, $\overline{H}_{м}$ аналогично деполяризующему полю связанных зарядов, расположенных на поверхности диэлектрического шара (см. подраздел 5.7.2). Для случая $\mu_{ш} > \mu_r$ размагничивающее поле направлено против внешнего поля:

$$H = H_0 - H_{м}, \tag{7.39}$$

тогда по аналогии с (5.74)

$$H_{м} = H_0 \frac{\mu_{ш} - \mu_r}{\mu_{ш} + 2\mu_r}. \tag{7.40}$$

Используя аналогию между электростатикой и магнитостатикой, появление размагничивающего поля $\overline{H}_{м}$ формально можно объяснить возникновением "связанных магнитных зарядов" m, поверхностная плотность которых σ_m пропорциональна разности нормальных составляющих векторов намагниченности $\bar{M}$ внутри и вне тела. Формулу для определения "связанных магнитных зарядов" легко получить на основании (4.53), воспользовавшись аналогией между зависимостями (4.34) и (7.3):

$$\sigma_m = -\mu_0 \left(M_{1n} - M_{2n} \right),$$

так как $\bar{P} \Leftrightarrow \mu_0 \bar{M}$, $\bar{D} \Leftrightarrow \bar{B}$. Поскольку "связанные магнитные заряды", или "наведенные магнитные массы" расположены на поверхности тела, то говорят о размагничивающем действии поверхности. С точки зрения такого представления, очевидно, что намагничивание тел должно зависеть от их формы. Необходимо отметить, что "связанные магнитные заряды", или "магнитные полюсы", не имеют реального физического смысла и вводятся только для удобства расчета и качественного описания изучаемого явления, подобно фиктивным зарядам, используемым в методе изображений (см. раздел 5.4).

Как следует из (7.37) – (7.40), чем больше $\mu_ш$, тем сильнее размагничивающее поле $H_м$ и слабее поле H, но тем сильнее поле B. В пределе при $\mu_ш \to \infty$ имеем:

$$H_м = H_0, \quad H = 0, \quad B = 3B_0. \qquad (7.41)$$

Из формул (7.37) и (7.40) видно, что шар в постоянном магнитном поле намагничивается *однородно*, т.е. напряженности H и $H_м$ являются постоянными величинами, они не зависят от координат. Свойством однородного намагничивания обладают эллипсоиды вращения и их частные случаи: шар, тонкая пластина, бесконечно-длинный цилиндр с эллиптическим или круглым сечением.

На рис. 7.9 для ферромагнитного эллипсоида изображены внешнее однородное поле $\bar{H}_0$, поле вектора $\bar{H}_м$, определяемое намагниченностью эллипсоида и связанное с условным представлением о наведенных магнитных массах ($+m$ и $-m$), результирующие поля вектора $\bar{H}$ и вектора $\bar{B}$.

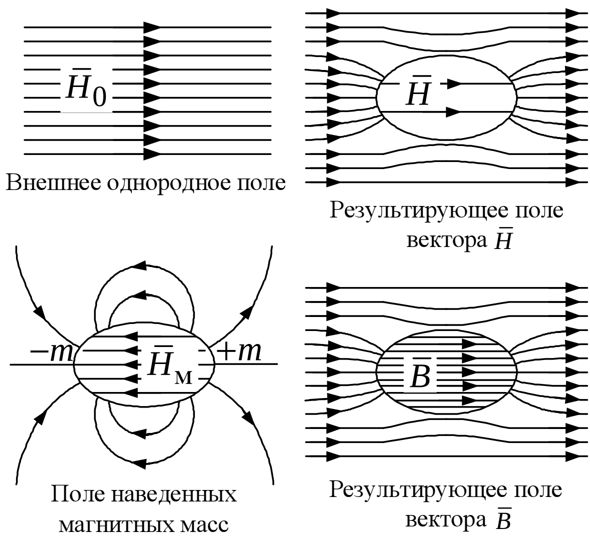


Рис. 7.9

7.6.2. Коэффициенты размагничивания для тел эллипсоидальной формы

Как следует из (7.39), для любого тела эллипсоидальной формы с относительной магнитной проницаемостью $\mu_т$ при $\mu_т > \mu_r$ между магнитным полем внутри тела и внешним полем H_0 существует *линейная* зависимость, т.е. они прямо пропорциональны друг другу. Математически этот факт можно отразить следующей формулой:

$$H_0 = aH . \tag{7.42}$$

Подставляя (7.42) в (7.39), получим связь между размагничивающим полем $H_м$ и полем H внутри тела:

$$H_м = (a-1)H . \tag{7.43}$$

Как уже отмечалось в разделе 7.1, намагниченность вещества характеризуется вектором намагниченности $\bar{M}$, который связан с напряженностью магнитного поля $\bar{H}$ внутри тела соотношением (7.4):

$$\bar{M} = \left(\mu_т - 1\right)\bar{H}\ , \qquad (7.44)$$

или

$$H = \frac{M}{\mu_т - 1}. \qquad (7.45)$$

Подстановка (7.45) в (7.43) даст

$$H_м = \frac{a - 1}{\mu_т - 1} M = NM\ , \qquad (7.46)$$

где

$$N = \frac{a - 1}{\mu_т - 1}. \qquad (7.47)$$

Коэффициент пропорциональности N *называется коэффициентом размагничивания.*

Как ясно из (7.46), для заданного тела с относительной магнитной проницаемостью $\mu_т$, чем больше N, тем больше $H_м$. Поскольку размагничивающее поле зависит от *формы* тела, как уже отмечалось в подразделе 7.6.1, то и коэффициент N должен отличаться для тел разной формы, выполненных из вещества с заданной относительной магнитной проницаемостью $\mu_т$. Иными словами, зависимость намагниченности тела от его формы должна отразиться в коэффициенте N. Из (7.47) следует, что форма тела учитывается коэффициентом a, определяя который для произвольной геометрии тела, можно рассчитать N. Отметим, что все сказанное справедливо лишь для эллипсоида и его частных случаев, для которых наблюдается однородное намагничивание (см. подраздел 7.6.1).

Вычислим N для некоторых частных случаев эллипсоида вращения, считая, что указанные тела расположены в воздухе ($\mu_r = 1$).

Сравнивая выражения (7.37) и (7.42), можно сделать вывод о том, что для шара

$$a = \frac{\mu_т + 2\mu_r}{3\mu_r}.$$

При $\mu_r = 1$ имеем:

$$a = \frac{\mu_т + 2}{3},$$

тогда согласно (7.47) коэффициент размагничивания N для шара равен:

$$N = 1/3\,.$$

Рассмотрим бесконечно длинный цилиндр, расположенный перпендикулярно силовым линиям магнитного поля $\bar{H}_0$ (рис. 7.10). Используя электростатическое решение подобной задачи (задачи о диэлектрическом цилиндре в равномерном поле), приведенное в [1], и метод электростатической аналогии, получим:

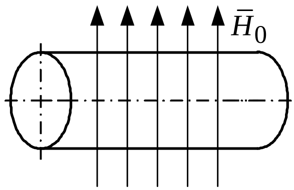


Рис. 7.10

$$H = \frac{2\mu_r}{\mu_т + \mu_r} H_0\,,$$

тогда

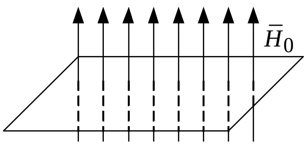
$$a = \frac{\mu_т + \mu_r}{2\mu_r}\,.$$

При $\mu_r = 1$

$$a = \frac{\mu_т + 1}{2}\,,$$

соответственно

$$N = 1/2\,.$$



Рис

Рассчитаем коэффициенты a и N для тонкой пластины, расположенной перпендикулярно силовым линиям внешнего поля $\bar{H}_0$ (рис. 7.11). Толщина пластины настолько мала, что величина напряженности поля внутри пластины равна значению напряженности на ее границе с окружающей средой (пластина намагничивается однородно). Поле $\bar{H}$ внутри пластины параллельно внешнему полю $\bar{H}_0$. Запишем граничные условия (7.22) и (7.27) для нормальных и тангенциальных составляющих внешнего и внутреннего полей $\bar{H}_{0n}$, $\bar{H}_n$, $\bar{H}_{0t}$, $\bar{H}_t$:

$$\left.\begin{aligned} H_{0t} &= H_t; \\ B_{0n} &= B_n, \end{aligned}\right\}, \tag{7.48}$$

где $B_{0n} = \mu_0 \mu_r H_{0n}$, $B_n = \mu_0 \mu_т H_n$.
С учетом последних соотношений система (7.48) примет вид

$$\left. \begin{aligned} H_{0t} &= H_t; \\ \mu_r H_{0n} &= \mu_т H_n. \end{aligned} \right\} \qquad (7.49)$$

Поскольку направление внешнего поля перпендикулярно поверхности пластины, $H_{0t} = 0$ и в соответствии с первым уравнением (7.49) $H_t = 0$. Тогда

$$H_0 = H_{0n}, \quad H = H_n,$$

или согласно второму уравнению (7.49),

$$\mu_r H_0 = \mu_т H,$$

из чего следует, что

$$H_0 = \frac{\mu_т}{\mu_r} H.$$

С учетом (7.42) и (7.47)

$$a = \frac{\mu_т}{\mu_r}, \qquad N = 1.$$

Значение $N = 1$ является максимальным для коэффициента размагничивания тел в воздушной среде:

$$0 \le N \le 1.$$

Если $N = 1$, то говорят, что имеет место полное размагничивание ($H_м = M$). При $N = 0$ размагничивание не наблюдается:

$$H_м = 0, \quad a = 1, \quad H = H_0.$$

Такое возможно, если очень длинный (теоретически бесконечный) цилиндр, например длинный рельс, расположить не поперек поля, а вдоль его (по силовым линиям). Используя модель "связанных магнитных зарядов", можно объяснить, почему в этом случае размагничивающее поле равно нулю. "Магнитные заряды" находятся только на торцах очень длинного цилиндра ("магнитные массы" "разнесены" на большое расстояние) и не влияют на поле $\bar{H}_0$.

Если тела эллипсоидальной формы расположены не в воздухе ($\mu_r = 1$), а в какой-либо другой среде ($\mu_r \neq 1$), то значения коэффициента размагничивания N будут другими, так как коэффициент a будет содержать отношение магнитных проницаемостей тела и окружающей среды.

В [14] приведена формула для расчета коэффициентов размагничивания эллипсоидов вращения, помещенных в воздушную среду (вакуум):

$$N = \frac{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) - 1}{\lambda^2 - 1} = \tag{7.50}$$

$$= \frac{1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \arccos \lambda}{1 - \lambda^2},$$

где λ – отношение длины оси вращения эллипсоида, направленной вдоль линии внешнего поля, к длине оси, ей перпендикулярной. Первой частью выражения (7.50) удобно пользоваться при $\lambda > 1$, второй – при $\lambda < 1$.

Для бесконечной пластины, расположенной поперек поля, которую можно рассматривать как сплющенный эллипсоид, приняв $\lambda = 0$, находим $N = 1$. Это, как отмечалось выше, максимально возможное значение N. Для шара, полагая $\lambda = 1$ и раскрывая неопределенность, получаем $N = 1/3$. Для бесконечно длинного стержня, расположенного вдоль поля, принимая $\lambda = \infty$ и раскрывая неопределенность, имеем $N = 0$. Все эти значения коэффициента N совпадают с полученными ранее.

Свойство эллипсоидов равномерно намагничиваться в однородном магнитном поле широко применяется в магнитометрии. Для исследования магнитных свойств ферромагнетиков из этих материалов изготавливают образцы, имеющие форму эллипсоидов вращения или близкую к ней форму. Однородность намагничивания особенно важна именно при испытании ферромагнитных материалов, так как их магнитная проницаемость μ_r зависит от напряженности поля и только при однородном намагничивании значения μ_r во всем объеме образца будут одинаковыми.

Понятие коэффициента размагничивания, зависящего только от формы тела, строго говоря, справедливо лишь для эллипсоидов вращения и их частных случаев, упоминаемых ранее. Однако его используют для *приближенных* практических расчетов магнитных полей, образующихся при внесении во внешнее однородное поле тел иной формы, например коротких цилиндров. Такие расчеты являются только ориентировочными, поскольку тела, отличающие по форме от эллипсоидов, в однородном магнитном поле намагничиваются неравномерно. Форма тела, его положение во внешнем поле оказывают большое влияние на его намагничивание, а также на величину магнитной индукции внутри тела.

Пусть требуется увеличить магнитную индукцию в веществе, помещенном в поперечное однородное магнитное поле, не изменяя его напряженности H_0. Поле внутри вещества равно H, магнитная индукция $B = \mu_0 \mu_{\text{т}} H$.

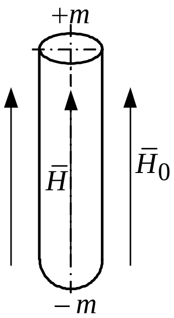


Рис.

Вообще, согласно выражениям для шара (7.37) – (7.41) магнитная индукция B растет с увеличением $\mu_{\text{т}}$, но до тех пор, пока не достигнет своего предельного значения. Предельное значение зависит от формы тела: для шара $B_{\max} = 3B_0$, для цилиндра $B_{\max} = 2B_0$. Таким образом, для тела заданной формы, увеличивая его магнитную проницаемость, можно достичь роста магнитной индукции поля внутри тела всего в два-три раза.

С другой стороны, для увеличения магнитной индукции, не изменяя магнитной проницаемости вещества, можно выполнить образец в форме длинного стержня (длинного рельса, длинного цилиндра и пр.) и поместить его вдоль силовых линий $\overline{H}_0$ (в продольное магнитное поле) (рис. 7.12). В этом случае

$$H_{\text{м}} = 0, \; N = 0, \; H = H_0,$$

т.е. размагничивания не будет, так как "магнитные заряды" далеко разнесены и не влияют на поле, не ослабляют его. Тогда

$$B = \mu_0 \mu_{\text{т}} H = \mu_{\text{т}} \mu_0 H_0 = \mu_{\text{т}} B_0, \tag{7.51}$$

если относительная магнитная проницаемость окружающей среды $\mu_r = 1$. Как следует из (7.51), магнитная индукция внутри тела в $\mu_т$ раз больше индукции внешнего поля ($\mu_т = 10^2...10^5$). Очевидно, что последний способ является наиболее эффективным.

Используя формулы (7.39), (7.44) и (7.46), можно вывести следующее выражение для коэффициента размагничивания N:

$$N = \frac{H_м}{M} = \frac{H_0 - H}{(\mu_т - 1)H} = \frac{H_0/H - 1}{\mu_т - 1}. \qquad (7.52)$$

С учетом $B = \mu_0\mu_т H$, $B_0 = \mu_r\mu_0 H_0$ при $\mu_r = 1$ и $\mu_т \gg 1$ (ферромагнитные материалы) (7.52) примет вид:

$$N \approx \frac{H_0/H - 1}{\mu_т} = \frac{H_0}{\mu_т H} - \frac{1}{\mu_т} = \frac{B_0}{B} - \frac{1}{\mu_т}. \qquad (7.53)$$

В случае сильного размагничивания напряженность поля внутри тела H много меньше H_0, и коэффициент размагничивания можно рассчитать по упрощенной формуле

$$N = \frac{H_0}{\mu_т H} = \frac{B_0}{B}. \qquad (7.54)$$

Выражения (7.53) и (7.54) лежат в основе экспериментального определения коэффициента N. Очевидно, что для экспериментальной оценки N необходимо измерить магнитную индукцию внешнего поля B_0 и магнитную индукцию B внутри тела, а также знать величину относительной магнитной проницаемости тела $\mu_т$ (особенно для слабого размагничивания). Если поле внутри тела неоднородно, коэффициент размагничивания рассчитывается по среднему значению магнитной индукции:

$$B_{ср} = \Phi / S_{ср},$$

где Φ – магнитный поток в среднем сечении тела $S_{ср}$.

7.6.3. Магнитное экранирование

Для защиты электроизмерительных приборов от влияния посторонних магнитных полей их помещают в массивные замкнутые или почти замкнутые оболочки из ферромагнитных материалов. Такие оболочки называют магнитными экранами. Поле внутри экрана оказывается ослабленным по сравнению с внешним полем. Магнитное экранирование характеризуется коэффициентом ослабления экрана:

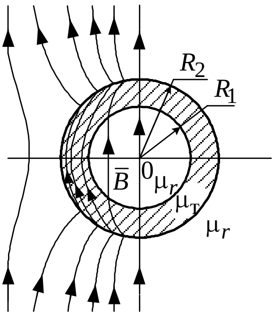


Рис.

$$K = \frac{B}{B_0}, \tag{7.55}$$

где B – магнитная индукция поля в полости экрана; B_0 – магнитная индукция внешнего поля.

Для экрана в форме полого шара с радиусами R_1 и R_2 (рис. 7.13), имеющего относительную магнитную проницаемость стенок $\mu_т$ и помещенного во внешнее однородное поле с индукцией B_0 и $\mu_r = 1$, коэффициент ослабления можно рассчитать по формуле [14]

$$K_ш = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)\left(\frac{1}{\mu_т} + \mu_т - 2\right)}. \tag{7.56}$$

Например, если $R_1 = 0.9R_2$ и $\mu_т = 500$, то в соответствии с (7.56) $K_ш = 0.031$, тогда согласно (7.55) $B = 0.031B_0$, т.е. магнитная индукция поля внутри экрана составляет 3 % индукции внешнего поля.

В [1] приведена приближенная формула для расчета коэффициента ослабления цилиндрического экрана:

$$K_{ц} = \frac{4b_1^2}{\mu_{т}\left(b_1^2 - a_1^2\right)}, \qquad (7.57)$$

где a_1 и b_1 – внутренний и внешний радиусы цилиндрического экрана соответственно.

Из выражений (7.56) и (7.57) следует, что чем больше $\mu_{т}$ и чем толще стенка экрана, тем сильнее его экранирующее действие.

Явление магнитного экранирования непосредственно связано с намагничиванием тел во внешнем однородном поле (см. подраздел 7.6.1). Напряженность магнитного поля в ферромагнетике, из которого выполнены стенки экрана, и внутри полости экрана одинакова и описывается соотношением (7.39). Напомним, что напряженность магнитного поля не зависит от свойств среды в отличие от магнитной индукции, что следует из закона полного тока (3.11). Магнитная индукция внутри стенок ферромагнитного экрана $B_{т}$ отличается от магнитной индукции B в полости :

$$\left.\begin{aligned} B_{т} &= \mu_0\mu_{т}H = \mu_{т}\mu_0\left(H_0 - H_{м}\right), \\ B &= \mu_0 H = \mu_0\left(H_0 - H_{м}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (7.58)$$

С ростом относительной магнитной проницаемости $\mu_{т}$ размагничивающее поле $H_{м}$ увеличивается, и напряженность внутри ферромагнетика уменьшается, что следует из (7.58). Одновременно уменьшается и магнитная индукция B в полости экрана. Внутри ферромагнетика индукция $B_{т}$ возрастает, однако ее рост ограничен некоторым предельным значением.

Толщина стенок экрана определяет количество ферромагнитного вещества и соответственно также влияет на величину размагничивающего поля $H_{м}$.

Формально явление магнитного экранирования можно объяснить, используя математическую аналогию магнитного и электрического полей постоянного тока и понятие магнитного сопротивления $R_{м}$ для магнитного потока Φ [1]. Магнитное сопротивление вещества обратно пропорционально его магнитной проницаемости. Так, для ферромагнитного стержня длиной l и сечением S

$$R_{\text{м}} = \frac{l}{\mu_0 \mu_{\text{т}} S}.$$

Магнитное сопротивление столба воздуха (в полости экрана) с такими же параметрами равно

$$R_{\text{мв}} = \frac{l}{\mu_0 S}.$$

Поскольку для ферромагнитного вещества $\mu_0 \mu_{\text{т}} \gg \mu_0$, экранирующее действие определяется тем, что линии магнитной индукции внешнего поля, стремясь пройти по пути с наименьшим магнитным сопротивлением (аналогия между магнитным потоком и электрическим током), сгущаются внутри стенок экрана, почти не проникая в его полость (рис. 7.13).

Для усиления магнитного экранирования нередко применяют многоступенчатые экраны в виде нескольких полых ферромагнитных тел, расположенных одно внутри другого.

7.7. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На проводники с токами в магнитном поле действуют силы подобно тому, как на заряженные тела, помещенные в электрическое поле, действуют силы, стремящиеся их перемещать или деформировать. Согласно [8, 10, 11, 15, 16] сила $d\overline{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент линейного тока $Id\overline{l}$, равна:

$$d\overline{F} = I\left[d\overline{l} \times \overline{B}\right].$$

По аналогии с электростатическим полем (см. раздел 4.11 и [10]) силу, действующую в магнитном поле системы n контуров с токами (рис. 7.14), можно определить через магнитную энергию $W_{\text{м}}$ этой системы как

$$\overline{F} = \pm \operatorname{grad} W_{\text{м}}. \tag{7.59}$$

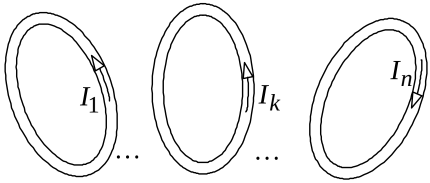


Рис.7.14

Знак "плюс" в (7.59) берется при $i_k = \text{const}$, т.е. когда токи в контурах при перемещении последних в магнитном поле остаются неизменными. При этом энергия магнитного поля растет, так как неизменность токов поддерживается за счет внешних источников энергии, входящих в контуры. Знак "минус" берется, если процессы в системе n контуров протекают при неизменных потоках вокруг контуров, т.е. $\Phi_k = \text{const}$ (при перемещении контуров с токами магнитные потоки вокруг них остаются постоянными). В этом случае энергия источников идет только на покрытие тепловых потерь, обмена энергии между источником и магнитным полем не происходит. Энергия магнитного поля убывает, так как работа по перемещению контуров с токами совершается за счет энергии поля.

Как следует из (7.59), сила, действующая на контуры с токами (проводники с токами) в магнитном поле пропорциональна градиенту от энергии поля, т.е. сила действует на проводник с током, если поле неоднородно ($\text{grad}\, W_\text{м} \neq 0$).

Рассмотрим применение выражения (7.59) для расчета сил, возникающих в магнитном поле на примере. Пусть на расстоянии h от прямого тонкого провода с постоянным током I_1, проходящего в воздухе, находится прямоугольная рамка с числом витков w из тонкого изолированного провода. По рамке протекает ток I_2, причем $I_1 > I_2$. Стороны рамки параллельны оси провода (см. рис. 7.15), коэффициенты самоиндукции провода и рамки равны L_1 и L_2 соответственно. Требуется определить магнитный поток взаимной индукции и взаимную индуктивность между проводом и рамкой, а также силу, действующую на рамку.

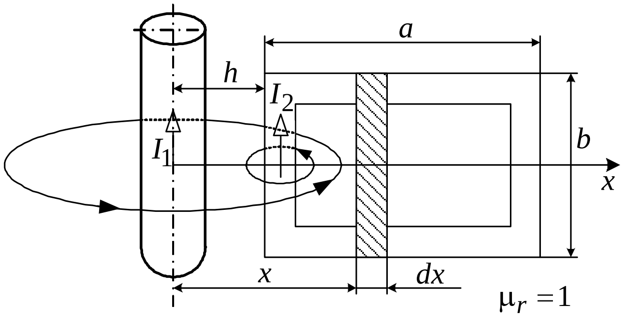


Рис. 7.15

Для нахождения магнитного потока необходимо рассчитать магнитную индукцию B_1, созданную током I_1 в точке, лежащей на оси, перпендикулярной оси провода, и отстоящей от нее на расстояние x. Для одиночного тонкого провода, находящегося в воздухе, магнитная индукция равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}. \tag{7.60}$$

Потокосцепление взаимной индукции определяется магнитным потоком взаимной индукции Φ_{12}, вызванным током I_1 и пронизывающим рамку:

$$\psi_{12} = w\Phi_{12}, \tag{7.61}$$

поток Φ_{12} в свою очередь рассчитаем следующим образом. Найдем поток, проходящий через площадку dS:

$$d\Phi = B_1 dS,$$

где $dS = bdx$.

С учетом (7.60) поток, пронизывающий рамку, равен

$$\Phi_{12} = \int\limits_{x=h}^{x=h+a} d\Phi = \int\limits_{x=h}^{x=h+a} B_1 dS = \int\limits_{x=h}^{x=h+a} \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi x} dx = b\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\frac{h+a}{h}.$$

В соответствии с (7.61) потокосцепление взаимной индукции ψ_{12} определим как

$$\psi_{12} = w\Phi_{12} = b\frac{\mu_0 w I_1}{2\pi}\ln\frac{h+a}{h}. \qquad (7.62)$$

Потокосцепление взаимной индукции прямо пропорционально току, его вызвавшему [15]:

$$\psi_{12} = MI_1.$$

Коэффициент пропорциональности M называют коэффициентом взаимной индукции,

$$M = \psi_{12}/I_1.$$

Подставляя в последнее выражение формулу (7.62), получим:

$$M = \frac{\mu_0 w b}{2\pi}\ln\frac{h+a}{h}.$$

Силу, действующую на рамку, рассчитаем, используя (7.59). По условию задачи токи в проводе (I_1) и рамке (I_2) при движении последней под действием силы не изменяются. Следовательно, в (7.59) перед градиентом в правой части уравнения выбираем знак "плюс":

$$\bar{F} = \operatorname{grad} W_{\text{м}}.$$

Энергия магнитного поля $W_{\text{м}}$ рассматриваемой системы равна [16]:

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \pm MI_1 I_2. \qquad (7.63)$$

Знак "плюс" в формуле (7.63) берется при "согласной" работе магнитно-связанных элементов, знак "минус" – при встречном.

Магнитно-связанные элементы работают "согласно", если их магнитные потоки суммируются. В противном случае имеем "встречную" работу. Направления магнитных потоков связаны с вызвавшими их токами правилом "правого винта".

В соответствии с выбранными направлениями токов в рассматриваемой задаче (рис. 7.15) системы тел работают "согласно", т.е. в формуле (7.63) выбираем знак "плюс". Энергия магнитного поля системы:

$$W_{\text{м}} = W_{\text{мсоб}} + MI_1 I_2,$$

где $W_{\text{мсоб}} = \dfrac{L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2}{2}$ – собственная энергия магнитного поля, которая остается постоянной при перемещениях в магнитном поле.

При движении рамки может меняться только взаимная энергия системы, равная

$$W_{\text{мвз}} = M I_1 I_2 .$$

Тогда с учетом (1.5) имеем:

$$\bar{F} = \operatorname{grad} W_{\text{м}} = I_1 I_2 \operatorname{grad} M = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial h} \bar{n} .$$

Поскольку направление градиента совпадает с направлением возрастания скаляра, учитывая, что $I_1 > I_2$, будем считать, что энергия поля увеличивается в сторону одиночного провода с током I_1, т.е. единичный вектор $\bar{n}$ направлен от рамки к проводу. Величина силы, действующей на рамку, равна

$$F = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial h} = I_1 I_2 \frac{\mu_0 w b}{2\pi} \frac{\partial}{\partial h}\left(\ln \frac{h+a}{h} \right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 w b a}{2\pi h (h+a)} I_1 I_2 .$$

Итак,

$$\bar{F} = -\frac{\mu_0 w b a}{2\pi h (h+a)} I_1 I_2 \bar{n} .$$

Знак "минус" здесь говорит о том, что направление силы противоположно вектору $\bar{n}$ ($\operatorname{grad} W_{\text{м}}$), т.е. при $I_1 > I_2$ рамка с током I_2 отталкивается от провода с током I_1.

8. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Вся информация о физическом мире, приобретенная со времени зарождения научной мысли, поистине огромна. Кажется почти невероятным, чтобы кто-то овладел хотя бы частью ее. Однако общие свойства физического мира можно изучить, не становясь специалистом в какой-то узкой области. На это есть несколько причин.

1. Существуют фундаментальные законы, справедливые для *любых* явлений. К ним, например, относятся законы сохранения энергии и момента количества движения.

2. Оказывается, что многие сложные явления (например, сжатие твердых тел) в основном обуславливаются действием электрических и квантовомеханических сил. Таким образом, зная основные законы электричества и квантовой механики, можно понять многие явления, возникающие в сложных условиях.

3. Уравнения, описывающие самые различные физические явления, часто имеют одинаковый вид, т.е. переменные, характеризующие эти явления, могут быть разными, но структура уравнений остается неизменной. Это означает, что, изучив одну область, можно получить множество прямых и точных решений задач из других областей знаний. Так, освоив электростатику, легко разобраться в решении задач теории электрического поля постоянного тока, используя метод электростатической аналогии (см. раздел 6.3). Оказывается, уравнения электростатики фигурируют и в ряде других областей физики. Путем прямого переноса решений электростатики (одинаковые математические уравнения должны иметь одинаковые решения) можно описывать многие явления физического мира. Рассмотрим ряд примеров [17].

Прежде всего, для сравнения приведем основные уравнения электростатики. Из второго уравнения системы (4.1) с учетом (3.1) получим:

$$\operatorname{div} \varepsilon_r \bar{E} = \rho / \varepsilon_0 \,. \qquad (8.1)$$

Первое уравнение (4.1) запишем без изменений:

$$\operatorname{rot}\bar{E} = 0, \tag{8.2}$$

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi. \tag{8.3}$$

Уравнения Пуассона для однородной и неоднородной среды (4.26) и (4.29) соответственно представим в виде

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \tag{8.4}$$

$$\nabla(\varepsilon_r \nabla\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{8.5}$$

Пример 1. Задачи с постоянным потоком тепла описываются уравнением

$$\nabla(k\nabla T) = -s, \tag{8.6}$$

где k – константа пропорциональности, зависящая от свойств материала, называемая коэффициентом теплопроводности; T – температура материала; s – тепловая энергия, производимая источником тепла в единице объема за единицу времени.

Вектор потока тепла $\bar{h}$ пропорционален градиенту температуры:

$$\bar{h} = -k\nabla T = -k\operatorname{grad}T. \tag{8.7}$$

Уравнения (8.6) и (8.7) совпадают по форме с (8.5) и (8.3). Таким образом, вектор потока тепла $\bar{h}$ соответствует $\bar{E}$, а температура T – потенциалу φ. Из уравнений (8.6) и (8.7) следует, что точечный источник s создает поле температур, изменяющееся обратно пропорционально расстоянию от источника ($1/r$), и поток тепла, убывающий в соответствии с $1/r^2$. Это и есть не более чем простой перенос утверждений электростатики о том, что точечный заряд создает потенциал, меняющийся как $1/r$, и электрическое поле $\bar{E}$, обратно пропорциональное квадрату расстояния от заряда.

Используя методы электростатики можно решить, например, задачу о потоке тепла в окрестности точечного источника, расположенного неглубоко под землей или же вблизи поверхности большого металлического предмета. В качестве локализованного (точечного) источника тепла можно рассмотреть атомную бомбу, которая взорвалась под землей и представляет собой мощный источник тепла, или же небольшой источник радиоактивности внутри железного блока. Например, требуется определить температуру прямо над источником и в разных точках на поверхности. Теплопроводностью воздуха над поверхностью среды можно пренебречь. Данная задача похожа на задачу в электростатике о поле заряженной оси над границей раздела двух материалов с разными относительными диэлектрическими проницаемостями ε_r (задача Сирла, см. раздел 5.5), или на задачу о точечном заряде, находящемся вблизи границы раздела "диэлектрик-проводник" (метод изображений, см. раздел 5.4).

Пример 2. Задачи о натянутой мембране. Колебания мембраны (тонкой резиновой пленки, натянутой на раму или цилиндр) описываются уравнением

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\tau}, \tag{8.8}$$

где u – вертикальное смещение мембраны от ее нормального положения; f – сила, действующая на единичную площадку пленки (своего рода "давление"); τ – поверхностное натяжение пленки. Уравнения (8.8) и (8.4) совпадают по форме, смещению u соответствует φ, а $\frac{f}{\tau}$ соответствует $\frac{\rho}{\varepsilon_a}$, т.е. между этими величинами существует математическая аналогия.

Пример 3. Диффузия нейтронов в случае сферически-симметричного источника в однородной среде. Диффузия нейтронов в графитовом блоке внутри сферы радиуса a описывается следующим уравнением:

$$\nabla(D\nabla N) = -S_0, \tag{8.9}$$

где N – функция распределения нейтронов в пространстве, или плотность нейтронов в окрестности выбранной точки; D – коэффициент диффузии нейтронов; S_0 – число нейтронов, испускаемых источником в единицу времени в единице объема.

Очевидно, что уравнение (8.9) по форме совпадает с (8.5). Найти N означает найти потенциал φ в задаче об однородно заряженной сфере, плотность заряда которой равна ρ. Известно, что вне заряженной сферы потенциал поля равен

$$\varphi_{вш} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r},$$

где полный заряд Q сферы радиусом a определяется соотношением

$$Q = 4\pi a^3 \rho / 3,$$

т.е.

$$\varphi_{вш} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_a r}.$$

Соответственно плотность нейтронов вне сферы в графите получим в виде

$$N_{вш} = \frac{S_0 a^3}{3Dr}.$$

Зависимости $N(r)$ и $\varphi(r)$ в математически аналогичных задачах представлены на рис. 8.1.

Пример 4. Обтекание шара в случае безвихревого течения жидкости. Обтекание жидкостью медленно движущегося в ней шара описывается уравнениями

$$\nabla^2 \psi = 0, \tag{8.10}$$

$$\bar{v} = -\nabla\psi = -\operatorname{grad}\psi, \tag{8.11}$$

где ψ – потенциал скоростей, $\bar{v}$ – скорость течения жидкости.

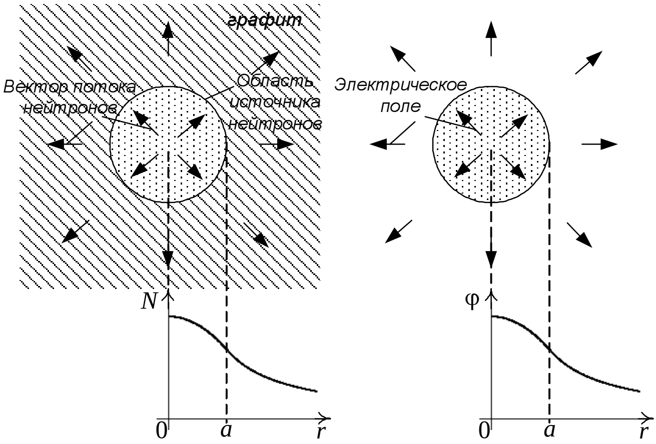


Рис. 8.1

Уравнение (8.10) есть уравнение Лапласа, частный случай (8.4). Соотношение (8.11) по форме полностью совпадает с (8.3). Таким образом, между $\bar{E}$ и $\bar{v}$, φ и ψ существует математическая аналогия. Для расчета поля $\bar{v}$ следует найти подходящую задачу электростатики (диэлектрический шар в однородном электростатическом поле, см. подраздел 5.7.2) и воспользоваться готовыми решениями. Не следует забывать и о необходимости совпадения граничных условий в исходной и математически аналогичной задачах.

Итак, примеров много. Возникает вопрос: «Почему уравнения, описывающие разные явления, столь похожи?» Можно ответить: «В этом проявляется "фундаментальное единство" природы». Но что это значит?

"Фундаментальное единство" могло бы означать, что все сделано из одного и того же материала, и потому подчиняется одним и тем же уравнениям. Однако электрический потенциал не является *физически* идентичным температуре или плотности частиц. Смещение мембраны не похоже на температуру, а потенциал не эквивалентен тепловой энергии частиц. Почему же проявляется "фундаментальное единство"?

Все рассмотренные явления описываются дифференциальными уравнениями, справедливыми для непрерывного распределения величин, характеризующих эти явления. На самом деле, решение дифференциального уравнения не отражает реального движения нейтронов, уравнение диффузии нейтронов – лишь приближение, которое дает хороший результат лишь в случае, когда рассматриваемое расстояние велико по сравнению с длиной свободного пробега указанной частицы. Таким образом, дифференциальные уравнения являются лишь *приближенным описанием* реальных физических явлений.

Общим для всех рассмотренных примеров будет *пространство*, в пределах которого происходят явления. До тех пор, пока все величины изменяются в пространстве достаточно плавно, в качестве важных факторов выступают скорости их изменения в зависимости от положения в пространстве. Производные должны входить в уравнения в виде градиента или дивергенции. Законы физики необходимо записывать в векторной форме, так как они не зависят от геометрии конкретной задачи, и следовательно, от выбора системы координат. Уравнения электростатики – это наипростейшие векторные уравнения, включающие только пространственные производные величин. Любая другая *простая* проблема или *упрощение* сложной проблемы (например, предположение о непрерывном распределении нейтронов) должны описываться аналогичными уравнениями. Итак, "фундаментальное единство" рассматриваемых задач выражается в том, что все они связаны с пространством и что *сложные* явления описываются *простыми* дифференциальными уравнениями.

Возможно, и уравнения электростатики являются "сглаженной имитацией" более сложного микромира. Возможно, реальный мир состоит из маленьких "x-онов", которые можно различить только на чрезвычайно малых расстояниях, и проводя измерения в грубом масштабе, мы просто не имеем возможности увидеть их, что и приводит к использованию непрерывных дифференциальных уравнений. Наиболее полная теория электродинамики действительно обнаруживает трудности на очень малых расстояниях вплоть до 10^{-14} см. Однако комбинация релятивизма и квантовой механики запрещает "придумывание" уравнений, фундаментально отличных от (8.1) – (8.5) и несвободных от внутренних противоречий. Еще не удалось создать теорию электричества, в которой уравнения (8.4) и (8.5) понимались бы как сглаженное приближение более глубокого механизма и которая не приводила бы к абсурду. С другой стороны, и предположение о справедливости указанных уравнений для любых сколь угодно малых расстояний также приводит к абсурду (электрическая энергия электрона бесконечна).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. Учебник для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 231 с.

2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

3. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1967. – 639 с.

4. *Зима Т.Е., Зима Е.А.* Теоретические основы электротехники. Основы теории цепей: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – Ч. 1. Основные понятия и законы теории электрических цепей. – 42 с.

5. *Инкин А.И.* Электромагнитные поля и параметры электрических машин. Учеб. пособие. – Новосибирск: ООО "Издательство ЮКЭА", 2002. – 464 с.

6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 720 с.

7. *Круг К.А.* Основы электротехники: Физические основы электротехники. Т. 1. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1946. – 536 с.

8. *Купалян С.Д.* Теоретические основы электротехники / Под ред. Г.И. Атабекова. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – Ч. 3. Электромагнитное поле. – 112 с.

9. *Литвинов Б.В.* Теоретические основы электротехники: Исследование стационарных электромагнитных полей. Методическое руководство к аттестационному заданию для студентов III курса ЭМФ и ЭЭФ очной и дистанционной форм обучения. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – 46 с.

10. *Нестеренко А.Д.* Введение в теоретическую электротехнику. – Киев: Наукова Думка, 1969. – 352 с.

11. *Парселл Э.* Берклеевский курс физики: Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – 436 с.

12. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для энерг. и приборост. спец. вузов. – 4-е изд., перераб. / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др.; Под ред. Л.А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 2000. – 528 с.

13. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1956. – 618 с.

14. Теоретические основы электротехники: В 3 т. Учебник для вузов. – 4-е изд. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2004. – Т. 3. – 377 с.

15. Теоретические основы электротехники: Нелинейные цепи и основы электромагнитного поля / Под ред. П.А. Ионкина. – М.: Высшая школа, 1976. – Т. 2. – 383 с.

16. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.

17. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике: Электричество и магнетизм. – М.: Мир, 1966. – Т. 5. – 296 с.

18. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике: Электродинамика. – М.: Мир, 1966. – Т. 6. – 340 с.

Татьяна Евгеньевна Зима, Елена Алексеевна Зима

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Основы теории электромагнитного поля

Учебное пособие

Редактор *Л. Н. Ветчакова*
Технический редактор *Г. Е. Телятникова*
Компьютерная верстка *С. Н. Кондратенко*

Подписано в печать 18.04.2005. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 200 экз. Уч.-изд. л. 12,25. Печ. л. 12,5. Изд. № 287. Заказ № .
Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.