

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Под научной редакцией
Б.А. Землянского



ФИЗМАТЛИТ®

2014

УДК 533.6.011.6
ББК 22.253.3
К 64

Авторский коллектив:

Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И., Горшков А.Б.,
Залогин Г.Н., Ковалев Р.В., Маринин В.П., Мурзинов И.Н.

Конвективный теплообмен летательных аппаратов / Под науч.
ред. Б.А. Землянского. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 380 с. —
ISBN 978-5-9221-1523-0.

Приведены результаты систематизации исследований конвективного теплообмена летательных аппаратов на атмосферном участке полета, в том числе с учетом влияния трехмерности течения, неравновесных физико-химических процессов в газе и на поверхности аппарата, ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя.

Изложены постановки и методы решения основных задач теплообмена как в рамках теории пограничного слоя, так и с использованием общих уравнений Навье–Стокса, особенности экспериментального определения тепловых нагрузок на моделях летательных аппаратов в аэродинамических трубах. Представлены многочисленные примеры апробации расчетных методов, в том числе на основе сравнения с данными трубных и летных экспериментов. В ряде случаев получены полезные для инженерной практики аппроксимационные зависимости для оперативных расчетов тепловых потоков.

Книга рассчитана на специалистов, работающих в аэрокосмической промышленности, студентов и аспирантов соответствующего профиля.

Рецензенты:

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор *И.И. Лунатов*;
доктор технических наук, профессор *В.В. Горский*

ISBN 978-5-9221-1523-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2014

© Коллектив авторов, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Постановка задачи. Физические свойства газа. Основные уравнения	10
§ 1.1. Основные физические предпосылки.	10
§ 1.2. Основные уравнения.	16
§ 1.3. Уравнение состояния и коэффициенты переноса	19
Глава 2. Особенности сверхзвукового обтекания тел	25
§ 2.1. Ударные волны	25
§ 2.2. Невязкое гиперзвуковое обтекание тупых тел	31
§ 2.3. Невязкое обтекание тонких притупленных тел	38
§ 2.4. Неравновесное обтекание тел	46
§ 2.5. Основные режимы обтекания тел вязким газом.	49
§ 2.6. Конус под углом атаки	58
§ 2.7. Обтекание треугольных крыльев	59
Глава 3. Основные задачи и точные решения теории тонкого ламинарного пограничного слоя	64
§ 3.1. Основные уравнения и граничные условия	64
§ 3.2. Двумерный пограничный слой	71
§ 3.3. Некоторые пространственные течения	85
§ 3.4. О пограничном слое в неоднородном потоке	90
Глава 4. Турбулентные и переходные течения. Влияние шероховатости и вдува	93
§ 4.1. О моделях и некоторых свойствах турбулентных течений	93
§ 4.2. Уравнения алгебраической и дифференциальной моделей турбулентности	100
§ 4.3. Переход режима течения в пограничном слое из ламинарного в турбулентный	105
§ 4.4. Влияние шероховатости и вдува на переход и теплообмен	117
Глава 5. Приближенные методы решения задач пограничного слоя	128
§ 5.1. Метод эффективной длины	128
§ 5.2. Приложение метода эффективной длины. Двумерные течения	134
§ 5.3. Приложение метода эффективной длины. Трехмерные течения	139
§ 5.4. Метод среднemasовых величин для пограничного слоя в неоднородном потоке	166
§ 5.5. Численный метод	175
Глава 6. Теплообмен при наличии выступающего элемента на поверхности тела	180
§ 6.1. Отрыв при обтекании двумерного выступа	180

§ 6.2. Особенности отрыва и теплообмена в окрестности трехмерного выступа	190
§ 6.3. О теплообмене на передних стреловидных притупленных кромках элементов, выступающих в пограничный слой.	202
§ 6.4. Течение и теплообмен на длинной притупленной стреловидной кромке.	206
§ 6.5. Течение и теплообмен в зоне взаимодействия ударных волн на выступающих элементах.	216
Глава 7. Физико-химическая модель неравновесного высокотемпературного воздуха.	226
§ 7.1. Основные уравнения.	226
§ 7.2. Константы скоростей	229
§ 7.3. Вязкие потоки и приближенные соотношения для коэффициентов переноса.	233
§ 7.4. Коэффициенты переноса газовых смесей	234
§ 7.5. Граничные условия на поверхности обтекаемого тела	240
§ 7.6. Влияние каталитичности поверхности на теплообмен	242
Глава 8. Моделирование вязкого неравновесного обтекания пространственных тел	252
§ 8.1. Численный алгоритм решения полных уравнений Навье–Стокса	252
§ 8.2. Методы численного интегрирования двумерных параболизированных уравнений Навье–Стокса.	257
§ 8.3. Решения параболизированных уравнений Навье–Стокса для пространственных течений	259
§ 8.4. Метод численного интегрирования двумерных уравнений вязкого ударного слоя	265
§ 8.5. Методы численного интегрирования уравнений пограничного слоя	271
§ 8.6. Метод численного интегрирования уравнений Эйлера	273
Глава 9. Особенности теплообмена на притупленных телах	282
§ 9.1. Теплообмен на тупых и тонких притупленных телах	282
§ 9.2. Теплообмен на тупых телах при небольших числах Рейнольдса	310
§ 9.3. Теплообмен на притупленных конусах под углами атаки.	311
§ 9.4. Теплообмен на притупленных треугольных крыльях	315
§ 9.5. Аппараты сегментально-конической формы.	319
Глава 10. Измерения тепловых потоков на материалах с низкой каталитичностью и ее определение	327
§ 10.1. Диагностика плазменной струи ВЧ-плазмотрона	329
§ 10.2. Измерения каталитической активности материалов	338
Глава 11. Методы и средства экспериментальной отработки теплообмена на моделях в аэродинамических трубах	345
§ 11.1. Метод и некоторые результаты термовизионных измерений.	345
§ 11.2. Другие методы измерений теплообмена	357
Список литературы	362

Введение

Детальное знание конвективных тепловых нагрузок, действующих на поверхность летательных аппаратов при их полете в плотных слоях атмосферы с большой скоростью, крайне важно для обоснованного выбора и оптимизации тепловой защиты и определения температурных режимов конструкции.

Решению этих задач и вместе с этим повышению надежности теплового проектирования изделий ракетно-космической техники способствует разработка справочных и руководящих материалов для конструкторов по теплообмену, отражающих уровень современных знаний в этой области и накопленный опыт, содержащих и излагающих в сжатой форме основные задачи теплообмена, особенности распределения тепловых нагрузок на поверхности летательных аппаратов и ракет-носителей и методы их определения для условий полета. Этим целям служит и данная книга, подготовленная коллективом авторов, длительное время работающим в области исследования теплообмена изделий ракетно-космической техники, на основе материалов, вошедших в руководство для конструкторов ракетно-космической промышленности.

При моделировании рассматриваемых задач исходим из того, что при полете ЛА в атмосфере характерные числа Рейнольдса $Re \gg 1$. При этом роль вязкости, теплопроводности, диффузии, определяющих процессы тепломассопереноса, сосредоточена в тонких пристеночных пограничных слоях ($\delta/L \sim Re^{-1/2} \ll 1$, где δ — толщина пограничного слоя, L — характерный размер тела (длина, размах крыла, радиус кривизны и др.)), течение в которых описывается известными уравнениями Прандтля, которые являются асимптотическим (при $Re^{-1/2} \ll 1$) пределом более сложных, общих и точных уравнений Навье–Стокса. Это обычно справедливо для типичных летательных аппаратов в атмосфере Земли при высотах полета $H < 85 \dots 90$ км, т.е. на всем теплонапряженном атмосферном участке траектории.

В исследованиях теплообмена при спуске в атмосфере современных и перспективных планирующих летательных аппаратов значительные трудности связаны со сложной геометрией аппаратов и наличием углов атаки, что придает пограничному слою на поверхности аппарата трехмерный характер, приводит к усложнению структуры течения в нем и системы определяющих уравнений. Наряду с точными решениями простейших задач такого рода, значение которых для выработки понимания особенностей пограничного слоя (в частности, трехмерного) трудно переоценить, важную роль в прикладных задачах играют и приближенные подходы и методы. Исследования течений в трехмерных пограничных слоях позволили сформулировать сравнительно простую математическую модель, широко применяемую в инженерной практике при расчетах теплообмена при пространственном обтекании тел слож-

ной формы — так называемую «осесимметричную аналогию». Дело в том, что основные физические особенности трехмерного пограничного слоя обусловлены растеканием невязких линий тока на поверхности тела (т. е. изменением расстояния между ними вниз по потоку) и вторичными (поперечными к основному) течениями внутри слоя, причем во многих случаях определяющим является первый эффект. Растекание невязких линий тока на теле определяется геометрией поверхности тела и боковым к ним градиентом давления вдоль тела. В результате толщина пограничного слоя и поперечные к стенке градиенты параметров в нем (а следовательно, трение и тепловой поток) в трехмерных течениях больше соответствующих величин для пластины с тем же распределением давления вдоль линии тока. Этот эффект проявляется и в осесимметричном пограничном слое на теле с переменной площадью поперечного сечения. Опыт расчетов и экспериментальных исследований теплообмена при пространственном обтекании тел различной формы показывает, что пренебрежение вторичными течениями дает удовлетворительные результаты уже при температурных факторах $t_w \leq 0,6$, во всяком случае, на наветренных, наиболее теплонапряженных участках поверхности.

В сочетании с методами локального подобия и эффективной длины такой подход позволил разработать оперативный инженерный метод и ряд программ для расчета ламинарного и турбулентного теплообмена при пространственном обтекании летательных аппаратов сложной формы. Такие подходы широко используются в практике теплового проектирования аппаратов наряду с хотя и более точными, но значительно более трудоемкими алгоритмами, основанными на численном решении полных уравнений пространственного пограничного слоя.

Ниже представлены многочисленные примеры применения и апробации этой базовой методики.

Проанализировано также влияние отрицательного градиента давления на ламинарный пограничный слой (на трение, тепловые потоки, интегральные толщины) и предложены поправочные коэффициенты, пригодные для расчета пограничного слоя вдоль невязких линий тока в рамках метода эффективной длины, основанного на локальном использовании решения для пластины.

Рассмотрен также важный для практики вопрос о расчете теплообмена при наличии ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя. Модель перемежающейся турбулентности позволяет проводить такие расчеты в рамках общего метода эффективной длины. На основании анализа многочисленных экспериментальных данных (в том числе, летных) предложен критерий перехода пограничного слоя, позволяющий повысить надежность прогноза перехода.

При гиперзвуковых скоростях полета летательных аппаратов невязкое течение за искривленной головной ударной волной является существенно завихренным. Долгое время было принято считать, что эффект завихренности при гиперзвуковом обтекании тонких затупленных тел

проявляется лишь на их боковой поверхности, так как на типичном носовом затуплении (сфера, эллипсоид) он мал. Показано, однако, что существует практически важный класс носовых затуплений (конические носки с полууглом раствора $\theta \sim 1$ рад с малым скруглением вершины $r_0 \ll R_{\text{мид}}$ и радиусом кривизны скачка вблизи оси $R_s \sim r_0 \ll R_{\text{мид}}$), для которых этот эффект значителен и даже может качественным образом влиять на картину обтекания и теплообмен, особенно при турбулентном пограничном слое, когда интенсификация теплообмена достигает двух раз. Такие и близкие к ним формы реализуются при обгаре первоначально сферических носков скоростных аппаратов, создавая не только проблему их тепловой защиты, но и в значительной степени определяя аэродинамические характеристики и траекторию спуска. В связи с этим для таких конических носков разработаны методы и представлены примеры расчетов ламинарного и турбулентного теплообмена с учетом влияния завихренности, получены полезные корреляционные соотношения. Эти эффекты исследованы также для носков выпукло-вогнутой формы, образование которых при обгаре теплозащитного покрытия связано с влиянием перехода пограничного слоя. В этих случаях в зоне сжатия на носке поглощение энтропийного слоя, формируемого передним выступом, влияет не только на теплообмен, но и в целом на течение около носка и на распределение давления на теле. Расчеты находятся в хорошем согласии с результатами экспериментальных исследований обтекания и теплообмена таких тел. Эти исследования позволили существенно уточнить теплообмен и картину разрушения наконечников скоростных изделий. Учет влияния завихренности на теплообмен введен в комплексные программы аэротермобаллистических расчетов таких аппаратов.

Произошедшая за последние годы компьютеризация проведения расчетных и проектных работ, создание высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем поменяли представление об эффективных и более или менее доступных методах расчета обтекания, теплообмена и аэродинамического нагрева летательных аппаратов, сделав вполне рутинным процессом инженерные расчеты на базе численных решений уравнений Навье–Стокса. Такие расчеты все еще связаны с определенными математическими и методическими трудностями и весьма трудоемки, но непрерывно и быстро совершенствуются. Поэтому здесь дано изложение соответствующих численных методов расчета теплообмена, адаптированных для режимов полета летательных аппаратов и ракет-носителей. Из множества существующих и описанных в литературе подобных методов отобраны лишь те, которые, с одной стороны, ориентированы на расчеты с использованием многопроцессорных вычислительных систем, с другой — реализованы и апробированы при подготовке данной книги, являясь надежной основой для выдачи соответствующих практических рекомендаций.

Существенное внимание в книге отведено материалам, посвященным неравновесным течениям. Это обусловлено повышенным интере-

сом к созданию новых многоразовых аппаратов планирующего спуска (в частности, пилотируемого корабля нового поколения — ПКНП, а также летательных аппаратов типа Гермес, Пре-Х, Клипер, Орион и др.). В отличие от аппаратов баллистического спуска, у которых максимум тепловых нагрузок приходится на область сравнительно низких высот $H < 40$ км с преимущественно равновесным режимом их обтекания, летательные аппараты планирующего спуска тормозятся, в основном, в верхней части атмосферы Земли (на высотах $H = 80 \dots 60$ км), где необходимо учитывать конечные скорости физико-химических процессов, т. е. существенно неравновесные режимы обтекания летательных аппаратов. Правильная интерпретация результатов экспериментальных исследований, а также грамотное применение тех или иных методов расчета теплообмена, невозможны без общих представлений об основных газодинамических свойствах и закономерностях рассматриваемых течений. Поэтому дано изложение этих вопросов в сжатой конспективной форме.

Как и любая другая, основанная на совокупности эмпирических постулатов, газодинамическая теория вообще и теория теплообмена в газах, в частности, нуждается в апробации и экспериментальном подтверждении. Это особенно относится к проблемам турбулентности, перехода ламинарных течений в турбулентные, влияния физических свойств газов и процессов в них при высоких температурах (коэффициенты переноса, константы скоростей протекания физико-химических процессов и т. д.). В связи с этим большое внимание уделено апробации излагаемых методов расчета теплообмена путем сравнения результатов расчетов с данными экспериментов, как лабораторных, так и (что особенно важно) натурных, полученных в летных испытаниях отечественных и зарубежных летательных аппаратов. Кроме того, проводится тщательная апробация приближенных методов расчета теплообмена путем сравнений с расчетами по точной теории, основанной на модели Навье–Стокса, сомневаться в достоверности которой в настоящее время нет оснований.

Важным результатом проделанной работы являются полученные на основе систематических расчетов с помощью рассмотренных методов аппроксимационные зависимости и рекомендации по расчету теплообмена для многих интересных для практики случаев, позволяющие наглядно проследить за влиянием основных определяющих факторов и проводить при необходимости оперативные оценки параметров теплового нагружения.

Далеко не всё в настоящее время надежно поддается расчету и, несмотря на успехи вычислительной аэротермодинамики, проведение экспериментального моделирования теплообмена в подходящих аэродинамических трубах по-прежнему необходимо. Роль эксперимента не исчерпывается целями валидации расчетных методов и разработанных на их основе прикладных программ. Во многих случаях высокоинформативный эксперимент с моделированием основных определяющих

параметров все еще составляет базу для теплового проектирования аппаратов.

В этой связи кратко излагаются возможности современного высокоинформативного эксперимента в аэродинамических трубах по исследованиям теплообмена на моделях летательных аппаратов сложной геометрии.

Книга рассчитана на специалистов, работающих в аэрокосмической промышленности, студентов и аспирантов соответствующего профиля.

Авторы благодарят А. Л. Кусова и Д. А. Чуракова за проведение ряда расчетов и Л. И. Ерёмину за помощь в оформлении графических материалов.

Глава 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗА. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ниже кратко изложим постановку задачи об обтекании тел вязким теплопроводным газом с учетом его физико-химических превращений, сопутствующих полетам тел с большими скоростями в плотных слоях атмосферы Земли на высотах $H \leq 100$ км, которыми и ограничимся в дальнейшем. Более подробно эти вопросы рассмотрены в книгах [100, 108, 110, 118, 121] и др.

§ 1.1. Основные физические предпосылки

На указанных высотах полета воздух можно считать умеренно-плотным газом, т.е. с одной стороны, считать его сплошной средой, а с другой, состояние его описывать уравнением Клапейрона:

$$p = \frac{R}{M} \rho T. \quad (1.1.1)$$

Здесь p , ρ , T , \overline{M} — давление, плотность, температура и молекулярная масса газа, $R = 8,314$ Дж/моль·К — универсальная газовая постоянная. Течение такого газа описывается системой *уравнений Навье–Стокса*, выражающей законы сохранения массы, импульса и энергии для сплошной среды и содержащей в себе, в том числе, и все уравнения, управляющие протеканием физико-химических процессов. На больших высотах (условно $H \geq 100$ км) начинают проявляться эффекты разреженности газа, течение и состояние которого подчиняется *уравнению Больцмана* для функции распределения молекул по скоростям, или (при дальнейшем уменьшении плотности с ростом высоты H) закономерностям свободно-молекулярного потока.

Распределение параметров в атмосфере Земли представлено в табл. 1.1 и показано на рис. 1.1 («стандартная атмосфера»). Так как температура меняется довольно слабо, давление и плотность воздуха приближенно подчиняются экспоненциальному закону в зависимости

от высоты H (более строго — при постоянной температуре воздуха T , принятой здесь 250 К):

$$\frac{p}{p_a} = \frac{\rho}{\rho_a} = \frac{n}{n_a} = \frac{l_a}{l} = \exp(-\beta H), \quad \beta = \frac{g\overline{M}}{RT} = 0,14 \text{ (км}^{-1}\text{)}, \quad (1.1.2)$$

где n и l — числовая концентрация молекул и средняя длина их свободного пробега, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, нижний индекс a обозначает наземные величины. Эти формулы вполне удовлетворительно описывают распределение плотности и давления в атмосфере.

Отметим, что если длина свободного пробега молекул l на высоте 10 км составляет всего 0,2 мкм, то на высоте 70 км — это уже 1 мм, на высоте 85 км — 1 см, на высоте 98 км — 10 см и на высоте 112 км — 1 м.

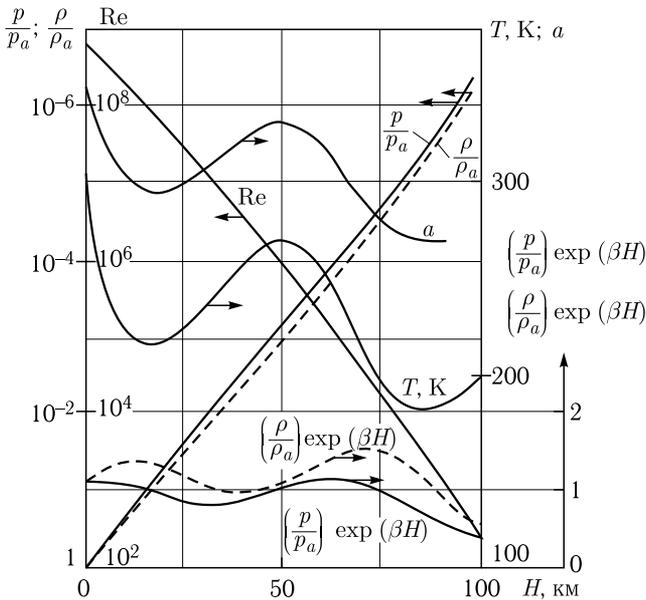


Рис. 1.1. Распределение параметров в атмосфере Земли (a , м/с, — скорость звука, число Re относится к $L = 1 \text{ м}$, $U = 7 \text{ км/с}$)

При определении режимов течения наиболее принципиальными из критериев подобия являются числа Рейнольдса Re и Маха M :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad M = \frac{U}{a}. \quad (1.1.3)$$

Здесь μ — вязкость газа, a — скорость звука, L и U — характерные масштаб течения и скорость газа.

При больших числах Рейнольдса ($Re \geq 10^4 \dots 10^5$) течение около тел можно разбить на две области: основную невязкую, описываемую уравнениями Эйлера, и пристеночный пограничный слой вязкого течения толщиной порядка $\delta \sim Re^{-1/2}L$, описываемый уравнениями Прандтля (и их обобщениями). При $Re \approx 10^2 \dots 10^4$ начинают проявляться различные эффекты вязко-невязкого взаимодействия (условно: режимы *умеренно больших* чисел Рейнольдса), а при $Re < 10^2 \dots 10^3$ вся область течения вязкая и описывается полными уравнениями Навье–Стокса.

Числа Маха при спуске летательных аппаратов (ЛА) в атмосфере с земных орбит или при подъеме ракет-носителей могут изменяться

Таблица 1.1. Параметры стандартной атмосферы Земли (ГОСТ 4401-81, 1981 г.)

Высота H , км	Температура T , К	Давление p , Па	Плотность ρ , кг/м ³	Вязкость μ , кг/(м·с)	Скорость звука a , м/с
0	288,15	$1,01325 \cdot 10^5$	$1,225 \cdot 10^0$	$1,789 \cdot 10^{-5}$	340,29
5	255,67	$5,4048 \cdot 10^4$	$7,3643 \cdot 10^{-1}$	$1,628 \cdot 10^{-5}$	320,54
10	223,25	$2,650 \cdot 10^4$	$4,135 \cdot 10^{-1}$	$1,458 \cdot 10^{-5}$	299,53
15	216,65	$1,211 \cdot 10^4$	$1,9475 \cdot 10^{-1}$	$1,421 \cdot 10^{-5}$	295,07
20	216,65	$5,5293 \cdot 10^3$	$8,891 \cdot 10^{-2}$	$1,421 \cdot 10^{-5}$	295,07
25	221,55	$2,5492 \cdot 10^3$	$4,008 \cdot 10^{-2}$	$1,448 \cdot 10^{-5}$	298,39
30	226,51	$1,197 \cdot 10^3$	$1,841 \cdot 10^{-2}$	$1,475 \cdot 10^{-5}$	301,71
35	236,51	$5,746 \cdot 10^2$	$8,463 \cdot 10^{-3}$	$1,529 \cdot 10^{-5}$	308,30
40	250,35	$2,871 \cdot 10^2$	$3,995 \cdot 10^{-3}$	$1,601 \cdot 10^{-5}$	317,19
45	264,16	$1,491 \cdot 10^2$	$1,966 \cdot 10^{-3}$	$1,671 \cdot 10^{-5}$	325,82
50	270,65	$7,978 \cdot 10^1$	$1,027 \cdot 10^{-3}$	$1,704 \cdot 10^{-5}$	329,80
55	260,77	$4,252 \cdot 10^1$	$5,681 \cdot 10^{-4}$	$1,654 \cdot 10^{-5}$	323,72
60	247,02	$2,196 \cdot 10^1$	$3,097 \cdot 10^{-4}$	$1,584 \cdot 10^{-5}$	315,07
65	233,29	$1,093 \cdot 10^1$	$1,632 \cdot 10^{-4}$	$1,511 \cdot 10^{-5}$	306,19
70	219,58	$5,221 \cdot 10^0$	$8,283 \cdot 10^{-5}$	$1,438 \cdot 10^{-5}$	297,06
75	208,40	$2,388 \cdot 10^0$	$3,992 \cdot 10^{-5}$	$1,376 \cdot 10^{-5}$	289,39
80	198,64	$1,052 \cdot 10^0$	$1,846 \cdot 10^{-5}$	$1,321 \cdot 10^{-5}$	282,54
85	188,89	$4,4578 \cdot 10^{-1}$	$8,220 \cdot 10^{-6}$	$1,264 \cdot 10^{-5}$	275,52
90	186,65	$1,831 \cdot 10^{-1}$	$3,418 \cdot 10^{-6}$	$1,251 \cdot 10^{-5}$	273,88
95	186,62	$7,528 \cdot 10^{-2}$	$1,405 \cdot 10^{-6}$	$1,251 \cdot 10^{-5}$	273,86
100	196,60	$3,186 \cdot 10^{-2}$	$5,549 \cdot 10^{-7}$	$1,311 \cdot 10^{-5}$	281,09
110	255,49	$7,359 \cdot 10^{-3}$	$9,34 \cdot 10^{-8}$		
120	334,42	$2,666 \cdot 10^{-3}$	$2,44 \cdot 10^{-8}$		

в широком диапазоне от $M_\infty = 20 \dots 30$ в верхних слоях атмосферы (для орбитальных или межпланетных ЛА) до небольших величин в приземных слоях атмосферы. Однако так как температура торможения для совершенного газа равна

$$T_0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right) \approx (T_\infty + 500 U^2), \text{ К}; \quad (1.1.4)$$

$$(T_\infty \approx 250 \text{ К}, \quad U - \text{ в км/с}),$$

где индекс ∞ относится к параметрам набегающего потока, γ — показатель адиабаты, реальный нагрев ЛА может происходить лишь при $M_\infty > 3 \dots 4$, т. е. при сверхзвуковых скоростях полета, которыми ниже и ограничимся. При этом, конечно, представляют интерес (часто определяющий) и будут исследованы вопросы теплообмена в течениях с местными дозвуковыми числами $M < 1$, например, на тупых телах.

Течения при больших числах Маха (условно при $M_\infty \geq 6$) называют *гиперзвуковыми*. Отличительной их чертой, кроме определенных чисто газодинамических предельных свойств, являются физико-химические процессы, обусловленные высокой температурой газа за головной ударной волной.

Холодный воздух является, в основном, смесью двухатомных газов — кислорода (21 % от общего числа молекул) и азота (78 %), с незначительной (менее 1 %) примесью аргона. При сравнительно небольших температурах ($T \leq 500 \dots 700 \text{ К}$) за ударной волной воздух можно считать совершенным двухатомным газом с постоянным показателем адиабаты $\gamma = 1,4$. Но с ростом скорости полета его температура, как видно из (1.1.4), существенно возрастает. Например, при скоростях $U > 8 \text{ км/с}$ совершенный газ имел бы здесь температуру $T > 3 \cdot 10^4 \text{ К}$, задолго до достижения которой, конечно, возбуждаются внутренние степени свободы молекул, и сохранение исходного, или нормального состояния газа невозможно.

Прежде всего, с ростом температуры в молекулах воздуха возбуждаются колебательные степени свободы, что приводит к росту теплоемкостей (рис. 1.2).

При $T \geq 2000 \text{ К}$ молекулы кислорода начинают распадаться (диссоциировать) на атомы, а при $T \geq 4000 \text{ К}$ то же происходит с азотом. С дальнейшим ростом температуры начинается процесс ионизации с образованием свободных электронов (рис. 1.3). При этом существенным моментом является большая энергоемкость указанных процессов. Если энергия колебаний молекул сравнительно невелика, то диссоциация и ионизация поглощают до 75 % энергии потока (рис. 1.4), что делает неприменимыми многие результаты газовой динамики совершенного газа.

Принципиальную роль играет соотношение скоростей протекания физико-химических и газодинамических процессов. Если реакции идут значительно быстрее, чем меняется термодинамическое состояние газа,

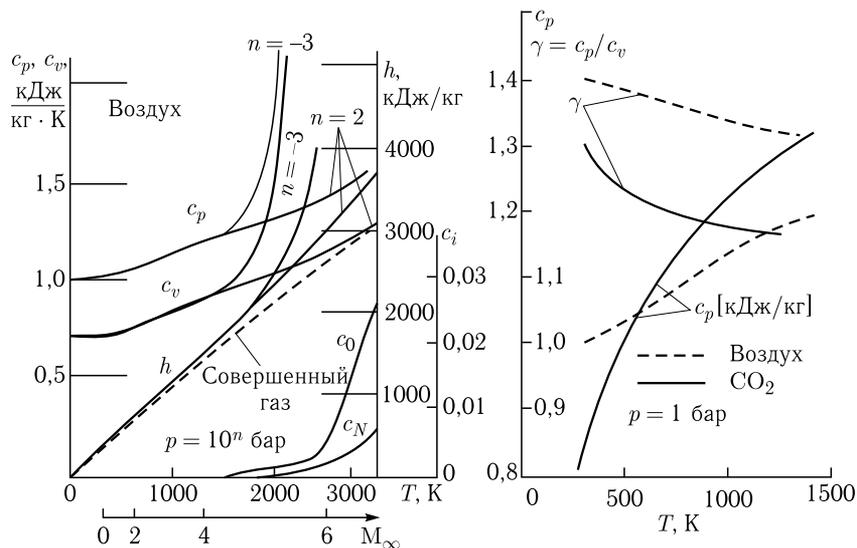


Рис. 1.2. Теплоемкости c_p, c_v , показатели адиабаты γ и массовые концентрации компонент c_0, c_N для воздуха и углекислого газа в равновесном состоянии

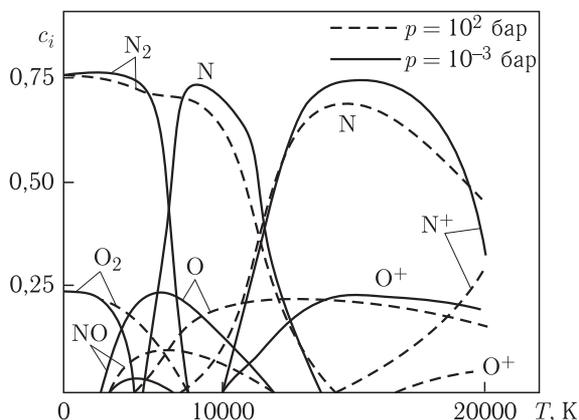


Рис. 1.3. Массовые концентрации молекул и атомов в равновесном воздухе

то в каждой точке потока состав и, вообще, состояние газа можно считать равновесным, соответствующим локальным значениям p и T . Такие течения называют *равновесными*. В другом предельном случае физико-химические процессы не успевают даже начаться, как газовая частица уже покидает данную область течения и состав газа в ней остается неизменным. Такие течения называют *замороженными*.

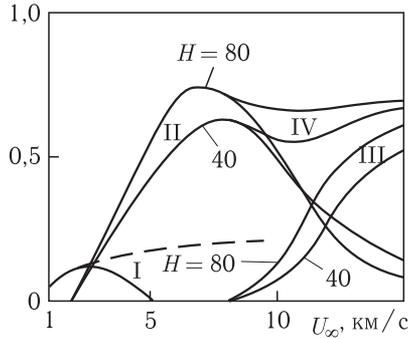


Рис. 1.4. Отношение энергий колебаний (I), диссоциации (II), ионизации (III) и суммы II и III (IV) к кинетической энергии $U_\infty^2/2$ для высот полета 40 и 80 км (пунктир — энергия колебаний при отсутствии диссоциации)

В обоих этих предельных случаях для описания состояния газа достаточно знать лишь *основные* термодинамические параметры (ρ , p , T , h , e), между которыми существуют конечные связи — уравнения состояния (h — энтальпия, e — внутренняя энергия). Поэтому в этих случаях математические и газодинамические свойства определяющих уравнений движения газа и постановка задач для них не имеют принципиальных отличий по сравнению с совершенным газом.

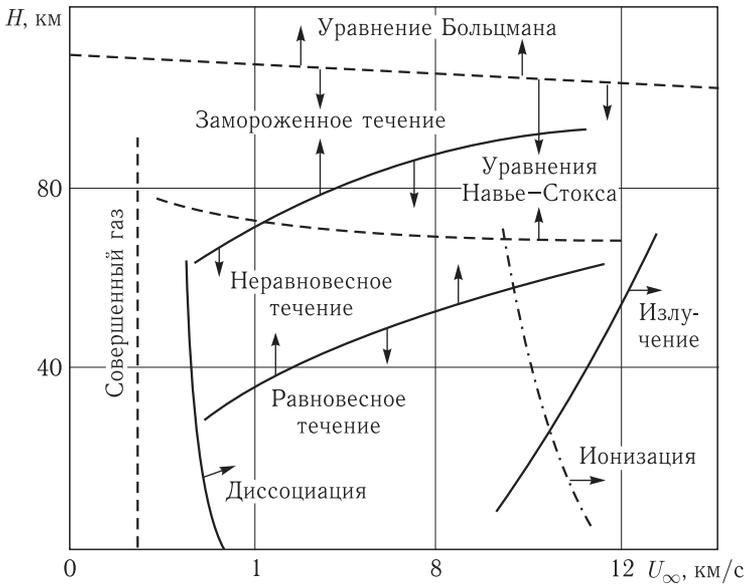


Рис. 1.5. Примерные границы влияния физических процессов на обтекание сферы радиусом 1 м при полете в атмосфере Земли

Если τ — характерное время при протекании физико-химических процессов, U — характерная скорость газа и L — характерный размер области течения, то замороженные течения будут реализовываться при $\omega = L/(\tau U) \ll 1$, равновесные — при $\omega \gg 1$, а случай $\omega \sim 1$ относится к *неравновесной газодинамике*. Этот случай принципиально отличается от равновесного наличием дополнительных (числом иногда до нескольких десятков) дифференциальных уравнений, описывающих механизмы образования компонентов смеси. Эти процессы приводят к значительным изменениям свойств газа и к появлению новых физических и математических эффектов.

Поскольку скорости протекания физико-химических процессов, как правило, возрастают вместе с плотностью газа, то равновесные режимы течения сопутствуют полетам тел на сравнительно небольших высотах, примерно при $H \leq 30$ км для тел нормальных размеров $L \sim 1$ м, а замороженные — на очень больших высотах (примерно при $H \geq 80$ км).

Несколько ниже располагается граница существенно вязких течений. Границы влияния физико-химических процессов зависят и от скорости полета, они показаны на рис. 1.5.

§ 1.2. Основные уравнения

1.2.1. В систему Навье–Стокса входят следующие уравнения:

— уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (1.2.1)$$

здесь \mathbf{U} — вектор скорости газа, t — время. В системе ортогональных координат (x_1, x_2, x_3) с компонентами скорости u_i и с параметрами Ламе H_i операторы полной производной d/dt от какой-либо функции и дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{A}$ от какого-либо вектора \mathbf{A} с компонентами ¹⁾ A_i имеют вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{u_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (1.2.2)$$

$$H_1 H_2 H_3 \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial (H_2 H_3 A_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (H_1 H_3 A_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 A_3)}{\partial x_3}. \quad (1.2.3)$$

В декартовой системе координат все $H_i = 1$.

— уравнение импульсов:

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \operatorname{Div} P = \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Sigma} \mathbf{p}_n d\Sigma = -\operatorname{grad} p + \operatorname{Div} P_\tau, \quad \Delta\Omega, \Delta\Sigma \rightarrow 0, \quad (1.2.4)$$

здесь P и P_τ — тензоры полных и вязких напряжений, \mathbf{p}_n — напряжение на единичную площадку с внешней нормалью \mathbf{n} по отношению

¹⁾ Здесь и далее $i, j = 1, 2, 3$, если не оговорено противное.

к элементарному объему $\Delta\Omega$, ограниченному поверхностью $\Delta\Sigma$, p — статическое давление, входящее в уравнение состояния. В системе координат (x_i) дивергенция тензора равна

$$H_1 H_2 H_3 \operatorname{Div} P = \frac{\partial H_2 H_3 \mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1 H_3 \mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_1 H_2 \mathbf{p}_3}{\partial x_3}, \quad (1.2.5)$$

здесь \mathbf{p}_i — векторы напряжений, действующих на ортогональные координатам x_i площадки со стороны положительных направлений этих координат. Если $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, то, например,

$$\mathbf{p}_x = \mathbf{i} p_{xx} + \mathbf{j} p_{xy} + \mathbf{k} p_{xz}, \quad (1.2.6)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — соответствующие единичные орты декартовой системы координат, а p_{ij} — компоненты тензора P . При этом напряжения, действующие на произвольную площадку с внешней нормалью \mathbf{n} , равны

$$\mathbf{p}_n = n_x \mathbf{p}_x + n_y \mathbf{p}_y + n_z \mathbf{p}_z, \quad (1.2.7)$$

где n_x , n_y , n_z — соответствующие направляющие косинусы нормали. Тензор P связан с тензором скоростей деформации E_ε линейной зависимостью

$$P = -p_* \tilde{E} + 2\mu E_\varepsilon, \quad E_\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}\|, \quad (1.2.8)$$

$$p_* = p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{U}, \quad p_{ii} = -p + \tau_{ii}, \quad p_{ij} = \tau_{ij},$$

где μ — коэффициент вязкости, \tilde{E} — единичная матрица, τ_{ij} — вязкие напряжения. В декартовой системе координат скорости деформаций равны

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.2.9)$$

Очевидно, оба тензора P и E_ε симметричны, т. е. $p_{ij} = p_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.
— уравнение энергии:

$$\frac{de}{dt} + p \frac{d\rho^{-1}}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = q_{\text{ef}}, \quad (1.2.10)$$

$$q_{\text{ef}} = q - \operatorname{div} \mathbf{J} + q_\tau, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_T + \mathbf{J}_D, \quad \mathbf{J}_T = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

здесь q — внешние массовые источники тепла (излучение, например), \mathbf{J}_T — термическая составляющая полного потока тепла, а \mathbf{J}_D — перенос энергии за счет диффузии отдельных компонент. Этот член определим для общего случая в гл. 7, здесь заметим лишь, что в равновесных течениях суммарный поток энергии можно представить в виде:

$$\mathbf{J} = -\lambda_{\text{ef}} \operatorname{grad} T, \quad (1.2.11)$$

где эффективный коэффициент теплопроводности λ_{ef} отличается от чисто термического коэффициента теплопроводности λ . И, наконец,

член q_τ — приток тепла за счет вязкой диссипации кинетической энергии равен [110]

$$q_\tau = 4\mu(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) + \frac{2}{3}\mu[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2]. \quad (1.2.12)$$

Очевидно, $q_\tau > 0$ всегда.

1.2.2. Уравнения (1.2.1), (1.2.4) и (1.2.10) выписаны для так называемых примитивных переменных, т. е. непосредственно для ρ , p , U и e (или h). Однако в современных численных методах часто используются уравнения в консервативных переменных: ρ , $\rho\mathbf{U}$ и $E = e + U^2/2$ (полная энергия). Эти уравнения имеют вид:

— уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{U} = 0,$$

— уравнение импульсов:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = \operatorname{Div} P, \quad (1.2.13)$$

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = \frac{1}{\Delta \Omega} \int_{\Delta \Sigma} \rho U_n \mathbf{U} d\Sigma, \quad \Delta \Omega, \Delta \Sigma \rightarrow 0,$$

здесь $U_n = -(\mathbf{n} \mathbf{U})$, а в декартовой системе координат оператор вектор-дивергенции пары векторов равен

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \mathbf{U}); \quad (1.2.14)$$

— уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho E + \operatorname{div} [(\rho E + p) \mathbf{U}] &= \rho q - \operatorname{div} \mathbf{J} + \operatorname{div} (P_\tau \mathbf{U}), \\ \operatorname{div} (P_\tau \mathbf{U}) &= \frac{1}{\Delta \Omega} \int_{\Delta \Sigma} \boldsymbol{\tau}_n \mathbf{U} d\Sigma, \quad \Delta \Omega, \Delta \Sigma \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

здесь $\boldsymbol{\tau}_n$ — вязкие напряжения на площадку с внешней нормалью \mathbf{n} . В декартовой системе координат оператор дивергенции тензорно-векторного произведения равен

$$\operatorname{div} (P_\tau \mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial x} (\boldsymbol{\tau}_x \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (\boldsymbol{\tau}_y \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{\tau}_z \mathbf{U}). \quad (1.2.16)$$

И, наконец,

— уравнения физико-химической кинетики, которые запишем в общем виде:

$$\rho \frac{dc_i}{dt} = \rho \Lambda_i(p, T, \lambda_n) - \operatorname{div} \mathbf{I}_i, \quad (1.2.17)$$

где c_i — массовые концентрации компонент, λ_n — набор параметров, характеризующих состояние неравновесной смеси газов (концентра-

ции, внутренние энергии и т. д.). Источниковый член Λ_i и диффузионный поток \mathbf{I}_i будут определены в гл. 7. В простейшем случае бинарной смеси газов этот поток определяется *законом Фика* (D — коэффициент бинарной диффузии):

$$\mathbf{I}_i = -\rho D \text{grad } c_i. \quad (1.2.18)$$

Наиболее простой вид функция Λ_i имеет для релаксации внутренней степени свободы:

$$\Lambda_i = \frac{\lambda_{ie} - \lambda_i}{\tau}, \quad \lambda_e = \lambda_e(p, T), \quad (1.2.19)$$

где $\lambda_{ie}(p, T)$ — локально равновесная величина параметра λ_i , а τ — время релаксации данного процесса.

§ 1.3. Уравнение состояния и коэффициенты переноса

Из термодинамики известно, что в равновесном процессе для определения состояния газа достаточно задания лишь двух основных термодинамических параметров — p и T .

Таким образом, в основу равновесной газовой динамики положена двухпараметрическая модель газа с уравнениями состояния типа

$$\rho = \rho(p, T), \quad e = e(\rho, T), \quad h = e + \frac{p}{\rho} = h(p, T). \quad (1.3.1)$$

Здесь p , ρ , T , e и h — давление, плотность, температура, удельная внутренняя энергия и энтальпия газа. Исключив из (1.3.1) температуру, получим уравнения состояния в виде $\rho = \rho(p, e)$ или $\rho = \rho(p, h)$, что достаточно, по крайней мере, для невязких уравнений, в которые температура не входит вообще.

Простейшим двухпараметрическим газом является совершенный газ с уравнением состояния Клапейрона (1.1.1). Для тел нормальных размеров при полете в атмосфере Земли на высотах $H \leq 100$ км пригодна модель *умеренно-плотных* газов, в которой молекулы взаимодействуют между собой лишь в относительно краткие промежутки их непосредственного соударения. В таких газовых смесях характеристики отдельных i -х компонентов газа не зависят от присутствия других. В частности, для каждой i -й компоненты справедливы уравнение (1.1.1) и, кроме того, некие зависимости $e = e_i(T, \lambda_i)$ — зависимости энергии от температуры и состояния внутренних степеней свободы (колебания молекул, электронные уровни молекул и атомов). Суммарные же давление, энергия и энтальпия определяются по аддитивному закону:

$$p = \sum_i p_i = \frac{R}{M} \rho T, \quad \frac{1}{M} = \sum_i \frac{c_i}{M_i}, \quad c_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad (1.3.2)$$

$$e = \sum_i c_i e_i, \quad h = e + \frac{p}{\rho} = \sum_i h_i c_i, \quad h_i = e_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \Delta h_{fi}^0,$$

здесь величина \overline{M} — средняя или просто молярная масса смеси газов (для воздуха при нормальных условиях $\overline{M} = 28,9$ г/моль), c_i , M_i — массовые концентрации и молярная масса, $\Delta h_{f_i}^0$ — энтальпии образования i -х компонент, подлежащие учету при физико-химических превращениях, e_i — их внутренняя энергия, имеющая в общем случае вид

$$e_i = e_i^{(0)}(T) + \sum_k e_{ik}^{(v)}, \quad (1.3.3)$$

здесь $e_i^{(0)}(T)$ — поступательная и вращательная энергия атомов или молекул, зависящая лишь от поступательной температуры газа T , $e_{ik}^{(v)}$ — энергии k -х внутренних степеней свободы i -х компонент. В такой постановке уравнения состояния могут быть записаны в общем виде:

$$\rho = \rho(p, T, \lambda_n), \quad h = h(T, \lambda_n), \quad (1.3.4)$$

здесь под λ_n будем подразумевать всю совокупность кинетических переменных, т. е. концентраций c_i и энергий $e_{ik}^{(v)}$.

Эти уравнения содержат предположение о *молекулярно-кинетическом равновесии*, позволяющем ввести единые понятия поступательной температуры и давления, но не содержат предположения о *физико-химическом равновесии*, времена установления равновесия молекулярно-кинетического. Для воздуха в достаточном для аэродинамики диапазоне температур и давлений равновесные зависимости $\overline{M}(p, T)$ и $h(p, T)$ [141] показаны на рис. 1.6. При высоких температурах энтальпия воздуха значительно больше, чем у совершенного газа. Отметим слабую «логарифмическую» зависимость h и \overline{M} от давления. Соотношения (1.3.1) позволяют ввести понятие полных теплоемкостей при постоянном удельном объеме (плотности) и давлении:

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_\rho = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_\rho - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho, \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad (1.3.5)$$

при этом всегда $c_p > c_v$. Эти теплоемкости учитывают затраты тепла на физико-химические превращения газа, и из формы кривой $h(p, T)$ на рис. 1.6 наглядно следует немонотонный характер и большой диапазон их изменения для равновесного воздуха. Для воздуха при сравнительно небольших температурах они показаны на рис. 1.2. Для газа с постоянным \overline{M} энтальпия или внутренняя энергия, а следовательно, и теплоемкости могут зависеть лишь от температуры. Тогда (здесь γ — показатель адиабаты)

$$c_p - c_v = \frac{R}{\overline{M}}, \quad \frac{p}{\rho h} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (1.3.6)$$

Последняя формула справедлива только для совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Далее, чтобы подчеркнуть отличие

уравнения состояния реального газа от совершенного, представим уравнение (1.3.2) в квазисовершенной форме [118, 121]:

$$\frac{p}{\rho h} = \frac{RT}{\bar{M}h} = \frac{\gamma_* - 1}{\gamma_*}, \quad \gamma_* = \frac{h}{e}, \quad \gamma_* = \gamma_*(p, T), \quad (1.3.7)$$

здесь \bar{M} и γ — молярная масса и показатель адиабаты газа в исходном состоянии, например, воздуха при нормальных условиях. Функция γ_* есть некоторый эффективный показатель адиабаты, названный так

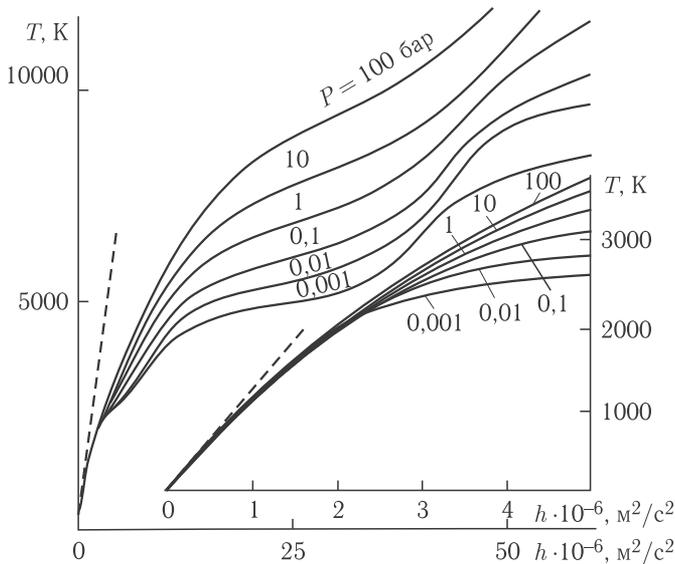
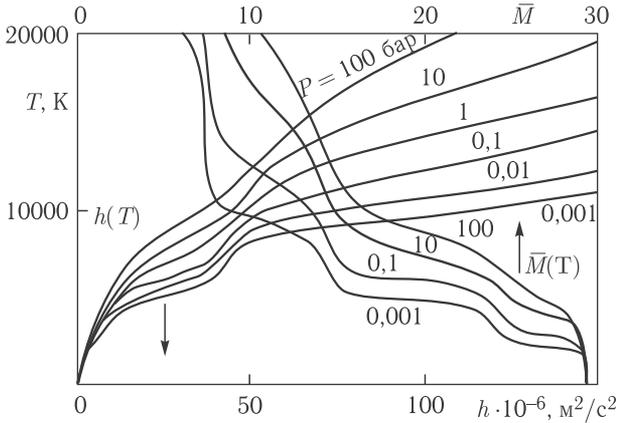


Рис. 1.6. Связь между энтальпией, температурой и молекулярной массой в равновесном воздухе. Штрихи — совершенный газ

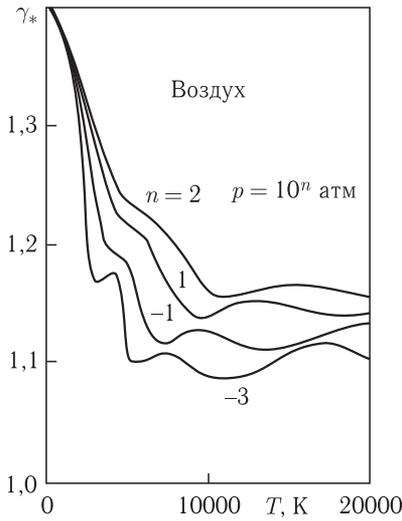


Рис. 1.7

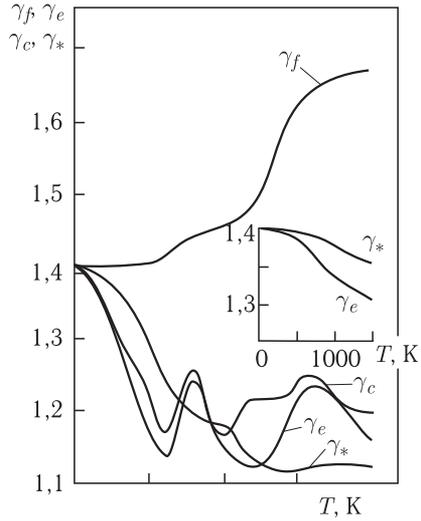


Рис. 1.8. $p = 1$ атм

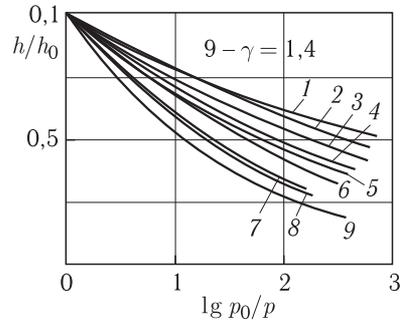
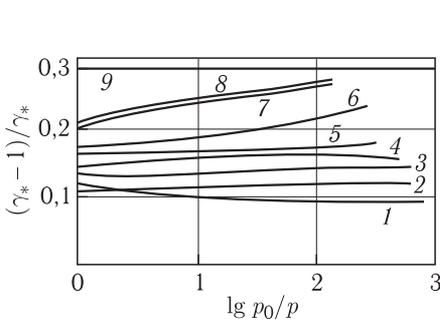


Рис. 1.9. Зависимость h и γ_* от давления при постоянной энтропии для начальных условий p_0 и h_0 в точке торможения тупого тела при указанных условиях полета

	1	2	3	4	5	6	7	8
H , км	60		30				10	
ρ_∞ , кг/м ³	$3,3 \cdot 10^{-4}$		$1,8 \cdot 10^{-2}$				0,42	
U_∞ , км/с	10	7,5		6,0	5,0	4,0	3,0	
p_0 , атм	0,33	0,18	10	6,5	4,5	3,0	1,6	36
h_0 , МДж/кг	50	28		18	12,5	8	4,5	

пока только по аналогии. Кривые $\gamma_*(T)$ для воздуха приведены на рис. 1.7. Как видно, показатель γ_* этих газов для высоких температур близок к единице и заметно меньше своего значения для холодного газа.

В отличие от совершенного газа в общем случае эффективный показатель адиабаты не равен отношению теплоемкостей $\gamma_* \neq \gamma_c = c_p/c_v$. Сравнение функций γ_* и γ_c дано на рис. 1.8; там же показаны величина $\gamma_e = a^2 \rho/p$, где a — скорость звука, и замороженный показатель адиабаты $\gamma_f = c_p^0/c_v^0$, вычисленный по теплоемкостям внешних (поступательных и вращательных) степеней свободы.

Как следует из рисунков 1.7 и 1.8, величина γ_* является сравнительно слабой функцией от температуры и, особенно, от давления, зависимость от которого практически логарифмическая. Более того, в ограниченном диапазоне изменения p и T можно принять величину γ_* постоянной, моделируя таким образом реальный газ совершенным с другим, подходящим показателем адиабаты. Газ со слабопеременной величиной γ_* назовем *квазисовершенным*. Заметим, что величина γ_* слабо изменяется вдоль изоэнтропы (и, следовательно, вдоль линии тока в потоке за головной ударной волной), рис. 1.9.

О коэффициентах переноса. Для обычных газов при нормальных условиях коэффициенты переноса зависят лишь от температуры (рис. 1.10, а). Для сравнительно небольших температур вязкость определяется формулой Сазерленда:

$$\mu = \mu_a \frac{T_0 + T_a}{T_0 + T} \left(\frac{T}{T_a} \right)^{3/2}, \quad \mu_a = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ кг/мс}, \quad (1.3.8)$$

$$T_0 = 110 \text{ К}, \quad T_a = 273 \text{ К}.$$

Величины T_0 и μ_a здесь даны для воздуха, для которого эта формула справедлива вплоть до температур $T \leq 2500$ К. Заметим, что для углекислого газа CO_2 (Марс) $T_0 = 240$ К, $\mu_a = 1,4 \cdot 10^{-5}$ кг/мс. Хорошую аппроксимацию для $\mu(T)$ для воздуха при $T > 200$ К дает зависимость (штрихи на рис. 1.10, а)

$$\mu = \mu_* \left(\frac{T}{T_*} \right)^{0,7}, \quad T_* = 200 \text{ К}, \quad \mu_* = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ кг/мс}. \quad (1.3.9)$$

Заметим, что при $T < 200$ К вязкость воздуха от температуры зависит почти линейно, а именно, $\mu = 0,7 \cdot 10^{-7} T$ (кг/мс). Это необходимо учитывать при анализе экспериментов в сверхзвуковых аэродинамических трубах, где статическая температура воздуха часто меньше 100 К.

Для равновесного воздуха при высоких температурах кривые $\mu(T, p)$ показаны на рис. 1.10, б и вплоть до точек их максимума могут быть аппроксимированы зависимостью (1.3.9) от температуры или (более точно) формулой [130], совпадающей с зависимостью (1.3.9) при

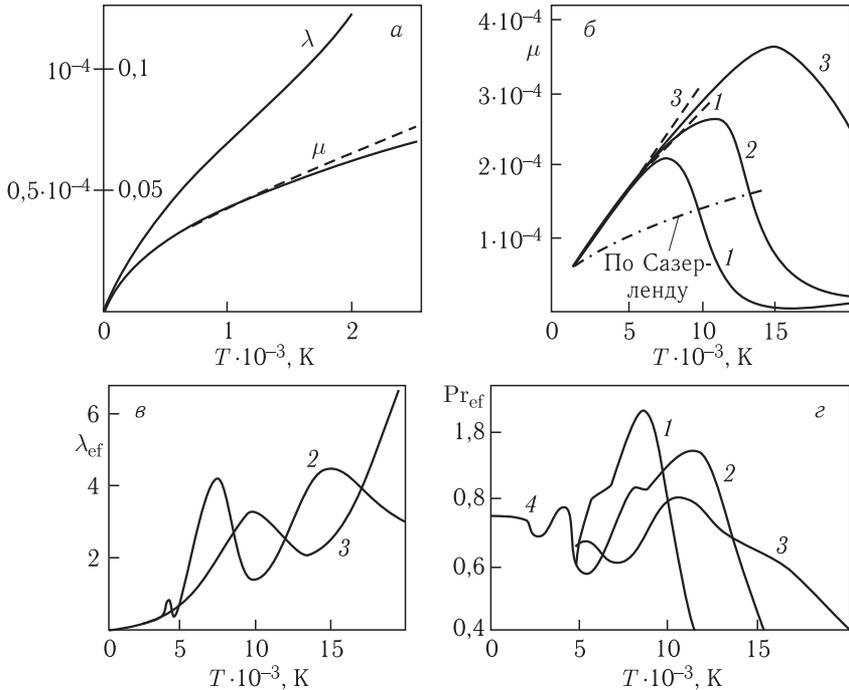


Рис. 1.10. Коэффициенты переноса равновесного воздуха [32]: 1 — $p = 10^{-2}$ бар, 2 — $p = 1$ бар, 3 — $p = 10^2$ бар, 4 — $p = 10^{-1}$ бар, $[\lambda] = \text{Вт}/(\text{мК})$, $[\mu] = \text{кг}/(\text{мс})$

умеренных температурах ($n = 0,3$, p — атм, ρ — $\text{кг}/\text{м}^3$, h — $\text{кДж}/\text{кг}$):

$$\mu = 1,18 \cdot 10^{-4} \frac{p}{\rho} h^{-n}, \text{ кг}/\text{мс}. \quad (1.3.10)$$

Эта формула не содержит температуру и справедлива для давлений $p = 10^{-3} \dots 10^2$ атм и энтальпий $h = 200 \dots 32000$ $\text{кДж}/\text{кг}$, что вполне достаточно для большинства задач входа в атмосферу со скоростями $U < 8$ $\text{км}/\text{с}$.

Вместо коэффициентов теплопроводности и диффузии часто удобно использовать безразмерные числа Прандтля Pr и Шмидта Sc или Льюиса Le :

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D}, \quad \text{Le} = \frac{\rho D c_p}{\lambda}, \quad (1.3.11)$$

которые практически постоянны при умеренных температурах и близки к единице. Заметим также, что для воздуха $\text{Pr} = 0,7 \dots 0,73$ при $200 \text{ К} \leq T \leq 2500 \text{ К}$.

Для равновесного воздуха при высоких температурах коэффициенты μ , $\lambda_{\text{эф}}$ и эффективное число Прандтля $\text{Pr}_{\text{эф}}$ также приведены на рис. 1.10, б-г и отличаются существенной немонотонностью [32]. Более подробно эти вопросы рассмотрены в гл. 7.

Глава 2

ОСОБЕННОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ

Параметры газа на поверхности тел при их невязком обтекании при больших числах Рейнольдса служат внешними граничными условиями для тонкого пограничного слоя. Поэтому понять закономерности распределения тепловых потоков по этим телам нельзя вне связи с основными особенностями их невязкого обтекания. Кроме того, с уменьшением чисел Рейнольдса невязкие и вязкие пристеночные области течения оказываются взаимосвязанными. В этой связи ниже дадим краткий обзор особенностей сверхзвукового обтекания тел, типичных для объектов ракетной техники. Подробное изложение этих вопросов дано в книгах [116–118, 121], использованных при формировании этой главы.

§ 2.1. Ударные волны

Ударные волны возникают в сверхзвуковом потоке при свободном обтекании тел или при обтекании вогнутых поверхностей. Пример ударных волн около притупленных конусов со щитком в сверхзвуковом потоке показан на рис. 2.1. *Ударные волны* можно подразделить на *головные* (присоединенные или отошедшие) и *внутренние*, которые могут быть *отошедшими*, *присоединенными* (в точках излома поверхности, рис. 2.1) или *висячими*.

Ударные волны, или скачки уплотнения, принято считать математическими поверхностями разрыва, так как их физическая толщина имеет порядок длины свободного пробега молекул и обычно предельно мала по сравнению с характерным масштабом L рассматриваемой области течения.

При возникновении стационарного разрыва по обе его стороны должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии. Обозначим индексами 1 и 2 параметры до и после скачка и пусть U — полная местная скорость газа в связанной с фронтом системе координат (рис. 2.2). При переходе через ударную волну вектор скорости

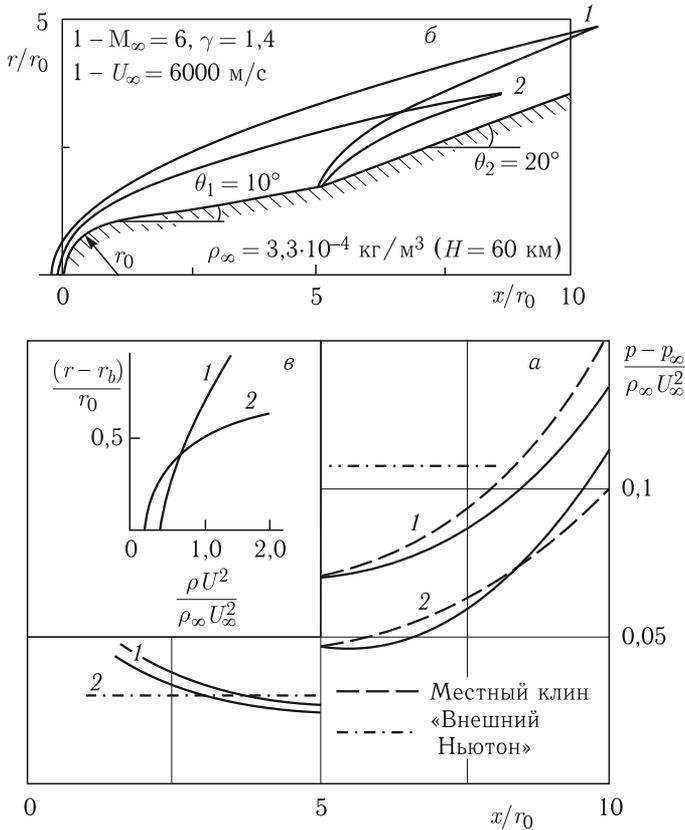


Рис. 2.1. Распределение давления по притупленному конусу со щитком (а) и формы ударных волн (б)

будет изменяться лишь в *плоскости течения*, содержащей вектор скорости \mathbf{U} и внешнюю нормаль \mathbf{n} , направленную в сторону втекающего газа. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 \rho_2 v_{n2} &= \rho_1 v_{n1}, \quad v_n = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}; \\
 \rho_2 v_{n2} \mathbf{U}_2 - p_2 \mathbf{n} &= \rho_1 v_{n1} \mathbf{U}_1 - p_1 \mathbf{n}, \\
 \rho_2 v_{n2} \left(e_2 + \frac{1}{2} U_2^2 \right) + p_2 v_{n2} &= \rho_1 v_{n1} \left(e_1 + \frac{1}{2} U_1^2 \right) + p_1 v_{n1} = \quad (2.1.1) \\
 &= \rho_1 v_{n1} \left(e_1 + \frac{1}{2} U_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \rho_1 v_{n1} \left(h_1 + \frac{1}{2} U_1^2 \right).
 \end{aligned}$$

Здесь v_n — нормальная скорость протекания газа через неподвижную ударную волну. Отсюда следует, что при переходе через скачок сохра-

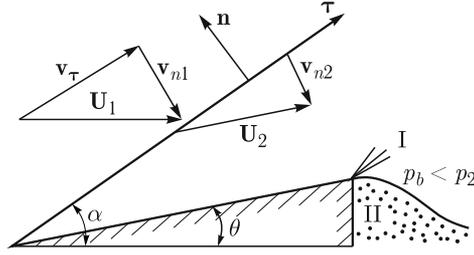


Рис. 2.2. Косой скачок уплотнения и обтекание клина: I — волна разрежения, II — донная область

няется полная энтальпия газа H :

$$H_2 = h_2 + \frac{1}{2}U_2^2 = H_1 = h_1 + \frac{1}{2}U_1^2. \quad (2.1.2)$$

Касательная составляющая скорости также не изменяется при переходе через ударный фронт, т. е. $v_{\tau 2} = v_{\tau 1}$.

Проектируя 2-е уравнение (2.1.1) на нормаль \mathbf{n} и учитывая равенство $v_{\tau 2} = v_{\tau 1}$ в 3-м, получим те же уравнения, что и для прямой волны:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_{1n} &= \rho_2 v_{2n}, & p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 &= p_2 + \rho_2 v_{2n}^2, \\ h_1 + \frac{1}{2}v_{n1}^2 &= h_2 + \frac{1}{2}v_{n2}^2 = H_n. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Эти соотношения должны быть дополнены уравнением состояния (1.3.4) или для равновесных состояний за ударной волной формулами типа (1.3.7), причем в первом случае должны быть сформулированы условия ударного перехода для кинетических переменных λ_n (концентрации компонентов и энергии внутренних степеней свободы), наиболее распространенными для которых в достаточно плотном газе является условия замороженного перехода:

$$\lambda_{n1} = \lambda_{n2}. \quad (2.1.4)$$

Таким образом, соотношения (2.1.3) с указанными сопутствующими условиями полностью описывают термодинамическое состояние газа за ударной волной. Соотношениям (2.1.3) можно придать вид

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \rho_1 v_{n1}^2 (1 - k), & h_2 - h_1 &= \frac{1}{2}v_{n1}^2 (1 - k^2), \\ k &= \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_{n2}}{v_{n1}}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Для совершенного газа эта система имеет решение:

$$k = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_{n1}^2}, \quad M_{n1} = \frac{v_{n1}}{a_1}. \quad (2.1.6)$$

Зависимость параметров за скачком от числа M_{n1} в этом случае показана на рис. 2.3, а на рис. 2.4 для равновесного воздуха приведены величины k и температура газа за ударной волной в зависимости от скорости v_{n1} для различных высот полета тела. Отметим слабую «логарифмическую» зависимость приведенных на рис. 2.4 параметров за

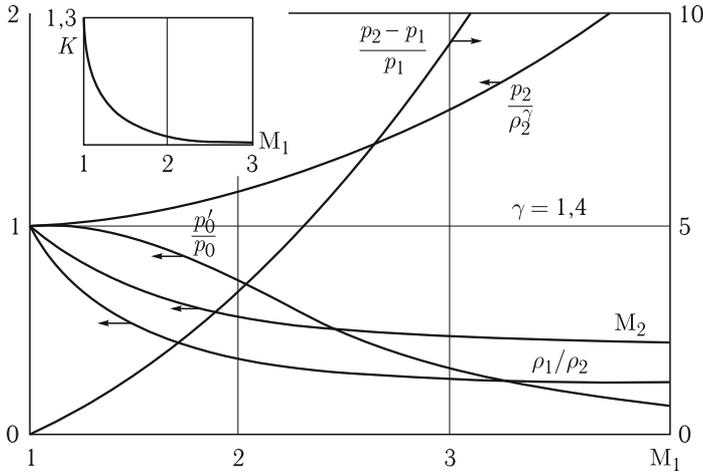


Рис. 2.3. Зависимость параметров за прямым скачком от числа Маха $M_{n1} = v_{n1}/a$ (p_0 и p'_0 — давление торможения до и после ударной волны, K — отношение точного приращения давления $p'_0 - p_1$ в точке торможения к приближенному)

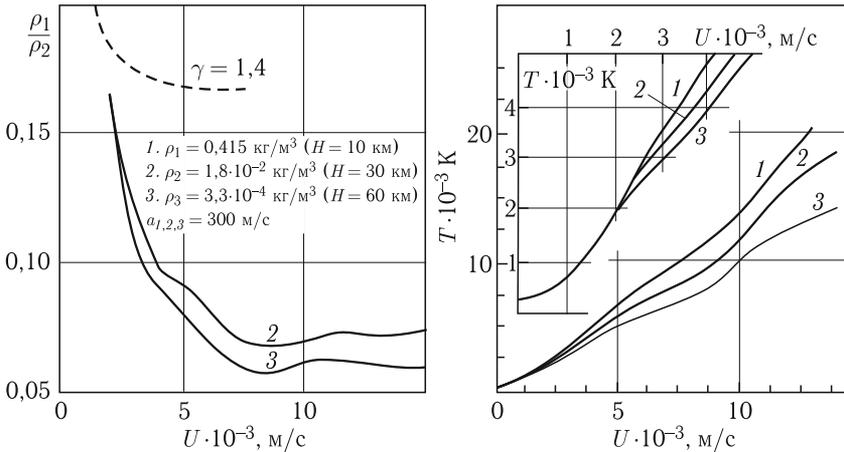


Рис. 2.4. Зависимости отношения плотностей до и после прямой равновесной ударной волны и температуры за ней от скорости ее распространения U на различных высотах H в атмосфере Земли

ударной волной от плотности ρ_1 , что облегчает интерполяцию данных на промежуточные значения ρ_1 (или высоты полета H).

При больших значениях нормального числа Маха $M_{n1}^2 \gg 2/(\gamma - 1)$ имеем предел $k = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$. Аналогично, для квазисовершенного газа (1.3.7) получим ту же предельную формулу:

$$k = \frac{\gamma_* - 1}{\gamma_* + 1}. \quad (2.1.7)$$

Как следует из рис. 2.4, при больших скоростях полета $v_{n1} = U_\infty$ относительная плотность газа ρ_2/ρ_1 за прямой ударной волной в равновесном воздухе возрастает почти до 20 раз против 6 в совершенном газе при $\gamma = 1,4$.

Для косых скачков уплотнения из (2.1.1) следует

$$\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 v_{n1}} \mathbf{n} = v_{n1} (1 - k) \mathbf{n}. \quad (2.1.8)$$

Отсюда легко получить и составляющие вектора скорости \mathbf{U}_2 в произвольной декартовой системе координат, спроектировав это уравнение на ее оси.

Отметим далее некоторые внутренние свойства скачков уплотнения, т.е. не связанные с ориентацией системы координат. Пусть α — местный угол наклона скачка в плоскости течения, θ — угол поворота вектора скорости при переходе через скачок, например, угол обтекаемого клина (рис. 2.2). Тогда из геометрических соображений имеем

$$\frac{v_{n2}}{v_\tau} = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = k \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta}, \quad (2.1.9)$$

$$v_{n1} = U_1 \sin \alpha, \quad v_\tau = U_1 \cos \alpha, \quad v_{n2} = k v_{n1}.$$

Отсюда следует

$$\zeta = \operatorname{tg} \theta = \frac{(1 - k) \eta}{1 + k \eta^2}, \quad \text{где } \eta = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.1.10)$$

При малых θ , или $\zeta \rightarrow 0$, возможны два предельных решения. Одно из них ($\eta \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow \pi/2$) соответствует прямой ударной волне. Другое решение ($k \rightarrow 1$) соответствует скачку предельно малой интенсивности.

Функция $\zeta(\eta)$ (ее называют *ударной полярой*) должна иметь максимум в некоторой точке (ζ_0, η_0) , как это показано для совершенного газа ($\gamma = 1,4$) на рис. 2.5. Следовательно, для заданного числа Маха M_∞ существует предельный угол θ_0 поворота потока в скачке, и если тело имеет при вершине угол $\theta > \theta_0$, то перед ним возникает отошедшая ударная волна. Там же показана *коническая поляра* (связь между углом полураствора острого конуса θ и углом скачка α перед ним).

Как видно, функция $\zeta(\eta)$ — однозначная, но обратная ей функция $\eta(\zeta)$ двузначна и имеет две ветви. Ветвь $\eta > \eta_0$ с большим давлением за скачком, называют *сильной ветвью* скачка, а ветвь $\eta < \eta_0$ —

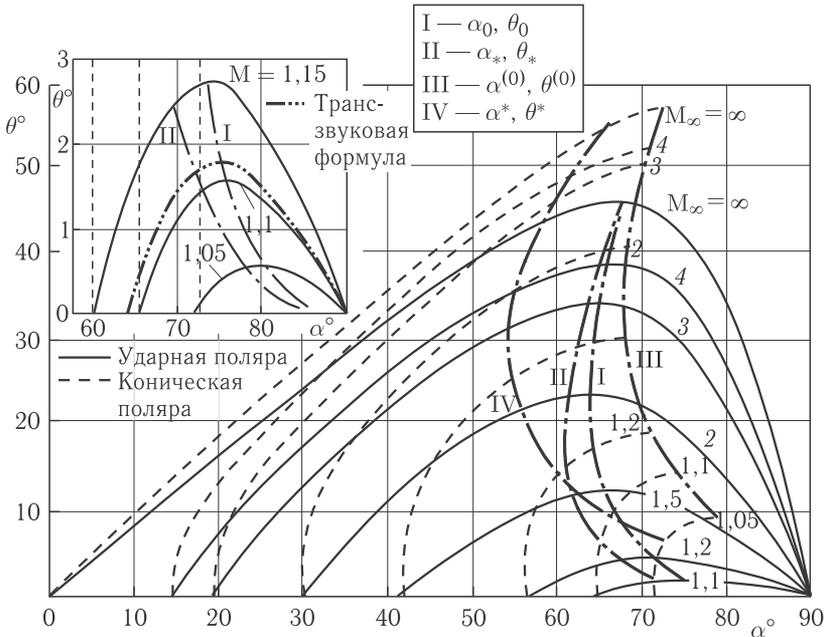


Рис. 2.5. Ударная и коническая поляры для $\gamma = 1,4$; I-IV — предельные и звуковые углы на линиях $M = \text{const}$, I-II — клин, III-IV — конус

слабой ветвью. Точка ветвления (ζ_0, η_0) определяется из уравнения $d\zeta/d\eta = 0$.

Важным оказывается взаимное расположение точки ветвления (ζ_0, η_0) и звуковой точки (ζ_*, η_*) , где $\eta_* = \text{tg } \alpha_*$, α_* — звуковой угол наклона скачка, за которым число $M_2 = U_2/a_2 = 1$. Звуковая точка за скачком уплотнения не может принадлежать сильной его ветви, т.е. всегда $\eta_* \leq \eta_0$.

Таким образом, справедлива система неравенств

$$M_2 \geq 1 \text{ при } \eta \leq \eta_*, \quad M_2 < 1 \text{ при } \eta \geq \eta_*. \quad (2.1.11)$$

В точке максимума (ζ_0, η_0) , разделяющей слабую и сильную ветви скачка кривой $\zeta(\eta)$, и при $\eta > \eta_0$ течение за скачком дозвуковое. Для слабой ветви $\eta < \eta_0$ течение сверхзвуковое, кроме обычно небольшого диапазона значений $\Delta\eta = \eta_0 - \eta_*$. При $M_1 \rightarrow \infty$ эта разность исчезает и $\eta_0 = \eta_* = k_0^{-1/2} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2}$.

Выбор нужной ветви скачка не всегда очевиден и определяется всей формой обтекаемого тела и, вообще, глобальными свойствами задачи. Опыт показывает, что на заостренных телах, угол наклона которых к направлению потока меньше предельного $\theta < \theta_0$, всегда реализуется слабая ветвь скачка и причиной этому является влияние

донного разрежения, которое несовместимо с дозвуковым течением за сильной ветвью скачка.

Отметим еще одну особенность ударных волн: существенное снижение давления торможения потока за ними. Для небольших чисел M_∞ это показано на рис. 2.3. При больших же числах Маха давления адиабатического торможения перед скачком p_0 и после него p'_0 соотносятся как

$$p_0 \approx p_\infty \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \gg p'_0 \approx \gamma M_\infty^2 p_\infty. \quad (2.1.12)$$

§ 2.2. Невязкое гиперзвуковое обтекание тупых тел

Постановка задачи о невязком обтекании тупого тела состоит в задании для уравнений Эйлера (кроме условия непротекания на теле $o-b$) граничных условий на ударной волне 4, или $o'-d$ на рис. 2.6 и на выходной линии $b-d$ (правее звуковой линии 3) с обязательным на ней условием $M_n > 1$, где $M_n = U_n/a$ — нормальное к $b-d$ число Маха. На этой линии ставятся *свободные* или *мягкие* условия типа $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, где f — любая функция. Минимальные же области влияния и зависимости такого решения ограничены характеристиками 1 и 2 (рис. 2.6, б, в). Более общими (но менее экономными) являются методы сквозного счета (см. гл. 7), для которых на некоторой линии $o''-e$ перед предполагаемой ударной волной задаются параметры внешнего потока, а на линии $e-d-b$ — свободные условия. Ударная волна при этом не выделяется и получается в расчетах слегка размытой в виде узкой полосы течения с большими градиентами давления. В любом случае одновременному расчету подлежит вся область до- и транзвукового течения около носовой части тупого тела.

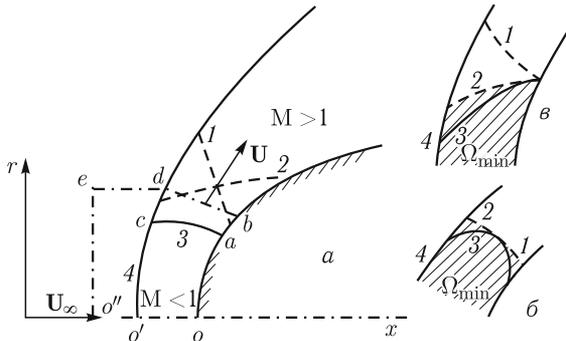


Рис. 2.6. К теории сверхзвукового обтекания тупых тел

Гиперзвуковое обтекание тел обладает рядом предельных свойств, связанных с условиями:

$$M_{n\infty}^{-2} \gg 1, \quad k = \frac{\rho_\infty}{\rho_s} \gg 1, \quad M_{n\infty} = M_\infty \sin \alpha. \quad (2.2.1)$$

Здесь и ниже индексами ∞ и s помечены величины перед и за ударной волной. Для равновесного воздуха $\rho_s/\rho_\infty = 5 \dots 20$ при $M_{n\infty} \geq 5$ (рис. 2.4). Эти допущения выполняются раньше для тупых тел с $\sin \alpha \sim 1$ и влекут за собой два важных свойства течений около тел, а именно: их гиперзвуковую стабилизацию и малую толщину сжатого ударного слоя. В соотношениях (2.1.5) можно при этом опустить члены $p_1 = p_\infty$ и $h_1 = h_\infty$, и они примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{p}_s &= \frac{p_s}{\rho_\infty U_\infty^2} = (1 - k) s, & \bar{h}_s &= \frac{h_s}{U_\infty^2} = \frac{1}{2}(1 - k^2) s, \\ \bar{p}_s &= k^{-1} = \frac{\rho_s}{\rho_\infty} = \frac{\gamma_* + 1}{\gamma_* - 1}, & s &= \frac{v_{n\infty}^2}{U_\infty^2} = \sin^2 \alpha, & \frac{p}{\rho h} &= \frac{\gamma_* - 1}{\gamma_*}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

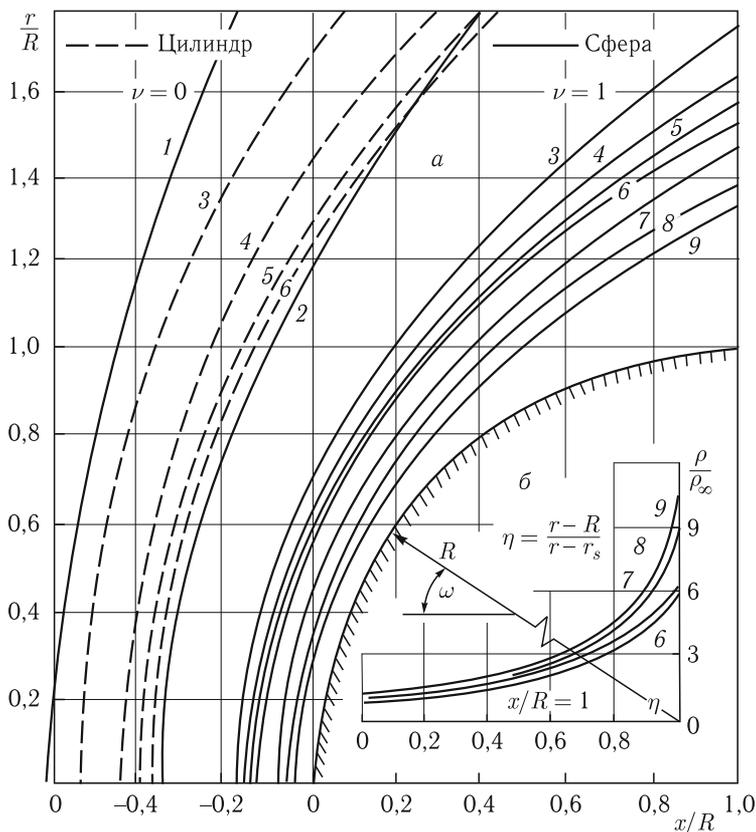
Допустим теперь, что на рис. 2.6 условия (2.2.1) выполняются в точке на ударной волне с углом α_c , куда приходит характеристика 2. Тогда они будут выполняться и выше по течению, поскольку там $\alpha \geq \alpha_c$. Следовательно, для области левее характеристики 2 число M_∞ исчезнет из граничных условий и перестанет влиять на безразмерные параметры течения $\bar{p}, \bar{h}, \bar{p}, \bar{U} = U/U_\infty$ и т. д. Это и есть *закон гиперзвуковой стабилизации*, в рамках которого для тел геометрически подобной формы число M_∞ исчезает из полной системы критериев подобия равновесного несовершенного газа — $\gamma, M_\infty, \rho_\infty, U_\infty$, которая сводится к

$$\gamma, \rho_\infty, U_\infty \quad \text{при} \quad M_\infty \gg 1. \quad (2.2.3)$$

Пределы реализации этого закона зависят, естественно, не только от числа M_∞ , но и от формы тела. Из рис. 2.7, а следует, например, что при обтекании тупых тел формы ударных волн стабилизируются при $M_\infty \geq 10$ или, с некоторой натяжкой, при $M_\infty \geq 6$. В то же время давление на лобовой части сферы $\omega \leq 60^\circ$ (ω — центральный угол) стабилизируется практически уже при $M_\infty \geq 3$, хотя при $\omega \geq 70^\circ$ эти кривые существенно расслаиваются (рис. 2.8).

Но на притупленном круглом цилиндре радиуса r_0 (рис. 2.9) с ростом его длины расслоение ударных волн и кривых давления наступает рано или поздно при любом конечном M_∞ , причем если при $M_\infty \geq 6$ все эти кривые схожи между собой хотя бы качественно, то при $M_\infty \leq 2$ ударные волны далеко отходят от тела, а зона повышенного давления на боковой поверхности отсутствует вообще, т. е. $\Delta p = p - p_\infty < 0$.

Для реального газа (диссоциированного воздуха) гиперзвуковое течение будет зависеть также и от внешней скорости U_∞ и (существенно слабее) от плотности ρ_∞ . В то же время при заметном отличии форм ударных волн и профилей плотности (рис. 2.7, б) кривые давления на сфере для гиперзвуковых скоростей $U_\infty \geq 1,3$ км/с, $M_\infty \geq 4$ укладываются в относительно узкую при $\omega \leq 70^\circ$ полосу, заштрихованную на рис. 2.8, б.



- 1-6 — $M_\infty = 1, 5; 2; 4; 6; 10; \infty$
- 7 — $U_\infty = 4$ км/с, $\rho_\infty = 1,8 \cdot 10^{-2}$ кг/м³ ($H \approx 30$ км)
- 8 — $U_\infty = 7,5$ км/с, $\rho_\infty = 1,8 \cdot 10^{-2}$ кг/м³ ($H \approx 30$ км)
- 9 — $U_\infty = 7,5$ км/с, $\rho_\infty = 3,3 \cdot 10^{-4}$ кг/м³ ($H \approx 60$ км)

Рис. 2.7. Формы ударных волн на цилиндре и сфере и профили плотности в ударном слое сферы

Закон гиперзвуковой стабилизации приводит к простой форме изэнтроп вдоль линии тока:

$$\bar{h} = \bar{h}_{ss} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}_{ss}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{1}{2} q(\gamma) s^{1/\gamma} \bar{p}^{(\gamma-1)/\gamma}, \quad s = s(\alpha),$$

$$q(\gamma) = (1+k)(1-k)^{1/\gamma}, \quad k = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}, \quad \bar{h} = \frac{h}{U_\infty^2}.$$

(2.2.4)

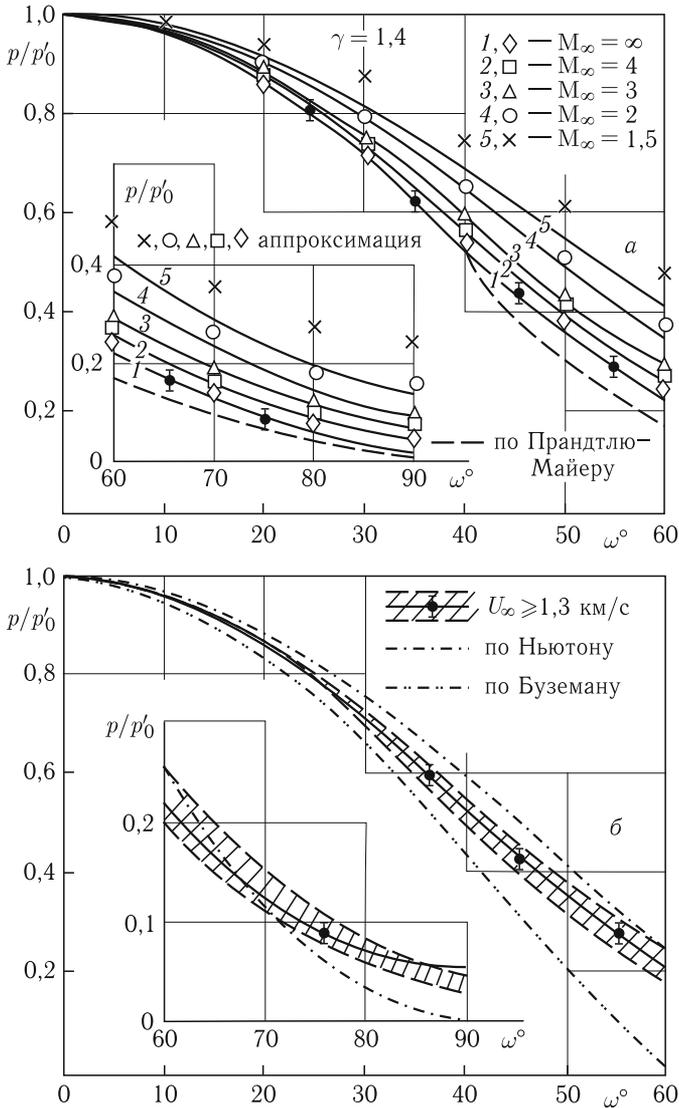


Рис. 2.8. Давление на сфере

Здесь величина s (та же, что и в (2.2.2)) играет роль энтропии газа и определяется углом наклона скачка на данной линии тока с величинами \bar{h}_{ss} , \bar{p}_{ss} сразу за скачком. Величина $q = 1 \dots 1,05$ для $\gamma = 1 \dots 5/3$, так что ниже примем $q = 1$. Тогда

$$\bar{h} = \frac{1}{2} s^{1/\gamma} \bar{p}^{(\gamma-1/\gamma)}, \quad \bar{p} = \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{p}}{\bar{h}} = \frac{1+k}{k} s^{-1/\gamma} \bar{p}^{1/\gamma}. \quad (2.2.5)$$

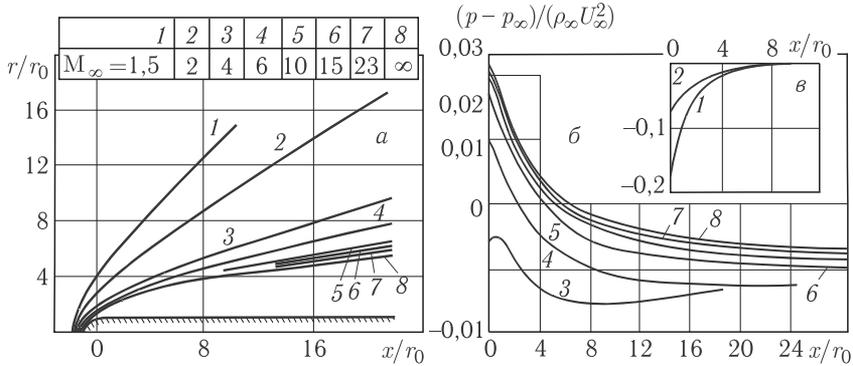


Рис. 2.9. Ударные волны и давление на притупленном цилиндре

Ниже по потоку от области гиперзвуковой стабилизации величины \bar{p} , \bar{h} на этих линиях тока зависят от M_∞ только через местное давление. Для реального газа эти изоэнтропы имеют общий вид:

$$\bar{h} = \bar{h}(s, \rho_\infty, U_\infty), \quad \bar{p} = \bar{p}(s, \rho_\infty, U_\infty). \quad (2.2.6)$$

Но, учитывая слабое изменение γ_* вдоль изоэнтроп, можно воспользоваться формулами (2.2.5), заменив в них γ на γ_* и определив последнее по величине $k = (\gamma_* - 1)/(\gamma_* + 1)$ за скачком.

Теперь о *сжатом ударном слое*. Большое уплотнение газа за ударной волной при $k \ll 1$ приводит к малым толщинам ударного слоя δ перед телом. В подтверждение приведем аппроксимирующие формулы для сферы ($\nu = 1$) и круглого цилиндра ($\nu = 0$) радиуса R :

$$\begin{aligned} \nu = 1: \quad & \delta = 0,78 kR, \quad R_s = (1,05 + 1,65 k)R, \quad \omega_* = 34 + 40 k \\ \nu = 0: \quad & \delta = 2,2 kR, \quad R_s = (1,02 + 6,1 k)R, \quad \omega_* = 36 + 43,5 k. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Здесь δ и R_s — отход ударной волны и радиус ее кривизны на оси симметрии, ω_* — угловая координата звуковой точки на теле (в градусах). Что касается ее координаты на ударной волне, то при $k \rightarrow 0$ она стремится к оси симметрии как $\omega_* \sim k^{1/2}$.

Вследствие малости толщины ударного слоя при малых k для сферических тел ударная волна почти облегает лобовую часть тела (рис. 2.7), поэтому внешне набегающий поток как бы взаимодействует непосредственно с телом. В этом случае теорема импульсов приводит к *формуле Ньютона* для распределения давления по телу:

$$p - p_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 \sin^2 \theta, \quad (2.2.8)$$

здесь θ — угол наклона поверхности тела к вектору \mathbf{U}_∞ . Строго говоря, в правую часть следует добавить (для вогнутых тел) и вычесть (для выпуклых) центробежную *бузмановскую* силу, обусловленную

искривленностью линий тока, облегающих тело. Однако для тел выпуклой формы, как показано на рис. 2.10, именно формула Ньютона дает лучшие результаты, чем формула Буземана, которую приводить не будем.

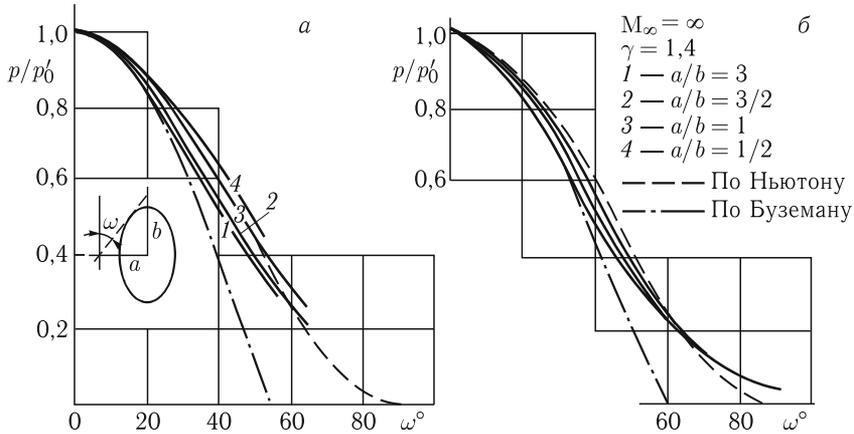


Рис. 2.10. Кривые давления на эллипсах (а) и эллипсоидах (б)

Для поверхностей, обтекаемых неоднородным потоком (щиток, кромка руля на фюзеляже), следует применять местную формулу Ньютона, т. е. с местными перед препятствием параметрами возмущенного головной ударной волной потока в формуле (2.2.8). Это подтверждают данные по распределению давления на щитке на рис. 2.1 (модель местного клина).

Для тупых тел обычно используют модифицированную формулу Ньютона:

$$\frac{p}{p_0} = \sin^2 \theta, \quad p'_0 = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \left(1 - \frac{1}{2}k\right). \quad (2.2.9)$$

Формула для p'_0 (давление в точке торможения тупого тела) получена из интеграла Бернулли для оси симметрии тела.

Для сферы, обтекаемой воздухом со скоростями $U_\infty > 1,3$ км/с (или $M_\infty \geq 4$), кривые $p/p'_0 = F(\omega)$, $\omega = \pi/2 - \theta$ на рис. 2.8 располагаются в узкой полосе, центральная линия которой аппроксимируется формулой

$$\frac{p}{p'_0} = 1 - \frac{7}{6} \sin^2 \omega + 0,225 \sin^6 \omega, \quad \omega \leq 80^\circ \quad (2.2.10)$$

Для совершенного газа с $\gamma = 1,4$ есть и более точная аппроксимация:

$$\frac{p}{p'_0} = 1 - \left(1,2 - \frac{1,5}{M_\infty^2}\right) \sin^2 \omega + \left(0,27 - \frac{1,1}{M_\infty^2}\right) \sin^6 \omega. \quad (2.2.11)$$

Результаты расчетов (рис. 2.8) свидетельствуют о чрезвычайно слабом влиянии условий гиперзвукового обтекания на распределение давления по сфере. Но это не распространяется на толщину ударного слоя и распределение плотности и других термодинамических параметров в нем. Для до- и трансзвуковой области течения около тупых тел справедлив закон подобия, а именно: течение в этой области определяется эффективным показателем адиабаты γ_* , определяемым для прямой ударной волны.

Заметим, что формулы «ньютоновского» типа (2.2.8)–(2.2.11) пригодны лишь для тупых тел, не содержащих угловую точку в трансзвуковой области. Для сферических сегментов, например, с углом полураствора ω_0 , эти формулы пригодны лишь при $\omega_0 > 30 \dots 40^\circ$; точнее, при $\omega_0 > \omega_*$, где ω_* — угловое положение звуковой точки на сфере (2.2.7). При реальных значениях $k \sim 0,05 \dots 0,2$ при числе Маха полета $M > 5$ имеем $\omega_* \sim 36 \dots 42^\circ$. При $\omega_0 < \omega_*$ давление p_* (соответствующее местной скорости, равной скорости звука) перемещается в угловую точку с прилегающей достаточно обширной областью дозвукового течения, не описываемой приведенными формулами. Предельным случаем таких течений является гиперзвуковое обтекание плоского торца ($\omega_0 = 0$). В таких случаях необходимо привлечение численных методов расчета.

Этот эффект проявляется и при обтекании тел сегментальной формы под углом атаки, что наглядно следует из рис. 2.11, где показаны формы ударных волн перед таким телом при различных углах атаки. Как видно, даже при $M_\infty = 23$, когда ударная волна почти облегает тело, точки торможения потока заметно сдвинуты к центру по сравнению с их предельным, «ньютоновским» расположением.

Этот эффект был исследован в работе [76], где получены следующие полезные для оценок теплообмена на сегментальных телах данные по отходам головного скачка δ_0 и градиентам скорости β_1 и β_2 (соответственно в плоскости угла атаки и в ортогональном к ней направлении) в точке торможения на сегменте для диапазонов углов $25^\circ \leq \omega_0 \leq 30^\circ$, $20^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$. Для $\omega_0 - \alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ соответственно имеем:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0,49 kR, & \beta_1 R &= 3,76 k^{1/2} \left(1 - \frac{3}{4}k\right) U_\infty, \\ \delta_0 &= 0,61 kR, & \beta_1 R &= 3,04 k^{1/2} \left(1 - \frac{3}{4}k\right) U_\infty, \\ \delta_0 &= 0,69 kR, & \beta_1 R &= 2,67 k^{1/2} \left(1 - \frac{3}{4}k\right) U_\infty. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

При этом

$$\begin{aligned} \beta_2 R &= 1,4 k^{1/2} \sin \alpha \sin (\omega_0 - r_0/R), \\ r_0/R &= [0,3 + 0,022 (\omega_0 - \alpha)] k^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

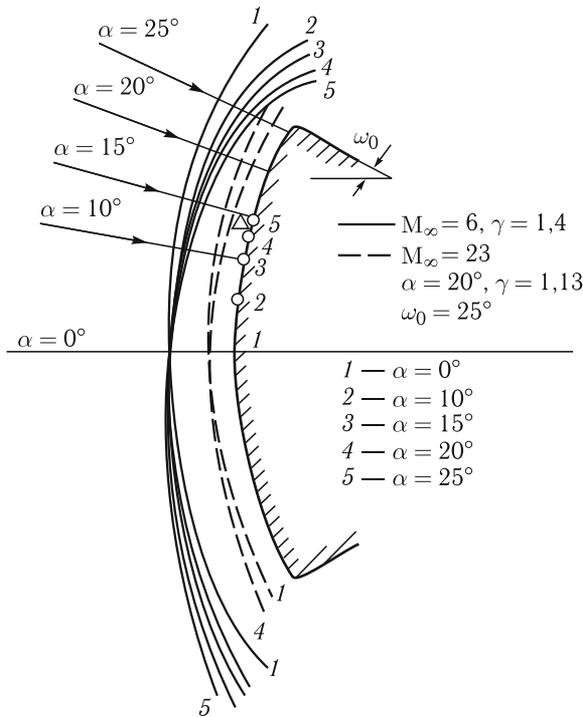


Рис. 2.11. Формы ударных волн и положение точек торможения (значки) при обтекании сферического сегмента под углом атаки

Здесь R — радиус кривизны сегмента, r_0 — минимальное расстояние от критической до угловой точки сегмента.

Отметим, что в этой задаче имеется еще один характерный размер — радиус скругления угловой кромки r_1 , однако его влияние на теплообмен, как показано в гл. 9, при реальных его значениях $r_1/R < 0,03$ ограничено областью самого скругления, т. е. носит локальный характер.

§ 2.3. Невязкое обтекание тонких притупленных тел

К таковым относятся тела с тупым (к примеру сферическим) носком размером r_0 и боковой поверхностью длиной $L \gg r_0$ с углом наклона $\theta \ll 1$. Отличительной чертой гиперзвукового обтекания таких тел являются два основных эффекта:

— существенное влияние носка на распределения давлений и форм ударных волн около боковой поверхности, распространяющихся на расстояния $L \gg r_0$. Подобный пример показан на рис. 2.9;

— существенная неоднородность в распределении параметров между поверхностностью тела и ударной волной, а именно: наличие примыкающего к телу *высокоэнтропийного слоя*, образованного линиями тока, прошедшими через отошедшую от тупого носка ударную волну с наклоном $\alpha \sim \pi/2$. Вне этого слоя расположен примыкающий к ударной волне *ударный слой*, образованный линиями тока, которые прошли через ударную волну с наклоном $\alpha \ll 1$ на некотором удалении от носка.

В этом «ударном» слое параметры потока имеют следующие порядки величин:

$$U_\infty - u \sim U_\infty^2 \alpha^2, \quad \rho \sim \rho_\infty, \quad p \sim p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \alpha^2, \\ h \sim h_\infty + \frac{1}{2} U_\infty^2 \alpha^2.$$

Для высокоэнтропийного слоя для плотности и энтальпии на линиях тока с параметром $s = \sin^2 \alpha_s \sim 1$ из уравнения адиабаты (см. (2.2.5)) при $\alpha \ll 1$ следуют оценки:

$$\rho \sim \rho_0 \left(\frac{p}{p'_0} \right)^{1/\gamma} \sim \frac{1}{k} \rho_\infty \alpha^{2/\gamma}, \\ h \sim U_\infty^2 \left(\frac{p}{p'_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \sim U_\infty^2 \alpha^{2(\gamma-1)/\gamma}. \quad (2.3.1)$$

Здесь ρ_0 и p'_0 — плотность и давление в точке торможения, местное же давление на боковой поверхности имеет тот же порядок $p \sim p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 \alpha_s^2$, что и на ударной волне в данном сечении. Таким образом, на тонких притупленных телах (при $\alpha \ll 1$) в высокоэнтропийном слое плотность много меньше, а энтальпия (вследствие малой разности $\gamma - 1$, или $\gamma_* - 1$ для равновесного воздуха) много больше, чем в ударном слое вблизи ударной волны. Так, для диссоциированного воздуха энтальпия около тела достигает величины $h/H_\infty \approx 0,6$, где $H_\infty \approx U_\infty^2/2$ — энтальпия торможения газа.

Влияние притупленного носка моделируется его силовым воздействием на поток через силу его сопротивления (*взрывная аналогия*) [118, 121, 170].

$$X = \pi^\nu (r^{(0)})^{1+\nu} \rho_\infty U_\infty^2, \quad r^{(0)} = r_0 \left(\frac{c_{x0}}{2} \right)^{1/(1+\nu)}. \quad (2.3.2)$$

Здесь $r^{(0)}$ — *эффективный радиус носка*, зависящий в данной постановке не только от r_0 , но и от коэффициента сопротивления носка c_{x0} . Для притупленных конусов (или клиньев), отличающихся лишь формой носка, основанный на этой модели закон подобия заключается в зависимости (в цилиндрической системе координат (x, r, φ)), напри-

мер, безразмерных давления и ударных волн:

$$\bar{p} = p/\rho_\infty U_\infty^2, \quad \Delta R_1 = (R - r_b)/r^{(0)} \quad (2.3.3)$$

лишь от координаты подобия $x_1 = x/r^{(0)}$, что подтверждают данные рис. 2.12. Здесь $r_b = r_0 + x\theta$ — форма боковой поверхности тела.

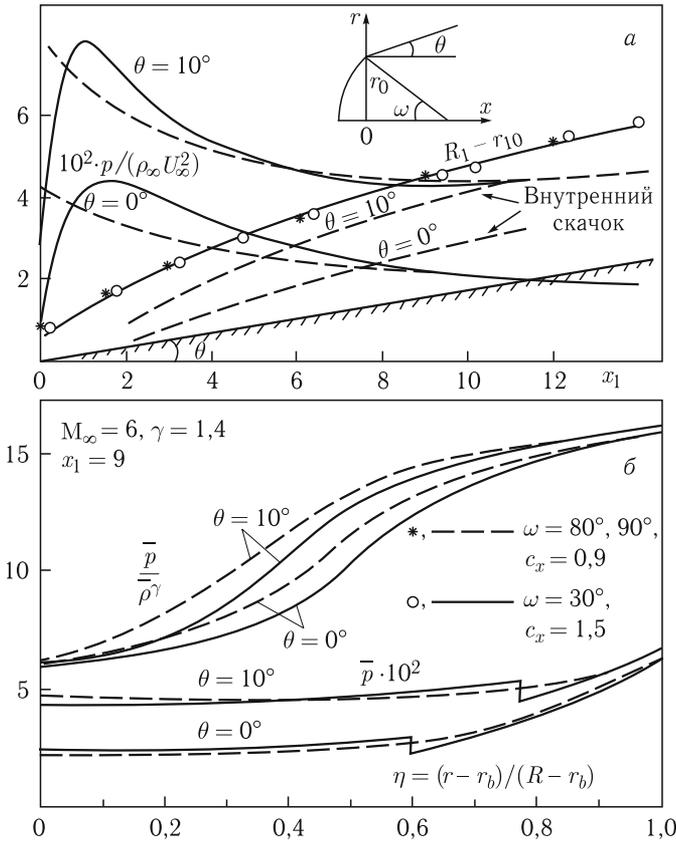


Рис. 2.12. Обтекание конусов и цилиндров с сегментальными носками

Для конусов или клиньев с разными θ закон подобия формулируется как зависимость функций (здесь v — поперечная скорость)

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2 \theta^2}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{U_\infty^2 \theta^2}, \quad \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{v}{U_\infty \theta}, \quad \Delta R_2 = \frac{R - r_b}{r^{(0)} \theta^2 / (1 + \nu)} \quad (2.3.4)$$

от переменных

$$x_2 = \frac{x}{r^{(0)}} \theta^{(3 + \nu)/(1 + \nu)}, \quad \eta = \frac{r - r_b(x)}{R - r_b(x)}. \quad (2.3.5)$$

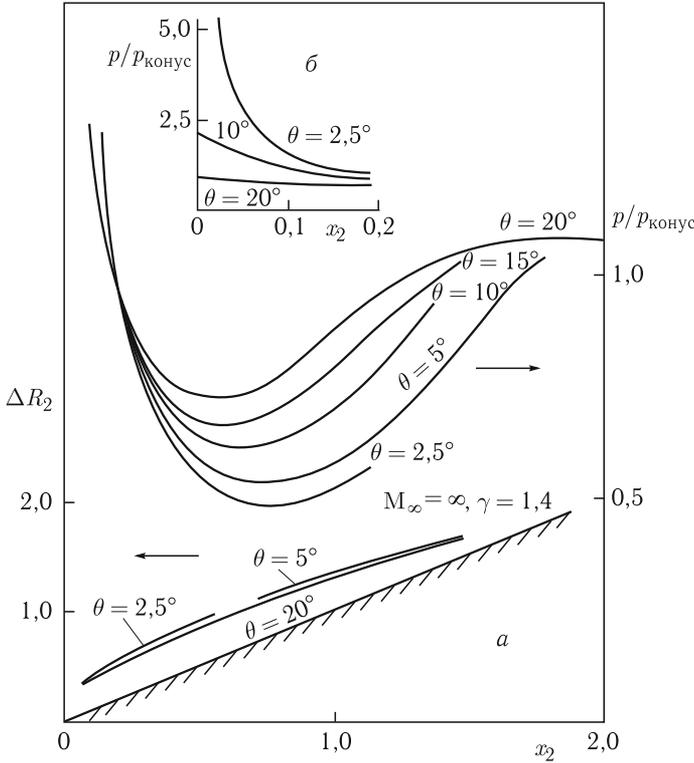


Рис. 2.13. К закону подобия для притупленных конусов

Подтверждение этого закона подобия дано на рисунках 2.13 и 2.14, причем по указанным ниже причинам подобие распределения энтальпии между телом и ударной волной имеет место лишь в области, примыкающей к ударной волне. Заметим, что кривые распределения давления, собранные для разных θ в достаточно узкий пучок в переменных подобия, в исходных координатах (на рис. 2.15) практически несопоставимы.

Отметим две особенности обтекания притупленных конусов. Это, во-первых, волнообразный характер распределения давления и форм ударных волн, причем продольный размер этих волн пропорционален $\Delta x \sim \theta^{-2} r_0$. Во-вторых, возможно появление внутренних максимумов в кривых распределения плотности на больших удалениях от носка, что следует из рис. 2.16, б. При этом волнообразность распределения давления и вообще большая протяженность области влияния носка — это эффект чисто гиперзвуковой. Помимо теории, это следует из сравнения кривых на рисунках 2.17–2.19. Описанные закономерности распределения давления относятся к достаточно удлиненным притупленным

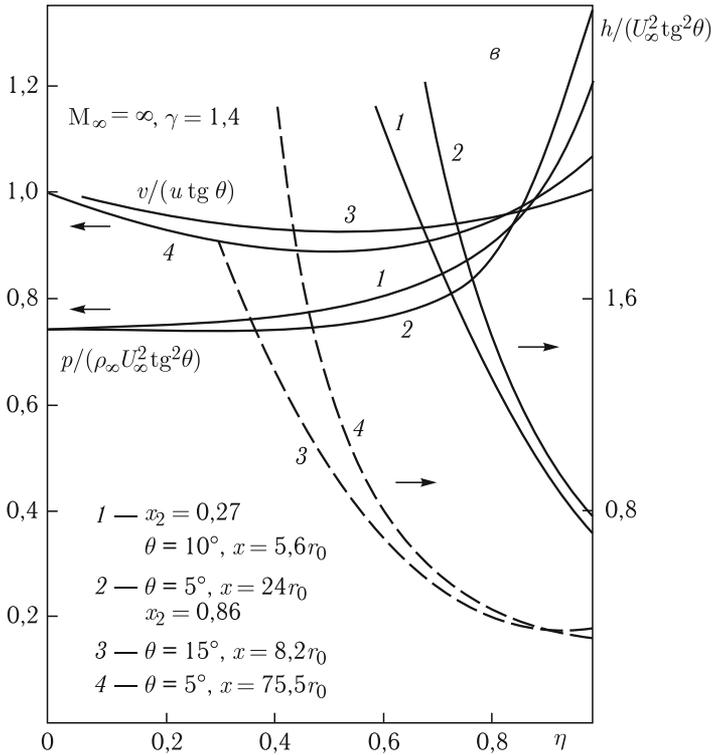


Рис. 2.14. К подобию параметров течения в ударном и высокоэнтропийных слоях

телам. Вблизи же носового притупления давление на боковой поверхности тел формируется чисто волновыми процессами расширения сжатого потока, а потому не следует каким-либо законам подобия. Это видно, в частности, из распределения давления на боковой поверхности предельно тупого тела с носком в виде плоского диска на рис. 2.20.

Обратим также внимание на характер распределения давления по различным надстройкам или кромкам рулей, крыльев, погруженным в ударный слой. Типичный, хотя, возможно, и экстремальный пример приведен на рис. 2.21, где давление вдоль кромки руля, рассчитанное по местным параметрам в сечении перед кромкой, возрастает на порядок и сопровождается появлением звуковой точки или даже точки торможения потока и неизбежной в этом случае качественной перестройкой течения.

Что касается влияния физико-химических процессов на обтекание тонких притупленных тел, то эти процессы при скоростях $U_\infty \leq 8$ км/с происходят лишь в высокоэнтропийном слое и их учет приводит к некоторому сокращению области влияния носка. Это подтверждают дан-

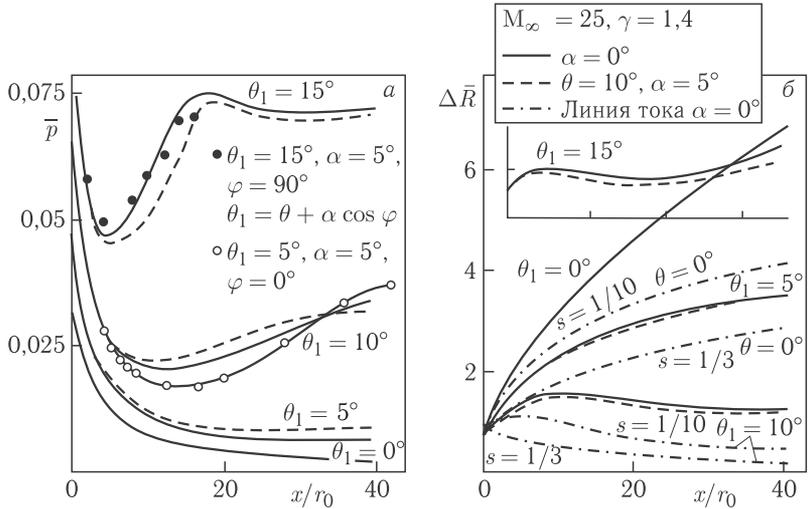


Рис. 2.15. а) — давление, б) — ударные волны и линии тока на конусах с различными углами полураствора и атаки α ($s = \sin^2 \alpha_s$ на данной линии тока в точке пересечения ее со скачком уплотнения)

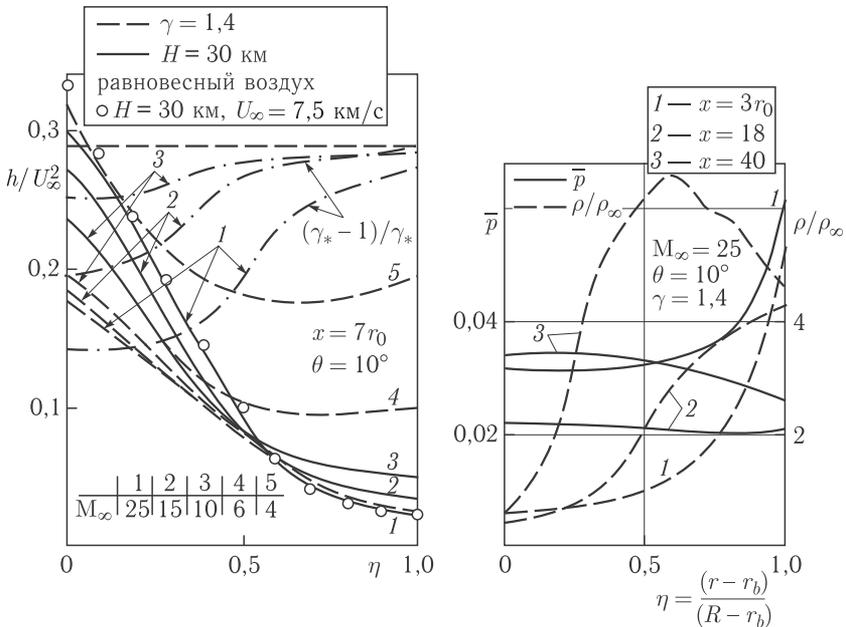


Рис. 2.16. Параметры течения в ударном слое притупленных конусов

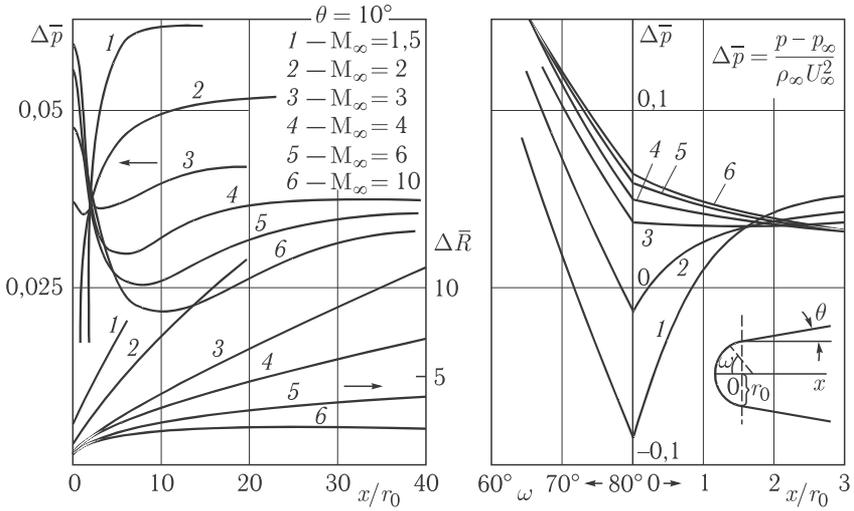


Рис. 2.17. Зависимость давления и форм ударных волн на конусах от числа M_∞

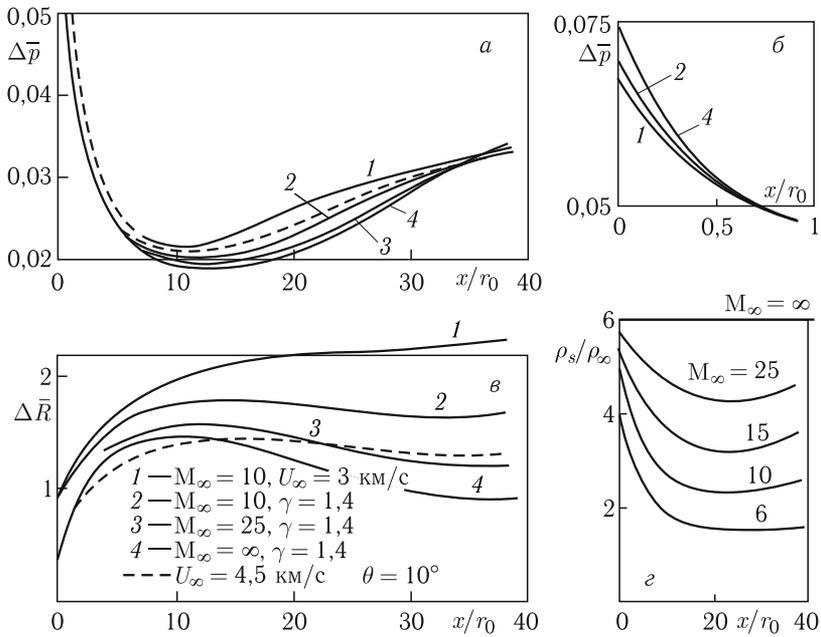


Рис. 2.18. Давление (а, б), ударные волны (в) и плотность за ударной волной (г) на конусах при больших числах Маха (здесь $\Delta \bar{p} = (p - p_\infty) / \rho_\infty U_\infty^2$, $\Delta \bar{R} = (R - r_b) / r_0$)

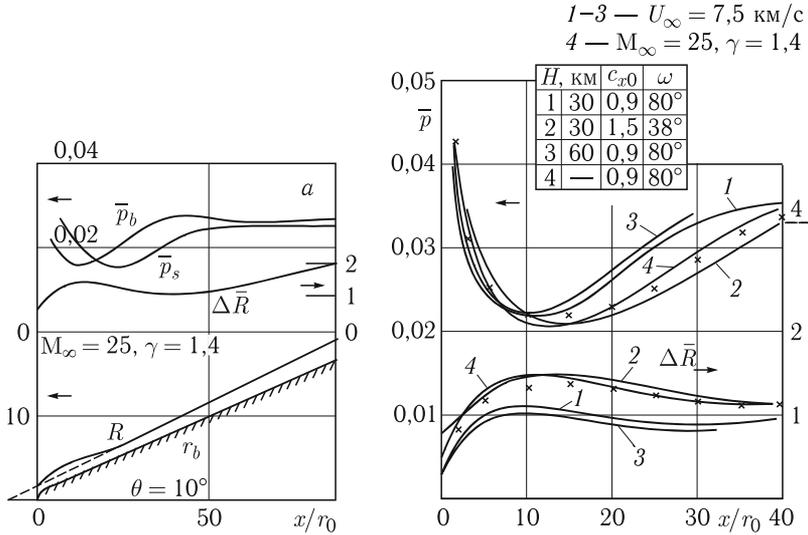


Рис. 2.19. Давление и ударные волны на конусе ($\theta = 10^\circ$) при больших числах M_∞

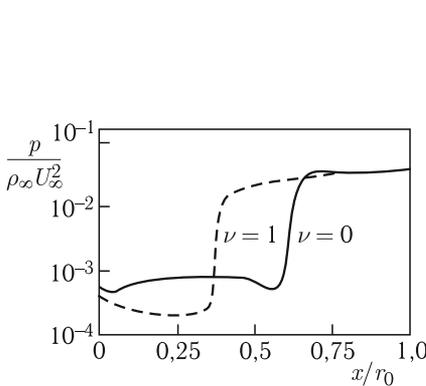


Рис. 2.20. Распределение давления по боковой поверхности тела ($\theta = 0^\circ$, $M_\infty = \infty$, $\gamma = 1,4$)

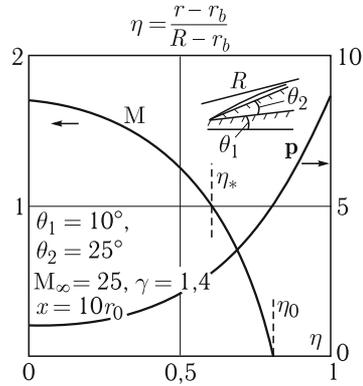


Рис. 2.21. Давление и числа M вдоль 2-го конуса или стреловидной кромки руля

ные рис. 2.19, где сравниваются давление и ударные волны на конусе с углом полураствора $\theta = 10^\circ$ в равновесном воздухе и совершенном газе для сферического ($\omega = 80^\circ$) и сегментального (с углом $\omega = 38^\circ$) носков. Физико-химические превращения воздуха приводят к росту энтальпии h и к снижению скорости газа U :

$$U = U_\infty \left(1 - 2 \frac{h}{U_\infty^2} \right)^{1/2}.$$

Эти особенности течения в высокоэнтропийном слое оказывают существенное, как убедимся позже, влияние и на пограничный слой, развивающийся внутри высокоэнтропийного слоя.

Для предельного случая тонкого притупленного тела — острого конуса и клина с углом полураствора $\theta \ll 1$ при $M_\infty \sin \theta \gg 1$ имеем следующие давления на них: $p - p_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 (1 + k) \sin^2 \theta$ — для клина и $p - p_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 (1 + k/4) \sin^2 \theta$ — для конуса. Углы наклона скачков при этом равны соответственно $\alpha - \theta = k \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha - \theta = 1/2 k \operatorname{tg} \alpha$.

Параметр k здесь можно вычислить по уравнению состояния $\rho = \rho(p, h)$ при $\theta = \alpha$ с последующей итерацией.

§ 2.4. Неравновесное обтекание тел

Все предыдущие примеры относились к равновесным течениям за ударной волной. Опишем вкратце основные качественные эффекты, порождаемые неравновесностью (подробнее — в гл. 7).

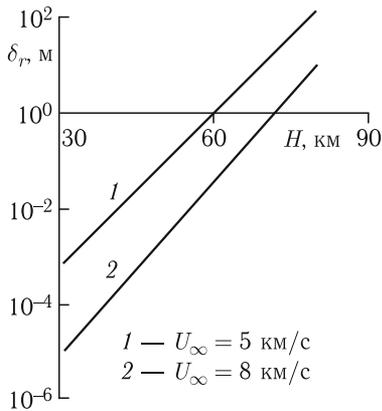


Рис. 2.22. Толщина зоны релаксации за ударной волной в воздухе

Рис. 2.22. Толщина зоны релаксации за ударной волной в воздухе

Равновесным, а при $\delta_r/L \gg 1$ — почти замороженным. Однако это всегда «почти», так как в ударном слое на тупом теле всегда присутствуют зоны релаксации вблизи ударной волны в первом случае и вблизи тела — во втором.

При анализе характера течения в области носового притупления величину δ_r следует сравнивать с отходом ударной волны δ .

На рисунках 2.23 и 2.24 показаны распределения плотности, температуры и концентраций различных компонентов в ударном слое сфер и конусов с различными радиусами R в воздушном потоке с $U_\infty = 8$ км/с, с различными плотностями ρ_∞ , соответствующими указанным в таблице высотам полета H и параметрам бинарного

Расчеты и теоретические оценки свидетельствуют о сравнительно слабом влиянии неравновесности течения в ударном слое на распределение давления по притупленным телам (кроме, возможно, боковой поверхности тонких тел и надстроек на ней типа показанных на рис. 2.21). Однако влияние неравновесности на параметры внутри ударного слоя зависит от отношения δ_r/L — толщины зоны релаксации за ударной волной δ_r к размеру тела L . Характерные толщины δ_r за прямой ударной волной для различных высот H и скоростей U_∞ приведены на рис. 2.22. При $\delta_r/L \ll 1$ течение в целом оказывается почти равновесным, а при $\delta_r/L \gg 1$ — почти замороженным. Однако это всегда «почти», так как в ударном слое на тупом теле всегда присутствуют зоны релаксации вблизи ударной волны в первом случае и вблизи тела — во втором.

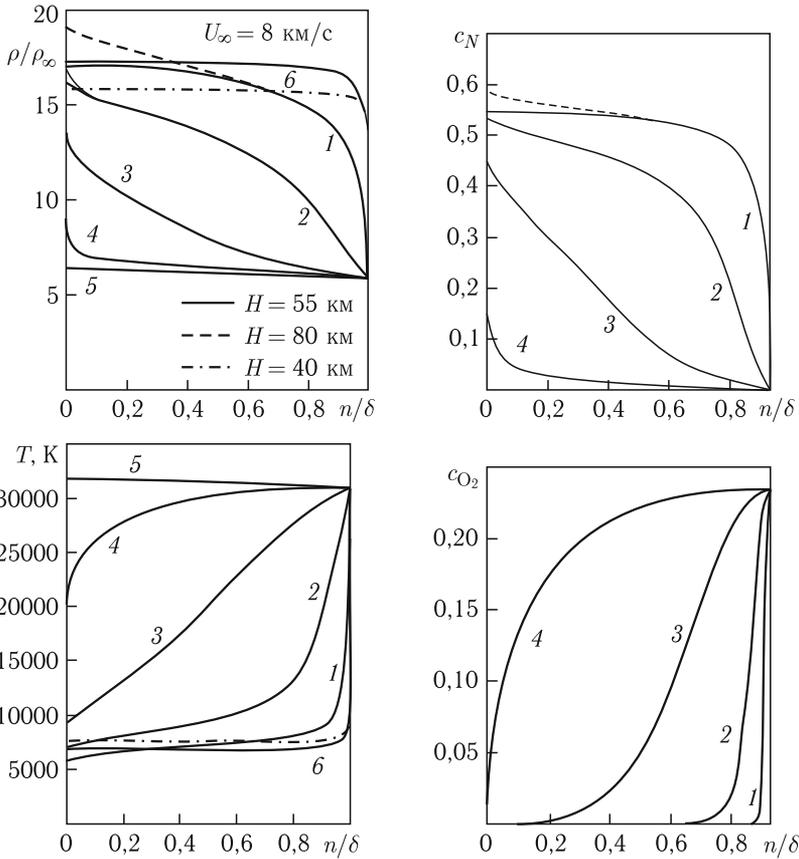


Рис. 2.23. Распределение параметров вдоль оси симметрии в ударном слое сферы

подобия $B = \rho_\infty R$ кг/м². Характерно, что в неравновесном ударном слое (рис. 2.24) в отличие от равновесного профили температур имеют внутренний максимум. Это связано с тем, что в пристеночном слое газ, будучи в околоравновесном состоянии около оси симметрии, при дальнейшем расширении в высокоэнтропийном слое замораживается с избыточной концентрацией атомов в нем. Такой характер течения назовем *равновесно-замороженным*. В этом случае связанная энергия газа h_f оказывается в пристеночном слое большей, а температура — меньшей, чем в полностью равновесном течении.

Форма ударных волн и распределение давления по короткому конусу при тех же режимах показаны на рис. 2.25. Если давление на сфере слабо зависит от параметра B , то при переходе на конус на протяжении примерно четырех радиусов носка кривые давления существенно расслаиваются, как и на сфере в области $\omega \geq 80^\circ$. В то же время

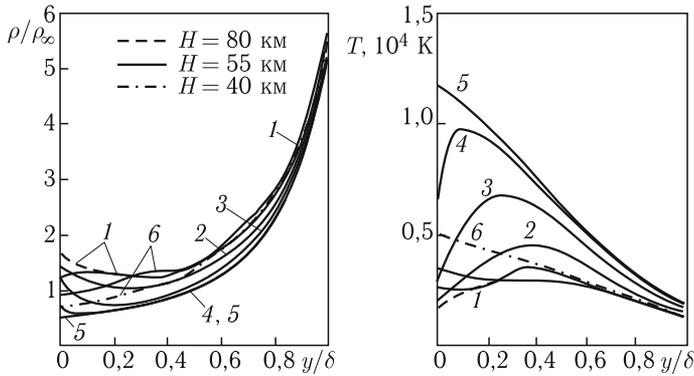


Рис. 2.24. Распределение плотности и температуры поперек ударного слоя около притупленного конуса с $\theta = 10^\circ$ ($x/R = 4$)

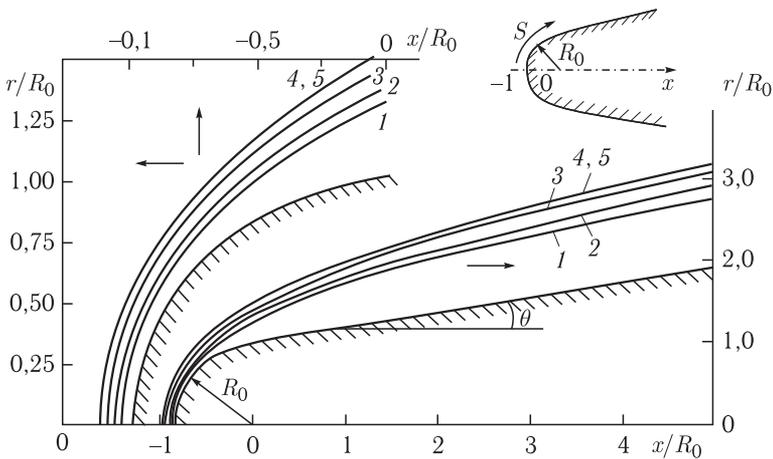
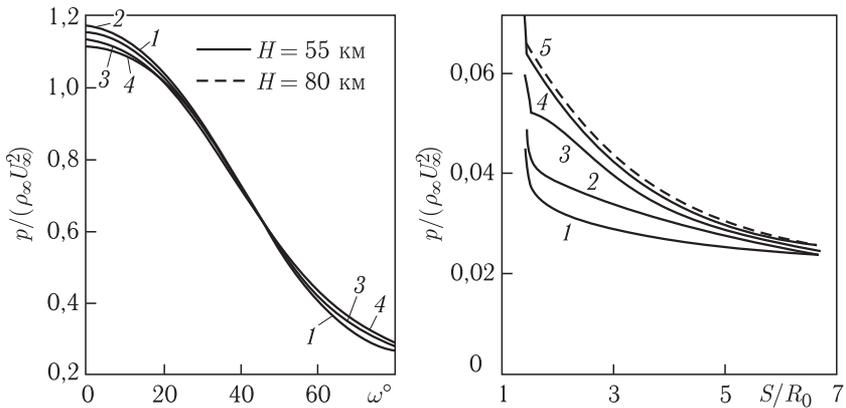


Рис. 2.25. Давление и ударные волны на сфере и притупленном конусе

неравновесное давление на больших длинах конуса (здесь не показано) слабо отличается от равновесного. Так как неравновесная плотность газа за ударными волнами оказывается меньше равновесной, то отходы ударной волны возрастают при переходе от кривой 1 к кривой 5.

Таблица параметров к рис. 2.23–2.25

	$(R_{ij} = R - \text{радиус сферы, } B_j = \rho_i R_{ij} \text{ кг/м}^2)$		
I	$H = 40 \text{ км}$	$\rho_I = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$	
II	$H = 55 \text{ км}$	$\rho_{II} = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}^3$	
III	$H = 80 \text{ км}$	$\rho_{III} = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м}^3$	
1	$B_1 = 2,0 \cdot 10^{-4}$	$R_{III1} = 0,35 \text{ м}$	$R_{III1} = 10 \text{ м}$
2	$B_2 = 2,0 \cdot 10^{-5}$	$R_{III2} = 0,035 \text{ м}$	$R_{III2} = 1 \text{ м}$
3	$B_3 = 2,0 \cdot 10^{-6}$	$R_{III3} = 0,0035 \text{ м}$	$R_{III3} = 0,1 \text{ м}$
4	$B_4 = 2,0 \cdot 10^{-7}$	$R_{III4} = 0,00035 \text{ м}$	$R_{III4} = 0,01 \text{ м}$
5	$B_5 \rightarrow 0$	$\gamma = 1,4$	
6	$B_6 = 2,0 \cdot 10^{-3}$	$R_{I6} = 0,5 \text{ м}$	$R_{I6} = 3,5 \text{ м}$

§ 2.5. Основные режимы обтекания тел вязким газом

В § 1.1 указано несколько режимов обтекания тел вязким газом, и эти режимы зависят, прежде всего, от числа Рейнольдса $Re = \rho UL/\mu$, где ρ , U , μ и L — характерные для данной области течения плотность, скорость, коэффициент вязкости и длина. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

При больших числах Рейнольдса Re обтекание тела в целом оказывается невязким, область же влияния вязкости сосредоточена в пристеночном пограничном слое с относительной толщиной $\delta/L \sim Re^{-1/2} \ll 1$ при ламинарном и $\delta/L \sim Re^{-0,2} \ll 1$ при турбулентном течении в этом слое. Эта модель *классического пограничного слоя*, на внешней границе которого параметры течения совпадают с параметрами на поверхности тела при его невязком обтекании. При этом давление поперек погранслоя можно полагать постоянным $p = p_\delta$ (индексы « δ » и « w » относятся к параметрам на внешней границе пограничного слоя и на стенке). Таким образом, режим классического пограничного слоя реализуется при предельных условиях

$$\delta \ll L, \quad \delta \ll d, \quad (2.5.1)$$

где L — длина тела, а d — его характерный диаметр. Точнее, толщина ламинарного пограничного слоя (впредь, до гл. 4, будем рассматривать только его) определяется скоростью U_δ и некоторыми характерными величинами ρ_* и μ_* , зависящими от местного давления p_δ и от так на-

зывается *определяющей энтальпией* h_* , имеющей порядок энтальпии торможения H_δ (см. гл. 3):

$$\frac{\delta}{L} \sim \text{Re}_*^{-1/2}, \quad \text{Re}_* = \frac{\rho_* U_\delta L}{\mu_*}, \quad \rho_* = \rho(p_\delta, h_*), \quad \mu = \mu(p_\delta, h_*), \quad (2.5.2)$$

$$h_* \sim H_\delta = h_\delta \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right).$$

Последняя формула — для совершенного газа. Отсюда, используя соотношение (1.3.10), получим при $M_\delta \gg 1$:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{M_\delta^{2-n}}{\sqrt{\text{Re}_\delta}}, \quad \text{Re}_\delta = \frac{\rho_\delta U_\delta L}{\mu_\delta}. \quad (2.5.3)$$

Следовательно, толщина пограничного слоя зависит не только от «внешнего» числа Рейнольдса Re_δ , но и от внешнего числа Маха M_δ .

Обычно влияние конечной толщины пограничного слоя при больших Re_δ мало и им пренебрегают.

Однако в ряде задач приходится выходить за рамки классической модели пограничного слоя, особенно в задачах гиперзвукового обтекания тонких тел, заостренных или притупленных, для условий их полета на достаточно больших высотах, т. е. при умеренных числах Рейнольдса Re и достаточно больших числах Маха M_∞ . При этом возникает ряд специфических эффектов так называемого *вязко-невязкого взаимодействия* пограничного слоя с внешним по отношению к нему потоком. Эти эффекты часто проявляются совокупно, но для более четкого пояснения их роли рассмотрим их по отдельности.

1. Эффект вытеснения. Как известно, пограничный слой оказывает *вытесняющий эффект* на внешний поток, определяемый *толщиной вытеснения*:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \right) dy, \quad (2.5.4)$$

где y — координата по нормали к стенке, $u \approx U$ — проекция полной скорости U вдоль поверхности тела. Как и δ , толщина δ^* также зависит от числа M_δ , что будет подтверждено конкретными формулами в § 3.2. На величину δ^* следует подправить поверхность тела, и обтеканием такой суммарной (или эффективной) поверхности и будут определяться параметры на исходном теле. В задачах аэродинамики с числами Маха $M_\infty \sim 1$ и при умеренных высотах полета аппаратов эффекты вытеснения обычно невелики и за редким исключением не принимаются во внимание. Однако для гиперзвуковых летательных аппаратов с увеличением высоты полета толщина пограничного слоя $\delta(x)$ может стать сравнимой с толщиной ударного слоя и самого тела, если относительная толщина последнего невелика (как это показано на рис. 2.26, где $r_s(x)$ — форма головной ударной волны). А это обстоятельство может привести к росту «эффективной» толщины тела с сопутствующей

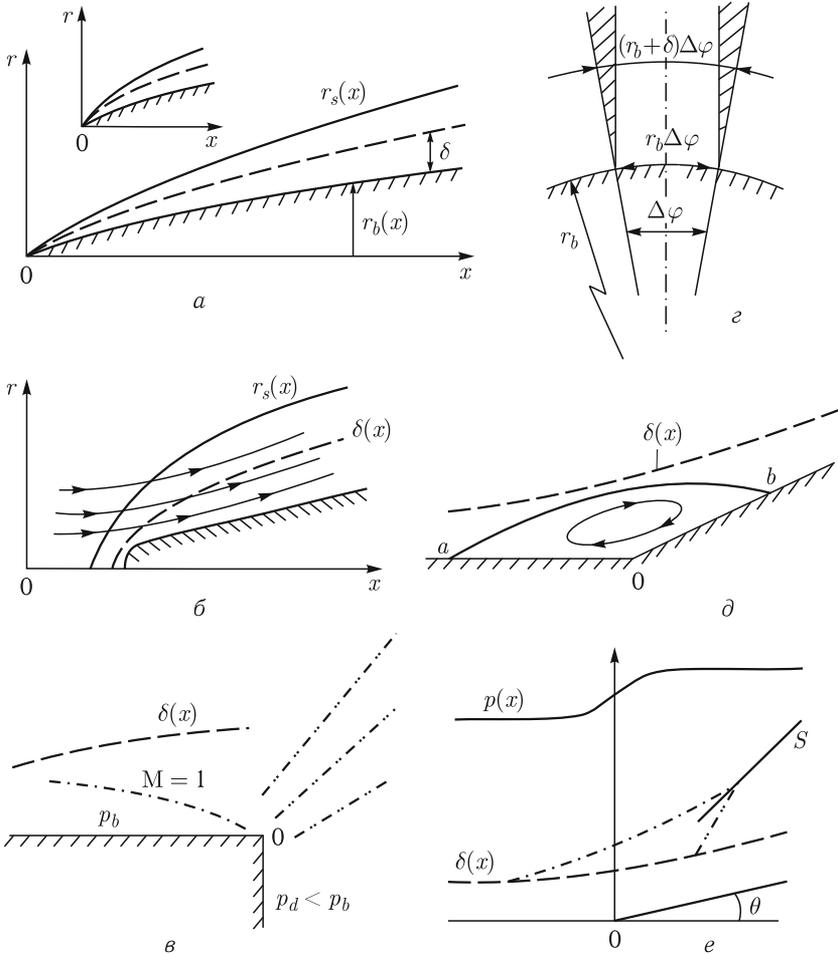


Рис. 2.26. Иллюстрации к эффектам вязко-невязкого взаимодействия

щим ростом давления, трения, тепловых потоков и т. д. Упрощающим обстоятельством здесь является локальный характер взаимодействия, так как при сверхзвуковых скоростях возмущения сносятся вниз по потоку. Оценим эти эффекты на примере продольно обтекаемой пластины в сверхзвуковом потоке. Отклонение сверхзвукового потока ($M_\infty > 1$) на малый угол $\Delta\theta$ вызывает, как известно из линейной теории, относительно небольшое локальное повышение давления:

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{\gamma M_\infty^2 \Delta\theta p_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \ll p_\infty.$$

Так как в нашем случае $\Delta\theta \sim d\delta^*/dx \sim \delta^*/L$, то отсюда следует при $M_\infty \gg 1$

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} \sim M_\infty \frac{\delta^*}{L} \sim \frac{M_\infty^{3-n}}{\sqrt{\text{Re}_{\infty L}}} = \chi \ll 1.$$

Это так называемый режим «слабого» взаимодействия, играющий основную роль, в частности, в асимптотической теории отрыва пограничного слоя. Возможен также режим «сильного» взаимодействия, при котором давление на теле возрастает значительно и, собственно, им и определяется. При этом и число Рейнольдса в формуле для толщины пограничного слоя (и вытеснения) должно учитывать отличие давления на пластине от давления в невозмущенном потоке, т. е. $\text{Re}_{\delta L} \sim \text{Re}_{\infty L} p/p_\infty$. Тогда

$$\frac{\delta^*}{L} \sim \frac{M_\infty^{2-n}}{\sqrt{\text{Re}_{\infty L} \bar{p}}},$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_\infty} \sim M_\infty^2 \left(\frac{\delta^*}{L}\right)^2 \sim \frac{M_\infty^{6-2n}}{\text{Re}_{\infty L} \bar{p}} \rightarrow \bar{p} \sim \frac{M_\infty^{3-n}}{\sqrt{\text{Re}_{\infty L}}} = \chi \gg 1.$$

Таким образом, и режим «сильного» взаимодействия определяется тем же параметром χ , однако сам пограничный слой при этом взаимодействии существенно другой. Из предыдущей формулы видно, что для толщины вытеснения в итоге имеем

$$\frac{\delta^*}{L} \sim \frac{M_\infty^{(1-n)/2}}{\text{Re}_{\infty L}^{1/4}}.$$

Следовательно, в отличие от случая слабого взаимодействия, где $\delta^* \sim x^{1/2}$, $\Delta p/p_\infty \sim x^{-1/2}$, здесь имеем $\delta^* \sim x^{3/4}$, $p/p_\infty \sim x^{-1/2}$.

В то же время при гиперзвуковых скоростях толщина всего возмущенного слоя δ_s оказывается достаточно малой ($\delta_s/L \ll 1$). Поэтому всю область возмущенного течения между телом ($r = r_b$) и ударной волной ($r = r_s$) оказывается возможным описать единой системой *параболизированных уравнений Навье–Стокса*, получаемой из полных уравнений Навье–Стокса путем отбрасывания в их вязком операторе всех членов с производными по продольной, связанной с телом координате x и с сохранением производных по поперечной координате y . В уравнении же импульсов в проекции на ось y опускаются все вязкие члены (см. гл. 8).

Подобную систему, равно пригодную для описания течений и в ударном, и в пограничных слоях, назовем *композитной*, а метод, основанный на использовании параболитованных уравнений Навье–Стокса, — методом ПУНС. При условии $\delta \ll d$, где d — характерный диаметр тела, из этой системы получим систему уравнений Прандтля для классического пограничного слоя (см. гл. 3).

2. Эффект поперечной кривизны. При $\delta \sim d$ толщиной пограничного слоя пренебречь уже нельзя, и система ПУНС должна исполь-

зоваться в исходном виде. Характер влияния этого эффекта очевиден из анализа рис. 2.26: за счет «кумуляции» потоков тепла или импульса к определяемым при $r = r_b$ тепловому потоку или трению добавляются потоки с периферийных частей элемента $\Delta\varphi$ меридионального угла, заштрихованных на рис. 2.26, *г*.

Эффект поперечной кривизны может реализоваться не только при гиперзвуковых, но и при любых режимах, например, при продольном обтекании иглы нулевой толщины, но с условиями прилипания и заданной температурой на ней.

3. Концевые и локальные эффекты. Гладкая поверхность любого тела с непрерывным нарастанием пограничного слоя на ней имеет конечную длину и оканчивается, например, донным срезом с угловой точкой O на рис. 2.26, *в* с давлением p_d в донной области, меньшим давления p_b перед угловой точкой. При дозвуковом внешнем по отношению к пограничному слою потоке в окрестности угловой точки будут проявляться эффекты распространения возмущений вверх по потоку. Но и в сверхзвуковом внешнем потоке течение в пристеночной части пограничного слоя будет дозвуковым с неизбежным распространением влияния донного давления вперед, по крайней мере, на расстояние порядка толщины дозвукового подслоя с приближением звуковой линии $M_\infty = 1$ к угловой точке. Поэтому такая локальная задача должна решаться в общем случае в рамках полных уравнений Навье–Стокса.

Здесь уместно одно общее замечание. В локальных зонах длиной $l \ll L$, где давление изменяется на свою величину ($\Delta p \sim \rho U^2$) и возникают большие продольные градиенты давления (излом контура с местными течениями расширения или сжатия, область взаимодействия пограничного слоя с падающим извне скачком уплотнения и т. п.), течение в пограничном слое в целом становится вязким, так как

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{\rho U^2}{l} \gg \frac{\partial \tau}{\partial y} \sim \frac{\mu U}{\delta^2} \sim \frac{\rho U^2}{L}.$$

Влияние вязкости сохраняется лишь в тонком подслое δ_1 около стенки, где при характерной скорости $u_1 \sim U \delta_1 / \delta$ силы инерции и силы трения по-прежнему являются однопорядковыми, например, при $l \sim \delta$

$$\frac{\rho u_1^2}{\delta} \sim \frac{\mu u_1}{\delta_1^2} \rightarrow \frac{\delta_1}{\delta} \sim \frac{1}{\text{Re}_L^{1/6}} \ll 1.$$

Вниз по потоку пограничный слой развивается в неоднородном внешнем потоке, формируемом таким предшествующим пограничным слоем.

При значительном росте давления может произойти отрыв пограничного слоя (гл. 6). Такая ситуация реализуется в случае, когда контур поверхности тела имеет вогнутый угол θ с угловой точкой O на рис. 2.26, *е*. В вязком сверхзвуковом потоке этот местный клин индуцирует скачок уплотнения S . По дозвуковому подслою в пограничном слое эта волна сжатия распространяется вверх по потоку, вызывая при

угле θ , большем некоторого предельного θ_{cr} , отрыв пограничного слоя с образованием вязкой зоны возвратного течения, ограниченной *разделяющей линией тока* ab (рис. 2.26, d). Величины θ_{cr} равны $\theta_{cr} \approx 5^\circ$ для ламинарного и $\theta_{cr} \approx 10^\circ$ для турбулентного пограничных слоев и зависят от условий обтекания — в основном, от числа Рейнольдса. Для описания таких течений модель пограничного слоя непригодна даже с учетом эффекта вытеснения. Но при $\theta < \theta_{cr}$ распространяющаяся по дозвуковому подслою волна сжатия приводит лишь к подтормаживанию газа и утолщению пограничного слоя. Такая задача относится уже к задачам вязко-невязкого взаимодействия.

4. Эффект неоднородности внешнего потока. На тонком и достаточно длинном притупленном теле пограничный слой развивается внутри энтропийного, поглощая линии тока с различной энтропией s (рис. 2.26, b), что выводит модель пограничного слоя за рамки классической. Подобную ситуацию можно рассматривать шире как вообще задачу развития пограничного слоя в неоднородном внешнем потоке, например, за точкой разрыва граничных условий на поверхности тела. Этому эффекту ниже будет уделено особое внимание в гл. 3 в силу его значительного влияния на величины тепловых потоков.

5. Эффект утолщенной (или размытой) ударной волны. Ранее ударная волна полагалась предельно тонкой по сравнению с характерным масштабом течения и (если отвлечься от зон релаксации) всюду в теории заменялась математической поверхностью, по обе стороны которой параметры течения удовлетворяют законам сохранения. Такая модель основана на оценках, по которым толщина Δ^* ударной волны имеет порядок длины свободного пробега молекул l , а число Рейнольдса $Re_{\Delta^*} \sim \frac{\rho U \Delta^*}{\mu}$ имеет, вообще говоря, порядок единицы, и формально отношение $\Delta^*/\delta \ll 1$, где δ — толщина пограничного слоя на теле.

Однако реально толщины Δ^* и δ могут оказаться равновеликими при все еще достаточно больших числах Рейнольдса. Это следует, например, из рис. 2.27, где для совершенного газа с $\gamma = 1,4$ показаны рассчитанные в рамках уравнений Навье–Стокса профили давления и температуры в ударном слое сферы радиуса R при различных числах Рейнольдса $Re_\infty = \rho_\infty U_\infty R / \mu_\infty$. С уменьшением Re_∞ от $Re_\infty = 10^4$ до $Re_\infty = 10^2$ характер течения изменяется от почти полностью невязкого с узкими вязкими подслоями по краям ударного слоя до полностью вязкого. При $Re_\infty = 10^2$ утолщенный фронт ударной волны и пограничный слой сомкнулись, невязкий ударный слой как четкий фрагмент течения исчез вообще, и весь возмущенный слой перед телом становится *сплошным вязким слоем*.

Проявление этого эффекта зависит и от других условий обтекания, в частности, от физико-химических процессов в газе, влияющих на толщины ударной волны и пограничного слоя.

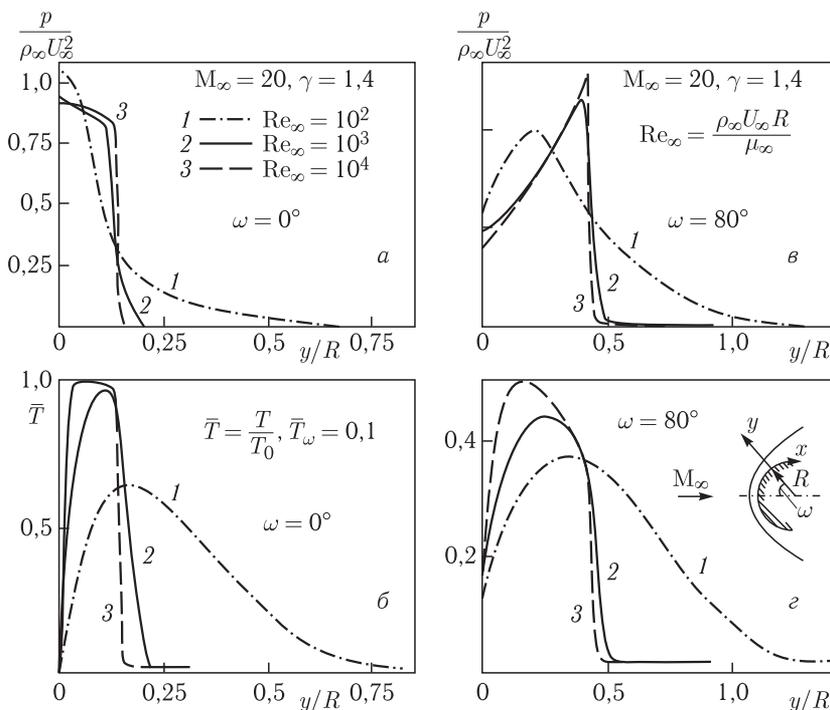


Рис. 2.27. Распределение давления и температуры в ударном слое сферы

Для описания таких существенно вязких течений (по крайней мере, для умеренно-плотных газов, для которых еще не требуется переходить к уравнению Больцмана или эквивалентным ему *методам статистического моделирования*) необходимо использовать полные уравнения Навье–Стокса. Для них на бесконечности перед телом и в «боковые» стороны от него задаются условия асимптотического стремления параметров течения к невозмущенным, а на достаточном удалении вниз по течению от исследуемой области ставятся *мягкие* условия. При постановке же граничных условий на стенке при числах $Re_\infty \leq 10^2$ следует уже учитывать эффекты скольжения и скачка температуры. Соответствующая постановка задачи и методы расчета таких течений описаны в гл. 7.

Для иллюстрации характера перехода к сплошному вязкому слою на рис. 2.28 показаны *изохоры* (линии постоянной относительной плотности ρ/ρ_0) около сферы (совершенный газ).

Если при $Re_\infty = 10^3$ между обтекаемым телом и утолщенной волной еще существует область почти невязкого течения с большой плотностью, то при $Re_\infty = 10^2$ такой слой уже отсутствует. (Подробное описание подобных течений дано в книге [121].)

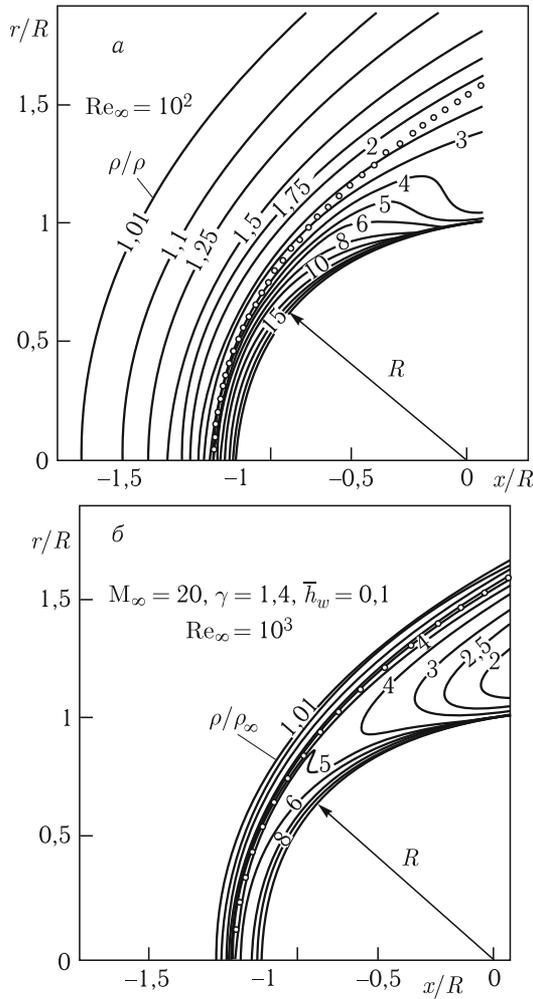


Рис. 2.28. Поле изохор ($\rho/\rho_\infty = \text{const}$) при обтекании сферы. Значки — форма ударного фронта по методу ПУНС

Очевидно, границы между этими режимами течений, вообще говоря, условны и меняются в зависимости от других условий обтекания и от формы и размеров тел.

Здесь уместно заметить, что область применимости схемы тонкого пограничного слоя в окрестности линии растекания цилиндра при гиперзвуковых числах Маха M_∞ значительно шире, чем для окрестности критической точки сферы, где она справедлива при $Re_{\infty r_0} = \rho_\infty U_\infty r_0 / \mu_\infty > 10^4$ (а при учете влияния завихренности и при

$Re_{\infty r_0} > 10^3$). Это обусловлено относительно меньшей толщиной пограничного слоя δ по сравнению с толщиной ударного слоя Δ на цилиндре. В самом деле, используя для оценок δ соотношения (3.2.33), (3.2.34) § 3.2 и соотношения $\Delta = 0,78 k \cdot r_0$ для сферы и $\Delta \approx 2,2 k \cdot r_0$ для цилиндра (при малых $k = \rho_{\infty} \rho_s \leq 0,2$), получим соответственно для сферы (1) и цилиндра (2) (с учетом, что при этом на внешней границе погранслоя вязкость воздуха $\mu_0 \approx 2,25 M_{\infty}^{1,4} k \mu_{\infty}$ (при $T_{\infty} > 200$ К))

$$\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)_1 = \frac{0,8 A^{(1)} M_{\infty}^{0,7}}{k^{1/4} Re_{\infty r_0}^{1/2}}; \quad \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)_2 \approx \frac{0,4 A^{(2)} M_{\infty}^{0,7}}{k^{1/4} Re_{\infty r_0}^{1/2}}; \quad (2.5.5)$$

$$A^{(1,2)} = 5 \lambda_0^{1/2} - 1,72 (1 - t_w)(1 + 0,27 \lg \lambda_0),$$

где параметр λ_0 определяется согласно (3.2.29), и он разный для сферы ($\beta_0 = 1/2$) и цилиндра ($\beta_0 = 1$). Для равновесного воздуха, используя для оценок k соотношение $k \approx 0,6 M_{\infty}^{-0,7}$, имеем

$$\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)_1 = \frac{0,92 A^{(1)} M_{\infty}^{0,875}}{Re_{\infty r_0}^{1/2}}; \quad \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)_2 \approx \frac{0,46 A^{(2)} M_{\infty}^{0,875}}{Re_{\infty r_0}^{1/2}}. \quad (2.5.6)$$

Если пограничный слой считать еще достаточно тонким при $\delta/\Delta \leq \varepsilon \approx 0,28$, то это дает для сферы $Re_{\infty r_0} \geq Re_{\infty r_0 \min} \approx 10^4$ при $M_{\infty} \geq 20$, $\gamma = 1,4$, $t_w = \bar{h}_w \ll 1$. Для цилиндра отсюда получим оценки $Re_{\infty r_0 \min}$ — нижней границы справедливости этой схемы (при $\varepsilon \approx 0,28$), показанные при $M_{\infty} = 23$ на рис. 2.29 (сплошные кривые — для равновесного воздуха, пунктир — для совершенного газа с $\gamma = 1,4$). Влияние диссоциации приводит к возрастанию относительной толщины

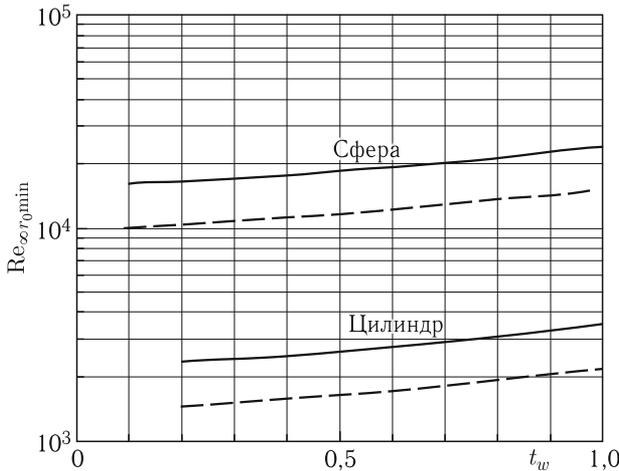


Рис. 2.29

пограничного слоя δ/Δ и росту значений $Re_{\infty r_{0\min}}$, которые в целом в 6...7 раз меньше, чем для сферы.

§ 2.6. Конус под углом атаки

Распределение давления на острых конусах следует ньютоновскому закону (рис. 2.30, штрихпунктир 3), выражаемому формулой

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\infty}}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2} = \sin^2 \theta_l, \quad \sin \theta_l = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \cos \varphi. \quad (2.6.1)$$

Здесь θ — угол полураствора конуса, α — угол атаки, θ_l — местный угол атаки, образующей в меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$, причём $\varphi = 0$ соответствует наветренной образующей конуса.

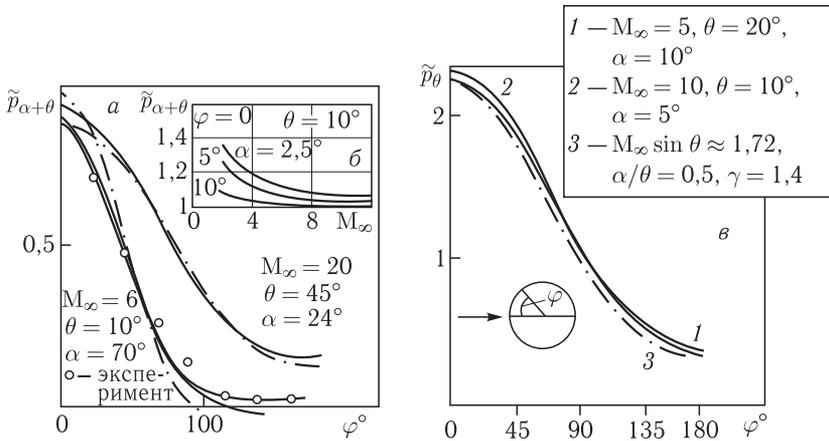


Рис. 2.30. Сравнение давления на острых конусах с ньютоновским (штрихпунктир 3)

Однако на подветренной стороне конуса ($\varphi = \pi$) за счет стекающего газа может образоваться локальный максимум давления, течение в окрестности которого может быть «безударным» и безотрывным лишь при малых углах атаки $\alpha \ll \theta$. В случаях же $\alpha \sim \theta$ сходящиеся окружные потоки индуцируют скачки уплотнения, и неизбежно появление отрыва в виде двух продольных вихрей, регулируемых вязкостью.

Для притупленных конусов с не слишком малыми $\theta \geq 5^\circ$, обтекаемых под углом атаки $\alpha \leq \theta$, работает *правило местных конусов* [111, 117], согласно которому основные параметры в меридиональных сечениях для конуса под углом атаки α близки к параметрам для конуса без угла атаки, но с местным углом полураствора $\theta_l = \theta + \alpha \cos \varphi$. Подтверждение этому правилу дано на рис. 2.30 для давления на теле и на рис. 2.31 для распределения параметров поперек слоя.

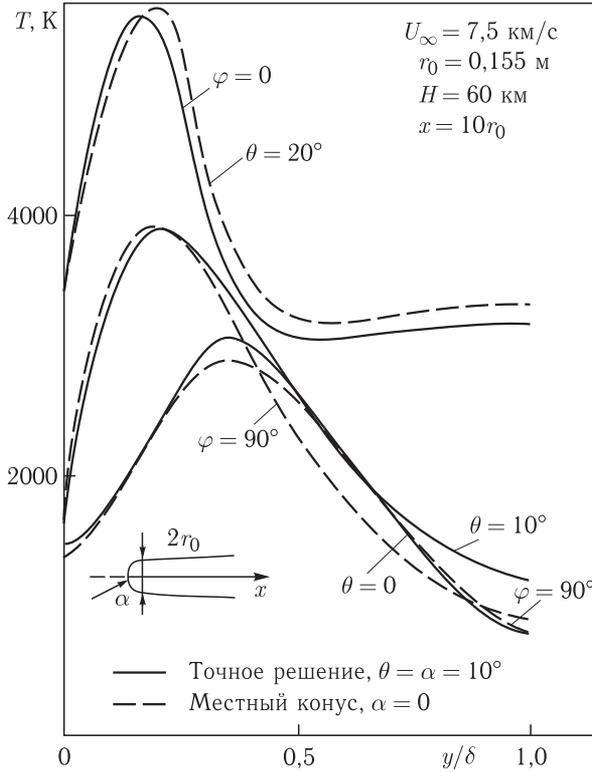


Рис. 2.31. Профили температуры между телом и ударной волной для конуса со сферическим носком в неравновесном течении

Правило местных притупленных конусов может быть использовано, по крайней мере, для качественного анализа влияния углов атаки на распределение давления, формы ударных волн и других параметров течения около тонких притупленных конусов.

§ 2.7. Обтекание треугольных крыльев

Треугольные крылья являются фрагментом компоновок многих аппаратов планирующего спуска и, одновременно, по аналогии с конусами под углами атаки являются каноническим примером пространственных течений газа. Полагая верхнее расположение фюзеляжа аппарата (т.е. в его подветренной части), остановимся, главным образом, на течении около нижней, наветренной стороны крыла.

Рассмотрим плоское треугольное крыло с углом раствора 2β . В гиперзвуковом потоке давление на острой пластине под углом атаки α будет почти постоянным (и близким к ньютоновскому), однако, как

увидим далее в гл. 9, на величины тепловых потоков существенное влияние оказывает поведение линий тока на поверхности пластины, а именно: их сходямость (стекание) или расходимость (растекание).

Режимы обтекания крыльев в главном определяются *нормальными* к кромке числом Маха $M_\infty^{(n)}$ и *нормальным* углом атаки крыла θ . Очевидно,

$$M_\infty^{(n)} = U_\infty^{(n)} / a_\infty, \quad \text{tg } \theta = \text{tg } \alpha / \sin \beta, \quad (2.7.1)$$

где $U_\infty^{(n)} = U_\infty \cos \alpha \sin \beta / \cos \theta$ — проекция внешней скорости газа U_∞ на нормальную к кромке плоскость.

Исходя из приложений именно к гиперзвуковым скоростям, примем условие $M_\infty^{(n)} > 1$, т. е. будем считать кромку пластины *сверхзвуковой*. При $M_\infty^{(n)} > 1$ в нормальной к кромке плоскости обтекание окрестности кромки будет тем же, что и в плоском течении около пластины под углом атаки θ с присоединенным или отошедшим скачком уплотнения, что определяется соотношением θ и предельного угла θ_0 для присоединенного скачка на клине.

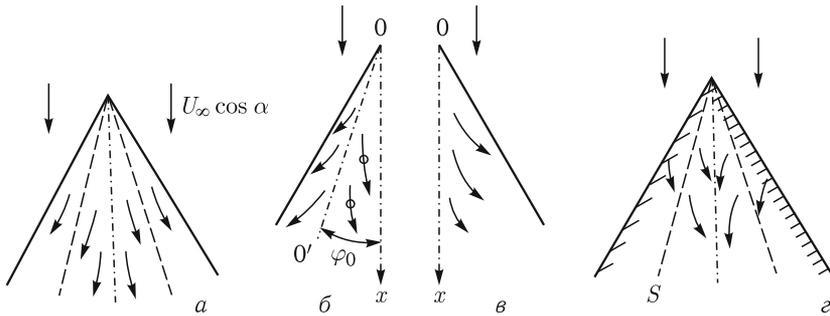


Рис. 2.32. Линии тока на поверхности треугольной пластины

При угле $\theta < \theta_0$ течение за присоединенным скачком на наветренной стороне аналогично течению на клине, причем вследствие потери нормальной скорости в скачке на пластине образуется поле линий тока, расходящихся от оси симметрии (рис. 2.32, а). Этот режим течения реализуется при углах атаки $\alpha < \alpha_{кр}$ где $\text{tg } \alpha_{кр} = \sin \beta \cdot (1 - k) / (2\sqrt{k})$ (см. рис. 9.35 и § 5.3). Но при $\theta > \theta_0$ и $\alpha > \alpha_{кр}$ возникает отошедший от кромки скачок с дозвуковым потоком за ним, непосредственно обтекающим кромку. При небольшом угле α или угле θ , еще близком к θ_0 , точка торможения на пластине O' будет лишь немного отстоять от кромки, а в самой угловой точке при подходе снизу будет достигаться скорость звука $U^{(n)} = a$. На треугольном крыле при этом точки O' образуют луч $0-O'$, или $\varphi = \varphi_0$ на рис. 2.32, б. На этой линии обратится в нуль нормальная к ней компонента скорости v_φ , и эта линия будет линией локального максимума давлений и линией растекания, а ось симметрии — линией стекания.

В другом предельном случае $\alpha \approx \pi/2$ обтекание треугольной пластины будет более походить на обтекание тупого тела с максимумом давления на плоскости его симметрии с линией растекания, расположенной в плоскости симметрии пластины (рис. 2.32, в).

На подветренной же стороне пластины линии тока разворачиваются к оси симметрии с образованием внутреннего скачка (S на рис. 2.32, г).

Отметим еще одно свойство тонких заостренных крыльев конечного размаха при $M_\infty \gg 1$ и малых углах атаки $\alpha \ll \beta$ с присоединенными к кромкам скачками уплотнения: проекция w скорости U газа на ось z мала ($w = U_\infty \sin \alpha \cos \beta \operatorname{tg} \varepsilon_0 \sim \alpha^2 U_\infty$, так как угол ε_0 между скачком и плоскостью крыла в нормальном к кромке сечении определяется соотношением $\operatorname{tg} \varepsilon_0 = k \operatorname{tg}(\theta + \varepsilon_0)$ и $\operatorname{tg} \varepsilon_0 \sim k\theta \sim \alpha$), и ею можно пренебречь, так что все течение будет как бы происходить независимо в каждой отдельной плоскости $z = \text{const}$ — так называемое *правило полос* [118, 121]. В соответствии с этим при $\alpha \ll \beta$ будут слабы и описанные выше эффекты стекания–растекания.

Течение около крыла с притупленными кромками, но с острым носком, содержит некоторые дополнительные особенностями. Это, во-первых, скачки, всегда отошедшие от кромок. А во-вторых, резко усиленный эффект растекания потока относительно оси симметрии в пристеночной области.

Качественное же изменение картины течения около пластины вызывает притупление ее носка, особенно при большой стреловидности пластины λ (или малом полуугле при вершине $\beta = \pi/2 - \lambda$) и небольших углах атаки α . Общая схема обтекания такой пластины показана на рис. 2.33. Форма головной ударной волны на передней части тела (условно при $x > x_A$) определяется сферическим притуплением и осесимметрична (область 1). Ниже по потоку на форму скачка влияет кромка крыла (область 2).

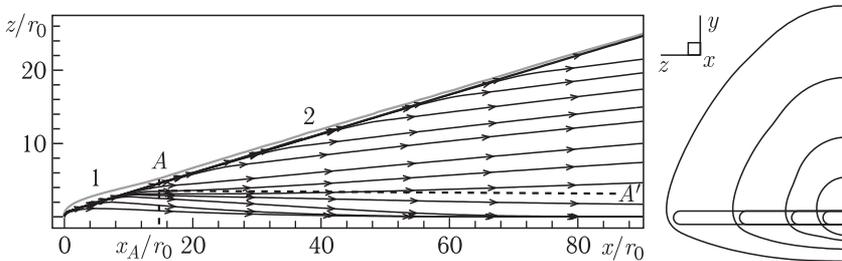


Рис. 2.33. Линии тока на поверхности треугольной пластины и ударные волны

Распределение давления на притупленной кромке пластины с притупленным носком при вершине радиуса r_0 и радиусом кромки $r_k = r_0$ показано на рис. 2.34, где α^* — местный угол атаки кромки в точке

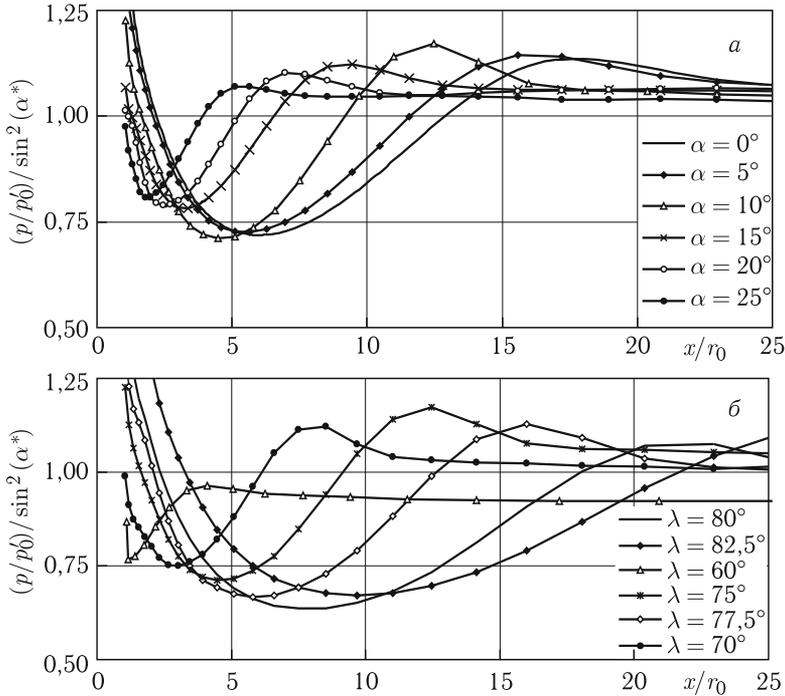


Рис. 2.34. Распределение давления по кромке пластины при различных ее углах атаки (а) и стреловидности (б)

максимума давления на ней, определяемый формулой

$$\sin \alpha^* = \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta \sin \beta \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha / \sin \beta.$$

Оно имеет волнообразный характер (подобно давлению на притупленном конусе) с «горбом» давления в конце волны (при $\alpha \leq 25^\circ$ для $\lambda = 75^\circ$ (рис. 2.34, а) и при $\lambda > 60^\circ$ и $\alpha = 10^\circ$ (рис. 2.34, б)), обусловленным указанным выше взаимодействием кромки с головной ударной волной [43].

Таким образом, в области взаимодействия головного ударного слоя с передней кромкой крыла на ней возникает область, или «пятно» повышенного давления, последующее расширение которого порождает на поверхности пластины расходящийся пучок линий тока.

Дальнейшая судьба этого пучка зависит от распределения давления на поверхности пластины, показанного на рис. 2.35 (в зависимости от относительной координаты z/z_0 , где $z_0 = x \operatorname{tg} \beta$ — полуразмах крыла в этом сечении) для $M_\infty = 14$, $\alpha = 10^\circ$; $\beta = 15^\circ$ [43].

В прилегающей к кромке области это давление велико, имеет порядок давления на кромке, но затем быстро падает при стремлении к плоскости симметрии, оставаясь почти постоянным в ее достаточно

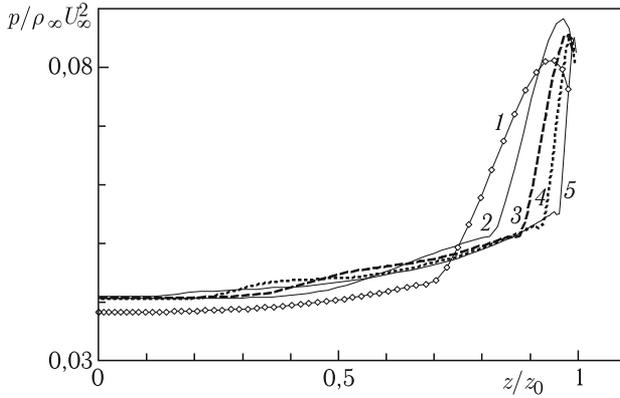


Рис. 2.35. Распределение давления на пластине в различных сечениях: 1 — $x = 10 r_0$, 2 — $x = 20 r_0$, 3 — $x = 30 r_0$, 4 — $x = 50 r_0$, 5 — $x = 100 r_0$

большой окрестности. Это порождает расходящийся пучок прямолинейных линий тока на пластине, имеющий начало в упомянутом выше «пятне» давления на кромке, причем, в отличие от растекания газа, индуцированного максимумом давления, в данном случае это растекание является безградиентным, *инерционным*. Как видно из приведенной на рис. 2.33 картины невязких линий тока на теле, в плоскости симметрии в этом случае реализуется линия стекания. Как обнаружено в экспериментах [59], такая картина течения приводит к полосам повышенных тепловых потоков, расположенным в окрестности линий AA' (см. гл. 9).

Глава 3

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В §2.5 указано, что при условиях $\delta/L \sim \text{Re}^{-1/2} \ll 1$, $\delta/d \ll 1$, где δ — толщина пограничного слоя, L — продольный (вдоль невязких линий тока), d — поперечный масштабы течения, уравнения Навье–Стокса упрощаются до уравнений пограничного слоя, основные задачи которого и изложим ниже, ограничившись в данной главе лишь равновесными течениями.

§ 3.1. Основные уравнения и граничные условия

Систему уравнений трехмерного пограничного слоя выпишем в связанной с обтекаемой поверхностью системе криволинейных ортогональных координат (x_1, x_2, x_3) с проекциями скоростей u_1 , $u_2 \equiv v$, u_3 на них, с ортогональной к ней координатой x_2 , которую заменим нормалью y к поверхности тела — стенке, где положим $x_2 = 0$. Для относительно тонкого пограничного слоя такая система координат будет близка к триортогональной (с той же точностью, что и сами уравнения пограничного слоя). Для тела вращения в меридиональной плоскости эта система координат показана на рис. 3.1.

В этих переменных в обычном погранслоном приближении уравнения Навье–Стокса имеют вид (уравнение энергии записано для энthalпии газа h) [2, 269]:

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{u_3}{H_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{u_1 u_3}{R_{1\Gamma}} - \frac{u_3^2}{R_{3\Gamma}} = \\ = -\frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + v \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{u_3}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{u_1 u_3}{R_{3\Gamma}} - \frac{u_1^2}{R_{1\Gamma}} = -\frac{1}{\rho H_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (H_3 \rho u_1) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 H_3 \rho v) + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 \rho u_3) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

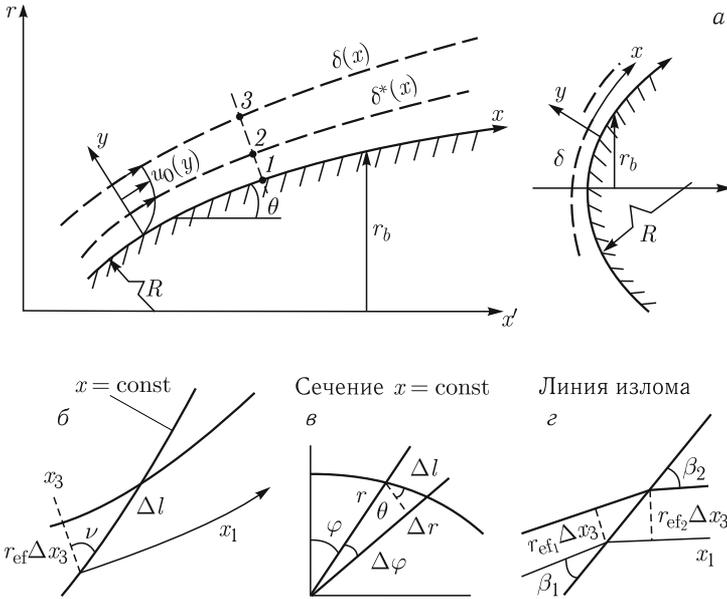


Рис. 3.1. К пограничному слою на теле вращения

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} + v \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{u_3}{H_3} \frac{\partial h}{\partial x_3} = \\ = \frac{u_1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{u_3}{\rho H_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь $H_i(x_1, x_3)$ — параметры Ламе ($H_2 = H_y = 1$), а $R_{i\Gamma} = K_{i\Gamma}^{-1}$ — радиусы геодезических кривизн координатных линий, причем

$$R_{1\Gamma}^{-1} = K_{1\Gamma} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3}, \quad R_{3\Gamma}^{-1} = K_{3\Gamma} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1}.$$

Параметры Ламе определяются через длины элементов координатных линий $dl_i = H_i dx_i$, а дифференциал дуги произвольной линии в триортогональной системе координат определяется как $dl = (H_1^2 dx_1^2 + dy^2 + H_3^2 dx_3^2)^{1/2}$. Эта система справедлива при $\delta \ll L, R_{i\Gamma}$.

Система (3.1.1) относится к параболическому типу с «временной» координатой — линиями тока $dx_3/dx_1 = H_1 u_3 / H_3 u_1$, так что при заданных начальных данных, например, на некоторой поверхности Σ , ортогональной поверхности $x_2 = 0$, область ее влияния будет ограничена поверхностями тока, проходящими через боковые ребра Σ . Этот результат наиболее нагляден в системе координат, связанной с невязкими линиями тока (направление $x_1, x_3 = \text{const}$) на поверхности тела. В этом случае на внешней границе погранслоя $u_1 \rightarrow u_\delta, u_3 = 0$,

где $\rho_\delta u_\delta^2 K_{1\Gamma} H_3 = \frac{\partial p}{\partial x_3}$, уравнение импульсов в направлении x_3 можно записать в виде

$$\frac{u_1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{v}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{u_3}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial H_3} + u_1 u_3 K_{3\Gamma} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u_3}{\partial y} = K_{1\Gamma} u_\delta^2 \left(\frac{u_1^2}{u_\delta^2} - \frac{\rho_\delta}{\rho} \right). \quad (3.1.1a)$$

Если невязкие линии тока совпадают с газодинамическими линиями $K_{1\Gamma} = 0$ на поверхности, то с учетом условия прилипания $u_3 = 0$ на стенке уравнение (3.1.1a) имеет тривиальное решение $u_3 \equiv 0$, и пограничный слой является квазиплоским вдоль невязкой линии тока. Но в общем случае ($K_{1\Gamma} \neq 0$) внутри пограничного слоя возникает вторичное течение со скоростью $u_3 \neq 0$. Учет вторичных течений принципиально усложняет задачу расчета пространственного пограничного слоя, хотя их влияние на теплообмен во многих практически важных случаях незначительно. Так, при гиперзвуковом обтекании заостренных тел ввиду больших плотностей и скоростей газа в ударном слое влияние боковых градиентов давления на теле на скорости частиц невелико, и они движутся по существу по инерции по траекториям, близким к геодезическим линиям. Приближенно это имеет место и для сильно охлажденных затупленных тел, когда влиянием правой части в (3.1.1a) можно пренебречь, так как, используя интеграл Крокко, из (3.1.1a) можно получить

$$u_{3\max}/u_\delta \sim \frac{1}{4} K_{1\Gamma} L \frac{H_\delta}{h_\delta} \left(1 + \frac{h_w}{H_\delta} \right)^2 \approx \frac{1}{4} K_{1\Gamma} L \ll 1$$

при $h_w/H_\delta \ll 1$, $M_\delta < 1$ и $K_{1\Gamma} L < 1$.

Таким образом, часто влиянием вторичных течений можно пренебречь и принять в системе (3.1.1) $u_3 \equiv 0$. Положим $u_1 = u$, $H_1 = 1$, $x_1 = l$, где l — длина вдоль линий тока, и запишем уравнение энергии через полную энтальпию $H = h + u^2/2$. Тогда система (3.1.1) примет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial l} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial l} (H_3 \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (H_3 \rho v) = 0,$$

$$u \frac{\partial H}{\partial l} + v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial u^2}{\partial y} \right]. \quad (3.1.2)$$

Она отличается от аналогичной системы для предельно тонкого осесимметричного пограничного слоя лишь параметром H_3 вместо радиуса r_b поперечного сечения тела и на этом основании может быть названа приближением или *моделью осесимметричной аналогии* [1, 269] для пространственного пограничного слоя. Эта модель является следствием того, что при отсутствии вторичных течений пограничный слой вдоль каждой невязкой линии тока на теле $x_3 = \text{const}$ развивается независимо, а влияние растекания соседних невязких линий тока — эффект чисто геометрический, проявляющийся уже в осесимметричном пограничном слое, который может быть учтен построением для каждой

невязкой линии тока на теле эквивалентного тела вращения с радиусом $r_b = H_3(l)$.

Построение невязких линий тока на поверхности тела по известному распределению давления может быть проведено путем решения следующей, полученной из уравнений движения, системы обыкновенных дифференциальных уравнений [124]:

$$\frac{H_1 dx_1}{\cos \theta} = \frac{H_3 dx_3}{\sin \theta} = \frac{d\theta}{F} = dl, \quad (3.1.3)$$

$$F = \frac{1}{\rho U^2} \left(\frac{\sin \theta}{H_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{\cos \theta}{H_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) - K_{3\Gamma} \sin \theta + K_{1\Gamma} \cos \theta,$$

где θ — угол между направлением линии тока и осью x_1 . Величина F имеет физический смысл геодезической кривизны невязкой линии тока на теле.

Параметр Ламе H_3 в этом случае, или *эффективный радиус* эквивалентного осесимметричного тела $H_3 = r_{\text{ef}}$ определяется через невязкое поле скоростей на стенке и в общем случае в произвольных координатах на поверхности тела со своими H_1 и H_3 находится из уравнения (где правая часть известна)

$$\frac{1}{r_{\text{ef}}} \frac{\partial r_{\text{ef}}}{\partial l} = \text{div } \mathbf{l} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(H_3 \frac{u_1}{U} \right) + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(H_1 \frac{u_3}{U} \right). \quad (3.1.4)$$

Здесь \mathbf{l} — единичный вектор вдоль линии тока.

Заметим, что форма эквивалентного тела вращения $r_{\text{ef}}(l)$ в рассматриваемом приближении бесконечно тонкого пограничного слоя ($\text{Re} \rightarrow \infty$) не зависит от свойств пограничного слоя и является, таким образом, одинаковой для ламинарного и турбулентного режимов. Преимуществом рассмотренного способа расчета эквивалентного осесимметричного тела вдоль невязких линий тока является то, что здесь используются лишь первые производные от функции, задающей форму поверхности обтекаемого тела.

Уравнению (3.1.4) можно придать вид

$$\frac{1}{r_{\text{ef}}} \frac{dr_{\text{ef}}}{dl} = \frac{U}{u_1 H_3} \frac{d}{dl} H_3 \frac{u_1}{U} + \frac{1}{H_1 U} \frac{u_1}{U} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{H_1 u_3}{H_3 u_1}. \quad (3.1.5)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$r_{\text{ef}} = \text{const} \cdot H_3 \frac{u_1}{U} \exp \int \frac{u_1}{H_1 U} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{H_1 u_3}{H_3 u_1} dl,$$

или, с учетом $dl = U H_3 dx_3 / u_3$:

$$r_{\text{ef}} = \text{const} \cdot H_3 \frac{u_1}{U} \exp \int \frac{\partial}{\partial x_3} \ln \frac{H_1 u_3}{H_3 u_1} dx_3, \quad (3.1.6)$$

где в общем случае подынтегральное выражение не является полным дифференциалом.

Практическое использование такого подхода в случае трехмерного обтекания тел достаточно произвольной формы затруднено необходимостью предварительного построения на поверхности тела некоторой вспомогательной ортогональной криволинейной сетки (x_1, x_3) и определения соответствующих коэффициентов Ламе H_1, H_3 .

Однако построение вспомогательной ортогональной координатной сетки (x_1, x_3) на поверхности тела для определения формы эквивалентного тела вращения $r_{\text{ef}}(l)$ вдоль каждой невязкой линии тока на теле, как было предложено в первых работах по осесимметричной аналогии, по существу не является обязательным. Поскольку величина $r_{\text{ef}}(l)$ зависит от расходимости этих линий тока — свойства, инвариантного относительно системы координат, уравнение для r_{ef} можно получить в произвольной системе координат (q_1, q_2, q_3) , в частности, в той, в которой получаем результаты численного расчета обтекания рассматриваемого тела [80, 248]. Пусть это будет, например, цилиндрическая система (x, φ, r) .

Невязкие линии тока $x_3 = \text{const}$ при этом есть интегральные кривые системы $(e_{l_i} — \text{компоненты единичного вектора скорости})$:

$$\frac{dx}{e_{l_1}} = \frac{r d\varphi}{e_{l_2}} = \frac{dr}{e_{l_3}} = dl. \quad (3.1.7)$$

Следуя [248], рассмотрим и определим на поверхности тела величины $F = (\partial\varphi/\partial x_3)_x$ и $G = (\partial\varphi/\partial x)_{x_3}$. Из (3.1.7) получаем, что $G = e_{l_2}/re_{l_1}$.

Для определения F рассмотрим сечение поверхности плоскостью $x = \text{const}$ (рис. 3.1, б).

Из геометрических соображений очевидно

$$\frac{r_{\text{ef}}\Delta x_3}{\cos\nu} = \Delta l = \frac{r \Delta\varphi}{\cos\vartheta},$$

при этом

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\lambda_0}; \quad \cos\nu = \frac{e_{l_1}}{\lambda_0 e_{n_3}}; \quad \lambda_0 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r_T}{r \partial\varphi}\right)^2}.$$

Здесь e_n — единичная внешняя нормаль к телу $r = r_T(x, \varphi)$ с компонентами:

$$e_{n_1} = -\frac{\partial r_T}{\lambda \partial x}; \quad e_{n_2} = -\frac{\partial r_T}{\lambda r_T \partial\varphi}; \quad e_{n_3} = \frac{1}{\lambda};$$

$$\lambda = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r_T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_T}{r_T \partial\varphi}\right)^2}.$$

Отсюда найдем $F = \frac{r_{\text{ef}} e_{n_3}}{r e_{l_1}}$. Используя тождество $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_3} = \left(\frac{\partial G}{\partial x_3}\right)_x$, получим, следуя [28], с учетом соотношений

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_3} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\varphi} + G\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_x, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial x_3}\right)_x = F\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)_x,$$

уравнение для определения эквивалентного радиуса r_{ef} :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\varphi} + G\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_x = g; \quad f = \ln F, \quad g = \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)_x. \quad (3.1.8)$$

Этому уравнению удобно придать характеристический вид (характеристикой является линия тока)

$$\frac{df}{dl} = g e_{l_1}, \quad \frac{1}{e_{l_1}} \frac{d}{dl} = \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.1.9)$$

Отсюда (подынтегральное выражение в общем случае не является полным дифференциалом)

$$r_{\text{ef}} = \text{const} \cdot r \frac{e_{l_1}}{e_{n_3}} \exp \int_0^l g e_{l_1} dl. \quad (3.1.10)$$

Заметим также, что такой подход может быть реализован и для тел кусочно-гладкой формы. При этом необходимо удовлетворять определенным условиям в точках излома контура, сводящимся к тому, что вдоль линии тока радиус эквивалентного тела вращения h и наклон линии тока при переходе через излом β при местных сверхзвуковых скоростях меняются скачкообразно в соответствии с тем, что касательная к линии излома составляющая скорости v_{τ} при переходе через излом сохраняется, а нормальная v_n изменяется либо в косом скачке ($\beta_2 < \beta_1$), либо в волне Прандтля–Майера ($\beta_2 > \beta_1$) (рис. 3.1, в):

$$\frac{r_{\text{ef}2}}{r_{\text{ef}1}} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}.$$

Определив невязкие линии тока на теле и форму эквивалентного тела вращения $r_{\text{ef}}(l)$ вдоль каждой из них, расчеты теплообмена на теле можно провести методами, развитыми для осесимметричных задач.

Система (3.1.3) дает некоторый качественный образ течений в трехмерном пограничном слое и, кроме того, в § 5.1 будет изложен основанный на ней простой *метод эффективной длины* для расчета тепловых потоков, трения на поверхности и интегральных характеристик пограничного слоя.

Полученное ниже решение (см. (3.3.6)) позволяет оценить влияние не учитываемых в данной постановке вторичных течений на теплообмен на примере задачи о стреловидном бесконечном цилиндре. Здесь невязкие линии тока вблизи линии растекания $z = 0$ отклоняются от

образующей меньше, чем предельные вязкие (при $y = 0$) линии тока на теле, на угол δ , так что соответственно

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w_\delta}{u_\delta} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{w}{u} \right)_{y \rightarrow 0} = a_0 \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta + \delta), \quad a_0 = \frac{\varphi''(0)}{g'_*(0)}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(a_0 - 1) \operatorname{tg} \theta}{1 + a_0 \operatorname{tg}^2 \theta}$$

и максимум угла δ достигается при $\operatorname{tg} \theta = a_0^{-1/2}$, при этом $\operatorname{tg} \delta_{\max} = 0,5(a_0 - 1)a_0^{-1/2}$.

Так как влияние вторичных течений на теплообмен, которое имеет место при $\lambda_0 < 1$, характеризуется величиной

$$\bar{q} = (1 - 0,34 \lg(\operatorname{Pr} \lambda_0)) / (1 - 0,34 \lg \operatorname{Pr}) \approx \operatorname{Pr}^{1/6} (1 - 0,34 \lg(\operatorname{Pr} \lambda_0)),$$

то, ограничиваясь значением $\bar{q} \leq 1,25$ как практической границей области течения, где влиянием вторичных течений на теплообмен можно еще пренебрегать, при $\operatorname{Pr} = 0,7$ имеем $\lambda_0 \geq 0,17$, $a_0 \leq 1,9$, $\delta \leq 18^\circ$. (При $\bar{q} \leq 1,15$ имеем $\lambda_0 \geq 0,34$, $a_0 \leq 1,48$, $\delta \leq 11^\circ$.) При большем повороте вектора скорости поперек пограничного слоя необходимо учитывать влияние вторичных течений на теплообмен. Условие $\lambda_0 \geq 0,17$ дает, например, при $\operatorname{Pr} = 1$ на линии растекания цилиндра при гиперзвуковых скоростях (при этом $\beta = 1$, $t_s \approx \cos^2 \lambda$) $\cos^2 \lambda \geq 0,2(1 + 2,6 t_w)$, что ограничивает допустимый диапазон углов стреловидности $\lambda < 47 \dots 63^\circ$ (при $t_w \leq 0,5$).

И, наконец, о граничных условиях задачи. В классическом варианте предельно тонкого пограничного слоя эти условия в простейшем случае имеют вид ($i = 1; 3$)

$$y = 0: u_i = 0, v = 0, h = h_w; \quad y = \delta: u_i \rightarrow u_{i\delta}, h \rightarrow h_\delta. \quad (3.1.11)$$

При этом сами граничные параметры определяются как параметры газа на поверхности тела при его невязком обтекании. Граница же пограничного слоя $y = \delta(x_1, x_3)$ определяется в процессе решения задачи из условия гладкого сопряжения «внутренних» погранслойных и внешних невязких решений, что для предельно тонкого (при $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$) пограничного слоя позволяет ставить для него асимптотические внешние граничные условия при $y \rightarrow \infty$. Такая возможность обусловлена, как правило, экспоненциальным стремлением погранслойного решения к своим предельным внешним условиям, в чем можно убедиться на примере приведенных ниже частных решений.

Такая постановка задачи требует пересмотра и уточнения при умеренно больших числах Рейнольдса, когда масштаб поперечной неоднородности не предельно мал по сравнению с такой же неоднородностью во внешнем потоке. Этот вопрос будет рассмотрен в § 3.4.

§ 3.2. Двумерный пограничный слой

Рассмотрим двумерные пограничные слои, плоские ($\nu = 0$) или осесимметричные на телах вращения ($\nu = 1$) при их симметричном обтекании.

Уравнения пограничного слоя следуют из (3.1.1) при $H_3 = r_b'$ и $dl = dx$ и совпадают с (3.1.2). Здесь $r_b(x)$ — форма образующей тела, x — криволинейная координата вдоль нее. Эти уравнения удобно переписать в переменных

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \frac{1}{\rho_* \mu_* U_\delta r^{2\nu}} \int_0^x \rho_* \mu_* U_\delta r^{2\nu} dx, \\ \zeta(x, \bar{\eta}) &= \sqrt{\frac{U_\delta}{\rho_* \mu_* \xi}} \bar{\eta} = \sqrt{\frac{\rho_* U_\delta}{\mu_* \xi}} \eta, \quad \eta = \frac{\bar{\eta}}{\rho_*} = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_*} dy. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Здесь η и $\bar{\eta}$ — различные варианты *переменной Дородницына*, ρ_* и μ_* — плотность и вязкость, определяемые местным давлением p и некоторой условной характерной энтальпией h_* (в частности, это может быть энтальпия газа на внешней границе пограничного слоя h_δ , что обычно принимается при численных решениях). Очевидно, переменные ξ и η имеют соответственно те же размерности, что и x , y , а переменная ζ — безразмерная и в пограничном слое имеет порядок единицы. Преобразование, обратное к (3.2.1), дается формулами

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{\mu_* \xi}{\rho_* U_\delta}} \bar{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu_* \xi}{\rho_* U_\delta}} \frac{\rho_*}{\rho_\delta} \tilde{\zeta}, \\ \text{где } \bar{\zeta} &= \int_0^\xi \frac{\rho_*}{\rho} d\zeta, \quad \tilde{\zeta} = \int_0^\xi \frac{\rho_\delta}{\rho} d\zeta, \quad \rho = \rho(\xi, \zeta). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Одновременно введем новые безразмерные функции:

$$f'(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{u}{U_\delta}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_\delta}. \quad (3.2.3)$$

Верхние штрихи у функций будут означать их дифференцирование по ζ , а нижние индексы ξ или x — дифференцирование по этим переменным. Функции f и \bar{H} должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad & f = f' = 0, \quad \bar{H} = \bar{H}_w = \bar{h}_w; \\ \zeta \rightarrow \infty: \quad & f' \rightarrow \infty, \quad \bar{H} \rightarrow 1; \\ \xi = \xi_0: \quad & f = f_0(\zeta), \quad \bar{H}_0 = \bar{H}(\zeta). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Отношение \overline{H}_w или \overline{h}_w есть *энтальпийный фактор стенки*, равный для совершенного газа *температурному фактору* $t_w = T_w/T_{0\delta}$, где $T_{0\delta}$ — температура торможения внешнего потока.

В новых переменных функция тока ψ (расход газа) выражается формулой

$$\psi = (2\pi)^\nu r_b^\nu \int_0^y \rho u dy = (2\pi)^\nu r_b^\nu f \sqrt{\rho_* \mu_* U_\delta \xi}. \quad (3.2.5)$$

И, наконец, выразим в новых переменных трение τ_w на стенке и тепловой поток q_w к ней

$$\begin{aligned} \tau_w &= \mu_w \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = l_w f_w'' \rho_* U_\delta^2 \sqrt{\frac{\mu_*}{\rho_* U_\delta \xi}}, \quad l_w = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_* \mu_*}, \\ q_w &= \lambda_{efw} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = l_w \overline{H}'_w \text{Pr}_w^{-1} \rho_* U_\delta H_\delta \sqrt{\frac{\mu_*}{\rho_* U_\delta \xi}}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

С переходом к переменным ξ , ζ и параметрам ρ_* , μ_* формулы (3.2.1)–(3.2.6) приобрели форму, характерную для погранслоя на пластине в несжимаемой жидкости. В этом смысле ξ играет роль *эффективной длины* эквивалентной пластины с теми же местными характеристиками пограничного слоя.

В новых переменных уравнения (3.1.2) примут вид

$$\begin{aligned} 2(lf'')' + ff'' + F_p &= F_f \equiv 2\xi_x \xi (f'f'_\xi - f_\xi f''), \\ 2\left(\frac{l}{\text{Pr}} \overline{H}'\right)' + f\overline{H}' + 2B\left[l\frac{\text{Pr}-1}{\text{Pr}} f'^2\right]' &= F_H \equiv 2\xi_x \xi (f'\overline{H}'_\xi - f_\xi \overline{H}'), \\ F_p &= \beta\left(\frac{\rho_\delta}{\rho} - f'^2\right), \quad \beta = -\frac{2\xi_x \xi}{\rho_\delta U_\delta^2} \frac{dp}{d\xi} = 2\frac{\xi_x \xi}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{d\xi}, \\ l = \frac{\mu\rho}{\mu_*\rho_*} = \left(\frac{h}{h_*}\right)^{-n}, \quad B &= \frac{U_\delta^2}{2H_\delta} = \frac{U_\delta^2}{2h_\delta + U_\delta^2} = \frac{(\gamma-1)M_\delta^2}{2 + (\gamma-1)M_\delta^2}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Последнее равенство для l следует из формулы (1.3.10), где $n = 0,3$; M_δ — число Маха на внешней границе. Рассмотрим некоторые важные частные задачи.

Пограничный слой на пластине (в частности, на клине или конусе в сверхзвуковом потоке). Эта задача автомодельна, и при постоянных ρ и U_δ на прямолинейной поверхности с уравнением $r_b = bx$ переменные (3.2.1) примут вид

$$\xi = \frac{x}{2\nu + 1}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{(2\nu + 1)\rho_* U_\delta}{\mu_* x}} \eta. \quad (3.2.8)$$

В этом случае в уравнениях (3.2.7) следует положить $\beta = F_f = F_H = F_p = 0$, что превращает эти уравнения в обыкновенные дифференциальные с решениями, зависящими лишь от ζ . Соответственно преобразуются и формулы (3.2.6) для τ_w и q_w :

$$\tau_w = l_w f_w'' \rho_* U_\delta^2 \sqrt{\frac{(2\nu + 1) \mu_*}{\rho_* U_\delta x}}, \quad q_w = \frac{l_w}{\text{Pr}_w} \overline{H}'_w \rho_* U_\delta H_\delta \sqrt{\frac{(2\nu + 1) \mu_*}{\rho_* U_\delta x}}. \quad (3.2.9)$$

При этом параметры $l_w f_w''$ и $l_w \overline{H}'_w \text{Pr}_w^{-1}$ определяются из решения системы (3.2.7).

Тепловые потоки и трение на конусе ($\nu = 1$) в $\sqrt{3}$ раз больше, а согласно (3.2.2) толщина пограничного слоя в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем на клине (пластине) при той же длине x вдоль образующей поверхности.

Основные свойства решений уравнений (3.2.7) для пластины исследуем на частных примерах. Наиболее простым является случай $\text{Pr} = 1$, когда эти уравнения становятся идентичными при произвольном l , что означает линейную связь между \overline{H} и f' , или *интеграл Крокко*, который выпишем в различных формах с учетом граничных условий:

$$\begin{aligned} H &= h + \frac{1}{2} u^2 = (H_\delta - h_w) \frac{u}{U_\delta} + h_w, \\ \overline{H} &= \bar{h} + B f'^2 = f' + \bar{h}_w (1 - f'), \quad B = \frac{U_\delta^2}{2 H_\delta}, \quad \bar{h} = \frac{h}{H_\delta}, \\ \tilde{h} &= \frac{h}{h_\delta} = f' + \frac{h_w}{h_\delta} (1 - f') + \frac{1}{2} \frac{U_\delta^2}{h_\delta} f' (1 - f'). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Так как число Прандтля близко к единице, этот интеграл можно использовать, по крайней мере, для качественного анализа свойств неизотермического пограничного слоя.

Другой пример простых решений — случай $l = 1$, или $n = 0$ и $\text{Pr} = \text{const}$. В этом случае первое уравнение (3.2.7) переходит в *уравнение Блазиуса* с соответствующим *решением Блазиуса*, показанным на рис. 3.2 (там же показаны решения системы (3.2.23) для окрестности критической точки):

$$2f''' + f f'' = 0, \quad (3.2.11)$$

а второе уравнение (3.2.7) имеет в этом случае решение

$$\begin{aligned} \bar{h} &= (1 - B) \frac{h}{h_\delta} = 1 - C J_1 + 2 B \text{Pr} J_2, \\ J_1(\zeta) &= \int_\zeta^\infty (f'')^{\text{Pr}} d\zeta, \quad J_2(\zeta) = \int_\zeta^\infty (f'')^{\text{Pr}} \left[\int_0^\zeta (f'')^{2-\text{Pr}} d\zeta \right] d\zeta, \\ C J_{10} &= 1 - \bar{h}_w + 2 B \text{Pr} J_{20}, \quad J_{i0} = J_i(0). \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

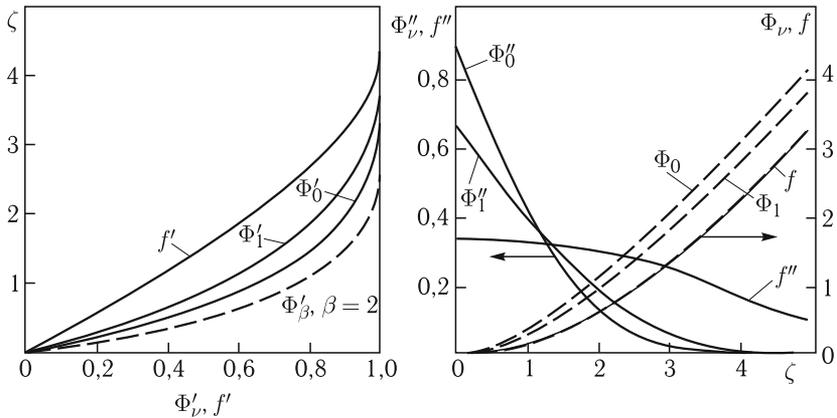


Рис. 3.2. Профили скоростей и трения в несжимаемом пограничном слое

Это решение удовлетворяет условиям $\overline{H} \rightarrow 1$, или $h \rightarrow h_\delta$, при $\zeta \rightarrow \infty$ и $\overline{H} = \overline{H}_w$, или $h = h_w$, при $\zeta = 0$. При $Pr = 1$ это решение переходит в интеграл Крокко (3.2.10).

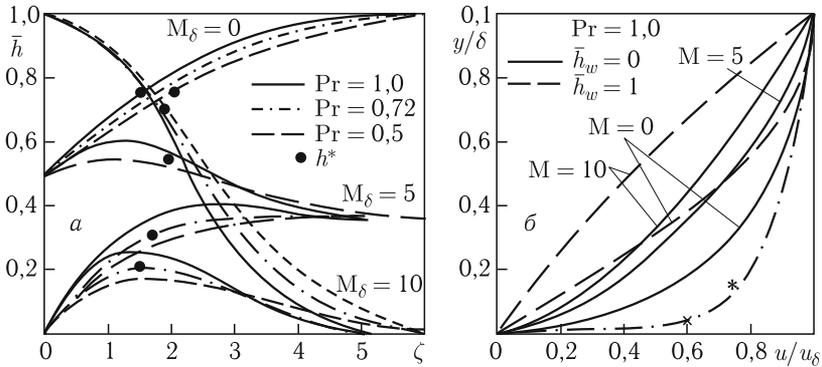


Рис. 3.3. Профили энтальпии (а) и скорости (б) в пограничном слое; * — профиль скорости в турбулентном пограничном слое

Кривые $\bar{h}(\zeta)$, полученные при $n = 0$ для различных чисел Маха M_δ , температурных (энтальпийных) факторов \bar{h}_w и чисел $Pr = 0,5, 0,725$ и 1 , приведены на рис. 3.3, а. Зависимость этих кривых от числа Pr усиливается с ростом числа M_δ , но в целом не очень велика. При малом энтальпийном факторе \bar{h}_w и больших M_δ энтальпия внутри пограничного слоя имеет максимум, равный $h_{\max} = H_\delta/4$ для $Pr = 1$ и $h_{\max} = 0,15 H_\delta$ для $Pr = 0,5$ при $M_\delta = \infty$ и $\bar{h}_w = 0$, т.е. отношение h/H_δ остается ограниченным, что подтверждает оценку (2.5.2) $h_* \sim H_\delta$ для характерной энтальпии. На рис. 3.3, б приведены профили скорости

u/U_δ при $\text{Pr} = 1$ и $n = 0$ для различных чисел M_δ (координаты y определяются при этом формулой (3.2.2), $\delta = y(\zeta_\delta)$, $\zeta_\delta = 5,2$).

Обратим внимание на существенное влияние температурного фактора не только на профили энтальпии (что естественно), но и на профили скорости даже при $M_\delta = 0$.

С учетом полученного решения производную \overline{H}'_w , входящую в формулу (3.2.9) для теплового потока q_w , запишем в виде

$$\overline{H}'_w = k f''_w (\overline{H}_e - \overline{h}_w), \quad H_e = h_\delta + \frac{1}{2} \kappa U_\delta^2. \quad (3.2.13)$$

Здесь H_e — так называемая *адиабатическая энтальпия стенки*, реализуемая на теплоизолированной (при $q_w = 0$) поверхности, κ — коэффициент восстановления полной энтальпии. Точные формулы для k и κ и их аппроксимации в пределах $\text{Pr} = 0,5 \dots 2$ имеют вид

$$k = (f''_w)^{\text{Pr}-1} J_{10}^{-1} = \text{Pr}^{1/3}, \quad \kappa = 2 \text{Pr} J_2(0) = \text{Pr}^{1/2}. \quad (3.2.14)$$

В общем случае функций $l(h)$ и $\text{Pr}(h)$, зависящих от температуры, система (3.2.7) подлежит численному решению. Эти решения, полученные Эккертом [179] (за определяющую энтальпию в формулах (3.2.2), (3.2.9) принималась величина h_δ), позволили предложить следующие аппроксимационные зависимости для параметров $l_w f''_w$ и $l_w \overline{H}'_w$ в (3.2.9), необходимых для расчетов трения и тепловых потоков

$$l_w f''_w = 0,332 l_*^{1/2}, \quad l_w \overline{H}'_w = l_w f''_w \text{Pr}^{1/3} (H_e - h_w) / H_\delta. \quad (3.2.15)$$

При этом параметры, отмеченные звездочкой (ρ_* , μ_* , Pr_*), вычисляются при некоторой условной (определяющей) энтальпии h_* :

$$\begin{aligned} h_* &= \frac{1}{2} (h_\delta + h_w) + 0,22 (H_e - h_\delta) = h_{*0} - \left(\frac{1}{2} - 0,22 k \right) \frac{U_\delta^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} H_\delta \left[1 + \overline{h}_w - 0,31 \frac{2(\gamma-1) M_\delta^2}{2 + (\gamma-1) M_\delta^2} \right], \quad h_{*0} = \frac{1}{2} (H_\delta + h_w). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Последняя формула для h_* выписана для совершенного газа и $\text{Pr} = 0,71$, а первая пригодна, по крайней мере, до температур в пограничном слое $T \leq 8 \cdot 10^3$ К при $T_w \leq 2 \cdot 10^3$ К [201]. Величина h_* довольно консервативна, имеет порядок H_δ и в диапазоне $M_\delta = 0 \dots \infty$ изменяется не более, чем втрое даже при $\overline{h}_w = 0$. Для ориентировки величины h_* показаны на профилях энтальпии на рис. 3.3, а.

Заметим, что если в качестве условной характерной энтальпии в (3.2.2), (3.2.7) взять эту величину h_* , формулы (3.2.9) — те же, что и для несжимаемой жидкости.

В итоге имеем следующие формулы для ламинарного пограничного слоя на пластине ($\nu = 0$) и остром конусе ($\nu = 1$):

$$q_w = \frac{\alpha_l}{c_p}(H_e - h_w), \quad H_e = h_\delta + \frac{1}{2} \text{Pr}^{1/2} U_\delta^2,$$

$$\tau_w = 0,332 \rho_* U_\delta^2 \sqrt{\frac{(2\nu+1)\mu_*}{\rho_* U_\delta x}}, \quad \frac{\alpha_l}{c_p} = 0,332 \text{Pr}_w^{-2/3} \rho_* U_\delta \sqrt{\frac{(2\nu+1)\mu_*}{\rho_* U_\delta x}}. \quad (3.2.17)$$

Здесь α_l/c_p — обобщенный ламинарный коэффициент теплообмена. Произведение $\rho_* \mu_*$ здесь зависит от местного давления и (как $h^{-0.3}$) от определяющей энтальпии h_* ; вместо $\text{Pr}_* = \text{Pr}(h_*)$ можно взять величину $\text{Pr}_w = \text{Pr}(T_w)$ как непосредственно входящую в формулу (3.2.9) (для воздуха $\text{Pr} = 0,71$).

Трение и тепловой поток на стенке принято представлять в виде безразмерных коэффициентов трения C_f и теплообмена — числа Стантона St :

$$C_f \delta = \frac{2\tau_w}{\rho_\delta U_\delta^2}, \quad St_\delta = \frac{q_w}{\rho_\delta U_\delta (H_e - h_w)} = \frac{1}{2} \bar{k} C_f \delta. \quad (3.2.17a)$$

Индекс δ у этих коэффициентов указывает на определение их по параметрам ρ_δ и U_δ (так как в принципе возможно и иное).

Связь между величинами C_f и St носит название аналогии Рейнольдса, а с учетом (3.2.9) и (3.2.10) коэффициент аналогии Рейнольдса равен $\bar{k} = \text{Pr}_w^{-2/3}$.

Приведем еще формулы для толщины вытеснения на пластине (остром конусе) δ^* , полагая $\rho_\delta/\rho = h/h_\delta = \tilde{h}$, $\rho_* \mu_* = \rho_\delta \mu_\delta (h_\delta/h_*)^n$:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta}\right) dy = \left(\frac{h_\delta}{h_*}\right)^{n/2} \sqrt{\frac{\mu_\delta \xi}{\rho_\delta U_\delta}} \bar{\delta}^*,$$

$$\bar{\delta}^* = \frac{H_\delta}{h_\delta} K_\delta, \quad \xi = \frac{x}{2\nu + 1}. \quad (3.2.18)$$

Здесь соответственно для $\text{Pr} = 1$ и $\text{Pr} = 0,72$ имеем

$$K_\delta = 1,72 \cdot \bar{h}_w + 0,332 \frac{U_\delta^2}{H_\delta},$$

$$K_\delta = 1,94 \cdot \bar{h}_w + 0,58 \frac{U_\delta^2}{2H_\delta} - 0,21 \frac{h_\delta}{H_\delta}.$$

Отметим достаточную близость величин $\bar{\delta}^*$ при $\text{Pr} = 0,72$ и $\text{Pr} = 1$. Как видно, по сравнению с течением несжимаемой жидкости ($M_\delta = 0$, $h_w = h_\delta$) толщина вытеснения растет с ростом числа M_δ и с ростом энтальпии стенки. При $M_\delta \approx 0$ для сильно охлажденной стенки

($h_w \ll h_\delta$) толщина вытеснения, наоборот, близка к нулю, а при $\text{Pr} < 1$ даже может быть отрицательной.

И, наконец, используя формулу (3.2.2) и асимптотику $f \rightarrow \zeta - \zeta^*$ при $\zeta \rightarrow \infty$, получим толщину пограничного слоя

$$\delta = \left(\frac{h_\delta}{h_*}\right)^{n/2} \sqrt{\frac{\mu_\delta \xi}{\rho_\delta U_\delta}} \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} = (f_\delta + \bar{\delta}^*), \quad f_\delta \approx 3,3. \quad (3.2.19)$$

Зависимость величин $\bar{\delta}^*$ и $\bar{\delta}$ от M_δ для $\text{Pr} = 1$ показана на рис. 3.4.

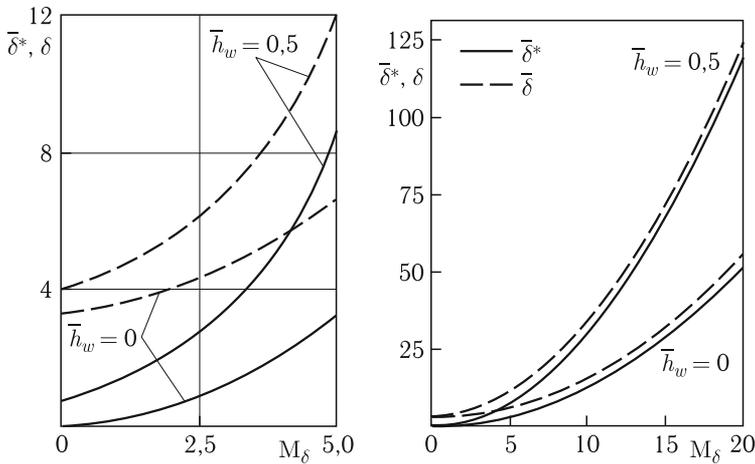


Рис. 3.4. Зависимость безразмерных толщин пограничного слоя $\bar{\delta}$ и толщины вытеснения $\bar{\delta}^*$ от числа Маха M_δ

Отметим тот факт, что при $M_\delta \gg 1$ величина $\bar{\delta}^* \gg f_\delta$, поэтому в этом случае погрешность в определении граничных величин ζ_δ или f_δ вносит лишь малую погрешность в определение общей толщины пограничного слоя, которая в данном случае определяется достаточно четко.

Пограничный слой в точке торможения тупого тела. В окрестности этой точки следует положить

$$U_\delta = cx \left[1 + O\left(\frac{x^2}{L^2}\right)\right], \quad c \sim \frac{U_\infty}{L}, \quad r = x \left[1 + O\left(\frac{x^2}{L^2}\right)\right]. \quad (3.2.20)$$

Здесь L — характерный масштаб течения, в частности, это может быть радиус кривизны тела R или радиус кривизны ударной волны R_s , U_∞ — скорость набегающего на тело потока. В этом случае с точностью до квадратичных членов порядка x^2/L^2 в разложениях (3.2.20) можно ограничиться лишь первыми членами $U_\delta = cx$, $r = x$, что приведет

к следующим формулам для переменных (3.2.1) и параметров β и B в (3.2.7):

$$\xi = \frac{x}{2(1+\nu)}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{2(1+\nu)c\rho_*}{\mu_*}} \eta, \quad \beta = \frac{1}{(1+\nu)}, \quad B = 0. \quad (3.2.21)$$

Полагая

$$u = cx\Phi'_\nu(\zeta), \quad \bar{h} = \bar{H} = \bar{H}(\zeta), \quad (3.2.22)$$

получим из (3.2.7) систему обыкновенных дифференциальных уравнений (заменяя там f на Φ_ν):

$$\begin{aligned} 2(l\Phi'_\nu)' + \Phi_\nu\Phi''_\nu + (1+\nu)^{-1}\left(\frac{\rho_\delta}{\rho} - \Phi_\nu'^2\right) &= 0, \\ 2\left(\frac{l}{\text{Pr}}\bar{H}'\right)' + \Phi_\nu\bar{H}' &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

В общем случае уравнения (3.2.23) вследствие зависимости $\rho = \rho(h)$ ($\rho = \rho_\delta h_\delta/h$, в частности) образуют взаимосвязанную систему. Для нее интеграл Крокко (3.2.10), полученный при числе $\text{Pr} = 1$ для пластины, несправедлив, как собственно, и вообще для течений с переменным давлением $p = p(x)$, т. е. при $\beta \neq 0$. Эта система расщепляется лишь при $\rho \equiv \rho_\delta$, $l = 1$, т. е. при предельно малом изменении температуры в пограничном слое (это решение показано на рис. 3.2). В этом случае первое уравнение системы решается независимо, а решение второго имеет тот же вид (3.2.12), где следует положить $B = 0$, а в выражении для J_1 следует подставить функцию Φ_ν вместо f . В то же время численное решение системы (3.2.23) не вызывает особых затруднений с помощью итерационного алгоритма, основанного на поочередном решении этих уравнений.

Результаты подобных расчетов аппроксимируются формулами

$$\begin{aligned} q_w &= A_\nu \text{Pr}^{-2/3} l_*^{1/2} \sqrt{\rho_\delta \mu_\delta c} (H_\delta - h_w), \\ l_* &= \frac{\rho_* \mu_*}{\rho_\delta \mu_\delta} = \left(\frac{h_*}{H_\delta}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{h}_w\right)^{-n}, \quad n = 0, 3, \\ A_0 &= 0,57, \quad A_1 = 0,76. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Сравним эту формулу с результатами экспериментов в ударных трубах, проведенных [145] для параметров торможения, соответствующих условиям полета в атмосфере Земли со скоростями $U_\infty \leq 2 \dots 8$ км/с на высотах $H = 7 \dots 37$ км при равновесной диссоциации воздуха и низком энтальпийном факторе $\bar{h}_w = h_w/H_\delta \leq 0,1 \dots 0,2$.

Для ламинарного пограничного слоя в точке торможения осесимметричного тела путем аппроксимации серий расчетов получена формула [164]

$$q^{(0)} = 0,76 \text{Pr}^{-0,6} l_w^{0,1} \sqrt{\rho_\delta \mu_\delta c} A_2 (H_\delta - h_w), \quad (3.2.25)$$

$$A_2 = 1 + (\text{Le}^{0,52} - 1) \frac{h_f}{H_\delta}, \quad l_w = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_\delta \mu_\delta}.$$

Сравнение ее с экспериментальными данными [145] дано на рис. 3.5. Здесь h_f — удельная энтальпия, или энергия диссоциации воздуха на внешней границе пограничного слоя. Эти расчеты выполнены при $\text{Pr} = 0,7$ и постоянном числе Льюиса $\text{Le} = \rho D c_p / \lambda$ (см. (1.3.12), D — коэффициент диффузии), которое, как и h_f , вошло в формулы (3.2.25) благодаря решению задач в рамках *теплопроводно-диффузионной* модели (т.е. с использованием не эффективной теплопроводности λ_{ef} (1.2.11), а с одновременным решением уравнения энергии и уравнения диффузии). Эта формула хорошо согласуется с экспериментом при $\text{Le} = 1,4$, однако получена с использованием формулы Сазерленда (1.3.8), существенно (более полутора раз при $T \sim 5000 \dots 6000$ К в экспериментах) занижающей коэффициент вяз-

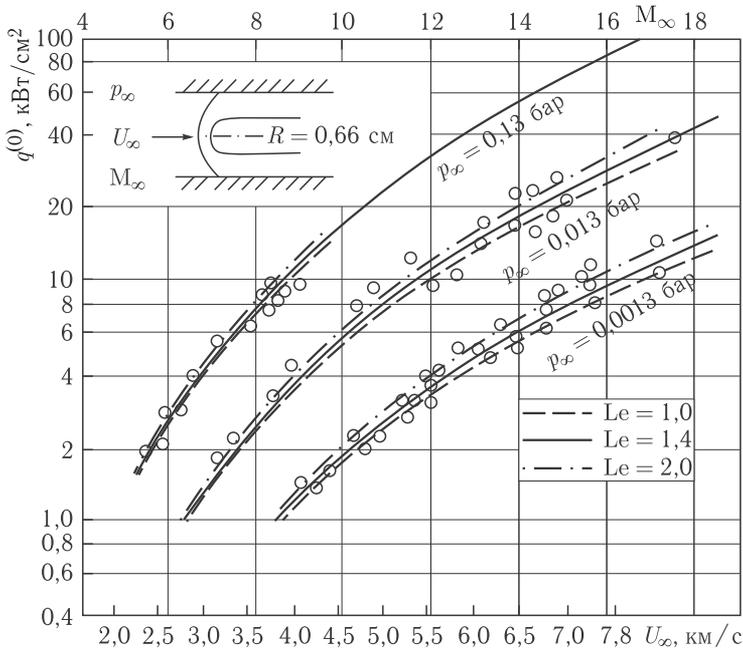


Рис. 3.5. Сравнение экспериментальных (точки) и расчетных (линии) тепловых потоков в точке торможения сферы в гиперзвуковом потоке в ударной трубе

кости по сравнению с более точными данными (рис. 1.10, б). С использованием последних в формуле (3.2.25) для согласования ее с экспериментом следовало бы положить $Le < 1$. С учетом этого и формулы (1.3.10) для $\rho\mu$ (а также рис. 1.4) формулы (3.2.24) и (3.2.25) дают почти совпадающие результаты, т. е. формула (3.2.24) (более простая, чем (3.2.25)) вполне согласуется с упомянутыми экспериментальными данными (тем более, с учетом их значительного (до полутора раз) разброса).

Следует подчеркнуть, что экспериментальная апробация подобных формул является, прежде всего, апробацией принятых физических моделей, в частности, апробацией использованных в расчетах коэффициентов переноса (с трудом поддающихся непосредственному измерению в опыте).

Метод локального подобия. Этот подход основан на решении уравнений (3.2.7) с отброшенными правыми частями, в результате чего зависимость решения от ξ становится параметрической, т. е. в каждом сечении $\xi = \text{const}$ решаются обыкновенные дифференциальные уравнения с местными значениями входящих в них коэффициентов β и B . Он обычно обеспечивает приемлемую точность (пример приведен на рис. 3.6), хотя довольно трудоемок. Отметим один эффективный способ учета влияния отрицательного градиента давления (типичного для затупленных тел) на профиль продольной скорости u/U_δ и другие характеристики пограничного слоя. Он основан на использовании модифицированного метода локального подобия, предложенного в работах [74, 236]. В них показано, что профиль продольной скорости $u/U_\delta = \varphi'(\zeta)$ в каждом сечении $\xi = \text{const}$ может быть приближенно получен из Блазиусовского $f'(\eta)$ путем подходящей, зависящей от локального значения параметра градиента давления, деформации поперечной координаты $\zeta = \lambda_0^{1/2}\eta$, где ζ определяется согласно (3.2.1).

Рассмотрим, опуская правую часть, первое уравнение в (3.1.2) и перейдем к новой переменной ζ и к новой функции $\varphi(\zeta) = \lambda_0^{1/2} f(\eta)$, таким, что $f'(\eta) = \varphi'(\zeta)$. Получаем

$$2(l\varphi'')' + \lambda_0\varphi\varphi' + \beta_0\lambda_0(\rho_\delta/\rho - \varphi'^2) = 0. \quad (3.2.26)$$

Приведем это уравнение к виду

$$2(l\varphi'')' + \varphi\varphi'' + [\beta_0\lambda_0(\overline{H} - \varphi'^2) - (1 - \lambda_0)\varphi\varphi''] = 0, \quad \beta_0 = \beta H_\delta/h_\delta. \quad (3.2.27)$$

Теперь выберем параметр λ_0 из условия

$$\int_0^\infty [\beta_0\lambda_0(\overline{H} - \varphi'^2) - (1 - \lambda_0)\varphi\varphi''] d\zeta = 0, \quad (3.2.28)$$

полагая его достаточным для пренебрежения членом в фигурных скобках в (3.2.27). При этом, как видно, уравнение (3.2.27) при $l = 1$ ста-

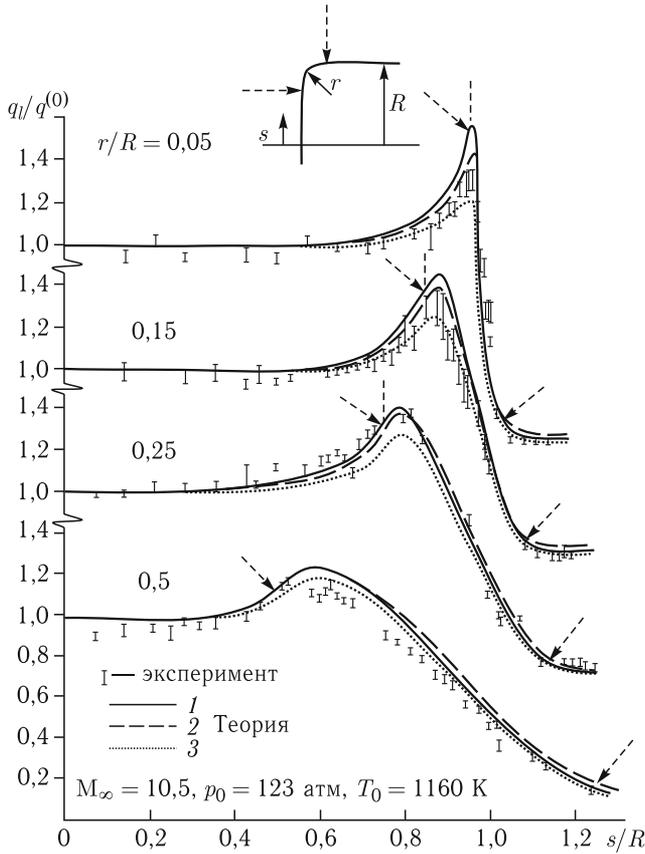


Рис. 3.6. Распределение ламинарных тепловых потоков по диску со скругленными угловыми точками [233]: 1 — точный расчет, 2 — метод локального подобия, 3 — метод эффективной длины; p_0 , T_0 — параметры в форкамере (стрелки — начало и конец скругления)

новится уравнением Блазиуса. Используя его решение и соответствующий профиль полной энтальпии для вычисления интеграла (3.2.28), имеем (здесь $t_w = h_w/H_\delta$)

$$\lambda_0 = (1 + \beta_0 I)^{-1}, \quad \beta_0 = 2 \frac{H_\delta}{h_\delta} \frac{\xi}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx};$$

$$I(\text{Pr}, t_w, N) = 3,59 - 2,13 \int_0^\infty (1 - \bar{H}) d\zeta, \quad I(1, t_w, N) = 1 + 2,59 t_w;$$

$$I(0,7, t_w, N) = 0,64 (1 + 4,6 t_w + 0,336 N), \quad N = 1 - h_\delta/H_\delta. \tag{3.2.29}$$

Уравнение (3.2.7) для полной энтальпии $H(\eta)$ — линейное и в приближении локального подобия решается в квадратурах, содержащих параметр λ_0 :

$$\overline{H}(\eta) = (\overline{h}_* - \overline{h}_w) \frac{G(\text{Pr} \cdot \lambda_0, \eta)}{G(\text{Pr} \cdot \lambda_0, \infty)} + (1 - \text{Pr}) \Phi(\lambda_0, \eta) + \overline{h}_w,$$

$$G(\lambda_0, \eta) = \int_0^\eta f''^{\lambda_0} d\eta, \quad \Phi(\lambda_0, \eta) = \int_0^\eta f''^{\text{Pr} \lambda_0} \int_0^\eta \left(\frac{U_\delta^2}{2H_\delta} f'^2 \right)'' f''^{-\text{Pr} \lambda_0} d\eta d\eta.$$

Здесь $\overline{h}_* = 1 - (1 - \text{Pr}) \Phi(\lambda_0, \infty)$ является по существу совпадающей с (3.2.13) безразмерной энтальпией теплоизолированной стенки (хотя, в отличие от нее, она формально (через λ_0) и зависит от температуры стенки, эта зависимость несущественна — при изменении t_w от 0 до t_{aw} величина t_* изменяется на $\sim 1\%$).

Аналогичный подход реализован в работе [74] при рассмотрении трехмерного пограничного слоя на бесконечном стреловидном цилиндре. Для этого случая сохраняются все соотношения, только для компоненты скорости $g(\eta)$ вдоль образующей $w = w_\delta$ получаем (при $\lambda_0 = 1$ функция $g(\eta)$ совпадает с блазиусовской)

$$g(\eta) = \frac{G(\lambda_0, \eta)}{G(\lambda_0, \infty)}.$$

Точность такого способа учета влияния градиента давления на профиль скорости u/U_δ вдоль этого градиента проиллюстрирована на рис. 3.7, где приведено сравнение с автомодельными решениями [166, 191, 204] (точки). При малых t_w (реально при $t_w \leq 0,5$) различие между точными и приближенными профилями скорости (полученными указанной деформацией блазиусовского) имеется практически лишь во внешней части пограничного слоя, что делает такой подход приемлемым для целей расчета трения и теплопередачи на теле (профили энтальпии θ согласуются значительно лучше даже при $t_w \sim 1$).

Напряжение трения τ_{1w} и τ_{2w} (для бесконечного цилиндра это компонента трения вдоль образующей) и тепловой поток q_w на стенке с учетом приведенных данных и аппроксимации результатов расчетов могут быть определены по соотношениям:

$$\tau_{1w} = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \tau_{1w}^0 K_{1\beta}, \quad \tau_{2w} = \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)_w = \tau_{2w}^0 K_{2\beta},$$

$$q_w = \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_w = q_w^0 K_{3\beta}, \quad (3.2.30)$$

$$K_{1\beta} = \lambda_0^{-1/2}, \quad K_{2\beta} = (1 - 0,34 \lg \lambda_0), \quad K_{3\beta} = \text{Pr}^{1/6} (1 - 0,34 \lg \text{Pr} \lambda_0),$$

где τ_{1w}^0 , τ_{2w}^0 и q_w^0 — компоненты трения и тепловой поток без учёта влияния градиента давления ($\lambda_0 = 1$), определяемые соотношениями для пластины типа (3.2.17).

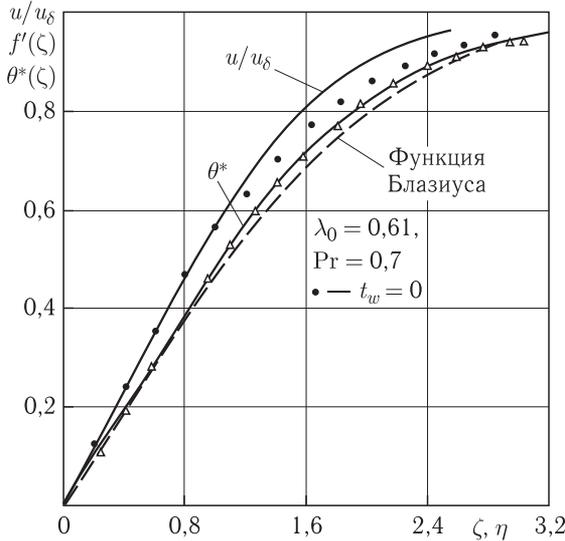


Рис. 3.7

Параметр λ_0 является важным определяющим комплексным параметром задачи. Отметим, что он носит более общий характер, чем известные поправочные множители на влияние градиента давления в критической точке затупленного тела (например [5, 221]) и дает результаты, хорошо согласующиеся с численными расчетами пограничного слоя.

Результаты сравнения полученных зависимостей с точными решениями (см. § 3.3) позволяют использовать их в виде поправочных множителей в рамках метода эффективной длины, что значительно повышает его точность.

Во многих случаях требуется с достаточной точностью оценивать характерные толщины пограничного слоя (такие, как его толщину δ , толщину вытеснения δ^* , толщину потери импульса ϑ и др.), для этого необходимы профили плотности или энтальпии, что затрудняет такие вычисления. Часто соотношения для пластины оказываются недостаточными из-за влияния градиента давления. Рассмотрим, например, величину δ^* . Используя указанный подход, при отсутствии вдува имеем для плоских и осесимметричных течений:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta}\right) dy = \sqrt{\frac{\mu_\delta \xi}{\rho_\delta U_\delta}} \left\{ \frac{H_\delta}{h_\delta} \left[I_2 - (1 - t_w) I_4 \right] - I_1 \right\},$$

$$I_1 = \int_0^\infty \varphi'(1 - \varphi') d\zeta = 0,664 \lambda_0^{1/2}, \quad I_2 = \int_0^\infty (1 - \varphi'^2) d\zeta = 2,386 \lambda_0^{1/2},$$

(3.2.31)

$$I_4 = \int_0^{\infty} (1 - \theta_*) d\zeta \approx 1,72(1 + 0,27 \lg \lambda_0), \quad 1 - \theta_* = (1 - \overline{H}) / (1 - t_w),$$

причем здесь выражение для I_4 получено в результате аппроксимации расчетных данных при $Pr = 1$. Точность этих выражений достаточно высокая во всем диапазоне рассмотренных значений λ_0 , где отрицательный градиент давления может, как видно, существенно уменьшать толщину вытеснения δ^* . Из точных расчетов пограничного слоя известно, например, что для сжимаемого пограничного слоя в критической точке при малых t_w величина $\delta^* < 0$ [19, 129]. Метод локального подобия (при $\lambda_0 = 1$) дает (c — градиент скорости в критической точке)

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\rho_0 c(1 + \nu)}} \cdot 1,72 t_w > 0, \quad c = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \quad (3.2.32)$$

тогда как полученные соотношения приводят к

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\rho_0 c(1 + \nu)}} \{1,72 \lambda_0^{1/2} - 1,72(1 + 0,27 \lg \lambda_0)(1 - t_w)\}. \quad (3.2.33)$$

Эти величины в зависимости от t_w показаны на рис. 3.8 для плоской ($\nu = 0$, пунктир) и осесимметричной ($\nu = 1$, сплошная линия) критических точек. Как видно, именно влиянием градиента давления объясняются отрицательные значения δ^* при малых t_w .

Отметим, что хотя принятые допущения обеспечивают приемлемость метода при малых t_w , результаты качественно правильно описывают влияние градиента давления даже для несжимаемой жидкости ($t_w = 1$) и даже при небольших положительных градиентах давления

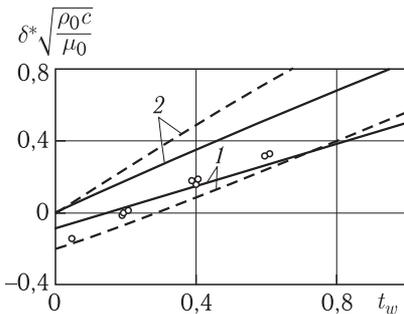


Рис. 3.8. Зависимость толщины вытеснения от температурного фактора (штриховые кривые — $\nu = 0$, сплошные — $\nu = 1$); 1 — соотношение (3.2.33), 2 — метод эффективной длины (3.2.32); \circ — численный расчет [19], $\nu = 1$

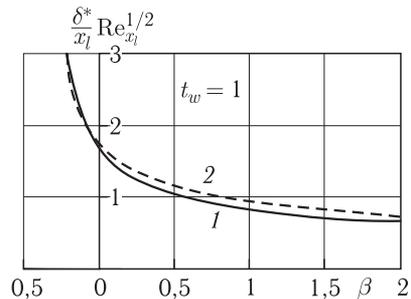


Рис. 3.9. Зависимость толщины вытеснения от градиента давления при $t_w = 1$: 1 — соотношение (3.2.31), 2 — численный расчет [109]

(рис. 3.9). Метод эффективной длины дает при этом константу 1,72, соответствующую на рис. 3.9 значению $\beta = 0$.

Для толщины пограничного слоя δ имеем

$$\delta = \delta^* + \sqrt{\frac{\mu_\delta \xi}{\rho_\delta U_\delta}} \cdot 3,3 \lambda_0^{1/2}. \quad (3.2.34)$$

Для толщины потери импульса ϑ получим

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta} \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) dy = \sqrt{\frac{\mu_\delta \xi}{\rho_\delta U_\delta}} \cdot 0,664 \lambda_0^{1/2}.$$

Отсюда для типичных условий гиперзвукового полета ($M_\infty > 5$) можно получить в критической точке сферического (радиуса r_0) носового притупления ЛА соотношения

$$\delta = \frac{1,15 M_\infty^{0,18}}{\sqrt{\text{Re}_\infty}} r_0, \quad \vartheta = \frac{0,23 M_\infty^{0,18}}{\sqrt{\text{Re}_\infty}} r_0, \quad \text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty r_0}{\mu_\infty}. \quad (3.2.35)$$

Как видно, характерные толщины пограничного слоя в критической точке при $M_\infty > 5$ от M_∞ зависят слабо.

§ 3.3. Некоторые пространственные течения

Ниже приведем некоторые автомодельные решения уравнений трехмерного пограничного слоя, которые могут быть базой для понимания основных свойств таких пространственных течений.

1. Трехмерная точка торможения с двумя плоскостями симметрии со связанными с ними координатами x_1 , x_3 и с компонентами скоростей u_1 , u_3 ; при этом параметры Ламе $H_1 = H_3 = 1$. По аналогии с (3.2.22) решение уравнений (3.1.1) в окрестности точки торможения будем искать в виде (примем, что $a_3 < a_1$, $p = p'_0 - \frac{1}{2} \rho_\delta (a_1^2 x_1^2 + a_3^2 x_3^2)$)

$$u_1 = a_1 x_1 f'_1(\zeta), \quad u_3 = a_3 x_3 f'_3(\zeta), \quad H = h_w + (H_\delta - h_w) \theta(\zeta),$$

$$v = -\frac{1}{\rho} \sqrt{\rho_\delta \mu_\delta a_1} (f_1 + c f_3), \quad c = a_3/a_1 \leq 1, \quad \zeta = \sqrt{\frac{a_1}{\rho_\delta \mu_\delta}} \int_0^y \rho dy. \quad (3.3.1)$$

Тогда из (3.1.1) получим однопараметрическую систему обыкновенных уравнений с обычными граничными условиями

$$(l f_1'')' + (f_1 + c f_3) f_1'' + \frac{\rho_\delta}{\rho} - f_1'^2 = 0,$$

$$(l f_3'')' + (f_1 + c f_3) f_3'' + c \left(\frac{\rho_\delta}{\rho} - f_3'^2 \right) = 0, \quad (3.3.2)$$

$$\left(\frac{l}{\text{Pr}} \theta' \right)' + (f_1 + c f_3) \theta' = 0, \quad l = \mu \rho / (\mu_\delta \rho_\delta).$$

При $c = 1$ имеем осесимметричную задачу, при $c = 0$ — плоскую. Численные решения этой системы в диапазоне давлений $p'_0 = = 10^{-3} \dots 10$ атм и температур $T_\delta = 2000 \dots 8000$ К [65] дают, в частности,

$$\frac{l_w \theta'_w}{\text{Pr}_w} = 0,778 \text{Pr}^{-0,6} (0,75 + 0,25 c). \quad (3.3.3)$$

При этом тепловой поток в пространственную критическую точку $q_w(c)$ равен

$$q_w(c) = \frac{l_w \theta'_w}{\text{Pr}_w} \sqrt{\mu_\delta \rho_\delta a_1} (H_\delta - i_w) = q_w(1)(0,75 + 0,25 c) \quad (3.3.3a)$$

и, как видно, линейно зависит от параметра c .

2. Линия растекания бесконечного стреловидного цилиндра.

Координатную сетку $x_1 = x$ и $x_3 = z$ выберем так, что ось x направлена вдоль образующей (линии растекания) цилиндра, а ось z — по нормали к ней в меридиональном направлении. При этом $u_\delta = \text{const}$, $w_\delta = bz$, все $\partial/\partial x \equiv 0$, $H_1 = H_2 = 1$. Система (3.1.1) в этом случае допускает решение в виде

$$\begin{aligned} u &= u_\delta g(\zeta), \quad w = w_\delta f'(\zeta), \quad H = h_w + (H_\delta - h_w) \theta(\zeta), \\ \zeta &= \sqrt{\frac{2b}{\mu_\delta \rho_\delta}} \int_0^y \rho dy, \quad v = -\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{1}{2} \mu_\delta \rho_\delta b} f(\zeta) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

и сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (2l g')' + f g' &= 0, \quad 2(l f'')' + f f'' + \frac{\rho_\delta}{\rho} - f'^2 = 0, \quad l = \frac{\rho \mu}{\rho_\delta \mu_\delta}, \\ 2 \left(\frac{l}{\text{Pr}} \theta' \right)' + f \theta' &= \frac{2 u_\delta^2}{H_\delta (1 - t_w)} \left(l \frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr}} (g^2)' \right)', \\ g(0) = f'(0) = f(0) = \theta(0) &= 0, \quad g(\infty) = f'(\infty) = \theta(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Подобная система исследовалась в работе [17], где получены ее точные решения. Так, при $\text{Pr} = 0,7$, $l \equiv 1$ имеем результаты, представленные на рис. 3.10, *a* (точки). В работе [74] при $\text{Pr} = 0,7$, $l \equiv 1$ на основе приближенного решения, учитывающего влияние вторичных течений (см. § 3.2), при $\lambda_0 > 0,1$ (что для холодной стенки имеет место в широком диапазоне углов стреловидности и чисел Маха) получено (функции g_* , φ , θ_* , введены для удобства сравнения с численными решениями других авторов):

$$\begin{aligned}
 g'_w &= \frac{1}{\sqrt{2}} g'_* = 0,332 (1 - 0,34 \lg \lambda_0), & f''_w &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi''_w = 0,332 \lambda_0^{-1/2}, \\
 \tau \theta'_w &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \theta'_* = 0,278 (1 - 0,34 \lg (0,7 \lambda_0)), & \tau &= \frac{1 - \bar{h}_w}{t_{aw} - \bar{h}_w}, & \bar{h}_w &= \frac{h_w}{H_\delta}, \\
 t_{aw} &= \frac{H_a}{H_\delta} = 1 - 0,16 \frac{u_\delta^2}{2 H_\delta}; & \lambda_0 &= \left(1 + \frac{I}{\bar{h}_\delta}\right)^{-1}, & \bar{h}_\delta &= \frac{h_\delta}{H_\delta}, \\
 I &= 0,64 \left(1 + 4,6 \bar{h}_w + 0,336 \frac{u_\delta^2}{2 H_\delta}\right).
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6}$$

Сравнение этих зависимостей с приведенными точными данными (точки) показано на рис. 3.10, при этом тепловой поток на линии растекания

$$\begin{aligned}
 q_w &= \frac{l_w \theta'_w}{Pr} \sqrt{2 b \mu_\delta \rho_\delta} (H_\delta - i_w) = \\
 &= 0,56 \sqrt{\mu_\delta \rho_\delta b} (1 - 0,34 \lg 0,7 \lambda_0) (H_a - h_w).
 \end{aligned}
 \tag{3.3.7}$$

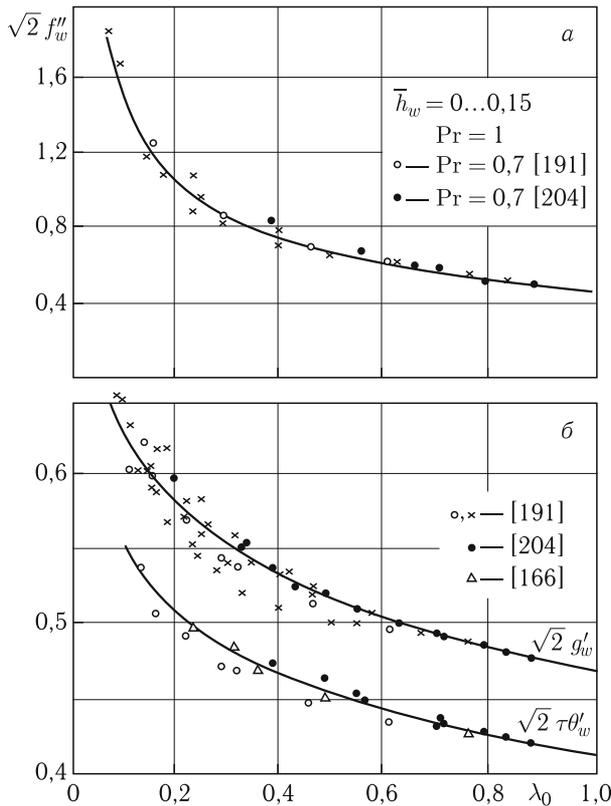


Рис. 3.10

При больших числах Маха M_∞ и малых \bar{h}_w влияние угла стреловидности цилиндра λ на теплообмен приближенно описывается простым соотношением (рис. 3.11):

$$\frac{q_w(\lambda)}{q_w(0)} \approx \cos^{1,25} \lambda. \quad (3.3.8)$$

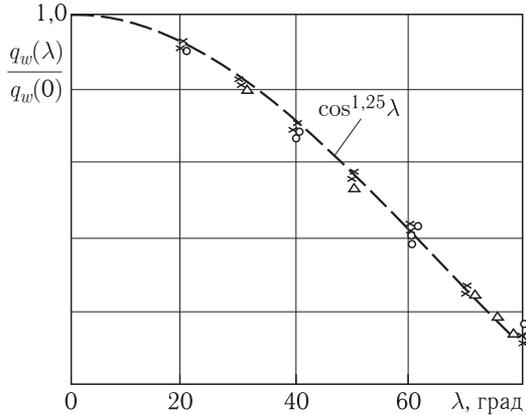


Рис. 3.11. Влияние угла стреловидности цилиндра на теплообмен при $M_\infty \cos \lambda > 1$: \times — [5]; O — [17]; Δ — [254]

3. Линия растекания круглого острого конуса, обтекаемого под углом атаки. Сетку x_1, x_3 выбираем так: $x_1 = x$ — расстояние вдоль образующей, $x_3 = \varphi$ — меридиональный угол; $H_1 = 1$, $H_2 = r = x \sin \theta_0$ (θ_0 — угол полураствора конуса). Вдоль линии растекания все параметры невязкого потока постоянны, а $w_\delta = b\varphi$.

Решение можно искать в виде:

$$u = u_\delta f'(\zeta), \quad w = w_\delta g'(\zeta), \quad H = i_w + (H_\delta - h_w) \theta(\zeta),$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{u_\delta}{2\mu_\delta \rho_\delta x}} \int_0^y \rho dy, \quad v = -\frac{3}{\sqrt{2}} u_\delta \frac{\rho_\delta}{\rho} \text{Re}_x^{-1/2} \left(f - \frac{2}{3} \zeta f' + Kg \right); \quad (3.3.9)$$

$$\text{Re}_x = \frac{\rho_\delta u_\delta x}{\mu_\delta}, \quad K = \frac{2}{3} \frac{b}{u_\delta \sin \theta_0}.$$

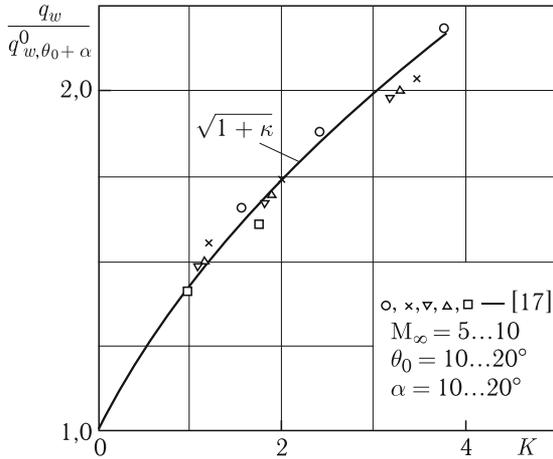


Рис. 3.12. Влияние растекания на теплообмен на линии растекания острого конуса

Вдоль линии растекания, где $K = \text{const} > 0$ (осесимметричному течению отвечает $K = 0$), получим

$$\begin{aligned}
 (lf'')' + 3(f + Kg)f'' &= 0, \\
 (lg'')' + 3(f + Kg)g'' - 2f'g' - 3Kg'^2 &= -\frac{\rho\delta}{\rho}(3K + 2), \\
 \left(\frac{l\theta'}{\text{Pr}}\right)' + 3(f + Kg)\theta' &= \frac{u_\delta^2}{2H_\delta(1 - \bar{h}_w)} \left[l \frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr}} (f'^2)' \right]', \quad l = \mu\rho/\mu_\delta\rho_\delta, \\
 f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = \theta(0) &= 0, \\
 f'(\infty) = g'(\infty) = \theta(\infty) &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

При этом тепловой поток q_w равен

$$q_w = \frac{l_w \theta'_w}{2\text{Pr}_w} \rho_\delta u_\delta (H_\delta - h_w) \text{Re}_{x_1}^{-1/2}. \tag{3.3.11}$$

Результаты решения этой задачи представлены на рис.3.12 в виде точек и аппроксимируются простым соотношением

$$\frac{q_w}{q_w^{(0)}} = \sqrt{1 + K}. \tag{3.3.12}$$

Здесь $q_w^{(0)}$ — тепловой поток на линии растекания «местного» конуса с углом полураствора $\theta_l = \theta_0 + \alpha$, но обтекаемого без угла атаки.

§ 3.4. О пограничном слое в неоднородном потоке

Рассмотрим двумерную пока задачу, сформулированную в § 2.5, о развивающемся в неоднородном потоке пограничном слое с заданным поперечным распределением скорости и энтальпии в некотором начальном сечении x_0 , как это показано, например, на рис. 3.13, а.

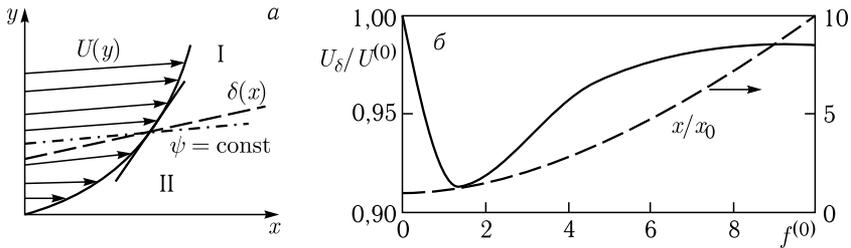


Рис. 3.13. К пограничному слою в неоднородном потоке

Принципиальным отличием такого внутреннего погранслоя от классического является необходимость сопряжения его именно с неоднородным потоком на более или менее условной границе $\delta(x)$ между ними, причем эта граница, как и для классического предельно тонкого пограничного слоя, должна определяться из условия гладкого сопряжения решений вдоль нормальной к стенке координаты y в обеих выделенных областях течения. В частности, для скорости u , например, должны выполняться условия

$$y = \delta(x), \quad u_I = u_{II}, \quad \frac{\partial u_I}{\partial y} \approx \frac{\partial u_{II}}{\partial y}, \quad (3.4.1)$$

где индексами I и II помечены величины сверху и снизу границы $\delta(x)$. Эти условия иллюстрирует рис. 3.13, а.

Однако входящий в эти условия внешний профиль скорости $u_I(y)$ не будет в общем случае совпадать с начальным $u^{(0)}(y)$ в сечении $x = x_0$ и даже при изобарическом течении будет деформироваться вдоль продольной координаты x , во-первых, за счет вязкой его диссипации, а во-вторых, и это окажется главным, за счет отклонений внешних линий тока от стенки на толщину вытеснения δ^* внутреннего пограничного слоя.

Эти условия упрощаются для *слабонеоднородного* внешнего потока с масштабом Δ поперечной неоднородности, много большим толщины δ внутреннего погранслоя. В этом случае отношение диссипативных членов в уравнениях пограничного слоя во внешней и внутренней областях течения будет иметь порядок $(\delta/\Delta)^2 \ll 1$. Тогда диссипацией внешнего потока можно пренебречь и его можно будет считать невязким с сохранением начального распределения по линиям тока полной энтальпии H и энтропии s . А поскольку в невязком двумерном течении

распределение по функциям тока ψ полной энтальпии $H(\psi)$ и энтропии $s(\psi)$ при заданном местном давлении определяет и распределения по ψ скорости $U(\psi)$ и энтальпии $h(\psi)$, то условия типа (3.4.1) на границе внутреннего погранслоя можно записать в более общем виде:

$$y = \delta, \quad \psi = \psi_\delta, \quad H_{\Pi}(\psi_\delta) = H^{(0)}(\psi_\delta), \quad s_{\Pi}(\psi_\delta) = s^{(0)}(\psi_\delta),$$

$$\frac{\partial H_{\Pi}}{\partial \psi} \approx \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial s_{\Pi}}{\partial \psi} = \frac{\partial s^{(0)}}{\partial \psi}. \quad (3.4.2)$$

Здесь $H^{(0)}(\psi)$, $s^{(0)}(\psi)$ — функции в начальном сечении $x = x_0$, неизменные затем в невязком (в рамках принятых допущений) внешнем потоке.

Принципиальным является то обстоятельство, что в реальных задачах вязкость и теплопроводность практически не деформируют неоднородное внешнее течение вдоль линий тока $\psi = \text{const}$ на участке Δx от начального сечения пограничного слоя x_0 до их поглощения пограничным слоем. Это показано на многочисленных примерах в работах [77, 114, 115] и следует из оценки, которую легко получить из уравнений ламинарного пограничного слоя в форме Мизеса. Так, на пластине имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \rho u \frac{\partial u}{\partial \psi}.$$

Отсюда получим для относительного изменения скорости Δu вдоль линии тока на указанном отрезке $\Delta x \sim \psi^2 / f_{\delta l}^2 \mu \rho u^{(0)}$

$$\frac{\Delta u}{u^{(0)}(x_0, \psi)} \sim \frac{\Delta x}{2} \mu \rho \frac{\partial^2 u^2}{\partial \psi^2} \sim \frac{\psi^2}{2u^{(0)2} f_{\delta l}^2} \frac{\partial^2 u^{(0)2}}{\partial \psi^2}. \quad (3.4.3)$$

В частности, для степенных профилей $u^{(0)} = A\psi^n$ ($n < 1$) имеем по модулю $\Delta u/u^{(0)} \cong f_{\delta l}^{-2} n(2n-1) < 0,1$. Для реальных течений, когда внешний поток образован предшествующим Блазиусовским пограничным слоем, $\Delta u/u < 0,08$ [115]. Заметим, что если ограничиться пристеночной частью пограничного слоя, где $f = \psi(\mu \rho u_\delta x_0)^{-1/2} \leq 1$, то из (3.4.3) можно получить оценки ($f_w'' = 0,332$)

$$\frac{\Delta u}{u^{(0)}} \approx -\frac{1}{4} \frac{\Delta x}{x_0}, \quad \text{где} \quad \frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{2}{f_\delta^2} \int u_\delta \frac{f df}{u} \approx \frac{4f^{3/2}}{3f_\delta^2 \sqrt{2f_w''}} \leq 0,15, \quad (3.4.4)$$

показывающие, что здесь изменение скорости вдоль линии тока до ее поглощения вязким подслоем не превышает 4%.

Рассмотрим развитие внутреннего пограничного слоя от точки $x = x_0$ внутри несжимаемого пограничного слоя на пластине с внешними параметрами ρ , μ , U_∞ . Отношение $U_\delta/U^{(0)}$ скорости на границе внутреннего пограничного слоя к начальной $U^{(0)}$, при $x = x_0$, на той же линии тока показано на рис. 3.13, б и заключено в пределах $U_\delta/U^{(0)} = 0,9 \dots 1$. На этом рисунке на оси абсцисс отложена функция Блазиуса $f^{(0)} = \psi/\sqrt{\rho \mu U_\infty x_0}$, постоянная на линиях тока,

так что на границе внутреннего пограничного слоя при $U_\delta \sim U_\infty$ величина $f^{(0)} \approx f_\delta ((x - x_0)/x_0)^{1/2}$, где $f_\delta = 3,3$. Обратная зависимость $(x - x_0)/x_0 = 0,1 f^{(0)2}$ также показана на рис. 3.13, б.

Эти оценки получены при $U_\delta \sim U_\infty$. В действительности же начальный профиль скорости в точке x_0 линеен по y вблизи стенки, $u^{(0)} = \Omega y$, где $\Omega = \tau_w/\mu_w$ (τ_w — местное трение на стенке), поэтому на границе внутреннего слоя с толщиной δ скорость имеет порядок $u_\delta \sim \Omega\delta$, и из оценки $\delta/L \sim \text{Re}^{-1/2}$ можно получить $\delta \sim (\mu(x - x_0)/\rho\Omega)^{1/3}$.

Следовательно, внутренний пограничный слой развивается быстрее внешнего и, таким образом, поглотит его при $x/x_0 \gg 1$. Это следует, в частности, из рис. 3.13, б. Подобные задачи о внутреннем пограничном слое возникают, например, при внезапном изменении граничных условий на стенке (скачок температуры, вдув и т. д.).

Таким образом, для не очень «крутых» профилей начальных параметров течение во внешней, по отношению к внутреннему пограничному слою, области вообще можно полагать недиссипативным и невязким, причем в приведенном примере при практической однопорядковости масштабов Δ и δ неоднородности внешней и внутренней областей течения, что важно для приложений этой теории.

Учет внешней неоднородности потока с помощью граничных условий (3.4.2) практически не изменит изложенного в гл. 8 численного алгоритма решения уравнений двумерного пограничного слоя, в котором нужно добавить несложную процедуру вычисления функции тока.

В трехмерном случае, несмотря на справедливость условий (3.4.1), необходимо учитывать окружное (вдоль переменной x_3 , или φ) перетекание газа как во внешней, так и в погранслойной областях [78], т. е. практически расчет пограничного слоя должен идти одновременно с расчетом внешней невязкой области течения с учетом толщины вытеснения пограничного слоя. Такой подход реализован в работе [80]. Альтернативой ему является модель вязкого ударного слоя, основанная на решении композитной системы уравнений (2.5.7)–(2.5.10) одновременно для всего поперечного сечения возмущенной области течения между поверхностью тела и ударной волной.

Глава 4

ТУРБУЛЕНТНЫЕ И ПЕРЕХОДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ВЛИЯНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ И ВДУВА

При больших числах Рейнольдса ($Re \geq 10^5 \dots 10^6$ в зависимости от условий течения) ламинарные пограничные слои теряют устойчивость, проходя с ростом числа Рейнольдса две стадии: стадию *переходного*, или *ламинарно-турбулентного* течения, и стадию развитого полностью *турбулентного* течения, подчиняющегося своим внутренним закономерностям [97, 106, 110, 146, 150, 166, 168, 175, 187, 199, 226, 227, 234, 241, 275].

§ 4.1. О моделях и некоторых свойствах турбулентных течений

В иерархии моделей турбулентных течений по степени их сложности и развития можно выделить три уровня или этапа. На первоначальном этапе на основе эксперимента и теории подобия были исследованы основные характеристики профилей скорости в пограничных слоях и трубах и получены эмпирические критериальные зависимости сначала для коэффициентов трения, а позже и для коэффициентов теплообмена как функций от числа Рейнольдса, температурного фактора $\bar{h}_w = h_w/H_\delta$ и других критериев подобия. В частности, для турбулентного трения τ_w и теплового потока q_w на пластине в высокотемпературном потоке принято использовать формулы

$$\tau_w = 0,0296 K_* \rho_\delta U_\delta^2 Re_\delta^{-0,2}, \quad q_w = 0,0296 Pr^{-0,6} K_* \rho_\delta U_\delta Re_\delta^{-0,2} (H_e \dots h_w),$$
$$K_* = \left(\frac{\rho_*}{\rho_\delta}\right)^{0,8} \left(\frac{\mu_*}{\mu_\delta}\right)^{0,2}, \quad Re_\delta = \frac{\rho_\delta U_\delta x}{\mu_\delta}, \quad H_e = h_\delta + \frac{1}{2} \kappa U_\delta^2; \quad (4.1.1)$$
$$\kappa = Pr^{1/3} = 0,89 \quad \text{при} \quad Pr = 0,71.$$

Коэффициент трения $C_{f\delta}$ связан с числом Стантона St_δ аналогией Рейнольдса (3.2.17) с коэффициентом $\bar{k} = Pr^{-0,6}$. Для вычисления характерных параметров ρ_* и μ_* в этой формуле можно использо-

вать определяющую энthalпию Эккерта (3.2.15). Такую возможность подтверждает рис. 4.1, где экспериментальные величины коэффициента трения на теплоизолированной пластине согласуются (при $Pr = 0,7$) с расчетной кривой $C_f/C_{f0} = K_*$, где C_{f0} — коэффициент C_f при $M_\delta = 0$, в широком диапазоне чисел Маха M_δ [166].

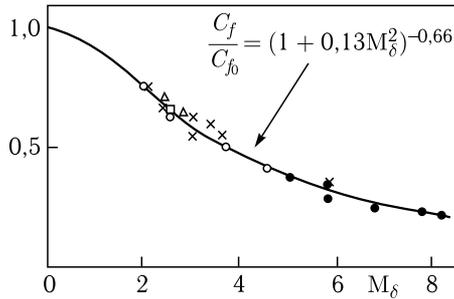


Рис. 4.1. Зависимость коэффициента трения от числа Маха M_δ на теплоизолированной пластине

В работе [146] приведены результаты экспериментов в ударных трубах, примерно для тех же условий, что и на рис. 3.5, только на боковой поверхности притупленного цилиндра. Результаты этих экспериментов аппроксимируются формулой

$$q_w = 0,0296 Pr^{-0,6} \left(1 + 0,4 \frac{h_f}{H_\delta}\right) \rho_\delta U_\delta Re_\delta^{-0,2} (H_e - h_w), \quad (4.1.2)$$

$$Re_\delta = \frac{\rho_\delta U_\delta x}{\mu_\delta}, \quad \frac{h_f}{H_\delta} \leq 0,3, \quad \bar{h}_w \geq 0,2, \quad M_\delta \approx 2.$$

Те же оценки, что и в § 3.2 для аналогичных экспериментов, показывают практическую эквивалентность этой формулы с формулой (4.1.1) для условий эксперимента. Однако формула (4.1.2) непригодна при больших числах Маха (данные [146] получены при $M_\delta = 2$), а формула (4.1.1) является более общей.

Для *трехрежимного* пограничного слоя с последовательностью *ламинарной, переходной и турбулентной* областей состояния пограничного слоя тепловой поток обычно определяется по комбинированной формуле [150]:

$$q_w = q_l(1 - \Gamma) + \Gamma q_t, \quad (4.1.3)$$

где Γ — коэффициент перемежаемости, характеризующий степень развития турбулентности в пограничном слое от нулевой ($\Gamma = 0$, $q_w = q_l$) до полной ($\Gamma = 1$, $q_w = q_t$). Область $0 \leq \Gamma \leq 1$ относится, таким образом, к переходному — от ламинарного к турбулентному пограничному слою. Параметр Γ при этом задается некоторой монотонной функцией переменной $\bar{x} = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$, где x_1 и x_2 — координаты точки начала и конца переходной зоны, длина которой

$x_2 - x_1$ обычно примерно равна длине x_1 предшествующей ламинарной области. Начальная точка x_1 задается числом Рейнольдса перехода $Re_{кр}$, построенного по местной длине x или характерным толщинам пограничного слоя δ , δ^* , ϑ и т. д. Для гладких поверхностей в сверх- и гиперзвуковом потоке переход, согласно экспериментам, наступает при местных числах Рейнольдса $Re_x = 10^5 \dots 10^6$ с разбросом данных многочисленных авторов вдвое и более (см. § 4.3). Теоретическое же предсказание положения области перехода и параметров течения в ней пока невозможно, несмотря на огромные усилия, прилагаемые к решению этой проблемы. В то же время этот вопрос важен для практики, так как турбулентные тепловой поток q_t и трение τ_t при больших местных числах Рейнольдса существенно больше ламинарных q_l и τ_l . В самом деле, сравнивая формулы (4.1.1) и (3.2.17) для пластины, получим отношения $\lambda_q = q_t/q_l \approx \tau_t/\tau_l \approx 10^{-1} Re_*^{0,3}$. (Для сжимаемого газа число Рейнольдса $Re_* = \rho_* U_\delta x / \mu_*$ в этих оценках следует определять по определяющей энтальпии h_* .) Очевидно, $\lambda_q \leq 1$ лишь при $Re_* \leq 10^3$, т. е. далеко за пределами возникновения турбулентности в пограничных слоях.

Казалось бы, превышение величин q_t и τ_t над q_l и τ_l должно быть обусловлено меньшей толщиной δ_t турбулентного пограничного слоя по сравнению с толщиной δ_l ламинарного при тех же условиях. Однако в несжимаемой жидкости на пластине $\delta_t \approx 0,38 \cdot x Re_*^{-0,2}$ (эксперимент), а $\delta_l \approx 5 \cdot x Re_*^{-1/2}$, и их отношение $\delta_t/\delta_l \sim q_t/q_l$ также значительно больше единицы при больших числах Re_* (что используется иногда для определения положения переходной зоны оптическими средствами измерений).

Этот факт свидетельствует о существенно большей турбулентной вязкости μ_t по сравнению с молекулярной, или «ламинарной», $\mu_l = \mu$. В самом деле, положив, например, напряжение трения $\tau_t = \mu_t \partial u / \partial y \sim \mu_t U_\delta / \delta_t$, получим отношение

$$\mu_t/\mu_l \sim \tau_t \delta_t / (\tau_l \delta_l) \sim 10^{-2} Re_*^{0,6} > 1 \quad \text{при} \quad Re_* \geq 2,2 \cdot 10^3. \quad (4.1.4)$$

Отсюда следует, что турбулентная вязкость должна изменяться вдоль пограничного слоя по закону $\mu_t \sim x^{0,6} \sim \delta_t^{3/4}$.

В гл. 5 будет дан инженерный метод, позволяющий пересчитывать результаты или экстраполировать формулы (4.1.1) или (3.2.16) для пластины на пограничные слои более общего класса.

Однако представляется заманчивым использовать для этих целей и дифференциальные уравнения с турбулентными коэффициентами вязкости μ_t и теплопроводности λ_t и турбулентным давлением p_t вместо молекулярных μ , λ и p . На основе этой аналогии модель турбулентных течений принято описывать теми же уравнениями, что

и в § 1.2, только с обобщенными реологическими связями:

$$\begin{aligned} P^{(\Sigma)} &= P_\mu + P_t = -p_*^{(\Sigma)} \tilde{E} + 2\mu^{(\Sigma)} E_\varepsilon, \\ \mu^{(\Sigma)} &= \mu + \mu_t, \quad p^{(\Sigma)} = p + p_t, \\ p_*^{(\Sigma)} &= p^{(\Sigma)} + \frac{2}{3}\mu^{(\Sigma)} \operatorname{div} U, \quad E_\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}\|. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Здесь P_μ и P_t — тензоры молекулярных и турбулентных напряжений. Аналогично вектор суммарного теплового потока может быть (в упрощенном варианте модели, уточненной ниже) записан в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(\Sigma)} &= \mathbf{J}_\mu + \mathbf{J}_t = -\lambda^{(\Sigma)} \operatorname{grad} T, \\ \lambda^{(\Sigma)} &= \lambda + \lambda_t. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

В этих соотношениях скорости деформаций ε_{ij} и градиент температуры определяются уже по осредненному полю скоростей и температуры. Однако в отличие от молекулярных, чисто термодинамических характеристик среды p , μ , λ , величины p_t , μ_t , λ_t , являются функциями уже структуры течения, поэтому такая модель является по своей сути механической или газодинамической, но не *реологической*, в точном значении этого термина. Такую модель турбулентности называют *псевдо-реологической*.

Алгебраические модели турбулентности (или модели 2-го уровня) основаны на использовании тех же уравнений (3.1.1), но отнесенных уже к осредненному движению и с подобранными надлежащим образом коэффициентами вязкости μ_t , теплопроводности λ_t . Для пограничных слоев коэффициент вязкости, например, задается обычно в виде эмпирических зависимостей типа $\mu_t(y/\delta, \kappa_i)$, где под κ_i подразумевается совокупность критериев подобия или каких-либо экспериментальных констант. Первая попытка получения подобных зависимостей была предпринята еще Прандтлем, предположившим, что в *сдвиговом*, т. е. изменяющемся в основном лишь по нормали к стенке y течения, пульсации скоростей u' , v' , входящие в напряжения $p_{xy} = \tau_t$, пропорциональны градиенту средней скорости, т. е. $u' \sim v' \sim l_t \partial u / \partial y$ и т. д., где l_t — *масштаб турбулентности или длина пути смешения*. Такое предположение приводит к формуле (черта означает осреднение по времени)

$$\tau_t = -\overline{\rho u' v'} = \rho l_t^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu_t = \rho l_t^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (4.1.7)$$

Один из сомножителей $\partial u / \partial y$ взят по модулю из физических соображений.

Поскольку турбулентные пульсации должны затухать вблизи стенки, то масштаб l_t стремится к нулю при приближении к ней, а около самой стенки образуется очень тонкий *ламинарный подслой*, течение в котором определяется уже молекулярной вязкостью, которая суще-

ственно меньше турбулентной. Это обстоятельство приводит к значительно большей «наполненности» турбулентного профиля скоростей по сравнению с ламинарным, что иллюстрирует, в частности, рис. 3.3, б, где показаны профили скорости на пластине. В последнем случае вне ламинарного подслоя (его граница обозначена значком) профиль скорости имеет *степенную* форму $u/u_\delta = (y/\delta)^n$, $n = 1/7$, обычно используемую вне зависимости от числа Маха или температурного фактора.

Для замыкания задачи требуется также задать *турбулентное число* Прандтля Pr_t , полагаемое обычно равным $Pr_t = 0,9$.

Для трехрежимного пограничного слоя коэффициент вязкости заменяется комбинированным:

$$\mu^{(\Sigma)} = \mu_l(1 - \Gamma) + \Gamma\mu_t, \quad (4.1.8)$$

где коэффициент перемежаемости Γ имеет тот же смысл, что и в (4.1.3).

Использование подобных моделей позволяет рассчитывать более сложные погранслоиные течения в том числе и с учетом физико-химических процессов с выявлением уже детальной структуры течения.

И, наконец, *дифференциальные модели турбулентности (или модели третьего уровня)* позволяют рассчитывать течения типа отрывных зон и т. д. в отличие от изложенных выше моделей, пригодных лишь для сдвиговых течений. Эти модели в той или иной степени основаны на идеях *Колмогорова А.Н.* [97]. В схематичном изложении суть этих моделей сводится к следующему. Предполагается, прежде всего, что тензор турбулентных напряжений (4.1.5) пропорционален средней кинетической энергии k пульсаций скоростей u' , v' , w' (в декартовой системе координат), определяемой соотношением

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}). \quad (4.1.9)$$

Следует иметь ввиду, что в двумерном течении даже в среднем компонента пульсационной скорости $w' \neq 0$ и по принимаемой гипотезе равноправна с другими компонентами. Среднее турбулентное давление p_t , входящее в (4.1.5), определяется соотношением

$$p_t = \frac{2}{3} \rho k. \quad (4.1.10)$$

Эта модель турбулентности справедлива, во-первых, в предположении, что масштаб турбулентности l_t наиболее энергоемких вихрей много меньше характерного масштаба L течения (толщины пограничного слоя δ , например), а во-вторых, в предположении близости турбулентности к *локально-изотропной* и *равновесной*, суть которой сводится, в конечном счете, к условиям

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = \frac{2}{3}k, \quad \overline{u'v'} = \overline{u'w''} = \dots = 0. \quad (4.1.11)$$

Малые отступления от этих равенств и приводят к возникновению сдвиговых и нормальных турбулентных напряжений. В рамках равновесной модели турбулентности коэффициенты вязкости μ_t , теплопроводности λ_t и диффузии D_t из соображений размерности должны иметь структуру

$$\mu_t = C_\mu \rho l_t k^{1/2}, \quad \lambda_t = \mu_t c_p / \text{Pr}_t, \quad \rho D_t = \mu_t / \text{Sc}_t, \quad (4.1.12)$$

где коэффициент C_μ — безразмерная постоянная или надлежущая функция каких-либо безразмерных переменных и параметров, а турбулентные числа Прандтля Pr_t и Шмидта Sc_t обычно полагают равными единице.

С этими допущениями уравнения движения из § 1.2 сохраняют свой вид для осредненного движения с формальной заменой молекулярного тензора напряжений P_μ на суммарный $P^{(\Sigma)} = P_\mu + P_t$, определяемый соотношениями (4.1.5) (дополненными формулами (4.1.8), (4.1.10)). Осредненное уравнение энергии в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E^{(\Sigma)}}{\partial t} + \text{div} [(\rho E^{(\Sigma)} + p^{(\Sigma)})\mathbf{U}] &= \rho q - \text{div} \mathbf{J}^{(\Sigma)} + \text{div} (P_t^{(\Sigma)}\mathbf{U}), \\ E^{(\Sigma)} &= e + \frac{1}{2}U^2 + k, \quad \mathbf{J}^{(\Sigma)} = -(\lambda_{\text{ef}} + \lambda_t) \text{grad} T + (\mu + \rho D_t) \text{grad} k, \\ p^{(\Sigma)} &= p + p_t. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Поток $\mathbf{J}^{(\Sigma)}$ здесь отличается от (4.1.6) учетом диффузии турбулентной энергии k , обусловленной переносом макроскопических жидких частиц, которым сопровождаются турбулентные пульсации. В такой постановке турбулентная энергия k является как бы «внутренней» энергией потока, находящейся в обмене с его кинетической энергией и термодинамической энергией e . При этом средняя полная энтальпия потока с учетом пульсаций будет равна

$$H^{(\Sigma)} = h + \frac{1}{2} \overline{(U + U')^2} \approx h + \frac{1}{2}U^2 + k. \quad (4.1.14)$$

Заметим, что во многих течениях величина k мала по сравнению с энергией $E = e + U^2/2$ и ею обычно пренебрегают, во всяком случае, всегда в алгебраических моделях турбулентности. Тем не менее, наличие членов с турбулентной энергией k в уравнении энергии всегда следует иметь в виду, особенно для отрывных течений, где на фоне небольших местных чисел Маха наблюдается повышенный уровень пульсаций.

В любом случае энергия k остается искомым параметром сформулированной задачи, входящим в коэффициенты μ_t и т. д., и поэтому подлежащим определению. Эволюция турбулентной энергии описывается

обычно дифференциальным уравнением, которое приведем без вывода (например, [227]):

$$\rho \frac{dk}{dt} = \operatorname{div} [(\mu + \rho D_t) \operatorname{grad} k] + W_G - W_D, \quad W_G = p_t \tilde{E}. \quad (4.1.15)$$

Здесь W_G и W_D — объемные скорости генерации и диссипации турбулентной энергии, \tilde{E} — тензор скоростей деформации осредненного течения. Это уравнение, по сути, «сконструировано» по аналогии со структурой вязких членов в уравнении Навье–Стокса. Член $\rho D_t \operatorname{grad} k$ здесь представляет собой поток турбулентной энергии за счет турбулентной диффузии, член W_G определяется по аналогии с молекулярной вязкой диссипацией энергии q_τ (1.2.12), только вместо молекулярной вязкости берется турбулентная μ_t (4.1.12). Это основано на предположении, что диссипация кинетической энергии осредненного потока под воздействием турбулентных напряжений непосредственно идет на увеличение энергии пульсаций k и переходит во внутреннюю энергию e лишь за счет диссипации энергии k , т. е. за счет члена W_D в уравнении (4.1.15), имеющего (из соображений размерности) вид

$$W_D = C_D \rho k^{3/2} / l_t. \quad (4.1.16)$$

Коэффициент C_D , как и C_μ в (1.12), может быть постоянным или являться функцией безразмерных координат или иных параметров (подробнее см. § 4.2). Но в функции μ_t и W_D , помимо коэффициентов C_μ и C_D , входит еще масштаб турбулентности l_t , определение которого является наиболее сложным в теории турбулентности. Представить эту функцию в виде каких-либо эмпирических алгебраических формул возможно лишь для течений типа пограничных слоев, однако это лишает дифференциальную модель турбулентности каких-либо преимуществ по сравнению с алгебраической. А сконструировать для l_t уравнение на основе какого-либо закона сохранения пока не удалось.

В заключение заметим, что изложенные модели турбулентности 2-го и 3-го уровней, несмотря на их внешнюю математическую оформленность, являются *полуэмпирическими*, так как они основаны на уравнениях, полученных из соображений теории подобия и размерности, общих физических представлений о структуре потоковых и диссипативных членов в математической записи законов сохранения и на совокупности эмпирических коэффициентов C_μ и т. д. (постоянных или переменных), подбираемых из условия согласования теории с экспериментом по каким-либо доступным для измерения параметрам, обычно немногочисленным. По этой причине комбинация этих коэффициентов, подобранная для одного класса течений, нуждается в дополнительной апробации при их приложении к течениям других классов. Тем не менее разработку подобных моделей турбулентности, особенно дифференциальных, следует считать существенным прогрессом. Некоторые примеры применения этих теорий будут приведены далее.

§ 4.2. Уравнения алгебраической и дифференциальной моделей турбулентности

Ниже рассмотрены наиболее часто используемые модели турбулентности, сформулированные в §4.1: алгебраическая модель Болдуина–Ломакса и модели $(k-\varepsilon)$ и $(k-\omega)$ с двумя дифференциальными уравнениями.

Для определения величины коэффициента турбулентной вязкости в пристенных течениях существуют хорошо апробированные алгебраические модели турбулентности, прежде всего модели Себечи–Смита [199] и Болдуина–Ломакса [187].

Наиболее часто используемой алгебраической моделью турбулентности при интегрировании уравнений Навье–Стокса является двухслойная модель Болдуина–Ломакса. В этой модели величина μ_t полагается равной μ_{in} для внутреннего слоя (пристеночная область) и μ_{out} для внешнего слоя («область следа»). Во внутренней области используется формула Прандтля–Ван-Дрифта:

$$\mu_{in} = \rho(\kappa n D)^2 |\Omega|, \quad (4.2.1)$$

$\kappa = 0,4$ — константа Кармана, $|\Omega|$ — модуль местной локальной завихренности ($\Omega = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$ в двумерных течениях, когда $w \equiv 0$, $\partial/\partial z \equiv 0$, и

$$\Omega^2 = (\partial u/\partial y - \partial v/\partial x)^2 + (\partial w/\partial y - \partial v/\partial z)^2 + (\partial u/\partial z - \partial w/\partial x)^2$$

для полностью развитых трехмерных), n — расстояние по нормали от поверхности тела. Демпфирующий фактор Ван-Дрифта равен

$$D = 1 - \exp\left(-\frac{n^+}{26}\right), \quad n^+ = \rho_w \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} \frac{n}{\mu_w}, \quad (4.2.2)$$

где n^+ — безразмерная координата закона стенки, τ_w — трение на стенке.

Формула для внешней части слоя в модели Болдуина–Ломакса аналогична формуле Клаузера для «области следа»:

$$\mu_{out} = 0,0168 C_{cp} F_{wake} \gamma_{K1}, \quad (4.2.3)$$

где $C_{cp} = 1,6$ — добавочная константа, предложенная Болдуином и Ломаксом. Для присоединенных сдвиговых течений

$$F_{wake} = n_{max} F_{max}, \quad (4.2.4)$$

а величины n_{max} и F_{max} соответствуют значениям в точке, где достигается максимум «функции завихренности»:

$$F_{max} = F(n_{max}); \quad F(n) = n |\Omega| D. \quad (4.2.5)$$

Коэффициент перемежаемости Клебанава определяется как (здесь $C_{K1} = 0,3$)

$$\gamma_{K1} = \frac{1}{1 + 5,5 \left(C_{K1} \frac{n}{n_{\max}} \right)^6}. \quad (4.2.6)$$

Двухпараметрические дифференциальные модели турбулентности. Для моделирования турбулентности используется стандартная $(k-\varepsilon)$ -модель [227], а также ее вариант Лэма и Бремхорста [226] для низких чисел Рейнольдса. Уравнение для кинетической энергии турбулентности k в обоих вариантах по структуре одинаково (x, y — координаты вдоль и по нормали к телу):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v k)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \rho \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Уравнение для диссипации ε записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \varepsilon)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_k = \tau_{ij}^{\text{tur}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) / 2 = \\ = \mu_t \left[2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{v^2}{y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\rho k + \mu_t \operatorname{div} \mathbf{V}) \operatorname{div} \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\tau_{ij}^{\text{tur}} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\rho k + \mu_t \operatorname{div} \mathbf{V}),$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad C_\mu = 0,09; \quad \sigma_k = 1,0;$$

$$\sigma_\varepsilon = 1,3; \quad C_1 = 1,44; \quad C_2 = 1,92.$$

Здесь P_k — генерация кинетической энергии турбулентности k (например, для течения в погранслое $P_k = \mu_t (\partial u / \partial y)^2$). Отметим, что в произвольном течении сжимаемого газа P_k может быть, вообще говоря, любого знака. Обобщение на трехмерный случай для произвольной системы координат производится как и для обычных уравнений Навье–Стокса. Для стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели

$$f_\mu = f_1 = f_2 = 1. \quad (4.2.9)$$

В варианте Лэма–Бремхорста для низких чисел Рейнольдса

$$f_\mu = [1 - \exp(-0,0165R_y)]^2 \left(1 + \frac{20,5}{R_T}\right); \quad f_1 = 1 + (0,05/f_\mu)^3,$$

$$f_2 = 1 - \exp(-R_T^2), \quad R_T = k^2/(\nu\varepsilon), \quad R_y = y\sqrt{k}/\nu, \quad \nu = \mu/\rho. \quad (4.2.10)$$

В этих формулах, полученных для пограничного слоя, подразумевается, что координата y отсчитывается по нормали к стенке. Модификация касается только пристеночной области, где турбулентные числа Рейнольдса R_T , R_y малы. При удалении от стенки ($y^+ > 30$, $y^+ = \rho_w \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w \mu_w}} \frac{y}{\mu_w}$) формулы (4.2.10) переходят в стандартную модель турбулентности (4.2.9).

В расчетах также была использована ($k-\omega$)-модель турбулентности [275], впервые предложенная А. Н. Колмогоровым [97]. Уравнения для k и величины $\omega \sim \varepsilon/k$ в этой модели имеют вид

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v k)}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \beta^* \rho \omega k, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \omega)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \omega)}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \rho \omega^2, \quad (4.2.12)$$

$$\mu_t = \rho \nu_t = \rho \frac{k}{\omega}; \quad \beta^* = C_\mu = 0,09; \quad \sigma_k = \sigma_\omega = 0,5,$$

$$\beta_1 = 0,075; \quad \kappa = 0,41; \quad \gamma = \beta_1/\beta^* - \sigma_\omega \kappa^2/\sqrt{\beta^*}.$$

Здесь P_k — генерация кинетической энергии турбулентности, определенная в (4.2.8).

При постановке граничных условий на теле в стандартной $k-\varepsilon$ модели используются пристеночные функции [227]. В модификации Лэма–Бремхорста расчет проводится вплоть до стенки. Граничное условие на стенке для энергии турбулентности $k_{\text{wall}} = 0$. Для диссипации ε нет физически обоснованного граничного условия на стенке, можно лишь утверждать, что ее величина ограничена. Часто используют условие $k_{\text{wall}} = \nu(\partial^2 \varepsilon/\partial y^2)_{\text{wall}}$, которое, однако, не является независимым, поскольку следует из уравнения для k на стенке. Иногда для ε берут более простое условие — $(\partial \varepsilon/\partial y)_{\text{wall}} = 0$ [241], которое и использовалось здесь в расчетах.

В отличие от $(k-\varepsilon)$ -модели $(k-\omega)$ -модель не требует использования специальных функций вроде (4.2.10) в окрестности стенки ($y^+ < 30$), а для величины ω на поверхности есть достаточно простое граничное условие $\omega \sim 1/y^2$, где y — размер ячейки у стенки. В работе [234] показано, что для несжимаемых течений с умеренным положительным (направленным против потока) градиентом давления $(k-\omega)$ -модель точнее описывает логарифмическую область, чем $(k-\varepsilon)$ -модель. Но, как продемонстрировано в той же работе, для течений с сильным (приводящим к отрыву) положительным градиентом давления ни одна из моделей турбулентности с двумя уравнениями в общем случае не позволяет правильно предсказать параметры потока: начало и длину зоны отрыва, распределение давления, коэффициенты трения и теплообмена.

Одним из серьезных недостатков $(k-\omega)$ -модели является зависимость численного решения от величины ω в набегающем потоке, что не позволяет с уверенностью использовать ее в сложных течениях (например, обтекание профиля крыла).

На рисунках 4.2 и 4.3 экспериментальные данные по распределению тепловых потоков на притупленных конусах сравниваются с расчетами по описанным выше алгебраической и дифференциальной $(k-\varepsilon)$ (в варианте Лэма–Брэмхорста) моделям в рамках метода вязкого ударного слоя. Численное решение систем уравнений для $(k-\varepsilon)$ и $(k-\omega)$ турбулентных моделей осуществляется тем же методом, что и решение системы газодинамических уравнений. Согласие расчетов и экспериментов вполне удовлетворительное, причем, казалось бы, более продвинутая дифференциальная модель не улучшает результаты по сравнению с алгебраической, что неудивительно, поскольку обе модели

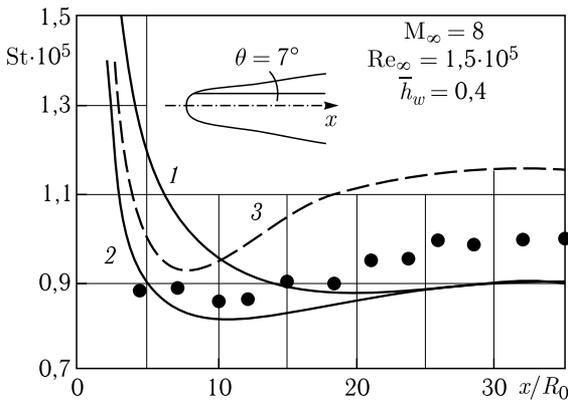


Рис. 4.2. Сравнение экспериментальных данных (●) на гладком притупленном конусе с расчетами (кривые): 1 — метод средних массовых величин, 2 — алгебраическая модель турбулентности, 3 — дифференциальная модель турбулентности

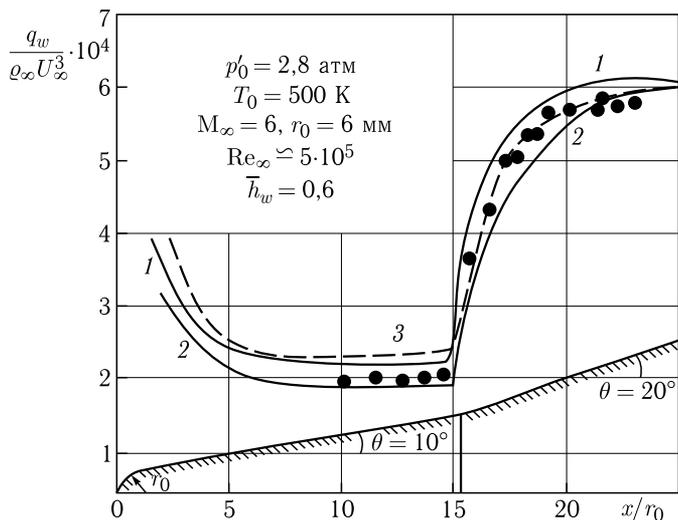


Рис. 4.3. Сравнение экспериментальных данных (•) на двойном притупленном конусе ($\theta_1 = 10^\circ$ и $\theta_2 = 20^\circ$) с расчетами (кривые): 1 — метод средних массовых величин, 2 — алгебраическая модель турбулентности, 3 — дифференциальная модель турбулентности

формируются на базе одной и той же совокупности экспериментальных данных.

Однако следующие две задачи уже недоступны для алгебраической модели турбулентности и могут быть решены только на основе дифференциальных моделей.

На рис. 4.4 дано распределение тепловых потоков по пластине, перпендикулярной осесимметричной дозвуковой подогретой турбулентной струе [119], полученное на основе использования упомянутой выше ($k-\epsilon$)-модели турбулентности. Этот пример иллюстрирует эффект

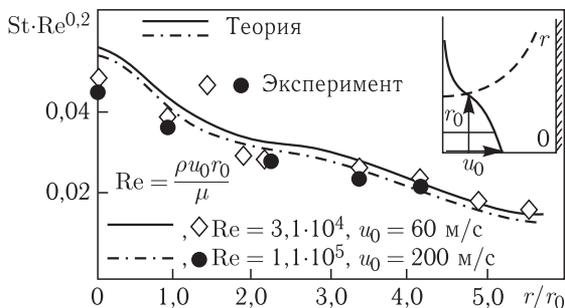


Рис. 4.4. Распределение тепловых потоков по пластине перпендикулярной осесимметричной подогретой турбулентной дозвуковой струе

турбулентной точки торможения [93], суть которого состоит в том, что в турбулентной струе из-за турбулентных пульсаций ламинарный пограничный слой отсутствует вообще, хотя распределения тепловых потоков по пластине несут ламинарный характер при турбулентной зависимости их от числа Рейнольдса $q \sim Re^{-0,2}$.

Другим примером такого рода является турбулентное течение в донной области за притупленным конусом, распределения тепловых потоков и давления по днищу которого даны на рис.4.5 ($M_\infty = 6$, $Re_{\infty R} = 2 \cdot 10^6$, $t_w = 0,3$, где R — радиус донного среза). Как видно, экспериментальные данные вполне удовлетворительно согласуются с расчетами [56] по $(k-\varepsilon)$ -модели в варианте Лэма–Бремхорста.

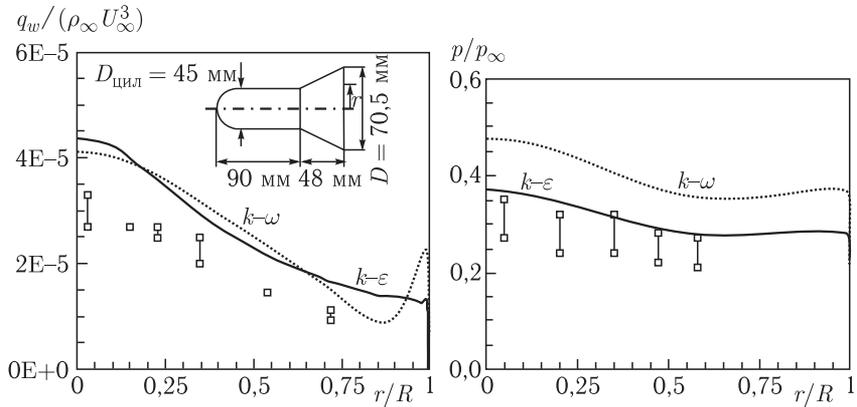


Рис. 4.5. Распределение тепловых потоков (а) и давления (б) вдоль донного среза притупленного конуса при сверхзвуковом обтекании

Следует особо подчеркнуть, что все три группы экспериментов на рисунках 4.3–4.5 анализировались в рамках одной и той же $(k-\varepsilon)$ -модели с поправками Лэма–Бремхорста, полученными, в сущности, на основе экспериментов с течением несжимаемой жидкости в трубе, что позволяет полагать достаточную физическую общность этой модели. Отступление от нее, т. е. использование условий (4.2.9), резко ухудшает согласие с экспериментом.

§ 4.3. Переход режима течения в пограничном слое из ламинарного в турбулентный

Проблема выбора практического критерия ламинарно-турбулентного перехода, который сопровождается значительной интенсификацией теплообмена, является одной из ключевых при проведении траекторных расчетов теплообмена и тепловой защиты летательных аппаратов. Широко распространенный подход, основанный на расчетах теплозащиты (ТЗП) по наибольшему локальному тепловому потоку между лами-

нарным и турбулентным значениями, ведет к завышению требований к теплозащитным материалам и необоснованным запасам толщины и веса ТЗП, а для скоростных аппаратов — еще и к значительным погрешностям в определении аэродинамических характеристик (АДХ) и траектории спуска. Эта сложная проблема решается, главным образом, на основе экспериментальных исследований на моделях в аэродинамических трубах и опыта летных испытаний.

Основной недостаток этого подхода заключается в том, что уровень возмущений потока в трубах обычно значительно выше, чем в натуральных условиях. Кроме того, в испытаниях на малых моделях трудно адекватно воспроизвести эффекты шероховатости поверхности, которая сильно влияет на переход, особенно при низких температурных факторах. В целом это ведет к преувеличению роли турбулентного режима в условиях натурального полета и снижает весовое совершенство тепловой защиты аппарата. Поэтому полученные в эксперименте критерии перехода необходимо проверять и корректировать по результатам летных испытаний.

Имеется огромное количество публикаций по экспериментальному исследованию перехода пограничного слоя¹⁾, в которых предложены критерии перехода, часто строго индивидуальные и применимые лишь к конкретной компоновке ЛА. Конечно, предпочтительнее иметь обобщенные критерии перехода, позволяющие описать различные экспериментальные данные и пригодные для различных компоновок. Практически очевидно, что такие критерии должны строиться на основе использования локальных характеристик ламинарного пограничного слоя, таких как характерные интегральные толщины, учитывающие предысторию пограничного слоя, и местные параметры на внешней границе (индекс δ). Наиболее часто переход описывают с помощью зависимостей местного числа Рейнольдса Re_ϑ , построенного по толщине потери импульса ламинарного погранслоя ϑ , от, главным образом, местного числа Маха M_δ , температурного фактора $t_w = \bar{t}_w = h_w/H_\delta$, а также от местного единичного числа Рейнольдса $Re_{\delta 1} = \rho_\delta u_\delta / \mu_\delta$. Последний параметр, по-видимому, отражает влияние различных возмущений в аэродинамических трубах (например, акустические возмущения от турбулентного пограничного слоя на стенках сопла) [48], хотя зависимость перехода от $Re_{\delta 1}$ прослеживается и в некоторых летных испытаниях [192], а также при испытаниях в баллистических трассах [139].

Примерами таких эмпирических зависимостей для критического числа Рейнольдса на гладкой поверхности являются

$$Re_{\bar{\vartheta}} = 270 M_\delta \quad (4.3.1)$$

¹⁾ Работы [23, 29, 34, 48, 61, 62, 64, 86, 89, 99, 104, 105, 125, 126, 132, 136, 137, 139, 140, 148, 155–157, 161, 162, 165, 167, 169, 172, 173, 180–182, 189, 193, 224, 252, 253, 261, 266, 278] и др.

— для «Шаттла» [23, 139, 167] и

$$\text{Re}_{\vartheta}^{-} = A \exp 0,2 M_{\delta}, \quad A \sim 100 \dots 300, \quad (4.3.2)$$

— для более общих конфигураций [147, 167].

Вместе с тем обработка различных экспериментальных данных по переходу в виде (4.3.2) дает слишком большой разброс, что делает практическое применение (4.3.2) в ряде случаев мало приемлемым. Так, для аппаратов планирующего спуска он дает разброс начала перехода по высоте полета $\Delta h \sim 10 \dots 13$ км, что принципиально влияет на теплообмен, выбор и характеристики теплозащиты. Вместе с тем критерии типа (4.3.2) широко используются на практике при проведении теплового проектирования ЛА. Указанный разброс частично обусловлен тем, что не принято во внимание важное влияние других определяющих параметров (t_w , $\text{Re}_{\delta 1}$). Учет этого влияния заметно уменьшает разброс значений $\text{Re}_{\vartheta}^{-}$. Например, в работе [89] на основе обработки экспериментов из более, чем 20 различных работ получена зависимость (при $\text{Re}_{\delta 1} \sim 7 \cdot 10^5 \dots 7 \cdot 10^7$ 1/м)

$$\text{Re}_{\vartheta}^{-} = 33 \text{Re}_{\delta 1}^{0,2} \Omega^{1,45} \left(2,6 \frac{h_w}{h_{\delta}} + 0,2 M_{\delta}^2 \right)^{-1}; \quad (4.3.3)$$

$$\Omega = \bar{h}_w^{\beta} M_{\delta}, \quad \beta = 0,7 \exp(-0,05 M_{\delta}^2),$$

существенно улучшающая корреляцию данных по переходу.

Ниже эти данные значительно дополнены и вновь обработаны с целью отказа от искусственного параметра Ω (ранее предложенного в [193]) в пользу более естественных отношений характерных толщин пограничного слоя [86]. Основное внимание сосредоточено на испытаниях моделей простой формы (пластина, острый конус, треугольное крыло, стреловидный цилиндр, сфера), для которых хорошо известны параметры невязкого потока и характеристики ламинарного пограничного слоя. Это позволяет надежно проводить переобработку опубликованных экспериментальных данных по переходу.

Число Re_{ϑ} определяем по методу эффективной длины, а в трехмерных задачах — еще и в приближении осесимметричной аналогии (см. гл. 5).

$$\text{Re}_{\vartheta} = 0,664 l_*^{1/2} \text{Re}_{\text{ef}}^{1/2} \chi, \quad l_* = \frac{\mu_* \rho_*}{\mu_{\delta} \rho_{\delta}}, \quad \text{Re}_{\text{ef}} = \frac{\rho_{\delta} U_{\delta} x_{\text{ef}}}{\mu_{\delta}}. \quad (4.3.4)$$

Здесь x_{ef} , h_* — эффективная длина и определяющая энтальпия (3.2.16) для ламинарного пограничного слоя. Для безградиентных течений $\chi = 1$, для сферы $\chi = \lambda_0^{1/2}$,

$$h_* = 1/2(h_{\delta} + h_w) + 0,22(H_e - h_{\delta}), \quad \lambda_0 = (1 + \beta I)^{-1}, \quad (4.3.5)$$

$$\beta = 2 \frac{H_{\delta}}{h_{\delta}} \frac{x_l}{u_{\delta}} \frac{du_{\delta}}{dx}, \quad I = 1 + 2,6 \bar{h}_w, \quad \bar{h}_w = \frac{h_w}{H_{\delta}}.$$

При этом x , u_δ — координата и скорость вдоль невязкой линии тока; H_δ , H_e — полная и адиабатическая энтальпии.

На пластине $x_{ef} = x$, на остром конусе при нулевом угле атаки ($\alpha = 0$) $x_{ef} = x/3$, на линии растекания острого конуса (α — угол атаки, θ_0 — угол полураствора конуса, см. § 5.3)

$$x_{ef} = (3 + 2\mu^*)^{-1}x, \quad \mu_k = \frac{1}{u_\delta \sin \theta_0} \frac{\partial w_\delta}{\partial \varphi} \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{2k\omega}{(1-\omega)^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2}, \quad (4.3.6)$$

$$\omega = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_0 \sin(\theta_0 + \alpha)}.$$

На линии растекания треугольной пластины (α — угол атаки, β — угол полураствора пластины)

$$x_{ef} = (1 + 2c)^{-1}x, \quad c = \frac{x}{u_\delta} \frac{dw_\delta}{dz} \approx 0,76 \Omega^{0,85}, \quad \Omega = k^{1/2} \frac{\text{tg } \alpha}{\sin \beta}. \quad (4.3.7)$$

На линии растекания стреловидного цилиндра (r_0 — радиус цилиндра, λ — угол стреловидности)

$$x_{ef} = \frac{1}{2a_0} r_0, \quad a_0 = \frac{r_0}{u_\delta} \frac{dw_\delta}{dz} \approx \frac{\sqrt{(2-k)k}}{\text{tg } \lambda}. \quad (4.3.8)$$

На сфере величина x_l определяется согласно

$$x_{ef} = \frac{\int_0^x p u_\delta r^2 dx}{p u_\delta r^2}. \quad (4.3.9)$$

Отметим, что в приведенных соотношениях величина $k = \rho_\infty / \rho_s$ — отношение плотностей газа при переходе через соответствующий скачок уплотнения. Для конуса и треугольной пластины при $\alpha > 0$ его угол наклона к поверхности тела ε может быть определен соотношениями (ω — согласно (4.3.6), Ω — согласно (4.3.7)):

$$\frac{\varepsilon}{k \text{tg } \theta_0} = -\frac{1}{\omega^2} \ln(1-\omega) - \frac{1}{\omega}, \quad \frac{\varepsilon}{k \text{tg } \alpha} = \left(1 + \frac{1}{2}\Omega\right)^{-1}. \quad (4.3.10)$$

Результаты рассмотренных экспериментальных исследований по переходу, в том числе данные, полученные в ЦНИИмаш [86, 89, 180], собраны в таблицах 4.1 и 4.2. При этом проанализированы результаты исследований из 37 независимых источников (более 160 экспериментов). В табл. 4.1 собраны данные по началу перехода, в табл. 4.2 — по концу перехода. При этом каждая таблица состоит из отдельных частей, содержащих данные для пластины (клина) и треугольной пластины — А, для острого конуса — В, для стреловидного цилиндра — С, для сферы — Д.

Отдельно в табл. 4.3 приведены некоторые имеющиеся данные летных испытаний [34, 137, 182, 278].

Как правило, в таблицах приведены числа Маха невозмущенного потока (M_∞) и на внешней границе пограничного слоя (M_δ), тем-

пературный фактор $t_w = T_w/T_0$, местное единичное число Рейнольдса $Re_{\delta_1} = \rho_\delta u_\delta / \mu_\delta$ (1/м), числа Рейнольдса в точке начала ($Re_{\delta x}^{(-)}$) и в точке конца ($Re_{\delta x}^{(+)}$) перехода по местным параметрам и длине x вдоль линии тока (для сферы — по эффективной длине x_l). По этим данным рассчитаны соответствующие значения чисел $Re_{\vartheta}^{(-)}$ и $Re_{\vartheta}^{(+)}$ по толщине потери импульса. В тех случаях, когда необходимо было учесть влияние градиента давления на величину ϑ (сфера), в таблицах приведен поправочный множитель χ . Там, где необходимо учитывать влияние шероховатости с известной высотой R_z (подробнее — в § 4.4), приведен также параметр $z = \frac{R_z T_\delta}{\vartheta T_w} > 1$. Под R_z здесь понимается среднее по поверхности значение высоты максимальных бугорков шероховатости [174].

В качестве параметра, коррелирующего влияние температурного фактора $t_w = \bar{h}_w$ и числа Маха M_δ на внешней границе пограничного слоя δ на критическое число Re_ϑ , используется формпараметр $H_{12} = \delta^* / \vartheta$ (δ^* — толщина вытеснения, ϑ — толщина потери импульса), рассчитываемый в рамках метода эффективной длины по формуле

$$H_{12} = \frac{\delta^*}{\vartheta} = 2,6 \frac{h_w}{h_\delta} + 0,2 M_\delta^2 = 2,6 t_w (1 + 0,2 M_\delta^2) + 0,2 M_\delta^2. \quad (4.3.11)$$

Для уменьшения разброса данных учитывается отмечаемая во многих исследованиях зависимость от единичного числа Рейнольдса Re_{δ_1} . Эта эмпирическая зависимость имеет общий вид $Re_\vartheta \sim Re_\delta^n$, где n при испытаниях в различных установках изменяется в достаточно широких пределах ($n \sim 0,1$ в работах [29, 169, 189], $n \sim 0,325$ — в работе [156]).

Обычно принято считать, что это связано с влиянием аэродинамического шума трубы, хотя в [139] отмечается, что зависимость Re_ϑ^- от Re_{δ_1} имеется и в свободном полете на баллистической трассе, и в летном эксперименте. В то же время в малозумных трубах центров Лэнгли и Эймса, где осуществляется вдув гелия в пограничный слой сопла, зависимость Re_ϑ^- от Re_{δ_1} вообще не отмечается ($n = 0$). Здесь принято среднее значение $n = 0,2$ для всего рассмотренного диапазона $Re_{\delta_1} \sim (0,4 \dots 2000) \cdot 10^6$.

В некоторых случаях (сфера) из-за малости ϑ даже при малой шероховатости моделей ($R_z \sim 10 \dots 20$ мкм) отмечается значительное влияние шероховатости на переход, которое коррелируется в соответствии с рекомендациями программы PANT [182] в виде

$$Re_\vartheta \sim z^{-0,7}, \quad z = \frac{R_z h_\delta}{\vartheta h_w} > 1. \quad (4.3.12)$$

Таким образом, данные трубных и летных экспериментов по началу и концу перехода на рассмотренных моделях обработаны в виде

$$\frac{Re_\vartheta^{(\mp)} z^{0,7}}{Re_{\delta_1}^{0,2}} = F(H_{12}). \quad (4.3.13)$$

Таблица 4.1. Результаты трубных экспериментов по началу перехода

A ₁ . Пластина, клин								
Источник	M _∞	M _δ	t _w	10 ⁻⁶ Re _{δ₁} ⁽⁻⁾	10 ⁻⁶ Re _x ⁽⁻⁾	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	Re _ϑ ⁽⁻⁾	$\frac{Re_{\vartheta}^{(-)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
◆ — Кэри [105]	6	6	0,18	27	3,3	11	1175	38,4
				14,6	1,75	11	855	31,6
			0,55	27	2,6	18,9	1000	32,6
				14,6	1,1	18,9	650	24,0
× — Оуэн [136]	2,5	2,5	0,91	10	1,6	6,6	770	30,6
			0,87	10	2,4	15,5	855	34,0
◇ — Хопкинс, Кинер [169]	6	6,25	0,38	475	3,88	16,5	1270	23,4
			0,41	960	5,83	17,8	1473	23,5
			0,465	1410	7,16	19,7	1640	24,3
			0,463	2120	8,6	19,9	1787	24,4
□ — Бертрам [48]	6	6	0,2	26,4	2,6	11,5	1040	34,1
			0,6	26,4	2,2	20,0	917	30,0
+ — Чжень, Малик Беквис [173]	3,5	3,5	0,955	9,2	2,5	11,0	994	40,2
			0,947	16,2	4,7	10,95	1363	49,3
● — Sterrett, Holloway [266]	6	6	0,6	27	3,2	20	1089	35,5
				19	2,47	20	957	33,5
Ж — Heffner, Agnal [212]	7	7	0,46	13,6	1,47	21,5	743	27,8
				22	2,2	21,5	909	30,9
■ — ЦНИИмаш [86, 89]	5,95	5,95	0,32	20	1,3	13,8	735	25,4
			0,55	20	1,26	18,6	701	24,3
			0,61	20	1,72	19,9	820	28,4
Δ — ЦНИИмаш [89]	5,95	5,26	0,6	10,6	1,46	15,9	747	29,4
▲ — ЦНИИмаш [89]	10	10	0,2	45	4,5	30,9	1320	38,9

A ₂ . Δ-пластина								
Источник	M _∞	M _δ	t _w	10 ⁻⁶ Re _{δ₁} ⁽⁻⁾	10 ⁻⁶ Re _x ⁽⁻⁾	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	Re _ϑ ⁽⁻⁾	$\frac{Re_{\vartheta}^{(-)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
Δ — Юшин, Давыдова [62]	5	2,33	0,8	12,5	1,18	5,4	489	18,6
		2,88	0,8	14	1,6	7,2	464	17,3
		5,0	0,8	12,7	1,4	17,0	645	24,5
▲ — ЦНИИмаш [86, 89]	9,6	3,12	0,2	10,0	1,03	3,41	376	15,0
		3,11*	0,27	10,4	1,02	4,0	368	14,5
		2,16	0,21	7,0	0,78	1,94	305	13,0
		14,7	3,3*	0,205	7,65	1,24	3,92	370

В. Острый конус								
Источник	M_∞	M_δ	t_w	$10^{-6}Re_{\delta_1}^{(-)}$	$10^{-6}Re_x^{(-)}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$Re_\vartheta^{(-)}$	$\frac{Re_\vartheta^{(-)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
□ — Стетсон, Раштон [157]	5,5	4,9	0,27	7	3	8,9	637	27,2
			0,29	13,8	3,5	9,2	688	25,7
			0,52	19	7	12,6	951	33,2
			0,44	16,1	5,3	11,5	829	29,9
			0,21	6,8	2,6	7,9	600	25,8
			0,16	16,3	2,9	7,2	633	22,9
▲ — Санатор [148]	10	8,8	0,075...	9,84	3,6	18,7...	681...	27,2...
			0,365	9,84	3,6	31,0	647	25,0
× — Стейнбек [156]	8	6,7	0,43	3,77	1,0	20,1	353	17,1
				8,04	1,55		440	18,3
				19,7	2,7		581	20,2
				44,3	4,8		774	22,9
Ж — Дикристина [64]	10	7,5	0,27	6,0	3,1	20,0	609	26,9
● — Уитфилд, Яннуччи [162]	14	9,2	0,17	9,57	4,3	24,9	696	28,0
+ — Софтли, Грейбер, Цемпел [155]	12	10	0,21	4,92	6	31,5	830	36,6
■ — Мейтир, Ларсон [126]	7,4	6,8	0,43	5,57 35,1	4 5,5	20,7	702 823	31,4 25,5
△ — Мэдделон, Хендерсон [132]	21,6	15,8	~ 1	31,2...	46...	213	1749...	55,5...
				35,3	52		1977	61,1
	20,5	11,9	~ 1	20,4...	14...	115	1037...	35,8...
○ — Фишер [165]	7	5,55	0,52	11,4	2,7	15,8	587	22,8
				30,0	4,9		791	25,3
				22,6	3,7		690	23,3
▲ — Марвин, Эйкин [125]	7,7	7,0	0,37	3,7...	4,6	20,2	751	36,5...
				9,5				30,2
● — Чжен [172]	7,9	7,15	0,35	35,3	3,5	20,4	655	20,3
◆ — Чжен, Малик, Беквис [173]	3,5	3,33	0,89	78...	6,97...	9,9	959...	25,3...
				28,1	8,46		1057	34,2
◇ — Боровой и др. [29]	6,1	5,35	0,53	8,8	3,1	15,0	628	25,6
				24,3	3,9		704	23,4
				48,4	4,4		748	21,7
				71,8	4,7		774	20,9
				95,8	4,8		780	19,8
				138,3	4,84		785	18,5
... — Королев [99]	~ 11	4,6	0,22	56,6	2,2	7,2	529	14,9
		5,7	0,22	28	3,5	10,8	650	21,0
		7,4	0,22	48	6,2	17,8	848	24,7
■ — Юшин, Давыдова [61]	6,1	5,3	0,4	49	5,0	12,6	828	24,0
			0,52	66,6	5,82	14,6	871	23,7
× — ЦНИИмаш [86, 89]	5,95	5,0	0,29	37	2,0	11,1	518	15,9
			0,41	16	1,6	13,6	450	16,3
— ЦНИИмаш [180]	5,95	1,57	0,6	17,5	0,3	2,84	215	7,7
◇ — Юшин, $\alpha > 0$, [181]	6,1	5	0,51	66,2	5,7	13,0	853	23,3
		4,35	0,51	72,8	6,35	10,0	748	20,0
		3,7	0,51	67,5	7,15	7,7	740	20,1

С. Стреловидный цилиндр								
Источник	M_∞	λ°	M_δ	t_w	$10^{-6}Re_{\delta_1}^{(-)}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$Re_\vartheta^{(-)}$	$\frac{Re_\vartheta^{(-)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
☒ — ЦНИИмаш [89]	9,4	35,5	1,53	0,22	10,6	1,31	257	10,1
				0,245	9,4	1,41	241	9,7
— Крил и др. [104]	3,5	45	1,66	0,91	4,95...	4,42	341...	15,6...
				0,88	82,8	6,5	365	9,5
					5,6...		426...	19,0...
					94,0		456	11,6

D. Сфера												
Источ- ник	M_∞	$\frac{x^-}{r_0}$	M_δ	t_w	$10^{-6}Re_{\delta_1}$	$10^{-6}Re_{x_i}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	χ	$Re_\vartheta^{(-)}$	R_z МКМ	z	$\frac{Re_\vartheta^{(-)} z^{0,7}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
× Уид- хопф, Холл [161]	5	0,232	0,31	0,25	26,1	0,0994	0,68	0,73	161	8	4	14,0
		0,326	0,44	0,25	8	0,0432	0,66	0,73	106	8	2,5	8,4
		0,471	0,61	0,25	17,7	0,152	0,80	0,70	189	8	2,7	13,4
— ЦНИИ маш [180]	6	0,18	0,23	0,7	6,1	0,00976	1,85	0,64	43,2	50	10	9,5
		0,20	0,26	0,39	7,85	0,0165	1,04	0,70	60,9	20	6,5	9,4
		0,6	0,82	0,69	18,9	0,142	2,17	0,58	146,4	20	3,3	11,8
		0,8	1,14	0,65	22,0	0,260	2,4	0,55	188,5	10	1,4	8,2

Таблица 4.2. Результаты экспериментов в трубах и на баллистических трассах по концу перехода

A ₁ . Пластина									
Источник	M_∞	M_δ	t_w	$10^{-6}Re_{\delta_1}$	$10^{-6}Re_x^{(+)}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$Re_\vartheta^{(+)}$	$\frac{Re_\vartheta^{(+)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$	
◆ — Кэри [105]	6	6	0,18	27	5,8	11,0	1558	50,85	
				14,6	4,2	11,0	1325	48,9	
				0,55	27	4	18,9	1240	40,5
				14,6	2,9	18,9	1056	39,0	
◇ — Бертрам [48]	6	6	0,2	26,4	5,5	11,5	1517	40,6	
				0,6	26,4	4,2	20,0	1267	41,5
▣ — ЦНИИмаш [86, 89]	5,95	5,95	0,32	20	2,5	13,8	1022	35,4	
			0,55	20	3,32	18,6	1138	39,5	
			0,61	20	4,9	19,9	1384	48,0	
☒ — ЦНИИмаш [89]	10	10	0,2	45	13,6	30,9	2295	67,6	

A ₂ . Δ-пластина								
Источник	M _∞	M _δ	t _w	10 ⁻⁶ Re _{δ₁}	10 ⁻⁶ Re _x ⁽⁺⁾	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	Re _ϑ ⁽⁺⁾	$\frac{Re_{\vartheta}^{(+)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
▲ — ЦНИИмаш [89]	9,6	3,12	0,2	10	2,9	3,41	630	25,2
		2,16	0,21	7	2,1	1,94	500	21,3
× — Юшин, Давыдова [62]	5	2,88	0,8	14	2,45	7,21	572	21,3
		5	0,8	12,7		17	830	31,5

B ₁ . Острый конус (труба)								
Источник	M _∞	M _δ	t _w	10 ⁻⁶ Re _{δ₁}	10 ⁻⁶ Re _x ⁽⁺⁾	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	Re _ϑ ⁽⁺⁾	$\frac{Re_{\vartheta}^{(+)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
Ж — Санатор и др. [148]	10	8,8	0,075... 0,365	9,84	7,5	11,8... 31,0	984... 934	39,3... 37,2
● — Уитфилд [162]	14	9,2	0,17	9,57	9,0	24,9	1007	40,4
+ — Фишер [165]	7	5,55	0,52	30	7,6	15,8	984	31,5
			0,46	22,6	6,4	14,7	908	30,6
■ — Чжен [172]	7,9	7,15	0,35	35,3	8,0	20,4	990	30,7
Δ — Боровой и др. [29]	6,1	5,35	0,53	24,3	6,7	15,0	1205	40,0
				48,4	8,0		1280	37,2
				71,8	8,3		1360	36,6
				95,8	8,6		1404	35,5
			138,3	8,7		1413	33,3	
□ — Юшин Давыдова [61]	6,1	5,3	0,4	49	8,5	12,6	1082	31,4
			0,52	66,6	9,9	14,6	1136	30,9
⊠ — ЦНИИмаш [86, 89]	5,95	5,0	0,29	37	5,5	11,1	860	26,4
			0,41	19	3,46	13,6	667	23,4
			0,57	38,5	6,3	17,3	887	27,0
			0,51	32,4	4,7	9,9	766	24,1
			0,53	58	4,26	6,9	752	21,1
	3,41	0,67	94,5	5,5	8,1	847	21,5	

B ₂ . Острый конус (баллистическая трасса)								
Источник	M _∞	M _δ	t _w	10 ⁻⁶ Re _{δ₁}	10 ⁻⁶ Re _x ⁽⁺⁾	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	Re _ϑ ⁽⁺⁾	$\frac{Re_{\vartheta}^{(+)}}{Re_{\delta_1}^{0,2}}$
▲ — Reda [252]	4,4	4,2	0,4	118	8	8,6	975	23,7
		4,5	4,3	0,4	37	4,3	8,6	715
○ — Поттер [139, 140]	2,2	2,1	0,52	16,5	2,8	3,4	626	22,6
				35	6,1	3,4	928	28,7
				118	15	3,4	1200	29,2
				118	20	5,75	1600	38,9
				315	20	5,75	1600	32,0
◇ — Шитц [261]	6	4,6	0,12	87	5	5,8	800	20,7

С. Сфера											
Источник	M_∞	$\frac{x^+}{r_0}$	M_δ	t_w	10^{-6} Re_{δ_1}	10^{-6} $Re_{x_l^{(+)}}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	χ	$Re_{\vartheta^{(+)}}$	z	$\frac{Re_{\vartheta^{(+)}} z^{0.7}}{Re_{\delta_1^{0.2}}}$
▲ — Уид-хопф, Холл [161]	5	0,51	0,556	0,25	39,5	0,351	0,75	0,70	295	2,65	23,6
		0,61	0,738	0,25	10,7	0,13	0,77	0,68	175	1,92	10,9
		0,75	0,94	0,25	20	0,33	0,97	0,65	263	1,61	14,7

Таблица 4.3. Некоторые данные летных испытаний по переходу

А. Острый конус ($\theta_s = 12^\circ$)											
Источник	M_∞	M_δ	t_w	10^{-6} Re_{δ_1}	10^{-6} $Re_x^{(-)}$	10^{-6} $Re_x^{(+)}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$Re_{\vartheta^{(-)}}$	$Re_{\vartheta^{(+)}}$	$\frac{Re_{\vartheta^{(-)}}}{Re_{\delta_1^{0.2}}}$	$\frac{Re_{\vartheta^{(+)}}}{Re_{\delta_1^{0.2}}}$
● — Винокур, Усов [34]	2	1,78	0,5	1,7	0,94	2,5	2,76	272	444	15,4	25,2
		3,4	0,4	3,7	3,1	8,2	5,73	378	615	18,3	29,9
		4,72	0,4	9	7,2	19,3	10,2	547	895	22,3	36,4
		6,25	0,4	20	16,4	43,8	17	767	1253	26,5	43,4

В ₁ . Сфера, начало перехода											
Источник	$r_0, \text{ м}$	M_∞	$\frac{x^-}{r_0}$	M_δ	t_w	10^{-6} Re_{δ_1}	10^{-6} $Re_{x_l^{(-)}}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	χ	$Re_{\vartheta^{(-)}}$	$\frac{Re_{\vartheta^{(-)}}}{Re_{\delta_1^{0.2}}}$
○ — PANT [182], $Z \ll 1$	0,102	2,88	1,57	2,37	0,56	26,8	6	4,52	0,3	468	15,3
			1,4	1,9	0,56	33,2	3,72	3,2	0,4	504	15,8
			0,78	1,05	0,56	36,1	1,73	2,0	0,57	507	15,6
			1,5	2,15	0,2	11,7	2,96	1,92	0,39	454	17,5
			0,45	0,61	0,2	23,3	0,34	0,62	0,73	300	10,1
○ — Пантелеев [137]	0,125	6	0,78	1,095	0,48	4,9	0,17	1,76	0,59	167	7,7
			0,78	1,095	0,19	0,68	0,03	0,82	0,67	73	5,0
			1,31	2,065	0,18	0,42	0,059	1,74	0,47	78	5,9
			0,78	1,068	0,48	4,05	0,14	1,75	0,6	153	7,3
			1,4	2,169	0,46	2,51	0,43	3,26	0,37	159	8,4

В ₂ . Сферы, конец перехода											
Источник	r_0 , м	M_∞	$\frac{x^-}{r_0}$	M_δ	t_w	$10^{-6} \text{Re}_{\delta_1}$	$10^{-6} \text{Re}_{x_l}^{(-)}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	χ	$\text{Re}_\vartheta^{(-)}$	$\frac{\text{Re}_\vartheta^{(-)}}{\text{Re}_{\delta_1}^{0,2}}$
■ — Пан-телеев [137]	0,125	6	0,78	1,095	0,48	17,8	0,63	1,76	0,59	320	11,4
			0,78	1,095	0,19	6,7	0,25	0,82	0,67	235	10,1
			1,31	2,065	0,18	3,2	0,45	1,74	0,47	215	10,8
		4	0,78	1,068	0,48	14,9	0,52	1,75	0,6	293	10,8
			1,4	2,169	0,46	6,9	1,18	3,26	0,37	263	11,3

С. «Шаттл»							
Источник	M_δ	t_w	$10^{-6} \cdot \text{Re}_{\delta_1}$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$\text{Re}_\vartheta^{(-)}$	$\frac{\text{Re}_\vartheta^{(-)}}{\text{Re}_{\delta_1}^{0,2}}$	
■ — Zoby [278]	1,6	0,4	2,9	2,08	306	15,6	

Результаты представлены на рисунках 4.6–4.8. При этом на рис. 4.6 собраны трубные и летные данные по началу перехода на пластинах (клине), треугольных пластинах под углом атаки, на стреловидных цилиндрах, сферах, на рис. 4.7 — на острых конусах (в том числе

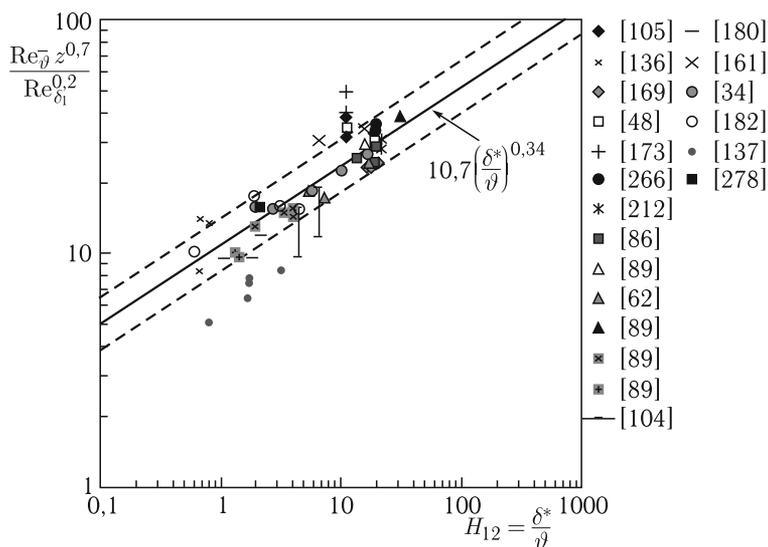


Рис. 4.6

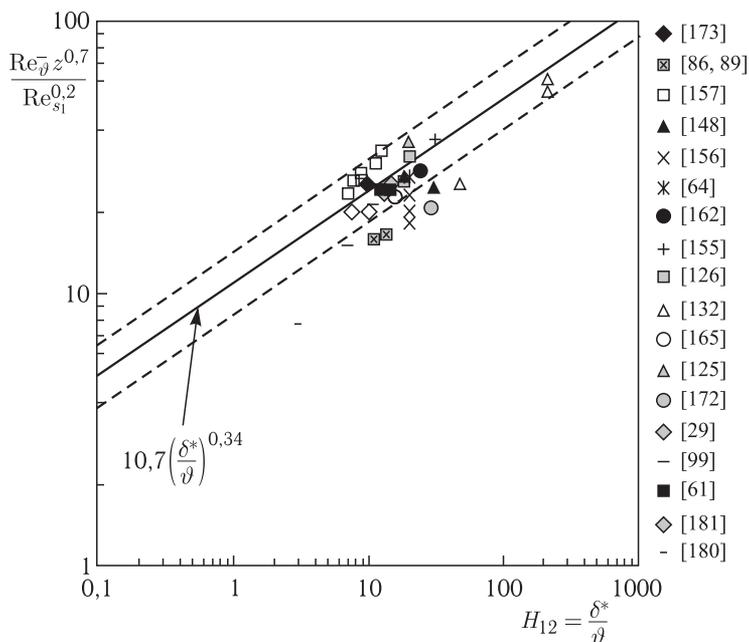


Рис. 4.7

на линии растекания при угле атаки $\alpha > 0$). На рис.4.8 собраны имеющиеся трубные и летные данные, а также данные испытаний в баллистических трассах, по концу перехода.

Как видно, большинство данных (более 80 %) для достаточно разнообразных тел и условий обтекания укладывается в полосу разброса $\pm 30\%$ относительно единых зависимостей, которые для начала и конца перехода могут быть предложены в виде соответственно (естественно, в указанном выше диапазоне Re_{δ_1})

$$\frac{Re_{\vartheta}^{-} z^{0,7}}{Re_{\delta_1}^{0,2}} \approx 10,7 \left(\frac{\delta^*}{\vartheta} \right)^{0,34}, \quad \frac{Re_{\vartheta}^{+} z^{0,7}}{Re_{\delta_1}^{0,2}} \approx 15 \left(\frac{\delta^*}{\vartheta} \right)^{0,34}. \quad (4.3.14)$$

При этом параметр δ^*/ϑ изменяется в значительных пределах (более, чем на 2 порядка).

При указанном разбросе данных относительно осредненных зависимостей (4.3.14) разброс в высоте полета, на которой происходит переход пограничного слоя на ЛА планирующего спуска, составляет $\Delta h \sim 3 \dots 3,5$ км, что значительно меньше, чем при пользовании критерием (4.3.2). Это делает прогноз перехода более надежным, позволяет уточнить тепловые нагрузки на ЛА при спуске в атмосфере и повы-

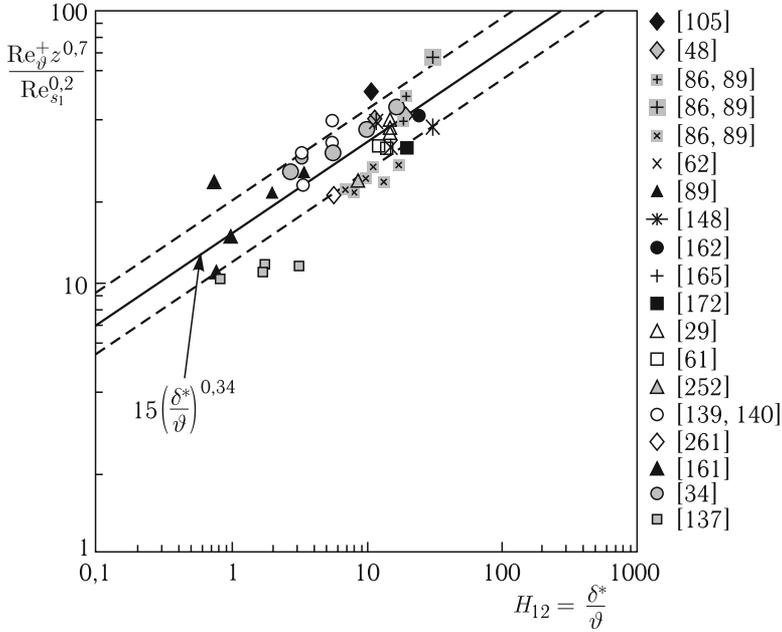


Рис. 4.8

сить весовое совершенство тепловой защиты ЛА. Учет влияния вдува при разрушении ТЗП может быть произведен согласно рекомендациям § 4.4.

§ 4.4. Влияние шероховатости и вдува на переход и теплообмен

Шероховатость поверхности, внося дополнительные возмущения в пограничный слой, является важным фактором, ускоряющим переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, а в некоторых случаях и оказывающим значительное влияние на поверхностное трение и тепловой поток к телу. Математическая модель этого явления в окончательном виде еще не построена, так что необходимые для проведения тепловых расчетов летательных аппаратов сведения о влиянии шероховатости получают экспериментально. Дело осложняется тем, что важную роль помимо высоты шероховатости бугорков k играет их форма и плотность расположения.

Так, например, в несжимаемой жидкости изолированная двумерная цилиндрическая шероховатость высотой k (проволока, уложенная на поверхность тела поперек потока) начинает влиять на переход пограничного слоя вниз по течению при $\zeta \approx \rho U_* k / \mu > 7$ [175], где

$U_* = \sqrt{\tau_w/\rho} \approx 0,58 \text{Re}_\infty^{-1/4} U_\delta$ — динамическая скорость, что эквивалентно условию

$$\text{Re}_k = \frac{\rho U_\delta k}{\mu} \geq 12 \text{Re}_x^{1/4}.$$

При плотной распределенной (песочной) шероховатости влияние ее на переход сказывается обычно раньше, а именно, уже при $\text{Re}_k > 120$ [175]. Эти условия определяют минимальную (допустимую) высоту бугорков $k_{\text{доп}}$, когда поверхность еще может считаться гладкой. При $\zeta > 20 \dots 30$ переход пограничного слоя начинается практически сразу за бугорком шероховатости (этому соответствует $k_{\text{кр}}$ — критическая или эффективная шероховатость).

В сжимаемых течениях величины $k_{\text{доп}}$, $k_{\text{кр}}$ значительно больше. Это видно из рис. 4.9 [5], где показано влияние шероховатости при различных числах Маха на критические числа Рейнольдса начала перехода Re_x^- на теплоизолированной пластине по толщине потери импульса θ , а также из следующих соотношений для $k_{\text{доп}}$, $k_{\text{кр}}$, вытекающих из условий $\zeta > \zeta_*$ ($\zeta_* = 7$ или 30 соответственно):

$$\frac{k}{\theta} = \frac{2,13 \zeta_*}{\text{Re}_\theta^{1/2}} \left(\frac{T_w}{T_\delta} \right)^{1,5} \approx \frac{2,13 \zeta_*}{\text{Re}_\theta^{1/2}} t_w^{1,5} (1 + 0,2 \text{M}_\delta^2)^{1,5}, \quad \text{Re}_\theta = 0,664 \text{Re}_x^{1/2}.$$

Анализ широко цитируемых в зарубежной литературе экспериментальных данных [182] (например, [189, 231, 253, 255]) показывает, что влияние распределенной шероховатости на переход, а именно, на критическое число Рейнольдса Re_ϑ^- , построенное по толщине потери импульса ϑ ламинарного пограничного слоя в точке начала перехода, можно представить при $z > 1$ в виде (рис. 4.10)

$$\text{Re}_{\vartheta_{\text{ш}}}^- = \text{Re}_{\vartheta_{\text{гл}}}^- z^{-0,7}, \quad z = \frac{k}{\vartheta_{\text{гл}}} \frac{T_\delta}{T_w}, \quad \vartheta = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_\delta U_\delta} \left(1 - \frac{U}{U_\delta} \right) dy. \quad (4.4.1)$$

При $z < 1$ шероховатость поверхности не влияет на переход, так что $\text{Re}_{\vartheta_{\text{ш}}}^- = \text{Re}_{\vartheta_{\text{гл}}}^-$, где критическое число Рейнольдса на гладкой стенке $\text{Re}_{\vartheta_{\text{гл}}}^-$ может быть определено соотношениями из § 4.3. Приведенные на рис. 4.10 дополнительные данные о влиянии шероховатости на переход, полученные при испытаниях теплозащитных материалов (фенопласт, композиционный углеродный материал), также подтверждают зависимость (4.4.1). Отметим, что работы по уточнению влияния шероховатости на переход интенсивно продолжаются и, возможно, завершатся корректировкой зависимости (4.4.1).

Влияние шероховатости поверхности на теплообмен удобно учитывать с помощью коэффициентов, характеризующих усиление теплового потока q_w по сравнению с его значением на гладкой поверхности q_w^0 , так что

$$q_{wj} = F_{wj} q_{wj}^0, \quad j \equiv l; t, \quad (4.4.2)$$

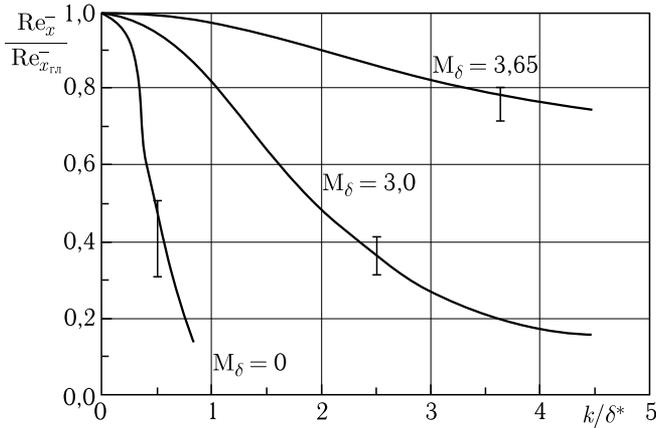


Рис. 4.9. Критическое число Рейнольдса перехода Re_x^- при числах Маха $M_\delta = 0; 3; 3,65$ на теплоизолированной пластине

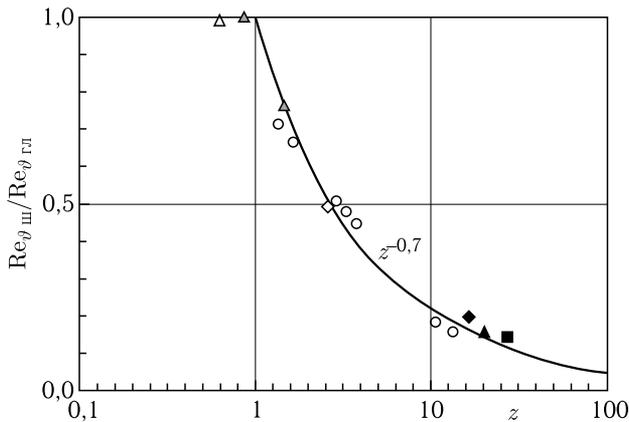


Рис. 4.10. Критическое число Рейнольдса перехода на шероховатой поверхности со вдувом, O — данные из работы [182], Δ — пористая пластина при $M_\delta = 5,2$, $Re_{\infty/M} = 5,55 \cdot 10^7$, $t_w = 0,6$, $\frac{\rho_w v_w}{\rho_\delta u_\delta} = 0,006\%$; \diamond, o — сфера, $r_0 = 40$ мм, $t_w = 0,6$, $Re_{\infty/M} = 7,2 \cdot 10^7$, $M_\infty = 6$, $k = 0, 0,018, 0,05$ мм — медь, фенопласт; $\blacksquare, \blacktriangle, \blacklozenge$ — композиционные материалы, $k = 0,05, 0,1$ мм, $Re_{\infty/M} = 2,6 \cdot 10^7 \dots 7,2 \cdot 10^7$

где коэффициент усиления теплообмена F_{w_j} зависит, главным образом, от соотношения между характерной высотой бугорков шероховатости и толщиной пограничного слоя. К сожалению, сведения об этом коэффициенте носят сугубо эмпирический характер и, как отмечается в работе [57], ни один из предложенных методов его оценки не обес-

печивает достаточно удовлетворительного соответствия с множеством экспериментальных данных.

В случае ламинарного пограничного слоя для расчета $F_{ш}$, можно использовать корреляционные зависимости, предложенные на основании экспериментальных данных в работах [247, 276]. В основу этих зависимостей положено допущение о том, что влияние шероховатости на ламинарный пограничный слой аналогично влиянию турбулентности набегающего потока. Согласно данным из указанных работ в окрестности критической точки сферы радиусом r_0 (рис. 4.11)

$$F_{шl} = \begin{cases} 3,01 \lg \eta_l + 23,1 \eta_l^{-0,606} - 6,27 & \text{при } \eta_l > 50; \\ 1 & \text{при } \eta_l \leq 50; \end{cases} \quad \eta_l = \frac{k}{\vartheta_{гл}} \text{Re}_0^{0,2}; \quad \text{Re}_0 = \frac{\rho_\infty U_\infty r_0}{\mu_0}, \quad (4.4.3)$$

где k — высота шероховатости; $\vartheta_{гл}$ — толщина потери импульса на гладкой поверхности; μ_0 — вязкость газа за прямым скачком уплотнения. Заметим, что при $2000 > \eta_l > 40$ для оценок можно принимать $F_{шl} = (\eta_l/40)^{0,4}$.

При тех же условиях согласно [242]

$$F_{шl} = 1 + \text{Re}_0^{1/2} f(k/\delta^*), \quad (4.4.4)$$

где δ^* — толщина вытеснения ламинарного погранслоя, а функция $f(k/\delta^*)$ приведена на рис. 4.12, причем

$$f = 0,00166 k/\delta^* \text{ при } k/\delta^* < 2,41 \quad \text{и} \quad f = 0,004 \text{ при } k/\delta^* > 2,41.$$

Использование этих зависимостей дает близкие результаты.

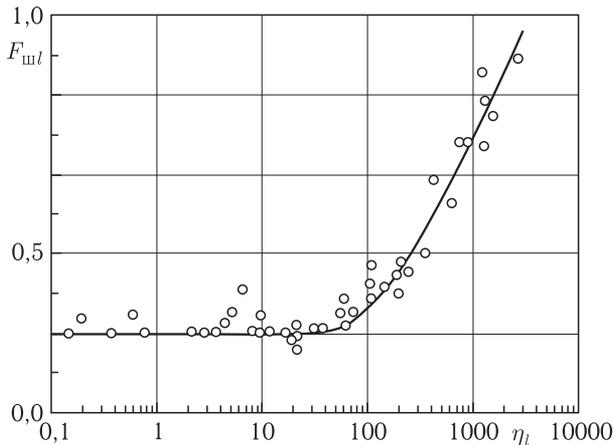


Рис. 4.11. Усиление ламинарного теплообмена на шероховатой стенке: кривая — формула (4.4.3), \circ — экспериментальные данные

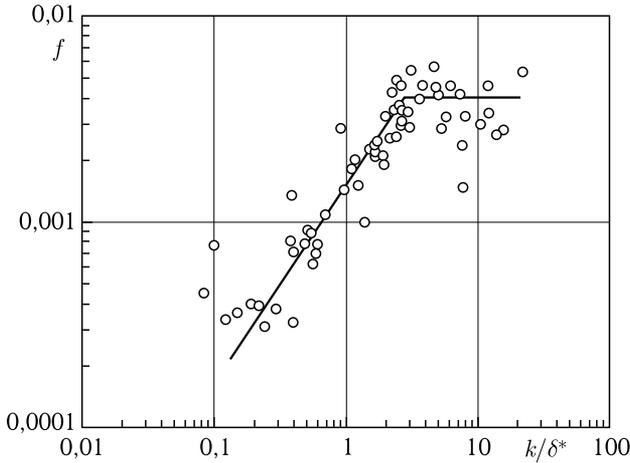


Рис. 4.12. Корреляция усиления тепловых потоков в окрестности критической точки сферы на шероховатой поверхности: \circ — экспериментальные данные при $M_\infty = 3,5; 6,8$ и $r_0 = 10, 18, 89, 127$ мм и $k = 0,003 \dots 2$ мм [276]

В случае турбулентного пограничного слоя наиболее употребительны зависимости, предложенные также на основе эксперимента в работах [57, 186, 244].

Согласно данным из работы [244] (рис. 4.13, кривая 1)

$$F_{\text{ш}l} = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta_t \leq 10, \\ 1 + \frac{2}{3} \lg \frac{\eta_t}{10} & \text{при } 10 < \eta_t < 10^4, \\ 3 & \text{при } \eta_t \geq 10^4, \end{cases} \quad (4.4.5)$$

$$\eta_t = \text{Re}_k \text{St}_0^{1/2} \left(\frac{h_\delta}{h_w} \right)^{1,3}, \quad \text{Re}_k = \frac{\rho_\delta U_\delta k}{\mu_\delta},$$

где St_0 — число Стантона на гладкой поверхности в турбулентном пограничном слое. Несколько лучшую аппроксимацию тех же экспериментальных данных в диапазоне $\eta_t = 10 \dots 10^4$ дает соотношение (рис. 4.13, кривая 2)

$$F_{\text{ш}t} = \frac{1}{8} \left(1 - \lg \eta_t + \frac{16}{3} \eta_t^{0,1761} \right). \quad (4.4.6)$$

При $\eta_t = 20 \dots 10^4$ можно также принять $F_{\text{ш}t} = (\eta_t/20)^{0,177}$. В работе [57] экспериментальные данные о турбулентном теплообмене на шероховатой стенке обработаны в зависимости от параметра k/δ^* . Вид функции $F_{\text{ш}t} = F(k/\delta^*)$ показан на рис. 4.14 (здесь δ^* — турбулентная толщина вытеснения на гладкой поверхности).

Расчеты усиления теплообмена с использованием этой зависимости дают результаты, близкие к расчетам по соотношениям (4.4.5) и (4.4.6).

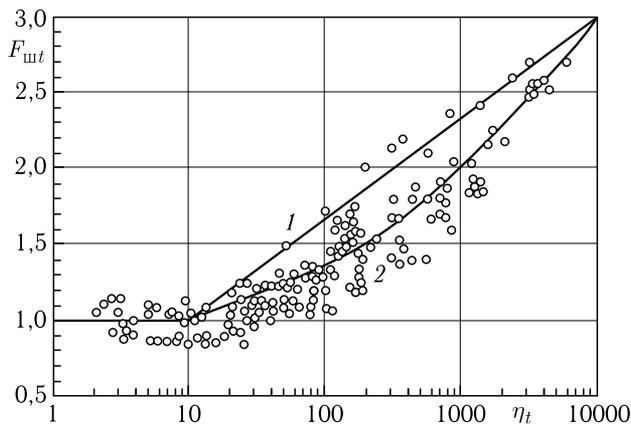


Рис. 4.13. Экспериментальные данные об усилении турбулентного теплообмена на шероховатой стенке (O) [57]: острый конус ($\theta_0 = 50^\circ$, $k = 1$ мм), сфера ($r_0 = 89$ мм, $k = 0,05$ мм; $r_0 = 40$ мм, $k = 0,05$ мм), острый конус ($\theta = 15^\circ$, $k = 1; 0,5$ мм; $\theta = 10^\circ$, $k = 0,12 \dots 0,7$ мм, затупленный конус ($\theta = 60^\circ$, $k = 0,2 \dots 0,7$ мм)

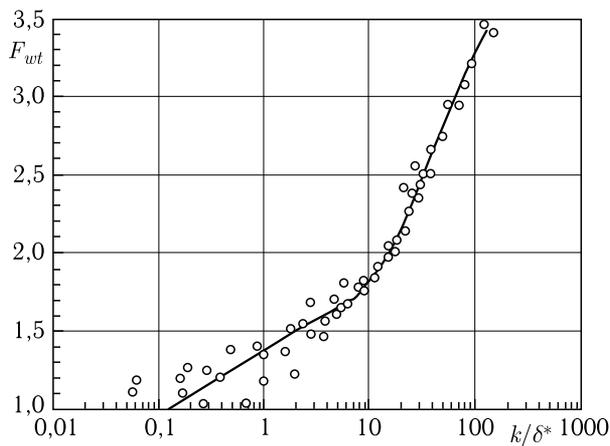


Рис. 4.14

В качестве апробации приведенных соотношений на рис. 4.15, 4.16 представлены результаты сравнения расчетов теплообмена на поверхности шероховатых и гладких сфер с экспериментальными данными. На рис. 4.15 сравниваются расчеты теплового потока q_w с использованием соотношений (4.4.5) и (4.4.6) с экспериментальными данными [220], полученными в диапазоне шероховатостей $k = 0 \dots 2$ мм при радиусе сферы $r_0 = 63,5$ мм. Как видно, соотношение (4.4.6) действительно

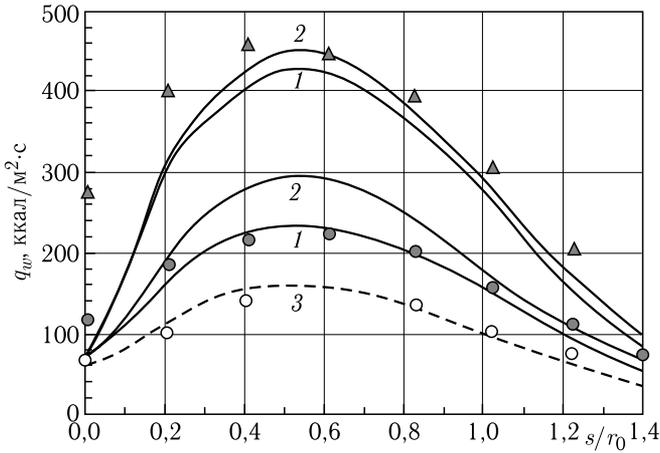


Рис. 4.15. Сравнение экспериментальных данных с расчетом на сфере ($r_0 = 63,5$ мм, $M_\infty = 5$, $T_0 = 692$ К, $Re_\infty/m = 6,34 \cdot 10^7$): 1 – расчет по формуле (4.4.6); 2 – расчет по формуле (4.4.5); 3 – расчет для гладкой поверхности; о, ●, ▲ – экспериментальные данные $k = 0; 0,08; 2$ мм [220]

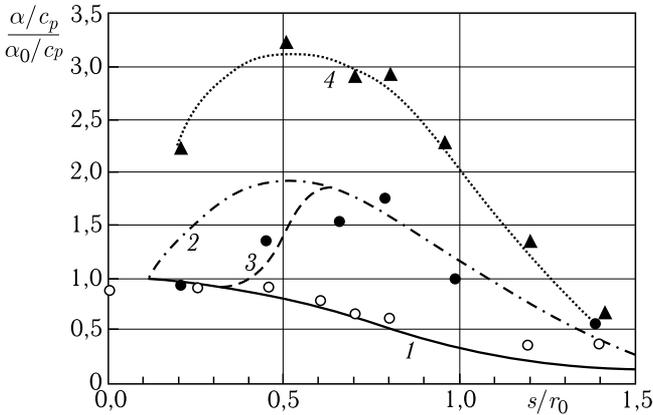


Рис. 4.16. Сравнение экспериментальных данных с расчетом на сфере ($r_0 = 40$ мм, $M_\infty = 6$, $Re_\infty/m = 7,2 \cdot 10^7$, $t_w = 0,7$): 1, 2 – расчеты ламинарного и турбулентного пограничного слоя на гладкой поверхности; 3, 4 – расчеты ламинарного и турбулентного пограничного слоя на шероховатой поверхности; о – $k = 0,002$ мм, ● – $k = 0,018$ мм, ▲ – $k = 1$ мм

несколько точнее учитывает влияние шероховатости при турбулентном режиме течения, чем (4.4.5).

Усиление ламинарного теплообмена в окрестности критической точки удовлетворительно описывается соотношением (4.4.3).

На рис. 4.16 в форме распределения относительных коэффициентов теплообмена $(\alpha/c_p)/(\alpha_0/c_p)$, где α_0/c_p — коэффициент теплообмена в критической точке на гладкой поверхности, сравниваются результаты расчетов теплообмена на гладкой и шероховатой сферах с экспериментальными данными, полученными в диапазоне шероховатостей $k = 0 \dots 1$ мм при радиусе сферы $r_0 = 40$ мм. Здесь шероховатость $k = 0,018$ мм влияет на переход пограничного слоя в соответствии с соотношением (4.4.3), но не усиливает теплообмен. Шероховатость $k = 1$ мм примерно в 1,5 раза увеличивает турбулентный тепловой поток по сравнению с его значением на гладкой поверхности.

Представленные результаты свидетельствуют о применимости указанных соотношений с целью оценки влияния шероховатости на переход пограничного слоя и теплообмен, хотя разброс экспериментальных точек довольно значителен. Отчасти этот разброс отражает тот факт, что помимо размеров бугорков на теплообмен на шероховатой стенке влияет их распределение и форма.

Во многих практических важных задачах полета летательного аппарата с большой скоростью шероховатость его поверхности заранее неизвестна, так как формируется в процессе разрушения теплозащитного покрытия под воздействием высокотемпературного газового потока. В силу неоднородности теплозащитного материала структура возникающей шероховатости характеризуется широким спектром высот бугорков k и требует применения статистических методов обработки [174] для определения характерных значений k . Эти значения могут быть различными в соотношениях для расчета критических чисел Рейнольдса перехода и для расчета усиления тепловых потоков. В самом деле, переход по-видимому, будет определяться средним размером самых крупных бугорков R_z , тогда как влияние шероховатости на теплообмен скорее определяется их средней по площади высотой R_a . Это обстоятельство необходимо принимать во внимание при интерпретации результатов как трубных, так и натурных испытаний. При нынешнем уровне измерительной техники вполне возможно непосредственное определение *эффективной* шероховатости обгоревшей поверхности материала путем сравнения тепловых потоков на шероховатой и гладкой поверхностях.

Влияние вдува газа в ламинарный пограничный слой на переход качественно подобно влиянию шероховатости — оба эти фактора понижают критическое число Рейнольдса и ускоряют переход по сравнению с гладкой непроницаемой стенкой.

Анализ имеющихся экспериментальных данных о переходе на пористых (но достаточно гладких) поверхностях показывает, что для критических значений $Re_{\vartheta_l}^-$ в первом приближении можно сохранить соотношения для расчета перехода на непроницаемых поверхностях, но необходимо учитывать влияние вдува на местную толщину потери импульса ϑ_l (или число Re_{ϑ_0}).

Таким образом, будем принимать, что переход при вдуве наступает при

$$\text{Re}_{\vartheta_l} \geq \text{Re}_{\vartheta_l}^- \tag{4.4.7}$$

Как следует из анализа численных автомодельных решений ламинарного пограничного слоя (например, в работах [7, 204, 206]), толщина потери импульса ϑ_l при вдуве возрастает и может быть представлена в виде (рис. 4.17, а)

$$\frac{\vartheta_l}{\vartheta_l^0} = 1 + 0,305 B + 0,045 B^3 = G_w(B), \quad B = \frac{\dot{m}}{\alpha_l^0/c_p}, \tag{4.4.8}$$

где ϑ_l^0 и α_l^0/c_p — толщина потери импульса и коэффициент теплообмена ламинарного пограничного слоя при отсутствии вдува, $\dot{m} = \rho_w V_w$ — массовый расход вдуваемого газа. Следовательно, условие перехода (4.4.7) можно записать так:

$$\text{Re}_{\vartheta_l} G_w(B) \geq \text{Re}_{\vartheta_l}^- \tag{4.4.9}$$

Этому соотношению в практических приложениях удобно придать вид критерия перехода на непроницаемой стенке, а именно:

$$\text{Re}_{\vartheta_l} \geq G_w^{-1} \text{Re}_{\vartheta_l}^- \equiv \text{Re}_{\vartheta_{кр}} \tag{4.4.10}$$

Отсюда видно, что с ростом параметра вдува до значений $B \sim 1,6 \dots 1,7$ (после чего происходит отрыв пограничного слоя) эффективное критическое значение $\text{Re}_{\vartheta_{кр}}$ понижается по сравнению с величиной $\text{Re}_{\vartheta_l}^-$, характеризующей непроницаемую стенку, до $\sim 0,6 \text{Re}_{\vartheta_l}^-$. При перехо-

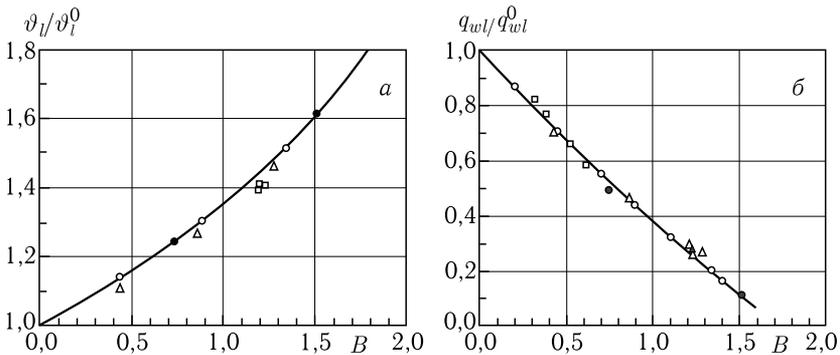


Рис. 4.17. а — Влияние вдува однородного газа на толщину потери импульса в ламинарном пограничном слое $\vartheta_l/\vartheta_l^0$: кривая — расчет по формуле (4.4.8), Δ , \square , \circ , \bullet — автомодельные решения. б — Влияние вдува однородного газа на ламинарный теплообмен q_{wl}/q_{wl}^0 : кривая — расчет по формуле (4.4.14), \bullet , Δ , \square , \blacktriangle , \times — автомодельные решения, $\beta = 0 \dots 0,286$, \circ — расчет с постоянным вдувом на пластине $\dot{m}/\rho_\delta u_\delta = 0,01\%$

де пограничного слоя на пластине (или остром конусе) это означает уменьшение длины ламинарного участка почти в 3 раза, что качественно согласуется с данными работы [102]. Совместное влияние вдува и шероховатости на переход можно учесть, записывая критерий перехода в общем случае в виде

$$\text{Re}_{\vartheta_l^0} \geq \text{Re}_{\text{дкр}} \varphi(z), \quad (4.4.11)$$

где параметр z модифицируется в соответствии с данными работ [182, 276] следующим образом:

$$z = \frac{k}{\vartheta_l \chi}, \quad \chi = \frac{B}{10} + \left(1 + \frac{1}{4}B\right) \frac{h_w}{h_\delta}. \quad (4.4.12)$$

При этом $\varphi(z) \equiv z^{-0.7}$ при $z > 1$ и $\varphi(z) = 1$ при $z < 1$, а параметр вдува $B = \dot{m}/(\alpha_l^0/c_p)$, как и прежде (см. также рис. 4.10). Отметим, что толщина потери импульса ϑ_l в выражении для z определяется с учетом вдува и может быть оценена с помощью соотношения (4.2.8). Тогда при $z > 1$ условие начала перехода приобретает вид

$$\text{Re}_{\vartheta_l^0} \geq \text{Re}_{\vartheta_l^0}^- G_w^{-1} z^{-0.7}. \quad (4.4.13)$$

Очевидно, при этом качественно правильно отражается ослабление влияния шероховатости на переход при возрастании расхода вдуваемого газа. Так как минимальная высота бугорков шероховатости, которая влияет на переход $k > \vartheta_l^0 \chi G_w$, уменьшается с уменьшением температурного фактора $t_w = h_w/H_0$ и с ростом числа Маха M_δ на внешней границе пограничного слоя, то охлаждение поверхности усиливает влияние шероховатости и ускоряет переход, а рост M_δ стабилизирует пограничный слой.

Влияние вдува однородного газа на ламинарный теплообмен можно представить в виде:

$$\frac{q_{wl}}{q_{wl}^0} = 1 - 0,68 B + 0,06 B^2, \quad B = \frac{\dot{m}}{\alpha_l^0/c_p}. \quad (4.4.14)$$

На рис. 4.17, б дано сравнение зависимости (4.4.14) с результатами автомодельных решений со вдувом [204], а также с результатами численных расчетов неавтомодельного вдува в ламинарный пограничный слой по методу работы [129]. Зависимость (4.4.14) может быть распространена и на случай вдува другого инертного газа (с молекулярным весом M_w , отличающимся от молекулярного веса \overline{M}_δ внешнего газа), если в (4.4.14) положить [106, 127]

$$B = \left(\frac{\overline{M}_\delta}{M_w}\right)^{1/3} \frac{\dot{m}}{\alpha_l^0/c_p}. \quad (4.4.15)$$

В турбулентном пограничном слое [106, 143] влияние однородного вдува на теплообмен в широком диапазоне условий (конус, пластина,

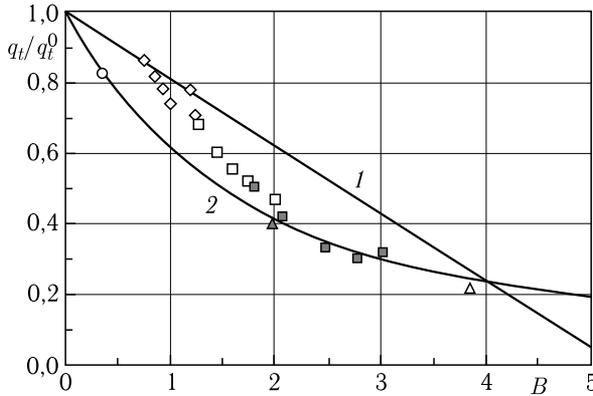


Рис. 4.18. Влияние вдува воздуха в воздух на турбулентный теплообмен ($M_\delta = 5,2$, $Re_{\delta/m} = 4,8 \cdot 10^7$, $t_w = 0,6$): 1 — формула (4.4.17), 2 — формула (4.4.16), \circ , Δ , \blacksquare — $\frac{\dot{m}}{\rho_\delta u_\delta} = 0,03; 0,08; 0,15\%$; $k = 0,04$ мм; \diamond , \square , \blacksquare — $\frac{\dot{m}}{\rho_\delta u_\delta} = 0,08; 0,21; 0,31\%$; $k = 0,15$ мм

цилиндр, числа Маха $M_\delta = 0 \dots 8$) удовлетворительно описывается соотношением:

$$\frac{q_{wt}}{q_{wt}^0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}B^2} - \frac{1}{2}B, \quad B = \frac{\dot{m}}{\alpha_t^0/c_p}, \quad (4.4.16)$$

где α_t^0/c_p — коэффициент турбулентного теплообмена на непроницаемой стенке.

Отметим, что при $B \leq 4 \dots 5$ в случае вдува инертных газов можно пользоваться также соотношением из работы [127]

$$\frac{q_{wt}}{q_{wt}^0} = 1 - 0,19B, \quad B = \left(\frac{\overline{M}_\delta}{M_w}\right)^b \frac{\dot{m}}{\alpha_t^0/c_p}, \quad (4.4.17)$$

где

$$\begin{aligned} b &= 0,35 \quad \text{при} \quad 0,2 < \overline{M}_\delta/M_w < 1, \\ b &= 0,7 \quad \text{при} \quad 1 < \overline{M}_\delta/M_w < 8, \\ b &= 1 \quad \text{при} \quad 8 < \overline{M}_\delta/M_w < 14,5. \end{aligned}$$

На рис. 4.18 приведены аналогичные данные при равномерном вдуве однородного газа в турбулентный пограничный слой на шероховатой пористой пластине. Формула (4.4.16) справедлива и для шероховатой стенки, однако коэффициент теплообмена α_t^0/c_p на непроницаемой поверхности определяется при этом с учетом влияния шероховатости согласно соотношению (4.4.5).

Глава 5

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Наряду с численными методами решения уравнений пограничного слоя сохранили свою значимость до настоящего времени разработанные в прошлом приближенные методы, в том числе для пространственных задач. С достаточной для инженерной практики точностью они позволяют оперативно определять тепловые потоки, трение и толщины пограничного слоя и, отражая основные свойства пограничных слоев, отличаются наглядностью получаемых решений. Эти методы и рассмотрим ниже вместе с анализом закономерностей теплообмена на тупых и тонких притупленных телах.

§ 5.1. Метод эффективной длины

Упомянутые методы основаны, как правило, на использовании уравнений движения в интегральной форме, которые можно получить непосредственно из уравнений пограничного слоя (3.1.2), записанных вдоль линий тока. С учетом уравнения неразрывности систему (3.1.2) приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u^2 r_{\text{ef}}^\nu}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v r_{\text{ef}}^\nu}{\partial y} &= -r_{\text{ef}}^\nu \frac{\partial p}{\partial x} + r_{\text{ef}}^\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \rho u r_{\text{ef}}^\nu H}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r_{\text{ef}}^\nu H}{\partial y} &= r_{\text{ef}}^\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + r_{\text{ef}}^\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\text{Pr} - 1}{2 \text{Pr}} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Вычитая из первого уравнения (5.1.1) уравнение неразрывности, помноженное на U_δ , и интегрируя результирующее уравнение по y в пределах $(0, \delta)$, где δ — толщина погранслоя, получим *интегральное*

уравнение импульсов:

$$\frac{d}{dx}(r_{\text{ef}}^{\nu} \rho_{\delta} U_{\delta}^2 \vartheta) = r_{\text{ef}}^{\nu} \delta^* \frac{dp}{dx} + r_{\text{ef}}^{\nu} \tau_w,$$

$$\tau_w = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \right) dy, \quad \vartheta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left(1 - \frac{u}{U_{\delta}} \right) dy.$$
(5.1.2)

Здесь δ^* — толщина вытеснения, ϑ — толщина потери импульса.

Из второго уравнения (5.1.1) после интегрирования по y в тех же пределах $(0, \delta)$ получим аналогично интегральное уравнение энергии

$$\frac{d}{dx}(\rho_{\delta} U_{\delta} H_{\delta} r_{\text{ef}}^{\nu} \Theta) = r_{\text{ef}}^{\nu} q_w, \quad q_w = \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{y=0},$$

$$\Theta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left(1 - \frac{H}{H_{\delta}} \right) dy \approx (1 - \bar{h}_w) \vartheta, \quad \bar{h}_w = h_w / H_{\delta}.$$
(5.1.3)

Здесь Θ — толщина потери полной энтальпии в пограничном слое, причем последняя связь Θ и ϑ получена с использованием интеграла Крокко (3.2.10).

Уравнения (5.1.2), (5.1.3) справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя.

Для ламинарного слоя на пластине, переходя в (5.1.2) к переменным (3.2.1), (3.2.3), получим для ϑ ($f_w'' = 0,332$) соотношение $\vartheta = 2 f_w'' (\mu_{\delta} x / \rho_{\delta} U_{\delta})^{1/2}$.

Для несжимаемого пограничного слоя отношение $\vartheta / \delta \approx 0,664 / 5 \sim 0,13$ достаточно мало. С ростом числа Маха M_{δ} оно еще уменьшается одновременно с ростом толщины δ и толщины вытеснения δ^* пограничного слоя (см. рис. 3.4).

Определенную экспериментально толщину несжимаемого турбулентного пограничного слоя на пластине обычно выражают формулой $\delta = 0,38 x \text{Re}_x^{-0,2}$, а профиль скорости аппроксимируют степенной функцией $u / U_{\delta} = (y / \delta)^{1/n}$, $n = 7$. Подставляя то и другое в формулу для ϑ и уравнение (5.1.2) для пластины, получим

$$\vartheta = \frac{n \delta}{(1+n)(2+n)} = \frac{7}{72} \delta, \quad \tau_w = 0,0296 \rho_{\delta} U_{\delta}^2 \text{Re}_x^{-0,2}, \quad \text{Re}_x = \frac{\rho_{\delta} U_{\delta} x}{\mu_{\delta}}.$$
(5.1.4)

Таким образом, и в этом случае отношение ϑ / δ достаточно мало.

Наиболее продвинутые приближенные методы расчета пограничного слоя, развитые, в основном, для определения тепловых потоков, основаны на простом и, как показал опыт, весьма правдоподобном предположении о зависимости трения τ_w и тепловых потоков q_w лишь

от местных внешних параметров и, соответственно, от толщин ϑ (для τ_w) или Θ (для q_w). Причем, по принимаемой гипотезе, зависимости $\tau_w(\vartheta, \lambda_i)$, $q(\Theta, \lambda_i)$, где λ_i — набор определяющих параметров (ρ_δ , U_δ , H_δ , h_w и т. д.), берутся теми же, что и для пластины. Различные, но весьма схожие варианты этих методов предложены Л. Лизом [228] — «метод локального подобия» и В. С. Авдуевским [1] — «метод эффективной длины».

В практической реализации последний метод сводится к следующему. Запишем формулу для теплового потока (q_l — ламинарного и q_t — турбулентного) на пластине в общем виде (l_* и K_* см. (5.1.116))

$$q_i = B_i x^{-m_i}, \quad (5.1.5)$$

$$i = l, \quad m_l = \frac{1}{2}, \quad B_l = 0,332 \text{Pr}^{-2/3} l_*^{1/2} \sqrt{\rho_\delta \mu_\delta U_\delta} (H_{el} - h_w),$$

$$i = t, \quad m_t = 0,2, \quad B_t = 0,0296 \text{Pr}^{-0,6} K_* (\rho_\delta U_\delta)^{0,8} \mu_\delta^{0,2} (H_{et} - h_w).$$

Выражения для m_i и B_i для ламинарного ($i = l$) и турбулентного ($i = t$) пограничных слоев следуют из (3.2.16) и (4.1.1) соответственно. Подставив (5.1.5) в уравнение (5.1.3) и интегрируя его при $\nu = 0$, получим для пластины связь между Θ и x и зависимость $q_i(\Theta_i)$

$$\bar{\Theta}_i = \rho_\delta U_\delta H_\delta (1 - m_i) \Theta_i = B_i x^{1-m_i}, \quad (5.1.6)$$

$$q_i = B_i x^{-m_i} = B_i^{1/(1-m_i)} \bar{\Theta}_i^{-m_i/(1-m_i)}. \quad (5.1.7)$$

Согласно предположению, функция $q_i(\Theta_i)$ универсальна, и с учетом этого уравнение (5.1.3) примет вид

$$\frac{d}{dx} (r_{\text{ef}}^\nu \bar{\Theta}_i) = (1 - m_i) (r_{\text{ef}}^\nu B_i)^{1/(1-m_i)} (r_{\text{ef}}^\nu \bar{\Theta}_i)^{-m_i/(1-m_i)}. \quad (5.1.8)$$

Интегрируя его, получим для произвольного тела

$$(r_{\text{ef}}^\nu \bar{\Theta}_i)^{1/(1-m_i)} = z_i(x) = \int_0^x (r_{\text{ef}}^\nu B_i)^{1/(1-m_i)} dx. \quad (5.1.9)$$

И, наконец, исключая $\bar{\Theta}_i$ из (5.1.7), придем к общей формуле для $q_i(x)$:

$$q_i = r_{\text{ef}}^{\nu m_i/(1-m_i)} B_i^{1/(1-m_i)} z_i^{-m_i} = B_i x_{\text{ef}i}^{-m_i}, \quad x_{\text{ef}i} = (r_{\text{ef}}^\nu B_i)^{-1/(1-m_i)} z_i. \quad (5.1.10)$$

Здесь $x_{\text{ef}i}$ — эффективная длина данного пограничного слоя, или длина пластины с тем же тепловым потоком в стенку, что и на рас-

смаатриваемом теле при местных граничных условиях. Для ламинарного и турбулентного пограничных слоев функции x_{efi} различны и

$$x_{efl} = \frac{\bar{z}_l}{\bar{B}_l}, \quad \bar{z}_l = \int_0^x \bar{B}_l dx, \quad \bar{B}_l = r_{ef}^{2\nu} \rho_* \mu_* U_\delta (H_{el} - h_w)^2, \quad (5.1.11)$$

$$x_{eft} = \frac{\bar{z}_t}{\bar{B}_t}, \quad \bar{z}_t = \int_0^x \bar{B}_t dx, \quad \bar{B}_t = r_{ef}^{5\nu/4} \rho_* U_\delta \mu_*^{1/4} (H_{et} - h_w)^{5/4}.$$

Таким образом, для теплового потока к поверхности аппарата q_l или q_t соответственно для ламинарного и турбулентного режима получаем

$$q_l = 0,332 \text{Pr}^{-2/3} l_*^{1/2} (\rho_\delta \mu_\delta U_\delta)^{1/2} x_{efl}^{-1/2} (H_{el} - h_w), \quad (5.1.11a)$$

$$q_t = 0,0296 \text{Pr}^{-0,6} K_* (\rho_\delta U_\delta)^{0,8} \mu_\delta^{0,2} x_{eft}^{-0,2} (H_{et} - h_w).$$

Запишем эти соотношения в следующем виде (l — длина вдоль линии тока)

$$\text{St}_{\delta l} \text{Re}_{\delta l}^{0,5} = A_l \left(\frac{l}{x_{efl}} \right)^{1/2}, \quad \text{St}_{\delta t} \text{Re}_{\delta t}^{0,2} = A_t \left(\frac{l}{x_{eft}} \right)^{0,2}, \quad (5.1.11b)$$

$$A_l = 0,332 \text{Pr}^{-2/3} l_*^{1/2}, \quad A_t = 0,0296 \text{Pr}^{-0,6} K_*,$$

$$\text{St}_{\delta i} = \frac{q_i}{\rho_\delta U_\delta (H_{ei} - h_w)}, \quad \text{Re}_{\delta l} = \frac{\rho_\delta U_\delta l}{\mu_\delta},$$

$$l_* = \frac{\rho_* \mu_*}{\rho_\delta \mu_\delta} \approx \left(\frac{h_\delta}{h_*} \right)^n, \quad K_* = \left(\frac{\rho_*}{\rho_\delta} \right)^{0,8} \left(\frac{\mu_*}{\mu_\delta} \right)^{0,2} \approx \left(\frac{h_\delta}{h_*} \right)^{0,6+0,2n}, \quad n \approx 0,3.$$

При постоянной разности энтальпий $H_{el} - h_w$ для двумерных задач функция x_{efl} совпадает с переменной ξ (3.2.1), и в этом случае полученный результат эквивалентен решению уравнений (3.2.7) при $F_p = F_f = F_H = 0$, т. е. решению локально-автомодельной задачи для эквивалентной пластины с длиной $x_{efl} = \xi$. Отсюда и другое название данного метода — *метод локального подобия*.

При $h_w = \text{const}$ или $h_w \ll H_\delta$ из выражений для x_{efi} исчезнут (строго при $\text{Pr} = 1$) разности $H_{ei} - h_w$. Далее, из (3.2.15) следует сравнительно слабая зависимость определяющей энтальпии h_* от числа M_δ , поэтому в диапазоне $M_\delta \leq 2 \dots 3$ (типичном для поверхности затупленных тел) с учетом (1.3.11) положим

$$(h_*/h_{*0})^{-0,3} = 1, \quad \rho_* \mu_* = \rho_{*0} \mu_{*0} \bar{p}, \quad \rho_* \mu_*^{1/4} = \rho_{*0} \mu_{*0}^{1/4} \bar{p}, \quad \bar{p} = p/p'_0. \quad (5.1.12)$$

Здесь p'_0 , h_{*0} , ρ_{*0} и μ_{*0} — параметры в точке торможения тупого тела. Тогда формулы (5.1.11) примут вид

$$x_{efi} = \frac{\tilde{z}_i}{\bar{p}\bar{U}_\delta}, \quad \tilde{z}_i = \frac{1}{r_{ef}^\kappa} \int_0^x r_{ef}^\kappa \bar{p} \bar{U}_\delta dx, \quad \bar{U}_\delta = \frac{U_\delta}{U_*}. \quad (5.1.13)$$

Здесь $\kappa = 2\nu$ для ламинарного и $\kappa = 5\nu/4$ для турбулентного слоя, U_* — некоторая характерная скорость, например, скорость набегающего потока U_∞ . Как видно, в этом приближении функции x_{ef} для ламинарного и турбулентного слоя имеют одинаковый вид при $\nu = 0$ и различаются при $\nu = 1$.

Метод эффективной длины аналогично может быть построен и для определения поверхностного трения τ_w с использованием той же связи $\tau_w = \tau_w(\vartheta)$, что и для пластины. При этом следует ожидать большего влияния градиента давления, непосредственно входящего в уравнение (5.1.2). Однако в инженерной практике с некоторой потерей точности коэффициент трения определяется обычно по аналогии Рейнольдса (3.2.17) через число Стантона. Для повышения точности расчета трения и теплового потока при наличии градиента давления на теле можно использовать модифицированный метод локального подобия, предложенный в работах [74, 236], где показано (см. также § 3.2), что в задачах с отрицательным градиентом давления (типичным для затупленных тел) профиль продольной скорости $u/U_\delta = \varphi'(\zeta)$ в каждом сечении $\xi = \text{const}$ может быть приближенно получен из Блазиусовского $f'(\eta)$ путем деформации (зависящей от локального значения параметра градиента давления) поперечной координаты $\zeta = \lambda_0^{1/2} \eta$, где ζ определяется согласно (3.2.1). При этом при расчетах трения и теплового потока можно использовать поправочные коэффициенты (3.2.30).

Метод эффективной длины, в том числе и в модифицированном виде, элементарен в вычислительном отношении для двумерных пограничных слоев, поскольку сводится к вычислению одномерных интегралов. Но и для пространственных течений этот метод существенно проще точного расчета трехмерного пограничного слоя, так как он может быть реализован в квазидвумерном приближении (т. е. как одномерный расчет вдоль невязких линий тока на теле). Однако алгоритмически удобней реализация этого метода с использованием произвольной системы координат с координатной сеткой (x_1, x_3) на поверхности тела и вычислением r_{ef} из (5.1.10) и x_{efi} из уравнения

$$\frac{dx_{efi}}{dl} = \frac{u_1}{UH_1} \frac{\partial x_{efi}}{\partial x_1} + \frac{u_3}{UH_3} \frac{\partial x_{efi}}{\partial x_3} = 1 - x_{efi} \frac{d}{dl} \ln(r_{efi}^\nu B_i)^{1/(1-m_i)}. \quad (5.1.14)$$

Это уравнение получается дифференцированием (5.1.11) вдоль линии тока l .

Аналогично из (5.1.10) можно получить дифференциальное уравнение для теплового потока q_i [88]

$$\frac{dq_i}{dl} = \frac{1}{x_{efi}^{m_i}} \frac{dB_i}{dl} - \frac{m_i B_i}{x_{efi}^{1+m_i}} \frac{dx_{efi}}{dl}. \quad (5.1.15)$$

Использование этих уравнений позволяет избежать вычисления линий тока и определять решение непосредственно по заданному полю невязки параметров на поверхности тела, полученному из решения задачи невязкого обтекания в удобной для этого системе координат [80].

В любом случае для вычисления функций x_{efi} и q_i необходимо задание начальных условий на некоторой линии $\varphi(x_1, x_3) = 0$ на теле. Для тупого тела такими условиями (как и при использовании точных уравнений пограничного слоя, § 3.4) служат предельные решения в окрестности точки торможения, которые будут приведены в § 5.2.

В общем случае следует от предшествующего начального пограничного слоя знать толщину потери энергии Θ_i , через которую по (5.1.9) определяется интеграл z_i , а по (5.1.11) — величина x_{efi} , исходя из очевидного условия непрерывности интеграла z_i , в том числе и при прохождении разрыва подынтегральной функции. В частности, при прохождении угловых точек контура тела со скачком давления в них в рамках данного метода тепловые потоки должны изменяться по закону

$$\frac{q_{w2}}{q_{w1}} \approx \frac{B_{i2}}{B_{i1}} \approx \frac{(pU)_2}{(pU)_1}, \quad (5.1.16)$$

где индексами 1 и 2 помечены параметры до и после угловой точки. Второе равенство здесь получено по упрощенной формуле (5.1.13).

В заключение заметим, что хотя при выводе соотношений метода эффективной длины молчаливо предполагалась положительность разности $\Delta H_e = H_e - h_w \geq 0$ (т. е. нагрев поверхности тела), этот метод с некоторой модификацией применим и для $H_e - h_w \leq 0$ (т. е. для охлаждения предварительно нагретого тела, что происходит, например, на заключительном «приземном» этапе при баллистическом спуске аппарата в атмосфере Земли).

Для этого в предыдущих соотношениях достаточно всюду изменить знак разности ΔH_e , при этом величина Θ примет смысл «толщины приобретения энергии», а положительная величина q — скорость оттока тепла от стенки. Однако предпочтем воспользоваться итоговыми соотношениями (5.1.11а) с одинаковыми знаками q_i и ΔH_e в них и с величиной x_{ef} , определяемой теми же формулами (5.1.11), в которых разности $\Delta H_e = H_e - h_w$ заменены их модулями

$$x_{efi} = \frac{\bar{z}_i^*}{|\bar{B}_i|}, \quad \bar{z}_i^* = \int_0^x |\bar{B}_i| dx, \quad (5.1.17)$$

с теми же выражениями для \overline{B}_i . В таком виде формулы (5.1.11) и (5.1.11a) будут формально пригодными для любого знака разностей и даже для знакопеременных ΔH_e ; в последнем случае в точке $\Delta H_e = 0$ функция x_{ef} будет неограниченной, однако величины q останутся при этом ограниченными и с учетом (5.1.5), (5.1.10), (5.1.11) и (5.1.17) определяются формулами:

$$\begin{aligned} q_l &\approx 0,332 \text{Pr}^{-2/3} \rho_* \mu_* U_\delta r_{ef}^\nu \overline{z}_l^{-1/2} (H_{el} - h_w) |H_{el} - h_w|, \\ q_t &\approx 0,0296 \text{Pr}^{-0,6} \rho_* \mu_*^{1/4} U_\delta r_{ef}^{\nu/4} \overline{z}_t^{-0,2} (H_{et} - h_w) |H_{et} - h_w|^{1/4}. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Собственно, эти формулы и следует считать наиболее общими для метода эффективной длины при произвольной разности $\Delta H_{el} = H_{el} - h_w$. Еще более простым является использование соотношений (5.1.13) с опущенными разностями ΔH_e .

Однако в любом варианте метод эффективной длины нуждается в апробации путем сравнения с точными решениями или с экспериментом.

§ 5.2. Приложение метода эффективной длины. Двумерные течения

Полученные результаты используем для анализа особенностей распределения тепловых потоков по поверхности некоторых классов тел вращения, обтекаемых без угла атаки. В этом случае в формулах (5.1.10)–(5.1.13) следует положить $r_{ef} = r_b(x)$.

На рис. 5.1, а показано распределение функций $\overline{x}_{ef} = x_{ef}/R$ по круговому цилиндру ($\nu = 0$) и сфере ($\nu = 1$) радиуса R для ламинарного и турбулентного пограничных слоев, но при одинаковом распределении давления (2.2.12). Из сравнения кривых x_{ef} с прямой $\overline{x} = x/R = \omega$ (ω — центральный угол) следует, что в центральной области этих тел, при $\omega < \omega_c$, где ω_c — некоторый «пороговый» угол, величины $x_{ef} < x_c = \omega_c R$ и, следовательно, тепловой поток в этой области больше, чем на пластине с местными параметрами и длиной, равной длине x вдоль образующей этих тел. При $x_{ef} > x_c$ картина обратная. При этом в формулах (5.1.13) через произведение $\overline{p} \overline{U}_\delta$ подчеркивается роль именно местных внешних параметров, в то время как влияние предшествующего их распределения проявляется лишь осредненно, через интегралы \overline{z}_i . Особенно наглядно это проявляется на коротких участках поверхности с малыми изменениями параметров \overline{z}_i на них, но с существенным изменением давления (окрестность угловой точки, например, или малого ее скругления). На таких участках тепловые потоки изменяются пропорционально произведению $\overline{p} \overline{U}_\delta$, причем, одинаково для ламинарных или турбулентных пограничных слоев.

Далее, кривые на рис. 5.1, а при $\nu = 0$ идут выше, чем при $\nu = 1$, а следовательно, при равных внешних условиях тепловой поток через

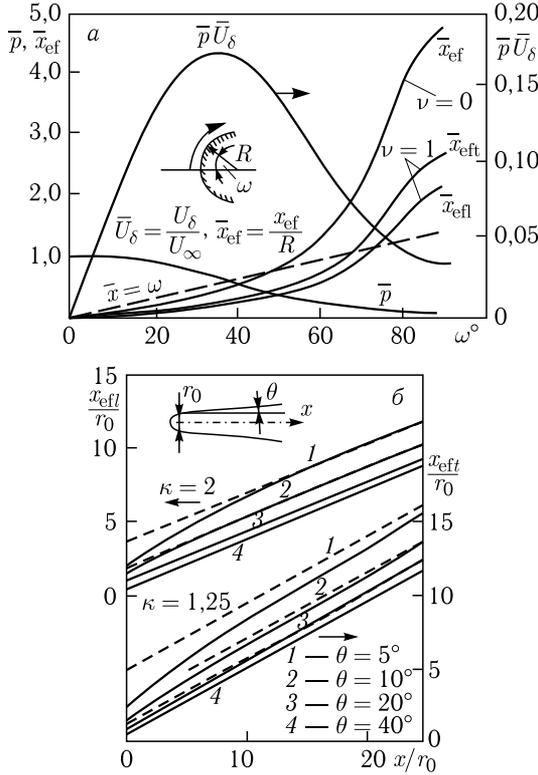


Рис. 5.1. Эффективная длина на сфере и цилиндре (а) и на притупленном конусе (б) с ламинарным и турбулентным пограничными слоями

осесимметричный пограничный слой $q_{\nu=1}$ больше, чем через плоский $q_{\nu=0}$. Для ламинарного пограничного слоя это показано на частных примерах в § 3.2, где получено, что тепловой поток на конусе больше, чем на пластине в отношении $q_{\nu=1}/q_{\nu=0} = \sqrt{3}$. Для турбулентного пограничного слоя это различие меньше. Так, для конуса, полагая в (5.1.11) или (5.1.13) $r \sim x$, $U_\delta = \text{const}$, получим

$$\frac{x_{eft}}{x} = \frac{4}{9}, \quad \frac{q_{\nu=1}}{q_{\nu=0}} = \left(\frac{x}{x_{eft}}\right)^{0,2} = 1,176. \quad (5.2.1)$$

В точках торможения тупых тел, полагая, как и ранее, в их окрестности

$$U_\delta = cx, \quad r = x, \quad \bar{p} = 1, \quad x_{eft} = \frac{x}{2(1+\nu)}, \quad (5.2.2)$$

для ламинарного пограничного слоя из (5.1.13) получим ту же формулу (3.2.24) для теплового потока, только с коэффициентом $A^{(\nu)} = 0,47\sqrt{1+\nu}$ вместо коэффициента A_ν , в 1,15...1,2 раза больше-

го, чем $A^{(\nu)}$. Таким образом, по этому методу тепловой поток в точке торможения осесимметричного тела в $\sqrt{2}$ раз больше, чем у плоского при точном отношении $A_1/A_0 = 1,33$. Введение поправки на влияние градиента давления на тепловой поток согласно [221] или [74] (и гл. 3) дает практически точные значения q_w . При расчете теплового потока в критической точке затупленного тела учтем, что для гиперзвуковых течений из теории § 2.2 следует

$$\begin{aligned} \bar{p}'_0 &= 1 - \frac{1}{2} k, \quad k_0 = k \left(1 - \frac{1}{2} k\right), \quad \bar{p}'_0 k_0 = k(1-k) = \bar{k}, \quad R_s c = U_\infty \sqrt{2\beta\bar{k}}, \\ k_0 &= \frac{\rho_\infty}{\rho_0}, \quad k = \frac{\rho_\infty}{\rho_s}, \quad \beta = \bar{\beta} \frac{R_s^2}{R^2}, \quad c = \bar{c} \frac{U_\infty}{R}, \quad \bar{c} = \sqrt{2\beta\bar{k}}. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Здесь p'_0 и ρ_0 — давление и плотность в точке торможения, R_s — радиус кривизны ударной волны на оси, ρ_s — плотность сразу за ударной волной, R — радиус кривизны тела. Для сферы коэффициент $\bar{\beta} = 1,17$ (2.2.12).

В то же время полученное методом эффективной длины относительное распределение ламинарных тепловых потоков $q_l/q^{(0)}$ по сфере, например, практически совпадает с точным, приведенным на рис. 5.2, а, рассчитанным при гиперзвуковом распределении давления (2.2.12). Это распределение универсально, практически не зависит от условий обтекания (по крайней мере, при $2 < U_\infty < 7,5$ км/с) и с высокой точностью

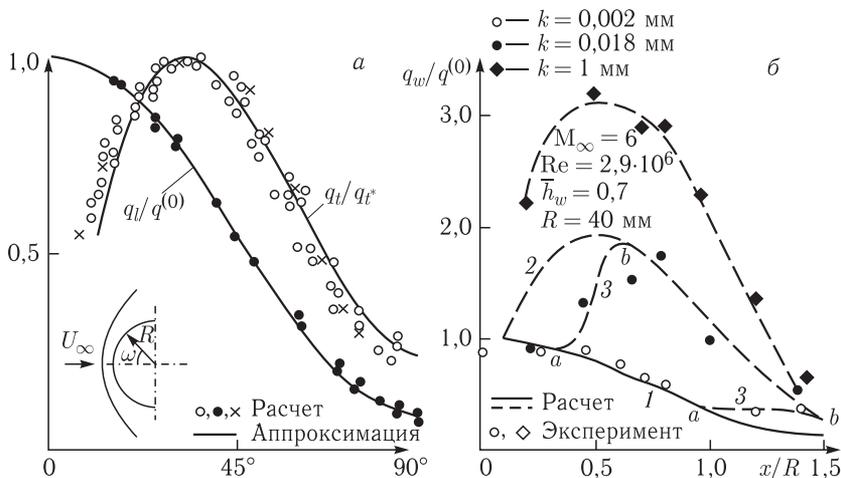


Рис. 5.2. Распределение ламинарных и турбулентных тепловых потоков по сфере в гиперзвуковом потоке. а — \circ, \bullet — расчет согласно § 3.2, § 5.1; \times — расчет с алгебраической вязкостью, § 4.2. б — расчет и эксперимент для гладкой и шероховатой поверхности с высотой шероховатости k , а–б — область перехода

аппроксимируется формулой [130] (кривая на рис. 5.2, *a*, ω — угловая координата)

$$\frac{q_t}{q^{(0)}} = 0,55 + 0,45 \cos^2 \omega. \quad (5.2.4)$$

Сама же величина q_t зависит от условий обтекания через величину $q^{(0)}$, определяемую формулой (3.2.24) (где $q^{(0)} = q_w$).

Для турбулентного пограничного слоя в окрестности точки торможения, где $U_\delta \sim cx$, из (5.1.13) следует

$$x_{\text{eff}} = \left(\frac{4}{5\nu + 8} \right) x, \quad (5.2.5)$$

$$q_t = 0,0296 \text{Pr}^{-0,6} \left(\frac{5\nu + 8}{4} \right)^{0,2} (\rho_{*0} \cdot c)^{0,8} \mu_{*0}^{0,2} x^{0,6} (H_{\text{eff}} - h_w).$$

Тепловой поток здесь в осесимметричном течении на 10% больше, чем в плоском, но главное, в обоих случаях турбулентный тепловой поток равен нулю в точке торможения, а в ее окрестности $q_t \sim x^{0,6}$, что уже отмечалось выше. Вследствие этого кривая q_t на сфере имеет максимум $q_t = q_{t*}$ (рис. 5.2, *б*), расположенный вблизи звуковой точки на сфере, где достигает максимума удельный расход $\rho_\delta U_\delta$. Как и при ламинарном пограничном слое, кривые q_t/q_{t*} обладают определенной универсальностью, и приведенные на рис. 5.2, *a* результаты серий расчетов для гиперзвуковых условий полета при $M_\infty \geq 3 \dots 5$ методом эффективной длины и с использованием алгебраической модели турбулентности [149] аппроксимируются зависимостью [81] (линия на рис. 5.2, *a*):

$$\frac{q_t}{q_{t*}} = 3,75 \sin \omega - 3,5 \sin^2 \omega. \quad (5.2.6)$$

Естественно, что равенство $q = 0$ в точке торможения нефизично и противоречит опыту, так как формально даже при достаточно большом числе Рейнольдса в невозмущенном потоке вблизи точки торможения (при $x \ll R$) всегда будет область столь малых чисел $\text{Re} \sim (x/R)^2$, что ей будет соответствовать ламинарный пограничный слой с последующим переходом в турбулентный по схеме, показанной на рис. 5.2, *б*.

Расположение области перехода на рис. 5.2, *б* (кривая *a-b*) зависит как от внешних условий (от местного числа Рейнольдса, прежде всего), так и от состояния поверхности. На сфере с исчезающе малой шероховатостью пограничный слой остается ламинарным и расчетные тепловые потоки (кривая 1) согласуются с экспериментальными. Область перехода в этом случае возникает лишь на периферийной части сферы. С увеличением шероховатости область перехода перемещается к оси симметрии. Как указано в § 4.1, ее длина действительно примерно равна длине предшествующей ламинарной области. В то же время в турбулентной части пограничного слоя экспериментальные тепловые потоки, в общем, согласуются с расчетными (кривая 2), полученными описанным выше методом для гладкой поверхности с двукратным

превышением турбулентного теплового потока над ламинарным. И, наконец, для крупной шероховатости распределение теплового потока почти всюду следует турбулентному закону (кривая 4), определенному решением для гладких тел, только примерно с полуторным превышением тепловых потоков q_t на гладком теле. При этом отношение k/δ высоты шероховатости к толщине пограничного слоя для кривой 1 на рис. 5.2, б равно $k/\delta_l \sim 0,01 \ll 1$, для кривой 2 — $k/\delta_l \sim 0,1 \ll 1$, а для кривой 4 — $k/\delta_t \sim 1$, где δ_l и δ_t — толщины ламинарного и турбулентного пограничных слоев.

Заметим, что такое взаимное расположение ламинарных и турбулентных областей пограничного слоя относится лишь к невозмущенному ламинарному внешнему потоку. В случае же сильно турбулированного внешнего потока (например, тупое тело в турбулентной струе) наблюдается совершенно иной характер распределения теплового потока: «турбулентная» зависимость от давления теплового потока в точке торможения ($q \sim p^{0,8}$) и «ламинарный» характер распределения тепловых потоков по телу (рисунки 4.4 и 4.5).

Проведенный анализ свидетельствует о вполне приемлемой для инженерной практики точности метода эффективной длины, по крайней мере, для тел достаточно плавных форм, без упомянутых выше областей с чрезмерными градиентами давления (например, окрестности угловых точек контура), для которых метод нуждается в дополнительной апробации. Некоторой иллюстрацией подобных ситуаций служит рис. 3.6, где приведены распределения тепловых потоков по круглому диску со скругленными угловыми точками (расчеты и эксперимент [233]). Довольно высокую точность дает *обобщенный метод локального подобия* (кривые 2 на рис. 3.6), отличающийся от изложенного выше тем, что коэффициент B_l в (5.1.5) определяется из решения уравнений (3.2.7) с отброшенными правыми частями, но с оставленным членом с коэффициентом β , определяемым по местному градиенту давления (решения В. Фолкнера и С. Скэн для сжимаемого газа). Однако это трудоемкий путь. Заметим, что учет влияния градиента давления на теплообмен согласно § 3.2 и [74] дает возможность не решать уравнения (3.2.7) и сохранить элементарность метода эффективной длины (см. (3.2.30)) при вполне приемлемой точности (расчет практически совпадает с кривыми 2).

Для тонких притупленных тел ограничимся лишь оценкой эффективной длины притупленных конусов или клиньев, для чего используем формулу (5.1.13), положив в ней для оценок $p U_\delta = \text{const}$. Тогда, интегрируя, получим

$$\bar{x}_{\text{ef}} = \frac{x_{\text{ef}}}{r_0} = \frac{1}{\bar{r}_b^{\kappa}} \left(\bar{x}_{\text{ef}0} + \frac{\bar{r}_b^{\kappa+1} - 1}{(\kappa + 1) \sin \theta} \right); \quad \bar{r}_b = \frac{r_b}{r_0} = 1 + \bar{x} \sin \theta, \quad \bar{x} = \frac{x}{r_0}. \quad (5.2.7)$$

Здесь $\kappa = 2\nu$ для ламинарного и $\kappa = 5\nu/4$ для турбулентного пограничных слоев, r_0 и θ — радиус миделя носка и угол полураствора конуса или клина, координата x отсчитывается вдоль их боковой поверхности от сечения стыковки последней с носком, x_{ef0} — эффективная длина при $x = 0$. При $\bar{x} \sin \theta \ll 1$ справедливо разложение

$$\bar{x}_{ef} - \bar{x}_{ef0} = B\bar{x}, \quad B = 1 - \kappa \bar{x}_{ef0} \sin \theta. \quad (5.2.8)$$

Как правило, $B > 0$, но случаи $B < 0$ в принципе также возможны. В другом предельном случае $\bar{\tau}_b^\kappa \gg 1$ (при $\nu = 1$) решение (5.2.7) имеет асимптоту

$$\bar{x}_{ef} = \frac{\bar{x}}{\kappa + 1} + \bar{x}_{ef}^{(0)}, \quad \bar{x}_{ef}^{(0)} = \frac{1}{(\kappa + 1) \sin \theta}. \quad (5.2.9)$$

И лишь при $\bar{x} \sin \theta \gg 1$ эффективная длина притупленного конуса стремится к той же предельной величине $x/(\kappa + 1)$, что и для острого конуса.

Для примера на рис. 5.1, б для ламинарного ($\kappa = 2$), а на рис. 5.1, в для турбулентного ($\kappa = 5/4$) пограничных слоев построены функции $\bar{x}_{ef}(\bar{x})$ для притупленных конусов со сферическим носком радиуса R (при этом $r_0 = R \cos \theta$) и с углами $\theta = 5 \dots 40^\circ$; начальные величины \bar{x}_{ef0} определены по данным рис. 5.2, а. Как видно, кривые $\bar{x}_{ef}(\bar{x})$ довольно быстро выходят на свои асимптоты (5.2.9) (пунктир), особенно для случаев $\kappa = 2$ и углов $\theta \geq 10^\circ$, для которых величины $\bar{x}_{ef}^{(0)}$ и \bar{x}_{ef0} мало различаются между собой.

§ 5.3. Приложение метода эффективной длины. Трехмерные течения

Наиболее плодотворным следствием осесимметричной аналогии, изложенной в § 5.1, является возможность применения ее для расчета теплообмена методом эффективной длины в трехмерных течениях, для чего в формулах (5.1.11) для x_{ef} следует подставить величину r_{ef} при $\nu = 1$. При этом, как уже указано выше, вовсе не обязательно проводить вычисления самих линий тока, а можно при заданном поле скоростей воспользоваться дифференциальными уравнениями (5.1.14), (5.1.15), записанными в произвольной системе координат (x_1, x_3) . Ниже в этом плане рассмотрим некоторые типовые задачи с одновременным анализом особенностей соответствующих распределений тепловых потоков.

1. *Трехмерная точка торможения* с двумя плоскостями симметрии со связанными с ними координатами x_1, x_3 и с компонентами скоростей u_1, u_3 ; при этом параметры Ламе $H_1 = H_3 = 1$. Согласно (3.3.1) невязкое распределение скоростей в окрестности точки торможения имеет вид

$$u_1 = a_1 x_1, \quad u_3 = a_3 x_3. \quad (5.3.1)$$

При $a_1 = a_3$ имеем осесимметричную задачу, а при $a_3 = 0$ — плоскую. При этом в окрестности точки торможения форма невязких линий тока, дифференциал длины dl вдоль них и полная скорость U представимы в виде

$$x_3 = \lambda x_1^{\bar{a}}, \quad u_1 dl = U dx_1, \quad U = a_1 \sqrt{x_1^2 + \lambda^2 \bar{a}^2 x_1^{2\bar{a}}}, \quad \bar{a} = a_3/a_1 \leq 1. \quad (5.3.2)$$

Здесь параметр λ постоянен и свой на каждой линии тока. Примеры таких линий тока показаны на рис. 5.3, а.

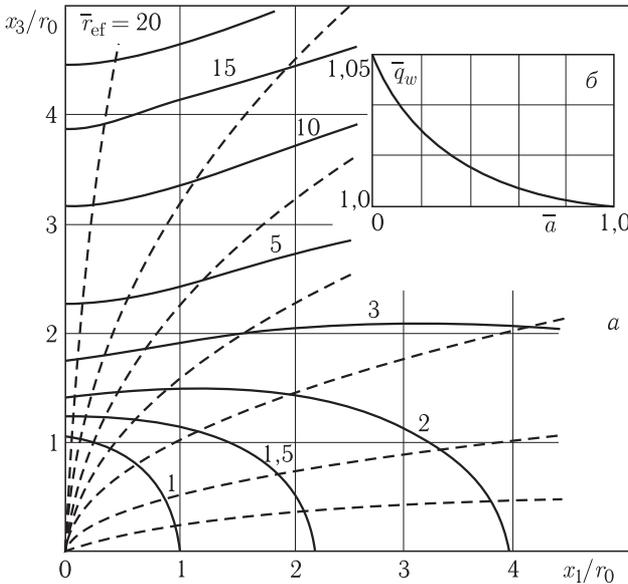


Рис. 5.3. а — линии тока (штриховые) и изолинии $\bar{r}_{ef} = r_{ef}/r_0$ (сплошные) в окрестности точки торможения при $\bar{a} = 0,5$; б — отношение $\bar{q}_w(\bar{a})$

Эффективный радиус r_{ef} в этом случае определяется из уравнения (3.1.4), которое запишем в виде

$$\frac{d \ln r_{ef} U}{dl} = \frac{a_1 + a_3}{U} \quad \text{или} \quad \frac{d(r_{ef} U)^2}{dl} = 2(a_1 + a_3) r_{ef}^2 U. \quad (5.3.3)$$

Первое уравнение имеет однопараметрическое решение

$$r_{ef} U = C_0(\lambda) x_1^{1+\bar{a}}, \quad x_1 = x_1(l, \lambda). \quad (5.3.4)$$

Здесь $C_0 = C_0(\lambda)$ — произвольная постоянная, не влияющая на величину x_{ef} . На рис. 5.3, а показаны также величины \bar{r}_{ef} с коэффициентами C_0 , выбранными из условия равенства \bar{r}_{ef} на круге радиуса r_0 .

Для определения тепловых потоков в точке торможения учтем, что в формулу (5.1.10) для q_l входит именно отношение x_{ef}/U , для

которого, полагая $\rho \mu = \text{const}$, из уравнения (5.1.11) с учетом второго уравнения (5.3.3) получим при $U, l \rightarrow 0$ следующий предел:

$$\frac{x_{\text{ef}}}{U} = \frac{1}{U^2 r_{\text{ef}}^2} \int_0^l U r_{\text{ef}}^2 dl = \frac{1}{2(a_1 + a_3)}. \quad (5.3.5)$$

Это означает, что тепловой поток в пространственной точке торжования выражается той же формулой (3.2.24), только со средним градиентом скорости $c = (a_1 + a_3)/2$. Точность этого вывода иллюстрирует рис. 5.3, б, где показано отношение $\bar{q}_w(\bar{a})$ точного теплового потока (3.3.3), когда $q_w(\bar{a}) = q_w(1)(0,75 + 0,25\bar{a})$, к тепловому потоку $q_w(\bar{a}) = q_w(1)((1 + \bar{a})/2)^{1/2}$; определенному методом эффективной длины. Как видно, это отношение весьма близко к единице.

2. Используем далее метод § 5.1 для расчета теплообмена на несущих телах простейшей формы (острый конус, треугольное крыло, стреловидный цилиндр) при их пространственном обтекании потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Такие тела являются типичными элементами аппаратов планирующего спуска, в связи с чем расчетам теплообмена на них посвящено большое количество работ (отметим, например [17, 18, 254]). Конечно, глобальное влияние небольшого носового загупления на теплообмен требует специального анализа, однако, пренебрежение им дает верхнюю оценку тепловых потоков, которая становится все более реальной с ростом угла атаки, когда влияние носка на теплообмен уменьшается.

Около рассматриваемых ниже тел реализуются конические течения, при этом параметры невязкого потока постоянны вдоль лучей, исходящих из вершины тела (для бесконечного цилиндра центр коничности потока находится в бесконечно удаленной точке), что упрощает исследование трехмерного пограничного слоя в точной постановке. Имеющиеся для ламинарного режима точные численные расчеты такого пограничного слоя могут быть использованы для детальной проверки и уточнения границ применимости метода осесимметричной аналогии § 3.1. На его основе для указанных тел ниже получены достаточно простые соотношения для расчета теплообмена как в совершенном газе, так и в равновесно диссоциирующем воздухе. Они позволяют проследить влияние основных определяющих параметров, дают полезный способ корреляции расчетных и экспериментальных данных, удобны и широко использовались при проведении инженерных оценок теплообмена на элементах гиперзвуковых летательных аппаратов. Отметим, что для конуса и цилиндра несколько другая форма таких соотношений ранее приведена в [5] (результаты расчетов по ним и представленным здесь более удобным для практических целей зависимостям близки).

Используем цилиндрическую систему координат (x, φ, r) .

Для острого конуса произвольного сечения $r = xR(\varphi)$ (здесь $R(\varphi) = \text{tg } \theta$, где $\theta(\varphi)$ — угол между образующей и осью конуса x),

и в силу конечности невязкого потока имеем вдоль тела $w = w(\varphi)$, $u = u(\varphi)$, так что $\frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{w}{ru} d\varphi = d \ln \frac{w}{Ru}$, в результате чего из (3.1.10) вдоль линии тока на теле получаем

$$r_{ef} = C \frac{r}{R} \cdot \frac{w}{U e_{n_3}}, \quad e_{n_3} = \cos \omega \cdot \cos \vartheta, \quad \frac{r}{R} = \chi = \exp \int \frac{uR}{w} d\varphi, \quad (5.3.6)$$

где ω — угол между внешней нормалью к поверхности и плоскостью $x = \text{const}$, ϑ — угол между нормалью к контуру тела в сечении $x = \text{const}$ и осью r . Тогда для эффективной длины x_{efi} вдоль линии тока имеем (здесь $\bar{\chi} = \chi / \cos \omega$, $w_\tau = w / \cos \vartheta$, $ds' = r d\varphi / \cos \vartheta$)

$$x_{efl} = \frac{\int_0^{s'} \mu_* \rho_* \bar{\chi}^2 w_\tau ds'}{\mu_* \rho_* \bar{\chi}^2 w_\tau^2 / U_\delta} = \frac{U_\delta}{w_\tau} x'_l, \quad (5.3.7)$$

$$x_{eft} = \frac{\int_0^{s'} \rho_* U_\delta \mu_*^{1/4} \bar{\chi}^{5/4} \left(\frac{w_\tau}{U_\delta}\right)^{1/4} ds'}{\rho_* U_\delta \mu_*^{1/4} \bar{\chi}^{5/4} \left(\frac{w_\tau}{U_\delta}\right)^{5/4}} = \frac{U_\delta}{w_\tau} x'_t.$$

Здесь и ниже при расчетах эффективной длины для простоты пренебрежем слабым влиянием переменности параметров $(H_{ei} - h_w) / (H_\delta - h_w) = \theta_i$, ρ_* и μ_* вычисляем по определяющей энтальпии h_* (по Эккертю).

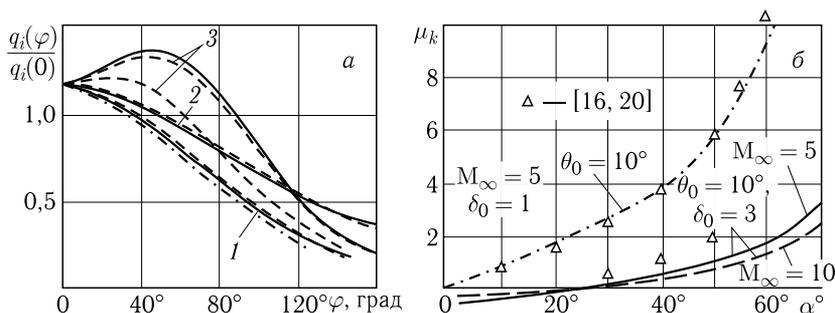


Рис. 5.4. *a* — Распределение тепловых потоков на круглом и эллиптическом конусах: 1 — $\delta = 1$, $\theta_0 = 20^\circ$, $\alpha = 15^\circ$; 2 — $\delta = 1$, $\theta_0 = 20^\circ$, $\alpha = 30^\circ$; 3 — $\delta = 1/2$, $\theta_0 = 20^\circ$, $\alpha = 15^\circ$. Сплошные кривые — ламинарный пограничный слой, штрихпунктирные — турбулентный пограничный слой, штриховые — численный расчет [20] ($M_\infty = 7$, $\gamma = 1,4$, $t_w = 0,05$). *б* — Параметр окружного растекания μ_k на круглом ($\delta_0 = 1$) и на эллиптическом ($\delta_0 = 3$, см. ниже) остром конусе

Интегрирование ведется в общем случае от точки растекания $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_{\max}$, где возникает точка стекания ($w \rightarrow 0$) в принятой координатной системе (в общем случае, когда $R = R(\varphi)$, $\varphi < \pi$). Во всей этой области тела достаточно в силу конечности невязкого течения провести расчет для одной невязкой линии тока, чтобы получить окружное в сечении $x = \text{const}$ распределение тепловых потоков $q_i(\varphi)/q_i(0)$ (при $\mu\rho \sim \rho h^{-n}$)

$$q_{i\varphi} = \frac{q_i(\varphi)}{q_i(0)} = \frac{\alpha_i(\varphi)/c_p}{\alpha_i(0)/c_p} \theta_{i\varphi} = \Lambda_\varphi^{a_i} \left(\frac{x_{\text{ef}i}(0)}{x_{\text{ef}i}(\varphi)} \right)^{b_i} \left(\frac{h_{*i}(0)}{h_{*i}(\varphi)} \right)^{c_i} \theta_{i\varphi}, \quad (5.3.8)$$

$$\theta_{i\varphi} = \frac{\theta_i(\varphi)}{\theta_i(0)}, \quad \Lambda_\varphi = \frac{(pU_\delta)_\varphi}{(pU_\delta)_{\varphi=0}}, \quad a_l = b_l = 0,5,$$

$$c_l = 0,5n, \quad a_t = 0,8, \quad b_t = 0,2, \quad c_t = 0,6 + 0,2n.$$

При расчете эффективной длины $x_i(0)$ на линии растекания $\varphi = 0$ учтем, что при $\varphi \ll 1$ имеем $w \approx a\varphi$, $\chi \approx \varphi^{1/\mu_k}$, где $\mu_k = \frac{a}{u(0)R(0)} > 0$. Тогда получим ($l \sim x \sim \varphi^{1/\mu_k}$ — расстояние вдоль линии растекания),

$$r_{\text{ef}} \sim \varphi^{(1+\mu_k)/\mu_k} \sim l^{1+\mu_k}, \quad (5.3.9)$$

$$x_{\text{ef}l}(0) = \frac{l}{3 + 2\mu_k}, \quad x_{\text{ef}t}(0) = \frac{4l}{9 + 5\mu_k}.$$

На рис. 5.4, *a* показаны полученные с помощью этих соотношений отдельные результаты по окружному распределению тепловых потоков $q_{i\varphi}$ на круглых и эллиптических конусах, обтекаемых под углами атаки сверхзвуковым потоком совершенного газа (при этом $R(\varphi) = \delta_0 \text{tg } \theta_1 (1 - (1 - \delta_0^2) \sin^2 \varphi)^{-1/2}$, где $0 < \delta_0 = \text{tg } \theta_2 / \text{tg } \theta_1 < 1$ — соотношение полуосей эллипса, $x \text{tg } \theta_1$ — большая полуось).

Параметры невязкого потока брались из работ [18, 20]. Для ламинарного режима дано сравнение результатов с точными расчетами трехмерного пограничного слоя [20].

Отсюда для линии растекания острого конуса с учетом (5.3.9) имеем

$$\text{St}_{\delta l} \text{Re}_{\delta x}^{0,5} = 1,73 A_l \left(1 + \frac{2}{3} \mu_k \right)^{0,5}, \quad \text{St}_{\delta t} \text{Re}_{\delta x}^{0,2} = 1,17 A_t \left(1 + \frac{5}{9} \mu_k \right)^{0,2}. \quad (5.3.10)$$

Отметим, что для ламинарного режима при $\alpha = 0$ эти соотношения отлично согласуются с точными расчетами на остром конусе.

Естественно, те же результаты можно получить с использованием поверхностной системы координат. Покажем это для линии растекания острого конуса с углом полураствора θ_0 под углом атаки α . Выберем координаты x_1 и x_3 на теле так, что $x_1 = x$ — длина вдоль линии растекания $\varphi = 0$, а $x_3 = \varphi$ — меридиональный угол. При этом $H_1 = 1$,

$H_3 = r_b$. Тогда с учетом постоянства параметров вдоль наветренной образующей конуса из (3.1.4) получим

$$\begin{aligned} r_{ef} &= \text{const} \cdot r_b^{1+\mu_k}, \\ \mu_k &= \frac{g}{\sin \theta_0}, \quad g = \frac{1}{u(0)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Для эффективной длины на линии растекания получаем

$$x_{efl} = \frac{x}{3 + 2\mu_k}, \quad x_{eft} = \frac{4x}{9 + 5\mu_k}. \quad (5.3.12)$$

При $\alpha = 0$ имеем $\mu_k = 0$, $x_{efl} = x/3$ и $x_{eft} = (4/9)x$, как и в (5.2.9). Эти результаты в точности соответствуют соотношениям (5.3.9).

Каждому конусу под углом атаки можно поставить в соответствие местный конус с углом полураствора $\theta_l = \theta_0 + \alpha$, если иметь ввиду лишь наветренную образующую, причем согласно § 2.3 основные параметры на этих конусах, за исключением окружного растекания, будут достаточно близки между собой.

Однако, как следует из (5.3.12), тепловые потоки на исходном конусе, при $\mu_k > 0$, будут всегда больше, чем на местном эквивалентном при $\alpha = \mu_k = 0$, поскольку $q_{wl} \sim x_{efl}^{-1/2}$ для ламинарного и $q_{wt} \sim x_{eft}^{-0.2}$ для турбулентного теплообмена.

Этот эффект растекания оценим, отнеся (как и в § 3.3) тепловые потоки q_w на линии растекания острого конуса с углом полураствора θ_0 , обтекаемого под углом атаки α , к тепловому потоку q_{wloc} на местном конусе с углом $\theta_l = \theta_0 + \alpha$, но обтекаемом без угла атаки. При больших числах Маха M_∞ параметры течения (p_δ , ρ_δ , U_δ и т. д.) в обоих случаях будут одинаковыми, поэтому отношение тепловых потоков $\bar{q}_l = q_{wi}/q_{wi,loc}$ будет равно

$$\bar{q}_l = \left(1 + \frac{2}{3}\mu_k\right)^{0.5}, \quad \bar{q}_t = \left(1 + \frac{5}{9}\mu_k\right)^{0.2} = \left(\frac{5\bar{q}_l^2 + 1}{6}\right)^{0.2}. \quad (5.3.13)$$

Отметим, что для ламинарного пограничного слоя эта зависимость хорошо согласуется с точными расчетами (рис. 3.8) с учетом того, что параметр K на рис. 3.8 равен $2\mu_k/3$. Как следует из (5.3.13), эффект растекания для ламинарного теплообмена существенно больше, чем для турбулентного.

Используя для круглого конуса и гиперзвуковых условий обтекания (практически при $M_{\infty n} = M_\infty \sin(\theta_0 + \alpha) \geq 2$ и $\varepsilon \operatorname{tg}(\theta_0 + \alpha) \leq 0.2$, где ε — угол между скачком и телом) приближенное решение [121] для тонкого ударного слоя с растеканием и постоянной плотностью, имеем

при $\varphi \rightarrow 0$

$$p = \rho_\infty U_\infty^2 \sin^2(\theta_0 + \alpha), \quad U_\delta \approx U_\infty \cos(\theta_0 + \alpha), \quad \rho_\delta \approx \rho_\infty k^{-1},$$

$$\mu_k \approx \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2k\omega}{(1-\omega)^2}} - \frac{1}{2}, \quad 0 < \omega = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_0 \sin(\theta_0 + \alpha)} < 1. \quad (5.3.14)$$

Достаточная точность этих простых соотношений для μ_k следует из рис. 5.4, где приведено сравнение с результатами численных расчетов для совершенного газа [16, 20].

Легко оценить область значений M_∞ , θ_0 , α , где часто используемая в инженерной практике схема местного конуса (с углом полураствора $\theta_0 + \alpha$, меньшим предельного, но обтекаемого без угла атаки), обеспечивающая совпадение местных параметров, за исключением окружного растекания, дает приемлемые по точности (скажем, с ошибкой не более 10%) оценки теплообмена на линии растекания исходного острого конуса при $\alpha > 0$.

Полагая $\bar{q}_i \leq 1,1$ в (5.3.13), с учетом (5.3.14) находим область применимости этой схемы (ниже кривых на рис. 5.5, которые заметно зависят от условий обтекания). Эта область углов атаки α достаточно широкая, особенно при турбулентном режиме теплообмена, и увеличивается с ростом числа Маха.

Отметим, что при $\alpha/\theta_0 \ll 1$

$$\bar{q}_l \approx 1 + \frac{1}{3} \mu_k, \quad \bar{q}_t \approx 1 + \frac{1}{9} \mu_k, \quad \mu_k \approx 4k \frac{\alpha}{\theta_0}. \quad (5.3.15)$$

В области значений α выше кривых на рис. 5.4, б влияние пространственных эффектов значительно и схемой местного конуса не описывается.

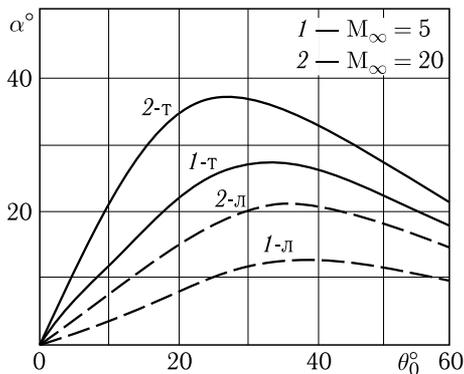


Рис. 5.5. Границы области применимости схемы местного конуса для линии растекания острого конуса (ниже приведенных кривых), т — турбулентный, л — ламинарный пограничные слои

При проведении оперативных траекторных расчетов теплообмена предпочтительнее иметь дело с соотношениями, использующими параметры невозмущенного потока. Учитывая (5.1.11б), (5.3.12)–(5.3.14) и полагая здесь $Pr = 0,7$, $\mu\rho \sim ph^{-n}$ (при этом $\mu_\delta \approx C_0 M_{\infty n}^{2(1-n)} k \mu_\infty$, $C_0 = 2^n \gamma_\infty (\gamma_\infty - 1)^{-n}$), имеем

$$\begin{aligned} St_{\infty l} Re_{\infty x}^{0,5} M_{\infty}^{n-1} &\approx \\ &\approx 0,41 l_*^{0,5} \sqrt{3 C_0} \left(1 + \frac{2}{3} \mu_k\right)^{0,5} \cos^{0,5}(\theta_0 + \alpha) \sin^{1-n}(\theta_0 + \alpha), \\ St_{\infty t} Re_{\infty x}^{0,2} M_{\infty}^{0,4(n-1)} &\approx \\ &\approx 0,0367 K_* \left(\frac{9}{4} C_0\right)^{0,2} \left(1 + \frac{5}{9} \mu_k\right)^{0,2} k^{-0,6} \cos^{0,8}(\theta_0 + \alpha) \sin^{0,4(1-n)}(\theta_0 + \alpha). \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Здесь γ_∞ — показатель адиабаты в невозмущенном потоке и

$$St_{\infty i} = \frac{q_i}{\rho_\infty U_\infty (H_{ei} - h_w)}, \quad Re_{\infty x} = \frac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu_\infty}.$$

Сопоставление результатов с численными расчетами [18] (где принято $n = 0,24$) на рис. 5.6 свидетельствует о приемлемой точности приведенных простых соотношений для круглого конуса.

Рассматривая для условий полета в атмосфере воздух за ударной волной при $M_{\infty n} \approx M_\infty \sin(\theta_0 + \alpha) \geq 5$ как равновесно-диссоциирующий (при этом $n \approx 0,3$, $\gamma_\infty = 1,4$) и используя для простоты приближенное соотношение $k \approx 0,6 M_{\infty n}^{-0,7}$ (рис. 5.7), получаем вдоль линии растекания острого конуса

$$\begin{aligned} S_l = St_{\infty l} Re_{\infty x}^{0,5} M_{\infty}^{-0,7} &\approx \\ &\approx 1,07 l_*^{1/2} \left(1 + \frac{2}{3} \mu_k\right)^{0,5} \cos^{0,5}(\theta_0 + \alpha) \sin^{0,7}(\theta_0 + \alpha), \\ S_t = St_{\infty t} Re_{\infty x}^{0,2} M_{\infty}^{-0,7} &\approx \\ &\approx 0,069 K_* \left(1 + \frac{5}{9} \mu_k\right)^{0,2} \cos^{0,8}(\theta_0 + \alpha) \sin^{0,7}(\theta_0 + \alpha). \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Хотя влияние M_∞ , θ_0 , α в основном учтено, правые части в (5.3.17) в некоторой степени зависят от этих параметров (через l_* , K_* , μ_k). Анализ расчетов показывает, что для воздуха ($n \approx 0,3$) при ламинарном и турбулентном режимах их результаты можно аппроксимировать соответственно в виде (рис. 5.8)

$$St_{\infty l} Re_{\infty x}^{0,5} M_{\infty}^{-0,56} \sin^{0,5} \theta_0 \approx 0,9 l_*^{1/2} \sin^{0,84}(\theta_0 + \alpha), \quad (5.3.18)$$

$$St_{\infty t} Re_{\infty x}^{0,2} M_{\infty}^{-0,65} \sin^{0,2} \theta_0 \approx 0,067 K_* \sin^{0,81}(\theta_0 + \alpha) \cos^{0,68}(\theta_0 + \alpha). \quad (5.3.19)$$

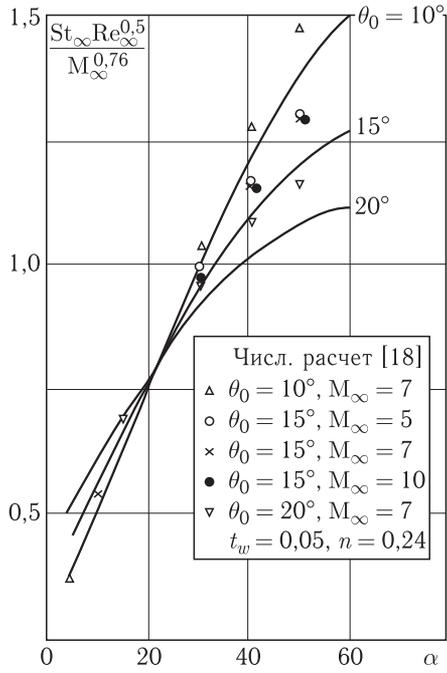


Рис. 5.6. Сравнение зависимости (5.3.16) для ламинарного режима с численными расчетами

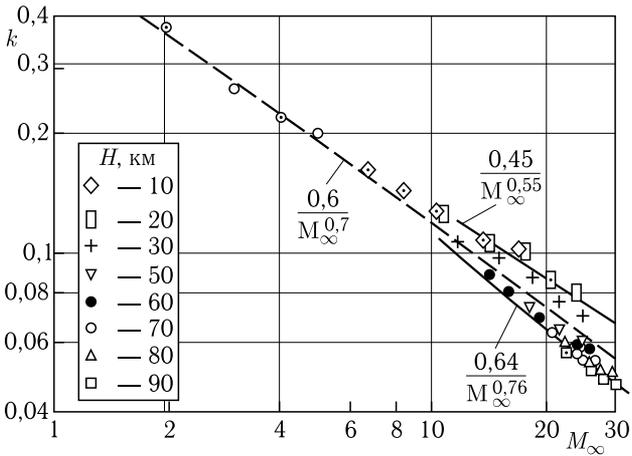


Рис. 5.7. Отношение плотностей в прямом скачке $k = \rho_\infty / \rho_s$ для равновесного воздуха в зависимости от числа M_∞ и высоты H

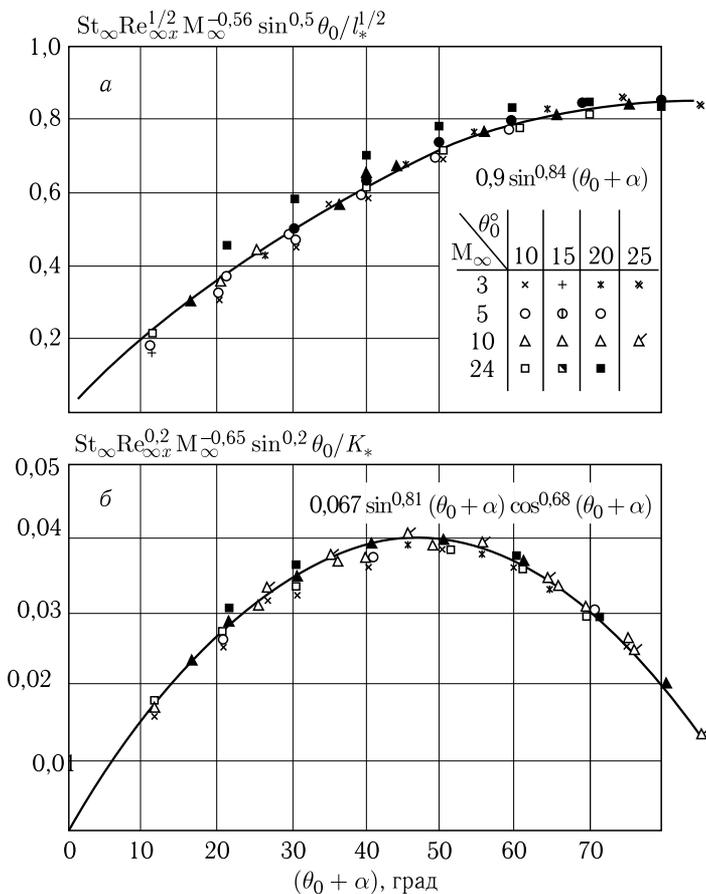


Рис. 5.8. Аппроксимация данных по теплообмену на линии растекания конусов (5.3.18) и (5.3.19): а — ламинарный теплообмен; б — турбулентный теплообмен

Для конусов эллиптического сечения с плоскостью симметрии течения давление в окрестности линии растекания $\varphi = 0$ в ньютоновском приближении можно представить в виде

$$\frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} \approx \sin^2(\theta_2 + \alpha) [1 - \cos^2 \theta_2 \delta_0^2 (\omega_2 + \delta_0^2 - 1) \varphi^2 + \dots]. \quad (5.3.20)$$

Здесь $\delta_0 = \text{tg } \theta_2 / \text{tg } \theta_1$ — отношение полуосей эллипса в плоскости потока ($b = x_1 \text{tg } \theta_2$) и ортогональной к ней плоскости ($a = x_1 \text{tg } \theta_1$). Тогда из уравнения движения на теле в окружном направлении находим при

$\varphi = 0$ (рис. 5.4)

$$\mu_k = \frac{1}{\sin \theta_2 \cos (\theta_2 + \alpha)} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2k \delta_0^2}{(1 - \omega_2)^2} (\omega_2 + \delta_0^2 - 1)} - \frac{1}{2},$$

$$\omega_2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_2 \sin (\theta_2 + \alpha)}, \quad 1 - \omega_2 = \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} (\theta_2 + \alpha)}.$$
(5.3.21)

Форма поперечного сечения конуса сильно влияет на теплообмен вдоль линии растекания при ламинарном режиме. Некоторые результаты расчетов теплообмена для равновесного воздуха при $M_\infty \sim 3 \dots 20$ по приведенным соотношениям показаны на рис. 5.9, *a–в* (соответственно для $\theta_1 = 10^\circ, 5^\circ, 20^\circ$) в форме относительных тепловых потоков $s_{i2} = q_i(\delta_0)/q_{i2}(1)$, где $q_{i2}(1)$ соответствует круглому конусу с углом полураствора θ_2 (в этом случае местный угол атаки равен $\theta_2 + \alpha$).

Величины s_{i2} достаточно консервативны и непосредственно характеризуют влияние формы поперечного сечения конуса на теплообмен. Для конусов с $\theta_1 \sim 5 \dots 20^\circ$ при $M_\infty \sim 3 \dots 20$ и углах атаки $\alpha \sim 20 \dots 70^\circ$, как следует из рис. 5.10, при $\delta_0 \sim 0,2 \dots 2$ можно для оценок принимать

$$s_{i2} \approx 0,2 + 0,8 \delta_0, \quad s_{t2} \approx 0,7 + 0,3 \delta_0. \quad (5.3.22)$$

Там же приведено отношение $s_{t1} = q_t(\delta_0)/q_{t1}(1)$, где $q_{t1}(1)$ — тепловой поток на круглом конусе с углом полураствора θ_1 , и дано сравнение полученной аппроксимации $s_{t1} = 0,5(1 + \delta_0)$ с точными расчетами.

При $\delta_0 \rightarrow 0$ (плоское треугольное крыло) ньютоновский характер течения, естественно, нарушается.

3. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание плоского треугольного крыла (угол при вершине 2β) с острыми кромками. При малых углах атаки $\alpha \ll \beta$ ударная волна присоединена к кромкам, вне области влияния вершины скорость по размаху $w = U_\infty \sin \alpha \cos \beta \operatorname{tg} \varepsilon_0 \approx \alpha^2 U_\infty$ (известное правило полос [170, 235]), где ε_0 — угол между скачком и плоскостью крыла в нормальном к кромке сечении. В этом сечении имеет место плоское обтекание эффективного клина с углом θ таким, что $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha / \sin \beta$, потоком со скоростью $U_1 = U_\infty \cos \alpha \sin \beta / \cos \theta$, на которое наложено течение вдоль кромки со скоростью $U_2 = U_\infty \cos \alpha \sin \beta$ (рис. 5.11, *a*). При этом $\operatorname{tg} \varepsilon_0 = k \operatorname{tg} (\theta + \varepsilon_0)$, откуда при $k = \operatorname{const}$ ($k = \rho_\infty / \rho_\delta$ — отношение плотностей на скачке)

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{1 - k}{2 \operatorname{tg} \theta} - \sqrt{\frac{(1 - k)^2}{4 \operatorname{tg}^2 \theta} - k}. \quad (5.3.23)$$

Следовательно, решение с присоединенным к кромкам скачком уплотнения не существует при $\operatorname{tg} \theta > \operatorname{tg} \theta_0 \approx (1 - k) / (2\sqrt{k})$, или при $\Omega \geq 1/2$, где $\Omega = \sqrt{k} \operatorname{tg} \alpha / \sin \beta$.

При $\theta = \theta_0$ имеем $\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \sqrt{k}$ и скорость $w = U_\infty \sin \alpha \cos \beta \sqrt{k}$ равна местной скорости звука. Заметим, что параметр Ω является основным определяющим параметром течения около треугольных крыльев [235]. С увеличением угла атаки α ($\Omega \geq 1/2$) реализуется коническое течение

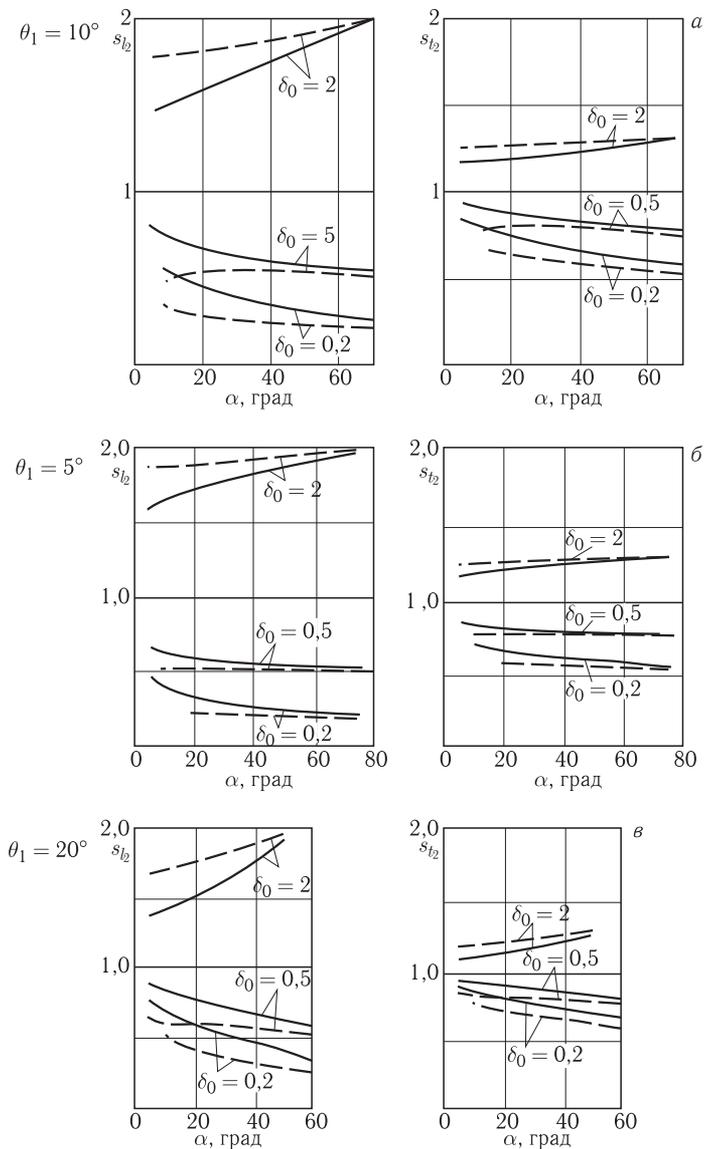


Рис. 5.9. На всех рисунках сплошная линия — $M_\infty = 20$, пунктирная линия — $M_\infty = 3$

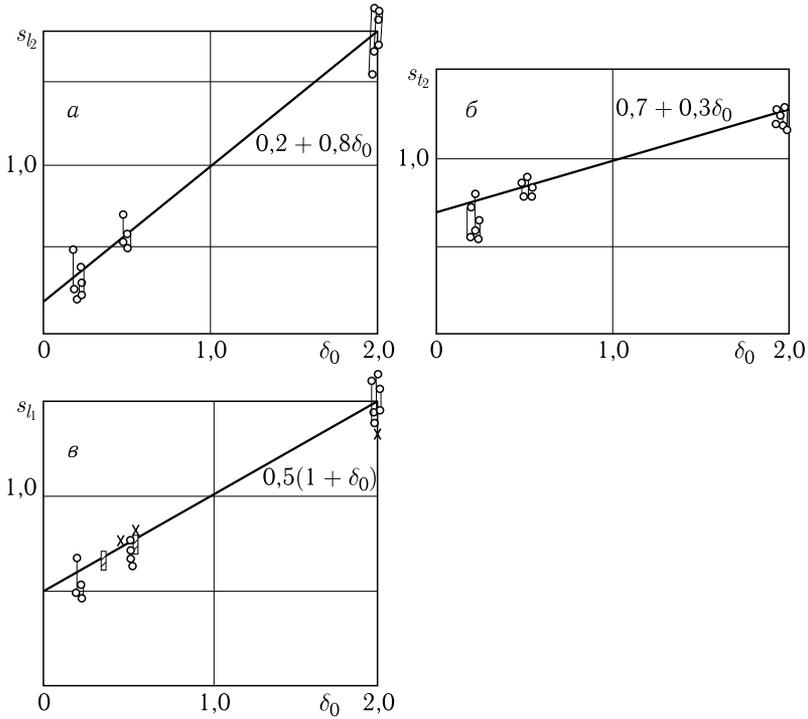


Рис. 5.10. Влияние отношений полуосей эллипса на теплообмен на линии растекания острого конуса: кривые — аппроксимация; о — результаты данных расчетов ($M_\infty = 3 \dots 20$, $\theta_1 = 5 \dots 20^\circ$, $\alpha = 20 \dots 70^\circ$); □ — данные работы [20]; × — [17] (цилиндр)

с отошедшим от кромок и присоединенным к вершине скачком. При этом на координатной сфере точки растекания потока ($w' = 0$) на крыле могут не лежать в плоскости симметрии, где в этом случае имеет место точка стекания, и стремятся к ней по мере увеличения угла атаки [15]. Записывая расхождение линий тока в декартовых (x, z) и полярных r', φ' координатах (соответствующие компоненты скорости u, w и u', w'), для радиуса r_{ef} эквивалентного тела вращения на центральной линии ($z = \varphi' = 0$) (здесь $r' \approx x, u' = u, w' = w - u \varphi'$) имеем

$$\frac{1}{r_{ef}} \frac{dr_{ef}}{dx} = \frac{1}{r'} \frac{dr'}{dx} + \frac{1}{r'u'} \frac{\partial w'}{\partial \varphi'} = \frac{1 + c_1}{x} = \frac{1}{u} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{c}{x} > 0 \quad (5.3.24)$$

при $c_1 = \frac{1}{u'} \frac{\partial w'}{\partial \varphi'} > -1$, причем $c_1 < 0$ соответствует как раз точке стекания на координатной сфере в плоскости симметрии.

Таким образом, даже в этом случае ($-1 < c_1 < 0$) в физическом пространстве расстояние между невязкими линиями тока в окрестности

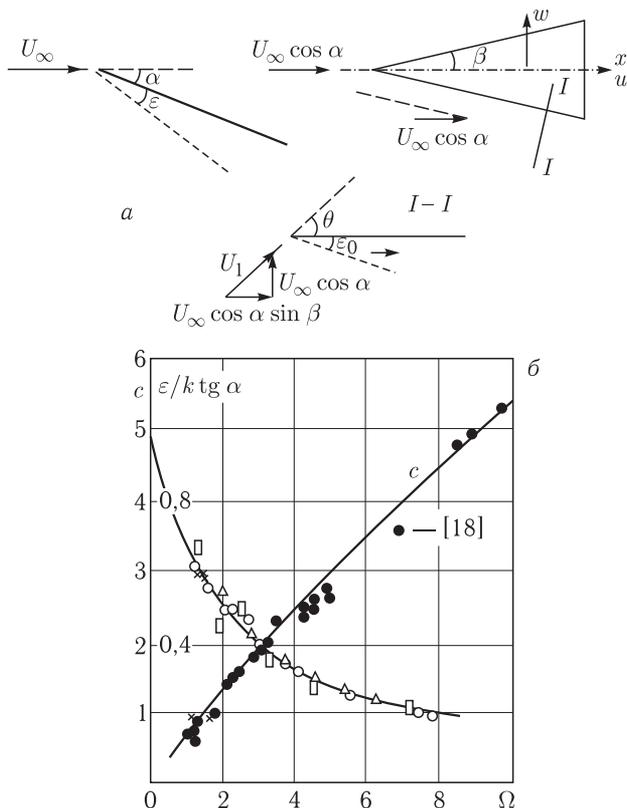


Рис. 5.11. Параметры течения около треугольного крыла: а — схема течения, б — отход скачка и поперечный градиент скорости на центральной линии

$\varphi' = 0$ вниз по потоку возрастает. В рамках схемы пограничного слоя с нулевыми вторичными течениями линию симметрии всегда можно рассматривать как линию растекания. Для нее из (5.3.24) имеем

$$r_{ef} = \text{const} \cdot x^c, \quad x_l = \frac{x}{1 + 2c}, \quad x_t = \frac{x}{1 + \frac{5}{4}c}. \quad (5.3.25)$$

Результаты численных расчетов (в том числе [16, 18]) сверхзвукового обтекания треугольных крыльев для $\gamma = \text{const} \leq 1,4$, а также некоторых экспериментов (в частности, [237]) обработаны на рис. 5.11, б в виде зависимостей $c(\Omega)$ и $\epsilon(\Omega)$, где ϵ — угловой отход присоединенного к вершине крыла скачка в плоскости симметрии. Как видно, они с хорошей точностью аппроксимируются соотношениями (при $1 \leq \Omega \leq 10$)

$$c \approx 0,76 \Omega^{0,85}, \quad \frac{\epsilon}{k \operatorname{tg} \alpha} \approx \left(1 + \frac{1}{2} \Omega\right)^{-1}. \quad (5.3.26)$$

Зная параметр растекания c , можно вычислить теплообмен на линии растекания, используя соотношения метода эффективной длины

$$\begin{aligned} St_{\infty l} Re_{\infty x}^{0,5} &= A_l (\bar{\rho}_\delta \bar{\mu}_\delta \bar{u}_\delta)^{0,5} \cdot (1 + 2c)^{0,5}, \\ St_{\infty t} Re_{\infty x}^{0,2} &= A_t (\bar{\rho}_\delta \bar{u}_\delta)^{0,8} \bar{\mu}_\delta^{0,2} \cdot \left(1 + \frac{5}{4}c\right)^{0,2}, \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

где чертой обозначены безразмерные (отнесенные к соответствующим величинам в невозмущенном потоке) параметры потока на внешней границе пограничного слоя. Последние множители в этих соотношениях определяют отличия от местного клина.

Соотношения (5.3.27) для гиперзвуковых условий обтекания ($M_{\infty n} \cong M_\infty \sin \alpha \gg 1$, $k \ll 1$, тонкий ударный слой) можно привести к более удобному виду. Заметив, что в этом случае

$$p \approx \rho_\infty U_\infty^2 \sin^2 \alpha, \quad u_\delta \approx U_\infty \cos \alpha, \quad h_\delta \approx \frac{1}{2} U_\infty^2 \sin^2 \alpha, \quad \rho_\delta \approx \frac{\rho_\infty}{k},$$

и учитывая, что при $1 < \Omega < 10$ с погрешностью не более 5% приближенно имеем $(1 + 2c)^{1/2} \approx 1,52 \cdot \Omega^{0,36}$, $(1 + 5c/4)^{0,2} \approx 1,12 \cdot \Omega^{0,13}$, получим для равновесного воздуха с учетом соотношений $k \approx 0,6 \cdot M_{\infty n}^{-0,7}$, $\mu \rho \approx p h^{-0,3}$

$$\begin{aligned} St_{\infty l} Re_{\infty x}^{0,5} M_\infty^{-0,57} &\approx 0,87 l_*^{1/2} \frac{\sin^{0,93} \alpha \cos^{0,14} \alpha}{\sin^{0,36} \beta}, \\ St_{\infty t} Re_{\infty x}^{0,2} M_\infty^{-0,65} &\approx 0,064 K_* \frac{\sin^{0,78} \alpha \cos^{0,67} \alpha}{\sin^{0,13} \beta}. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

Для совершенного газа при $\gamma = 1,4$, $n = 0,24$ имеем для ламинарного режима

$$St_{\infty l} Re_{\infty x}^{0,5} M_\infty^{-0,76} \approx 0,91 l_*^{1/2} k^{0,18} \frac{\sin^{1,12} \alpha \cos^{0,14} \alpha}{\sin^{0,36} \beta}. \quad (5.3.29)$$

Сравнение этой зависимости с численным расчетом [18] и экспериментом [24] (рис. 5.12) свидетельствует о приемлемой точности приведенных соотношений.

4. В связи с исследованиями теплообмена на затупленных передних кромках различных выступающих элементов аппарата представляет интерес задача о пограничном слое на бесконечном стреловидном цилиндре. Подробные численные исследования этой задачи для ламинарного режима приведены в работах [17, 254]. Турбулентный режим исследовался в [5, 147].

Для цилиндра с поперечным сечением $r = R(\varphi)$, используя цилиндрическую систему координат (x_1, φ, r) , из (3.1.7), (3.1.10) и (5.3.4)

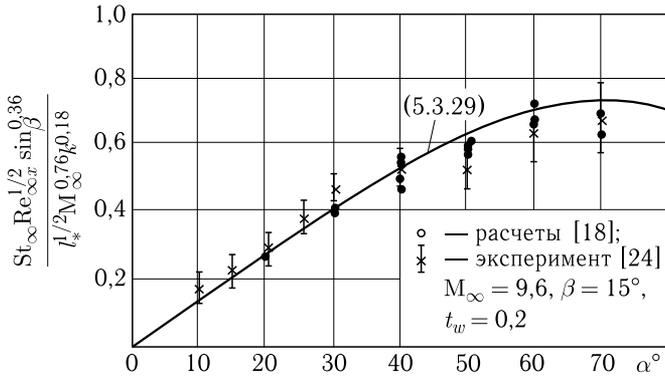


Рис. 5.12. Корреляция для ламинарного теплообмена на линии растекания Δ -крыла

получим вдоль невязких линий тока

$$x_1 = x_1^0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{u r}{w} d\varphi, \quad r_{ef} = C \frac{w}{U \cos \vartheta} = C \frac{w_\tau}{U},$$

$$x_l = \frac{\int_0^{\varphi} \mu_* \rho_* w_\tau ds'}{\mu_* \rho_* \frac{w_\tau^2}{U}} = \frac{U}{w_\tau} x'_l; \quad x_t = \frac{\int_0^{\varphi} \rho_* U \mu_*^{1/4} \left(\frac{w_\tau}{U}\right)^{1/4} ds'}{\rho_* U \mu_*^{1/4} \left(\frac{w_\tau}{U}\right)^{5/4}} = \frac{U}{w_\tau} x'_t. \quad (5.3.30)$$

Заметим, что для ламинарного режима представляет собой эффективную длину плоского пограничного слоя при поперечном обтекании цилиндра потоком со скоростью $U_{\infty n} = U_\infty \cos \lambda$ (здесь λ — угол стреловидности). При этом

$$q_l \sim \sqrt{\frac{\mu \rho U}{x_l}} (H_{el} - h_w) \sim \sqrt{\frac{\mu \rho w_\tau}{x'_l}} (H_{el} - h_w). \quad (5.3.31)$$

Отсюда следует, что отличие теплового потока q_l от соответствующей величины $q'_l \sim \sqrt{\mu \rho w_\tau / x'_l} (H'_{el} - h_w)$ в указанном плоском обтекании обусловлено, в основном, отличием энтальпий восстановления H_{el} и $H'_{el} = H_{el} - 0,5 Pr^{1/2} U_\infty^2 \sin^2 \lambda$ из-за влияния потока вдоль цилиндра (для несжимаемой жидкости, когда $H_{el} = H'_{el} = H_0$, где H_0 — энтальпия жидкости, отсюда получаем известный «принцип независимости» [128, 158], согласно которому $q_l = q'_l$). С учетом этого можно ожидать, что относительные окружные распределения тепловых потоков $\frac{q_l(\varphi)}{q_l(0)}$ в этих течениях в широком диапазоне углов стреловидности λ близки, во всяком случае, при $M_{\infty n} = M_\infty \cos \lambda \gg 1$. Этот вывод под-

тверждается сравнением с точными расчетами [17] (рис. 5.13). Таким образом, независимо от угла λ на основании расчетов теплообмена на круглом цилиндре можно приближенно получить

$$\frac{q_l(\varphi)}{q_l(0)} \approx 0,17 + 0,83 \cos^2 \varphi. \quad (5.3.32)$$

При турбулентном режиме эта аналогия не выполняется, и окружное распределение тепловых потоков существенно различное для разных λ . При увеличении λ максимум q_t для круглого цилиндра смещается с линии $\varphi \approx 30 \dots 40^\circ$ при $\lambda \approx 0$ на линию растекания $\varphi = 0$ [5, 190], где при $\lambda = 0$, $q_t = 0$.

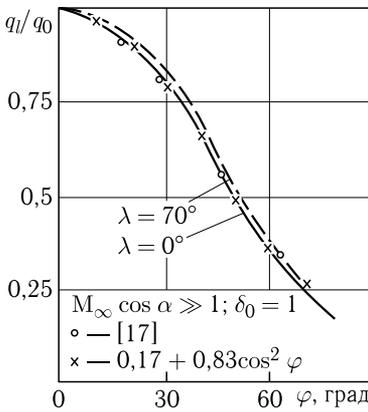


Рис. 5.13. Распределение ламинарного теплового потока на цилиндре

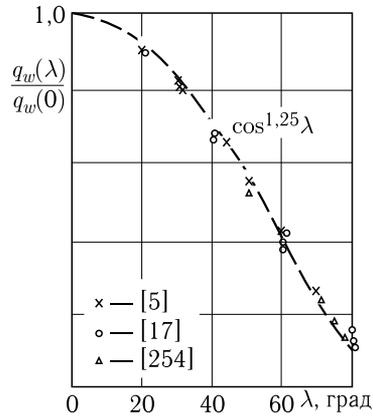


Рис. 5.14. Влияние угла стреловидности на линии растекания цилиндра на теплообмен при $M_\infty \cos \lambda > 1$

В окрестности линии растекания ($\varphi \rightarrow 0$) при $M_\infty \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} u_\delta &= U_\infty \sin \lambda, & w_{\tau\delta} &= \sqrt{2k} \sqrt{1 - \frac{k}{2}} U_\infty \cos \lambda \frac{s'}{r_0}, \\ p &\approx \rho_\infty U_\infty^2 \cos^2 \lambda, & \rho_\delta &= \frac{\rho_\infty}{k}, & r_{ef} &\sim \varphi \sim \exp \frac{a_0 x}{r_0}, \\ a_0 &= \frac{\sqrt{2k(1 - k/2)}}{\operatorname{tg} \lambda}, & x_l(0) &= \frac{r_0}{2a_0}, & x_t(0) &= \frac{4r_0}{5a_0}. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

Здесь r_0 — радиус кривизны поперечного сечения цилиндра на линии растекания. Как видно, $r_{ef} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, что соответствует началу пограничного слоя на $-\infty$ и учтено при вычислении эффективной длины. При этом для любого конечного x получаются одни и те

же значения эффективной длины $x_i(0)$ и, как следствие, толщины погранслоя δ_i и теплового потока q_i^0 . На линии растекания получаем

$$\begin{aligned} St_{\delta l} Re_{\delta r_0}^{0,5} &\approx 0,56 Pr^{-2/3} l_*^{1/2} k^{1/4} tg^{-1/2} \lambda \left(1 - \frac{1}{2} k\right)^{1/4}, \\ St_{\delta t} Re_{\delta r_0}^{0,2} &\approx 0,033 Pr^{-0,6} K_* k^{0,1} tg^{-0,2} \lambda, \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

$$St_{\delta i} = \frac{q_i^0}{\rho_\delta u_\delta (H_{ei} - h_w)}, \quad Re_{\delta r_0} = \frac{\rho_\delta u_\delta r_0}{\mu_\delta},$$

или через параметры невозмущенного потока с использованием соотношения $\mu\rho = C_0 M_{\infty n}^{2(1-n)} \mu_\infty \rho_\infty$ для вязкости воздуха получаем

$$\begin{aligned} St_{\infty l} Re_{\infty r_0}^{0,5} M_{\infty n}^{-1} &= B_1 Pr^{-2/3} l_*^{1/2} k^{1/4} \left(1 - \frac{1}{2} k\right)^{1/4} \cos^{3/2-n} \lambda, \\ St_{\infty t} Re_{\infty r_0}^{0,2} M_{\infty n}^{0,4(n-1)} &= B_2 Pr^{-0,6} K_* k^{-1/2} \sin^{0,6} \lambda \cos^{0,6-0,4n} \lambda. \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Здесь

$$St_{\infty i} = \frac{q_i^0}{\rho_\infty U_\infty (H_{ei} - h_w)}, \quad Re_{\infty r_0} = \frac{\rho_\infty U_\infty r_0}{\mu_\infty},$$

$$B_1(\gamma, n) = 0,56 C_0^{1/2}, \quad B_2(\gamma, n) \approx 0,033 C_0^{0,2}, \quad C_0 = \gamma_\infty \left(\frac{2}{\gamma_\infty - 1}\right)^n.$$

Отсюда следует, что для совершенного газа при $n = 0,3$ и $M_{\infty n} \gg 1$ (при этом $k \rightarrow 1/6$) $q_i^0 \approx \cos^{1,2} \lambda$, что близко к результатам численных расчетов пограничного слоя [17, 254] (рис. 5.14). Для равновесного воздуха при $k \approx 0,6$ $M_{\infty n}^{-0,7}$ имеем $q_i^0 \sim \cos \lambda$, т. е. влияние стреловидности здесь несколько слабее. В этом случае (здесь $B_1(1,4; 0,3) \approx 0,84$) получаем

$$St_{\infty l} Re_{\infty r_0}^{0,5} M_{\infty n}^{-0,53} \approx 0,72 Pr^{-2/3} l_*^{1/2} \cos \lambda. \quad (5.3.36)$$

Максимум турбулентного теплообмена на кромке, как следует из анализа (5.3.35), достигается в зависимости от условий обтекания при $\lambda \sim 30 \dots 40^\circ$.

Для равновесного воздуха из (5.3.35) находим

$$St_{\infty t} Re_{\infty r_0}^{0,2} M_{\infty n}^{-0,63} K_*^{-1} \approx 0,05 Pr^{-0,6} \sin^{0,6} \lambda \cos^{0,83} \lambda. \quad (5.3.37)$$

Заметим, что эти соотношения близки к тем, которые следуют непосредственно из аппроксимаций (5.3.17) для острых конусов при предельном переходе $\theta_0 \rightarrow 0$ (при этом $x \theta_0 \rightarrow r_0$). Точность соотношений (5.3.36), (5.3.37) для круглого цилиндра продемонстрирована на рис. 5.15 сравнением с численными расчетами [17] и экспериментом.

Для оценки влияния формы поперечного сечения цилиндра на теплообмен рассмотрим эллиптический цилиндр (полуось в плоскости потока $b = \delta_0 a$, где a — полуось в ортогональной плоскости). Из (5.3.17) и (5.3.21) для эллиптических конусов предельным переходом $\theta_2 \rightarrow 0$

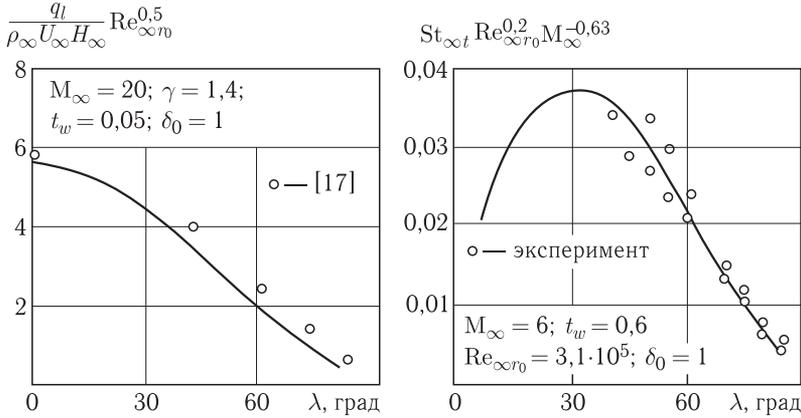


Рис. 5.15. Сравнение данных расчетов теплообмена с точными и с экспериментом (линия растекания стреловидного цилиндра)

при $\delta_0 = \text{const}$ и фиксированной величины a получим, что в ньютоновском приближении для давления относительные тепловые потоки $s_i = q_i(\delta_0)/q_i(\delta_0 = 1)$ можно представить в виде $s_{l_1} \approx \delta_0^{1/2}, s_{t_1} \approx \delta_0^{0,2}$.

Таким образом, для эллиптического цилиндра можно также использовать соотношения (5.3.35), в которых $r_0 = a/\delta_0$. На рис. 5.10 показаны также результаты численных расчетов [17] ламинарного пограничного слоя на линии растекания эллиптических цилиндров. Как видно, как и при обтекании эллиптических конусов, ньютоновский характер обтекания таких тел сохраняется практически до $\delta_0 \sim 0,2 \dots 0,3$ и нарушается при $\delta_0 \rightarrow 0$, когда точные величины s_{j1} остаются конечными (при этом градиенты скорости могут быть найдены только из глобального решения задачи обтекания таких тел [121]). Для оценок влияния формы поперечного сечения на теплообмен на линии растекания цилиндра можно также использовать аппроксимации (5.3.22) для эллиптических конусов. В частности, для плоской полосы ($\delta_0 = 0$) шириной $2r_0$ получим ($\text{Pr} = 0,7$)

$$St_{\infty l} \text{Re}_{\infty r_0}^{0,5} M_\infty^{-0,53} \approx 0,46 l_*^{1/2} \cos \lambda. \quad (5.3.38)$$

5. Используем изложенный метод для расчета теплообмена на тонких затупленных круговых конусах со сферическими носками в зонах их безотрывного обтекания под небольшими углами атаки гиперзвуковым потоком воздуха (заметим, что на остром конусе отрыв пограничного слоя в теневой зоне возникает при $\alpha/\theta_0 \geq 0,5$). Параметры на внешней границе пограничного слоя принимаем равными невязким параметрам на поверхности конусов. Как будет показано ниже, для достаточно длинных конусов в процессе поглощения пограничным слоем невязкого завихренного потока это допущение нарушается, что ведет к интенсификации теплообмена. Однако для конусов небольшого

удлинения эффекты вихревого взаимодействия, как известно [129], незначительны, и принятая расчетная схема здесь вполне приемлема. Во всяком случае при малых $\theta = \theta_0 + \alpha \cdot \cos \varphi \ll 1$ (здесь θ_0 — угол полураствора конуса, α — угол атаки, φ — меридиональный угол, $\varphi = 0$ соответствует наветренной образующей) она пригодна для конусов длиной до $L \sim (2\theta^2)^{-1} r_0 \gg r_0$ (r_0 — радиус сферического носка), что соответствует примерно расстоянию до минимума давления на тонких затупленных конусах [117, 170]. Поэтому полученные ниже результаты полезны как первое приближение.

Для тел вращения поверхностную систему координат x_1, x_3 удобно связать с полугеодезической сеткой, так что $x_1 \equiv s$ — расстояние вдоль образующей от передней точки тела, $x_3 \equiv \varphi$ (соответствующие компоненты скорости u_1, u_3). При этом $H_1 = 1$, $H_3 = r(s)$ — радиус поперечного сечения тела. Тогда в рамках осесимметричной аналогии форма эквивалентного эффективного тела вращения для любой невязкой линии тока на поверхности тела, определяемой уравнением (3.1.3), задается соотношением, которое в принятых здесь обозначениях примет вид ($U = \sqrt{u_1^2 + u_3^2}$)

$$\frac{ds}{u_1} = \frac{r d\varphi}{u_3} = \frac{dl}{U}, \quad r_{\text{ef}}(x) = r \frac{u_1}{U} \exp \int \frac{u_1}{U} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{u_3}{ru_1} dl, \quad (5.3.39)$$

где l — расстояние вдоль невязкой линии тока от критической точки.

На сферическом носовом затуплении течение в поточной системе координат (s_1, y_1, φ_1) , повернутой относительно оси тела на угол атаки α , обладает осевой симметрией (компоненты скорости $u_1, v, u_3 = 0$), во всяком случае при небольших углах атаки, когда звуковые точки и минимальные зоны влияния находятся на сфере. Здесь $r_{\text{ef}} = r_1$, и теплообмен может быть проще определен методами, разработанными для осесимметричных течений. Это дает необходимые начальные данные для расчета теплообмена на боковой поверхности с помощью общего трехмерного алгоритма в связанной системе координат (s, y, φ) с компонентами скорости u_1, v, u_3 .

Проведены [81] систематические расчеты теплообмена на затупленных конусах при их обтекании гиперзвуковым потоком равновесно-диссоциирующего воздуха как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения в пограничном слое в широком диапазоне изменения определяющих параметров — углов полураствора θ_0 ($0 \dots 20^\circ$), углов атаки α ($0 \dots 15^\circ$), чисел Маха невозмущенного потока M_∞ ($5 \dots 25$). При этом газодинамические параметры определялись на основе точных расчетов обтекания затупленных конусов [117]. Некоторые результаты показаны на рис. 5.16 в форме распределений относительных тепловых потоков q_i (или коэффициентов теплообмена $\alpha_i/c_p = q_i/(H_{ai} - h_w)$) по поверхности рассматриваемых тел (здесь q_0, q_* и $\alpha_0/c_p, \alpha_*/c_p$ — соответствующие максимальные величины на сферическом носке при ламинарном режиме (критическая точка) и при турбулентном режиме

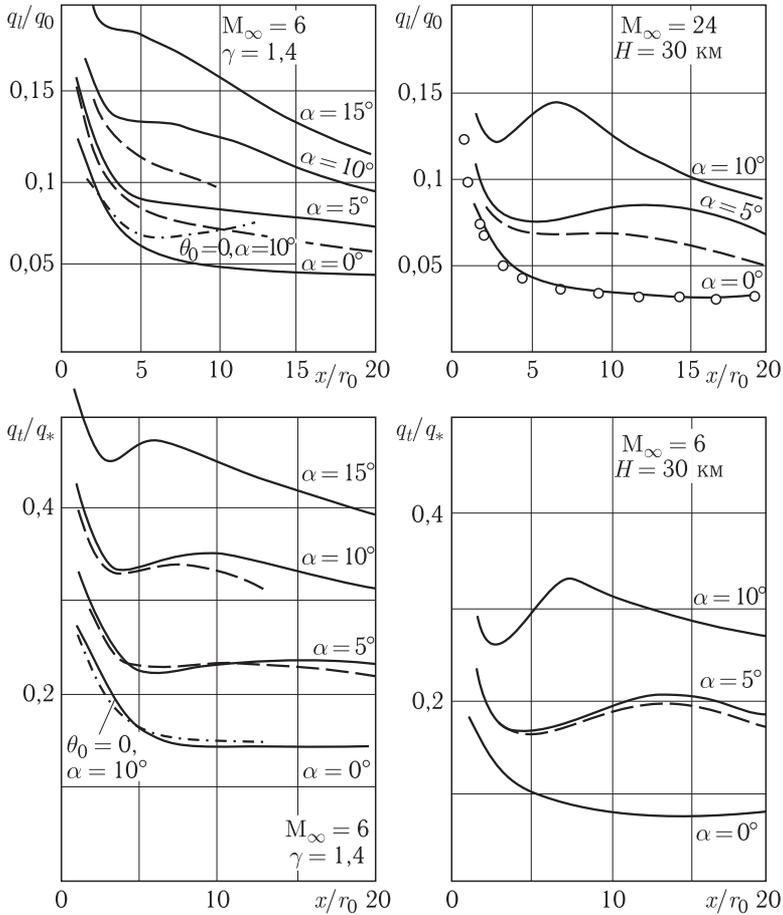


Рис. 5.16. Распределение относительных ламинарных (l) и турбулентных (t) тепловых потоков на линии растекания затупленного конуса ($\theta_0 = 10^\circ$) (штриховые кривые — местный конус, \circ — [129])

(вблизи звуковой точки, рис.5.2). При сделанных допущениях приведенные относительные величины не зависят от числа Рейнольдса и сравнительно слабо зависят от числа Маха (во всяком случае, при $5 \leq M_\infty \leq 25$) и от энтальпийного фактора $t_w = h_w/H_\infty$ (при $0,01 \leq t_w \leq 0,8$ их отличия при прочих равных условиях не превышают $\sim 2\%$).

Следует отметить, что эти результаты при $\alpha = 0$ хорошо согласуются для ламинарного режима ($i = l$) с результатами точных численных расчетов осесимметричного пограничного слоя разностным методом [129] (точки на рис. 5.16). При переходе к абсолютным значени-

ям q_l необходимо для повышения точности использовать величины q_0 , определенные по более точным методам, чем метод эффективной длины, который занижает q_0 примерно до 15%.

Здесь же отметим, что расчеты теплообмена по схеме местного конуса (конус с углом $\theta = \theta_0 + \alpha \cdot \cos \varphi$ с тем же носком при нулевом угле атаки) дают приемлемые по точности оценки турбулентного теплообмена при $\alpha/\theta_0 \leq 1,5$, тогда как для ламинарного режима, где влияние эффектов растекания более существенно, эта схема значительно занижает теплообмен уже при $\alpha/\theta_0 \geq 0,5$, что согласуется с оценками для острого конуса (рис. 5.5). Результаты расчетов теплообмена на сфере были показаны на рис. 5.2 и хорошо аппроксимируются зависимостями (5.2.4) и (5.2.6) соответственно для ламинарного и турбулентного режима.

При переходе к абсолютным значениям коэффициента теплообмена для скоростей полета $U_\infty \approx 1,5 \dots 8$ км/с можно использовать простые зависимости для $(\alpha/c_p)_0$ и $(\alpha/c_p)_*$ соответственно в критической и звуковой (для турбулентного режима) точках (1 и 2 на рис. 5.17), полученные из обработки результатов различных расчетов ламинарного [65, 201, 208, 216] и турбулентного [81, 149] теплообмена на сфере

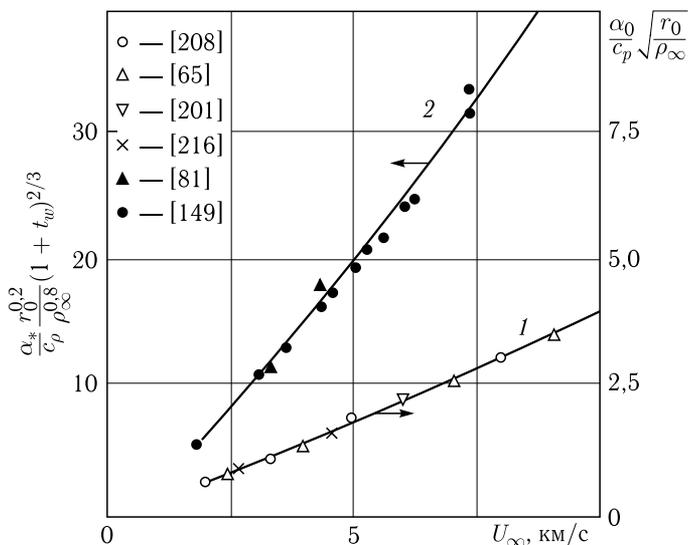


Рис. 5.17. Максимальные значения коэффициентов теплообмена α/c_p на сфере (1 — ламинарный режим, критическая точка, 2 — турбулентный режим, звуковая точка)

(погрешность не превышает $\pm 10\%$)

$$A_0 = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_0 \sqrt{\frac{r_0}{\rho_\infty}} \approx 0,335 U_\infty^{1,08},$$

$$A_* = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_* \frac{r_0^{0,2}}{\rho_\infty^{0,8}} (1 + t_w)^{2/3} \approx 2,64 U_\infty^{1,25}.$$
(5.3.40)

Здесь плотность ρ_∞ и скорость U_∞ невозмущенного потока берутся в кг/м^3 , км/с ; радиус сферы r_0 — в метрах, коэффициент теплообмена α/c_p — в $\text{кг/м}^2 \cdot \text{с}$.

Рассматривая результаты расчетов относительных тепловых потоков (или коэффициентов теплообмена) на боковой поверхности конусов, можно отметить интересную особенность, связанную примерно с одинаковым (в пределах $10 \dots 20\%$) влиянием небольших углов атаки α как на ламинарный, так и на турбулентный теплообмен. Это видно из рис. 5.18, где показано распределение величин $q_{l,\alpha}/q_{l,\alpha=0}$ и $q_{t,\alpha}/q_{t,\alpha=0}$ для разных условий обтекания на наветренной образующей конусов. Поскольку столь же одинаковы и меридиональные распределения величин $q_{l,\varphi}/q_{l,\varphi=0}$, $q_{t,\varphi}/q_{t,\varphi=0}$ (рис. 5.19), то отсюда и следует для всей поверхности конуса сделанный вывод. При этом указанные величины изменяются примерно так же, как pU_δ . Эти выводы могут быть использованы для получения простых корреляций по теплообмену при пространственном обтекании затупленных конусов гиперзвуковым потоком воздуха.

Анализ показывает, что при фиксированной геометрии течения (θ_0, α) влияние условий обтекания на турбулентный теплообмен описывается соотношением $(p'_0$ — давление в критической точке, $k = \rho_\infty/\rho_s$ — отношение плотностей газа в прямом скачке)

$$\frac{(\alpha/c_p)_t}{(\alpha/c_p)_*} \sim k^{-0,4} \frac{pU_\delta}{p'_0 U_\infty}.$$

Тогда влияние геометрических факторов для турбулентного режима, где оно достаточно мало, удастся скоррелировать в виде

$$k^{0,4} \frac{(\alpha/c_p)_t}{(\alpha/c_p)_*} \frac{p'_0 U_\infty}{pU_\delta} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-0,2}.$$

Это позволяет установить на основе проведенных расчетов следующую линейную зависимость (с погрешностью $\pm 10\%$)

$$G_t = 2,2 \lambda, \quad G_t = k^{0,4} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{0,2} \frac{(\alpha/c_p)_t}{(\alpha/c_p)_*}, \quad \lambda = \frac{pU_\delta}{p'_0 U_\infty}. \quad (5.3.41)$$

На рис. 5.20, где показана зависимость $G_t(\lambda)(1)$, область расчетных значений G_t заштрихована для нулевого угла атаки $\alpha = 0^\circ$ и для линии растекания при $\alpha > 0$. Распределения $(\alpha/c_p)_i$ по меридиональному углу φ при различных углах θ_0, α в сечениях $x_1 = \text{const}$ приведены

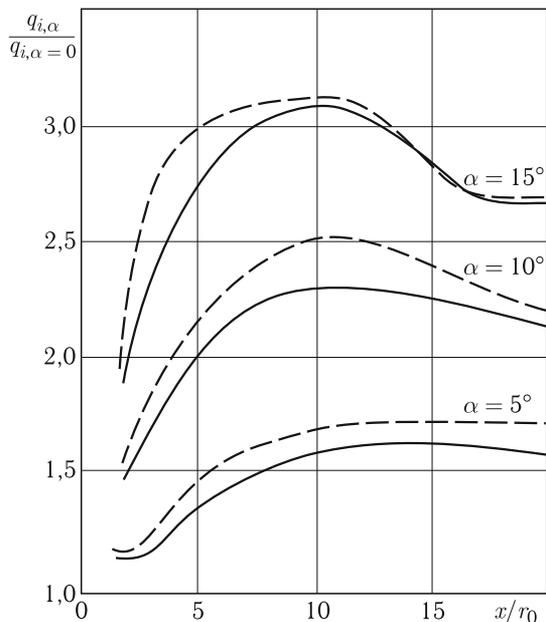


Рис. 5.18. Распределение тепловых потоков на наветренной образующей конусов ($M_\infty = 6$, $\gamma = 1,4$, $\theta_0 = 10^\circ$, $\varphi = 0$). Сплошная кривая — турбулентный теплообмен, штриховая — ламинарный теплообмен

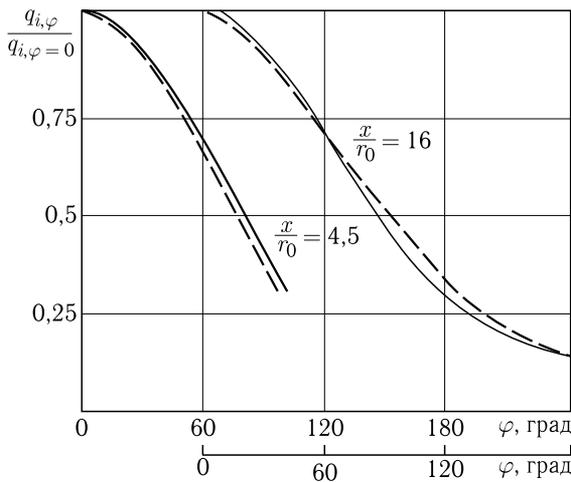


Рис. 5.19. Распределение тепловых потоков в меридиональном направлении ($H = 30$ км, $U_\infty = 6$ км/с, $\theta_0 = 15^\circ$, $\alpha = 10^\circ$). Сплошные кривые — турбулентный теплообмен, штриховые — ламинарный теплообмен

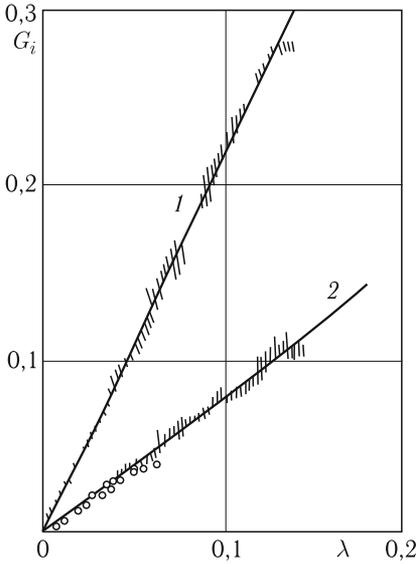


Рис. 5.20. Корреляция зависимости для расчетов теплообмена по формулам (5.3.41), (5.3.42): 1 — турбулентный теплообмен; 2 — ламинарный теплообмен; о — численный расчет [129]

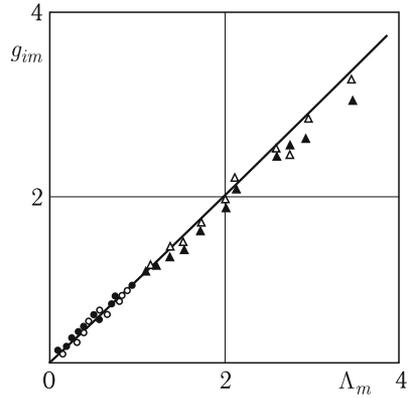


Рис. 5.21. Распределение коэффициента теплообмена ($m = \alpha, \varphi$ — соответственно угол атаки и меридиональный угол); о, Δ — ламинарный ($i = l$) теплообмен; •, \blacktriangle — турбулентный ($i = t$) теплообмен

на рис. 5.21 как для турбулентного, так и для ламинарного режимов теплообмена. При этом $g_{i\varphi} \leq 1, \Lambda_\varphi \leq 1$, где

$$g_{i\varphi} = \frac{(\alpha/c_p)_{i,\varphi}}{(\alpha/c_p)_{i,\varphi=0}}, \quad \Lambda_\varphi = \frac{\lambda(\varphi)}{\lambda(\varphi=0)},$$

как и следовало ожидать на основании (5.3.41), $g_{i\varphi} \approx \Lambda_\varphi$.

Но, как видно, аналогичное соотношение справедливо и при ламинарном режиме, т. е. $g_{i\varphi} \approx \Lambda_\varphi$. На том же рис. 5.21 показано влияние угла атаки α на коэффициент теплообмена (α/c_p) вдоль линии растекания $\varphi = 0$, при этом $g_{i\alpha} \geq 1, \Lambda_\alpha \geq 1$, где

$$g_{i\alpha} = \frac{(\alpha/c_p)_{i,\alpha}}{(\alpha/c_p)_{i,\alpha=0}}, \quad \Lambda_\alpha = \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha=0)}.$$

Отсюда следует, что (здесь $i = l, t; m = \varphi, \alpha$) $g_{im} \approx \Lambda_m$, т. е. влияние угла атаки на теплообмен на всей поверхности затупленного конуса примерно одинаково при обоих режимах и, следовательно, ламинарный коэффициент теплообмена также определяется при заданной геомет-

рии, в основном, параметром λ . Анализ показывает, что с погрешностью не более $\pm 15\%$

$$G_l \cong 0,8 \lambda, \quad G_l = k^{0,5} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{0,3} \frac{(\alpha/c_p)_l}{(\alpha/c_p)_0}. \quad (5.3.42)$$

На рис. 5.20, где показана зависимость $G_l(\lambda)$ (2), область расчетных значений G_l также заштрихована для $\alpha = 0$ и для линии растекания при $\alpha > 0$. Там же (точки) приведены результаты точных расчетов [129] ламинарного пограничного слоя на затупленных конусах при $\alpha = 0$ без учета влияния завихренности невязкого потока в высокоэнтропийном слое. Заметим, что присутствие местной скорости U_δ в полученных соотношениях, которую нужно дополнительно вычислять, несколько затрудняет их использование. В связи с этим полезно иметь в виду, что в изэнтропических течениях вдоль линии тока параметр λ с хорошей точностью можно представить в виде (рис. 5.22) $\lambda k^{-0,4} = f(p/p'_0)$, причем в широком диапазоне давлений $0,005 < p/p'_0 < 0,9$ имеем

$$f \approx 1,2 (p/p'_0)^{0,9} - 0,86 (p/p'_0)^{2,1}, \quad (5.3.43)$$

а при $p/p'_0 < 0,2$, что характерно для боковой поверхности затупленных конусов, можно ограничиться первым членом. С учетом этого соотношения (5.3.41), (5.3.42) можно привести к более простому и удобному для проведения оценок теплообмена на боковой поверхности затупленных конусов виду

$$\frac{(\alpha/c_p)_t}{(\alpha/c_p)_*} \approx 2,6 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{0,2} \left(\frac{p}{p'_0} \right)^{0,9}, \quad \frac{(\alpha/c_p)_l}{(\alpha/c_p)_0} \approx 1,2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{0,3} \left(\frac{p}{p'_0} \right)^{0,9}. \quad (5.3.44)$$

Отметим, что от полученных для гладких конусов корреляционных зависимостей можно ожидать, что они будут пригодными для оценок теплообмена и на конусах с небольшими изломами образующей, когда течение сохраняет безотрывный характер в соответствии с соотношением (5.1.16) при переходе через точку излома контура тела. Некоторые примеры расчетов для составных конусов приведены на рис. 5.23. При этом учитывается изменение направления невязкой линии тока при прохождении излома тела в присоединенном внутреннем скачке или центрированной волне разрежения, а при решении уравнения для $r_{ef}(l)$ ставится условие $r_{ef2}/r_{ef1} = \sin \beta_2 / \sin \beta_1$ в угловой точке, где β — угол между линией тока и направлением излома (1 — до излома, 2 — после).

Конечно, в случае внутреннего скачка соотношения (5.3.43) будут терять точность с ростом $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 > 0$ и с ростом числа Маха M_1 перед изломом из-за потерь полного давления в косом скачке уплотнения, не учитываемых зависимостью вида (5.3.43), но для небольших изломов контура они вполне приемлемы.

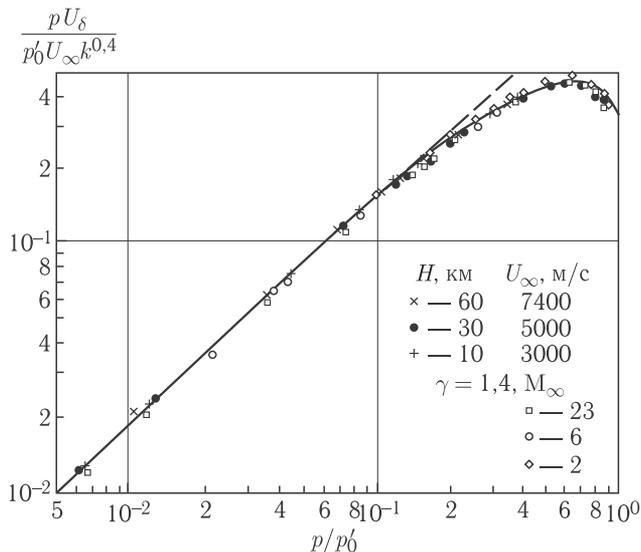


Рис. 5.22

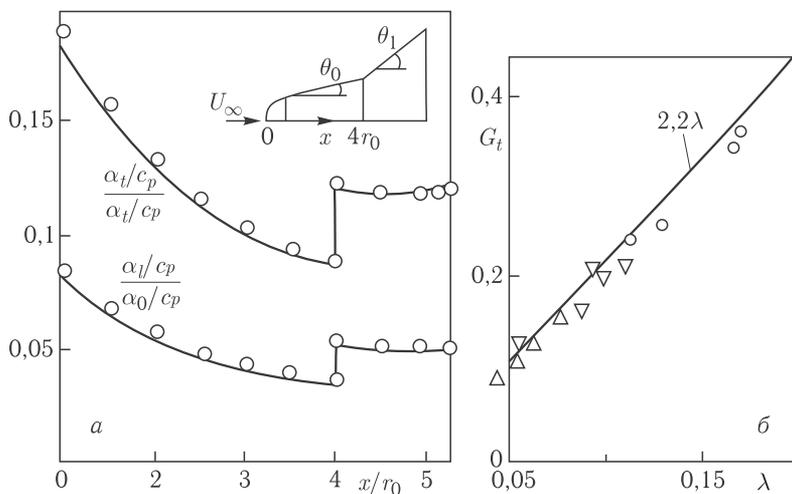


Рис. 5.23. Корреляция данных по теплообмену на теле с изломом образующей: *a* — в исходных координатах ($H = 30$ км, $U_\infty = 7,5$ км/с, $\theta_0 = 8^\circ$, $\theta_1 = 15^\circ$, $\alpha = 0^\circ$); сплошные кривые — расчет; \circ — корреляции (5.3.41), (5.3.42); *б* — в координатах G_t , λ ($M_\infty = 6$; $\gamma = 1,4$, $\theta_0 = 15^\circ$, $x/r_0 < 16$; $\theta_1 = 9^\circ$, $x/r_0 > 16$) Δ — $\alpha = 0$; ∇ — $\alpha = 5^\circ$; \circ — $\alpha = 15^\circ$

§ 5.4. Метод среднemasсовых величин для пограничного слоя в неоднородном потоке

Выше для классического (т.е. предельно тонкого) пограничного слоя был изложен инженерный *метод эффективной длины* для расчета распределения тепловых потоков и трения по поверхности тел. В случае обтекания затупленных тел требуется дополнительное обоснование применимости или даже корректировка этого метода. Дело в том, что при конечных числах Re толщина пограничного слоя не равна нулю, а он развивается в прошедшем через искривленный головной скачок уплотнения завихренном пристеночном невязком потоке, в котором изменение параметров по нормали к стенке на толщине пограничного слоя может быть весьма заметным (гл. 2). Казалось бы, тот же метод может быть обобщен и на пограничный слой в неоднородном потоке, если вместо невязких параметров на поверхности тела использовать параметры на границе пограничного слоя u_δ , H_δ и т. д. Но такое обобщение может привести к ошибкам, обусловленным нарушением законов сохранения во внутреннем пограничном слое, так как использование, скажем, местной скорости $u_\delta = u(\psi_\delta)$ в некотором сечении $x = x_1$ предполагает, что во внутренний пограничный слой вошел продольный поток импульса $u_{\delta 1} \psi_{\delta 1}$, завышенный при меньшей скорости $u_\delta < u_{\delta 1}$ в интервале $x_0 \leq x \leq x_1$, или $\psi_\delta < \psi_{\delta 1}$ (как в примере на рис. 3.13, а в § 3.4).

В этой связи представляется естественным предположение, что такие основные характеристики пограничного слоя, как трение на стенке и тепловой поток к ней, должны определяться скорее суммарными потоками импульса и полной энтальпии через границу пограничного слоя, чем местными параметрами на ней. Реализация этой идеи приводит к гипотезе, что в формулах § 5.1 метода эффективной длины должны быть использованы не местные внешние граничные параметры, а *среднemasсовые величины* скорости U_a и полной энтальпии H_a , определяемые через интегралы [115]

$$U_a(p, \psi) = \frac{1}{\psi_\delta} \int_0^{\psi_\delta} U^{(0)}(p, \psi) d\psi, \quad p = p(x),$$

$$H_a = \frac{1}{\psi_\delta} \int_0^{\psi_\delta} H^{(0)}(\psi) d\psi, \quad h_a = H_a - \frac{1}{2} U_a^2. \quad (5.4.1a)$$

Здесь $x(x)$ — местное давление, а $U^{(0)}(p, \psi)$ и $H^{(0)}(\psi)$ — распределение функций во внешнем по отношению к пограничному слою потоке, предполагаемым невязким согласно выводам § 3.4. Среднemasсовую энтальпию h_a определим через U_a и H_a из уравнения Бернулли.

В другом варианте (используемом, в частности, для притупленных тел, см. § 9.1) за основу, наряду с H_a , берется среднemasовая энтальпия h_a , а скорость U_a определяется из уравнения Бернулли:

$$h_a = \frac{1}{\psi_\delta} \int_0^{\psi_\delta} h^{(0)}(\psi) d\psi, \quad U_a^2 = 2(H_a - h_a). \quad (5.4.16)$$

Для определения среднemasовых параметров на границе пограничного слоя требуется знание расхода $\psi_\delta(x)$ через него. В тех же предположениях, что и в § 5.1, для ламинарного пограничного слоя положим

$$\psi_{\delta l} = (2\pi)^\nu r^\nu f_{\delta l} (\rho_{*a} \mu_{*a} U_a x_{\text{eff}})^{1/2}, \quad (5.4.2)$$

где $f_{\delta l} = f_\delta = 3,3$, а эффективная длина x_{eff} определяется формулой (5.1.11) (для простоты при $H_e - h_w = \text{const}$). При этом ρ_{*a} , μ_{*a} вычисляются по местному давлению и определяющей энтальпии h_* с величинами H_a и h_a вместо H_δ и h_δ в формуле (3.2.16). Для турбулентного пограничного слоя полагаем (см. § 4.1)

$$\frac{u}{U_a} = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{1/7}, \quad \delta_t = 0,38 x_{\text{eff}} \text{Re}_{*a}^{-0,2}, \quad \text{Re}_{*a} = \frac{\rho_{*a} U_a x_{\text{eff}}}{\mu_{*a}}, \quad (5.4.3)$$

и в тех же предложениях получаем

$$\psi_{\delta t} = (2\pi)^\nu r^\nu f_{\delta t} \mu_{*a}^{1/5} (\rho_{*a} U_a x_{\text{eff}})^{4/5}, \quad f_{\delta t} = 0,33. \quad (5.4.4)$$

Полученные формулы для ψ_δ часто удобнее заменить дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\psi_{\delta l}^2}{dx} = (2\pi r)^{2\nu} f_{\delta l}^2 \rho_{*a} \mu_{*a} U_a, \quad \frac{d\psi_{\delta t}^{5/4}}{dx} = (2\pi r)^{5\nu/4} f_{\delta t}^{5/4} \rho_{*a} \mu_{*a}^{1/4} U_a. \quad (5.4.5)$$

Таким образом, обобщение метода эффективной длины до метода среднemasовых величин основано на предположении, что тепловые потоки q_w и трение τ_w на стенке и расход газа через погранслой ψ_δ определяются по соотношениям для однородного внешнего течения только с параметрами U_a и H_a вместо граничных U_δ и H_δ .

Предложенный метод основан на физических соображениях и нуждается в апробации, в целях которой приведем несколько примеров.

1. Рассмотрим распределение тепловых потоков для ламинарного пограничного слоя на изотермической пластине за точкой $x = x_0$, в которой заданы точные профили скорости и энтальпии (рис. 5.24, а). Нового внутреннего пограничного слоя при $x > x_0$ фактически здесь нет, это просто тестовая задача.

На рис. 5.24, в приведены отношения q_w/q_{w0} приближенных тепловых потоков q_w к точным (исходным) q_{w0} . Как видно, кривые 1, рассчитанные методом среднemasовых величин, весьма близки к единице (теоретическому значению), в то время как кривая 2, рассчитанная по внешним параметрам внутреннего пограничного слоя (и со ско-

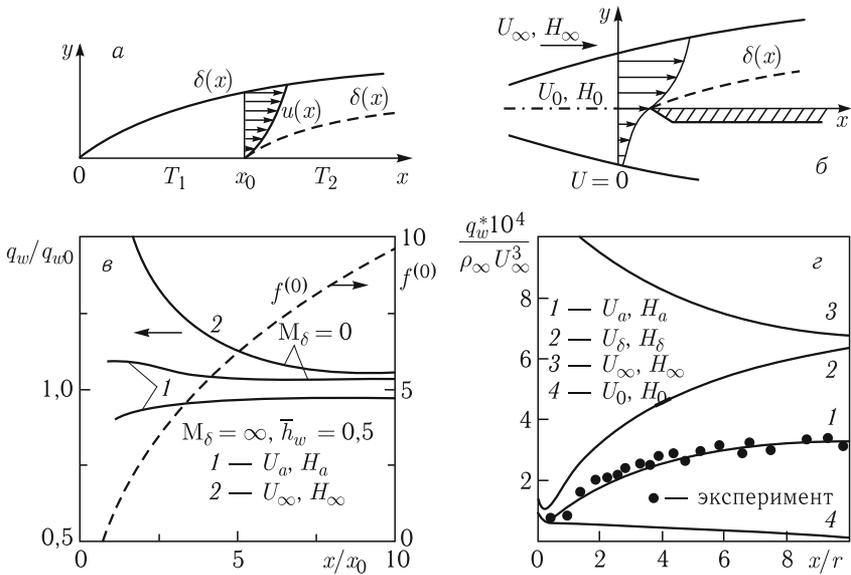


Рис. 5.24. К пограничному слою в неоднородном потоке

ростью $U^{(0)}$ вместо U_a в формуле (5.4.2) для ψ_δ) дает существенно завышенный тепловой поток вплоть до достаточно больших величин $x/x_0 \approx 5$. На том же рисунке приведена функция $f^{(0)} = x_0^{-1/2} \bar{\psi}$ (здесь $\bar{\psi} = \psi (\rho_\delta \mu_\delta U_\delta)^{-1/2}$), пропорциональная расходу газа через внутренний пограничный слой. Расход газа через начальное сечение $x = x_0$ внешнего пограничного слоя равен $\bar{\psi}^{(0)} = x_0^{1/2} f_\delta$, $f_\delta = 3,3$, поэтому, как следует из поведения кривой 2, влияние начального сечения затухает лишь при поглощении пограничным слоем примерно тройного начального расхода газа.

Пусть теперь пластина имеет различные температуры: T_1 при $x < x_0$ и T_2 при $x > x_0$. Тогда для малой окрестности точки x_0 , в области влияния линейного участка профилей скорости и температуры, при $Pr = 1$ и $\rho\mu = \text{const}$ распределение теплового потока при $x > x_0$ определяется методом среднemasсовых величин формулой [77]

$$q_w = a q_{w0} (1 + \bar{x}^{-1/3} \kappa \Delta), \quad \Delta = \frac{h_{xw2} - h_{w1}}{H_\delta - h_{w1}}, \tag{5.4.6}$$

$$a = \frac{8}{9} f_w'' f_\delta \approx 0,975, \quad \kappa = 3 (4 f_w'' f_\delta)^{-2/3} \approx 1,12, \quad \bar{x} = \frac{x - x_0}{x_0},$$

здесь q_{w0} — тепловой поток сразу слева от точки x_0 . Как видно, величина q_w не ограничена при $x \rightarrow x_0$.

Это решение практически совпадает с точным (приведенным в той же работе) и может быть использовано для интерпретации показаний

малого калориметра, медного, как правило, при измерении тепловых потоков на поверхности другого материала. При этом средний тепловой поток к плоскому калориметру длиной Δx равен ($a = 1$)

$$\bar{q}_w = q_{w0} \left[1 + \frac{3}{2} \kappa \Delta \left(\frac{x_0}{\Delta x} \right)^{1/3} \right]. \quad (5.4.7)$$

Рассмотренная задача позволяет оценить влияние одного из возможных возмущений при установке калориметрического датчика на непроницаемой поверхности обтекаемого газовым потоком тела. Влияние прекращения вдува в случае проницаемой стенки рассмотрено ниже.

2. На рис. 5.24, *з* приведены расчетные и экспериментальные тепловые потоки на пластине, расположенной вдоль разделительной линии тока зоны смешения с покоящимся газом турбулентной плоской сверхзвуковой струи (моделируемой начальным участком струи, истекающей из осесимметричного сопла радиуса r_0 [92], рис. 5.7, *в*). Здесь на срезе сопла $M_\infty = 2,83$, число Рейнольдса $Re_{\infty r_0} = \frac{\rho_\infty U_\infty r_0}{\mu_\infty} = 7,5 \times 10^5$, $t_w = h_w/H_0 \sim 0,3$. Метод среднemasовых величин (кривая 1) дает вполне удовлетворительное согласие с экспериментом, в то время как расчет по внешним параметрам пограничного слоя (кривая 2) дает завышенные примерно вдвое тепловые потоки. Расчеты же по параметрам на внешней границе струи или на разделительной линии тока (кривые 3 и 4) вообще не имеют отношения к делу.

3. Рассмотрим задачу о калориметрическом датчике теплового потока на проницаемой изотермической стенке. Предполагая, что основной пограничный слой перед калориметром ламинарный, ограничимся вдувом однородного газа, т. е. газа с теми же свойствами, что и находящийся в пограничном слое [77].

Для получения достаточно простых и общих результатов примем во внимание, что калориметр имеет обычно небольшие размеры, так что внутренний пограничный слой на нем, обусловленный прекращением распределенного вдува, развивается в пристеночной части предшествующего пограничного слоя. В этой области для продольной скорости $u^{(0)}$ и полной энтальпии $H^{(0)}$ из уравнений пограничного слоя и условий на стенке в сечении $x = x_1$, где установлен калориметр, можно получить следующие разложения по безразмерному расходу $f = \psi \xi_1^{-1/2}$ при $h_w = \text{const}$, $\mu \rho \sim p h^{-n}$ для $f \ll 1$ (необходимы как минимум два члена разложений). Ограничимся случаем $Pr = 1$ (при этом согласно аналогии Рейнольдса $2S = C$):

$$\frac{u^{(0)}}{u_\delta} = \frac{H^{(0)} - h_w}{H_\delta - h_w} = C^{1/2} f^{1/2} + \frac{2}{3} \left(B + nS \frac{H_\delta - h_w}{h_w} \right) f + \dots \quad (5.4.8)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$C = c_{f1} Re_1^{1/2} l_1^{1/2}, \quad S = St_1 Re_1^{1/2} l_1^{1/2}, \quad B = \left(\frac{\rho_w v_w}{\rho_\delta u_\delta} \right)_1 \cdot Re_1^{1/2} l_1^{1/2},$$

$$c_f = \frac{2\tau}{\rho_\delta u_\delta^2}, \quad St = \frac{q}{\rho_\delta u_\delta (H_\delta - h_w)}, \quad Re = \frac{\rho_\delta u_\delta x_1}{\mu_\delta}, \quad l = \frac{\mu_\delta \rho_\delta}{\mu_w \rho_w},$$

$$\xi = \int_0^x \mu_w \rho_w u_\delta dx = \mu_w \rho_w u_\delta x, \quad \psi = \int_0^y \rho u dy,$$

где τ, q — напряжение трения и тепловой поток на поверхности тела, индексы δ, w, l относятся к параметрам на внешней границе основного пограничного слоя, на стенке и в сечении $x = x_1$ соответственно.

Используя разложения (5.4.8), найдем, согласно (5.4.1а), эффективные среднemasовые параметры u_0, H_0 неоднородного потока в сечении перед калориметром, определяющие в соответствии с методом среднemasовых величин тепловой поток q к телу за точкой прекращения вдува. При этом осреднение внешних профилей $u^{(0)}, H^{(0)}$ в сечении $x = x_1$ ведется по расходу $\psi_\delta(x) = \varphi_\delta \xi'^{1/2}$ (здесь $\varphi_\delta \approx 3,3$), поглощаемому внутренним пограничным слоем, что позволяет установить изменение среднemasовых параметров $u_0 = u_0(x), H_0 = H_0(x)$ вдоль внешней границы подслоя с помощью уравнения (5.4.2). При $x > x_1$

$$q = A \mu_0 \rho_0 u_0 H_0 \xi'^{-1/2}, \quad \xi' = \int_{x_1}^x \mu_0 \rho_0 u_0 dx, \quad (5.4.9)$$

где $\mu \rho \sim ph^{-n}$ и для A в случае вдува однородного газа можно использовать корреляционные зависимости типа (5.1.11а) (в общем случае A зависит от состава газа).

Собирая соответствующие разложения для u_0, H_0 и других величин, входящих в (5.4.9) (заметим, что h_0 определяется уравнением Бернулли $h_0 = H_0 - u_0^2/2$), имеем при $f \ll 1$ для изотермической стенки (влияние в общем случае переменного по x давления дает вклад в тепловой поток q порядка $f^{3/2}$ и поэтому его можно не учитывать)

$$q = a q_1 (1 + BC^{-1/2} f^{1/2} + \dots), \quad a = \frac{8}{9} \cdot 0,332 \varphi_\delta \approx 0,975. \quad (5.4.10)$$

Связь между f и x согласно (5.4.2) имеет вид

$$z = \frac{2}{\varphi_\delta^2} \int_0^f \frac{u_\delta f df}{u_0 l_0}, \quad z = \frac{x - x_1}{x_1}, \quad l_0 = \frac{\mu_0 \rho_0}{\mu_w \rho_w}. \quad (5.4.11)$$

Отсюда находим главный член разложения $f^{1/2}$ по $z^{1/3}$:

$$f^{1/2} \cong \frac{1}{2} (2 \varphi_\delta)^{2/3} C^{1/6} z^{1/3}. \quad (5.4.12)$$

Таким образом, при $z \ll 1$ получаем распределение q за точкой прекращения вдува с точностью до членов $O(z^{1/3})$:

$$\frac{q}{q_1} = a \left(1 + \frac{1}{2} (2 \varphi_\delta)^{2/3} B C^{-1/3} z^{1/3} + \dots \right).$$

Средний тепловой поток q_+ , измеряемый плоским калориметром длиной $x - x_1$, равен

$$q_+ = \frac{1}{z} \int_0^z q dz = q_1 (1 + 1,32 (C^0)^{2/3} \lambda z^{1/3} + \dots), \tag{5.4.13}$$

$$\lambda = B^* \left(\frac{C^0}{C} \right)^{1/3}, \quad B^* = \frac{B}{C^0}.$$

Здесь C^0 — параметр трения на непроницаемой стенке в точке $x = x_1$ (для пластины $C^0 = 0,664$ при $n = 0$). Поскольку отношение C/C^0 входит в λ в небольшой степени, можно ожидать, что λ определяется в основном локальной величиной параметра вдува B^* и слабо зависит от закона вдува. Это действительно так, как видно из рис. 5.25, где обработаны результаты расчетов для автомодельного вдува [204, 206] ($Pr = 1, n = 0$: 1 — $\beta = 0, 2 - \beta = 2/7, 3 - \beta = 0,4$; $Pr = 0,7, n = 0,3$: 4 — $\beta = 0, 5 - \beta = 0,2$) и для вдува постоянной интенсивности (6 — $\beta = 0$) [229], здесь $\beta = 2 \frac{H_\delta x_{eff} du_\delta}{h_\delta u_\delta dx}$ — параметр градиента давления. Отсюда можно сделать важный вывод, что при $z \ll 1$ отношение q_+/q_1 определяется по существу только местным (при $x = x_1$) значением параметра вдува B^* (хотя q_1 , конечно, зависит от закона вдува при $x < x_1$).

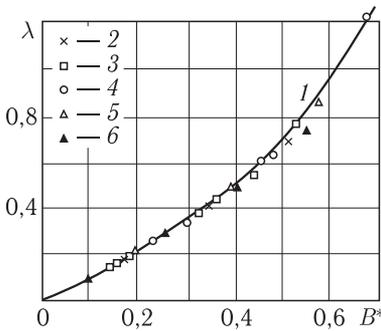


Рис. 5.25. Зависимость $\lambda(B^*)$

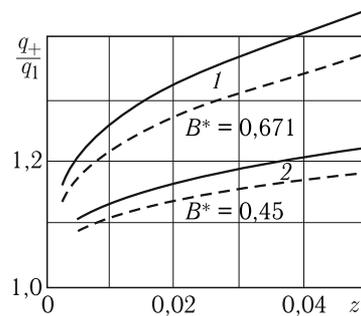


Рис. 5.26. Зависимость измеряемого калориметром теплового потока на проницаемой пластине от длины калориметра. Сплошные кривые — $Pr = 1, n = 0$, пунктир — $Pr = 0,7, n = 0,3$

Из рис. 5.26, где для пластины при $B^* = 0,671$ (1) и $B^* = 0,45$ (2) показаны значения q_+/q_1 , рассчитанные по соотношению (5.4.13) (сплошные кривые — $Pr = 1, n = 0$, пунктир — $Pr = 0,7, n = 0,3$), следует, что для оценок рассматриваемого эффекта при вдуве однород-

ного газа можно использовать решения уравнений пограничного слоя при простейших предположениях относительно переносных свойств газа ($Pr = 1$, $n = 0$). В этом случае разложения типа (5.4.8) легко могут быть продолжены, что позволит оценить точность результатов. В работе [77] показано, что полученное выше решение справедливо с точностью $\sim 10\%$ при $\lambda z^{1/3} \leq 0,5$. Согласно рис. 5.25 при известном значении параметра вдува B^* величину λ можно считать известной. Заметим, что при $B^* < 0,6 \dots 0,7$ приближенно $\lambda \cong B^* + 1,6 \cdot B^{*3}$.

Получим, кроме того, явное выражение для q_1 через q_+ , обращая соотношение (5.4.13) и исключая параметр трения C , входящий в λ , с помощью аналогии Рейнольдса:

$$\frac{q_1}{q_+} = 1 - 1,32 \lambda_+ z^{1/3} + \dots, \quad (5.4.14)$$

$$\lambda_+ = 2^{-1/3} B S_+^{-1/3}, \quad S_+ = St_{+1} Re_1^{1/2} l_1^{1/2}, \quad St_{+1} = \frac{q_+}{\rho_\delta u_\delta (H_\delta - h_w)}.$$

Это соотношение при заданном параметре вдува B может служить для определения теплообмена на проницаемой стенке по показаниям калориметра. Используя два калориметра, достаточно отличающихся между собой продольными размерами, можно наряду с q_1 найти параметр вдува B , что немаловажно при проведении экспериментов со вдувом.

Оценим фактическое изменение $\Delta u^{(0)}$ скорости вдоль струйки тока от начального сечения x_1 до ее поглощения подслоем (для простоты при $n = 0$, $Pr = 1$):

$$\frac{\Delta u^{(0)}}{u^{(0)}} = \frac{C^{0,2/3} \lambda z^{1/3}}{2^{1/3} \varphi_\delta^{4/3}} \approx 0,123 \lambda z^{1/3}.$$

Отсюда при $z \leq 0,1$, $\lambda \leq 1,0$ имеем $\Delta u^{(0)}/u^{(0)} \leq 0,057$, что и определяет в этой задаче возможность пренебрегать деформацией профилей (5.4.8) из-за влияния вязкости и теплопроводности во внешнем неоднородном потоке.

4. Известно, что особенно значительно влияние внешней завихренности на турбулентный пограничный слой, поскольку напряжение трения $\tau_t \sim u_\delta^{1,8}$ и тепловой поток $q_t \sim u_\delta^{0,8}$ сильнее, чем в случае ламинарного пограничного слоя зависят от скорости u_δ на внешней границе. Метод среднemasовых величин позволяет легко рассматривать такие задачи в инженерных приложениях. В качестве примера рассмотрим турбулентный пограничный слой несжимаемой жидкости на пластине, обтекаемой слабо завихренным потоком с профилем ско-

рости $u^{(0)} = U + \omega y$. При этом

$$u_0 = U + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\rho U} \psi, \quad \xi_{0t} = \int_0^x \rho u_0 \mu^{1/4} dx \approx \rho U \mu^{1/4} x \left(1 + \frac{0,28 \tau_\delta}{\rho U^2} \text{Re}_x^{0,8} \right),$$

$$\psi_{\delta t} = f_{\delta t} \xi_{0t}^{0,8}, \quad \tau_t = 0,0296 \frac{\rho u_0^2 \mu^{1/4}}{\xi_{0t}^{0,2}}, \quad \text{Re}_x = \frac{\rho U x}{\mu}, \quad \tau_\delta = \mu \omega.$$
(5.4.15)

Отсюда получаем

$$\tau_t = \tau_{t0} + 0,01 \tau_\delta \text{Re}_x^{0,6} = \tau_{t0} + A \tau_\delta. \quad (5.4.16)$$

Заметим, что при $\text{Re}_x = 10^5$ это дает $A = 10$, а при $\text{Re}_x = 10^6$ уже $A = 40$, тогда как в соответствующей задаче для ламинарного пограничного слоя $A = 0,91$ (и $0,8$ в точном решении) [115].

5. При сверх- или гиперзвуковом обтекании тупого тела скорость газа в окрестности точки торможения возрастает по нормали y к телу. Поэтому при конечной толщине пограничного слоя скорость газа на его границе будет отличаться от скорости на стенке и соответствующие решения асимптотически тонкого погранслоя будут давать погрешность, которую и оценим ниже. Поскольку в плоском течении производная от скорости по нормали к стенке равна нулю и рассматриваемый эффект мал, то ограничимся лишь осесимметричными течениями, где в окрестности критической точки тупого тела в связанной с его поверхностью криволинейной системе координат (x, y) скорость газа изменяется по закону

$$U^{(0)} = c x (1 + by) = c x (1 + z)^{1/2} = c^{(0)} x,$$

$$z = b \psi (\pi \rho c x^2)^{-1}, \quad c, b = \text{const.} \quad (5.4.17)$$

Среднemasсовая скорость в этом случае равна

$$U_a = c_a x, \quad c_a = c \varphi(z_{\delta a}), \quad \frac{1}{2} \varphi(z) = \frac{(1+z)^{3/2} - 1}{3z}. \quad (5.4.18)$$

Сопоставляя с (5.4.2), получим граничные величины $z_\delta^{(0)}$ и $z_{\delta a}$:

$$z_\delta^{(0)} = \left(\frac{c^{(0)}}{c} \right)^{1/2} \Omega, \quad z_{\delta a} = \left(\frac{c_a}{c} \right)^{1/2} \Omega, \quad \Omega = f_\delta \left(\frac{\mu}{\rho c} \right)^{1/2} b. \quad (5.4.19)$$

Величина c_a определяется из уравнения $c_a = c \varphi(z_{\delta a})$, а отношение $q_w/q^{(0)} = (c_a/c)^{1/2}$ тепловых потоков с учетом завихренности и без ее учета в зависимости от Ω при $\nu = 1$ и $f_\delta = 3,3$ показано на рис. 5.27 (кривая 1) и достаточно близко к точному (кривая 3) [221]. Расчет же по внешней граничной скорости $U^{(0)}$ ($z_\delta^{(0)}$) (кривая 2) существенно завышает величину теплового потока.

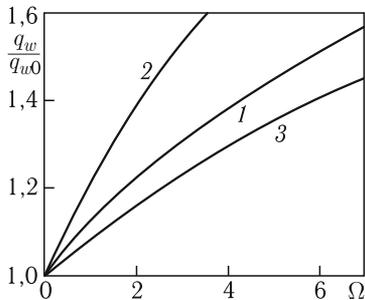


Рис. 5.27. Влияние завихренности на тепловой поток в точке торможения тела вращения

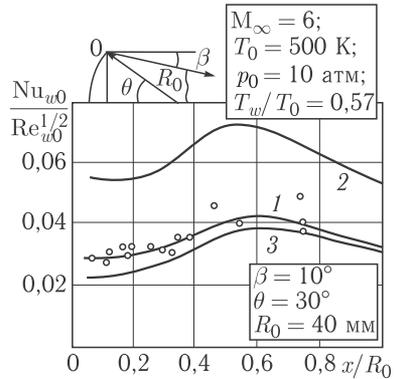


Рис. 5.28. Распределение тепловых потоков за угловой точкой сегментально-конического тела

6. При безотрывном обтекании ламинарным пограничным слоем угловой точки поверхности $x = x_0$ течение расширения в ее окрестности можно считать невязким, за исключением тонкого подслоя с относительным расходом (по отношению к расходу газа через пограничный слой) порядка $(\rho_\delta u_\delta x_0 / \mu_\delta)^{-1/3} \ll 1$ (§2.5). Этот пограничный слой образует неоднородный внешний поток, в котором при $x > x_0$ развивается внутренний пограничный слой. В этом случае начальные профили удобно брать в сечении $x = x_0$ перед угловой точкой. На рис. 5.28 сравниваются результаты расчетов тепловых потоков среднемассовым методом (1) с экспериментальными данными для боковой поверхности сегментально-конического тела при нулевом угле атаки. Показаны также расчетные кривые, полученные для внутреннего пограничного слоя методом эффективной длины по неосредненным граничным параметрам (2), а также в обычной постановке по невязким параметрам на теле (3). Как видно, лучшее совпадение с экспериментом дает метод среднемассовых величин. Результаты приведены в виде параметра теплообмена $Nu_{w0} / Re_{w0}^{1/2}$, где

$$Nu_{w0} = \frac{q_w R_0}{\lambda_w (T_{00} - T_w)}; \quad Re_{w0} = \frac{\rho_{w0} a_0 R_0}{\mu_w},$$

a_0 — скорость звука при температуре торможения T_{00} ; ρ_{w0} — плотность газа в критической точке при температуре стенки T_w ; R_0 — радиус кривизны лобового сегмента, а $\lambda(T_w)$, $\mu(T_w)$ — коэффициенты теплопроводности и вязкости.

Рассмотренные примеры в целом обладают достаточной общностью для вывода о вполне удовлетворительной точности метода среднемассовых величин, по крайней мере для проведения оценок влияния на

тепловые потоки внешней неоднородности (дополнительную апробацию метода для тупых и тонких затупленных тел приведем в § 9.1).

Однако, подобные методы «осреднения» совершенно непригодны для учета возмущений, вносимых вблизи поверхности тела. В этом случае все выделяемое тепло идет непосредственно в стенку, не нагревая газ в пограничном слое вообще и не создавая никакого среднемассового эффекта [115].

Метод среднемассовых величин разработан и для трехмерного пограничного слоя [80]. Этот метод здесь не излагается по причине его алгоритмической сложности при приближенном характере. Он уступает в этом отношении точным численным методам, описанным в гл. 8, которые пришли ему на смену. Однако этот метод дает в целом неплохую точность и в свое время широко использовался для исследования пространственных эффектов при развитии пограничного слоя в высокоэнтропийном. Соответствующие результаты будут приведены в § 9.3.

§ 5.5. Численный метод

Опишем численный метод расчета пространственного пограничного слоя на телах сложной формы на основе метода локального подобия и осесимметричной аналогии (§ 5.1). Внешние поля невязких газодинамических и термодинамических параметров (давление, компоненты скорости, температура) на внешней границе пограничного слоя рассчитываются на основе уравнений Эйлера и считаются известными. Расчет теплообмена в рамках метода эффективной длины должен начинаться в точке торможения и продвигаться в направлении линий тока вдоль поверхности тела. Следовательно, необходимо найти ее положение в системе координат, в которой заданы невязкие поля (СК1). Предположим, что течение обладает плоскостью симметрии и критическая точка располагается в этой плоскости. Далее строится новая сферическая система координат (r, θ, φ) с полюсом в заданной точке $(X_c, Y_c, 0)$ и осью $(\theta = 0)$, проходящей через критическую точку. Пересечение лучей (θ_i, φ_j) поверхностью тела, заданной в СК1, образует новую систему координат (СК2), приспособленную для расчета теплообмена.

Для определения теплового потока в критической точке при 3-мерном обтекании необходимо знать производные полной скорости U вдоль поверхности, а именно, a — в плоскости симметрии ($z = 0, w = 0$) и b — в плоскости, ей перпендикулярной ($x = 0, u = 0$):

$$a = \frac{\partial U_0}{\partial s}, \quad b = \frac{\partial U_0}{\partial z}; \quad U_0 = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Для повышения точности вычислений градиент скорости на поверхности тела (a, b) находится по невязкому полю скоростей (в СК1) методом наименьших квадратов. Ламинарный коэффициент теплооб-

мена в окрестности 3-мерной точки (с двумя плоскостями симметрии) торможения равен (§ 3.2)

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_0 = 0,332 \text{Pr}^{-2/3} \rho_{*0} U_\infty \text{Re}_*^{-1/2} \sqrt{2(\bar{\rho}\bar{\mu})_*(a+b)},$$

а турбулентный коэффициент теплообмена равен нулю (обозначения приведены ниже).

Чтобы исключить особенность соотношений метода эффективной длины в критической точке (типа 0/0), расчет начинается с линии $\theta_{i=1} = \theta_0$ ($\theta_0 \approx 0,05$).

Для вычисления коэффициентов теплообмена в рамках приближения осесимметричной аналогии и метода эффективной длины (§ 5.1) используются соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_l &= 0,332 \text{Pr}^{-2/3} \rho_{*0} U_\infty \text{Re}_*^{-1/2} \frac{\bar{r}_{\text{ef}} \bar{\rho}_* \bar{\mu}_* \bar{U}_\delta}{\bar{z}_l^{1/2}}, \\ \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_t &= 0,0296 \text{Pr}^{-0,6} \rho_{*0} U_\infty \text{Re}_*^{-1/5} \frac{(\bar{r}_{\text{ef}} \bar{\rho}_* \bar{\mu}_*)^{1/4} \bar{\rho}_* \bar{U}_\delta}{\bar{z}_t^{1/5}}, \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

$$\bar{z}_l = \int_0^S \bar{r}_{\text{ef}}^2 \bar{\rho}_* \bar{\mu}_* \bar{U}_\delta d\bar{S}, \quad \bar{z}_t = \int_0^S \bar{r}_{\text{ef}}^{5/4} \bar{\rho}_* \bar{\mu}_*^{1/4} \bar{U}_\delta d\bar{S},$$

$$\text{Re}_* = \frac{\rho_{*0} U_\infty R}{\mu_{*0}},$$

где S — расстояние вдоль линии тока, R — характерный размер, Pr — число Прандтля, r_{ef} — радиус эквивалентного осесимметричного тела, ρ , μ — плотность и вязкость воздуха. Переменные ρ_* и μ_* рассчитываются при местном давлении и эккертовской энтальпии h_* , U — скорость газа. Индексы « ∞ » и «0» относятся к набегающему потоку и параметрам в точке торможения. Черта над символом означает, что эта величина отнесена к своему характерному значению (R_{ref} , U_∞ , ρ_{*0} , μ_{*0}),

$$h_* = 0,5 h_w + 0,22 H_{ei} + 0,28 h_\delta, \quad i = l, t,$$

$$H_{el} = \text{Pr}^{1/2} H_0 + (1 - \text{Pr}^{1/2}) h_\delta, \quad H_{et} = \text{Pr}^{1/3} H_0 + (1 - \text{Pr}^{1/3}) h_\delta,$$

h_w — энтальпия воздуха при температуре стенки T_w , H_{ei} — энтальпия восстановления, H_0 — полная энтальпия.

Эффективный радиус r_{ef} тела может быть определен, исходя из следующих соображений. Построение поверхностных линий тока представляется весьма трудной задачей в общем случае. Однако эта процедура необязательна, так как могут быть получены достаточно простые уравнения, которые позволят рассчитать теплообмен к поверхности аппарата произвольной формы в декартовой системе координат (или в любой удобной, например, той, в которой ведется расчет невязкого

обтекания тела [80, 248]). Рассмотрим криволинейную ортогональную систему координат, связанную с поверхностными линиями тока: координата ξ_1 направлена вдоль вектора скорости \mathbf{U} , ξ_2 — по нормали к нему вдоль поверхности, ξ_3 — по нормали к поверхности. Радиус эффективного осесимметричного тела в рамках метода осесимметричной аналогии есть коэффициент Ламэ h_2 для координаты ξ_2 , который является мерой расходимости линий тока $\xi_2 = \text{const}$. Величина коэффициента h_2 может быть получена следующим образом. Дивергенция единичного вектора $\mathbf{e} = \mathbf{U}/U$ может быть определена двумя способами. С одной стороны, в поверхностной системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , связанной с линиями тока, имеем

$$\text{div } \mathbf{e} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3 e_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 h_3 e_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 e_3) \right). \quad (5.5.2)$$

В этой системе координат вектор \mathbf{e} имеет компоненты $(1, 0, 0)$, и по определению $h_3 = 1$, $h_2 = r_{\text{ef}}$, следовательно,

$$\text{div } \mathbf{e} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} = \frac{d \ln h_2}{ds} = \frac{d \ln r_{\text{ef}}}{ds}, \quad (5.5.3)$$

где $ds = h_1 d\xi_1$ — дифференциал длины вдоль линии тока.

Теперь пусть (ξ, η) есть произвольная поверхностная система координат и геометрия поверхности и невязкое поле скоростей задано в ней в зависимости от двух параметров $r = r(\xi, \eta)$ и $U = U(\xi, \eta)$, ζ -координата направлена по нормали к поверхности тела, как и ранее. Производная любой функции Φ вдоль линии тока в этой декартовой системе координат равна

$$\frac{d\Phi}{ds} = (\mathbf{e} \nabla) \Phi = \sum_i e_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_j \left(\sum_i e_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} = (\mathbf{e} \nabla \xi) \Phi_\xi + (\mathbf{e} \nabla \eta) \Phi_\eta.$$

Поскольку $\nabla \xi = \frac{\mathbf{r}_\eta \times \mathbf{r}_\zeta}{J}$, $\nabla \eta = \frac{\mathbf{r}_\zeta \times \mathbf{r}_\xi}{J}$, $J = (\mathbf{r}_\zeta \cdot [\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta]) = |\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta|$, то

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{J} ((\mathbf{e} \cdot [\mathbf{r}_\eta \times \mathbf{r}_\zeta]) \Phi_\xi + (\mathbf{e} \cdot [\mathbf{r}_\zeta \times \mathbf{r}_\xi]) \Phi_\eta).$$

Используя определение $\mathbf{r}_\zeta = \frac{1}{J} (\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta)$, в результате можно получить

$$\frac{d\Phi}{ds} = a \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad (5.5.4)$$

где коэффициенты

$$a = (|\mathbf{r}_\eta|^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_\xi) - (\mathbf{r}_\xi \cdot \mathbf{r}_\eta) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_\eta)) / J^2,$$

$$b = (|\mathbf{r}_\xi|^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_\eta) - (\mathbf{r}_\xi \cdot \mathbf{r}_\eta) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_\xi)) / J^2$$

выражаются только через производные формы тела вдоль поверхности.

Теперь рассмотрим численное решение уравнения (5.5.3). Для простоты примем, что $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Тогда, используя уравнение (5.5.4), имеем следующее разностное соотношение:

$$a_{i+1/2,j}(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) + b_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (\text{div}(\mathbf{e})_{i+1/2,j-1/2} + \text{div}(\mathbf{e})_{i+1/2,j+1/2}),$$

где $\Phi = \ln r_{\text{ef}}$. Производная $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_{i+1/2,j}$ аппроксимируется по схеме Кранка–Николсона:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_{i+1/2,j} = \theta \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_{i+1,j} + (1 - \theta) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_{i,j},$$

где величина θ выбирается в диапазоне $0,5 \dots 1,0$ для устойчивости ($\theta = 1,0$ — первый порядок аппроксимации вдоль маршевой координаты ξ , $\theta = 0,5$ — второй порядок). Производные $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_{i+1,j}$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_{i,j}$ аппроксимируются с помощью симметричной TVD-схемы, чтобы обеспечить второй порядок аппроксимации вдоль η -координаты:

$$b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_j = \frac{1}{2} (b + |b|)(\Phi_{j+1/2}^- - \Phi_{j-1/2}^-) + \frac{1}{2} (b - |b|)(\Phi_{j+1/2}^+ - \Phi_{j-1/2}^+),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{j+1/2}^- &= \Phi_j + \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta_{j-1/2}, \Delta_{j+1/2}), \\ \Phi_{j+1/2}^+ &= \Phi_{j+1} + \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta_{j+1/2}, \Delta_{j+3/2}), \\ \Delta_{j+1/2} &= \Phi_{j+1} - \Phi_j. \end{aligned}$$

Значение дивергенции единичного вектора скорости $\text{div}(\mathbf{e})_{i+1/2,j+1/2}$ в центре четырехугольника, лежащего на поверхности и образованного сеточными узлами (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i + 1, j + 1)$, $(i, j + 1)$ может быть вычислено с помощью теоремы Гаусса. Опуская промежуточные вычисления, окончательное выражение можно представить в виде:

$$S \cdot \text{div} \mathbf{e}_{i+1/2,j+1/2} = \sum_{if} (\mathbf{l}_{if} \times \mathbf{n}_S) \cdot \mathbf{e}_{if}, \quad (5.5.5)$$

где S — площадь четырехугольника, \mathbf{n}_S — вектор единичной нормали, $\mathbf{l}_{if} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$ — ориентированная сторона четырехугольника S (против часовой стрелки вокруг \mathbf{n}_S), \mathbf{e}_{if} — значение вектора \mathbf{e} в средней точке стороны if .

Уравнения для интегралов \bar{z}_l , \bar{z}_t в (5.5.1) можно представить в аналогичном виде:

$$a \frac{\partial \bar{z}_l}{\partial \xi} + b \frac{\partial \bar{z}_l}{\partial \eta} = \bar{r}_{\text{ef}}^2 \bar{\rho}_* \bar{\mu}_* \bar{U}_\delta, \quad a \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial \xi} + b \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial \eta} = \bar{r}_{\text{ef}}^{5/4} \bar{\rho}_* \bar{\mu}_*^{1/4} \bar{U}_\delta. \quad (5.5.6)$$

Так как величины \bar{z}_l и \bar{z}_t могут меняться на несколько порядков в окружном направлении (вдоль координаты η), более аккуратным способом расчета является решение уравнений для логарифмов этих величин:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \ln \bar{z}_l}{\partial \xi} + b \frac{\partial \ln \bar{z}_l}{\partial \eta} &= \bar{r}_{\text{ef}}^2 \bar{\rho}_* \bar{\mu}_* \bar{U}_\delta \bar{z}_l^{-1} \\ a \frac{\partial \ln \bar{z}_t}{\partial \xi} + b \frac{\partial \ln \bar{z}_t}{\partial \eta} &= \bar{r}_{\text{ef}}^{5/4} \bar{\rho}_* \bar{\mu}_*^{1/4} \bar{U}_\delta \bar{z}_t^{-1}. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Таким образом, уравнения для величин r_{ef} , имеют одинаковую структуру (только с различными правыми частями) и решаются в рамках единого маршевого (по ξ) алгоритма.

Глава 6

ТЕПЛООБМЕН ПРИ НАЛИЧИИ ВЫСТУПАЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

В окрестности выступающего элемента, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа, обычно возникает сложное пространственное течение с отрывом пограничного слоя на поверхности тела и интерференцией скачков уплотнения. Отрыв пограничного слоя приводит к существенному повышению давления и тепловых потоков на теле перед выступом и на самом выступе, что необходимо учитывать как при определении аэродинамических характеристик, так и при выборе тепловой защиты ЛА. Ниже приведены некоторые результаты экспериментальных и теоретических исследований по теплообмену в отрывных течениях и на выступающих элементах.

§ 6.1. Отрыв при обтекании двумерного выступа

Механизм отрыва потока от стенки поясним на примере плоского течения сжатия около тела со щитком (рис. 6.1).

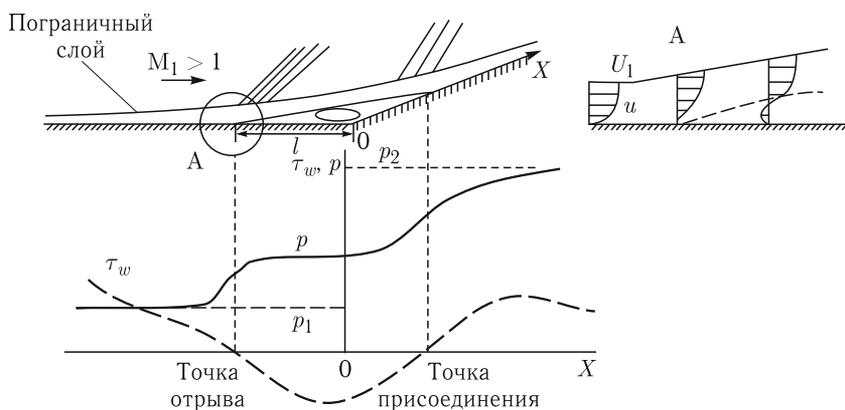


Рис. 6.1. Структура течения в отрывной зоне перед щитком, А — профили скорости в окрестности точки отрыва

При внезапном повышении давления от p_1 до p_2 на границе пограничного слоя в падающем на него скачке уплотнения от щитка возмущение давления $\Delta p = p_2 - p_1 > 0$ по дозвуковой части пограничного слоя передается навстречу потоку, в результате чего давление на стенке при приближении к щитку непрерывно возрастает. Положительный градиент давления деформирует профиль скорости, уменьшая градиент скорости по нормали к стенке $(\partial u / \partial y)_w$, а вместе с ним и трение τ_w , так как относительно наибольшее замедление $(-\Delta u / u = +\Delta p / (\rho_1 U_1^2) \gg \Delta p / (\rho_1 U_1^2))$ испытывают частицы газа вблизи стенки. При этом пограничный слой утолщается, и в результате взаимодействия с ним невязкого потока в последнем возникают волны сжатия (свободное взаимодействие). Если рост давления невелик, отрыва потока не происходит. Однако, если отношение давлений p_2/p_1 превышает некоторое пороговое значение $(p_2/p_1)_{кр}$, зависящее от чисел Маха M_1 и Рейнольдса Re_1 перед областью взаимодействия, пограничный слой отрывается (такое давление p_2 называют давлением зарождающегося отрыва). Ниже по потоку от точки отрыва, в которой $\tau_w = 0$, $\partial p / \partial x > 0$, а само давление $p_s < p_2$, под действием положительного градиента давления формируются возвратное течение, где трение на стенке $\tau_w < 0$, и зона постоянного давления (плато), четко выраженная при ламинарном, а при больших углах наклона щитка и при турбулентном режимах течения в пограничном слое. В области присоединения потока на щитке давление снова подрастает, выходя на уровень давления p_2 за присоединенным косым скачком около щитка.

Теория пограничного слоя к задачам отрыва, вообще говоря, неприменима. Такие течения описываются полной системой уравнений Навье–Стокса, что, конечно, сильно усложняет задачу.

Поэтому основу современных знаний об отрывных течениях составляют результаты экспериментальных исследований. Вместе с тем приближенные методы, основанные на интегральных законах сохранения [53], и асимптотические методы исследования свойств уравнений Навье–Стокса при $Re \rightarrow \infty$ [133] позволили глубже осмыслить результаты экспериментов и установить ряд общих закономерностей отрывных течений.

В прикладных задачах необходимо, прежде всего, определить выполняются ли условия возникновения отрыва, выяснить размеры отрывных зон, характер распределения и уровень давления и тепловых потоков в них. В области свободного взаимодействия

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 U_1^2} = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{d\delta^*}{dx}, \quad (6.1.1)$$

где δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя; p_1 , ρ_1 , U_1 , M_1 — давление, плотность, скорость газа и число Маха в невязком потоке перед зоной взаимодействия.

Если p , l — характерные давление и размер области взаимодействия, то

$$\frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 U_1^2} \sim \frac{\delta^*}{l (M_1^2 - 1)^{1/2}}. \quad (6.1.2)$$

На стенке из уравнения движения $\frac{dp}{dx} \approx \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_w$ имеем

$$\frac{p - p_1}{l} \sim \frac{\tau_{w1}}{\delta^*}. \quad (6.1.3)$$

Тогда из (6.1.2) и (6.1.3) находим

$$\frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 U_1^2} \sim \frac{C_{f1}^{1/2}}{(M_1^2 - 1)^{1/4}}; \quad \frac{l}{\delta^*} \sim \frac{1}{C_{f1}^{1/2} (M_1^2 - 1)^{1/4}}. \quad (6.1.4)$$

Приведенные соотношения, в принципе, справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного течения и носят характер законов подобия. Поскольку $C_{f1} \sim \text{Re}_1^{-1/2}$ и $C_{ft} \sim \text{Re}_1^{-1/5}$ соответственно для ламинарного и турбулентного режимов, то для характерных давлений p_i в зоне отрыва в зависимости от числа Рейнольдса имеем $C_{pl} \sim \text{Re}_1^{-1/4}$ и $C_{pt} \sim \text{Re}_1^{-1/10}$. Таким образом, с ростом числа Рейнольдса Re_1 коэффициент давления в отрывной зоне уменьшается, также как с ростом числа Маха M_1 . Из соотношений (6.1.4) следует также, что при одинаковых Re_1 и M_1 на пластине (клине) C_{pi} меньше, чем на конусе с тем же углом полураствора (из-за влияния C_{fi}). Хотя соотношения (6.1.4) строго применимы лишь к области свободного взаимодействия, в некоторых случаях они помогают проанализировать параметры течения и скоррелировать экспериментальные результаты во всей зоне отрыва. Отметим также, что поскольку $C_{f1} \ll C_{ft}$, то, например, в области плато C_{ppt} обычно больше C_{ppl} , а относительная длина турбулентной зоны отрыва $(l/\delta^*)_t$ значительно меньше ламинарной $(l/\delta^*)_l$. Строгое обоснование законов подобия для областей свободного взаимодействия в ламинарном течении дано в работе [133], где оценка для C_{pl} подтверждена, а для размера области взаимодействия l получена оценка $l \sim L \text{Re}_1^{-3/8}$ вместо $l \sim L \text{Re}_1^{-1/4}$ за счет более точного учета передачи возмущений в пристеночной области. При этом конкретные причины возникновения отрыва (скачок, уступ, щиток и др.) несущественны, и основные характеристики отрывных зон при одинаковых условиях в области перед отрывом близки, так как механизм передачи возмущений вверх по потоку одинаков.

Анализ экспериментальных данных подтверждает правильность оценок (6.1.4). Так, на рис. 6.2, взятом из работы [133], для ламинарного режима приведены экспериментальные значения коэффициентов давления при различных числах Маха M_1 в точке отрыва C_{ps} и в области плато C_{pp} , собранные в работе [207], и дано их сравнение с расчетом [133] по асимптотической теории. На рис. 6.3 для

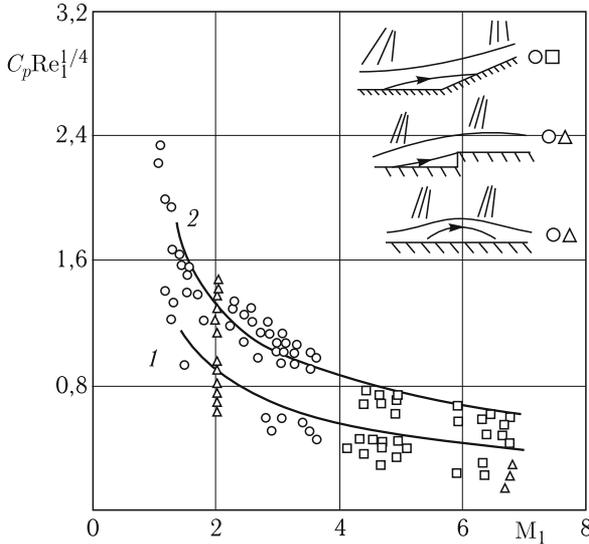


Рис. 6.2. Коэффициент давления в зоне отрыва: 1 — точка отрыва, 2 — область плато; \circ , Δ , \square — эксперимент [171]

$M_1 = 2$ и различных C_{f1} приведены значения C_{ps} в точке отрыва, C_{pp} в области плато и C_{Pkp} для зарождающегося отрыва ламинарного пограничного слоя [171]. При этом

$$C_{ps} = \frac{(2C_{f1})^{1/2}}{(M_1^2 - 1)^{1/4}}, \quad C_{pp} \approx 1,65 C_{ps}, \quad C_{Pkp} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 U_1^2} \approx 2,0 C_{ps}. \tag{6.1.5}$$

В практических целях для расчета плато давления в случае теплоизолированной стенки проще использовать следующие соотношения, соответственно, для ламинарного [26, 133, 207] и для турбулентного [26, 171, 199] режимов:

$$C_{pp} \approx \frac{1,67 A_t}{Re_1^{1/4} (M_1^2 - 1)^{1/4}}, \tag{6.1.6}$$

$$C_{pp} \approx \frac{1,34 A_t}{Re_1^{1/10} (M_1^2 - 1)^{0.43}}, \tag{6.1.7}$$

где для пластины и цилиндра $A_l = A_t = 1$, для конуса $A_l = 3^{1/4} = 1,31$, $A_t = (9/4)^{1/10} = 1,08$.

Тогда $C_{ps} = 0,6 C_{pp}$, $C_{kp} = 1,2 C_{pp}$. Исходя из этих соотношений, нетрудно оценить угол «жидкого клина» отрывной зоны $\theta_{отр}$ и угол щитка $\theta_{кр}$, при котором зарождается отрыв. Так, используя для расчета

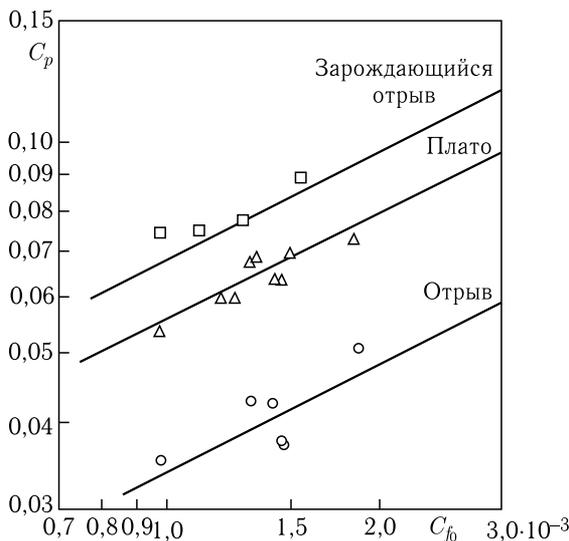


Рис. 6.3. Зависимость коэффициента давления от коэффициента трения: 1 — точка отрыва; 2 — область плато; 3 — зарождающийся отрыв

давления на клине с углом θ соотношение [170]

$$C_p = 2\theta^2 \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{M_1^2\theta^2}} + \frac{\gamma+1}{4} \right], \quad (6.1.8)$$

получим:

$$\theta_i = \frac{C_{pi}}{\sqrt{\frac{4}{M_1^2} + (\gamma+1) C_{pi}}}. \quad (6.1.9)$$

При этом угол щитка, для которого зарождается отрыв ($\theta_{кр}$), примерно на 1° превышает угол «жидкого клина» $\theta_{отр}$. Результаты расчетов $\theta_{отр}$ показаны на рис. 6.4. Необходимо заметить, что если развитая ламинарная зона отрыва возникает сразу, как только угол щитка $\theta \geq \theta_{кр}$, то развитая турбулентная зона отрыва образуется лишь при $\theta \geq \theta^* = 2\theta_{кр}$ [26]. При $\theta_{кр} < \theta < 2\theta_{кр}$ турбулентный отрыв, как показывают эксперименты, сохраняет локальный характер (длина зоны отрыва имеет порядок толщины пограничного слоя). В частности, в работе [26] предложена следующая зависимость для расчета длины зоны отрыва турбулентного пограничного слоя на пластине при $\theta > \theta^*$

$$\frac{l}{\delta_1} \approx \frac{6,5}{M_1} \exp[0,182(\theta - \theta^*)], \quad (6.1.10)$$

где δ_1 — толщина пограничного слоя в начале области взаимодействия, θ — угол щитка, $\theta^* = 27^\circ$. Таким образом, даже при $\theta = 27^\circ$ имеем

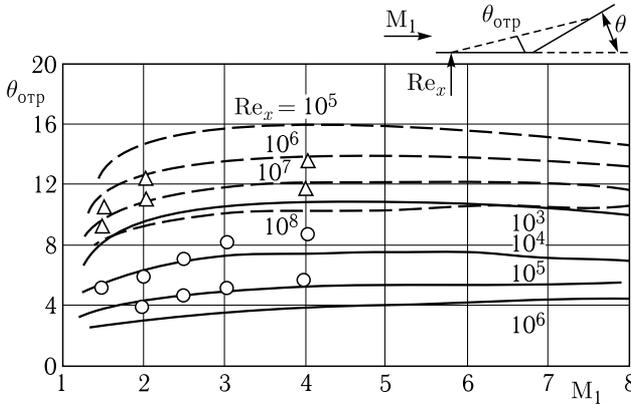


Рис. 6.4. Зависимость угла «жидкого клина» $\theta_{отр}^{\circ}$ от чисел Маха M_1 и Рейнольдса Re_x ; сплошные кривые — ламинарный пограничный слой, штриховые — турбулентный пограничный слой; о, Δ — эксперимент [4]

$l \approx \frac{6,5}{M_1} \delta_1 \sim 2 \delta_1$ при $M_1 \sim 3$. Эти результаты подтверждаются более тонкими поздними исследованиями [260], где для длины зоны взаимодействия l_0 (l_0 несколько больше длины зоны отрыва l) получено при $M_1 = 3$ следующее соотношение:

$$\frac{l_0}{\delta_1} \approx 0,9 \exp(0,23 \theta) Re_{\delta_1}^{-1/3}. \quad (6.1.11)$$

Число Рейнольдса Re_{δ_1} построено по толщине пограничного слоя δ_1 и параметрам перед зоной взаимодействия. Отсюда при $Re_{\delta_1} \approx 10^6$ и $\theta = 27^\circ$ имеем $l_0 \approx 4,5 \delta_1$, тогда как уже при $\theta = 20^\circ$ имеем $l_0 = 0,9 \delta_1$. В случае отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе перед коническим щитком в работе [26] предложена также приближенная зависимость, которая позволяет оценить длину зоны отрыва при $\theta \sim 10 \dots 35^\circ$:

$$\frac{l_0}{\delta_1^*} \approx A \exp \frac{C_{p2} \sqrt{Re_1}}{41}, \quad A = 1 + 10 \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{7,1} \right), \quad (6.1.12)$$

где δ_1^* , Re_1 — толщина вытеснения и число Рейнольдса в начале зоны взаимодействия, C_{p2} — коэффициент давления на щитке в вязком потоке, определяемый соотношением типа (6.1.8).

Исследования теплообмена в отрывных течениях еще далеки от завершения и носят, преимущественно, экспериментальный характер. В работах [138, 151] предложены численные методы расчета отрывных течений на ЭВМ, основанные на исследовании интегральных законов сохранения.

Однако при необходимости проведения оперативных оценок теплообмена на первый план выступают корреляционные соотношения,

опирающиеся на некоторые оценки общего характера и подходящие экспериментальные или расчетные данные.

Рассмотрим две характерные зоны отрывного течения — область плато давления и область присоединения оторвавшегося потока. Тепловой поток в первой из них характеризует средний уровень теплового потока в отрывной области, а во второй — уровень максимальных тепловых потоков.

Рассмотрим для определенности отрывное течение, возникающее перед отклоненным щитком при сверхзвуковых скоростях движения газа ($M_1 \geq 2$) перед ним. В области возвратного течения около стенки, характерная длина которой оценивается соотношением вида (6.1.4) как для ламинарного, так и для турбулентного течений, формируется новый пограничный слой. Примем в качестве характерного давления в области отрыва давление на плато p_p и будем считать, что скорость возвратного течения пропорциональна скорости невязкого невозмущенного потока. При проведении оценок тепловых потоков при ламинарном и турбулентном течениях в пограничных слоях удобно использовать соотношения типа (5.1.11) для пластины:

$$\begin{aligned} q_l &\sim \sqrt{\frac{\rho_* \mu_* u_\delta}{x}} (H_{el} - h_w); \\ q_t &\sim (\rho_* u_\delta)^{0,8} \left(\frac{\mu_*}{x}\right)^{0,2} (H_{et} - h_w). \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Тогда, учитывая, что $\rho \mu \sim p$, на основе вышеприведенных характерных величин можно получить в случае ламинарного течения

$$\frac{q_{lp}}{q_{l1}} \sim \sqrt{\frac{p_p x_0}{p_1 l}} \frac{H_{ep} - h_w}{H_e - h_w}, \quad (6.1.14)$$

где q_{lp} , p_p — уровень тепловых потоков и давления в зоне отрыва, q_{l1} , p_1 — тепловой поток и давление в точке излома контура тела x_0 в предположении безотрывного течения, x_0 — расстояние от начала развития пограничного слоя при безотрывном течении, l — длина зоны отрыва, H_{ep} — энтальпия восстановления в зоне отрыва. В соответствии с оценками [131]

$$H_{ep} - h_w \sim \left(\frac{l}{x_0}\right)^{1/3} (H_e - h_w).$$

Тогда из (6.1.14) найдем

$$\frac{q_{lp}}{q_{l1}} \sim \sqrt{\frac{p_p}{p_1}} \left(\frac{x_0}{l}\right)^{1/6}.$$

Обычно при развитом отрывном течении величина l соизмерима с x_0 . Учитывая малую степень отношения (x_0/l) , в первом приближении

можно принять для отношения тепловых потоков при одной и той же температуре стенки

$$\frac{q_{tP}}{q_{t1}} = A_t \sqrt{\frac{p_P}{p_1}}. \quad (6.1.15)$$

Аналогичное выражение приближенно можно получить при турбулентном течении в пограничном слое

$$\frac{q_{tP}}{q_{t1}} = A_t \left(\frac{p_P}{p_1} \right)^{0,8}. \quad (6.1.16)$$

Анализ имеющихся экспериментальных [30, 63, 213, 217, 238] и расчетных [138, 151] данных показывает, что для оценки тепловых потоков в области плато давления отрывного течения можно принять $A_t \approx 0,6$, $A_t \approx 1$ для диапазона чисел Маха перед зоной отрыва $2 \leq M_1 \leq 15$.

Наибольший интерес представляют тепловые потоки в области присоединения пограничного слоя, где они достигают максимальных величин. Для приближенной оценки уровня тепловых потоков в области присоединения воспользуемся известным фактом, что при переходе пограничного слоя через область скачкообразного изменения давления тепловой поток q_w изменяется пропорционально $\sim p u_\delta$ (см. (5.1.16), § 6.3 и § 6.4). Если предположить, что всю область отрывного течения можно принять за область скачкообразного изменения давления, то с учетом [138, 151] можно получить следующую верхнюю оценку отношений максимальных тепловых потоков в области присоединения пограничного слоя к тепловым потокам перед щитком при безотрывном обтекании

$$\frac{q_{t_{np}}}{q_{t_1}} \approx \frac{(p u r^\nu)_{np}}{(p u r^\nu)_1}, \quad \frac{q_{t_{np}}}{q_{t_1}} \approx \frac{(p u r^{\nu/4})_{np}}{(p u r^{\nu/4})_1}, \quad (6.1.17)$$

где $\nu = 0, 1$ для плоского и осесимметричного течений соответственно, индексы «np» и «1» относятся к параметрам в зоне присоединения и непосредственно перед щитком при безотрывном течении. Однако сравнение с экспериментальными и расчетными данными показывает, что соотношения (6.1.17) дают сильно завышенную оценку для максимальных тепловых потоков в зоне присоединения течения. Это связано, видимо, с тем обстоятельством, что область отрыва потока имеет большую протяженность. Поэтому формулы (6.1.17) можно рекомендовать для оценок тепловых потоков при безотрывном течении или при зарождении отрыва. Для развитого отрыва, как показывает сравнение экспериментальных данных с расчетными, более приемлемые оценки имеют вид:

$$\frac{q_{t_{np}}}{q_{t_1}} \approx \frac{(p^{0,5} u_\delta^{0,5} r^\nu)_{np}}{(p^{0,5} u_\delta^{0,5} r^\nu)_1}; \quad \frac{q_{t_{np}}}{q_{t_1}} \approx \frac{(p^{0,8} u_\delta^{0,8} r^{\nu/4})_{np}}{(p^{0,8} u_\delta^{0,8} r^{\nu/4})_1}. \quad (6.1.18)$$

Для оценок в качестве величин давления и скорости в области присоединения можно использовать их значения при безотрывном обтекании щитка. Эти формулы можно использовать для оценок теплообмена при взаимодействии падающего скачка уплотнения со стенкой. В этом случае в качестве газодинамических параметров (давление, скорость) следует использовать их значения за отраженным скачком уплотнения.

На рисунках 6.5–6.8 показаны некоторые результаты расчетов и экспериментов в области отрыва, заимствованные из работ [138, 151, 202]. Там же пунктиром показаны оценки, даваемые представленными выше зависимостями.

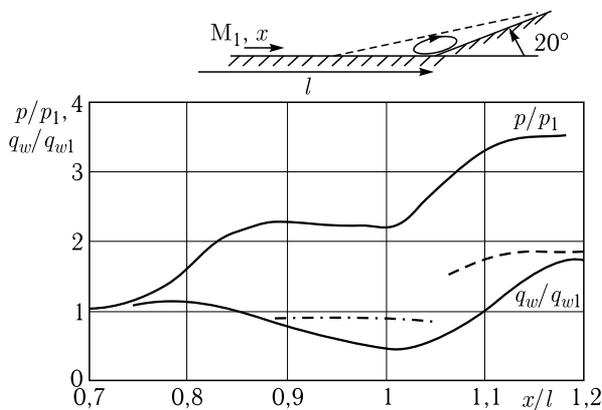


Рис. 6.5. Распределение давления и тепловых потоков в области отрыва ламинарного пограничного слоя ($M_1 = 5$, $T_w/T_0 = 0,2$, $Re_{1l} = 3 \cdot 10^4$). Сплошная кривая — расчет [138], штрихпунктирная — формула (6.1.15), штриховая — формула (6.1.18)

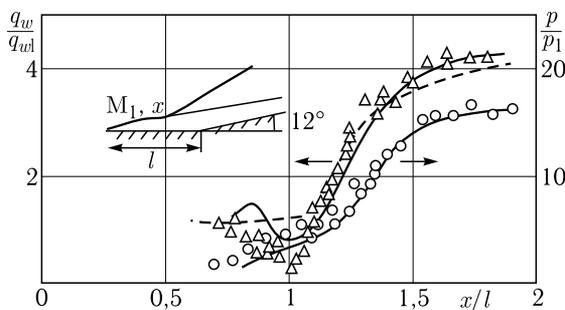


Рис. 6.6. Распределение давления и тепловых потоков в области отрыва ламинарного пограничного слоя ($M_1 = 12,2$, $T_w/T_0 = 0,22$, $Re_{1l} = 0,52 \cdot 10^6$). Сплошная кривая — расчет [138], штрихпунктирная — формула (6.1.15), штриховая — формула (6.1.18)

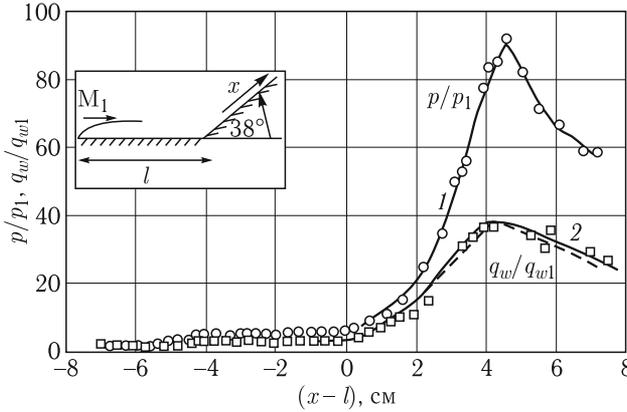


Рис. 6.7. Распределение давления 1 и тепловых потоков 2 в турбулентном пограничном слое [202] ($M_1 = 9,22$, $T_w = 295$ К, $Re_1 = 4,7 \cdot 10^5$, $T_0 = 1070$ К). Штриховая кривая — расчет по формуле (6.1.18)

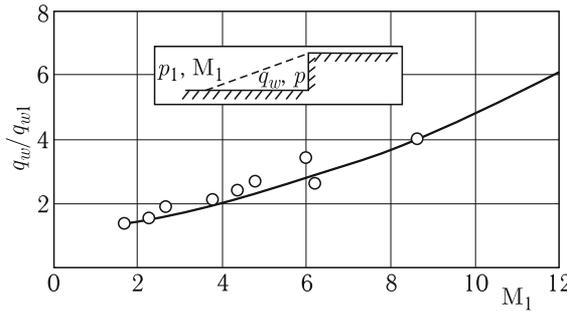


Рис. 6.8. Корреляция тепловых потоков перед ступенькой в турбулентном пограничном слое. Сплошная кривая — расчет по формуле (6.1.16), о — эксперимент [238]

В заключение приведем корреляционные соотношения для расчета максимального коэффициента теплообмена $(\alpha/c_p)_{max}$ на щитке в зоне присоединения оторвавшегося пограничного слоя, полученные по результатам экспериментов при $M_1 \sim 4 \dots 20$, $\theta \sim 7 \dots 45^\circ$, собранных в работе [198]. В случае ламинарного и турбулентного режимов имеем (рис. 6.9)

$$\begin{aligned}
 St_i^* &= 0,19 Re_*^{-0,5}; & St_t^* &= 0,02 Re_*^{-0,2}; \\
 St_i^* &= \frac{(\alpha/c_p)_{i \max}}{\rho_w u_{\delta 2}}; & Re_* &= \frac{\rho_w u_{\delta 2} \delta_2}{\mu_w \sin(\theta - \theta_{отр})},
 \end{aligned}
 \tag{6.1.19}$$

где δ_2 — толщина присоединяющегося слоя, определяемая по упрощенным соотношениям работы [198]; $u_{\delta 2}$ — скорость газа за косым скачком

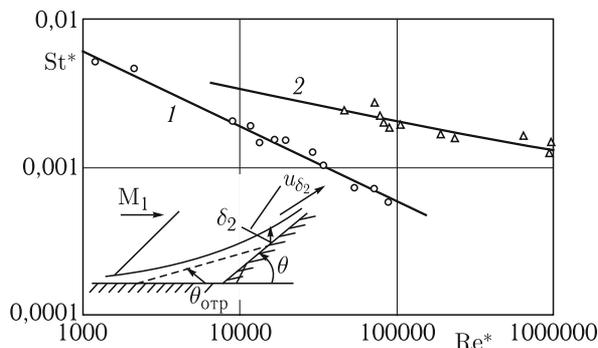


Рис. 6.9. Корреляция для расчета теплообмена на щитке в зоне присоединения: 1 — ламинарный режим; 2 — турбулентный режим; о, Δ — эксперимент [198]

около щитка; ρ_w , μ_w — плотность и вязкость газа при давлении p_2 за косым скачком и температуре стенки.

§ 6.2. Особенности отрыва и теплообмена в окрестности трехмерного выступа

В общем случае в окрестности выступающего элемента, обтекаемого сверхзвуковым потоком, возникает сложное пространственное отрывное течение. Растекание газа от плоскости симметрии в области перед выступающим элементом приводит к уменьшению размера отрывной зоны и порождает ряд новых физических эффектов, важнейшим из которых является образование низкоэнтропийных сверхзвуковых струек внутри зоны отрыва, которые приводят к появлению локальных зон высоких давлений и тепловых потоков на теле и выступающем элементе. Многочисленные экспериментальные исследования таких задач [3, 4, 27, 30, 45, 46] позволили схематизировать течение в трехмерных отрывных зонах. Такие схемы течения полезны для обобщения экспериментальных данных и разработки приближенных методик оценки теплообмена. Однако накопленных данных все еще недостаточно, чтобы дать окончательные рекомендации по расчету теплообмена около и на поверхности выступающих элементов. Ниже кратко изложены основные результаты исследований, важные для практических приложений.

Типичная картина сверхзвукового обтекания выступающего элемента цилиндрической формы, установленного перпендикулярно к стенке (угол стреловидности $\lambda = 0$), полученная с помощью различных средств визуализации течения, показана на рис. 6.10 для случая, когда толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с высотой цилиндра h ($\delta \ll h$). При этом сверхзвуковой поток отклоняется отрывной зоной и проходит через систему скачков, что приводит к образова-

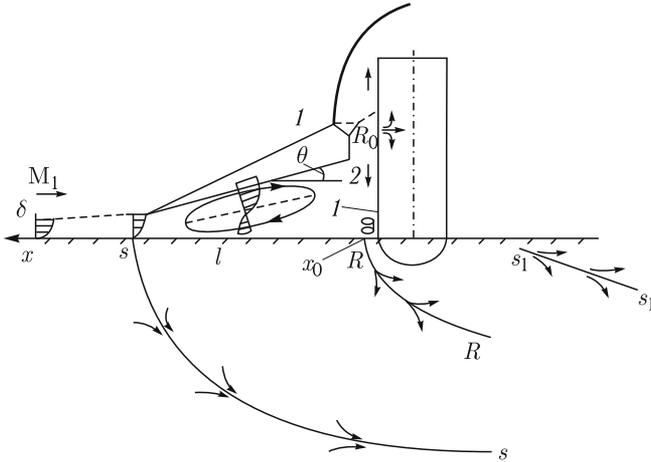


Рис. 6.10. Картина течения около цилиндрического выступа: 1 — система скачков; 2 — высоконапорная струйка; $R-R$ — линия растекания; $S-S$ — линия отрыва; S_1-S_1 — линия растекания в области хвостовых скачков

нию высоконапорной струи. Из-за растекания потока около цилиндра в этой струе находится разделительная линия тока, так что давление в точке торможения R_0 на цилиндре p'_0 может заметно превышать давление торможения за прямым скачком в невозмущенном потоке p'_{01} (рис. 6.11).

Заметим, что величина p'_0 достаточно точно может быть рассчитана как давление торможения за прямым скачком для потока 2, прошедшего через косой скачок от отрывной зоны. Часть высоконапорной струи отклоняется внутрь отрывной зоны к основанию цилиндра и, разгоняясь при этом за счет бокового вытекания газа до сверхзвуковых скоростей, порождает λ -образную конфигурацию скачков у основания цилиндра и подковообразную линию растекания $R-R$ на пластине, где реализуются максимальные в отрывной зоне давления и тепловые потоки (линии отрыва $S-S$ и присоединения $R-R$ с хорошей точностью являются параболлами, причем за цилиндром также имеются зоны повышенного теплообмена S_1-S_1 , обусловленные влиянием хвостовых скачков, образующихся за донной областью изолированного цилиндра).

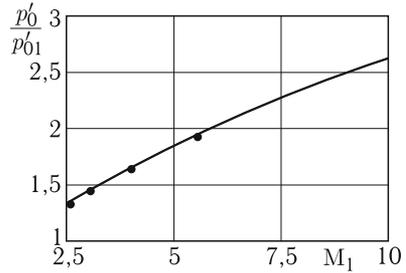


Рис. 6.11. Зависимость максимального давления на цилиндре от числа Маха; ● — эксперимент

В целом, область, где возможно повышение теплового потока на стенке, обусловленное наличием выступа, во много раз превосходит диаметр цилиндра d . Наиболее значительна интенсификация теплообмена в зоне перед цилиндром. Длина l и угол θ зоны в плоскости симметрии течения перед выступом определяются характером течения в пограничном слое, его толщиной δ , размерами (и в общем случае формой) выступа (высота h , диаметр d), местными числами Маха M_1 и Рейнольдса Re_1 перед точкой отрыва. В качестве иллюстрации в случае отрыва дозвукового турбулентного погранслоя перед цилиндрическим выступом с $d/h = 2$ зависимость l/h от δ^*/h (где δ^* — толщина вытеснения перед отрывной зоной) показана на рис. 6.12 а, а зависимость l/h от h/d при $\delta^*/h = 0,03$ — на рис. 6.12 б [5].

Сравнение этих величин с соответствующими величинами в плоском течении, когда $l/d = 0$ (пунктир на рис. 6.12) показывает, что растекание на 30...40% сокращает длину зоны отрыва. Большое число определяющих параметров для таких течений затрудняет получение обобщенных зависимостей для расчета геометрии трехмерных отрывных зон. Отметим ряд полезных результатов обработки экспериментальных данных [3, 90]. Для выступа цилиндрической формы при $\lambda = 0$ в диапазоне чисел Маха $M_1 = 2,5 \dots 6,0$, чисел Рейнольдса $Re_d = \rho_1 u_1 d / \mu_1 \approx 10^3 \dots 10^7$ при $h/d \geq 3$ и $\delta^*/d < 0,5$ длина зоны отрыва l и угол «жидкого клина» θ в плоскости растекания в случае ламинарного отрыва слабо зависят от M_1 и h/d

$$\frac{l}{d} \approx 0,17 Re_1^{1/4}; \quad \theta \approx 135 Re_1^{-1/4}, \quad (6.2.1)$$

где Re_1 — местное число Рейнольдса в точке отрыва, угол θ измеряется в градусах.

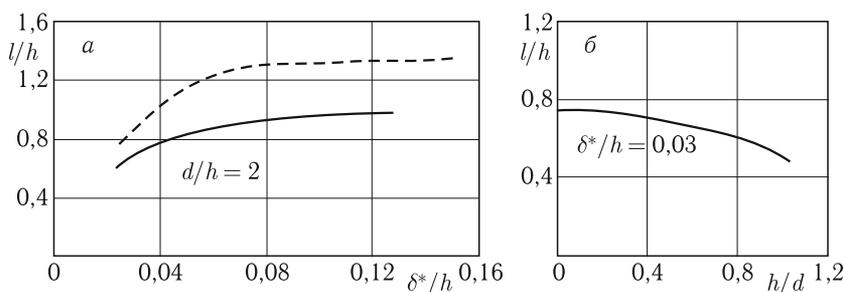


Рис. 6.12. Длина зоны отрыва перед выступом в дозвуковом турбулентном пограничном слое: сплошные кривые — цилиндр; штриховая — двумерный уступ

При меньших значениях h/d длина зоны отрыва зависит от этого параметра, причем, при $h/d \geq 0,08$ [90] имеет место следующая уни-

версальная зависимость (рис. 6.13):

$$\frac{l}{d_{\text{эф}}} = 0,4 \text{Re}_1^{1/4}; \quad d_{\text{эф}} = \frac{d}{\frac{2}{C_x} + \frac{d}{h}}, \quad (6.2.2)$$

где C_x — коэффициент сопротивления изолированного выступа (для круглого цилиндра $C_x \approx 1,1$, для прямоугольного выступа $C_x \approx 1,7$).

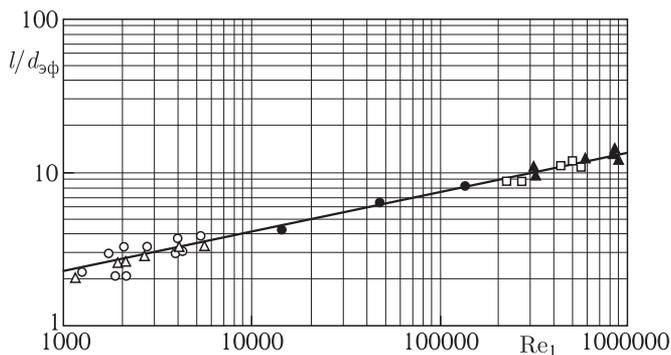


Рис. 6.13. Длина зоны отрыва перед выступающим элементом при различных числах Рейнольдса (\square — цилиндр; ∇ — уступы [207]; Δ — цилиндр; \circ, \bullet — уступы [90])

При $d \gg h$ имеем $d_{\text{эф}} = h$, угол отрыва $\theta \sim h/l$ при реальных Re_1 примерно такой, как в двумерных задачах ($\theta^\circ \sim 143 \text{Re}_1^{-1/4}$). С изменением d/h угол θ меняется достаточно слабо. При фиксированной высоте препятствия h (точнее, h/δ) длина зоны отрыва l значительно сокращается при уменьшении диаметра цилиндра d за счет бокового растекания газа из отрывной зоны (так, если при $d \gg h$ имеем $l/h \approx 0,4 \text{Re}_1^{1/4}$, то при $d \sim h$ имеем $l/h \approx 0,13 \text{Re}_1^{1/4}$).

При отрыве турбулентного пограничного слоя перед цилиндром длина зоны отрыва l , как показывают эксперименты [28, 30], значительно меньше, чем при отрыве ламинарного. Так, при отрыве на остром конусе ($M_1 \approx 5,8$, $\text{Re}_1 = 2 \cdot 10^7 \dots 8,5 \cdot 10^7$), $l/d \approx 2,6$, угол отрыва $\theta = 12^\circ$.

Если выступ находится на наветренной стороне конуса, то с ростом угла атаки длина зоны отрыва резко сокращается как при ламинарном, так и при турбулентном пограничном слое, что обусловлено боковым растеканием газа. Распределение давления в зоне отрыва даже в плоскости симметрии в отличие от двумерной зоны существенно неоднородно. Если вблизи точки отрыва уровень давления на пластине примерно такой же, как в двумерной зоне отрыва, и соответствует плато давления (§ 6.1), то вблизи основания цилиндра, где на пластине образуется линия растекания $R-R$, давление намного выше и приближается к максимальному давлению на самом цилиндре.

В соответствии с описанной картиной течения распределение тепловых потоков q_w на теле перед выступом крайне неравномерно. Уровень q_w в передней части зоны отрыва примерно такой же, как в двумерной зоне и может быть оценен с помощью соотношений § 6.1, а вблизи цилиндра на линии растекания $R-R$ максимум q_w значительно выше, что обусловлено малым поперечным размером высокоэнтропийной струйки. Надежные оценки максимума теплового потока на теле перед цилиндром представляют наиболее важную для практики задачу, так как величины $q_{w \max}$ обычно на 1–2 порядка превышают тепловой поток на теле q_{w1} в отсутствие выступа и приближаются к тепловому потоку q_{w0} на линии растекания бесконечного цилиндра в невозмущенном потоке. Для ламинарного течения это видно из рис. 6.14, где в форме отношения $q_{w \max}/q_{w0}$ показаны экспериментальные данные работы [30], полученные на пластине с вертикально установленным ($\lambda = 0$) цилиндром при $M_1 = 6 \dots 8$ и различных d/δ^* (d — диаметр цилиндра, δ^* — толщина вытеснения на пластине без выступа). При удалении от цилиндра вниз по потоку вдоль линии растекания $R-R$ на пластине тепловой поток q_w уменьшается, но довольно медленно, даже на расстояниях от выступа $\sim 10d$ величина q_w более чем в 5 раз превышает тепловой поток q_{w1} на теле без выступа для приведенных выше условий [30]. Газодинамика течения и теплообмен на пластине в зоне отрыва в значительной степени зависят от угла стреловидности λ передней кромки цилиндра (исключение составляет зона за цилиндром, где это влияние невелико).

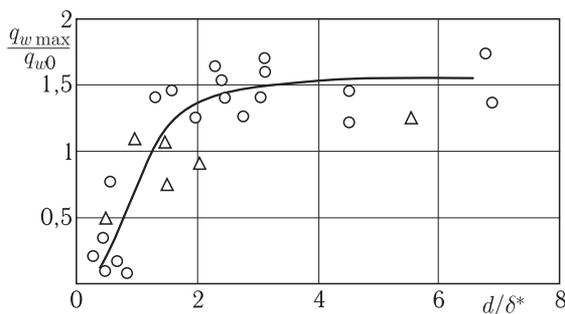


Рис. 6.14. Максимальный относительный тепловой поток на пластине перед цилиндром ($\lambda = 0$) при отрыве ламинарного пограничного слоя: \circ — $M_1 = 6$, Δ — $M_1 = 8$

Анализ возможных ситуаций дан в работе [47]. Наибольший интерес представляет наклон цилиндра по потоку ($\lambda > 0$). При этом с ростом угла стреловидности λ резко сокращается длина зоны отрыва $l(\lambda)$ перед цилиндром (рис. 6.15), высокоэнтропийная струйка, растекающаяся от точки R_0 , сносится вниз по потоку, не достигая тела в области перед цилиндром. В результате величина q_w на теле перед цилиндром

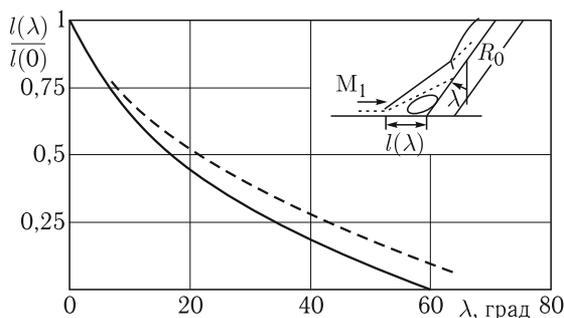


Рис. 6.15. Длина отрывной зоны перед стреловидным цилиндром ($M_1 = 6$). Сплошная кривая — ламинарный, штриховая — турбулентный пограничный слой

резко уменьшается, а максимум теплового потока на пластине $q_{w \max}$ перемещается вниз по течению вдоль линии растекания $R-R$ с ростом угла стреловидности, хотя значительно медленнее. Это показано на рис. 6.16. Отметим, что в случае ламинарного режима величина $q_{w \max}$ с ростом угла стреловидности λ уменьшается примерно по тому же закону, что и тепловой поток на линии растекания бесконечного стреловидного цилиндра

$$\frac{q_{w \max}(\lambda)}{q_{w \max}(0)} \approx \cos^{1,25} \lambda. \quad (6.2.3)$$

Падение теплового потока непосредственно перед цилиндром значительно более сильное, особенно в случае отрыва турбулентного погра-

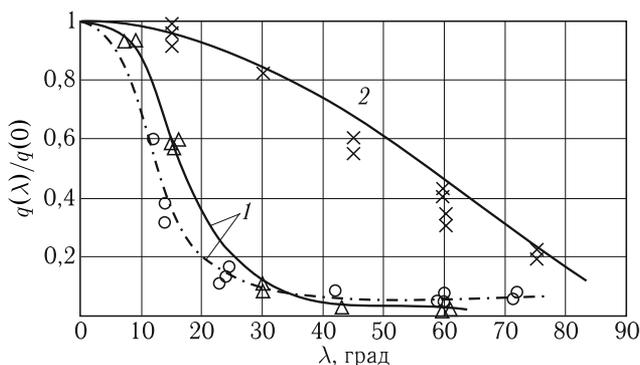


Рис. 6.16. Влияние угла стреловидности на относительные тепловые потоки к пластине около цилиндрического выступа [30]; 1 — тепловой поток перед цилиндром в плоскости симметрии, 2 — максимум теплового потока на линии растекания $R-R$ около цилиндра, формула (6.2.3) (сплошная кривая — ламинарный отрыв; штрихпунктирная — турбулентный отрыв) \times , Δ , \circ — эксперимент

ничного слоя. При углах стреловидности $\lambda \geq 50 \dots 60^\circ$ отрыва и интенсификации теплообмена перед цилиндром практически не наблюдается.

Опишем некоторые результаты исследований отрыва турбулентного пограничного слоя перед выступающим элементом высотой h .

На рис. 6.17 при различных h/δ показаны типичные распределения давления p/p_1 и тепловых потоков q_w/q_{w1} в отрывной зоне перед цилиндром ($M_1 = 6$, $d/\delta = 1$; p_1 , q_{w1} — давление и турбулентный тепловой поток в месте расположения выступа при его отсутствии, координата x отсчитывается навстречу потоку от основания цилиндра; δ — толщина пограничного слоя). С ростом h/δ максимальные значения давления и теплового потока, достигаемые в точке растекания потока R за скачком (рис. 6.10) увеличиваются и при $h/\delta > 1$ превышают невозмущенные величины p_1 и q_{w1} на пластине более, чем на порядок.

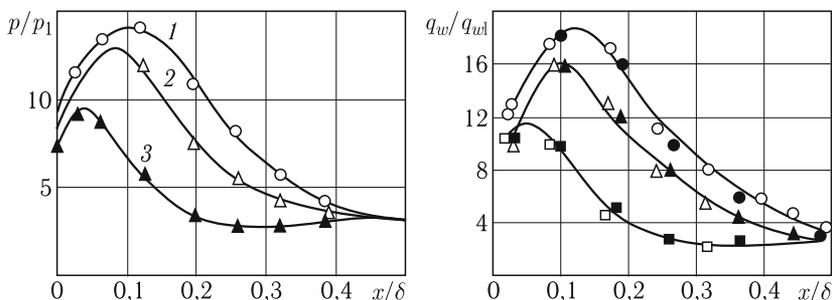


Рис. 6.17. Распределение давления и тепловых потоков в отрывной зоне перед цилиндром различной высоты (1 — $h/\delta = 2,13$; 2 — $h/\delta = 1,33$; 3 — $h/\delta = 0,8$); о, Δ , \blacktriangle — эксперимент, $Re_1 = 3,3 \cdot 10^6$; \bullet , \blacktriangle , \square — эксперимент, $Re_1 = 6,6 \cdot 10^6$

Точка растекания R с ростом h/δ смещается навстречу невозмущенному потоку. Отметим, что распределения p/p_1 и q_w/q_{w1} подобны, причем с удовлетворительной точностью в большой окрестности точки растекания при $p/p_1 > 1$ имеет место приближенное соотношение (рис. 6.18)

$$\frac{q_w}{q_{w1}} \approx 1 + 1,35 \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right) \approx 1,3 \frac{p}{p_1}. \quad (6.2.4)$$

При турбулентном пограничном слое перед отрывом, как показывают экспериментальные данные, в точке растекания отношение тепловых потоков q_w/q_{w1} не зависит от числа Рейнольдса и, следовательно, $q_w \sim \rho u \Delta H Re^{-0,2}$, т. е. для максимального теплового потока в отрывной зоне характерна турбулентная зависимость от числа Re . Это свидетельствует о значительном влиянии внешней турбулентности на теплообмен в критической точке в отрывной зоне. Метод расчета теплообмена в таких течениях предложен, например, в работе [93]. Он опирается на знание газодинамических параметров течения в от-

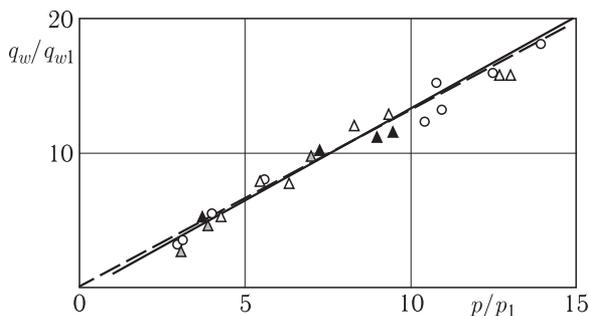


Рис. 6.18

рывной зоне, в том числе параметров высоконапорной сверхзвуковой струйки, порождающей линию растекания $R-R$ на рис. 6.10.

Результаты измерений температуры торможения T_0 в этой струйке в зависимости от h/δ и температурного фактора стенки T_w/T_{00} показаны на рис. 6.19, T_{00} — температура торможения невозмущенного

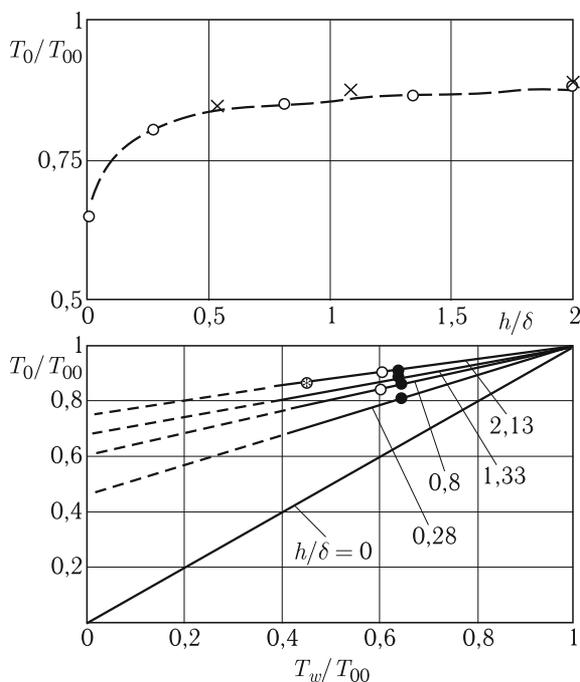


Рис. 6.19. Зависимость температуры торможения в отрывной зоне от высоты и формы препятствия, температурного фактора ($d/\delta = 1,0$): \circ — цилиндр, \times — плоский торец, \bullet — $M_1 = 6$, $*$ — $M_1 = 2,5$

потока. Они практически совпадают для выступов цилиндрической и прямоугольной формы.

На рис. 6.20 показаны положения точки растекания на пластине перед выступом и сведены в единую кривую результаты измерений распределения давления на пластине перед выступом. Величины p_{\min} и p_{\max} могут быть определены на основе данных, представленных на рис. 6.20 и слабо зависящих от величин d/δ и h/δ .

Приведенные результаты, не исчерпывая всего многообразия ситуаций, возникающих при отрыве пограничного слоя в сверхзвуковом потоке перед выступающими элементами, позволяют оценивать наиболее критичные тепловые нагрузки на поверхности тела в зоне расположения этих элементов. Рассмотрим основные особенности отрывного течения, возникающего при вдуве в пограничный слой поперечной сверхзвуковой струи. Влияние такой струи на внешний сверхзвуковой

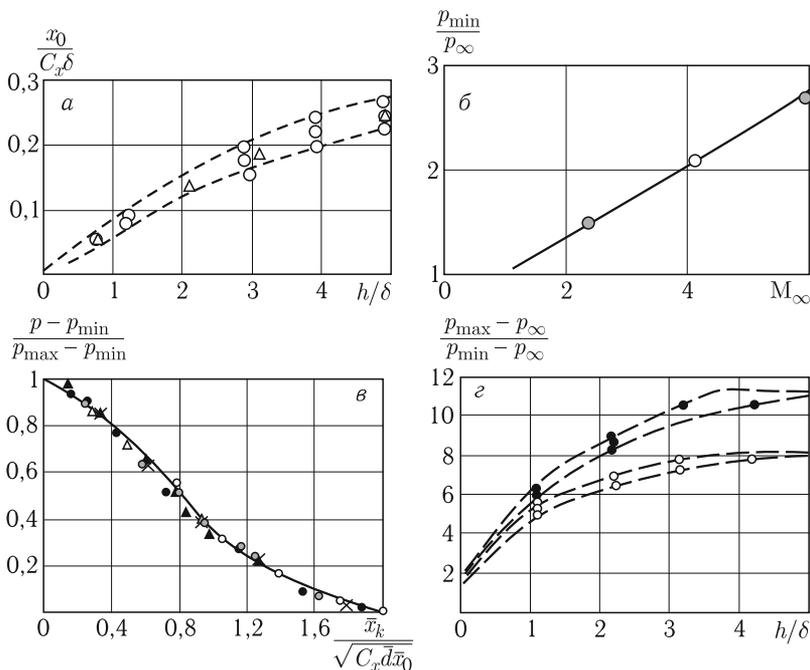


Рис. 6.20. Корреляционные зависимости для определения: *a* — положения критической точки в отрывной зоне (○ — $M_1 = 2,5$, Δ — $M_1 = 4$; × — $M_1 = 6$); *б* — минимальное давление; *в* — давление в отрывной зоне (○ — $M_1 = 2,5$, $C_x = 1,1$, $\bar{d} = d/\delta = 2,6$; ● — $M_1 = 2,5$, $C_x = 1,7$, $d/\delta = 2,6$; ▲ — $M_1 = 2,5$, $C_x = 1,7$, $d/\delta = 2$; ○ — $M_1 = 4$, $C_x = 1,1$, $d/\delta = 1,65$; ● — $M_1 = 4$, $C_x = 1,7$, $d/\delta = 1,65$; ● — $M_1 = 4$, $C_x = 1,7$, $d/\delta = 2,6$; × — $M_1 = 6$, $C_x = 1,1$, $d/\delta = 1$, Δ — $M_1 = 6$, $C_x = 1,7$, $d/\delta = 1$); *г* — максимальное давление ($M_1 = 2,5 \dots 6$; $d/\delta = 1 \dots 2,5$)

поток во многом аналогично влиянию выступающего элемента. При фиксированных внешних параметрах потока форма эквивалентного выступа и геометрия отрывной зоны зависят, прежде всего, от таких параметров вдуваемой струи, как число Маха M_j на срезе сопла, показатель адиабаты γ_j и нерасчетность $n = p_j/p$ (p_j — давление в струе на срезе сопла, p — местное давление в невозмущенном потоке), а при $d_j \leq \delta$ еще от отношения диаметра среза сопла d_j к толщине пограничного слоя на теле δ . Теплообмен на теле зависит, кроме того, от относительной температуры торможения струи T_{0j}/T_{00} и состава вдуваемого газа.

При $d_j/\delta \gg 1$, как показали экспериментальные исследования холодных струй (при $T_{0j} = T_w$, где T_w — температура стенки тела) [30], основным параметром, определяющим взаимодействие струи с набегающим сверхзвуковым потоком и учитывающим влияние M_j , n , M_1 (во всяком случае, при $M_j \sim 1 \dots 3$), является $N = p'_{0j}/p'_0$ — отношение давлений торможения в струе p'_{0j} и в потоке p'_0 .

При относительно небольших N (примерно при $N < 3$) реализуется режим квазиперерасширенной струи (рис. 6.21). Набегающий поток

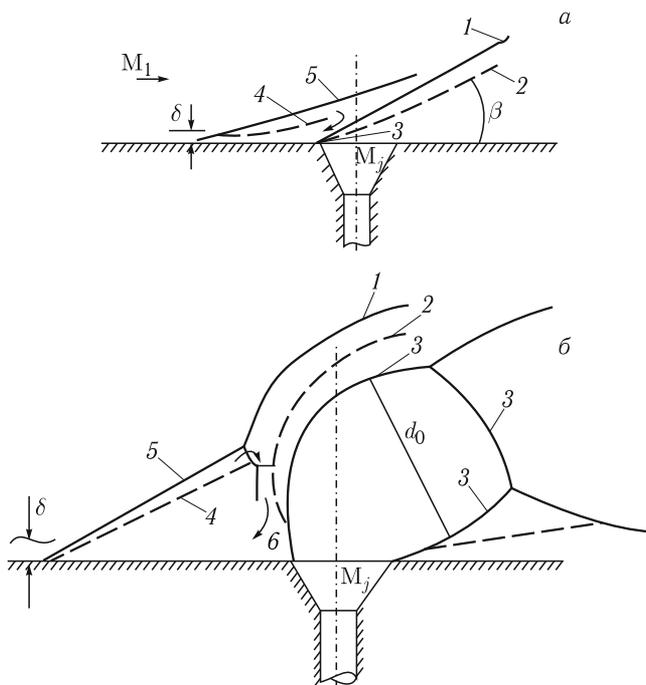


Рис. 6.21. Картина течения при вдувании струи нормально к поверхности: 1 — скачок от струи; 2 — граница струи; 3 — скачки в струе; 4 — область отрыва; 5 — скачок перед отрывной зоной; 6 — высоконапорная струйка

прижимает такую струю к телу. В сверхзвуковой на срезе сопла струе образуется висячий скачок уплотнения, а возникающий в набегающем потоке косой скачок может вызывать отрыв пограничного слоя на теле перед струей. Такое течение аналогично обтеканию выступающего сильно стреловидного цилиндра диаметром d_j [30].

Угол стреловидности $\lambda = \pi/2 - \beta$ (β — угол наклона контактного разрыва, рис. 6.21, а) при гиперзвуковых скоростях в потоке и в струе может быть определен из соотношения $\text{ctg } \lambda \approx \sqrt{N}$, следующего из равенства давлению по обе стороны контактного разрыва при $M_1 \gg 1$, $M_j \gg 1$ (угол $\lambda > 30^\circ$ при $N < 3$). При этом в ламинарном пограничном слое максимум теплового потока $q_{wl \max}$ на теле реализуется сбоку и позади от струи и его величина возрастает с увеличением N . Последнее видно из рис. 6.22, где приведены полученные экспериментально относительные величины $q_{wl \max}/q_{w0}$ на пластине, где q_{w0} — тепловой поток на линии растекания цилиндра диаметром d_j с нулевой стреловидностью, обтекаемого невозмущенным потоком газа. В турбулентном пограничном слое максимальный тепловой поток $q_{wt \max}$ на теле достигается перед струей и резко возрастает уже при $N > 1$. Относительные величины $q_{wl \max}/q_{w0}$ также показаны на рис. 6.22. При $N > 3$ реализуется режим недорасширенной струи (рис. 6.21, б), в струе образуется бочкообразный скачок уплотнения, а в набегающем потоке перед ней — отошедший скачок, вызывающий отрыв пограничного слоя на теле. Картина течения в этом случае близка к той, которая возникает при обтекании цилиндрического выступа с эффективными высотой $h \approx d_j \sqrt{N}$ и диаметром $d_0 \approx d_j \sqrt{N}$.

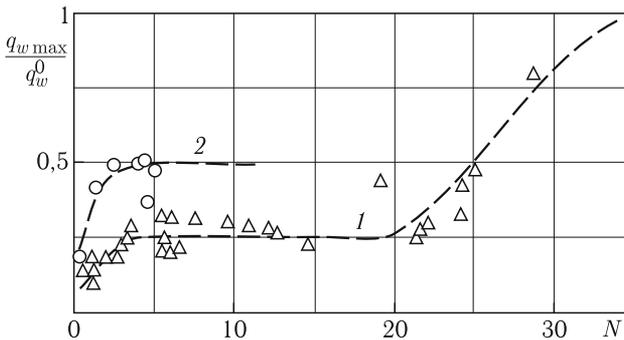


Рис. 6.22. Максимальный тепловой поток на теле в окрестности поперечной струи [30]: 1 — ламинарный пограничный слой; 2 — турбулентный пограничный слой; о, Δ — эксперимент

Максимальный тепловой поток на теле реализуется в зоне перед струей и слабо зависит от N . При турбулентном режиме в исследованном диапазоне чисел Re он примерно вдвое больше, чем в ламинарном (рис. 6.22). При дальнейшем росте N (примерно при $N > 20$) имеет

место режим сильно недорасширенной струи, ударная волна перед струей со стороны внешнего потока становится почти прямой. В этом случае при взаимодействии с ней косоугольного скачка, индуцированного отрывом, образуется тройная конфигурация и высоконапорная струйка (как при IV типе взаимодействия скачков, § 6.5), которая частично отклоняется к телу, разгоняется до сверхзвуковых скоростей и образует на нем линию растекания с высоким давлением и тепловым потоком (рис. 6.21, б). При $N \sim 40$ в ламинарном пограничном слое в зоне перед струей $q_{wl \max} \approx q_{w0}$. В целом, как видно, струя оказывает более слабое влияние на течение и теплообмен на пластине, чем цилиндрический выступ, диаметр которого равен диаметру среза сопла d_j . Это обусловлено тем, что диаметр струи, а вместе с ним диаметр эквивалентного выступа $d_0 \sim \sqrt{N} d_j \gg d_j$ при больших N .

Во всех случаях, когда температура торможения струи T_{0j} отличается от температуры торможения набегающего потока T_{00} , теплообмен на теле вблизи струи зависит еще от параметра $t_j = T_{0j}/T_{00}$, так как вследствие смещения набегающего и вдуваемого потоков высоконапорная струйка, приходящая на линию растекания на теле, имеет некоторую промежуточную температуру торможения. С ростом t_j коэффициент теплообмена α/c_p на линии растекания возрастает. Согласно данным работы [30] при $t_j > t_w$ имеем независимо от режима течения в пограничном слое

$$\frac{\alpha/c_p}{(\alpha/c_p)_*} \approx 1 + 1,5 \frac{t_j - t_w}{1 - t_w}, \quad (6.2.5)$$

где $(\alpha/c_p)_*$ — коэффициент теплообмена на линии растекания перед струей при $t_j = t_w$. Как видно, при увеличении температуры торможения струи T_{0j} от T_w до T_{00} коэффициент теплообмена возрастает примерно в 2,5 раза, что согласуется с экспериментальными данными.

Среди широкого многообразия отрывных течений перед выступами, размеры которых велики по сравнению с толщиной пограничного слоя на поверхности тела, в заключение отметим также аэродинамический руль. Отклонение плоскости руля даже на небольшой угол β относительно невозмущенного потока перед рулем приводит к тому, что косоугольный скачок перед ним отрывает пограничный слой. В случае турбулентного пограничного слоя это имеет место при $M_1 \beta_{кр} = 0,3$ [225], где β измеряется в радианах. В случае ламинарного пограничного слоя критерий отрыва не установлен ввиду малости критического угла β . В зоне присоединения пограничного слоя на поверхности пластины у основания руля возникает линия растекания и происходит значительная интенсификация теплообмена. Основным определяющим параметром здесь является $M_{1n} = M_1 \sin \beta_s$ — нормальная к косому скачку составляющая числа Маха в потоке перед рулем. При этом в случае турбулентного отрыва максимальную величину теплового потока $q_{wt \max}$ на линии растекания (ее угол наклона к набегающему

поток $\beta_p \approx \beta + 0,25(\beta_s - \beta)$ можно оценить с помощью соотношения

$$\frac{q_{wt \max}}{q_1} \approx A(M_{1n} - 1) + 0,75, \quad (6.2.6)$$

где q_1 — тепловой поток на пластине перед рулем в невозмущенном потоке; A — параметр, который зависит от соотношения между длиной l вдоль руля и толщиной пограничного слоя δ , причем, при $l/\delta \sim 5 \dots 100$ величина $A \approx 4 \dots 5$.

§ 6.3. О теплообмене на передних стреловидных притупленных кромках элементов, выступающих в пограничный слой

Пусть выступающий элемент, установленный на поверхности тела и обтекаемый сверхзвуковым (в своей невязкой части) потоком газа, имеет высоту $h \leq \delta$ (δ — толщина набегающего пограничного слоя). Характерный угол стреловидности $\lambda = \pi/2 - \theta$ передней кромки (где θ — угол ее наклона) пусть будет достаточно большим, чтобы перед выступающим элементом не образовалась развитая отрывная зона. Согласно рис. 6.15 это имеет место, если $\lambda \geq 50^\circ$ (или $\theta \leq 40^\circ$). При этом отрыв, если и возникает, носит локальный характер, занимая область, длина которой значительно меньше δ . Примем далее, что толщина выступа d такова, что течение около его передней кромки носит, в основном, плоский характер, для этого необходимо, чтобы $d > 2h/(M_2 \sin \theta)$, где M_2 — характерное число Маха потока вдоль кромки.

При сделанных допущениях тепловой поток q_w на передней части выступа можно оценивать, оставаясь в рамках метода эффективной длины, т. е. исходя из того, что вдоль передней кромки продолжает развиваться набегающий на выступ пограничный слой, испытывающий внезапное повышение давления. При этом тепловой поток q_w , как отмечено выше, изменяется пропорционально pu_δ , где p — местное давление, u_δ — скорость газа на внешней границе пограничного слоя.

Таким образом, с ростом давления тепловой поток на кромке возрастает в несколько меньшей степени, чем давление. Присутствие местной скорости u_δ в оценке $q \sim pu_\delta$ затрудняет использование этого соотношения. В этой связи отметим, что в изоэнтропическом потоке с хорошей точностью $pu \sim p^{0,9}$, во всяком случае при $M_1 \sim 1,5 \dots 7$, в рассматриваемом же случае ввиду потерь полного давления во внутреннем скачке уплотнения перед кромкой зависимость pu_δ от p должна быть несколько менее сильная. Эти соображения позволяют рассчитывать на то, что на передних кромках должна иметь место сравнительно простая связь между давлением и тепловым потоком, вид которой можно уточнить на основе анализа экспериментальных данных. На рисунках 6.23 и 6.24 приведены экспериментальные данные по распределению давления и тепловых потоков на передних кромках

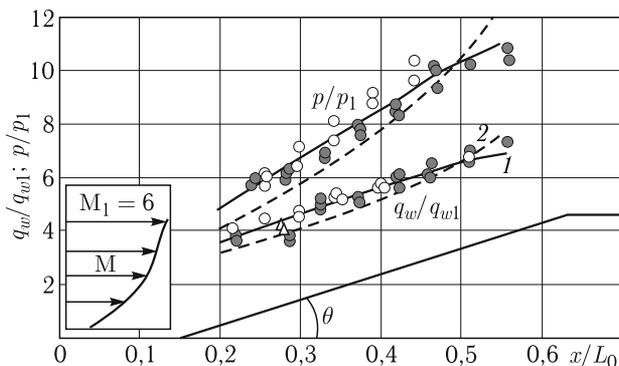


Рис. 6.23. Распределение давления и тепловых потоков на передних кромках выступов ($M_1 = 6$, $\theta = 25^\circ$, $p_0 = 30$ атм, Δ — $h = 15$ мм, \circ — $h = 30$ мм, \bullet — $h = 45$ мм). 1 — расчет по формуле (6.3.1) с использованием осредненного распределения давления; 2 — расчет по формулам (6.3.1), (6.3.2)

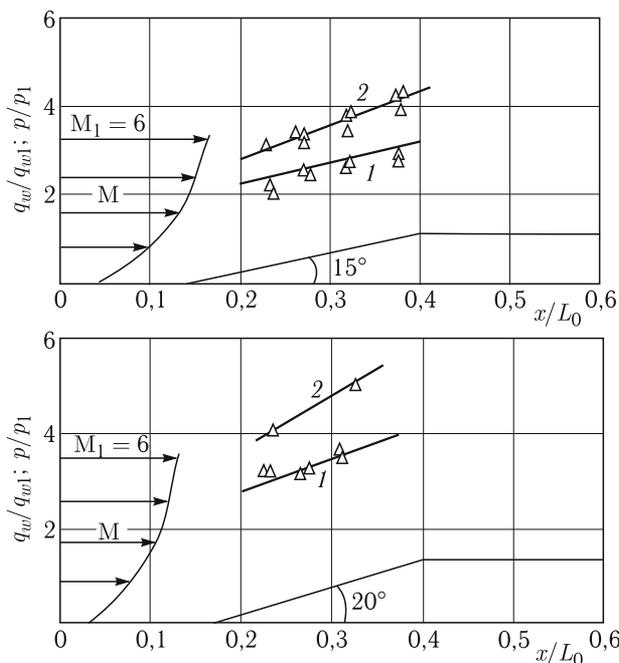


Рис. 6.24. Распределение давления и тепловых потоков на передних кромках выступов: 1 — расчет q_{wt} по формуле (6.3.1) с использованием осредненного распределения давления; 2 — осредненное распределение давления, Δ — эксперимент

выступов рассматриваемого вида. Модели устанавливались на стенку, являющуюся продолжением сопла аэродинамической трубы, и обтекались толстым турбулентным пограничным слоем совершенного газа ($\gamma = 1,4$, $M_1 = 6$, $Re_1 = \rho_1 u_1 / \mu_1 = 3 \cdot 10^7 \dots 7 \cdot 10^7$ 1/м, $\delta = 38$ мм, $t_w = 0,6$). На рис. 6.23 показана полоса разброса измерений давления p/p_1 на кромках выступов с углом $\theta = 25^\circ$ и высотой $h = 15 \dots 45$ мм при указанных условиях. Там же показаны замеренные значения относительного теплового потока на этих кромках. Аналогичные данные при $h = 15$ мм, $\theta = 15^\circ$ и $\theta = 20^\circ$ показаны на рис. 6.24. Рассмотрение этих данных показывает, что во всех случаях имеем [14]

$$\frac{q_w}{q_{w_1}} \approx \left(\frac{p}{p_1} \right)^{0,8}. \quad (6.3.1)$$

Оценки тепловых потоков по этой зависимости с использованием усредненной кривой для давления показаны на рисунках 6.23 и 6.24 (кривая 1). Это позволяет свести задачу определения тепловых потоков на кромках подобных выступов к задаче определения давления на них. Поскольку при сверхзвуковых скоростях обтекания давление на теле носит в целом ньютоновский характер, определяясь, главным образом, местными параметрами набегающего потока и углом наклона тела θ к нему [118, 170], то в случае безотрывного обтекания выступа сверхзвуковым пограничным слоем надежные оценки давления на кромке не представляют больших затруднений.

Профиль числа Маха $M(y)$ по толщине набегающего пограничного слоя для условий указанных выше испытаний, рассчитанный с использованием степенного профиля скорости $u/u_{\delta 1} = (y/\delta)^{1/7}$ и интеграла Крокко, показан также на рис. 6.23 и 6.24. Как видно, вне узкой пристеночной области течение в пограничном слое является существенно сверхзвуковым, что позволяет оценивать давление на кромке по простейшим локальным соотношениям. В частности, согласно методу местных клиньев имеем [166, 170]

$$\frac{p}{p_1} = 1 + \gamma M^2 \theta^2 \left[\frac{\gamma + 1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 + \frac{1}{M^2 \theta^2}} \right]. \quad (6.3.2)$$

Результаты оценок давления на кромках выступов с углом $\theta = 25^\circ$ с использованием этой зависимости показаны на рис. 6.23 пунктиром и, как видно, удовлетворительно согласуются с экспериментом. Там же показаны результаты пересчета тепловых потоков согласно (6.3.1) по давлению (6.3.2), также находящиеся в удовлетворительном (с учетом приближенного знания профиля числа Маха в пограничном слое) согласии с экспериментом. При больших углах наклона θ передней кромки и соответственно малых углах стреловидности λ к набегающему потоку перед выступом высотой $h \leq \delta$ возникает локальная зона отрыва длиной $l \leq 2\delta$, а на кромке образуется точка растекания. В этом случае тепловое воздействие потока на выступ значительно больше.

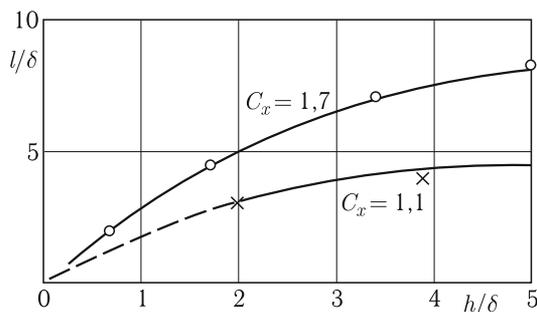


Рис. 6.25. Длина зоны отрыва перед выступом, обтекаемым турбулентным пограничным слоем ($\lambda = 0$)

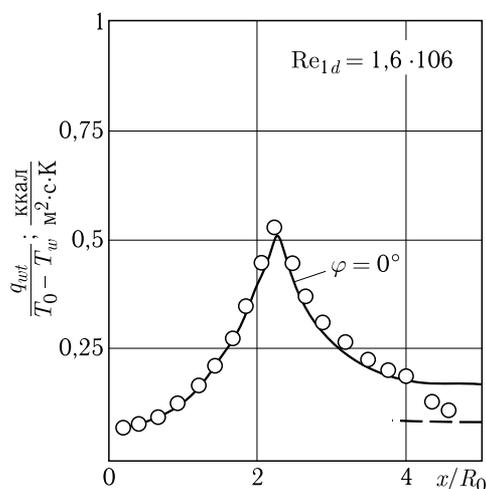


Рис. 6.26. Распределение коэффициента теплообмена на плоской передней кромке ($\lambda = 0$, $M_\infty = 6$)

На рис. 6.25 показаны соответствующие экспериментальные данные по длине зоны отрыва при $\lambda = 0^\circ$, полученные в случае турбулентного пограничного слоя. На рис. 6.26 показано распределение коэффициента теплообмена α/c_p вдоль выступа с плоской передней кромкой при $\lambda = 0^\circ$. Сплошная кривая на рис. 6.26 — расчет теплообмена с учетом влияния внешней турбулентности по методу работы [93]. Для условий, приведенных на рис. 6.26, это влияние повышает теплообмен примерно вдвое. Пунктиром на рис. 6.26 показан уровень теплообмена на кромке при ее обтекании невозмущенным потоком.

Влияние высоты выступа h и угла стреловидности λ на максимальный тепловой поток $q_{w \max}$ на плоской кромке показано на рис. 6.27.

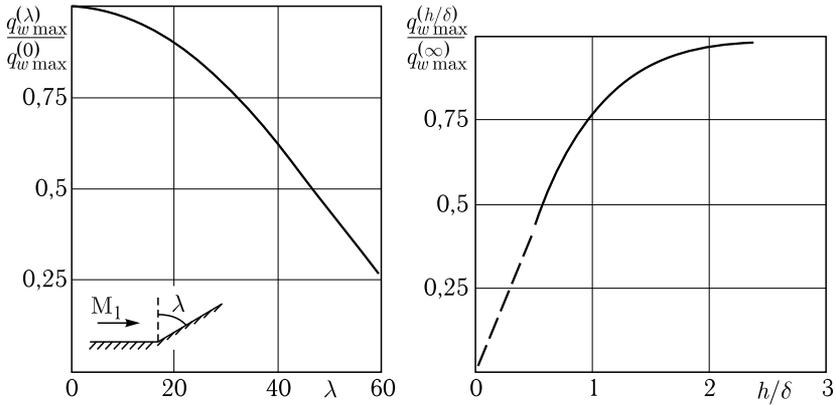


Рис. 6.27. Влияние высоты h выступа и угла стреловидности λ на максимальный тепловой поток

При $h < \delta$ и при $\lambda = 20^\circ$ величина $q_{w \max}$ резко уменьшается с уменьшением h и ростом λ .

§ 6.4. Течение и теплообмен на длинной приглушенной стреловидной кромке

Как отмечалось, с увеличением угла стреловидности λ передней кромки выступающего элемента отрывная зона перед ним резко сокращается и уменьшается ее влияние на теплообмен на выступе. Поэтому, исследуя течение и теплообмен на достаточно длинной стреловидной передней кромке руля, стабилизатора, крыла и т. п. ($L \gg d$, $\lambda \geq 30 \dots 45^\circ$), влиянием отрыва вдали от основания кромки (при $x \gg d$, где x — расстояние вдоль выступа) можно пренебрегать. Это можно показать следующим образом.

Рассмотрим полубесконечный цилиндр постоянного радиуса r_0 , установленный в гиперзвуковом однородном потоке под углом стреловидности λ . Интенсивное окружное растекание потока в ударном слое перед ним приводит к тому, что течение между телом и скачком в некотором поперечном сечении $x = x_0$ зависит от условий вверх по потоку на расстоянии не более $l \sim \frac{N \operatorname{tg} \lambda}{\sqrt{2k}} r_0$, где $N \approx 3 \dots 4$, от сечения x_0 [75, 118] ($k \ll 1$ отношение плотностей в невозмущенном потоке и за скачком). Дело в том, что линии тока, входящие в ударный слой в сечениях $x < x_0 - l$, в сечении x_0 сосредоточены уже в очень тонком пристеночном слое, а вместе с ними теряется и становится несущественной предыстория течения, в связи с чем локально течение будет подобно тому, которое реализуется в ударном слое при обтекании бесконечного цилиндра.

Что касается теплообмена, то для подобного вывода необходимо убедиться в том, что эффективные длины x_i и тепловые потоки q_{wi} также близки к соответствующим величинам на бесконечном цилиндре. Вблизи линии растекания имеем

$$u = u_0 \approx \text{const}, \quad p \approx p_0(1 - \varphi^2), \quad v \ll u_0, \quad w = \beta r_0 \varphi,$$

где u, v, w — продольная, поперечная и окружная (по φ) компоненты скорости, p — давление.

Из уравнения движения в окружном направлении вдоль линии растекания ($\varphi = 0$) можно получить [75]:

$$f = \frac{1}{ur_0} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\beta}{u_0} = a \frac{e^{2ax} - b}{e^{2ax} + b}; \tag{6.4.1}$$

$$a = \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{2p_0}{\rho_\delta r_0^2}} \approx \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{1}{M_\delta r_0}; \quad b = \frac{a - f_0}{a + f_0},$$

где f_0 — начальное (при $x = 0$) значение параметра растекания, $0 < a < b < 1$.

При этом в соответствии с (3.1.4) получаем следующее соотношение для расчета радиуса эквивалентного тела вращения вдоль линии растекания (c — константа интегрирования):

$$r_{\text{ef}} = c(e^{ax} + b e^{-ax}), \quad c = r_{\text{ef}}(0)/(1 + b). \tag{6.4.2}$$

Тогда, например, при ламинарном режиме пограничного слоя эффективная длина x_l равна (здесь $x_l(0)$ учитывает в общем случае влияние и толщину предшествующего (например, на фюзеляже) пограничного слоя)

$$x_l = x_l(0) \frac{r_{\text{ef}}^2(0)}{r_{\text{ef}}^2} + \int_0^x r_{\text{ef}}^2 dx / r_{\text{ef}}^2 =$$

$$= \frac{1}{2a} \frac{x_l(0)(1 + b)^2 + e^{2ax} - 1 + 4abx + b^2(1 - e^{-2ax})}{e^{2ax} + 2b + b^2 e^{-2ax}}. \tag{6.4.3}$$

При $x \rightarrow \infty$ имеем $x_l \rightarrow 1/(2a) = x_{l\infty}$. Важно, что эта асимптотика практически достигается при $ax \geq 2$ (рис. 6.28), т.е. при $x \geq 2\sqrt{\gamma/2} M_\delta r_0$, что примерно вдвое меньше области влияния предшествующего невязкого потока $l \sim 4(\text{tg } \lambda/\sqrt{2k})r_0$, так как $M_\delta \approx \text{tg } \lambda/\sqrt{\gamma k}$.

Таким образом, если длина цилиндрической кромки $L \gg l$, то тепловой поток вдоль ее линии растекания может рассчитываться по соотношениям гл. 5 для бесконечного цилиндра всюду, кроме передней части длиной порядка l , где необходимо учитывать предысторию пограничного слоя.

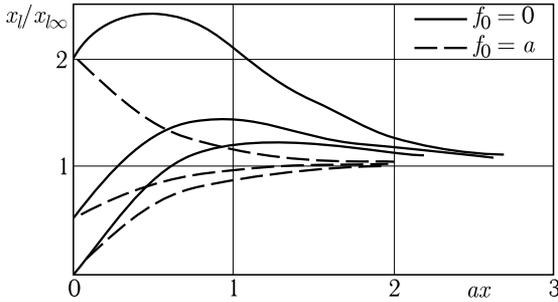


Рис. 6.28. Влияние начальной толщины ламинарного пограничного слоя на эффективную длину на стреловидном цилиндре

Передние стреловидные кромки аэродинамических органов управления гиперзвукового летательного аппарата относятся к наиболее теплонапряженным элементам его конструкции. Обычно они обтекаются сверхзвуковым потоком газа, который характеризуется существенной неоднородностью параметров, порождаемой энтропийными градиентами за искривленной головной ударной волной. Эти градиенты и растекание газа в тонком сжатом слое около кромки обуславливают важную физическую особенность течения — значительную завихренность невязкого потока в пристеночной зоне [75, 121]. Поэтому, определяя аэродинамический нагрев кромок при конечных, но достаточно больших числах Рейнольдса $Re \gg 1$, необходимо учитывать перепад параметров невязкого потока на конечной толщине пограничного слоя, являющийся причиной изменения параметров вдоль границы пограничного слоя в процессе поглощения им внешнего потока. Таким образом, возникает типичная задача вихревого взаимодействия.

Общий метод расчета теплообмена в таких пространственных течениях требует довольно подробного задания параметров невязкого потока, так как в отличие от традиционной постановки задачи, когда необходимо знать лишь параметры невязкого течения на поверхности тела, здесь должны быть известны их распределения поперек ударного слоя около кромки. Для окрестности плоскости растекания кромки предложенный в работах [75, 121] приближенный метод расчета невязкого потока имеет удовлетворительную точность при умеренной стреловидности кромки. Это делает естественным объединение обоих методов в единый вычислительный алгоритм, позволяющий маршевым образом в направлении x вдоль кромки вести одновременный расчет течения в сжатом слое и теплообмена на линии растекания кромки. При этом трехмерная задача о теплообмене вдоль линии растекания сводится к эквивалентной осесимметричной задаче для эффективного тела, радиус поперечного сечения которого $r_{\text{ef}}(x)$ определяется через параметр среднемассового растекания Q_0 невязкого потока на толщине

пограничного слоя с помощью соотношений

$$d \ln r_{\text{ef}} = Q_0 dx; \quad Q_0 = \frac{1}{\psi_\delta} \int_0^{\psi_\delta} Q^{(0)} d\psi; \quad \psi_\delta(x) = \psi(x); \quad (6.4.4)$$

$$Q^{(0)} = \left(\frac{1}{u^{(0)}} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} \right)_{z=0}; \quad \psi = \int_0^y \rho^{(0)} u^{(0)} h dy,$$

где верхний индекс (0) относится к параметрам невязкого потока, ψ — расход, y — расстояние от тела по нормали.

Расход ψ_δ через пограничный слой и тепловой поток на стенке q_w рассчитываем по соотношениям метода эффективной длины, используя в качестве параметров на внешней границе пограничного слоя их среднемассовые значения u_0 , ρ_0 и др. При расчете эффективной длины $x_i = \xi_i / F_i$ ($i = l$ или t для ламинарного и турбулентного режима) вдоль кромки имеем

$$\xi_i = \int_0^x F_i dx + \xi_{i0}, \quad (6.4.5)$$

$$F_l = \rho_0 \mu_0 u_0 r_{\text{ef}}^2, \quad F_t = \rho_* u_0 \mu_*^{1/4} \left(\frac{H_{\text{et}} - h_w}{H_\infty - h_w} \right)^{5/4} r_{\text{ef}}^{5/4}.$$

Параметр ξ_{i0} учитывает влияние предыстории пограничного слоя на фюзеляже на теплообмен вдоль кромки и определяется условием непрерывности в начальной точке кромки $x = 0$ расхода $\psi_{\delta_i} \sim \xi_i^{m_i}$ через пограничный слой. Заметим, что при этом интегральным образом учитывается и влияние на теплообмен вдоль кромки возможного локального отрыва на фюзеляже перед выступающим элементом, когда потерями тепла внутри достаточно короткой отрывной зоны можно пренебречь. В самом деле, интегральное уравнение энергии имеет вид

$$\frac{d}{ds} \rho_\delta u_\delta (H_\delta - h_w) r_{\text{ef}}^\nu \Theta = r_{\text{ef}}^\nu q_w, \quad (6.4.6)$$

где Θ — толщина потери энергии в зоне отрыва (от точки отрыва s_1 до точки присоединения s_2). Пренебрегая потерями тепла в зоне отрыва, получим

$$(\rho_\delta u_\delta r^\nu \Theta)_1 = (\rho_\delta u_\delta r^\nu \Theta)_2. \quad (6.4.7)$$

Отсюда, используя соотношения метода эффективной длины, имеем $\xi_{i1} = \xi_{i2} = \xi_{i0}$. Специального рассмотрения и обоснования требует возможность применения метода эффективной длины к расчету теплообмена вдоль кромки в связи с тем, что обычно вдоль нее существует (и часто значительный) положительный градиент давления, обусловленный ростом скоростного напора в возмущенном потоке перед кромкой от фюзеляжа к головному скачку.

В работах [58, 84] показано, что вихревое взаимодействие пограничного слоя с вязким потоком, сопровождающееся значительным ростом полного давления на внешней границе погранслоя, существенно повышает его способность преодолевать большие повышения давления вниз по потоку. Этот эффект особенно проявляется на кромке, где интенсивное растекание потока способствует быстрому поглощению низконапорной пристеночной части внешнего потока пограничным слоем.

На рис. 6.29 показан результат точного расчета ламинарного пограничного слоя на эффективном осесимметричном теле, эквивалентном некоторой стреловидной цилиндрической кромке в неоднородном сверхзвуковом потоке (для случая, когда головное тело — цилиндр со сферическим носком радиуса $R = 0,1$ м, цилиндрическая кромка радиуса $r_0 = 0,01$ м с углом стреловидности $\lambda = 50^\circ$ установлена на расстоянии $4R$ от передней точки тела; условия обтекания — $H = 60$ км, $U_\infty = 7400$ м/с, равновесный воздух). Влияние вихревого взаимодействия учитывается по методу [130]. При этом обеспечивается гладкое (по расходу ψ , определяемому соотношением (6.4.4)) сопряжение решения в пограничном слое с внешним завихренным потоком с из-

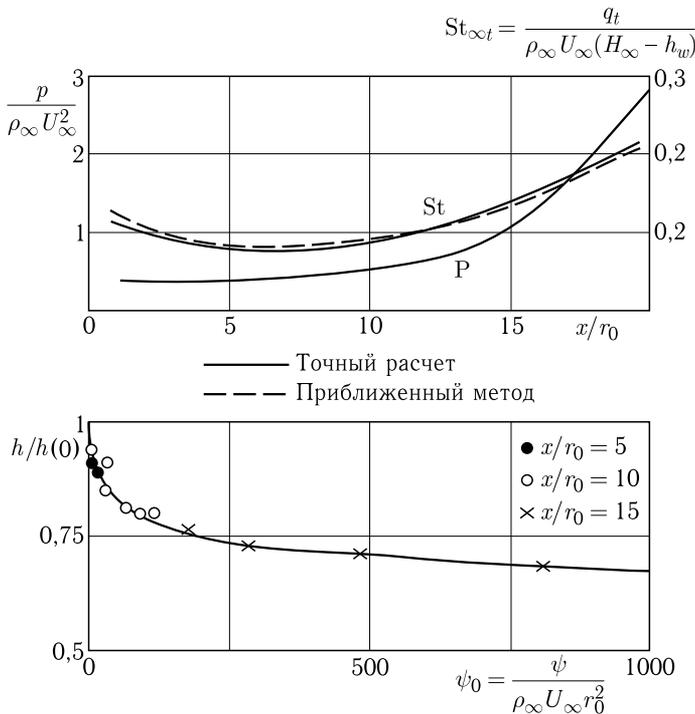


Рис. 6.29

вестным распределением энтальпии $h(\psi) = h(0)f(\psi)$. Анализ расчетов полей течения в плоскости растекания кромки показывает, что распределение $h/h(0)$ поперек ударного слоя, в самом деле, практически не зависит от x (рис. 6.29). На рис. 6.29 показан также результат расчета теплообмена на кромке по предлагаемому методу. Хорошее согласие результатов свидетельствует о применимости развитого подхода.

При турбулентном режиме теплообмен вообще в меньшей степени зависит от градиента давления, а значительно более интенсивное поглощение пограничным слоем внешнего потока обеспечивает возможность более широкого применения соотношений метода эффективной длины.

Экспериментальная проверка предложенного метода расчета теплообмена на кромках представлена на рис. 6.30 при ламинарном (*a* — $M_\infty = 5,96$; $Re_{\infty r_0} = 1,6 \cdot 10^5$; $t_w = 0,6$; головное тело — цилиндр со сферическим носком радиуса $R = 2,2 r_0$, $\lambda = 45^\circ$, кромка установлена на расстоянии $5R$ от передней точки тела) и турбулентном (*б* — $M_\infty = 5,96$; $Re_{\infty r_0} = 5,8 \cdot 10^5$; $t_w = 0,635$; головное тело — конус с полууглом $\theta = 15^\circ$ и сферическим носком радиуса $R = 1,5 r_0$, $\lambda = 60^\circ$, расстояние до кромки от передней точки тела $5R$) режимах теплообмена. Отличия расчетных и экспериментальных данных находятся в пределах точности эксперимента.

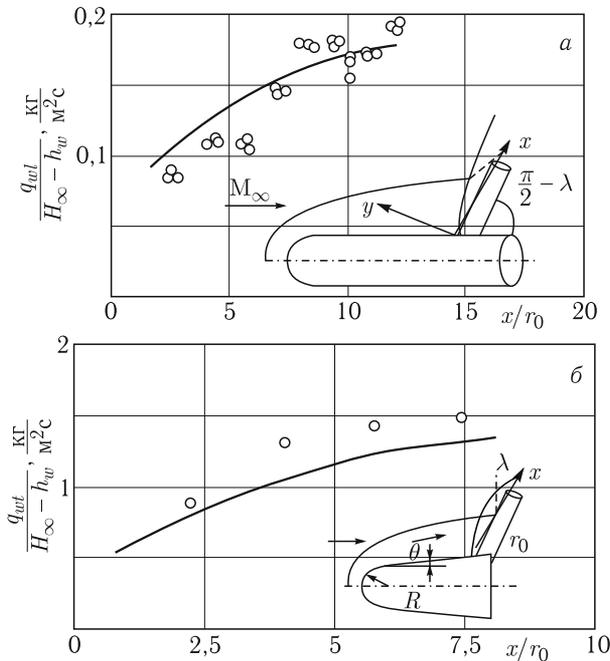


Рис. 6.30

Сочетая простоту и достаточную для инженерных целей точность, предложенные методы расчета обтекания и теплообмена на передних кромках умеренной стреловидности объединены в единый алгоритм, реализованный в программе [85]. Входными данными при этом являются параметры невозмущенного потока, распределения параметров неоднородного вязкого потока перед кромкой, определяемые из точных численных расчетов обтекания фюзеляжа (например, [12]), форма кромки, температурный фактор. Расчет поля течения в сжатом слое и теплообмена на кромке ведется одновременно маршевым образом вдоль кромки, начиная с некоторого сечения $x^{(0)} = \Delta x$ вблизи начала кромки, где влияние предшествующего пограничного слоя на фюзеляже задается параметром ξ_{i0} , а вязкое течение носит локально плоский характер (в частности, отход скачка $\Delta y = k_0 \operatorname{tg} \theta \Delta x$, как на клине).

Приведем и вкратце проанализируем результаты расчетов теплообмена на цилиндрических стреловидных кромках. В качестве головного тела рассмотрим затупленный по сфере цилиндр радиусом R , на котором кромки устанавливались на фиксированном расстоянии $4R$ от передней точки тела.

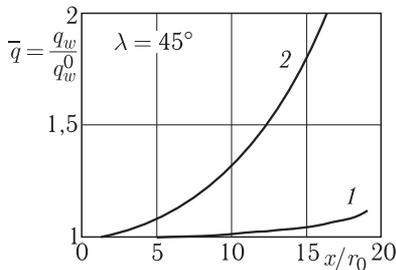


Рис. 6.31

На рис. 6.31 показано влияние вихревого взаимодействия на ламинарный (1 — $H = 60$ км; $U_\infty = 7400$ м/с) и турбулентный (2 — $H = 30$ км, $U_\infty = 7400$ м/с) теплообмен на кромке с углом стреловидности $\lambda = 45^\circ$ при $r_0 = 0,1 R = 0,01$ м (где $\bar{q} = q_w/q_w^0$, q_w^0 — тепловой поток, рассчитанный по вязким параметрам на теле). Как видно, в области падения на кромку головного скачка ($x/r_0 \sim 20$) при турбулентном режиме рассматриваемый эффект достигает двух раз, тогда как при ламинарном режиме он относительно мал и не превосходит $\sim 20\%$.

Это обстоятельство обусловлено значительно большими расходами газа через турбулентный пограничный слой и делает особенно актуальным учет влияния вихревого взаимодействия на турбулентный теплообмен на кромках.

Влияние радиуса скругления кромок r_0 (при фиксированном R) и радиуса носового затупления головного тела R (при неизменном отношении $r_0/R = 0,1$) на турбулентный тепловой поток $q_{wt} = \rho_\infty U_\infty (H_\infty - h_w) St_{\infty t}$ (где $St_{\infty t}$ — число Стантона) вдоль кромки с $\lambda = 45^\circ$ при той же геометрии (головное тело — цилиндр, кромка устанавливалась на расстоянии $4R$ от передней точки) показано на рис. 6.32 (равновесно-диссоциирующий воздух, $H = 30$ км, $U_\infty = 7400$ м/с, $t_w = 0,1$).

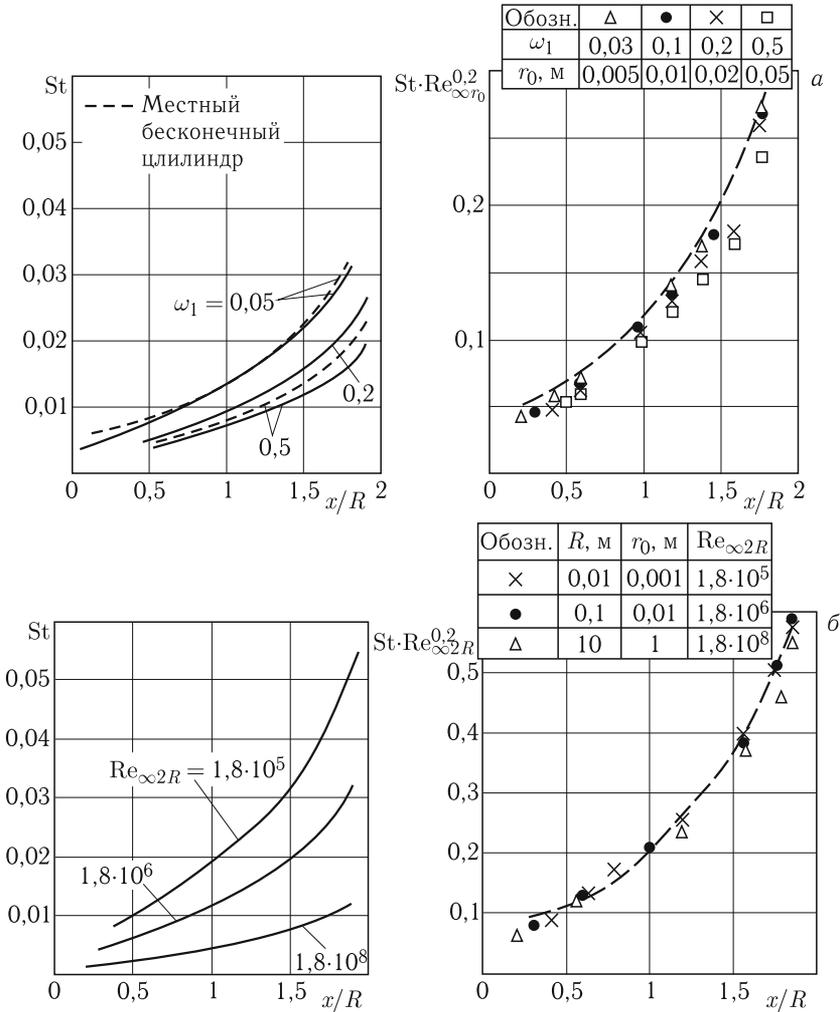


Рис. 6.32

С уменьшением параметра $\omega_1 = r_0 \sin \lambda / R$, который определяет структуру течения в ударном слое около кромки (здесь за масштаб собственной поперечной неоднородности потока перед кромкой L_0 принимаем R), в фиксированной точке кромки тепловой поток возрастает и при $\omega_1 \rightarrow 0$ приближается к тепловому потоку на бесконечном цилиндре в однородном потоке с локальными параметрами. При этом уже при $\omega_1 \leq 0,5$ толщина пограничного слоя достаточно велика по сравнению с размером области больших поперечных градиентов параметров в ударном слое и отличия от этого предела не превышают 20%.

Влияние размера R при фиксированном r_0/R (и, следовательно, ω_1), определяющего начальную толщину пограничного слоя на кромке и расход газа через него, оказывается незначительным (при изменении $\text{Re}_{\infty R} = \rho_{\infty} U_{\infty} R / \mu_{\infty}$ в диапазоне $10^5 \dots 10^8$ отличия в величинах $K = \text{St}_{\infty t} \text{Re}_{\infty r_0}^{0,2}$ как видно, не превышают 10%, где $\text{Re}_{\infty r_0} = \rho_{\infty} U_{\infty} r_0 / \mu_{\infty}$). Сравнение с результатами расчетов по невязким параметрам на кромке (штриховая линия на рис. 6.33) показывает, что, действительно, завихренность течения в ударном слое на кромке при реальных значениях ω_1 существенно влияет на турбулентный теплообмен, увеличивая его до двух раз в зоне вблизи падения головного скачка на кромку (цифрами 1–4 помечены результаты расчетов при $\omega_1 = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$).

Этот анализ показывает, что для расчета теплообмена в течениях такого типа можно получить (во всяком случае, при $\omega_1 \leq 0,5$) некоторые общие результаты. С использованием полученных соображений проанализированы результаты систематических расчетов турбулентного теплообмена на линиях растекания стреловидных цилиндрических кромок, установленных на фюзеляже. В качестве фюзеляжа рассматривались затупленные по сфере (радиусом R) конусы (угол полураствора θ_s), обтекаемые под нулевым углом атаки. Расчеты проводились в широком диапазоне изменения определяющих параметров: $U_{\infty} = 1800 \dots 7500$ м/с; $H = 10 \dots 30$ км; $\text{Re}_{\infty r_0} = 3 \cdot 10^4 \dots 10^6$; $t_w = 0,1 \dots 0,5$, $\lambda = 30 \dots 60^\circ$, $\theta_s = 0 \dots 15^\circ$. Варьировались также положение кромки на конусе и соотношение между r_0 и R , т. е. параметр $\omega_1 = r_0 \sin(\theta_s + \lambda) / R$.

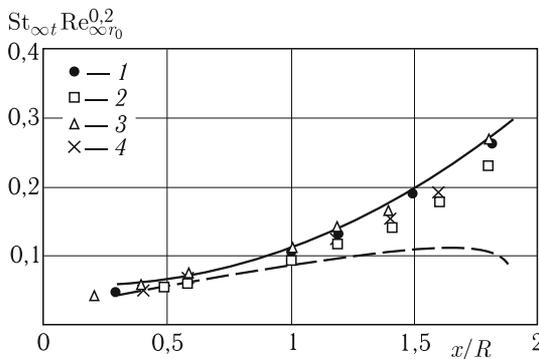


Рис. 6.33. Влияние завихренности на теплообмен цилиндрической кромки: сплошная кривая — с учетом завихренности, штриховая — без учета завихренности

Наличие столь общей корреляционной зависимости, основанной лишь на знании местных газодинамических параметров в потоке перед кромкой, весьма полезно, учитывая большое разнообразие рассматриваемых течений.

§ 6.5. Течение и теплообмен в зоне взаимодействия ударных волн на выступающих элементах

Важной особенностью обтекания типичных крылатых ЛА является взаимодействие головного скачка со скачками, образующимися перед кромкой крыла. Положение этой зоны на крыле и интенсивность взаимодействующих скачков зависят от условий обтекания, прежде всего от числа M_∞ , угла атаки α , угла стреловидности передней кромки λ_0 .

Эта ситуация типична для форм аппаратов с выступающими за пределы основного ударного слоя элементами конструкции. Взаимодействие скачков уплотнения в области падения на кромку выступающего элемента головной ударной волны (рис. 6.35) часто приводит к возникновению на нем локальных зон повышенных давлений и тепловых потоков, уровни которых существенно превышают значения на изолированной кромке и зависят от реализуемой картины взаимодействия и от числа Маха M_1 набегающего потока [160, 166].

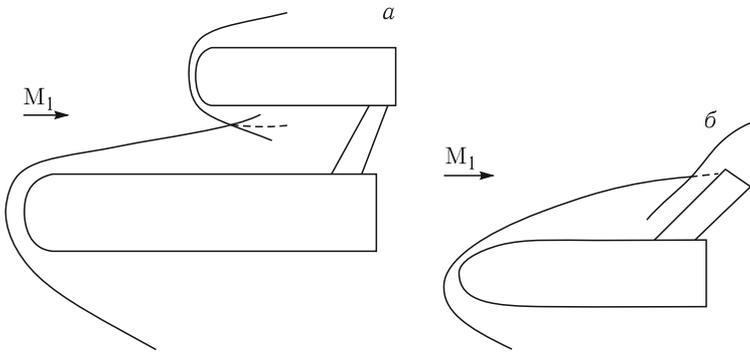


Рис. 6.35

Согласно работе [178] можно выделить 6 типов интерференции ударных волн, показанных на рис. 6.36 (сплошными линиями изображены ударные волны, штриховыми — контактные разрывы). Первые три типа относятся к случаю взаимодействия ударных волн разных направлений, отклоняющих поток в разные стороны (рис. 6.35, *a*), а последние три — к случаю взаимодействия ударных волн одного направления (рис. 6.35, *б*). При взаимодействии двух слабых скачков OA и AC , принадлежащих различным семействам, реализуется I тип (рис. 6.36, *a*). Максимум давления и теплового потока определяется

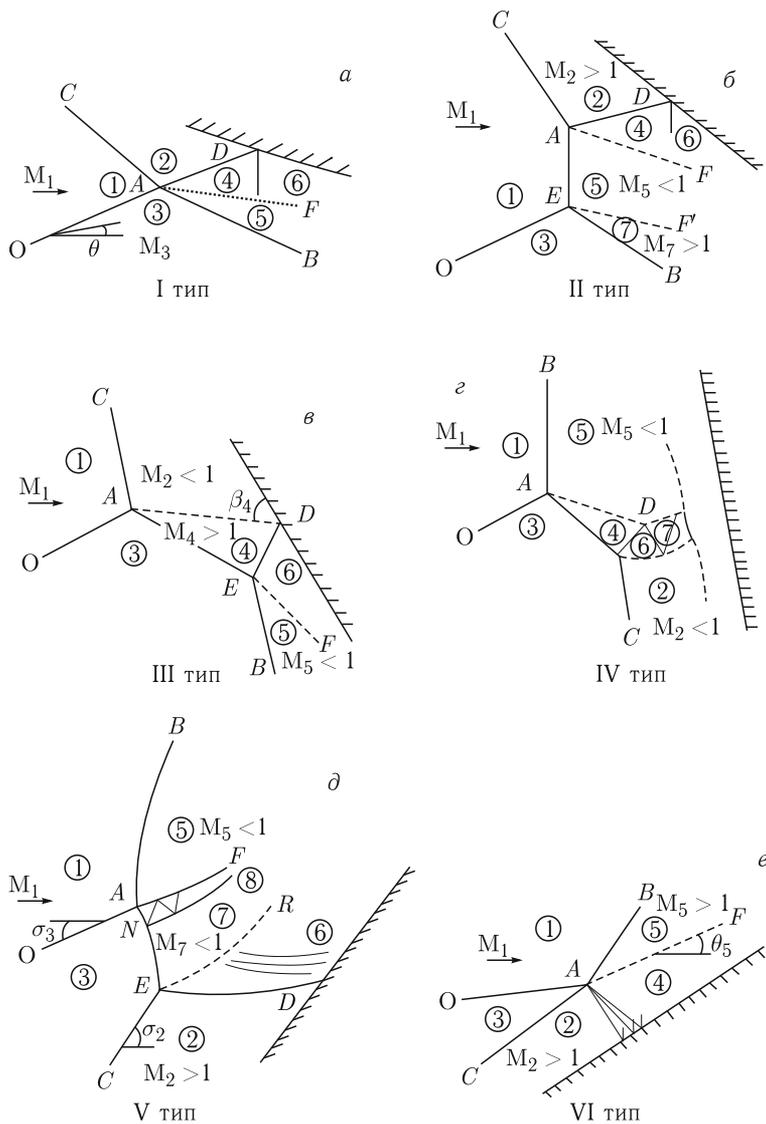


Рис. 6.36

падением внутреннего скачка AD на стенку. Течение за взаимодействующими скачками и результирующим скачком AB в этом случае сверхзвуковое. Поэтому, зная интенсивности скачков OA и AC , можно с помощью соотношений Рэнкина–Гюгонно рассчитать всю волновую картину. Замыкающим условием является равенство на контактном

разрыве AF давлений и совпадении направлений векторов скорости. В зависимости от ориентации и интенсивности внутреннего скачка AD он отражается от стенки либо регулярно, либо с образованием маховской конфигурации. В соответствии с этим проводится расчет давления на теле в зоне ⑥.

Максимальный тепловой поток в зоне ⑥ можно оценить с помощью приближенной зависимости

$$\frac{q_{6 \max}}{q_2} = \left(\frac{p_6}{p_2} \right)^n, \quad (6.5.1)$$

где $n = 1,3$ для ламинарного и $n = 0,85$ для турбулентного пограничного слоя. Более высокое значение n в случае ламинарного режима обусловлено переходом пограничного слоя, которым сопровождается его взаимодействием с падающим скачком AD .

На рис. 6.37 приведены характерные распределения давления и теплового потока на клине при I типе интерференции ударных волн. Здесь клин с углом θ_3 — генератор скачка уплотнения, падающего на основной клин с углом θ_2 .

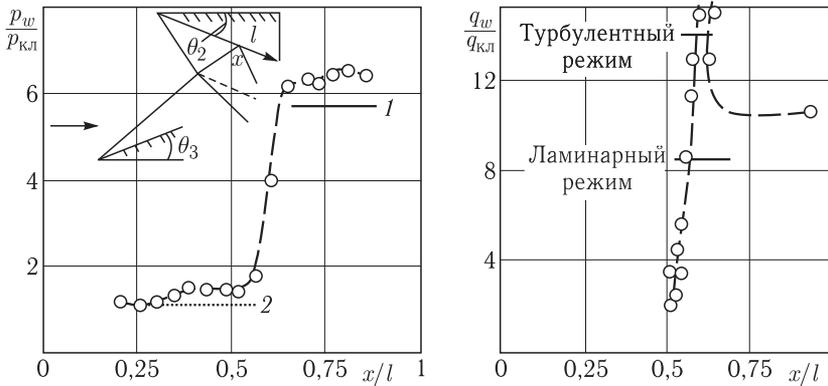


Рис. 6.37. Распределение давления и теплового потока на клине при I типе интерференции ($M_1 = 6$, $Re_{lL} = 1,9 \cdot 10^6$, $\gamma = 1,4$, $\theta_3 = 10^\circ$, $\theta_2 = 15^\circ$) [222]. Сплошная линия (1) — расчет с учетом интерференции; пунктирная (2) — расчет без учета интерференции; \circ — эксперимент

Различие расчетных и экспериментальных величин максимальных давлений и тепловых потоков связано с локальным отрывом пограничного слоя в области падения скачка AD (рис. 6.36,а) на стенку основного клина. Отношения максимальных давлений и тепловых потоков и $q_w/q_{кл}$ растут с увеличением M_1 и θ_3 до тех пор, пока наступает регулярное отражение скачка от стенки (здесь $p_{кл}$ и $q_{кл}$ — давление и тепловой поток на основном клине в отсутствие интерференции скачков). При переходе к маховскому отражению указанные величины

перестают зависеть от θ_3 , и это продолжается до тех пор, пока не происходит переход ко II типу интерференции ударных волн.

При заданном угле наклона падающего (головного) скачка OA и увеличивающемся угле наклона скачка перед телом AC наступает такой момент, когда выполнение замыкающего условия на контактном разрыве AF станет уже невозможным. Произойдет перестройка течения ко II типу взаимодействия (рис. 6.36, б). При этом реализуется маховская конфигурация взаимодействия головного скачка OE и скачка перед телом AC , образуется сильный скачок AE и зона дозвукового течения за ним. Эллиптический характер задачи затрудняет расчет всей области интерференции. Однако при равномерном течении в области ② падающий на тело скачок AD остается практически прямолинейным. Его наклон определяется наклоном скачка AC и может быть рассчитан по соотношениям Рэнкина–Гюнио при замыкающих условиях на контактном разрыве AF , как и в случае I типа интерференции. Отражение скачка AD от стенки может быть и регулярным, и маховским, что определит уровень давления за точкой взаимодействия. Тогда повышение теплового потока в точке D можно также рассчитать по соотношению (6.5.1).

В качестве примера на рис. 6.38 представлены экспериментальные и расчетные данные для II типа интерференции на клине.

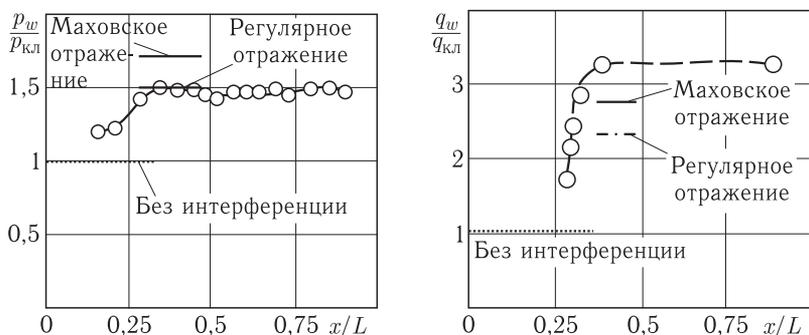


Рис. 6.38. Распределение давления и теплового потока на клине при II типе интерференции ($M_1 = 6$, $Re_{1L} = 1,9 \cdot 10^6$, $\gamma = 1,4$, $\theta_2 = 39,5^\circ$, $\theta_3 = 15^\circ$) [222].
 O — эксперимент

Переход от II типа интерференции скачков к III типу (рис. 6.36, в) осуществляется тогда, когда течение за скачком AC станет дозвуковым. На тело при этом, как показывает эксперимент, обычно падает практически прямолинейный контактный разрыв AD , что вызывает образование скачка DE , необходимого для разворота на угол β_4 сверхзвукового потока из области ④ параллельно стенке в зоне ⑥.

Тройные конфигурации скачков в точках A и E и давление на стенке можно рассчитать по соотношениям на ударной волне. При

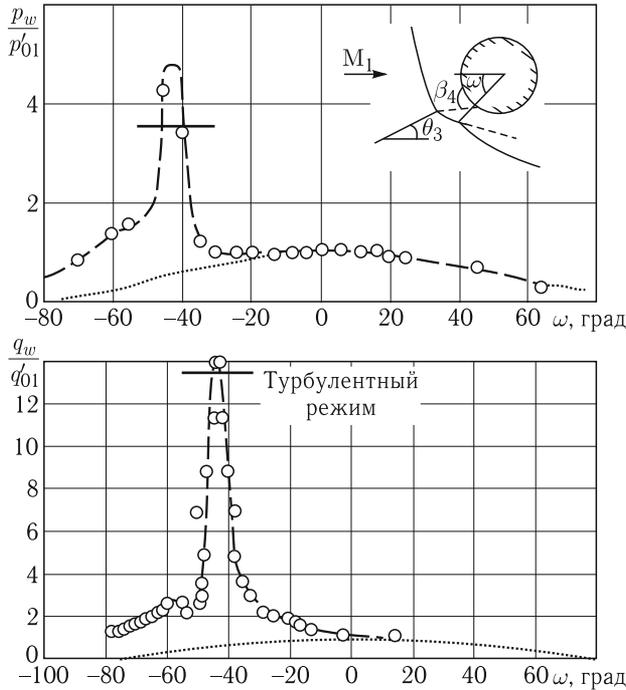


Рис. 6.39. Распределение давления и теплового потока на сфере диаметром $D = 0,025$ м при III типе интерференции ($M_1 = 6$, $Re_{1D} = 1,3 \cdot 10^6$, $\theta_3 = 15^\circ$, $\gamma = 1,4$, $\beta_4 = 36^\circ$); сплошная кривая — расчет с учетом интерференции; пунктирная — расчет без учета интерференции; O — эксперимент

оценке давления в областях ② и ⑤ можно, следуя работе [176], принять скачки CA и EB слабо отличающимися от прямого. Это позволяет обойтись без итераций при расчете тройных точек A и E и в то же время обеспечивает приемлемую точность расчета.

Полученные в эксперименте на примере взаимодействия плоского скачка с ударной волной перед сферой распределения давления и теплового потока, отнесенные к соответствующим величинам в критической точке изолированной сферы, приведены на рис. 6.39 [222].

Отличие расчетного p_{\max} от экспериментального значения составляет 15% и может быть вызвано влиянием вязкости (искривление и размазывание контактного разрыва AF) и трехмерности течения в ударном слое.

На рис. 6.40 (обозначения σ_2 , σ_3 см. на рис. 6.36, д) изображены границы между I и II типами взаимодействия скачков уплотнения (сплошные линии) и между II и III типами (штриховые линии). Кривые 1 и 2 получены соответственно при $M_1 = 5$ и 15 ($\gamma = 1,4$), а кривые 3 — при $M_1 = 15$, $\gamma = 1,2$.

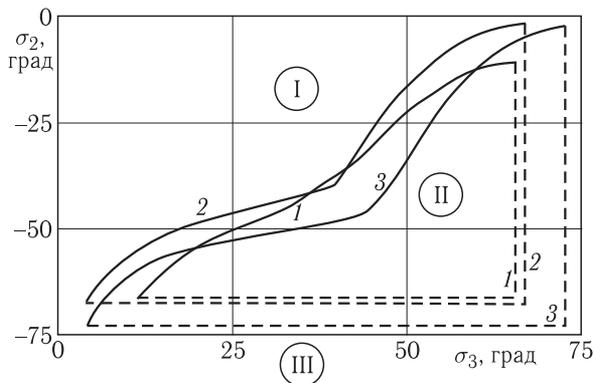


Рис. 6.40. Границы режимов: 1 — $M_\infty = 5, \gamma = 1,4$; 2 — $M_\infty = 15, \gamma = 1,4$; 3 — $M_\infty = 15, \gamma = 1,2$

В случае большой интенсивности скачка AC поток из области ④ (III тип интерференции, рис. 6.36, в) уже не может развернуться в присоединенном скачке ED таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям на стенке. В двумерном случае эта означает, что угол между контактным разрывом AD и касательной к поверхности тела превосходит максимальный угол разворота потока в косом скачке при числе Маха перед скачком, равным M_4 . Произойдет перестройка течения к IV типу (рис. 6.36, г) взаимодействия скачков (в этом случае скачки могут принадлежать как к одному, так и к разным семействам). В результате образуется сложная волновая картина с формированием высоконапорной сверхзвуковой струи ④. В работах [176, 177] исследованы режимы взаимодействия этой струи со стенкой. Струя ④ искривляется под действием значительного перепада давлений в областях ② и ⑤ с радиусом кривизны, обратно пропорциональным разности этих давлений. Искривление струи может оказаться настолько значительным, что она пройдет мимо стенки. Назовем этот режим интерференции скачков IV-а. Максимальное давление на теле при этом близко к давлению торможения за прямым скачком p'_{03} , рассчитанному по параметрам потока в области ③.

В противном случае струя попадает на тело (режим интерференции IV-б), величина максимума давления при этом зависит от угла встречи низкоэнтропийной струи с поверхностью тела и, как правило, лежит в диапазоне от p'_{06} до p'_{07} , что значительно превосходит максимальное давление при IV-а типе взаимодействия скачков, так как потери полного давления в системе косых скачков ④, ⑥, ⑦ намного меньше, чем в прямом скачке ②. Аналогично изменяется и максимальный тепловой поток при переходе от IV-а типа взаимодействия скачков к IV-б типу. Это подтверждается приведенными на рис. 6.41 характерными распределениями давления на прямоугольном торце, установленном пер-

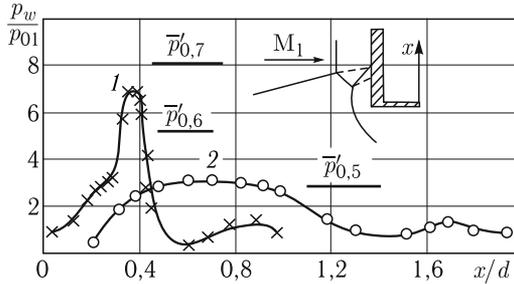


Рис. 6.41. Распределение давления на плоском торце при IV типе интерференции ($M_1 = 6$, $\gamma = 1,4$, $\theta_3 = 16^\circ$)

пендикулярно сверхзвуковому потоку. В зависимости от соотношений высоты и ширины (d) торца происходит искривление низкоэнтропийной струи и она либо попадает на тело (кривая 1), либо проходит мимо (кривая 2, IV-а режим интерференции) [178].

Переход от IV типа взаимодействия к V типу происходит тогда, когда пересекаются скачки одного направления (OA и EC на рис. 6.36, d) и наклон скачка EC таков, что поток за ним становится сверхзвуковым ($M_2 > 1$). Течение за скачком AB остается дозвуковым и давление $p_5 \sim p'_0$. Возникает волновая структура с тремя тройными точками. Ширина низкоэнтропийной струи за скачком AN , как правило, во много раз меньше ширины дозвуковой струи, сформировавшейся за почти прямым для потока ③ скачком NE .

Поскольку $p_2/p_7 < 1$, то в точке E возникает косой скачок уплотнения ED . Обычно считают, что этот скачок остается прямолинейным вплоть до встречи со стенкой, где за точкой его отражения должна, таким образом, возникнуть зона высокого давления ($p_{\max} \sim 10 p_2$), поскольку уже за ED давление $p_7 \sim \rho_3 v_3^2 \sim k^{-1} \rho_1 v_1^2 \sim k^{-1} p'_{01}$, где отношение плотностей $k = \rho_1/\rho_3 \ll 1$ при $M_1 \gg 1$.

В действительности, однако, физическая картина течения в этом случае сложнее [83]. Так как в гиперзвуковом потоке давление p_7 заметно больше p_5 , то струйка ⑧ искривляется под воздействием значительного поперечного перепада давления, а поток в струе ⑦ быстро разгоняется до сверхзвуковых скоростей. Падение давления вдоль контактного разрыва ER индуцирует волну разрежения в области ⑥, которая догоняет и ослабляет скачок ED , снижая, как следствие, давление на теле за точкой отражения скачка ED от стенки. При заданных интенсивностях скачков OA и EC степень этого снижения зависит от отношения h/δ_E где h — расстояние между тройными точками A и E , а δ_E — расстояние от тела до тройной точки E . Расстояние h не может быть определено из локального анализа, а зависит от глобальных свойств течения, содержащего дозвуковые области с присущим им эллиптическим характером передачи возмущений вверх по потоку. Заметим, что при $h/\delta_E \rightarrow 0$ волна разрежения стремится к центриро-

ванной, ее воздействие на скачок CD возрастает и он может перейти в характеристику, при этом исчезает локальное повышение давления на стенке. Слабое возрастание давления на теле в области интерференции происходит и при $h/\delta_E \sim 1$, т.е. вблизи границы между V и IV-а типами взаимодействия, когда число Маха M_2 в области ② лишь незначительно превосходит единицу и перепад давлений в скачке ED стремится к нулю.

При взаимодействии двух слабых скачков одного семейства реализуется наиболее благоприятный в отношении теплообмена VI тип интерференции ударных волн (рис. 6.36, *e*). При этом, как показано в [144], в точке A возникает, как правило, центрированная волна разрежения. Исключение составляют течения с $M_1 \sim 2$ (при $\gamma = 1,4$), а при больших числах Маха — также течения с относительно сильным головным и слабым внутренним скачками, когда вместо волны разрежения в точке A возникает скачок малой интенсивности, максимальный перепад давления в котором не превосходит 10%.

Таким образом, в обоих случаях при VI типе интерференции скачков давление и вместе с ним тепловой поток на теле находятся на уровне (или ниже) соответствующих величин перед зоной интерференции в области ②. Течение за результирующим скачком AB при этом такое же, как при обтекании «жидкого» клина с углом θ_s , образованного контактным разрывом AF .

Такой режим течения возможен лишь тогда, когда угол θ_s меньше предельного угла поворота потока в косом скачке уплотнения $\theta_*(\gamma, M_1)$ и $\omega = \theta_5 - \theta_* = \theta_3 + \theta_2 + \nu - \theta_* < 0$. Здесь ν — угол разворота потока в волне Прандтля–Майера при изменении давления от p_2 до давления на клине с углом θ_* . Параметром ω удобно характеризовать удаление от границы между VI и V типами интерференции.

Границы и области реализации IV, V и VI типов в зависимости от углов наклона взаимодействующих скачков к невозмущенному потоку σ_3 и $\sigma_2 > \sigma_3$ (см. рис. 6.36, *d*) показаны на рис. 6.42.

Граница между V и VI типами взаимодействия (сплошные линии) довольно слабо зависит от γ . Влияние числа Маха проявляется на этой границе в основном при $M_1 \sin \sigma_3 \leq 2$ (слабый головной скачок).

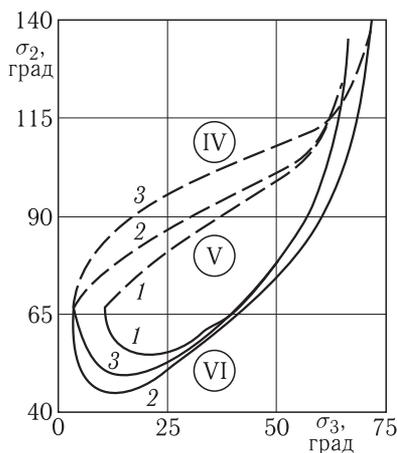


Рис. 6.42. Границы режимов (1 — $M_\infty = 5$; 2 — $M_\infty = 15$; $\gamma = 1,4$; 3 — $M_\infty = 15$, $\gamma = 1,2$)

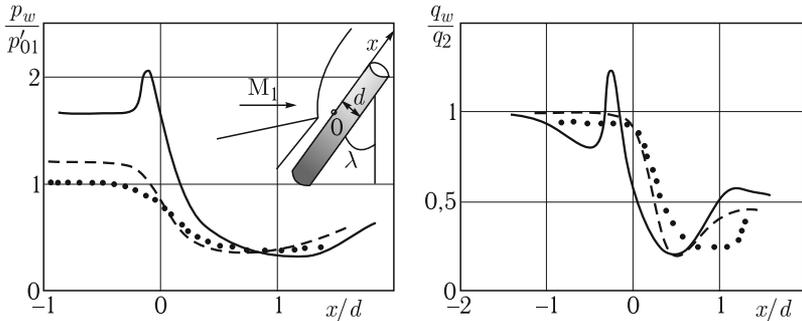


Рис. 6.43. Распределение давления и теплового потока при V и VI типах интерференции на стреловидном цилиндре ($M_1 = 14$, $\gamma = 1,4$, $Re_{\infty d} = 4 \cdot 10^5$). Сплошные кривые — $\lambda = 30^\circ$, $\omega = 16^\circ$; штриховые — $\lambda = 35^\circ$, $\omega = 8^\circ$; пунктирные — $\lambda = 40^\circ$, $\omega = -0,2^\circ$

Рассмотренные выше характерные особенности распределения давления и теплового потока при V и VI типах интерференции подтверждаются экспериментальными данными, приведенными на рис. 6.43. Здесь показаны результаты дренажных и калориметрических испытаний стреловидного цилиндра при падении на него плоской головной волны. Ось x направлена вдоль образующей цилиндра, а за начало отсчета принята условная точка пересечения головного скачка с передней образующей цилиндра. Пунктирные кривые соответствуют VI типу интерференции ударных волн. Переход от II типа интерференции скачков к III типу (рис. 6.36, в) осуществляется тогда, когда течение за скачком CA станет дозвуковым. На тело при этом, как показывает эксперимент, обычно падает практически прямолинейный контактный разрыв AD , что вызывает образование скачка DE , необходимого для разворота на угол β_4 сверхзвукового потока из области ④ параллельно стенке. Тройные конфигурации скачков в точках A и E и давление на стенке можно рассчитать по соотношениям на ударной волне. При оценке давления в областях ② и ⑤ можно, следуя работе [176], принять скачки CA и EB слабо отличающимися от прямого. Это позволяет обойтись без итераций при расчете тройных точек A и E и в то же время обеспечивает приемлемую точность расчета.

Качественно схожи с ними штриховые кривые при слабом типе интерференции. При этом не наблюдаются пики давления и теплового потока (q_2 на рис. 6.43 — тепловой поток на цилиндре перед зоной интерференции).

Качественно отличаются от этих кривых сплошные линии, соответствующие развитому V типу интерференции. Скачок ED доходит до цилиндра, но он все-таки сильно ослабляется волной разрежения и вместо ожидаемого на основе предположения прямолинейности скачка ED отношения давлений $p_{\max}/p_2 = 5$ в эксперименте зарегистриро-

вано $p_{\max}/p_2 = 1,25$ (соответствующим образом ведет себя и тепловой поток $-q_{\max} = 1,25 q_2$).

Анализ экспериментальных данных, полученных при $\gamma = 1,4$, $M_1 = 10 \dots 15$, показал, что если $\omega \leq 10^\circ$, то скачок ED не вызывает на теле повышения давления и теплового потока при V типе интерференции.

Таким образом, несмотря на наличие зон высокого давления в потоке ($p_7 \gg p'_{01}$) V тип взаимодействия скачков не обязательно должен приводить к повышению давления и теплового потока на теле. При малом h/δ_E картина течения около поверхности тела практически не будет отличаться от реализуемой при VI типе интерференции, хотя структура взаимодействия скачков изменяется заметно при переходе через границу режимов.

Приведенный анализ режимов интерференции ударных волн дает, конечно, лишь ориентировочные оценки максимальных тепловых потоков на преграде. Даже при известной интенсивности результирующей ударной волны, падающей на пограничный слой на теле, точность определения максимального теплового потока остается невысокой из-за сложности учета таких факторов, как неоднородность и трехмерность течения в ударном слое, переход пограничного слоя и влияния вязкости на контактные разрывы и тонкие высоконапорные струйки, формирующиеся внутри ударного слоя. Заметим, что подобные задачи возникают также при взаимодействии сверхзвуковых струй с преградой, например, при «горячем» разделении ступеней ракет [21].

Глава 7

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕРАВНОВЕСНОГО ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДУХА

§ 7.1. Основные уравнения

Течение газа в ударном слое около летательного аппарата, движущегося в атмосфере Земли со скоростями, меньшими 8 км/с, сопровождается целым рядом физико-химических процессов. В число этих процессов входят:

- процессы энергообмена между различными степенями свободы (поступательной, вращательной, колебательной, электронной);
- неравновесная диссоциация и ионизация;
- многокомпонентная диффузия, теплопроводность;
- различные гетерогенные процессы на твёрдых поверхностях, обтекаемых плазмой (аккомодация поступательной и колебательной энергии, рекомбинация атомов и ионов).

Для упрощения описания физико-химической модели воздуха обычно используют следующие предположения:

- 1) вращательная температура равна поступательной T ;
- 2) заселенности внутренних уровней энергии частиц (колебательных и электронных) отвечают больцмановскому распределению с соответствующей температурой (для колебательной моды m -й молекулы — T_{vm});
- 3) поступательная температура электронного газа полагается равной колебательной температуре молекулярного азота N_2 вследствие очень высокой скорости электронно-колебательного $e-N_2$ обмена энергией [240].

Система уравнений для смеси газов в условиях термохимической неравновесности может быть записана аналогично равновесному случаю (см. гл.1).

7.1.1. Уравнение состояния.

В данной модели неравновесного воздуха учитываются 2 колебательные температуры T_{vm} ($m = O_2, N_2$) и 11 химических компонент

(O₂, N₂, NO, O, N, e, NO⁺, N₂⁺, O₂⁺, N⁺, O⁺). Колебательная температура двухатомных молекул O₂ и N₂ определяется из соотношения

$$e_i = \frac{h\nu_i}{\exp\left(\frac{\theta_{vi}}{T_{vi}}\right) - 1}, \quad (7.1.1)$$

θ_{vi} — характеристическая колебательная температура i -й молекулы. Колебательную температуру NO полагают равной поступательной вследствие высокой скорости V - T релаксации, а колебательной энергией молекулярных ионов (NO⁺, N₂⁺, O₂⁺) можно пренебречь из-за их малой концентрации.

Внутренняя энергия смеси газов на единицу массы e равна $e = \sum c_i e_i$, где c_i и e_i — массовая концентрация и внутренняя энергия i -й компоненты на единицу массы. Для атомов и ионов

$$e_i = \Delta h_{fi}^0 + \frac{R}{M_i} \left(\frac{3}{2} T + \frac{\sum_k g_k \theta_k e^{-\theta_k/T_e}}{g_0 + \sum_k g_k e^{-\theta_k/T_e}} \right), \quad (7.1.2)$$

для молекул

$$e_m = \Delta h_{fm}^0 + \frac{R}{M_m} \left(\frac{5}{2} T + \frac{\sum_k g_k \theta_k e^{-\theta_k/T_e}}{g_0 + \sum_k g_k e^{-\theta_k/T_e}} + \frac{\theta_{vm}}{e^{\theta_{vm}/T_{vm}} - 1} \right). \quad (7.1.3)$$

Здесь M_i — молярная масса i -го компонента, R — универсальная газовая постоянная, Δh_f^0 — энергия образования, g_k — статистический вес, $\theta_k = E_k/R$, где E_k — энергия электронного уровня с номером k . Колебательная энергия рассчитывается по модели гармонического осциллятора при соответствующей колебательной температуре, а электронная — при $T_e = T_{vN_2}$ (см. табл. 7.1).

В случае отсутствия равенства поступательной и электронной температур ($T \neq T_e$) уравнение состояния, связывающее температуру, состав, плотность и давление смеси газов, можно записать в виде (с учетом $\sum_{i=1}^{10} x_i + x_e = 1$)

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i \neq e} \frac{\rho_i}{M_i} RT + \frac{\rho_e}{M_e} RT_e = \\ &= \rho RT \left(\sum_{i \neq e} \frac{c_i}{M_i} + \frac{c_e}{M_e} \frac{T_e}{T} \right) = \frac{\rho RT}{\bar{M}} \left((1 - x_e) + x_e \frac{T_e}{T} \right), \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

где x_i — мольные концентрации, а \bar{M} — мольный вес смеси.

Таблица 7.1

Компонент	Δh_f^0 , кДж/кг	θ_v , К	g_k	θ_k , К
O ₂	0	2239	3	0
			2	11393
			1	18986
N ₂	0	3354	1	0
			3	72233
NO	3025	2700	4	0
			8	54600
O	15424		9	0
			5	22831
			1	48620
N	33630		4	0
			10	27665
			6	41495
O ⁺	97546		4	0
			10	38600
			6	58200
N ⁺	133796		9	0
			5	22000
			1	47000

7.1.2. Кинетические уравнения.

Уравнения сохранения химических компонент записываются в виде

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{U}) = -\operatorname{div} \mathbf{I}_i + \omega_i, \quad (7.1.5)$$

где ρ_i , \mathbf{I}_i — парциальная плотность и диффузионный поток i -й компоненты, ω_i — массовая скорость образования компоненты в единице объема за счет химических реакций $\sum_i \nu'_i A'_i \leftrightarrow \sum_i \nu''_i A''_i$ между компонентами A_i :

$$\omega_i = M_i \sum_s (\nu''_{is} - \nu'_{is}) \left(k_{fs} \prod_i \left(\frac{\rho_i}{M_i} \right)^{\nu'_{is}} - k_{rs} \prod_i \left(\frac{\rho_i}{M_i} \right)^{\nu''_{is}} \right). \quad (7.1.6)$$

Здесь ν'_{is} , ν''_{is} — стехиометрические коэффициенты, k_{fs} , k_{rs} — константы скоростей, соответственно, прямой и обратной реакций с номером s .

Колебательная температура T_{vm} находится из уравнения колебательной энергии молекулы сорта m на единицу массы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_{vm}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} e_{vm}) = -\operatorname{div} \mathbf{q}_{vm} + Q_m^{V-T} + Q_m^{V-V'} + Q_m^{e-V} + Q_m^{C-V}, \quad (7.1.7)$$

где \mathbf{q}_{vm} — вектор теплового потока колебательной энергии, Q_m^{V-T} , $Q_m^{V-V'}$, Q_m^{e-V} , Q_m^{C-V} — источники члены, описывающие обмен энергией с поступательными степенями свободы ($(V-T)$ -обмен), с другими колебательными модами ($V-V'$), со свободными электронами ($e-V$) и за счет химических реакций ($C-V$). В развернутом виде эти источники определяются следующим образом [159]:

$$\begin{aligned} Q_m^{V-T} &= \rho_m (e_{vm}(T) - e_{vm}) \sum_k \frac{x_k}{\tau_{mk}^{VT}}, \\ Q_m^{V-V} &= \rho_m \frac{R\theta_{vm}}{M_m} \sum_k \frac{x_k}{\tau_{mk}^{VV'}} \left(L_k(L_m + 1) \exp \frac{\theta_{vk} - \theta_{vm}}{T} - L_m(L_k + 1) \right), \\ Q_m^{C-V} &= \sum_r \left(\frac{d\rho_m}{dt} \right)_r e_{vm}^r, \\ Q_m^{e-V} &= -k_{01} n_e n_{N_2} k_{\theta_{vN_2}} \left(\frac{e^{-\theta_{vN_2}/T_e}}{(1 - e^{-\theta_{vN_2}/T_e})^2} - \frac{e^{-\theta_{vN_2}/T_{vN_2}}}{(1 - e^{-\theta_{vN_2}/T_{vN_2}})^2} \right). \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Здесь τ_{mk}^{VT} , $\tau_{mk}^{VV'}$ — времена колебательной релаксации в столкновениях молекул m с частицами сорта k , $L_i = (e^{\theta_{vi}/T} - 1)^{-1}$, а $\left(\frac{d\rho_m}{dt} \right)_r$, e_{vm}^r — скорость изменения плотности молекул и средняя колебательная энергия, с которой исчезают/возникают молекулы сорта m в реакции номер r , соответственно. На основе рассчитанных в работе [218] уровневых констант скоростей возбуждения колебательных уровней N_2 электронным ударом получено выражение

$$k_{01} = 0,076 T_e^{-3/2} e^{-21000/T_e} \text{ см}^3/\text{с}.$$

Времена релаксации процессов выбраны на основе имеющихся экспериментальных данных и экстраполированы на высокие температуры ($T \geq 5 \cdot 10^3 \dots 10 \cdot 10^3$ K) на основе теории SSH [134]. Времена наиболее важных процессов τ приведены в табл. 7.2.

§ 7.2. Константы скоростей

При отсутствии поступательно-колебательного равновесия константы скорости диссоциации и обменных реакций будут зависеть как от поступательной T , так и от колебательной температуры T_v . В этом случае проявляется эффект колебательно-диссоциационного взаимо-

Таблица 7.2

Молекула	Партнер по столкновению	$p\tau$ (атм·с)
V-T : O ₂	O ₂	$1,3 \cdot 10^{-14} \cdot T e^{153 T^{-1/3}}$
	N ₂	$1,5 \cdot 10^{-16} \frac{T}{1 - e^{-\theta_v/T}} e^{220 T^{-1/3}}$
	O	$3 \cdot 10^{-8} + 4,5 \cdot 10^{-15} T e^{110 T^{-1/3}}$
V-T : N ₂	O ₂	$4,6 \cdot 10^{-15} T e^{230 T^{-1/3}}$
	N ₂	$1,1 \cdot 10^{-16} \frac{T}{1 - e^{-\theta_v/T}} e^{273 T^{-1/3}}$
	O	$2,7 \cdot 10^{-11} T^{2/3} e^{70,3 T^{-1/3}}$
	N	$4,7 \cdot 10^{-11} e^{176,3 T^{-1/3}}$
V-V' : N ₂ ($\theta = 1$) + O ₂ ($\theta = 0$) → → N ₂ ($\theta = 0$) + O ₂ ($\theta = 1$)		$4,4 \cdot 10^{-10} e^{146,3 T^{-1/3}}$

действия, заключающийся в снижении скорости прямой реакции (диссоциации) при отсутствии равновесия по колебательным степеням свободы. Исчерпывающий обзор моделей неравновесной (2-температурной) диссоциации приведен в книге [163]. Обычно константу скорости записывают в виде

$$k(T, T_v) = k_0(T) \cdot \Phi(T, T_v), \quad (7.2.1)$$

где $k_0(T) = k(T, T_v = T)$ — равновесная (1-температурная) константа скорости, а $\Phi(T, T_v)$ — фактор неравновесности. Здесь выбрана модель преимущественной диссоциации Тринора–Марроуна [232]. Эта модель качественно правильно отражает основные черты процесса диссоциации и в то же время является достаточно простой. Основное предположение модели заключается в том, что относительная вероятность диссоциации с колебательного уровня номера v может быть представлена в виде

$$P_v = \exp\left(-\frac{E_D - E_v}{RU}\right), \quad (7.2.2)$$

где E_D — энергия диссоциации, U — параметр модели. Тогда константу скорости диссоциации с уровня v можно записать в виде:

$$k_v(T, T_v) = A(T) \exp\left(-\frac{E_D}{RT} + \frac{E_v}{RT_v} + \frac{E_v}{RU}\right). \quad (7.2.3)$$

Для суммарной константы скорости можно получить выражение

$$k(T, T_v) = \sum_{v=0}^{v_{\max}} y_v k_v(T, T_v) = \frac{A(T)}{Q(T_v)} Q(T_F) e^{-E_D/(RT)}, \quad (7.2.4)$$

$$1/T_F = 1/T_v - 1/T - 1/U,$$

где y_v — заселенность колебательного состояния, Q — колебательная статсумма в модели обрезанного гармонического осциллятора. Тогда двухтемпературная поправка Φ будет определяться выражением

$$\Phi(T, T_v) = \frac{Q(T) \cdot Q(T_F)}{Q(T_v) \cdot Q(-U)}. \quad (7.2.5)$$

Параметр U лежит в диапазоне $U \sim \frac{E_D}{6R} \dots \frac{E_D}{3R}$ (см. [163]). Для сильно неравновесных условий, когда $T_v \ll T$ при больших T , множитель $\Phi \ll 1$ и может принимать значения $\Phi \sim 0,001 \dots 0,1$. Средняя колебательная энергия, теряемая в одном акте диссоциации, равна

$$e_v^D = \frac{\sum k_v y_v E_v}{k(T, T_v)} = e_v(T_F). \quad (7.2.6)$$

Выражение для средней колебательной энергии, приобретаемой при рекомбинации, легко получить из принципа детального баланса:

$$e_v^R = e_v^D(T, T = T_v) = e_v(-U). \quad (7.2.7)$$

Однотемпературные константы скоростей диссоциации были выбраны на основе экспериментальных данных, рассмотренных в обзорах [103, 239]. Константы равновесных скоростей прямых и обратных реакций представляются в аррениусовском виде (табл. 7.3):

$$k_f(T) = A_f T^{n_f} e^{-T_f/T}, \quad k_r(T) = A_r T^{n_r} e^{-T_r/T}. \quad (7.2.8)$$

Размерность A_f — см³/(моль · с); A_r — см³/(моль · с) для бинарных процессов и см⁶/(моль² · с) — для тройных.

Поскольку эффективность процесса диссоциации при соударениях с различными компонентами различны, для учета этого обстоятельства вводится матрица каталитических активностей

При этом значения коэффициентов A_f и A_r в табл. 7.3 в зависимости от сорта частицы, участвующей в столкновении, умножаются на коэффициент, помещенный в матрицу. Значение параметра U было подобрано равным $E_D/(3R)$ из условий наилучшего совпадения расчетов с рядом экспериментальных данных в ударных трубах [239] и летными измерениями концентраций электронов в ударном слое [243, 274].

Важным механизмом диссоциации N_2 при скоростях полета $U_\infty < 8$ км/с являются обменные реакции (№ 4, 5 в табл. 7.3). Этот вопрос исследовался в работе [196] на основе квазиклассических траекторных расчетов столкновения молекул. Влияние колебательной неравновес-

Таблица 7.3

	Реакции	A_f	n_f	T_f , К	A_r	n_r	T_r , К
1	$O_2 + M_1 = O + O + M_1$	$3,6 \cdot 10^{19}$	-1,0	59400	$3,12 \cdot 10^{16}$	-0,5	0
2	$N_2 + M_2 = N + N + M_2$	$5,8 \cdot 10^{17}$	-0,5	113200	$3,08 \cdot 10^{16}$	-0,5	0
3	$NO + M_3 = N + O + M_3$	$1,20 \cdot 10^{19}$	-1,0	75500	$2,9 \cdot 10^{18}$	-1,0	0
4	$O + N_2 = N + NO$	$2,0 \cdot 10^{12}$	0,5	38000	$4,4 \cdot 10^{11}$	0,5	0
5	$O + NO = N + O_2$	$2,80 \cdot 10^9$	1	20000	$1,1 \cdot 10^{10}$	1,0	4000
6	$O + N = NO^+ + e^-$	$2,56 \cdot 10^{12}$	0	32200	$6,7 \cdot 10^{21}$	-1,5	0
7	$N + N = N_2^+ + e^-$	$4,44 \cdot 10^{10}$	0,7	67500	$1,5 \cdot 10^{22}$	-1,5	0
8	$O + O = O_2^+ + e^-$	$1,20 \cdot 10^{10}$	0,65	80600	$8,0 \cdot 10^{21}$	-1,5	0
9	$O_2^+ + O = O^+ + O_2$	$4,5 \cdot 10^{11}$	0,5	18500	$7,8 \cdot 10^{11}$	0,5	0
10	$N^+ + N_2 = N_2^+ + N$	$1,7 \cdot 10^8$	1,5	12100	$7,8 \cdot 10^{11}$	0,5	0
11	$O_2^+ + N = N^+ + O_2$	$8,7 \cdot 10^{13}$	0,15	28600	$5,8 \cdot 10^{11}$	0,6	0
12	$NO^+ + O_2 = O_2^+ + NO$	$2,4 \cdot 10^{13}$	0,4	32300	$2,25 \cdot 10^{13}$	0,25	0
13	$NO^+ + O = O_2^+ + N$	$7,2 \cdot 10^{12}$	0,3	48400	$1,84 \cdot 10^{15}$	-0,35	0
14	$O^+ + N_2 = N_2^+ + O$	$9,0 \cdot 10^{11}$	0,35	22200	$9,8 \cdot 10^{12}$	-0,15	0
15	$N + NO^+ = N_2^+ + O$	$7,2 \cdot 10^{13}$	0	35300	$9,29 \cdot 10^{15}$	-0,70	0

	O	O ₂	N	N ₂	NO
M_1	2,5	1	0,25	0,25	0,25
M_2	0,5	0,5	4	1	0,5
M_3	20	1	20	1	20

ности на константу скорости реакции $N + O_2 \rightarrow O + NO$ практически отсутствует, так как реакция происходит с очень маленькой энергией активации. Уровневые константы скорости реакции $O + N_2 \rightarrow N + NO$, полученные в работе [196], могут быть аппроксимированы следующими выражениями:

$$\begin{cases} k_v(T) = A(T) \exp(-(E_a - \gamma E_v)/T), & \gamma E_v < E_a, \\ k_v(T) = A(T), & \gamma E_v > E_a. \end{cases} \quad (7.2.9)$$

Здесь E_a — энергия активации, а параметр γ был выбран равным 0,825, чтобы удовлетворить данным из работы [196]. Отсюда можно получить формулу для неравновесной (двухтемпературной) скорости диссоциации:

$$\begin{aligned}
k(T, T_v) &= \frac{A(T)}{Q(T_v, E_D)} \times \\
&\times \left(\sum_{\gamma E_v < E_a} \exp(-E_a/T - \gamma E_v/T - E_v/T_v) + \sum_{\gamma E_v < E_a} \exp(-E_v/T_v) \right) = \\
&= \frac{A(T) e^{-E_a/T}}{Q(T_v, E_D)} (Q(T_F, E_a/\gamma) + Q(T_v, E_D - E_a/\gamma)), \quad (7.2.10) \\
\frac{1}{T_F} &= \frac{1}{T_v} - \frac{\gamma}{T}.
\end{aligned}$$

Здесь $Q(T, E)$ — статистическая сумма обрезанного гармонического осциллятора. Влияние колебательной неравновесности на константу скорости реакции $O + N_2 \rightarrow N + NO$ не столь значительно, как для диссоциации ($\Phi \geq 1/3$).

§ 7.3. Вязкие потоки и приближенные соотношения для коэффициентов переноса

Выражения для вязких потоков массы, импульса, различных видов энергии получены на основе 1-го приближения решения уравнения Больцмана для смеси газов методом Чепмена–Энскога [52]. Для расчета скоростей диффузии компонент в точной постановке используются соотношения Стефана–Максвелла. При расчетах теплообмена ЛА часто используется приближенный подход, дающий приемлемую для практики точность. Диффузионный поток \mathbf{I}_i представляется в виде двух слагаемых — градиентного члена (закон Фика) и корректирующей поправки α_i :

$$\mathbf{I}_i = -\rho D_i \text{grad } c_i + \alpha_i. \quad (7.3.1)$$

Выражение для эффективного коэффициента диффузии D_i можно получить из соотношений Стефана–Максвелла. Точная поправка α_i заменяется приближенной в форме $\alpha_i = c_i \alpha$ и находится из условия баланса массы $\sum_i \mathbf{I}_i = 0$:

$$\mathbf{I}_i = -\rho D_i \text{grad } c_i + \rho c_i \sum_j (D_j \text{grad } c_j). \quad (7.3.2)$$

Эффектами термо- и бародиффузии обычно пренебрегают из-за их слабого влияния на основные параметры потока.

Полный тепловой поток в многокомпонентной смеси газов \mathbf{q} определяется эффектами теплопроводности различных видов энергии и диффузии:

$$\mathbf{q} = -(\lambda_t + \lambda_{\text{rot}}) \text{grad } T - \sum_m \lambda_{vm} \text{grad } T_{vm} - \lambda_e \text{grad } T_e + \sum_i h_i \mathbf{I}_i, \quad (7.3.3)$$

а поток колебательной энергии молекул сорта m равен

$$\mathbf{q}_{vm} = -\lambda_{vm} \text{grad } T_{vm} + e_{vm} \mathbf{I}_m, \quad (7.3.4)$$

где λ_t , λ_{rot} , λ_{vm} , λ_e — поступательная, вращательная, m -я колебательная и электронная теплопроводности соответственно, h_i — энтальпия на единицу массы i -й компоненты.

§ 7.4. Коэффициенты переноса газовых смесей

7.4.1. Здесь представлены основные элементы модели диссипативных процессов (вязкости, теплопроводности, диффузии) в неравновесном многокомпонентном газе, полученные с применением молекулярно-кинетической теории газов. Эти данные необходимы при решении уравнений, приведенных в гл. 1.

Для термодинамически неравновесной и многокомпонентной газовой смеси система основных уравнений должна быть дополнена уравнениями физико-химической кинетики для кинетических переменных, к которым относятся массовые концентрации компонентов c_i газовой смеси, энергии e_{ik} их k -х внутренних степеней свободы и температуры свободных электронов T_e . При этом в соответствующие уравнения для невязких течений должны быть добавлены диссипативные члены, которые и рассмотрим по отдельности.

Диффузионно-кинетическое уравнение для массовых концентраций c_i компонент, как следует из (7.1.5), имеет вид (с учетом $\omega_i = \rho \Lambda_i$)

$$\rho \frac{dc_i}{dt} = \rho \Lambda_i - \text{div } \mathbf{I}_i. \quad (7.4.1)$$

Здесь \mathbf{I}_i — вектор диффузионных потоков масс i -х компонент через жидкие площадки единичной площади, ортогональные векторам \mathbf{I}_i , Λ_i — источниковый член, зависящий в первую очередь от скорости энергообмена между частицами разного сорта и от скоростей химических реакций. При этом из закона сохранения масс на площадке, движущейся вместе с потоком, следуют условия сохранения

$$\begin{aligned} \sum_i c_i &= 1, & \sum_i \Lambda_i &= 0, & \sum_i \mathbf{I}_i &= 0, \\ \sum_i x_i &= 1, & x_i &= \frac{\bar{M}}{M_i} c_i, & \frac{1}{M} &= \sum \frac{c_i}{M_i}. \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Если уравнение (7.4.1) привести к безразмерному виду, в коэффициент при диффузионных потоках будет входить новый критерий подобия, называемый числом Шмидта $Sc = \mu/\rho D$. В простейшем случае диффузионные потоки массы \mathbf{I}_i определяются законом Фика [52]:

$$\mathbf{I}_i = -\rho D_i \text{grad } c_i. \quad (7.4.3)$$

Согласно кинетической теории коэффициент диффузии имеет порядок

$$D_i \sim \frac{(kT)^{1/2}}{n\sigma^2\sqrt{m}} = \frac{(kT)^{3/2}}{p\sigma^2\sqrt{m}},$$

где σ — эффективный диаметр молекулы, m — средняя масса молекул смеси.

Для смесей газов, частицы которой не сильно отличаются по массе (к ним принадлежит и диссоциированный воздух), числа Шмидта полагают равными для всех компонентов ($Sc = 0,7 \dots 0,8$).

На практике для расчета диффузионных потоков часто используют обобщенный закон Фика, в котором коэффициенты диффузии D_i определяются по формуле Уилки:

$$D_i = (1 - x_i) \left(\sum_{j \neq i} \frac{x_j}{D_{ij}} \right)^{-1}, \quad x_i = \frac{\bar{M}c_i}{M_i}. \quad (7.4.4)$$

В многокомпонентном газе для полных потоков диффузии молекулярно-кинетическая теория газов дает соотношения Стефана–Максвелла, которые имеют вид

$$\sum_j \frac{x_j x_j}{\rho D_{ij}} \left(\frac{\mathbf{I}_j}{c_j} - \frac{\mathbf{I}_i}{c_i} \right) = \text{grad } x_i + (x_i - c_i) \text{grad} (\ln p + k_{Ti} \cdot \text{grad} (\ln T)). \quad (7.4.5)$$

Здесь D_{ij} — бинарные коэффициенты диффузии в бинарной смеси i -го и j -го компонентов, k_{Ti} — термодиффузионные отношения ($\sum_i k_{Ti} = 0$),

M_i и \bar{M} — молярные массы i -х компонент и смеси в целом.

В рамках строгой теории коэффициенты бинарной диффузии D_{ij} всегда положительны и зависят лишь от температуры и от свойств i -й и j -й компонент, обратно пропорциональны давлению и не зависят от концентраций других компонент.

Система (7.4.5) линейна относительно потоков \mathbf{I}_i и ее решение имеет общий вид

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_i^{(c)} + \mathbf{I}_i^{(T)} + \mathbf{I}_i^{(p)}, \quad \mathbf{I}_i^{(c)} = \sum_k a_{ik} \text{grad } x_k = -\rho \sum_k \bar{D}_{ik} \text{grad } c_k, \quad (7.4.6)$$

$$\mathbf{I}_i^{(p)} = -\rho D_i^{(p)} \text{grad} (\ln p), \quad \mathbf{I}_i^{(T)} = -\rho D_i^{(T)} \text{grad} (\ln T).$$

Здесь член $\mathbf{I}_i^{(c)}$ обусловлен чисто концентрационной диффузией, $\mathbf{I}_i^{(T)}$ — термодиффузией, а $\mathbf{I}_i^{(p)}$ — бародиффузией, $D_i^{(T)}$ и $D_i^{(p)}$ — соответственно коэффициенты термодиффузии и бародиффузии. Коэффициенты \bar{D}_{ik} назовем эффективными коэффициентами многокомпонентной диффузии. Их связь с коэффициентами a_{ij} и обратная следует из связи $c_i = (M_i/\bar{M})x_i$.

Коэффициенты a_{ij} , \bar{D}_{ik} , $D_i^{(p)}$ и $D_i^{(T)}$ зависят от D_{ij} (см. (7.4.17)), температуры и концентраций компонент.

Для бинарной смеси газов с учетом условия $\mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_2$ из (7.4.2) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^{(c)} = -\rho D_{12} \text{grad } c_1 = -\mathbf{I}_2^{(c)}, \quad D_i^{(p)} = \rho (x_i - c_i) D_{12} \frac{M_1 M_2}{M^2}, \\ D_i^{(T)} = \rho D_{12} \frac{M_1 M_2}{M^2} k_{Ti}. \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

Как следует из (7.4.7), коэффициент бародиффузии положителен для более легкой компоненты, при $x_i > c_i$. Поэтому бародиффузия способствует перемещению легких компонент в область меньших давлений. В пограничном слое и близких к нему течениях этим эффектом можно пренебречь вследствие отсутствия поперечного перепада давления. В то же время этот эффект, по-видимому, подлежит учету при расчетах структуры ударных волн, где имеются большие градиенты давления. В рамках рассматриваемых задач эффект термодиффузии, как правило, не принимается во внимание.

Уравнения для энергий внутренних степеней свободы (например, колебательных), учитывающие процессы переноса, получаются из уравнений для невязких течений добавлением диффузионного члена

$$\rho \frac{dc_i e_{ik}^{(v)}}{dt} = \frac{\rho_i (e_{ike}^{(v)} - e_{ik}^{(v)})}{\tau_{ik}} - \text{div } \mathbf{J}_{ik}^{(v)}, \quad \mathbf{J}_{ik}^{(v)} = \mathbf{I}_i e_{ik}^{(v)}, \quad (7.4.8)$$

здесь $e_{ik}^{(v)}$, $\mathbf{J}_{ik}^{(v)}$ — энергия k -й внутренней степени свободы i -й компоненты в расчете на единицу массы последней и ее диффузионный перенос.

Для концентрации ионов $c_i = c_i^{(\text{ion})}$ в ионизированном газе диффузионно-кинетическое уравнение имеет тот же общий вид (7.4.1). Для диффузионных потоков ионов i -х компонент $\mathbf{I}_i^{(\text{ion})}$ с учетом (7.4.6) можно использовать формулу

$$\mathbf{I}_i^{(\text{ion})} = -\rho D_i^{(a)} \text{grad } c_i^{(\text{ion})}, \quad D_i^{(a)} = \alpha D_i, \quad \alpha = \left(1 + \frac{T_e}{T}\right). \quad (7.4.9)$$

Здесь коэффициент α учитывает различие («отрыв») температуры электронов T_e от температуры T тяжелых частиц [142]. При $T_e = T$ коэффициент $\alpha = 2$. Концентрация же электронов определяется через концентрации ионов.

В работе [250] показано, что для не очень разреженной плазмы (плотность электронов $n_e > 10^8 \text{ см}^{-3}$) разделение зарядов компонент Q_i^* мало по сравнению с $n_e Q_e^*$. Поэтому с хорошей точностью выполняется условие квазинейтральности

$$\sum_i Q_i^* x_i = 0 \Rightarrow \sum_i Q_i^* \text{grad } x_i = 0.$$

Температура электронов T_e определяется из уравнения для энергии электронов e_e на единицу массы

$$\frac{dc_e e_e}{dt} + \frac{2}{3} c_e e_e \operatorname{div} \mathbf{U} = \Lambda_e - \operatorname{div} \mathbf{J}_e, \quad c_e e_e = \frac{3 n_e k T_e}{2 \rho}, \quad (7.4.10)$$

здесь c_e и n_e — массовая и числовая концентрации электронов, вид источникового члена Λ_e зависит от решаемой задачи. Поток же энергии электронов \mathbf{J}_e определяется следующим образом:

$$\mathbf{J}_e = -\lambda_e \operatorname{grad} T_e + \mathbf{I}_e h_e, \quad \mathbf{I}_e = \sum_k \frac{m_e}{m_k} \mathbf{I}_k^{(\text{ion})}, \quad h_e = \frac{5 n_e k T_e}{2 m_e}. \quad (7.4.11)$$

Здесь λ_e — коэффициент электронной теплопроводности, m_e и m_k — массы электронов и ионов, $\mathbf{I}_k^{(\text{ion})}$ — диффузионные потоки положительных ионов (вкладом отрицательных можно пренебречь).

7.4.2. Расчет коэффициентов вязкости.

Согласно оценкам, проведенным с использованием кинетической теории газов, коэффициент вязкости имеет порядок $\mu_i \sim \sigma_i^{-2} (m_i k T)^{1/2}$.

Строгая теория дает для μ_i формулу [52]

$$\mu_i = 2,67 \cdot 10^{-6} \frac{(M_i T)^{1/2}}{\sigma_i^2 \Omega^{(2,2)}(T^*)} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad T^* = \frac{k T}{\varepsilon_i}. \quad (7.4.12)$$

Здесь $\Omega^{(2,2)}$ — так называемый интеграл столкновений, зависящий от потенциала взаимодействия частиц, эффективный диаметр молекул σ_i определяется в ангстремах Å ($1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ см}$), а ε_i — характерная энергия взаимодействия в потенциале Леннарда-Джонса, который и принят в настоящее время в теории. Для величины σ_i^2 используется еще термин *транспортное сечение столкновения молекул*. Функция $\Omega^{(2,2)}(T^*)$ для нейтральных газов имеет порядок единицы. Величины σ_i и ε_i для нейтральных компонент диссоциированного воздуха приведены в табл. 7.4.

Как видно, все $\sigma_i \approx 3 \dots 3,8 \text{ Å}$, а $\varepsilon_i/k \approx 70 \dots 110 \text{ К}$, т.е. эти величины достаточно близки для всех атомов и молекул воздушной смеси.

Приведенных данных достаточно для вычисления коэффициентов μ_i , но в то же время несомненна и полезность простых приближенных формул, из которых рассмотрим две, основанные на разных, но близких аппроксимациях интегралов столкновения [6] (индексы k ,

Таблица 7.4

Газ	O ₂	O	N ₂	N	NO
$\sigma_i, \text{ Å}$	3,47	3,05	3,80	3,30	3,49
$\varepsilon_i/k, \text{ К}$	107	107	71	71	117
$\bar{\mu}_{i1}$	1,51	1,38	1,29	1,21	1,43
$\bar{\mu}_{i2}$	1,68	1,53	1,38	1,29	1,58

соответственно, 1 и 2)

$$\Omega^{(2,2)} = 1,3(T^*)^{-k_k}, \quad \mu_i = \bar{\mu}_{ik} \bar{T}^{\omega_k} \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \bar{T} = \frac{T}{200}, \quad (7.4.13)$$

$$k_1 = 0,2, \quad \omega_1 = 0,7; \quad k_2 = 0,15, \quad \omega_2 = 0,65.$$

Величины $\bar{\mu}_{ik}$ приведены в табл. 7.4.

Заметим, что коэффициенты вязкости для всех приведенных атомов и молекул достаточно близки между собой (различие в пределах 20 %).

Как результат строгой теории для расчета коэффициентов вязкости μ смеси газов, наиболее распространена формула Уилки, которая имеет вид

$$\mu = \sum_i x_i \mu_i f_{i\mu}^{-1}, \quad \text{где} \quad f_{i\mu} = \sum_k x_k \varphi_{ik}, \quad (7.4.14)$$

$$\varphi_{ik} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{[1 + (\mu_i/\mu_k)^{1/2} (M_k/M_i)^{1/4}]^2}{(1 + M_i/M_k)^{1/2}}, \quad x_i = \frac{\bar{M}}{M_i} c_i.$$

Очевидно, в общем случае $\varphi_{ik} \neq 1$, что и подчеркивает неаддитивность законов вязкости для смеси газов.

Более простой и часто употребляемой в задачах пограничного и вязкого ударного слоя является формула Манна [153], аналогичная формуле для молекулярной массы смеси газов

$$\frac{1}{\mu} = \sum \frac{c_i}{\mu_i}, \quad (7.4.15)$$

где коэффициенты вязкости индивидуальных компонентов зависят только от температуры и обычно аппроксимируются выражениями вида

$$\mu_i = \alpha_i T^{b_i} \quad \text{или} \quad \mu_i = \exp(a_i + b_i \ln T + c_i (\ln T)^2).$$

7.4.3. Расчет коэффициентов теплопроводности.

Для коэффициентов теплопроводности $\lambda^{(0)}$ с замороженными внутренними степенями свободы (колебательными или электронными) известна формула Мэсона–Саксены [153]

$$\lambda^{(0)} = \sum x_i \lambda_i^{(0)} f_{i\lambda}^{-1},$$

$$f_{i\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\alpha_1 \sum_k x_k \varphi_{ik} - \alpha_2 \right), \quad (7.4.16)$$

$$\alpha_1 = 1,065, \quad \alpha_2 = 0,065.$$

Она получена из рассмотрения потоков энергии в предположении связи $\mathbf{J}_{0i} = -\lambda_i^{(0)} \text{grad} T$, т. е. без учета возможной неравновесности внутренних степеней свободы. При полном равновесии внутренних степеней свободы в формуле (7.4.16) следует заменить $\lambda_i^{(0)}$ и $\lambda^{(0)}$ на λ_{ie} и λ_e .

7.4.4. Расчет коэффициентов диффузии.

Известная в теории формула для коэффициентов бинарной диффузии с учетом уравнения состояния $p\bar{M} = \rho RT$ запишется в виде [153]

$$\rho D_{ij} = 3,15 \cdot 10^{-6} \frac{\bar{M} T^{1/2}}{\sigma_{ij}^2 \Omega^{(1,1)}(T^*)} \left(\frac{M_i + M_j}{2 M_i M_j} \right)^{1/2} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad (7.4.17)$$

$$T^* = \frac{kT}{\varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = (\varepsilon_i \varepsilon_j)^{1/2}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j).$$

Здесь $\Omega^{(1,1)}(T^*)$ — соответствующий интеграл столкновений. Эта функция аппроксимируется формулой $\Omega^{(1,1)} = 1,2 (T^*)^{-0,2}$. Исходные данные по интегралам столкновений содержатся в [49, 54, 264]. По аналогии с (7.4.13) формулу (7.4.17) запишем в виде (ρ — плотность, кг/м³)

$$D_{ij} = \frac{1}{\rho} B_{ij} \cdot 10^{-5} \bar{T}^\omega \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad \bar{T} = \frac{T}{200}, \quad B_{ij} = \bar{B}_{ij} \bar{M}, \quad \omega = 0,7. \quad (7.4.18)$$

Коэффициенты \bar{B}_{ij} зависят лишь от свойств газов, «участвующих» в формуле (7.4.17). Несложные вычисления дают почти одинаковые (с погрешностью не более 5%) величины \bar{B}_{ij} для каждой из входящих в таблицу пар компонент: молекула–молекула, \bar{B}_{mm} , атом–молекула, $\bar{B}_{\text{ам}}$, и атом–атом, $\bar{B}_{\text{аа}}$. С некоторым смещением в сторону азота, превалирующего в воздухе, эти величины имеют значения:

$$\bar{B}_{\text{mm}} = 0,059, \quad \bar{B}_{\text{ам}} = 0,082, \quad \bar{B}_{\text{аа}} = 0,11. \quad (7.4.19)$$

А поскольку коэффициенты $\bar{B}_{ij} \sim \frac{T}{p} D_{ij} \bar{T}^{-\omega}$ пропорциональны коэффициентам бинарной диффузии как функциям температуры и давления, то отсюда следует, что коэффициенты самодиффузии D_{mm} для молекул примерно вдвое меньше коэффициентов $D_{\text{аа}}$ для атомов, а бинарные коэффициенты $D_{\text{ам}}$ равны примерно полусумме предыдущих (аппроксимация $\Omega^{(2,2)} = (T^*)^{-0,15}$, вторая в (7.4.13), дает результаты, близкие к приведенным).

Соответствующие числа Шмидта, построенные по суммарной вязкости смеси, изменяются в пределах от $Sc_{\text{ам}} \approx 1$ в почти атомарном газе до $Sc_{\text{ам}} \approx 0,55$ в почти молекулярном.

Заметим в заключение, что приведенный анализ справедлив лишь для нейтральных частиц. С ростом же степени ионизации газов (возможно, при скоростях полета $U_\infty > 8 \dots 9$ км/с) на суммарный коэффициент вязкости существенно влияют ионы и, прежде всего, электроны. Их собственная вязкость оказывается существенно меньшей, чем у нейтральных частиц, что объясняется значительно большими транспортными сечениями σ_i^2 для заряженных частиц из-за влияния кулоновского взаимодействия. При этом даже из формулы Уилки (7.4.14) (на качественном уровне) следует, что сильное снижение отношения

$\mu_k/M_k^{1/2}$ для какой-либо одной компоненты приводит к снижению суммарной вязкости в целом. Этими эффектами и объясняется немонотонный характер зависимости коэффициентов вязкости (да и теплопроводности тоже) от температуры при $T > 10^4$ К.

§ 7.5. Граничные условия на поверхности обтекаемого тела

Для решения исходной системы уравнений необходимо выписать граничные условия в набегающем потоке и на поверхности тела. В зависимости от режима течения (высоты и скорости полета) в граничных условиях на поверхности тела учитываются различные физические и физико-химические процессы. Так, при больших числах Рейнольдса и термохимическом равновесии газа в пограничном слое на поверхности тела используются условия непротекания, а для концентраций атомов и ионов — условие $c_i = 0$.

В работе [274] показано, что для больших высот ($H \geq 80$ км) полета граничные условия для концентраций ионов и электронной температуры на поверхности тела сильно влияют на форму профиля электронной концентрации во всем ударном слое. В данной работе использовались условия скольжения [258] для скорости U_s и поступательной температуры T_s на внешней границе кнудсеновского слоя (пренебрегая нормальным вязким напряжением и вязкими потоками вдоль поверхности):

$$U_s = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sum_i n_i \sqrt{m_i k T_s}} (1 - \beta/2) \tau_{xy},$$

$$\frac{T_s}{T_w} = \frac{\beta \sum n_i \sqrt{\frac{k T_s}{2\pi m_i}} + (1 - \beta/2) \sum \frac{I_i}{m_i}}{\beta \sum n_i \sqrt{\frac{k T_s}{2\pi m_i}} + \frac{5}{4} (1 - \beta/2) \sum \frac{I_i}{m_i} - (1 - \beta/2) \frac{\lambda}{2k T_s} \sum \frac{\partial T_s}{\partial y}},$$

(7.5.1)

где T_w — температура поверхности, n_i , m_i , I_i — концентрация, молекулярная масса и массовый нормальный к поверхности диффузионный поток i -й компоненты, τ_{xy} — касательное напряжение, λ — коэффициент теплопроводности смеси, β — коэффициент аккомодации (в расчетах полагалось $\beta = 1$).

Что касается колебательной температуры, то обычно ее полагают равной температуре поверхности, что эквивалентно бесконечно большой скорости обмена колебательной энергии со стенкой. Однако экспериментальные данные [50] свидетельствуют, что дезактивация колебательных степеней свободы происходит с конечной вероятностью, т. е.

имеет место неполная аккомодация колебательной энергии. Условие для колебательной температуры T_{vm} молекулы сорта $m = O_2, N_2, NO$ при конечной величине вероятности дезактивации γ_v можно записать в виде [274]

$$\gamma_v \rho_m \sqrt{\frac{RT_s}{2\pi m_m}} (e_{vm} - e_{vm}(T_w)) = \lambda_{vm} \frac{\partial T_{vm}}{\partial n} + I_m (e_{vm}^* - e_{vm}), \quad (7.5.2)$$

где e_{vm}, e_{vm}^* — колебательные энергии молекул около стенки и образующихся в результате гетерогенной рекомбинации. Для гомоядерных молекул (O_2, N_2) вероятность дезактивации на кварце $\gamma_v \approx 10^{-4} \dots 10^{-3}$, а для гетероядерных двухатомных молекул (CO, NO) $\gamma_v \approx 10^{-2} \dots 10^{-1}$ [50]. Для полетов ЛА на высотах $H \geq 80$ км рассмотренное условие практически эквивалентно равенству нулю градиента колебательной температуры.

Граничные условия для концентраций c_i определяются каталитической рекомбинацией атомов на поверхности. В расчетах задач внешнего обтекания применяются упрощенные условия с использованием эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации γ_i :

$$\text{для атомов O и N} \quad J_a = J_i = \frac{2\gamma_i}{2 - \gamma_i} \sqrt{\frac{RT_s}{2\pi M_i}} \rho_w c_{iw}, \quad (7.5.3)$$

$$\text{для молекул } O_2 \text{ и } N_2 \quad J_m = -J_a.$$

Наряду с безразмерной величиной вероятности гетерогенной рекомбинации атомов часто используется величина $K_w = \frac{2\gamma}{2 - \gamma} \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}}$ (каталитичность), имеющая размерность м/с. Подробнее вопрос о влиянии каталитичности поверхности тепловой защиты на теплообмен рассмотрен в § 10.2.

Для заряженных частиц (ионов, электронов) обычно используемое в аэромеханике граничное условие $c_{iw} = 0$ для диэлектрических поверхностей является физически необоснованным. Адекватные граничные условия в случае изолированного тела в потоке плазмы сформулированы в теории зондов Ленгмюра [194]. Вероятность поверхностной рекомбинации полагалась равной единице. Вычисления, проведенные на основе модельного уравнения Больцмана с учетом тепловой энергии ионов, дают результат

$$J_i = 0,45 n_{is} \sqrt{\frac{2kT_e}{m_i}} \left(1 + \frac{T_s}{T_e}\right), \quad (7.5.4)$$

где n_{is}, T_e — величины концентраций ионов и температура электронного газа на внешней границе кнудсеновского слоя.

Непосредственное отношение к проблеме гетерогенной рекомбинации атомов, имеет вопрос об аккомодации энергии рекомбинации поверхностью материала. Суть этой проблемы заключается в следую-

щем. Химическая энергия, выделяющаяся при рекомбинации атомов на поверхности, передается в стенку только частично. Некоторая ее часть может расходоваться на возбуждение внутренних степеней свободы (колебательные и электронные) образующихся молекул [22, 67]. Если рекомбинация на стенке идет как бы равновесным образом, т. е. образуются молекулы в равновесном (по внутренним степеням свободы) состоянии, соответствующем температуре стенки $T_w < 1500 \dots 2000$ °С, то возбужденными окажутся лишь колебания, относительно небольшая энергия которых уже учтена теплоемкостью c_p . Но гетерогенная рекомбинация может проходить и неравновесным образом, с возбуждением электронных или верхних колебательных уровней с большой энергией возбуждения, сравнимой с E_D .

Учет энергии возбуждения молекул может существенно влиять на конечный результат.

§ 7.6. Влияние каталитичности поверхности на теплообмен

Важным фактором, позволяющим существенно (на 200...300 К) снизить температуру поверхности теплозащиты многоразовых ЛА, является выбор материала или покрытия, наносимого на основной материал, имеющих малую каталитическую активность в отношении реакций гетерогенной рекомбинации атомов кислорода и азота (γ_i в соотношении (7.5.3)).

Применительно к задачам аэродинамического нагрева тел, движущихся в атмосфере Земли с большими скоростями, физическая суть проблемы каталитичности состоит в следующем. Молекулы кислорода и азота, прошедшие головной скачок уплотнения, диссоциируют на атомы, на что затрачивается значительная доля энергии потока (до 3/4). На достаточно больших высотах атомы в тонком пограничном слое не успевают рекомбинировать в тройных соударениях и за счет диффузии достигают поверхности. В случае, если поверхность способствует рекомбинации атомов в молекулы (высокая каталитичность $K_w \rightarrow \infty$), энергия потока, затраченная на диссоциацию, выделяется в виде химической энергии и передается поверхности (полностью или частично), т. е. идет на нагрев тела. Если на поверхности рекомбинации не происходит (низкая каталитичность $K_w \rightarrow 0$), то атомы сносятся ниже по потоку, унося с собой энергию диссоциации, и дополнительного нагрева тела не происходит. Эта важная характеристика теплозащитного материала или покрытия определяется экспериментально.

Для аппаратов баллистического спуска максимальные значения тепловых потоков достигаются обычно на высотах $H \sim 40 \dots 50$ км и ниже, где влияние неравновесных процессов, по крайней мере, для аппаратов, имеющих размеры $R \geq 0,5$ м, несущественно. Для многоразовых планирующих ЛА наиболее теплонапряженная часть траек-

тории расположена в области существенного влияния неравновесных процессов. Максимальное значение тепловых потоков на ЛА «Буран» и «Space Shuttle» реализуется на высоте $H \sim 70$ км и на его величину существенно влияет каталитичность поверхности K_w .

Впервые на проблему каталитичности применительно к задачам теплообмена летательных аппаратов было обращено внимание в работе [209]. В простейшем случае замороженного пограничного слоя и при постоянном значении K_w , одинаковом для атомов азота и кислорода, отклонение величины теплового потока q в критической точке от равновесного значения q_0 , соответствующего величине $K_w = \infty$, определяется формулой Гуларда:

$$\frac{q}{q_0} = 1 - \frac{\text{Le}^{2/3} c_{ae} \Delta h^0 / (H_0 - c_p T_w)}{1 + (\text{Le}^{2/3} - 1) c_{ae} \Delta h^0 / (H_0 - c_p T_w)} (1 - \varphi), \quad (7.6.1)$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + 0,763 (\rho_\delta \mu_\delta U_\infty / r_0)^{1/2} [k(2 - k)]^{1/4} / (K_w \rho_w \text{Sc}^{2/3})}.$$

Здесь Le и Sc — числа Льюиса и Шмидта, c_{ae} — концентрация атомов на внешней границе пограничного слоя, H_0 — энтальпия торможения газа, Δh^0 — энтальпия образования атомов (для азота $\Delta h_{\text{N}}^0 = 33,5$ МДж/кг, для кислорода $\Delta h_{\text{O}}^0 = 15,5$ МДж/кг), r_0 — радиус затупления, k — отношение плотностей газа при переходе через прямой скачок (рис. 5.7), индексы « ∞ », « δ » и « w » относятся к значениям величин в набегающем потоке, на внешней границе пограничного слоя и на поверхности обтекаемого тела. При числе Льюиса $\text{Le} = 1$ она упрощается и принимает вид

$$\frac{q}{q_0} = 1 - \frac{\sum_i c_{ie} \Delta h_i^0 / (H_0 - c_p T_w)}{1 + \frac{K_w \rho_w}{(\alpha_0 / c_p)}}, \quad i = \text{O, N}, \quad (7.6.2)$$

где α_0 / c_p — коэффициент теплообмена в критической точке.

Следует отметить, что формулу Гуларда (7.6.1) нельзя обобщить на случай многокомпонентной смеси газов [42]. Это связано с тем, что вероятность рекомбинации атомов γ пропорциональна степени заполнения поверхности θ адсорбированными атомами ($\gamma \sim \theta$). В случае низкокatalитических материалов, например, для плиточной теплосозиды, в чистом газе (азоте или кислороде) степень заполнения поверхности близка к 1. В смеси газов (воздухе) доля свободной поверхности также мала, однако доля поверхности, занятая атомами каждого сорта, уменьшается. Вместе с этим в смеси газов уменьшается и вероятность рекомбинации атомов. Это приводит к тому, что значения γ_i^* ($i = \text{O, N}$), полученные экспериментально в чистых газах, не могут быть использованы при расчетах теплообмена летательных аппаратов. При расчетах теплообмена эффективные значения вероятностей рекомбинации $\gamma_{\text{эфф}}$ должны быть пересчитаны, согласно рекомендациям [42], по формулам:

при протекании реакции по механизму Или–Райдилла

$$\gamma_{\text{эфф}} = \frac{\gamma_{\text{O}}^* \gamma_{\text{N}}^*}{\gamma_{\text{O}}^* + \gamma_{\text{N}}^*};$$

при протекании реакции по механизму Ленгмюра–Хиншельвуда

$$\gamma_{\text{эфф}} = \frac{\gamma_{\text{O}}^* \gamma_{\text{N}}^*}{(\sqrt{\gamma_{\text{O}}^*} + \sqrt{\gamma_{\text{N}}^*})^2}.$$

При моделировании процесса теплообмена в неравновесном пограничном или ударном слое на поверхности с конечной каталитической активностью кроме воспроизведения энтальпии торможения газа, коэффициента теплообмена и температуры поверхности, необходимых для получения заданных уровней теплового потока, должно быть обеспечено дополнительное моделирование по двум параметрам.

Этими параметрами являются степень диссоциации газа на внешней границе пограничного слоя, или энтальпия диссоциации, отнесенная к полной энтальпии $h_d/H_0 = \sum c_i \Delta h_i^0/H_0$ ($i = \text{O}, \text{N}$), и параметр $Z = \rho_w K_w / (\alpha/c_p)_0$, который определяет отношение скорости гетерогенной рекомбинации к скорости диффузии атомов через пограничный слой (число Дамкелера). Первый из параметров определяется, в основном, скоростью (энтальпией торможения) газа. Максимальное снижение теплового потока и равновесной температуры поверхности теплозащиты реализуется в области затупления многоразового ЛА при величине параметра $Z \ll 1$ и достаточно высоких скоростях ($U_\infty > 4$ км/с), когда за ударной волной реализуется значительная диссоциация молекул.

На рис. 7.1 показано возможное снижение теплового потока $\Delta q/q_0 = (q_0 - q)/q_0$ в критической точке в зависимости от каталитичности при скорости $U_\infty = 7$ км/с и различных значениях других параметров. Рис. 7.1, а демонстрирует влияние каталитичности и температуры поверхности на теле радиуса $r_0 = 1$ м при скорости полета $U_\infty = 7$ км/с и давлении $p'_0 = 10$ мбар. Повышение температуры стенки T_w приводит к снижению плотности газа $\rho_w \sim 1/T_w$ и уменьшению параметра Z . На рис. 7.1, б показано влияние каталитичности поверхности при различных давлениях газа. Снижение давления, так же как и в первом случае, приводит к уменьшению плотности и параметра Z и, как следствие, к возрастанию величины $\Delta q/q_0$. Уменьшение характерного размера затупления r_0 (рис. 7.1, в) приводит к увеличению коэффициента теплообмена $\alpha/c_p \sim r_0^{-1/2}$, уменьшению параметра Z и возрастанию величины $\Delta q/q_0$. Таким образом, при фиксированном значении скорости полета увеличение температуры поверхности теплозащитного покрытия (ТЗП), снижение давления газа и уменьшение характерных размеров затупления приводят к возрастанию влияния каталитичности поверхности на теплообмен.

Приведенные на рис. 7.1 данные свидетельствуют о том, что на теплообмен ЛА влияет не сама величина K_w , а значение параметра Z . Независимо от величины K_w , при величине Z , стремящейся к 0 или ∞ , влияние каталитичности на теплообмен будет мало.

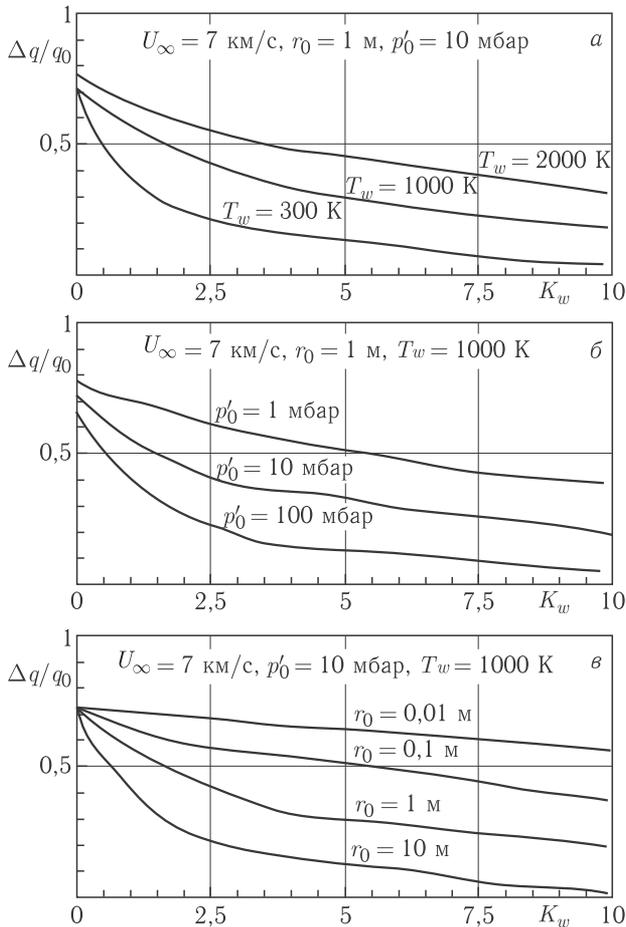


Рис. 7.1. Возможное снижение тепловых потоков в критической точке затупленного тела в зависимости от каталитичности K_w , м/с

Влияние каталитичности поверхности тепловой защиты на теплообмен показано на рис. 7.2, где приведены расчетные значения тепловых потоков на ЛА «Бор-4» к поверхности с различной каталитичностью, отнесенные к равновесным, в зависимости от высоты полета. Видно, что на высотах $H > 80$ км для ЛА рассматриваемого класса влияние каталитичности на тепловой поток уменьшается за счет

уменьшения степени диссоциации молекул в ударном слое, связанного с неравновесным протеканием физико-химических процессов. На высотах $H < 60$ км влияние каталитичности теплозащитного материала (ТЗМ) уменьшается из-за снижения скорости полета и степени диссоциации молекул азота и кислорода. Из приведенных на рис. 7.2 данных следует также, что теория асимптотически тонкого пограничного слоя с равновесными условиями на внешней границе на высотах $H > 60$ км дает погрешность в определении теплового потока, которая возрастает с высотой полета. Для тел с меньшими характерными размерами область применимости теории асимптотически тонкого пограничного слоя сдвигается в сторону меньших высот.

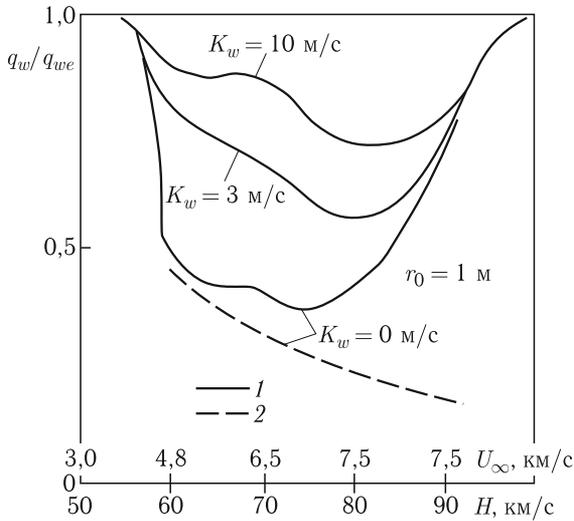


Рис. 7.2. Влияние каталитичности теплозащиты по траектории спуска ЛА «Бор-4», I — вязкий ударный слой, II — тонкий пограничный слой с равновесными условиями на внешней границе

Исследования, проведенные в дозвуковых струях ВЧ-плазмотрона, гдевозможен высокий уровень моделирования основных определяющих эти эффекты параметров h_d/H_0 и Z , показали, что разработанные для возвращаемого аппарата (ВА) «Буран» теплозащитные материалы являются достаточно низкокatalитическими в отношении реакций гетерогенной рекомбинации атомов кислорода и азота. Полученные в этих исследованиях значения каталитичности плиточной теплозащиты ТЗМК-10 и объемно силицированного углерод-углеродного материала носка и кромок крыльев (гравимол) были подтверждены данными летных испытаний ВА «Буран» и летающей модели «Бор-4» [44, 73]. На рисунках 7.3 и 7.4 приведены расчетные и экспериментально измеренные температуры поверхности теплозащиты на аппаратах «Бор-4»

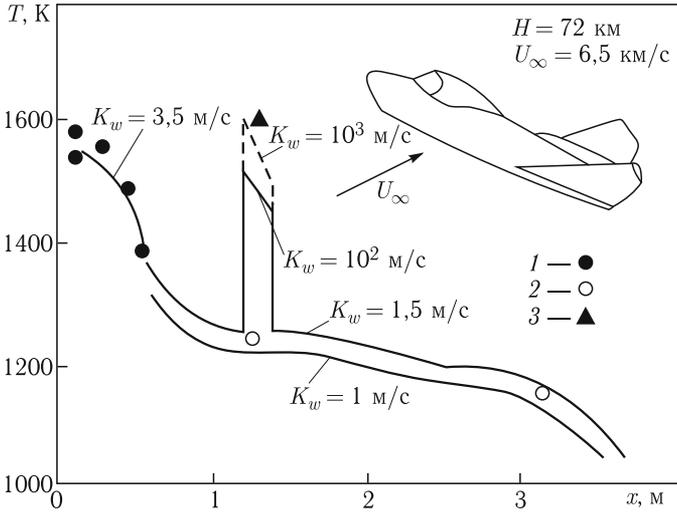


Рис. 7.3. Распределение температуры по образующей аппарата «Бор-4». Линии — расчет, значки — летный эксперимент: 1 — углерод, 2 — плитка, 3 — плитка, покрытая платиной

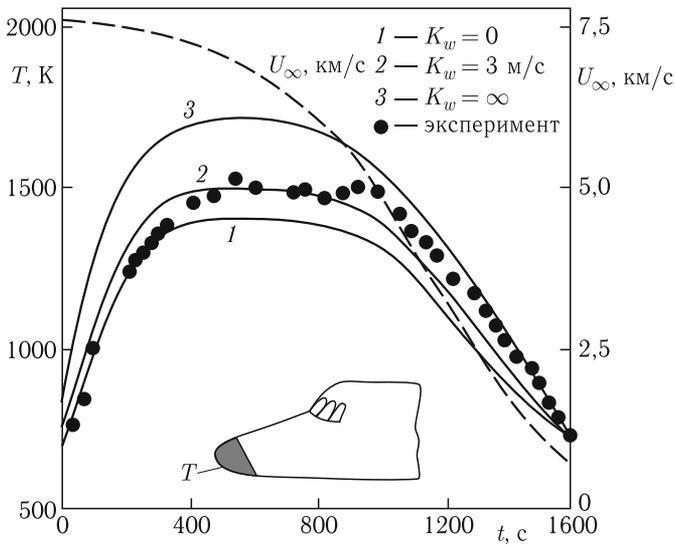


Рис. 7.4. Температура в точке торможения аппарата «Буран» и его скорость в зависимости от времени спуска

и «Буран». При этом расчетные значения температур поверхности в окрестности критической точки носового затупления с использованием полученных в ВЧ-плазмотроне значений $K_w = 3 \dots 3,5$ м/с хорошо согласуются с экспериментально измеренными для обоих аппаратов. На одной из плиток ТЗМК-10, покрытой высококаталитической платиной, зарегистрированная температура поверхности на аппарате «Бор-4» более чем на 300 К превосходит значения, полученные на штатной плиточной теплозащите (рис. 7.3). Это подчеркивает возможность сильного влияния эффекта «сверхравновесного» нагрева поверхности на стыке низко- и высококаталитических материалов.

Влияние каталитичности поверхности на длинных телах уменьшается по мере продвижения к хвостовой части аппарата. Этот эффект обусловлен уменьшением степени диссоциации молекул азота на внешней границе пограничного слоя за счет эффекта поглощения высокоэнтропийного слоя пограничным слоем. Второй безразмерный критерий подобия Z также уменьшается по мере продвижения к хвостовой части аппарата $Z \sim p^{1/2}$.

Для выяснения роли перечисленных факторов были проведены расчеты теплообмена ЛА «Space Shuttle» в области их сильного влияния на параметры газа в ударном слое. Форма ЛА «Space Shuttle» моделировалась гиперболоидом с радиусом кривизны $r_0 = 1,28$ м и углом полураствора $\theta = 41^\circ$. Такой подход часто используется при анализе процессов теплообмена на линии растекания наветренной образующей аппаратов сложной формы [279], поскольку достаточно точно отражает основные особенности поведения газодинамических параметров в ударном слое. Расчеты проводились по методике и программе, разра-

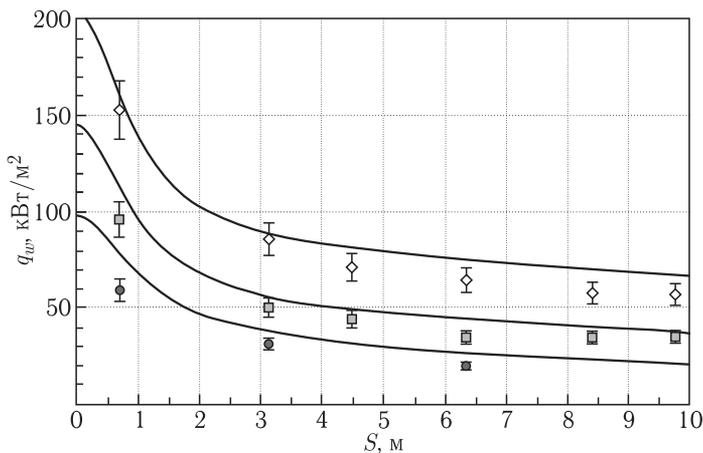


Рис. 7.5. Распределение теплового потока вдоль наветренной образующей ЛА «Space Shuttle», STS-2 (O — $H = 92,35$ км, □ — $H = 85,74$ км, ◇ — $H = 77,91$ км), значки — эксперимент [249], сплошные кривые — расчет

ботанной в ЦНИИмаш [35]. Решение задачи проводилось в постановке вязкого неравновесного ударного слоя в нескольких точках траектории с параметрами $H = 92,35, 85,74, 77,91$ км и $U_\infty \approx 7500$ м/с. В газовой фазе учитывалось неравновесное протекание физико-химических процессов, а на поверхности — гетерогенные каталитические реакции рекомбинации атомов кислорода и азота.

Подтверждением возможности такого упрощенного подхода для анализа теплообмена тел сложной формы на линии растекания являются данные сравнения распределения тепловых потоков (температур поверхности тепловой защиты), полученных в летных условиях («Space Shuttle» STS-2, Columbia) и рассчитанных по предложенной методике (рис. 7.5). Измерения температуры в летных условиях производились с помощью термопар, заделанных в поверхностной слой плиточной теплозащиты, состоящий из боросиликатной керамики.

Вероятности гетерогенной рекомбинации атомов азота и кислорода полагались равными $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$, что соответствует данным, полученным в ВЧ-плазматроне ЦНИИмаш для материала плиточной теплозащиты ТЗМК-10 (более подробно см. гл. 10).

Критерием влияния эффекта поглощения высокоэнтропийного слоя пограничным слоем на теплообмен может служить отношение расчетного теплового потока, полученного с учетом перечисленных выше факторов, к соответствующему равновесному значению. Зависимость этого отношения от длины образующей ЛА показана рис. 7.6. Из приведенных данных следует, что неравновесный тепловой поток с увеличением длины приближается к равновесному, что свидетельствует о снижении влияния эффекта каталитичности на длинных телах.

На рис. 7.7 показаны распределения концентраций атомов кислорода (сплошная линия) и азота (значки) поперек ударного слоя в четырех сечениях. Из приведенных на рисунке данных следует, что значения концентрации атомов азота на внешней границе пограничного слоя (величины помечены темными кружками) уменьшаются вниз по потоку. Для кислорода этот эффект для высот, меньших 90 км, не играет существенной роли. Это связано с тем, что температура на внешней границе пограничного слоя сохраняется достаточно высокой и кислород полностью диссоциирован практически на всей боковой поверхности аппарата.

Важным аспектом рассматриваемой проблемы является теплообмен на стыках теплозащитных материалов, в том числе «сверхравнес-

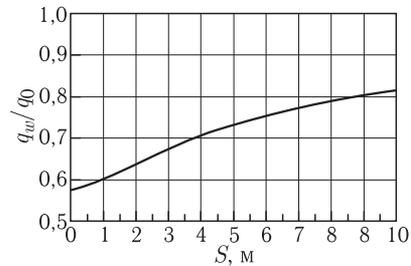


Рис. 7.6. Отношение неравновесного теплового потока к равновесному по наветренной образующей ЛА «Space Shuttle» STS-2 ($H = 77,91$ км)

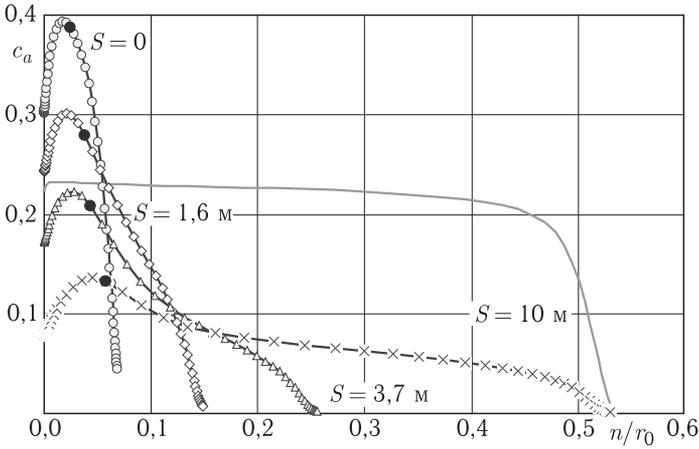


Рис. 7.7. Профили концентраций атомов поперек ударного слоя в различных сечениях ($H = 77,91$ км). Сплошная кривая — кислород, кривые со значками — азот

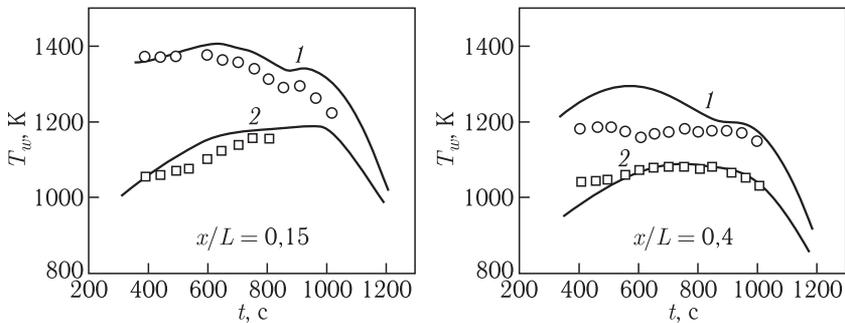


Рис. 7.8. Температуры поверхности, полученные в летном эксперименте ЛА «Space Shuttle», \circ — покрытие C742, \square — покрытие RCG (сплошные кривые — расчет: 1 — $K_w = 15$ м/с; 2 — $K_w = 0,8$ м/с)

ный» нагрев поверхности тепловой защиты в месте скачкообразного изменения каталитических свойств поверхности (от малого значения к большому). Качественное проявление этого эффекта может наблюдаться в высокотемпературных установках [249]. Однако количественное его воспроизведение требует соответствия толщин пограничного слоя в модельных экспериментах и натуральных условиях, что, как правило, невозможно. Исследованию этого эффекта было уделено значительное внимание при проведении измерений теплообмена на ЛА «Space Shuttle». В качестве эталонного высококаталитического покрытия использовалась смесь окиси железа, кобальта и хрома (черная шпинель)

в ацетатполивиниловом связующем, которое выгорало при $T = 622$ К (в зарубежной литературе это покрытие называют С742).

На рис. 7.8 приведены зависимости температуры поверхности на материале RCG (покрытие плиточной теплозащиты) и на покрытии С742 в двух сечениях по длине аппарата «Space Shuttle» от времени спуска. Видно существенное влияние каталитичности теплозащиты на температуру ее поверхности ($x/L = 0,15$). Это влияние уменьшается по мере удаления от носовой части ($x/L = 0,4$).

На рис. 7.9 приведены данные, полученные в летном эксперименте (полет STS-2) и иллюстрирующие эффект сверхравновесного нагрева тепловой защиты [267]. Видно, что температура, измеренная на плитках, покрытых высококatalитическим покрытием С742, значительно превышает не только соответствующие значения на штатном покрытии RCG, но и значения равновесной температуры (реально достигаемые уже при $K_w = 15$ м/с).

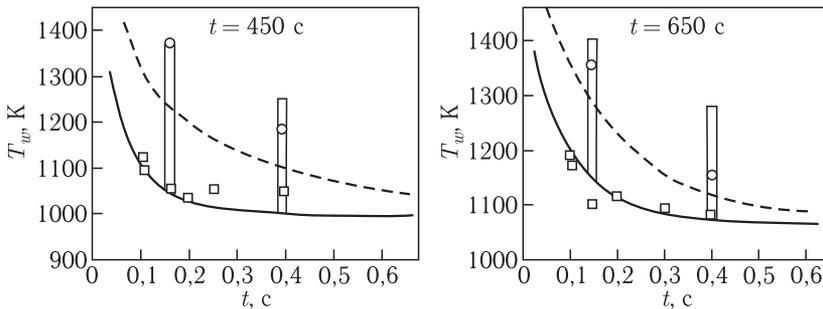


Рис. 7.9. Сверхравновесный нагрев тепловой защиты в месте стыка материалов с различной каталитичностью; сплошные кривые — расчет с $K_w = 0,8$ м/с, штриховые — расчет с $K_w = 15$ м/с, \circ — покрытие С742, \square — покрытие RCG

Для прогнозирования теплообмена к поверхности с конечной каталитической активностью на аппаратах большого удлинения и интерпретации данных летного эксперимента необходимо проведение достаточно широких экспериментальных исследований каталитичности выбранного материала, охватывающих диапазоны изменения основных параметров — энтальпии торможения, парциальных давлений атомов, температур поверхности.

В этих экспериментах наряду с определением вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов должны находиться константы скоростей элементарных стадий этого сложного многостадийного процесса и выявляться механизмы его протекания. Имея набор необходимых данных, для каждого материала может быть построена модель, адекватно описывающая совокупность экспериментальных данных по теплообмену. После этого она должна быть уточнена путем сопоставления с данными летных экспериментов на демонстраторе.

Глава 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОГО НЕРАВНОВЕСНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

В этой главе дано краткое изложение строгой постановки и численных алгоритмов, предназначенных для решения задач двух- и трехмерного обтекания тел вязким неравновесным газом для ламинарных и турбулентных течений. Данные алгоритмы реализованы в ЦНИИмаш в виде комплексов программ, которые используются в обеспечении проектных разработок летательных аппаратов различных конфигураций и назначений [51]. Многочисленные примеры применения данных методик представлены в главах 3–5, 9.

§ 8.1. Численный алгоритм решения полных уравнений Навье–Стокса

С полными уравнениями Навье–Стокса с необходимостью приходится иметь дело при решении задач обтекания тел в диапазоне от небольших до умеренных чисел Рейнольдса ($10^2 \dots 10^5$), когда режим течения ламинарный, с существенным влиянием до- и трансзвуковых областей течения, а также зон отрыва потока. Кроме того, с полными уравнениями Навье–Стокса (с применением дифференциальных моделей турбулентности, см. § 4.2) приходится иметь дело и для турбулентных течений при расчете донных и отрывных (перед препятствием) течений.

Сложные формы тел, подлежащих исследованию, делают предпочтительным использование адаптированных систем координат, связанных с преимущественным направлением потока или «разрешающих» области больших градиентов искомых функций. В то же время для сохранения консервативности разностных схем в конвективных членах уравнений используются проекции скорости u , v , w в декартовой системе координат (x, y, z) .

В произвольной криволинейной системе координат

$$\xi = \xi(x, y, z, t), \quad \eta = \eta(x, y, z, t), \quad \zeta = \zeta(x, y, z, t), \quad \tau = t,$$

система уравнений Навье–Стокса для химически и термически неравновесного газа может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}_v)}{\partial \zeta} = \tilde{\mathbf{S}}, \quad (8.1.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= J^{-1}(\xi_t \mathbf{Q} + \xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F} + \xi_z \mathbf{G}), & \tilde{\mathbf{E}}_v &= J^{-1}(\xi_x \mathbf{E}_v + \xi_y \mathbf{F}_v + \xi_z \mathbf{G}_v), \\ \tilde{\mathbf{F}} &= J^{-1}(\eta_t \mathbf{Q} + \eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F} + \eta_z \mathbf{G}), & \tilde{\mathbf{F}}_v &= J^{-1}(\eta_x \mathbf{E}_v + \eta_y \mathbf{F}_v + \eta_z \mathbf{G}_v), \\ \tilde{\mathbf{G}} &= J^{-1}(\zeta_t \mathbf{Q} + \zeta_x \mathbf{E} + \zeta_y \mathbf{F} + \zeta_z \mathbf{G}), & \tilde{\mathbf{G}}_v &= J^{-1}(\zeta_x \mathbf{E}_v + \zeta_y \mathbf{F}_v + \zeta_z \mathbf{G}_v), \\ & & \tilde{\mathbf{S}} &= J^{-1} \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Векторы \mathbf{E} , \mathbf{F} и \mathbf{G} есть x , y и z компоненты конвективных потоков массы, импульса и энергии в декартовой системе координат, \mathbf{E}_v , \mathbf{F}_v и \mathbf{G}_v — соответствующие компоненты потоков за счет вязкости, диффузии и теплопроводности. Векторы консервативных переменных $\tilde{\mathbf{Q}}$, источников $\tilde{\mathbf{S}}$ и конвективные потоки массы, импульса и энергии $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\tilde{\mathbf{G}}$ в произвольной системе координат имеют вид

$$\tilde{\mathbf{Q}} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ \rho_i \\ \rho_k e_k^{\text{vib}} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{S}} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_i \\ \omega_k^{\text{vib}} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U u + \xi_x p \\ \rho U v + \xi_y p \\ \rho U w + \xi_z p \\ (e + p)U - \xi_t p \\ \rho_i U \\ \rho_k e_k^{\text{vib}} U \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{F}} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V u + \eta_x p \\ \rho V v + \eta_y p \\ \rho V w + \eta_z p \\ (e + p)V - \eta_t p \\ \rho_i V \\ \rho_k e_k^{\text{vib}} V \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho W \\ \rho W u + \zeta_x p \\ \rho W v + \zeta_y p \\ \rho W w + \zeta_z p \\ (e + p)W - \zeta_t p \\ \rho_i W \\ \rho_k e_k^{\text{vib}} W \end{pmatrix},$$

где ρ , p — плотность и давление смеси; u , v и w — компоненты скорости вдоль декартовых осей x , y и z соответственно; U , V и W —

компоненты скорости в преобразованной системе координат:

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, & V &= \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \\ W &= \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w, \end{aligned}$$

e — полная энергия газа в единице объема:

$$e = \sum_i \rho_i C_{v,i}^{\text{tr}} T + \sum_i \rho_i e_i^{\text{el}} + \sum_k \rho_k e_k^{\text{vib}} + \sum_i \rho_i h_{f,i} + \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \rho k,$$

ρ_i — плотности химических компонент; $C_{v,i}^{\text{tr}}$ — теплоемкость поступательных и вращательных степеней свободы i -й химической компоненты на единицу массы при постоянном объеме, e_i^{el} и $h_{f,i}$ — энергия электронного возбуждения и энтальпия образования i -й компоненты на единицу массы, ω_i — источниковые члены, описывающие образование i -й компоненты в химических реакциях, e_k^{vib} — колебательная энергия k -й компоненты на единицу массы, и ω_i^{vib} — источниковые члены, учитывающие изменение плотности и колебательной энергии i -й компоненты в результате химических реакций и различных процессов колебательного возбуждения молекул (см. гл. 7), k — кинетическая энергия турбулентности (см. § 4.2).

Метрические производные связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \xi_x &= J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), & \eta_x &= J(z_\xi y_\zeta - z_\zeta y_\xi), \\ \xi_y &= J(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta), & \eta_y &= J(x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi), \\ \xi_z &= J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), & \eta_z &= J(y_\xi x_\zeta - y_\zeta x_\xi), \\ \zeta_x &= J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), & \xi_t &= -x_\tau \xi_x - y_\tau \xi_y - z_\tau \xi_z, \\ \zeta_y &= J(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi), & \eta_t &= -x_\tau \eta_x - y_\tau \eta_y - z_\tau \eta_z, \\ \zeta_z &= J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), & \zeta_t &= -x_\tau \zeta_x - y_\tau \zeta_y - z_\tau \zeta_z, \end{aligned}$$

$$J^{-1} = 1/(x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi).$$

Здесь J — якобиан преобразования координат.

Потоки за счет процессов молекулярного переноса (вязкости, диффузии и теплопроводности) $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}}$ и $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}$ имеют вид

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{v}} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{xz} + \xi_y \tau_{yz} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x m_x + \xi_y m_y + \xi_z m_z \\ -(\xi_x d_{i,x} + \xi_y d_{i,y} + \xi_z d_{i,z}) \\ -(\xi_x J_{k,x}^{\text{vib}} + \xi_y J_{k,y}^{\text{vib}} + \xi_z J_{k,z}^{\text{vib}}) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{xz} + \eta_y \tau_{yz} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x m_x + \eta_y m_y + \eta_z m_z \\ -(\eta_x d_{i,x} + \eta_y d_{i,y} + \eta_z d_{i,z}) \\ -(\eta_x J_{k,x}^{\text{vib}} + \eta_y J_{k,y}^{\text{vib}} + \eta_z J_{k,z}^{\text{vib}}) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{xy} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{xz} + \zeta_y \tau_{yz} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x m_x + \zeta_y m_y + \zeta_z m_z \\ -(\zeta_x d_{i,x} + \zeta_y d_{i,y} + \zeta_z d_{i,z}) \\ -(\zeta_x J_{k,x}^{\text{vib}} + \zeta_y J_{k,y}^{\text{vib}} + \zeta_z J_{k,z}^{\text{vib}}) \end{pmatrix};$$

здесь введены обозначения

$$m_x = u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} - q_x, \quad m_y = u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz} - q_y, \\ m_z = u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \tau_{zz} - q_z.$$

Частные производные по x , y и z , встречающиеся в компонентах тензора вязких напряжений и в выражениях потоков, описывающих диффузию и теплопроводность, вычисляются по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta}; \\ \frac{\partial}{\partial z} = \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Например, компоненты тензора вязких напряжений равны

$$\tau_{xx} = 2\mu (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}, \\ \tau_{yy} = 2\mu (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}, \\ \tau_{zz} = 2\mu (\xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}, \\ \tau_{xy} = \mu (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta + \zeta_y u_\zeta + \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta + \zeta_x v_\zeta), \\ \tau_{xz} = \mu (\xi_z u_\xi + \eta_z u_\eta + \zeta_z u_\zeta + \xi_x w_\xi + \eta_x w_\eta + \zeta_x w_\zeta), \\ \tau_{yz} = \mu (\xi_z v_\xi + \eta_z v_\eta + \zeta_z v_\zeta + \xi_x w_\xi + \eta_x w_\eta + \zeta_x w_\zeta), \\ \operatorname{div} \mathbf{V} = (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta) + (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta) + (\xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta), \\ \mu = \mu_l + \mu_t, \quad \lambda = -2/3 (\mu_l + \mu_t + \rho k),$$

где μ_l , μ_t — ламинарная и турбулентная вязкости. Выражения для потоков теплопроводности и диффузии зависят от принятой модели транспортных свойств и приведены при описании термохимической модели газовой смеси в гл. 7. В турбулентном течении в тепловой поток входят дополнительные слагаемые, учитывающие диффузионный перенос кинетической энергии турбулентности k (см. формулу (4.2.7) из § 4.2).

Граничные условия.

На плоскости (или оси — для осесимметричного течения) симметрии ставятся обычные условия симметрии. Например, в предположении, что $\xi = \text{const}$ — ось симметрии, они запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial c_i}{\partial \xi} = \frac{\partial T_k^{\text{vib}}}{\partial \xi} = w = 0.$$

На выходной границе ставятся «мягкие» граничные условия:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 c_i}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 T_k^{\text{vib}}}{\partial \xi^2} = 0.$$

Для относительно малых чисел Рейнольдса ($\text{Re}_\infty \leq 1000 \dots 3000$ при $M_\infty \sim 20$) ударная волна рассчитывается насквозь. В этом случае на внешней границе ставятся условия невозмущенного набегающего потока. Для больших чисел Рейнольдса расчет проводится с выделением ударной волны, которая рассматривается как поверхность разрыва с выполнением на ней обобщенных условий Ренкина–Гюгио. Последние получаются в результате интегрирования уравнений Навье–Стокса (8.1.1) поперек ударной волны, пренебрегая источниками и производными вдоль нее, и могут быть представлены в виде (предполагая, что координатная линия $\eta = \text{const}$ совпадает с ударной волной):

$$\mathbf{F}_\infty = (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)_{\text{sh}}.$$

Химические реакции и процессы колебательной релаксации при переходе через ударную волну предполагаются замороженными.

Конечно-разностный метод.

Неявная линеаризованная относительно предыдущего шага по времени численная схема для системы дифференциальных уравнений Навье–Стокса (8.1.1), описывающих трехмерное течение неравновесного газа в произвольной системе координат (τ, ξ, η, ζ), в общем виде может быть записана следующим образом (\mathbf{I}_0 — единичная (5×5) матрица):

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_0 + \alpha \Delta \tau \{ \delta_\xi (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}_v) + \delta_\zeta (\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}}_v) + \delta_\zeta (\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{C}}_v) - \tilde{\mathbf{T}} \}] \Delta \tilde{\mathbf{Q}} = -\Delta \tau \tilde{\mathbf{R}}^n, \\ \tilde{\mathbf{R}}^n = \delta_\xi (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_v) + \delta_\zeta (\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_v) + \delta_\zeta (\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}_v) - \tilde{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

где якобианы равны

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= (\partial\tilde{\mathbf{E}}/\partial\tilde{\mathbf{Q}})^n; & \tilde{\mathbf{A}}_v &= (\partial\tilde{\mathbf{E}}_v/\partial\tilde{\mathbf{Q}})^n, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= (\partial\tilde{\mathbf{F}}/\partial\tilde{\mathbf{Q}})^n; & \tilde{\mathbf{B}}_v &= (\partial\tilde{\mathbf{F}}_v/\partial\tilde{\mathbf{Q}})^n, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= (\partial\tilde{\mathbf{G}}/\partial\tilde{\mathbf{Q}})^n; & \tilde{\mathbf{C}}_v &= (\partial\tilde{\mathbf{G}}_v/\partial\tilde{\mathbf{Q}})^n; & \tilde{\mathbf{T}} &= (\partial\tilde{\mathbf{S}}/\partial\tilde{\mathbf{Q}})^n.\end{aligned}$$

Здесь верхний индекс n относится к известному из предыдущей итерации временному слою. Выражения для матриц якобианов $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{A}}_v$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{B}}_v$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{C}}_v$, $\tilde{\mathbf{T}}$ для совершенного газа приведены, например, в работе [245], для химически реагирующей смеси — в работе [263].

Для численного решения уравнений Навье–Стокса используется неявная итерационная схема LU-SGS [277].

При конечно-разностной записи правых частей $\tilde{\mathbf{R}}^n$ уравнений (8.1.2) используются центральные разности как для вязких, так и для конвективных членов. Применение центральных разностей для аппроксимации конвективных членов может (при наличии разрывов в течении или просто при больших градиентах величин и высоких числах Рейнольдса) вызвать нефизические четно-нечетные осцилляции параметров течения, причем решение может быть и сошедшимся. Для подавления таких численных колебаний в $\tilde{\mathbf{R}}^n$ была добавлена искусственная диссипация вида [246].

§ 8.2. Методы численного интегрирования двумерных параболизированных уравнений Навье–Стокса

Решение уравнений Навье–Стокса (НС) представляет собой весьма трудоемкую задачу. К счастью, во многих задачах расчета вязких течений можно решать систему параболизированных уравнений Навье–Стокса (ПУНС), которая по сложности занимает промежуточное положение между полными уравнениями НС и уравнениями пограничного слоя. Такие уравнения можно применять как в вязкой, так и в вязкой областях течения. Когда такие уравнения используются вместо полной системы Навье–Стокса, уравнения «параболизуются» в продольном (маршевом) направлении. Как следствие, эти уравнения можно решать более простыми маршевыми методами, аналогичными тем, что используются при расчетах уравнений пограничного слоя, эффективно снижая размерность задачи по сравнению с полной системой уравнений НС.

«Параболизация» уравнений Навье–Стокса осуществляется исключением из них членов, содержащих вторые производные переменных вдоль одной из координат — эта координата принимается в качестве маршевой. Таким образом, двумерная форма уравнений ПУНС имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial\xi} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}}{\partial\eta} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\eta} + \tilde{\mathbf{H}} \quad (8.2.1)$$

(обозначения описаны в § 8.1).

Эти соотношения, дополненные уравнением состояния газа, соотношениями для коэффициентов переноса и параметров турбулентности, начальными и граничными условиями, образуют замкнутую систему уравнений ПУНС, решение которой позволит рассчитать поле течения в рассматриваемой области.

Эта система уравнений имеет гиперболически-параболический тип всюду в областях сверхзвукового течения. Однако вследствие условий прилипания всегда будет существовать область дозвукового течения вблизи обтекаемой поверхности. Это приводит к необходимости применения тех или иных методов, обеспечивающих регуляризацию маршевой процедуры. Наиболее широко используется метод расщепления давления Виньерона [273], для которого продольный градиент давления $\partial p / \partial \xi$ заменяется на член вида $\omega^V \partial p / \partial \xi$, где

$$\omega^V = \min \left[1, \frac{\sigma \gamma M_\xi^2}{1 + (\gamma - 1) M_\xi^2} \right]; \quad M_\xi = \frac{u \xi_x + v \xi_y}{a_f \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}, \quad (8.2.2)$$

a_f — местная «замороженная» скорость звука, $\sigma < 1$ — множитель, включенный для поправки на нелинейность уравнений. При этом уравнения ПУНС сохраняют свой первоначальный вид всюду в сверхзвуковой области, и только в дозвуковом подслое член с градиентом давления не равен своему истинному значению.

Рассмотрим метод решения газодинамической подсистемы уравнений. Предполагается, что течение в некотором начальном сечении, где внешнее течение сверхзвуковое, уже рассчитано (например, по методикам § 8.1 или § 8.4). Тогда пусть решение уже получено для сечения $\xi = \text{const} = \xi_i$ и требуется определить его в новом положении $\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta_i \xi$. Для этого используем метод итераций по Ньютону, принимая в качестве начального приближения решение на слое « i »: $\tilde{\mathbf{Q}}_{i+1}^{(0)} = \tilde{\mathbf{Q}}_i$. В таком случае для последующих итераций решение получается из следующей системы алгебраических соотношений:

$$\bar{\mathbf{L}} \Delta^{(s)} \tilde{\mathbf{Q}}_{i+1} = \mathbf{RHS}_{i+1}^{(s)}, \quad (8.2.3)$$

где $\Delta^{(s)} \tilde{\mathbf{Q}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_{i+1}^{(s+1)} - \tilde{\mathbf{Q}}_{i+1}^{(s)}$ — приращение вектора консервативных переменных за итерацию,

$$\mathbf{RHS}_{i+1}^{(s)} = -\Delta^i \xi \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}}{\partial \eta} - \tilde{\mathbf{H}} \right]_{i+1}^{(s)} \quad (8.2.4)$$

— вектор невязки,

$$\bar{\mathbf{L}} = \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^+}{\partial \tilde{\mathbf{Q}}} + \Delta^i \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \tilde{\mathbf{Q}}} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}}{\partial \tilde{\mathbf{Q}}} \right) \right] \right\}^{(0)} \quad (8.2.5)$$

— матричный оператор левой части. Такая дискретизация приводит к системе алгебраических уравнений с блочно-трехдиагональной мат-

рицей, которая может быть эффективно решена методом матричной прогонки.

После того, как найдены величины консервативных переменных на новой итерации, решаются уравнения «неравновесной» подсистемы полной системы уравнений ПУНС. Они интегрируются последовательно в ходе внутреннего итерационного цикла, обеспечивающего взаимосвязь уравнений химической, термодинамической и турбулентной подсистем. При таком подходе уравнения диффузии компонент решаются скалярными прогонками.

Полученная в результате конечно-разностная схема имеет первый порядок точности по координате ξ и второй порядок по координате η . Однако из-за отсутствия схемной вязкости в схемах, использующих центрально-разностные аппроксимации производных, оказывается необходимым добавление искусственного сглаживания для подавления возникающих ошибок. Это осуществляется способом, аналогичным описанному в § 8.1.

§ 8.3. Решения параболизированных уравнений Навье–Стокса для пространственных течений

Система параболизированных уравнений Навье–Стокса в декартовой системе координат (x, y, z) в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x^{\text{inv}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^{\text{inv}}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^{\text{inv}}}{\partial z} = \mathbf{S} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_y^{\text{inv}}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^{\text{inv}}}{\partial z} \right). \quad (8.3.1)$$

Система уравнений замыкается уравнением состояния газа, выражением для определения температуры смеси и зависимостями для химических источников:

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, e, \dots, \rho_{is}, \dots), \\ T &= T(e, \dots, \rho_{is}, \dots), \\ \omega_{is} &= \omega_{is}(T, p, \dots, \rho_k, \dots). \end{aligned}$$

Метод конечных объемов.

Используя интегральные формулы Гаусса–Грина уравнения (8.3.1) проинтегрированные по произвольному замкнутому объему Ω_{ic} принимают форму

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ic}} \mathbf{Q} d\Omega_{ic} = \oint_{\partial\Omega_{ic}} \left(\mathbf{F}^{\text{inv}} - \frac{1}{\text{Re}_\infty} \mathbf{F}^{\text{vis}} \right) \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega_{ic}} \mathbf{S} d\Omega_{ic}, \quad (8.3.1')$$

где $\mathbf{F}^{\text{inv}} = \mathbf{F}_x^{\text{inv}} \mathbf{i} + \mathbf{F}_y^{\text{inv}} \mathbf{j} + \mathbf{F}_z^{\text{inv}} \mathbf{k}$; $\mathbf{F}^{\text{vis}} = \mathbf{F}_x^{\text{vis}} \mathbf{i} + \mathbf{F}_y^{\text{vis}} \mathbf{j} + \mathbf{F}_z^{\text{vis}} \mathbf{k}$; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы вдоль координатных осей; $\partial\Omega_{ic}$ — поверхность — граница объема Ω_{ic} ; \mathbf{n} — *внутренняя* единичная нормаль к этой поверхности.

Уравнение (8.3.1') может быть аппроксимировано следующим выражением:

$$\frac{V_{ic}}{\Delta^n t} \Delta^n \mathbf{Q}_{ic} = \sum_{jf=1}^{Nf} \left(\mathbf{F}_{jf}^{inv} - \frac{1}{Re_\infty} \mathbf{F}_{jf}^{vis} \right) \mathbf{n}_{jf} A_{jf,ic}, \quad (8.3.1'')$$

где V_{ic} — объем ячейки сетки с номером ic , $\mathbf{Q}_{ic} = \frac{1}{V_{ic}} \int_{\Omega_{ic}} \mathbf{Q} d\Omega_{ic}$ — средняя по объему значение вектора консервативных переменных, $\Delta^n(\cdot) = (\cdot)^{n+1} - (\cdot)^n$ — приращение параметра за итерацию $\Delta^n t = t_{ic}^{n+1} - t_{ic}^n$, Nf — число граней ячейки, равно 6, A_{jf} — площадь грани jf , \mathbf{n}_{jf} — внутренняя единичная нормаль к этой грани.

В предположении сверхзвукового характера течения вдоль поверхности тела определяющая система уравнений (8.3.1) решается маршевой процедурой вниз по потоку.

Поскольку ищется только стационарное решение уравнений (8.3.1), временной параметр t используется здесь в качестве итерационного параметра и для каждого конечного объема сетки определяется исходя из числа Куранта, т.е. используется локальное значение шага по времени для каждой отдельной ячейки для ускорения сходимости к стационарному состоянию:

$$\frac{V_{ic}}{\Delta^n t_{ic}} \Delta^n \mathbf{Q}_{ic} = \mathbf{F}_1^{inv} \cdot \mathbf{n}_1 A_1 + \mathbf{F}_2^{inv} \cdot \mathbf{n}_2 A_2 + \sum_{jf=3}^6 \left(\mathbf{F}_{jf}^{inv} - \frac{1}{Re_\infty} \mathbf{F}_{jf}^{vis} \right) \mathbf{n}_{jf} A_{jf}. \quad (8.3.2)$$

Здесь ячейки представляют собой выпуклые шестигранники, причем грани 1 и 2 расположены в плоскостях $x = \text{const}$ (нормальны к маршевой координате), грани 3 и 4 ориентированы в направлении от стенки, а грани 5 и 6 — в азимутальном направлении.

Численный невязкий поток для каждой грани может быть выражен в виде $\mathbf{F}_{jf}^{inv} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r)$, где \mathbf{Q}_l и \mathbf{Q}_r — векторы консервативных переменных, экстраполированные (реконструированные) на эту грань, в этом соотношении индекс « l » относится к внутренней реконструкции на грань ячейки ic , а индекс « r » — к внешней реконструкции. Таким образом, реконструированное поле \mathbf{Q} обычно является разрывным на грани ячейки и для нахождения численного невязкого потока должна использоваться дополнительная процедура. В данном методе используется реконструкция нулевого порядка для определения численных потоков на первой и второй гранях (вдоль оси x), так что мы можем записать

$$\mathbf{F}_1^{inv} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ic}, \mathbf{Q}_{i-1,j,k}) \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_2^{inv} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ic}, \mathbf{Q}_{i+1,j,k}). \quad (8.3.3)$$

Для экстраполяции консервативных переменных на остальные грани используется MUSCLE — экстраполяция ВанЛеера [183]. В этом слу-

чае мы имеем, например, для 4 и 6 грани

$$jf = 4$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_l &= \mathbf{Q}_{ic} + 0,25 \phi \left((1 - \kappa)(\mathbf{Q}_{ic} - \mathbf{Q}_{i,j-1,k}) + (1 + \kappa)(\mathbf{Q}_{i,j+1,k} - \mathbf{Q}_{ic}) \right), \\ \mathbf{Q}_r &= \mathbf{Q}_{i,j+1,k} - \\ &\quad - 0,25 \phi \left((1 - \kappa)(\mathbf{Q}_{i,j+2,k} - \mathbf{Q}_{i,j+1,k}) + (1 + \kappa)(\mathbf{Q}_{i,j+1,k} - \mathbf{Q}_{ic}) \right); \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

$$jf = 6$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_l &= \mathbf{Q}_{ic} + 0,25 \phi \left((1 - \kappa)(\mathbf{Q}_{ic} - \mathbf{Q}_{i,j,k-1}) + (1 + \kappa)(\mathbf{Q}_{i,j,k+1} - \mathbf{Q}_{ic}) \right), \\ \mathbf{Q}_r &= \mathbf{Q}_{i,j,k+1} - \\ &\quad - 0,25 \phi \left((1 - \kappa)(\mathbf{Q}_{i,j,k+2} - \mathbf{Q}_{i,j,k+1}) + (1 + \kappa)(\mathbf{Q}_{i,j,k+1} - \mathbf{Q}_{ic}) \right), \end{aligned}$$

где ϕ — функция-лимитер и κ — параметр экстраполяции (так что (при $\phi = 1$) для $\kappa = 1$ мы имеем центрально-разностную интерполяционную формулу второго порядка, для $\kappa = -1$ — одностороннюю экстраполяцию второго порядка, а при $\kappa = 1/3$ — смещенную интерполяцию третьего порядка).

Для расчета невязких потоков \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 используется расщепление потока Виньерона [273] — см. § 8.2.

Невязкие потоки через грани 3–6 определяются на основе схемы расщепления разностей потоков Роу [256]. В рамках этого метода численный невязкий поток через грань с реконструированными векторами консервативных переменных \mathbf{Q}_l и \mathbf{Q}_r на внутренней и внешней сторонах грани может быть выражен как

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_r) - \frac{1}{2} \sum_i |\lambda'_i| \mathbf{r}_i^+ \delta \omega_i; \quad \mathbf{F}_l = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l), \quad \mathbf{F}_r = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_r), \quad (8.3.5)$$

где \mathbf{r}_i^+ — полный набор правых собственных векторов матрицы $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_r, \mathbf{Q}_l)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - n_x \tilde{a} \\ \tilde{v} - n_y \tilde{a} \\ \tilde{w} - n_z \tilde{a} \\ \tilde{H} - \tilde{U}_n \tilde{a} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_2^+ = \begin{pmatrix} n_x \\ n_x \tilde{u} \\ n_x \tilde{v} - n_z \tilde{a} \\ n_x \tilde{w} + n_y \tilde{a} \\ n_x \theta + n_y \tilde{a} \tilde{w} - n_z \tilde{a} \tilde{v} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{r}_3^+ &= \begin{pmatrix} n_y \\ n_y \tilde{u} + n_z \tilde{a} \\ n_y \tilde{v} \\ n_y \tilde{w} - n_x \tilde{a} \\ n_y \theta - n_x \tilde{a} \tilde{w} + n_z \tilde{a} \tilde{u} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_4^+ = \begin{pmatrix} n_z \\ n_z \tilde{u} - n_y \tilde{a} \\ n_z \tilde{v} + n_x \tilde{a} \\ n_z \tilde{w} \\ n_z \theta + n_x \tilde{a} \tilde{v} - n_y \tilde{a} \tilde{u} \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

$$\mathbf{r}_5^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + n_x \tilde{a} \\ \tilde{v} + n_y \tilde{a} \\ \tilde{w} + n_z \tilde{a} \\ \tilde{H} + \tilde{U}_n \tilde{a} \end{pmatrix}; \quad \theta = \tilde{H} - \frac{\tilde{\rho} \tilde{a}^2}{\tilde{p}_e}.$$

Переменные $\delta\omega_i$ в правой части уравнения (8.3.5) есть разности характеристических переменных между правым и левым состояниями

$$\begin{aligned} \delta\omega_1 &= \frac{\Delta p - \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta U_n}{2 \tilde{a}^2}, \\ \delta\omega_2 &= \frac{n_x (\tilde{a}^2 \Delta \rho - \Delta p) - \tilde{\rho} \tilde{a} (n_z \Delta v - n_y \Delta w)}{\tilde{a}^2}, \\ \delta\omega_3 &= \frac{n_y (\tilde{a}^2 \Delta \rho - \Delta p) - \tilde{\rho} \tilde{a} (n_x \Delta w - n_z \Delta u)}{\tilde{a}^2}, \\ \delta\omega_4 &= \frac{n_z (\tilde{a}^2 \Delta \rho - \Delta p) - \tilde{\rho} \tilde{a} (n_y \Delta u - n_x \Delta v)}{\tilde{a}^2}, \\ \delta\omega_5 &= \frac{\Delta p + \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta U_n}{2 \tilde{a}^2}, \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

где $\Delta(\cdot) = (\cdot)_r - (\cdot)_l$, т. е. $\delta\omega_i$ представляет собой разложение разностей векторов состояния по простым волнам — их характеристическое разложение. Интенсивности этих простых волн есть собственные значения матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\lambda_1 = \tilde{U} - \tilde{a}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \tilde{U}, \quad \lambda_5 = \tilde{U} + \tilde{a}. \quad (8.3.8)$$

Схема расщепления разности потоков Роу не удовлетворяет энтропийному условию, так что требуется некоторая модификация для подавления нефизических решений, таких как скачки разрежения, явление «карбункула» и т. д. Поэтому здесь используется следующая энтропийная коррекция, которая добавляет малую диссипацию на тех гранях, где собственные значения меняют знак:

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i, & |\lambda_i| \geq \varepsilon, \\ \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{\lambda_i^2}{\varepsilon} \right), & |\lambda_i| < \varepsilon, \quad i = 1 \dots 5, \end{cases} \quad (8.3.9)$$

где ε — малый параметр порядка $\sim 0,1$.

Может быть показано, что в представленном виде схема Роу не удовлетворяет интегралу Бернулли для стационарного состояния. Поэтому применяется модификация схемы, позволяющая поддерживать этот

интеграл постоянным (по меньшей мере, для схемы первого порядка) по мере того как решение достигает стационарного состояния

$$F_E = F_m \bar{H}; \quad \bar{H} = \begin{cases} H_l, & F_m \leq 0, \\ H_r, & F_m > 0, \end{cases} \quad (8.3.10)$$

где F_E — поток энергии и F_m — поток массы через грань ячейки.

Для получения более высокого порядка пространственного разрешения схемы в данном подходе используются TVD-ограничители (лимитеры). Использование лимитера требуется для поддержания гладкости изначально монотонного распределения параметров и подавления возможных нефизических осцилляций решения (прежде всего колебаний решения за и перед фронтом решения интенсивной ударной волны). В этом случае лимитер ϕ в выражении (8.3.4) определяется так, что он стремится к единице в областях монотонного изменения искомых параметров, в то время как в областях локальных экстремумов и чрезмерно быстрого изменения параметров он должен стремиться к нулю. В данном методе используется лимитер Ван Альбады, поскольку он является наиболее гладкой функцией среди прочих [268], тем самым обеспечивая наилучшую сходимость к стационарному состоянию

$$\phi = \frac{2 \Delta Q_1 \Delta Q_2 + \varepsilon_\phi}{\Delta Q_1^2 + \Delta Q_2^2 + \varepsilon_\phi}, \quad (8.3.11)$$

где ε_ϕ — малая величина ($\sim 10^{-20}$), используемая для предотвращения деления на ноль в областях практически постоянного решения, а ΔQ — разности переменных, используемые в уравнении (8.3.4).

Вязкие потоки определяются обычным образом, исходя из центрально разностной аппроксимации вторых производных параметров потока на гранях ячейки.

Неявная процедура.

Уравнение (8.3.1) записывается относительно параметров в сечении x , где переменные еще не определены. Для того чтобы ослабить ограничения на временной шаг, используется неявная процедура для итерации уравнений (8.3.1). Для этого уравнения записываются на временном шаге t^{n+1} , а все параметры на шаге t^n полагаются известными. На первом шаге по времени $t = 0$ все переменные в сечении x_i , где ищется решение, полагаются равными соответствующим величинам из предыдущего сечения x_{i-1} . Таким образом, все численные потоки \mathbf{F}_{jf} (за исключением \mathbf{F}_1 , который зависит только от известных параметров на слое x_{i-1} — уравнение (8.3.2)) линеаризуются относительно предыдущего шага по времени t^n . Окончательно уравнение (8.3.1) принимает вид

$$\left(\frac{V_{ic}}{\Delta^n t_{ic}} \mathbf{I}_0 - \sum_{jf=2}^6 \left(\mathbf{A}_{ic}^{jf} - \frac{1}{Re_\infty} \widehat{\mathbf{A}}_{ic}^{jf} \right) A_{jf} \right) \Delta^n \mathbf{Q}_{ic} - \sum_{jf=3}^6 \left(\mathbf{A}_{in}^{jf} - \frac{1}{Re_\infty} \widehat{\mathbf{A}}_{in}^{jf} \right) A_{jf} \Delta^n \mathbf{Q}_{in}^{jf} = \mathbf{RHS}^{(n)}, \quad (8.3.12)$$

где **RHS** представляет собой вектор правых частей уравнений (сумма потоков, умноженная на соответствующие площади), который должен стремиться к нулю по мере того как решение сходится к стационарному состоянию и условия сохранения массы, импульса и энергии выполняются все более и более строго. Если максимальный размер сетки в радиальном направлении равен JJ , а в азимутальном — KK , то уравнения (8.3.12) образуют линейную систему размером $JJ \times KK \times 5$ (5 — размер блока — число решаемых уравнений) относительно приращений вектора состояния $\Delta \mathbf{Q}$. Поскольку непосредственное обращение матрицы практически невозможно для сеток реальных размеров, то для нахождения приближенного значения искомых переменных используется итерационная процедура. Для этих целей применяется симметричный блочный алгоритм Гаусса–Зейделя.

Граничные условия.

Из-за сверхзвукового характера течения в ударном слое нет необходимости в постановке граничных условий на выходной границе. В начальном (входном) сечении должны быть определены начальные условия, где все векторы состояний должны быть заданы, например, из численного моделирования течения около носового затупления. Таким образом, существуют три типа граничных условий, которые должны быть поставлены:

- 1) сверхзвуковой втекающий поток на внешней границе;
- 2) условия симметрии для наветренной и подветренной плоскости симметрии;
- 3) условия прилипания (непротекания для невязких уравнений) на стенке.

Поскольку центры ячеек при $j = JJ$ лежат на внешней границе сетки и головной скачок считается расположенным внутри расчетной области, то на этой границе ставятся простые граничные условия вида

$$\mathbf{Q}_{i,JJ,k} = \mathbf{Q}_\infty; \quad \Delta \mathbf{Q}_{i,JJ,k} = 0, \quad (8.3.13)$$

где \mathbf{Q}_∞ — вектор консервативных переменных в набегающем потоке.

Ячейки, принадлежащие плоскостям симметрии (при $k = 1$ и KK) строятся таким образом, что их центры лежат точно в этих плоскостях, а сами ячейки симметричны относительно них. Следовательно, все потоки через граничные грани могут быть найдены из условий

симметрии, за исключением поперечной компоненты потока, которая антисимметрична:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i,j,k=1}^{1-3,5}(jf = 5) &= \mathbf{F}_{i,j,k=1}^{1-3,5}(jf = 6); \\ \mathbf{F}_{i,j,k=1}^4(jf = 5) &= -\mathbf{F}_{i,j,k=1}^4(jf = 6); \\ \mathbf{F}_{i,j,k=KK}^{1-3,5}(jf = 6) &= \mathbf{F}_{i,j,k=KK}^{1-3,5}(jf = 5); \\ \mathbf{F}_{i,j,k=KK}^4(jf = 6) &= -\mathbf{F}_{i,j,k=KK}^4(jf = 5). \end{aligned} \tag{8.3.14}$$

Потоки через грань, лежащую на стенке, могут быть записаны с использованием условия непротекания в виде вектора

$$\mathbf{F}_{\text{wall}}^{\text{inv}} = (0 \quad n_x P_{i,j=1,k} \quad n_y P_{i,j=1,k} \quad n_z P_{i,j=1,k} \quad 0)^\top, \tag{8.3.15}$$

где « \top » — символ транспонирования, а вязкие потоки строятся методом «фиктивной ячейки», симметричной относительно плоскости стенки с параметрами, обеспечивающими выполнение условий прилипания.

§ 8.4. Метод численного интегрирования двумерных уравнений вязкого ударного слоя

Уравнения вязкого ударного слоя (ВУС) получаются из системы уравнений Навье–Стокса, записанных в криволинейной ортогональной поверхностной системе координат (s, n) , оси которой направлены вдоль поверхности тела и по нормали к ней. В этих уравнениях сохраняются только члены до первого порядка включительно по малому параметру $\varepsilon = 1/\sqrt{\text{Re}_s}$ (Re_s — число Рейнольдса, определенное по параметрам за ударной волной), и, следовательно, они содержат как уравнения Эйлера, так и уравнения пограничного слоя [203]. Уравнения ВУС запишем для компонент u и v вектора скорости потока и безразмерных переменных (штрихи в дальнейшем опустим)

$$\begin{aligned} s' &= \frac{s}{R_N}; & n' &= \frac{n}{R_N}; & \rho' &= \frac{\rho}{\rho_\infty}; & u' &= \frac{u}{U_\infty}; \\ v' &= \frac{v}{U_\infty}; & p' &= \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}; & \mu' &= \frac{\mu}{\mu_\infty}; & H'_0 &= \frac{H_0}{U_\infty^2}; & I'_i &= \frac{I_i \Delta}{\mu_\infty}, \end{aligned}$$

где R_N — радиус сферического притупления тела, Δ — расстояние между ударной волной и телом вдоль нормали к телу; ρ , p , μ , H_0 — плотность, давление, вязкость, полная энтальпия потока соответственно; I_i — диффузионный поток i -й компоненты; ∞ — индекс, относящийся к параметрам набегающего потока.

Осуществим преобразование координат:

$$\xi = s/R_N, \quad \eta = n/\Delta(\xi),$$

в результате которого расчетная область отображается в прямоугольник. Тогда осесимметричное течение вязкого неравновесного многотемпературного газа будет описываться следующей системой уравнений:

— уравнение неразрывности:

$$(\rho u \Delta)\xi + (\rho \Phi)_\eta + \frac{\rho h \Delta}{r} (u \cos \theta + v \sin \theta) = 0; \quad (8.4.1)$$

— уравнение продольного импульса:

$$\begin{aligned} \rho u u_\xi + \frac{\rho \Phi}{\Delta} u_\eta + k \rho h u_\eta + \left(p_\xi - \eta \frac{\Delta_\xi}{\Delta} p_\eta \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re} r \Delta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (r \mu h u_\eta) - \frac{k u}{\text{Re} r h} \frac{\partial}{\partial \eta} (\mu r h); \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

— уравнение нормального импульса:

$$\rho u v_\xi + \frac{\rho \Phi}{\Delta} v_\eta - k \rho u^2 + \frac{h}{\Delta} p_\eta = 0; \quad (8.4.3)$$

— уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \rho u H_{0\xi} + \frac{\rho \Phi}{\Delta} H_{0\eta} = \frac{1}{\text{Re} r \Delta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ r \mu h \left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial H_0}{\partial \eta} + \Psi \right) \right\}; \\ \Psi = \sum_i \left(\frac{1}{\text{Sc}_i} - \frac{1}{\text{Pr}} \right) h_i \frac{\partial c_i}{\partial \eta} + \\ + \sum_m \left(\frac{\lambda_m}{\mu \cdot c_{V_m}} - \frac{1}{\text{Pr}} \right) c_{V_m} \frac{\partial T_m}{\partial \eta} + \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) u u_\eta - \frac{k \Delta}{h} u^2 - \frac{v v_\eta}{\text{Pr}}; \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

— уравнение диффузии i -го компонента смеси газов:

$$\rho u c_{i\xi} + \frac{\rho \Phi}{\Delta} c_{i\eta} + \frac{1}{\text{Re} r \Delta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (r h I_i) = \rho h \omega_i; \quad (8.4.5)$$

— уравнение внутренней энергии m -й моды, соответствующей внутренней температуре T_m :

$$\rho u E_{m\xi} + \frac{\rho \Phi}{\Delta} E_{m\eta} = \frac{1}{\text{Re} r \Delta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r h \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial \eta} - \mu \sum_i e_{V_{mi}} I_i \right) \right) + h Q_m; \quad (8.4.6)$$

где r — расстояние от тела до оси симметрии потока; θ — угол наклона поверхности тела к оси потока; k — кривизна поверхности тела; $h = 1 + \eta \Delta k$ — метрический коэффициент; $\Phi = h v - \eta \Delta_\xi u$ — обобщенная скорость вдоль координаты η ; Re , Pr — числа Рейнольдса и Прандтля; c_i — массовая концентрация i -го компонента смеси газов; I_i — диффузионный поток i -го компонента; h_i — статическая энтальпия i -го компонента на единицу массы; $e_{V_{mi}}$ — часть внутренней энергии i -го компонента, принадлежащая внутренней моде m ; $E_m = \sum_i c_i e_{V_{mi}}$ — энергия внутренней моды m ; c_{V_m} — ее теплоемкость; ω_i и Q_m — обезразмеренные на U_∞ / R_N источники образования

компонентов газа и суммарная скорость обмена энергией внутренней моды m за счет соударения молекул.

В приближении совершенного или равновесного газа уравнения диффузии для внутренних степеней свободы (8.4.5), (8.4.6) не решаются, а в уравнении для полной энергии (8.4.4) член $\Psi = 0$.

Ударная волна (УВ) в модели ВУС рассматривается как бесконечно тонкий разрыв, на котором выполнены обобщенные условия Ренкина–Гюгонно, полученные путем интегрирования системы уравнений (8.4.1)–(8.4.6) поперек скачка уплотнения вдоль оси n (переменные, характеризующие течения за ударной волной, обозначены индексом sh):

$$u_{sh} \sin(\alpha - \theta) - v_{sh} \cos(\alpha - \theta) = \frac{\sin \alpha}{\rho_{sh}}; \quad (8.4.7)$$

$$p_{sh} = p_{\infty} + \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \theta)}(v_{sh} + \sin \theta); \quad (8.4.8)$$

$$u_{sh} \cos(\alpha - \theta) + v_{sh} \sin(\alpha - \theta) = \cos \alpha - \frac{\cos^2(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \frac{\mu_{sh}}{\text{Re } \Delta} \left(u_{\eta} - \frac{k \Delta}{h} u \right)_{sh}; \quad (8.4.9)$$

$$H_{0sh} = h_{\infty} + \frac{1}{2} - \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \frac{\mu_{sh}}{\text{Re } \Delta} \Psi_{sh}; \quad (8.4.10)$$

$$c_{ish} = c_{i\infty} + \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \frac{\mu_{sh} I_{ish}}{\text{Re } \Delta}; \quad (8.4.11)$$

$$E_{msh} = E_{m\infty} - \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \frac{1}{\text{Re } \Delta} \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial \eta} - \mu \sum_i e_{Vmi} I_i \right)_{sh}, \quad (8.4.12)$$

а α — угол наклона УВ, определяемый соотношением

$$\alpha(\xi) = \theta(\xi) + \text{arctg} \left(\frac{\Delta_{\xi}}{1 + k \Delta} \right). \quad (8.4.13)$$

Граничные условия на поверхности тела используются в виде (7.5.1).

Система стационарных уравнений ВУС, описывающая дозвуковые области течения (в окрестности критической линии и в пограничном слое) является эллиптической. Поэтому для получения решения во всей расчетной области применяется метод глобальных итераций (ГИ) [33, 37], заключающийся в реализации последовательных маршевых обходов расчетной области до достижения сходимости. Вычисления на данной ГИ начинаются с критической линии. Разлагая все переменные в ряд по ξ , систему (8.4.1)–(8.4.6) можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для того чтобы она стала замкнутой, необходимо задать отвечающие критической линии отход УВ Δ и вторую производную давления $p''_{\xi\xi}(\eta)$, которые берутся с предыдущей ГИ. С использованием этих данных как начальных начинается маршевый обход всей области.

Для обеспечения корректности маршевой процедуры расчета дозвуковых областей течения наклон УВ полагается заданным и определяется на предыдущей ГИ. Градиент давления p_ξ в уравнении (8.4.2) в n -м сечении находится с помощью процедуры расщепления Виньерона [273]:

$$p_\xi = \omega^V p_\xi^{m+1} + (1 - \omega^V) p_\xi^{(m)}. \quad (8.4.14)$$

Первый член в правой части (8.4.14) вычисляется на текущей $(m+1)$ -й ГИ с помощью двухточечной разности назад, второй — на предыдущей m -й ГИ посредством центральной разности:

$$p_\xi^{(m+1)} = \frac{p_{n,j}^{(m+1)} - p_{n-1,j}^{(m+1)}}{\Delta\xi}, \quad (8.4.15a)$$

$$p_\xi^{(m)} = \frac{p_{n+1,j}^{(m)} - p_{n-1,j}^{(m)}}{2\Delta\xi}. \quad (8.4.15b)$$

Если во всем ударном слое вне пограничного слоя течение сверхзвуковое, то наклон скачка определяется вместе с решением основных уравнений.

Для расчетов областей течения больших градиентов возле поверхности тела (пограничный слой) и в ударной волне (зона релаксации) с требуемым разрешением расчетная сетка сгущается с помощью преобразования (H_1, H_2 — константы преобразования):

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\ln(1 + H_1 \cdot \eta)}{\ln(1 + H_1)} - \frac{\ln(1 + H_2(1 - \eta))}{\ln(1 + H_2)} \right\}, \quad f_\eta = \frac{d\bar{\eta}}{d\eta} f_{\bar{\eta}} = \bar{\alpha}(\bar{\eta}) f_{\bar{\eta}}.$$

Уравнения (8.4.1)–(8.4.6) можно разбить на две группы: первого порядка (неразрывности и нормального импульса) и все остальные. Используя центральные разности для производных искомых параметров по η , уравнения 2-го порядка в общем виде можно записать так:

$$\begin{aligned} (\rho u)_{nj} \frac{F_{n,j} - F_{n-1,j}}{\xi_n - \xi_{n-1}} + \frac{(\rho \Phi \bar{\alpha})_{nj}}{2\Delta_n} (F_{n,j+1} - F_{n,j-1}) = \\ = \frac{\bar{\alpha}_{nj}}{\text{Re} \Delta_n^2 r_{nj}} \left(\left(\frac{\bar{\alpha} r h}{\sigma} \right)_{n,j+1/2} (F_{n,j+1} - F_{n,j}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\bar{\alpha} r h}{\sigma} \right)_{n,j-1/2} (F_{n,j} - F_{n,j-1}) \right) + S_0 - S_1 F_{n,j}, \end{aligned}$$

где $F = (u, H_0, E_m, c_i)$; $\sigma = (1, \text{Pr}, \text{Pr}_m, \text{Sc}_i)$. S_0 и S_1 представляют собой коэффициенты линеаризации источников в уравнениях (8.4.4)–(8.4.6):

$$\omega_i = W_0 + \frac{\partial \omega_i}{\partial c_i} c_i; \quad Q_m = W E_0 + \frac{\partial Q_m}{\partial T_m} T_m.$$

Указанные уравнения имеют 3-диагональный вид и легко решаются методом скалярной прогонки относительно переменной F .

Уравнения 1-го порядка тесно связаны между собой и решаются совместно. В разностном виде они аппроксимируются с помощью двухточечных разностей полуцелой точки $(n, j \pm 1/2)$. Уравнение неразрывности потока в точке $j-1/2$ записывается следующим образом:

$$\frac{(\rho u \Delta)_{n,j-1/2} - (\rho u \Delta)_{n-1,j-1/2}}{\xi_n - \xi_{n-1}} + \bar{\alpha}_{j-1/2}((\rho \Phi)_{n,j} - (\rho \Phi)_{n,j-1}) + \Delta_n \left(\frac{\rho h U_R}{r} \right)_{n,j-1/2} = 0, \quad (8.4.16)$$

где $U_R = u \cos \theta + v \sin \theta$.

Уравнение движения в точке $j + 1/2$ аппроксимируется разностным выражением:

$$\frac{1}{\xi_n - \xi_{n-1}} ((\rho u)_{n,j}(v_{n,j} - v_{n-1,j}) + (\rho u)_{n+1,j}(v_{n,j+1} - v_{n-1,j+1})) + (\rho \Phi \bar{\alpha})_{n,j+1/2}(v_{n,j+1} - v_{n,j}) - k_n(\rho u^2)_{n,j+1/2} + \frac{(\bar{\alpha} h)_{n,j+1/2}}{\Delta_n} (p_{n,j+1} - p_{n,j}) = 0. \quad (8.4.17)$$

С учетом граничных условий

$$v_1 = v_w, \quad v_j \max = v_{sh}, \quad p_j \max = p_{sh} \quad (8.4.18)$$

получим $2j_{\max}+1$ разностных соотношения для определения $2j_{\max}+1$ неизвестных: $v_1 \dots v_j \max, p_1 \dots p_j \max, \Delta$.

Линеаризовав систему (8.4.16), (8.4.17) по v_j, p_j и Δ_n , ее вместе с граничными условиями (8.4.18) можно представить в матричном виде:

$$A_j \delta \mathbf{f}_{j-1} + B_j \delta \mathbf{f}_j + C \delta \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{F}_j \delta \Delta = \mathbf{D}_j,$$

где $\delta \mathbf{f}_j = (\delta v_j, \delta p_j)^\top$. Полученная система решается стандартным методом матричной прогонки.

Для описания преимущественно сверхзвуковой области течения одновременно с газодинамическими переменными находится значение наклона ударной волны, которое связано с величиной ее отхода от тела соотношениями:

$$\Delta \xi_n = \Delta \xi_{n-1} + 2 \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}}; \quad \delta \Delta \xi_n = \frac{2}{\xi_n - \xi_{n-1}} \delta \Delta_n. \quad (8.4.19)$$

Условия (8.4.18) при этом модифицируются с помощью соотношений Ренкина–Гюгонио (8.4.7), (8.4.8):

$$\delta v_{j \max} = v_{\text{sh}} - v_{j \max} + \frac{\partial v_{\text{sh}}}{\partial \Delta \xi} \delta \Delta \xi; \quad \delta p_{j \max} = p_{\text{sh}} - p_{j \max} + \frac{\partial p_{\text{sh}}}{\partial \Delta \xi} \delta \Delta \xi,$$

а $\delta \Delta \xi$ находится по формуле (8.4.19).

Алгоритм расчета профилей параметров течения в текущем его сечении можно представить в виде следующей последовательности шагов.

1. Задание начальных профилей переменных и отхода скачка $\Delta(\xi)$.
2. Вычисление метрических коэффициентов и градиента давления с предыдущей ГИ (8.4.156).
3. Расчет газодинамических параметров u , v , ρ , H_0 , p за ударной волной при заданном составе смеси газов с помощью соотношений (8.4.7)–(8.4.11).
4. Решение уравнений диффузии (8.4.5).
5. Решение уравнений для полной энтальпии и внутренних энергий (8.4.5), (8.4.6).
6. Решение уравнения продольного импульса (8.4.2) с учетом соотношений (8.4.14), определяющих продольную составляющую скорости потока u при заданных граничных условиях на УВ u_{sh} и на поверхности тела u_w .
7. Совместное решение уравнений (8.4.1) и (8.4.3) и нахождение новых значений v , p и Δ .

Вдоль маршевой координаты ξ система уравнений аппроксимируется разностью 1-го порядка назад. Производные искомым параметров по координате η вычисляются в текущем сечении. Полученная система разностных уравнений для профиля параметров течения в данном сечении линеаризируется и итерируется по описанному алгоритму до сходимости решения. Затем происходит переход к расчету следующего сечения. Для обеспечения сходимости ГИ после выполнения текущего маршевого обхода расчетной области к полученным значениям формы УВ и поля давления применяется «нижняя релаксация»:

$$\Delta_n^{(m+1)} = \omega_\alpha \Delta_n^* + (1 - \omega_\alpha) \Delta_n^{(m)}; \quad p_{nj}^{(m+1)} = \omega_\beta p_{nj}^* + (1 - \omega_\beta) p_{nj}^{(m)},$$

где * — обозначение значений, вычисленных при текущем обходе; ω_α , ω_β — параметры «нижней релаксации» ($\omega_\alpha, \omega_\beta \sim 0,1 \dots 0,5$).

Значения $\Delta^{(m+1)}$ и $p^{(m+1)}$ используются на следующей ГИ. Для определения угла наклона волны α (по формуле (8.4.13)) находится значение величины $\Delta \xi$, ее производная вычисляется с помощью центральных разностей, а затем для устранения осцилляций сглаживается.

Расчет заканчивается, когда относительная разность всех переменных, полученных на последовательных ГИ, меньше заданной величины.

§ 8.5. Методы численного интегрирования уравнений пограничного слоя

Методы расчета пограничного слоя могут быть условно разделены на три основные группы: 1) интегральные методы, 2) методы конечных разностей, 3) методы конечных элементов.

Интегральные методы можно применять к широкому классу ламинарных и турбулентных течений в пограничном слое. Описание одного из таких методов — метода эффективной длины — приводится в гл. 3.

Успешность использования конечно-разностных методов для решения системы уравнений пограничного слоя обусловлено эффективностью маршевой процедуры вниз по потоку от области задания начальных данных. Поскольку уравнения пограничного слоя с известным распределением давления на поверхности тела представляют задачу параболического типа (при условии отсутствия возвратных течений), она эффективно может быть решена простейшей маршевой процедурой решения вдоль поверхности тела вниз по направлению течения. При обтекании затупленных тел в качестве начальных условий при этом используются автомодельные решения в окрестности точек или линий торможения потока. Обычно на поверхности тела ставятся граничные условия прилипания и фиксированной температуры стенки (или условия тепловой изоляции). На внешней границе пограничного слоя (для асимптотически тонкого пограничного слоя) ставятся условия равенства параметров их значениям в невязком потоке на стенке. Вырождение нормального уравнения импульсов к своей простейшей форме $dp/dn = 0$ кардинально упрощает решение получаемой задачи.

Простейшим неявным методом решения уравнений двумерного пограничного слоя является использование двухслойной схемы с весами на шеститочечном шаблоне, приведенном на рисунке.

Здесь и далее, переменные в узлах на слое $(i + 1)$ являются неизвестными, а на слое (i) уже рассчитаны в ходе предыдущего решения вдоль маршевой координаты s . Для произвольной искомой функции f члены со вторыми производными по пространству аппроксимируются со вторым порядком

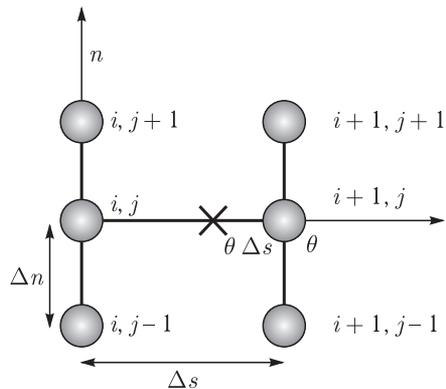


Рис. 8.1

точности по нормальному к стенке направлению (для простоты приводятся результаты для равномерной сетки, обобщение на неравномерные

сетки делается непосредственно, например, с использованием функций преобразования координат — погранслоного растяжения):

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \Delta^2 f = \frac{1}{\Delta n^2} (\alpha_{j+1/2} (f_{j+1} - f_j) - \alpha_{j-1/2} (f_j - f_{j-1})). \quad (8.5.1)$$

Первые производные по нормали (во всех уравнениях кроме уравнения неразрывности) аппроксимируются с использованием центральных разностей

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \Delta f = \frac{1}{2 \Delta n} (f_{j+1} - f_{j-1}), \quad (8.5.2)$$

а производные в маршевом направлении

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \delta f = \frac{1}{\Delta s} (f_{i+1} - f_i). \quad (8.5.3)$$

Тогда конечно-разностная схема с весами для уравнений пограничного слоя в общем виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} (\theta \rho u_j^{i+1} + (1 - \theta) \rho u_j^i) \delta f + \theta \rho v_j^{i+1} \Delta f^{i+1} + (1 - \theta) \rho v_j^i \Delta f^i = \\ = \theta \Delta^2 f^{i+1} + (1 - \theta) \Delta^2 f^i. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

При $\theta = 0$ получается явный метод с погрешностью аппроксимации $O(\Delta s) + O(\Delta n^2)$ со строгими ограничениями на шаг по маршевой координате $\Delta s \leq \rho u_{ij} \Delta n_j^2 / 2\alpha$, накладываемыми условиями устойчивости Неймана. Если $\theta = 1/2$, получается неявный метод Кранка–Николсона с порядком аппроксимации $O(\Delta s^2) + O(\Delta n^2)$. Если $\theta = 1$, получается полностью неявный метод с погрешностью аппроксимации $O(\Delta s) + O(\Delta n^2)$ являющийся безусловно устойчивым и очень надежным способом интегрирования уравнений пограничного слоя.

Уравнение неразрывности аппроксимируется со вторым порядком точности по обоим координатным направлениям с центром в точке $(i + 1/2, j + 1/2)$, т. е.

$$\frac{\rho v_j^{i+1} - \rho v_{j-1}^{i+1} + \rho v_j^i - \rho v_{j-1}^i}{2 \Delta n} + \frac{\rho u_j^{i+1} - \rho u_j^i + \rho u_{j-1}^{i+1} - \rho u_{j-1}^i}{2 \Delta s} = 0. \quad (8.5.5)$$

Линеаризация нелинейных членов уравнений проводится методом *ньютоновской линеаризации* коэффициентов; это наиболее эффективный метод, позволяющий достичь квадратичной скорости сходимости итераций (например, $\rho u^{i+1(n+1)} \approx \rho^{i+1(n+1)} u^{i+1(n)} + \rho^{i+1(n)} u^{i+1(n+1)} - \rho^{i+1(n)} u^{i+1(n)}$). В любом случае оказывается достаточным использования двух–трех итераций для достижения второго порядка по маршевой координате.

Скорость сходимости на каждом шаге по маршевой координате заметно возрастает, если уравнения движения и неразрывности решаются не независимо, а совместно. При применении схемы Кранка–Николсона всего одной совместной итерации уравнений движения и неразрывно-

сти оказывается достаточным для достижения второго порядка точности по s . Эта схема была предложена Р. Т. Дэвисом и использовалась во многих работах, посвященных исследованию течений в двумерных пограничных слоях. Данная схема является универсальной, эффективной и может быть рекомендована к применению при написании программ конечно-разностного интегрирования уравнений пограничного слоя.

При совместном решении уравнения движения и неразрывности (после проведения соответствующей линеаризации уравнений) они образуют линейную алгебраическую систему с блочной матрицей (с размером блока 2×2), которая тем не менее легко может быть обращена с использованием алгоритма, называемого *модифицированной прогонкой* [195]. Запишем уравнение движения (8.5.4) и неразрывности (8.5.5) в виде

$$\begin{aligned} B_j u_{j-1} + D_j u_j + A_j u_{j+1} + a_j v_j + b_j v_{j-1} &= C_j, \\ v_j &= v_{j-1} - e_j (u_{j-1} + u_j) + d_j. \end{aligned} \quad (8.5.6)$$

Будем искать решение (8.5.6) в виде:

$$u_j = E_j u_{j-1} + F_j + G_j v_{j-1}.$$

Подставляя его в (8.5.6), получим

$$\begin{aligned} E_j &= -\frac{B_j - e_j(A_j G_{j+1} + a_j)}{\bar{D}_j}, & F_j &= \frac{C_j - A_j F_{j+1} - d_j(A_j G_{j+1} + a_j)}{\bar{D}_j}, \\ G_j &= -\frac{A_j G_{j+1} + a_j + b_j}{D_j}, & \bar{D}_j &= D_j + A_j E_{j+1} - e_j(A_j G_{j+1} + a_j). \end{aligned}$$

§ 8.6. Метод численного интегрирования уравнений Эйлера

В данном параграфе описывается численная методика интегрирования уравнений Эйлера на основе метода конечных объемов и решения задачи о распаде разрыва на его гранях с TVD-интерполяцией параметров из центров ячеек на грань. Использование этой методики совместно с уравнениями пограничного слоя (§ 8.5) дает эффективное средство для экспресс-оценки характеристик теплообмена даже на достаточно сложных пространственных конфигурациях ЛА.

Система уравнений.

Система уравнений невязкой газодинамики в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x^{\text{inv}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^{\text{inv}}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^{\text{inv}}}{\partial z} = 0, \quad (8.6.1)$$

где $\mathbf{Q} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E\}^\top$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}_x^{\text{inv}} = \{\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u w, (E + p)u\}^\top$ — невязкий поток вдоль x -координаты, $\mathbf{F}_y^{\text{inv}} = \{\rho v, \rho v u, \rho v^2 + p, \rho v w, (E + p)v\}^\top$ — невязкий поток вдоль y -координаты, $\mathbf{F}_z^{\text{inv}} = \{\rho w, \rho w u, \rho w v, \rho w^2 + p, (E + p)w\}^\top$ — невязкий поток вдоль z -координаты.

Метод конечных объемов.

Система (8.6.1) после интегрирования по произвольному замкнутому объему Ω_{ic} с использованием теоремы Гаусса принимает форму

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ic}} \mathbf{Q} d\Omega_{ic} = \oint_{\partial\Omega_{ic}} \mathbf{F}^{\text{inv}} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega_{ic}} \mathbf{S} d\Omega_{ic}, \quad (8.6.1')$$

где $\mathbf{F}^{\text{inv}} = \mathbf{F}_x^{\text{inv}} \mathbf{i} + \mathbf{F}_y^{\text{inv}} \mathbf{j} + \mathbf{F}_z^{\text{inv}} \mathbf{k}$; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы вдоль осей x, y, z ; $\partial\Omega_{ic}$ — поверхность (замыкание) объема Ω_{ic} ; \mathbf{n} — внутренняя единичная нормаль к этой поверхности. Для пространственной неструктурированной сетки, состоящей из полигональных конечных объемов (тетраэдрических, гексаэдрических или треугольных призматических ячеек), это соотношение может быть переписано в приближенной форме

$$\frac{V_{ic}}{\Delta^n t} \Delta^n \mathbf{Q}_{ic} = \sum_{jf=1}^{Nf} \mathbf{F}^{\text{inv}} \cdot \mathbf{n}_{jf} A_{jf} + V_{ic} \mathbf{S}_{ic}, \quad (8.6.1'')$$

где V_{ic} — объем ячейки ic , $\widehat{\mathbf{Q}}_{ic} = \frac{1}{V_{ic}} \int_{\Omega_{ic}} \mathbf{Q} d\Omega_{ic}$ — среднеинтегральное значение величины консервативной переменной в данной ячейке, $\Delta^n(\cdot) = (\cdot)^{n+1} - (\cdot)^n$ — приращение величины за промежуток времени $\Delta^n t = t^{n+1} - t^n$, Nf — число граней ячейки, A_{jf} — площадь грани jf , \mathbf{n}_{jf} — внутренняя нормаль к этой грани. Это уравнение, выражающее систему законов сохранения для данной ячейки, может рассматриваться как основное в методе конечных объемов. Для его использования необходимо лишь уметь определять векторы потоков на гранях контрольного объема.

Определение невязких потоков через грани ячейки.

Величины невязких потоков \mathbf{F}^{inv} , входящие в правые части уравнений (8.6.1'') должны быть определены на всех гранях данного объема. Обозначим вектор состояния (т. е. вектор-столбец консервативных переменных) на грани jf данного конечного объема ic как \mathbf{Q}_l («левое состояние»), для схем первого порядка по координатам он кладется равным своему значению в центре ячейки, для схем более высокого порядка следует использовать тот или иной способ экстраполяции на грань. Вектор состояния с противоположной стороны грани, принадлежащий соседней ячейке in , обозначим как \mathbf{Q}_r («правое состояние»), он определяется аналогичным образом. При этом $\mathbf{F}^{\text{inv}} = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r)$ есть

некоторая функция левого и правого состояний, называемая «численным потоком».

Противопотоковые схемы обычно используют для получения величины этого потока решение задачи о распаде произвольного разрыва на грани. Использование ее точного решения приводит к схеме Годунова, которая, обладая рядом преимуществ по сравнению с другими противополоковыми схемами, является чрезмерно трудоемкой с точки зрения вычислительных затрат. По этой причине широчайшее распространение получили приближенные методы решения задачи о распаде разрыва. Другой, идеологически близкий, подход к определению численного потока на грани ячейки является обобщением обычной противополоковой схемы для одномерного уравнения переноса на случай многомерных нелинейных гиперболических уравнений и приводит к так называемым схемам расщепления потока. Здесь используются различные способы определения численного потока — схемы расщепления потока: Стигера–Уорминга [265] и ВанЛеера [271], схема расщепления потока AUSM [230], схема расщепления разности потоков Роу [256] и схема Хартена–Лакса–ВанЛеера–Ейнфельдта — HLLC [205]. Описание схемы Роу приведено в § 8.3, остальные же способы определения численного потока приведены ниже.

1. Метод расщепления вектора потока Стегера–Уорминга [265].

В рамках данного метода вектор невязкого потока «расщепляется» на компоненты, соответствующие различным направлениям распространения возмущений

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_l^+ + \mathbf{F}_r^- = \mathbf{F}^+(\mathbf{Q}_l) + \mathbf{F}^-(\mathbf{Q}_r). \quad (8.6.2)$$

Возмущения, приходящие на грань конечного объема с «левой» стороны ячейки, определяются по параметрам «слева» и наоборот. Указанное требование будет выполнено при том условии, что соответствующие якобианы $\mathbf{A}^{+(-)} = \frac{\partial \mathbf{F}^{+(-)}}{\partial \mathbf{Q}}$ обладают набором действительных неотрицательных (неположительных) собственных значений.

Оригинальный метод Стегера–Уорминга [265] был предложен для решения уравнений идеального газа. В этом случае вектор потока является однородной функцией первого порядка от вектора состояния, т. е. $\mathbf{F}^{\text{inv}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$; $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$.

В силу гиперболичности системы нестационарных уравнений Навье–Стокса, матрица Якоби \mathbf{A} может быть разложена на множители: $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}$, где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица собственных значений матрицы \mathbf{A} , а \mathbf{R} и \mathbf{R}^{-1} — матрицы соответствующих правых и левых собственных векторов. Выразим матрицу собственных значений в виде суммы положительной и отрицательной частей $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-$, матрицы составлены из неотрицательных (+) и неположительных (–) значений.

Для этого можно использовать зависимости [265]: $\lambda_k^+ = \frac{\lambda_k + |\lambda_k|}{2}$; $\lambda_k^- = \frac{\lambda_k - |\lambda_k|}{2}$, так что при $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_k^+ = \lambda_k$ и $\lambda_k^- = 0$ и наоборот. Тогда

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-)\mathbf{Q} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-,$$

где $\mathbf{F}_l^+ = \mathbf{R}_l\mathbf{\Lambda}_l^+\mathbf{R}_l^{-1}$; $\mathbf{F}_r^- = \mathbf{R}_r\mathbf{\Lambda}_r^-\mathbf{R}_r^{-1}$.

Такой вывод является строгим для случая, когда давление в уравнении состояния является однородной функцией плотности $p = \rho f(e)$ (при этом $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$).

При использовании уравнения состояния общего вида $p = f(\rho, e)$ необходима модификация вышеописанного подхода. Для этого можно разбить поток на однородную и неоднородную части:

$$\mathbf{F}^\pm = \mathbf{F}_h^\pm + \frac{1}{2}\mathbf{F}_{\text{in}} = \mathbf{A}^\pm\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\mathbf{F}_{\text{in}}; \quad \mathbf{F}_{\text{in}} = \mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{Q}.$$

Тогда для решения трехмерных уравнений Эйлера, записанных на произвольной неструктурированной расчетной сетке, получим выражение:

$$\mathbf{F}_h^+ = \begin{bmatrix} \alpha^+\chi(E - \rho H) + \gamma^+\rho \\ \lambda_0^+\rho u + \theta(\alpha^+u - \beta^+n_x) \\ \lambda_0^+\rho v + \theta(\alpha^+v - \beta^+n_y) \\ \lambda_0^+\rho w + \theta(\alpha^+w - \beta^+n_z) \\ \lambda_0^+E + \theta(\alpha^+H - \beta^+U) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_h^- = \begin{bmatrix} \alpha^-\chi(E - \rho H) + \gamma^-\rho \\ \lambda_0^-\rho u + \theta(\alpha^-u - \beta^-n_x) \\ \lambda_0^-\rho v + \theta(\alpha^-v - \beta^-n_y) \\ \lambda_0^-\rho w + \theta(\alpha^-w - \beta^-n_z) \\ \lambda_0^-E + \theta(\alpha^-H - \beta^-U) \end{bmatrix}, \quad (8.6.3)$$

где $U = un_x + vn_y + wn_z$ — контравариантная компонента скорости;

$$\theta = \rho p_\rho, \quad (p_\rho = \partial p / \partial \rho); \quad \chi = p_e / \rho, \quad (p_e = \partial p / \partial e),$$

$$\alpha^\pm = \frac{\lambda_1^\pm + \lambda_5^\pm - 2\lambda_0^\pm}{2a^2}; \quad \beta^\pm = \frac{\lambda_5^\pm - \lambda_1^\pm}{2a};$$

$$\gamma^\pm = \frac{-2U \pm |-U + a| \pm |-U - a|}{4};$$

$$\lambda_1^\pm = \frac{(-U - a) \pm |-U - a|}{2}; \quad \lambda_2^\pm = \lambda_3^\pm = \lambda_4^\pm = \lambda_0^\pm = \frac{(-U) \pm |U|}{2};$$

$$\lambda_5^\pm = \frac{(-U + a) \pm |-U + a|}{2};$$

$a = \sqrt{p_\rho + \chi p / \rho}$ — «замороженная» скорость звука.

Неоднородная часть невязкого потока запишется как вектор:

$$\mathbf{F}_{\text{in}} = [0 \quad -n_x(p - \theta) \quad -n_y(p - \theta) \quad -n_z(p - \theta) \quad -U(p - \theta)]^\top.$$

2. Метод расщепления потока ВанЛеера [271].

ВанЛеер предложил иной способ расщепления потока, введя ряд ограничений на расщепление его компонентов. В частности, величини

ны \mathbf{F}^\pm и связанные с ними якобианы \mathbf{A}^\pm должны быть непрерывными функциями числа Маха и выражаться полиномами наименьшей возможной степени. Вместе с тем собственные значения \mathbf{A}^\pm должны оставаться положительными или нулевыми, а \mathbf{A}^- — отрицательными или нулевыми. Данные предположения позволяют записать «расщепление» в следующей форме:

$$\begin{aligned} M_{jf} > +1, \quad \mathbf{F}^+ &= \mathbf{F}^{\text{inv}}(\mathbf{Q}_l), \quad \mathbf{F}^- = 0, \\ M_{jf} < -1, \quad \mathbf{F}^+ &= 0, \quad \mathbf{F}^- = \mathbf{F}^{\text{inv}}(\mathbf{Q}_r), \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

$$|M_{jf}| \leq 1, \quad \mathbf{F}^\pm = \begin{bmatrix} m^\pm \\ m^\pm \left(u + n_x \frac{p}{\rho \tilde{a}^2} (-U \mp 2\tilde{a}) \right) \\ m^\pm \left(v + n_y \frac{p}{\rho \tilde{a}^2} (-U \mp 2\tilde{a}) \right) \\ m^\pm \left(w + n_z \frac{p}{\rho \tilde{a}^2} (-U \mp 2\tilde{a}) \right) \\ m^\pm \tilde{H} \end{bmatrix}, \quad m^\pm = \frac{1}{4} \rho \tilde{a} \left(-\frac{U}{\tilde{a}} \pm 1 \right)^2.$$

В отличие от оригинальной схемы ВанЛеера, используем модификацию, обеспечивающую улучшение сходимости разностной схемы при расчете гиперзвуковых течений. Для строгого сохранения интеграла Бернулли в невязком течении полная энтальпия на грани ячейки определяется исходя из условия:

$$\tilde{H} = \begin{cases} H_l, & m \equiv m_l^+ + m_r^- \geq 0, \\ H_r, & m < 0, \end{cases} \quad (8.6.5)$$

а величина «скорости звука» \tilde{a} , входящая в расщепление в дозвуковой области определяется не по статической, а по полной энтальпии: $\tilde{a} \sim \sqrt{H_l + H_r}$.

3. Метод AUSM [230].

Расщепление вектора невязкого потока с малой собственной диссипацией было предложено в работе [230]. Согласно этому подходу вектор потока на грани ячейки разделяется на конвективную и акустическую составляющие:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_p, \quad (8.6.6)$$

где

$$\mathbf{F}_c = \begin{cases} m_{\text{in}} (1 \quad u_l \quad v_l \quad w_l \quad H_l)^\top, & m_{\text{in}} \geq 0, \\ m_{\text{in}} (1 \quad u_r \quad v_r \quad w_r \quad H_r)^\top, & m_{\text{in}} < 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_p = (0 \quad -n_x p_{\text{in}} \quad -n_y p_{\text{in}} \quad -n_z p_{\text{in}} \quad 0)^\top;$$

m_{in} и p_{in} — массовый поток и давление на грани, определяемые выражениями:

$$m_{in} = a_{in}(\rho_l m^+ + \rho_r m^-); \quad m^+ = \frac{\tilde{m} + |\tilde{m}|}{2}; \quad m^- = \frac{\tilde{m} - |\tilde{m}|}{2},$$

$$p_{in} = p_5^+(M_l) p_l + p_5^-(M_r) p_r; \quad \tilde{m} = M_4^+(M_l) + M_4^-(M_r),$$

$$M_l = -U_l/a_{in}; \quad M_r = -U_r/a_{in}; \quad a_{in} = 0,5(a_l + a_r),$$

$$p_5^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \frac{3}{16}M(M^2 - 1)^2, & |M| < 1, \\ \frac{1}{M}M_1^\pm, & |M| \geq 1, \end{cases}$$

$$M_4^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2, & |M| < 1, \\ M_1^\pm, & |M| \geq 1, \end{cases}$$

$M_1^\pm = \frac{1}{2}(M \pm |M|)$ — гладкие полиномы.

4. Метод HLLC [205].

Другой способ приближенного решения задачи Римана — метод, предложенный в работе [205], позволяющий получить положительную консервативную аппроксимацию исходных уравнений, ценой увеличения собственной диссипации численной схемы. Выражение для потока через грань в этом подходе имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\left(\frac{b_r^+}{b_r^+ - b_l^-} \mathbf{F}_l - \frac{b_l^-}{b_r^+ - b_l^-} \mathbf{F}_r\right) - \frac{b_r^+ b_l^-}{b_r^+ - b_l^-} (\mathbf{Q}_r - \mathbf{Q}_l), \quad (8.6.7)$$

где $b_r^+ = \max(-\tilde{U} + \tilde{a}, -U_r + a_r, 0)$; $b_l^- = \min(-\tilde{U} - \tilde{a}, -U_l - a_l, 0)$, причем переменные с тильдой — средние по Роу контравариантной компоненты скорости потока и скорости звука.

Определение величин в узлах расчетной сетки.

Для создания численной схемы с порядком по пространственным координатам выше первого необходимо получать величины искоемых параметров не только в центре конечного объема, но и в его вершинах. Кроме того, эти величины также требуются для более точной реализации граничных условий. В этом случае для поддержания, к примеру, общего второго порядка схемы по пространству процедура получения значений в вершинах должна быть, как минимум, линейной. Существует несколько различных способов интерполяции параметров из центров ячеек в их вершины. В общем случае линейной интерполяции величина произвольного параметра q_{iv} в вершине может быть получена как взвешенная сумма величин в центрах ячеек $q_{ic1}, q_{ic2}, \dots, q_{icn}, \dots$ —

$$q_{iv} = \sum_{n=1}^{N_c} w_n q_{icn} / \sum_{n=1}^{N_c} w_n, \quad \text{где } w_n \text{ — постоянные веса, } N_c \text{ — полное чис-}$$

ло ячеек, окружающих данную вершину. Простейший способ выбора весов — положить их равными обратным объемам соответствующих ячеек — $w_n = 1/V_{icn}$. Другой возможный способ — интерполяция по обратным расстояниям (например, [224]) — $w_n = 1/|\mathbf{r}_{icn} - \mathbf{r}_{iv}|$. Эти формулы просты, но не обеспечивают второго порядка по координатам. Более строгий подход был предложен в [215, 251], где использовался метод наименьших квадратов — $L(q_{iv}) = \sum_{n=1}^{Nc} w_n (q_{icn} - q_{iv})$. Полагая

$$w_n = 1 + \lambda_x(x_{icn} - x_{iv}) + \lambda_y(y_{icn} - y_{iv}) + \lambda_z(z_{icn} - z_{iv}),$$

получим в общем трехмерном случае:

$$\lambda_x = \frac{\begin{vmatrix} R_x & I_{xy} & I_{xz} \\ R_y & I_{yy} & I_{yz} \\ R_z & I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}}, \quad \lambda_y = \frac{\begin{vmatrix} I_{xx} & R_x & I_{xz} \\ I_{xy} & R_y & I_{yz} \\ I_{xz} & R_z & I_{zz} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}}, \quad \lambda_z = \frac{\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & R_x \\ I_{xy} & I_{yy} & R_y \\ I_{xz} & I_{yz} & R_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}},$$

где

$$R_x = \sum_{n=1}^{Nc} (x_{icn} - x_{iv}), \quad R_y = \sum_{n=1}^{Nc} (y_{icn} - y_{iv}), \quad R_z = \sum_{n=1}^{Nc} (z_{icn} - z_{iv}),$$

$$I_{xx} = \sum_{n=1}^{Nc} (x_{icn} - x_{iv})^2, \quad I_{yy} = \sum_{n=1}^{Nc} (y_{icn} - y_{iv})^2, \quad I_{zz} = \sum_{n=1}^{Nc} (z_{icn} - z_{iv})^2,$$

$$I_{xy} = \sum_{n=1}^{Nc} (x_{icn} - x_{iv})(y_{icn} - y_{iv}), \quad I_{xz} = \sum_{n=1}^{Nc} (x_{icn} - x_{iv})(z_{icn} - z_{iv}),$$

$$I_{yz} = \sum_{n=1}^{Nc} (z_{icn} - z_{iv})(y_{icn} - y_{iv}).$$

Заметим, что величины весов w_n зависят только от геометрических параметров и для стационарной сетки могут быть рассчитаны единожды, перед началом газодинамического расчета.

Схема второго порядка.

Для повышения пространственного порядка схемы до второго используется линейная MUSCL-реконструкция параметров внутри ячейки [270] с TVD-лимитерами. Полагая линейное изменение параметров в ячейке, получим с точностью до второго порядка

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_{ic} + \nabla \mathbf{Q}_{ic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ic}). \quad (8.6.8)$$

Градиент в центре ячейки может быть определен с использованием интегральной формулы Грина

$$\nabla \mathbf{Q} = -\frac{1}{\Omega_{ic}} \oint_{\partial\Omega_{ic}} \mathbf{Q} \mathbf{n} d\sigma.$$

В этой формуле удобно проводить интегрирование по поверхности данной ячейки. Тогда последний интеграл оценивается как сумма произведений параметров в центрах граней на соответствующие площади. В простейшем случае значения в центре грани оцениваются как полусумма соответствующих параметров в центрах ячеек, которые разделяет эта грань. Тогда эта формула принимает вид

$$\nabla \mathbf{Q}_{ic} = -\frac{1}{\Omega_{ic}} \sum_{jf=1}^{Nf} \frac{\mathbf{Q}_{ic} + \mathbf{Q}_{in}}{2} A_{jf} \mathbf{n}_{jf}.$$

Небольшая модификация этой формулы на обратные расстояния до центра граней приводит к зависимости

$$\nabla \mathbf{Q}_{ic} = -\frac{1}{\Omega_{ic}} \sum_{jf=1}^{Nf} \frac{\mathbf{Q}_{ic} |\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}_{jf}| + \mathbf{Q}_{in} |\mathbf{r}_{ic} - \mathbf{r}_{jf}|}{|\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}_{jf}| + |\mathbf{r}_{ic} - \mathbf{r}_{jf}|} A_{jf} \mathbf{n}_{jf}.$$

Наиболее аккуратный подход к оценке поверхностного интеграла основан на использовании параметров в вершинах ячейки:

$$\nabla \mathbf{Q}_{ic} = -\frac{1}{\Omega_{ic}} \sum_{jf=1}^{Nf} \frac{1}{Nv_{jf}} \left(\sum_{iv=1}^{Nv_{jf}} \mathbf{Q}_{iv} \right) A_{jf} \mathbf{n}_{jf},$$

где Nv_{jf} — число вершин грани jf .

Хотя такая схема и дает второй порядок по пространственным координатам, тем не менее она приводит к нефизическим осцилляциям решения вблизи областей резкого изменения параметров потока (например, вблизи скачков). Для предотвращения таких осцилляций и сохранения монотонности метода используется TVD-подход. В этом случае линейный член в (8.6.8) умножается на нелинейную функцию — лимитер, равный единице всюду в областях гладкости решения и стремящийся к нулю в областях больших градиентов параметров. Такая процедура снижает общий второй порядок схемы, но позволяет получить монотонные решения даже в областях вблизи газодинамических разрывов. Для неструктурированных сеток, как указано в [188], существует принципиальное отличие от случая сеток структурированных. Согласно [188], величина параметра, интерполированного на грань ячейки, не должна превышать (соответственно быть меньше) величин во всех соседних ячейках и на всех гранях данной ячейки. Таким образом, вектор переменных на грани ячейки может быть записан в виде

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}_{jf}) = \mathbf{Q}_{ic} + \phi_{ic} \nabla \mathbf{Q}_{ic} (\mathbf{r}_{jf} - \mathbf{r}_{ic}), \quad (8.6.9)$$

где ϕ — функция-лимитер, определенная ниже. Пусть

$$Q_{ic}^{\min} = \min(Q_{ic}, Q_{in}), \quad Q_{ic}^{\max} = \max(Q_{ic}, Q_{in}),$$

при этом мы имеем $Q_{ic}^{\min} \leq Q_{ic}(r) \leq Q_{ic}^{\max}$, $r \in \Omega_{ic}$. Определим Q_{icjf} как величину, полученную по (8.6.8) без использования лимитера (т. е. чистой линейной интерполяцией). Обозначив

$$\Delta_- = Q_{icjf} - Q_{ic}, \quad \Delta_+ = \begin{cases} Q_{ic}^{\max} - Q_{ic}, & \Delta_- > 0, \\ Q_{ic}^{\min} - Q_{ic}, & \Delta_- < 0, \end{cases}$$

получим [272]

$$\phi_{icjf} = \frac{\Delta_+^2 + 2\Delta_+\Delta_-}{\Delta_+^2 + \Delta_+\Delta_- + 2\Delta_-^2} \quad \text{и} \quad \phi_{ic} = \min(1, \phi_{icjf}). \quad (8.6.10)$$

Итерационная процедура.

Использование неявных схем интегрирования по времени для решения стационарных задач методом установления представляется желательным, поскольку они не имеют жестких ограничений на временной шаг, связанных с условием Куранта. В отличие от случая структурированных сеток, использование методов покоординатного расщепления (типа ADI) для неструктурированных сеток весьма затруднено, из-за их «*ijk*-неупорядоченности». Поэтому использование точечных неявных методов итераций Гаусса–Зейделя является более перспективным в этих случаях, поскольку они напрямую не связаны с упорядоченностью сетки. Система уравнений (8.6.1''), линеаризованная относительно приращений переменных на n -том временном шаге, имеет вид

$$\mathbf{D}\Delta^n \mathbf{Q}_{ic} - \sum_{jf}^{Nf} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{jf}}{\partial \mathbf{Q}_{in}} \right) \mathbf{n}_{jf} A_{jf} \Delta^n \mathbf{Q}_{in} = \mathbf{Res}_{ic}^n \quad (8.6.11)$$

где $\mathbf{D} = \left(\frac{V_{ic}}{\Delta^{n_t}} \mathbf{I}_0 - \sum_{jf}^{Nf} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{jf}}{\partial \mathbf{Q}_{ic}} \right) \mathbf{n}_{jf} A_{jf} \right)$, $\left(\frac{\partial \mathbf{F}_{jf}}{\partial \mathbf{Q}} \right)$ — (5×5) -якобианы газодинамических потоков. Получаемая линейная алгебраическая система уравнений (порядка $5 \times Nc$) решается при помощи симметричного итерационного точечного алгоритма Гаусса–Зейделя.

Глава 9

ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛООБМЕНА НА ПРИТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ

В этой главе, опираясь на результаты расчетов, проведенных на основе описанных выше приближенных и точных методов, а также на экспериментальные данные, проведен анализ особенностей и закономерностей теплообмена на телах различной формы, типичных для ракетно-космической техники.

§ 9.1. Теплообмен на тупых и тонких притупленных телах

Наиболее характерной особенностью пограничного слоя на тупых или притупленных телах в гиперзвуковом потоке является его развитие в неоднородном внешнем потоке с существенным градиентом энтропии поперек линий тока (но с постоянной полной энтальпией $H = H_\infty$), обусловленным криволинейностью ударной волны, отошедшей от передней части тела. И этот эффект *вихревого вязко-невязкого взаимодействия*, или *энтропийный эффект*, оказывается в данном случае наиболее важным среди других, перечисленных в § 2.5 эффектов вязко-невязкого взаимодействия, если ограничиться (как ниже) лишь *погранслойными* режимами течений, реализуемыми при умеренных и достаточно больших числах Рейнольдса.

Параметры течения в невязких *вихревых* (для тупых тел) или *высокоэнтропийных* (для тонких притупленных тел, см. § 2.2, 2.3) слоях с постоянным давлением в их пристеночной области в случае квазисовершенного газа (см. (1.3.7)) можно на основе общих формул (2.2.4) представить в виде

$$\begin{aligned} h^{(0)}(\bar{\psi}, \bar{p}_b) &= h_b(\bar{p}_b) G(\bar{\psi}), \quad U^{(0)} = \sqrt{2(H_\infty - h^{(0)})}, \\ h_b &= H_\infty \bar{p}_b^{(\gamma_* - 1)/\gamma_*}, \quad G(\bar{\psi}) = s^{1/\gamma_*} = \sin^{2/\gamma_*} \alpha(\bar{\psi}), \quad \gamma_* = \gamma_*(\bar{\psi}), \\ \bar{h} &= \frac{h}{H_\infty}, \quad \bar{p}_b = \frac{p_b}{p'_0}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_0}, \quad \psi_0 = \pi^\nu r_0^{1+\nu} \rho_\infty U_\infty, \quad \frac{p}{\rho h} = \frac{\gamma_* - 1}{\gamma_*}. \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

Здесь h_b и p_b — энтальпия и давление на поверхности тела, $s = \sin^2 \alpha$ (см. (2.2.2)) — «энтропийная» функция, r_0 — характерный радиус носка, $\alpha(\bar{\psi})$ — угол наклона ударной волны в точке пересечения ее линией тока с данной величиной безразмерного расхода $\bar{\psi}$. Как показано в § 1.3, эффективный показатель адиабаты газа γ^* мало изменяется вдоль линий тока.

Для тупых или притупленных тел в гиперзвуковом потоке метод среднемассовых величин из § 5.4 используется в модифицированной форме, когда среднемассовая энтальпия h_a определяется интегралом (5.4.1б) от функции $h^{(0)}$

$$\begin{aligned} h_a &= h_b G_a(\bar{\psi}), \quad G_a(\bar{\psi}) = \frac{1}{\bar{\psi}} \int_0^{\bar{\psi}} G(\bar{\psi}) d\bar{\psi}, \\ U_a &= \sqrt{2(H_\infty - h_a)} = U_{\max} \sqrt{1 - G_a \bar{p}_b^{(\gamma^*-1)/\gamma^*}}, \\ U_{\max} &= \sqrt{2H_\infty} \approx U_\infty. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Пример функций $G(\bar{\psi})$ и $G_a(\bar{\psi})$ для равновесного воздуха приведен на рис. 9.1, и их сравнение свидетельствует о «долговременном» отставании среднемассовой энтальпии h_a от местной h_δ на границе пограничного слоя при заданном расходе газа через него.

Тупые тела. В окрестности точки торможения тупого тела в формуле метода эффективной длины градиент скорости c следует заменить среднемассовым c_a . Для его определения формулы (9.1.1), (9.1.2) для скоростей U_b на теле (при $G = 1$), $U^{(0)}(\bar{\psi})$ в вихревом слое и среднемассовой $U_a(\bar{\psi})$ принимают вид

$$\begin{aligned} U_b &= U_\infty \sqrt{1 - \bar{p}_b^{(\gamma^*-1)/\gamma^*}} \approx U_\infty c \bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{x}{r_0}, \\ U^{(0)} &= U_b \sqrt{1 + \frac{(1 - G(\bar{\psi})) \bar{p}^{\frac{\gamma^*-1}{\gamma^*}}}{\bar{U}_b^2}} \approx U_\infty c^{(0)} \bar{x}, \\ U_a &= U_b \sqrt{1 + \frac{(1 - G_a(\bar{\psi})) \bar{p}^{\frac{\gamma^*-1}{\gamma^*}}}{\bar{U}_b^2}} \approx U_\infty c_a \bar{x}, \\ \bar{\psi} &= \frac{\psi}{\psi_0}, \quad \bar{U} = \frac{U}{U_\infty}. \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

В окрестности точки торможения для $G(\bar{\psi})$ и $G_a(\bar{\psi})$ получим разложения

$$1 - G = \frac{1}{\gamma_*} \left(\frac{r_0}{R_s} \right)^2 \bar{\psi}^{-2/(1+\nu)},$$

$$1 - G_a = g_a \bar{\psi}^{-2/(1+\nu)}, \quad g_a = \frac{1 + \nu}{\gamma_* (3 + \nu)} \left(\frac{r_0}{R_s} \right)^2, \quad (9.1.4)$$

где R_s — радиус кривизны ударной волны на оси симметрии (при $x = 0$). Граничная же функция $\bar{\psi}_\delta$ определяется из (5.4.2) (при этом $c = c^{(0)}$, если расход через пограничный слой определять по скорости на внешней границе, и $c = c_a$, если по среднemasсовой), т. е.

$$\bar{\psi}_\delta = \frac{\psi_\delta}{\psi_0} = \alpha_\nu \bar{\text{Re}}^{-1/2} c_a^{1/2} \bar{x}^{1+\nu}, \quad \bar{x} = \frac{x}{r_0},$$

$$\alpha_\nu = \frac{2^\nu f_\delta}{[2(1 + \nu)]^{1/2}}, \quad \bar{\text{Re}} = \frac{\rho_\infty^2 U_\infty r_0}{\rho_* \mu_*}, \quad f_\delta = 3,3. \quad (9.1.5)$$

Выражая с помощью (1.3.10) произведение $\rho_* \mu_*$ через параметры невязкого потока, можно получить (здесь определяющая энтальпия h_{*a} вычисляется по среднemasсовой h_a)

$$\bar{\text{Re}} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right)^n \bar{h}_{*a}^{-n} M_\infty^{-2(1-n)} \text{Re}_\infty, \quad \text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty r_0}{\mu_\infty}, \quad \bar{h}_{*a} = \frac{h_{*a}}{H_\infty}. \quad (9.1.6)$$

Очевидно, $\bar{\text{Re}} \ll \text{Re}_\infty$ при $M_\infty \gg 1$. Из формул (9.1.4), (9.1.5) следует, что при $\bar{\text{Re}} \gg 1$ для осесимметричных течений разность $1 - G_a$ имеет порядок $\bar{\text{Re}}^{-1/2}$, в то время как для плоских течений ее порядок $\bar{\text{Re}}^{-1}$ (более высокий, чем вся теория пограничного слоя). Более того, для плоских течений, как видно из формулы (9.1.8), на поверхности тела ($\psi = 0$) вихрь строго равен нулю. Таким образом, в окрестности плоской критической точки ($\nu = 0$) эффект завихренности несущественен, поэтому результирующие формулы выпишем лишь для $\nu = 1$. В этом случае $1 - G_a = (1 - G)/2$, и формулы (9.1.3) для $c^{(0)}$ и c_a примут вид:

$$\frac{c^{(0)}}{c} = \left[1 + \Omega \left(\frac{c^{(0)}}{c} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad \frac{c_a}{c} = \left[1 + \frac{1}{2} \Omega \left(\frac{c_a}{c} \right)^{1/2} \right]^{1/2},$$

$$\Omega = \frac{f_\delta}{\gamma_* c^{3/2}} \left(\frac{r_0}{R_s} \right)^2 \bar{\text{Re}}^{-1/2}. \quad (9.1.7)$$

Отношения $q_w/q^{(0)}$ тепловых потоков в точке торможения, рассчитанных с учетом завихренности (q_w) и без ($q^{(0)}$) по среднemasсовым (U_a) и по внешним ($U^{(0)}$) скоростям, равны соответственно $q_w/q^0 = (c_a/c)^{1/2}$ и $(c^{(0)}/c)^{1/2}$.

Параметр Ω в (9.1.7) имеет тот же смысл, что и в (5.4.19). Формулы же для отношений (c_a/c) , хотя и различаются внешне, количественно

но дают почти совпадающие результаты. С ростом числа Рейнольдса коэффициент $(c_a/c)^{1/2}$ имеет асимптотику $(c_a/c)^{1/2} - 1 \sim \text{Re}_\infty^{-1/2}$. Зависимости отношения $q_w/q^{(0)}$ от числа Re_∞ для сферы при $M_\infty = 25$, $\gamma^* = 1,13$ (условия рис. 9.1) и при $M_\infty = 20$, $\gamma^* = 1,4$ приведены на рис. 9.2.

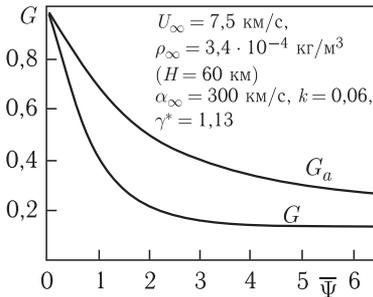


Рис. 9.1. Функции G и G_a для равновеснодиссоциирующего воздуха

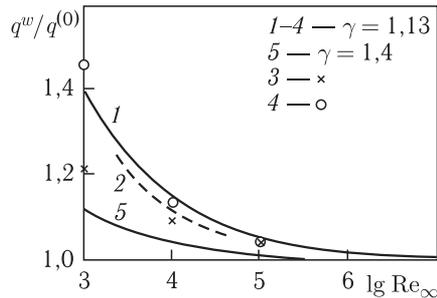


Рис. 9.2. Влияние завихренности на тепловой поток в точке торможения сферы: 1, 5 — метод среднemasовых величин; 2 — пограничный слой; 3, 4 — уравнения Навье–Стокса (сквозной расчет и с выделяемой ударной волной)

Как видно, влияние завихренности на тепловые потоки мало при $\gamma = 1,4$, но заметно при $\gamma^* = 1,13$ при $\text{Re}_\infty < 10^4$. Кривые $q_w/q^{(0)}$ для сферы для различных чисел Re качественно близки к изображенным на рис. 5.2, а из § 5.2 и образуют довольно узкий пучок, здесь не приведенный. На рис. 9.3 для затупленного по сфере короткого конуса $\theta = 10^\circ$ для равновесного воздуха показаны отношения q_w/q_{w0} для условий рис. 9.1, где q_{w0} — тепловой поток без учета завихренности (т. е. при $\text{Re}_\infty = 10^6$ в данном случае). Кривые 1, 1', 2, 2' и 6 получены в рамках уравнений Навье–Стокса, а кривые 3, 4 и 5 (для $\text{Re}_\infty = 10^4$) получены соответственно в рамках модели ПУНС (см. гл. 2) и в рамках точной погранслошной модели.

Численный расчет пограничного слоя проведен с условиями (3.4.2) сопряжения его с невязким высокоэнтропийным слоем [130] и методом среднemasовых величин. Как видно, кривые 2 и 3 практически сливаются, кривая 2' — достаточно к ним близка, а кривые 4 и 5 близки между собой и с точной кривой 2 на лобовой части сферы. Однако в области $\omega > 50^\circ$ кривые 4 и 5 лежат несколько ниже кривой 2, что следует отнести на счет влияния эффекта поперечной кривизны, поскольку толщина пограничного слоя в этой области уже вполне соизмерима с радиусом поперечного сечения тела r_b . Различие же кривых 1 и 1' прокомментируем позже.

Отношения $q_w/q^{(0)}$ в точке торможения, взятые с рис. 9.3, приведены на рис. 9.2 и образуют достаточно узкий пучок кривых, с выпадением

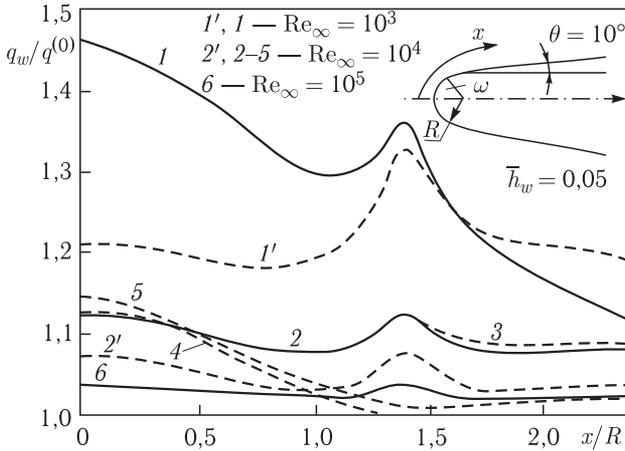


Рис. 9.3. Отношение тепловых потоков на коротком конусе со сферическим носком с учетом завихренности и без (для условий рис. 9.1). Линии 1, 2 — Навье—Стокс с выделяемой ударной волной, 1', 2' — сквозной расчет, 5 — метод среднemasовых величин, 6 — пограничный слой

нием из него лишь кривой 1 для $Re_\infty = 10^3$, полученной с выделением ударной волны. Формулы же (9.1.7) для $(c_a/c)^{1/2} = q_w/q^{(0)}$ дают удовлетворительное согласие с точными кривыми.

Что касается исходной величины теплового потока $q^{(0)}$ в точке торможения тупого тела без учета влияния завихренности, то она определяется формулой (3.2.24), которая хорошо согласуется с данными приведенных расчетов при $Re_\infty \geq 10^4$ и дает величины $q^{(0)} Re_\infty^{1/2} / \rho_\infty U_\infty^3 \approx 2,5 \dots 4,5$ при $M_\infty \approx 10 \dots 25$.

Перейдем далее к телам слабозатупленным ($r_0 \ll R$, где r_0 — радиус носового притупления, R — радиус миделя). Рассмотрим конусы ($\nu = 1$) или клинья ($\nu = 0$) с углом полураствора θ , не обязательно малым, но меньшим предельного $\theta_* \approx \pi/2(1 - 0,9\sqrt{k_0})$ при $\nu = 1$ и $\theta_* \approx \pi/2(1 - 1,2\sqrt{k_0})$ при $\nu = 0$ ($k_0 \ll 1$ — отношение плотностей газа в прямом скачке), при превышении которого на остром теле возникает отошедшая ударная волна. Если угол θ меньше предельного θ_* , то при $k_0 \ll 1$ вблизи оси радиус кривизны скачка $R_s \sim r_0$, а в остальном форма ударной волны будет соответствовать острому конусу (клину). В частности, угол ее наклона к невозмущенному потоку $\sigma \approx \theta$, за исключением небольшой окрестности носового скругления, где $\sigma \sim \pi/2$. Линии тока, прошедшие через центральный участок головного скачка с углом $\sigma \sim \pi/2$ и с большой кривизной, образуют невязкий завихренный слой, в пристеночной части которого справедливо соотношение для вихря Ω (n — нормаль к поверхности тела)

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left(\frac{R}{R_s}\right)^2 \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} \left(\frac{\psi}{\pi^\nu R^{1+\nu} \rho_\infty U_\infty}\right)^{1-\nu} \frac{U_\infty}{R}. \quad (9.1.8)$$

Скорость газа в этом слое изменяется от $u = u_1$ на тупом теле до $u = u_2$ на остром. Полагая $\sigma \approx \theta$, давление $p \approx p'_0 \sin^2 \theta$, получим при $\theta \sim 1$ рад из уравнений Бернулли и адиабаты

$$u_1 \approx U_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p'_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \approx \sqrt{2k_0} U_\infty \cos \theta, \quad (9.1.9)$$

$$u_2 \approx U_\infty \cos \theta, \quad k_0 \approx \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

При этом $u_2/u_1 \approx (2k_0)^{-1/2} \approx 3,2 \dots 1,7$ при $\gamma = 1,1 \dots 1,4$ и числах Маха $M_\infty \gg 1$, что значительно превосходит отношение соответствующих скоростей $u_2/u_1 \approx 1 + \frac{1}{2}(\theta^{2\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \theta^2)$ на тонких ($\theta^2 \ll 1$) притупленных конусах [121], для которых при тех же условиях обычно $u_2/u_1 \leq 1,35 \dots 1,2$ (при $\theta \leq 0,35$). Это обстоятельство и будет существенно влиять на трение и теплообмен на теле в процессе поглощения высокоэнтропийного завихренного слоя пограничным при соизмеримых расходах газа ψ_0 и ψ_δ через них.

Точные расчеты невязкого обтекания слабозатупленных конусов с углами $\theta = 30 \dots 70^\circ$, выполненные сеточно-характеристическим методом установления [123] для типичных условий стендовых испытаний (совершенный газ, $\gamma = 1,4 \dots 1,2$, $M_\infty \approx 3 \dots 6$) и натуральных условий (равновесный воздух, $\gamma \approx 1,2$, $M_\infty \approx 20$, что соответствует высотам полета $h \leq 20$ км), подтверждают приведенные соображения качественного характера и оценки (см., например, [101]). При $\theta < \theta_*$ влияние малого скругления вершины на угол наклона и форму головной ударной волны и давление на теле является локальным, вне этой области эти параметры близки к соответствующим величинам на остром конусе. В этих случаях $R_s \sim r_0 \ll R$ и вихрь Ω на теле большой, так что вблизи поверхности тела существует сильно завихренный слой невязкого газа, где поперечная неоднородность параметров усиливается с уменьшением эффективного показателя адиабаты γ (в соответствии с (9.1.8)).

При $\theta > \theta_*$ течение кардинально перестраивается. Здесь скачок является отошедшим даже при обтекании острого конуса. Поэтому небольшое затупление вершины конуса практически не влияет на форму скачка, а его радиус кривизны на оси R_s при заданном числе Маха определяется по существу радиусом миделя носка R и углом полураствора θ . Так, при небольших $\theta - \theta_* > 0$ величину R_s можно грубо оценить по соотношению $R_s \approx 0,06 (\theta - \theta_*) k_0^{-1/2} R$ (углы θ и θ_* — в градусах). Оно получено на основе численных расчетов обтекания таких тел, проведенных по методу [123]. Отсюда при $\theta - \theta_* = 5^\circ$, $k_0 \leq 0,1$ имеем $R_s \geq R$, т. е. завихренность на теле определяется при $\theta > \theta_*$ не радиусом носового притупления r_0 , а радиусом миделя $R \gg r_0$. В этом случае отличие скачка от прямого вблизи линии симметрии становится небольшим, распределения газодинамических параметров поперек ударного слоя выравниваются, так что для этих режимов

естественно ожидать значительного уменьшения эффектов вихревого взаимодействия.

Оценим для таких тел максимально возможную величину энтропийного эффекта, сравнив тепловые потоки на острых и слабозатупленных телах в рамках классической модели предельно тонкого пограничного слоя в предположении одинаковых давлений на их боковой поверхности и их эффективных длин x_{ef} . Тогда, пометив индексами 1 и 2 параметры на затупленном и остром телах, для отношений тепловых потоков на них, ламинарных $\lambda = \lambda_l$, и турбулентных $\lambda = \lambda_t$, получим из формул (5.1.11а)

$$\lambda_l = \frac{q_{2l}}{q_{1l}} = \left(\frac{h_{*1}}{h_{*2}}\right)^{0,15} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{0,5} \frac{He_{t2} - h_w}{He_{t1} - h_w}, \quad (9.1.10)$$

$$\lambda_t = \frac{q_{2t}}{q_{1t}} = \left(\frac{h_{*1}}{h_{*2}}\right)^{0,66} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{0,8} \frac{He_{t2} - h_w}{He_{t1} - h_w}.$$

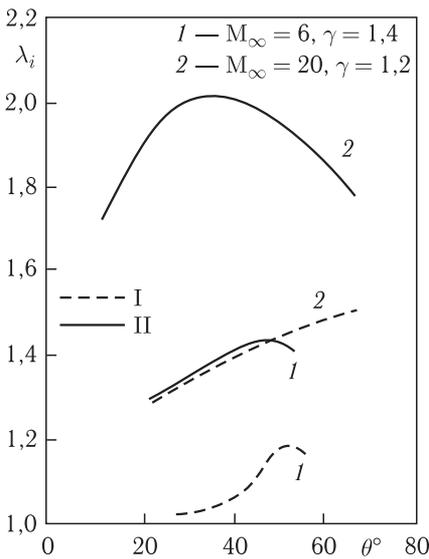


Рис. 9.4. Отношение λ_i тепловых потоков на остром и притупленном конусах для ламинарного (I) и турбулентного (II) пограничных слоев

мум $\lambda_t \approx 1,4$, а при $\gamma = 1,2$ максимум $\lambda_t \approx 2,2$ и лежит в области $\theta \approx 40^\circ$.

Заметим, что согласно формулам (9.1.10) энтропийный эффект определяется, в первую очередь, скоростью газа вблизи стенки, которая

Здесь, как и ранее, звездочкой помечены определяющие параметры в пограничном слое. Для отношений соответствующих величин трения в этих величинах λ_i следует просто подставить вместо отношения энтальпий $H \dots h$ отношение скоростей (u_2/u_1) .

Отношения λ_i для конусов показаны на рис.9.4 в зависимости от угла полураствора конуса θ [82]. Как видно, тепловые потоки на затупленном теле всегда меньше, чем на остром, причем для ламинарного пограничного слоя это отличие невелико при $\gamma = 1,4$, $M_\infty = 6$, но вполне ощутимо при $\gamma = 1,2$, $M_\infty = 20$ (модель диссоциированного воздуха). В то же время для турбулентного пограничного слоя энтропийный эффект оказывается существенно большим.

В частности, при $\gamma = 1,4$ макси-

на притупленном конусе существенно меньше, чем на остром, так что с учетом (9.1.9)

$$\lambda_l \approx (2k_0)^{-0.25}, \quad \lambda_t \approx (2k_0)^{-0.4}. \quad (9.1.11)$$

При $\theta > \theta_*$ ($\theta_* \approx 65^\circ$ для условий 2 и $\theta_* = 55^\circ$ для условий 1) расчеты указывают на резкое снижение влияния завихренности ($\lambda_i \rightarrow 1$). Это обусловлено тем, что при $\theta > \theta_*$ острый конус обтекается уже с отошедшей ударной волной и невязкие параметры на теле соответствуют тупому конусу. Важно подчеркнуть, что отношения λ_i , или *максимальный энтропийный эффект*, не зависят от числа Рейнольдса, от которого зависит лишь *длина поглощения* пограничным слоем вихревого или высокоэнтропийного слоев. По мере такого поглощения тепловые потоки и трение, скажем, на слабозатупленном конусе, будут изменяться от величин q_1, τ_1 до q_2, τ_2 .

Насколько предельная оценка реализуется в каждом конкретном случае, зависит от соотношения между расходом газа через пограничный ($\psi_{\delta i}$) и через завихренный (ψ_0) слои. Реальные значения $\lambda_i = q_i/q_1$ близки к предельным при $\psi_{\delta i} \gg \psi_0$. Оценим расход $\psi_{\delta t}$ через турбулентный пограничный слой на слабозатупленных конусах. Полагая $x_t = (4/9)x$ (как на остром конусе) и используя в качестве внешних граничных невязкие параметры, рассчитанные по ньютоновскому давлению и энтропии за прямым скачком, а также приближенное соотношение для $k_0 \approx 0,45 M_\infty^{-0.55}$, приемлемое для типичных условий спуска скоростных изделий ($M_\infty \geq 3$) на наиболее теплонапряженных высотах $H \leq 20$ км (рис. 5.7), и соотношения (5.4.4), (1.3.10) для $\psi_{\delta t}$ и μ , получим

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\delta t} &\approx 0,85 F(\theta, \gamma) K_* \bar{r}^{1,8} \frac{M_\infty^{0,6}}{Re_\infty^{0,2}}, & \bar{\psi} &= \frac{\psi}{\pi R^2 \rho_\infty U_\infty}, \\ \bar{r} &= \frac{r}{R}, & Re_\infty &= \frac{\rho_\infty U_\infty R}{\mu_\infty}. \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

Заметим, что $F(\theta, \gamma)$ — слабая функция своих переменных и при $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ приближенно $F \approx 0,23$. Так как на скачке $\bar{\psi}_s = \bar{r}^2$, то отсюда получаем, что для турбулентного пограничного слоя на коническом носке имеет значение форма головного скачка при $\bar{r} \leq \bar{\psi}_{\delta t_{\max}}^{-1/2} \approx a \cdot M_\infty^{0,3} Re_\infty^{-0,1}$ (где обычно $a \approx 0,5 \dots 0,6$). Именно эта центральная часть скачка (для типичных условий полета при $M_\infty \sim 5 \dots 25$, $Re_\infty \sim 10^4 \dots 10^8$ величина $\bar{r} \leq 0,2 \dots 0,4$) питает газом пограничный слой на всем носке. Поэтому при существенном отличии формы скачка от прямого в этой зоне следует ожидать существенного проявления рассматриваемого эффекта на теле. В соответствии с (9.1.8) наиболее сильно эффект проявляется, прежде всего, в зонах высокого давления, где малы местные скорости невязкого потока на теле при малых k_0 , а также при малых r_0 , когда мал радиус кривизны скачка на оси R_s .

Представленные оценки свидетельствуют о важности рассматриваемого эффекта, который не моделируется в условиях типичного аэродинамического эксперимента из-за сильного влияния реальных свойств воздуха в натурном полете.

На рис. 9.5 экспериментальные при $M_\infty = 6$ величины турбулентных тепловых потоков для конусов с $\theta = 45^\circ$ с большим сферическим носком заметно меньше тепловых потоков для конуса с меньшим носком. Они неплохо согласуются с расчетом изложенным выше методом. Там же приведены расчетные (тем же методом, сплошная линия) турбулентные тепловые потоки при $M_\infty = 20$, $\gamma = 1,2$. Штриховая линия относится к расчету без учета завихренности (по невязким параметрам на стенке) и лежит существенно ниже сплошной линии, как и на рис. 9.6, где приведены другие сравнения с экспериментом.

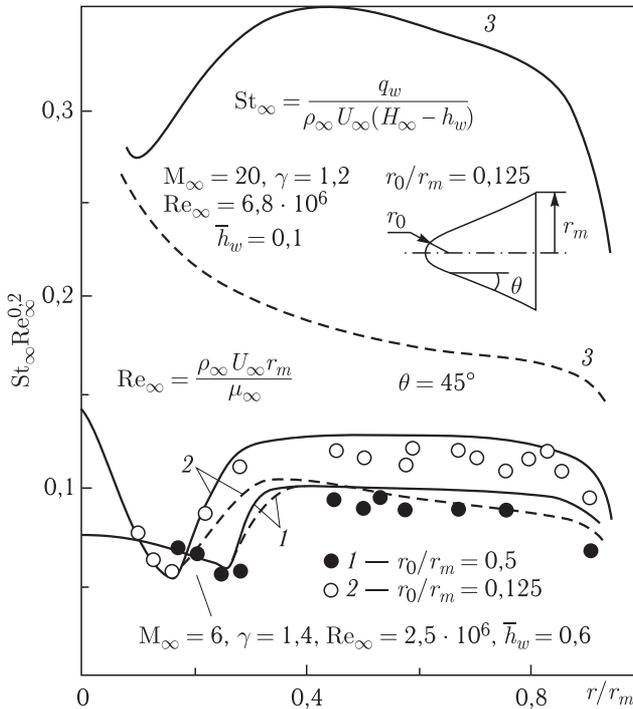


Рис. 9.5. Турбулентный теплообмен на затупленном конусе ($\theta = 45^\circ$, $r_m \equiv R$)

Сопоставление результатов расчетов и экспериментов показывает, что обсуждаемый эффект действительно имеет место, и рекомендуемый метод позволяет учитывать его влияние на теплообмен. На участке развитого турбулентного режима на слабозатупленном ($\bar{r}_0 = 0,125$) конусе коэффициент теплообмена практически такой же, как на остром

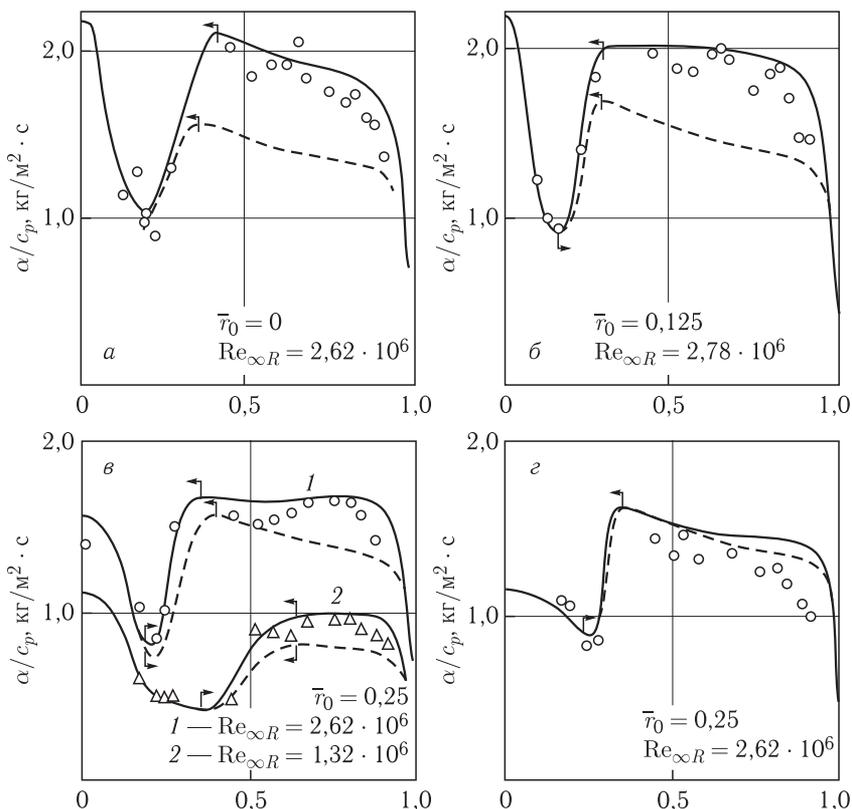


Рис. 9.6. Сравнение расчетов коэффициента турбулентного теплообмена на конусах с $\theta = 45^\circ$ с экспериментом при $M_\infty = 6$

конусе, и на $\sim 30 \dots 40\%$ превышает соответствующую расчетную величину на тупом конусе без учета поглощения. На сильнозатупленном конусе ($\bar{\tau}_0 = 0,5$) эффект практически отсутствует (во всяком случае, не превышает погрешности измерений).

Это сравнение дает основание использовать данный метод для расчета теплообмена на затупленных конических носках в натуральных условиях, где влияние завихренности особенно велико.

Ниже представлены результаты систематических расчетов ламинарного и турбулентного теплообмена на конических носках с углами полураствора $\theta = 30 \dots 70^\circ$ в потоке равновесного воздуха при $M_\infty = 3 \dots 25$. Результаты получены с использованием точных данных по невязкому обтеканию.

На рисунках 9.7 и 9.8 для $\bar{\tau}_0 = 0,125$ приведены результаты расчетов теплообмена, полученные без учета влияния вихревого взаимодействия, т. е. результаты стандартных расчетов по невязким параметрам

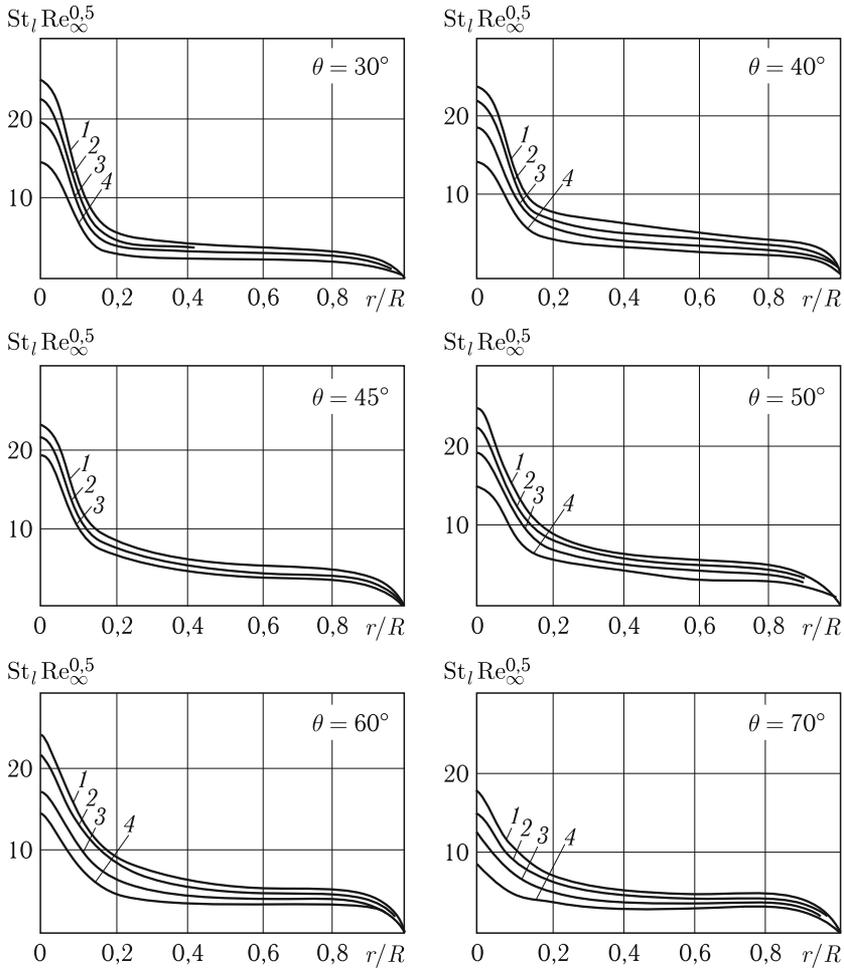


Рис. 9.7. Ламинарный теплообмен на конусах при обтекании равновесным воздухом ($H = 10$ км; 1 — $M_\infty = 24$, 2 — $M_\infty = 20$, 3 — $M_\infty = 15$, 4 — $M_\infty = 10$)

на теле (для ламинарного режима в виде $St_l Re_\infty^{0.5}$, для турбулентного $St_t Re_\infty^{0.2}$, где $St_i = q_i / \rho_\infty U_\infty (H_\infty - h_w)$ — число Стантона). Указанные параметры при этих допущениях коррелируют влияние числа Re_∞ . Что касается влияния других определяющих параметров, то расчеты показали, что при гиперзвуковых условиях обтекания и при фиксированном θ

$$St_l Re_\infty^{0.5} \sim M_\infty^{0.7}, \quad St_t Re_\infty^{0.2} \sim M_\infty^{0.74}. \quad (9.1.13)$$

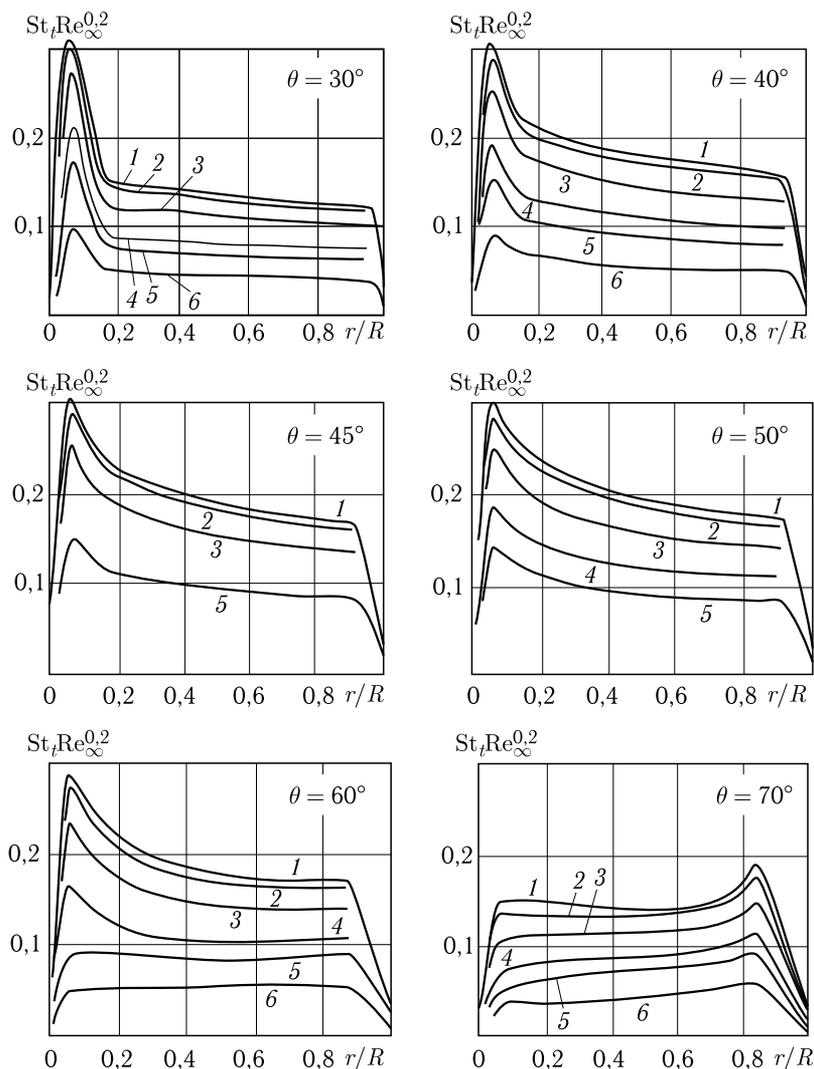


Рис. 9.8. Турбулентный теплообмен на конусах при обтекании равновесным воздухом ($H = 10$ км; условия 1–4 – такие же, как на рис. 9.7, 5 – $M_\infty = 6$, 6 – $M_\infty = 3$)

Влияние температурного фактора t_w при его изменении в пределах порядка на ламинарный коэффициент теплообмена несущественно (5...7%), а на турбулентный коэффициент теплообмена достаточно хорошо учитывается отмеченной в гл. 5 (см. (5.3.40)) зависимостью $St_t \sim (1 + t_w)^{-2/3}$.

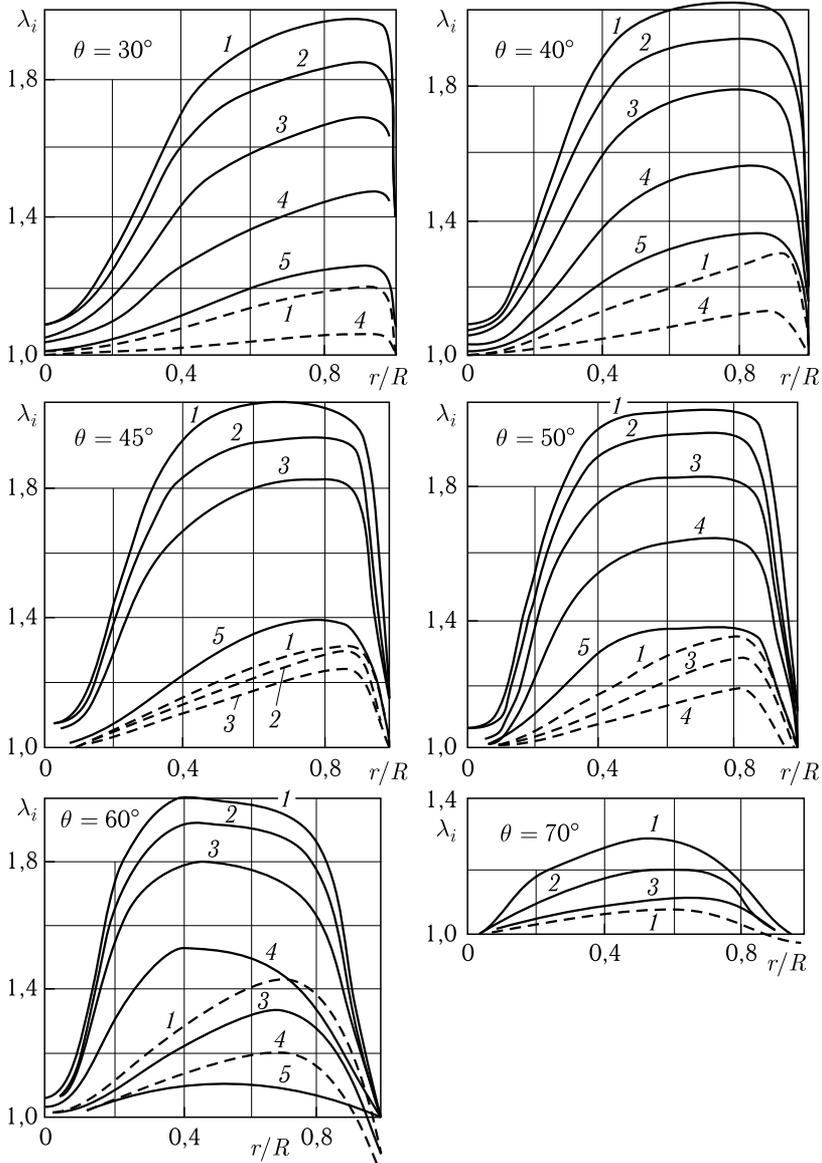


Рис. 9.9. Влияние завихренности на теплообмен на конусах для условий рисунков 9.7 и 9.8 (сплошные линии — λ_t , пунктирные — λ_l)

Отметим также, что при $M_\infty = \text{const}$ на конической части носка (для ламинарного режима в диапазоне $\theta = 30 \dots 60^\circ$, для турбулентного — в диапазоне $\theta = 40 \dots 60^\circ$)

$$St_t Re_\infty^{0,5} \sim \cos^{0,5} \theta \sin^{1,2} \theta, \quad St_t Re_\infty^{0,2} \sim \cos^{0,8} \theta \sin^{0,9} \theta. \quad (9.1.14)$$

Эти зависимости подсказаны анализом расчетных соотношений для тепловых потоков на острых конусах (§ 5.3) и могут быть полезными при интерполяции полученных результатов на промежуточные значения определяющих параметров.

Влияние эффекта завихренности на теплообмен на слабозатупленных конусах (при $\bar{r}_0 = 0,125$) показано на рис. 9.9 (здесь $\lambda_i = q_i/q_i^0$, где q_i^0 — тепловой поток, рассчитанный по невязким параметрам на теле). Как и следовало ожидать на основании предварительных оценок, влияние завихренности невязкого потока в пристеночной области течения особенно велико при турбулентном режиме, где с ростом M_∞ величина $\lambda_t \sim 2$ при полном поглощении вихревого слоя пограничным. Такой режим взаимодействия в равновесном воздухе имеет место при $\bar{r}_0 = 0,125$ на всех конусах при $\theta \leq 60^\circ$, если $M_\infty \geq 20$ (т. е. при $\theta < \theta_*$). Для конуса с $\theta = 70^\circ$ при этом также проявляется предельный эффект, однако здесь он сравнительно невелик ($\lambda_t \leq 1,3$) в силу того, что $\theta > \theta_*$, и носовое скругление практически не влияет на форму головного скачка и структуру течения в ударном слое, где вихревой слой выделить уже нельзя.

Для ламинарного режима эффект действительно в целом существенно меньше ($\lambda_t \leq 1,45$ даже для натуральных условий и для конуса с $\theta = 60^\circ$, где он максимален), что обусловлено относительно меньшим расходом газа через ламинарный слой и более слабой зависимостью теплового потока от скорости газа на внешней границе по сравнению с турбулентным режимом.

Заметим, что резкое снижение λ_i при $r \rightarrow R$ связано с тем, что согласно (9.1.8) внешний вихрь $\Omega \sim p$, а давление p в этой зоне резко падает при приближении к угловому скруглению носка с радиусом r_1 . В области, где влияние завихренности на турбулентный теплообмен проявляется существенно, изменение числа Re_∞ в ~ 20 раз в диапазоне представляющих практический интерес значений Re_∞ изменяет λ_t в пределах $\leq 20\%$. Определяющим является влияние \bar{r}_0 для конусов с $\theta < \theta_*$ (рис. 9.10). С ростом \bar{r}_0 возрастает радиус кривизны скачка на оси, снижается вихрь на теле и при $\bar{r}_0 \geq 0,5$ эффект для натуральных условий не превышает 30...40% (а для условий стендовых испытаний практически исчезает).

Влияние $\bar{r}_1 = r_1/R$ незначительно и является локальным, влияние температурного фактора t_w на λ_t практически отсутствует.

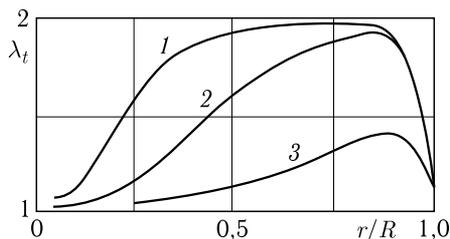


Рис. 9.10. $M_\infty = 20$, $\gamma = 1,2$, $\theta = 45^\circ$; 1 — $\bar{r}_0 = 0,125$, 2 — $\bar{r}_0 = 0,25$, 3 — $\bar{r}_0 = 0,5$

В заключение отметим, что в целом ньютоновский при $k_0 \ll 1$ характер картины обтекания слаботупленных ($r_0 \ll R$) конусов с углами полураствора $\theta < \theta_*$ (при этом $p \approx p'_0 \sin^2 \theta$, $\sigma \approx \theta$) позволяет установить закон подобия для распределения тепловых потоков с учетом влияния вихревого взаимодействия [82]. Действительно, в этом случае влияние тупления проявляется по существу лишь в формировании пристеночного высокоэнтропийного слоя с расходом газа ψ_0 и поперечной неоднородностью энтальпии вида $h/h_b = G(\psi/\psi_0)$, в котором и развивается пограничный слой. Тепловой поток q_w на теле заданной формы зависит в этом случае от числа Прандтля Pr и от размерных величин x или r , а также от r_0 , ρ_δ , μ_δ , u_δ , U_∞ , h_w , ψ_0 . Эта система включает, согласно теории подобия и размерностей, два характерных линейных размера r_0 и r_i , где

$$r_i \sim \left[\frac{\psi_0 \sin^{1-m} \theta}{(\rho_\delta u_\delta)^{1-m} \mu_\delta^m} \right]^{\frac{1}{1+\nu-m}}. \quad (9.1.15)$$

Здесь $m = 0,5$ для ламинарного и $m = 0,2$ для турбулентного режима. Физически r_i определяет размер центральной области тела, где пограничный слой полностью поглощает высокоэнтропийный (т. е. где $\psi_{\delta j} \approx \psi_0$).

При этом примем (здесь $f_{\delta l} \cong 3,3$; $f_{\delta t} \cong 0,33$)

$$\psi_0 = \pi^\nu r_0^{1+\nu} \text{ctg}^{1+\nu} \theta \rho_\infty U_\infty, \quad \psi_{\delta i} = (2\pi)^\nu r^\nu f_{\delta i} \mu_*^m (\rho_* U_{\text{efi}})^{1-m}.$$

Для слаботупленных конусов (при $r_0 \rightarrow 0$) с углами $\theta < \theta_*$ размер r_i является единственным существенным характерным размером, так что с учетом оценок (9.1.13), (9.1.14) распределения по поверхности тела безразмерных величин λ_i , характеризующих влияние завихренности на теплообмен, должны иметь вид (здесь $\beta_l = 0,25$, $\beta_t = 0,4$)

$$\lambda_i \approx k^{-\beta_i} F(r/r_i). \quad (9.1.16)$$

Учитывая, что для типичных теплонапряженных условий спуска скоростных изделий ($H \leq 20$ км) согласно рис. 5.7 для равновесного воздуха за косым скачком $\rho \cong 2,2 \rho_\infty M_{\infty n}^{0,55}$ (где $M_{\infty n} = M_\infty \sin \theta$ — число Маха по нормали к телу) и используя для оценок r_i параметры газа за косым скачком (с углом наклона $\sigma \cong \theta$), получим, в частности, при $\nu = 1$, т. е. для осесимметричных течений (с точностью до несущественных множителей)

$$r_l = \frac{\text{Re}_{\infty r_0}^{1/3}}{\text{tg} \theta M_{\infty n}^{7/15}} r_0, \quad r_t = \frac{\text{Re}_{\infty r_0}^{1/9}}{\text{tg}^{2/3} \theta M_{\infty n}^{1/3}} r_0, \quad \text{Re}_{\infty r_0} = \frac{\rho_\infty U_\infty r_0}{\mu_\infty}. \quad (9.1.17)$$

Зависимость (9.1.16) при этом имеет вид

$$\lambda_i = M_\infty^{0,55 \beta_i} \Phi_i(r/r_i). \quad (9.1.18)$$

Результаты расчетов ламинарного и турбулентного теплообмена на слаботупленных конусах в широком диапазоне изменения опре-

деляющих параметров ($\theta = 30 \dots 70^\circ$, $M_\infty = 3 \dots 25$; $\gamma = 1,2 \dots 1,4$, $Re_\infty = 10^5 \dots 10^7$, $\bar{r}_0 = 0,1 \dots 0,5$, $Pr = 0,72$) подтверждают установленное при $\theta < \theta_*$ подобие тепловых потоков с приемлемой точностью (рис. 9.11, варианты 1–10 относятся к турбулентному, варианты 11–14 — к ламинарному режиму; перечень вариантов приведен в таблице к рис. 9.11). Можно отметить, что, несмотря на асимптотический характер ($\bar{r}_0 \rightarrow 0$) этого закона подобия, практически он, как видно, справедлив даже при $\bar{r}_0 \sim 0,5$.

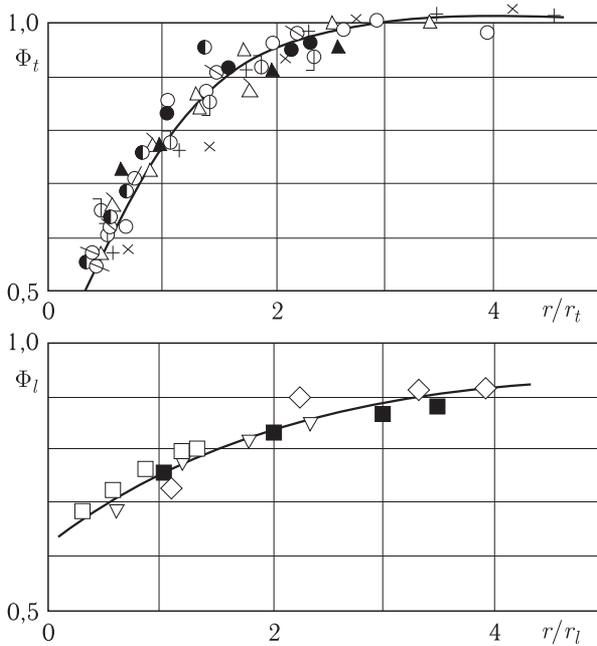


Рис. 9.11

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
θ	30	40	40	40	45	45	45	50	60	60	30	45	60	60
M_∞	20	20	20	20	20	10	6	20	20	20	23	23	23	10
Re_∞ , 10^{-4}	1,6	7,1	7,1	7,1	6,8	3,6	2,6	1,6	1,6	0,3	8,4	8,4	8,4	3,6
r_0/R	0,125	0,125	0,25	0,5	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	●	□	●	∅	△	□	▲	+	○	×	□	▽	◇	■

Отметим также, что на затупленном теле в расходящемся потоке вихрь Ω за отошедшим скачком уплотнения больше, чем в равномерном потоке, так как согласно (9.1.8) $\Omega \sim R_s^{-2}$, а $R_s^{-1} = R_{s0}^{-1} + \kappa$, где

R_{s0} — радиус кривизны скачка в равномерном потоке, а параметр $\kappa = \partial\varphi/\partial x > 0$ характеризует расходимость набегающего потока [121]. В этом случае влияние завихренности на теплообмен может проявляться и на сфере (и на более тупых носках) при небольших числах Маха $M_\infty \sim 3 \dots 6$ (например, при испытаниях моделей в недорасширенной струе ЖРД).

В некоторых случаях можно наблюдать еще более убедительные примеры влияния поглощения сильно завихренного невязкого потока пограничным слоем, например, при сверхзвуковом обтекании тех же конических носков с передними выступами [84]. Передний конический выступ с малым притуплением формирует около основного конуса вихревой слой, образованный струйками тока, прошедшими через головной скачок большой кривизны перед выступом, на дне которого и развивается пограничный слой с положительным градиентом давления. Заметим, что для приведенных ниже примеров передний конический выступ таков, что его обтекание по существу совпадает с обтеканием соответствующего изолированного конуса.

Практический интерес к тупым телам такой формы обусловлен тем, что, как показали результаты экспериментов, их образование возможно при разрушении теплозащиты слабозатупленных скоростных аппаратов. В этом случае линейные уносы теплозащитного покрытия соизмеримы с размером исходного носового затупления, что из-за влияния перехода пограничного слоя приводит к немонотонному распределению конвективного теплового потока и уноса ТЗП вдоль контура тела. Это сильно изменяет исходную форму, приводя к образованию носка с выступом в передней части.

При обтекании таких тел давление в области сжатия может достигать и даже превосходить давление в критической точке p'_0 . В точках, где местное давление p близко к p'_0 (но $p \leq p'_0$), скорость $u_1 \geq 0$ мала и, следовательно, тепловой поток к телу q_w , определяемый невязкими параметрами на теле, мал, а при $p > p'_0$ расчет q_w , основанный на общепринятой модели пограничного слоя, для тупого тела теряет смысл, как и невязкое безотрывное течение в целом. В то же время эксперимент дает здесь конечную величину теплового потока, причем, его распределение по телу подобно распределению давления [84]. Это видно из рис. 9.12, где показан спектр обтекания характерного выпукловогнутого (колоколообразного) тела ($\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 55^\circ$, $r_0 = 0,1 R$, $r_1 = 0,25 R$, $r_{12} = 1,0 R$), (а); экспериментальные распределения давления p/p'_0 , (б); а также распределения коэффициента теплообмена $\alpha/c_p = q_w/(H_\infty - h_w)$ кг/м²·с, (в). Эксперимент (точки 1) проводился в установке У-6 при $M_\infty = 6$, $\gamma = 1,4$, $Re_{\infty R} = 2,6 \cdot 10^6$, $t_w = 0,6$.

Покажем, что принципиальным моментом согласования расчетных методик теплообмена с экспериментом является учет завихренности невязкого потока за головным скачком уплотнения.

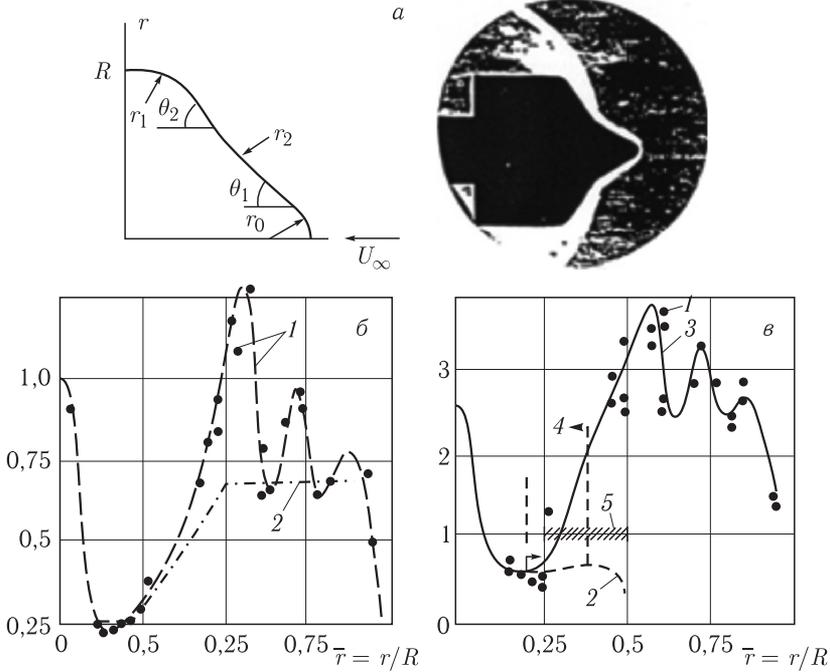


Рис. 9.12

В самом деле, используя для невязкого потока соотношения

$$h = h_1 G(\psi), \quad p_0 = p'_0 G^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad G(\psi) \approx \sin^{2/\gamma} \sigma(\psi),$$

$$u \approx U_\infty \sqrt{1 - G(\psi) \left(\frac{p}{p'_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}, \quad (9.1.19)$$

где $p_0(\psi)$ — полное давление, p — давление на теле, и полагая вблизи поверхности тела $G \cong 1 - \varepsilon(\psi)$, получим при $0 < \varepsilon \ll 1$ в области повторного сжатия при $p \sim p'_0$

$$u \cong U_\infty \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p'_0 - p}{p'_0} + \varepsilon}. \quad (9.1.20)$$

Таким образом, на границе пограничного слоя (при $\psi = \psi_\delta(x)$) скорость $u_\delta = u(\psi_\delta)$ при $p = p'_0$ (и даже, возможно, при $p > p'_0$) имеет конечную величину ($u_\delta > 0$), что и оказывает принципиальное качественное влияние на течение в целом. Местное давление торможения $p_0(\psi) \cong p'_0 \left(1 + \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\right)$ на границе пограничного слоя существенно превышает статическое давление $p \sim p'_0$, что и может обеспечивать практически безотрывный характер обтекания за счет вязких напря-

жений в пограничном слое. С этим связана возможность преодоления невязкими относительно низконапорными пристеночными струйками тока области давлений, превышающих p'_0 .

Для дополнительной иллюстрации этого принципиального влияния завихренности невязкого течения разностным методом проведены точные численные расчеты ламинарного пограничного слоя при $M_\infty = 6$, $\gamma = 1,4$ для различных чисел Рейнольдса $Re_\infty = \rho_\infty U_\infty R / \mu_\infty = 10^4 \dots 10^6$ на том же выпукло-вогнутом составном коническом теле. При этом использовано распределение давления по «местной сфере» (кривая 2 на рис. 9.12, б). В процессе численного расчета обеспечивается гладкое сопряжение решения в пограничном слое с невязким завихренным потоком. Результаты расчетов представлены на рис. 9.13. В рассмотренном примере положительный градиент давления на основном конусе достаточен для отрыва ламинарного пограничного слоя при больших числа Рейнольдса (при $Re_\infty \geq 10^6$, как видно, коэффициент трения $c_f = 2\tau_w / \rho_\infty U_\infty^2$ обращается в нуль при $\bar{r} = 0,31$).

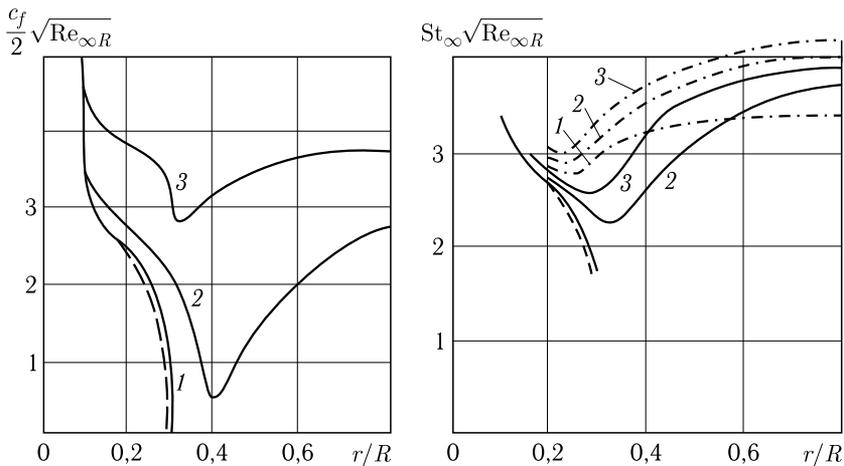


Рис. 9.13

С уменьшением Re_∞ растет толщина пограничного слоя и расход газа ψ_δ через него, наименее напорные струйки невязкого потока поглощаются пограничным слоем, полное давление и скорость газа на его внешней границе существенно возрастают, в результате чего при $Re_\infty \leq 10^5$ уже всюду $c_f > 0$, т.е. действительно реализуется безотрывное течение. Расчетные результаты для коэффициента теплообмена представлены в виде $St_\infty \sqrt{Re_\infty R}$ (кривые 1, 2 — точные расчеты по невязким параметрам на теле и с учетом завихренности соответственно, кривая 3 — расчет по среднemasсовому методу). Видно, что вихревое взаимодействие действительно является решающим фактором при формировании пограничного слоя на таких телах. При этом

метод среднemasовых величин, объединенный с методом эффективной длины, несмотря на большой положительный градиент давления на теле, дает качественно верные и более точные результаты по мере уменьшения Re_∞ , т. е. по мере удаления от предотрывного состояния пограничного слоя.

Приведенный пример дает основание рассчитывать на то, что для турбулентного режима, характеризуемого для реальных чисел Re_∞ существенно большими, чем при ламинарном режиме, расходами газа ψ_δ через пограничный слой, влияние завихренности невязкого течения на телах подобной формы будет выражено еще сильнее. Так, в условиях экспериментов в установке У-6 ($M_\infty = 6$, $\gamma = 1,4$, $Re_\infty = 2,6 \cdot 10^6$, $t_w = 0,6$) на том же теле (рис. 9.12) реализуется турбулентный пограничный слой, а измеренное распределение давления носит сложный пилообразный характер (кривая 1 на рис. 9.12, б). При этом на основном конусе давление превышает величину p'_0 , так что расчет теплообмена по классической схеме бесконечно тонкого пограничного слоя при $r/R > 0,3$ вообще невозможен (пунктир 2). Учет влияния внешней завихренности по среднemasовому методу с использованием экспериментального распределения давления на теле и функции $G_0(\psi)$, построенной по форме скачка около выступа, дает распределение коэффициента теплообмена α/c_p , хорошо согласующееся с экспериментом (рис. 9.12, в, сплошная кривая 3 — с учетом зоны ламинарно-турбулентного перехода 4), хотя в эксперименте и наблюдается не учитываемая в расчетах очень узкая локальная отрывная зона (область 5), не оказывающая, впрочем, заметного влияния на течение в целом.

При малом размере носового скругления тонкий высокоэнтропийный слой поглощается пограничным слоем еще до излома контура тела. При этом в зоне сжатия имеем существенно сверхзвуковое течение на внешней границе пограничного слоя (например, в области максимального давления $p \cong 1,25 \rho_\infty U_\infty^2$ для модели имеем $\bar{\psi}_\delta \cong 0,04$ и полное давление на внешней границе $p_0 \cong 6,5 \rho_\infty U_\infty^2$; при этом $M_\delta \cong 1,75$). Здесь при сжатии возникают внутренние скачки уплотнения, взаимодействующие с контактным разрывом, исходящим из тройной точки пересечения скачков, в результате чего на теле имеет место пилообразное распределение давления (изменение полного давления и энтропии в этих скачках не учитывалось, так как они достаточно слабые). Качественно течение и теплообмен на основном конусе при этом такие же, как на соответствующем теле с острым выступом.

С увеличением радиуса притупления выступа ($r_0/R > 0,25$) картина течения перестраивается. Пограничный слой не успевает поглотить толстый высокоэнтропийный слой до области сжатия, в результате чего число Маха на его внешней границе может значительно снизиться, а вместе с ним (согласно известному критерию Петрова–Некрасова) снизится и критический перепад давления, необходимый для отрыва пограничного слоя. В результате увеличение радиуса притупления выступа способствует возникновению локальной отрывной зоны, более

интенсивно, чем пограничный слой, поглощающей внешний завихренный поток. Это необходимо учитывать в процессе определения среднemasовых параметров вниз по течению при расчетах теплообмена на таких телах.

Рассмотрим далее гиперзвуковое обтекание тонких притупленных тел. В этом случае, в отличие от заостренных тел, на которых $M_\delta \gg 1$ (см. § 3.4), граница между невязким потоком и пограничным слоем уже не будет столь четкой ввиду сравнительно небольших чисел Маха в высокоэнтропийном слое (обычно $M_\delta = 2,5 \dots 4$ вблизи стенки). Поэтому при раздельном описании этих областей течения следует учитывать условия гладкого сопряжения решений типа (3.4.1) или (3.4.2).

Вообще говоря, пограничный и высокоэнтропийный слои на боковой поверхности тонких притупленных тел в гиперзвуковом потоке образуют как бы единый *поперечно-изобарический* слой с малой плотностью и, соответственно, с малым расходом газа, а основной расход газа идет через примыкающий к ударной волне невязкий ударный слой с большой плотностью и сравнительно низкой энтальпией (по сравнению с энтальпией торможения). Течение же в едином изобарическом слое можно теоретически описывать обычными уравнениями пограничного слоя.

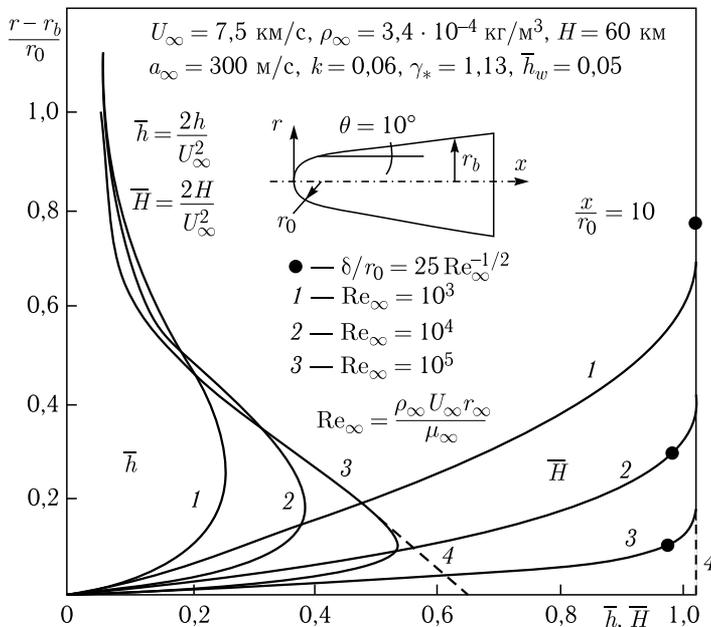


Рис. 9.14. Профили энтальпий \bar{h} и \bar{H} в ударном, высокоэнтропийном (кривые 4) и пограничном (кривые 1–3) слоях на конусе со сферическим носком в равновесно-диссоциированном воздухе

Такой характер течения просматривается на рис. 9.14, где для различных чисел Re_∞ в равновесном воздухе приведены профили энтальпии в одном из сечений на боковой поверхности конуса со сферическим носком. Как видно, даже при $Re_\infty = 10^3$ профиль энтальпии вблизи ударной волны близок к исходному невязкому.

Помимо энтропийного эффекта, на тонких притупленных телах может проявляться эффект вытеснения, а на телах вращения еще и эффект поперечной кривизны. Эти эффекты определяются относительной толщиной пограничного слоя δ/r_b , где r_b — форма боковой поверхности тела (§ 2.5).

Распределение тепловых потоков по конусу дано на рис. 9.15 в виде отношения $q_w/q^{(0)}$, где $q^{(0)}$ — тепловой поток в точке торможения сферы без учета завихренности. Как видно, энтропийный эффект приводит с уменьшением чисел Re_∞ к росту относительных тепловых потоков q_w/q_{w0} до величин $q_w/q_{w0} \approx 1,2$ при $Re_\infty = 10^4$ (q_{w0} — тепловой поток

$$U_\infty = 7,5 \text{ км/с}, \rho_\infty = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}^3, H = 60 \text{ км}$$

$$a_\infty = 300 \text{ м/с}, k = 0,06, \gamma_* = 1,13, \bar{h}_w = 0,05$$

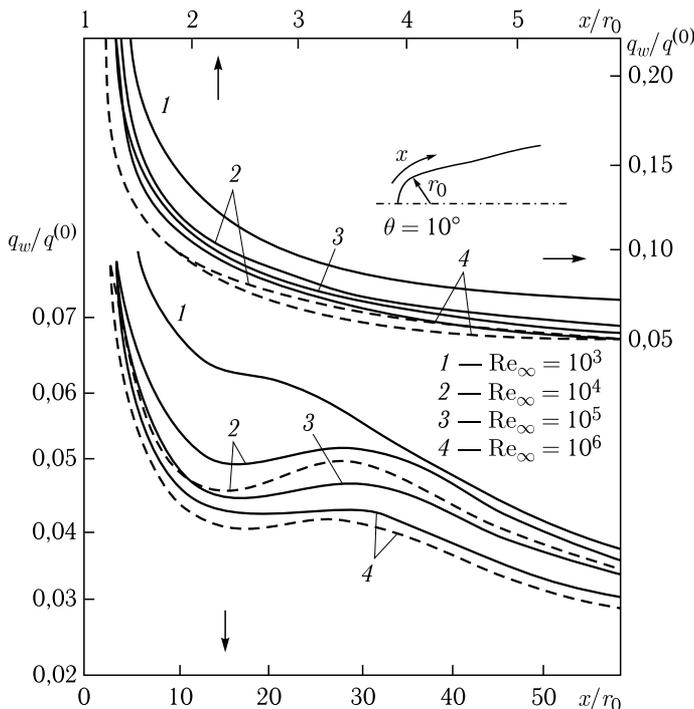


Рис. 9.15. Распределение тепловых потоков по конусу со сферическим носком в равновесно-диссоциированном воздухе; сплошные линии — метод параболизированных уравнений Навье–Стокса, пунктир — метод средних массовых величин

без учета завихренности) на расстояниях $x/r_0 \approx 40$. В то же время при $Re_\infty = 10^3$ эти величины достигают значений $q_w/q_{w0} \approx 1,4 \dots 1,6$, что следует уже отнести за счет эффекта поперечной кривизны, и, кроме того, за счет возросшего давления (т. е. эффекта вытеснения).

На рис. 9.16 для $Re_\infty = 10^4$ и того же конуса $\theta = 10^\circ$ приведены отношения q_w/q_{w0} , взятые из рис. 9.15, а также полученные в рамках точной погранслошной модели [130] и методом среднemasсовых величин. Оба последних метода дают, как и на рис. 9.3, близкие между собой результаты, но несколько заниженные на передней части конуса по сравнению с точными данными, что следует также отнести за счет неучета этими методами эффекта поперечной кривизны.

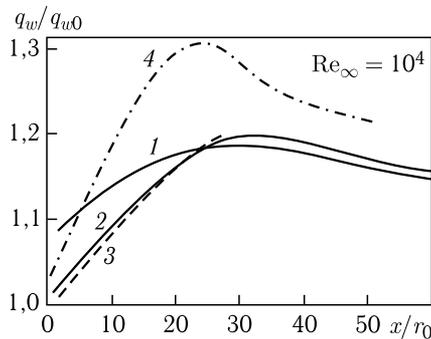


Рис. 9.16. Отношение тепловых потоков на притупленном конусе с учетом и без учета влияния завихренности для $\theta = 10^\circ$, $H = 60$ км, $U_\infty = 7,5$ км/с; 1 — точный расчет, 2 — метод среднemasсовых величин, 3 — погранслошная модель [130], 4 — по внешним параметрам

Для турбулентного пограничного слоя в равновесном воздухе распределения тепловых потоков и трения по притупленному конусу (полученные методом среднemasсовых величин кривые 2 и 3) приведены на рис. 9.17 (1 — расчет по невязким параметрам на теле, 4 — по внешним параметрам на границе погранслоя). Энтропийный эффект для турбулентного режима в соответствии с рис. 9.4 оказывается более существенным, чем для ламинарного, приводя к увеличению теплового потока до 1,5 раз и трения до 2,5 раз. С уменьшением чисел Рейнольдса тепловые потоки возрастают с одновременным сокращением области поглощения высокоэнтропийного слоя пограничным. Расчет с использованием внешней скорости $U^{(0)}$ на границе погранслоя еще более сокращает область поглощения и завышает тепловые потоки.

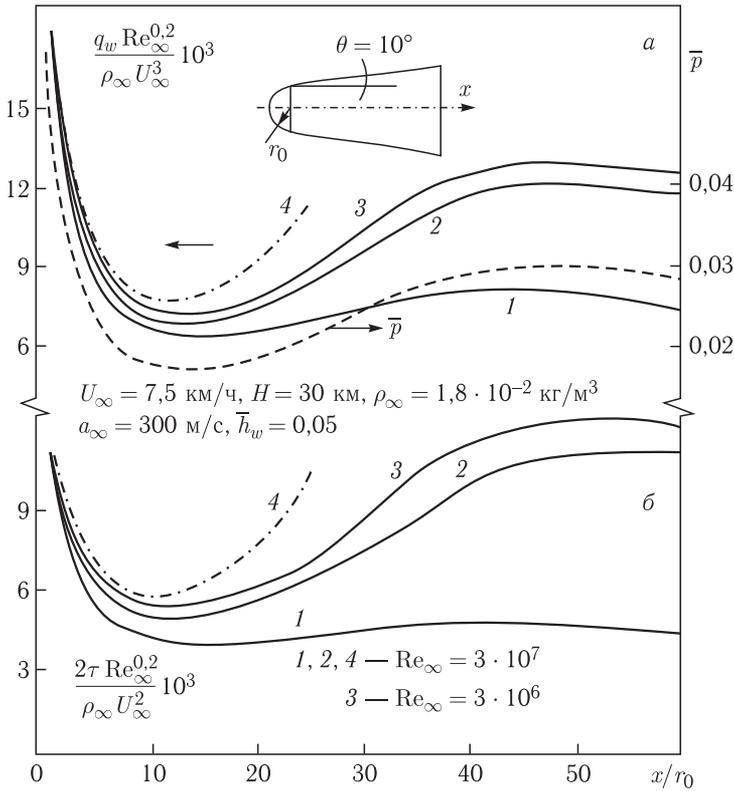


Рис. 9.17. Распределение турбулентных тепловых потоков и трения по притупленному конусу со сферическим носком при различных числах Рейнольдса

Обратим внимание на немонотонный характер распределения тепловых потоков по притупленным конусам, повторяющий характер распределения давления, особенно на рис. 9.17 для турбулентного пограничного слоя.

Ранее на рис. 4.2 было приведено сравнение экспериментального распределения турбулентных тепловых потоков по тонкому притупленному конусу с расчетами методом среднemasовых величин (кривая 1) и с использованием параболизированных турбулентных уравнений Навье–Стокса. На рис. 4.3 были приведены аналогичные данные для притупленного двойного конуса. Согласие расчетных данных с экспериментальными в обоих случаях следует признать вполне удовлетворительным.

На рис. 9.18 для конусов, отличающихся лишь формами носков (сфера и плоский торец), в зависимости от переменной подобия $x_1 = (2/c_{x0})^{1/2}(x/r_0)$ приведено полученное экспериментально распределение тепловых потоков [91] в виде отношения q_w/q_{wc} , где q_{wc} —

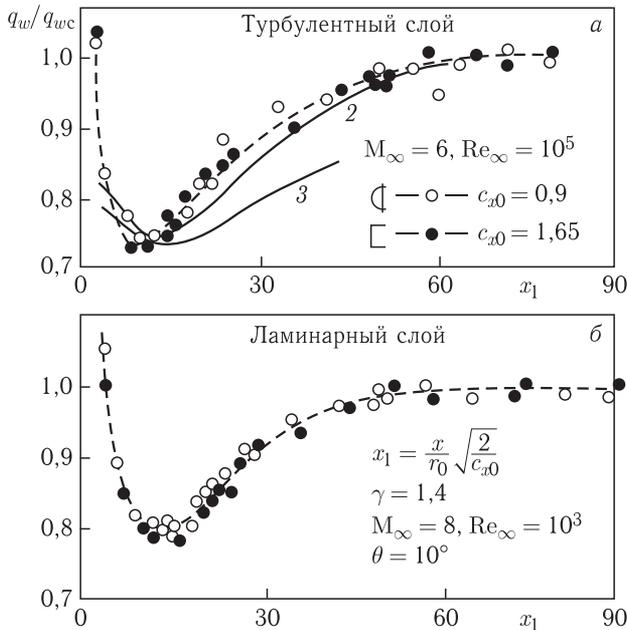


Рис. 9.18. Распределение относительных тепловых потоков по притупленным конусам со сферическим и плоским носком в координатах подобия; сплошные кривые — расчеты с учетом (2) и без учета (3) завихренности

тепловой поток на местном остром конусе того же сечения. Как видно, экспериментальные точки на рис. 9.18 группируются около единых кривых, что подтверждает справедливость соответствующих законов подобия [112, 113].

Для турбулентного теплового потока расчет методом среднemasовых величин (для конуса со сферическим носком) дает удовлетворительную точность, причем влияние энтропийного эффекта в этом случае ощутимо. Тот же вывод следует и из рис. 9.19.

И, наконец, на рис. 9.20 в зависимости от переменной подобия x_2 (см. (2.3.5)) приведены расчетные отношения тепловых потоков q_w/q_{w0} на различных конусах в равновесном воздухе, которые группируются вблизи единой универсальной кривой.

В подтверждение достоверности и возможности расчетов в рамках модели Навье–Стокса или модели ПУНС (гл. 8) проведем сравнение их с натурными измерениями для аппарата OREX [219], форма которого дана на рис. 9.21 (угол атаки $\alpha = 0^\circ$).

На рис. 9.22 приведены расчетные распределения тепловых потоков по этому аппарату. Результаты, полученные для точки траектории ($H \approx 92,8$ км) по обоим методам, согласуются между собой и (в точке

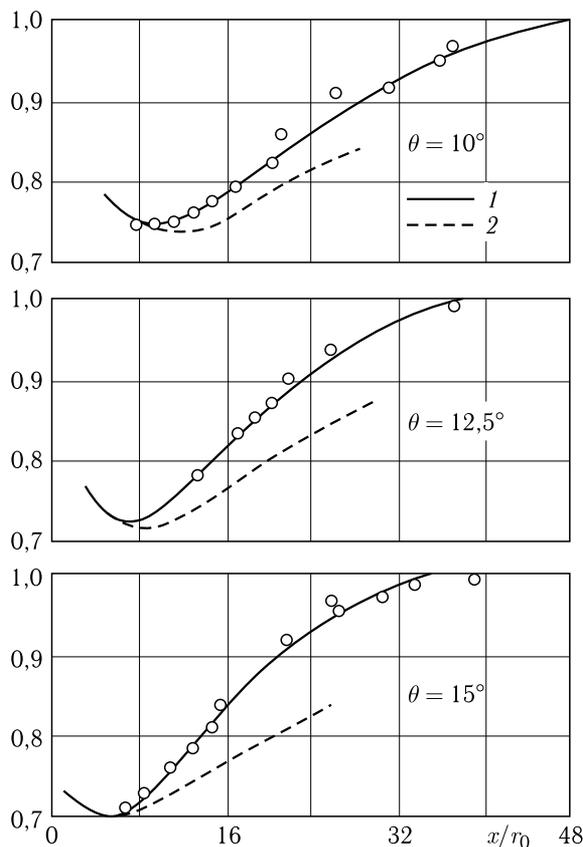


Рис. 9.19. Отношение q_w/q_{w0} турбулентных тепловых потоков на притупленном и местном остром конусе: эксперимент (значки) и расчет с учетом (1) и без учета (2) завихренности ($Re_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty r_0}{\mu_\infty} = 5 \cdot 10^5$, $M_\infty = 6$, $\gamma = 1,4$, $\bar{h}_w = 0,6$)

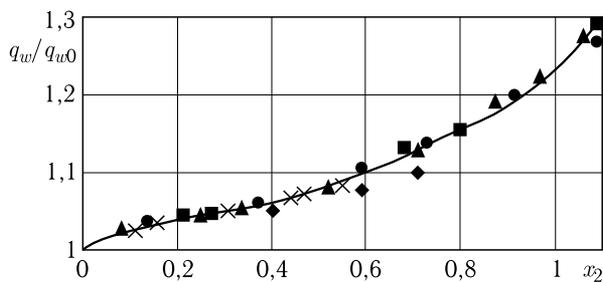


Рис. 9.20. Зависимость отношения турбулентных тепловых потоков с учетом завихренности (q_w) и без учета (q_{w0}) от координаты подобия x_2

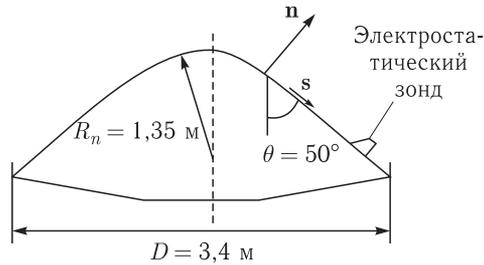


Рис. 9.21

Таблица 9.1

H , км	Re_∞	c_{N_2}	c_{O_2}	c_O	ρ_∞ , кг/м ³	U_∞ , м/с	T_∞ , К	T_w , К
84	7300	0,763	0,238	0,0	$1,09 \cdot 10^{-5}$	7416	189	785
88,5	2890	0,763	0,238	0,0	$4,29 \cdot 10^{-6}$	7444	187	687
92,8	1310	0,769	0,226	0,005	$1,94 \cdot 10^{-6}$	7454	188	586
96,8	630	0,774	0,212	0,014	$9,36 \cdot 10^{-7}$	7456	190	485
101,1	320	0,779	0,196	0,025	$4,83 \cdot 10^{-7}$	7455	197	402
105	150	0,787	0,176	0,038	$2,34 \cdot 10^{-7}$	7451	211	332

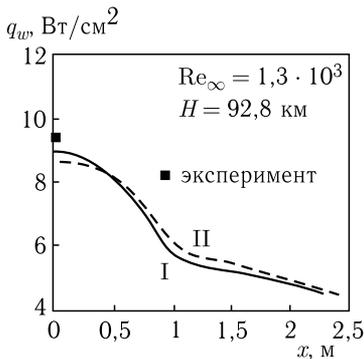


Рис. 9.22. Распределение теплового потока вдоль поверхности аппарата OREX. I — Навье-Стокс, II — ПУНС

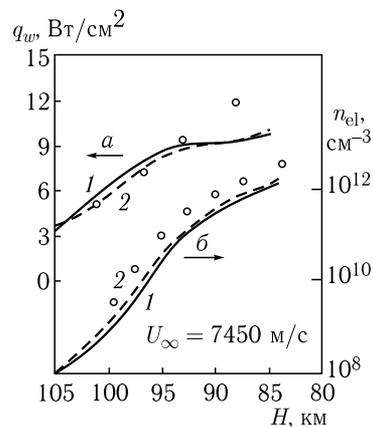


Рис. 9.23. Зависимость от высоты полета H теплового потока (а) и концентрации электронов (б) для аппарата OREX. \circ — эксперимент; линии — расчет при $K_w = 0$; Навье-Стокс (1) и метод ПУНС (2)

торможения) с экспериментом [37]. На рис. 9.23 приведены тепловые потоки в точке торможения по траектории (см. табл. 9.1).

На высотах $H \geq 90$ км расчеты совпадают с экспериментом, расхождение их при $H < 90$ км связано с влиянием не учтенных в этих расчетах гетерогенных неравновесных процессов (§ 7.6, § 10.2). В расчетах принято, что каталитичность стенки $K_w = 0$. При $H < 90$ км за ударной волной начинается диссоциация воздуха, и на теплообмен влияет реальная неизвестная величина K_w .

Отметим еще одно свойство высокоэнтропийных слоев на тонких притупленных конусах, имеющее также непосредственное отношение к пограничным слоям. На рис. 9.24 приведено отношение чисел Рейнольдса Re/Re_s , рассчитанных по местным параметрам в возмущенном слое (Re) и параметрам сразу за ударной волной (Re_s). Как видно, числа Re на поверхности притупленного конуса в гиперзвуковом потоке оказываются существенно меньшими, чем на остром конусе. Однако столь большое различие в числах Re не приводит к адекватному различию в тепловых потоках, зависящих, в основном, от определяющих параметров в пограничном слое (ρ_* и т.д.), определяемых, в свою очередь, энтальпией торможения в большей степени, чем граничными значениями энтальпии h_δ или числами Маха M_δ . Но подобное снижение чисел Рейнольдса в высокоэнтропийном слое может заметно

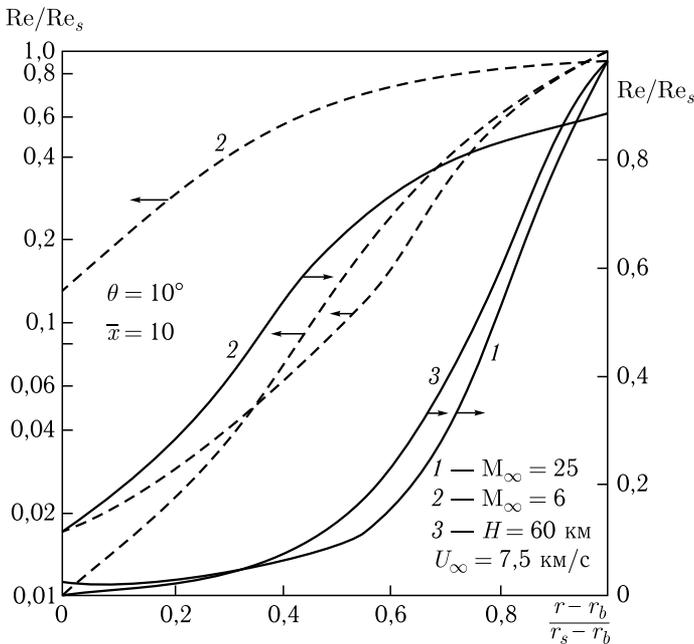


Рис. 9.24. Распределение чисел Рейнольдса по ударному слою на притупленном конусе

отодвинуть вниз по потоку начало перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный и соответственно повлиять на размер области перехода, что позволяет считать затупление носка эффективным средством снижения тепловых нагрузок на боковую поверхность летательного аппарата.

§ 9.2. Теплообмен на тупых телах при небольших числах Рейнольдса

Ранее было показано, что при больших числах Рейнольдса, по крайней мере при $Re_\infty \geq 10^3$, их снижение ведет к возрастанию относительного теплового потока $q_w/q^{(0)}$ в точке торможения тупого тела, где $q^{(0)} = q_w$ при $Re_\infty \rightarrow \infty$ (например, рисунки 9.2 и 9.3 или формулы (9.1.7)), что связано с возрастанием влияния завихренности течения в ударном слое с увеличением толщины пограничного слоя. Однако при дальнейшем снижении чисел Рейнольдса наблюдается обратный процесс убывания произведения $St_\infty Re_\infty^{1/2}$ (постоянного при $Re_\infty \rightarrow \infty$). Это следует из рис. 9.25, где приведены экспериментально измеренные величины тепловых потоков в точке торможения сферы в совершенном газе [60], свидетельствующие о двукратном снижении произведения $St_\infty Re_0^{1/2}$ при снижении чисел Re_∞ от $\sim 10^3$ до ~ 20 .

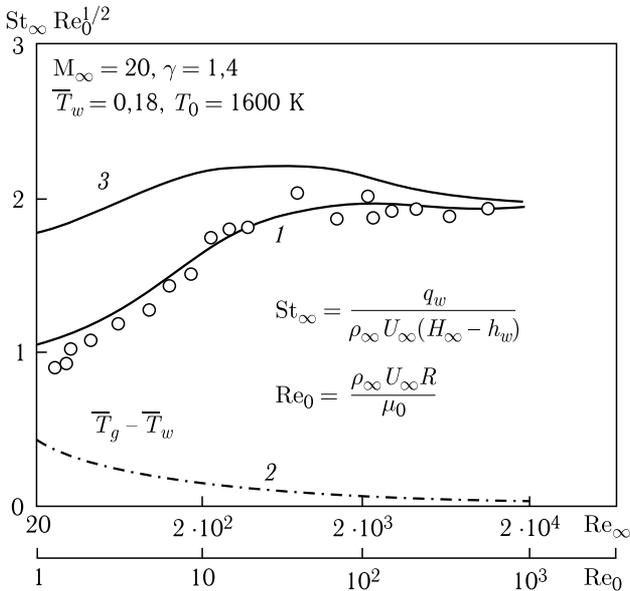


Рис. 9.25. Зависимость тепловых потоков в точке торможения сферы и температуры газа у поверхности от числа Рейнольдса. Значки — эксперимент [60]

Для объяснения этого эффекта на том же рис. 9.25 приведены расчетные кривые, полученные в рамках решения уравнений Навье–Стокса [37]. Кривая 1 получена с учетом эффекта скачка температуры [121] и, как видно, хорошо согласуется с экспериментальными данными. Соответствующая ей зависимость для скачка температуры нанесена на том же рисунке — кривая 2 (температуры отнесены к температуре торможения $T_0 = 1600$ К). Кривая 3 в области низких чисел Рейнольдса, полученная из условия, что температура газа у стенки T_g равна температуре стенки T_w , т. е. без учета скачка температуры, лежит существенно выше кривой 1 и экспериментальных данных. Это позволяет полагать, что главной причиной снижения относительного теплового потока $q_w/q^{(0)}$ с уменьшением чисел Рейнольдса является эффект скачка температуры. В связи с данными рис. 9.25 заметим, что при небольших числах $Re_\infty \approx 20$ тепловой поток q_w в точку торможения тупого тела, а при $Re_\infty < 10^2$ и давление могут превышать, казалось бы, максимально возможные поток энергии $\rho_\infty U_\infty^3/2$ и импульс $\rho_\infty U_\infty^2$, падающие извне на единицу площади поверхности. В этом, однако, нет противоречия и этот эффект обусловлен эжектирующим воздействием близлежащих к оси симметрии струек тока (аналогичный эффект известен и для дозвуковых и несжимаемых течений, например [120]).

§ 9.3. Теплообмен на притупленных конусах под углами атаки

При обтекании тонких притупленных конусов (с углом полураствора θ) под углами атаки $\alpha > 0$ пограничный слой развивается внутри высокоэнтропийного слоя и, кроме того, оба слоя подвержены эффектам растекания на наветренной стороне конусов, описанным в § 5.3, где исследовался теплообмен на конусах без учета влияния эффекта поглощения энтропийного слоя пограничным. Здесь проведем оценки этого часто важного эффекта.

Отметим, что при этом снижение тепловых потоков, обусловленное уменьшением удельного расхода ρu в энтропийном слое, частично компенсируется увеличением коэффициента μ_k в (5.3.11)–(5.3.14) из-за роста параметра растекания $g = \frac{1}{u(0)} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$ за счет меньшей, чем на остром конусе, плотности газа в высокоэнтропийном слое. С другой стороны, при $\alpha > 0$ применительно к линиям растекания энтропийный эффект усиливается по сравнению со случаем $\alpha = 0$ для того же конуса за счет влияния местного угла атаки $\theta_l = \theta + \alpha$ в соответствии с данными рис. 9.4.

Относительная роль всех этих факторов в различных ситуациях может быть различной и трудно выделяемой; просто эти эффекты следует учитывать при объяснении конкретных результатов расчетов или экспериментов.

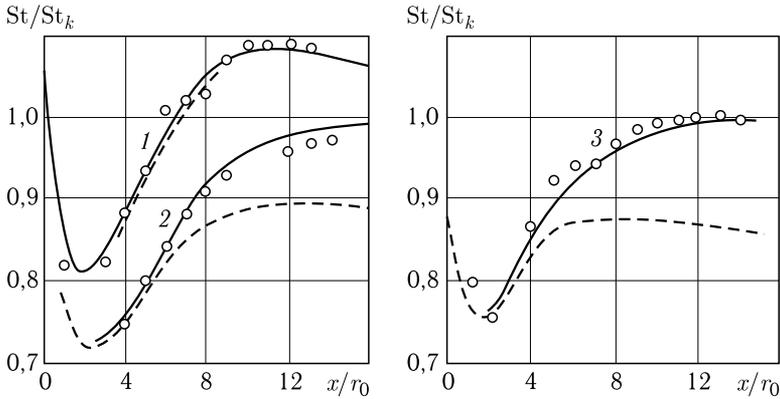


Рис. 9.26. Отношение тепловых потоков на притупленном и остром конусе. 1 — ламинарный режим $\theta_0 = 10^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $M_\infty = 8,3$, $Re_\infty = 2 \cdot 10^3$, $t_w = 0,1$; 2 — турбулентный режим $\theta_0 = 10^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $M_\infty = 6$, $Re_\infty = 8,3 \cdot 10^5$, $t_w = 0,6$; 3 — турбулентный режим $\theta_0 = 10^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $M_\infty = 6$, $Re_\infty = 8,3 \cdot 10^5$, $t_w = 0,7$; сплошная кривая — расчет с учетом завихренности, штриховая — без учета, \circ — эксперимент

Рассмотрим примеры (все данные ниже получены с помощью пространственного метода среднemasовых величин [80], упомянутого в конце § 5.4).

На рис.9.26 сравниваются результаты экспериментов и расчетов теплообмена на линиях растекания притупленных конусов. Тепловые потоки отнесены к тепловым потокам q_{w0} на острых конусах в тех же сечениях и в тех же экспериментах. Для турбулентного пограничного слоя энтропийный эффект при этих условиях ($M_\infty = 6$) вполне ощутим и растет с увеличением угла атаки в соответствии с ростом угла местного конуса θ_l (аналогично данным рис.9.4), а взаимное расположение кривых (с завихренностью и без) аналогично данным на рис.9.19. Но для ламинарного режима при одинаковых тепловых потоках с учетом завихренности и без ее учета наблюдается область $q_w/q_{wc} > 1$, что

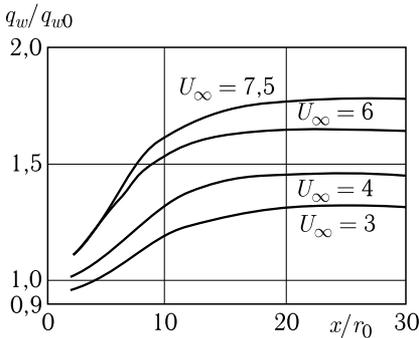


Рис. 9.27. Влияние завихренности на турбулентный теплообмен на линии растекания притупленного конуса в равновесном воздухе ($\theta_0 = 10^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $H = 30$ км, $t_w = 0,1$, $Re_\infty = 1,1 \cdot 10^5$; $U_\infty = 3 \dots 7,5$ км/с, $r_0 = (3 \dots 1,2) \cdot 10^{-2}$ м)

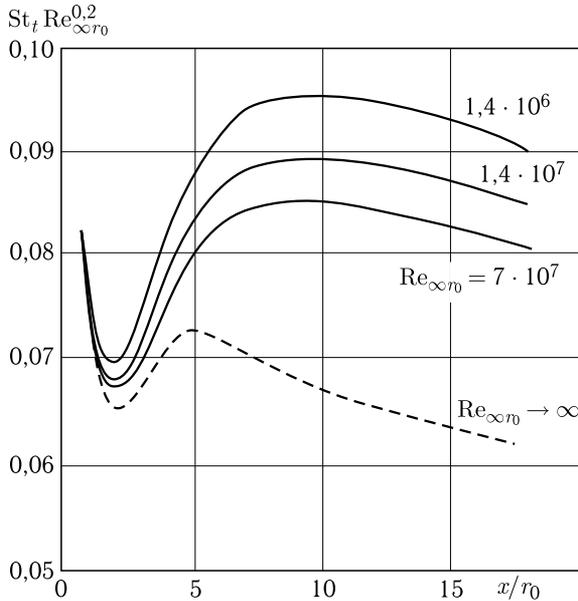


Рис. 9.28. Зависимость энтропийного эффекта от числа Рейнольдса на линии растекания притупленного конуса ($H = 10$ км, $U_\infty = 5$ км/с, $\theta_0 = 10^\circ$, $\alpha = 15^\circ$)

может быть объяснено лишь более значительным эффектом растекания на притупленном конусе, чем на остром.

Энтропийный эффект растет с ростом скорости, сопровождающегося ростом завихренности на теле, особенно в равновесном воздухе с уменьшением $\gamma_* - 1$ (согласно (9.1.8)), что следует из рис. 9.27 (линия растекания, турбулентный режим, q_{w0} — тепловой поток без учета завихренности). Отметим, что при $U_\infty = 7,5$ км/с отношение q_w/q_{w0} для турбулентного режима достигает величины 1,8 против 1,4 при $\alpha = 0$ на рис. 9.17, что также обусловлено большей величиной $\theta_l = \theta_0 + \alpha$.

Далее, из рис. 9.28 (турбулентный режим) следует, что на очень длинном конусе энтропийный эффект растет с уменьшением чисел Рейнольдса (как и на рис. 9.15 для ламинарного пограничного слоя).

И, наконец, на рис. 9.29 дано распределение тепловых потоков (чисел Стантона St) по длине притупленного конуса (турбулентный режим) в различных меридиональных сечениях, а на рис. 9.30 — распределение чисел Стантона ($St^{(0)}$ — число Стантона без учета завихренности) по φ в различных поперечных сечениях. Как видно, в соответствии со сделанными выше замечаниями относительно роли местного угла атаки $\theta_l = \theta_0 + \alpha \cos \varphi$ максимум энтропийного эффекта проявляется на линии растекания.

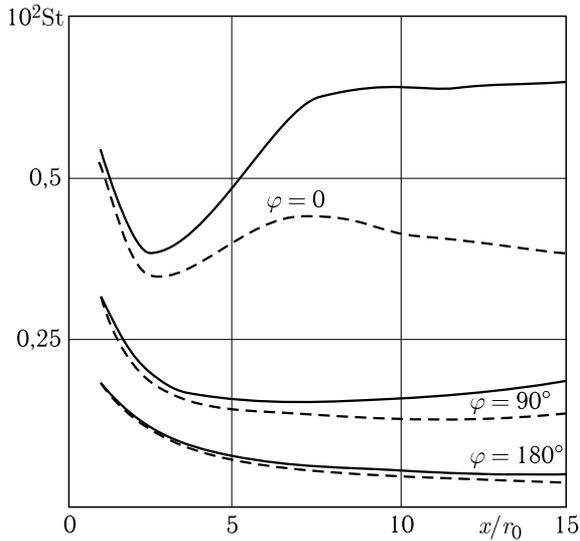


Рис. 9.29. Турбулентный теплообмен на притупленном конусе ($M_\infty = 25$, $H = 30$ км, $\theta = 10^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $t_w = 0,1$, $Re_{\infty r_0} = 8,8 \cdot 10^5$, $r_0 = 0,1$ м) в различных меридиональных сечениях. Сплошная кривая — с учетом завихренности, штриховая — без учета завихренности

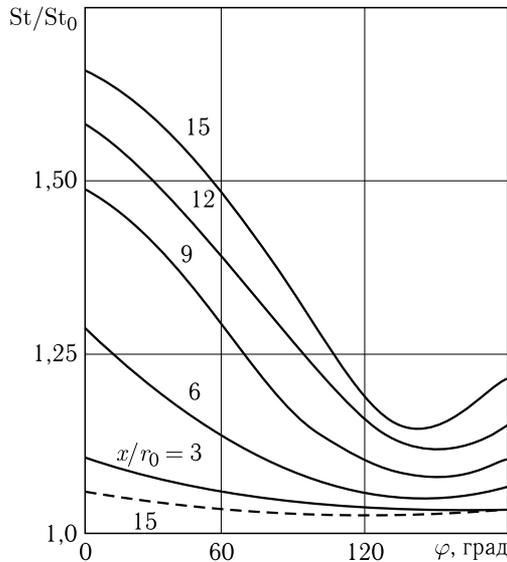


Рис. 9.30. Окружное распределение турбулентных тепловых потоков на притупленном конусе в сечениях $x = \text{const}$ (для условий рис. 9.29); пунктир — распределение для $M_\infty = 6$, $t_w = 0,7$, $Re_{\infty r_0} = 8,3 \cdot 10^5$

§ 9.4. Теплообмен на притупленных треугольных крыльях

В конце гл. 2 дано описание газодинамических особенностей обтекания тонких треугольных пластин с притупленным носком. При этом акцент сделан на пучок расходящихся почти прямолинейных линий тока на наветренной стороне пластины, образованных при расширении газа из области максимума давления на кромке пластины, обусловленного взаимодействием головной (от носка) ударной волны с кромковой пластины. Этот расходящийся пучок распространяется почти параллельно оси симметрии пластины (см. рисунки 2.32–2.34). Эти, казалось бы, незначительные нюансы газодинамической картины течения оказывают существенное влияние на распределение и величины тепловых потоков на наветренной стороне притупленной пластины. Соответствующие эффекты были обнаружены в работе [59], где с помощью ИК-камеры (см. гл. 11) было проведено детальное экспериментальное исследование ламинарного теплообмена на наветренной стороне тонкой треугольной пластины с притупленным носком и кромками с большой стреловидностью $\lambda = 90^\circ - \beta = 75^\circ$ при числе Маха внешнего потока $M_\infty = 14$ и числе Рейнольдса $Re = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty \approx 10^6$, где ρ , U , μ — плотность, скорость и вязкость газа, L — длина пластины (индекс ∞ относится к параметрам внешнего потока). Результаты типичного эксперимента показаны на рис. 9.31. При длине пластины $L \approx 200$ мм эти данные относятся к сечению $x/L \approx 0,8$ и к сферическим носкам различных размеров с радиусами $r_0 = 2, 3$ и 5 мм при радиусе цилиндрической кромки $r_k = 1,3$ мм; при этом носок модели выступал на подветренной стороне пластины, как это показано на том же рисунке. Тепловые потоки здесь отнесены к тепловому потоку q_0 в передней точке сферы с радиусом r_k , но по оси абсцисс отложена координата z/r_0 , где радиус r_0 свой для каждой кривой.

При этом обнаружен аномальный, казалось бы, эффект: на поверхности пластины на некотором расстоянии (порядка r_0) от оси ее симметрии и вдоль нее наблюдались узкие полосы существенной интенсификации тепловых потоков при отсутствии (как следует из рис. 2.35) максимума давления в районе этих полос, причем в точке максимума тепловые потоки существенно (в полтора–два раза) превышают тепловые потоки на острой пластине в этой окрестности. Этот эффект, как показывает эксперимент, отсутствует на пластине с острым носком ($r_0 = 0$), но присутствует (и с той же интенсивностью) на пластине как с притупленными, так и с острыми кромками при $r_0 > 0$.

Отметим важное свойство кривых q/q_0 на рис. 9.31: их максимумы располагаются в точках на расстоянии $z = z_A \approx 4 r_0$ от оси симметрии независимо от радиуса носка. Объяснение этого эффекта дано в работе [107] и книге [121] и может быть получено в рамках метода

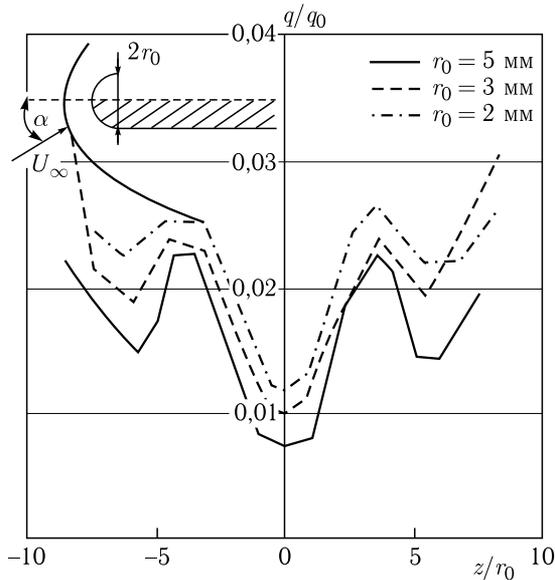


Рис. 9.31. Распределение тепловых потоков на пластине с притупленным носком и кромками в поперечном сечении

эффективной длины гл. 5, согласно которому растекание газа приводит к интенсификации теплообмена. В данном случае эта интенсификация происходит примерно вдоль «главной» линии растекания — $A-A'$ на рис. 2.33.

Эти результаты, однако, получены невязким расчетом, а в действительности вследствие вязко-невязкого взаимодействия (см. гл. 2) эта главная линия растекания несколько отклоняется и становится почти параллельной оси симметрии. Это следует из рис. 9.32, где дано распределение тепловых потоков на пластине в различных ее сечениях $x = \text{const}$, полученное в рамках параболизированных уравнений Навье–Стокса (гл. 8). Как следует из этого рисунка, максимумы тепловых потоков на этих кривых располагаются примерно на одинаковом расстоянии от оси и примерно равном расстоянии от оси максимума давления на кромке (для этого случая) на рис. 2.33, т. е. вдоль линии $z = z_A$.

На рис. 9.33 сравниваются распределения тепловых потоков в концевом сечении пластины, полученные как в рамках параболизированных уравнений Навье–Стокса, так и сочетанием невязкого расчета внешнего течения (гл. 8) с методом эффективной длины (гл. 5).

Оба метода дают примерно равные величины максимумов тепловых потоков, согласующихся, в общем, с данными эксперимента (в пределах его точности) на рис. 9.32, но разнесенные на разные расстояния от оси: второй метод «помещает» этот максимум примерно вдоль линии

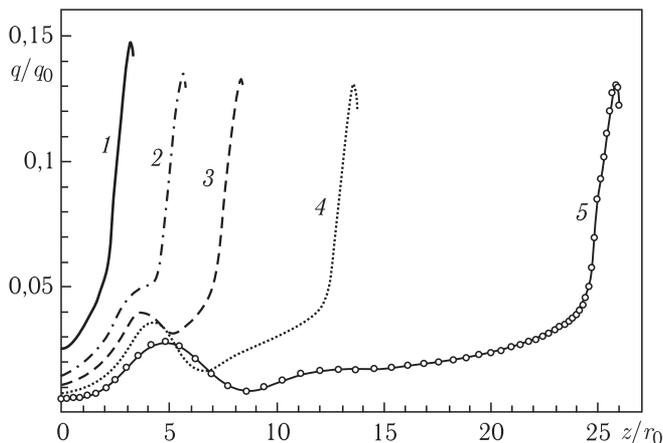


Рис. 9.32. Распределение тепловых потоков по поверхности пластины в различных сечениях: 1 — $x = 10r_0$, 2 — $x = 20r_0$, 3 — $x = 30r_0$, 4 — $x = 50r_0$, 5 — $x = 100r_0$

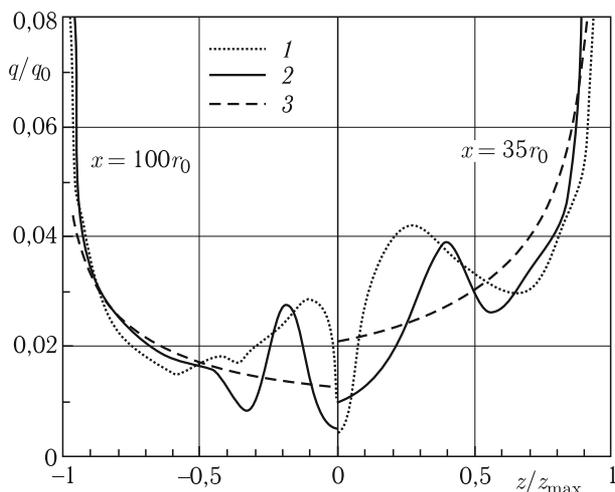


Рис. 9.33. Сравнение распределений тепловых потоков в сечениях $x = 35r_0$ и $90r_0$: 1 — приближенный метод (уравнения Эйлера и пограничного слоя), 2 — уравнения Навье–Стокса, 3 — острая пластина

растекания $A-A'$ на рис. 2.33, первый же метод дает положение максимума, почти совпадающее с экспериментом (что объяснено выше).

На том же рис. 9.33 для сравнения показаны «базовые» тепловые потоки на острой пластине в области экстремальных полос, которые оказываются в полтора–два раза ниже максимальных на пластине с притупленным носком. В то же время в непосредственной окрестно-

сти оси симметрии — в области стекания газа — реальные тепловые потоки оказываются ниже базовых. Вне пределов этой области интенсивного растекания-стекания влияние эффекта растекания на тепловые потоки на острой и притупленной пластинах оказывается примерно одинаковым.

В гл. 5 показано, что растекание газа более существенно для ламинарного пограничного слоя, чем для турбулентного (например, отношение тепловых потоков на конусе и пластине с теми же внешними параметрами равно 1,73 при ламинарном и только 1,17 при турбулентном пограничном слое). Поэтому и степень интенсификации турбулентных тепловых потоков на притупленной пластине должна быть меньше, чем для ламинарного пограничного слоя.

Эффект возникновения полос экстремального теплообмена на притупленной пластине реализуется лишь в некотором узком диапазоне определяющих параметров: углов α , λ и чисел Маха M_∞ . Это покажем путем расчетов в рамках описанной выше модели: уравнения Эйлера и метод эффективной длины для пограничного слоя [43]. Как следует из рис. 9.34, такой подход дает вполне удовлетворительные результаты, по крайней мере, в качественном отношении.

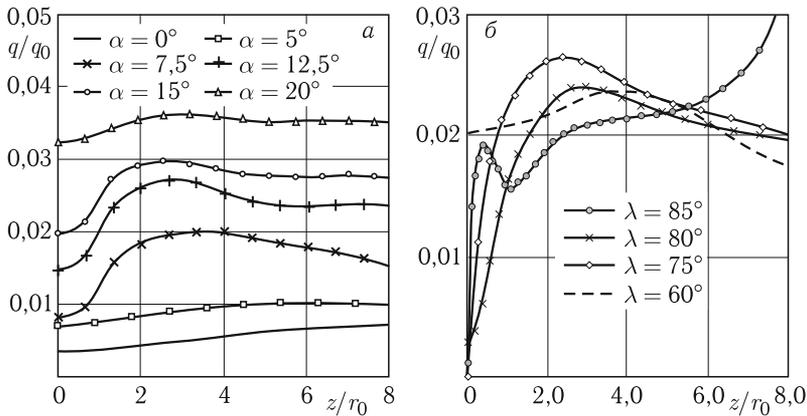


Рис. 9.34. Распределение тепловых потоков в сечении $x = 90 r_0$ при различных углах атаки и стреловидности крыла

На рис. 9.34, а дано распределение тепловых потоков при тех же режимах обтекания и в том же, что и на рис. 9.33, сечении $x = 100 r_0$ для пластины с $\lambda = 75^\circ$ ($\beta = 15^\circ$), обтекаемой под различными углами атаки $\alpha = 0 \dots 20^\circ$, а на рис. 9.34, б для угла атаки $\alpha = 10^\circ$ проиллюстрировано влияние угла стреловидности λ . Экстремальные полосы, как видно, появляются лишь в диапазоне $\alpha = 5 \dots 15^\circ$, при $\alpha \leq 5^\circ$ эти полосы очень слабо выражены, а при $\alpha = 20^\circ$ распределение тепловых потоков по центральной области почти равномерно. Этот результат согласуется с данными рис. 2.34, на котором видно, что

максимумы давления на кромке крыла появляются лишь в диапазоне углов $\alpha \leq 20^\circ$; причем, при $\alpha \leq 5^\circ$ головная индуцированная носком ударная волна пересекается с кромкой пластины под весьма малым углом, и область их взаимодействия сильно растянута. При больших же $\alpha > 20^\circ$ начинает играть роль индуцированный притупленными кромками пластины эффект растекания газа от плоскости симметрии (например, [121]), соизмеримый по интенсивности с растеканием, индуцированным интерференцией скачков в точке A кромки пластины.

Что касается других условий обтекания, то в работе [59] для пластины с $\lambda = 75^\circ$ экстремальные полосы при том же $\alpha = 10^\circ$ проявляются лишь незначительно при $M_\infty = 8$ и отсутствуют при $M_\infty = 6$, поскольку при этом ударный слой достаточно толстый и головная (от носка) ударная волна практически не взаимодействует (при $x \sim 100 r_0$ в эксперименте) с кромками пластины. Но при больших $M_\infty > 14$ по указанным выше причинам следует ожидать увеличения интенсивности экстремальных полос и смещения их к плоскости симметрии.

Интересно отметить, что наличие полос характерно для таких режимов и углов атаки α обтекания треугольных крыльев, когда в случае острых кромок скачок является присоединенным ($\alpha < \alpha_{кр}$, см. § 2.7 и 5.3). В этом случае для слабо затупленных кромок формируется тонкий энтропийный завихренный слой на поверхности крыла, который взаимодействует с энтропийным слоем от носка. При $\alpha > \alpha_{кр}$ этот скачок отошедший и полос не наблюдается (рис. 9.35). Точками показаны экспериментальные данные при $M_\infty = 14$. При этом зачернение точек означает, что экстремальные полосы имеют место, для светлых точек они отсутствуют. Рекомендации по теплообмену в последнем случае были приведены в гл. 5 (§ 5.3).

Приведенные материалы позволяют предсказывать появление полос экстремального теплообмена на крыльях типа притупленной пластины путем чисто геометрического сопоставления формы индуцированной притупленным носком ударной волны с формой крыла в плане. Более того, эти данные свидетельствуют о том, что при гиперзвуковом обтекании тел более или менее сложной формы всегда следует ожидать нетривиальных газодинамических и тепловых эффектов в областях взаимной интерференции отдельных элементов летательного аппарата.

§ 9.5. Аппараты сегментально-конической формы

Возвращаемые аппараты (ВА) сегментально-конической формы достаточно много исследовались в рамках отечественных программ «Союз» и «Алмаз», но поскольку новый этап пилотируемой космонавтики ориентирован на такие формы, они по-прежнему представляют интерес, и изучение и оптимизация параметров их теплообмена будут продолжены с учетом всего накопленного за прошедшие годы опыта.

Наиболее теплонапряженным элементом ВА сегментально-конической формы является лобовой сферический сегмент. При нулевом угле

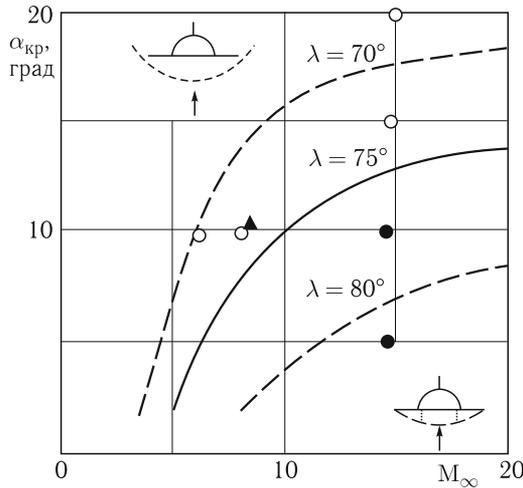


Рис. 9.35. Зависимость $\alpha_{кр}$ (M_∞, λ) для $\gamma = 1,4$. Эксперимент: \circ, \bullet — $\lambda = 75^\circ$, Δ, \blacktriangle — $\lambda = 70^\circ$

атаки $\alpha = 0$ картина обтекания сегмента (и распределение давления вдоль тела) не будет отличаться от картины обтекания соответствующей части сферы, если центральный угол сегмента θ_0 превышает угол в звуковой точке на сфере $\theta_* \cong 34^\circ + 40^\circ k$ ($k = \rho_\infty / \rho_s$ — отношение плотностей при переходе через прямой скачок уплотнения). Заметим, что для условий спуска $k \cong 0,05 \dots 0,20$ при числах Маха $M_\infty > 5$ и $\theta_* \cong 36 \dots 42^\circ$.

При $\theta_0 < \theta_*$ внезапное падение давления за угловой точкой будет распространяться в дозвуковую область течения, вызывая ускорение потока газа по сравнению с потоком вдоль сферы, так что в угловой точке будет достигаться местная скорость звука (рис. 9.36, а). Это повлияет и на картину распределения тепловых потоков, которая при $\theta_0 > \theta_*$ описывается в случае ламинарного режима зависимостями для сферы, а при $\theta_0 < 30^\circ$ существенно перестраивается, причем при $\theta_0 < 15 \dots 20^\circ$ максимум теплового потока смещается из критической точки в угловую. Это видно из рис. 9.36, б, где показаны распределения теплового потока на сегментах с различными углами θ_0 . Они получены в результате численного решения уравнений ламинарного пограничного слоя при больших числах Маха ($M_\infty > 10$). Пунктиром приведены результаты расчетов с использованием метода эффективной длины, которые достаточно близки к точным (в относительном виде). При этом учитываются равновесные физико-химические процессы в высокотемпературном воздухе. Как видно, при $\theta_0 \rightarrow 0$ максимальный тепловой поток в угловой точке примерно в 1,7 раза превышает значение $q^{(0)}$ в критической точке сегмента. Зависимость $q^{(0)}$ от θ_0 для различных условий обтекания приведена на рис. 9.37. При этом q_R и $q_{r_{10}}$ —

опорные тепловые потоки в критической точке сфер радиусов R и r_{10} (R — радиус кривизны сегмента, r_{10} — его радиус миделя). Очевидно, $q_R = q_{r_{10}} \sqrt{\sin \theta_0}$. При $\theta_0 \geq 30^\circ$ величины $q^{(0)}$ и q_R практически не отличаются, а с уменьшением θ_0 величина $q^{(0)}$ значительно превышает q_R (при фиксированном радиусе миделя r_{10}), при этом $q^{(0)}/q_R \sim \theta_0^{-1/2}$. Более стабильное при $\theta_0 \rightarrow 0$ отношение $q^{(0)}/q_{r_{10}}$ можно аппроксимировать зависимостью (θ_0 — в градусах)

$$\frac{q^{(0)}}{q_{r_{10}}} \cong 0,46 + 0,008 \theta_0. \tag{9.5.1}$$

Аналогичные соображения необходимо учитывать и при анализе турбулентного теплообмена на сегментах. При $\theta_0 > \theta_*$ распределение турбулентных тепловых потоков q_t на сегменте такое же, как на соответствующей части сферы. С уменьшением θ_0 распределение q_t на сегменте, рассчитанное с помощью метода эффективной длины (рис. 9.38), перестраивается. Максимальное значение q_t по-прежнему достигается вблизи звуковой точки и остается близким к q^* — максимуму q_t на сфере радиуса R (при этом для сравниваемых сегментов одинаковым остается радиус миделя $r_{10} = R \sin \theta_1$, где $\theta_1 \approx 40^\circ$).

Рассмотрим влияние угла атаки α на обтекание и теплообмен лобового сферического сегмента.

Наличие угла атаки α вызывает осевую асимметрию трансзвукового течения около сегмента прежде всего в окрестности точки торможения потока, увеличивая градиенты скорости и тепловой поток.

С ростом угла атаки точка торможения на теле с давлением $p = p'_0$ несколько отстает от «ньютоновской», получаемой в пределе при

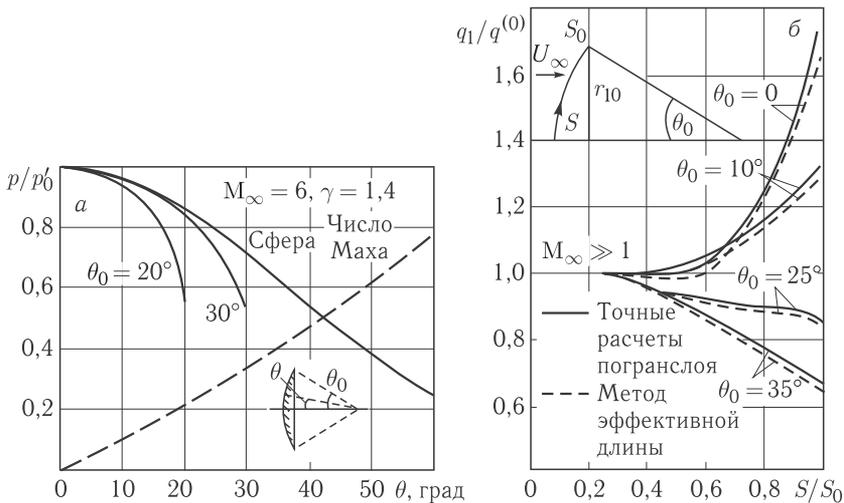


Рис. 9.36

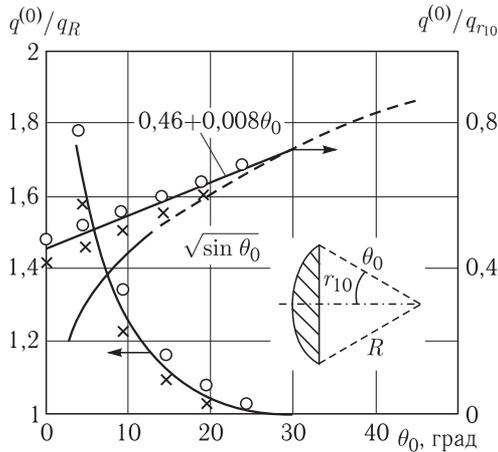


Рис. 9.37

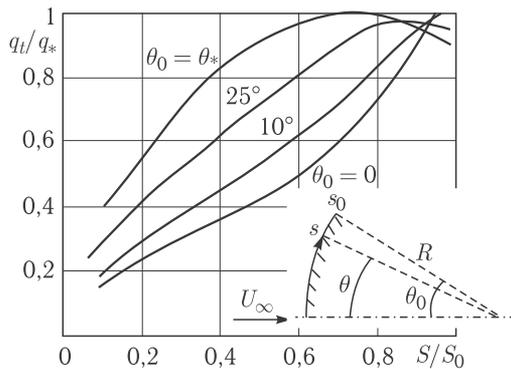


Рис. 9.38

$k \rightarrow 0$, когда ударная волна облегает тело, и определяемой совпадением местной нормали к телу с направлением скорости невозмущенного потока (см. (2.2.13) и рис. 2.11).

Вне некоторой окрестности критической точки, которая, впрочем, может быть достаточно обширной и включает зону влияния угловой кромки, давление на теле зависит практически только от местного угла атаки α_M , определяемого соотношением

$$\sin \alpha_M = \cos \theta \cdot \cos \alpha + \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi, \quad (9.5.2)$$

где θ — центральный угол, отсчитываемый от оси сегмента, φ — меридиональный угол, отсчитываемый от плоскости симметрии, содержащей критическую точку, и распределение p/p'_0 достаточно хорошо

следует известному распределению по сфере:

$$p/p'_0 = 1 - 1,17 \cos^2 \alpha_m + 0,225 \cos^6 \alpha_m. \quad (9.5.3)$$

Однако в окрестности критической точки эта формула непригодна и не может быть использована для расчета картины линий тока и теплообмена. В этой области необходимо использовать либо результаты численных расчетов невязкого обтекания, либо экспериментальные данные, обычно обработанные в виде аппроксимирующих зависимостей. При этом необходимо иметь в виду следующее обстоятельство.

Если распределение давления в окрестности критической точки на сегменте представить с учетом соображений симметрии в виде

$$\frac{p}{p'_0} = 1 - b_2 x^2 - c_2 z^2 - b_3 x^3 - c_3 z^2 x + O(x^4, z^4, x^2 z^2), \quad (9.5.4)$$

где $b_k, c_k > 0$; x, z — расстояния вдоль сегмента от критической точки в плоскости симметрии и в поперечном направлении, то на основе соотношений метода эффективной длины для ламинарного теплового потока можно получить разложение

$$q_l = A_l \sqrt{2(a_1 + d_1)} \left(1 + \frac{2a_2 + d_2}{3a_1 + 2d_1} x + O(x^2, z^2) \right). \quad (9.5.5)$$

При этом соответствующие компоненты скорости равны

$$u \approx a_1 x + a_2 x^2 + a_3 z^2 + \dots, \quad w \approx d_1 z + d_2 z x + \dots. \quad (9.5.6)$$

Из уравнений движения и адиабаты на поверхности тела имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{2p'_0}{\rho_0} b_2 \right)^{1/2}, & a_2 &= \left(\frac{p'_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \frac{b_3}{\sqrt{2b_2}}, \\ d_1 &= \left(\frac{2p'_0}{\rho_0} c_2 \right)^{1/2}, & d_2 &= 2a_3 = \left(\frac{p'_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \frac{2c_3}{\sqrt{2b_2} + 2\sqrt{2}c_2}. \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

Таким образом, чтобы иметь качественно правильное описание распределения теплового потока q_l вблизи критической точки, где $\partial q_l / \partial x > 0$, необходимо знать не только вторые (b_2, c_2) но и третьи (b_3, c_3) производные от давления, что предъявляет высокие требования к точности газодинамических расчетов или используемых экспериментальных данных, не обеспеченные в полной мере в предыдущих исследованиях.

Ниже представлены полученные на основе изложенных выше методов результаты некоторых оценок и расчетов теплообмена на телах сегментально-конической формы.

Тепловой поток в точке растекания $q(0)$ при равновесной диссоциации, как следует из оценок градиентов скорости (2.2.12), (2.2.13), больше величины q_R примерно на 35...40% при $\alpha \approx \theta_0$, так как средний градиент скорости в критической точке сегмента $\beta_{cp} = (\beta_1 + \beta_2)/2$ при $\alpha \approx \theta_0$ в 1,8...2 раза превышает градиент скорости на сфере.

Максимум ламинарных тепловых потоков $q_{l \max}$ на сегменте при $\alpha > 0$ достигается вблизи угловой кромки сегмента в плоскости угла атаки, где скорость газа достигает местной скорости звука. Величина $q_{l \max}$ существенно зависит от радиуса скругления кромки r_1 , уменьшаясь с ростом r_1 . При $\alpha \sim \theta_0$ и малых r_1 ($< 0,03 R$) величина $q_{l \max}$ в 1,4...1,7 раза превышает значение $q(0)$ в точке растекания, что отражает влияние больших отрицательных градиентов давления вблизи угловой точки, как и при осесимметричном обтекании торца с радиусом миделя r_{10} и радиусом скругления кромки r_1 (рис. 3.6). В нашем случае аналогом r_{10} является r_0 — расстояние от точки растекания до угловой точки.

Согласно (2.2.12) при $\alpha = \theta_0$ и $k \sim 0,17 \dots 0,2$ (что соответствует типичным условиям трубных испытаний) имеем $r_0 \sim 0,13 R$ и, таким образом, $r_1/r_0 \sim 0,17$ с учетом того, что для спускаемых аппаратов типа «Союз» $r_1 = 0,0225 R$. При этом значении r_1/r_{10} на торце $q_{l \max}/q(0) \approx 1,47$. В случае равновесно-диссоциирующего воздуха ($k \approx 0,06$) при $\alpha = \theta_0$ имеем $r_1/r_{10} \approx 0,3$ и $q_{l \max}/q(0) \approx 1,35$.

С учетом этих оценок получим, что при $\alpha \approx \theta_0$ отношение $q_{l \max}/q_R \sim 2,3 \dots 2,5$ для острой угловой кромки ($r_1 \rightarrow 0$) и $q_{l \max}/q_R \sim 1,8 \dots 2,0$ для кромки с характерным скруглением $r_1/R \approx 0,0225$. Таким образом, небольшое скругление угловой кромки снижает максимальный тепловой поток на 20%.

Хотя с уменьшением угла атаки α отношение r_1/r_{10} снижается, возрастание $q_{l \max}/q(0)$ не компенсирует снижения q_0/q_R и в целом отношение $q_{l \max}/q_R$ на кромке при $\alpha < \theta_0$ меньше, чем при $\alpha = \theta_0$. В силу приближенного характера этих оценок требуется, конечно, их проверка на базе более точных расчетов.

При переносе экспериментальных данных на натурные условия, как неоднократно подчеркивалось, необходимо учитывать влияние реальных процессов в газе, не моделируемых при испытаниях. На лобовой поверхности это влияние сосредоточено вблизи критической точки и прилегающей к ней небольшой области сопряжения с боковой поверхностью.

Здесь измерения в экспериментах, кроме того, затруднены и приоритет следует отдавать расчетным результатам, учитывающим влияние физико-химических процессов за ударной волной. В области скругления кромки и на боковой поверхности обратного конуса возможно замораживание рекомбинации, в результате чего уровень давления p может быть значительно меньше, чем в условиях эксперимента. При этом снижаются и тепловые потоки $q \sim \sqrt{p}$. Этот процесс определяет также степень влияния каталитичности поверхности на тепловые потоки в этой области.

В настоящее время прогноз теплообмена на новых спускаемых аппаратах сегментально-конической формы возможен на основе разработанных методов и программ решения уравнений Навье–Стокса. Апробация этих методов уже приводилась выше на других примерах,

в том числе на натуральных данных, но может быть дополнена примером именно для такой формы.

Ниже приведено сравнение таких расчетов с трубными данными [214] по теплообмену на модели ВА «Орион» при $M_\infty \sim 10$, $Re_{\infty D} \sim 10^6 \dots 10^7$, $D = 2r_{10}$. Как видно, новые методы решения уравнений Навье–Стокса с высокой точностью воспроизводят распределение ламинарных тепловых потоков на лобовой части ВА, в том числе в районе максимума на кромке, тогда как метод эффективной длины здесь заметно (в абсолютных величинах) занижает теплообмен и требует введения поправок на влияние градиента давления (рис. 9.39, см. цветную вклейку).

Отдельного рассмотрения требует случай турбулентных и переходных режимов (рис. 9.40, см. цветную вклейку). Расчет по методу эффективной длины с критерием перехода [147] в принципе угадывает положение перехода, но заметно завышает тепловые потоки в турбулентной области. Расчет по дифференциальной модели с локальным критерием перехода предсказывает более ранний переход, но зато более точно воспроизводит уровни теплообмена далее. Этот вопрос требует дополнительных исследований.

Ниже кратко представлены результаты численного моделирования обтекания и теплообмена возвращаемого аппарата (ВА) сегментально-конической формы перспективной пилотируемой транспортной системы для двух характерных точек траектории: $H = 40$ км, $M_\infty = 6$ (совершенный воздух) и $H = 75$ км, $M_\infty = 25$ (неравновесный воздух).

При этом для $H = 40$ км расчет проводился при постоянной температуре поверхности ($T_w = 300$ К), а для $H = 75$ км — при радиационно-равновесной температуре поверхности с $\varepsilon = 0,8$ и каталитичностью $\gamma_a = 0,01$. Как показывают результаты расчетов, картина течения и теплообмена на поверхности аппарата носит достаточно сложный характер. При полете ВА под углом атаки в задней и донной частях аппарата формируется система из нескольких рециркуляционных зон и система волн разрежения и сжатия. Сложность наблюдаемой структуры зависит, в первую очередь, от чисел Маха, Рейнольдса, угла атаки и, в меньшей степени, от химической модели течения. Характерный пример приведен на рис. 9.41 (вариант $\alpha = 30^\circ$, $H = 40$ км, $Re_{\infty D} = 2,1 \cdot 10^6$) (см. цветную вклейку). По линиям тока и распределению давления хорошо видны отрывная область в районе донного среза, отрывная область на верхней (подветренной) стороне ВА, висячая точка торможения, связанная с ней линия растекания и система скачков в ближнем следе. Такие картины течения характерны для режимов с большими (несколько миллионов) числами Рейнольдса. С увеличением угла атаки верхняя отрывная область резко увеличивается, заполняя собой всю подветренную сторону вплоть до кромки, и в дальнейшем лишь немного меняет размеры и форму. Донная отрывная область с увеличением угла атаки постепенно прижимается к телу, задняя

точка торможения смещается в район тангажного блока и отходит от тела, соответственно разворачивается течение в следе.

Другая картина течения наблюдается на больших высотах ($H = 75$ км, $Re_{\infty D} = 9,3 \cdot 10^4$), где число Рейнольдса в 20 раз меньше, и на большей части поверхности аппарата сохраняется безотрывное течение. На подветренной стороне отрывная область появляется при $\alpha \sim 20^\circ$ и больших размеров не достигает. За счет большей вязкой диссипации меняется и структура течения в следе — центральный максимум давления сливается с боковыми волнами сжатия. Пример расчета для $\alpha = 30^\circ$ приведен на рис. 9.42 (см. цветную вклейку).

Общая картина ламинарного теплообмена на поверхности ВА при $H = 40$ км представлена на рис. 9.43 (см. цветную вклейку). Наибольшего внимания заслуживает участок с высоким уровнем теплообмена на части лобового щита перед кромкой, где с увеличением угла атаки от 0° до 40° тепловые потоки растут с 1,1 до $2,3 q_{w0}$ (при $\alpha = 30^\circ$ — до $1,85 q_{w0}$; при этом q_{w0} — тепловой поток в критической точке ВА при $\alpha = 0^\circ$, практически совпадающий с тепловым потоком q_R в критической точке сферы радиуса R). Похожая тенденция с ростом угла атаки наблюдается с наветренной стороны боковой части аппарата, там тепловые потоки меняются от 0,04 до $0,4 q_{w0}$. В донной же области картина теплообмена определяется структурой отрывного течения, и уровни тепловых потоков здесь слабо зависят от угла атаки, составляя $(0,04 \dots 0,1) q_{w0}$.

Ламинарный теплообмен на поверхности ВА при $H = 75$ км представлен на рис. 9.44 (см. цветную вклейку). Неравновесность течения воздуха при этих условиях приводит к тому, что пик теплового потока у кромки при нулевом угле атаки отсутствует (значение теплового потока в окрестности кромки составляет $0,8 q_{w0}$), но с ростом α на кромке с наветренной стороны пик проявляется и быстро увеличивается, достигая $2,1 q_{w0}$ при $\alpha = 40^\circ$ (и $1,6 q_{w0}$ при $\alpha = 30^\circ$). Также монотонно с ростом угла атаки увеличивается тепловой поток на боковой наветренной части ВА с 0,01 до $0,4 q_{w0}$. На боковой подветренной части тепловой поток, напротив, уменьшается с ростом угла атаки от 0,02 до $0,004 q_{w0}$. В донной области ВА тепловой поток меняется сложным образом с увеличением α , находясь в диапазоне $0,005 \dots 0,03 q_{w0}$.

Возвращаясь к приведенным выше оценкам, можно отметить их неплохую точность при $H = 40$ км ($M_\infty = 6$). В то же время для условий $H = 75$ км, где учтены неравновесные процессы и каталитичность, оценки, основанные на модели равновесных процессов, заметно завышают тепловые потоки на кромке.

Глава 10

ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ НА МАТЕРИАЛАХ С НИЗКОЙ КАТАЛИТИЧНОСТЬЮ И ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Как показано в гл.7 (§7.6), важнейшей характеристикой материалов тепловой защиты летательных аппаратов многоразового использования является каталитическая активность поверхности в отношении гетерогенных реакций рекомбинации атомов кислорода и азота. Применение низкокatalитических материалов и покрытий позволяет существенно (до трех раз) снизить тепловые потоки в стенку и на 200...300 °С — температуру поверхности по сравнению с соответствующими равновесными значениями.

Каталитичность поверхности материала при высоких температурах поверхности, характерных для условий полета ЛА с гиперзвуковыми скоростями, не может быть найдена из теоретических соображений. Она определяется экспериментально в условиях, близких к натурным по основным параметрам (энтальпия торможения, давление, состав газа). Для получения таких условий используются высокотемпературные аэродинамические установки. Наиболее подходящими установками для такого рода исследований являются высокочастотные индукционные плазмотроны (ВЧ-плазмотроны) [55, 70, 71, 184, 197]. Основными достоинствами установок такого типа, обусловленными безэлектродным способом нагрева газа, являются химическая чистота получаемой плазменной воздушной струи и широкие возможности моделирования процессов теплообмена для условий полета гиперзвуковых ЛА на больших высотах [38, 95].

Установки такого типа работают как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом режимах и имеют ряд сменных сопел, существенно расширяющих возможности испытаний и диапазон моделируемых параметров. Параметры потока, получаемые в ВЧ-плазмотроне У-13 ЦНИИмаша, представлены в табл. 10.1.

В колонках табл. 10.1 представлены следующие данные установки: режим (дозвуковой — 1 или сверхзвуковой — 2), рабочий газ, применяемое сопло и его выходное сечение, размеры модели, давление на модели p , энтальпия торможения H_0 , тепловой поток к охлаждаемой

Таблица 10.1

Режим	Рабочий газ	Сопло	Выходное сечение, мм	Размер модели, мм	p , н/м ² (Па)	H_0 , МДж/кг	$q_{сн}$, кВт/м ²	α/ϵ_p , кг/м ² ·с
1	Воздух	Цилиндрическое	$D = 180$	$d = 150$	500...20000	12...30	250...750	0,016...0,025
1	Воздух	Цилиндрическое с подмешиванием газа	$D = 180$	$d = 150$	1000...20000	5...12	80...250	~ 0,02
1	Воздух	Цилиндрическое	$D = 180$	$d = 50$	500...20000	12...30	500...1200	0,03...0,04
1	Воздух	Сужающееся	$D = 124$	$d = 50$	500...20000	12...30	750...1900	0,045...0,06
1 и 2	Воздух	Сужающееся	$D = 60$	$d = 50$	1000...20000	12...30	1800...4000	0,06...0,15
1 и 2	Воздух	Сужающееся	$D = 30$	$d = 50$ и 20	3000...20000	12...30	4000...10000	0,2...0,4
1	Воздух	Плоское	270×50	400×270	500...20000	12...30	70...250	0,005...0,01
1	Воздух	Плоское с подмешиванием газа	270×50	400×270	1000...20000	5...12	10...70	0,002...0,006
1	CO ₂	Цилиндрическое	$D = 180$	$d = 150$	2500...7500	8...25	200...700	~ 0,025
1	CO ₂	Плоское	270×50	400×270	1000...7500	8...25	70...200	~ 0,008
2	Воздух	Коническое	$D = 50$	$d < 40$	~ 10000	10...25	1500...2500	~ 0,1

медной модели q_{Cu} , коэффициент теплообмена α/c_p . При этом при работе с воздухом на всех режимах кислород диссоциирован полностью и $c_O = 0,232$, а диапазон массовых концентраций атомов азота $c_N \sim 0,1 \dots 0,6$ в зависимости от энерговклада. Методика определения каталитичности материалов в отношении реакций гетерогенной рекомбинации атомов в высокотемпературных аэродинамических установках основана на измерениях теплового потока к изучаемому материалу и к высоко- и к низкокatalитическим эталонным материалам с хорошо изученными свойствами [8, 39, 41, 44, 73].

В применяемой методике наряду с экспериментальными измерениями отдельных параметров широко используются расчетно-теоретические методы. Одной из основных составляющих этой методики, которая определяет точность получаемых значений каталитичности, а следовательно, и точность прогнозирования температурных режимов проектируемых ЛА, является диагностика плазменных струй, генерируемых ВЧ-плазмотроном.

§ 10.1. Диагностика плазменной струи ВЧ-плазмотрона

Для проведения всех видов исследований в ВЧ-плазмотроне необходима подробная диагностика параметров плазменной струи. Кроме того, эти же данные используются для верификации расчетных методик и программ. Вопросам диагностики низкотемпературной плазмы, в том числе и генерируемой в ВЧ-плазмотронах, посвящена обширная библиография. Во многих работах обсуждаются методы определения отдельных параметров плазменных струй: энтальпии, температуры, скорости и т. д. Здесь представлена методика комплексной диагностики дозвуковых неравновесных плазменных струй. Она включает в себя определение всех основных параметров рабочего потока, необходимых для интерпретации результатов проводимых исследований, включая определение каталитичности [36, 68, 69, 72].

Течение газа в разрядной камере и в струе ВЧ-плазмотрона сопровождается многочисленными физико-химическими процессами (возбуждением внутренних степеней свободы молекул, диссоциацией, ионизацией, химическими реакциями, передачей энергии между частицами разного сорта, излучением), протекающими при низких давлениях неравновесным образом, что существенно усложняет диагностику потока и увеличивает число параметров, подлежащих определению. Неравновесный диссоциированный и частично ионизованный поток воздуха в струе ВЧ-плазмотрона характеризуется семью основными параметрами: давлением газа p , плотностью ρ , температурой T , скоростью U , полной энтальпией H_0 , концентрациями атомов азота N и кислорода O . В принципе требуется еще знание концентрации окиси азота NO и степени ионизации, однако в условиях ВЧ-плазмотрона они малы, поэтому их вкладом в общую энергию можно пренебречь.

Кроме того, во всех обычно используемых дозвуковых режимах (число Маха $M_\infty < 0,3$, расход газа $Q = 5 \dots 25$ г/с, потребляемая мощность $N = 70 \dots 300$ кВт и до 1000 кВт) молекулы кислорода диссоциированы полностью, т. е. концентрация атомов кислорода известна ($c_O = 0,232$), а остальные из указанных параметров плазмы не все независимы, что следует из уравнения состояния и соотношения, определяющего полную энтальпию H_0 через T и U :

$$p = \frac{R\rho T}{M}, \quad \frac{1}{M} = \sum \frac{c_k}{M_k}, \quad h = c_p T + h_d, \quad (10.1.1)$$

$$H_0 = \frac{U^2}{2} + h \cong c_p T + h_d, \quad h_d = \sum c_k \Delta h_k^0, \quad c_p = \sum c_k c_{pk},$$

где h_d и c_p — энтальпия образования атомов и удельная теплоемкость при постоянном давлении (с учетом энергии колебательных степеней свободы молекул); \bar{M} и M_k — молекулярные массы смеси газов и отдельных компонент; c_k , Δh_k^0 , c_{pk} — концентрации компонентов, их энтальпии образования ($\Delta h_N^0 = 33,5$ МДж/кг, $\Delta h_O^0 = 15,5$ МДж/кг) и удельная теплоемкость k -й компоненты при постоянном давлении, соответственно.

Таким образом, из шести неизвестных параметров, определяющих состояние плазмы в струе ВЧ-плазмотрона (p , ρ , T , U , H_0 , c_N), достаточно экспериментально определить лишь четыре.

При диагностике высокотемпературных газовых потоков часто измеряются не искомые параметры, а некоторые зависящие от них величины. Для определения указанных четырех параметров плазмы обычно измеряются следующие величины:

1) статическое давление в рабочей камере $p_{ст} = p$, которое измеряется достаточно надежно с помощью стандартных измерительных средств;

2) и 3) тепловые потоки к высококаталитической (по крайней мере, $K_w > 10$ м/с) и некаталитической ($K_w < 0,1$ м/с) поверхностям

$$q(K_w) = \frac{\alpha}{c_p} [H_0 - h_w(K_w)]. \quad (10.1.2)$$

По тепловому потоку $q(K_w = \infty)$ может быть определена энтальпия торможения, а по $q(K_w = 0)$ — энтальпия образования атомов и, следовательно, концентрация атомов азота c_N [257];

4) разность полного p'_0 и статического p давлений измеряется трубкой Пито и позволяет определить скорость потока U по формуле

$$\Delta p = p'_0 - p = \gamma_0 \rho U^2, \quad (10.1.3)$$

где γ_0 — поправочный множитель, учитывающий отклонение от закона Бернулли при низких числах Re. Увеличение p'_0 при этом происходит за счет эжектирующего воздействия периферийных струек тока. Зависимость $\gamma_0(\text{Re})$ согласно [200] приближенно описывается следующей

формулой, где число Re определяется по радиусу модели — трубки Пито (отметим, что $\gamma_0 < 1,3$ при $20 < Re < 100$):

$$\gamma_0 = 1 + \frac{7,25}{Re + 0,455\sqrt{Re}}. \quad (10.1.4)$$

Указанные измерения позволяют, таким образом, определить параметры H_0 , U , c_N , p (а также p'_0). Остальные параметры вычисляются по соотношениям (10.1.1). Однако это не исключает необходимости экспериментального определения параметров плазмы другими способами, так как дополнительная информация повышает точность и надежность диагностики потока в целом. В частности, при исследованиях плазменной струи дополнительно измерялись:

- полная энтальпия потока H_0 (непосредственно с помощью энтальпиметра);
- концентрация электронов и электронная температура (зондовые измерения);
- температура газа в струе T (непосредственно спектроскопическими методами).

При давлениях $p > 2000 \dots 2500$ Па состояние высокотемпературного воздуха в дозвуковой струе близко к равновесному. В этом случае диагностика потока сводится к определению следующих параметров: энтальпии торможения газа H_0 , давления p , скорости U и коэффициентов теплообмена зондов, используемых при диагностике. Остальные параметры — температура газа, плотность, состав, включая концентрации электронов, определяются расчетным путем с привлечением уравнения состояния и закона действующих масс и проведением специальных спектроскопических измерений.

В принципе энтальпия торможения может быть определена по измеренному значению температуры воздуха (например, спектральным методом). В воздухе (или азоте) такой подход имеет значительную погрешность из-за большой энергоемкости реакции диссоциации азота и вызванной этим резкой зависимостью энтальпии газа от температуры (рис. 1.6), что не позволяет определить величину H_0 с достаточной точностью. Изменение температуры на 5% (300 °С при уровнях температуры 5000...6000 °С) в пределах погрешности спектральных измерений приводит к погрешности 15...20% определения энтальпии H_0 .

Искомые параметры потока определяются расчетным путем с использованием достаточно сложных газодинамических и физико-химических моделей неравновесного газа, что в свою очередь является дополнительным источником погрешности их определения из-за несовершенства численного моделирования обтекания и теплообмена в дозвуковой высокотемпературной неравновесной струе газа, которая подвергается значительным возмущениям при вводе в нее зондов, иногда довольно больших (сравнимых с диаметром струи) размеров.

Методика определения параметров плазменной струи на ее оси основана, таким образом, на измерении статического давления p в рабочей камере плазмотрона, теплового потока к высокотемпературному материалу и разности полного и статического давлений Δp .

Статическое давление измеряется достаточно надежно стандартными измерительными средствами. Используются датчики давления типа ИКД. Один из таких датчиков изображен на рис. 10.1, а их характеристики приведены в табл. 10.2. Приемное отверстие для измерения статического давления располагается на стенке рабочей части установки.

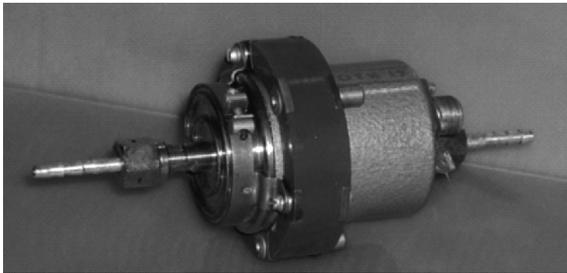


Рис. 10.1. Датчик для измерения давления

Таблица 10.2

Индекс датчика	Диапазон измерений Па	Величина погрешности измерений	
		Абсолютная, Па	относит. %
ИКД6ТД-10	133–1330	40	3
ИКД6ТД-50	133–6650	200	3
ИКД6ТД-100	133–13300	200	1,5

Тепловой поток, зависящий от каталитичности поверхности датчика, определяется по формуле (10.1.2), где коэффициент теплообмена α/c_p слабо зависит от состава газа в пограничном слое. При использовании полусферических зондов небольших размеров (меньших диаметра струи $R_{ст}$) градиент скорости в критической точке полусферы s известен из точного решения такой задачи и равен $s = 1,5U/R$. Здесь U — скорость потока, R — радиус сферы. Для измерения $q(K_w = \infty)$ обычно используется полусферический зонд радиусом 24 мм, в критической точке которого расположен медный калориметрический датчик теплового потока, работающий в регулярном режиме (см. рис. 10.2). При этом используется калориметр из меди высокой чистоты диаметром 3 мм и высотой 3,5 мм, теплоизолированный от корпуса модели слоем стеклопластика толщиной 0,5 мм. В калориметр зачеканена хромель-алюмелевая термопара (диаметр проволоки 0,2 мм). Термопара

измеряет температуру калориметра T_w . Зонд вводится в рабочий поток на время $\tau = 1,5 \dots 2$ с. За такое время температура калориметра возрастает на $50 \dots 80$ °С.



Рис. 10.2. Калориметрический датчик теплового потока

Тепловой поток q_{Cu} рассчитывается по следующему соотношению:

$$q_{Cu} = c_{Cu} m (\Delta T / \Delta t) / S,$$

S — тепловоспринимающая площадь калориметра, c_{Cu} — удельная теплоемкость меди, m — масса калориметра, $\Delta T / \Delta t$ — измеренный темп роста температуры.

Точность таких измерений составляет $\pm 8\%$.

Если используется зонд в виде цилиндрического торца, то из-за сложного характера обтекания таких моделей ограниченной дозвуковой струей возникает дополнительный неизвестный параметр — коэффициент теплообмена на таких моделях. Этот параметр может быть определен как экспериментально, так и путем численного решения задачи обтекания на основе решения уравнений Навье–Стокса.

Величина p'_0 измеряется с помощью водоохлаждаемой трубки полного напора (рис. 10.3).



Рис. 10.3. Трубка полного напора

Измерения перечисленных выше величин позволяют определить все искомые параметры плазменной струи, необходимые для интерпретации экспериментов. При измерениях энтальпии торможения газа калориметрическим способом в условиях дозвуковых потоков следует иметь в виду следующее обстоятельство. Этот способ определения энтальпии торможения сводится к измерению теплового потока $q_{Cu} = \alpha/c_p(H_0 - h_w)$, где $H_0 = h + U^2/2$, при известных значениях α/c_p и h_w . Он дает хорошие результаты в плотных газах, но в условиях разреженного неравновесного потока требует специального обоснования по двум основным причинам.

1. Энтальпия диссоциированного газа равна $h = c_p T + h_d$, где h_d — связанная энергия образования атомов (азота и кислорода). При равновесном внешнем течении величина $h_d = h_d(p, T)$ определяется расчетным путем. Но величина $h_w = c_p T_w + \sum c_{kw} \Delta h_k^0$ при замороженном или неравновесном пограничном слое зависит от каталитичности поверхности датчика. Концентрация атомов на стенке c_{kw} в замороженном пограничном слое определяется из соотношения $J_k = \beta(c_{k\delta} - c_{kw}) = K_{wk} \rho_w c_{kw}$, откуда имеем

$$c_{kw} = \frac{c_{k\delta}}{1 + K_{wk} \rho_w / \beta}; \quad \beta = \frac{\alpha}{c_p} \text{Le}^{2/3}, \quad (10.1.5)$$

где β — коэффициент массообмена. В этом случае

$$h_w = c_p T_w + \frac{h_d}{(1 + \text{Le}^{-2/3} Z)}, \quad h_d = \sum c_{k\delta} \Delta h_k^0, \quad Z = \frac{K_w \rho_w}{\alpha/c_p}. \quad (10.1.6)$$

В диапазоне температур воздуха $T = (5 \dots 10) \cdot 10^3$ К отношение $h_d/H_0 \sim 0,4 \dots 0,7$, поэтому возможный произвол в величине h_w , вообще говоря, может внести существенную погрешность в определение H_0 . Избежать этого можно, лишь исключив влияние h_d на величину теплового потока, т. е. при $Z \gg 1$.

Из вышеизложенного ясно, что принципиальной трудностью, определяющей точность получения диагностируемых параметров плазменной струи, является выбор значений K_w эталонных материалов. С аналогичными трудностями столкнулись американские ученые при проведении диагностики сверхзвуковых высокоэнтальпийных потоков в электродуговых установках в процессе исследования каталитических свойств материалов теплозащиты аппарата «Space Shuttle» [152]. Как правило, каталитическая активность материалов, используемых в качестве эталонов, имеет большой разброс. Это связано как с различными способами определения этого параметра, степенью чистоты и технологическими особенностями изготовления, так и с наличием различных примесей в газе. В наших исследованиях обычно все калориметрические датчики теплового потока выполняются из меди. Для меди выбрано значение $K_w = 25$ м/с. Это значение было ранее получено в потоке воздуха в ВЧ-плазмотроне [73]. Близкие значения вероятности рекомбинации $\gamma = 0,17$ ($K_w = 28$ м/с при $T_w = 300$ К) и $\gamma = 0,15 \pm 20\%$

($K_w = 25$ м/с) получены для меди также в работах [96] (азот) и [66] (воздух).

2. Вторым вопросом, требующим обсуждения, является применимость формулы (10.1.2) при относительно малых числах Рейнольдса $Re = 5 \dots 50$, реализуемых в условиях экспериментов. При расчетах коэффициента теплообмена α/c_p в критической точке полусферы, помещенной в дозвуковой поток, хорошее приближение при больших числах Re дает формула Фея–Риддела (3.2.25), в которой градиент скорости на внешней границе пограничного слоя рассчитывается по соотношению $c = 1,5 U/R$.

Известные для гиперзвуковых скоростей результаты дают с уменьшением Re существенное (до 40 %) отклонение величины $St \cdot Re^{1/2}$ от постоянной, соответствующей асимптотически тонкому пограничному слою при больших числах Рейнольдса, для которых и получена формула Фея–Риддела (рис. 9.25).

В указанном диапазоне чисел Re толщина температурного пограничного слоя соизмерима с размерами затупления зонда, и можно ожидать существенного отклонения закона теплообмена от описываемого в рамках теории тонкого пограничного слоя. Однако эксперименты, в которых число Re изменялось за счет изменения радиусов сфер, показали, что в дозвуковом потоке ($M_\infty \sim 0,2$) при низком температурном факторе $T_w/T_\delta \sim 0,05$, по крайней мере в диапазоне $Re \sim 5 \dots 50$, влияющие числа Рейнольдса на коэффициент теплообмена невелики.

Поскольку вязкость воздуха $\mu_\delta/\mu_w = (T_\delta/T_w)^{0,7}$, коэффициент $l_w = (\rho_w \mu_w)/(\rho_\delta \mu_\delta) \sim (T_\delta/T_w)^{0,3}$ не вносит заметного вклада в погрешность определения коэффициента теплообмена. Записывая α/c_p в виде

$$\frac{\alpha}{c_p} = 0,8 Pr^{-0,6} l_w^{0,1} \sqrt{\rho_\delta \mu_\delta c} \sim (\rho_\delta \mu_\delta U)^{1/2} \sim (\rho_\delta \mu_\delta)^{1/2} \left(\frac{2\Delta p}{\gamma_0 \rho} \right)^{1/4},$$

можно заключить, что неточность в определении γ_0 и Δp порядка 30...40 % приводит лишь к незначительной (7...10 %) ошибке в коэффициенте теплообмена, а значит, и в рассчитываемой величине энтальпии H_0 .

Для измерения больших тепловых потоков (до 10 МВт/м²) применяется калориметрический зонд проточного типа. На рис. 10.4 показано устройство такого зонда, а на рис. 10.5 — зонд перед экспериментом и во время эксперимента. Калориметр 1 выполнен в виде полый шайбы диаметром $\varnothing 25$ мм и толщиной 3 мм; 2 — водоохлаждаемый корпус, 3 — проставки, 4 — термпары, 5 — промежуточные вставки, 6 — трубки охлаждения.

Принцип работы проточного калориметра основан на измерениях расхода охлаждающей жидкости Q (кг/с) (воды) и разности ее температур ΔT на входе и выходе из калориметра, помещенного в струю высокотемпературного газа.

Рабочий расход охлаждающей жидкости составляет от 5 до 50 г/с.

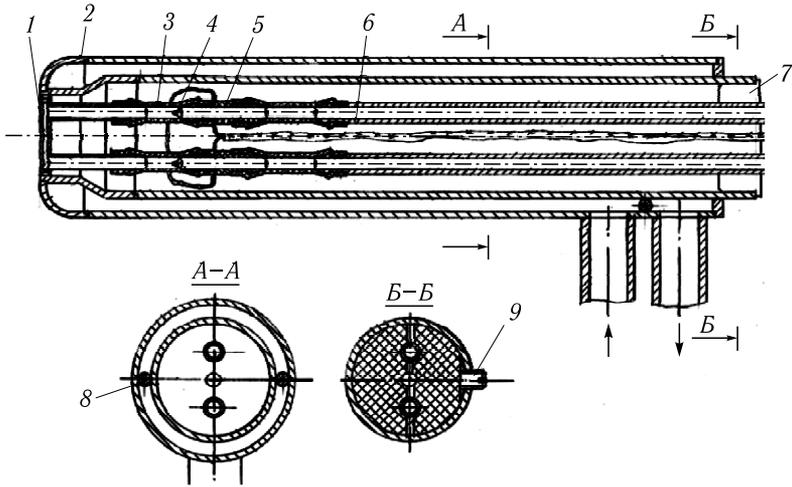


Рис. 10.4

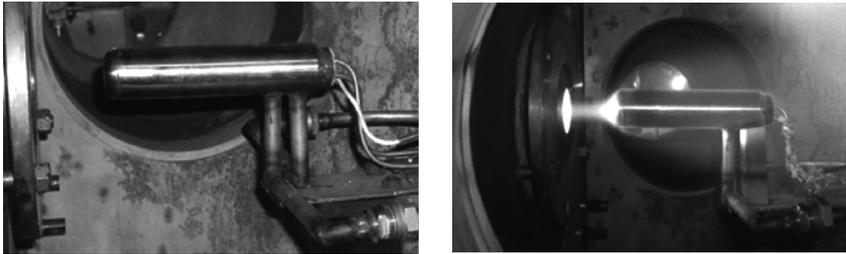


Рис. 10.5. Датчик для измерения высоких тепловых потоков до и во время эксперимента

Параметры плазменной струи по совокупности измеренных величин получают итерационной процедурой с использованием программы численного расчета неравновесного пограничного слоя на модели с конечной каталитичностью поверхности.

Когда состав газа в струе близок к равновесному, основные этапы этой процедуры при давлениях $p \geq 2000 \dots 2500$ Па следующие:

- для H_0 задается нулевое приближение. Значение скорости газа в струе определяется по измеренному значению Δp и плотности, рассчитанной по заданной H_0 и измеренному давлению p ;
- проводится серия расчетов пограничного слоя на полусфере $R = 24$ мм, в которой варьируется значение H_0 до совпадения расчетного и измеренного значений теплового потока.

Далее уточняется значение скорости U с новым значением H_0 и т. д. Сходимость наступает после 3–4 итераций.

Величины теплового потока и распределение параметров около зондов и моделей, обтекаемых дозвуковой струей ВЧ-плазмотрона, получаются с помощью численного решения уравнений пограничного слоя.

Измеренные значения Δp и q_{Cu} (сферический зонд радиуса 24 мм) и расчетные значения искомых параметров H_0 , T , U , ρ , c_N , n_e для двух значений давления $p = 2500$ и 5000 Па приведены в табл. 10.3 и 10.4. Как следует из представленных данных, тепловые потоки линейно возрастают при увеличении энерговыклада N . Среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от такой линейной аппроксимации экспериментальных данных не превосходит 5%. Как уже отмечалось, на всех режимах работы плазмотрона ($N > 60$ кВт) молекулы кислорода диссоциированы полностью и массовая концентрация атомов кислорода известна — $c_O = 0,232$.

Таблица 10.3. ($p = 2500$ Па)

N , кВт	Δp , Па	q_{Cu} , кВт/м ²	H_0 , МДж/кг	U , м/с	c_N	ρ , кг/м ³	T , К	n_e , см ⁻³
88	18,4	828	21,7	174	0,31	$1,02 \cdot 10^{-3}$	5610	$8,3 \cdot 10^{+12}$
128	36,7	1228	26,5	262	0,44	$9,04 \cdot 10^{-4}$	5860	$1,1 \cdot 10^{+13}$
171	56,7	1421	28,0	335	0,47	$8,70 \cdot 10^{-4}$	5940	$1,3 \cdot 10^{+13}$

Таблица 10.4. ($p = 5000$ Па)

N , кВт	Δp , Па	q_{Cu} , кВт/м ²	H_0 , МДж/кг	U , м/с	c_N	ρ , кг/м ³	T , К	n_e , см ⁻³
97	14	993,6	23,1	111	0,34	$1,90 \cdot 10^{-3}$	5860	$2,0 \cdot 10^{+13}$
139	23,5	1311	26,5	152	0,43	$1,75 \cdot 10^{-3}$	6050	$2,5 \cdot 10^{+13}$
227	34	1628	31,0	191	0,54	$1,57 \cdot 10^{-3}$	6310	$3,5 \cdot 10^{+13}$
	32,5	1739						

Погрешность определения основных параметров плазменной струи непосредственно связана с неточностью измерения тепловых потоков, которая составляет $\sim 10\%$, а также с неточностью в значении каталитичности эталонной меди. Уменьшение каталитичности меди до $K_w \approx 10$ м/с приводит к существенно большей погрешности $\sim 15\%$ в определении H_0 . Увеличение каталитичности меди слабее сказывается на значениях определяемых параметров, чем ее уменьшение. В случае низких значений статического давления газа ($p < 1000 \dots 2000$ Па), когда в струе отсутствует термохимическое равновесие, для определения состава газа в струе (или на внешней границе пограничного слоя около модели) требуются дополнительные измерения. Поскольку молекулы кислорода полностью диссоциированы, а степень ионизации мала, достаточно дополнительно измерять только концентрацию атомов азота. Для этого используется так называемый двойной каталитиче-

ский зонд, идея которого предложена в работе [257] и реализована в [36]. При этом дополнительно проводятся измерения теплового потока $q(K_w = 0) \cong \alpha/c_p (H_0 - c_p T_w - h_d)$ к модели из материала, имеющего достаточно низкую каталитическую активность. Отсюда находим h_d и, следовательно, c_N . Итерационная процедура нахождения всех параметров в этом случае усложняется.

В данных исследованиях в качестве низкокatalитического эталонного материала использовалась плиточная теплозащита ВА «Буран» ТЗМК-10, каталитичность которой определена ранее [44, 73].

§ 10.2. Измерения каталитической активности материалов

Исходными данными для определения каталитической активности ТЗМ является измеренный тепловой поток к образцам из испытуемого и эталонных материалов. Методы измерения тепловых потоков к высококatalитическим эталонным материалам, в качестве которых обычно используются металлы (в частности, медь), имеющие высокую теплопроводность, рассмотрены выше. Задача измерения тепловых потоков

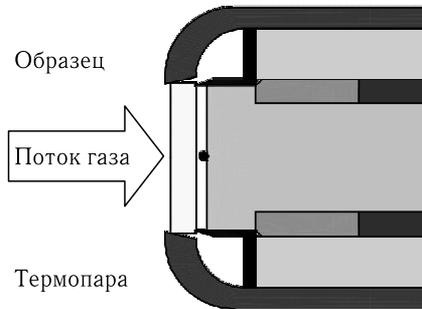


Рис. 10.6. Державка для крепления образцов испытуемых материалов

к ТЗМ, имеющим малую теплопроводность, существенно сложнее. Она решается обычно с помощью измерений температуры поверхности T_w различными оптическими средствами (оптическими пирометрами) или измерений температуры термометрами, расположенными за испытуемым достаточно тонким образцом в специально создаваемой изотермической полости (рис. 10.6). Для восстановления значений T_w по измеренной температуре необходимо проведение расчетов теплового режима державки для крепления образцов [40].

Поскольку все измерения параметров струи, а также тепловых потоков к исследуемому и эталонному материалам проводятся с некоторой погрешностью, важно выяснить, как зависит точность определения искомой величины K_w от этих погрешностей.

Тепловой поток к исследуемому и эталонному материалам с использованием формулы Гуларда для химически замороженного пограничного слоя, который реализуется в ВЧ-плазмотроне при низких давлениях, запишется в виде:

$$q_i = \frac{\alpha}{c_p} \left[H_0 - c_p T_{wi} - \frac{h_d}{1 + Z_i Le^{-2/3}} \right]. \quad (10.2.1)$$

Здесь $Z_i = K_{wi}\rho_w/(\alpha/c_p) \sim K_{wi}(pr_0)^{1/2}$, индекс $i = 0$ — для эталонного материала, $i = 1$ — для испытуемого материала, Le — число Льюиса, p — давление, r_0 — радиус затупления зонда.

Степень влияния каталитичности поверхности на теплообмен определяется не только самой величиной K_w , но и условиями обтекания, размерами модели и температурой ее поверхности, что следует учитывать при выборе параметров моделирования эффекта в лабораторных условиях. Очевидно, что возможная степень снижения теплового потока будет тем больше, чем больше отношение $h_d/[H_0(1 + ZLe^{-2/3})]$.

С другой стороны, этот член равен нулю в случаях замороженного относительно атмосферных условий внешнего потока, где $h_d = 0$ (большие высоты полета), или при $Z \gg 1$ ($K_w \rightarrow \infty$ или большие значения произведения pr_0).

В качестве эталонного материала (индекс «0») следует использовать высококatalитические покрытия (платину или медь), для которых $K_{w0} > 20$ м/с и $h_d/(1 + ZLe^{-2/3}) \ll H_0$.

Тогда, учитывая, что $c_p(T_{w0} - T_{w1}) \ll H_0$, получим

$$\bar{q} = \frac{q_1}{q_0} = 1 - \frac{h_d}{H_0(1 + ZLe^{-2/3})}, \quad (10.2.2)$$

откуда

$$Z = \left[\frac{h_d}{H_0(1 - \bar{q})} - 1 \right] Le^{2/3}.$$

При больших энтальпиях торможения $H_0 \gg c_p T_{w1}$ и $\alpha/c_p \approx q_0/H_0$ получим

$$K_w = \frac{\alpha/c_p}{\rho_w} \left[\frac{\bar{h}_d}{(1 - \bar{q})} - 1 \right] Le^{-2/3}, \quad \bar{h}_d = h_d/H_0. \quad (10.2.3)$$

Рассматривая эту формулу, можно выявить величины погрешностей, вносимых в определение каталитичности каждым из входящих в нее параметров.

Считая, что все погрешности носят случайный характер, имеем

$$\frac{\Delta K_w}{K_w} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{W_i^2} \left(\frac{\Delta F_i}{F_i} \right)^2}, \quad W_i^{-1} = \frac{F_i}{K_w} \frac{\partial K_w}{\partial F_i}, \quad (10.2.4)$$

где функции F_i могут принимать следующие значения переменных в выражении (10.2.3), а именно: \bar{q} , \bar{h}_d , α/c_p , ρ_w .

Производя преобразования (для простоты при $Le = 1$), получим

$$\frac{1}{W_1} = \frac{Z+1}{Z} \left[\frac{1+Z}{\bar{h}_d} - 1 \right], \quad \frac{1}{W_2} = \frac{Z+1}{Z}, \quad \frac{1}{W_3} = 1, \quad \frac{1}{W_4} = -1.$$

Полагая, что относительные погрешности в определении рассматриваемых параметров $\Delta F_i/F_i \approx 0,1$, получим для испытуемого материала зависимость величины $\Delta K_w/K_w$ от Z . Расчеты показывают, что ошиб-

ка в определении K_w минимальна в диапазоне значений $Z = 0,7 \dots 1,5$, но при этом достаточна велика и ее минимум $\sim 50\%$ (рис. 10.7). Несмотря на это, в определении величины теплового потока это вносит ошибку только в 10% .

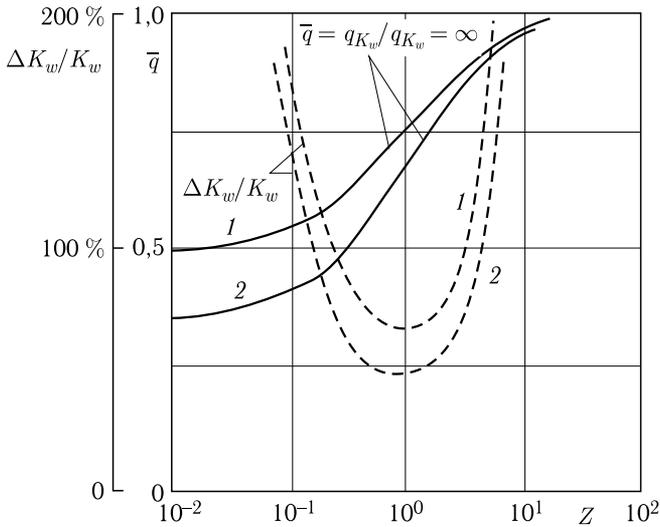


Рис. 10.7. Зависимость относительной погрешности определения K_w от параметра Z ; 1 — $h_\delta/H_0 = 0,5$; 2 — $h_\delta/H_0 = 0,65$

Основной вклад в ошибку определения K_w вносят погрешности в определении относительного теплового потока \bar{q} ($1/W_1 > 4$ для условий рис. 10.7) и безразмерной энтальпии диссоциации \bar{h}_d ($1/W_2 > 1$), причем величина последней погрешности может быть существенной только в случае, когда в струе отсутствует термодинамическое равновесие. Погрешности, связанные с этими величинами, резко возрастают за пределами указанного диапазона Z ($0,7 \dots 1,5$). Так, при $Z = 0,2$ и $Z = 4$ эта погрешность достигает 100% .

Основываясь на проведенном анализе возможных источников погрешностей в определении K_w , рассмотрим вопрос о выборе оптимальных параметров потока и размеров моделей при экспериментальном определении каталитичности материалов.

Наибольшая точность определения K_w достигается при $Z \sim 1$, когда максимальна производная $\frac{\partial \bar{q}}{\partial \ln Z}$. Приемлемую для практических приложений точность определения K_w в силу вышесказанного можно получить в существенно более широком диапазоне значений параметра Z . Так, если принять, что условием надежного определения каталитичности будет различие в тепловых потоках к некаталитической

и идеально каталитической поверхностям в 20%, то соответствующий диапазон приемлемых значений величины Z будет $0,2 < Z < 4$.

На рис. 10.8 в координатах K_w , p (заметим, что давление p в 1 мбар = 100 Па) показана область, в которой выполняется это условие на модели в виде цилиндрического торца диаметром $2R = 150$ мм, помещенной в дозвуковую струю ВЧ-плазмотрона при характерном для такого вида экспериментов значении температуры образца $T_w \sim 1500$ К. Как видно, исследовать каталитичность низкокatalитических материалов (с $K_w \sim 1$ м/с) лучше на режимах с давлением $p > 5000$ Па, а высококatalитических (с $K_w > 5$ м/с) — на режимах с низким давлением $p \sim 1000$ Па.

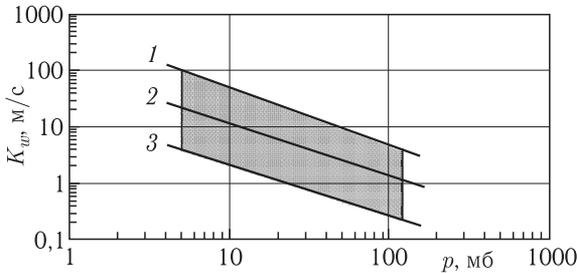


Рис. 10.8. Область параметров ВЧ-плазмотрона, оптимальных с точки зрения определения каталитичности материалов (1 — $Z = 4$, 2 — $Z = 1$, 3 — $Z = 0,2$)

Однако нужно заметить, что при исследовании низкокatalитических материалов увеличение давления выше ~ 10000 Па и связанное с этим уменьшение скорости потока приводят к ускорению рекомбинации в газовой фазе, что нежелательно. Действительно, скорость газовой фазной рекомбинации атомов определяется выражением

$$\frac{dc_a}{dt} \sim K_r p^2 c_a^3 \frac{R}{U}$$

и незначительное увеличение давления ведет к существенному возрастанию скорости рекомбинации. Поэтому при низких значениях K_w предпочтительнее увеличивать параметр R/U , который, хотя и увеличивает скорость рекомбинации, но в меньшей степени, чем увеличение давления.

Поэтому рассматриваемая область справа ограничена вертикальной прямой $p \approx 10000$ Па. Слева эта область также ограничена значением давления $p \approx 500$ Па, что связано с возможностями описываемой установки (главным образом, с трудностями обеспечения эффективного охлаждения стенок разрядной камеры ВЧ-плазмотрона рабочим потоком при столь низких давлениях).

Расширение границ указанной области возможно за счет изменения размеров моделей, однако уменьшение размеров приводит только к некоторому возрастанию коэффициента теплообмена и уменьшению

точности определения K_w при низких ее значениях. Увеличение диаметров моделей до значений, превышающих диаметр струи, также не оправдано.

Необходимого для повышения точности определения K_w при низких давлениях уменьшения коэффициента теплообмена можно достичь, изменив схему обтекания, моделирующую течение в окрестности критической точки, на течение около плоской пластины. При этом величина α/c_p уменьшается по мере удаления от кромки пластины.

Точность определения K_w зависит также от степени диссоциации молекул (т. е. от энтальпии торможения газа). Поэтому в разных газах соответствующие экспериментальные исследования следует проводить при различных значениях H_0 . Так, заметная диссоциация CO_2 наблюдается уже при $H_0 \sim 6 \dots 8$ МДж/кг, а при $H_0 = 12 \dots 13$ МДж/кг степень диссоциации близка к 1. В потоке чистого азота заметная диссоциация реализуется только при $H_0 > 15$ МДж/кг.

Важным требованием, позволяющим повысить точность определения каталитической активности, является заморозенность химических реакций в пограничном слое. Несмотря на многочисленные исследования констант скоростей газофазной рекомбинации атомов азота при низких температурах, ее величина известна с довольно большой погрешностью. Поэтому при экспериментальном определении K_w желательно, чтобы пограничный слой был заморожен при максимальных значениях величины k_r , из имеющегося в литературе набора, что может быть выяснено путем проведения предварительных расчетов неравновесного пограничного слоя на моделях в условиях планируемых экспериментов.

В настоящее время наилучшим образом изучены каталитические свойства плиточной теплозащиты ЛА «Space Shuttle» и «Буран». Исследования каталитических свойств плиточной теплозащиты (материал ТЗМК-10 с покрытием) проводились как со штатными элементами плиточной теплозащиты размером 150×150 мм, так и с образцами различных размеров, вырезанных из плитки.

Первоначально эксперименты в ВЧ-плазмотроне проводились при давлении газа $p = 1400$ Па и различных значениях энерговыклада (мощности установки). Определялось эффективное значение K_w в предположении равенства $K_{wO} = K_{wN} = K_w$. При этом для ТЗМК-10 была получена зависимость K_w от температуры стенки K_w

$$K_w = 553 \exp(-8232/T_w), \text{ м/с.} \quad (10.2.5)$$

Дальнейший анализ показал, что каталитичность материала при высоких температурах может зависеть от парциальных давлений атомов азота и кислорода [73]. Учитывая это и принимая во внимание результаты последующих экспериментов, для K_w было получено выражение

$$K_w = K_w^* + 2,83 \cdot 10^4 \exp(-15200/T_w)(p^* c^*)/(p c), \text{ м/с.} \quad (10.2.6)$$

Здесь K_w^* — константа скорости рекомбинации при низких температурах, определяемая столкновительным механизмом Или–Райдилла (рекомбинация происходит при столкновении внешнего атома с атомом, адсорбированным на стенке), c — массовая концентрация атомов. Согласно литературным данным, включая данные обработки летного эксперимента, это значение близко к $K_w^* = 1$ м/с. Второе слагаемое отражает вклад рекомбинации по механизму Ленгмюра–Хиншельвуда (рекомбинация на стенке происходит при столкновении двух адсорбированных атомов), зависит от температуры и давления (точнее, от парциального давления атомов) и возрастает с падением давления. Звездочками в (10.2.6) отмечены параметры, соответствующие давлению $p = 1400$ Па.

Позже [39] вероятности гетерогенной рекомбинации атомов были определены также и для азота. Кроме вероятностей рекомбинации были определены константы скоростей элементарных стадий этого сложного процесса.

На рис. 10.9 приведены экспериментальные (значки) и расчетные значения (кривые) теплового потока к модели в виде плоского цилиндрического торца диаметром 150 мм из разных материалов в зависимости от энерговклада, полученные в ВЧ-плазмотроне при давлении $p = 1000$ и 3000 Па в потоке воздуха. Как следует из приведенных данных, тепловые потоки к эталонной высококаталитической медной модели существенно превышают соответствующие значения на плиточной теплозащите.

Такое различие тепловых потоков к различным материалам и надежное численное моделирование теплообмена в струе ВЧ-плазмотрона позволяют определять искомые значения каталитичности с приемлемой точностью, что значительно повышает точность и надежность прогнозирования температурных режимов ТЗМ на ЛА в условиях реального полета.

Описанные выше методики экспериментального определения вероятностей рекомбинации применимы только для чистых газов. В случае диссоциированного воздуха по этой методике находится «эффективное» значение вероятности рекомбинации атомов (или K_w), имеющихся в смеси. В этой связи, казалось бы, естественно использовать при решении задач пограничного слоя и определении тепловых потоков в газовых смесях вероятности рекомбинации γ_i^* отдельных компонентов, полученные раздельно в экспериментах с чистыми газами, скажем, в азоте и кислороде или в их смесях с аргоном. При этом в [249, 259], например, вероятность γ_N^* определяется экспериментально напрямую в диссоциированном азоте, а γ_O^* — обработкой экспериментов по теплообмену в потоке диссоциированного воздуха при известной уже величине (или функции) γ_N^* .

Определенные именно таким образом в работах [249, 259] величины γ_N^* и γ_O^* широко использовались при расчетах теплообмена аппарата «Space Shuttle», давая, как правило, существенно завышенные значе-

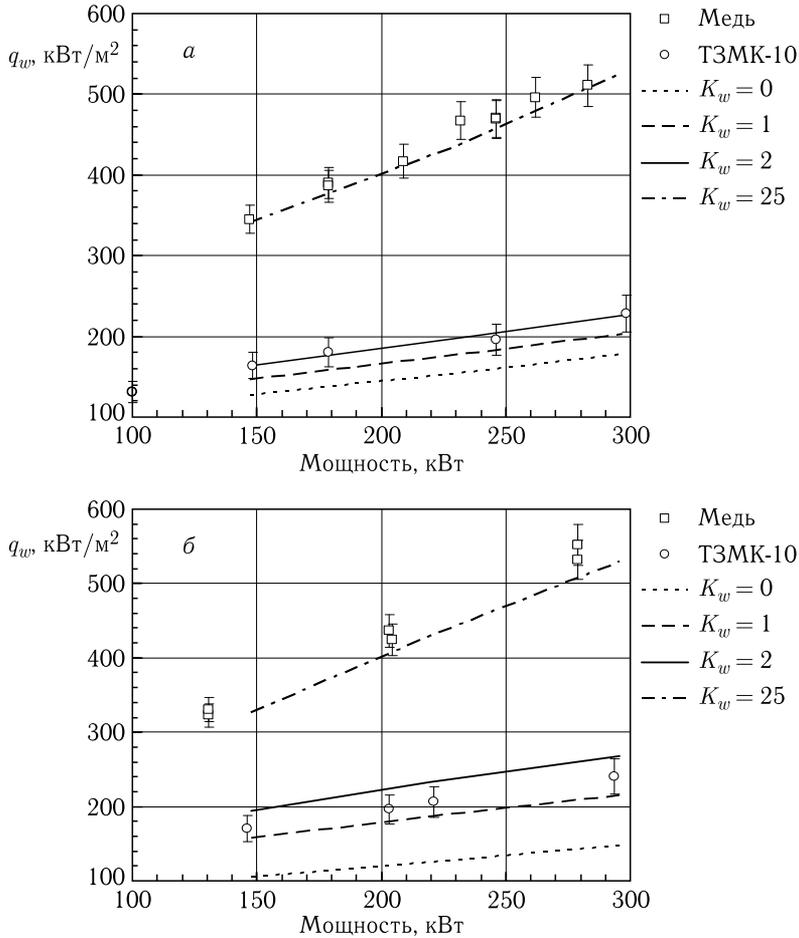


Рис. 10.9. Зависимость тепловых потоков к различным материалам от мощности установки: *a* — $p = 1000$ Па, *б* — $p = 3000$ Па (K_w в м/с)

ния тепловых потоков и температур поверхности по сравнению с полученными в летном эксперименте [210, 211, 249, 262, 278, 279]. Эти же данные использовались для нахождения недостающих констант при разработке более сложных моделей гетерогенной рекомбинации [94].

В работе [42], однако, показана ошибочность этих использованных ранее в работах [223, 259] методик экспериментального определения каталитичности материалов. Причины этого кратко были изложены в гл. 7.

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ ТЕПЛООБМЕНА НА МОДЕЛЯХ В АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ТРУБАХ

Несмотря на большие успехи вычислительной аэротермодинамики и растущую роль численных методов в тепловом проектировании летательных аппаратов различного назначения, предназначенных для полетов в атмосфере с большой скоростью, базовая информация по тепловым нагрузкам все еще получается, как правило, на основе экспериментального моделирования и измерения теплообмена на геометрически подобных моделях в аэродинамических трубах. Вычислительные методы позволяют оценивать и учитывать влияние немоделируемых эффектов реального газа и др.

Кроме того, роль экспериментальных исследований несомненна в связи с тем, что только они дают возможность надежного тестирования вычислительных методов и программ.

Для экспериментального исследования детальной картины теплообмена на моделях летательного аппарата (ЛА) сложной формы требуются высокоинформативные методы измерений, к числу которых относятся термовизионный и термоиндикаторный. Традиционные датчиковые измерения на моделях при этом играют вспомогательную роль, осуществляя контрольные функции и дополняя основные измерения данными в особых локальных зонах (носовое затупление корпуса, крыла и др.) [30].

§ 11.1. Метод и некоторые результаты термовизионных измерений

В ЦНИИмаш еще в ходе работ по программе «Энергия–Буран» разработан, в дальнейшем усовершенствован и в последние годы широко используется в практике аэродинамического теплового эксперимента термовизионный метод исследования теплообмена на моделях аппаратов сложной формы при их испытаниях в аэродинамических трубах [9, 11, 87, 185]. Он основан на измерении полей инфракрасного

(ИК) излучения нагреваемых аэродинамическим потоком моделей, для чего используются ИК-камеры.

ИК-техника традиционно широко и успешно применяется для контроля и измерения температур различных объектов. Новым элементом явилось ее использование совместно с ЭВМ с целью максимальной автоматизации процедуры определения тепловых потоков к моделям, испытываемым в аэродинамических трубах. Высокая информативность, наглядность, возможность ввода оцифрованных термоизображений в ЭВМ для их автоматизированной обработки и анализа, отсутствие характерных для контактных измерительных средств газодинамических и тепловых возмущений, вносимых датчиками, позволяют существенно повысить эффективность аэродинамического эксперимента, проводимого на геометрически подобных моделях исследуемого ЛА с целью детального определения условий внешнего теплообмена на его поверхности.

Наибольшее применение методы термографии нашли при исследованиях теплообмена на моделях ЛА в поршневых гиперзвуковых аэродинамических трубах У-7, У-11. Газодинамические поршневые установки многокаскадного сжатия (ПГУ) У-7, У-11 [10] относятся к гиперзвуковым трубам импульсного типа (принципиальная схема ПГУ показана на рис. 11.1). Они обеспечивают наиболее полное моделирование натуральных условий полета ЛА (рис. 11.2) по определяющим теплообмен параметрам: числам Маха ($M_\infty = 6 \dots 15$), числам Рейнольдса ($Re_{\infty L} = 2 \cdot 10^5 \dots 10^8$) и температурному фактору ($t_w = 0,1 \dots 0,5$) при испытаниях геометрически подобных моделей ЛА длиной до $L \sim 0,35$ м при углах атаки $\alpha < 50^\circ$ и длиной до $L \sim 1$ м при $\alpha \sim 0$ (диаметр среза сопла $d = 800$ мм). Характерное время эксперимента на ПГУ на этих режимах составляет величину $\sim 0,15 \dots 0,2$ с, а типичное изменение определяющих параметров рабочего потока (для одного из режимов) показано на рисунках 11.3 и 11.4.

Число Маха является одним из основных параметров, определяющих конфигурацию и интенсивность головного и внутренних скачков уплотнения, энтропийные градиенты в ударном слое, относительный уровень тепловых потоков в обширной подветренной зоне аппарата при больших углах атаки.

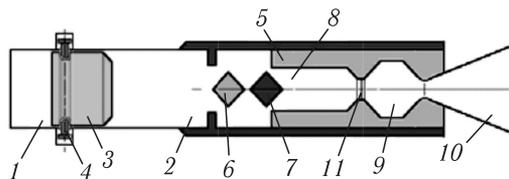


Рис. 11.1. Агрегат сжатия ПГУ: 1 — баллон с толкающим газом; 2 — ствол; 3 — поршень; 4 — пусковое устройство; 5 — форкамера; 6, 7 — клапаны; 8, 9 — камеры накопления газа; 10 — сопло; 11 — дроссель

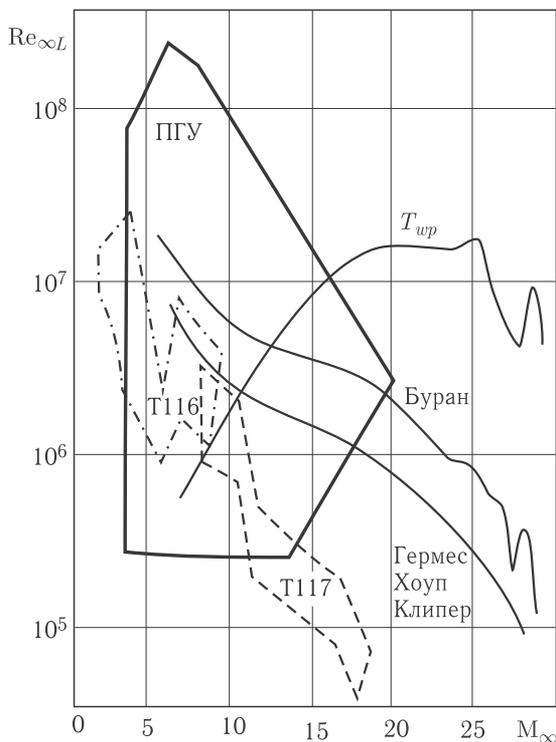


Рис. 11.2. Режимы крупномасштабных гиперзвуковых аэрогазодинамических труб, типовые траектории ВА и уровень температур на носовой части ВА T_{wpr}

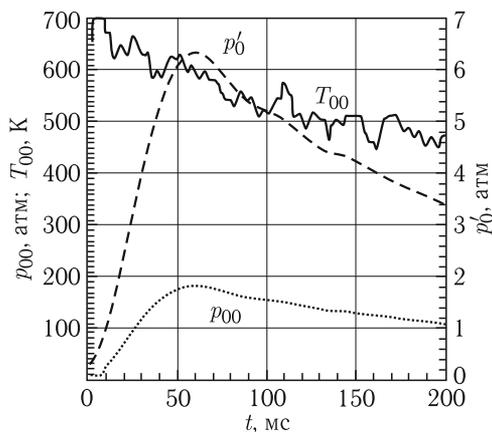


Рис. 11.3. Изменение параметров режима ПГУ (p_{00} , T_{00} , p'_0) в зависимости от времени (режим $M_{\infty} = 6$)

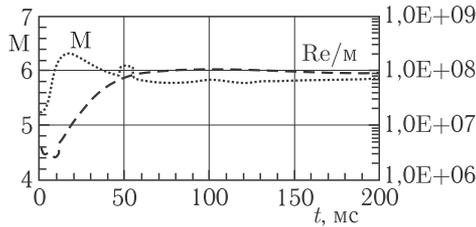


Рис. 11.4. Изменение чисел Маха и Рейнольдса в зависимости от времени режима ПГУ ($M_\infty = 6$)

Число Рейнольдса определяет характер течения в пограничном слое (ламинарный, турбулентный или переходный), размеры области влияния энтропийных эффектов, обусловленных поглощением невязкого энтропийного слоя пограничным и т. д.

Влияние температурного фактора особенно важно в зонах интерференции внутренних скачков уплотнения с пограничным слоем и в отрывных зонах.

Крупномасштабные ПГУ, как и другие трубы кратковременного действия [31], требуют относительно небольших затрат энергоресурсов, что делает их перспективными средствами экспериментального исследования теплообмена на моделях гиперзвуковых аппаратов сложной конфигурации.

Приведенные ниже результаты получены с помощью термовизионных систем, в состав которых входят ИК-камеры типа АГА-780 (сканирующая) и А40-М (матричная), имеющие соответственно частоту регистрации 25 и 50 изображений в секунду, чувствительность $\sim 0,1^\circ\text{C}$ и достаточный температурный диапазон измерений (до $1500 \dots 2000^\circ\text{C}$ и более). Камеры снабжены сменными объективами (поле зрения $7^\circ \times 7^\circ$, $20^\circ \times 20^\circ$ для АГА-780 и $24^\circ \times 18^\circ$, $12^\circ \times 9^\circ$ для А40-М), позволяющими варьировать пространственное разрешение, проводить фрагментарную съемку отдельных элементов модели.

Чувствительный элемент приемной камеры АГА-780, изготовленный из кристалла антимонида индия InSb, работает в диапазоне длин волн $3 \dots 5,6$ мкм. Для исключения шумового фона он охлаждается жидким азотом. Сканирование исследуемого поля объекта осуществляется механическим способом с помощью вращающихся призм. Сканирование одного ИК-кадра происходит за время 25 мс, при этом регистрируется состояние температурного поля в $8192 = 128 \times 64$ точках, после чего через 15 мс возможно сканирование следующего кадра (таким образом, частота опроса 25 кадров в секунду). Время опроса одной точки составляет $\Delta t_0 \sim 3$ мкс.

В ИК-камере А40-М установлена фокальная матрица и неохлаждаемый микроболометр, а система работает в диапазоне длин волн $7,5 \dots 13$ мкм. При этом температурное поле регистрируется одновре-

менно в $76800 = 320 \times 240$ точках через 20 мс, т. е. здесь частота опроса 50 кадров в секунду.

Приемная камера располагается вне рабочей части аэродинамической установки около одного из иллюминаторов с прозрачными стеклами (с известными коэффициентами пропускания $1, 0 \dots 0, 7$ в указанном спектральном диапазоне) и регистрирует проходящий через него сигнал от нагреваемой в процессе эксперимента поверхности модели.

Обычно расстояние до модели составляет ~ 1 м. Отработана одновременная съемка модели двумя ИК-камерами с разных ракурсов (рис. 11.5), что позволяет сократить количество необходимых продувок.

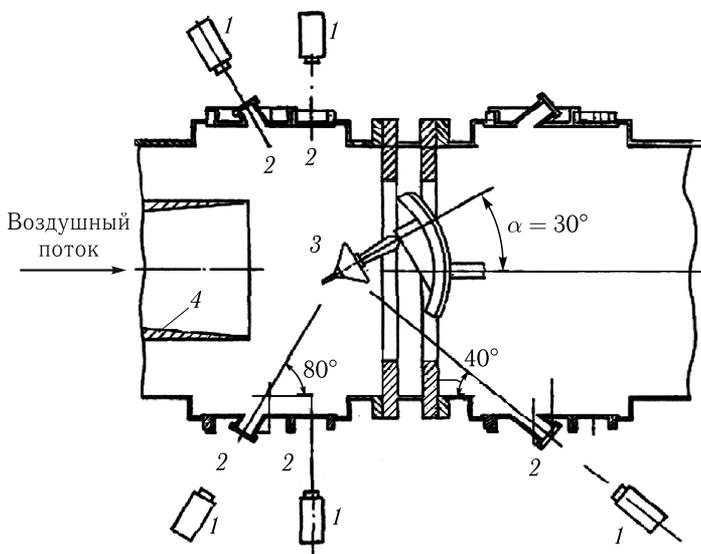


Рис. 11.5. Схема термовизионных испытаний в установке: 1 — ИК-камера; 2 — иллюминатор; 3 — модель; 4 — сопло

Получаемый от приемной камеры сигнал поступает в блок обработки термовизионной системы, с помощью которого осуществляется настройка на выбранный диапазон измерения и визуализация ИК-кадра на экране дисплея. Исследуемая модель в рабочем потоке аэродинамической установки нагревается и излучает на длине волны λ в направлении приемной камеры ИК-системы поток собственного излучения модели $\epsilon_{\lambda} J_{\lambda B}$, а также отраженное поверхностью модели излучение $(1 - \epsilon_{\lambda}) J_{\lambda f}$ от окружающих нагретых элементов тракта, стенок рабочей части установки и от других узлов. Кроме того, в приемную камеру попадает паразитное излучение высокотемпературного газового потока $J_{\lambda S}$ и отраженное от ИК-окна излучение внешней среды. Суммарный поток со спектральной плотностью J_{λ} , воспринимаемый ИК-камерой, состоит из перечисленных выше составляющих.

Две последние составляющие можно отнести к суммарному фоновому излучению, речь о котором будет идти ниже.

Если спектральный коэффициент пропускания ИК-окна в рабочей части аэродинамической установки равен τ_λ , то можно считать:

$$J_\lambda = J_{0\lambda} + \tau_\lambda [J_{\lambda B} \varepsilon_\lambda + J_{\lambda F}], \quad (11.1.1)$$

где $J_{\lambda F}$ — фоновое излучение; ε_λ — коэффициент черноты поверхности в указанном спектральном диапазоне; $J_{0\lambda}$ — отраженное от ИК-окна излучение внешней среды.

В эксперименте обеспечиваются такие условия наблюдения, чтобы угол δ между линией визирования и нормалью к наблюдаемому элементу модели не превышал $60 \dots 70^\circ$ во избежание значительных искажений полезного сигнала. Это связано с тем, что на практике материалы, используемые в ИК-термографии для моделей, хорошо подчиняются закону Ламберта лишь в диапазоне $\delta < 60 \dots 70^\circ$. За пределами этих значений коэффициент излучения быстро уменьшается, что затрудняет восстановление температуры поверхности модели по ИК-излучению. Измерения в сомнительных зонах необходимо повторять при другой ориентации модели по отношению к ИК-камере.

В предположении, что поверхность модели излучает диффузно, имеем

$$J_{\lambda F} = (1 - \varepsilon_\lambda) J_{\lambda f}. \quad (11.1.2)$$

Тогда сигнал, регистрируемый системой в рабочем спектральном диапазоне $\Delta\lambda$, можно представить в следующем виде:

$$I = \eta \int_{\Delta\lambda} J_\lambda S_\lambda d\lambda, \quad (11.1.3)$$

где S_λ — спектральная чувствительность приемника излучения; η — константа. Отсюда можно получить, что

$$I = I_0 + \varepsilon\tau I_B + \tau(1 - \varepsilon)I_f. \quad (11.1.4)$$

Здесь ε , τ — средние значения ε_λ , τ_λ в рабочем спектральном диапазоне $\Delta\lambda$.

Выделяя отсюда собственное излучение тела I_B и используя калибровочные кривые $I(T)$, можно определить температуру поверхности из уравнения

$$I = A / (\exp(B/T) - 1), \quad (11.1.5)$$

Приемник излучения ИК-камеры чувствителен в достаточно узком спектральном диапазоне длин волн, поэтому калибровочные кривые хорошо описываются зависимостями типа Планковской для черного тела при температуре T (где A и B — калибровочные константы).

Величина регистрируемого сигнала I для каждой точки кадра определяется по величине записанного видеосигнала V :

$$I = I_k + k_0 S (V - V_k), \quad (11.1.6)$$

где V_k , I_k — значения видеосигнала и регистрируемого сигнала в контрольной точке термоизображения, k_0 — калибровочный множитель, S — чувствительность системы.

Величина I_k определяется по калибровочной кривой (11.1.5) при известной температуре T_k в контрольной точке. Калибровочный множитель k_0 определяется при калибровке системы по регистрируемым сигналам термоизображений двух эталонов температуры «черного тела» по соотношению (S_k — чувствительность системы при калибровке)

$$k_0 = \frac{I_1 - I_2}{V_1 - V_2} \frac{1}{S_k}. \quad (11.1.7)$$

Далее имеем (ε_k — излучательная способность поверхности в контрольной точке)

$$I = I_0 + \tau[\varepsilon I_B + (1 - \varepsilon)I_f], \quad I_k = I_0 + \tau[\varepsilon_k I_{Bk} + (1 - \varepsilon_k)I_f]. \quad (11.1.8)$$

Тогда, исключая I_0 и используя (11.1.6), получим (при тарировке по контрольной точке на модели, когда $\varepsilon_k = \varepsilon$, или по фону, когда $I_{Bk} = I_f$)

$$I_B = I_{Bk} + (V - V_k) \frac{k_0 S}{\varepsilon \tau}, \quad (11.1.9)$$

после чего из (11.1.5) находим температуру поверхности

$$T_w = \frac{B}{\ln\left(1 + \frac{A}{I_B}\right)}. \quad (11.1.10)$$

Успех использования термовизионного метода существенно зависит от механических, теплофизических и оптических свойств материала модели, его технологичности при механической обработке. Теплофизические характеристики материала должны обеспечить необходимый для чувствительности системы уровень нагрева модели и контрастность ее изображения на окружающем фоне. Для этого материал модели должен обладать низкой теплопроводностью, обеспечивающей достаточный для измерения уровень повышения температуры модели за время эксперимента. Кроме того, материал должен быть термостойким и не менять своих теплофизических и оптических характеристик при рабочих температурах модели T_w в процессе многократных испытаний (хотя в принципе, эти изменения можно учесть при математической обработке ИК-изображений).

Далее, поверхность модели должна иметь высокую степень черноты $\varepsilon \geq 0,8$, обеспечивая тем самым как высокий уровень полезного сигнала, который регистрируется системой, так и пренебрежимо малый вклад отраженных от модели фоновых излучений. В ИК-диапазоне материал должен быть непрозрачным. Кроме того, глубина прогрева модели должна быть значительно больше шероховатости ее поверхности.

Указанным требованиям удовлетворяет, например, прессованный стеклопластик АГ-4В, изготавливаемый из спутанного стекловолокна, пропитанного фенол-формальдегидной смолой. В диапазоне температур $T_w \sim 20 \dots 150$ °С он имеет следующие свойства (которые при подготовке эксперимента проверяются и уточняются на образцах из заготовки для изготовления модели) [154]:

- теплопроводность $\lambda = 0,49 \pm 0,02$ Вт/(м·град);
- теплоемкость $c = 1,2 \pm 0,05$ кДж/(кг·град);
- плотность $\rho = 1710 \pm 10$ кг/м³;
- коэффициент черноты $\varepsilon \cong 0,93 \dots 0,95$.

Использование материала с такими теплофизическими характеристиками позволяет обеспечить в проводимых исследованиях достаточный нагрев поверхности модели. Обычно при испытаниях в ПГУ нагрев модели из АГ-4В составляет величину $50 \dots 150$ °С для высоких уровней теплового потока, характерных для наветренной поверхности модели, и $1 \dots 10$ °С для низких тепловых потоков, характерных для подветренной стороны модели. Температура нагрева модели, помимо теплофизических характеристик материала, зависит от размеров используемой модели и реализованного режима на аэродинамической установке.

Кроме того, необходимо обеспечить благоприятные условия для наблюдения за моделью, находящейся в рабочем потоке, оптимально используя имеющиеся в стенках рабочей части оптические окна и ИК-камеру (объектив, чувствительность, фильтры и др.) для получения полной картины аэродинамического нагрева модели. Даже используя две ИК-камеры, обычно необходимо провести несколько экспериментов, чтобы получить достаточно подробный тепловой портрет модели на одном режиме. Заметим, что при выборе определенного диапазона чувствительности ИК-камеры возможно измерение сигнала I в диапазоне $100 \dots 30$ % от его максимального значения I_{\max} для каждого диапазона. В случае, если измеряемый сигнал выходит за пределы этого диапазона, часть информации теряется и для ее восполнения требуется повторение эксперимента при другом диапазоне чувствительности. Поэтому требуется определенная стратегия в проведении термовизионного эксперимента, чтобы наиболее эффективно зарегистрировать, а затем и полезно использовать полученную информацию.

За время сканирования поверхности модели при испытаниях в ПГУ с камерой АГА-780 регистрируется (в зависимости от режима) до 4–5 термовизионных кадров, которых для предложенной методики обычно достаточно для восстановления теплового потока. При использовании матричной камеры А40-М фиксируется до 10 кадров. Повышение частоты опроса камеры дает возможность уточнить историю нагрева модели и повысить точность метода.

Используя полученные значения температуры модели $T_w(\tau)$ с известной временной привязкой, тепловые потоки $q_w(\tau)$ в каждой точке поверхности модели можно найти из численного решения одномерного

уравнения теплопроводности с зависящими от времени граничными условиями 1-го рода:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right), \quad T(n, 0) = T_H, \quad T(0, \tau) = T_w(\tau), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n \rightarrow \infty} = 0, \quad (11.1.11)$$

где T_H — начальная температура модели; n — расстояние от поверхности по внутренней нормали.

Получив распределение температуры в материале, можно с помощью соотношения

$$q_w(\tau) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0} \quad (11.1.12)$$

определить распределение теплового потока по поверхности.

Отметим, что использование одномерной модели теплопроводности обычно вполне оправдано, так как толщины зоны прогрева материала модели за время эксперимента в ПГУ составляют величины порядка нескольких долей миллиметра.

Таким образом, при термовизионных измерениях на моделях в аэродинамических установках наиболее принципиальной является проблема выделения той части воспринимаемого ИК-камерой излучения, которая определяет температуру поверхности модели (I_B). При этом необходимо исключить фоновое излучение, возникающее вследствие отражения поверхностью модели энергии, излучаемой окружающими элементами — форкамерой, соплом, стенками рабочей камеры, державкой и др. Короткое время эксперимента ($\sim 0,2$ с) является положительным фактором, так как элементы тракта установки за это время не успевают существенно нагреться и, следовательно, влияние этой части фонового излучения мало.

Для оценок этого влияния в условиях испытаний в ПГУ разработан специальный метод и программа расчета фоновых излучений от внутренних элементов тракта, получены оценки с учетом измеренных коэффициентов черноты ε_i поверхностей газодинамического тракта [135].

Проведенные расчеты и опыт термовизионных измерений на установке У-7 показывают, что основной вклад в фоновое излучение модели на рабочем режиме работы установки вносит эффективное излучение от раструба сопла ($\varepsilon \approx 0,28$), причем в этом излучении главную роль играет переотраженная от стенок сопла энергия излучения от соплового вкладыша (нагревается в процессе эксперимента на некоторых режимах до $T \approx 1000$ К).

Собственное излучение раструба сопла мало из-за низкой температуры ($T \approx 300$ К). Непосредственное влияние теплового воздействия соплового вкладыша на нагрев модели мало из-за малости углового коэффициента взаимной облученности вкладыша и модели.

По этой же причине мало влияние излучения из форкамеры. Это и понятно, так как при максимальном диаметре критического сечения сопла $d_{кр} \sim 35$ мм (при $M_\infty = 10$) модель располагается на расстоянии ~ 4 м от критического сечения. Влияние стенок рабочей камеры ($\varepsilon \approx 0,8$) также мало по сравнению с влиянием раструба сопла.

В целом, указанные составляющие дают увеличение воспринимаемого ИК-камерой излучения по сравнению с собственным излучением модели, эквивалентное приращению температуры модели δT_w не более 4°C для наветренной стороны модели, нагреваемой до $40 \dots 80^\circ\text{C}$, и около 1°C для подветренной стороны, нагреваемой на $1 \dots 10^\circ\text{C}$. Таковы характерные уровни нагрева моделей из АГ-4В для углов атаки $\alpha \approx 20 \dots 50^\circ$.

Заметим, что в начале эксперимента, когда режим еще не установился ($\tau < 0,01$ с), и сопло, и модель холодные, из форкамеры истекает струя горячего газа, которая дает значительное паразитное излучение. Однако по мере раскрытия струи и установления режимного течения оно быстро уменьшается (тогда как собственное излучение модели возрастает) и уже при $\tau > 0,02$ с его влияние практически отсутствует.

Некоторый вклад в погрешность определения тепловых потоков к поверхности модели вносит неопределенность в величине начальной температуры модели T_n ($\delta T \cong 0,2^\circ\text{C}$) и погрешности в определении калибровочных множителей. Важным фактором, влияющим на погрешность получаемых результатов, является ограниченная временная и особенно геометрическая разрешающая способность системы. Геометрическая разрешающая способность системы определяется импульсной реакцией системы, характеризующейся значением разрешения при 50% модуляции, и составляет для 7° объектива 1,15 мрад, для 20° объектива 3,54 мрад; при модуляции 90% импульсная реакция системы составляет соответственно 2,3 и 7 мрад. Ограниченная разрешающая способность системы вносит дополнительные погрешности в зонах с пиковым распределением тепловых потоков, а также в зонах, где происходит искажение сигнала за счет нарушения закона Ламберта, например, вблизи затупленных кромок.

Суммируя сказанное и учитывая погрешности определения теплофизических характеристик материала моделей, можно отметить, что реальные погрешности в определении теплового потока в ИК-эксперименте на У-7 составляют для наветренной стороны не более $10 \dots 15\%$ и для подветренной стороны модели не более 30% для уровней нагрева поверхности выше $3 \dots 5^\circ\text{C}$.

При обработке термограмм и восстановлении картины распределения тепловых потоков важным моментом является геометрическая привязка полученной плоской термовизионной картины к реальному объекту пространственной формы. Это достигается с помощью следующих операций:

- 1) определение на модели реперных точек с известными пространственными геометрическими координатами и съемка этих точек модели перед экспериментом на охлажденном, контрастирующем экране;
- 2) введение в процесс обработки процедуры наложения плоского термовизионного кадра на пространственную форму модели;
- 3) осуществление процедуры геометрических преобразований «пространственных» термовизионных изображений для представления экспериментальных данных в заданных координатах.

В качестве реперных точек, например, могут использоваться миниатюрные источники, геометрические координаты которых известны с высокой точностью. Перед экспериментом контур модели фиксируется на охлажденном жидким азотом экране. Теоретическое описание модели, если возможно, вводится в программу обработки термовизионных данных, тогда все геометрические преобразования осуществляются с учетом пространственных координат точек термовизионного кадра.

Указанные меры позволяют достигнуть достаточно хорошей точности геометрической привязки плоских проекций термоизображений к реальному пространственному объекту, которая определяется, по существу, только пространственным геометрическим разрешением системы. В частности, использование 20° объектива позволяет получить точность геометрической привязки на модели, расположенной на расстоянии 1 м от приемной камеры АГА-780, примерно 3 мм, а для 7° объектива — около 1 мм. Соответственно для камеры А40-М имеем 1,5 мм для объектива 23° и около 0,4 мм для 7° объектива.

Обладая большой информативностью, термовизионные методы исследований требуют высокого уровня автоматизации обработки результатов измерений. Для решения этой задачи разработан комплекс программ обработки, анализа и представления данных. Он позволяет осуществлять ввод исходной информации, проводить предварительный визуальный анализ термовизионных данных, редактирование изображения от помех, исключение помех. Процедура обработки включает в себя привязку термовизионных кадров к режиму работы установки, выделение облика модели на фоне паразитного излучения от стенок рабочей части и внешних источников помех, определение температуры поверхности модели для зафиксированных ИК-кадров, обработку данных и приведение их к тепловому потоку, геометрическую привязку термограмм к модели. На каждом шаге обработки возможно графическое представление данных в виде изолиний температуры, тепловых потоков, распределения указанных функций вдоль выбранных на поверхности модели линий. По окончании обработки результирующие кривые выдаются в электронном виде, в виде твердых копий на графопостроитель и копий в виде числовых файлов.

Ниже приведены некоторые результаты применения представленной технологии при исследованиях теплообмена на моделях ряда ЛА в ПГУ.

На рис. 11.6, *а, б, в* (см. цветную вклейку) приведены данные, полученные в установке У-7 на моделях типичного аппарата типа «несущий корпус» — ЛА «Гермес» (масштаб 1:40) при числе Маха $M_\infty = 14$, числе Рейнольдса $Re_{\infty L} = 2,2 \cdot 10^6$. Показаны распределения тепловых потоков на наветренной стороне (рис. 11.6, *а*), в зоне отклоненных элевон и щитка (рис. 11.6, *б*) и на фонаре кабины (рис. 11.6, *в*).

Приведены результаты при угле атаки $\alpha = 30^\circ$, угле скольжения $\beta = 0$ и углах отклонения левого элевона и тормозного щитка $\delta_{ml} = \delta_{bf} = 15^\circ$. Здесь и ниже q_{w0} — базовый тепловой поток в критической точке сферы радиусом 0,025 м.

На рис. 11.6, *г* (справа) при $M_\infty = 10$, $Re_{\infty L} = 2,8 \cdot 10^6$ и $\alpha = 50^\circ$ иллюстрируется формирование на наветренной стороне модели узкого протяженного турбулентного пятна (связанного с локальным повреждением поверхности модели размером ~ 1 мм, имитирующим повреждение теплозащитного покрытия на аппарате). Уровень тепловых потоков в зоне пятна возрастает в 1,5 раза по сравнению с неповрежденной (левый рис. 11.6, *г*) поверхностью.

Подробная картина теплообмена на наветренной стороне модели ЛА Рге-Х (масштаб 1:15) в зоне установки щитков управления, на щитках в окрестности их оси вращения и в зоне щелевого зазора между ними демонстрируется на рис. 11.7 (см. цветную вклейку).

На рис. 11.8 (см. цветную вклейку) представлен пример исследования теплообмена на такой плохо обтекаемой форме, как пенетратор с наддувным тормозным устройством (НТУ), предназначенный для исследования марсианского грунта. Этот пример в какой-то степени иллюстрирует особенности теплообмена при использовании новой перспективной технологии НТУ для эффективного азроторможения спускаемого аппарата. Для таких конфигураций характерно образование протяженной передней отрывной зоны и областей интерференции скачков уплотнения, возникающих при значительных углах атаки α (рис. 11.8, *а*, где приведена теневая фотосъемка спектра обтекания).

Возможности расчетных методов исследования таких сложных течений ограничены и для них особенно важны высокоинформативные экспериментальные исследования теплообмена. Представлены результаты испытаний при $M_\infty = 10$, $Re_{\infty D} = 6 \cdot 10^5$ (ламинарный режим теплообмена) и при углах атаки $\alpha = 10^\circ$ (рис. 11.8, *в* и верхние кадры на рис. 11.8, *б*) и $\alpha = 30^\circ$ (рис. 11.8, *г* и нижние кадры на рис. 11.8, *б*).

Здесь в качестве базового теплового потока q_{w0} принят тепловой поток в критической точке сферы диаметром, равным диаметру мишени модели D . Установлено положение зон повышенных тепловых потоков и их уровни в этих зонах.

На рис. 11.9 (см. цветную вклейку) показаны результаты исследований влияния надкалиберного лобового щита с $D_{\text{щит}}/D = 1,2$ для ЛА

сегментально-конической формы (угол полураствора лобового сегмента $\theta_0 = 20^\circ$, угол обратного конуса $\beta = -20^\circ$) в установке У-7 при $M_\infty = 10$, $Re_{\infty D} = 4,3 \cdot 10^5$ и угле атаки $\alpha = 25^\circ$.

Такая форма ЛА рассматривалась в проекте малой станции для Марса (МАС), поскольку использование лобового щита с увеличенным диаметром миделя позволяет более эффективно тормозить аппарат в разреженной атмосфере Марса. При этом оказалось, что на боковой поверхности за надкалиберным щитом уровень теплового потока не снизился.

Основной вопрос здесь состоял именно в том, как влияет на теплообмен присоединение сорвавшегося с кромки щита потока к боковой поверхности в плоскости симметрии. Расчетам эта ситуация не поддается. Как видно из рисунков, в области присоединения абсолютный тепловой поток оказывается даже несколько больше, чем на аппарате с $D_{\text{щит}}/D = 1$ с безотрывным течением на боковой поверхности (примерно на 10%).

Эти примеры демонстрируют эффективность термовизионного метода исследований теплообмена на аппаратах сложной формы, где возможности теоретических решений ограничены.

§ 11.2. Другие методы измерений теплообмена

В практике трубного теплового эксперимента на моделях ЛА и при летных испытаниях продолжают широко использоваться относительно простые измерения теплообмена с помощью дискретных датчиков.

Наиболее часто используется калориметрический датчик, изготавливаемый из теплопроводного материала (обычно медь) и устанавливаемый с теплоизолирующей втулкой в корпус модели из того же материала, что позволяет уменьшить искажения поля тепловых потоков из-за влияния возможных разрывов температуры поверхности на стыках разных материалов. Размеры калориметрических датчиков (обычно в диапазонах: диаметр $d \sim 1 \dots 5$ мм, толщина $\delta \sim 0,5 \dots 5$ мм) выбираются так, чтобы для условий испытаний критерий Био $Bi = \alpha \delta / \lambda < 2 \times 10^{-3}$, а критерий Фурье $Fo = at / \delta^2 > 0,5$. Первое условие обеспечивает однородность температуры T по толщине датчика в каждый момент времени t , а второе — практически одинаковый для всех точек датчика темп нагрева $\partial T / \partial t$. Это позволяет для обработки показаний такого датчика (калориметр регулярного режима [122]) и определения локального теплового потока q_w использовать баланс тепла в виде:

$$q_w = \frac{cm}{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + q_1 \cdot \frac{S_1}{S} + \varepsilon \sigma T^4. \quad (11.2.1)$$

Здесь и выше $cm/S = c\rho\delta$ — коэффициент тепловой активности теплоприемника, который для каждого датчика определяется либо с помощью предварительной тарировки, либо после проведения испытаний и демонтажа датчика по результатам измерений m , S или δ

(m — масса теплоприемника, S — площадь его тепловоспринимающей поверхности, δ — толщина); ρ , c , λ , $a = \lambda/(\rho c)$ — плотность, теплоемкость, теплопроводность и температуропроводность материала датчика, T — температура калориметра (измеряется термопарами с диаметром провода 0,05...0,2 мм типа хромель-алюмель, хромель-копель и др.), t — время нагрева, $q_1 \cdot S_1$ — суммарные перетечки тепла через боковые стенки и дно калориметра (их площадь S_1), $\varepsilon \sigma T^4$ — излучение с поверхности (обычно оно пренебрежимо мало).

Перетечки тепла растут со временем t и оцениваются по результатам решения одномерной задачи теплопроводности для датчика и модели или в процессе градуировочных испытаний датчиков. Условие $(q_1 \cdot S_1)/(q_w \cdot S) < 0,1$ вместе с условием Фурье $Fo > 0,5$ определяет возможный временной диапазон $t_{\min} \dots t_{\max}$, для которого справедливо простое соотношение

$$q_w = \frac{cm}{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (11.2.2)$$

Так, при испытаниях моделей в поршневых установках У-7, У-11 с характерным временем эксперимента 0,1...0,2 с этот временной диапазон обычно составляет 0,02...0,08 с.

На рис.11.10 представлены результаты оптических, дренажных и калориметрических измерений на модели выпукло-вогнутой формы, полученные в трубе У-6 ($M_\infty = 5,95$, $Re_\infty/m = 3,3 \cdot 10^7$ и $7 \cdot 10^7$).

Наряду с калориметрическими датчиками для измерений теплового потока широко используются термометры сопротивления [145]. К ним относится, например, терморезистор ФКБ-21, чувствительным элементом которого является тонкая золотая спираль, нанесенная на кварцевую подложку. Через спираль датчика пропускается ток, при нагревании датчика в аэродинамическом потоке сопротивление спирали увеличивается, а вместе с этим возрастает и напряжение ΔU на датчике. Измеряя ΔU и используя паспортную градуировку — зависимость сопротивления R от температуры T , можно определить температуру спирали и, следовательно, приращение температуры за счет нагрева поверхности теплоизолирующей подложки $\Delta T(t) = T(t) - T(0)$, которое связано с подводимым тепловым потоком $q_w(t)$ соотношением [122]

$$\Delta T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \rho c \lambda}} \int_0^t \frac{q_w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (11.2.3)$$

Для стационарных течений $q_w = \text{const}$ при $\Delta T(t) \sim \sqrt{t}$ отсюда находим

$$q_w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho c \lambda}{t}} \Delta T(t).$$

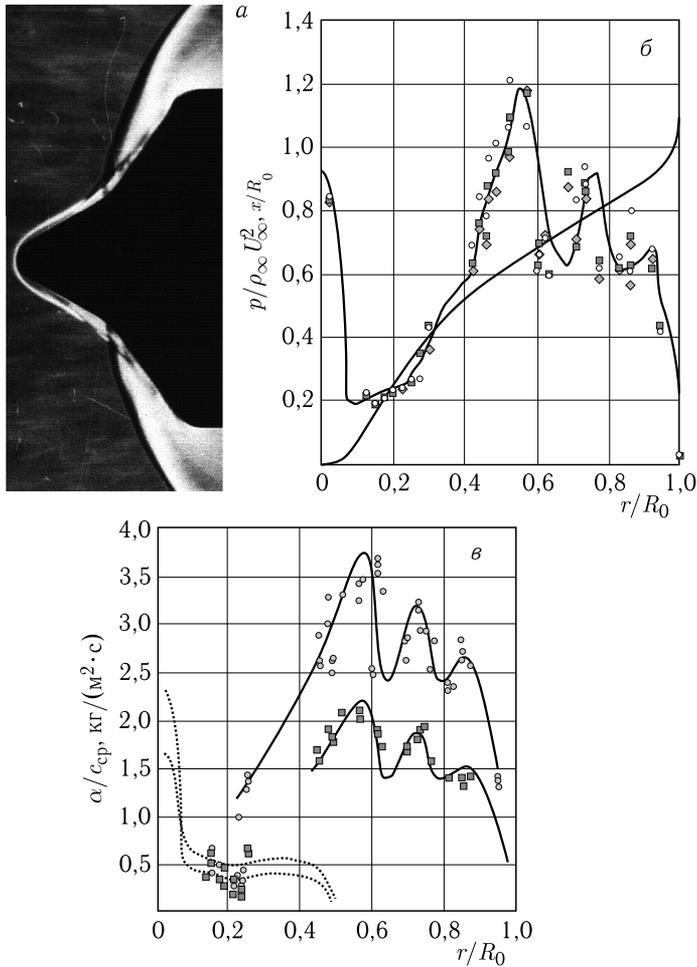


Рис. 11.10. *a* — спектр обтекания; *б* — форма модели $x(r)$ и распределение давления по телу $p(r)$ (кривые — расчет, значки — эксперимент); *в* — распределения коэффициентов теплообмена (кривые — расчет, значки — эксперимент: \circ — $p_{00} = 80$ атм, \square — $p_{00} = 40$ атм)

В общем случае $q_w(t)$ определяется по замеряемой температуре $T(t)$ как решение интегрального уравнения (11.2.3) в виде

$$q_w(t) = \sqrt{\frac{\rho c \lambda}{\pi}} \left(\frac{T(t) - T(0)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{T(t) - T(\tau)}{(t - \tau)^{3/2}} d\tau \right). \quad (11.2.4)$$

На рис. 11.11 представлены экспериментальные данные по теплообмену, полученные датчиками ФКБ-21 на установке ПГУ-7 на модели ВА «Союз» (донная область) и дано их сравнение с термовизионными данными. Там же показано изменение базового теплового потока q_{w0} за время эксперимента.

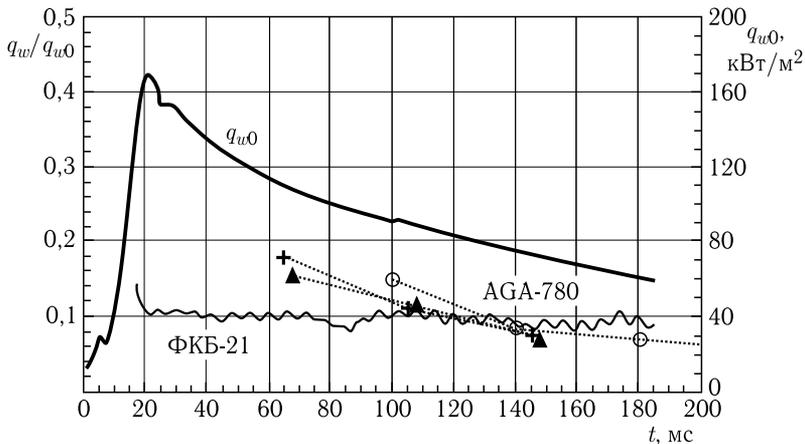


Рис. 11.11. Сравнение датчиковых и термовизионных измерений относительно теплового потока q_w/q_{w0} в донной области на модели ВА «Союз» в установке У-7 ($M_\infty = 13,6$, $Re_{\infty D} = 10^6$, $\alpha = 20^\circ$)

Широкое распространение имеет также метод «тонкой стенки» [25, 30, 98]. В этом случае участок поверхности модели, где исследуется теплообмен, выполняется тонкостенным (толщиной ≤ 1 мм) из малотеплопроводного металла (нихром и др.). К внутренней поверхности стенки привариваются термопары, которые измеряют местную температуру стенки T_w . Для тонкой стенки перетекание тепла вдоль стенки мало и для определения местного теплового потока q_w можно использовать соотношение для калориметра регулярного режима (11.2.2).

Достаточно информативен метод термоиндикаторного покрытия [13, 30], особенно при измерениях тепловых потоков на моделях сложной формы и в зонах, недоступных наблюдениям с помощью ИК-камеры. Хотя этот метод, в отличие от термовизионного, более трудоемкий, так как требует ручной обработки, он более доступен и широко используется в инженерной практике. При этом модель, как и при использовании ИК-термографии, также изготавливается из малотеплопроводных термостойких материалов. Поверхность модели покрывают тонким (сотые доли мм), практически не создающим теплового сопротивления слоем термочувствительной суспензии с известной температурой плавления T_p . Необходимо использовать термоиндикаторы с величиной T_p , не зависящей от давления.

Модель термостатируют при начальной температуре T_n , а затем быстро вводят в аэродинамический поток. В процессе нагрева модели термоиндикатор плавится на изолинии $T_w = T_p$, которая с течением времени t передвигается по поверхности модели, что фиксируется кинокамерой.

Если аэродинамический поток стационарный, то коэффициент теплообмена $\alpha = q_w / (T_a - T_w) = \text{const}$. В этом случае решение обратной задачи теплопроводности имеет известный вид [122]

$$\frac{(T_w - T_n)}{(T_a - T_w)} = 1 - e^{\beta^2} \operatorname{erfc}(\beta), \quad \beta = \alpha \sqrt{\frac{t}{\rho c \lambda}}, \quad (11.2.5)$$

где T_a — температура адиабатической стенки.

При заданных условиях эксперимента (T_a , T_n), известных характеристиках материала модели (ρ , c , λ — плотность, теплоемкость, теплопроводность) и выбранном термоиндикаторе (T_p) величина α определяется как функция времени t на изотерме $T_w = T_p$ в точках тела, где находится эта изотерма в момент t .

Термоиндикаторный метод незаменим при исследованиях теплообмена в зонах, труднодоступных для наблюдения с помощью ИК-камеры, например, в различных выемках, в межблочных зазорах на моделях ракет-носителей. Для течений в таких зазорах характерно наличие узких зон интерференции ударных волн с пограничным слоем, где тепловые потоки могут на порядок превышать их величины при отсутствии интерференции. Регистрация изотерм (и изолиний $\alpha = \text{const}$) в таких зонах проводится после проведения эксперимента фиксированной длительности и разборки модели. При этом используются необратимые термоиндикаторы, не восстанавливающие свой цвет. Для получения необходимого пространственного разрешения картины теплообмена в таких зонах требуется проведения повторных экспериментов различной длительности.

В целом, надежное измерение тепловых потоков на поверхности модели в аэродинамическом эксперименте представляет достаточно сложную задачу, успешное решение которой часто обеспечивает лишь комплексный подход, основанный на использовании и взаимном дополнении различных измерительных методов и средств.

Список литературы

1. *Авдуевский В. С.* Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. — 1962. № 2.
2. *Авдуевский В. С.* Расчет трехмерного ламинарного пограничного слоя на линиях растекания // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. — 1962. № 1.
3. *Авдуевский В. С., Медведев К. И.* Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1967. № 1.
4. *Авдуевский В. С., Медведев К. И.* Физические особенности течения в трехмерных отрывных зонах // Тепло- и массоперенос. Т. 1. — М.: Энергия, 1968.
5. *Авдуевский В. С. и др.* Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. — М.: Машиностроение, 1975.
6. *Анфимов Н. А.* Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. — 1961. № 1.
7. *Анфимов Н. А.* Тепло- и массообмен в окрестности критической точки при вдуве и отсосе различных газов через поверхность // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. № 1.
8. *Анфимов Н. А., Воронкин В. Г., Залогин Г. Н. и др.* Исследование каталитической активности материалов в высокоэнтальпийных потоках // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации 1983–1984 г. — М.: Наука, 1985.
9. *Анфимов Н. А., Итин П. Г., Сюсин А. В.* Применение термовизионных методов в аэродинамическом и тепловом эксперименте // Методы аэрофизических исследований. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987.
10. *Анфимов Н. А.* Аэрогазодинамические и тепловые испытания гиперзвуковых летательных аппаратов на экспериментальной базе ЦНИИмаш // Космонавтика и ракетостроение. — 1993. Вып. 1.
11. *Анфимов Н. А., Землянский Б. А., Кислых В. В., Никулин А. Н., Турец В. Е.* Исследование теплообмена на поверхности моделей ЛА в аэрогазодинамической установке кратковременного действия с помощью термовизионной системы // Космонавтика и ракетостроение. — 1994. Вып. 2.
12. *Антонец А. В.* Расчет пространственного сверхзвукового обтекания тел с изломом образующей с учетом равновесного и замороженного состояния газа в ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1970. № 2.
13. *Ардашева М. М., Боровой В. Я., Давлет-Кильдеев Р. З., Майкапар Г. И., Первушин Г. Е., Рыжкова М. В.* Применение термоиндикаторных покрытий при исследованиях теплообмена // Труды ЦАГИ. — 1975. Вып. 1962.
14. *Аэродинамика ракет /* Под ред. М. Хемша и Дж. Нилсена. Т. 2. — М.: Мир, 1989.
15. *Базжин А. П.* Расчет обтекания плоских треугольных крыльев потоком совершенного газа при больших углах атаки // Труды ЦАГИ. — 1966. Вып. 1034.
16. *Бачманова Н. С., Лапыгин В. И., Липницкий Ю. М.* Гиперзвуковое обтекание треугольной пластинки малого удлинения при больших углах атаки // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. № 5.

17. Башкин В. А. Ламинарный пограничный слой на бесконечно длинных скользящих эллиптических цилиндрах // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1967. № 5.
18. Башкин В. А. Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе при коническом внешнем течении // Труды ЦАГИ. — 1968. Вып. 1093.
19. Башкин В. А., Колина Н. П. Расчет сопротивления трения и теплового потока на сферически затупленных круговых конусах в сверхзвуковом потоке // Труды ЦАГИ. — 1968. Вып. 1106.
20. Башкин В. А. Расчет ламинарного пограничного слоя на острых эллиптических конусах в сверхзвуковом потоке при углах атаки, меньших предельного // Труды ЦАГИ. — 1970. Вып. 1175.
21. Белошенко Б. Г., Волков В. Е., Куришаков М. Ю., Маринин В. П., Остапович О. Н., Шильяев В. И., Жигалов В. Н., Цветков Г. Г. Экспериментальные исследования газодинамики и теплообмена с использованием модели межблокового отсека ракеты-носителя при «горячем» разделении второй и третьей ее ступеней // Космонавтика и ракетостроение. — 2002. Вып. 3 (28).
22. Беркут В. Д., Кудрявцев Н. Н., Новиков С. С. Влияние на тепловой поток к поверхности образования электронно-возбужденных молекул при гетерогенной рекомбинации атомов // Химия высоких энергий. — 1986. Т. 20, № 4.
23. Бертин Д. Дж., Хейден Т. Е., Гудрич У. Д. Переход пограничного слоя, обусловленный распределенной шероховатостью и охлаждением поверхности КЛАМИ «Спейс Шаттл» // Аэрокосмическая техника. — 1983. № 8.
24. Бертрам, Фиттерман, Генри. Аэродинамика гиперзвуковых самолетов и ракетопланов // Газовая динамика космических аппаратов / Под ред. Г. И. Таганова. — М.: Мир, 1965.
25. Богданов В. В., Колочинский Ю. Ю., Плешакова А. А. Приборы для измерения плотности тепловых потоков в аэродинамических трубах кратковременного действия // Труды ЦАГИ. — 1979. Вып. 1978.
26. Бондарев Е. Н. Отрыв пограничного слоя на конических телах // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. № 4.
27. Боровой В. Я., Рыжкова М. В. Теплообмен на пластине и конусе при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной, образующейся вблизи цилиндрического препятствия // Труды ЦАГИ. — 1972. Вып. 1374.
28. Боровой В. Я., Рыжкова М. В. Приближенный расчет коэффициентов теплоотдачи на пластине и конусе в зоне взаимодействия пограничного слоя с ударной волной, образующейся вблизи цилиндрического препятствия // Труды ЦАГИ. — 1977. Вып. 1881.
29. Боровой В. Я., Колочинский Ю. Ю., Яковлева Л. В. Исследование влияния единичного числа Рейнольдса на переход пограничного слоя на остром конусе // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1982. № 4.
30. Боровой В. Я. Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. — М.: Машиностр. 1983.

31. *Боровой В. Я.* Проблемы экспериментальных исследований в аэрогазодинамических трубах кратковременного действия // Тр. Второй Рос. нац. конф. по теплообмену. Т. 1. — М.: Изд-во МЭИ, 1998.
32. *Васильевский С. А., Соколова И. А., Тирский Г. А.* Определение и вычисление эффективных коэффициентов переноса для химически равновесных течений частично диссоциированных и ионизированных смесей газов // Прикл. мех. и техн. физ. — 1986. № 1.
33. *Васильевский С. А., Тирский Г. А., Утюжников С. В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // ЖВМиМФ. — 1987. Т. 27, № 5.
34. *Винокур Ю. А., Усов А. Т.* Исследование теплообмена в полете на гиперзвуковых скоростях // Труды ЛИИ. — 1965. № 135.
35. *Власов В. И.* Метод расчета вязкого ударного слоя с учетом неравновесных физико-химических процессов // Космонавтика и ракетостроение. — 1997. № 11.
36. *Власов В. И., Залогин Г. Н., Кнотько В. Б.* Диагностика неравновесного плазменного потока высокочастотного индукционного плазмотрона с применением двойного каталитического зонда // Космонавтика и ракетостроение. — 2000. № 19.
37. *Власов В. И., Горшков А. Б.* Сравнение результатов расчетов гиперзвукового обтекания затупленных тел с летным экспериментом OREX // Изв. РАН. МЖГ. — 2001. № 5.
38. *Власов В. И., Залогин Г. Н., Землянский Б. А., Кнотько В. Б.* О моделировании натуральных условий при отработке в высокочастотном плазмотроне материалов для теплозащиты гиперзвуковых летательных аппаратов // Космонавтика и ракетостроение. — 2001. № 23.
39. *Власов В. И., Залогин Г. Н., Землянский Б. А., Кнотько В. Б.* Методика и результаты экспериментального определения каталитической активности материалов при высоких температурах // Изв. РАН. МЖГ. — 2003. № 5.
40. *Власов В. И., Ковалев Р. В., Кусов А. Л.* Расчет теплового режима державки для образцов испытываемых материалов с целью оптимизации формы устройства и применяемых для его изготовления высокотемпературных материалов // Космонавтика и ракетостроение. — 2004. № 3(36).
41. *Власов В. И., Залогин Г. Н., Землянский Б. А., Кнотько В. Б.* Экспериментальное определение каталитичности карбида кремния и анализ данных, полученных в ходе полета спускаемого аппарата OREX // Космонавтика и ракетостроение. — 2005. № 2(39).
42. *Власов В. И., Залогин Г. Н., Лунев В. В.* О влиянии десорбции компонентов на каталитичность материалов в высокотемпературных многокомпонентных газах // Изв. РАН. МЖГ. — 2009. № 3.
43. *Власов В. И., Горшков А. Б., Ковалёв Р. В., Лунёв В. В.* Тонкая треугольная пластина с притупленным носком в вязком гиперзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. — 2009. № 4.
44. *Воинов Л. П., Залогин Г. Н., Лунев В. В., Тимошенко В. П.* Сравнительный анализ лабораторных и натуральных данных о каталитичности материалов теплозащиты ЛА «Бор» и «Буран» // Космонавтика и ракетостроение. — 1994. № 2.

45. *Войтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А.* Обтекание цилиндрического препятствия на пластине сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. № 1.
46. *Войтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А.* О существовании сверхзвуковых зон в пространственных отрывных течениях // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1967. № 1.
47. *Войтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А.* Обтекание наклонного препятствия сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. № 6.
48. *Гендерсон.* Гиперзвуковые вязкие течения // Современные проблемы газовой динамики. — М.: Мир, 1971.
49. *Герасимов Г. Я., Калинин А. П., Люстерник В. Е. и др.* Интегралы столкновений, потенциалы атомно-молекулярных и ионно-молекулярных взаимодействий компонентов воздуха до 20000 К // Обзоры по теплофизическим свойствам веществ. ИВТ АН. — 1987. № 5(67).
50. *Гершензон Ю. М., Розенштейн В. Б., Уманский С. Я.* Гетерогенная релаксация колебательной энергии молекул // Химия плазмы. — 1977. Т. 4.
51. Гиперзвуковая аэродинамика и тепломассообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов // Под редакцией Г. А. Тирского. — М.: Физматлит, 2011
52. *Гирифельдер Дж., Кертис Ч., Бёрд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: ИЛ, 1961.
53. *Гогин Л. В., Степанов Г. Ю.* Турбулентные отрывные течения. — М.: Наука, 1979.
54. *Гордеев О. А., Калинин А. П., Комов А. Л. и др.* Потенциалы взаимодействия, упругие сечения, интегралы столкновений компонентов воздуха для температур до 20000 К // Обзоры по теплофизическим свойствам веществ. ИВТ АН. — 1985. № 5(55).
55. *Гордеев А. Н., Колесников А. Ф., Якушин М. И.* Исследования теплообмена на моделях в дозвуковых струях индукционного плазмотрона // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1983. № 6.
56. *Горшков А. Б., Лунёв В. В.* Расчет турбулентного донного теплообмена за осесимметричными телами // Космонавтика и ракетостроение. — 1997. № 10.
57. *Грэбу, Уайт.* Влияние шероховатости поверхности на характеристики абляции носовой части // РКТ. — 1975. Т. 13, № 5.
58. *Губанова О. И., Лунев В. В., Пластинина Л. И.* О центральной срывной зоне при взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи с преградой // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. № 2.
59. *Губанова О. И., Землянский Б. А., Лесин А. Б., Лунёв В. В., Никулин А. Н., Сюсин А. В.* Аномальный теплообмен на наветренной стороне треугольного крыла с заглушенным носком при гиперзвуковом обтекании // Аэротермодинамика воздушно-космических систем. Сб. докл. Ч. 1. — М.: ЦАГИ, 1992.
60. *Гусев В. Н., Никольский Ю. В.* Экспериментальное исследование теплопередачи в критической точке сферы в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ. — 1971. Т. II, № 1.

61. Давыдова Н. А., Юшин А. Я. Экспериментальное исследование влияния угла атаки на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный при обтекании круговых конусов // Уч. зап. ЦАГИ. — 1973. Т. IV, № 2.
62. Давыдова Н. А., Юшин Ю. Я. Экспериментальное исследование влияния угла атаки на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный около нижней поверхности треугольных пластин с острыми кромками // Уч. зап. ЦАГИ. — 1975. Т. VI, № 1.
63. Джорджеф М. Р. Интегральный метод исследования вязко-невязких взаимодействий при произвольном охлаждении стенки // РТК. — 1974. Т. 12, № 10.
64. Дикристинна. Переход пограничного слоя на остром конусе с полууглом раствора 8° в потоке с $M = 10$ // РТК. — 1970. Т. 8, № 5.
65. Ермак Ю. Н., Нейланд В. Я. К теории трехмерного ламинарного пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1964. Т. 4, № 5.
66. Жестков Б. Е., Книвель А. Я. Экспериментальное исследование гетерогенной рекомбинации // Труды ЦАГИ. — 1981. Вып. 2111.
67. Залогин Г. Н., Перов С. Л. Об эффекте неполной аккомодации энергии при гетерогенной рекомбинации атомов на каталитической поверхности // Вопросы гидродинамики, аэрофизики и прикладной математики. — М.: МФТИ, 1985.
68. Залогин Г. Н., Кнотько В. Б., Лунёв В. В. и др. Измерение энтальпии в высокотемпературном дозвуковом потоке малой плотности // Инж.-физич. ж. — 1988. Т. 54, № 1.
69. Залогин Г. Н., Итин П. Г., Кнотько В. Б. и др. Диагностика неравновесной плазмы и определение каталитических свойств материалов в струе ВЧИ-плазмотрона // Плазмохимия-89. Т. 2. — М.: ИНХС РАН, 1989.
70. Залогин Г. Н., Семин В. А. Калориметрические исследования теплообмена в дозвуковом потоке высокочастотного индукционного плазмотрона // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации 1991 г. — М.: Наука, 1992.
71. Залогин Г. Н., Землянский Б. А., Кнотько В. Б. и др. Высокочастотный плазмотрон — установка для исследований аэрофизических проблем с использованием высокоэнтальпийных газовых потоков // Космонавтика и ракетостроение. — 1994. № 2.
72. Залогин Г. Н., Землянский Б. А., Зуев А. П. и др. Методы диагностики плазменного потока ВЧ-плазмотрона // Научно-техн. сб. ЦНИИмаш РКТ. — 1994. Сер. 2, вып. 1.
73. Залогин Г. Н., Лунев В. В. О каталитических свойствах материалов в неравновесном потоке диссоциированного воздуха // Изв. РАН. МЖГ. — 1997. № 5.
74. Землянский Б. А. Метод локального подобия для трехмерного ламинарного пограничного слоя с градиентом давления // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. № 4.
75. Землянский Б. А. Гиперзвуковое обтекание скошенной притупленной кромки неравномерным потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. № 6.

76. Землянский Б. А. О положении критической точки при пространственном гиперзвуковом обтекании сегментальных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1970. № 1.
77. Землянский Б. А., Маринин В. П. К теории калориметра на проницаемой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1974. № 5.
78. Землянский Б. А. О расчете теплообмена на линиях растекания трехмерного ламинарного пограничного слоя в неоднородном внешнем потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1975. № 1.
79. Землянский Б. А., Шманенкова Г. А. Теплообмен на линии растекания стреловидного цилиндра в неоднородном гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. № 4.
80. Землянский Б. А., Шманенкова Г. А. Метод среднemasовых величин для трехмерного пограничного слоя в завихренном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1981. № 1.
81. Землянский Б. А., Степанов Г. Н. О расчете теплообмена при пространственном обтекании тонких затупленных конусов гиперзвуковым потоком воздуха // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1981. № 5.
82. Землянский Б. А., Лунёв В. В., Маринин В. П. Влияние завихренности на теплообмен при гиперзвуковом обтекании тупых тел // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1981. № 2.
83. Землянский Б. А., Лесин А. Б., Лунев В. В., Шманенкова Г. А. Об интерференции косых скачков уплотнения одного семейства в гиперзвуковом потоке // Известия АН СССР. МЖГ. — 1982. № 5.
84. Землянский Б. А., Лунёв В. В., Маринин В. П. Энтропийные эффекты при обтекании тупых тел гиперзвуковым потоком газа // Гагаринские чтения по космонавтике и авиации, 1981. — М.: Наука, 1983.
85. Землянский Б. А., Лесин А. Б. Расчет теплообмена при пространственном обтекании затупленных тел // ГОС ФАП S 00044. — 1991.
86. Землянский Б. А. О критерии ламинарно-турбулентного перехода // Космонавтика и ракетостроение. — 2001. № 22.
87. Землянский Б. А., Кислых В. В., Маринин В. П. Возможности и результаты экспериментальных исследований теплообмена на моделях летательных аппаратов в гиперзвуковых поршневых аэродинамических трубах // Межд. конф. «Фундаментальные проблемы высокоскоростных течений». — Жуковский, Моск. обл., Россия, 2004.
88. Знаменский В. В. О расчете конвективных тепловых потоков при трехмерном обтекании // Космонавтика и ракетостроение. — 2006. № 3(44).
89. Исследования аэрофизических и аэротермодинамических процессов на всех участках полета ЛА различного назначения // НТО ЦНИИмаш. — 1995.
90. Итин П. Г., Васильев А. А. Исследование теплообмена в отрывных течениях при низких значениях чисел Рейнольдса // Тепломассообмен. Т. 1. — Минск, 1976.
91. Карпов В. А. О турбулентном пограничном слое на поверхности затупленных конусов // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. № 6.
92. Карпов В. А. Теплообмен на пластине при продольном обтекании турбулентным струйным потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. № 6.

93. Карпов В. А. Теплообмен в критической точке и ее окрестности при обтекании тел турбулентным потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1975. № 4.
94. Ковалев В. Л. Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике. — М.: Физматлит, 2002.
95. Колесников А. Ф., Якушин М. И. Условия моделирование конвективного теплообмена тел с гиперзвуковыми потоками на индукционных плазмотронах // Теплофизика высоких температур. — 1988. Т. 26, № 4.
96. Колесников А. Ф., Якушин М. И. Об определении эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов азота и кислорода по тепловым потокам к поверхности // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации 1988 г. — М.: Наука, 1989.
97. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Физика. — 1942. Т. 6, № 1–2.
98. Коробкин, Грюневальд. Исследование местной теплоотдачи полусферы в сверхзвуковом ламинарном потоке воздуха при малых тепловых потоках // Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. — М.: ИЛ, 1959.
99. Королев А. С. Исследование перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при гиперзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. Вып. 1932. Проблемы физической газовой динамики. — 1978.
100. Коцин Н. Е., Кибель И. А., Розе В. Н. Теоретическая гидромеханика. — М.: Гостехиздат, 1948, 1955.
101. Красильников А. В., Никулин А. Н., Холодов А. С. Некоторые особенности обтекания затупленных по сфере конусов с большими углами полураствора при гиперзвуковых скоростях // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1975. № 2.
102. Краснов Н. Ф., Захарченко В. Ф., Кошевой В. Н. Основы аэродинамического расчета. — М.: Высшая школа, 1984.
103. Кривоносова О. Э., Лосев С. А., Наливайко В. П., Шталов О. П. Рекомендуемые данные по кинетике химических реакций в системе атомов O–N. Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
104. Крил, Беквит, Чен. Переход пограничного слоя на стреловидных передних кромках при числе Маха $M = 3,5$ // Аэрокосмическая техника. — 1988. № 5.
105. Кэри. Измерения теплообмена и перехода в турбулентном слое на охлаждаемой стенке при числе Маха $M = 6$ // РТК. — 1968. Т. 6, № 5.
106. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. — М.: Наука, 1982.
107. Лесин А. Б., Лунёв В. В. Аномальный теплообмен на треугольной пластине с затупленным носком в гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1994. № 2.
108. Лихущин В. Я. Теория теплообмена. Курс лекций. — М.: Центр Келдыша, 1998.
109. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. — М.: Физматлит, 1962.
110. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970.

111. *Лунёв В. В., Мурзинов И. Н., Остапович О. Н.* Движение тонкого затупленного конуса под малым углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1960. № 3.
112. *Лунёв В. В.* Закон подобия для гиперзвукового обтекания тонких притупленных тел вязким газом // ПММ. — 1961. № 6.
113. *Лунёв В. В.* Об условиях подобия для гиперзвукового турбулентного пограничного слоя на тонких телах // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1962. № 4.
114. *Лунёв В. В., Румынский А. Н.* Развитие пограничного слоя в потоке газа с распределенной по линиям тока энthalпией торможения // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. № 5.
115. *Лунёв В. В.* Метод среднemasовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1967. № 1.
116. *Лунёв В. В., Магомедов К. М., Павлов В. Г.* Гиперзвуковое обтекание притупленных конусов с учетом равновесных физико-химических превращений. — М.: ВЦ АН СССР, 1968.
117. *Лунёв В. В., Землянский Б. А., Магомедов К. М., Павлов В. Г.* Обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком воздуха с учетом равновесных реальных процессов. — ГОНТИ, 1971.
118. *Лунёв В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975.
119. *Лунёв В. В., Селезнева С. В.* Применение дифференциальных моделей турбулентности при расчете взаимодействия дозвуковых струй с преградой // Космонавтика и ракетостроение. — 1997. № 11.
120. *Лунёв В. В., Селезнева С. В.* Исследование течения в струе высокочастотного плазмотрона // Космонавтика и ракетостроение. — 2000. № 19.
121. *Лунёв В. В.* Течение реальных газов с большими скоростями. — М.: Физматлит, 2007.
122. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967.
123. *Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
124. *Майкапар Г. И.* Вычисление линий тока по известному распределению давления на поверхности твердого тела // ПММ. — 1964. Т. 28, вып. 1.
125. *Марвин, Эйкин.* Одновременное влияние подвода массы и затупленности на переход пограничного слоя // РТК. — 1970. Т. 8, № 5.
126. *Мейтир, Ларсон.* Необычные результаты по переходу течения в пограничном слое на конусах при гиперзвуковых скоростях обтекания // РТК. — 1969. Т. 7, № 4.
127. *Мугалев В. П.* Исследование теплообмена и характеристик пограничного слоя на пористой поверхности. Т. 1. — М.: Энергия, 1968.
128. *Мур Ф.* Теория трехмерного пограничного слоя // Проблемы механики. Вып. II. — М.: ИЛ, 1959.
129. *Мурзинов И. Н.* Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равномерно диссоциирующего воздуха // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. № 2.
130. *Мурзинов И. Н.* Ламинарный пограничный слой на затупленных телах с учетом завихренности внешнего потока // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. № 6.

131. *Мурзинов И. Н.* К определению энтальпии в застойных областях течения // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1970. № 3.
132. *Мэдделон, Хендерсон.* Переход течения в пограничных слоях, образующихся на острых конусах при гиперзвуковых числах Маха // РТК. — 1968. Т. 6. № 3.
133. *Нейланд В. Я.* Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. № 3.
134. *Никитин Е. Е., Осипов А. И., Уманский С. Я.* Колебательно-поступательный обмен энергией при столкновениях гомоядерных двухатомных молекул // Химия плазмы. Т. 15. — М.: Энергоатомиздат, 1989.
135. *Осипов В. А., Румынский А. Н.* Исследование влияния фонового излучения на результаты термовизионных измерений в поршневой газодинамической установке У-7 // Космонавтика и ракетостроение. — 2001. Вып. 23.
136. *Оуэн.* Экспериментальное исследование перехода на плоской пластине при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях // РТК. — 1970. Т. 8, № 3.
137. *Пантелеев П. Н.* Летные исследования теплообмена на сферическом затуплении носовой части летательных аппаратов при сверхзвуковых скоростях полета // Труды ЛИИ. — 1979. № 359.
138. *Покровский А. Н., Шманенков В. Н.* О применении дополнительных соотношений для решения задачи об отрыве ламинарного пограничного слоя интегральным методом // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1979. № 4.
139. *Поттер.* Исследование влияния давления окружающей среды на переход в пограничном слое // РТК. — 1968. Т. 6, № 10.
140. *Поттер.* Переход пограничного слоя на конусах, летящих со сверхзвуковыми скоростями на баллистической трассе // РТК. — 1975. Т. 14, № 3.
141. *Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Плешанов А. С., Самуйлов Е. В., Рождественский И. Б.* Таблицы термодинамических функций воздуха. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
142. *Райзер Ю. П.* Физика газового разряда. — М.: Наука, 1989.
143. *Романенко П. Н.* Гидродинамика и теплообмен в пограничном слое. — М.: Энергия, 1979.
144. *Росляков Г. С.* Взаимодействие плоских скачков одного направления // Численные методы в газовой динамике. Вып. 4. — М.: Изд-во МГУ, 1965.
145. *Роуз П., Старк У.* Измерения теплообмена в лобовой точке в диссоциированном воздухе // Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. — М.: ИЛ, 1959.
146. *Роуз П., Пробстин Р., Адамс М.* Турбулентная теплопередача через сильно охлажденный частично-диссоциированный пограничный слой // Механика, сб. пер. — 1959. № 4.
147. Руководство для конструкторов. Методы расчета теплообмена на поверхности летательных аппаратов при двумерном и пространственном обтекании / Под ред. В. С. Авдеевского и Б. А. Землянского. ГОНТИ-1. — 1985.
148. *Санатор, Де-Карло, Торрилло.* Экспериментальные данные по переходу пограничного слоя при гиперзвуковых скоростях на тонком конусе с охлаждаемой стенкой // РТК. — 1965. Т. 3, № 4.

149. Сафаров Р. А., Тирский Г. А. Применение феноменологических моделей к исследованию турбулентных пограничных слоев однородного и неоднородного газов // Турбулентные течения. — М.: Наука, 1977.
150. Сафиуллин Р. А. Теплообмен в области перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. № 6.
151. Сергеев Ю. Г. Применение трехпараметрического семейства локально-подобных профилей скорости к расчету турбулентных отрывных зон в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1982. № 3.
152. Скотт С. Д. Каталитическая рекомбинация азота и кислорода на многократно используемой поверхностной изоляции // Экспресс-информация. Астронавтика и ракетодинамика. — 1982. № 4.
153. Соколова И. А. Свойства молекулярного переноса в задачах теплообмена и газовой динамики // Обзоры по теплофизическим свойствам веществ. ИВТ РАН. — 1992. № 2(94).
154. Справочник по авиационным материалам. Неметаллические материалы. Ч. 1. — М.: Машиностроение, 1969.
155. Софтли, Грейбер, Цемпел. Экспериментальное исследование перехода гиперзвукового пограничного слоя // РТК. — 1969. Т. 7, № 2.
156. Стейнбек. Влияние шума в аэродинамической трубе на переход в гиперзвуковом пограничном слое // РТК. — 1971. Т. 9, № 12.
157. Стетсон, Раитон. Исследование перехода пограничного слоя в ударной трубе с соплом при $M = 5,5$ // РТК. — 1967. Т. 5, № 5.
158. Струминский В. В. Скольжение крыла в вязком сжимаемом газе // ДАН СССР. — 1946. Т. 54, № 10.
159. Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. — М.: Наука, 1965.
160. Таганов Г. И. О некоторых задачах гидродинамики струйных течений // Аннотации докладов III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. — М.: АН СССР, 1968.
161. Уидхопф, Холл. Измерение теплопередачи на затупленном конусе под углом атаки при переходном и турбулентном режимах течения // РТК. — 1972. Т. 10, № 10.
162. Уитфилд, Яннуччи. Эксперименты по определению влияния шероховатости на переход пограничного слоя на конусе при числах Маха от 14 до 16 // РТК. — 1969. Т. 7, № 3.
163. Физико-химические процессы в газовой динамике: Справочник. Т. 1 / Под ред. Г. Г. Чёрного и С. А. Лосева. — М.: Изд-во МГУ, 1995.
164. Фэй Дж., Риддел Ф. Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке, омываемой диссоциированным воздухом // Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. — М.: ИЛ, 1959.
165. Фишер. Переход гиперзвукового пограничного слоя на аблирующих и неаблирующих конусах // РТК. — 1969. Т. 7, № 10.
166. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. — М.: ИЛ., 1962.
167. Хелмс В. Т. Оценка критериев перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при входе орбитальной ступени транспортного космического корабля в плотные слои атмосферы // Space Shuttle

- Aerothermodynamics Technology Conference, V.II-Heating, NASA. TMX-2507, 1972.
168. *Хинце И. О.* Турбулентность. — М.: Физматлит. 1963.
 169. *Хопкинс, Кинер.* Влияние единичного числа Рейнольдса на переход пограничного слоя при числе Маха, равном 6 // РТК. — 1968. Т. 6, № 5.
 170. *Чёрный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматлит, 1959.
 171. *Чжен П.* Отрывные течения. Т. 1–3. — М.: Мир, 1972.
 172. *Чжен.* Измерение турбулентного трения и теплового потока на поверхности конуса в гиперзвуковом потоке // РТК. — 1974. Т. 12, № 11.
 173. *Чжень, Малик, Беквис.* Переход пограничного слоя на конусе и плоской пластине при числе Маха $M_\infty = 3,5$ // Аэрокосмическая техника. — 1989. № 11.
 174. Шероховатость поверхности. Параметры, характеристики и обозначения. — ГОСТ 2789-73, ГОСТ 2309-73.
 175. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
 176. *Шманенкова Г. А.* Расчет низкоэнтропийной струи, возникающей при взаимодействии скачков перед препятствием // Изв. СССР. МЖГ. — 1973. № 5.
 177. *Шманенкова Г. А.* О взаимодействии внешнего скачка уплотнения с затупленным телом в гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1976. № 1.
 178. *Эдни.* Теплообмен на затупленном теле, сталкиваемом со скачком уплотнения // РТК. — 1968. Т. 6, № 1. С. 16–24.
 179. *Эккерт Л.* Инженерные методы расчета ламинарного и турбулентного пограничного слоя при обтекании поверхностей с постоянным давлением и температурой // Вопросы ракетной техники. — 1957. № 4.
 180. Экспериментальные и теоретические исследования радиационно-конвективного теплообмена, проблем турбулентности, перехода пограничного слоя // НТО ЦНИИмаш. — 1996.
 181. *Юшин А. Я.* Влияние угла атаки на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный при сверхзвуковом обтекании острых круговых конусов // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1982. № 4.
 182. *Anderson A.D.* Passive Nosedip Technology Program. V.III. Surface Roughness Effects. P.III, Boundary Layer Transition // SAMSO TR-86, 1974 (PANT).
 183. *Anderson W.K., Thomas J.L., VanLeer B.* A comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations // AIAA Paper 85-0122, January 1985.
 184. *Anfimov N.A., Knotko V.B.* Testing and verification of Re-entry vehicle Thermal protection // First ESA/ESTEC Workshop on Thermal Protection Systems. ESTEC, Noordwijk. 5–7 may, 1993.
 185. *Anfimov N.A., Kislykh V.V., Zemlyansky B.A.* Methods and Means for Studying Flying Vehicles Heat Transfer at Hypersonic Velocities // Proc. 9th Internat. Space Planes and Hypersonic Systems Conference, Nov. 1–4, 1999, Norfolk, AIAA 99-4891.

186. *Baker R.L.* Low temperature ablation nosetip shape change at angle of attack // AIAA Paper No.72-90, AIAA 10th Aerospace Sciences meeting, 1972.
187. *Baldwin B.S., Lomax H.* Thin Layer Approximation and Algebraic Model of Separated Turbulent Flows // AIAA Paper No.78-0257, 1978.
188. *Barth T.J., Jespersen D.C.* The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes // AIAA Paper No.89-0366, 1989.
189. *Batt R.G., Legner H.H.* A review of roughness-induced nosetip transition // AIAA Journal. 1983. V.21, No.1.
190. *Beckwith I.E., Gallagher J.J.* Experimental investigation of the effect of boundary-layer transition on the average heat transfer to a yawed cylinder in supersonic flow // NASA RM L56E09, 1956.
191. *Beckwith I.E.* Similar solution for the compressible boundary layer on a yawed cylinder with transpiration cooling // NASA TR-42, 1959.
192. *Beckwith I.E., Bertram M.H.* A Survey of NASA Langly Studies on High Speed Transition and Quiet Tunnels // NASA TMX-2566, 1972.
193. *Berkowitz A.M., Kyriess C.L., Martellucci A.* Boundary Layer Transition Flight Observations // AIAA Paper No.77-125, AIAA 15th Aerospace Sciences Meeting, Los Angeles, Jan. 24–26, 1977.
194. *Bienkowski G.K.* Electrostatic sheath in a weakly ionized gas // Phys. Fluids. 1967. V.10, No.2.
195. *Blottner F.G.* Investigation of some finite-difference techniques for solving the boundary layer equations // Computer methods in Applied Mechanics and Engineering. 1975. V.6.
196. *Bose D., Candler G.V.* Thermal nonequilibrium rates of the Zeldovich reactions // AIAA Paper No.97-133, 1997.
197. *Bottin B., Carbonaro M., Zemsch S., Degrez G.* Aerothermodynamic design of an inductively coupled plasma wind tunnel // AIAA Paper No.97-2498, 1997.
198. *Bushnell D.M., Weinstein L.M.* Correlation of Peak Heating for Reattachment flow // J. of Spacecraft and Rockets. 1968. V.5, No.9.
199. *Cebeci T., Smith A.M.O.* Analysis of Turbulent Boundary Layers. — N. Y.: Academic Press, 1974.
200. *Chue S.H.* Pressure probs for fluids measurements // Progress in Aerospace Science. 1975. V.16, No.2.
201. *Cohen N.B.* Boundary-layer similar solutions and correlation equations for laminar heat-transfer distribution in equilibrium air at velocities up to 41100 feet per second // NASA TR R-118, 1961.
202. *Coleman G.T., Stollery J.L.* Heat transfer from hypersonic turbulent flow at a wedge compression corner // J. of Fluid Mechanics. 1972. V.56. P.4.
203. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations // AIAA Journal. 1970. V.8, No.5.
204. *Dewey C.F.* Use of local similarity concepts in hypersonic viscous interaction problem // AIAA Journal. 1963. V.1, No.1.
205. *Einfieldt B.* On Godunov Type Methods for Gas Dynamics // SIAM J. Numer. Anal. 1988. V.25, No.2.
206. *Emmons H.W., Leigh D.C.* Tabulation of Blasius function with blowing and suction // Aeronaut. Rec-Council. 1954. No.157.

207. *Erdos I., Pallone A.* Shock-boundary layer interaction and flow separation // Proc. 1962, Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. — Stanford, 1962.
208. *Fay J. A., Riddell F. K.* Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air // JAS. 1958. V. 25, No. 2.
209. *Goulard R.* On Catalytic Recombination Rates in Hypersonic Stagnation on Heat Transfer // Jet Propulsion. 1958. V. 28, No. 11.
210. *Gupta R. N., Moss J. N., Simmonds J. L., Shin J. L., Zoby E. V.* Space shuttle heating analysis with variation in angle of attack and surface condition // AIAA Paper No. 83-0486, 1983.
211. *Gupta R. N.* Reevaluation of flight-derived surface recombination-rate expressions for oxygen and nitrogen // J. Spacecraft and Rockets. 1996. V. 33, No. 3.
212. *Heffner, Arnal.* Leading edge bluntness on laminar-turbulent boundary layer transition on a cooling flat plate at Mach 7 // Proc. of the Second European Symposium on Aerodynamics for Space Vehicles, Noordwijk, 21–25 Nov., 1994.
213. *Holden M. S.* Shock wave-turbulent boundary layer interaction in hypersonic flow // AIAA paper No. 77-45, 1977.
214. *Hollis, Berger, Horvath.* Aeroheating testing and predictions for project Orion CEV at turbulent conditions // AIAA Paper No. 2008-1226, 2008.
215. *Holmes D. G., Connell S. D.* Solution of 2D Navier–Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids // AIAA Paper No. 89-1392, 1992.
216. *Hoshizaki H.* Heat transfer in planetary atmospheres at super satellite speeds // ARS Journal. 1962. V. 32, No. 12.
217. *Hung F. T., Barnett D. O.* Shock wave-boundary layer inference heating analysis // AIAA Paper No. 73-277 1973.
218. *Huo W. M. et al.* Electron-nitrogen molecular collision in high temperature non-equilibrium air // AIAA Paper No. 85-1034, 1985.
219. *Inouye Y.* OREX flight — quick report and lessons learned // 2nd European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles // ESTEC. Noordwik. The Netherlands. Europe Space Agency. 1995.
220. *Jackson M. D.* // PANT program. V. XV. Roughness induced transition on blunt axisymmetric bodies-data report // SAMSO TR-74-86, 1974.
221. *Kemp N. H., Rose P. H., Detra R. W.* Laminar heat transfer around blunt bodies in dissociated air // JASS. 1959. V. 26, No. 6.
222. *Keyes J. W., Hains F. D.* Analytical and experimental studies of shock interference heating in hypersonic flows // NASA TN D-1739, 1973.
223. *Kolodziej P., Stewart D. A.* Nitrogen recombination on high-temperature reusable surface insulation and the analysis of its effect on surface catalysis // AIAA Paper No. 87-1637, 1987.
224. *Koomullil R. P., Soni B. K., Huang C.-T.* Navier–Stokes Simulation on Hybrid Grids // AIAA Paper No. 96-0768 1996.
225. *Korkegi R. H.* Comparison of shock-induced two- and three-dimensional incipient turbulent separation // AIAA Journal. 1975. V. 13, No. 4.
226. *Lam C. K., Bremhorst K.* A modified form of the $k-\epsilon$ model for predicting wall turbulence // ASME J. Fluids Engineering. 1981. V. 103.
227. *Launder B. E., Spalding D. B.* The numerical computation of turbulent flow // Computer methods in applied mechanics and engineering. 1974. V. 3.

228. *Lees L.* Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds // *Jet propulsion*. 1956. V. 26.
229. *Libby P. A., Chen K.* Laminar boundary layer with uniform injection // *Phys Fluids*. 1965. V. 8, No. 4.
230. *Liou M.-S., Steffen C. J.* A New Flux Splitting Scheme // *J. of Computational Physics*. 1993. V. 107.
231. *Lin T. C.* Influence of laminar boundary-layer transition on entry vehicle designs // *J. of Spacecraft and Rockets*. 2008. V. 45, No. 2.
232. *Marrone P. V., Treanor C. E.* Chemical relaxation with preferential dissociation from excited vibrational levels // *Phys. Fluids*. 1963. V. 6, No. 9.
233. *Marvin J. G., Sinclair A. R.* Convective heating in regions of large favorable pressure gradient // *AIAA J.* 1967. V. 5, No. 11.
234. *Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal*. 1994. V. 32, No. 8.
235. *Messiter A. F.* Lift of slender delta wings according to Newtonian theory // *IAS Paper*, No. 62-114. 1962.
236. *Moore F. K.* On local flat plate similarity in the hypersonic boundary layer // *JASS*. 1961. V. 28, No. 10.
237. *Nagel A. L., Fitzsimons H. D., Doyle L. B.* Analysis of hypersonic pressure and heat transfer tests on delta wings with laminar and turbulent boundary layers // *NASA CR*. 1966. V. III, No. 535.
238. *Nestler D. E., Saydah A. R., Auxer W. L.* Heat Transfer to steps and cavities in Hypersonic Turbulent Flow // *AIAA Paper No. 68-673*, 1968.
239. *Park C.* Two-Temperature Interpretation of dissociation Rate Data for N₂ and O₂ // *AIAA Paper No. 88-458* 1988.
240. *Park C.* Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics. — 1990.
241. *Patel V. C., Rodi W., Scheuerer G.* Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review // *AIAA Journal*. V. 23, No. 9.
242. *Phinney R. E.* Mechanism for heat-transfer to a rough blunt body // *Letters in heat and mass transfer*. 1974. V. 1, No. 2.
243. *Plastinin Yu. A., Vlasov V. I., Gorshkov A. B., Kovalev R. V., Kuznetsova L. A.* Analysis of nonequilibrium radiation for low density hypersonic flows at low to moderate velocities // *AIAA Paper No. 98-2466*, 1998.
244. *Powars C. A.* // *PANT program*. V. III, part 11. Roughness effects Augment Heating Data correlation and Analysis // *SAMSO TR-74-86*, 1974.
245. *Pulliam T. H., Steger J. L.* Recent improvements in efficiency, accuracy, and convergence for implicit approximate factorization algorithms // *AIAA Paper No. 85-0360*, 1985.
246. *Pulliam T. H.* Artificial dissipation models for the Euler equations // *AIAA Paper No. 85-0438*, 1985.
247. *Rafinejad D., Derbidge C.* Computer user's manual: erosion shape computer code // *PANT program*. 1974. V. XVII, *SAMSO-TR-74-86*.
248. *Rakich J. V., Mateer G. G.* Calculation of metric coefficients for streamline coordinates // *AIAA J.* 1972. V. 10, No. 11.

249. *Rakich J. V., Stewart D. A., Lanfranco M. J.* Results of a flight experiment on the catalytic efficiency of the Space Shuttle heat shield // AIAA Paper No. 82-0944, 1982.
250. *Ramshow J. D., Chang C. H.* Ambipolar diffusion in two-temperature multicomponent plasma // Plasma Chemistry and Plasma Processing. 1993. V. 13, No. 3.
251. *Raush R. D., Batina J. T., Yang H. T. Y.* Spatial Adaptation of Unstructured Meshes for Unsteady Aerodynamic Flow Computations // AIAA Journal. 1992. V. 30, No. 5.
252. *Reda D. C.* Boundary Layer transition experiments on sharp slender cones in supersonic free flight // AIAA Journal. 1979. No. 8.
253. *Reda D. C.* Correlation of nosetip boundary-layer transition data measured in ballistics-range experiments // AIAA Journal. 1981. V. 19, No. 3.
254. *Reshotko E., Beckwith I. E.* Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number // NACA Report. 1958. No. 1379.
255. *Reshotko E., Tumin A.* Role of transient growth in roughness-induced transition // AIAA Journal. 2004. V. 42, No. 4.
256. *Roe P. L.* Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes // Journal of Computational Physics. 1981. V. 43.
257. *Rosner D. E.* Catalytic sound for the Determination of Atom Concentrations in High Speed Gas Streams // ARS Journal. 1962. V. 32, No. 7.
258. *Scott C. D.* Reacting shock layers with slip and catalytic boundary conditions // AIAA Journal. 1975. V. 13, No. 10.
259. *Scott C. D.* Catalytic recombination of nitrogen and oxygen on high temperature reusable surface insulation // AIAA Paper No. 80-1477 1980.
260. *Settles G. S., Bogdonoff S. M.* Sealing of Two and Three-dimensional Shock Turbulent Boundary-Layer Interactions at Compression Corners // AIAA Journal. 1982. No. 6.
261. *Sheetz N. W.* Ballistics range boundary layer transition measurements on cones at hypersonic speeds. — U.S. Naval Ordnance Lab., 1967.
262. *Shin J. L., Moss J. N., Simmonds A. L.* Viscous shock layer heating analysis for the Shuttle windward symmetry plane with surface finite catalytic recombination rates // Entry Vehicle, Heating and Thermal Protection Systems. 1983. V. 85.
263. *Shuen J. S., Yoon S.* A numerical study of chemically reacting flows using a lower-upper symmetric successive overrelaxation scheme // AIAA Journal. 1989. V. 27, No. 12.
264. *Stallcop J. R., Patridge H., Levin E.* Analytical fit for the determination of the transport properties of air // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 1996. V. 10, No. 4.
265. *Steger J. L., Warming R. F.* Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods // Journal of Computational Physics. 1981. V. 40.
266. *Sterrett, Holloway.* Effects of Controlled roughness on boundary layer transition at a Mach number 6.0 // AIAA Journal. 1963. V. 1, No. 8.
267. *Stewart D. A., Rakich J. V., Lanfranco M. J.* Catalytic surface effects experiments on Space Shuttle // AIAA Paper. 1981-1143.

-
268. *Sweby P.K.* High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *SIAM Journal Numerical Analysis*. 1984. V. 21.
 269. *Vaglio-Laurin R.* Laminar heat-transfer on tree-dimensional blunt-nosed bodies in hypersonic flow // *ARS Journal*. 1959. № 2.
 270. *VanLeer B.* Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method // *J. of Computational Physics*. 1979. V. 32.
 271. *VanLeer B.* Flux Vector Splitting for the Euler equations // *Proc. of 8th International Conference on Numerical Methods In Fluid Dynamics*. — Berlin: Springer Verlag, 1982.
 272. *Venkatakrisnan V.* Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters // *J. of Computational Physics*. 1995. V. 118.
 273. *Vigneron Y.C., Rakich J.V., Tannehill J.C.* Calculation of Supersonic Viscous Flow over Delta Wings with Sharp Subsonic Leading Edges // *AIAA Paper No. 78-1137*, 1978.
 274. *Vlasov V.I., Gorshkov A.B., Kovalev R.V., Plastinin Yu.A.* Theoretical studies of air ionization and NO vibrational excitation in low density hypersonic flow around re-entry bodies // *AIAA Paper No. 97-2582*, 1997.
 275. *Wilcox W.C.* Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA Journal*. 1988. V. 26, No. 11.
 276. *Wool M.R.* Final summary report passive nosenip technology (PANT) program // *SAMSO-TR-75-86*, 1975 (www.dtic.mil).
 277. *Yoon S., Jameson A.* An LU-SSOR scheme for the Euler and Navier-Stokes equations // *AIAA Paper No. 87-0600*, 1987.
 278. *Zoby E.V.* Analysis of STS-2 Experimental Heating Rates and Transition Data // *J. of Spacecraft and Rockets*. 1983. V. 20, No. 3.
 279. *Zoby E.V., Gupta R.N., Simmonds A.L.* Temperature dependent reaction-rate expression for oxygen recombination at Shuttle entry conditions // *AIAA Paper No. 84-0224*, 1984.

Научное издание

ЗЕМЛЯНСКИЙ Борис Андреевич *ЛУНЕВ Владимир Васильевич*
ВЛАСОВ Вячеслав Иванович *ГОРШКОВ Андрей Борисович*
ЗАЛОГИН Георгий Николаевич *КОВАЛЕВ Роман Вячеславович*
МАРИНИН Виталий Петрович *МУРЗИНОВ Иван Никитьевич*

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *Е.В. Сабаева*
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 28.11.2013. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,5 + 0,5 усл.печ. л. вклейка.
Уч.-изд. л. 25,85. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ГУП Чувашской Республики «ИПК «Чувашия»,
Мининформполитики Чувашии,
428019 г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1523-0



9 785922 115230