

А. Н. Земляков

Математический анализ реальности

Дифференциальные уравнения
для школьников

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 22.161.6
ББК 517.091
353

Земляков А. Н.

353 Математический анализ реальности. Дифференциальные уравнения для школьников. — М.: МЦНМО, 2013. — 360 с.

ISBN 978-5-4439-0096-4

В книге приводятся многочисленные примеры математического моделирования реальной действительности, доступные для понимания и осознания на школьном уровне изучения математики.

Книга предназначена для старшеклассников, выбирающих направление своего профессионального образования и склонных разобратся в том, какова действительная роль математики в науке и практике. Эта книга будет полезна также студентам, изучающим дифференциальные уравнения и математические модели.

ББК 517.091

Оглавление

Предисловие	9
-----------------------	---

ЧАСТЬ I. Непрерывные процессы и дифференциальные уравнения

Глава I. Эволюционные модели	13
§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели . . .	13
1.1.1. Смысл производной: скорость изменения величины . .	13
1.1.2. Касательная и геометрический смысл производной . .	15
1.1.3. Понятие линейного приближения	16
1.1.4. Движение по прямой	19
1.1.5. Одномерные эволюционные модели	20
1.1.6. Производные и скорости в механике (кинематике) . .	23
1.1.7. Геометрический (кинематический) смысл вектора скорости	25
1.1.8. Двумерная эволюционная модель Вольтерры—Лотки .	28
§ 1.2. Представление о динамических системах	30
1.2.1. Система уравнений Ньютона. Фазовая плоскость . .	31
1.2.2. Равноускоренное движение и свободное падение	32
1.2.3. Двумерная динамическая система (пример)	35
1.2.4. Консервативные одномерные системы. Модель «ша- рик в желобе»	38
1.2.5. Пример консервативной системы: шарик на пружинке	41
Упражнения, задачи и задания к гл. I	43

Глава II. Интегральное исчисление	52
§ 2.1. Анализ дифференциального уравнения $y' = f(x)$	52
2.1.1. Интегрирование как решение дифференциального уравнения	52
2.1.2. Теорема единственности решений уравнения $y' = f(x)$ и свойства первообразных	55
2.1.3. Вопросы существования решений уравнения $y' = f(x)$, или первообразных	56

§ 2.2.	Геометрическая интерпретация уравнения $y' = F(x, y)$	58
2.2.1.	Поля направлений и интегральные кривые дифференциальных уравнений	58
2.2.2.	Метод Эйлера для построения интегральных кривых	59
2.2.3.	Изоклины полей направлений и графическое интегрирование дифференциальных уравнений	60
§ 2.3.	Ломаные Эйлера, решения уравнения $y' = f(x)$ и интеграл	65
2.3.1.	Ломаные Эйлера и интегральные суммы	65
2.3.2.	Интегральные суммы и квадратуры (площади)	67
2.3.3.	Основная теорема анализа: производная переменной площади	68
2.3.4.	Теоремы существования решений уравнения $y' = f(x)$ и первообразных	70
2.3.5.	Площади криволинейных трапеций как приращения первообразных	71
2.3.6.	Интегральные суммы и интеграл	73
§ 2.4.	Геометрические приложения интеграла	76
2.4.1.	Основная идея: применение формулы Барроу	76
2.4.2.	Площади плоских фигур	77
2.4.3.	Объем общего прямого цилиндра	80
2.4.4.	Интегральная формула для объемов (интеграл площадей сечений)	81
2.4.5.	Объем общего конуса	82
2.4.6.	Объем тела вращения	84
2.4.7.	Объем шара	85
2.4.8.	Замечание о площади сферы	85
2.4.9.	Геометрические меры и интегральные суммы. Принцип Кавальери	86
Упражнения, задачи и задания к гл. II		89
Глава III.	Экспонента и дифференциальные уравнения	115
§ 3.1.	Линейные процессы и дифференциальное уравнение $y' = ky$	115
3.1.1.	Пример: рост популяций	116
3.1.2.	Пример: радиоактивный распад	116
3.1.3.	Пример: вязкое трение	117
3.1.4.	Анализ дифференциального уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Эйлера	118
3.1.5.	Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Ньютона	120
3.1.6.	Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: разностный аналог	121
§ 3.2.	Натуральный логарифм и экспонента	122
3.2.1.	«Симметричное» дифференциальное уравнение	123

3.2.2.	Натуральный логарифм	124
3.2.3.	Натуральная экспонента	126
3.2.4.	Экспонента и показательная функция	128
3.2.5.	Решения дифференциального уравнения $y' = ky$	130
§ 3.3.	Экспоненциальный рост и теоремы о сравнении	132
3.3.1.	Ньютоновы «экспоненциальные» многочлены	132
3.3.2.	Как отличить экспоненциальный рост от степенного? . . .	133
3.3.3.	Что такое экспоненциальный рост на бесконечности? . .	135
3.3.4.	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow +\infty$	137
3.3.5.	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow 0+$	138
§ 3.4.	Экспоненциальные модели	139
3.4.1.	Пример: радиоактивный распад	139
3.4.2.	Пример: ядерное деление (цепная реакция)	140
3.4.3.	Неоднородное линейное дифференциальное уравне- ние $y' = ky + f(x)$	144
3.4.4.	Неоднородное линейное дифференциальное уравне- ние $y' = ky + b$ (const)	145
3.4.5.	Пример: уравнение «атомного реактора»	147
§ 3.5.	Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами	148
3.5.1.	Метод Лагранжа: вариация произвольной постоянной . . .	149
3.5.2.	Пример: свободное движение с трением	151
3.5.3.	Пример: свободное падение с трением	153
3.5.4.	Однородные линейные уравнения с переменными ко- эффициентами: $y' = k(x)y$	157
3.5.5.	Общие линейные уравнения с переменными коэффи- циентами: $y' = k(x)y + f(x)$	159
Упражнения, задачи и задания к гл. III		161

Глава IV. Модели с разделяющимися переменными 173

§ 4.1.	Анализ эволюционного уравнения $y' = g(y)$. Примеры	173
4.1.1.	Поля направлений уравнения $y' = g(y)$ и симметрич- ные им	173
4.1.2.	Примеры: линейные уравнения $y' = ky[+b]$	175
4.1.3.	Теоремы о решениях уравнения $y' = g(y)$. Стационар- ные решения	176
4.1.4.	Автономные уравнения как модели эволюции (напо- минание)	180
4.1.5.	Пример: уравнение взрыва $y' = \alpha y^2$	181

4.1.6. Пример: логистическое уравнение $y' = y(a - y)$	183
4.1.7. Пример неединственности решений уравнения $y' = g(y)$	187
§ 4.2. Формализм Лейбница и уравнения с разделяющимися переменными	190
4.2.1. Формальное интегрирование уравнения $y' = g(y)$	191
4.2.2. Разделение переменных и формализм Лейбница	194
4.2.3. Теоремы об уравнениях с разделяющимися переменными	198
4.2.4. Особые точки дифференциальных уравнений	201
4.2.5. Разделение переменных в линейных уравнениях вида $y' = k(x)y + f(x)$	202
§ 4.3. Дифференциальные уравнения на плоскости	204
4.3.1. Уравнения на плоскости, векторные поля, фазовые портреты	204
4.3.2. Фазовые портреты и особые точки: «узлы» и «седла»	207
4.3.3. Дальнейшие примеры: еще «седла» и «центры»	212
§ 4.4. Интегрируемые системы. Модель биоценоза «хищник-жертва»	216
4.4.1. Формализм Лейбница для систем на плоскости	216
4.4.2. Теорема о решениях: обоснование формализма Лейбница	217
4.4.3. Схема Лейбница отыскания решений систем на плоскости	219
4.4.4. Разделение переменных в системах на плоскости	221
4.4.5. Качественный анализ модели Вольтерры—Лотки	222
4.4.6. Интегрирование системы Вольтерры—Лотки	223
Упражнения, задачи и задания к гл. IV	226

ЧАСТЬ II. Динамические системы

Глава V. Дифференциальное уравнение Ньютона	237
§ 5.1. Закон сохранения энергии	237
5.1.1. Энергия как первый интеграл одномерной системы Ньютона	238
5.1.2. Работа переменной силы	239
5.1.3. Потенциальная энергия одномерного силового поля	240
5.1.4. Закон сохранения полной механической энергии	244
5.1.5. История дифференциальных уравнений	245
§ 5.2. Фазовые портреты и интегрирование уравнения Ньютона	254
5.2.1. Фазовые траектории и линии уровня энергии на фазовой плоскости	254

5.2.2.	Скорость убегания и вторая космическая скорость . . .	257
5.2.3.	Схема интегрирования уравнения Ньютона	259
5.2.4.	Обоснование схемы интегрирования уравнения Ньютона	263
5.2.5.	О разрешимости и свойствах решений уравнения Ньютона	264
5.2.6.	Наглядная интерпретация одномерных консервативных систем	266
§ 5.3.	Дифференциальное уравнение гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$	267
5.3.1.	Математический маятник: малые колебания	267
5.3.2.	Фазовый портрет гармонического осциллятора	268
5.3.3.	Решения уравнения гармонических колебаний. Теорема единственности	269
5.3.4.	Следствия из теоремы единственности: свойства косинуса и синуса	271
5.3.5.	Дальнейшие следствия: формула вспомогательного аргумента	273
5.3.6.	Канонический вид и параметры гармонических колебаний	275
5.3.7.	Интегрирование дифференциального уравнения гармонических колебаний	276
§ 5.4.	Сложение гармонических колебаний	278
5.4.1.	Теорема о сложении гармонических колебаний	278
5.4.2.	Векторные диаграммы гармонических колебаний	279
5.4.3.	Пример: трехфазная система токов	280
5.4.4.	Амплитуда суммы гармонических колебаний	282
§ 5.5.	Вынужденные колебания, резонанс и биения	283
5.5.1.	Уравнение вынужденных колебаний и его решения	283
5.5.2.	Анализ решений: резонанс и дрожание	284
5.5.3.	Анализ решений: резонансное раскачивание и биения	285
5.5.4.	Точный резонанс	287
§ 5.6.	Анализ уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Гиперболические функции	288
5.6.1.	Решения уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Теорема единственности	288
5.6.2.	Второе доказательство теоремы единственности	290
5.6.3.	Уравнение гиперболических косинуса и синуса	290
5.6.4.	Неустойчивые положения равновесия	294
5.6.5.	Фазовый портрет уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Качественное описание	296
5.6.6.	Движение по фазовым траекториям	298
5.6.7.	Интегрирование уравнения $x'' = \lambda^2 x$	300

5.6.8. Интегрирование дифференциального уравнения математического маятника	302
§ 5.7. Анализ уравнения $x'' + px' + qx = 0$	305
5.7.1. Общее уравнение второго порядка. Достижения Эйлера	305
5.7.2. Характеристическое уравнение	307
5.7.3. Случай положительного дискриминанта	307
5.7.4. Случай нулевого дискриминанта	309
5.7.5. Случай отрицательного дискриминанта	311
§ 5.8. Колебания в упруго-вязкой среде	312
5.8.1. Уравнение колебаний в упруго-вязкой среде	312
5.8.2. Случай сильного трения: аperiодическое затухание .	313
5.8.3. Промежуточный случай: тоже аperiодическое затухание	313
5.8.4. Случай малого трения: затухающие колебания	314
5.8.5. Случай малого трения: формальный подход	317
5.8.6. Уравнение вынужденных колебаний с трением: общий вид и поведение решений	318
5.8.7. Частное решение уравнения вынужденных колебаний с трением	318
5.8.8. Анализ частного решения	320
Упражнения, задачи и задания к гл. V	321

Глава VI. Волновое уравнение и колебания **345**

§ 6.1. Бегущие волны и волновое уравнение	345
6.1.1. Одномерные волны и гармонические колебания	345
6.1.2. Интерференция одномерных волн	346
6.1.3. Интерференция двумерных волн	348
6.1.4. Волновое уравнение	349
§ 6.2. Колебания струны. Музыкальная акустика	350
6.2.1. Уравнение упругой струны	350
6.2.2. Струна с закрепленным концом: отражение и интерференция волн	352
6.2.3. Струна с закрепленными концами: спектр собственных частот	353
6.2.4. Несколько слов о музыкальной акустике	354
Упражнения, задачи и задания к гл. VI	356

Предисловие

Задача этой книги — на конкретных примерах использования школьной математики (курса алгебры и начал анализа) показать, как математика может быть приложена к анализу окружающей нас действительности, проявляющей себя в разнообразных природных процессах, от «простого» (механического) движения до биологической эволюции. Математика со времени своего зарождения была во многом направлена на решение практических задач. Но поразительная эффективность математики в исследованиях естественных наук проявила себя в полной мере только в XVII в. В значительной степени это связано с зарождением и становлением математического анализа как мощного орудия не только объяснения реальности, но и научного предсказания.

Для Ньютона неотъемлемой частью изобретенного им и Лейбницем метода математических исследований были дифференциальные уравнения — уравнения, неизвестными в которых являются не числа, как в алгебраических уравнениях, решавшихся еще за пять тысячелетий до н. э. в Вавилоне и Египте, а функции, описывающие те или иные процессы — движения (от брошенного камня до обращения планет), эволюционные изменения (от размножения бактерий до биоценоза) и прочие. Дифференциальные уравнения, говоря на современном языке, являются важнейшими математическими моделями реальных процессов, помогающими рассчитывать и космические траектории, и ядерные реакции, прогнозировать ход процессов.

В данной книге приводятся многочисленные примеры математического моделирования реальной действительности, доступные для понимания и осознания на школьном уровне изучения математики. Книга предназначена старшеклассникам, выбирающим направление своего профессионального образования и склонным разобратся в том, какова действительная роль математики в науке и практике.

Часть I

Непрерывные процессы и дифференциальные уравнения

ГЛАВА I

Эволюционные модели

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели

Очень многие процессы в живой и неживой природе, а также в социальных, общественных системах могут быть описаны как изменения каких-то *параметров* изучаемой системы во времени. Таким образом, меняющаяся, «динамичная» система *эволюционирует* во времени, и одна из задач математики, занимающая доминирующую роль начиная с XVII в. (со времени открытия методов *математического анализа*), — это разработка математических моделей эволюции (изменения во времени) — так называемых *эволюционных моделей*.

Эволюция, от лат. *evolutio* — «развертывание», в широком смысле — синоним термина «развитие», в узком смысле, который подразумевается в нашем случае, — это просто любое изменение, а совсем конкретно — непрерывное, постепенное (во времени!) количественное изменение той или иной системы, каких-то ее числовых характеристик, параметров¹. В некоторых случаях удастся узнать (например, экспериментально) явную *функциональную* зависимость рассматриваемых параметров от времени — тогда мы знаем *закон изменения*, т. е. совокупность каких-то *функций* $x_i = x_i(t)$ от переменной времени $t \in \mathbb{R}$. Тогда эта совокупность и представляет собой *математическую модель эволюции*. Гораздо чаще заранее, до математического исследования, указать зависимость параметров от времени не удастся, однако можно как-то (например, экспериментально) узнать *скорость изменения*, и строить математическую модель на основе этой информации. Такие модели мы и будем называть *эволюционными*.

В этом параграфе мы опишем, как именно строятся эволюционные модели, здесь и в следующем параграфе рассмотрим общие и частные примеры эволюционных моделей.

1.1.1. Смысл производной: скорость изменения величины. Напомним (см. учебники алгебры и начал анализа), что *производной*

¹В отличие от *революции* — от лат. *revolutio*, что значит «поворот», «переворот».

числовой функции $f: x \mapsto y = f(x)$ в такой точке x , что f определена в некоторой ее окрестности $\text{Окр}_x = (x - r, x + r)$, называется *предел*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad (1)$$

при условии, что *этот предел существует*. Предельное равенство (1) означает, что разность

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \alpha_x(h) \quad (2)$$

стремится к нулю при h стремящемся к нулю — или, иначе говоря, разность $\alpha_x(h)$ есть *бесконечно малая* в нуле. А это, в свою очередь, означает, что величина $\alpha_x(h)$ становится *сколь угодно близкой к нулю при достаточно малом значении h* : каково бы ни было положительное число ε , найдется такое значение $\delta > 0$, что при любом значении $h \in (-\delta, \delta)$ величина $\alpha_x(h)$ будет отличаться от нуля меньше чем на ε , что можно записать с помощью *кванторов*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in (-\delta, \delta) |\alpha_x(h)| < \varepsilon$$

(« $\forall$ » — *квантор всеобщности*, «для любого...», «для всех...»; « $\exists$ » — *квантор существования*, «существует...», «найдется...»).

Понятие производной — одно из двух основных понятий *математического анализа* — ввели в конце XVII в. независимо друг от друга англичанин Исаак Ньютон (1643–1727) и немец Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Спустя сотню лет французские математики Жан ле Рон Д’Аламбер (1717–1783) и Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) дали определение производной, опираясь на интуитивное понятие предела (и сам термин «*производная*», и ее обозначение предложил Лагранж; Ньютон называл ее «*флюксийей*», а Лейбниц связывал с понятием «*дифференциала*», о чем см. в гл. IV). Наконец, еще через век немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) подвел под понятие производной строгий фундамент, и дал точные определения и производной, и предела, придумав для этого использованный выше «язык ε - δ ».

Нас не столько интересуют строгие определения производной, предела, бесконечно малой, сколько *смысл* понятия производной. Первичный ее смысл наиболее отчетливо выделялся у самого Ньютона: *производная функции $y = f(x)$ в точке x есть скорость изменения переменной величины y в зависимости от переменной x в конкретной точке x* . Что это означает?

Проще всего объяснить указанный *наглядный смысл* производной так. Если *аргумент x* функции f изменяется на величину h (*приращение аргумента $\Delta x = h$* может быть и отрицательным), то значение функции изменяется на величину $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, и за *среднюю скорость изменения y* на промежутке от x до $x+h$ естественно принять отношение приращения функции к приращению аргумента. Предел же

средней скорости при $h \rightarrow 0$ — это и есть *скорость изменения функции в точке*, равная производной $y'(x) = f'(x)$.

Это объяснение становится совсем естественным, если, как Ньютон, считать, что переменная x есть *универсальная переменная время*. Однако все-таки в механике (кинематике) скорость есть *вектор*, а введенная скорость изменения функции есть *число, скаляр*. Скалярная величина, в отличие от векторной, не имеет *направления*. Но зато она имеет *знак*, который и показывает, «в какую сторону» — возрастания или убывания — изменяется величина y . Так что исходя из наглядного смысла производной понятно, что если на каком-то промежутке I производная $f'(x)$ положительна, то функция f возрастает на нем, а если $f'(x) < 0$ на I , то функция убывает¹.

Хотя с векторными и скалярными величинами физики и математики имели дело и хорошо управлялись уже давно (можно упомянуть Кеплера с его вторым законом, равно как и Ньютона), сами термины и точно определяемые понятия вектора и скаляра ввел только в 1845 г. ирландский математик и астроном Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865), знаменитый изобретением так называемых *кватернионов* — аналога чисел в четырехмерном пространстве. Термин *вектор* — от лат. vector — «несущий»; в математике он означает *направленный отрезок* (или элемент так называемого *векторного пространства*). *Скаляр* — от лат. scalaris — «ступенчатый»; так называются численные величины, со знаком или без такового (длины, площади, объемы; температура и т. д.).

1.1.2. Касательная и геометрический смысл производной.

К кинематическому понятию скорости-вектора и его связи с производной мы вернемся далее, а пока напомним *геометрический смысл производной*. На графике функции $y = f(x)$ рассматриваются две точки, $M_x(x; f(x))$ и $M_{x+h}(x+h; f(x+h))$ и связанный с ними «характеристический треугольник» $M_x M_{x+h} N$ (рис. 1). Из него видно, что отношение Δy к $\Delta x = h$ («бывшая» средняя скорость) есть *угловой коэффициент $k = kx(h)$ секущей $M_h M_{x+h}$* . Интуитивно ясно, что для «хороших» функций эта секущая при $h \rightarrow 0$ стремится к *касательной* к графику. Замечая, что угловой коэффициент $k = kx(h)$ при этом стремится к производной $f'(x)$ (конечно, если она существует), обычно *по определению и полагают, что касательная к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ есть проходящая через эту точку прямая, угловой коэффициент которой равен производной $k_0 = f'(x_0)$* . Проводя через точку $M_0(x_0; f(x_0))$ графика *вспомогательные оси координат*, координатами точки $(x; y)$ относительно которых будут $(x - x_0; y - f(x_0))$ (рис. 2), мо-

¹Напомним, что *строгое* доказательство этих признаков *монотонности* требует применения *теоремы Лагранжа* — одной из *основных* теорем дифференциального исчисления, да и всего математического анализа.

жем сразу написать уравнение касательной¹:

$$y - f(x_0) = k_0(x - x_0) \Leftrightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3)$$

Просто по определению касательной производная функции в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке графика с рассматриваемой абсциссой. В этом и состоит (при нашем определении касательной довольно тавтологический!) геометрический смысл производной.

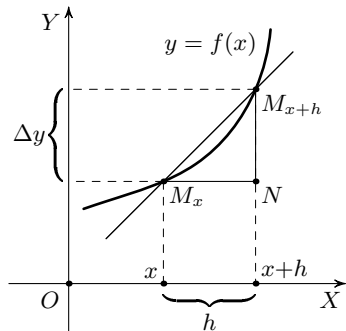


Рис. 1

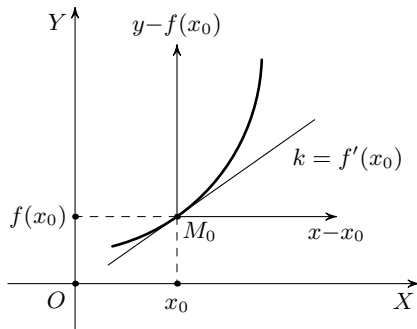


Рис. 2

1.1.3. Понятие линейного приближения. Теперь нечто новое и существенное. Линейная функция (3), задающая касательную к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , называется *линейным приближением функции $f(x)$ в точке x_0* . Это понятие относится к числу самых основных в анализе числовых функций и различных его обобщениях (типа анализа функций нескольких переменных или *функционального анализа*). Чтобы прояснить смысл *линейного приближения*, рассмотрим разность самой функции $f(x)$ и ее линейного приближения (3), т. е. величину

$$R = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right). \quad (4)$$

Не замечаете ли вы в выражении в скобках нечто знакомое, уже встречавшееся?

Конечно, это фигурирующая в формуле (2) *бесконечно малая* (при $x - x_0 \rightarrow 0$, т. е. при $x \rightarrow x_0$) разность между средней скоростью на промежутке от x_0 до x и производной $f'(x_0)$, т. е. скоростью изменения функции f в точке x_0 . Заменяв обозначения: x вместо x_0 , $x+h$ вместо x , так что $x - x_0$ теперь будет просто равно h , мы можем переписать

¹Во вспомогательных координатах $\bar{x}; \bar{y}$ это будет уравнение *прямой пропорциональности* $\bar{y} = k_0 \bar{x}$.

формулу (4) в виде

$$R = f(x+h) - f(x) - f'(x)h = h \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = h\alpha_x(h),$$

откуда следует представление

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\alpha_x(h). \quad (5)$$

В обозначениях же формулы (4) последняя формула будет выглядеть как

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\alpha(x). \quad (6)$$

Обе последние формулы называются *формулами линейного приближения функции f в точке x_0* (формула (5)) или *в точке x* (формула (6)). Отбросив в этих формулах последние слагаемые, мы получим *приближенные формулы* (линейные приближения)

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \quad (7)$$

и

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (8)$$

абсолютная погрешность вычисления по которым равна $|R|$, а погрешность по отношению к приращению аргумента (h или $x - x_0$) стремится к нулю (при $h \rightarrow 0$ или $x \rightarrow x_0$).

Иначе формулы (5)–(6) называются *формулами Тейлора* первого порядка с *остаточным членом* $R = h\alpha_x(h)$ или $(x - x_0)\alpha(x)$. Если функция f в окрестности точки, в которой рассматривается линейное приближение, «достаточно хорошая», то остаточный член имеет *порядок* h^2 . Например, если f имеет вторую производную¹ $f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$, то он может быть записан в виде $R = \frac{1}{2}f''(c)h^2$, где c — какая-то точка между x и $x+h$ (говорят, это *остаточный член в форме Лагранжа*). Естественно, при малых значениях h членом порядка h^2 можно пренебречь по сравнению с линейным членом $f'(x)h$ (конечно, в случае, когда он *отличен от нуля*, т. е. $f'(x) \neq 0$), и приближенные формулы (7)–(8) имеют большую точность.

Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик и философ, приверженец Ньютона в его «споре» с Лейбницем о приоритете в открытии математического анализа, член и секретарь Лондонского королевского общества (Royal Society — аналога Академии наук), обессмертивший свое имя открытием (в 1712 г.) указанной формулы (произвольного порядка) и соответствующего бесконечного *степенного ряда* (о них см. далее § 3.1, 3.3).

Пример 1. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$ формула (5) имеет вид

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h.$$

Воспользуемся этой формулой для вычисления приближенного значения числа $\sqrt{17}$, для чего запишем число 17 в виде $16 + 1 = x + h$. Тогда

¹Значок «def» означает «равенство по определению».

$\sqrt{x} = \sqrt{16} = 4$, и линейное приближение дает

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h = 4 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot 1 = 4 + \frac{1}{8} = 4,125.$$

Точные вычисления значения $\sqrt{17}$ дают 4,123105..., так что абсолютная погрешность формулы линейного приближения в данном случае меньше двух тысячных! $\square$

Заметим, что если для какого-то числа k можно записать, что

$$f(x+h) = f(x) + kh + h\alpha(h), \quad (9)$$

где $\alpha(h)$ — бесконечно малая в нуле, то из формулы (9) получаем

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - k = \alpha(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

поэтому существует предел выписанного отношения при $h \rightarrow 0$, причем он равен k . Иными словами, существует производная $f'(x) = k$ (см. п. 1.1.1).

Следовательно, существование представления (линейного приближения) вида (9) эквивалентно условию дифференцируемости (существования производной) функции, а коэффициент k линейного приближения и есть производная $f'(x)$.

Именно существование линейного приближения вида (9) выбрал в качестве *определения дифференцируемости* Карл Вейерштрасс в своих лекциях 1861 г. Он утверждал, что как раз это определение отражает «истинный смысл производной». Заметим, что из наших рассуждений следует, что из *всех* прямых, проходящих через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, именно касательная, угловой коэффициент которой равен производной (по определению касательной!), наиболее близко принадлежит к *графику функции* $y = f(x)$ в окрестности этой точки — в том смысле, что для разности $R = f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)$ выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow k = f'(x_0)$$

(обдумайте). Это утверждение, называемое *теоремой о линейном приближении*, и является, по Вейерштрассу, сутью определения производной. Собственно вейерштрассов подход к «истинному смыслу» производной нам далее не нужен — достаточно будет наглядного, геометрического и излагаемого ниже *кинематического* ее «смыслов», интерпретаций. Однако теорема о линейном приближении и серия формул (5)–(8) пригодятся при анализе простейших эволюционных и динамических моделей (о последних речь в следующем параграфе).

Уже упоминавшийся немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897; между прочим, учитель Софьи Ковалевской) уделял особое внимание строгому обоснованию математического анализа. Так в 1861 г. он впервые строго сформулировал определение предела на современном языке, ввел понятие окрестности точки и вообще «навел полный порядок» в изложении анализа. Именно Вейерштрасс ввел понятие абсолютного значения (модуля) действительного числа и само обозначение $|x|$. Строгое введение рациональных и иррациональных действительных чисел у него базировалось на понятии предела последовательности сумм дробей,

в частности десятичных (так что, как поныне принято и в школьных учебниках, действительное число трактовалось как бесконечная десятичная дробь). К этому кругу вопросов относится и входящая в школьный курс алгебры и начал анализа теорема Вейерштрасса о достижении наибольшего/наименьшего значений (одна из многих, носящих его имя). Один из основоположников математики XX в. Давид Гильберт (1862–1943) очень высоко ценил вклад Вейерштрасса в математическое образование и в саму математическую науку, заметив в 1900 г. по этому поводу: «Заблуждение думать, что строгость в проведении доказательств — враг простоты. Напротив, многочисленные примеры показывают, что более строгий метод является также наиболее простым и доступным». Мы не будем оспаривать эту точку зрения.

1.1.4. Движение по прямой. Для описания движения материальной точки *по прямой* достаточно ввести на этой прямой координаты, или, иначе, считать прямую *координатной осью* — скажем, Ox , — и рассмотреть числовую функцию $x = x(t)$, задающую координату точки в момент времени t . Тогда и *скорость движения*, которая, в соответствии с определением скорости, приняты в физике (механике), равна производной от координаты по времени, есть числовая функция $v = v(t) = x'(t)$. Такова же и скорость изменения скорости, т. е. *ускорение*: скалярная функция $a = a(t) = v'(t) = x''(t)$, т. е. *вторая производная* координатной функции $x(t)$, которую называют также *законом движения*. Тем самым мы приготовились к описанию простейших кинематических моделей движения по прямой.

Движение по прямой или вдоль прямой — как бы самое простое из движений, однако и его описание в *динамических* моделях, относящихся к движениям под действием известной силы, далеко не просто (см. § 1.2 и гл. V). Пока мы ограничимся простейшей кинематической моделью.

Кинематика — от греч. κινεω (кинео) — «двигать», κινημα(τος) (кинема(тос)) — «движение» («движущийся») — раздел *механики*, в котором движение рассматривается только с геометрической точки зрения, безотносительно к его вызвавшим «причинам», т. е. *силам*.

Динамика — от греч. δυναμις (динамис) — «сила», δυναμικος (динамикос) — «имеющий силу», «сильный» — раздел *механики*, изучающий движение в зависимости от действующих сил. Динамикой также называют состояние, ход движения или какого-либо изменения (например, *динамика численности популяции* — см. далее).

Наконец, наименование «*механика*» происходит от греч. μηχανη (механе) — «орудие», «машина» (а также «выдумка», «хитрость», «средство», «приспособление»), μηχανικος (механикос) — «механический» в смысле «относящийся к машинам» (а также «изобретательный», «хитрый!»). *Классическая механика* (в отличие от *квантовой*) изучает перемещения в *пространстве*¹ с различных точек зрения; *теоретическая механика* занимается общими законами движения и в каком-то смысле может считаться особым разделом математики (один из объектов изучения механики — как раз *дифференциальные уравнения*).

¹Мы пока рассматриваем движение *по прямой*, являющееся *частным случаем* движения в пространстве; см. далее п. 1.1.6

Пример 2. Движение без ускорения, т. е. *с ускорением, равным нулю*, задается соотношением

$$a(t) = v'(t) \equiv 0, \quad \text{или} \quad x''(t) \equiv 0.$$

С точки зрения математики записанные соотношения суть *дифференциальные уравнения*, т. е. уравнения, неизвестными в которых являются не числа, как в алгебраических уравнениях, а *функции*, причем известна (записана как уравнения) информация о производных искомым функций.

Дифференциальное уравнение *первого порядка* (с первой производной) $v' = 0$ означает, что скорость изменения функции $v(t)$ нулевая, т. е. функция «не меняется», является постоянной, *константой*¹, $v(t) \equiv 0 = \text{const}$. Строгое доказательство этого факта (*признака постоянства функции*: если на промежутке I выполняется соотношение $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) = \text{const}$ на I) использует *теорему Лагранжа о конечном приращении*; оно приведено в § 2.1.

Дифференциальное уравнение *второго порядка* (со второй производной) $x'' = 0$ записываем как «цепочку» (или *систему*) дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x' = v, \quad v' = 0.$$

Второе из этих уравнений мы уже решили: $v(t) = v_0 = \text{const}$, так что остается разрешить первое уравнение, принимающее вид $x' \equiv v_0$. Изменение с *постоянной скоростью* описывается, например, *прямой пропорциональной зависимостью* $x = v_0 t$ (тогда $x' = (v_0 t)' = v_0$), но, как и выше, к этой функции $v_0 t$ можно добавить *произвольную константу*. Получается, что координата меняется по линейному закону $x(t) = v_0 t + \text{const}$, причем $x(0) = 0 + \text{const} = \text{const}$, так что кинематический смысл константы в том, что она равна координате в нулевой момент времени, $x(0) = x_0$.

Таким образом, закон движения без ускорения задается *линейной функцией* $x(t) = At + B$, где константы A и B однозначно определяют *начальными условиями*: $A = x'(0) = v(0) = v_0$, $B = x(0) = x_0$. Такое движение называется *равномерным*. □

1.1.5. Одномерные эволюционные модели. Во многих случаях состояние той или иной системы характеризуется одним параметром, $x = x(t)$. С точки зрения математики изучение такой системы — все равно, что анализ *движения воображаемой точки* $X_t = X_t(x(t))$ по *прямой* — оси Ox . В этом случае ось Ox играет роль совокупности всех

¹От лат. constans, constantis — «постоянный»; отсюда же и имя Константин!

возможных *конфигураций, состояний* системы, в общем случае называемой ее *конфигурационным пространством*. Здесь конфигурационное пространство *одномерно*, ибо состояние описывается всего одним числом, и говорят об *одномерных системах* (или системах «с одной степенью свободы») и об отвечающих им *одномерных моделях*.

Как уже говорилось в начале параграфа, часто бывает известна (из эксперимента, либо из теоретических рассуждений) информация о скорости изменения величины $x(t)$, т. е. о *производной* $x'(t)$. Как правило, скорость изменения зависит только от значения самой величины, и можно записать соответствующее *дифференциальное уравнение*

$$x'(t) = F(x(t)), \quad \text{или} \quad x' = F(x), \quad (10)$$

которое и является *математической моделью* эволюционирующей одномерной системы.

Такая ситуация типична, например, для моделей эволюции биологических систем, относящихся к *одной популяции*¹. Они формулируются как *законы изменения численности популяции* $x = x(t)$, записанные через *скорость* $x'(t)$ изменения этой численности (измеряемой в тех или иных единицах; популяция считается *достаточно большой* для того, чтобы изменение численности $x(t)$ можно было считать *непрерывным* и говорить о *скорости изменения*). Приведем несколько простейших примеров.

Пример 3. *Линейная модель*, дающая, как мы увидим в гл. III, быстрый (*экспоненциальный*) рост численности популяции при *линейной зависимости скорости роста от численности* (при достаточных «жизненных» условиях — при наличии жизненного пространства и питательной среды), описывается *линейным дифференциальным уравнением*

$$x'(t) = \alpha x(t).$$

Конкретный пример: «*не очень много карасей в очень большом пруду*».

Иногда выписанный закон изменения называется *уравнением Мальтуса*, так как предположительно первым его получил в 1798 г. английский экономист и священник Т. Р. Мальтус (1766–1734). Мальтус применил указанный закон к описанию демографической² ситуации в масштабах всей планеты, предсказывая перенаселенность при относительной

¹ *Популяция* (от лат. *populus* — «народ»; франц., англ. *population* — «население») — совокупность особей одного вида с общим местом обитания, способная длительно существовать во времени и пространстве, а также самовоспроизводиться как элементарная единица эволюционного процесса. (Право, в этом определении не хватает единственно дифференциального уравнения, не так ли?!)

² *Демография* (от греч. *δημος* (демос) — «народ» и *γραφω* (графо) — «писать», «записывать») — наука о народонаселении.

ограниченности средств существования людей (эта концепция получила название *мальтузианство*). $\square$

Пример 4. *Логистическая модель* (или *уравнение Ферхюльста*) учитывает, что при большой численности популяции наряду с пропорциональным численности $n = n(t)$ *приростом* имеет место и пропорциональная квадрату численности *убыль* популяции:

$$n'(t) = \alpha n(t) - \gamma n^2(t),$$

или, после замены $x = \gamma n$,

$$x'(t) = x(t)(\alpha - x(t)).$$

Эту примечательную модель мы подробно проанализируем в гл. IV. Конкретный пример: «*караси в не очень большом пруду*». $\square$

Пример 5. *Квадратичная модель*, когда скорость роста численности популяции пропорциональна квадрату численности:

$$n'(t) = \alpha n^2(t),$$

или, после замены $x = \alpha n$,

$$x'(t) = x^2(t).$$

Эта модель приводит, как будет показано в § 4.1, к популяционному «взрыву». Аналогичным уравнением описываются и некоторые химические реакции, предсказывая настоящий взрыв. $\square$

Во всех этих примерах популяции развивались сами по себе — без внешних воздействий, вмешательства извне. Поэтому все три дифференциальных уравнения имели вид (10) $x' = F(x)$, где функция в правой части зависит только от значения меняющегося параметра x и не зависит от времени. Подобные уравнения и модели называются *автономными*¹. Для настоящих природных систем это типично — говоря словами известного российского математика Владимира Игоревича Арнольда², «от времени законы природы не зависят».

Однако в некоторых случаях приходится учитывать и зависящие от времени внешние воздействия — например, отлов карасей в пруду или, наоборот, их добавление, выпуск в пруд (время от времени!). Моделями таких систем будут уже *неавтономные* дифференциальные уравнения, имеющие вид

$$x' = F(x, t) \quad (x'(t) = F(x(t), t)). \quad (11)$$

Конкретные примеры систем такого рода приводятся в гл. III и V.

¹Автономный (греч. αυτονομος (автономос), от авто, (авто) — «сам» и номос (номос) — «закон») означает самоуправляющийся, самостоятельный.

²Одного из крупнейших в мире специалистов по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

В чем состоит задача исследователя, если модель эволюционного процесса уже построена: записано соответствующее дифференциальное уравнение? Сначала в том, чтобы *найти все решения* дифференциального уравнения. Отыскание всех решений того или иного дифференциального уравнения по традиции называют еще и *интегрированием* этого дифференциального уравнения, а до 1770-х гг. (до работ Лагранжа) и сами *решения* дифференциальных уравнений называли «интегралами». Причина этого будет прояснена в следующей главе.

Как будет показано в гл. IV, всякое автономное уравнение вида (10) может быть в определенном смысле «проинтегрировано». После этого нужно исследовать свойства решений уравнения в зависимости от тех или иных *начальных условий*, проинтерпретировать их в терминах исходной прикладной задачи и, при возможности, предсказать возможное «поведение» рассматриваемой (в данном случае одномерной) системы. Ну а потом, конечно, следовало бы проверить сделанные выводы, однако, как мы увидим в § 3.4, эксперимент по проверке теоретических выводов может оказаться небезопасным.

Как будет ясно из гл. IV, возможность проинтегрировать дифференциальное уравнение вида (10) вовсе не означает выражение его решений в *элементарных функциях* (к которым относятся рациональные и иррациональные алгебраические функции, тригонометрические, логарифмические и показательные функции, а также все функции, получаемые из указанных с помощью арифметических действий и операции взятия *композиции*, т. е. «функции от функции»). А неавтономные уравнения вида (11) могут оказаться вообще неинтегрируемыми (в смысле, разъясняемом в гл. IV). В том и другом случае возникает необходимость *качественного исследования* поведения решений дифференциального уравнения. Простейшие приемы такого исследования мы рассмотрим в следующей главе (в § 2.2), а вообще-то существует особая качественная *теория дифференциальных уравнений*, о которой мы упомянем в гл. V.

1.1.6. Производные и скорости в механике (кинематике). Вернемся к связи понятий производной и скорости. Реальные движения реальных тел происходят в пространстве. Моделируемое движение материальных точек также нужно рассматривать в пространстве или иногда (скажем при движении камня, брошенного под углом к горизонту) в какой-то плоскости. Для кинематического описания таких движений уже не достаточно одной числовой функции. Выходов из положения имеется два.

Первая возможность: рассматривать вместо числовой *векторнозначную* функцию времени $t \mapsto \vec{r}(t) = \overline{OM}_t$, где O — выбранное *начало отсчета*, M_t — положение движущейся точки в момент времени t . Вектор $\vec{r} = \overline{OM}$ часто называют *радиус-вектором* точки M , а векторнозначную функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — просто *вектор-функцией*.

Название *радиус-вектор*, по сути фигурировавшее уже во 2-м законе Кеплера (1618 г.), в 1853 г. предложил один из основателей строгого математического анализа, знаменитый французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857). Лат. *radius* — «спица» (в колесе), «луч»; примечательно, что термин «радиус» был введен сравнительно недавно — только в 1569 г. французским математиком и философом Рамусом (настоящее имя — Пьер де ла Рам, 1515–24.8.1572, погиб в Варфоломеевскую ночь).

Второй подход: выбрать в пространстве (прямоугольную) систему координат $Oxyz$ и рассматривать *три* числовые функции

$$(x; y; z) = (x(t); y(t); z(t)),$$

которые суть соответствующие координаты движущейся точки M_t .

Конечно, эти подходы связаны между собой: координаты вектора $\vec{r}(t)$ суть как раз $(x(t); y(t); z(t))$. Однако если при втором подходе «напрашивается» покоординатное определение скорости движения

$$(v_x; v_y; v_z) = (x'(t); y'(t); z'(t)),$$

то при описании движения с помощью векторнозначных функций потребуется отдельно ввести понятие их производных. Оно вполне естественно и в точности следует определению *мгновенной скорости* в физике (механике).

Именно, для определения мгновенной скорости в момент времени t рассматривается *приращение пути* за время от t до $t + h$, т. е. вектор

$$\overline{\Delta r} = \vec{r}(t + h) - \vec{r}(t) = \overline{OM_{t+h}} - \overline{OM_t} = \overline{M_t M_{t+h}},$$

потом делением на h (в математике¹ — умножением на h^{-1}) вычисляется средняя скорость на этом промежутке времени, и затем вычисляется *предел вектора средней скорости* при $h \rightarrow 0$ — *вектор*, который (в случае существования предела) и называется мгновенной скоростью движения или производной векторнозначной функции $\vec{r}(t)$ в точке (в момент времени) t :

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\vec{r}(t + h) - \vec{r}(t)).$$

Здесь нуждается в пояснении определение понятия *предела векторнозначной функции*. Оно дословно повторяет определение предела обычной числовой функции и проще всего может быть записано на «вейерштрассовом языке» ε - δ (ср. с определением бесконечно малой из п. 1.1.1): для векторнозначной функции $\vec{a} = \vec{a}(h)$ и вектора $\vec{c}$ выполняется соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{a}(h) = \vec{c} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in (-\delta, \delta) |\vec{a}(h) - \vec{c}| < \varepsilon$$

¹В математике не делят, а только умножают векторы на числа.

(как обычно, модуль, или абсолютная величина вектора есть попросту его длина).

Возникает вопрос: как векторное определение скорости связано с координатным? Ответ лучше сформулировать в терминах пределов.

Теорема 1 (о пределе векторнозначной функции в координатах). *Если в системе координат $Oxyz$ векторнозначная функция $\vec{a}(h)$ записывается координатными функциями $(x(h); y(h); z(h))$, вектор $\vec{c}$ имеет координаты $(x_c; y_c; z_c)$, то предел $\vec{a}(h)$ при $h \rightarrow 0$ существует и равен $\vec{c}$ тогда и только тогда, когда пределы всех трех координатных функций $x(h); y(h); z(h)$ существуют и равны соответственно $x_c; y_c; z_c$.*

Доказательство. Запишем фигурирующий в определении предела модуль разности векторов $|\vec{a}(h) - \vec{c}|$ через координатные функции:

$$|\vec{a}(h) - \vec{c}| = \sqrt{(x(h) - x_c)^2 + (y(h) - y_c)^2 + (z(h) - z_c)^2}.$$

Из этого равенства следует, что если все три возводимые в квадрат разности координат стремятся к нулю, то и рассматриваемый модуль разности векторов стремится к нулю — из существования пределов координатных функций вытекает существование предела векторнозначной функции, причем этот предел (вектор) имеет координатами пределы координатных функций.

Чтобы доказать обратное, заметим, что всегда

$$\begin{aligned} \max\{|x(h) - x_c|, |y(h) - y_c|, |z(h) - z_c|\} &\leq \\ &\leq \sqrt{(x(h) - x_c)^2 + (y(h) - y_c)^2 + (z(h) - z_c)^2} = |\vec{a}(h) - \vec{c}|. \end{aligned}$$

Значит, если модуль разности векторов стремится к нулю, таковы же и выписанные модули разностей координат. Поэтому из существования предела векторнозначной функции вытекает существование соответствующих пределов координатных функций, что и оставалось установить. $\square$

Следствие 1 (о производной векторнозначной функции в координатах). *В системе координат $Oxyz$ векторнозначная функция $\vec{r}(t)$ записывается координатными функциями $(x(t); y(t); z(t))$. Производная $\vec{r}'(t)$ существует тогда и только тогда, когда существуют производные $x'(t); y'(t); z'(t)$ координатных функций, причем координаты вектора $\vec{r}'(t)$ суть $(x'(t); y'(t); z'(t))$.*

Таким образом, все равно, вычислять ли скорость как вектор или вычислять ее покоординатно.

1.1.7. Геометрический (кинематический) смысл вектора скорости. Совокупность всех положений M_t , $t \in \mathbb{R}$ (или t принадле-

жит какому-то промежутку изменения времени), называется *траекторией* движения точки. Если это движение описывается векторнозначной функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то траектория называется еще и *годографом* этой векторнозначной функции.

Траектория — от лат. *trajectorius* — относящийся к перемещению, передвижению. Слово *годограф* происходит от греческих слов *обос*, *ходос*, — «дорога» и *γραφω*, *графо*, — «пишу», «рисую», так что его смысл — «дорога, описанная чем-либо». Данные понятие и термин были введены упоминавшимся выше Уильямом Гамильтоном при изучении криволинейного движения материальной точки.

Заметим, что в случае ненулевого перемещения вектор перемещения $\Delta \vec{r} = \vec{M}_t \vec{M}_{t+h}$ направлен вдоль секущей $M_t M_{t+h}$ к траектории (рис. 3). Так же направлен и вектор средней скорости $t^{-1} \Delta \vec{r}$, и вектор мгновенной скорости $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ при условии, что он отличен от нуля. В этом случае *существует предельное положение секущей $M_t M_{t+h}$ при $h \rightarrow 0$* , т. е. при $M_{t+h} \rightarrow M_t$. Как и для графиков функций (см. п. 1.1.2), предельное положение секущей называется касательной к графику, так что из проведенного рассуждения получается, что *вектор скорости при движении материальной точки направлен по касательной* (рис. 4).

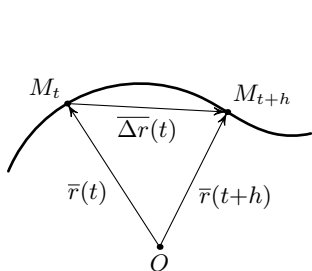


Рис. 3

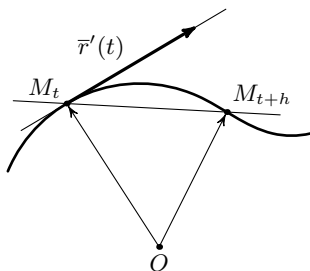


Рис. 4

С другой стороны, модуль вектора производной, т. е. $|\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)|$, абсолютная величина скорости, оказывается равным *скорости изменения длины пройденного пути*, т. е. скорости движения точки по годографу. Мы не будем доказывать это интуитивно ясное утверждение.

Пример 6. Один из основных типов движений — *вращательное движение в плоскости*, т. е. вращение около центра O (его как раз удобно выбрать в качестве начала радиус-векторов) с постоянной угловой скоростью $\omega \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ или просто $\omega \text{ с}^{-1}$ — удобно записывать с помощью поворотов векторов:

$$M_t = R^{\omega t} M_0, \quad \text{или} \quad \vec{r}(t) = R^{\omega t} (\overline{OM_0}) = r_0 \cdot R^{\omega t} \vec{e},$$

где $r_0 = OM_0$ — расстояние точки от центра вращения, $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль прямой OM_0 . Если выбрать в плоскости

вращения (прямоугольную) систему координат Oxy , направив ось Ox вдоль вектора $\bar{e}$, то *согласно определению косинуса и синуса* координатами вектора $R^{\omega t}\bar{e}$ будут $(\cos \omega t; \sin \omega t)$, так что координатная запись указанной векторнозначной функции имеет вид

$$\bar{r}(t) = (r_0 \cos \omega t; r_0 \sin \omega t).$$

Отсюда согласно следствию 1 вытекает, что

$$\bar{r}'(t) = (r_0(\cos \omega t)'; r_0(\sin \omega t)').$$

С другой стороны, вектор скорости $\bar{r}'(t)$ при вращении с угловой скоростью ω легко найти, основываясь на геометрическом (кинематическом) его смысле: он направлен по касательной к траектории, т. е. к окружности, в сторону вращения, а его абсолютная величина равна линейной скорости движения по окружности, т. е. $v_0 = \omega r_0$ (рис. 5).

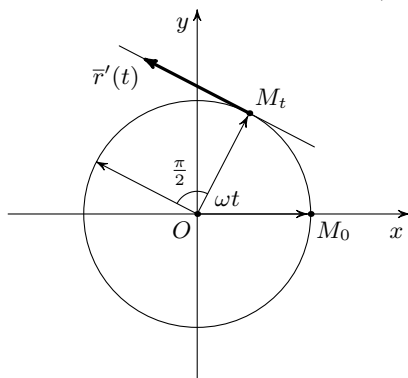


Рис. 5

Так как касательная к окружности в точке M_t перпендикулярна радиусу OM_t , вектор $\bar{r}'(t)$ получается из вектора $\bar{r}(t)$ поворотом на 90° или $\frac{\pi}{2}$ радиан с последующим умножением на ω , так что можно записать

$$\bar{r}'(t) = \omega r_0 R^{\omega t + \frac{\pi}{2}} \bar{e} = \left(\omega r_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \left(\omega r_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right) \right).$$

Сопоставляя эту формулу с предыдущей, мы получаем *красивые формулы дифференцирования косинуса и синуса*

$$(\cos \omega t)' = \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin \omega t)' = \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Конечно, из них с помощью *формул приведения* получаются и стандартные формулы: $(\cos \omega t)' = -\omega \sin \omega t$, $(\sin \omega t)' = \omega \cos \omega t$. Вот какие примечательные результаты можно получить из простых геометрически-кинематических соображений. $\square$

1.1.8. Двумерная эволюционная модель Вольтерры—Лотки. При исследовании эволюционирующих систем часто приходится рассматривать сразу несколько характеризующих их состояние параметров, скажем два. Тогда нужно рассмотреть *две* функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, описывающие изменения обоих параметров во времени. С парой функций можно связать *воображаемую* точку M_t с координатами $(x(t); y(t))$ и рассматривать ее *воображаемое* движение по *конфигурационному пространству*, которое в рассматриваемом случае будет *двумерным*, т. е. *конфигурационной плоскостью* Oxy или какой-то ее частью.

Пример 7. Рассмотрим простейшую двумерную эволюционную модель *биоценоза*¹, состоящего из двух взаимодействующих популяций, когда *в пруду сосуществуют караси и щуки*. Конечно, это не мирное сосуществование: *хищники* (щуки) живут только за счет поедания *жертв* (карасей). Сами же жертвы — *«травоядные»*, т. е. поедают только растительный корм, которого достаточно.

Обозначим численность популяции жертв через $x = x(t)$, а популяции хищников — через $y = y(t)$. При отсутствии хищников x -популяция росла бы по закону Мальтуса: $x' = ax$. При наличии же y -популяции хищников наряду с приростом x -популяции со скоростью ax нужно учесть и «убыль» жертв. Простейшая гипотеза относительно убыли основана на «теории встреч» — на предположении, что скорость уменьшения численности жертв пропорциональна числу возможных встреч между хищником и жертвой, т. е. произведению численностей x -популяции и y -популяции (считается, что *каждый* хищник может встретиться с *каждой* жертвой и с некоторой вероятностью съесть ее!). Эта гипотеза приводит к дифференциальному уравнению для численности x -популяции:

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

(константы a и b , как и появляющиеся далее константы c и d , положительны).

Теперь разберемся с хищниками. Их прирост происходит только за счет поедания жертв, и, по той же «теории встреч», скорость прироста пропорциональна произведению численностей x -популяции и y -популяции. Это дает слагаемое вида $c \cdot x \cdot y$ в скорости $y'(t)$ изменения численности y -популяции. Однако нужно учесть и естественную убыль хищников, пропорциональную их численности и играющую существенную

¹ *Биоценоз* (от греч. βίος (биос) — «жизнь», «образ жизни», «средства к жизни» и κοινός (коинос) — «общий») — участок общей среды обитания животных, растений и микроорганизмов.

(как потом будет видно, *стабилизирующую*) роль, когда y -популяция велика (многочисленна) или x -популяция мала (малочисленна), т. е. пищи (жертв) становится недостаточно. Таким образом, скорость $y'(t)$ изменения численности y -популяции записывается в виде

$$y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t).$$

Итак, мы приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} x'(t) = ax - bxy, \\ y'(t) = cxy - dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(a - by), \\ y'(t) = y(cx - d), \end{cases}$$

рассматриваемых только на I четверти $x > 0, y > 0$ плоскости Oxy (плоскости «жертва»-«хищник»). Эта система дифференциальных уравнений — простейшая модель «*борьбы за существование*», или, как еще говорят, *модель системы «хищник-жертва»*. Эта модель (соответствующая система уравнений) называется *моделью Вольтерры—Лотки*.

Вито Вольтерра (1860–1940) — итальянский математик, занимавшийся как «чистой», так и прикладной математикой: математической физикой, приложениями математики в биологии и в социальных исследованиях. Именно им была разработана математическая теория борьбы за существование и демографической динамики. В 1920-е гг. и позже Вольтерра предложил не только указанную модель развития биоценозов, но и ряд других (им опубликовано около 30 работ на эти темы).

Альфред Джеймс Лотка (1880–1949) — американский математик, независимо от Вольтерры предложивший ту же модель биоценоза и продолживший его разработки.

Мы проанализируем модель Вольтерры—Лотки в специальном параграфе в конце этой части (в § 6.4). □

Выписанная система уравнений — это частный случай *автономной системы двух дифференциальных уравнений*, записываемой как

$$\begin{cases} x'(t) = A(x, y), \\ y'(t) = B(x, y) \end{cases}$$

и трактуемой как *дифференциальное уравнение на плоскости*. Решениями такой системы на каком-то промежутке изменения времени, $t \in I$, являются *пары* таких дифференцируемых функций $x(t)$, $y(t)$, что при любом значении $t \in I$ выполняется соотношение

$$\begin{cases} x'(t) = A(x(t), y(t)), \\ y'(t) = B(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Если наряду с воображаемой точкой M_t с координатами $(x(t); y(t))$ на конфигурационной плоскости Oxy (или на ее части, как в модели Вольтерры—Лотки) рассмотреть векторнозначную функцию $\vec{r}(t) = \overline{OM_t}$, а также от каждой точки $M(x; y)$ плоскости отложить *вектор*

$\bar{V}(x, y)$ с координатами $(A(x, y); B(x, y))$, то в соответствии со следствием 1 рассматриваемую систему дифференциальных уравнений можно записать как *одно векторное дифференциальное уравнение*

$$\bar{r}'(t) = \bar{V}(x, y) = \bar{V}(\bar{r}) \quad (12)$$

(мы точку $M(x, y)$ заменили на ее радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$). А из геометрического смысла производной вектор-функции следует, что (воображаемая) траектория $t \mapsto M_t$, отвечающая решению $\bar{r}(t)$ последнего уравнения, в каждой своей точке касается приложенного к этой точке вектора $\bar{V}(x, y) = \bar{V}(\bar{r})$. Вот вам и геометрический смысл векторного дифференциального уравнения (12) или исходной системы дифференциальных уравнений.

Заметим, что если состояние системы описывается тремя параметрами, то оно аналогичным указанному выше образом отождествляется с точкой в пространстве. Если же параметров четыре, то конфигурационное пространство уже *четырёхмерно*, и т. д.

Общее понятие конфигурационного пространства произвольного числа измерений, оказавшееся очень удобным и плодотворным для математических исследований, ввел в конце XIX в. крупнейший американский физик, механик и математик Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) — выпускник и профессор Йельского университета, один из основоположников термодинамики и строгой статистической механики.

§ 1.2. Представление о динамических системах

В современной математике динамическими системами называются *любые* (сколь угодно мерные) системы, эволюция которых подчиняется соответствующей системе дифференциальных уравнений. Мы же в данном параграфе рассмотрим простейшие динамические системы классической механики: движение материальной точки по прямой, которая отождествляется с координатной осью Ox , под воздействием направленной вдоль этой прямой силы. В этом случае изначально нет необходимости рассматривать векторнозначные функции — как объяснялось в п. 1.1.4, можно ограничиться скалярными функциями: координатной функцией $x(t)$ и ее производными — скалярными скоростью $v(t) = x'(t)$ и ускорением $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

В данном случае и силу можно считать не вектором, а некоторой скалярной функцией, вообще говоря, координаты, скорости и времени, $F = F(x, v, t)$. Основным законом динамики, т. е. вторым законом Ньютона, записывается как *дифференциальное уравнение второго порядка* $ma = mx'' = F(x, v, t)$. Полагая входящую в уравнение массу m равной 1, запишем основное в данном параграфе и в гл. V *дифференциальное*

уравнение Ньютона в виде¹

$$x'' = F(x, v, t). \quad (1)$$

Это дифференциальное уравнение и является математической моделью соответствующей динамической системы. Такая система называется динамической системой с *одной степенью свободы*, но с точки зрения, изложенной в предыдущем параграфе, это будет *двумерная эволюционная модель*. С объяснений по этому поводу мы и начнем.

1.2.1. Система уравнений Ньютона. Фазовая плоскость. Числовая функция $x(t)$ называется *решением* дифференциального уравнения (1) на промежутке $I \in \mathbb{R}$, если она дважды дифференцируема (т. е. имеет вторую производную), причем

$$\forall t \in I \quad x''(t) = F(x(t), x'(t), t).$$

Как показывает наипростейший пример 2 из предыдущего параграфа (случай $F \equiv 0$, уравнение $x'' = 0$), для *однозначного* определения решения уравнения Ньютона нужно задать *два начальных условия* — начальные координату и скорость. Их необязательно задавать именно при $t = 0$ — за начальный можно выбрать любой момент времени $t = t_0$. Как полагают физики, начальные условия, т. е. значения

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v(t_0) = v_0, \quad (2)$$

вместе с дифференциальным уравнением (1) позволяют однозначно определить *закон движения* $x = x(t)$ во все моменты времени $t \in \mathbb{R}$. В хороших случаях (а только такие мы и будем рассматривать) это действительно так.

Иначе необходимость двух начальных условий можно (и нужно) интерпретировать как необходимость *двух* величин, координаты и скорости, для точного, однозначного описания состояния нашей одномерной динамической системы. И для каждой из этих величин x , v , как в п. 1.1.8, записывается свое дифференциальное уравнение *первого порядка*. Для этого, как в примере 2 из п. 1.1.4, «расщепляем», записываем в «цепочку», т. е. как *систему*, дифференциальное уравнение второго порядка (1):

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = F(x, v, t). \end{cases} \quad (3)$$

¹ Или, если угодно, поделив обе части уравнения на m и вводя то же обозначение F для $\frac{1}{m}F$.

Эта система называется *системой дифференциальных уравнений Ньютона*, и понятно, что все равно, решать ли уравнение (1) или систему уравнений (3).

Так как состояние одномерной динамической системы описывается парой параметров $(x; v)$, эту пару естественно интерпретировать как (воображаемую) точку $M(x; v)$ на *фазовой плоскости* Oxy . Решению $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющему начальным условиям (2), отвечает решение $(x(t); v(t)) = (x(t); x'(t))$ системы Ньютона (3) и воображаемая (и изображаемая!) траектория $t \mapsto M_t(x(t); v(t))$ на фазовой плоскости, которая в данном случае называется *фазовой траекторией*. Исследование одномерной динамической системы предполагает отыскание или, в крайнем случае, качественное описание *всех* фазовых траекторий, которые образуют *фазовый портрет* системы на фазовой плоскости. В общем случае это неразрешимая задача. Однако она может быть решена, если наложить на силу $F = F(x, v, t)$ некоторые разумные условия. Прежде чем их сформулировать, разберем конкретный пример.

Понятие *фазовой*¹ *плоскости*, равно как и более общее понятие *фазового пространства*, ввел тот же Уиллард Гиббс при разработке статистической механики и векторного (или *многомерного*) анализа. Заметим, что состояние простейшей пространственной динамической системы «одна материальная точка в пространстве» описывается *шестью* параметрами: тремя координатами точки и тремя координатами вектора скорости, так что в этом случае фазовое пространство *шестимерно*. При рассмотрении же *двух* точек в пространстве фазовое пространство будет уже двенадцатимерным, и т. д.

Эта «многомерность» рассматривавшихся Гиббсом задач и подвинула его на разработку векторного анализа — относительно нового в то время раздела математического анализа, в котором изучаются различные обобщения операций дифференцирования и интегрирования на «многомерные объекты» (вектор-функции, функции от векторов, векторные поля, ...). Этот раздел в середине XIX в. разрабатывали, главным образом, ирландский математик и астроном Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865; см. о нем выше) и немецкий математик, физик и филолог Герман Гюнтер Гра́ссман (1809–1877) — он ввел *многомерные пространства* (и многомерные векторы), открыл законы сложения цветов (цветовые ощущения им интерпретировались как трехмерные векторы), перевел с санскрита памятник древнеиндийской литературы «Ригведу». Гамильтон и Грассман первыми разработали строгую теорию так называемых *комплексных чисел* (см. § 5.7). Окончательно оформил векторный анализ в строгую математическую науку (и дал ей это название) в 1881–1901 гг. Гиббс.

1.2.2. Равноускоренное движение и свободное падение. Самый простой случай после уже разобранных примера $F \equiv 0$ — это ситуация, когда действующая сила *постоянна*, а значит, таково и ускорение: $x'' = F \equiv a = \text{const} \neq 0$. Записывая это уравнение в цепочку уравнений

¹Это название связано с тем, что раньше *состояния* системы нередко называли *фазами*. Фаза — от греч. φασς (фазис) — «появление», «подтверждение», «донос». В § 5.3 это слово встретится еще в одном значении.

первого порядка (ту же систему (3))

$$x' = v, \quad v' = a,$$

по цепочке же их и решаем, начиная с последнего уравнения. Как мы уже видели в п. 1.1.4,

$$v'(t) \equiv a \Leftrightarrow v(t) = at + B,$$

где $B \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная. Чтобы решить получающееся первое уравнение $x' = at + B$, решаем по отдельности уравнения $x'_1 = at$ и $x'_2 = B$. Из последнего уравнения, как и выше, $x_2(t) = Bt + B_1$. Первому уравнению удовлетворяет квадратичная функция $x_2 = \frac{1}{2}at^2$, а с ней и любая функция вида $x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + B_2$ (B_2 , как и B_1 , — произвольные постоянные). Складывая, записываем общее решение «суммарного» уравнения:

$$x' = at + B \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + Bt + C.$$

Таким образом, мы получили *общий закон равноускоренного движения* — он оказывается квадратичным и включает две произвольные постоянные B и C , которые определяются из начальных условий (2). Считая, что в них $t_0 = 0$, получаем

$$x(0) = C = x_0, \quad v(0) = B = v_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0.$$

Впервые этот закон (как закон зависимости пути от времени) экспериментально открыл Галилео Галилей (1564–1642), производя опыты по бросанию камушков со знаменитой Пизанской башни, а потом изучая скатывание шарика по наклонной плоскости. В том и другом случае основная сила — это сила тяжести $F = -mg$ (чему равна сила при скатывании по плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол α ?). После открытия математического анализа решение соответствующей задачи стало банальной теоретической выкладкой.

Пример 1. Построим *фазовый портрет* системы, описывающей движение *по вертикальной оси* Oz , направленной *вверх*, материальной точки массы m , притягиваемой силой тяжести $F = -mg$. Это движение подчиняется дифференциальному уравнению только что рассмотренного вида:

$$z'' = -g \Leftrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Bt + C, \quad v(t) = z'(t) = -gt + B.$$

Чтобы нарисовать фазовые траектории на плоскости Ozv , выразим из последнего уравнения t через v и подставим это выражение в закон движения $z = z(t)$:

$$\begin{aligned} t = -\frac{1}{g}(v - B) &\Rightarrow z = -\frac{1}{2}g\frac{1}{g^2}(v - B)^2 - B\frac{1}{g}(v - B) + C = \\ &= -\frac{1}{2g}v^2 + \frac{1}{g}Bv + \text{const} - \frac{1}{g}Bv + \text{const} + C = -\frac{1}{2g}v^2 + \text{const} \end{aligned}$$

(одним знаком const в этих вычислениях обозначены различные и, вообще говоря, *разные* постоянные, сумма которых в последнем выражении заменена на одну константу). Таким образом, фазовые траектории на плоскости Ozv геометрически представляют собой горизонтально расположенные параболы, получающиеся из параболы $z = -\frac{1}{2g}v^2$ всевозможными параллельными переносами вдоль оси Oz (рис. 6). Движение фазовой точки по ним происходит согласно выписанным формулам для $(x(t); y(t))$ — *вправо* в верхней полуплоскости ($v > 0$, так что координата $x(t)$ возрастает) и *влево* в нижней полуплоскости (соответственно тому, что $v < 0$).

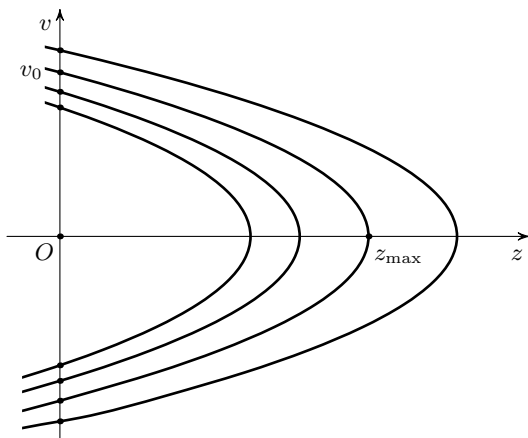


Рис. 6

Вершина каждой параболы отвечает наибольшему возможному значению z — наибольшей высоте подброшенного с уровня Земли $z = 0$ камня. Для траектории $z = -\frac{1}{2g}v^2 + \text{const}$, очевидно, $z_{\max} = \text{const}$, и если мы хотим найти наибольшую высоту по данной начальной скорости v_0 на уровне Земли $z = 0$, мы должны подставить значения $(z; v) = (0; v_0)$ в формулу для константы:

$$z_{\max} = \text{const} = z + \frac{1}{2g}v^2 = 0 + \frac{1}{2g}v_0^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Обратим внимание на примечательное равенство, выполняющееся на *любой фазовой траектории*:

$$z + \frac{1}{2g}v^2 = \text{const} \Leftrightarrow gz + \frac{1}{2}v^2 = \text{const} \Leftrightarrow mgz + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const},$$

или, иначе, $U(z) + T(v) = \text{const}$, где $U(z) = mgz$ — *потенциальная энергия* рассматриваемой материальной точки на высоте z над уровнем

Земли (который принят за уровень отсчета потенциальной энергии), а $T(v) = \frac{1}{2}mv^2$ — *кинетическая энергия* точки массой m , движущейся со скоростью v . Таким образом, *уравнения фазовых траекторий на фазовой плоскости Ozv совпадают с законом сохранения энергии* для рассматриваемой системы!

Это весьма существенное обстоятельство позволяет строить фазовые портреты гораздо более общих одномерных динамических систем и находить (в некотором смысле) законы движения в них. К закону сохранения энергии мы вернемся в начале гл. V.

В данном случае закон сохранения энергии объясняет, почему наибольшая высота брошенного камня такая, как было выписано выше: из равенства $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{const}$ вытекает, что высота максимальна при $v = 0$, т. е. когда *вся переданная камню при бросании с уровня $z = 0$ кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ «перетекает» в потенциальную энергию $U = mgz_{\text{max}}$* :

$$mgz_{\text{max}} = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

откуда и получается найденная ранее формула для z_{max} . □

1.2.3. Двумерная динамическая система (пример). Сейчас в самый раз разобрать поведение хорошо знакомой из школьного курса физики динамической системы с *двумя* степенями свободы: движение камня (или снаряда; но на самом деле просто материальной точки), брошенного под углом к горизонту. Это движение будет происходить в вертикальной плоскости, с которой мы свяжем систему координат Oxz , выбрав начало в точке «запуска» и направив ось Ox по горизонтали в направлении движения, а ось Oz — по вертикали вверх. Движение подчиняется *векторному* дифференциальному уравнению Ньютона, которое удобно записать, используя координаты:

$$m(x; z)'' = \overline{F} = (0; -mg) \quad \Leftrightarrow \quad x'' = 0 \text{ и } z'' = -g \quad (4)$$

(здесь учтено, что вектор силы тяжести направлен вертикально вниз).

Фазовое пространство рассматриваемой системы *четырёхмерно*: ее состояние определяется двумя координатами $x; z$ и двумя компонентами (координатами по выбранным осям) скорости $v_x = x'$, $v_z = z'$, поэтому рассмотрение *фазовой траектории* в данном случае затруднительно (см., однако, *задание* в конце пункта). Мы рассмотрим не воображаемую фазовую траекторию, а истинную *конфигурационную траекторию* на конфигурационной плоскости Oxz , описываемую движущейся точкой $P_t(x(t); z(t))$. Для этого нужно решить систему дифференциальных уравнений Ньютона второго порядка (4). Раньше мы расщепляли каж-

дое из таких уравнений на системы двух уравнений первого порядка:

$$x'' = 0 \quad \text{и} \quad z'' = -g \Leftrightarrow \begin{cases} x' = v_x, \\ v'_x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z' = v_z, \\ v'_z = -g, \end{cases}$$

которые затем решали «по цепочке». В данном случае в этом нет необходимости, ибо уравнения системы (4) *независимы*, т. е. каждое из них может быть рассмотрено и решено отдельно от другого.

Итак, используя результаты п. 1.1.4 и только что рассмотренного примера 1, а также начальные условия: $x(0) = z(0) = 0$, $v_x(0) = x'(0) = v_1$, $v_z(0) = z'(0) = v_2$ (v_1 ; v_2 — компоненты начальной скорости по горизонтали и вертикали соответственно), записываем

$$x'' = 0 \quad \text{и} \quad z'' = -g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = At + B = v_1 t \quad \text{и} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t.$$

Получается, что координата x зависит от времени линейно, а координата z — квадратично. Раз (при $v_1 \neq 0$) координата x и время попросту *пропорциональны*, траектория описывается *квадратичной зависимостью* z от x , так что *брошенный камень летит по параболе*¹. Конечно, мож-

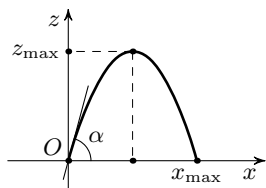


Рис. 7

но выписать эту зависимость, исследовать ее и построить конфигурационную траекторию $z = z(x)$ (рис. 7), однако все существенные характеристики этой параболы можно найти и из уже выписанных законов изменения $x = x(t)$ и $z = z(t)$, причем так будет проще (можете сравнить самостоятельно).

Найдем сначала наибольшую дальность полета $x_{\max}$, предположив, что абсолютная величина v начальной скорости фиксирована, так что $v_1 = v \cos \alpha$, $v_2 = v \sin \alpha$, где α — угол между направлением «броска» и горизонталью. Значение $x_{\max}$ отвечает случаю, когда высота z камня становится опять равной нулю. Отсюда отыскивается соответствующий момент времени $t_{\max}$ (время всего полета) и затем значение $x_{\max}$:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t = 0 \Leftrightarrow t_{\max} = \frac{2v_2}{g},$$

$$x_{\max} = x(t_{\max}) = v_1 t_{\max} = \frac{2v_1 v_2}{g} = \frac{v^2}{g} \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Заметим, что если угол α меняется от 0° до 90° , то 2α изменяется от 0° до 180° , так что найденное значение $x_{\max}$ будет наибольшим, когда аргумент синуса в последнем выражении равен 90° , т. е. $2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$.

¹Впервые это обнаружил также Галилео Галилей (и тоже *экспериментально*).

Таким образом, приходим к хорошо известному результату: *наибольшая дальность полета будет, когда камень бросается под углом 45° к горизонту.*

Найдем также наибольшую высоту брошенного камня при заданном значении угла α . Это будет координата $z_{\max} = z_0$ вершины параболы $z = z(x)$, а чтобы ее найти, достаточно найти момент времени t_0 ее достижения. В принципе, для этого можно приравнять нулю вертикальную компоненту скорости $v_z = z' = -gt + v_2$, однако и без этого из соображений симметричности параболы и равномерности движения по ней в горизонтальном направлении ($v_x \equiv v_1$) нетрудно сообразить, что максимум высоты достигается на полпути до падения, т. е. t_0 вдвое меньше, чем $t_{\max}$:

$$t_{\max} = \frac{2v_2}{g} \Rightarrow t_0 = \frac{v_2}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\max} = z_0 = z(t_0) = -\frac{1}{2}gt_0^2 + v_2t_0 = -\frac{1}{2g}v_2^2 + \frac{1}{g}v_2^2 = \frac{1}{2g}v_2^2 = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Из формулы видно, что наибольшая высота тем больше, чем ближе угол бросания α к 90° ; это вполне естественно: чем «вертикальнее» мы бросим камень, тем большей высоты он достигнет.

То же самое можно получить из закона сохранения энергии в данной системе: квадрат скорости в данном случае равен $|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_z^2$, потенциальная энергия равна $U = U(z) = mgz$, закон сохранения энергии записывается в виде

$$U + T = mgz + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) = \text{const.}$$

При этом горизонтальная скорость $v_x \equiv v_1$ тоже постоянна, поэтому

$$U + T_z = mgz + \frac{1}{2}mv_z^2 = \text{const},$$

т. е. от общего закона сохранения «отщепляется» закон сохранения для движения по вертикали. Значит, это движение точно такое же, как было описано в примере 1, при начальной скорости «бросания вверх» $v_z(0) = v_2$. Наибольшая высота будет достигнута, когда вся начальная кинетическая энергия вертикального движения превратится в потенциальную энергию, т. е. когда

$$T_z(0) = \frac{1}{2}mv_2^2 = U(z_{\max}) = mgz_{\max},$$

откуда получается прежнее выражение для $z_{\max} = z_0$.

Попробуем-таки представить себе, как выглядит *фазовая* траектория рассматриваемого движения в четырехмерном фазовом пространстве с координатами $(x; y; v_x; v_y)$. Можно написать законы изменения всех координат:

$$x(t) = v_1(t), \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2t, \quad v_x(t) = v_1, \quad v_z(t) = -gt + v_2.$$

Из третьего уравнения получается, что координата v_x остается неизменной, так что верное представление о фазовой траектории мы получим, рассматривая движе-

ние точки $\tilde{M}_t(x(t); z(t); v_z(t))$ в обычном трехмерном пространстве с координатами $(x; z; v_z)$. (Можно сказать иначе: так же как уравнение, например, $y = \text{const}$ выделяет в трехмерном пространстве *плоскость* [параллельную координатной плоскости Oxz], так и уравнение $v_x \equiv v_1 = \text{const}$ выделяет в четырехмерном фазовом пространстве *трехмерное подпространство* [параллельное указанному *трехмерному координатному подпространству* Oxv_z !].)

Задание. Дайте описание фазовой траектории

$$x(t) = v_1(t), \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2t, \quad v_z(t) = -gt + v_2$$

в трехмерном пространстве Oxv_z .

Подсказка. Это будет *плоская кривая*. Какая именно?

Вернемся к рассмотрению одномерных динамических систем.

1.2.4. Консервативные одномерные системы. Модель «шарик в желобе». В случае, когда механическая система не подвержена внешним воздействиям, сила F , входящая в уравнение Ньютона (1), явно не зависит от времени¹, т. е. $F = F(x, v)$ — функция только состояния системы, т. е. координаты и скорости (или фазовой точки $(x; v)$).

В качестве примера силы, зависящей от скорости, можно привести *силу вязкого трения*, $F_{\text{тр}} = -\lambda v$, направленную противоположно скорости движения и пропорциональную ей (см. п. 5.1.3). Наличие подобной силы приводит к так называемой *диссипации*² *энергии* — грубо говоря, превращению энергии движения в теплоту. В идеальном случае трение считается отсутствующим, а сила F — зависящей *только от координаты*, $F = F(x)$. Такие силы и соответствующие динамические системы называются *консервативными*. Это название связано с тем, что для таких систем *справедлив закон сохранения энергии* (*консервативный* — от лат. conservare — «охранять», «сохранять»; conservativus — «охранительный», «сохраняющий»), что мы подробно объясним и докажем в начале гл. V (в § 5.1).

Дифференциальное уравнение Ньютона для консервативных систем

$$x'' = F(x) \tag{5}$$

можно заменить системой уравнений Ньютона

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = F(x), \end{cases} \tag{6}$$

которая хотя и проще общей системы (3), но простому решению не поддается: система «перепутывает» переменные x и v между собой.

Исследованию таких и несколько более сложных уравнений и систем посвящена специальная гл. V. Здесь же мы рассмотрим весьма общую

¹Вспомните: *от времени законы природы не зависят!*

²От лат. dissipatio — «рассеивание».

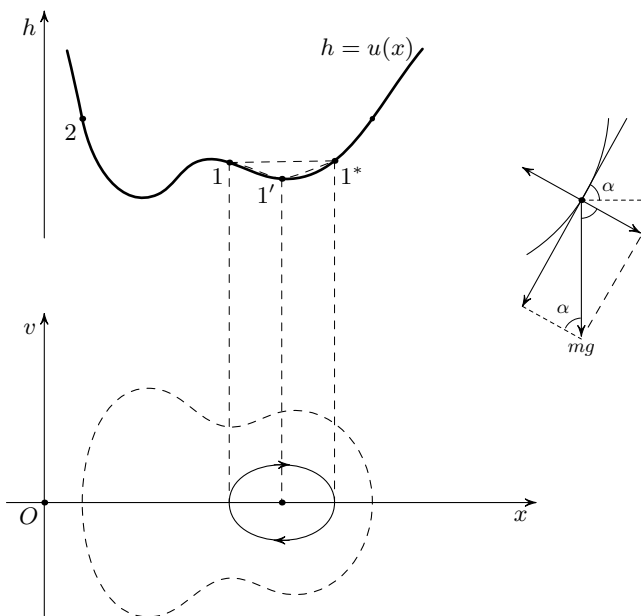


Рис. 8

наглядную модель, которая впоследствии позволит отыскивать и анализировать фазовые портреты произвольных консервативных систем.

Пусть (точечный) шарик катается без трения в плоском желобе, имеющем форму графика какой-то дифференцируемой функции $h = u(x)$ (рис. 8). Положение шарика определяется его координатой по оси Ox , и действующая на шарик сила тоже зависит только от x : она будет зависеть от производной функции $u(x)$ и направлена в сторону убывания этой функции.

Действительно, на шарик действуют две силы: направленная вниз сила тяжести, по величине равная mg , и направленная по нормали (перпендикуляр¹) к графику $h = u(x)$ сила реакции опоры. Эта сила уравнивается нормальной составляющей силы тяжести, равной $mg \cos \alpha$, где α — угол между касательной и осью Ox (см. рис. 8, справа), так что *равнодействующая есть тангенциальная*² составляющая силы тяжести, т. е. $-mg \sin \alpha$, $\alpha = \alpha(x) = \arctg u'(x)$. Знак «минус» перед тангенциальной составляющей показывает *направление* действия силы:

¹ Нормаль (от лат. normalis — «прямой») к кривой — перпендикуляр к касательной к этой кривой, проведенный в точке касания.

² От лат. tangens, tangentis — «касающийся».

если $u' > 0$, то сила направлена *влево*, а если $u' < 0$, то *вправо*. Отметим, что при $u' = 0$, т. е. когда касательная к «профилю желоба» $h = u(x)$ горизонтальна, равнодействующая равна нулю, так что *критические точки*¹ функции $u(x)$ отвечают *положениям равновесия* системы «шарик в желобе».

Мы не будем выписывать уравнение Ньютона для этой системы, ибо это требует рассмотрения так называемой «*обобщенной координаты*», а ограничимся качественным анализом поведения шарика при различных начальных условиях.

Ясно, что если шарик просто отпустить (с нулевой скоростью) в какой-то точке 1 «на правом склоне горки желоба» (см. рис. 8), то он покатится вправо, скорость будет возрастать до достижения им «ямки желоба» (положения равновесия 1' на рис. 8), а затем уменьшаться в течение того времени, пока шарик взбирается на «правый склон ямки». Так будет до тех пор, пока шарик не достигнет на правом склоне той высоты 1*, с которой он был отпущен, — в точке 1* мгновенная скорость будет равна нулю, а шарик начнет немедленно скатываться обратно, вернется в точку 1, потом опять покатится вправо, и т. д. Можно изобразить условную фазовую кривую $t \mapsto M_t(x(t); v(t))$ — это будет замкнутая линия, простирающаяся от точки 1 до точки 1* и обратно, по которой по часовой стрелке осуществляется периодическое движение фазовой точки M_t (рис. 8, внизу).

Такое движение шарика и соответствующее воображаемое движение фазовой точки по фазовой кривой можно объяснить исходя из *закона сохранения энергии* для системы «шарик в желобе». Кинетическая энергия движения равна $T = \frac{1}{2}mv^2$ (скорость v направлена по касательной к графику $h = u(x)$), потенциальная энергия шарика, находящегося на высоте h , отсчитываемая от нулевого уровня энергии, за который мы примем ось Ox , равна $U = mgh = mgu(x)$, *полная механическая энергия равна*

$$E = U + T = mgu(x) + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const.}$$

При уменьшении высоты $h = u(x)$ потенциальная энергия шарика убывает, переходя в кинетическую энергию, — скорость возрастает. Точкам минимума функции $u(x)$ отвечают минимумы потенциальной энергии и, соответственно, наибольшие значения скорости v , и т. д.

Задание. Опишите характер движения шарика, после того как его отпустили в точке 2 на «самом левом склоне желоба». Перекатится ли при этом шарик через среднюю горку?

¹Напомним, что для дифференцируемой функции критические точки суть нули ее производной.

Указание. Воспользуйтесь показанной штриховой линией фазовой кривой на плоскости Oxv (рис. 8, внизу).

1.2.5. Пример консервативной системы: шарик на пружинке. Рассмотрим совсем конкретную и легко моделируемую как экспериментально, так и теоретически одномерную динамическую систему — колебания шарика, прикрепленного к пружине с данным коэффициентом жесткости (или упругости).

Пример 2. Пусть шарик (материальная точка) массы m прикреплен к середине горизонтально положенной пружины с закрепленными концами. Примем середину пружины за начало O оси координат Ox , направленной вдоль пружины (рис. 9). Согласно *закону Гука* при

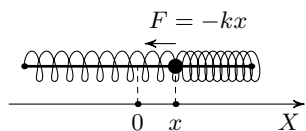


Рис. 9

отклонении шарика из положения равновесия O в точку с координатой x на него будет действовать *сила упругости*, пропорциональная отклонению x и направленная в противоположную сторону: $F = F(x) = -kx$, где $k > 0$ — коэффициент упругости пружины (этот

закон и формула справедливы на относительно небольших, но сравнимых с длиной пружины отклонениях x , что, собственно, и установил экспериментально *Роберт Гук* в 1660 г.).

Таким образом, мы имеем консервативную динамическую систему, моделируемую уравнением Ньютона вида

$$mx'' = -kx, \quad \text{или} \quad x'' = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7)$$

Как найти его решения?

В данном случае неожиданная помощь приходит со стороны кинематики — из примера 6 п. 1.1.7 мы знаем, что при дифференцировании функций $a \cos \omega t$ и $b \sin \omega t$ аргумент (говорят, *фаза*) функции увеличивается на $\frac{\pi}{2}$ и перед функцией появляется множитель ω . После второго дифференцирования мы получаем, что

$$(a \cos \omega t)'' = \omega^2 \cdot a \cos(\omega t + \pi), \quad (b \sin \omega t)'' = \omega^2 \cdot a \sin(\omega t + \pi).$$

Но по определению $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ суть координаты вектора $R^\alpha \vec{e}$, получающегося из единичного вектора $\vec{e}(1; 0)$ поворотом на угол α , а дополнительный поворот на угол π есть *симметрия относительно начала координат* и меняет знаки обеих координат, так что предыдущие формулы для вторых производных можно переписать как

$$(a \cos \omega t)'' = -\omega^2 \cdot a \cos \omega t, \quad (b \sin \omega t)'' = -\omega^2 \cdot a \sin \omega t.$$

Значит, обе функции, $x_1(t) = a \cos \omega t$ и $x_2(t) = b \sin \omega t$, а с ними и их сумма¹ $x(t) = x_1 + x_2 = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, являются решениями дифференциального уравнения (4). Можно доказать, и мы это сделаем в § 5.3, что это все решения уравнения (4).

Вопрос. Легко проверить, что и произвольная функция вида $\tilde{x}(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4). Не противоречит ли это только что сформулированному утверждению («Можно доказать...»)? □

Величины, меняющиеся по выписанным выше законам (формулам), называют *испытывающими гармонические колебания* или просто *гармоническими колебаниями*. Гармонические колебания возникают всякий раз, когда одномерная система описывается дифференциальным

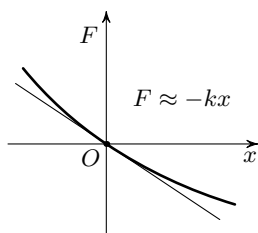


Рис. 10

уравнением вида $x'' = -\omega^2 x$, или $x'' = -\lambda x$, $\lambda > 0$. Это ситуация довольно типичная при рассмотрении движений системы *вблизи ее положения равновесия*. Скажем, если шарик в желобе из предыдущего пункта движется в окрестности *устойчивого положения равновесия* — в «ямке», отвечающей минимуму профиля желоба $h = u(x)$, то при отклонении x от точки минимума, которую можно принять за начало

координатной оси Ox , сила $F = F(x)$ направлена к положению равновесия, т. е. $F(x) < 0$ при $x > 0$ и $F(x) > 0$ при $x < 0$, а $F(0) = 0$ (рис. 10). Допустим, что функция $F = F(x)$, обладающая указанным свойством, *дифференцируема* в точке $x = 0$ — существует *отрицательная производная* $F'(0) = -\lambda$, $\lambda > 0$. Тогда в какой-то окрестности нуля *функцию можно заменить на ее линейное приближение*:

$$F(x) \approx F(0) + F'(0)(x - 0) = -\lambda x$$

(см. п. 1.1.3). Значит, и уравнение Ньютона можно заменить его приближением:

$$mx'' = F(x) \approx -\lambda x.$$

Вот вам и закон Гука!

Роберт Гук (1635–1703) — английский ученый-энциклопедист, секретарь и куратор экспериментов Royal Society (Лондонского королевского общества), первооткрыватель закона всемирного тяготения. Относительно последнего отметим, что примерно в одно время этот закон открыли и обсуждали не только Гук и Исаак Ньютон, но и Кристофер Врен (Wren, и в русской литературе эта фамилия часто переводит-

¹Обратите внимание на это обстоятельство — *сумма решений дифференциального уравнения (4) $x'' = -\omega^2 x$ тоже является решением этого уравнения* — так бывает далеко не всегда.

ся как Рен) (1632–1723) — английский математик и астроном, член-основатель Royal Society и в 1681–1683 гг. его президент (с 1703 г. бессменным, до своей смерти, президентом Royal Society был Исаак Ньютон, с 1705 г. — уже сэр Исаак Ньютон), главный архитектор Лондона на протяжении 30 лет (именно Врен руководил в 1675–1710 гг. постройкой знаменитого собора святого Павла в Лондоне). Врен сотрудничал с Гуком в разрешении вопросов, касающихся законов Кеплера и закона притяжения, а также и в делах застройки Лондона — Роберт Гук также был еще и архитектором!

Еще Гук знаменит усовершенствованием микроскопа, открытием клеточного строения организмов (именно он и ввел термин «клетка»), изобретением барометра и пр. Смысл же открытого им закона *упругости для твердых тел* в том, как уже говорилось, что этот закон ($F = -kx$) справедлив на *сравнительно широком промежутке значений отклонения x* .

Упражнения, задачи и задания к гл. I

Касательные и линейные приближения

1. Запишите линейные приближения:

- 1) для функции x^2 в точке $x_0 = 1$;
- 2) для функции $\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$;
- 3) для функции $3x - 2$ в точке $x_0 = 1$.

2. Может ли

1) график функции совпадать с касательной к нему? Для каких функций?

2) касательная к графику пересекать его более чем в одной точке?

Приведите примеры.

3. Нарисуйте графики таких непрерывных функций, что

1) $D(f) = [-4; 4]$, $f(-3) = f'(0) = 0$, $f'(-3) = f(0) = 1$, $f(3) = -3$, $f'(3) = -2$;

2) $D(g) = [-1; 5]$, $g(0) = g'(1) = 0$, $g'(2) = g(2) = 1$, $g(3) = -1$, $g'(4) = -\frac{1}{2}$.

4. Напишите уравнения касательных к данным функциям в данных точках, нарисуйте эскизы графиков с касательными

1) $y = x^3$, $x_0 = 1$;

3) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

2) $y = \frac{3}{x}$, $x_0 = -1$;

По определению углом между графиком функции и какой-то прямой в точке их пересечения называется угол между касательной к графику в этой точке и данной прямой.

Аналогично углом между двумя пересекающимися графиками называется угол между касательными к этим графикам в точке пересечения.

5. Найдите углы, под которыми пересекают ось абсцисс графики следующих функций:

1) $y = x^3 - 3x$;

2) $y = x^3 - 3x + 2$.

6. Найдите углы, под которыми пересекают ось ординат графики следующих функций:

$$1) y = \frac{1}{2}(x-1)^2;$$

$$2) y = \frac{1}{x-1}.$$

7. В каких точках касательные к графику функции $y = x^3 - x$ параллельны прямым:

$$1) y = x;$$

$$2) y = 2x;$$

$$3) y = -x;$$

$$4) y = -2x?$$

8. При каких значениях параметра a график функции $y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$ пересекает ось абсцисс под углом 45° (хотя бы в одной точке)?

9. Найдите расстояние между ближайшими точками графиков функций:

$$1) y = -2x + 1 \text{ и } y = x^2 - 8x + 16;$$

$$2) y = 2x - 1 \text{ и } y = x^4 + 3x^2 + 2x.$$

10. Запишите приближенные формулы для вычисления значений:

$$1) (x_0 + \Delta x)^n, (1 + h)^n \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$2) \sqrt[n]{x_0 + \Delta x}, \sqrt[n]{1 + h}, \sqrt[n]{a^n + h} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$3) \frac{1}{x_0 + \Delta x}, \frac{1}{1 + h}, \frac{1}{1 - h}, \frac{1 + h}{1 - h};$$

$$4) \frac{1}{(x_0 + \Delta x)^n}, \frac{1}{(1 + h)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

11. Найдите приближенно, с точностью до двух знаков после запятой:

$$1) \sqrt[3]{9},$$

$$3) \sqrt[7]{100},$$

$$5) \sqrt[3]{3},$$

$$7) \sqrt[4]{17},$$

$$2) \sqrt[4]{80},$$

$$4) \sqrt[5]{33},$$

$$6) \sqrt[3]{24},$$

$$8) \sqrt[4]{9}.$$

12. Сторона квадрата равна $4 \pm 0,1$ м. С какой предельной относительной погрешностью можно вычислить его площадь?

13. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара R , для того чтобы его объем можно было определить с точностью до 1 %?

14. Считая f и f' известными, запишите линейные приближения и получите из них формулы для производных следующих функций:

$$1) f^2(x), f(2x), f(x^2);$$

$$3) f(x^2 + 2x), f(1/x), 1/f(x);$$

$$2) f^3(x), f(x^3), f(3x - 1);$$

$$4) \sqrt{f(x)}, f(\sqrt{x}).$$

15. Докажите, что невертикальная прямая $y = kx + t$ и парабола $y = ax^2 + bx + c$ касаются тогда и только тогда, когда эти прямая и парабола имеют единственную общую точку.

16. Докажите, что невертикальная и негоризонтальная прямая $y = kx + t$, $k \neq 0$, и гипербола $y = \frac{a}{x}$ касаются тогда и только тогда, когда эти прямая и гипербола имеют единственную общую точку.

17. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 4x + 1$, проходящих через точки 1) $(0; 0)$; 2) $(-1; -3)$.

18. Найдите точку пересечения касательной к параболе $y = ax^2$ в точке $x = z$ с осью абсцисс. Как отсюда получить способ точного геометрического построения касательной к параболе?

19. На параболе $y = ax^2$ даны две точки $M_1(x_1; ax_1^2)$, $M_2(x_2; ax_2^2)$. Касательная в какой точке будет параллельна секущей M_1M_2 ?

20. Докажите, что середины всевозможных хорд, параллельных данной хорде M_1M_2 параболы $y = ax^2$, лежат на одной прямой.

21. Докажите, что абсцисса точек пересечения касательных к параболе $y = ax^2$, проходящих через две данные точки $M_1(x_1; ax_1^2)$ и $M_2(x_2; ax_2^2)$, делит отрезок $[x_1, x_2]$ пополам.

22. Докажите, что касательная к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$ образует с осями координат треугольник постоянной площади (какой?), причем точка касания является серединой гипотенузы этого треугольника. Как отсюда получить способ точного геометрического построения касательной к гиперболе?

23. 1) Найдите угол между прямыми, заданными своими уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

2) Докажите, что необходимым и достаточным условием перпендикулярности этих прямых является выполнение равенства $k_1k_2 = -1$.

24. Докажите, что касательная к полуокружности — графику функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ — перпендикулярна (как и полагается в геометрии!) радиусу, проведенному в точку касания.

25. Напишите уравнение *нормали* (перпендикуляра к касательной) к графику данной дифференцируемой функции f , проведенной через точку графика с абсциссой $x = z$.

26. Найдите кратчайшее расстояние от точек $(0; 0)$ и $(-1; -3)$ до графика функции $y = x^2 - 4x + 1$.

27. При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = x^3 - a^2x$ в точках с абсциссами 0 и a взаимно перпендикулярны?

28. Найдите множество точек, из которых парабола $y = ax^2$ видна под прямым углом (т. е. угол между касательными, проведенными к графику из этих точек, прямой).

29. Напишите уравнение общей касательной к графикам функций

$$y = x^2 + 4x + 8 \quad \text{и} \quad y = x^2 + 8x + 4.$$

30. В какой точке графика функции $y = ax^2 + bx + c$ касательная к нему проходит через начало координат?

* * *

31. Найдите производные f' , f'' , f''' , ..., $f^{(k)}$ (k -я производная) для функции $f(x) = (a+x)^n$ при всевозможных значениях $k \in \mathbb{N}$.

32. Найдите производные $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $\dots$, $f^{(k)}(0)$ для полиномиальной функции

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

при всевозможных значениях $k \in \mathbb{N}$.

33. Допустим,

$$(a+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Найдите коэффициенты a_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Коэффициенты из последней задачи принято записывать в виде $a_k = C_n^k \cdot a^{n-k}$; числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

34. 1) Используя факториалы¹, напишите короткую формулу для биномиальных коэффициентов (сама формула для $(a+x)^n$, записанная через биномиальные коэффициенты, называется *формулой Ньютона для степени бинома*, т. е. двучлена $a+x$).

2) Найдите связь между числами C_{n+1}^k и C_n^k .

Указание: используйте равенство $(a+x)^{n+1} = (a+x)^n \cdot (a+x)$.

Исаак Ньютон (1643–1727) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей дифференциального и интегрального исчисления (Лейбниц на 28 лет раньше опубликовал свое открытие «исчисления бесконечно малых», но Ньютон на 10 лет раньше установил наличие двух взаимно связанных исчислений; его соответствующий труд «Метод флюксий» был опубликован лишь в 1736 г.). Заслуга Ньютона в формуле «бинома Ньютона» состоит в ее обобщении на случай произвольных (дробных или действительных) показателей степени бинома.

Векторнозначные и тригонометрические функции и их производные

35. Запишите с помощью поворотов с переменным центром векторнозначную функцию, соответствующую вращению точки с угловой скоростью ω из около прямолинейно и равномерно движущегося центра. Классифицируйте годографы таких функций.

36. Запишите с помощью поворотов векторнозначные функции, соответствующие движению точки на окружности радиуса ρ , катящейся без скольжения:

1) по прямой;

2) по другой окружности радиуса ρ_0 , находясь снаружи или внутри нее.

Какой вид имеют годографы этих функций?

¹На всякий случай напомним: через $n!$, «эн факториал», обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n ; кроме того, полагают $0! = 1! = 1$.

Эти годографы называются соответственно *циклоидами*, *эпициклоидами* и *гипоциклоидами*. Название циклоиде дал в 1598 г. знаменитый Галилео Галилей (1564–1642) — итальянский физик, математик, один из основателей точного естествознания, поэт, филолог и критик. Это слово происходит от греческих слов *κυκλος* — «круг», «окружность» и *εἶδος*, означающего в сложных словах «происхождение», так что буквальный смысл названия — «порожденная кругом». С XVII в. циклоидой занимались многие математики, открыв множество ее примечательных свойств.

Построение некоторых эпициклоид и гипоциклоид впервые встречается в книге немецкого художника, автора известной гравюры «Меланхолия» Альбрехта Дюрера (1471–1528) «Наставление к измерению циркулем и линейкой» (1525). В названиях присутствуют греческие предлоги *ἐπι* — «к», «на», употреблявшиеся в названиях фигур, построенных на линии как на базе, на основе, и *υπο* — «под». Эти линии привлекали внимание многих крупных математиков, в том числе Ньютона, Иоганна Бернулли, Эйлера.

Рассмотрите специально эпициклоиды, для которых $\rho = \frac{1}{n}\rho_0$ ($n \in \mathbb{N}$)¹, и аналогичные гипоциклоиды (при $n \geq 2$)².

37. В каком случае траектории точек из предыдущей задачи (36.2) будут замкнутыми (а движение по ним соответственно периодическим)? Найдите необходимое и достаточное условие на радиусы ρ , ρ_0 .

38. Пусть, как и выше, окружность радиуса ρ катится без скольжения

1) по прямой;

2) по другой окружности радиуса ρ_0 , находясь снаружи или внутри нее. К первой окружности жестко прикреплена точка, находящаяся на расстоянии h от ее центра.

Запишите с помощью поворотов векторнозначную функцию, описывающую движение этой точки. Как выглядят годографы³ этих функций? Рассмотрите отдельно случаи $\rho_0 = \rho^4$ и $\rho_0 = 2\rho$.

39. В каком случае траектории точек из последней задачи (38.2) будут замкнутыми (а движение по ним — периодическим)?

* * *

40. Постройте годографы векторнозначной функции $\vec{r}(t)$ и ее производной $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, если функция $\vec{r}(t)$ задана своими координатами $(x(t); y(t))$, $t \in \mathbb{R}$:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 1) $(t; t)$; | 5) $(-t; t^2)$; | 9) $(t; t^3)$; | 13) $(t^3; t^2)$; |
| 2) $(t^2; t^2)$; | 6) $(-2t; 4t^2)$; | 10) $(-t; -t^3)$; | 14) $(t^2; -t^4)$; |
| 3) $(t^3; t^3)$; | 7) $(t^2; t)$; | 11) $(t^3; t)$; | 15) $(-t^2; t^4)$; |
| 4) $(t; t^2)$; | 8) $(t^2; -t)$; | 12) $(t^2; t^3)$; | 16) $(t^4; t^2)$. |

¹При $n = 1$, т. е. $\rho = \rho_0$, получается так называемая *кардиоид* — «сердцеобразная» замкнутая кривая.

²Гипоциклоида при $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$ носит название *астроида* — «звездообразная».

³Эти годографы называются соответственно *трохоидами*, *эпитрохоидами* и *гипотрохоидами*.

⁴Эти кривые (при любом значении h) называются «улитками Паскаля».

(На годографах нужно отметить начальную точку, отвечающую значению $t = 0$, и направление движения точки P_t , а для скорости — такой точки V_t , что $\overline{OV_t} = \overline{v}(t)$.)

41. Постройте годографы векторнозначных функций $\overline{r}(t)$, заданных своими координатами:

- | | |
|---|---|
| 1) $(\frac{1}{t}; t^2 - 2)$, $t \in (0; +\infty)$; | 5) $(\sqrt{1+t}; \sqrt{t})$, $t \in [0; +\infty)$; |
| 2) $(t^2 - \frac{1}{2}; t^4 - \frac{1}{4})$, $t \in \mathbb{R}$; | 6) $(t^2; \sqrt{1+t^2})$, $t \in \mathbb{R}$; |
| 3) $(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2})$, $t \in \mathbb{R}$; | 7) $(\sqrt{1-t^2}; \sqrt{1+t^2})$, $t \in [-1, 1]$; |
| 4) $(\sqrt{t}; \sqrt{1-t})$, $t \in [0; 1]$; | 8) $(\sqrt[3]{t^2}; (t+1)^3)$, $t \in \mathbb{R}$. |

(На годографах нужно отметить начальную точку, отвечающую значению $t = 0$, и направление движения точки P_t .)

* * *

42. Выберите удобную систему координат и запишите координатные функции для вектор-функций из упражнений 36, 37, 38. Найдите производные этих функций (в координатах). Какой вид имеют годографы производных?

43. Для каждой точки Q , принадлежащей верхней полуокружности единичной окружности (с центром в начале координат), проводится прямая, соединяющая эту точку с началом координат и пересекающая прямую $y = 2$ в точке R . Пусть P — середина отрезка QR . Задайте координатными функциями траекторию точки P (точка Q как-то перемещается по верхней полуокружности).

44. Пусть $M = M(-1; 0)$; через каждую точку Q верхней полуокружности единичной окружности (с центром в начале координат) проводится прямая MQ , на которой выбирается точка P так, что $PQ = 1$. Задайте координатными функциями траекторию точки P , если точка Q пробегает верхнюю полуокружность.

45. Предположим, что нитка длины $2\pi r$ разматывается с диска (круга) радиуса r (представлять себе можно, например, катушку), центр которого неподвижен. Задайте в координатах движение свободного конца нити¹.

* * *

¹Описываемая свободным концом нити траектория называется *эвольвентой* окружности, а сама окружность служит для этой кривой *эволютой*. Термины происходят от лат. *evolvere* — разворачиваю, разворачиваю. Касательные к эволюте являются нормальными (перпендикулярными) к эвольвенте — докажете. Эти кривые были впервые рассмотрены и исследованы в 1654 г. голландским физиком и математиком, изобретателем маятниковых часов Христианом Гюйгенсом (1629–1695); он был первым президентом парижской Академии наук.

46. Пусть $\lambda(t)$ и $\vec{r}(t)$ — дифференцируемые в точке t_0 скалярная (т. е. числовая) и векторнозначная функции. Докажите, что тогда вектор-функция $\vec{R}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{r}(t)$ тоже дифференцируема в точке t_0 ; напишите и докажите формулу для производной этого произведения $\vec{R}(t)$.

47. Пусть $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ — дифференцируемые в точке t_0 векторнозначные функции. Докажите, что тогда скалярная функция $s(t) = \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$ (скалярное произведение вектор-функций $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$) тоже дифференцируема в точке t_0 ; напишите и докажите формулу для производной скалярного произведения $s(t)$.

48. Пусть годограф дифференцируемой в точке t вектор-функции $\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$ в окрестности этой точки совпадает с графиком дифференцируемой в точке $x = x(t)$ функции $y = f(x)$. Докажите, что в случае, когда производная $x'(t)$ отлично от 0, имеет место формула

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \text{или} \quad f'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

(второй вариант написания формулы приведен затем, чтобы «оттенить» тот факт, что производные в левой и правой частях равенства берутся совсем по разным переменным). Дайте геометрическую интерпретацию этой формулы.

* * *

49. Так как при любом $k \in \mathbb{Z}$ поворот на $2\pi k$ радиан есть тождественное преобразование ($R^{2\pi k} = E$ — все точки переходят сами в себя), значения функций $\cos t$ и $\sin t$ периодически повторяются через $2\pi k$; какому свойству графиков этих функций отвечает их периодичность? Постройте графики функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$, не вычисляя производных, исходя из наглядных соображений и периодичности. Докажите, что эти графики, как геометрические фигуры, равны (т. е. совмещаются друг с другом движением — каким?). Исходя из вида графиков постройте под ними примерные графики производных $y = \cos' x$ и $y = \sin' x$.

(Указание. При построении графиков функций $\cos x$ и $\sin x$ нужно следовать стандартной схеме: определить нули функций, точки максимума, точки минимума — скажем, для $\sin x$ это будут соответственно точки

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Далее из определения и из элементарных геометрических соображений отыскиваются промежутки знакопостоянства и монотонности.)

50. По данным координатам точки $M(x; y)$ найдите координаты точки $R^{\pi/2}M$. Используя полученный результат, выразите производные $\cos' t$ и $\sin' t$ через сами функции $\cos t$ и $\sin t$ (от аргумента t !).

(Указание. Поворот на угол $t + \frac{\pi}{2}$ представляется в виде композиции поворотов на t и $\frac{\pi}{2}$:

$$R^{t+\pi/2} = R^{\pi/2} \circ R^t.$$

Теперь нужно применить это равенство к точке $(1; 0)$ и учесть определения функций $\cos t$ и $\sin t$, а также «кинематические» формулы для их производных.)

* * *

Определение 1. Тригонометрическими функциями *тангенс*, *котангенс*, *секанс*, *косеканс* числового аргумента $x \in \mathbb{R}$ называются функции, задаваемые соответственно формулами

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Тригонометрическая функция *синус* встречается в индийских сидхантах — анонимных трудах по астрономии IV или V в., а также в сочинении «Ариабхатиама» (499 г.) индийского астронома и математика Ариабхаты (476 — ок. 550). Интересно происхождение наименования этой функции. Линия синуса (от точки P_α до ее проекции на ось абсцисс) называлась *ардхаджсиа* — *ардха* означает «половина», а *джсиа* — «тетива лука», хорда. Потом синус стали сокращенно называть *джсиа*. В арабской литературе термин переделали в *джсиба*, а в IX в. это лишнее обиходного смысла слово заменили арабским словом *джайб*, что означает «пазуха», «вырез платья», «выпуклость». Это слово в XII в. и было дословно переведено на латынь термином *sinus*! Обозначение $\sin$ (как и $\cos$, и tg) стало общепринятым благодаря авторитету знаменитого швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783; долгое время работал и похоронен в Санкт-Петербурге).

Термин *косинус* (как и *котангенс*) был введен в 1620 г. английским математиком и астрономом, изобретателем логарифмической линейки Эдмондом Гюнтером (1581–1626) как сокращение от лат. *complementi sinus*: «дополнительный синус», т. е. синус дополнительной дуги ($\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$).

Тригонометрическую функцию *тангенс*, как тень вертикального шеста, ввел в X в. багдадский математик и астроном Мохаммад бен Мохаммад Абу-л-Вефа (940–988; родом из Хорасана). Он же ввел *котангенс*, *секанс* и *косеканс*. Потом тангенсы неоднократно переоткрывались — англичанином Брадвардином (ок. 1300–1349; архиепископ Кентерберийский), немецким математиком Региомontanом (1436–1476); но и через 100 лет после Региомонтана Коперник еще не знал этого открытия. Сначала для котангенса и тангенса употреблялись названия «прямая тень» и «обращенная тень» (*umbra recta* и *umbra versa*). В 1583 г. в своей книге «Геометрия круглого» датский врач, астроном и математик Томас Финке (1561–1656) ввел термин *tangens* — на латыни — «касающийся», «отрезок касательной». (Что это за отрезок? Мы напомним об этом в § 6.4.) Там же был введен термин *secans* — *secans*: лат. — «секущий», «отрезок секущей», от *seco* — «режу», «секу». (О какой секущей идет речь? Подумайте!) После Абу-л-Вефы секанс также переоткрывался, в частности впервые его протабулировавшим учеником и другом Коперника швейцарцем Георгом Ретиком (1514–1574).

1) $\operatorname{tg} x$, 2) $\operatorname{ctg} x$, 3) $\sec x$, 4) $\operatorname{cosec} x$.

52. Вычислите производные функций:

- 1) $\cos 2x$,
- 2) $\sin 3x$,
- 3) $\sin \frac{x}{3}$,
- 4) $\sin(2x + \frac{3\pi}{4})$,
- 5) $\operatorname{tg} 3$,
- 6) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$,
- 7) $\sec \frac{x}{2}$,
- 8) $\operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{4})$.

$$\begin{array}{ll} 1) \ y = \sin 2x, & 3) \ y = \sin \frac{x}{3}, \\ 2) \ y = \cos 3x, & 4) \ y = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right). \end{array}$$

Вопросы к решению. С помощью каких геометрических преобразований из графика функции $y = f(x)$ получается график функции $y = f(ax)$? (Рассмотрите отдельно случаи $a > 1$, $0 < a < 1$ и $a < 0$.) Ответьте на тот же вопрос для графика функции $y = f(x+b)$.

Общий случай: какими преобразованиями из графика функции $y = f(x)$ получается график функции $y = f(ax + b)$? (Обратите внимание на непрерывность переносов и растяжений/сжатий к оси Oy в этом случае!)

* * *

54. Постройте годографы векторнозначных функций $\vec{r}(t)$, заданных своими координатами:

- 1) $(\cos t; \cos t);$
- 2) $(\cos t; \sin t);$
- 3) $(\cos t; \cos 2t);$
- 4) $(\cos t; \sin 2t);$
- 5) $(\sin t; \cos t);$
- 6) $(\cos t; -\sin t);$
- 7) $(\sin t; \cos 2t);$
- 8) $(\cos t; 2 \sin t);$
- 9) $(2 \cos t; \sin t);$
- 10) $(a \cos t; b \sin t);$
- 11) $(\cos t; \cos 3t);$
- 12) $(\cos t; \sin 3t).$

ГЛАВА II

Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения

§ 2.1. Анализ дифференциального уравнения $y' = f(x)$

Среди непрерывных математических моделей, записываемых как дифференциальные уравнения вида

$$x' = F(x, t), \quad (1)$$

особо выделяются уравнения, в которых правая часть есть заданная (известная) функция непрерывной переменной (времени) t , $F(x, t) \equiv f(t)$, а также *автономные уравнения*, в которых производная задается как известная функция от значения непрерывно меняющейся величины $x(t)$, $x' = F(x)$, т. е. $x'(t) \equiv F(x(t))$.

Уравнениями последнего типа (автономными) мы займемся в гл. III–IV, а в этой главе сосредоточим внимание на уравнениях типа $x'(t) = f(t)$, или, в обозначениях y вместо x и x вместо t , на анализе дифференциального уравнения

$$y' = f(x): \quad \forall x \in D \quad y' = f(x). \quad (2)$$

Здесь f — *данная функция*, D — область рассмотрения дифференциального уравнения: числовое множество, чаще всего конечный или бесконечный интервал или объединение интервалов (если это множество не указывается, то подразумевается, что $D = D_f$ — область определения функции f).

2.1.1. Интегрирование как решение дифференциального уравнения. Задача решения (отыскания всех решений) дифференциального уравнения (2) есть в точности *задача восстановления функции по заданной ее производной*, т. е. *основная задача интегрального исчисления* (задача, обратная задаче отыскания производной). Соотнесем терминологию, относящуюся к дифференциальным уравнениям, с принятой в интегральном исчислении: дадим определения, примеры, формулировки утверждений, знакомые по курсу алгебры и начал анализа, в терминах дифференциальных уравнений.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ (или «для функции» $f(x)$) на множестве D — промежутке или объединении промежутков, — если она является решением дифференциального уравнения (2), $y' = f(x)$, на этом множестве, т. е.

$$\forall x \in D \quad \exists F'(x) \text{ и } F'(x) = f(x).$$

Пример 1. Дифференциальному уравнению $y' = x$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет функция $y = \frac{x^2}{2}$, а вместе с нею и любая функция вида $y = \frac{x^2}{2} + C$, так как *если к функции прибавить константу, то ее производная не изменится.* $\square$

Пример 2. Дифференциальное уравнение $y' = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, имеет решения $y = \frac{x^3}{3} + C$, где C — произвольная аддитивная¹ постоянная. $\square$

Пример 3. Дифференциальному уравнению $y' = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, удовлетворяют любые функции вида $y = -\frac{1}{x} + C$. $\square$

Возникает вопрос: *все ли* решения дифференциального уравнения (2) для рассмотренных функций f мы указали (угадали, «нашли»)? Ответ известен.

Предложение 1 (основное свойство решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$). *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, где I — произвольный (возможно, бесконечный) промежуток, то $\forall x \in I \quad y_2(x) = y_1(x) + C$, где C — некоторая постоянная.*

Для доказательства нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 1 (признак постоянства функции). *Если функция $h(x)$ дифференцируема на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, причем производная равна нулю на всем этом промежутке, то функция h постоянна на промежутке I :*

$$h'(x) \equiv 0 \text{ на } I \Rightarrow h(x) \equiv \text{const на } I.$$

Это утверждение сразу следует из *теоремы Лагранжа* из курса алгебры и начал анализа:

$$\forall a, b \in I \quad \exists c \in I \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0.$$

Доказательство предложения. Продифференцируем разность решений — функцию $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$. Получим

$$\forall x \in I \quad r'(x) = y_2'(x) - y_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Следовательно, согласно *признаку постоянства функции* (лемме 1) эта разность $r(x)$ постоянна — равна некоторой константе C — на про-

¹Напомним: это означает, что в запись решения константа входит как слагаемое, от лат. additivus — «прибавляемый».

межжутке I . Значит, на этом промежутке $y_2(x) - y_1(x) = C$, поэтому $y_2(x) = y_1(x) + C$. $\square$

Мы специально подчеркнули, что речь идет о решениях на одном промежутке, так как признак постоянства функции справедлив только для функций, рассматриваемых на одном промежутке, поскольку при его доказательстве используется теорема Лагранжа: если $r'(x) \equiv 0$ на I , то $\forall a, b \in I$ существует такое значение c между a и b , что

$$r(b) - r(a) = r'(c)(b - a) = 0 \Rightarrow r(b) = r(a).$$

На объединении же (непересекающихся) промежутков говорить о теореме Лагранжа нет смысла: функция с нулевой производной является константой только на отдельном промежутке, но не будет таковой в целом — ведь константа на каждом из промежутков своя!

Таким образом, в первых двух примерах мы действительно указали все решения соответствующих дифференциальных уравнений, а в примере 3 — отнюдь нет, так как это уравнение рассматривается на области определения функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$, т. е. на объединении промежутков $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Следовательно, общий вид решений этого дифференциального уравнения задается «составной» формулой

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x < 0; \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x > 0. \end{cases}$$

В дальнейшем мы подобные составные формулы будем записывать короче, в виде

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \widehat{C},$$

где «домик» над произвольной постоянной C означает, что на каждом из промежутков, на которых рассматривается дифференциальное уравнение $y' = f(x)$ (как указывалось, если не оговорено противное, это вся естественная область определения функции $f: D = D(f)$), может быть взята своя постоянная.

Приведем вытекающее из доказанного предложения утверждение, которое также относится к дифференциальному уравнению (2), рассматриваемому на единственном промежутке.

Следствие 1 (общий вид решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$). Любое решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, где I — данный (возможно, бесконечный) промежуток, записывается в виде $y(x) = y_1(x) + C$, где $y_1(x)$ — произвольное частное его решение, C — произвольная постоянная.

В соответствии с определением 1 оба сформулированных утверждения можно перевести на язык первообразных. Предложение 1 гласит, что *любые две первообразные одной функции, рассматриваемые на единственном промежутке, отличаются на нем на константу*. Следствие 1 обычно называют *основным свойством первообразных*: *если функция f имеет какую-то первообразную F на промежутке I , то она имеет бесконечно много первообразных на этом промежутке, причем каждая первообразная f на этом промежутке записывается в виде $F(x) + C$, $C = \text{const} \in \mathbb{R}$* .

Ньютон не использовал понятие *первообразной*, а задачу её отыскания понимал как *решение дифференциального уравнения*: в его терминологии *решить дифференциальное уравнение* — значит отыскать «*флюенту*» (функцию, «текущую»; лат. *fluenta* — «воды», «волны», «течение»), зная ее «*флюксию*» (т. е. производную, «скорость»; лат. *fluxio* или *fluctio* — «истечение»). Кроме того, Ньютон не прибавлял произвольную постоянную (однако упоминал, что в решения «входят» произвольные постоянные). Первым ее написание ввел Лейбниц (в 1694 г.).

Сам термин «первообразная» в обиход ввел Лагранж в 1797 г. в своей «Теории аналитических функций», одновременно с термином «производная». Французские и английские термины происходят от лат. *primitivus* — нечто «начальное», «исходное», по-русски «первообраз», и *derivativus* — «производный» (произведенный), «образованный» (из чего-либо). Обозначения $y' = f'(x)$ (или $x'(t)$), $y'' = f''$ и т. д. также ввел Лагранж (1770). Ньютон вместо «штрихов» использовал точки над флюентами: $\dot{x}$, $\dot{x}$; в механике для производных по времени ньютоновы обозначения применяются по настоящее время (хотя в Англии они отменены с 1915 г. по «типографским соображениям»!). Обозначения и терминология Лейбница рассмотрены в гл. IV.

2.1.2. Теорема единственности решений уравнения $y' = f(x)$ и свойства первообразных. Мы видели, что если функция $f(x)$ на промежутке I имеет *хотя бы одну* первообразную $F(x)$, то $f(x)$ имеет *бесконечно много* первообразных, причем все они отличаются от $F(x)$ на аддитивную константу C . Если же на первообразную, т. е. на решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, наложить еще и *начальное условие*, т. е. задать значение $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \in I$, то первообразная (решение дифференциального уравнения) определена *однозначно* — постоянная C отыскивается из начального условия:

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = F(x_0) + C \Rightarrow C = y_0 - F(x_0).$$

В терминах дифференциальных уравнений это утверждение формулируется как *теорема единственности*.

Теорема 1 (единственности решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$). *Если решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, где I — данный (возможно, бесконечный) промежуток, существует, то оно однозначно определяется начальным условием $y(x_0) = y_0$.*

Иначе можно сказать так: если существует функция $y(x)$, $x \in I$, удовлетворяющая следующей «системе условий»:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) & (\forall x \in I); \\ y(x_0) = y_0 & (x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

то только одна.

Доказательство, по существу, было дано выше. □

Обратим внимание на формулу, связывающую *искомое* (удовлетворяющее данному начальному условию) решение $y(x)$ с произвольной (по предположению существующей) первообразной $F(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) = F(x) + C = F(x) + (y_0 - F(x_0)) &= y_0 + (F(x) - F(x_0)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y(x) - y(x_0) &= F(x) - F(x_0). \end{aligned}$$

Сформулируем соответствующее утверждение (о равенстве приращений любых двух первообразных на отрезке от точки x_0 до точки x) как отдельную теорему (несколько поменяв обозначения).

Теорема 2 (о равенстве приращений любых первообразных данной функции). *Если функция $f(x)$ на промежутке I имеет две первообразные $F(x)$ и $\overline{F}(x)$, то для любых двух точек $a, b \in I$ приращения этих первообразных на отрезке от a до b равны:*

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{des}}{=} F(x) \Big|_a^b = \overline{F}(x) \Big|_a^b \stackrel{\text{des}}{=} \overline{F}(b) - \overline{F}(a)^1.$$

Доказательство. Согласно основному свойству первообразных если функция $f(x)$ на промежутке I имеет первообразную $F(x)$, то любая ее первообразная $\overline{F}(x)$ отличается от $F(x)$ на аддитивную константу C : $\overline{F}(x) = F(x) + C$. Но в этом случае

$$\overline{F}(x) \Big|_a^b = \overline{F}(b) - \overline{F}(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad \square$$

2.1.3. Вопросы существования решений уравнения $y' = f(x)$, или первообразных. Все предыдущие утверждения были доказаны в предположении, что решения или первообразные, о которых шла речь, *существуют*. Однако отнюдь не любая функция имеет первообразную. Напомним соответствующий пример.

¹Значок «des» над знаком равенства расшифровывается как «обозначение» — англ. designation. В данном случае имеется в виду удобное обозначение для приращения функции F на отрезке от точки a до точки b : $F(x) \Big|_a^b$. Его ввел в 1848 г. французский математик П. Ф. Сэррюс.

Пример 4. Докажем, что функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на $\mathbb{R}$. Напомним, что эта функция определяется «составной формулой»:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Допустим, что эта функция имеет некоторую первообразную $F(x)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R} \exists F'(x) = \operatorname{sgn} x$. В частности, на интервале $(-\infty, 0)$ выполняется равенство $F'(x) = -1$, а так как на этом же интервале $(-x)' = -1$, то, согласно основному свойству первообразных, на интервале $(-\infty, 0)$ выполняется равенство $F(x) = x + C$ для некоторой константы C . Аналогично на интервале $(0, \infty)$ выполняется равенство $F(x) = x + C_1$ для некоторой константы C_1 .

Далее, так как первообразная $F(x)$ дифференцируема всюду, в том числе и в точке $x = 0$, она непрерывна в нуле, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0).$$

Следовательно, $C_1 = F(0) = C$, и функцию $F(x)$ можно записать следующей составной формулой:

$$F(x) = \begin{cases} -x + C, & x < 0; \\ x + C, & x > 0; \\ C, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow F(x) = |x| + C.$$

Но эта функция не может быть *всюду дифференцируемой*: в противном случае таковой была бы и функция $F(x) - C = |x|$, а мы знаем, что функция $|x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Полученное противоречие и доказывает, что функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на $\mathbb{R}$. □

В примере 4 функция, не имеющая первообразной, была *разрывной*. Оказывается, справедливы следующие результаты.

1. *Функция, непрерывная на промежутке, всегда имеет на нем первообразную* — это будет доказано в § 2.3.

2. С другой стороны, из разрывности функции *вовсе не следует*, что она не имеет первообразной, — вполне *может иметь*, как показывает следующий пример.

Пример 5. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$ (легко видеть, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует), но в то же время эта функция является производной для функции

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, является первообразной для (разрывной) функции f на всей числовой оси. $\square$

§ 2.2. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = F(x, y)$

Прежде чем заняться вопросом существования первообразных или решений дифференциального уравнения вида $y' = f(x)$, рассмотрим один из важнейших подходов к анализу и приближенному решению дифференциальных уравнений — так называемый *метод Эйлера* (1768), в общем случае — для произвольного эволюционного дифференциального уравнения

$$x' = F(x, t), \quad (1)$$

которое запишем в других обозначениях, в виде

$$y' = F(x, y), \quad \text{т. е.} \quad y'(x) = F(x, y(x)), \quad (2)$$

где $F = F(x, y)$ — заданная функция двух переменных, т. е. функция на координатной плоскости Oxy .

2.2.1. Поля направлений и интегральные кривые дифференциальных уравнений. Уравнение (2) имеет простую геометрическую интерпретацию: так как производная $y'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к графику решения $y = y(x)$ в точке $(x; y) = (x; y(x))$, причем согласно формуле (2) он нам *известен* — равен значению данной функции $F(x, y)$, — решить уравнение (2) — значит восстановить функцию $y(x)$ (или ее график) по направлениям касательной в каждой точке. Все возможные касательные к графикам решений дифференциального уравнения (2) образуют так называемое *поле направлений* на координатной плоскости Oxy (рис. 11). Строго говоря, поле направлений — это соответствие

$$L: M(x; y) \mapsto L_{F(x, y)}(M),$$

где через $L_k(M)$ обозначена прямая, проходящая через точку M и имеющая угловой коэффициент k . Графики решений уравнения (2) в каждой своей точке касаются рассматриваемого поля направлений (см. рис. 11).

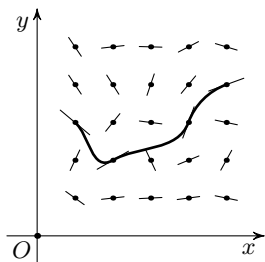


Рис. 11

Кривые, в каждой точке касающиеся данного поля направлений, называются *интегральными кривыми* этого поля направлений (или соответствующего дифференциального уравнения). Таким образом, задача решения дифференциального уравнения (2) эквивалентна задаче отыскания всех интегральных кривых отвечающего этому уравнению поля направлений.

Очевидно, для *однозначного* определения решения дифференциального уравнения (2) необходимо задать *начальное условие*, т. е. точку $M_0(x_0; y_0)$, через которую проходит интегральная кривая. Обычно начальное условие записывают в виде

$$y(x_0) = y_0. \quad (3)$$

2.2.2. Метод Эйлера для построения интегральных кривых. Идея Эйлера состоит в том, чтобы отыскивать интегральные кривые *приближенно*, заменяя их *ломаными*, определенным образом строящимися по данному полю направлений. Пусть мы хотим найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (2) с начальным условием (3). Попытаемся *приближенно* провести через точку $M_0(x_0; y_0)$ интегральную кривую — график решения — до точки с абсциссой x . Для этого разобьем отрезок $[x_0, x]$ на n равных частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ (очевидно, $x_m = x_0 + m \frac{x - x_0}{n}$) и проведем *ломаную Эйлера* $M_0 M_1 M_2 \dots M_n$, где $M_m = (x_m; y_m)$ и точки $M_1, M_2, \dots$ строятся так, что каждый отрезок $M_m M_{m+1}$ идет вдоль поля направлений L в точке M_m (рис. 12). Тогда угловой коэффициент прямой $M_m M_{m+1}$ равен $F(x_m, y_m)$, а ее уравнение записывается в виде

$$y = y_m + F(x_m, y_m)(x - x_m),$$

поэтому

$$y_{m+1} = y_m + F(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m). \quad (4)$$

Последовательно подставляя рекуррентные формулы (4) одну в другую при $m = 1, 2, \dots, n$, мы получим формулу для ординаты последней

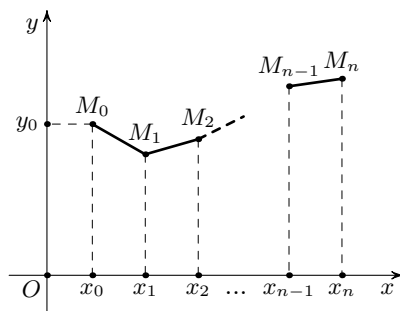


Рис. 12

точки ломаной Эйлера

$$y_n = y_0 + \sum_{m=0}^{n-1} F(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m),$$

которая в пределе при $n \rightarrow \infty$ *должна бы гипотетически* дать значение решения уравнения (2) с начальным условием (3) в точке x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(x).$$

Оказывается, при определенных условиях, накладываемых на функцию $F = F(x, y)$, это действительно так, но доказательство соответствующей теоремы (и даже точная ее формулировка) далеко выходит за возможности данного курса. В следующей главе (в § 5.1) мы посмотрим, что дает подход Эйлера в случае *однородного линейного дифференциального уравнения* $y' = ky$, а в следующем параграфе применим метод Эйлера к уравнению *первообразных* $y' = f(x)$.

Сейчас же рассмотрим иногда применимый геометрический (графический) метод отыскания решений дифференциальных уравнений вида (2).

2.2.3. Изоклины полей направлений и графическое интегрирование дифференциальных уравнений. Если для данного дифференциального уравнения (2) удастся относительно подробно изобразить его поле направлений (при этом вместо прямой $L_{F(x,y)}(M)$ через точку M проводится маленький отрезочек), то по такой картинке иногда можно получить представление о *качественном поведении* интегральных кривых, т. е. графиков решений уравнения. Еще задолго до Эйлера (в 1694 г.) швейцарский математик, сподвижник Лейбница Иоганн Бернулли предложил для построения полей направлений использовать *изоклины*.

Определение 1. *Изоклинами* дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ или соответствующего ему поля направлений называются множества точек *одинакового наклона* поля направлений

$$\Gamma_k = \{(x; y) \mid F(x, y) = k\};$$

иначе говоря, *изоклины*¹ суть *линии уровня* функции F , задаваемые уравнениями $F(x, y) = k$, вдоль которых поле направлений имеет *постоянный наклон*: тангенс угла наклона равен k (например, при $k = 0$ изоклина Γ_0 дает все точки, в которых касательная к интегральным кривым *горизонтальна*, т. е. все критические точки решений $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$).

Метод изоклин построения полей направлений состоит в том, что мы изображаем семейство некоторых изоклин Γ_k и вдоль каждой из них строим поле направлений — прямых (отрезочков) с угловыми коэффициентами k .

Пример 1. Для дифференциального уравнения $y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$, $(c; d) \neq (0; 0)$, $ad - bc \neq 0^2$, уравнение изоклины записывается как

$$\frac{ax + by}{cx + dy} = k \Leftrightarrow ax + by = k(cx + dy) \text{ и } cx + dy \neq 0 \Leftrightarrow Ax + By = 0$$

($cx + dy \neq 0$; $A = a - kb$, $B = b - kd$). Последнее уравнение задает прямую, проходящую через начало координат, только с *выброшенным* началом координат, т. е. фактически пару получающихся лучей (которые могут быть и вертикальными, т. е. совпадать с положительным и отрицательным лучами оси ординат). Построить поле направлений вдоль изоклин проще как бы в обратную сторону: для наклонной прямой $y = \lambda x$ найти угловой коэффициент по формуле

$$k = F(x, y) = F(x, \lambda x) = \frac{ax + b\lambda x}{cx + d\lambda x} = \frac{a + b\lambda}{c + d\lambda},$$

а затем вдоль двух лучей прямой построить «направления» с этим угловым коэффициентом $k = k(\lambda)$.

В начале координат поле направлений *не определено* — эта точка называется *особой точкой* рассматриваемого дифференциального уравнения. Но в точках прямой $cx + dy = 0$, отличных от начала координат, имеет смысл считать направление векторного поля *вертикальным*: при стремлении точки $(x; y)$ вне этой прямой к точке на прямой угловой коэффициент $k = F(x, y)$ стремится к бесконечности. $\square$

Что можно делать после построения части изоклин и поля направлений вдоль них, покажем на конкретных примерах.

¹От греч. ισος (изос) — «равный», «одинаковый» и κλινω (клино) — «наклоняю».

²Подумайте, что означает это условие. Что получится в случае $ad - bc = 0$?

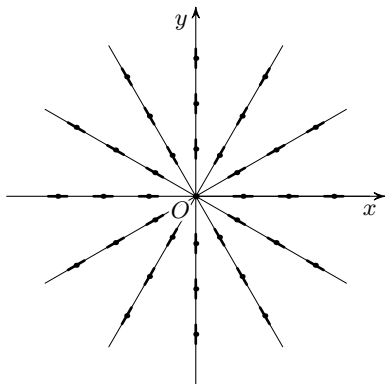


Рис. 13

Пример 2. Для дифференциального уравнения (*) $y' = \frac{y}{x}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y = \lambda x$ равен

$$k = k(\lambda) = \frac{y}{x} = \frac{\lambda x}{x} = \lambda.$$

Значит, поле направлений рассматриваемого дифференциального уравнения *сонаправлено* с изоклинами (рис. 13) и вертикально вдоль оси Oy (на ней $x = 0$). Следовательно, *сами* проходящие через начало координат лучи суть интегральные кривые. Они задаются теми же уравнениям $y = \lambda x$, и выполнение дифференциального уравнения (*) проверяется непосредственно:

$$y' = (\lambda x)' = \lambda, \quad \frac{y}{x} = \frac{\lambda x}{x} = \lambda = y',$$

что мы и собирались установить. □

Пример 3. Для дифференциального уравнения (*) $y' = \frac{x}{y}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y = \lambda x$ равен

$$k = k(\lambda) = \frac{x}{y} = \frac{x}{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}.$$

В данном случае поле направлений сонаправлено с изоклинами, только если

$$k(\lambda) = \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

Значит, лучи пары прямых $y = \pm x$ (из которых выкинуто начало координат) суть интегральные кривые уравнения (*) (рис. 14), а их уравнения задают решения.

Чтобы прикинуть, как ведут себя прочие интегральные кривые, заметим, что вдоль оси Oy поле направлений горизонтально, вдоль оси Ox — вертикально, а вдоль прочих лучей $y = \lambda x$ — сонаправлено с *симметричными* относительно прямой $y = x$ прямыми $y = \lambda^{-1}x$ (вспомните: симметричный график задает *обратную функцию*, а она имеет угловой

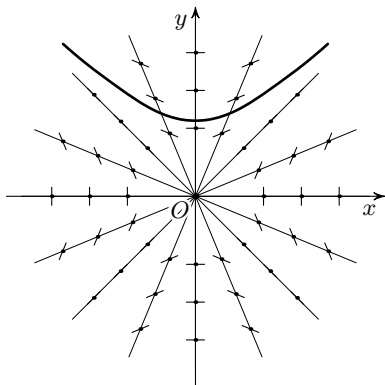


Рис. 14

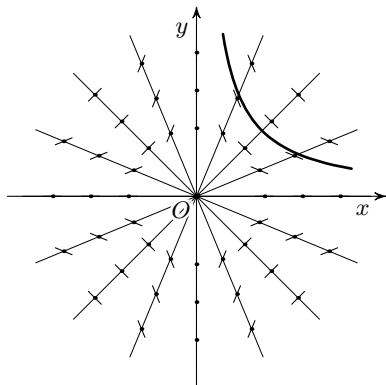


Рис. 15

коэффициент как раз λ^{-1} (см. рис. 14)). При приближении лучей к прямым $y = \pm x$ направления приближаются к направлениям этих лучей, и естественно предположить, что и интегральные кривые приближаются к ним — как к *асимптотам*. Попробуйте угадать формулу для решений. $\square$

Пример 4. Для дифференциального уравнения (*) $y' = -\frac{y}{x}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y = \lambda x$ равен

$$k = k(\lambda) = -\frac{y}{x} = -\frac{\lambda x}{x} = -\lambda.$$

Значит, поле направлений этого дифференциального уравнения вдоль луча $y = \lambda x$ сонаправлено с *симметричными* им относительно оси абсцисс лучами $y = -\lambda x$ (рис. 15). Вдоль полуосей осей Ox и Oy поле направлений *сонаправлено* с ними, так что полуоси суть интегральные кривые уравнения (*). При приближении лучей $y = \lambda x$ к полуосям направления вдоль них приближаются к направлениям полуосей, и опять естественно предположить, что и интегральные кривые приближаются к ним — как к *асимптотам* (см. рис. 15). Нам известны подобные кривые: нужными свойствами обладают *гиперболы* $xy = a = \text{const}$. Легко проверить, что соответствующие функции действительно удовлетворяют дифференциальному уравнению (*):

$$y = \frac{a}{x} \Rightarrow y' = -\frac{a}{x^2}; \quad -\frac{y}{x} = -\frac{a}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{a}{x^2} = y'.$$

Выполнение уравнения (*) легко проверить и дифференцированием равенства $xy = a$:

$$xy(x) \equiv a = \text{const} \Rightarrow (xy(x))' = y(x) + xy'(x) \equiv 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{y(x)}{x},$$

что и требовалось установить. $\square$

Пример 5. Для дифференциального уравнения (*) $y' = -\frac{x}{y}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y = \lambda x$ равен

$$k = k(\lambda) = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\lambda x} = -\frac{1}{\lambda}.$$

В данном случае поле направлений никогда не сонаправлено с изоклинами:

$$k(\lambda) = \lambda \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 = -1.$$

На лучах $y = \pm x$ поле направлений направлено перпендикулярно им, равно как и на полуосях (рис. 16). Направление поля на произвольном луче $y = \lambda x$ получается из направления этого луча двумя симметриями: относительно прямой $y = x$ (тогда, как в примере 3, λ превращается в λ^{-1}) и относительно оси Ox (при которой окончательно получается угловой коэффициент $k(\lambda) = -\lambda^{-1}$). Нетрудно видеть, что композиция указанных симметрий есть поворот на -90° , так что поле направлений вдоль любого луча перпендикулярно этому лучу (см. рис. 16).

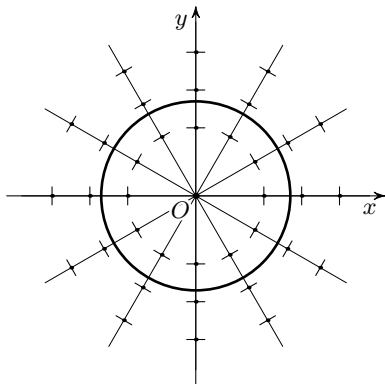


Рис. 16

Отсюда понятно, что интегральными кривыми поля направлений уравнения (*) будут всевозможные окружности $x^2 + y^2 = R^2 = \text{const}$ с центром в начале координат, а решениями уравнения — функции вида $y(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Последнее легко проверить дифференцированием этих функций:

$$y'(x) = (\pm\sqrt{R^2 - x^2})' = \frac{-2x}{\pm 2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y(x)},$$

или же, как в предыдущем примере, дифференцированием «неявной функции», заданной уравнением $x^2 + y^2(x) \equiv \text{const}$:

$$(x^2 + y^2(x))' = 2x + 2y(x) \cdot y'(x) \equiv 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

что и требовалось. □

В дальнейшем, в гл. IV, мы покажем восходящий к Лейбницу прием решения дифференциальных уравнений из примеров 2–5, снимающий «покрова тайственности» с наших «угадываний».

§ 2.3. Ломаные Эйлера, решения уравнения $y' = f(x)$ и интеграл

Теперь мы покажем, как геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений и метод Эйлера, изложенные в предыдущем параграфе, могут быть приложены к анализу дифференциального уравнения вида

$$y' = f(x): \quad \forall x \in I \quad y'(x) = f(x), \quad (1)$$

где $I \subset D_f$ — промежуток рассмотрения функции $f(x)$. В частности, на этом пути получим и *теорему существования* решений дифференциального уравнения (1) вместе с многочисленными приложениями.

2.3.1. Ломаные Эйлера и интегральные суммы. Рассмотрим поле направлений $M \mapsto L_k(M)$ дифференциального уравнения вида (1). В этом случае угловой коэффициент направления в точке $M(x; y)$ равен $k(M) = f(x)$ и зависит только от абсциссы x точки M . Геометрически это означает, что поле направлений *постоянно вдоль вертикальных прямых* $x = \text{const}$ (иначе изоклины таких уравнений будут составлены из вертикальных прямых). Отсюда получаем, что при параллельных переносах вдоль таких прямых поле направлений будет *инвариантно* (т.е. переходит само в себя), а каждая интегральная кривая переходит в интегральную кривую — это соответствует тому факту, что любые два решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$ (если решения существуют!) отличаются на константу (рис. 17). Отсюда же ясна и *теорема единственности решений* дифференциального уравнения вида (1): если хотя бы одно решение уравнения $y' = f(x)$ ($x \in I$) существует, то с помощью параллельных переносов в направлении оси Oy мы добиваемся того, чтобы перенесенный график прошел через «начальную точку» $M_0(x_0; y_0)$, — очевидно, существует единственный такой перенос.

Теперь попытаемся, используя геометрические соображения, *приблизженно* провести через начальную точку $M_0(x_0; y_0)$ интегральную кривую, т.е. график решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, до точки с абсциссой x . Напомним (см. п. 2.2.2) предложенный Леонардом Эйлером метод построения таких *приближений* n -звенными ломаными $M_0M_1M_2 \dots M_n$. Эти *ломаные Эйлера* при каждом натуральном n получаются следующим образом.

Отрезок от точки x_0 до точки x (мы не исключаем случая $x < x_0$, поэтому не пишем «отрезок $[x_0, x]$ ») разбивается на n равных частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ ($x_m = x_0 + m \frac{x - x_0}{n}$), и, начиная с точки $M_0(x_0; y_0)$, мы последовательно находим точки $M_m = (x_m; y_m)$, $m = 1, 2, \dots, n$, так, чтобы каждый отрезок $M_m M_{m+1}$ шел вдоль поля направлений L в точке M_m (рис. 18). Угловым коэффициентом прямой $M_m M_{m+1}$ должен быть равен $f(x_m)$, ее уравнение записывается в виде $y = y_m + f(x_m)(x - x_m)$, поэтому $y_{m+1} = y_m + f(x_m)(x_{m+1} - x_m)$, и в результате подстановки одной из этих рекуррентных формул в другую (при $m = 1, 2, \dots, n$) мы получим формулу для ординаты последней точки ломаной Эйлера:

$$y_n = y_0 + \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)(x_{m+1} - x_m) = y_0 + S_n(f)_{x_0}^x. \quad (2)$$

Сумма, обозначенная выше $S_n(f)_{x_0}^x$, называется n -й «левой»¹ интегральной суммой для функции f на отрезке ∇ между точками x_0 и x .

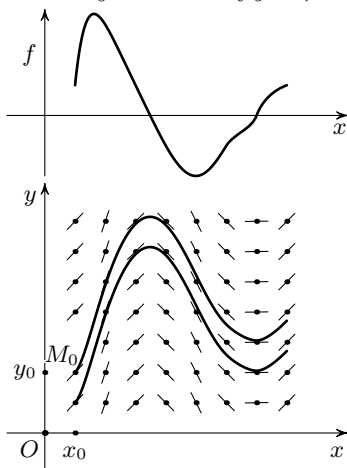


Рис. 17

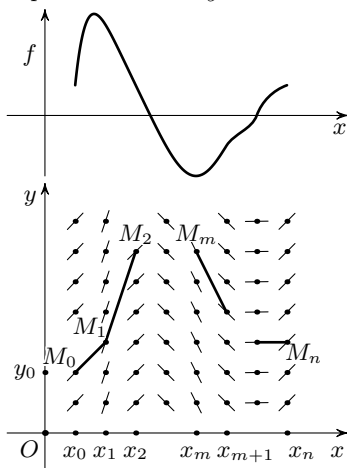


Рис. 18

Мы предполагаем, что ломаные Эйлера в пределе при $n \rightarrow \infty$ дадут нужную интегральную кривую $y = y(t)$, где t принадлежит отрезку ∇ , и, в частности, что значение решения дифференциального уравнения (1)

¹В знак того, что, во-первых, отрезок разбивается на n равных частей, а во-вторых, m -е слагаемое суммы (2) (отсчет начинается с $m = 0$) есть произведение длины m -го отрезка разбиения на значение функции f в его левом конце x_m .

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ в точке x равно

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_0 + S_n(x)),$$

$$S_n(x) = S_n(f)_{x_0}^x = \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)(x_{m+1} - x_m). \quad (3)$$

(Наша уверенность основана на том, что при построении ломаных Эйлера мы «просто» заменяли график решения касательной к нему на все более малых отрезках.)

Другой подход к отысканию решений дифференциального уравнения (1) на промежутке I состоит в том, чтобы для каждого значения $x \in I$ рассмотреть функцию $y(x)$, заданную предельной формулой (3) (если $x = x_0$, то следует считать, что все интегральные суммы равны нулю, так что $y(x_0) = y_0$), и доказать, что эта функция является решением уравнения (1). Мы пойдем вторым путем, но не будем доказывать существование предела (3), а выясним, чему он должен равняться.

2.3.2. Интегральные суммы и квадратуры (площади). Рассмотрим интегральные суммы $S_n(x) = S_n(f)_{x_0}^x$ повнимательнее. Каждое слагаемое $\Delta S_m = f(x_m)(x_{m+1} - x_m)$ суммы $S_n(x)$ имеет простую геометрическую интерпретацию на графике функции $z = f(x)$: если функция f положительна и при этом $x > x_0$, то слагаемое ΔS_m равно площади прямоугольника с отрезком $[x_m, x_{m+1}]$ оси Ox в основании и с левой верхней вершиной $L_m(x_m; f(x_m))$ на графике функции $z = f(x)$ (рис. 19 (А)). Вся же интегральная сумма равна площади изображенной на рис. 19 (А) ступенчатой фигуры, составленной из указанных прямоугольников. Заметим, что если значение $f(x_m)$ отрицательно или же если $x < x_0$, то соответствующее слагаемое по-прежнему равно площади такого же прямоугольника, но взятой со знаком «минус».

Естественно считать, по крайней мере для непрерывных функций f , что при $n \rightarrow \infty$ площадь $S_n(x)$ ступенчатой фигуры стремится к площади «криволинейной трапеции», ограниченной осью Ox , графиком функции $z = f(x)$ и вертикальными прямыми, проведенными через точки $(x_0; 0)$ и $(x; 0)$ оси Ox (рис. 19 (Б)), причем на участках отрицательности (или в случае $x < x_0$) площадь берется со знаком «минус»: для $S_n(x) = S_n(f)_{x_0}^x$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) = S(f)_{x_0}^x. \quad (4)$$

Сопоставляя гипотетические формулы (3) и (4), получим предположительную формулу для решения $y(x)$ дифференциального уравнения (1) на промежутке I , удовлетворяющего начальному условию

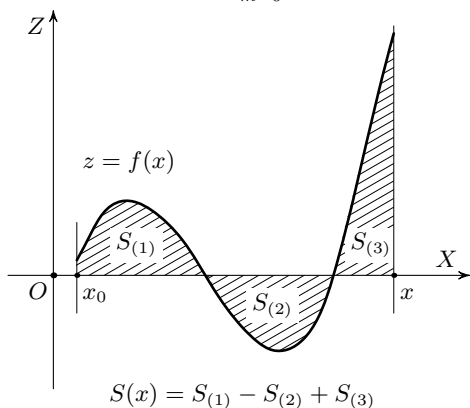
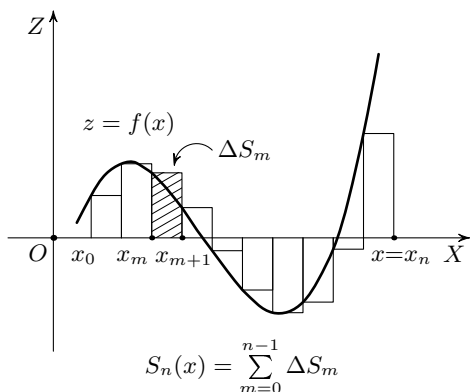


Рис. 19

$y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = y_0 + S(x) = y_0 + S(f)^x_{x_0}.$$

А теперь докажем эту формулу!

2.3.3. Основная теорема анализа: производная переменной площади.

Теорема 1 (основная теорема анализа¹). Если функция f определена и непрерывна на интервале $I = (a, b)$, то функция $y(x) = y_0 + S(x) =$

¹ «Основной теоремой анализа» иногда называют основное свойство первообразных (§ 2.1, следствие 1): если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке I , то любая ее первообразная $\tilde{F}(x)$ отличается от $F(x)$ на аддитивную константу C : $\tilde{F}(x) = F(x) + C$. Как мы вскоре увидим, это утверждение действительно очень важное — особенно «в паре» с приведенной выше «основной теоремой».

$= y_0 + S(f)_{x_0}^x$ является на этом интервале I решением дифференциального уравнения (1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Именно в этом виде, как теорема о производной переменной площади (но без употребления терминологии дифференциальных уравнений), основная теорема анализа была опубликована уже в «Лекциях» Исаака Барроу (1667–1670). Однако точная аналитическая формулировка этой теоремы принадлежит Коши (1820-е гг.). Дело в том, что до XIX в. математики «не владели» точным (в смысле строгости) понятием непрерывности (они как бы «не нуждались» в нем). Определение непрерывности функции в точке сформулировал Коши (1821 г.), а еще раньше его — Больцано (1817 г.), о котором следует сказать особо.

Бернард Больцано (1781–1848) — чешский монах и католический священник, теолог и религиозный философ, логик и очень глубокий математик, предвосхитивший не только разработки Коши (именно он первым доказал «теорему Коши» о промежуточном значении, где впервые применил метод деления отрезка пополам, иногда называемый «методом Больцано»), но и исследования Карла Вейерштрасса (1840–50-е гг.), и теорию множеств Георга Кантора (1870–80-е гг.). Больцано за 30 лет до Вейерштрасса привел пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции, потрясший математиков до такой степени, что еще в 1905 г. крупнейший французский математик Анри Пуанкаре вопрошал: «Как интуиция может обмануть нас до такой степени?», — а его соотечественник Шарль Эрмит тогда же писал, что он «с ужасом отворачивается от внушающей сожаление язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производных» (конечно, его изречение было достаточно ироничным).

Больцано внес значительный вклад в логические основы математики — в теорию действительных чисел, в математическую логику, в обоснование математического анализа (он ранее Коши и Абеля достаточно строго подошел к понятию предела; по его стопам шел Вейерштрасс при введении своей концепции числового континуума).

Доказательство. Так как $S(x_0) = 0$, начальное условие, конечно, выполнено. Докажем, что для любого значения $x \in I$ существует производная $S'(x)$, причем $S'(x) = f(x)$. Будем считать, что $x > x_0$ и $f(x) > 0$. Тогда при любом положительном приращении аргумента Δx мы имеем

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) = S(f)_x^{x+\Delta x} \approx f(x)\Delta x$$

(рис. 20), откуда следует, что $\frac{\Delta S}{\Delta x} \approx f(x)$, причем в силу непрерывности функции f это равенство тем точнее, чем меньше Δx . В этом состоит грубая идея доказательства равенства $S'(x) = f(x)$. Проведем точные рассуждения.

Допустим, $x > x_0$ и $f(x) > 0$. Из непрерывности функции f в точке x следует, что для любого значения $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность Окр_x , что если $x + h \in \text{Окр}_x$, то $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$, или, иначе, $f(x) - \varepsilon < f(x + h) < f(x) + \varepsilon$.

В случае, когда $\Delta x > 0$ и $x + \Delta \in \text{Окр}_x$, отсюда вытекает, что приращение ΔS переменной площади $S(x)$ заключено в пределах $(f(x) -$

$-\varepsilon)\Delta x < \Delta S < (f(x) + \varepsilon)\Delta x$ (если рассматривать такие значения ε , что $f(x) - \varepsilon > 0$, то криволинейная трапеция между вертикалями x и $x + \Delta x$ содержит прямоугольник с основанием $[x, x + \Delta x]$ и высотой $f(x) - \varepsilon$ и содержится в прямоугольнике с тем же основанием и высотой $f(x) + \varepsilon$ — см. рис. 20). Следовательно, поскольку $\Delta x > 0$, после деления всех частей последнего неравенства на Δx получаем оценку

$$f(x) - \varepsilon < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x) + \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\Delta S}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

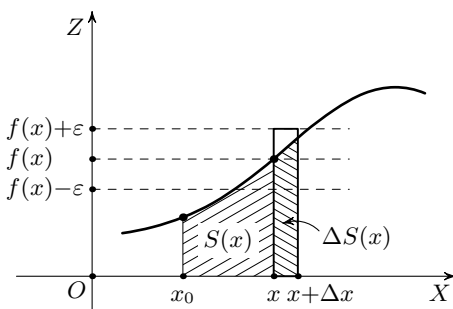


Рис. 20

Эти же неравенства справедливы и в случае, когда $\Delta x < 0$: тогда приращение ΔS отрицательно и если $x + \Delta x \in \text{Окр}_x$, то

$$(f(x) - \varepsilon)|\Delta x| < |\Delta S| < (f(x) + \varepsilon)|\Delta x|$$

(объясните), откуда следует, что

$$f(x) - \varepsilon < \frac{|\Delta S|}{|\Delta x|} = \frac{-\Delta S}{-\Delta x} = \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x) + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{Окр}_x \forall x + \Delta x \in \text{Окр}_x \quad \left| \frac{\Delta S}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon,$$

а это как раз и означает, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. функция (переменная площадь) S дифференцируема в точке x , причем $S'(x) = f(x)$.

Аналогично, но с учетом «знаков площадей», рассматриваются и случаи, когда $f(x) < 0$ или $x < x_0$, — разберите их самостоятельно. $\square$

2.3.4. Теоремы существования решений уравнения $y' = f(x)$ и первообразных. Только что доказанная основная теорема анализа позволяет сформулировать *достаточные* (но отнюдь не необходимые! — см. пример 5 из § 2.1) условия существования первообразных, или, что то же самое, решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

Следствие 1 (теорема существования решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$). *Если функция f непрерывна на интервале или на объединении интервалов D , то дифференциальное уравнение $y' = f(x)$, $x \in D$, имеет решения.*

Следствие 2 (теорема о существовании первообразных). *Любая функция f , непрерывная на интервале или на объединении интервалов D , имеет бесконечно много первообразных на D .*

2.3.5. Площади криволинейных трапеций как приращения первообразных. Выше было показано, что для отыскания первообразной $y(x)$ функции, непрерывной на интервале I , достаточно найти площадь $S(x) = S(f)_{x_0}^x$ криволинейной трапеции, заключенной между осью Ox , графиком функции $z = f(x)$ и вертикалями в точках x_0 и x : если потребовать вдобавок, чтобы выполнялось условие $y(x_0) = y_0$, то нужная первообразная задается формулой

$$y(x) = y_0 + S(x) = y_0 + S(f)_{x_0}^x. \quad (5)$$

Однако, как часто бывает, на практике поступают *наоборот*: не первообразные находят, отыскивая площади (переменные площади), а напротив, площади отыскивают с помощью первообразных. Чтобы научиться это делать, перепишем формулу (5) в виде

$$S(x) = S(f)_{x_0}^x = y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0).$$

Получилось, что площадь рассматриваемой криволинейной трапеции между вертикалями в точках x_0 и x равна приращению первообразной $y(x)$ на отрезке от точки x_0 до точки x :

$$S(f)_{x_0}^x = y(x) - y(x_0) = y(t) \Big|_{x_0}^x.$$

Однако из теоремы о равенстве приращений первообразных (§ 2.1, теорема 2) следует, что вместо первообразной $y(x)$, самым своим определением связанной с площадями, можно взять любую первообразную F функции f на интервале I : все равно

$$S(f)_{x_0}^x = y(t) \Big|_{x_0}^x = F(t) \Big|_{x_0}^x = F(x) - F(x_0),$$

а первообразную F мы можем «угадать» (подобрать, найти) безотносительно к площадям. Положим $x_0 = a$, $x = b$ и сформулируем доказанное утверждение.

Теорема 2 (теорема Барроу (1669–1670)). *Если функция f определена и непрерывна на интервале I , то для любых двух точек $a, b \in I$ площадь $S(f)_a^b$ (с учетом знаков функции f и разности $b - a$) криволи-*

нейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = 0, \quad y = f(x), \quad x = a, \quad x = b,$$

равна приращению (любой) первообразной F функции f на отрезке от a до b :

$$S(f)_a^b = F(t) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (6)$$

Исаак Барроу первым увидел связь *площадей с первообразными*. Ньютон трактовал эту связь с помощью понятия скорости: путь (флюента) есть площадь под графиком скорости (флюксии). Лейбниц от квадратур (площадей) к 1695 г. пришел к первообразным.

Пример 1. (Задача Архимеда: *квадратура параболы*.) Найдем площадь «криволинейного треугольника», ограниченного параболой $y = \alpha x^2$, осью Ox и вертикальной прямой $x = c > 0$ (рис. 21). Ясно, что этот «треугольник» можно считать криволинейной трапецией: для нее $a = 0$, $b = c$, $f(x) = \alpha x^2$. Так как первообразной для f является (например!) функция $F(x) = \frac{1}{3}\alpha x^3$ ($x \in \mathbb{R}$; поскольку нам годится *любая* первообразная, аддитивную константу мы не пишем или полагаем равной нулю), из формулы Барроу (6) получаем

$$S(\alpha x^2)_0^c = \frac{1}{3}\alpha x^3 \Big|_0^c = \frac{1}{3}\alpha c^3 - 0 = \frac{1}{3}\alpha c^3.$$

Результат можно записать также в виде $S = \frac{1}{3} \cdot c \cdot \alpha c^2$ — площадь «параболического треугольника» равна одной трети от площади описанного около него прямоугольника (ограниченного осями координат и прямыми $x = c$, $y = f(c) = \alpha c^2$; см. рис. 21). $\square$

Архимед в III в. до н.э. действительно решил множество задач, сводящихся к рассмотренной квадратуре, однако не увидел общности своих методов. Среди решенных Архимедом задач — отыскание площади *произвольного параболического сегмента*, ограниченного параболой и какой-то ее хордой. К этой задаче мы обратимся в упражнениях и в § 12.2.

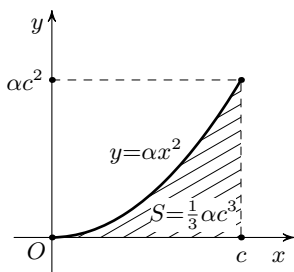


Рис. 21

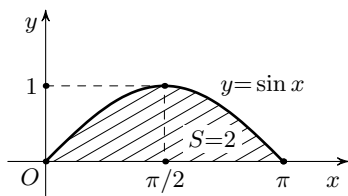


Рис. 22

Пример 2. (Задача Паскаля: *квадратура синусоиды*.) Вычислим площадь «криволинейного двуугольника», ограниченного осью Ox и графиком функции $y = \sin x$ от точки 0 до точки π (рис. 22). Эта «долька синусоиды» может считаться криволинейной трапецией: для нее $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$. В качестве первообразной для функции $\sin x$ возьмем $F(x) = -\cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) и из формулы Барроу (6) получим

$$S(\sin x)_0^\pi = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Любопытный результат. □

Эта задача методом суммирования была решена Паскалем в 1659 г. в более общем случае: для любой части дольки синусоиды, отсекаемой от нее вертикальной прямой. Это был — в терминологии, к которой мы сейчас перейдем, — первый в математике *интеграл от тригонометрической функции*. Само решение, приведенное Паскалем в «Трактате о синусе четверти круга», сыграло выдающуюся роль в истории математического анализа: в 1672 г. благодаря счастливому случаю Лейбниц (в перерывах между своими дипломатическими делами!), захотевший приобщиться к современной ему математике, встретил Гюйгенса, который тотчас дал ему сочинения Паскаля. Впоследствии Лейбниц писал Иоганну Бернулли: «Я случайно напал на одно доказательство Детонвилля [псевдоним Паскаля], очень легкое в своем роде. Но каково же было мое изумление, когда я увидел, что у Паскаля точно нарочно были закрыты глаза: я тотчас же заметил, что его теорема [на самом деле лемма, приводящая к указанной квадратуре] может прилагаться вообще ко всем кривым» [у Паскаля фигурировала только окружность]. Таким образом, подобно Архимеду, Паскаль в частной задаче не увидел общего метода. К деятельности Паскаля мы вернемся ниже.

2.3.6. Интегральные суммы и интеграл. Вернемся к рассмотрению интегральных сумм для функции f на отрезке от a до b :

$$S_n = S_n(f)_a^b = \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m) \Delta x_m = \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m) (x_{m+1} - x_m). \quad (7)$$

Здесь $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m$, $x_0 = a$, $x_n = b$, а промежуточные точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ делят отрезок между точками a и b (допускается, что $a > b$) на n равных частей: $x_m = a + \frac{b-a}{n}$. Мы придали интегральным суммам (7) геометрический смысл с помощью графика $z = f(x)$, рассматривая отдельные слагаемые $\Delta S_m = f(x_m) \Delta x_m = f(x_m) (x_{m+1} - x_m)$ суммы S_n как площади (со знаком) соответствующих вписанных в криволинейную трапецию прямоугольников. Однако еще у древнегреческих математиков (Евдокса, Архимеда), а потом у Кавальери, Кеплера и других ученых «доньютоновой» эпохи появлялись интегральные суммы, слагаемые которых были не площадями, а объемами, массами и т. д. И хотя все равно суммы S_n можно интерпретировать как площади ступенчатых фигур, имеет смысл ввести предел интегральных сумм безотносительно к площадям.

Определение 1. Для функции f , непрерывной на отрезке от a до b , предел ее интегральных сумм (7) на этом отрезке при $n \rightarrow \infty$ называется *интегралом* от функции f от a до b (или на отрезке от a до b) и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)_a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m) \Delta x_m.$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования* (при $a = b$ интеграл полагают равным нулю), фигурирующая в записи *подынтегрального выражения* $f(x)dx$ буква x называется *переменной интегрирования*; вместо x можно выбрать любую букву — интеграл (получающееся в пределе число) при этом не изменится:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\xi) d\xi$$

(однако не следует употреблять те же буквы, которые «участвуют» в записи пределов интегрирования!¹).

Термины *интеграл*, *интегрирование* применил в 1690 г. Якоб Бернулли, производя их, скорее всего, от лат. integer — «целый», «весь» (по другому предположению Я. Бернулли исходил из глагола integro — «приводить в прежнее состояние», «восстанавливать»). До того времени использовали терминологию Кавальери: «совокупность всех неделимых» (см. следующий параграф) или просто «все линии», «сумма линий» — лат. «omnes lineae», «summa lineae».

В соответствии с этим для самого интеграла использовали (например, Валлис, а вслед за ним и Лейбниц) сокращение «omn». С 1675 г. Лейбниц ради еще большей краткости стал писать начальную букву слова Summa, принятое в то время стилизованное написание которой было сходно с современным знаком интеграла. Первоначально Лейбниц писал $\int y$, но уже через месяц ввел в запись и независимую переменную (переменную интегрирования): $\int y dx$. Почему именно d — часто объясняют, что это замена значка Δ для приращения переменной x , однако обозначения Δx , Δy для приращений были введены только в 1755 г. Леонардом Эйлером. Суть обозначений Лейбница будет разъяснена в гл. VI (§ 6.2).

Современная запись пределов интегрирования появилась в «Аналитической теории тепла» Фурье (1822 г.), заменив эйлерову запись $\int y dx \left[\begin{smallmatrix} \text{ab } x=a \\ \text{ad } x=b \end{smallmatrix} \right]$ (на латыни записано: «от $x = a$ до $x = b$ »). До Эйлера пределы записывались словами.

Независимо от понятия площади может быть доказано следующее утверждение, которое мы примем без доказательства.

Теорема 3 (Коши—Римана). *Для любой функции f , непрерывной на отрезке от a до b , существует предел последовательности ее ин-*

¹Впрочем, физики довольно часто используют одну и ту же букву в одном и том же выражении, обозначая ею разные величины, — их это ничуть не смущает.

тегральных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)_a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m) \Delta x_m.$$

Коши, который владел точным понятием непрерывности, первым заменил геометрическую трактовку интеграла *аналитической* и считал, что доказал приведенную теорему (1823 г.). Однако он не заметил просчета — необходимости довольно тонкого свойства функций, непрерывных на отрезке. Этот пробел отметил только Риман, который рассматривал более общие критерии интегрируемости, чем непрерывность (1853 г.). Нужное же Коши свойство равномерной непрерывности доказал только в 1870 г. немецкий математик Генрих Эдуард Гейне (1821–1881), который дал и определение соответствующего понятия.

Именами Коши и Римана называется некоторое *условие интегрируемости* дифференциальных уравнений, которое в действительности гораздо раньше вывели Эйлер и Д'Аламбер.

Эта теорема позволяет обращаться с интегралами от непрерывных функций безотносительно к геометрическому понятию площади. Однако если понятие площади введено так, что можно оперировать и с площадями криволинейных трапеций, то указанный предел равен соответствующей площади, так что *площадь записывается через интеграл*:

$$\int_a^b f(x) dx = S(f)_a^b. \quad (8)$$

Сопоставляя формулы (8) и (6), получаем *формулу Барроу*, которую обычно называют *формулой Ньютона—Лейбница* (несмотря на то что ни тот, ни другой не имеют к ее открытию и опубликованию — правда, в более «геометрических» обозначениях — никакого отношения, да и никогда не претендовали «на нее»!): *если F — любая первообразная для непрерывной функции f на отрезке от a до b , то*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (9)$$

Формулу Барроу можно вывести непосредственно из аналитического определения интеграла, если независимо от площадей сформулировать и доказать *основную теорему анализа*.

Теорема 4 (Коши—Муаньо (1823–1844) о производной интеграла с переменным верхним пределом — «основная теорема анализа»). *Если функция f непрерывна на интервале I , то при любом значении $a \in I$ производная интеграла от функции f с нижним пределом a и пере-*

менным верхним пределом $x \in I$ равна подынтегральной функции $f(x)$:

$$\left(\int_a^x f(u) du \right)'_x = f(x). \quad (10)$$

И наоборот, эта теорема сразу следует из формулы Барроу (9), если положить в ней $b = x$ и взять затем производную (от левой и правой частей). Формулу Барроу можно интерпретировать и так: *если функция F имеет производную, непрерывную на отрезке от a до b , то*

$$\int_a^x F'(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (11)$$

Огюстен Луи Коши (1789–1837) — крупнейший французский математик первой половины XIX в., основатель многих разделов современной математики. Окончил наполеоновскую Политехническую школу, а после возвращения Бурбонов до революции 1830 г. был ее профессором. Будучи ультрароялистом и клерикалом (в отличие от оппозиционеров Д'Аламбера и Якоби, революционеров Фурье, Монжа, Галуа и «всеядного» Лапласа), Коши после революции 1830 г. отправился вместе с Бурбонами в изгнание — в Турин и Прагу. Но и там он не переставал заниматься математикой. Необычайно разносторонний и работоспособный, он опубликовал более 800 работ; бывали периоды, когда Коши каждую неделю представлял в Парижскую академию новый мемуар.

Кроме основополагающей деятельности Коши по «наведению строгости и порядка» в математическом анализе, к главнейшим его заслугам относится разработка *теории функций комплексного переменного*. Работы Коши в этой области продолжил Риман, который «приложил руку» и к математическому анализу, предложив свой подход к интегрируемости функций.

Муаньо — французский математик, аббат, ученик Коши, впервые опубликовавший предыдущую теорему в изданных им в 1840–1844 гг. «Лекциях по дифференциальному и интегральному исчислению (по Коши)».

Операцию вычисления интегралов называют интегрированием, и главный смысл одного из величайших в истории математики открытий — изобретения математического анализа Ньютоном и Лейбницем, а также их предшественниками, современниками и последователями, — состоит в том, что они выявили взаимную обратность операций дифференцирования и интегрирования: именно этот факт отражают формулы (10) и (11).

§ 2.4. Геометрические приложения интеграла

2.4.1. Основная идея: применение формулы Барроу. В этом параграфе записываются и применяются разнообразные формулы, по которым *меры* (площади, объемы, а в упражнениях также и длины) различных геометрических фигур могут быть вычислены как *интегралы*

от некоторых вспомогательных функций. При этом введение (определение) самих мер (площадей, объемов) *считается известным* из соответствующих разделов геометрии, а все рассматриваемые фигуры предполагаются «достаточно хорошими», т. е. такими, что вопрос об их «измеримости» (в смысле существования их площадей, объемов, и т. д.) вовсе не обсуждается (в конкретных примерах измеримость будет очевидна).

Рассматриваемые *интегральные формулы* могут выводиться по-разному, в соответствии с тем, как интерпретируется само понятие интеграла. Ранее были даны четыре «трактовки» интеграла:

- интеграл как предел интегральных сумм (по определению),
- интеграл как (знакопеременная) площадь криволинейной трапеции,
- интеграл как приращение первообразной (формула Барроу),
- интеграл от производной как приращение функции, или «вторая» формула Барроу: *если функция F имеет производную, непрерывную на отрезке от a до b , то*

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \int_a^b F'(x) dx. \quad (1)$$

Эта интегральная формула позволяет восстановить функцию по ее производной; ее мы и положим в основу интегральных формул для вычисления площадей и объемов плоских и пространственных фигур. Для этого сначала указанные меры мы проинтерпретируем как *функции $y = y(x)$ одной переменной*, затем найдем (делая обычные интуитивно ясные допущения) *производные* этих вспомогательных функций, т. е. фактически запишем дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)$, и, наконец, получим искомые *интегральные формулы* из интегральной формулы Барроу (1). Эти совсем общие соображения станут вполне ясными при рассмотрении первого же примера.

Заметим, что в данном случае дифференциальные уравнения будут описывать *не процесс* изменения меры (площади, объема) во времени, а зависимость переменной меры от параметра — некоей вспомогательной координаты, привязанной к рассматриваемой геометрической фигуре. И хотя такую координату можно условно считать *временем*, для результативности применения информации о производной искомой функции, т. е. интегрирования получающегося дифференциального уравнения, это роли не играет.

2.4.2. Площади плоских фигур. Итак, покажем, как работает данный подход при выводе *интегральной формулы для площади плос-*

кой фигуры. Пусть Φ — «хорошая»¹ ограниченная фигура на плоскости. Выберем на этой плоскости произвольным образом координатную ось Ox и обозначим через $S(x)$ площадь той части фигуры Φ , которая лежит *левее* (относительно положительного направления оси Ox) прямой L_x , проведенной через точку x перпендикулярно оси (рис. 23).

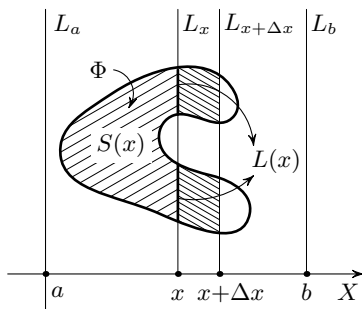


Рис. 23

Считая, что пересечение прямой L_x с данной фигурой Φ может состоять самое большее из конечного числа отрезков (или отдельных точек), обозначим их суммарную длину через $L(x)$. Тогда *естественно предположить*, что *приращение переменной площади* $S(x)$ на промежутке от x до $x + \Delta x$, т. е. площадь $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ части фигуры Φ , заключенной между прямыми L_x и $L_{x+\Delta x}$, примерно равно

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) \approx L(x) \cdot \Delta x,$$

причем в случае, если функция $L(x)$ непрерывна, это равенство будет тем точнее, чем меньше Δx , так что после деления на Δx при $\Delta x \rightarrow 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} S'(x) = L(x). \quad (2)$$

Обратите внимание на это рассуждение; в следующей главе (в § 5.1) практически то же самое рассуждение будет проведено при выводе линейных дифференциальных уравнений для роста/убывания. Отметим, что во многих приложениях математики к практическим задачам на каком-то этапе подобные правдоподобные рассуждения неизбежны.

Поскольку рассматриваемая фигура Φ ограничена (что можно трактовать, например, так, что она целиком лежит внутри некоторого круга), она заключена между некоторыми перпендикулярными оси Ox прямыми L_a и L_b , где $a < b$. Но тогда для этих значений a и b мы имеем

¹Например, ограниченная конечным числом дуг графиков дифференцируемых функций.

$S(a) = 0$, $S(b) = S[\Phi]$ — площадь всей фигуры Φ , поэтому $S[\Phi] = S(b) - S(a)$, что в силу формулы Барроу (1) и в соответствии с формулой (2) $S'(x) = L(x)$ в предположении непрерывности «длины переменного сечения» — функции $L(x)$ — и дает интегральную формулу для площади произвольной плоской фигуры Φ :

$$S[\Phi] = S(b) - S(a) = \int_a^b L(x) dx \quad (3)$$

(площадь равна интегралу от длин «перпендикулярных» сечений фигуры).

Конечно, именно в таком виде «на практике» данная формула фактически не используется. Нам она нужна для дальнейших, шаг за шагом, продвижений в геометрических интегральных формулах. С другой стороны, если при нашем выборе оси Ox получилось бы, что фигура Φ есть просто криволинейная трапеция $\{a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$ для неотрицательной функции $f(x) = L(x)$, то формула (3) ничем не отличалась бы от обычной формулы Барроу. Реальным применением формулы (3) является вычисление площадей фигур, заключенных между двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$ и двумя непересекающимися графиками непрерывных функций $f_1(x) \leq f_2(x)$, типа изображенной на рис. 24: тогда $L(x) = f_2(x) - f_1(x)$ и площадь такой фигуры равна

$$S[\Phi] = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx, \quad (4)$$

независимо от знаков функций $f_{1,2}$. (Впрочем, формулу (4) нетрудно вывести и непосредственно, исходя из геометрического смысла интегралов от неотрицательных функций: достаточно перенести фигуру вдоль оси Oy так, чтобы она лежала выше оси Ox .)

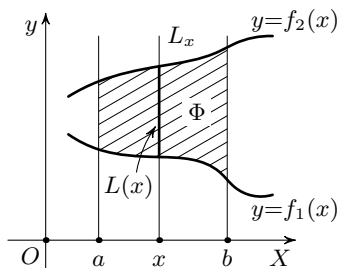


Рис. 24

Приступим теперь к интегральным формулам для объемов.

2.4.3. Объем общего прямого цилиндра.

Определение 1. Пусть Φ — плоская («хорошая» ограниченная) фигура в пространстве. *Общим прямым цилиндром* C_Φ с основанием Φ и высотой h называется объединение отрезков MM' длины h , проведенных через всевозможные точки $M \in \Phi$ перпендикулярно плоскости фигуры Φ по одну сторону от нее¹.

Выведем формулу для объема такого цилиндра. Для этого в плоскости основания Φ выберем произвольную координатную ось Ox и обозначим через $V(x)$ объем той части цилиндра C_Φ , которая лежит *левее* (относительно положительного направления оси Ox) плоскости α_x , проведенной через точку x оси Ox перпендикулярно ей (рис. 25). Найдем производную функции $V(x)$.

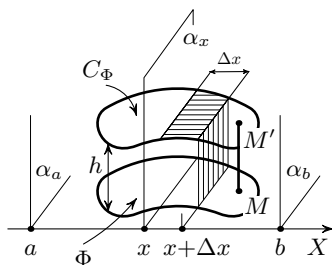


Рис. 25

Как и выше, допустим, что пересечение плоскости α_x с основанием Φ состоит не более чем из конечного числа отрезков, суммарная длина которых равна $L(x)$. Для простоты будем считать, как показано на рис. 25, что получается в точности один такой отрезок (длины $L(x)$). Тогда приращение переменного объема $V(x)$ на промежутке от x до $x + \Delta x$ есть объем $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$ части цилиндра C_Φ , заключенной между плоскостями α_x и $\alpha_{x+\Delta x}$, которую можно аппроксимировать (приблизить, заменить) прямоугольным параллелепипедом, в основании которого лежит прямоугольник с измерениями $L(x)$ и h , по которому рассматриваемый цилиндр пересекается с плоскостью α_x , а высотой является Δx (если $\Delta x < 0$, то приращение объема ΔV будет отрицательным, и этот случай приведет к совершенно тем же выводам, что и ниже). Следовательно, мы можем приближенно записать

$$\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x) \approx L(x)h \cdot \Delta x,$$

причем (в предположении непрерывности функции $L(x)$) это равенство тем точнее, чем меньше $|\Delta x|$, так что после деления на Δx при $\Delta x \rightarrow 0$

¹Получится «подошва» с основанием Φ высоты h , как показано на рис. 25.

должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} V'(x) = hL(x).$$

Выбрав значения $a < b$ так, чтобы общий цилиндр C_Φ был заключен между плоскостями α_a и α_b , применим к последнему соотношению формулу Барроу (1) вкупе с уже доказанной интегральной формулой (3) для площади плоской фигуры Φ — в результате получим *формулу для объема общего прямого цилиндра* C_Φ :

$$V[C_\Phi] = V(b) - V(a) = \int_a^b [hL(x)] dx = h \int_a^b L(x) dx = h \cdot C[\Phi] = C_\Phi \cdot h, \quad (5)$$

т.е. *объем общего прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту*.

Хотя для нас эта формула также является «промежуточной» (подготовительной к следующей), отметим два ее частных случая.

1. *Объем произвольной прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту: $V = SH$.*

2. *Объем прямого кругового цилиндра равен произведению площади его основания на высоту: $V = \pi R^2 H$.*

2.4.4. Интегральная формула для объемов (интеграл площадей сечений). Пусть $\mathbb{B}$ — произвольная «хорошая» ограниченная пространственная фигура¹. Выведем *интегральную формулу* для ее объема.

Как и раньше, выберем в пространстве произвольную координатную ось Ox и обозначим через $V(x)$ объем той части фигуры $\mathbb{B}$, которая лежит *левее* (относительно положительного направления оси Ox) плоскости α_x , проведенной через точку x оси Ox перпендикулярно ей (рис. 26). Далее вычислим производную функции $V(x)$.

Обозначим плоскую фигуру, получающуюся при пересечении плоскости α_x с данной пространственной фигурой $\mathbb{B}$, через Φ_x . Будем считать, что каждая из этих плоских фигур Φ_x является хорошей и имеет площадь $S[\Phi_x] = S(x)$. Приращение переменного объема $V(x)$ на промежутке от x до $x + \Delta x$ есть объем $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$ «отрезка» (части) $\Delta \mathbb{B}$ фигуры $\mathbb{B}$, заключенного между плоскостями α_x и $\alpha_{x+\Delta x}$, т.е. между сечениями Φ_x и $\Phi_{x+\Delta x}$. *Предполагая, что пространственная фигура $\mathbb{B}$ «настолько хорошая», что при близких значениях x сечения Φ_x также близки* (в интуитивно ясном смысле), заменим рассматриваемый отрезок $\Delta \mathbb{B}$ на близкий к нему общий прямой цилиндр C_x

¹Или *геометрическое тело* — см. учебники по геометрии.

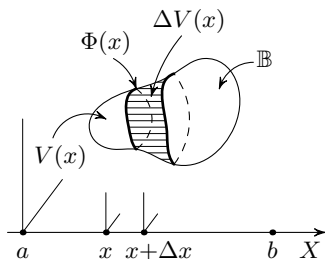


Рис. 26

с основанием Φ_x и высотой Δx . Тогда для приращения $\Delta V(x)$ переменного объема можно записать приближенную формулу

$$\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x) \approx V[C_x] = S(x) \cdot \Delta x$$

(здесь мы применили уже доказанную формулу (5) для объема общего прямого цилиндра; очевидно, та же приближенная формула будет справедлива и в случае $\Delta x < 0$, ибо тогда и $\Delta V(x) < 0$). И опять-таки, в предположении непрерывности функции $S(x)$ это равенство будет *тем точнее*, чем меньше $|\Delta x|$, так что после деления на Δx при $\Delta x \rightarrow 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} V'(x) = S(x).$$

Наконец, выбирая значения $a < b$ так, чтобы пространственная фигура $\mathbb{B}$ целиком была заключена между плоскостями α_a и α_b , из формулы Барроу (1) мы и получаем *интегральную формулу для объема произвольной* («достаточно хорошей»!) *пространственной фигуры*,

$$V[\mathbb{B}] = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x) dx, \quad (6)$$

т.е. *объем пространственной фигуры равен интегралу от площадей «перпендикулярных» сечений фигуры.*

Выведенную формулу иногда кратко называют *формулой интеграла площадей* или просто *интегралом площадей*. Рассмотрим два её важных частных случая.

2.4.5. Объем общего конуса.

Определение 2. Пусть Φ — плоская («хорошая» ограниченная) фигура в пространстве и P — не лежащая в плоскости фигуры Φ точка. *Общим конусом* K_Φ с основанием Φ и вершиной P называется объединение отрезков PM , соединяющих вершину P со всевозможными

точками M основания Φ . При этом длина h перпендикуляра PH , опущенного из вершины конуса на плоскость его основания, называется *высотой* общего конуса¹ (рис. 27).

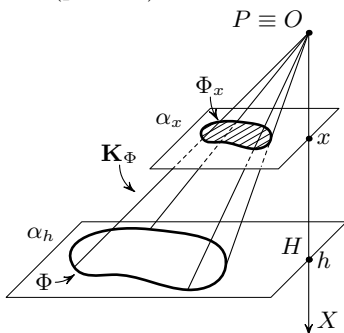


Рис. 27

Заметим сразу, что *частными случаями* общего конуса являются как произвольные *пирамиды*, так и *круговые конусы* (например, *прямые круговые конусы*).

Используя интеграл площадей, найдем формулу для объема общего конуса. В качестве координатной оси Ox выберем содержащую высоту конуса K_Φ прямую PH , начало координат возьмем в вершине конуса — в точке P , — а ось направим к плоскости основания (к точке H). Тогда каждое из нужных сечений конуса $\Phi_x = K_\Phi \cap \alpha_x$ получается из основания конуса Φ *гомотетией* с коэффициентом $k = \frac{x}{h}$ (объясните!), поэтому площадь сечения равна

$$S(x) = S[\Phi_x] = S[\Phi] \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 = \frac{S_\Phi}{h^2} x^2.$$

Очевидно, пределы интегрирования в интеграле площадей (6) в данном случае равны $a = 0$, $b = h$, поэтому находим *объем конуса* как интеграл:

$$V[K_\Phi] = \frac{S_\Phi}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S_\Phi}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{S_\Phi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} S_\Phi h, \quad (7)$$

т. е. объем общего конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.

Для вышеупомянутых частных случаев общего конуса получаем следующие утверждения.

¹Заметим, что и сам отрезок PH , как это принято в геометрии, также называется *высотой конуса*.

1. [Формула Демокрита—Евдокса.] *Объем произвольной пирамиды равен трети произведения площади ее основания на высоту: $V = \frac{1}{3}SH$.*
2. *Объем прямого кругового конуса равен трети произведения площади его основания на высоту: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.*

Демокрит из города Абдеры (ок. 460–370 гг. до н.э.) — выдающийся философ, материалист, приверженец атомистики. Его материализм вызывал яростную ненависть у великого Платона, который сжигал его сочинения. По словам же Маркса и Энгельса, Демокрит был «первым энциклопедическим умом среди греков». Опираясь на свои атомистические воззрения, Демокрит считал пространственные тела составленными из «параллельных пластинок толщиной в один атом», тем самым отчасти предвосхитив весьма плодотворные воззрения Кавальери (XVII в.; см. далее). Так или иначе, не приводя никаких доказательств, Демокрит сформулировал оба указанных выше утверждения.

Лишь полвека спустя вполне строгое их доказательство дал Евдокс Книдский (ок. 408–355 гг. до н.э.), математик и астроном, противник мистики и астрологии. Архимед (о нем также см. далее) указывал, что для Евдокса было важно, что он заранее знал указанный Демокритом ответ!

2.4.6. Объем тела вращения. Пусть $r = r(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ неотрицательная функция, T — соответствующая криволинейная трапеция:

$$T = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq r(x)\}.$$

Рассмотрим *тело вращения* $\mathbb{B}_T$, т.е. пространственную фигуру, которая получается при вращении криволинейной трапеции T около оси Ox . Если кому-то не нравится, что мы в этом «определении» используем кинематическое понятие «вращения», то данное определение фигуры (тела) вращения $\mathbb{B}_T$ можно заменить на «чисто статическое» определение, потребовав, чтобы пересечение фигуры $\mathbb{B}_T$ с каждой проведенной через точку x перпендикулярно оси Ox плоскостью α_x являлось *кругом радиуса $r = r(x)$ с центром на оси Ox* (рис. 28). Запишем *общую интегральную формулу* для объема указанного тела вращения.

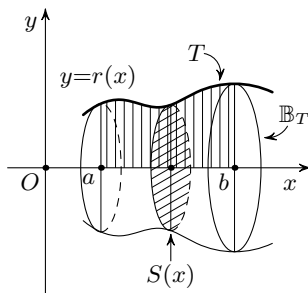


Рис. 28

В данном случае каждое сечение Φ_x фигуры $\mathbb{B}_T$ есть круг радиуса $r = r(x)$, площади сечений соответственно равны $S(x) = \pi r^2 = \pi r^2(x)$, поэтому из интеграла площадей (6) сразу же получается искомая формула:

$$V[\mathbb{B}_T] = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi r^2(x) dx = \pi \int_a^b r^2(x) dx. \quad (8)$$

Вот и вся задача! Теперь мы применим эту формулу к единственному, но архиважному частному случаю.

2.4.7. Объем шара. Шар B_R радиуса R с центром O можно рассматривать как тело вращения около оси Ox полуокружности

$$\{(x; y) \mid -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

(см. рис. 29). Применяя к этому случаю формулу (8), находим¹

$$V(B_R) = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3 \right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (9)$$

— первая формула Архимеда!

2.4.8. Замечание о площади сферы. А теперь рассмотрим объем шара радиуса R как функцию от R :

$$V(R) = V(B_R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Очевидно, приращение этой функции $\Delta V(R) = V(R + \Delta R) - V(R)$ равно объему (со знаком «минус», если $\Delta R < 0$) шарового слоя «толщины» $|\Delta R|$, т. е. части пространства, заключенной между двумя концентрическими сферами радиусов R и $R + \Delta R$ (рис. 30). Заметим, что при малом приращении радиуса ΔR объем этого слоя *примерно равен площади поверхности шара B_R* (т. е. площади $S(R)$ сферы S_R радиуса R), *умноженной на толщину слоя ΔR ,*

$$\Delta V(R) = V(R + \Delta R) - V(R) \approx S(R) \cdot \Delta R,$$

причем (в силу непрерывности функции $S(R)$!) это равенство будет тем точнее, чем меньше ΔR , так что после деления на ΔR при $\Delta R \rightarrow 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta V(R)}{\Delta R} \stackrel{\text{def}}{=} V'(R) = S(R).$$

¹Вообще-то, это вычисление из тех, которые раз в жизни каждый должен проделать сам!

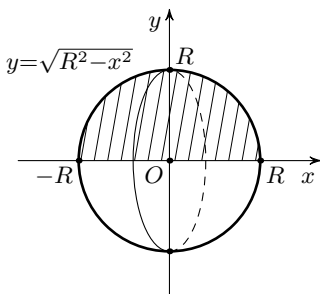


Рис. 29

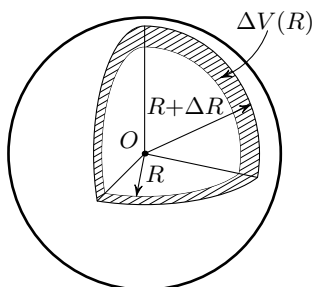


Рис. 30

Однако $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому

$$S(R) = V'(R) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2 \quad (10)$$

— вот и вторая формула Архимеда!

Архимед из Сиракуз (ок. 287–212 гг. до н. э.) — величайший математик, физик и механик эпохи эллинизма. Несмотря на важнейшие открытия и практические изобретения в механике и физике, Архимед выше всего ставил свои результаты из сочинения «О шаре и цилиндре (письмо к Досифею)» (Досифей был одним из учеников Евклида), которые формулировались так: *если около шара описать цилиндр, то объем шара будет равен $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, а площадь его поверхности — $\frac{2}{3}$ полной поверхности цилиндра*. Архимед выразил желание, чтобы чертеж к этой теореме был изображен на его гробнице, что и было исполнено римским военачальником Марцеллом.

Хотя Архимед далеко превзошел Евдокса в применяемых им методах отыскания площадей и объемов, они не отличались универсальностью (однако совсем недавно именно они излагались в школьных учебниках по стереометрии!).

2.4.9. Геометрические меры и интегральные суммы. Принцип Кавальери. Заметим, что все найденные выше формулы, как общие формулы (3) и (6)–(8), так и «частные» формулы (9)–(10), можно получить и с помощью интегральных сумм. Например, чтобы найти объем произвольной (но «хорошей») пространственной фигуры (тела) $\mathbb{B}$, можно разбить её на n кусочков (слоев) плоскостями α_{x_i} , где точки x_i делят отрезок $[a, b]$ на n равных частей (рис. 31). Объем i -го слоя приближенно равен $\Delta V_i = S(x_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, а через $S(x)$, как и раньше, обозначена площадь сечения $\mathbb{B} \cap \alpha_x$. Тогда для объема V фигуры $\mathbb{B}$ можно записать приближенную формулу

$$V \approx \sum_i S(x_i)\Delta x_i,$$

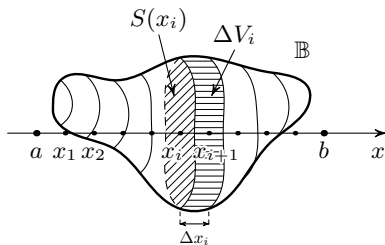


Рис. 31

которая в пределе при $n \rightarrow \infty$ должна дать точную формулу, а поскольку в правой части формулы стоит в точности интегральная сумма для функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$, то получится интеграл площадей (6).

Интегральные суммы составлял и оценивал еще Архимед, однако выписывая для каждой частной решаемой им задачи свои суммы. Следующее продвижение в методах отыскания площадей и объемов было сделано только спустя 18 веков Кеплером при формулировке второго закона (напомним, что в нем идет речь о площадях эллиптических секторов, описываемых радиусами-векторами планет) и выводе формул для объемов разнообразных тел вращения. Однако его рассуждения были также весьма частными и довольно далекими от введения общего понятия интеграла.

Иоганн Кеплер (1571–1630) — немецкий астроном и математик. С 1601 г. — помощник знаменитого датского астронома Тихо Браге (1546–1601), а затем его преемник в качестве «императорского астронома и математика» в Праге. Обработывая результаты наблюдений Браге за движениями планет, открыл знаменитые законы: первый — о движении планет по эллипсам (1609, книга «Новая астрономия»), второй — о постоянстве секториальных скоростей при движении планет (1618, «Краткая Коперникова астрономия»), третий — о пропорциональности квадратов времен обращения планет кубам их средних расстояний от Солнца (1619, «Мировая гармония»); в этом грандиозном трактате содержится также масса фантастических идей Кеплера — о музыке небесных движений, о божественном происхождении геометрии и т. д.). Однако крупнейший вклад в математику был сделан Кеплером в австрийском городе Линце, когда в 1612 г. выдался урожайный для винограда сезон. По этому поводу Кеплер придумал более общий, чем у Архимеда, метод вычисления объемов и в 1615 г. опубликовал его вместе с практическими приложениями в замечательном труде «Новая стереометрия винных бочек, в первую очередь австрийских, имеющих наивыгоднейшую форму». В нем он вычислил объемы 87 новых (по сравнению с известными еще греческим математикам) тел, а заодно доказал, что «австрийская бочка» при данной затрате материала обладает наибольшей вместимостью! Тем самым Кеплер «пробудил» геометрию от многовековой спячки, хотя и вызвал гнев у «защитников Архимеда».

Гораздо ближе подошел к интегральному исчислению Кавальери. Он рассматривал достаточно общие плоские и пространственные фигу-

ры, полагая их площади (объемы) некими «совокупностями неделимых сечений» — параллельных отрезков в случае плоских фигур, параллельных плоских сечений для пространственных фигур. Сам он весьма неясно излагал, что такое «неделимые», однако пришел к вполне верным выводам, которые в современных обозначениях могут быть записаны как интегральные формулы (3) и (6). Кавальери эти результаты формулировал в виде неких «принципов»; в упрощенном виде самый знаменитый принцип Кавальери гласит: *если две пространственные фигуры таковы, что их сечения плоскостями, параллельными «неподвижной плоскости», имеют равные площади, то сами фигуры имеют равные объемы.*

Разумеется, в интегральном исчислении принцип Кавальери является тривиальным следствием интеграла площадей (7). Однако суть как раз в том, что Кавальери был еще далек не только от интегрального исчисления, но даже *фактически не рассматривал* и интегральные суммы!

Бонавентура Кавальери (1598–1647) — итальянский математик. Его учитель Бенедетто Кастелли (1577–1644) отметил выдающиеся способности ученика и познакомил его со своим учителем — Галилео Галилеем. Кавальери и Галилей стали поддерживать активную переписку на почве общих интересов к геометрии, причем оба они намеревались издать работу об упомянутых «неделимых величинах». В 1629 г. Галилей поддержал кандидатуру Кавальери, к тому времени уже закончившего свой труд по геометрии неделимых, на занятие кафедры в университете г. Болонья, характеризуя его как «соперника Архимеда». К тому же Кавальери пользовался покровительством римских пап того времени Урбана VIII и Иннокентия X — чтобы обеспечить ученого материально, его назначили еще и настоятелем монастыря. Как и Кеплер, Кавальери заодно был и астрологом.

Несмотря на громадный шаг вперед к интегральному исчислению, сделанный Кавальери (разработка «геометрии неделимых»), до самого исчисления было еще довольно далеко. Среди математиков, наиболее способствовавших прогрессу в этой области, следует назвать, в первую очередь, знаменитых французских математиков Пьера Ферма (1601–1665) и Блеза Паскаля (1623–1662), а также Исаака Барроу (1630–1677) — непосредственного предшественника Ньютона и Лейбница (обо всех этих ученых мы уже упоминали).

Пример 1. Покажем, как с помощью *принципа Кавальери* выводится архимедова формула для объема шара или, что в данном случае удобнее, *полушара* радиуса R . Рассмотрим цилиндр с высотой R и радиусом основания тоже R . Во-первых, впишем в него конус с вершиной в центре O верхнего основания цилиндра и с основанием, совпадающим с нижним основанием цилиндра (рис. 32). Согласно формуле «Демокрита—Евдокса» объем конуса будет равен трети объема цилиндра: $V_K = \frac{1}{3}V_{\text{Ц}}$.

Во-вторых, рассмотрим «чашу», получающуюся, если из цилиндра вырезать полушар с основанием, совпадающим с верхним основани-

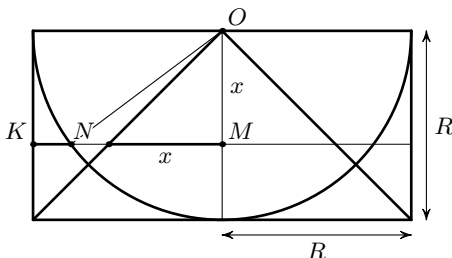


Рис. 32

ем цилиндра, а также ее сечения плоскостями α_x , параллельными основаниям цилиндра и отстоящими от верхнего основания на расстояние x (см. рис. 32). Каждое такое сечение будет кольцом, заключенным между двумя концентрическими окружностями радиусов $MK = R$ и $MN = \sqrt{ON^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$, так что его площадь равна

$$S_{\text{ч}}(x) = \pi R^2 - \pi(R^2 - x^2) = \pi x^2,$$

т.е. такая же, как площадь $S_K(x)$ соответствующего сечения конуса (оно-то является просто кругом радиуса x).

Согласно принципу Кавальери объемы конуса и чаши равны, а учитывая, что объем чаши равен разности объемов цилиндра и полушара, получаем

$$V_{\text{ч}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{пш}} = V_K = \frac{1}{3}V_{\text{ц}} \Rightarrow V_{\text{пш}} = \frac{2}{3}V_{\text{ц}}$$

— это и есть формула Архимеда. □

Упражнения, задачи и задания к гл. II

Общее замечание. Для отыскания первообразных, как и для отыскания производных, используют *формулы* и *правила* интегрирования, которые получаются из формул и правил дифференцирования. Мы *постепенно* будем знакомиться с этими формулами (интегрирования функций того или иного «стандартного» типа) и правилами (по которым отыскиваются первообразные более сложных функций, получающихся из стандартных). На первоначальном этапе для интегрирования (отыскания первообразных, или решения дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$) нужно «*смелее догадываться*», какой *вид* должны иметь искомые первообразные, а затем *проверять догадки дифференцированием*. Слово «*найти*» в условиях упражнений пока означает «*указать*», не подразумевая использования каких-то правил. Начнем с «наглядного интегрирования».

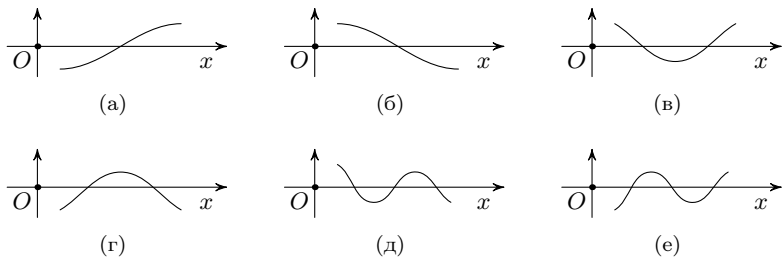


Рис. 33

1. По графикам производных функций $y = F'(x) = f(x)$, приведенным на рис. 33 (а–е), восстановите примерный вид графиков самих функций $y = F(x)$ (при этом покажите соответствие между «характерными» точками графиков $y = f(x)$ и $y = F(x)$, взяв оси координат для второго графика точно под осями для первого).

2. Найдите все решения данных дифференциальных уравнений:

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| 1) $y' = 2x$; | 4) $y' = 6x^2 - 2x$; |
| 2) $y' = 2x + 1$; | 5) $y' = x^3$; |
| 3) $y' = x^2 + 1$; | 6) $y' = 8x^3 + 6x^2$. |

3. Найдите все первообразные следующих функций¹:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $f(x) = 10x^4$; | 4) $f(x) = 8x^3 + 6x$; |
| 2) $f(x) = 5x^4 - 6x^2$; | 5) $f(x) = x^5$; |
| 3) $f(x) = 5x^4 + 6x^2 - 1$; | 6) $f(x) = 6x^5 - 8x^3 + 6x$. |

4. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений справедливы²?

- Если f имеет четную первообразную F , то сама она нечетна.
- Если f нечетна, то любая ее первообразная F четна.
- Если f имеет нечетную первообразную F , то сама она четна.
- Если f четна, то любая ее первообразная F нечетна.
- Если f четна, то какая-нибудь ее первообразная F нечетна.

Указание. Условия четности и нечетности функции h можно записать в виде тождеств $h(x) - h(-x) \equiv 0$ и $h(x) + h(-x) \equiv 0$.

5. Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ (на множестве $\mathbb{D}$).

1) Укажите какую-нибудь первообразную функции $f_1(x) = \alpha f(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — данное число).

¹Во избежание «пестроты» формулировок, начиная с этой задачи, чаще будем использовать «язык первообразных». Разумеется, формулировать и решать все такие задачи можно и в терминах соответствующих дифференциальных уравнений.

²Если утверждение верно, то докажите его; в противном случае приведите соответствующий *опровергающий* пример.

- 2) Найдите все первообразные функции $h_1(x) = 2f(x) + 1$.
- 3) Найдите все первообразные функции $h_2(x) = f(x) - 2$.
- 4) Укажите какую-нибудь первообразную функции $s(x) = f(x) + g(x)$.
- 5) Укажите какую-нибудь первообразную функции $d(x) = f(x) - g(x)$.
- 6) Верно ли, что «*первообразная суммы функций равна сумме первообразных слагаемых*»? Как следует исправить это утверждение для того, чтобы оно было заведомо (т. е. всегда) верным?

Комментарий. Справедливы утверждения: «*сумма первообразных двух функций является первообразной суммы этих функций*» или «*первообразная суммы функций отличается от суммы первообразных слагаемых на константу*».

6. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| 1) $f(x) = 2x(x+1)$; | 4) $f(x) = x^2(x-3)$; |
| 2) $f(x) = x(2x-1)$; | 5) $f(x) = (x+1)(x-1)$; |
| 3) $f(x) = 4x(x^2+1)$; | 6) $f(x) = (2x+1)(3x+2)$. |

Комментарий. Конечно, *произведение первообразных* двух функций в общем случае никоим образом *не является первообразной произведения* этих функций. Как и при вычислении производных, при отыскании первообразных произведения часто бывает проще всего сначала раскрыть скобки.

Следующий цикл упражнений показывает, как быть, когда интегрируются натуральные степени биномов и похожие выражения (в том случае, когда следовать совету раскрыть скобки не очень-то хочется!).

7. Найдите все первообразные данных функций:

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| 1) $f(x) = (x+2)^5$; | 4) $f(x) = (2x+1)^9$; |
| 2) $f(x) = (1-x)^6$; | 5) $f(x) = 2x(x^2+1)^5$; |
| 3) $f(x) = (1-x)^7$; | 6) $f(x) = x^2(x^3-5)^5$. |

Указание. Найдите¹ производные функций вида $F(x) = (ax+b)^n$ и $G(x) = (ax^m+b)^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

8. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $y = (2x+1)(x^2+x+1)^5$; | 4) $y = x^2(x^3-x+5)^5$; |
| 2) $y = 2x(x^2+x+1)^5$; | 5) $y = x(ax^2+bx+c)^n$; |
| 3) $y = (3x^2-1)(x^3-x+5)^5$; | 6) $y = x^2(ax^3+bx^2+cx+d)^n$. |

(Здесь $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.)

Указание. Воспользуйтесь *методом сведения задачи к предыдущей* (или *предыдущим*)!

¹Следуя Лейбницу(!) — он догадался (правда, после Ньютона), что *интегрируемые* функции получаются с помощью дифференцирования. Это был первый шаг к созданию *лейбницева исчисления* (1675 г.).

Для решения следующих циклов задач потребуется вспомнить формулы для производных тригонометрических функций и основные тригонометрические формулы (т. е. формулы для тригонометрических преобразований).

9. Найдите все первообразные данных функций:

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $f(x) = -\cos x$; | 5) $f(x) = \sin x$; |
| 2) $f(x) = 5 \cos x$; | 6) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$; |
| 3) $f(x) = \cos 5x$; | 7) $f(x) = \sin 3x$; |
| 4) $f(x) = 5 \cos \frac{x}{2}$; | 8) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$. |

Замечание. В этой и следующей задачах не нужно делать никаких преобразований!

10. Найдите все первообразные данных функций:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $f(x) = \cos x + \sin 5x$; | 4) $f(x) = \cos 5x + x^5$; |
| 2) $f(x) = 5 \cos x - \sin x + 2$; | 5) $f(x) = 5 \cos x - \cos 5x$; |
| 3) $f(x) = \cos 5 - 5x$; | 6) $f(x) = 5 \sin x - \sin 5x + 5$. |

11. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений справедливы?

1) Если функция f имеет периодическую первообразную F , то она сама периодическая.

2) Если функция f периодическая, то ее первообразная F тоже периодическая.

3) Если функция F имеет период T , то ее производная f тоже имеет период T .

4) Если функция F имеет примитивный¹ период T , то ее производная f тоже имеет примитивный период T .

5) Если функция f имеет периодическую первообразную F , то любая первообразная функции f периодическая.

6) Если периодическая функция f с примитивным периодом T имеет периодическую первообразную F , то F также имеет примитивный период T .

(Если утверждение верно, то докажите его, в противном случае приведите опровергающий пример.)

Указание. Условие периодичности функции h с периодом T можно записать в виде тождества $h(x+T) - h(x) \equiv 0$.

12. Найдите все первообразные данных функций:

- | | |
|------------------------|-----------------------------------|
| 1) $f(x) = \cos^2 x$; | 3) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; |
| 2) $f(x) = \sin^2 x$; | 4) $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$; |

¹Напомним, что *примитивным* называется наименьший положительный период.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 5) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$; | 9) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$; |
| 6) $f(x) = \sin^3 x$; | 10) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$; |
| 7) $f(x) = \cos^3 x$; | 11) $f(x) = (\sin x + \cos x)^3$; |
| 8) $f(x) = \cos^4 x$; | 12) $f(x) = (\sin x + \cos x)^4$. |

Указание. В этой и следующей задачах, напротив, нужно преобразовать интегрируемые функции так, чтобы свести задачи к интегрированию функций вида $a \cos \omega x$ и $a \sin \omega x$ (и, возможно, констант).

13. Найдите все первообразные данных функций:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$; | 5) $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$; |
| 2) $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x$; | 6) $f(x) = \cos mx \cdot \cos nx$; |
| 3) $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$; | 7) $f(x) = \sin x \cdot \sin^2 x$; |
| 4) $f(x) = \cos 2x \cdot \cos 8x$; | 8) $f(x) = \sin mx \cdot \sin nx$. |

(Здесь $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

14. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; | 5) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$; |
| 2) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$; | 6) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$; |
| 3) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$; | 7) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$; |
| 4) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$; | 8) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$. |

Замечание. Не забудьте, что первообразные на объединении интервалов отличаются не на константу, а на «псевдоконстанту» — многозначную константу $\hat{C}$ («свою» для каждого из интервалов).

15. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $f(x) = x \cos(x^2)$; | 4) $f(x) = \frac{2x}{\sin^2(x^2)}$; |
| 2) $f(x) = x \sin(x^2)$; | 5) $f(x) = x \operatorname{tg}^2(x^2)$; |
| 3) $f(x) = \frac{x}{\cos^2(x^2)}$; | 6) $f(x) = x^2 \cos(x^3)$. |

Указание. Угадайте первообразную. (Наводящий вопрос: как вычисляется производная функции вида $\varphi(x^m)$, где φ — известная функция, а $m \in \mathbb{N}$?)

* * *

Рассмотрим следующие совокупности функций:

(1) $\mathbb{R}[x]$ — множество всех полиномиальных функций, т. е. функций, задаваемых с помощью алгебраических многочленов

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

(произвольной степени $n \geq 0$);

(2) $\mathbb{R}_T[x]$ — множество всех функций, задаваемых с помощью *тригонометрических многочленов*

$$T(x) = a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \quad (n \geq 0 \text{ любое}).$$

(В обоих случаях коэффициенты a_k, b_k — произвольные действительные числа.)

16. Пусть $\mathbb{M}$ — одна из перечисленных выше совокупностей функций. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $\mathbb{M}$, то

- 1) их сумма $f(x) + g(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$;
- 2) любая их *линейная комбинация* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$;
- 3) их произведение $f(x)g(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$.

17. Пусть $\mathbb{M}$ — одна из перечисленных выше совокупностей функций. Верно ли, что если функция $f(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$, то

- 1) ее производная $f'(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$?
- 2) любая ее первообразная $F(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$?

(Для каждого случая дайте ответ и обоснуйте его.)

18. Для произвольной функции $f(x) \in \mathbb{M}$ в каждом из указанных случаев по известной записи $f(x)$ (в соответствии с приведенными выше формулами) найдите запись (общий вид):

- 1) производной $f'(x)$;
- 2) первообразной $F(x)$ для $f(x)$.

Какое дополнительное условие нужно наложить на функцию $f(x) \in \mathbb{M}$ для того, чтобы первообразная этой функции тоже принадлежала $\mathbb{M}$?

19. Запишите в явном виде следующие интегральные суммы:

- | | |
|--|--|
| 1) $S_n(x) = S_n(t)_0^x$; | 6) $S_n = S_n(\sin t)_0^\pi$; |
| 2) $S_n(x) = S_n(t^2)_0^x$; | 7) $S_n(x) = S_n(\cos t)_0^\pi$; |
| 3) $S_n(x) = S_n(t^3)_0^x$; | 8) $S_n = S_n(\cos t)_0^\pi$; |
| 4) $S_n(x) = S_n(t^m)_0^x$ ($m \in \mathbb{N}$); | 9) $S_n(x) = S_n\left(\frac{1}{t}\right)_1^x$. |
| 5) $S_n(x) = S_n(\sin t)_0^x$; | 10) $S_n(x) = S_n\left(\frac{1}{t^2}\right)_1^x$. |

Суммирование последовательностей и разностный анализ

Параллельно с созданием математического анализа в математике постепенно был разработан его аналог для последовательностей, получивший название *исчисление конечных разностей*. Роль производной для последовательности $f(n) = f_n$, которую ради удобства будем считать «двусторонней», т. е. определенной не только для натуральных, но и для *всех целых* значений n , играет *разность последовательно-*

сти f_n — новая последовательность $g_n = g(n)$, обозначаемая

$$\Delta f(n) = \Delta f_n$$

и вычисляемая как *разность*:

$$g(n) = \Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \quad (\text{или} \quad g_n = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n).$$

Например,

$$\Delta(\text{const}) \equiv 0, \quad \Delta(kn + b) \equiv k, \quad \Delta(n^2) = 2n + 1, \quad \Delta(q^n) = (q - 1)q^n$$

(объясните, т. е. проверьте!).

20. Найдите разности следующих последовательностей:

1) $f_n = an^2 + bn + c$;

6) $f_n = 2^{kn}$;

2) $f_n = n^3$;

7) $f_n = n2^n$;

3) $f_n = n^4$;

8) $f_n = \sin \alpha n$;

4) $f_n = 3^n - 17 \cdot 2^n$;

9) $f_n = \cos \alpha n$;

5) $f_n = 2^{-n}$;

10) $f_n = \frac{1}{n}$.

Аналогично первообразной для данной функции определяется *первообразная последовательность* для данной последовательности f_n : это такая последовательность F_n , что

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \Delta F_n = f_n.$$

21. Докажите следующие утверждения.

1) Если F_n и G_n суть первообразные для одной и той же последовательности f_n , то они отличаются на константу: $G_n = F_n + C$.

2) Любая первообразная арифметической прогрессии $f_n = f_0 + dn$ является квадратичной последовательностью $F_n = an^2 + bn + c$.

3) Любая первообразная геометрической прогрессии $f_n = f_0 \cdot q^n$ имеет вид $F_n = Aq^n + C$ (как говорят, является сдвинутой геометрической прогрессией).

4) Если F_n — первообразная для последовательности f_n , то при любом значении $n \in \mathbb{N}$ сумма $S_n = f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}$ равна разности $F_n - F_0$.

На последнем утверждении основан популярный метод суммирования (т. е. вычисления сумм) последовательностей. Например, чтобы найти сумму первых n членов геометрической прогрессии $f_n = aq^n$, т. е. $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$, найдем такую последовательность вида $F_n = Aq^n$, что $\Delta F_n = f_n$. Так как $\Delta F_n = A(q - 1)q^n$, мы должны взять значение коэффициента A равным $\frac{a}{q-1}$. Таким образом,

$$a + aq + \dots + aq^{n-1} = F_n - F_0 = Aq^n - Aq^0 = \frac{a}{q-1}(q^n - 1),$$

и в данном случае мы пришли к известной формуле.

22. Используя описанный метод, найдите суммы $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$ для следующих последовательностей:

- | | |
|------------------|---------------------------|
| 1) $f_n = n$; | 4) $f_n = \cos n\alpha$; |
| 2) $f_n = n^2$; | 5) $f_n = \sin n\alpha$; |
| 3) $f_n = n^3$; | 6) $f_n = nq^n$. |

23. Используя формулы из предыдущей задачи, найдите пределы интегральных сумм из упражнения 22 (кроме пп. 4, 9, 10).

Переменные площади

В следующих упражнениях через $s(x)$ обозначается площадь $S(f)_{x_0}^x$ криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , графиком $z = f(x)$ и вертикалями в точках $(x_0; 0)$ и $(x; 0)$ оси Ox (напомним, что на участках отрицательности или в случае $x < x_0$ площадь берется со знаком «минус»).

24. Постройте графики функций $y = s(x)$ для перечисленных функций f и точек x_0 :

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $f(x) = 1, \quad x_0 = 1$; | 6) $f(x) = 1 - x, \quad x_0 = 0$; |
| 2) $f(x) = -1, \quad x_0 = 1$; | 7) $f(x) = 1 - x, \quad x_0 = 1$; |
| 3) $f(x) = x, \quad x_0 = 0$; | 8) $f(x) = x , \quad x_0 = 0$; |
| 4) $f(x) = x, \quad x_0 = 1$; | 9) $f(x) = x , \quad x_0 = -1$; |
| 5) $f(x) = x, \quad x_0 = -1$; | 10) $f(x) = 1 - x , \quad x_0 = 0$. |

25. Найдите функцию $f(x)$ и точку x_0 , если известно, что

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 1) $s(x) = x + 1$; | 4) $s(x) = (x - 1)^2$; |
| 2) $s(x) = x^2$; | 5) $s(x) = (x + 1)^2$; |
| 3) $s(x) = x^2 - 1$; | 6) $s(x) = x^2 + 1$. |

Для любой ли (дифференцируемой) функции $s(x) = F(x)$ сформулированная задача разрешима? Однозначно ли определяются функция f и «точка отсчета» x_0 ?

26. Постройте графики функций $y = s(x)$ для данных функций f и точек x_0 :

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = \theta(x)^1, \quad x_0 = -1$; | 4) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = 0$; |
| 2) $f(x) = \theta(x), \quad x_0 = 0$; | 5) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = -1$; |
| 3) $f(x) = \theta(x), \quad x_0 = 1$; | 6) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = 1$. |

(В данном случае под криволинейной трапецией понимается фигура, составленная из всех вертикальных отрезков, ограниченных осью абсцисс и графиком функции, лежащих между вертикалями x_0 и x .)

¹Напомним, что так обозначается *тета-функция Хевисайда*: она равна нулю при $x < 0$ и единице при $x \geq 0$.

27. Найдите все первообразные для функций:

- | | |
|-----------------------|--|
| 1) $f(x) = x $; | 4) $f(x) = 1 - x $; |
| 2) $f(x) = x - 1$; | 5) $f(x) = \sin x $; |
| 3) $f(x) = x - 1 $; | 6) $f(x) = \sin x $, $x \in [-2\pi, 2\pi]$. |

28. Найдите такие первообразные $F(x)$ для функций f , что $F(0) = 0$:

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = 1 - x $; | 5) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1; \end{cases}$ |
| 2) $f(x) = x + x $; | |
| 3) $f(x) = x - 3 x $; | 6) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$ |
| 4) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1, \\ 1 - x , & x > 1; \end{cases}$ | |

Постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = F(x)$.

Обобщенной первообразной на промежутке $\mathbb{I}$ для функции f , имеющей на этом промежутке *конечное* или *дискретное*¹ множество точек разрыва (в них функция f может быть и не определена), называется функция $F(x)$, *определенная и непрерывная* на $\mathbb{I}$ и такая, что $\exists F'(x) = f(x)$ на всех промежутках непрерывности функции f .

29. Найдите все обобщенные первообразные данных функций (на всей числовой оси):

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $f(x) = \theta(x)$; | 4) $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$; |
| 2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; | 5) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$; |
| 3) $f(x) = x + \theta(x)$; | 6) $f(x) = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$. |

30. Пусть M — множество точек разрыва определенной на всей числовой оси функции f . Допустим, что множество M *конечное* или *дискретное*, причем функция f имеет обобщенную производную F (на всей оси). Дайте ответы (с обоснованием) на следующие вопросы (не торопитесь!).

1) Может ли f иметь единственную точку разрыва — скажем, $x = 0$? Или $M = \{-1\}$? $M = \{17\}$?

2) Может ли f иметь две точки разрыва — скажем, $x = 0, 1$? Или $M = \{\pm 1\}$? $M = \{0, 200\}$?

3) Может ли f иметь три точки разрыва — скажем, $0, 1, 2$? Или $M = \{0, 2, 1000\}$?

4) Может ли f иметь бесконечно много точек разрыва? Приведите примеры.

¹Числовое множество называется *дискретным*, если на каждом *ограниченном* интервале числовой оси содержится не более конечного количества точек этого множества (*дискретный* — от лат. discretus: «прерывистый», «разделенный», состоящий из отдельных частей; антоним слова «непрерывный»).

5) Может ли F иметь единственную точку разрыва — скажем, $x = 0$? А $x = 2$? А две точки разрыва?

31. Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно такими обобщенными первообразными функций $f(x) = [x]$ (целая часть x) и $g(x) = \{x\}$ (дробная часть x), что $F(0) = G(0) = 0$.

- 1) Однозначно ли этими условиями заданы функции F и G ?
- 2) Найдите значения $F(1)$, $F(2)$, $F(10)$, $F(-2)$.
- 3) Найдите значения $G(1)$, $G(2)$, $G(4)$, $G(-8)$.
- 4) Вычислите $F(100)$, $G(100)$, $F(100) \pm G(100)$, $F(200) \pm G(200)$.

Поля направлений и решения неавтономных дифференциальных уравнений

32. Обозначим функцию $u(z) = \frac{|z|}{z}$ через $\text{Sgn } z$ (эта функция отличается от знака $\text{sgn } z$ только тем, что она не определена при $z = 0$). Постройте поля направлений и интегральные кривые следующих дифференциальных уравнений:

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1) $y' = \text{Sgn } x$; | 12) $y' = \text{Sgn}(y - 2x)$; |
| 2) $y' = \text{Sgn } x + 1$; | 13) $y' = \text{Sgn}(xy)$; |
| 3) $y' = \text{Sgn}(x - 1)$; | 14) $y' = \text{Sgn}(-xy)$; |
| 4) $y' = -\text{Sgn } x$; | 15) $y' = \text{Sgn}(xy - 1)$; |
| 5) $y' = 2 - \text{Sgn } x$; | 16) $y' = \text{Sgn}(1 - xy)$; |
| 6) $y' = \text{Sgn } y$; | 17) $y' = \text{Sgn}(x^2 - y)$; |
| 7) $y' = \text{Sgn } y - 1$; | 18) $y' = \text{Sgn}(x^2 - y^2)$; |
| 8) $y' = \text{Sgn}(y + 1)$; | 19) $y' = \text{Sgn}(x^2 + y^2 - 4)$; |
| 9) $y' = -\text{Sgn } y$; | 20) $y' = \text{Sgn}(4 - x^2 - y^2)$; |
| 10) $y' = \text{Sgn}(x - y)$; | 21) $y' = \text{Sgn}(\sin x)$; |
| 11) $y' = \text{Sgn}(x + y)$; | 22) $y' = \text{Sgn}(\sin x \cdot \sin y)$. |

Замечание. Поля направлений и интегральные кривые уравнения $y' = F(x, y)$ рассматриваются только в тех областях плоскости Oxy , где правая часть уравнения определена.

33. Изобразите приближенно поля направлений данных дифференциальных уравнений и их интегральные кривые:

- | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| 1) $y' = x$; | 5) $y' = y$; | 9) $y' = x + y$; |
| 2) $y' = -x$; | 6) $y' = -y$; | 10) $y' = x - y$; |
| 3) $y' = x - 2$; | 7) $y' = y - 1$; | 11) $y' = y - x$; |
| 4) $y' = -x + 1$; | 8) $y' = -y + 2$; | 12) $y' = -y - x$. |

34. Докажите аналитически (явно вычисляя производные), что

1) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y' = f(x)$, то любая функция $y_C = \varphi(x) + C$ также удовлетворяет этому уравнению;

2) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y' = g(y)$, то *любая* функция $y_c = \varphi(y + c)$ также удовлетворяет этому уравнению;

3) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y' = k(x)y$, то *любая* функция $y_A = A\varphi(x)$ также удовлетворяет этому уравнению;

4) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$, то *любая* функция $y_A = A\varphi\left(\frac{x}{A}\right)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Изоклины и поля направлений

35. Постройте изоклины для дифференциальных уравнений из задачи 33. Изобразите поля направлений этих уравнений, используя построенные изоклины.

36. Может ли интегральная кривая дифференциального уравнения вида $y' = F(x, y)$

1) *совпадать* с какой-то из его изоклин;

2) *являться частью* какой-то из его изоклин?

37. Может ли все семейство интегральных кривых дифференциального уравнения вида $y' = F(x, y)$ *совпадать* с семейством его изоклин или их частей?

38. Определите вид *семейства изоклин* для дифференциальных уравнений следующего вида (всюду $u(z)$ — заданная функция одной переменной):

$$1) y' = u(x);$$

$$6) y' = u(y - x^2);$$

$$2) y' = u(y);$$

$$7) y' = u\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$3) y' = u(x - y);$$

$$8) y' = u\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$4) y' = u(x + y);$$

$$9) y' = u(xy);$$

$$5) y' = u(y - 2x);$$

$$10) y' = u(x^2 + y^2).$$

39. Докажите, что если *семейство изоклин* дифференциального уравнений вида $y' = F(x, y)$ *инвариантно* относительно некоторого преобразования

$$L: (x; y) \mapsto (x_1; y_1)$$

координатной плоскости Oxy (т. е. переходит *само в себя* при этом *преобразовании*¹ — например, при параллельном переносе, повороте, сим-

¹ *Инвариантность* означает «неизменность» (какого-то выражения, величины, совокупности или свойства относительно некоторых преобразований); фр. invariant — «неизменяющийся», от лат. in... — отрицание «не...», varians, variantis — «изменяющийся».

метрии, гомотетии,...), то *семейство интегральных кривых* также переходит само в себя при этом преобразовании, в том смысле, что каждая интегральная кривая переходит в интегральную кривую (вообще говоря, в *другую*) или в несколько «кусочков» интегральных кривых (так бывает, если при преобразовании L график функции $y = y(x)$ решения переходит в кривую, не являющуюся графиком).

40. Изобразите приближенно поля направлений и интегральные кривые данных дифференциальных уравнений:

- | | | |
|----------------------|----------------------------|----------------------------------|
| 1) $y' = x^2$; | 9) $y' = x $; | 16) $y' = -\frac{1}{x}$; |
| 2) $y' = x^2 + 1$; | 10) $y' = - x $; | 17) $y' = -\frac{1}{x^2}$; |
| 3) $y' = x^2 - 1$; | 11) $y' = 1 - x $; | 18) $y' = \frac{1}{x-2}$; |
| 4) $y' = x^3$; | 12) $y' = \sqrt{ x }$; | 19) $y' = \frac{1}{2-x}$; |
| 5) $y' = -x^2$; | 13) $y' = \sqrt[3]{x}$; | 20) $y' = \sin x$; |
| 6) $y' = -x^2 + 1$; | 14) $y' = \frac{1}{x}$; | 21) $y' = -\sin x$; |
| 7) $y' = -x^2 - 1$; | 15) $y' = \frac{1}{x^2}$; | 22) $y' = \operatorname{tg} x$. |

41. Изобразите приближенно поля направлений и интегральные кривые данных дифференциальных уравнений:

- | | | |
|---------------------|----------------------------|----------------------------------|
| 1) $y' = y^2$; | 7) $y' = y^3$; | 12) $y' = \sqrt{ y }$; |
| 2) $y' = -y^2$; | 8) $y' = -y^3$; | 13) $y' = \sqrt[3]{y}$; |
| 3) $y' = y^2 + 1$; | 9) $y' = \frac{1}{y}$; | 14) $y' = \cos y$; |
| 4) $y' = y^2 - 1$; | 10) $y' = -\frac{1}{y}$; | 15) $y' = \cos^2 y$; |
| 5) $y' = y^2 - y$; | 11) $y' = \frac{1}{y^2}$; | 16) $y' = \operatorname{tg} y$. |

42. Изобразите приближенно поля направлений и интегральные кривые данных дифференциальных уравнений:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 1) $y' = \frac{y}{x}$; | 6) $y' = -\frac{y}{2x}$; | 12) $y' = -\frac{x}{2y}$; |
| 2) $y' = \frac{2y}{x}$; | 7) $y' = \frac{x}{y}$; | 13) $y' = \frac{y+1}{x-2}$; |
| 3) $y' = \frac{y}{2x}$; | 8) $y' = \frac{2x}{y}$; | 14) $y' = \frac{x+1}{y-2}$; |
| 4) $y' = -\frac{y}{x}$; | 9) $y' = \frac{x}{2y}$; | 15) $y' = \frac{y^2}{x}$; |
| 5) $y' = -\frac{2y}{x}$; | 10) $y' = -\frac{x}{y}$; | 16) $y' = 2xy$. |
| | 11) $y' = -\frac{2x}{y}$; | |

Первые интегралы неавтономных дифференциальных уравнений

Определение 3. Функция $Y(x, y)$, *постоянная* на каждой интегральной кривой $y = y(x)$, $x \in \mathbb{I}$, дифференциального уравнения $y' =$

$= F(x, y)$, т. е. такая, что

$$\forall x \in \mathbb{I} \quad Y(x, y(x)) \equiv C \quad (*)$$

(значение константы C , вообще говоря, свое для каждого решения $y(x)$), называется *первым интегралом* этого дифференциального уравнения.

43. Докажите, что указанные ниже функции являются *первыми интегралами* для заданных дифференциальных уравнений:

1) $Y(x, y) = x^2 - y, \quad y' = 2x;$

2) $Y(x, y) = x + \frac{1}{y}, \quad y' = y^2;$

3) $Y(x, y) = xy, \quad y' = -\frac{y}{x};$

4) $Y(x, y) = \frac{y}{x}, \quad y' = \frac{y}{x};$

5) $Y(x, y) = x^2 + y^2, \quad y' = -\frac{x}{y};$

6) $Y(x, y) = x^2 - y^2, \quad y' = \frac{x}{y}.$

Указание. Проверьте, что производная левой части формулы $(*)$ тождественно равна нулю для любого решения соответствующего дифференциального уравнения.

44. Пусть функция $Y(x, y)$ является первым интегралом для дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$. Докажите, что любая интегральная кривая этого уравнения целиком лежит на какой-то *линии уровня* функции Y , т. е. содержится в множестве

$$\mathbb{Y}_C = \{(x; y) \mid Y(x, y) = C\}.$$

Исходя из этого найдите формулы для решений $y = y(x)$ дифференциальных уравнений из задачи 12 и изобразите *семейства* их графиков.

Предварительное замечание. Одна и та же функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет *многим* (бесконечно многим!) дифференциальным уравнениям. Например, функция $y = x^2$ на положительной полуоси $x > 0$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$y' = 2x, \quad y' = x + \frac{y}{x}, \quad y' = 17x - \frac{15y}{x}, \quad y' = \frac{2y}{x}, \quad y' = 2\sqrt{y}$$

и т. д. (проверьте!).

45. Для данной функции $y = \varphi(x)$, рассматриваемой (а) только на положительной полуоси, (б) на всей своей области определения, составьте (найдите, придумайте, «угадайте») дифференциальное уравнение вида $y' = g(y)$, которому эта функция удовлетворяла бы:

1) $y = x^3;$ 3) $y = \frac{1}{x};$ 5) $y = \frac{1}{x^3};$ 7) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$

2) $y = \sqrt{x};$ 4) $y = -\frac{1}{x};$ 6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}};$ 8) $y = \operatorname{tg} x.$

Какие еще решения полученных уравнений можно указать?

46. Для данной функции $y = \varphi(x)$, рассматриваемой (а) только на положительной полуоси, (б) на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, укажите дифференциальное уравнение вида $y' = k(x)y$, которому эта функция удовлетворяла бы:

- | | | | |
|----------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $y = x^3$; | 3) $y = x^5$; | 5) $y = \frac{1}{x}$; | 7) $y = \frac{1}{x^2}$; |
| 2) $y = x^4$; | 4) $y = \sqrt[3]{x}$; | 6) $y = -\frac{1}{x}$; | 8) $y = \frac{1}{x^3}$. |

Какие еще решения полученных уравнений можно указать?

47. Нарисуйте *семейство линий уровня* данных функций $Z(x, y)$ (они задаются уравнениями $Z(x, y) = C$); запишите (найдите) дифференциальное уравнение вида $y' = F(x, y)$ (или $\mathcal{F}(x, y, y') = 0$)¹, которому удовлетворяют кривые этого семейства (точнее, те их «участки», которые являются графиками $y = y(x)$ дифференцируемых функций):

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $x - y = C$; | 10) $xy^2 = C$; |
| 2) $x^2 + y = C$; | 11) $xy^n = C, n \in \mathbb{N}$; |
| 3) $x^n - y = C, n \in \mathbb{N}$; | 12) $x^2y^3 = C$; |
| 4) $x - y^2 = C$; | 13) $x^2 - y^3 = C$; |
| 5) $x - y^n = C, n \in \mathbb{N}$; | 14) $x^2 + y^2 = C$; |
| 6) $x + y^n = C, n \in \mathbb{N}$; | 15) $4x^2 + y^2 = C$; |
| 7) $xy = C$; | 16) $x^2 + 4y^2 = C$; |
| 8) $x^2y = C$; | 17) $x^2 - y^2 = C$; |
| 9) $x^ny = C, n \in \mathbb{N}$; | 18) $2x^2 - y^2 = C$. |

Указание. Заметьте, что левые части $Z(x, y)$ уравнений этих семейств являются *первыми интегралами* искомым дифференциальных уравнений.

Разностный анализ: линейные разностные уравнения

Вернемся еще раз к разностям. Для данной последовательности f_n кроме «первой» разности Δf_n может быть определена *вторая разность* $\Delta^2 f_n$ как *разность от первой разности*,

$$(\Delta^2 f)_n = \Delta(\Delta f)_n,$$

и далее третья, четвертая и т. д. разности.

48. Запишите вторую и третью разности последовательности f_n непосредственно через члены последовательности.

49. Найдите вторые и третьи разности для данных последовательностей:

- | | | |
|------------------|------------------|---------------------------|
| 1) $f_n = n^2$; | 3) $f_n = n^4$; | 5) $f_n = 3^n$; |
| 2) $f_n = n^3$; | 4) $f_n = 2^n$; | 6) $f_n = \sin n\alpha$. |

¹Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями первого порядка*, не разрешенными относительно производной y' .

Аналогом дифференциальных уравнений для последовательностей являются *разностные уравнения*, в которые входят не производные неизвестных функций, а *разности неизвестных последовательностей*.

Если неизвестная последовательность y_n и все ее разности Δy_n , $\Delta^2 y_n$, ... входят в разностное уравнение *линейно*, то говорят о *линейном разностном уравнении*.

50. Найдите все решения данных разностных уравнений:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1) $\Delta y_n = k y_n$; | 3) $\Delta^2 y_n = 0$; |
| 2) $\Delta y_n = k y_n + b$; | 4) $\Delta^3 y_n = 0$. |

51. Докажите, что любое *однородное линейное разностное уравнение второго порядка* с постоянными коэффициентами

$$\Delta^2 y_n + p \Delta y_n + q y_n = 0$$

может быть записано как рекуррентное соотношение вида

$$y_{n+2} = a y_{n+1} + b y_n, \quad (*)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ — константы. Верно ли обратное утверждение?

Теория линейных разностных уравнений по сути своей вполне аналогична (и проще!) теории линейных дифференциальных уравнений, рассматривающейся в следующей главе. Мы пока не будем раскрывать эту красивую аналогию, ограничившись одним примером, развернутым в маленькую серию задач.

52. Докажите, что если последовательности u_n и v_n являются решениями разностного уравнения $(*)$, то и любая их *линейная комбинация* $y_n = \alpha u_n + \beta v_n$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные константы) также является решением уравнения $(*)$.

53. Докажите, что для любых «начальных условий» — заданных начальных членов $y_0 = A$, $y_1 = B$ — существует последовательность y_n , $n \geq 0$, являющаяся решением разностного уравнения $(*)$, и притом только одна. Верно ли это утверждение, если рассматривать решения y_n при всех целых значениях индекса n ?

54. Докажите, что если линейное разностное уравнение $(*)$ имеет решение, записывающееся как геометрическая прогрессия $q_n = \lambda^n$, то ее знаменатель λ является корнем *характеристического уравнения*

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad (**)$$

(a, b — коэффициенты уравнения $(*)$).

55. Докажите, что если дискриминант характеристического уравнения $(**)$ положителен и числа λ_1, λ_2 — его корни, то любое решение разностного уравнения $(*)$ представимо в виде

$$y_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n,$$

где константы α, β однозначно определяются начальными условиями $y_0 = A, y_1 = B$.

56. Запишите общий вид решений *разностного уравнения Фибоначчи*:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n.$$

57. Найдите аналитическую формулу для n -го числа Фибоначчи f_n : $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots; f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Комментарий. Характеристическое уравнение для уравнения Фибоначчи имеет вид $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau_1 \end{bmatrix},$$

где константа $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ называется *золотым сечением*, а второй корень $\tau_1 = 1 - \tau$ (например, по теореме Виета). Общее решение уравнения Фибоначчи определяется формулой

$$y_n = \alpha \tau^n + \beta (1 - \tau)^n.$$

Для чисел Фибоначчи следует потребовать выполнение начальных условий:

$$y_0 = f_0 = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha;$$

следовательно,

$$y_1 = f_1 = \alpha \tau - \alpha (1 - \tau) = \alpha (2\tau - 1) = \alpha \cdot \sqrt{5} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, оказывается, число f_n пар кроликов в «модели Фибоначчи» через n месяцев (мы опустим описание этой модели роста популяций) вычисляется с помощью двух геометрических прогрессий — по *формуле Бине*:

$$f_n = \alpha (\tau^n - (1 - \tau)^n) = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

(Поразительная формула!)

58. Докажите, что предел отношения соседних чисел Фибоначчи равен «золотому сечению» τ .

Здесь открывается отдельная область как бы *математической эстетики* — от пропорций Парфенона и Боттичелли до строения плодов ананаса или корзинок подсолнечника. Конечно, рассмотрение «божественной пропорции», как называли отношение $\tau : 1$ Леонардо да Винчи и Фра Лука Пачоли (в книге «De Divina Proportione», 1509 г.), также выходит за рамки данного курса.

Леонардо Пизанский, он же Фибоначчи (ит. filius Вонасси — «сын доброй природы») — замечательный итальянский математик, купец, путешественник и писатель

(1180–1240). Родился в г. Пиза, учился у арабов в Алжире, написал несколько фундаментальнейших по тому времени трактатов по математике, в одном из которых — в «Книге об абаке» (собственно, не о самом *абаке*, а о всевозможных вычислениях) — он и рассмотрел задачу о размножении кроликов (1202 г.).

На связь чисел Фибоначчи с золотым сечением указал Иоганн Кеплер в своем блестящем эссе «О шестиугольных снежинках» (1611 г.). Наконец, французский математик, профессор Политехнической школы, алгебраист, астроном и аналитик Жак Филипп Мари Бинé (1786–1856) получил указанную формулу при исследовании общих линейных разностных уравнений (1843 г.). Числами Фибоначчи занимался и Лагранж, и многие другие, и по настоящее время они находят удивительно разнообразные и весьма глубокие приложения...

59. Изобразите криволинейные трапеции, соответствующие записанным интегралам, и найдите значения этих интегралов, *не используя* формулу Барроу (только из геометрических соображений):

$$\begin{array}{lll} 1) \int_{-1}^2 x \, dx; & 3) \int_1^3 (x-2) \, dx; & 5) \int_1^3 (2-x) \, dx; \\ 2) \int_1^2 x \, dx; & 4) \int_3^1 (x-2) \, dx; & 6) \int_{-1}^{-3} (2-x) \, dx. \end{array}$$

Указание. Каждая трапеция будет состоять из одного или нескольких «кусочков», а интеграл является суммой их площадей, *но взятых с соответствующими знаками.*

60. Для каждого из интегралов из предыдущей задачи проверьте полученный «геометрически» ответ с помощью формулы Барроу.

61. Вычислите данные интегралы и изобразите соответствующие криволинейные трапеции (с указанием знаков площадей составляющих трапеции частей):

$$\begin{array}{lll} 1) \int_{-2}^2 x^2 \, dx; & 3) \int_{-2}^3 x^2 \, dx; & 5) \int_{-2}^3 x^3 \, dx; \\ 2) \int_{-2}^2 (x^2 - 1) \, dx; & 4) \int_0^3 (x^2 - 2x) \, dx; & 6) \int_{-a}^a x^3 \, dx. \end{array}$$

62. Изобразите фигуру, отсекаемую от I квадранта ($x \geq 0, y \geq 0$) координатной плоскости Oxy графиком данной функции $y = f(x)$, и вычислите ее площадь (записав ее как интеграл):

$$\begin{array}{ll} 1) y = 1 - x^\alpha \quad (\alpha > 0); & 4) y = (a - x)^m \quad (a, m > 0); \\ 2) y = (1 - x)^\alpha \quad (\alpha > 0); & 5) y = \cos \alpha x \quad (\alpha > 0); \\ 3) y = a^m - x^m \quad (a, m > 0); & 6) y = \cos^2 \alpha x \quad (\alpha > 0). \end{array}$$

63. Изобразите фигуру, ограниченную данными графиками (при $x \geq 0$), и вычислите ее площадь (записав ее с помощью интегралов):

$$\begin{array}{l} 1) y = x^\alpha, y = x \quad (\alpha > 0); \\ 2) y = x^\alpha, y = x^\beta \quad (\alpha > \beta > 0); \\ 3) y = 1 - x^\alpha, y = 1 - x \quad (\alpha > 0); \end{array}$$

- 4) $y = (1 - x)^\alpha$, $y = 1 - x$ ($\alpha > 0$);
 5) $y = \pi \sin \alpha x$, $y = 2\alpha x$ ($\alpha > 0$);
 6) $y = \pi \cos \alpha x$, $y = \pi - 2\alpha x$ ($\alpha > 0$).

Общее замечание. При вычислении площадей фигур, ограниченных какими-то линиями на координатной плоскости, эти фигуры представляют как *объединения* или *разности* тех или иных *криволинейных трапеций* и выражают искомую площадь суммами и разностями соответствующих интегралов.

64. Изобразите фигуру, ограниченную данными линиями, и вычислите ее площадь:

- 1) $y = x^2$, $y = c^2$ ($c > 0$);
 2) $y = ax^2$, $y = ac^2$ ($c > 0$);
 3) $y = ax^2$, $y = kx$ ($a, k > 0$);
 4) $y = h - x^2$, $y = 0$ ($h > 0$);
 5) $y = x^2 - ax$, $y = 0$ ($a > 0$);
 6) $y = (x - \alpha)(x - \beta)$, $y = 0$ ($\alpha < \beta$).

Определение 4. *Параболическим сегментом* называется фигура, ограниченная параболой $y = p_2(x) = ax^2 + bx + c$ и ее *хордой* — отрезком AB , соединяющим две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ этой параболы.

Расстояние между точками A и B по *горизонтали*, т. е. величина $d = |x_B - x_A|$, называется *шириной* сегмента, а длина отрезка MP вертикальной прямой $x = \frac{x_A + x_B}{2}$ между серединой M хорды AB и соответствующей точкой P параболы — *стрелкой* сегмента.

Параллелограмм, ограниченный прямыми AB , $x = x_A$, $x = x_B$ и касательной к параболе, параллельной хорде AB , называется *описанным* около сегмента ABP .

65. Докажите, что площадь параболического сегмента ABP равна

- 1) $\frac{2}{3}$ произведения ширины сегмента на ее стрелку;
 2) $\frac{2}{3}$ площади описанного около сегмента параллелограмма.

Отыскание первообразных элементарных функций (продолжение)

Ранее практически не рассматривались первообразные *иррациональных алгебраических функций*, т. е. функций, которые могут быть получены из функции x и всевозможных констант не только с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления), но и с помощью «алгебраического действия» *извлечения* (арифметического) *корня произвольной натуральной степени* $n \geq 2$, а также путем образования произвольных *композиций* уже имеющихся функций (и повторного применения всех перечисленных действий к по-

лученным функциям сколь угодно количество раз). В простейших случаях для отыскания первообразных иррациональных алгебраических функций достаточно уже показанных выше приемов.

66. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $f(x) = x(\sqrt{x} + 1);$ | 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 4}{4}x;$ |
| 2) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2);$ | 5) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 5}{10\sqrt{x}};$ |
| 3) $f(x) = \sqrt{x}(x + 3);$ | 6) $f(x) = \frac{x + 6}{12\sqrt{x}}.$ |

67. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $f(x) = \sqrt{x + 2};$ | 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 2}};$ |
| 2) $f(x) = \sqrt{2x - 1};$ | 5) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x + 1}};$ |
| 3) $f(x) = (2x + 1)\sqrt{4x + 2};$ | 6) $f(x) = \frac{4x - 6}{\sqrt{2x - 3}}.$ |

68. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = x(\sqrt[3]{x} + 1);$ | 4) $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 3)(\sqrt{x} - 2);$ |
| 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1);$ | 5) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2};$ |
| 3) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x};$ | 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}.$ |

69. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $f(x) = x\sqrt{x - 2};$ | 5) $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{2 - x}};$ |
| 2) $f(x) = (2x + 3)\sqrt{1 - x};$ | 6) $f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt[3]{x - 1}}.$ |
| 3) $f(x) = 3x\sqrt[3]{3x - 2};$ | |
| 4) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x - 1}};$ | |

70. Найдите все первообразные следующих функций:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $f(x) = 4x\sqrt{x^2 - 1};$ | 4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}};$ |
| 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$ | 5) $f(x) = 4x\sqrt[3]{1 - x^2};$ |
| 3) $f(x) = x^2\sqrt{x^3 + 1};$ | 6) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 17}}.$ |

Указание. Запишите формулу для производной функции

$$f(x) = (p(x))^\alpha.$$

Кроме функции $f(x) = x^{-1}$, первообразная которой есть *трансцендентная* функция $F(x) = \ln|x| + \hat{C}$ (здесь $\ln z$ — *натуральный логарифм*, о котором будет речь в следующей главе), существует много других рациональных и иррациональных алгебраических функций, первообразные которых записываются через *трансцендентные* элементар-

ные функции. Вспомните, какие из рассмотренных нами элементарных трансцендентных функций имеют *алгебраические производные*?

71. Найдите все первообразные следующих функций:

$$1) f(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$4) f(x) = \frac{1}{2+2x+x^2};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$5) f(x) = \frac{2x}{1+x^4};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{4+x^2};$$

$$6) f(x) = \frac{ax^2+b}{c^2+d^2x^2} \quad (c, d > 0).$$

72. Найдите все первообразные следующих функций:

$$1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}};$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$5) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}};$$

$$6) f(x) = \frac{ax+b}{c^2-d^2x^2} \quad (c, d > 0).$$

Как вы, наверное, догадались, первообразные из двух последних задач связаны с *обратными тригонометрическими функциями*: $\arctg x$ и $\arcsin x$ (или с $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \arctg x$ и $\operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$).

Интегралы с переменными пределами интегрирования

73. Выясните, при каких значениях $x \in \mathbb{R}$ функции $J(x)$, определенные в задаче 34, дифференцируемы, и вычислите значения производных $J'(x)$ в этих точках.

74. Для заданных как интегралы функций $F(x)$ найдите производные $F'(x_0)$ в указанных точках x_0 :

$$1) F(x) = \int_1^x \frac{du}{\ln u}, \quad x_0 = e;$$

$$4) F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du, \quad x_0 = \sqrt{\ln 2};$$

$$2) F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u} du, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$5) F(x) = \int_1^x u^u du, \quad x_0 = 4;$$

$$3) F(x) = \int_1^x \frac{e^u}{u} du, \quad x_0 = \ln 2;$$

$$6) F(x) = \int_{17}^x u^u du, \quad x_0 = 4.$$

75. Дана некоторая функция $f(x)$, непрерывная на всей числовой оси. Найдите производные заданных как интегралы функций $F(x)$ (на всей оси):

$$1) F(x) = \int_0^x f^2(u) du;$$

$$4) F(x) = \int_x^{2x} f(u) du;$$

$$2) F(x) = \int_x^{x^2} f(u) du;$$

$$5) F(x) = \int_0^{x^2} f(u) du;$$

$$3) F(x) = \int_0^{2x} f(u) du;$$

$$6) F(x) = \int_{-x}^x f(u) du.$$

76. Пусть F — первообразная какой-то строго монотонной функции $f: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ на интервале (a, b) , функция $g: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ — обратная к функции f . Докажите, что функция $G(x) = xg(x) - F(g(x))$ является первообразной для функции g на интервале (α, β) . Примените эту формулу к функциям:

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = x^n, x \in (0, +\infty)$; | 3) $f(x) = \arcsin x, x \in (-1, 1)$; |
| 2) $f(x) = \sin x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; | 4) $f(x) = \cos x, x \in (0, \pi)$. |

Дайте геометрическую интерпретацию формулы для $G(x)$ (отдельно в случаях возрастающих и убывающих функций f ; сначала можно рассмотреть случай $a = \alpha = 0$).

* * *

77. На координатной плоскости Oxy изобразите фигуры, ограниченные указанными линиями, и найдите их площади:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) $y = 2x - x^2, y = 0$; | 10) $y = x^{1/3}, y = x^{1/5}$; |
| 2) $y = x^2 - 3x, y = 0$; | 11) $y = \frac{4}{x^2}, y = 7 - 3x$; |
| 3) $y = x^2 - 2, y = x$; | 12) $y = x^2, y = 2x - 1, y = -2x - 1$; |
| 4) $y = x^2, y = 2x$; | 13) $y = x^2, y = (x - 1)^2, y = \frac{1}{9}$; |
| 5) $y = x^2, y = x + 2$; | 14) $y = \sin^2 x, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$; |
| 6) $y = x^2, y = x^3$; | 15) $y = x^\alpha, y = x^\beta, (0 < \alpha < \beta)$; |
| 7) $y = -x^2, y = x^4 - 20$; | 16) $y = \sqrt{x}, y = x - 2, x = 0$; |
| 8) $y = -x^2, y = x^3 - 12x$; | 17) $y = \sqrt{a+x}, y = \sqrt{a-x}, y = 0$; |
| 9) $y = x^{1/3}, x = 0, y = 1$; | 18) $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4-3x}, y = 0$. |

78. Найдите площади фигур, ограниченных данными линиями:

- 1) $y^2 = x, y = 2 - x$;
- 2) $y = x, y = x^2 + 1, x = 0, y = 2$;
- 3) $y^2 = x, y = \sqrt{x}(x^2 - 1)$;
- 4) $y = x^3, y = 0$, касательная к графику функции $y = x^3$ в точке $x = 1$;
- 5) $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{4}x$, нормаль к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 1$;
- 6) $y = x^3 - x$, касательная к графику функции $y = x^3 - x$ в точке $x = -1$.

79. Не прибегая к первообразным, вычислите интегралы:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\int_{-2}^2 x - 1 dx$; | 3) $\int_{-2}^0 \sqrt{4 - x^2} dx$; | 5) $\int_{-10}^{10} x^5 \cos^{13} x dx$; |
| 2) $\int_0^5 \{x\} - \frac{1}{2} dx$; | 4) $\int_{-\pi}^{11\pi} \sin \frac{x}{3} dx$; | 6) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$. |

* * *

80. Основание тела — треугольник $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ плоскости Oxy ; каждое его сечение, перпендикулярное оси Ox , — квадрат. Вычислите объем тела.

81. Основание тела — треугольник $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ плоскости Oxy ; каждое его сечение, перпендикулярное оси Ox , есть полукруг. Вычислите объем этого тела.

82. Основание тела — круг $x^2 + y^2 \leq 1$, каждое его сечение, перпендикулярное оси Ox , — квадрат. Найдите объем этого тела.

83. Найдите объемы тел вращения области под графиком $y = 1 - x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$: 1) относительно оси Ox ; 2) относительно оси Oy .

84. Найдите объемы тел вращения фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ и $y = 1$: 1) относительно оси Ox ; 2) относительно оси Oy .

85. Найдите объемы тел вращения фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$ и $y = 0$: 1) относительно оси Ox ; 2) относительно оси Oy .

86. Найдите объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 3$, относительно прямой $y = -1$.

87. Найдите объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x$, относительно прямой $x = -2$.

* * *

88. 1) Найдите отношение объемов тел вращения относительно осей Ox и Oy криволинейных трапеций, ограниченных дугой графика функции $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = a$, соответствующими осями и перпендикулярами к ним.

2) Найдите такое же отношение в случае графика произвольной степенной функции $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$.

3) Решите те же задачи для графиков функций $y = Ax^2$ и $y = Ax^\alpha$ ($A, \alpha > 0$).

89. 1) Найдите площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b — кривой, задаваемой уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) Найдите объем *эллипсоида вращения* — тела вращения указанной фигуры относительно оси Ox .

3) Найдите отношение объемов эллипсоидов — тел вращения указанной фигуры относительно осей Ox и Oy .

90. Найдите объем произвольного эллипсоида, задаваемого в пространственной декартовой системе координат $Oxyz$ неравенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

91. Найдите объемы тел вращения относительно оси Ox :

- 1) долики синусоиды $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$;
- 2) круга $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$ (получающееся тело называется *тором*);
- 3) бесконечной гиперболической трапеции $x \geq 1$, $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$.

92. Используя метод, примененный для вычисления площади сферы, выведите формулу для вычисления площади боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты H .

93. Выведите формулу для вычисления объема тела вращения около оси Oy криволинейной трапеции

$$0 \leq a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

($f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция).

$$(\text{Ответ: } V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.)$$

94. Найдите объемы тел вращения около оси Oy :

- 1) криволинейного треугольника $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq x^\alpha$ ($\alpha > 0$);
- 2) синусоидальной долики $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq |y| \leq \sin x$;
- 3) круга $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$ (тело вращения — опять *тор*);
- 4) круга $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ (а это уже не тор);
- 5) круга $(x - 0,5)^2 + y^2 \leq 1$ (совсем не тор!).

95. Выведите формулу для вычисления объема усеченного общего конуса с основаниями площадей S_1 , S_2 и высотой h . (Напомним, что *усеченным конусом* называется часть [общего] конуса, заключенная между плоскостью основания и параллельной ей плоскостью сечения. Решите задачу двумя способами: из «соображений подобия» и с помощью *формулы Симпсона*.)

$$(\text{Ответ: } V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).)$$

96. Найдите объем «чердака», в основании которого лежит прямоугольник размера $a \times b$, верхнее ребро равно c , а высота — h .

97. Найдите объем «obeliska», параллельные основания которого суть прямоугольники размеров $A \times B$ и $a \times b$ (с соответственно параллельными сторонами), а высота равна h .

* * *

98. Выведите формулу для вычисления объема шарового сегмента радиуса R и высоты H . (Напомним, что *шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него любой пересекающей его плоскостью; *радиусом сегмента* называется радиус исходного шара R , а *высотой* — расстояние H от плоскости сечения до параллельной ей плоскости, касающейся сегмента [шара]. *Вопрос:* в каких пределах может изменяться высота сегмента радиуса R ?)

99. Выведите формулу для вычисления объема шарового сектора, соответствующего шаровому сегменту радиуса R и высоты H . (Этот *шаровой сектор* определяется как тело, состоящее из всех радиусов шара, соединяющих центр с точками сферы, принадлежащими упомянутому шаровому сегменту [эти точки образуют *сферический сегмент*]. Заметим, что шаровой сектор может быть и *невыпуклым*!)

100. Используя прием, примененный для вычисления площади сферы, выведите формулу для вычисления площади сферического сегмента радиуса R и высоты H .

Напомним, что *сферической зоной* называется часть сферы, заключенная между двумя пересекающимися ее параллельными плоскостями. Сферическая зона определяется радиусом сферы R и еще двумя параметрами: расстояниями от центра сферы до плоскостей с учетом знаков. Если считать, что сфера в пространственной декартовой системе координат $Oxyz$ задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а параллельные сечения перпендикулярны оси Ox , то параметры задаются уравнениями $x = a$ и $x = b$; $a, b \in (-R, R)$.

101. Вычислите площадь сферической зоны радиуса R с параметрами $a < b$.

Комментарий. Получающийся в этой задаче результат весьма примечателен: *площадь сферической зоны определяется только радиусом R и ее высотой H , т. е. расстоянием между плоскостями сечений!*

* * *

102. Выведите формулу для вычисления длины дуги графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ от точки $x = a$ до точки $x = b > a$.

Указание. Рассмотрите «переменную длину» — функцию $L(x)$, задаваемую как длина дуги графика от точки a до точки x ; найдите производную $L'(x)$.

$$(\text{Ответ: } L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.)$$

103. Найдите длины дуг графиков указанных функций между заданными точками:

1) $y = x\sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 1$;

2) $y = (x + 1)^{3/2}$; $x = 3$, $x = 8$;

3) $y = x^{2/3} - 1$; $x = 8$, $x = 27$;

4) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$; $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{7}$;

5) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$; $x = 1$, $x = 4$;

6) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$; $x = 1$, $x = 2$;

- 7) $y = \sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 1$;
 8) $y = \ln x$; $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$.

* * *

104. Докажите, что длина дуги годографа дифференцируемой векторнозначной функции $\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$ от значения $t = \alpha$ до значения $t = \beta > \alpha$ равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

105. Пусть замкнутая дуга годографа дифференцируемой векторнозначной функции $\vec{r}(t) = \overline{OP_t} = (x(t); y(t))$ от значения $t = \alpha$ до значения $t = \beta > \alpha$ ограничивает *слева от себя* (по ходу движения точки P_t при возрастании t) некоторую фигуру Φ . Докажите, что площадь этой фигуры может быть вычислена по любой из следующих трех формул:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) dt, \quad S = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt,$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Замечание. Замкнутость дуги означает, что $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$.

106. Проверьте формулы из двух предыдущих задач для параметризованной окружности радиуса R : $\vec{r}(t) = (R \cos t; R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Комментарий. Задание плоской кривой как годографа векторнозначной функции $\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$ называется *заданием кривой в параметрическом виде* (или *параметрически*). Иначе, представление кривой годографом называется ее *параметризацией*. Заметим, что одна и та же кривая может быть параметризована *бесконечно многими способами* — например, подставляя в параметризацию $\vec{r}(t)$ вместо аргумента t любую монотонную на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функцию $\varphi(\tau)$, множество значений которой совпадает с $\mathbb{R}$ (скажем, линейную функцию $t = \varphi(\tau) = k\tau + b$), мы получаем уже другую параметризацию той же кривой — с помощью вектор-функции $\vec{p}(\tau) = \vec{r}(\varphi(\tau))$.

107. *Циклоидой* называется траектория зафиксированной точки на окружности, катящейся без скольжения по прямой.

1) Докажите, что циклоида может быть параметризована формулами

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

2) Используя указанную параметризацию, найдите длину витка циклоиды $\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3) Найдите площадь фигуры между этим витком циклоиды и осью Ox .

108. Астроидой¹ называется кривая, задаваемая в декартовых координатах уравнением

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0).$$

1) Укажите какую-нибудь параметризацию астроиды.

2) Используя подходящую параметризацию астроиды, найдите ее длину.

3) Используя подходящую параметризацию астроиды, найдите площадь ограниченной ею фигуры.

109. Кривая, задаваемая в декартовых координатах уравнением

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad (a > 0),$$

называется *декартовым листом*².

1) Изобразите декартов лист (учтите, что эта кривая имеет ось симметрии и наклонную асимптоту [найдите их]).

2) Докажите, что формулы

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

дают параметризацию декартова листа.

3) Докажите, что при этой параметризации три точки декартова листа, соответствующие значениям параметра t_1 , t_2 и t_3 , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $t_1 t_2 t_3 = -1$.

110. Эвольвентой (или *разверткой*) *окружности* называется траектория, описываемая свободным концом нити длины $2\pi a$, разматываемой с окружности радиуса a .

1) Докажите, что эвольвента окружности может быть задана параметрически формулами

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

2) Используя указанную параметризацию, найдите длину витка эвольвенты.

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной эвольвентой окружности (в приведенной параметризации) и прямой $x = a$, считая, что $y \leq 0$.

¹Буквально — «звездообразная», от греч. *αστρον* (астрон) — «звезда» (отсюда *астрономия*), *εἶδος* (эйдос) — «вид» (*а νομος* (номос) — «закон»).

²Эта кривая впервые была упомянута Декартом в письме к Ферма (1638 г.).

ГЛАВА III

Экспонента и линейные дифференциальные уравнения

§ 3.1. Линейные процессы и дифференциальное уравнение $y' = ky$

Напомним (см. § 1.1), что в *непрерывных* математических моделях, в которых состояние системы описывается функцией $x(t)$ непрерывно меняющейся переменной — времени $t \in \mathbb{R}$, — часто удается получить информацию о *скорости* изменения величины $x(t)$, записываемую как *дифференциальное уравнение* вида

$$x' = F(x, t). \quad (1)$$

Задача исследования эволюции описываемой дифференциальным уравнением (1) системы заключается в отыскании всех решений этого уравнения и в их анализе. Успех в решении этой общей задачи существенно зависит от конкретного вида фигурирующей в дифференциальном уравнении функции двух переменных $F = F(x, t)$. Если функция F зависит только от t , $F(x, t) \equiv v(t)$, то мы приходим к основной задаче *интегрального исчисления* — ее мы рассмотрели в предыдущей главе. Сейчас же сосредоточим свое внимание на случае, когда функция F зависит только от x : $F(x, t) \equiv f(x)$, — и даже, более того, *линейно* зависит от x . Соответствующие *линейные дифференциальные уравнения первого порядка*¹ — однородное,

$$x' = kx \quad (\text{или, в других обозначениях, } y'(x) = ky(x)), \quad (2)$$

— и *неоднородное*,

$$x' = kx + b \quad (\text{или } y'(x) = ky(x) + b), \quad (3)$$

встречаются во многих прикладных задачах. Для начала приведем несколько простейших примеров, приводящих к однородному линейному дифференциальному уравнению (2). Соответствующие процессы принято называть *линейными*.

¹Это означает, что в такие уравнения входит только первая производная.

3.1.1. Пример: рост популяций. Обозначим через $N(t)$ численность некоторой популяции бактерий или каких-нибудь одноклеточных особей. Если их не убивать и предоставить достаточные условия для размножения — жизненное пространство и питательную среду, — то на протяжении малого промежутка времени от t до $t + \Delta t$ каждая особь с некоторой вероятностью, пропорциональной Δt , «производит потомство» (попросту делится), так что приращение численности равно

$$\Delta N(t, \Delta t) = N(t + \Delta t) - N(t) \approx N(t) \cdot \alpha \Delta t = \alpha N(t) \cdot \Delta t.$$

Естественно предположить, что это равенство тем точнее, чем меньше Δt , так что после деления на Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = N'(t) = \alpha N(t).$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению вида (2) с положительным коэффициентом $k = \alpha$.

Отметим, что в данном примере мы абстрагировались от того, что число бактерий *целое* (а следовательно, функция $N(t)$ ступенчатая и разрывная, не говоря о дифференцируемости!). Если N — *очень большое* целое число, то появление новых бактерий меняет его совсем незначительно. Поэтому мы получим достаточно точную модель реальной ситуации, обращаясь с величиной $N(t)$ так, как если бы это была непрерывная и даже дифференцируемая функция!

3.1.2. Пример: радиоактивный распад. Рассмотрим пример из физики. В 1896 г. Беккерель открыл явление естественной *радиоактивности*¹, суть которого состоит в том, что атомы некоторых элементов (называемых *радиоактивными* — уран, радий, полоний и др.) самопроизвольно распадаются, превращаясь в другие вещества, причем радиоактивный распад сопровождается излучением, имеющим гораздо большую энергию, чем свет (частный вид электромагнитного излучения).

Антуан Анри Беккерель (1852–1908) — французский физик. Его отец Александр Эдмон (1820–1891) и дед Антуан Сезар (1788–1878) также были видными физиками и занимались изучением различного рода *излучений* типа *люминесценции*. Антуан Беккерель, как бы продолжая их исследования, ставил опыты по проверке гипотезы известнейшего французского математика и физика Анри Пуанкаре (1854–1912) о том, что *флуоресценция* солей урана имеет ту же природу, что и открытые в 1895 г. немецким физиком-экспериментатором Вильгельмом Рентгеном (1845–1923) «рентгеновские» лучи (за это открытие ему в 1901 г. первому среди физиков была присуждена Нобелевская премия). И в 1896 г. Беккерель открыл нечто большее, обнаружив,

¹От лат. radiare — «испускать лучи» (слово, однокоренное с математическим термином *радиус*, лат. radius — спица в колесе, луч) и activus — «действенный».

что кристаллики урана излучают, не флуоресцируя. Это явление там же, в Париже, стали исследовать супруги Пьер Кюри (1859–1906; родился и работал в Париже, трагически погиб в результате несчастного случая) и Мария Склодовская-Кюри (1867–1934; родилась в Варшаве, училась в Париже, работала в Париже и Севре). Анализируя продукты распада урановой руды (тонн руды!), они в 1898 г. открыли два новых радиоактивных элемента: *полоний* (названный так в честь Польши, родины Склодовской) и *радий*, излучение которого было сильнее, чем у урана. Тогда же они и предложили термин *радиоактивность*.

В 1903 г. все три основоположника изучения радиоактивности были удостоены Нобелевской премии, причем в 1911 г. Марии Склодовской-Кюри была присуждена еще одна Нобелевская премия, на сей раз по химии — за открытие элементов радия и полония, за получение металлического радия и ее эксперименты с этим элементом. (Умерла Склодовская-Кюри от лучевой болезни. Дочь супругов Кюри Ирен стала также выдающимся физиком — о ней см. в § 3.4.)

Экспериментально установленный *основной закон радиоактивного распада* состоит в том, что отношение числа распавшихся за единицу времени атомов к общему числу атомов (которое предполагается большим) является зависящей только от вида атомов константой, называемой *вероятностью распада*. Значит, если через $M(t)$ обозначить число атомов в момент времени t , а через ω — вероятность распада, то приращение функции $M(t)$ через промежуток времени Δt можно записать в виде

$$\Delta M(t, \Delta t) = M(t + \Delta t) - M(t) \approx -\omega M(t) \cdot \Delta t$$

(знак «минус» соответствует тому, что число атомов уменьшается). Как и в предыдущем примере, после деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ мы получаем дифференциальное уравнение вида (2),

$$M'(t) = -\omega M(t),$$

но на сей раз с отрицательным коэффициентом $k = -\omega$. Отметим, что при введении такой модели радиоактивного распада мы также абстрагируемся от дискретности изменения числа атомов — считая его очень большим, полагаем, что оно описывается непрерывной и дифференцируемой функцией $M(t)$.

3.1.3. Пример: вязкое трение. Последний пример приведем из области механики. При движении тела в вязкой среде (в жидкости или газе) на него действует *сила вязкого трения*, направленная противоположно скорости движения и пропорциональная ей:

$$F_{\text{тр}} = -\lambda v = -\lambda x'$$

(как обычно, мы считаем движение прямолинейным, а силы и скорости — скалярами, знак которых соответствует направлению). *Коэффици-*

циент трения λ пропорционален так называемой *вязкости* среды η ¹ и зависит также от формы и размеров движущегося тела.

Например, для шара радиуса R значение коэффициента λ равно $6\pi R\eta$ — эта формула называется *законом Стокса*. Джордж Габриэль Стокс (1819–1903) — английский физик и математик, именем которого, наряду с этим законом (1851), названы общие уравнения движения жидкости с учетом вязкости (уравнения Навье—Стокса; Луи Мари Анри Навье (1785–1836) — французский математик и механик), а также одна из важнейших формул многомерного (векторного) анализа.

Если движение *свободное*, т. е. на тело не действуют никакие внешние силы (кроме силы трения), то второй закон Ньютона,

$$mx'' = F = -\lambda x',$$

дает для скорости $v = x'$ линейное дифференциальное уравнение вида (2):

$$v' = -\frac{\lambda}{m}v.$$

Если же на тело дополнительно действует постоянная внешняя сила, то мы приходим к неоднородному линейному дифференциальному уравнению вида (3) — скажем, для падения в поле тяжести Земли тела с парашютом получаем уравнение

$$mv' = -mg - \lambda v.$$

Мы вернемся к этим и другим примерам, а теперь обратимся к *предварительному* общему анализу дифференциального уравнения вида (2).

3.1.4. Анализ дифференциального уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Эйлера. Напомним (см. § 4.2–4.3), что дифференциальное уравнение вида (1), или, в других обозначениях,

$$y' = F(x, y), \quad \text{т. е.} \quad y'(x) = F(x, y(x)),$$

где $F = F(x, y)$ — данная функция двух переменных, т. е. функция на координатной плоскости Oxy , задает на этой плоскости *поле направлений*. Графики $y = y(x)$ решений уравнения суть *интегральные кривые* этого поля направлений, и они (в хороших случаях) могут быть приближены *ломаными Эйлера*. Если $y(x_0) = y_0$, то вершины n -звенной ломаной Эйлера суть точки $M_n(x_m; y_m)$, где

$$x_m = x_0 + m \frac{x - x_0}{n}, \quad y_{m+1} = y_m + F(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m). \quad (4)$$

¹Скажем, для воздуха $\eta = 0,00018 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$, для воды (при 20°) $\eta = 0,01 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$.

Это дает для значения $y(x)$ приближение

$$y(x) \approx y_n = y_0 + \sum_{m=0}^{n-1} F(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m).$$

Для уравнения $y'(x) = ky(x)$ функция $F(x, y) = ky$ зависит только от y , поэтому поле направлений не меняется вдоль горизонтальных прямых $y = \text{const}$. Отсюда следует, что при параллельном переносе вдоль оси Ox любая интегральная кривая переходит в интегральную кривую. Аналитически это означает, что если функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения (2), то «сдвинутая» функция $y = y(x + c)$ также будет решением уравнения (2). Поэтому начальное условие $y(x_0) = y_0$ можно заменить на начальное условие в точке $x_0 = 0$, т. е. считать заданным значение $y(0) = y_0$.

Можно заметить еще, что в случае $k > 0$ поле направлений идет тем круче, чем больше значение y , и ломаные Эйлера «быстро и круто» удаляются от оси Ox (рис. 34).

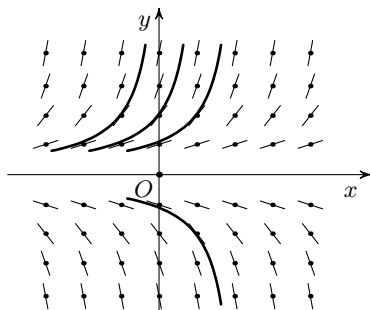


Рис. 34

Теперь посмотрим на формулы. В рекуррентных соотношениях (4) все скобки $(x_{m+1} - x_m)$ равны — они равны n -й части отрезка $[x_0, x] = [0, x]$, т. е. величине $h = \frac{x}{n}$. Подставляя в формулы (4) это значение $x_{m+1} - x_m$, а также значение $F(x_m, y_m) = ky_m$, мы получим вместо аддитивного мультипликативное рекуррентное соотношение

$$y_{m+1} = y_m + ky_m \frac{x}{n} = \left(1 + \frac{kx}{n}\right) y_m.$$

Очевидно, оно задает геометрическую прогрессию с начальным членом y_0 и знаменателем $q = 1 + \frac{kx}{n}$, причем нас интересует n -й член этой прогрессии, равный

$$y_n = y_0 \cdot \left(1 + \frac{kx}{n}\right)^n.$$

Таким образом, согласно нашему предположению решение дифференциального уравнения $y' = ky$, удовлетворяющее указанному начальному условию, должно задаваться предельным соотношением

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0 \cdot \left(1 + \frac{kx}{n}\right)^n. \quad (5)$$

Можно идти по этому пути дальше — доказать существование предела (5), исследовать свойства предельной функции и т. д.¹ Мы поступим иначе (несколько проще), спустя некоторое время вернувшись к геометрической интерпретации уравнения. Теперь же рассмотрим, как подходил к анализу дифференциального уравнения (2) Ньютон.

3.1.5. Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Ньютона. Мы изложим ньютонов подход на частном случае уравнения (2), когда $k = 1$, и при единичном начальном условии:

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1. \quad (6)$$

Допустим (следуя Ньютону), что задача (6) имеет решение $y = y(x)$, записывающееся как *многочлен* от x :

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots \quad (7)$$

(степень многочлена нам неизвестна). Из начального условия $y(0) = 1$ мы получаем значение свободного члена:

$$a_0 = 1. \quad (8)$$

Теперь продифференцируем выражение (7):

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x^3 + \dots$$

и приравняем результат самому этому выражению, в соответствии с уравнением (6). Равенство многочленов есть равенство их соответствующих коэффициентов, поэтому с учетом условия (8) должны выполняться равенства

$$a_1 = a_0 = 1,$$

$$2a_2 = a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2},$$

$$3a_3 = a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3!},$$

$$4a_4 = a_3 = \frac{1}{3!} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4!}$$

¹Заметим, что y_n — n -й член геометрической прогрессии, знаменатель q которой зависит от n , поэтому вопрос о поведении последовательности y_n при $n \rightarrow \infty$ совсем непрост.

и т. д. Коэффициент a_n при x^n должен быть равен

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Итак, поиски решения задачи (10) в виде многочлена привели к «многочлену бесконечной степени», но с весьма красивыми коэффициентами:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \quad (9)$$

Выражения такого вида называются *степенными рядами*, и Ньютон преуспел в отыскании решений разнообразных дифференциальных уравнений в виде (бесконечных) степенных рядов. Можно доказать, что при любом значении x ряд (9) сходится, в смысле существования предела

$$y(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} x^n.$$

Несколько сложнее доказать, что предельная функция $y(x)$ дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению (6). Еще более сложно выводятся основные (и весьма интересные!) свойства решения $y(x)$. В данном случае, как часто бывает, более продуктивно *исходить из самого дифференциального уравнения* вида (2). Так мы и поступим, однако сначала рассмотрим еще один вариант подхода к нашему дифференциальному уравнению.

3.1.6. Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: разностный аналог.

Рассмотрим *разностный аналог* дифференциального уравнения (2) — разностное уравнение¹, соответствующее известной информации о скорости изменения дискретно меняющейся величины, т. е. последовательности $y(n) = y_n$. Скорость изменения последовательности, естественно, определяется просто как *разность* $\Delta y(n) = \Delta y_n = y_{n+1} - y_n$.

Разность последовательности во многом похожа на производную функции. Например, для квадратичной функции x^2 производная $(x^2)' = 2x$, а для соответствующей квадратичной последовательности n^2 разность $\Delta n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ — почти то же самое! Соответственно этому дифференциальное уравнение $y'(x) = ky(x)$ следует заменить на разностное уравнение

$$\Delta y_n = ky_n. \quad (10)$$

Отсюда мы получаем

$$y_{n+1} - y_n = ky_n \Rightarrow y_{n+1} = (1 + k)y_n = qy_n, \quad q = 1 + k.$$

¹Подробнее о них см. в упражнениях к гл. II.

Следовательно, решениями разностного уравнения (10) будут геометрические прогрессии:

$$y_n = y_0 \cdot (1 + k)^n = Aq^n, \quad q = 1 + k.$$

Возникает вполне естественная *гипотеза* — раз решениями разностного уравнения $\Delta y(n) = ky(n)$ являются геометрические прогрессии, т. е. *показательные функции натурального аргумента* $y(n) = Aq^n = y_0 \cdot q^n$, то решениями дифференциального уравнения $y'(x) = ky(x)$ будут *показательные функции* $y(x) = Aa^x = y(0) \cdot a^x$ *действительного аргумента* $x \in \mathbb{R}$ при некотором значении основания a , зависящем от коэффициента k . Но если мы *не знаем*, что это такое — показательная функция действительного аргумента, т. е. число a , возведенное в *произвольную* действительную степень, то говорить ни о чем не приходится. Мы умеем возводить любое число $a > 0$ в дробную (т. е. рациональную) степень, но соответствующее определение совершенно не годится для отыскания, скажем, $a^{\sqrt{2}}$.

Можно поступить следующим образом: исходя *только из дифференциального уравнения* (2) вывести кое-какие (хорошие!) свойства его решений, в частности попытаться как-нибудь обосновать последнюю гипотезу. А уже потом обратиться к тому, как определить показательную функцию произвольного действительного аргумента, каковы ее свойства, производная и т. д. Эта программа действий приведена в практическом задании А в упражнениях и заданиях к этой главе — осуществите ее самостоятельно. Сейчас же мы вновь обратимся к геометрической интерпретации дифференциального уравнения (2), с тем чтобы подойти к задаче отыскания его решений с несколько другой стороны.

§ 3.2. Натуральный логарифм и экспонента

Изложим сначала *идею* подхода к анализу дифференциального уравнения (2) $y' = ky$, $k \neq 0$, осуществляемого в этом параграфе. Поле направлений уравнения (2) *постоянно вдоль горизонталей* $y = \text{const}$. После симметрии относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. прямой $y = x$, это поле направлений, рассматриваемое вместе со своими интегральными кривыми $y = y(x)$ (рис. 35), перейдет в поле направлений, постоянное вдоль *вертикалей* (рис. 36). Такие поля рассматривались в гл. IV; они отвечают дифференциальным уравнениям, задающим первообразные соответствующих функций. Таким образом, дифференциальное уравнение (2) должно свестись к дифференциальному уравнению вида $x'(y) = f(y)$, решать которое мы уже умеем.

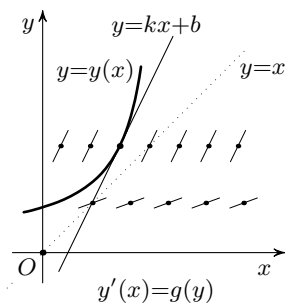


Рис. 35

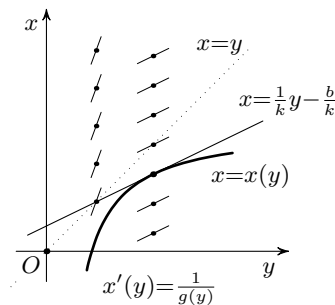


Рис. 36

3.2.1. «Симметричное» дифференциальное уравнение. Выясним точнее, что же все-таки получится после симметрии. Во-первых, оси Ox и Oy поменяются местами, и точка $(x; y)$ перейдет в точку $(y; x)$.

Во-вторых, задающая направление в точке (x, y) прямая $y = kx + b$ с угловым коэффициентом $K = g(y) = ky$, который будем считать отличным от нуля, перейдет в *симметричную прямую*. Она задает график обратной функции — линейной функции $x = \frac{1}{K}y - \frac{b}{K}$ с угловым коэффициентом $K_{\text{sym}} = \frac{1}{K}$. Значит, симметричное поле направлений на плоскости Oyx задается формулой

$$K_{\text{sym}} = F(y, x) = \frac{1}{K} = \frac{1}{g(y)} = f(y) = \frac{1}{ky} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{y},$$

т. е. на плоскости Oyx получается *известное* поле направлений, постоянное вдоль вертикалей.

Наконец, в-третьих, если решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (2) в окрестности точки x *обратимо*, то его график перейдет как раз в график *обратной функции* $x = x(y)$. Интуитивно ясно, что касание при симметрии сохранится, так что обратная функция $x(y)$ в окрестности точки y должна удовлетворять «*симметричному*» дифференциальному уравнению:

$$x'(y) = f(y) = \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}G(y) + C, \quad (1)$$

где $G(y)$ — какая-то (любая) первообразная функции $\lambda(y) = y^{-1}$ в окрестности точки y . Остается из уравнения (3) выразить y через x , благо в силу допущений об обратимости решения в окрестности точки x в принципе это возможно!

Итак, анализ решений однородного линейного уравнения (2) $y' = ky$ сводится к исследованию первообразных $G(y)$ *обратной пропорциональной зависимости*, т. е. функции $\lambda(y) = y^{-1}$. Забудем на время об исходном дифференциальном уравнении (2) и займемся «симметричным»

дифференциальным уравнением (3), точнее, его частным случаем — уравнением

$$y'(x) = \lambda(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

(ради простоты мы снова поменяли переменные y и x местами).

3.2.2. Натуральный логарифм. Согласно доказанному в гл. IV из непрерывности функции $\lambda(x) = x^{-1}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ следует существование на этой полуоси решения уравнения (4) и его единственность при заданном начальном условии $y(x_0) = y_0$, $x_0 > 0$.

Определение 1. Решение $y(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$, называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln(x)$ или $\ln x$.

Иными словами, натуральный логарифм — функция, (однозначно) определенная на положительной полуоси двумя соотношениями:

$$\forall x > 0 \quad \ln' x = \frac{1}{x}, \quad \ln 1 = 0. \quad (3)$$

Из определения следует, что на всей полуоси $\ln' x > 0$, значит, *натуральный логарифм возрастает на положительной полуоси*. Поэтому функция $x \mapsto \ln x$ *обратима* на положительной полуоси и, значит, имеет *обратную функцию*, называемую *натуральной экспонентой* и обозначаемую $\exp$:

$$x = \exp y \stackrel{\text{def}}{\iff} y = \ln x.$$

Предположительно с помощью этой функции и описываются все решения дифференциального уравнения (2), так что ее нужно рассмотреть подробнее, начиная с вопроса об области определения. Конечно, область определения функции $\exp$ совпадает с множеством значений натурального логарифма, но о нем мы тоже пока мало что знаем.

Теорема 1 (основное свойство натурального логарифма). *Для любых положительных чисел a, b выполняется равенство*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Доказательство. Для произвольного числа $a > 0$ рассмотрим определенную на всей положительной полуоси $x > 0$ функцию $\varphi(x) = \ln(ax)$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции и условию (5) ее производная равна

$$\varphi'(x) = (\ln(ax))' = \ln'(ax) \cdot (ax)' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x} = \ln' x.$$

Поэтому (согласно предложению 1 из § 4.1) функции $\varphi(x) = \ln(ax)$ и $\ln x$ *отличаются на константу*, т. е.

$$\varphi(x) = \ln(ax) = \ln x + C.$$

Подставляя в эту формулу значение $x = 1$, с учетом второго из условий (5) получаем

$$\varphi(a \cdot 1) = \ln 1 + C \Leftrightarrow \ln a = 0 + C \Rightarrow C = \ln a;$$

значит,

$$\forall x > 0 \ln(ax) = \ln x + C = \ln x + \ln a,$$

что и требовалось установить (возьмите $x = b > 0$ и переставьте слагаемые в правой части). $\square$

Следствие 1. Для любого положительного числа a выполняется равенство $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

Доказательство. Поскольку $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, согласно теореме 1 и условию (5), получаем

$$0 = \ln 1 = \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a} \Rightarrow \ln \frac{1}{a} = -\ln a. \quad \square$$

Следствие 2. Для любого числа $a > 0$ при любом целом m выполняется равенство

$$\ln a^m = m \ln a.$$

Доказательство. Если $m = n \in \mathbb{N}$ — натуральное число, то утверждение можно доказать *индукцией по n* : если $\ln a^n = n \ln a$, то по теореме 1

$$\ln a^{n+1} = \ln(a^n \cdot a) = \ln a^n + \ln a = n \ln a + \ln a = (n+1) \ln a.$$

Для $m = 0$ утверждение совпадает с условием (5). Если же, наконец, $m = -n$, где $n \in \mathbb{N}$ — натуральное число, то согласно предыдущему следствию и уже доказанному в случае $m = n \in \mathbb{N}$ получаем

$$a^m = a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Rightarrow \ln a^m = \ln \frac{1}{a^n} = -\ln a^n = -n \ln a = m \ln a. \quad \square$$

Предложение 1. Функция $\ln x$ принимает сколь угодно большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения; более того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty.$$

Доказательство. Возьмем произвольное значение $a > 1$ и рассмотрим две последовательности: $u_n = a^n$ и $v_n = a^{-n}$. Согласно следствию 2 имеем

$$\ln u_n = n \ln a, \quad \ln v_n = -n \ln a,$$

а поскольку при $a > 1$ выполняется неравенство $\ln a > 0$, мы получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln u_n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln v_n = -\infty.$$

Так как функция $\ln x$ возрастает на положительной полуоси, а по теореме о пределе геометрической прогрессии (§ 1.2) и в соответствии с выбором a ($a > 1$) при $n \rightarrow \infty$ мы имеем $u_n = a^n \rightarrow \infty$ и $v_n = (\frac{1}{a}) \rightarrow 0+$, из уже доказанного следует утверждение предложения 1 (формальное [«строгое»] рассуждение проведите самостоятельно). $\square$

Следствие 3. Множество значений функции $\ln x$ совпадает со всей числовой осью $\mathbb{R}$: $E(\ln) = \mathbb{R}$.

Доказательство. По своему определению функция $\ln x$ дифференцируема и поему непрерывна на всей положительной полуоси $x > 0$, а так как согласно предложению 1 она принимает сколь угодно большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения, по теореме о промежуточном значении

$$\forall z \in \mathbb{R} \exists x > 0 \quad \ln x = z. \quad \square$$

Обратим внимание на то, что все доказанные выше свойства натурального логарифма, включая возрастание на области определения $D(\ln) = \mathbb{R}_+$, мы доказали исходя только из дифференциального уравнения (4), решением которого является натуральный логарифм (оно было использовано при доказательстве *основного свойства* — теоремы 1 — и при установлении монотонности), и начального условия, которому удовлетворяет это решение ($y(1) = \ln 1 = 0$).

3.2.3. Натуральная экспонента. Из доказанного вытекает, что функция $z = \ln x$ обратима на положительной полуоси $x > 0$ и принимает на ней все действительные значения $z \in \mathbb{R}$, поэтому существует функция, обратная к $\ln x$, определенная на всей числовой оси $\mathbb{R}$ и принимающая любые положительные значения.

Определение 2. Функция $\exp(z)$ (или $\exp z$, без скобок), обратная к функции $z = \ln x$ на положительной полуоси $x > 0$, называется *натуральной экспонентой*.

Таким образом, натуральная экспонента $\exp(z)$ определена на всей числовой оси $\mathbb{R}$, строго возрастает¹ на ней и принимает любые положительные значения, причем $\exp 0 = 1$ (последнее следует из условия (5): $\ln 1 = 0$). Кроме того, как любые две взаимно обратные функции, функции $\ln$ и $\exp$ связаны соотношениями

$$\forall x > 0 \quad \exp(\ln x) = x; \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp z) = z. \quad (4)$$

Докажем еще несколько свойств натуральной экспоненты, сделав предварительно два замечания.

¹Функция, обратная к строго монотонной функции, сама является строго монотонной с тем же «направлением» монотонности.

Замечание 1. Чтобы доказать, что два положительных числа равны, достаточно доказать, что их натуральные логарифмы равны.

Замечание 2. Чтобы доказать, что два произвольных числа равны, достаточно доказать, что их натуральные экспоненты равны.

Эти утверждения следуют из строгой монотонности функций $\ln x$ и $\exp x$ (например, можно провести рассуждение *от противного*). Заметим вдобавок, что в том и другом случаях вместо слов «достаточно доказать» можно сказать «необходимо и достаточно доказать»; однако нам будет достаточно утверждения о «достаточности» (на самом деле, нам «хватит» только утверждения замечания 1).

Предложение 2 (производная натуральной экспоненты). *Функция $\exp x$ дифференцируема на всей числовой оси, причем*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp' x = \exp x.$$

Доказательство. По теореме о производной обратной функции из формулы для производной натурального логарифма (согласно условию (5) $\forall x > 0 \quad \ln' x = \frac{1}{x} > 0$) находим

$$\exp' x = \left(\frac{1}{\ln' y} \right)_{y=\exp x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y} \right)_{y=\exp x}} = y|_{y=\exp x} = \exp x. \quad \square$$

Следствие 4. *Функция $y = y(x) = \exp x$ является решением дифференциального уравнения*

$$y' = y,$$

удовлетворяющим «единичному» начальному условию

$$y(0) = 1.$$

Доказательство очевидно. □

Итак, мы нашли одно из решений одного из дифференциальных уравнений вида (2): $y' = ky$ при $k = 1$. Не можете ли вы найти какие-нибудь *другие* решения этого уравнения? Указать *все* его решения? К обсуждению этих вопросов сразу при произвольном значении k мы вернемся чуть позже, в конце параграфа.

Теорема 2 (основное свойство натуральной экспоненты). *Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется равенство*

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b.$$

Доказательство. В принципе, это предложение можно вывести из предыдущего следствия, т. е. из дифференциального уравнения $y' = y$ с учетом начального условия $y(0) = 1$, по схеме из задания А к данной главе (к § 3.1). Однако проще использовать непосредственно

определение натуральной экспоненты: согласно замечанию 1 достаточно доказать, что $\ln(\exp(a+b)) = \ln(\exp a \cdot \exp b)$.

Согласно второму из тождеств (6) левая часть этого равенства имеет вид $L = a + b$. Далее, из теоремы 1 (из *основного свойства функции* $\ln z$) следует, что правая часть равна $R = \ln \exp a + \ln \exp b$, а из того же тождества (6) — что $R = a + b = L$. $\square$

Отметим, что основное свойство экспоненты можно усмотреть сразу, без приведенных формальных рассуждений. Действительно, основное свойство логарифма (теорема 1) означает, что *отображение* (функция) $\ln: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln x$ *операцию умножения на $\mathbb{R}_+$ переводит в операцию сложения на $\mathbb{R}$* . Следовательно, *обратное отображение* $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+: x \mapsto \exp x$ *операцию сложения на $\mathbb{R}$ переводит в операцию умножения на $\mathbb{R}_+$* , а это и есть утверждение теоремы 2. Обдумайте приведенное рассуждение.

3.2.4. Экспонента и показательная функция.

Определение 3. Значение натуральной экспоненты при $x = 1$, т. е. число $\exp(1)$, называется *основанием натуральных логарифмов* и обозначается латинской буквой e .

Теорема 3 (о значениях натуральной экспоненты в рациональных точках). *Для любого рационального числа x значение функции $\exp x$ совпадает со значением показательной функции e^x :*

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exp x = e^x.$$

Доказательство. Напомним, что для любого положительного числа a его рациональная степень a^x , $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), определяется равенством $a^x = \sqrt[n]{a^m}$, а целая степень a^m , где $m = -n < 0$, — равенством $a^m = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (натуральная степень a^n есть произведение n сомножителей, равных a ; $a^0 = 1$). Приступим к доказательству теоремы. Оно состоит из четырех «шагов».

I. Из основного свойства экспоненты следует, что для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\exp(n\alpha) = \exp(\underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_n) = \underbrace{\exp \alpha \cdot \dots \cdot \exp \alpha}_n = (\exp \alpha)^n = \exp^n \alpha. \quad (5)$$

II. Так как $\exp(0) = 1$, мы получаем

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1,$$

откуда следует, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp^{-1} x.$$

Это соотношение и свойство (5) дают равенство

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \exp(mx) = \exp^m x. \quad (6)$$

III. Полагая в равенстве (5) $\alpha = \frac{c}{n}$, заключаем, что

$$\exp(c) = \exp(n\alpha) = (\exp \alpha)^n = \left(\exp\left(\frac{c}{n}\right) \right)^n,$$

откуда с учетом положительности функции $\exp(x)$ имеем

$$\forall c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq 2) \quad \exp\left(\frac{c}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(c)} = \exp^{\frac{1}{n}}(c). \quad (7)$$

IV. Наконец, для произвольного рационального числа $x = \frac{m}{n}$ из соотношений (6) и (7) получаем

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(m)} = \sqrt[n]{\exp(m \cdot 1)} = \sqrt[n]{\exp^m(1)} = e^{\frac{m}{n}} = e^x,$$

что и требовалось установить. $\square$

Итак, *всюду определенная* и строго монотонная функция $\exp x$ при всех рациональных значениях x совпадает с *показательной функцией с основанием $e = \exp 1$* . Точно такие же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3, показывают, что *при любом значении $\alpha \in \mathbb{R}$ для любого рационального значения $x \in \mathbb{Q}$ выполняется равенство $\exp(\alpha x) = a^x$, где $a = \exp \alpha$* , т. е. функция $\exp(\alpha x)$ при всех рациональных значениях x совпадает с *показательной функцией с основанием $a = \exp \alpha$* (проведите формальное доказательство самостоятельно). Теперь вспомним, что при $a > 0$, $a \neq 1$ *показательная функция $x \mapsto a^x$ произвольного действительного аргумента x определяется¹ как строго монотонная функция, при всех рациональных значениях аргумента $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ совпадающая с рациональной степенью $a^x = \sqrt[n]{a^m}$* , и заметим, что *любое положительное число a записывается в виде $a = \exp \alpha$, где $\alpha = \ln a$* (см. формулы (4)). Получаем фундаментальную связь между произвольной показательной функцией и натуральными экспонентой и логарифмом: *при любом $a > 0$ на всей числовой оси выполняется равенство*

$$a^x = \exp(\alpha x), \quad \alpha = \ln a. \quad (8)$$

Показательную функцию с произвольным основанием $a > 0$, $a \neq 1$, также называют *экспонентной* (экспоненциальной функцией) с *основанием a* и обозначают $a^x = \exp_a x$ (читается «экспонента по основанию a от x ») — аналогично тому, как функция, обратная к a^x , есть *логарифм по основанию a : $\log_a x$* . Естественно, произвольный логарифм выражается через натуральный. Согласно формуле (8) имеем

$$y = a^x = \exp((\ln a)x) \Leftrightarrow (\ln a)x = \ln y \Leftrightarrow x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}. \quad (9)$$

¹См. школьный учебник.

Экспонента — от лат. *exponere* — «выставлять напоказ»; *exponens*, *exponentis* — «выставляющий напоказ», «показывающий». Первоначально немецкий математик (сначала монах, а затем — профессор!) Михаэль Штифель (1487–1567) соответствующим немецким словом *Exponent* называл показатель степени, в том числе и дробный (1553 г.). Термин *экспоненциальная* (или *показательная*) *функция* (*кривая*) для зависимости $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, ввел Г. В. Лейбниц (1679 г.).

Исторически логарифмы появились в математике раньше, чем экспоненты произвольного аргумента. Термин *логарифм* (лат. *logarithmus*) ввел один из двух «изобретателей» логарифмов Джон Непер (1550–1617) — шотландский барон, математик, занимавшийся упрощением и упорядочением современных ему разделов математики. Логарифмы «появились» у него вместе с *таблицами логарифмов*, т. е. фактически как логарифмическая зависимость (функция) (1614 г.). Само же слово *logarithmus* произошло от двух греческих слов: *λογος* (логос) — в данном случае «отношение» — и *αριθμος* (арифмос) — «число», так что полностью термин можно перевести как «числа отношений». Обычно это объясняется сопоставлением двух прогрессий — арифметической 0, 1, 2, 3, 4, ... и геометрической 1, a , a^2 , a^3 , a^4 , ..., так что отношению (делению) во второй прогрессии отвечает разность (вычитание) в первой, в которой как раз записаны логарифмы степеней. Непер, а еще раньше (1603 г.; опубликовано только в 1620 г.) швейцарский часовщик и астроном, друг Кеплера Иост Бюрги (1552–1632) пришли к логарифмам, отталкиваясь от чисто практической задачи *упрощения вычислений*.

Первым осознал практическую важность десятичных логарифмов (с основанием 10) и опубликовал их таблицы (1617 г.) английский математик, профессор Оксфорда Генри Бригс (1561–1630) — большой поклонник Дж. Непера. Современное обозначение для десятичных логарифмов, $\log_{10} x = \lg x$, ввел О. Л. Коши.

Для упрощения вычислений используется *основное свойство логарифмов* — формула из теоремы 1, справедливая для логарифмов с любым основанием. Логарифмы позволяют умножение и деление свести к более простым действиям — сложению и вычитанию (а так называемые действия третьей ступени, возведение в степень и извлечение корня — к действиям второй ступени: умножению и делению). Например, умножение с помощью логарифмов производится так: чтобы найти произведение AB , по таблице логарифмов находим $\log_a A$ и $\log_a B$, складываем эти логарифмы и в таблице находим такое число C , логарифм которого равен вычисленной сумме — это и есть произведение AB . Вторая упоминаемая выше таблица должна позволить по показателю (пусть он равен α) найти степень, a^α , т. е. это таблица значений экспоненты $\exp_a \alpha$, которую обычно (следуя Неперу) называют таблицей *антилогарифмов* (Бюрги в 1620 г. издал как раз таблицу *антилогарифмов*, в отличие от таблиц логарифмов Непера и Бригса). Разумеется, здесь a — любое такое число, что $a > 0$, $a \neq 1$ (на практике часто берут основание $a = 10$).

Отметим, что до изобретения логарифмов в практических вычислениях использовалась известная тригонометрическая формула

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2};$$

ее, например, виртуозно использовал «предшественник» Кеплера знаменитый астроном Тихо Браге (1546–1601). Подумайте, как вычислять произведение двух чисел с помощью этой формулы (и таблиц косинусов и «антикосинусов» — арккосинусов).

3.2.5. Решения дифференциального уравнения $y' = ky$. Из формул (8)–(9) и формул дифференцирования натуральных логарифма и экспоненты следуют формулы дифференцирования произвольных

логарифма и экспоненты:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$a^x = \exp(\alpha x) \Rightarrow (a^x)' = \exp'(\alpha x) \cdot (\alpha x)' = \alpha \exp(\alpha x) = \alpha a^x, \quad \alpha = \ln a.$$

При решении дифференциальных уравнений удобнее такой вариант последней формулы:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}.$$

Значит, если $y(x) = e^{kx}$, то $y'(x) = ky(x)$, т. е. указанная функция является решением дифференциального уравнения (1) $y' = ky$.

Возвратимся к вопросу: нет ли других решений этого уравнения? — Конечно, есть: ему удовлетворяет и любая функция вида $y = Ae^{kx}$, где A — произвольная *мультипликативная константа*¹. — А нет ли «совсем других» решений? — Оказывается, *нет*.

Теорема 4 (существования и единственности решений дифференциального уравнения $y' = ky$). *Функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y' = ky \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда она записывается в виде

$$y(x) = Ae^{kx}, \tag{10}$$

где мультипликативная константа A однозначно определяется начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \quad (\text{или} \quad y(0) = y_0). \tag{11}$$

Доказательство. То, что любая функция вида (10) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), мы только что видели. Докажем обратное.

Пусть некоторая функция $y(x)$ является решением уравнения (1). Рассмотрим функцию $h(x) = y(x)e^{-kx}$. Так как $y' = ky$, имеем

$$\begin{aligned} h'(x) &= (y(x)e^{-kx})' = y'(x) \cdot e^{-kx} + y(x) \cdot (e^{-kx})' = \\ &= ky(x)e^{-kx} + y(x) \cdot (-k)e^{-kx} = ky(x)e^{-kx} - ky(x)e^{-kx} \equiv 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = y(x)e^{-kx} \equiv \text{const} = A \Rightarrow y(x) = Ae^{kx}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Учтем теперь начальное условие (11):

$$y(x_0) = Ae^{kx_0} = y_0 \Rightarrow A = y_0 e^{-kx_0} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{-kx_0} e^{kx} = y_0 e^{k(x-x_0)}.$$

¹Т. е. константа, являющаяся *множителем*, от лат. multiplicatio: «умножение».

В частности, если $x_0 = 0$, то получаем совсем простую формулу

$$y(x) = y_0 e^{kx}.$$

Теорема доказана полностью. □

§ 3.3. Экспоненциальный рост и теоремы о сравнении

3.3.1. Ньютоновы «экспоненциальные» многочлены. Проведенный в § 3.1 анализ дифференциального уравнения $y' = ky$ в случае $k = 1$ и при начальном условии $y(0) = 1$ привел нас, в частности, к гипотетическому представлению решения в виде степенного ряда

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Доказательство сходимости этого ряда, причем именно к искомому решению, расписано по шагам в задании Б к этой главе. Сейчас же покажем, что конечные отрезки ряда, т. е. многочлены

$$e_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

на положительной полуоси $x \geq 0$ не превосходят натуральной экспоненты e^x . Это факт весьма примечательный и важный: отсюда получается, что при $x \rightarrow +\infty$ экспонента превосходит многочлен любой, сколь угодно большой, степени.

Лемма 1 (лемма о ньютоновых аппроксимациях экспоненты). Для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и для любого $x > 0$ справедливо неравенство

$$e^x > e_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}. \quad (1)$$

Доказательство проведем индукцией по $n \geq 0$, предварительно заметив, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e'_n(x) = e_{n-1}(x)$$

(проверьте!). Кроме того, в доказательстве будет использована теорема о сравнении функций по их производным: если для непрерывных в точке x_0 и дифференцируемых при $x > x_0$ функций f и g выполнены условия

$$\text{а) } f(x_0) = g(x_0);$$

$$\text{б) } \forall x > x_0 \quad f'(x) > g'(x),$$

то при любом значении $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > g(x)$ (чтобы доказать это, достаточно к функции $h(x) = f(x) - g(x)$ применить признак монотонности функции, т. е. показать, что при $x > x_0$ значение $h(x)$ больше $h(x_0) = 0$).

База индукции. Получающееся в случае $n = 0$ неравенство $e^x > e_0(x) \equiv 1$, конечно, справедливо при любом значении $x > 0$ (это следует из возрастания функции e^x на всей числовой оси, что, в свою очередь, следует из положительности производной $(e^x)' = e^x$).

Шаг индукции. Допустим, что $\forall k < n \quad \forall x > 0 \quad e^x > e_k(x)$, и докажем, что $\forall x > 0 \quad e^x > e_n(x)$. Заметим следующее:

- 1) при $x = 0$ справедливо равенство $e^x = e^0 = e_n(x) = e_n(0) = 1$;
- 2) при $x > 0$ по предположению $(e^x)' = e^x > e_{n-1}(x) = (e_n(x))'$.

Следовательно, по теореме о сравнении $\forall x > 0 \quad e^x > e_n(x)$, что и требовалось установить.

Согласно *принципу математической индукции* $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall x > 0 \quad e^x > e_n(x)$. □

Применим простейший нетривиальный вариант этой оценки,

$$\forall x > 0 \quad e^x > e_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad (2)$$

для ответа на нередко встречающийся на практике вопрос.

3.3.2. Как отличить экспоненциальный рост от степенного?

Допустим, у каждого объекта из некоторой совокупности (объектов) измеряются какие-то две его численные характеристики x и y (например, у звезд измеряются их температуры и светимости). Далее в координатах $(x; y)$ строятся результаты измерений как совокупности точек (для каждого объекта с параметрами x, y на плоскости Oxy рассматривается точка $M(x; y)$). Вполне возможно, что эти точки будут размещаться на некоторой кривой линии (или некотором подобии кривой линии — в упомянутом примере температур и светимостей звезд получится так называемая *диаграмма Герцшпрунга—Рессела*, играющая важнейшую роль в астрофизике и звездной астрономии).

Эйнар Герцшпрунг (1873–1967) — датский астроном; в 1911 г. по своим наблюдениям построил диаграмму «цвет» (спектр, или же температура) — «светимость» для звезд из скоплений Гиады и Плеяды. В 1913 г. аналогичную диаграмму для группы звезд в «окрестности» Солнца, вполне согласующуюся с диаграммой Герцшпрунга, построил американский астроном Генри Норрис Рессел (Рассел) (1877–1957). На основании этой диаграммы он выдвинул свою концепцию звездной эволюции (1913–1914).

Спрашивается, какой будет зависимость величины y от x — допустим, при условии, что есть только две возможности: *экспоненциальная зависимость*

$$(I) \quad y = Ae^{kx} = Aa^x, \quad k > 0 \quad (a > 1), \quad A > 0, \quad (=w_e),$$

или *степенная зависимость*

$$(II) \quad y = Cx^\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (\text{или } \alpha > 1, \text{ или даже } \alpha \gg 1^1).$$

Как видно, например, из рис. 37, при некотором удалении от начала координат зависимости (I) и (II) трудно отличить одну от другой. Как же быть?

Ответ весьма прост: нужно перейти к *логарифмическим шкалам*, т.е. рассматривать точки не в осях $(x; y)$, а в координатах $(z; w) = (\ln x; \ln y)$. Логарифмируя зависимости (I) и (II) (например, по основанию e , хотя это не существенно), мы придем к зависимостям между соответствующими логарифмами:

$$(I_L) \quad w = \ln y = \ln A + kx = b + ke^{\ln x} = b + ke^z (= w_e),$$

$$(II_L) \quad w = \ln y = \ln C + \alpha \ln x = c + \alpha z (= w_p).$$

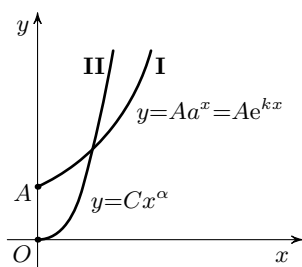


Рис. 37

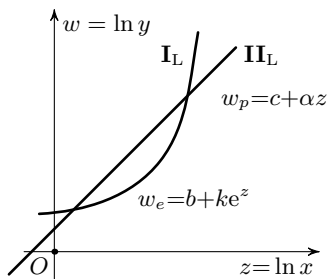


Рис. 38

Такие две зависимости уже легко различимы — для степенной зависимости w_p точки размещаются на прямой, в то время как экспоненциальная зависимость и в логарифмических шкалах $(z; w)$ будет экспоненциальной зависимостью $w_e = b + ke^z$: ее график при достаточно больших значениях логарифмической переменной z проходит выше графика линейной зависимости $w_p = c + \alpha z$ (рис. 38). Чтобы доказать это, рассмотрим разность $w_e - w_p$ и оценим ее снизу, используя неравенство (2):

$$w_e - w_p = b - c + ke^z - \alpha z > b - c + k \left(1 + z + \frac{z^2}{2} \right) \alpha z = p_2(z).$$

Поскольку $p_2(z)$ — квадратичная функция с положительным коэффициентом $\frac{k}{2}$ при z^2 , при достаточно больших значениях z выполняется неравенство $p_2(z) > 0$ и, соответственно, $w_e - w_p > 0$, что и утверждалось. В общем случае исследование того, лежат ли в пределах допустимой погрешности точки на одной прямой, особого труда не составляет.

¹Знак $\gg$ в физике, да иногда и в математике, используют, когда нужно указать, что одна величина «много больше» другой.

Но мы воздержимся от углубления в эти вопросы, относящиеся к специальному разделу математики — математической статистике.

3.3.3. Что такое экспоненциальный рост на бесконечности?

При рассмотрении экспоненциальной зависимости

$$y = Ae^{kx} = Aa^x$$

одной переменной от другой в случае $k > 0$ (или $a > 1$) и $A > 0$ говорят об *экспоненциальном росте* $y(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (или просто «на $+\infty$ »). Это существенная характеристика зависимости, означающая, что экспонента $e^{kx} = a^x$ *растет* при $x \rightarrow +\infty$ *быстрее*, чем любая *степенная функция* x^α , в смысле, указываемом в следующей теореме.

Теорема 1 (первая теорема о сравнении). *Для любого $a > 1$ и для любого $\alpha > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

Доказательство. Первый способ. Поскольку рассматривается предел на $+\infty$, можно принимать во внимание только значения $x > 0$. Выберем натуральное число $n > \alpha$ (например, $n = [\alpha] + 1$). Учитывая, что если $x > 0$, то $kx > 0$, заменим в дроби

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{x^\alpha}{e^{kx}}$$

знаменатель e^{kx} на меньшее, согласно первой лемме о ньютоновых аппроксимациях (см. неравенство (1)), выражение

$$e_n(kx) = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!}.$$

Дробь при этом только увеличится, и мы получим

$$0 < \frac{x^\alpha}{e^{kx}} < \frac{x^\alpha}{1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!}} < \frac{x^\alpha}{\frac{k^n x^n}{n!}} = \frac{n!}{k^n} x^{\alpha-n}.$$

Так как по выбору n показатель $\alpha - n$ отрицателен, мы получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{k^n} x^{\alpha-n} = 0,$$

и по «лемме о двух милиционерах»¹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{kx}} = 0. \quad \square$$

Второй способ доказательства теоремы состоит в непосредственной оценке отношения степенной и показательной функций.

¹Если для трех функций $\alpha(x)$, $\varphi(x)$, $\beta(x)$ выполняются неравенства $\alpha(x) < \varphi(x) < \beta(x)$, причем функции α и β («милиционеры») имеют одинаковые пределы (в точке или на бесконечности), то и функция φ имеет тот же предел.

Лемма 1. Если $a > 1$, то при любом значении $\alpha > 0$ выполняется условие

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0 \quad \frac{x^\alpha}{a^x} \leq \frac{M}{x}. \quad (3)$$

Доказательство. Умножая обе части неравенства (3) на x , получаем, что достаточно установить ограниченность сверху функции $\varphi(x) = x^{\alpha+1} \cdot a^{-x}$ на промежутке $x > 0$. Для этого исследуем функцию $\varphi(x)$ на монотонность. Имеем

$$\begin{aligned} (\varphi(x))' &= (x^{\alpha+1} \cdot a^{-x})' = (\alpha+1)x^\alpha \cdot a^{-x} + x^{\alpha+1} \cdot \ln a \cdot a^{-x} \cdot (-1) = \\ &= x^\alpha a^{-x} ((\alpha+1) - \ln a \cdot x). \end{aligned}$$

Таким образом, знак производной $\varphi'(x)$ определяется знаком стоящего в скобках выражения $L(x) = (\alpha+1) - \ln a \cdot x$, которое представляет собой линейную функцию с отрицательным угловым коэффициентом, обращающуюся в нуль при $x = x_0 = \frac{\alpha+1}{\ln a}$. Отсюда следует, что при $x < x_0$ выполняется неравенство $\varphi'(x) > 0$ и функция $\varphi(x)$ возрастает, а при $x > x_0$ выполняется неравенство $\varphi'(x) < 0$ и функция $\varphi(x)$ убывает. Учитывая непрерывность функции $\varphi(x)$, получаем, что

$$\max_{(0, +\infty)} \varphi(x) = \varphi(x_0) = M,$$

так что $\varphi(x) \leq M$ для этого значения M при любом $x > 0$. □

Разумеется, из полученной оценки (3) сразу следует утверждение теоремы (можно и в этом случае сослаться на лемму о двух милиционерах).

Контрольный вопрос: где в этих доказательствах использовалось, что $k > 0$ (или $a > 1$)?

Следствие 1. Экспоненциальная функция q^x с основанием $q < 1$ ($q > 0$) стремится к нулю (или убывает) на $+\infty$ быстрее, чем любая степень с отрицательным показателем $x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, в том смысле, что при указанных условиях

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q^x}{x^{-\alpha}} = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Преобразовав указанное в пределе (4) выражение, получим дробь

$$\frac{q^x}{x^{-\alpha}} = \frac{x^\alpha}{\left(\frac{1}{q}\right)^x},$$

которая в соответствии с первой теоремой о сравнении стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ (заметим, что $\frac{1}{q} > 1$). □

Еще одно следствие первой теоремы дает существенно новое утверждение, само по себе заслуживающее наименования теоремы, — к нему мы и переходим.

3.3.4. Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow +\infty$. Кроме задачи различения экспоненциальной и степенной зависимостей на практике довольно часто возникает необходимость различения не «быстрого», а, напротив, медленного роста. Принципиально важно уметь отличать *логарифмический рост* по закону

$$(III) \quad y = A \log_a x = A \cdot \frac{\ln x}{\ln a} = B \ln x \quad (A > 0, a > 1; B > 0)$$

от *степенного роста*, типа арифметического корня, по закону

$$(IV) \quad y = Cx^\alpha \quad (\alpha > 0; \text{интерес представляет случай } \alpha < 1).$$

В обоих этих случаях (но только при $\alpha < 1$) функции $y(x)$ *возрастают*, но *скорости их возрастания убывают* (рис. 39).

Данную ситуацию проясняет переход к логарифмической шкале по оси Ox , т. е. рассмотрение этих зависимостей не в осях $(x; y)$, а в координатах $(u; v) = (\ln x; y)$ (шкала y не меняется, но для удобства переменную y мы переобозначили через v). Зависимости (III) и (IV) в координатах $(u; v)$ записываются в виде

$$(III_L) \quad v = v_l = Bu$$

и

$$(IV_L) \quad v = v_e = Ce^{\alpha u} \quad (\text{ибо } u = \ln x \Rightarrow x = e^u).$$

Конечно, линейную зависимость v_l легко отличить от экспоненциальной зависимости v_e (рис. 40), хотя бы исходя из первой теоремы о сравнении: вторая функция растет на $+\infty$ «гораздо быстрее» первой (линейной). В соответствии с этим мы получаем, что логарифмическая функция $\log_a x$ (или $\ln x$) *растет при $x \rightarrow +\infty$ медленнее, чем любая степенная функция x^α , $\alpha > 0$* , в указанном в следующей теореме смысле.

Теорема 2 (вторая теорема о сравнении). *Для любого $a > 1$ и для любого $\alpha > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что при любом $\alpha > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0. \quad (5)$$

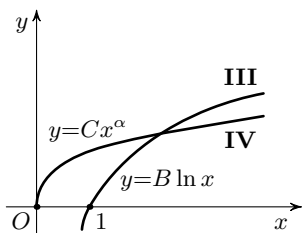


Рис. 39

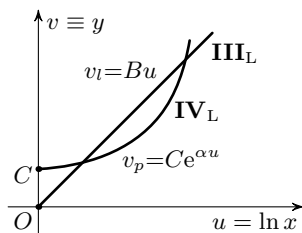


Рис. 40

Введем новую переменную $u = \ln x$; тогда $x = e^u$, а так как $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow u \rightarrow +\infty$, предел (5) равен пределу

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^{\alpha u}},$$

который согласно *первой теореме о сравнении* равен нулю. $\square$

Замечание. Напрашивается попытка доказать «вторую теорему» с помощью непосредственной оценки вида неравенства (3) из второго способа доказательства первой теоремы о сравнении: для некоторого значения $M > 0$ выполняется соотношение

$$\forall x > 1 \quad \frac{\ln x}{x^\alpha} \leq \frac{M}{x}, \quad (6)$$

или, иначе говоря, *функция $\varphi(x) = x^{1-\alpha} \cdot \ln x$ ограничена на промежутке $(1, +\infty)$* . Но, оказывается, в случае $\alpha < 1$ это неверно (см. упражнения). Тем не менее, оценку (6) можно заменить оценкой вида

$$\forall x > 1 \quad \frac{\ln x}{x^\alpha} \leq \frac{M}{x^\beta}$$

для некоторого значения $\beta > 0$ (попробуйте сделать это самостоятельно!), и тогда «вторая теорема» также выводится из леммы о двух милиционерах.

3.3.5. Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow 0+$. При решении различного рода задач нередко возникает еще один вопрос — о сравнении роста степенной функции с отрицательным показателем $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, и произвольной логарифмической функции $\log_a x$ в нуле, т. е. при $x \rightarrow 0+$ (при x , стремящемся к нулю справа). Каждая из этих функций стремится к бесконечности (если $a > 1$, то $\log_a x \rightarrow -\infty$) при $x \rightarrow 0+$, но которая *быстрее* (скажем, по абсолютной величине)?

Теорема 3 (третья теорема о сравнении). *Для любого $a > 0$, $a \neq 1$, и для любого $\alpha > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log_a x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log_a x = 0,$$

т. е. при $x \rightarrow 0+$ любая логарифмическая функция $\log_a x$ растет (стремится по модулю к бесконечности) медленнее, чем любая степенная функция $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Доказательство. Введем новую переменную $z = \frac{1}{x}$; тогда $x \rightarrow 0+ \Leftrightarrow z \rightarrow +\infty$, рассматриваемый предел можно переписать в виде

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha \log_a \frac{1}{z} = - \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\log_a z}{z^\alpha}$$

и согласно второй теореме о сравнении¹ он равен нулю. □

§ 3.4. Экспоненциальные модели

Теперь мы в состоянии записать закон эволюции $x = x(t)$ для любого процесса, моделируемого с помощью (однородного) линейного дифференциального уравнения вида $(1)^2$ $x'(t) = kx(t)$. Согласно теореме 4 из § 3.2 если $x(0) = X_0$, то x меняется по экспоненциальному закону: $x(t) = X_0 e^{kt}$. В соответствии с доказанным в § 3.3 при $k > 0$ этот закон дает очень быстрое экспоненциальное возрастание $x(t)$, а при $k < 0$ — очень быстрое экспоненциальное убывание. Впрочем, если значение коэффициента k близко к нулю, то в течение некоторого времени «затухание» или «разгорание» будет протекать сравнительно медленно. Кроме того, часто бывает, что линейный закон эволюции $x' = kx$ адекватно отражает (моделирует) процесс только в каком-то диапазоне изменения величины x . Скажем, модель Мальтуса роста популяций $N'(t) = \alpha N(t)$ (см. § 1.1) применима лишь при благоприятных условиях — когда достаточно места и потребляемых ресурсов, — так что, после того как численность N популяции превзойдет какой-то критический уровень, линейный закон Мальтуса становится неприменимым — его придется заменить на какой-то нелинейный. Примеры нелинейных процессов мы рассмотрим в гл. VI, а в этом параграфе ограничимся линейными процессами — экспоненциальными моделями.

3.4.1. Пример: радиоактивный распад. В § 3.1 мы записали основной закон радиоактивного распада в виде линейного дифференциального уравнения вида (1): если $M(t)$ — число атомов радиоактивного элемента в момент времени t (напомним, что оно предполагается большим), а ω — вероятность распада, то выполняется уравнение

$$M'(t) = -\omega M(t). \quad (1)$$

¹Формально в этой теореме требовалось, чтобы выполнялось условие $a > 1$, однако в силу формулы $\log_a N = -\log_{1/a} N$ это требование не существенно.

²Мы снова перешли к основной переменной t — времени.

Из теоремы 4 § 3.2 получаем закон радиоактивного распада уже в виде зависимости M от времени: если $M(0) = M_0$, то

$$M(t) = M_0 e^{-\omega t}. \quad (2)$$

На практике вместо вероятности распада используется *период полураспада*¹.

Предложение 1. *Количество атомов радиоактивного вещества уменьшается вдвое через один и тот же промежуток времени, называемый периодом полураспада, независимо от начального количества атомов.*

Доказательство. Можно найти соответствующий промежуток времени, решая относительно t уравнение

$$M(t) = M_0 e^{-\omega t} = \frac{M_0}{2} \Leftrightarrow e^{-\omega t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\omega t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\omega}.$$

Таким образом, *период полураспада* $T_{1/2}$ не зависит от начального количества вещества M_0 и связан с вероятностью распада формулой $T_{1/2} = (\ln 2)/\omega$. $\square$

Заметим также (в духе рассуждений из § 3.3), что для обнаружения экспоненциальной зависимости (2) по оси M целесообразно использовать *логарифмический масштаб* — тогда мы получаем *линейную зависимость*

$$\ln M = \ln M_0 - \omega t,$$

угловой коэффициент которой есть в точности (но со знаком «минус») вероятность распада.

3.4.2. Пример: ядерное деление (цепная реакция). В конце 1930-х годов супруги Жолио-Кюри во Франции, а вслед за ними Ган и Штрассман в Германии, а также Энрико Ферми в Италии, а затем в США, экспериментально открыли, что при попадании «медленного» нейтрона в ядро урана — изотопа U^{235} — оно распадается на два больших осколка и, кроме того, испускает 2–3 новых нейтрона, вследствие чего выделяется большая энергия — порядка $6 \cdot 10^{10}$ Дж/г (на 1 г разделившегося урана). Осколки сначала летят в противоположные стороны со скоростями около 10^9 см/с, а затем тормозятся с превращением их кинетической энергии в тепло. Упомянутые первооткрыватели «теоретически увидели» и возможность развития в уране так называемой *цепной реакции* ядерного деления. Опишем простейшую математическую

¹Вместо этого термина логичнее было бы говорить о *времени полураспада*. Закон радиоактивного распада в 1903 г. сформулировал Пьер Кюри; он же ввел понятие «периода полураспада».

модель такой реакции, дающую, однако, ясную картину происходящих при ядерном делении процессов.

Ирен Кюри (1897–1956) — французский физик и радиохимик, дочь лауреатов Нобелевской премии по физике 1903 г., основоположников учения о радиоактивности Пьера Кюри и Марии Склодовской-Кюри. Фредерик Жолио (1900–1958) — французский физик. После его женитьбы в 1926 г. на Ирен Кюри с 1934 г. супруги стали подписывать совместные работы двойной фамилией Жолио-Кюри. В 1935 г. стали лауреатами Нобелевской премии по химии за синтез новых радиоактивных элементов. В годы оккупации были активными участниками Движения Сопротивления, а после войны — деятелями Всемирного Совета Мира.

Отто Ган (Хан) (1879–1968) — немецкий радиохимик и физик, учился, в частности, у Эрнеста Резерфорда (1904–1905). Фриц Штрассман (1902–1980) — немецкий физик и химик. Совместно с Ганом в 1938 г. открыл деление ядер урана при «бомбардировке» их нейтронами — за это открытие Гану была присуждена Нобелевская премия по химии 1944 г.

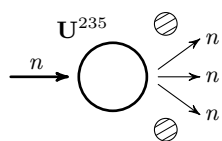
Энрико Ферми (1901–1954) — выдающийся физик-теоретик и экспериментатор. Родился в Риме, работал у Макса Борна, Пауля Эренфеста в Германии (1923–1924), а потом в Риме и Флоренции. В 1938 г. эмигрировал в США, где принимал участие в работах над атомной бомбой. Построил *первый* ядерный реактор (2 декабря 1942 г. осуществил его запуск, впервые получив самоподдерживающуюся цепную реакцию; математическую модель реактора мы рассмотрим далее — в конце этого параграфа). В 1938 г. стал лауреатом Нобелевской премии по физике за открытие ядерных реакций при облучении ядер медленными нейтронами.

Допустим, у нас имеется кусок урана U^{235} , в котором в момент времени t находится $N = N(t)$ медленных нейтронов, при столкновении которых с ядром U^{235} *может произойти* описанное выше ядерное деление с приростом количества нейтронов, в том числе и интересующих нас медленных (рис. 41).

Каждый из имеющихся нейтронов с некоторой вероятностью попадает в ядро U^{235} (ядро U^{235} — это шарик с радиусом порядка 10^{-12} см), что ведет к делению ядра и к приросту количества нейтронов, в том числе и медленных, так что за промежуток времени от t до $t + \Delta$ количество нейтронов $N(t)$ увеличивается на величину

$$\Delta^+ N \approx \alpha N \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Однако какая-то часть нейтронов вылетает через поверхность куска урана и больше не может принимать участия в делении ядер. Именно,



вылетают те нейтроны, которые находятся достаточно близко к поверхности куска и имеют соответствующее направление движения. Пусть кусок U^{235} имеет форму шара радиуса r . Если v — средняя скорость нейтронов (имеется в виду модуль скорости), то вылететь за пределы шара за промежуток времени от t до $t + \Delta$ могут только нейтроны из шарового слоя толщины $v \cdot \Delta t$ (рис. 42), да и то лишь некоторая

$$N(t) \rightarrow N + \Delta^+ N$$

Рис. 41

доля $p:1$ из них: те, которые имеют нужные для вылета направления скоростей. Объем слоя $V_{\text{с.л}} \approx S_{\text{ш}} \cdot v \cdot \Delta t$, где $S_{\text{ш}}$ — площадь поверхности шара. Поскольку плотность нейтронов в шаре равна

$$\rho = \frac{N}{V_{\text{ш}}}$$

($V_{\text{ш}}$ — объем уранового шара), число нейтронов в рассматриваемом слое равно

$$\rho \cdot V_{\text{с.л}} \approx \frac{N}{V_{\text{ш}}} \cdot S_{\text{ш}} \cdot v \cdot \Delta t = \frac{S_{\text{ш}}}{V_{\text{ш}}} \cdot v \cdot N \Delta t,$$

а количество вылетающих нейтронов составляет долю $p:1$ от этого числа, т. е.

$$\Delta^- N \approx p \frac{S_{\text{ш}}}{V_{\text{ш}}} \cdot v \cdot N \Delta t = \frac{\beta}{r} \cdot N \Delta t, \quad (4)$$

где β , как выше α , является характеристикой *самого вещества* U^{235} — эта константа получается в результате следующего вычисления:

$$p \frac{S_{\text{ш}}}{V_{\text{ш}}} \cdot v = pv \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3pv}{r} = \frac{\beta}{r}.$$

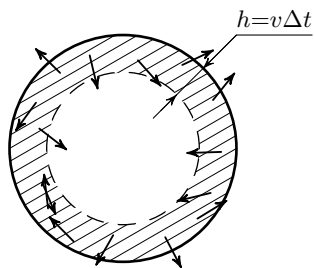


Рис. 42

Исходя из формул для прироста и вылета нейтронов (3) и (4) запишем итоговую формулу для приращения числа нейтронов N за время от t до $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \Delta N(t, \Delta t) &= N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta^+ N - \Delta^- N \approx \\ &\approx \alpha N \Delta t - \frac{\beta}{r} N \Delta t = \left(\alpha - \frac{\beta}{r} \right) N \Delta t, \end{aligned}$$

откуда после деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем, наконец, *дифференциальное уравнение для числа медленных нейтронов в шарообразном куске U^{235}* :

$$N'(t) = \left(\alpha - \frac{\beta}{r} \right) N(t).$$

Проанализируем это уравнение.

Запишем его в виде

$$N'(t) = k(r)N(t), \quad k(r) = \alpha - \frac{\beta}{r} \quad (5)$$

(напомним, что коэффициенты α и β — характеристики самого *вещества* — скажем, U^{235} , — а не взятого его «куска» — уранового шара). Решения уравнения (5) всегда имеют вид

$$N(t) = N_0 \cdot e^{k(r)t} \quad (N_0 = N(0) — \text{начальное число нейтронов}),$$

но в случае $k(r) < 0$ эти решения экспоненциально — значит, очень быстро, — убывают, «нейтронный костер» гаснет, а в случае $k(r) > 0$, напротив, число нейтронов, а с ним и число ядерных делений, а с ним и количество выделяющейся в виде тепла энергии — все *экспоненциально (очень быстро) растет* (рис. 43). Это и есть «цепная реакция», приводящая к атомному взрыву. Условие, при котором происходит взрыв, означает, что

$$k(r) = \alpha - \frac{\beta}{r} > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{\beta}{r} \Leftrightarrow r > \frac{\beta}{\alpha} = r_0,$$

т.е. радиус уранового шара должен быть *больше*, чем некоторый *критический радиус* $r_0 = \frac{\beta}{\alpha}$; соответственно, масса делящегося вещества должна быть *больше критической массы*

$$m_{\text{кр}} = \rho \cdot V_{\text{ш}}(r_0) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3$$

(ρ — плотность делящегося вещества). Например, если речь идет об U^{235} , то $2r_0 \approx 17$ см, $m_{\text{кр}} \approx 50$ кг.

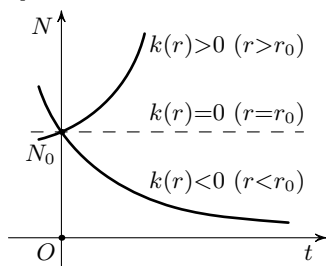


Рис. 43

Мы не будем больше обсуждать эту ситуацию (см. упражнения), а обратимся к заинтересовавшему впервые, по-видимому, Энрико Ферми случаю $k(r) < 0$ (соответственно $r < r_0$ или $m < m_{\text{кр}}$) — «костер затухает». Но когда костер гаснет, в него подбрасывают топливо. Так попробуем сделать то же самое с нейтронным «костром»: возьмем кусок урана с массой, меньшей критической, — для которого $k(r) = -\gamma < 0$, —

и «подключим» к нему *внешний источник нейтронов* (обычно радиоактивный плутоний). Будем считать, что внешний источник поставляет нейтроны с постоянной скоростью q нейтронов в единицу времени. Что же будет с «нейтронным костром» — процессом ядерного деления в *докритической* массе нашего вещества?

Чтобы ответить на этот вопрос, запишем для этого случая дифференциальное уравнение, которому подчиняется количество нейтронов в докритической массе при наличии внешнего источника нейтронов. Очевидно, учет нейтронов от внешнего источника приводит к необходимости добавить в правую часть уравнения (5) постоянное (не зависящее ни от r , ни от t) слагаемое, равное скорости q излучения нейтронов внешним источником так как мы обозначили $k(r)$ через $-\gamma$, уравнение запишется в виде

$$N'(t) = -\gamma N(t) + q, \quad q > 0, \quad \gamma = \frac{\beta}{r} - \alpha > 0. \quad (6)$$

Это тоже линейное уравнение, только *неоднородное*, так что, прежде чем исследовать решения дифференциального уравнения (6), рассмотрим *общие подходы к решению неоднородных линейных уравнений первого порядка*.

3.4.3. Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + f(x)$. Удобно сразу рассмотреть более общий случай, когда однородность уравнения $y' = ky$ нарушается прибавлением к его правой части не константы, а *произвольной функции* $f(x)$, так как приводимые ниже рассуждения пригодны и в этом случае. Таким образом, рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = ky + f(x), \quad (7)$$

где $k \in \mathbb{R}$, $f(x)$ — данная функция. Идея проста: рассмотрим *два* решения неоднородного уравнения и, вычтя одно решение из другого, избавимся от неоднородности. Этот прием пригоден не только в рассматриваемом случае, но и в подобных ситуациях в алгебре, теории чисел и т. д.

Итак, пусть $y(x)$ и $y_1(x)$ — два решения неоднородного уравнения (7):

$$\begin{aligned} y'(x) &= ky(x) + f(x), \\ y_1'(x) &= ky_1(x) + f(x). \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем, что неоднородность — слагаемое $f(x)$ — «пропадает» и разность решений $y(x) - y_1(x)$ удовлетворяет уже однородному уравнению вида (1):

$$(y - y_1)' = k(y - y_1).$$

Значит (по теореме 4, § 3.2), эта разность равна $y - y_1 = Ae^{kx}$, и тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 1 (Д'Аламбера — основное свойство решений неоднородного линейного дифференциального уравнения). Пусть $y_1(x)$ — любое частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y' = ky + f(x).$$

Тогда общее (т. е. любое другое) его решение записывается в виде

$$y(x) = y_1(x)Ae^{kx}$$

(иначе говоря, общее решение неоднородного уравнения (7) представляется в виде суммы любого частного его решения и общего решения соответствующего однородного уравнения (1)).

Следовательно, задача отыскания *всех* решений дифференциального уравнения (7) сводится к отысканию какого-нибудь *частного* его решения, которое для каждой конкретной функции $f(x)$ нередко просто подбирают. Однако более подробное рассмотрение этого уравнения в случае, когда $f(x) \neq \text{const}$ (и весьма эффективный в некоторых случаях *метод* отыскания частных решений), отложим до следующего параграфа, пока же сосредоточим внимание на уравнениях типа (6) — с неоднородностью, являющейся константой.

Жан ле Рон Д'Аламбер (правильно д'Аламбер : d'Alembert Jean le Rond; 1717–1783) — французский математик, механик и философ, по образованию юрист (адвокат). Совместно с Дени Дидро до 1757 г. работал над созданием знаменитой «Энциклопедии наук, искусств и ремесел», где в статье «Размерность» впервые высказал идею о времени как о *четвертом измерении*. Занимался механикой — динамикой, — гидродинамикой, небесной механикой, дифференциальными уравнениями. В 1766 г. установил формулируемое здесь утверждение в несколько более общем случае (см. упражнения). Кроме того, первым записал уравнение колебаний струны $u''_{tt} = u''_{xx}$ (см. гл. VI) и его решения в виде $u(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$. Занимался также литературной деятельностью, вопросами музыкальной теории и музыкальной эстетики... Был членом парижской Академии наук и Французской академии (последняя была основана кардиналом Ришелье в 1635 г. и объединяла видных представителей культуры, науки и политических деятелей Франции; Д'Аламбер был избран в постоянный состав «Сорока бессмертных» членов этой Академии, в который входили также Расин, Вольтер, Гюго, Пастер, Франс...).

3.4.4. Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + b$ (const). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = ky + b, \tag{8}$$

где k и b — данные константы. Согласно теореме Д'Аламбера *общее решение уравнения (8) записывается в виде*

$$y(x) = y_1(x) + Ae^{kx},$$

где A — произвольная постоянная (она однозначно определяется начальным условием, например, в точке $x=0$: $y(0)=y_0$), а $y_1(x)$ — *какое-нибудь* частное решение уравнения (8).

Поскольку однородность в данном случае нарушается прибавлением константы, частное решение тоже *естественно* искать в виде константы (на самом деле это *общий принцип* — чтобы «компенсировать» некую функцию, т. е. «неоднородность», нужно попробовать подставить в уравнение функцию такого же типа или имеющую производную «такого же типа!»). Подставим в уравнение (8) постоянную $y_1 \equiv C$. Получим

$$y_1' = C' = 0, \quad ky_1 + b = kC + b; \quad \text{значит, } 0 = kC + b \Rightarrow C = -\frac{b}{k}.$$

Следовательно, в качестве частного решения уравнения (8) можно взять постоянную функцию $y_1 = -\frac{b}{k}$, так что *общее решение уравнения (8) записывается в виде*

$$y(x) = -\frac{b}{k} + Ae^{kx}. \quad (9)$$

Покажем теперь, как этот же результат можно получить совсем коротко, но с помощью «трюка». Заметим, что формулу (9) можно записать в немного ином виде:

$$y + \frac{b}{k} = Ae^{kx},$$

а это означает, что функция $z = y + \frac{b}{k}$ удовлетворяет уравнению $z' = kz$, или же

$$\left(y + \frac{b}{k}\right)' = k\left(y + \frac{b}{k}\right). \quad (10)$$

Но это уравнение *сразу* получается из исходного уравнения (8) — достаточно в правой его части вынести коэффициент k за скобку, а к левой части «под знак производной» добавить константу $\frac{b}{k}$.

Отсюда следующее рассуждение. После приведения уравнения (8) к виду (10) и *замены*, т. е. введения новой функции

$$y + \frac{b}{k} = z, \quad (11)$$

мы получаем, что эта функция $z = z(x)$ удовлетворяет уравнению $z' = kz$. Следовательно, $z(x) = Ae^{kx}$, и из формулы (11) сразу получается формула (9). (Примененный нами «метод замены» является весьма частным, однако ему не откажешь в изяществе и краткости.)

Так или иначе, мы нашли общий вид (9) решения дифференциального уравнения (8). Учтем теперь *начальное условие* $y(0) = y_0$. Подставив

его в формулу (9), получим

$$y(0) = y_0 = -\frac{b}{k} + Ae^{k \cdot 0} = \frac{b}{k} + A \Rightarrow A = y_0 + \frac{b}{k} \Rightarrow$$

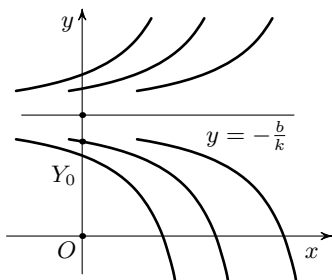
$$\Rightarrow y(x) = -\frac{b}{k} + \left(y_0 + \frac{b}{k}\right)e^{kx}, \quad (12)$$

или же

$$y(x) = y_0 e^{kx} + \frac{b}{k}(e^{kx} - 1). \quad (13)$$

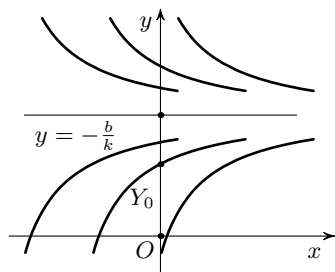
Обе формы записи решения (12) и (13) могут оказаться полезными, в зависимости от конкретной задачи.

Полезно также представлять себе, как выглядят графики решений. При каждом конкретном значении $k \neq 0$ все графики решений имеют одну и ту же левую (при $k > 0$) или правую (при $k < 0$) асимптоту, как это показано на рис. 44–45. Проще всего это увидеть из представления решений в виде (9) — асимптотой является прямая $y = -\frac{b}{k}$, независимо от начальных условий (!).



$$y(x) = -\frac{b}{k} + Ae^{kx}, \quad k > 0$$

Рис. 44



$$y(x) = -\frac{b}{k} + Ae^{kx}, \quad k < 0$$

Рис. 45

Теперь вернемся к рассмотрению уравнения (6), которое описывает изменение количества нейтронов в докритической массе расщепляющегося вещества (например U^{235}) при наличии внешнего источника нейтронов.

3.4.5. Пример: уравнение «атомного реактора». Напомним, как выглядит уравнение (6):

$$N'(t) = -\gamma N(t) + q, \quad q > 0, \quad \gamma = \frac{\beta}{\tau} - \alpha > 0.$$

Применив к нему только что полученные результаты, находим сначала общий закон изменения числа нейтронов,

$$N(t) = \frac{q}{\gamma} + Ae^{-\gamma t},$$

а затем и формулу для $N(t)$ при начальном условии $N(0) = N_0$: тогда

$$\frac{q}{\gamma} + A = N_0 \Rightarrow N(t) = \frac{q}{\gamma} + \left(N_0 - \frac{q}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}.$$

Из той и другой формулы вытекает, что, *независимо от начального количества нейтронов* N_0 (обычно оно невелико), число нейтронов *экспоненциально* (очень быстро!) стремится к предельному значению, равному $N_\infty = \frac{q}{\gamma}$. Отсюда следуют весьма важные выводы.

Во-первых, получается, что при добавлении внешнего источника нейтронов общее число нейтронов внутри уранового шара докритической массы, а поэтому и количество выделяющейся в результате деления ядер *атомной энергии, стабилизируется* — быстро становится практически неизменным. Тогда эту энергию, выделяемую в виде тепла, можно использовать, например, для производства электроэнергии. Именно на таком процессе и основан принцип работы атомных реакторов и атомных электростанций. В этом случае говорят об *управляемой ядерной реакции*, в отличие от спонтанно возникающей в *надкритической* массе расщепляющегося вещества *неуправляемой* ядерной реакции, приводящей к атомному взрыву.

Во-вторых, если внешний источник поставяет всего q нейтронов в единицу времени, то внутри уранового шара вскоре после начала реакции их будет уже примерно $N_\infty = q \cdot \frac{1}{\gamma}$, что в случае $\frac{1}{\gamma} > 1$, т. е. $\gamma < 1$, больше, чем q . Отношение

$$\frac{N_\infty}{q} = \frac{1}{\gamma} = \kappa$$

называется *коэффициентом размножения* нейтронов в реакторе — получается, что поставляемые внешним источником нейтроны как бы «размножаются» внутри докритической массы. Заметим, что коэффициент размножения тем больше, т. е. атомный реактор тем «эффективнее», чем меньше коэффициент $\gamma = \frac{\beta}{r} - \alpha$. Но равенство γ нулю означает, что радиус r равен критическому, а близость коэффициента γ к нулю соответствует тому, что радиус близок к критическому, т. е. докритическая масса становится близкой к критической! Это весьма существенный вывод: оказывается, чем эффективнее атомный реактор, тем больше риск приближения к надкритической массе и, соответственно, больше опасность взрыва.

§ 3.5. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

В предыдущих параграфах 3.1 и 3.4 мы рассмотрели и решили линейные дифференциальные уравнения $y' = ky[+b]$ с *постоянными* коэф-

фициентами k и b и проанализировали поведение их решений. Решение такого уравнения со «свободным членом» $b \neq 0$ основывалось на *теореме Д'Аламбера* о произвольном решении неоднородного уравнения более общего вида $y' = ky + f(x)$ — представлении *произвольного* решения в виде $y(x) = y_1(x) + Ae^{kx}$, где $y_1(x)$ — любое *частное* решение уравнения, а второе слагаемое Ae^{kx} есть общее решение соответствующего однородного уравнения $y' = kx$.

Наши исследования фактически не использовали *интегрирование функций*, т. е. умение выписывать решения дифференциального уравнения вида $y' = f(x)$ через интеграл по *второй формуле Барроу*: если $y(x_0) = y_0$, то

$$y(x) = y_0 + S(f)_{x_0}^x = y_0 + \int_{x_0}^x f(u) du$$

(см. п. 2.3.5). Заметим, что, независимо от возможности (или невозможности) выражения выписанного интеграла через *элементарные функции*, если решения дифференциального уравнения можно *записать с помощью интегралов* от данных функции, то это уравнение считается *разрешимым*, как говорят, в *квадратурах*¹.

Сведение дифференциальных уравнений к отысканию интегралов — одна из важнейших *общих идей* решения дифференциальных уравнений. И теперь мы рассмотрим, как она может быть применена к *линейным дифференциальным уравнениям первого порядка с переменными коэффициентами*, общий вид которых

$$y' = k(x)y + f(x) \quad (y'(x) \equiv k(x)y(x) + f(x)), \quad (1)$$

где $k(x)$ и $f(x)$ — данные функции.

3.5.1. Метод Лагранжа: вариация произвольной постоянной. Вернемся сначала к неоднородному уравнению вида

$$y' = ky + f(x) \quad (2)$$

($k = \text{const}$, $f(x)$ — заданная функция). Мы знаем, что общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y' = ky$ ($k = \text{const}$) может быть записано в виде $y = Ae^{kx}$, где A — *произвольная*

¹Лат. quadratura означает «придание квадратной формы» какой-то фигуре, для того чтобы потом *вычислить площадь фигуры*. У греков это означало *построение квадрата, равновеликого данной фигуре* (т. е. имеющего ту же площадь) — вспомните знаменитую задачу о «квадратуре круга»! В дальнейшем так стали называть любые задачи, сводящиеся к отысканию площадей или интегралов.

постоянная. Попытаемся найти решения дифференциального уравнения (2) в виде

$$y = A(x)e^{kx}, \quad (3)$$

где $A = A(x)$ — уже *функция* от независимой переменной x , которую и хотелось бы отыскать.

Продифференцируем функцию $y = y(x)$, задаваемую формулой (3):

$$y' = (A(x)e^{kx})' = A'(x) \cdot e^{kx} + A(x) \cdot ke^{kx} = kA(x)e^{kx} + A'(x)e^{kx}$$

и подставим y' и y в уравнение (2):

$$kA(x)e^{kx} + A'(x)e^{kx} = k \cdot Ae^{kx} + f(x).$$

Поскольку первые слагаемые в обеих частях полученного уравнения (с неизвестной функцией $A(x)$) совпадают, это уравнение, а с ним и дифференциальное уравнение (2), выполняются (при значениях x из того интервала I , на котором рассматривается уравнение (2)) *тогда и только тогда*, когда

$$A'(x)e^{kx} = f(x) \Leftrightarrow A'(x) = f(x)e^{-kx}. \quad (4)$$

Тем самым неоднородное уравнение (2) сведено к квадратурам: если найдена хотя бы одна первообразная $F(x)$ функции $\varphi(x) = f(x)e^{-kx}$ (опять на рассматриваемом промежутке), то общее решение дифференциального уравнения (4) можно записать в виде $A(x) = F(x) + C$ (C — произвольная постоянная), а общее решение уравнения (2) соответственно в виде (3):

$$y = A(x)e^{kx} = (F(x) + C)e^{kx}.$$

Поскольку в приведенном рассуждении мы вместо *произвольной постоянной* A в формуле для решений однородного уравнения ($y' = ky \Leftrightarrow y = Ae^{kx}$) рассматривали *функцию* $A(x)$, т. е. «позволили варьироваться» (изменяться) произвольной постоянной, указанный метод отыскания решений неоднородного уравнения называется *методом вариации произвольной постоянной*. Этот метод в общем случае разработал в 1775 г. Лагранж, хотя в частных ситуациях его применяли еще в 1740 г. Эйлер и Даниил Бернулли. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. В § 3.4 были найдены решения дифференциального уравнения вида (2) в том случае, когда $f(x) = b = \text{const}$, причем двумя методами: с помощью замены и методом Д'Аламбера, т. е. путем отыскания частного решения. Теперь применим к дифференциальному уравнению

$$y' = ky + b \quad (k \neq 0) \quad (5)$$

«метод Лагранжа». Как было доказано выше, общее решение дифференциального уравнения (5) может быть записано в виде $y(x) = A(x)e^{kx}$, где функция $A(x)$ — общее решения уравнения вида (4), в котором функцию $f(x)$ следует заменить константой b :

$$A'(x) = be^{-kx} \Leftrightarrow A(x) = -\frac{b}{k}e^{-kx} + C.$$

Следовательно, можно записать

$$y(x) = A(x)e^{kx} = \left(-\frac{b}{k}e^{-kx} + C\right)e^{kx} = -\frac{b}{k} + Ce^{kx},$$

и мы, естественно, получили тот же ответ, что и раньше. $\square$

Пример 2. Решим тем же методом дифференциальное уравнение

$$y' = ky + be^{\lambda x}. \quad (6)$$

Записываем дифференциальное уравнение для функции $A(x)$:

$$A'(x) = be^{\lambda x} \cdot e^{-kx} = be^{(\lambda-k)x} \Leftrightarrow A(x) = \frac{b}{\lambda-k}e^{(\lambda-k)x} + C.$$

Следовательно, общий вид решений дифференциального уравнения (6) есть

$$y(x) = A(x)e^{kx} = \left(\frac{b}{\lambda-k}e^{(\lambda-k)x} + C\right)e^{kx} = \frac{b}{\lambda-k}e^{\lambda x} + Ce^{kx}.$$

Однако если $\lambda = k$, то приведенное рассуждение «проваливается»: уравнение для функции $A(x)$ *не может* иметь решений указанного вида. Как быть? — Проанализируйте этот случай самостоятельно. $\square$

Метод Лагранжа хорош как *общий метод* решения дифференциальных уравнений вида (2), но если частное решение этого уравнения «легко угадывается», то *метод Д'Аламбера* быстрее приводит к цели.

Теперь рассмотрим несколько прикладных примеров из элементарной механики, приводящих к уравнениям вида $y' = f(x)$ или к неоднородным линейным уравнениям вида $y' = ky + f(x)$. Это будут *неконсервативные* динамические системы в смысле, употреблявшемся во втором вводном параграфе 3.2: в них будет учитываться *сила вязкого трения*.

3.5.2. Пример: свободное движение с трением. В случае свободного движения при наличии вязкого трения уравнение Ньютона имеет вид

$$mx'' = -\lambda v, \quad \lambda > 0 \quad (7)$$

(см. п. 3.1.3). Оно сводится к «расцепляемой» системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -kv, \quad k = \frac{\lambda}{m} > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Второе из этих уравнений — однородное линейное, и его решениями являются убывающие (по абсолютной величине) экспоненты: $v(t) = Ae^{-kt}$. Следовательно, первое из уравнений (8) разрешимо в квадратурах:

$$x' = v(t) = Ae^{-kt} \Leftrightarrow x(t) = -\frac{A}{k}e^{-kt} + C = A_1e^{-kt} + C$$

(A — произвольная постоянная, поэтому и дробь $-\frac{A}{k}$ является произвольной постоянной [т. е. может принимать любые значения], и мы заменили эту дробь новой *произвольной постоянной* A_1).

Особенностью найденного решения является то, что сила трения приводит к «торможению», так что каждое решение (отличное от константы; отметим, что любая константа $x(t) \equiv C$ удовлетворяет исходному уравнению (7)) *асимптотически*, причем *экспоненциально*, стремится к константе — материальная точка *не останавливается*, но «бесконечно долго стремится остановиться», а скорость при этом экспоненциально стремится к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (A_1e^{-kt} + C) = C,$$

причем

$$x(t) - C = A_1e^{-kt}; \quad v(t) = x'(t) = -kA_1e^{-kt}.$$

Чтобы выяснить, к какому «предельному положению» стремится материальная точка, можно из начальных условий $(x(0); x'(0)) = (x_0; v_0)$ определить константы A_1 и C : поскольку $x(0) = A_1 + C$, $x'(t) = -kA_1e^{-kt}$ и $x'(0) = -kA_1$, начальные условия дают для отыскания констант систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 + C = x_0, \\ -kA_1 = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{v_0}{k}, \\ C = x_0 - A_1 = x_0 + \frac{v_0}{k}. \end{cases}$$

Следовательно, закон движения при заданных начальных условиях $(x_0; v_0)$ может быть записан в виде

$$x(t) = -\frac{v_0}{k}e^{-kt} + \left(x_0 + \frac{v_0}{k}\right) = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Таким образом, если на материальную точку массы m действует сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = -\lambda v$, то за счет *начального импульса* эта точка за *бесконечное время* проходит «*тормозной путь*», равный $\Delta x = \frac{v_0}{k} = \frac{mv_0}{\lambda}$ (рис. 46).

То же самое уравнение (7) можно решить *другим способом*, который поначалу может показаться слишком «искусственным». Однако и следующий пример, и рассмотрения из следующей главы показывают, что этот способ есть *метод*, а отнюдь не просто «фокус». В данном случае

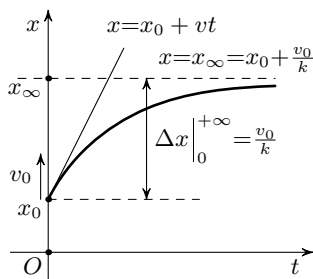


Рис. 46

переписываем дифференциальное уравнение (7) через повторное дифференцирование и вводим вспомогательную переменную z (можно обойтись и без нее, но так проще):

$$\begin{aligned} x'' = -kx' &\Leftrightarrow x'' + kx' = 0 \Leftrightarrow (x' + kx)' = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{для } z = x' + kx \text{ имеем } z' = 0 \Leftrightarrow C \text{ (const).} \end{aligned}$$

Таким образом, для функции $x = x(t)$ мы получаем простейшее неоднородное линейное уравнение типа разобранных в § 3.4:

Мы воспользовались результатами § 3.4 (см. формулы (11) и (15)) и, естественно, получили для закона свободного движения при наличии вязкого трения ту же формулу, что и раньше (только с другими обозначениями констант).

3.5.3. Пример: свободное падение с трением. Выясним теперь, что происходит при *свободном падении*, если действует и сила вязкого трения. Напомним, что просто свободное падение является *равноускоренным*, при этом скорость изменяется по линейному закону, а «высота» — по квадратичному:

$$z'' = -g \Leftrightarrow v = z' = -gt + v_0 \text{ и } z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

(см. гл. III, п. 3.2.2). Дифференциальное уравнение Ньютона при наличии трения записывается в виде

$$mz'' = -mg - \lambda z' \Leftrightarrow z'' = -g - kz' \quad \left(k = \frac{\lambda}{m}\right). \quad (9)$$

Таким уравнением моделируется парашютный¹ прыжок.

Мы решим это уравнение *тремя* способами. *Первый способ* — «метод расщепления», когда сначала мы находим зависимость $v = v(t)$, а по-

¹ *Парашют* — фр. parachute, от слов parer — «предотвращать» и chute — «падение».

том *интегрируем* уравнение $z' = v(t)$ (т. е. находим все его решения¹). В данном случае для скорости $v = z'$ получаем стандартное неоднородное линейное уравнение:

$$v' = -g - kv \Leftrightarrow v(t) = -\frac{g}{k} + Ae^{-kt}.$$

Далее, координата z отыскивается простой квадратурой:

$$z' = v(t) = -\frac{g}{k} + Ae^{-kt} \Leftrightarrow z(t) = -\frac{g}{k}t - \frac{A}{k}e^{-kt} + C = \left(-\frac{g}{k}t + C\right) + A_1e^{-kt}.$$

В скобки заключена «линейная составляющая» функции $z = z(t)$, соответствующая *наклонной асимптоте* $z_A = -\frac{g}{k}t + C$ графика $z = z(t)$ на плоскости Otz (рис. 47): разность $z(t) - z_A(t) = A_1e^{-kt}$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

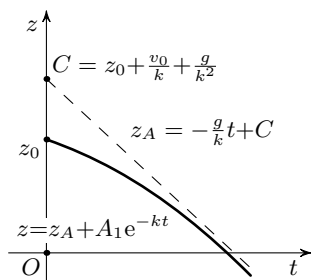


Рис. 47

Таким образом, наличие вязкого трения приводит к тому, что движение асимптотически становится «все более и более» равномерным, скорость же движения стремится к постоянной $v_\infty = -\frac{g}{k}$.

Начальные условия $(z(0); z'(0)) = (z_0; v_0)$ позволяют определить константы A_1 и C : $z(0) = A_1 + C$; $z'(t) = -\frac{g}{k} - kA_1e^{-kt}$, откуда следует, что $z'(0) = -\frac{g}{k} - kA_1$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 + C = z_0, \\ -\frac{g}{k} - kA_1 = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2}, \\ C = z_0 - A_1 = z_0 + \frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}. \end{cases}$$

Теперь не составляет труда выписать закон движения при свободном падении — сделайте это самостоятельно.

Второй способ отыскания всех решений дифференциального уравнения (9) — «сведение к повторному дифференцированию» (как в пре-

¹Эта терминология — *интегрирование* в смысле отыскания решений дифференциального уравнения — сохранилась и сейчас. Как уже было отмечено, до Лагранжа и сами *решения* дифференциальных уравнений назывались *интегралами*.

дыдущем примере). Преобразуем уравнение (9):

$$(z' + kz)' = -g \Leftrightarrow z' + kz = -gt + C \Leftrightarrow z' = -kz - gt + C. \quad (10)$$

Получилось неоднородное линейное дифференциальное уравнение. К нему можно применить метод вариации произвольной постоянной, однако проще найти частное решение $z = z_1(t)$ и воспользоваться теоремой Д'Аламбера: $z = z_1(t) + Ae^{-kt}$. Чтобы «скомпенсировать неоднородность» — входящую в правую часть уравнения (10) линейную функцию $-gt + C$, — будем искать частное решение в виде линейной функции $z_1(t) = at + b$. Для определения коэффициентов a, b подставим эту функцию в уравнение (10):

$$\begin{aligned} (at + b)' = -k(at + b) - gt + C &\Leftrightarrow a = -kat - kb - gt + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ka + g)t + (a + kb + C) \equiv 0. \end{aligned}$$

Поскольку линейная функция $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда оба коэффициента α и β обращаются в нуль, из последней формулы мы получаем систему уравнений для отыскания значений a и b :

$$\begin{cases} ka + g = 0, \\ a + kb + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{g}{k}, \\ b = \frac{1}{k}(C - a) = \frac{C}{k} + \frac{g}{k^2}. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение уравнения $z' = -kz - gt + C$ записывается в виде

$$z(t) = -\frac{g}{k}t + \frac{C}{k} + \frac{g}{k^2} + Ae^{-kt} = \left(-\frac{g}{k}t + C_1\right) + Ae^{-kt},$$

конечно, эквивалентном полученному ранее.

Идея *третьего способа* заключается в том, чтобы применить *метод Д'Аламбера* непосредственно к уравнению *второго порядка*. Запишем дифференциальное уравнение (9) в виде $z'' + kz' = -g$. Если бы правая часть этого уравнения равнялась нулю, то мы получили бы *однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка* $z'' + kz' = 0$. Его решать мы умеем: это уравнение «свободного движения с трением», и общее его решение записывается как $z = Ae^{-kt} + C$.

Далее, *линейность* этого уравнения означает не просто тот факт, что неизвестная функция $z = z(t)$ и ее производные z', z'' входят в выражение $z'' + kz'$ *линейно*, т.е. в первой степени (кстати сказать, сама функция z в данном случае вообще не входит в уравнение). Самое главное свойство состоит в выполнении, как говорят физики, «*принципа суперпозиции*»: *если функции $z(t)$ и $z_1(t)$ суть решения линейного дифференциального уравнения, то любая их линейная комбинация*

$Z(t) = \alpha z(t) + \beta z_1(t)$ также является решением этого линейного уравнения (однородного, для неоднородных уравнений утверждение неверно). В частности, наряду с $z(t)$ и $z_1(t)$, решениями будут также и $\alpha z(t)$, и $z(t) \pm z_1(t)$.

Указанным свойством обладает и общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка (с постоянными коэффициентами), которое в других «основных переменных» $(x; y)$ может быть записано в виде

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (11)$$

Проверяется это непосредственной подстановкой, с использованием линейности дифференцирования: для дважды дифференцируемых (на каком-то интервале I) функций $y(x)$ и $y_1(x)$ при любых значениях $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} (\alpha y(x) + \beta y_1(x))' &= \alpha y'(x) + \beta y_1'(x), \\ (\alpha y(x) + \beta y_1(x))'' &= \alpha y''(x) + \beta y_1''(x). \end{aligned}$$

Конечно, свойство линейности дифференцирования эквивалентно известным правилам дифференцирования:

$$(\alpha y(x))' = \alpha y'(x), \quad (y(x) \pm y_1(x))' = y'(x) \pm y_1'(x).$$

Предложение 1 (вторая теорема Д'Аламбера). *Общее решение $y(x)$ неоднородного дифференциального уравнения*

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (12)$$

представляется в виде суммы любого частного его решения и общего решения соответствующего однородного уравнения (11).

Доказательство этого утверждения практически такое же, как и доказательство «первой» теоремы Д'Аламбера (теоремы 1 из п. 3.4.7). Именно, если функции $y(x)$ и $y_1(x)$ обе удовлетворяют дифференциальному уравнению (12), т. е.

$$\begin{aligned} y''(x) + py'(x) + qy(x) &= f(x), \\ y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x) &= f(x), \end{aligned}$$

то после вычитания второго уравнения из первого получаем, что неоднородность $f(x)$ «пропадает» и разность решений $y(x) - y_1(x)$ удовлетворяет уже однородному уравнению (11):

$$(y - y_1)'' + p(y - y_1)' + q(y - y_1) = 0.$$

Следовательно, если $z = z(x)$ — «общее решение» однородного уравнения (11), то $y - y_1 = z$ и $y = y_1 + z$. □

Итак, для отыскания всех решений неоднородного линейного дифференциального уравнения вида (12) нужно, во-первых, знать общий

вид решений соответствующего однородного уравнения (11), а во-вторых, найти хотя бы одно (частное) решение неоднородного уравнения (12).

В нашем случае, для уравнения $z'' + kz' = -g$, общее решение соответствующего однородного уравнения $z'' + kz' = 0$ известно из предыдущих рассмотрений: $z_0(t) = Ae^{-kt} + C$, где A и C — произвольные постоянные. Остается найти хотя бы одно частное решение неоднородного уравнения, т. е. подобрать функцию z_1 так, чтобы выполнялось уравнение $z'' + kz' = -g$. Конечно, константа этому уравнению удовлетворять не может: в левой части получится нуль, в то время как $-g \neq 0$. Попробуем найти решение в виде *линейной функции* $z_1(t) = at + b$. Тогда $z'_1 = a$, $z''_1 \equiv 0$, так что после подстановки такой функции в дифференциальное уравнение получим

$$0 + k \cdot a = -g \Leftrightarrow a = -\frac{g}{k};$$

при этом значение b может быть любым. Таким образом, в качестве частного решения можно взять $z_1(t) = -\frac{g}{k}t$, и из доказанного предложения следует, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения (9) записывается в виде

$$z(t) = z_1(t) + z_0(t) = -\frac{g}{k}t + Ae^{-kt} + C.$$

Разумеется, мы получили такой же ответ, как и раньше.

3.5.4. Однородные линейные уравнения с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y$. Мы рассмотрели и в общем случае, и в целом ряде примеров модификацию однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' = ky$, когда к правой части прибавляется «неоднородность» — данная функция $f(x)$. Представляет интерес еще одно обобщение уравнения $y' = ky$, когда коэффициент k не является постоянным, а есть некоторая функция $k = k(x)$. Получающиеся дифференциальные уравнения называются *однородными линейными с переменными коэффициентами*:

$$y' = k(x)y. \quad (13)$$

Такие уравнения приходится исследовать в эволюционных моделях, когда, скажем, скорость изменения численности какой-то популяции зависит от времени (например, скорость роста подвержена сезонным или иным изменениям).

Заметим, что для решений дифференциального уравнения (13) выполнен *принцип суперпозиции*: если функции $y(x)$ и $y_1(x)$ являются решениями дифференциального уравнения (13), то и любая их линейная комбинация $Y(x) = \alpha y(x) + \beta y_1(x)$ также является решением этого

уравнения. В частности, вместе с $y(x)$ и $y_1(x)$ решениями будут также и $\alpha y(x)$, и $y(x) \pm y_1(x)$. Доказывается это, как и выше, непосредственной подстановкой, с использованием *линейности дифференцирования*.

Следовательно, если найдено *хотя бы одно* ненулевое (т.е. отличное от тождественного нуля) решение $y_1(x)$ дифференциального уравнения (13), то из него получается *бесконечно много* решений этого уравнения, имеющих вид $y(x) = Ay_1(x)$ (A — произвольная мультипликативная константа).

Теперь попробуем действительно найти хотя бы одно решение дифференциального уравнения $y' = k(x)y$. В разобранным в § 3.4 случае $k(x) = k = \text{const}$ основным было решение $y = e^{kx}$: при дифференцировании такой функции y превращается в ky , где число k появляется как *производная показателя* $z = kx$. Это подсказывает идею поискать решение среди функций вида $y_1(x) = e^{z(x)}$ (вместе с нею решениями будут и все функции $y(x) = Ay_1(x)$, так что мы не стали к «виду» $y_1(x)$ добавлять мультипликативную константу).

Подставляя функцию $y_1(x) = e^{z(x)}$ в дифференциальное уравнение (13), получаем

$$y'_1 = z'(x)e^{z(x)} = k(x)y_1 = k(x)e^{z(x)} \Leftrightarrow z'(x) = k(x). \quad (14)$$

Таким образом, отыскание решений дифференциального уравнения в указанном виде приводит к квадратурам. Если для функции $k(x)$ уравнение (14), $z'(x) = k(x)$, на каком-то интервале I имеет решение $z = K(x)$ то тогда, во-первых, функция $y_1(x) = e^{K(x)}$, является решением дифференциального уравнения (13), а во-вторых, согласно предварительному замечанию, *любая* функция вида $y(x) = Ay_1(x) = Ae^{K(x)}$ также является решением уравнения (13).

Возникает вопрос: не имеет ли дифференциальное уравнение (13) каких-нибудь других решений? Иначе говоря, нужно ответить на *вопрос о единственности решений* такого уравнения.

Теорема 1 (существования и единственности решений дифференциального уравнения $y' = k(x)y$). *Допустим, что функция $k(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) интервале I и имеет на нем первообразную, т.е. дифференциальное уравнение (14), $z'(x) = k(x)$, на этом интервале имеет некоторое решение $z = K(x)$.*

В этом предположении *функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (13), $y' = k(x)y$, тогда и только тогда, когда она записывается в виде*

$$y(x) = Ae^{K(x)}, \quad (15)$$

где мультипликативная константа A однозначно определяется начальным условием $y(x_0) = y_0$ (или $y(0) = y_0$).

Доказательство. То, что любая функция вида (15) удовлетворяет дифференциальному уравнению (13), уже было проверено. Докажем обратное.

Пусть некоторая функция $y(x)$ является решением уравнения (13). Рассмотрим функцию $h(x) = y(x)e^{-K(x)}$ и найдем ее производную (на интервале I). Учитывая, что $y'(x) = k(x)y(x)$ и $K'(x) = k(x)$, получаем

$$\begin{aligned} h'(x) &= y'(x) \cdot e^{-K(x)} + y(x) \cdot e^{-K(x)} \cdot (-K'(x)) = \\ &= k(x)y(x)e^{-K(x)} - y(x)k(x)e^{-K(x)} \equiv 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = y(x)e^{-K(x)} \equiv \text{const} = A \Rightarrow y(x) = Ae^{K(x)}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Учитывая начальное условие $y(x_0) = y_0$, получаем

$$y(x_0) = Ae^{K(x_0)} = y_0 \Rightarrow A = y_0 e^{-K(x_0)} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{K(x) - K(x_0)}.$$

Теорема полностью доказана. $\square$

Пример 3. Чтобы найти все решения дифференциального уравнения $y' = xy$, записываем и решаем уравнение для z :

$$z' = x \Leftrightarrow z(x) = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Нас интересует *хотя бы одно* решение, поэтому положим $C = 0$. Из доказанной теоремы получаем

$$y' = xy \Leftrightarrow y(x) = Ae^{\frac{1}{2}x^2}$$

(ответ можно проверить дифференцированием). $\square$

3.5.5. Общие линейные уравнения с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y + f(x)$. Наконец, рассмотрим *неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами*, т. е. уравнения вида

$$y' = k(x)y + f(x), \tag{16}$$

где $k(x)$ и $f(x)$ — данные функции, определенные на каком-то интервале I .

Покажем, что такие уравнения также сводятся к квадратурам. Во-первых, для этих уравнений остается справедливой *теорема Д'Аламбера*.

Предложение 2 (третья теорема Д'Аламбера). Общее решение $y(x)$ *неоднородного дифференциального уравнения* (16), $y' = k(x)y + f(x)$, *представляется в виде суммы любого частного его решения и общего решения соответствующего однородного уравнения* (13), $y' = k(x)y$.

Доказательство этого утверждения практически совпадает с ранее приведенными доказательствами первой и второй теорем Д'Аламбера, и мы его опускаем. $\square$

Итак, как и выше, для отыскания всех решений неоднородного линейного дифференциального уравнения вида (16) нужно, *во-первых*, знать общий вид решений соответствующего однородного уравнения (13), а *во-вторых*, найти хотя бы одно (частное) решение неоднородного уравнения (16). Общий вид решений однородного уравнения (13) был найден выше: если функция $K(x)$ является решением дифференциального уравнения $z' = k(x)$ (т. е. $\forall x \in I \exists K'(x) = k(x)$), то (на рассматриваемом интервале)

$$y' = k(x)y \Leftrightarrow y(x) = Ae^{K(x)} \quad (A \in \mathbb{R}).$$

Что касается неоднородного линейного уравнения (16), применим к нему *метод вариации произвольной постоянной*: подставим в это уравнение функцию $y = A(x)e^{K(x)}$, где $K(x)$, как и выше, *первообразная* для функции $k(x)$, $A(x)$ — неизвестная (отыскиваемая) функция («вариация» произвольной постоянной A).

Производная

$$y' = A'(x) \cdot e^{K(x)} + A(x) \cdot k(x)e^{K(x)} = k(x)A(x)e^{K(x)} + A'(x)e^{K(x)}$$

должна равняться $k(x)y + f(x)$, т. е.

$$k(x)A(x)e^{K(x)} + A'(x)e^{K(x)} = k(x)A(x)e^{K(x)} + f(x).$$

Поскольку первые слагаемые в обеих частях полученного уравнения (с неизвестной функцией $A(x)$) совпадают, это уравнение, а с ним и дифференциальное уравнение (16) выполняются (при значениях x из того интервала, на котором рассматривается уравнение (16)) *тогда и только тогда*, когда

$$A'(x)e^{K(x)} = f(x) \Leftrightarrow A'(x) = f(x)e^{-K(x)}. \quad (17)$$

Таким образом, неоднородное уравнение (16) сведено к квадратуре (17): если найдена хотя бы одна первообразная $F(x)$ функции $\varphi(x) = f(x)e^{-K(x)}$, то общее решение дифференциального уравнения (17) записывается в виде $A(x) = F(x) + C$ (C — произвольная постоянная), в качестве частного решения уравнения (16) можно взять $y_1 = F(x)e^{K(x)}$ (проверьте!) и, наконец, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$y = F(x)e^{K(x)} + Ae^{K(x)},$$

где A — произвольная постоянная.

Примеры применения изложенных методов даны в упражнениях. На этом мы закончим знакомство с *линейными* дифференциальными

уравнениями первого порядка и перейдем к исследованию нелинейных (автономных и неавтономных) дифференциальных уравнений первого порядка и связанных с ними эволюционных моделей.

Упражнения, задачи и задания к гл. III

Проектное задание А (к § 3.1–3.2). Исходя *только* из дифференциального уравнения

$$y' = ky(x) \quad (18)$$

требуется доказать, что его решение при любом ненулевом начальном условии $y(0) = A$ есть функция, при всех рациональных значениях x совпадающая с Ac^x , где $c > 0$ — некоторое число, зависящее только от коэффициента k уравнения (18). Доказательство можно провести, следуя нижеизложенному плану (или по собственному плану).

Допустим, что уравнение (18) имеет *определенное на всей числовой оси* решение, удовлетворяющее в нуле *ненулевому* начальному условию: $y(0) = y_0 \neq 0$.

А-1. Докажите, что *всюду определенное* решение уравнения (18) с *ненулевым начальным условием* не обращается в нуль ни в какой точке числовой оси. Иными словами, если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (18), т. е.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = kf(x),$$

причем

$$f(0) = A_0 \neq 0,$$

то

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0.$$

А-2. Докажите, что *любое определенное на всей числовой оси* решение $f(x)$ уравнения (18), удовлетворяющее *ненулевому начальному условию* $f(0) = A_0 \neq 0$, *принимает на всей числовой оси значения одного знака*.

А-3. Докажите, что *любое определенное на всей числовой оси* решение $f(x)$ уравнения (18), удовлетворяющее *ненулевому начальному условию*, *либо строго возрастает, либо строго убывает на всей числовой оси*.

А-4. Докажите, что *общее (произвольное) решение дифференциального уравнения (18) пропорционально любому частному его решению*. Иными словами, если $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — решение дифференциального уравнения (18) с *ненулевым начальным условием* $f(0) = A_0 \neq 0$, то

функция $y(x)$ является решением уравнения (18) тогда и только тогда, когда она представляется в виде

$$y(x) = Af(x)$$

для некоторой константы A .

А-5. Докажите, что если существует определенное на всей числовой оси и удовлетворяющее ненулевому начальному условию $f(0) = A_0 \neq 0$ решение f уравнения (18), то существует единственное его решение, удовлетворяющее единичному начальному условию $y(0) = 1$.

Далее решение дифференциального уравнения (18), удовлетворяющее единичному начальному условию, будем называть базисным и обозначать $e(x)$.

А-6. Докажите теорему об априорной¹ единственности решений дифференциального уравнения $y' = ky$: любое решение $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения (18) представляется в виде

$$y(x) = Ae(x),$$

где мультипликативная константа A однозначно определяется начальным условием: $A = y(0)$.

А-7. Докажите основное свойство базисного решения дифференциального уравнения $y' = ky$: для любых значений $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$e(a + b) = e(a) + e(b).$$

А-8. Докажите, что

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad e(na) = (e(a))^n.$$

А-9. Докажите, что то же равенство справедливо для любых целых кратных a :

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall m \in \mathbb{Z} \quad e(ma) = (e(a))^m.$$

А-10. Докажите аналогичное свойство для дробных множителей вида $\alpha = \frac{1}{n}$:

$$\forall c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq 2) \quad e\left(\frac{1}{n}c\right) = (e(c))^{\frac{1}{n}}.$$

¹ *Априорный* — от лат. a priori — «из предшествующего», в смысле «независимо от опыта», «до опыта», в противоположность термину *апостериорный* (a posteriori) — «из последующего», «из опыта», «на основании опыта». В данном случае речь идет о свойстве, которое справедливо в предположении существования базисного решения, хотя пока мы его не доказали (лишь вывели из принятой без доказательства гипотезы о существовании всюду определенного решения с ненулевым начальным условием).

A-11. Наконец, докажите аналогичное свойство для произвольных дробных (т. е. рациональных) множителей вида $\alpha = \frac{m}{n}$:

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall m \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq 2) \quad e\left(\frac{m}{n}a\right) = (e(a))^{\frac{m}{n}}.$$

A-12. Докажите теорему о значениях базисного решения в рациональных точках: для базисного решения $e(x)$ дифференциального уравнения $y' = ky$ выполняется соотношение

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad e(x) = c^x, \quad \text{где } c = e(1).$$

A-13. Докажите исходное (основное) утверждение: решение уравнения (18) при любом ненулевом начальном условии $y(0) = A$ есть функция, при всех рациональных значениях x совпадающая с Ac^x , где $e(1)$.

Задачи и упражнения

1. Решите уравнение:

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1) $2^{2x} = 5 - x$; | 3) $2^x + 7^x = 3^2$; | 5) $3^x + 4^x = 5^x$; |
| 2) $5^x = 27 - x$; | 4) $2^{2x} - 3^x = 1$; | 6) $2^{1-x} = 1 + \lg x$. |

Указание. Найдите один корень «подбором», а затем докажите, что других корней нет, используя свойства монотонности (возможно, после некоторого преобразования уравнения).

2. Рассмотрим последовательные натуральные степени числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$$

1) (Несложная задача.) Докажите, что некоторая (натуральная) степень числа 2 начинается с цифры 7 (здесь и далее подразумевается запись степени в десятичной системе счисления).

2) (Не очень сложная задача.) Докажите, что некоторая степень числа 2 начинается с набора цифр 1999.

3) (Еще одна не очень сложная задача.) Докажите, что некоторая степень числа 2 начинается с любого наперед заданного набора цифр.

4) (Сложная задача.) Выясните, с какой цифры — 7 или 8 — степени числа 2 начинаются чаще¹.

3. Найдите производную функции:

- | | | |
|---------------------------------|--------------------|--|
| 1) e^{3-2x} ; | 7) e^{e^x} ; | 13) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; |
| 2) e^{x^2} ; | 8) $\sin e^x$; | 14) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; |
| 3) $e^{\cos x}$; | 9) x^{1-2x} ; | 15) $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; |
| 4) 2^{1+3x} ; | 10) $(x^2)^x$; | 16) $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. |
| 5) $x3^x$; | 11) x^{x^2} ; | |
| 6) $10^{\operatorname{tg} x}$; | 12) $x^{\sin x}$; | |

¹В естественном смысле, который придайте слову «чаще» самостоятельно!

Примечание. Функции в последних четырех пунктах — это так называемые *гиперболические функции* — соответственно *гиперболические косинус, синус, тангенс и котангенс*. Впоследствии (в § 5.6) будет объяснено, почему они так называются.

4. Найдите производную функции:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------------|
| 1) $\ln(1-2x)$; | 8) $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$; | 15) $\ln(\operatorname{tg} x)$; |
| 2) $\ln(1-x^2)$; | 9) $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$; | 16) $\cos(\ln x)$; |
| 3) $\log_2(1-3x)$; | 10) $(\ln x)^2$; | 17) $\log_x(1+x^2)$; |
| 4) $\ln \frac{1+x}{1-x}$; | 11) $\frac{1}{\ln x}$; | 18) $\ln \ln x$; |
| 5) $\ln \frac{x+1}{x-1}$; | 12) $\ln(\ln x)$; | 19) $\ln \lg x$; |
| 6) $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$; | 13) $\ln(\sin x)$; | 20) $\lg \ln x$; |
| 7) $\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$; | 14) $\ln(\cos x)$; | 21) $\ln(\ln(\ln x))$; |
| | | 22) $\ln 3^x$. |

5. Запишите уравнения касательной и нормали (т. е. перпендикуляра) к данному графику $y=f(x)$ в указанной точке x_0 (т. е. в точке графика с указанной абсциссой):

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $y=e^{-x}$, $x_0=-1$; | 3) $y=\frac{1}{e^x+1}$, $x_0=0$; | 5) $y=\ln x$, $x_0=2$; |
| 2) $y=3^x$, $x_0=0$; | 4) $y=\frac{x}{2^x}$, $x_0=0$; | 6) $y=\frac{1}{\ln x}$, $x_0=e$. |

6. Постройте график функции (при возможности с полным исследованием):

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y=e^{ x }$; | 17) $y=\frac{3^x-1}{2^x+1}$; |
| 2) $y=e^{- x }$; | 18) $y=\frac{3^x+1}{2^x+1}$; |
| 3) $y=\operatorname{ch} x$; | 19) $y=e^{-x} \cos x$; |
| 4) $y=\operatorname{sh} x$; | 20) $y=e^{\cos x}$; |
| 5) $y=\operatorname{th} x$; | 21) $y=e^{\sin x}$; |
| 6) $y=\operatorname{cth} x$; | 22) $y=e^{\operatorname{tg} x}$; |
| 7) $y=x+e^x$; | 23) $y=\ln x^2$; |
| 8) $y=x+e^{-x}$; | 24) $y=(\ln x)^2$; |
| 9) $y=\frac{1}{e^x+1}$; | 25) $y=\ln \sin x$; |
| 10) $y=\frac{e^x}{1+e^x}$; | 26) $y=\ln \sin x $; |
| 11) $y=\frac{2^x-1}{3^x-1}$; | 27) $y=\ln(1+\cos x)$; |
| 12) $y=\frac{2^x+1}{3^x-1}$; | 28) $y=\ln \frac{x+1}{x-1}$; |
| 13) $y=\frac{2^x-1}{3^x+1}$; | 29) $y=\ln \frac{1-x}{1+x}$; |
| 14) $y=\frac{2^x+1}{3^x+1}$; | 30) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$; |
| 15) $y=\frac{3^x-1}{2^x-1}$; | 31) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$; |
| 16) $y=\frac{3^x+1}{2^x-1}$; | 32) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$; |
| | 33) $y=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$; |

34) $y = \ln 10^x$;

36) $y = 10^{\ln x}$.

35) $y = \lg 10^x$;

7. Исследуйте функцию на монотонность, найдите точки экстремума, составьте «схему графика» (знаки, возрастание, убывание; искать пределы и асимптоты не нужно):

1) xe^x ;

7) $x - \ln x$;

2) $x^2 e^{-x}$;

8) $\frac{\ln x}{x}$;

3) $x^2 e^{-x^2}$;

9) $\frac{x}{\ln x - 1}$;

4) $\frac{e^x}{x}$;

10) $\frac{x^2}{2-x}$;

5) $x \ln x$;

11) $x^\alpha e^{-x}$ ($\alpha > 0$, $x \geq 0$);

6) $x^2 \ln x$;

12) $x^2 - \ln x^2$.

8. Найдите предел:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{x - 2}$;

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1+x)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a^x - a^2}{x^2 - 3x + 2}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$;

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\sin bx}$;

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{b^x - a^x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$;

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$.

9. Найдите предел последовательности x_n (при $n \rightarrow \infty$), если он существует:

1) $x_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n^2}\right)^n$;

3) $x_n = \left(\cos \frac{x}{n}\right)^n$;

2) $x_n = \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{\alpha}{n^2}\right)^n$;

4) $x_n = \left(\cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n}\right)^n$.

10. Выпишите формулы линейного приближения в окрестности точки $x_0 = 0$ для функции:

1) e^x ;

4) $\ln(1+x)$;

2) 2^x ;

5) $\lg(1+x)$;

3) a^x ($a > 0$);

6) $\log_a(1+x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Указание. См. § 1.1 и упражнения к гл. I.

11. Используя производные, докажите следующие неравенства (при любых значениях $x > 0$):

1) $e^x > 1 + x$;

2) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$;

$$3) e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!};$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

12. Используя производные, докажите следующие неравенства (при любых значениях $x > 0$):

$$1) e^x < 1 + xe^x;$$

$$2) e^x < 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2};$$

$$3) e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3 e^x}{3!};$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n e^x}{n!}.$$

13. Используя производные, докажите следующие неравенства (при любых значениях $x > 0$):

$$1) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x;$$

$$2) 1 + 2 \ln x \leq x^2.$$

14. Считая известной формулу Бернулли

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

докажите неравенства:

$$1) e > 1;$$

$$2) e > 2;$$

$$3) (*) \quad e < 4;$$

$$4) (**) \quad e < 3.$$

15. Докажите, что функция $\varphi(x) = x^{1-\alpha} \cdot \ln x$ для любого значения $\alpha < 1$ неограниченна сверху на промежутке $(1, +\infty)$ (т.е. $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x > 1 \quad \varphi(x) > M$).

16. Докажите, что при любом значении $\alpha > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x > 1 \quad \frac{\ln x}{x^\alpha} \leq \frac{M}{x^{\alpha/2}}$.

Выведите отсюда вторую теорему о сравнении.

17. Докажите, что при любом значении $a > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0.$$

18. Постройте графики функций, исследовав их на монотонность (при возможности — на выпуклость) и проанализировав поведение функций на границах области определения (включая поведение на бесконечности):

$$1) y = xe^x;$$

$$9) y = \ln(2^x + 1);$$

$$2) y = xe^{-x};$$

$$10) y = x \ln x;$$

$$3) y = xe^{-x^2};$$

$$11) y = x^2 \ln x;$$

$$4) y = x^2 e^{-x};$$

$$12) y = x \ln^2 x;$$

$$5) y = x^2 e^{-x^2};$$

$$13) y = x^{x^2};$$

$$6) y = \frac{e^x}{x};$$

$$14) y = (x^x)^2;$$

$$15) y = x - \ln x;$$

$$7) y = \frac{x^2}{2-x};$$

$$16) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$8) y = x^\alpha e^{-x} \quad (\alpha > 0, x \geq 0);$$

$$17) y = \frac{\ln^2 x}{x};$$

18) $y = \frac{x}{\ln x - 1};$

20) $y = 3 \log_2^2 x - \log_2^3 x;$

19) $y = \frac{\ln x^2}{1 + \ln^2 x};$

21) $y = x^2 - 2 \ln x;$

22) $y = x^2 - \ln x^2.$

19. Найдите число корней уравнения в зависимости от значения параметра $a \in \mathbb{R}$:

1) $a^x = x \quad (a > 0);$

2) $\ln x = ax;$

3) $x^2 \cdot e^{2-|x|} = 4a;$

4) $3x \lg x = 1 + a \lg x;$

5) (задача А. Р. Зильбермана) $a^x = \log_a x.$

Указание к п. 5): рассмотрите сначала случай $a = \frac{1}{16}$ — нельзя ли «угадать» корни?!

20. Выпишите ряд Тейлора—Маклорена, т. е. формальный степенной ряд

$$f(x) \mapsto f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

для следующих функций:

1) $f(x) = e^{x^2};$

4) $f(x) = \ln(1+x);$

7) $f(x) = \sin x;$

2) $f(x) = e^{-x};$

5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2};$

8) $f(x) = \cos x;$

3) $f(x) = \frac{1}{1+x};$

6) $f(x) = \arctg x;$

9) $f(x) = \operatorname{sh} x;$

10) $f(x) = \operatorname{ch} x.$

Указание. Используйте степенные ряды для экспоненты и для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

21. Докажите, что если для некоторого ряда $f_0 + f_1 + \dots + f_n + \dots$ ряд из абсолютных величин $|f_0| + |f_1| + \dots + |f_n| + \dots$ сходится, то исходный ряд тоже сходится (в этом случае ряд $f_0 + f_1 + \dots + f_n + \dots$ называется *абсолютно сходящимся*).

22. Используя мажорирование ряда бесконечно убывающей геометрической прогрессией, докажите сходимости следующих степенных рядов в случае $|x| < 1$, а также укажите функции, отвечающие этим рядам:

1) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots;$

2) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots;$

3) $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots;$

4) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots;$

5) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots;$

6) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots;$

7) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots;$

8) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$

Совет. Чтобы указать сумму бесконечного ряда, попробуйте его *формально* продифференцировать или же подобрать ряд, для которого рассматриваемый ряд является *формальной производной*.

23. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Докажите, что функция f дифференцируема на всей числовой оси, и найдите ее производную $f'(x)$.

2) Докажите, что функция f *дважды дифференцируема* на всей числовой оси, т. е. имеет и вторую производную $f''(x)$.

3) Докажите, что функция f имеет производные всех порядков (на всей числовой оси), причем для любого $n \in \mathbb{N}$ производная порядка n в точке $x = 0$ равна нулю: $f^{(n)}(0) = 0$.

Линейные дифференциальные уравнения и линейные модели

24. Найдите функцию $y = y(x)$, если

1) $y' = \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 4;$

3) $3y' = -2y, \quad y(3) = e;$

2) $y' = 4y, \quad y(1) = e;$

4) $\frac{y'}{y} = \frac{2}{5}, \quad y'(1) = e.$

25. Через 1 минуту из единственной бактерии, находящейся в сосуде, получилось 10 штук. Сколько бактерий будет в этом сосуде через 10 минут?

26. Через 12 часов после начала опыта численность популяции возросла в три раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через трое суток?

27. Вещество имеет период полураспада 1 год. Через какое время из 10 г этого вещества останется 1 г?

28. За 5 дней распадается 10 % вещества. Каков период его полураспада?

29. Период полураспада радия Ra^{226} — 1620 лет. Сколько останется радия через 300 лет, если вначале его было 200 г?

30. За 500 лет распалось 10 г радия. Сколько его было в начальный момент?

31. Найдите, через какое время распадается 1, 10, 90, 99 % от первоначального запаса радия?

32. Содержание радия на Земле в различных породах (отношение числа атомов радия к числу атомов породы) в среднем близко к 10^{-12} . Каково было содержание радия 10 000 лет назад; 10^6 лет назад; $5 \cdot 10^9$ лет назад ($5 \cdot 10^9$ лет — возраст Земли)? Попробуйте объяснить ответ.

33. Найдите давление воздуха в шахте на глубине 1; 3; 10 км.

34. Пусть для некоторого расщепляющегося вещества коэффициенты α и β равны соответственно $2 \cdot 10^8$ 1/с и $4 \cdot 10^{10}$ см/с.

1) При каких значениях радиуса r шара из этого вещества число $N(t)$ нейтронов в шаре будет возрастать?

2) Найдите наименьшее значение радиуса r , при котором шар этого радиуса через одну секунду потеряет не более половины своих нейтронов, а также отношение $\frac{r}{r_0}$ этого радиуса к критическому.

3) Пусть для данного расщепляющегося вещества $\alpha = 2 \cdot 10^8$ 1/с; допустим, что критический радиус равен $r_0 = 50$ см. Шар из этого вещества радиуса $r = 40$ см в момент времени $t = 0$ содержит N_0 свободных нейтронов; сколько нейтронов он содержит при $t = 1$?

35. Пусть из расщепляющегося вещества с параметрами расщепления и вылета $\alpha = 2 \cdot 10^8$ 1/с и $\beta = 4 \cdot 10^{10}$ см/с сделан шар радиуса $r = \frac{r_0}{2}$ (r_0 — критический радиус) и источник нейтронов вводит в него $q = 100$ нейтронов в секунду. Найдите зависимость $N(t)$ числа нейтронов в шаре от времени и предельное число нейтронов N_1 , если начальное число нейтронов равно $N(0) = N_0$.

36. Пусть имеется шар из расщепляющегося вещества с параметрами $\beta = 2\alpha$ и с источником, вводящим в него qt^2 нейтронов за промежуток времени $[0, t]$. Пусть $N(t)$ — число свободных нейтронов в шаре в момент времени t . Запишите дифференциальное уравнение для функции $N(t)$ и найдите все его решения.

37. Найдите (подберите) частные решения данных дифференциальных уравнений и запишите их общие решения:

1) $y' = -y + 17$;

10) $y' = y + x^2$;

2) $y' = y + e^{-x}$;

11) $y' = y + x^2 + x$;

3) $y' = y + e^x$;

12) $y' = y + \frac{1}{x}, x > 0$;

4) $y' = ky + e^{\alpha x}$;

13) $y' = 2y + e^x - x$;

5) $y' = y + \cos x$;

14) $y' = 2y + e^x + e^{-x}$;

6) $y' = ky + \sin \omega x$;

15) $y' = 2y + e^x + \cos x$;

7) $y' = y + 2x$;

16) $y' = 2y + e^{2x} + \sin x$;

8) $y' = 2y - x$;

17) $y' = 2y + \cos x + \sin x$;

9) $y' = ky + ax + b$;

18) $y' = 2y + \cos x + \cos 2x$.

Замечание. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — частные решения уравнений $y' = ky + f_1(x)$ и $y' = ky + f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ — частное решение уравнения $y' = ky + f_1(x) + f_2(x)$ (докажите).

38. Найдите функцию $f(x)$, если известно, что

1) $f'(x) - 2f(x) = x$ и $f(0) = \frac{1}{2}$;

2) $f'(x) + f(x) = e^{2x}$ и $f(0) = -1$;

$$3) f'(x) - \frac{1}{2}f(x) = e^{x/2} \text{ и } f(0) = 2;$$

$$4) f'(x) + f(x) = \cos(\pi e^x) \text{ и } f(0) = e;$$

$$5) f'(x) + 3f(x) = xe^x \text{ и } f(0) = \frac{1}{e}.$$

39. Как известно из физики, если электрическая цепь с сопротивлением R и индуктивностью (самоиндукцией) L замкнута источником напряжения, создающим *постоянную* ЭДС (электродвижущую силу) $\mathcal{E}$, то сила тока $I = I(t)$, возникающего в этой цепи, удовлетворяет уравнению $LI'(t) + RI(t) = \mathcal{E}$. Найдите зависимость силы тока от времени, если в начальный момент времени ток отсутствовал: $I(0) = 0$.

40. Решите ту же задачу в случае, когда цепь замыкается источником ЭДС, меняющейся по гармоническому закону: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$.

41. (*Последовательный радиоактивный распад.*) Пусть при радиоактивном распаде атомы вещества X превращаются в атомы другого радиоактивного вещества Y (первое вещество называют *материнским*, второе — *дочерним*), а атомы Y превращаются в атомы еще одного вещества Z , которое уже не радиоактивно.

1) Напишите дифференциальные уравнения для количеств атомов $X(t)$ и $Y(t)$ этих веществ, если вероятности их распада равны ω и ν .

2) Найдите решения $X(t)$ и $Y(t)$ получающейся системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям $X(0) = X_0$ и $Y(0) = 0$. Исследуйте их на монотонность и экстремумы; постройте соответствующие графики (на одном чертеже).

3) При тех же начальных условиях выясните, при каком соотношении между вероятностями распада (или между периодами полураспада T_X и T_Y) количество атомов вещества Y в некоторый момент времени превысит количество атомов вещества X .

4) Покажите, что в случае долгоживущего материнского вещества X и короткоживущего дочернего вещества Y через некоторое достаточно большое время «радиоактивное семейство» $X \rightarrow Y \rightarrow \dots$ переходит в так называемое *стационарное состояние*, когда

$$Y(t) \approx \frac{\omega}{\nu} X(t).$$

Реальный пример подобного «радиоактивного семейства» — цепочка $U^{238} \rightarrow \dots \rightarrow Ra^{226} \rightarrow \dots$ [уран-238 через набор промежуточных веществ-«посредников» превращается в радий]. Заметим, что период полураспада U^{238} равен $4,5 \cdot 10^9$ лет [а радия Ra^{226} , напомним, 1620 лет].

42. Через отверстие в дне прямоугольного водяного бака с основанием площади 1 м^2 выливается вода со скоростью, пропорциональной высоте воды в баке h , а сверху в бак вливается вода со скоростью 10 л/с . Составьте и решите дифференциальное уравнение для функции $h = h(t)$.

Выясните, при каком коэффициенте пропорциональности k для скорости выливания уровень воды в баке будет расти? Может ли он расти до бесконечности?

43. Найдите функцию $f(x)$, если известно, что:

- 1) $f'(x) = -2x$, $f(1) = 2$;
- 2) $f'(x) = -x^2$, $f(0) = 1$;
- 3) $f'(x) = e^{-2x}$, $f(0) = 2$;
- 4) $f'(x) = 3^x$, $f(1) = 3$;
- 5) $f'(x) = -2 \cos x$, $f(\pi) = 17$;
- 6) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(1) = 2$ ($x > 0$);
- 7) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f(1) = 2$ ($x > 0$);
- 8) $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $f(1) = 1$ ($x > 0$);
- 9) $f'(x) = 3\sqrt{x}$, $f(1) = -2$ ($x > 0$);
- 10) $f'(x) = \cos 2x$, $f(\pi) = -17$.

44. Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = \theta(x)$, где θ — *эта-функция Хевисайда*¹, не имеет решений, определенных на всей числовой оси.

45. Найдите общий вид решений дифференциального уравнения:

- | | | |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| 1) $y' = x \cos x$; | 3) $y' = xe^x$; | 5) $y' = xe^{2x}$; |
| 2) $y' = x \sin x$; | 4) $y' = xe^{-x}$; | 6) $y' = x \cos 2x$. |

Указание к этой и следующей задачам: попробуйте действовать, так сказать, «методом последовательного подбора». Полезно также просмотреть производные, вычислявшиеся ранее.

46. Найдите общий вид решений дифференциального уравнения:

- | | | |
|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 1) $y' = \operatorname{ch} x$; | 3) $y' = \ln x$; | 5) $y' = \operatorname{tg} x$; |
| 2) $y' = \operatorname{sh} x$; | 4) $y' = \operatorname{ctg} x$; | 6) $y' = \sin^2 x$. |

47. Найдите общий вид решений дифференциального уравнения *второго порядка* (в него войдут *две* произвольные постоянные):

- | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 1) $y'' = kx$; | 3) $y'' = \cos x$; | 5) $y'' = \sin 2x$; |
| 2) $y'' = \sin x$; | 4) $y'' = 2 - 6x$; | 6) $y'' = \sin^2 x$. |

48. Найдите общий вид решений дифференциального уравнения *третьего порядка*:

- | | | |
|-----------------|----------------------|-----------------------|
| 1) $y''' = 0$; | 3) $y''' = 24x$; | 5) $y''' = \sin x$; |
| 2) $y''' = 6$; | 4) $y''' = e^{-x}$; | 6) $y''' = \sin 3x$. |

49. Найдите общий вид решений дифференциального уравнения (через y^{IV} обозначается *четвертая* производная функции $y = y(x)$):

¹Напомним, что эта функция определяется составной формулой: $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и 1 при $x \geq 0$.

- 1) $y''' = x^3$; 3) $y^{IV} = 0$; 5) $y^{IV} = 720x$.
 2) $y''' = y''$; 4) $y^{IV} = 24$. 6) $y^{IV} = y'''$.

50. С помощью метода вариации произвольной постоянной найдите общий вид решений дифференциального уравнения:

- 1) $y' = -2y + e^{-2x}$; 3) $y' = 2y - 2xe^{2x}$; 5) $y' = -y - xe^x$;
 2) $y' = -2y + e^{-x}$; 4) $y' = 2y - xe^x$; 6) $y' = -y + xe^{-x}$.

51. С помощью подстановки $y = Ae^{z(x)}$ найдите общий вид решений дифференциального уравнения:

- 1) $y' = 4xy$; 5) $y' = y \cos x$; 9) $y' = -\frac{y}{2\sqrt{2}} (x > 0)$;
 2) $y' = -2xy$; 6) $y' = y \cos 2x$;
 3) $y' = -3x^2y$; 7) $y' = y \sin 2x$; 10) $y' = \frac{2y}{\sqrt{x}} (x > 0)$.
 4) $y' = e^x y$; 8) $y' = \frac{y}{2\sqrt{2}} (x > 0)$;

52. Тем же методом найдите общий вид решений данного дифференциального уравнения и изобразите семейство его интегральных кривых на плоскости Oxy :

- 1) $y' = \frac{y}{x}$; 3) $y' = \frac{y}{2x}$; 5) $y' = -\frac{2y}{x}$;
 2) $y' = \frac{2y}{x}$; 4) $y' = -\frac{y}{x}$; 6) $y' = -\frac{y}{2x}$.

53. Найдите функцию $f(x)$, если известно, что

- 1) $f'(x) = 2xf(x)$, $f(0) = 1$;
 2) $f'(x) = 3x^2 f(x)$, $f(0) = 2$;
 3) $2\sqrt{x}f'(x) = f(x)$, $f(4) = 1$ ($x > 0$);
 4) $x^2 f'(x) = -f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$ ($x > 0$).

54. С помощью подстановки $y = Ae^{z(x)}$ и последующей вариации произвольной постоянной найдите общий вид решений дифференциального уравнения:

- 1) $y' = 2xy + b$; 4) $y' = -2xy + e^{-x^2}$;
 2) $y' = 2xy + 2xe^{x^2}$; 5) $y' = ye^x + 2xe^x$;
 3) $y' = -2xy + 2xe^{-x^2}$; 6) $y' = 2ye^x + xe^x$.

ГЛАВА IV

Модели с разделяющимися переменными

§ 4.1. Анализ эволюционного уравнения $y' = g(y)$. Примеры

Во всех разобранных в гл. I–III случаях мы преуспели при интегрировании уравнений *лишь потому*, что рассматривавшиеся уравнения либо сразу сводились к квадратурам (уравнения вида $y' = f(x)$ из гл. II), либо являлись *линейными* относительно неизвестной функции $y = y(x)$ (как в гл. III). Это весьма существенно: оказывается, решения дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$, *нелинейных* относительно y (т. е. правая часть которых не представима в виде $k(x)y + f(x)$), *в общем случае* не могут быть записаны с помощью элементарных функций и квадратур (т. е. интегралов). Простейшая нелинейная зависимость — *квадратичная*, и в 1841 г. французский математик Жозеф Лиувиль строго доказал неразрешимость в элементарных функциях и квадратурах такого, казалось бы, простого уравнения, как $y' = y^2 - x$. Однако и нелинейные *дифференциальные уравнения первого порядка разрешимы в элементарных функциях или же в квадратурах, если в их правую часть не входит независимая переменная x , т. е. когда $F(x, y) = g(y)$* (и, разумеется, при наложении некоторых условий на функцию $g(y)$). Напомним (см. § 3.1), что такие уравнения называются *автономными*; ими мы и займемся.

4.1.1. Поля направлений уравнения $y' = g(y)$ и симметричные им. Как и раньше, при анализе дифференциального уравнения вида

$$y' = g(y) \tag{1}$$

(g — данная, пока пусть только *непрерывная* функция) нам поможет *геометрическая интерпретация* уравнений первого порядка с помощью полей направлений на плоскости Oxy . Заметим, что, как и для уравнения $y' = ky$ из § 3.1, поле направлений уравнения (1) *постоянно вдоль горизонталей* $y = \text{const}$. Вспомним, что мы уже рассматривали поля направлений, *постоянные вдоль вертикалей* $x = \text{const}$, — такие

поля отвечают дифференциальным уравнениям вида

$$y' = f(x), \quad (2)$$

сводящимся к квадратурам. Сопоставление этих наблюдений приводит к следующей идее: с помощью симметрии относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. прямой $y = x$, поле направлений дифференциального уравнения (1), постоянное вдоль горизонталей, вместе с интегральной кривой $y = y(x)$ этого поля (рис. 48) перевести в поле направлений, постоянное вдоль вертикалей. Тем самым, казалось бы, дифференциальное уравнение (1) должно свестись к дифференциальному уравнению вида (2), решать которое мы уже умеем. Выясним, что же все-таки получится после симметрии (рис. 49).

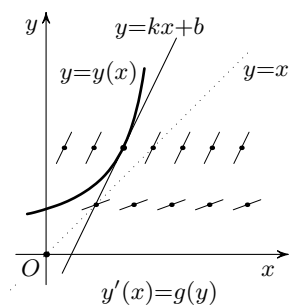


Рис. 48

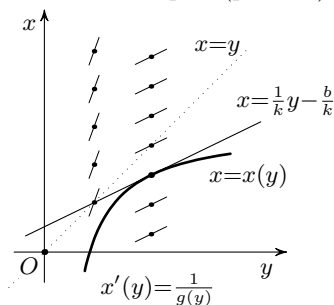


Рис. 49

Во-первых, оси Ox и Oy поменяются местами, и точка $(x; y)$ перейдет в точку $(y; x)$.

Во-вторых, задающая направление в точке (x, y) прямая $y = kx + b$ с угловым коэффициентом $k = g(y)$, который мы будем считать отличным от нуля, перейдет в симметричную прямую; поскольку она задает график обратной функции — линейной функции $x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}$ с угловым коэффициентом $k_{\text{sym}} = \frac{1}{k}$, симметричное поле направлений на плоскости Oyx задается формулой $k_{\text{sym}} = F(x, y) = \frac{1}{g(y)} = f(y)$: на плоскости Oyx получается поле направлений, постоянное вдоль вертикалей. Отметим, что если направление исходного поля в точке $(x; y)$ было горизонтальным, т. е. $k = g(y) = 0$, то симметричное поле в соответствующей точке будет вертикальным. Будем такую точку называть *особой*, условно полагая, что $k_{\text{sym}}(y, x) = \frac{1}{0} = \infty$.

Наконец, в-третьих, если решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1) в окрестности точки x обратимо, то его график перейдет как раз в график обратной функции $x = x(y)$. Интуитивно ясно,

что касание при симметрии сохранится, так что *обратная функция* $x(y)$ в окрестности точки y должна удовлетворять «симметричному» дифференциальному уравнению вида (2): $x'_y = x'(y) = f(y) = \frac{1}{g(y)}$, которое немедленно интегрируется:

$$x'(y) = \frac{1}{g(y)} \Leftrightarrow x = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + C, \quad (3)$$

где так называемый «неопределенный интеграл» $\int \frac{dy}{g(y)}$ есть просто обозначение¹ для произвольной (любой) первообразной $G(y)$ функции $f(y) = \frac{1}{g(y)}$ в окрестности точки y (заметим, что по предположению функция g непрерывна и, поскольку $g(y) \neq 0$, функция g отлична от нуля в окрестности точки y , а поэтому функция $f = \frac{1}{g}$ определена, непрерывна, и значит, имеет первообразную в этой окрестности). Остается из уравнения (3) выразить y через x , благо в силу допущений об обратимости решения в окрестности точки x это возможно!

При осуществлении этой *схемы решения* мы получим, вообще говоря, зависимость вида $y = \varphi(x; C)$, где значение константы C определяется из начального условия $y(x_0) = y_0$, т. е. из уравнения $\varphi(x_0; C) = y_0$. Часто начальное условие проще учесть непосредственно при интегрировании, записав зависимость x от y с помощью еще одной *формулы Барроу*:

$$x'(y) = \frac{1}{g(y)}, \quad y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{du}{g(u)}. \quad (4)$$

Однако в приведенных рассуждениях есть пробел: строго не доказано, что *касание сохраняется при симметрии* относительно прямой $y = x$. Геометрически это понятно, но касание и *касательная* к графику определялись *аналитически*, через *производную*, поэтому отыскание решений по «схеме» (3) также нужно обосновать аналитически.

Еще одна неясность: как быть с решениями $y = y(x)$ в окрестностях точек, в которых касательная горизонтальна, т. е. $g(y) = 0$, а сама функция $y(x)$ может быть как необратимой, так и обратимой (типа функций x^2 или x^3 в окрестности нуля)?

Прежде чем обратиться к этим вопросам, рассмотрим два уже знакомых примера.

4.1.2. Примеры: линейные уравнения $y' = ky[+b]$. Применим схему интегрирования (3) к линейным дифференциальным уравнениям

¹Подробнее о «неопределенном интеграле» говорится в следующем параграфе.

первого порядка с постоянными коэффициентами, которые были уже исследованы в гл. III.

Пример 1. Симметричным к уравнению $y' = ky$ ($k \neq 0$) в случае $k \neq 0$ будет уравнение

$$x'(y) = \frac{1}{ky} \Leftrightarrow x = \int \frac{dy}{ky} = \frac{1}{k} \ln |y| + \widehat{C},$$

где $\widehat{C}$ — двузначная в данном случае константа: $\widehat{C} = C_1, C_2$, в зависимости от знака y . Отсюда после преобразования и потенцирования выражаем y через x :

$$\ln |y| = kx - k\widehat{C} \Leftrightarrow |y| = e^{kx - k\widehat{C}} \Leftrightarrow y = \pm e^{-k\widehat{C}} e^{kx} = Ae^{kx},$$

где A — положительная или отрицательная константа. Отброшенному случаю $y = 0$ отвечает *отдельная* интегральная кривая (*стационарное решение*) $y(x) \equiv 0$ — ей отвечает *вертикаль* $y = 0$, касающаяся симметричного векторного поля $k_{\text{sym}} = \frac{1}{ky}$, которую мы будем называть «*особым решением*» дифференциального уравнения $x' = \frac{1}{ky}$ («вдоль него» как бы « $x'_y = \infty$ »). Если в последней формуле допустить значение $A = 0$, мы придем к уже известному семейству решений:

$$y' = ky \quad (x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow y = Ae^{kx}, \quad A \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Пример 2. Аналогично без особых хлопот (типа отыскания частного решения) интегрируется и неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + b$ ($k \neq 0$). Симметричным к нему в случае $ky + b \neq 0$, т. е. $y \neq -\frac{b}{k}$, будет уравнение

$$\begin{aligned} x'(y) = \frac{1}{ky+b} &\Leftrightarrow x = \int \frac{dy}{ky+b} = \frac{1}{k} \ln |ky+b| + \widehat{C} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln |ky+b| = k(x - \widehat{C}) \Leftrightarrow |ky+b| = e^{kx - k\widehat{C}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{b}{k} \pm \frac{e^{-k\widehat{C}}}{k} e^{kx} = -\frac{b}{k} + Ae^{kx}, \end{aligned}$$

где $A = \pm \frac{e^{-k\widehat{C}}}{k}$ — ненулевая константа. Добавляя значение $A = 0$, включаем в формулу для $y(x)$ и стационарное решение $y \equiv -\frac{b}{k}$. $\square$

4.1.3. Теоремы о решениях уравнения $y' = g(y)$. Стационарные решения.

Теорема 1 (о решениях автономного дифференциального уравнения первого порядка). Пусть функция $g(y)$ в правой части дифференциального уравнения (1),

$$y' = g(y),$$

непрерывна и отлична от нуля на каком-то интервале J . Тогда, во-первых, если функция $y = y(x)$ является решением уравнения (1) на интервале I , то она обратима на I и обратная к ней функция $x = x(y)$ удовлетворяет «симметричному» дифференциальному уравнению (3),

$$x'_y = \frac{1}{g(y)},$$

и, во-вторых, если некоторая функция $x = x(y)$ удовлетворяет уравнению (3) на интервале J , то она обратима на J и обратная функция $y = y(x)$ является решением уравнения (1).

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия непрерывности и отличия от нуля функции g на интервале J следует, что она *знакопостоянна*, т. е. всюду положительна или всюду отрицательна на этом интервале (это вытекает, например, из *теоремы о промежуточном значении*). Значит, если функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению (1) на интервале I , то $\forall x \in I$ производная $y'(x) = g(y(x))$ имеет один и тот же знак. Следовательно, функция $y = y(x)$ строго возрастает или строго убывает на I и поэтому *обратима* на I . Согласно *теореме о производной обратной функции* (см. учебники алгебры и начал анализа) обратная функция $x = x(y)$ дифференцируема в каждой точке своей области определения (она совпадает с множеством значений $J_1 \subset J$ функции $y(x)$), причем

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)|_{x=x(y)}} = \frac{1}{g(y(x))|_{x=x(y)}} = \frac{1}{g(y)},$$

ибо $\forall y \in J_1$ $y(x(y)) = y$ (композиция двух взаимно обратных функций переводит исходную точку в себя). Тем самым первая часть утверждения теоремы доказана.

Вторая же часть утверждения теоремы следует из первой — нужно только во всех рассуждениях относительно решений «поменять места» уравнения (1) и (3), а также переменные x и y . $\square$

Следствие 1 (теорема существования и единственности решений автономного дифференциального уравнения). *Если функция $g(y)$ в правой части дифференциального уравнения (1),*

$$y' = g(y),$$

непрерывна и отлична от нуля на каком-то интервале J , то для любого начального условия $y(x_0) = y_0 \in J$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ — произвольное число) существует решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1), определенное в каком-то содержащем точку x_0 интервале I и удовлетворяющее данному начальному условию, причем единственное (в том смысле, что любые два решения с указанным начальным условием сов-

падают в некоторой окрестности точки x_0); это решение удовлетворяет формуле Барроу (4):

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{g(u)}.$$

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(y) = \frac{1}{g(y)}$ единственность следует из теоремы единственности решений дифференциального уравнения вида (2) (§ 2.1, теорема 1), существование — из соответствующей теоремы существования решений для такого уравнения (§ 2.3, следствие 1), а формула — из обычной формулы Барроу (или непосредственно из теоремы Коши—Муаньо — § 2.3, теорема 4). $\square$

Следствие 2 (теорема существования и единственности в окрестности неособой точки). Если функция $g(y)$ в правой части дифференциального уравнения (1) $y' = g(y)$ непрерывна и отлична от нуля в какой-то точке $y_0 \in \mathbb{R}$, то для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки x_0 существует решение $y = y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, и притом единственное: оно удовлетворяет формуле Барроу (4).

Доказательство. В силу непрерывности функции $g(y)$ и условия $g(y_0) \neq 0$ в некоторой окрестности J точки y_0 функция g отлична от нуля (и даже знакопостоянна). Следовательно, к уравнению (1) на интервале J применимо предыдущее следствие. $\square$

Если в точке y_0 значение функции g отлично от нуля, $g(y_0) \neq 0$, то такая точка называется *неособой* для дифференциального уравнения (1). Следствие 2, с учетом его доказательства, можно переформулировать так: *у неособой точки y_0 существует такая окрестность $J = (y_0 - r, y_0 + r)$, что через любую точку $(x; y)$, принадлежащую полосе плоскости Oxy , заключенной между горизонтальными прямыми $y = y_0 - r$ и $y = y_0 + r$, проходит единственная интегральная кривая поля направлений уравнения (1).* При этом, поскольку поле направлений $k = g(y)$ постоянно вдоль горизонталей, т.е. не меняется при параллельных переносах вдоль оси Ox , все интегральные кривые в этой полосе получаются из одной переносами вдоль оси Ox (рис. 50), а соответствующие решения записываются с помощью одного-единственного решения $y_1(x)$ формулой $y(x) = y_1(x + a)$ (значение $a \in \mathbb{R}$ произвольное). Впрочем, то же самое можно увидеть и из интегральной формулы (4).

Точки y , для которых значение функции $g(y)$ равно нулю, называются *особыми точками* дифференциального уравнения (1). Каждой особой точке y_0 отвечает так называемое *стационарное решение*, кон-

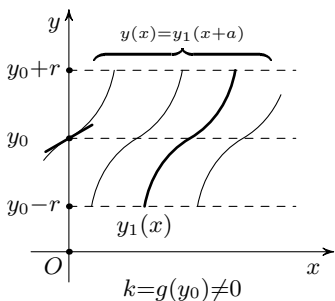


Рис. 50

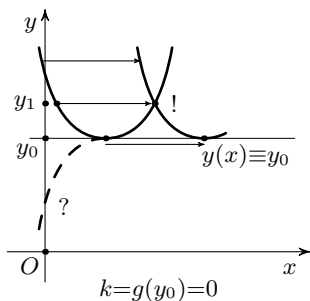


Рис. 51

станта: $y(x) \equiv y_0$. Возникает вопрос: существуют ли такие *нестационарные* решения, что для некоторого x_0 значение $y'(x_0)$ равно 0, т. е. $g(y(x_0)) = 0$?

По сути дела, это вопрос о *единственности решения* с начальным условием $y_0 = y(x_0)$ в особой точке. В этом случае формула для решений (4) уже не применима, ибо записанный в ней интеграл может и не существовать. Далее, из следствия 2 вытекает, что график нестационарного решения с указанным свойством не может касаться горизонтали $y = y_0$ (графика стационарного решения) и при этом в окрестности точки касания x_0 лежать *по одну сторону* от указанной горизонтали, подобно расположению параболы $y = x^2$ относительно прямой $y = 0$ (оси Ox): как указывалось в комментарии к следствию 2, скажем, левая «ветвь» соответствующей интегральной кривой при параллельном переносе вправо переходила бы в интегральную кривую, пересекающую правую ветвь (рис. 51), а это противоречит единственности решений в полосе около неособой точки y_1 .

Однако не слишком понятно, не может ли график решения располагаться *по разные стороны* относительно касающейся его горизонтали $y = y_0$, подобно графику функции $y = x^3$ (по отношению к оси Ox). Попробуйте это выяснить самостоятельно. (Мы вернемся к вопросу о единственности решений в конце параграфа — после рассмотрения нескольких конкретных примеров.)

С особыми точками и соответствующими им стационарными решениями связан также вопрос об их *устойчивости*, т. е. о том, как будут вести себя решения уравнения (1), если заданное начальное значение $y(x_0) = y_1$ близко к особой точке y_0 . Пока отметим только, что для полностью исследованного нами однородного линейного уравнения $y = ky$, во-первых, решение с нулевым начальным условием единственно: это стационарное решение $y \equiv 0$. Во-вторых, это решение *устойчиво* при

$k < 0$ (в этом случае не только «близкие», но даже в с е решения $y = y(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ приближаются к стационарному) и *неустойчиво* при $k > 0$ (рис. 52–53).

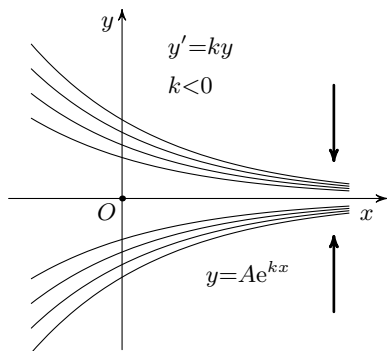


Рис. 52

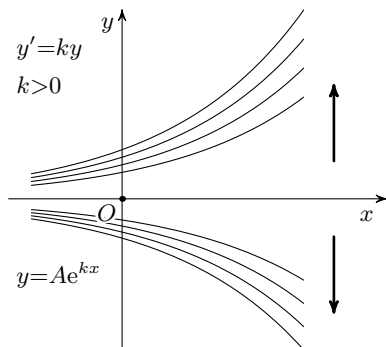


Рис. 53

4.1.4. Автономные уравнения как модели эволюции (напоминание). В гл. I дифференциальные уравнения первого порядка, в том числе и автономные уравнения вида (1), рассматривались как *математические модели эволюционных процессов*: если за независимую переменную x принять *время* t , а описывающую *состояние системы* величину считать *функцией времени* $x = x(t)$, то известная информация о *скорости* v изменения величины $x(t)$ может быть записана как *обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка* $x' = v(x, t)$. Если рассматриваемая система автономна, т.е. не испытывает внешних воздействий, то скорость эволюции *не должна* зависеть от времени (опять: «от времени законы природы не зависят»), поэтому такая система моделируется *автономным* дифференциальным уравнением вида

$$x' = v(x).$$

В этих обозначениях выписанные выше формулы, с помощью которых можно найти *закон эволюции*, т.е. решение $x = x(t)$, переписываются как

$$t'_x = \frac{1}{v(x)} \Leftrightarrow t = \int \frac{dx}{v(x)},$$

или же

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{du}{v(u)}.$$

По аналогии с дифференциальным уравнением Ньютона, описывающим движение материальной точки по прямой Ox в заданном *силовом*

поле $F(x)$, уравнение $x' = v(x)$ можно интерпретировать в терминах механики — как движение точки в заданном функцией $v(x)$ поле скоростей на прямой Ox (при этом направление скорости определяется знаком функции $v(x)$). Тогда особые точки этого дифференциального уравнения, т. е. нули функции v , соответствующие стационарным решениям, можно назвать положениями равновесия одномерного векторного поля $v(x)$, и «равновесие» в них может быть устойчивым или неустойчивым. Если поле $v(x)$ гладкое, т. е. функция $v(x)$ имеет непрерывную производную, то его положение равновесия x_0 называется невырожденным в случае, когда производная $v'(x)$ в этой точке отлична от нуля. Тогда в достаточно малой окрестности точки x_0 поле $v(x)$ можно заменить его линейным приближением: $v(x) \approx v(x_0) + v'(x_0)(x - x_0) = k(x - x_0)$ ($v(x_0) = 0$, $k = v'(x_0)$; см. § 3.1). В новых координатах $\tilde{x} = x - x_0$ уравнение (1) заменим линейным уравнением $\tilde{x}' = k\tilde{x}$ (оно называется линейным приближением для дифференциального уравнения (1)). Тогда из замечания в конце предыдущего пункта получаем простой критерий устойчивости положения равновесия: невырожденное положение равновесия x_0 (в котором $v(x_0) = 0$) является устойчивым в случае $k = v'(x_0) < 0$ и неустойчивым при $k > 0$.

Мы примем этот факт без строгого доказательства; он поможет лучше представлять движение «эволюционирующей точки» в данном поле скоростей. Вообще, «эволюционная интерпретация» дифференциального уравнения вида (1) с помощью поля скоростей как векторного поля на прямой помогает при качественном анализе дифференциальных уравнений.

4.1.5. Пример: уравнение взрыва $y' = \alpha y^2$. Перейдем к описанию и анализу простейшей нелинейной модели эволюции. В гл. III (§ 3.1) мы рассматривали модель роста популяции каких-то особей, в которой скорость прироста пропорциональна наличному числу особей, т. е. численности популяции $N = N(t)$; соответствующее дифференциальное уравнение является линейным: $N'(t) = \alpha N(t)$, и оно было полностью исследовано. Допустим теперь, что скорость прироста пропорциональна не количеству особей, а количеству пар особей. Из N особей можно образовать $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$ пар; пренебрегая здесь «линейной составляющей» $-\frac{N}{2}$ по сравнению с квадратичной, получаем, что скорость прироста пропорциональна N^2 . Если же рассматриваются особи (или объекты) двух типов — половина типа A и половина типа B , каждая из $\frac{N}{2}$ особей, — то число пар вида (a, b) равно $\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2} = \frac{N^2}{4}$, и опять скорость прироста N' оказывается пропорциональной N^2 . Таким образом, мы

приходим к *квадратичной модели* (п. 3.1.5, пример 5) — к уравнению

$$N'(t) = \alpha N^2(t) \quad (\alpha > 0), \quad (5)$$

которое описывает и физико-химические реакции, когда скорость реакции пропорциональна количествам молекул двух «реагентов», по $\frac{N}{2}$ штук каждое. По этой и еще одной причине, раскрываемой далее, уравнение (5) называется *уравнением взрыва*.

Прежде чем решать это уравнение, сделаем замену переменной: если обе части равенства домножить на α , то получится уравнение $\alpha N' = \alpha^2 \cdot N^2$, т. е. $(\alpha N)' = (\alpha N)^2$, или

$$x' = x^2, \quad (6)$$

где $x = \alpha N$ (можно представлять себе, что особи считаются «кучками»: поскольку коэффициент $\alpha < 1$ [это нечто вроде *вероятности распада* в модели из § 3.1], значению $x = 1$ отвечает количество $N = \frac{1}{\alpha} > 1$ особей).

Задаваемое формулой (6) поле скоростей $v(x) = x^2$ имеет единственную особую точку $x = 0$, а во всех остальных точках имеет положительное направление (см. рис. 54), так что если начальное условие $x_0 = x(t_0) < 0$, то интегральные кривые $x = x(t)$ должны приближаться к *стационарному решению* $x(t) \equiv 0$, а в случае $x_0 > 0$ (именно этот случай отвечает «реальности») — удаляться от него. Таким образом, в данном случае *положение равновесия* $x = 0$ не является ни устойчивым, ни неустойчивым.

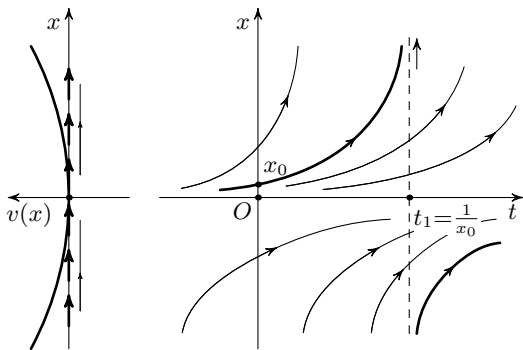


Рис. 54

Теперь проинтегрируем дифференциальное уравнение (6) при $x \neq 0$, следуя «схеме» (2), переходя к симметричному уравнению:

$$t'_x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow \frac{1}{x} = C - t \Leftrightarrow x = \frac{1}{C - t}. \quad (7)$$

Таково *общее неособое решение* дифференциального уравнения (6). Задав (ненулевое) начальное условие в нуле $x(0) = x_0 \neq 0$, из соотношений (7) находим значение константы C и «закон эволюции» $x = x(t)$ при этом начальном условии:

$$\frac{1}{x_0} = C \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Таким образом, получается *дробно-линейная зависимость*, график которой состоит из двух ветвей гиперболы с горизонтальной асимптотой (на $\pm\infty$) $x = 0$ (она отвечает стационарному решению и, в отличие от случая линейного уравнения $x'(t) = kx$, не может быть включена в общее решение — семейство функций (7)) и, *самое главное*, с вертикальной асимптотой $t = t_1 = \frac{1}{x_0}$: при $t \rightarrow t_1$ — значение $x(t)$ стремится к $+\infty$ (см. рис. 54). Получается, что *за конечное время*, равное $t_1 = \frac{1}{x_0}$, «условная численность популяции» *становится бесконечной*, сколь бы мала ни была исходная численность (т.е. начальное условие $x_0 > 0$)! Это и есть «взрыв».

Заметим, что вторая ветвь гиперболы — при $t > t_1$ — тоже удовлетворяет уравнению (6): для нее $x(t) < 0$, и, начинаясь «из $-\infty$ », это решение стремится к стационарному. Поскольку ветви гипербол, задаваемых формулой (7), заполняют и верхнюю, и нижнюю полуплоскости, не имея общих точек с осью Ot , для рассматриваемого уравнения справедлива «глобальная» теорема единственности решений, удовлетворяющих любому начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Наконец, отметим, что в *реальных ситуациях*, моделируемых уравнениями (5)–(6), *бесконечного роста за конечное время* не происходит, ибо при больших значениях N или $x(t)$ такая модель «не работает», т.е. не соответствует действительности.

4.1.6. Пример: логистическое уравнение $y' = y(a - y)$. Более того, и проанализированная в гл. III *линейная* (или *экспоненциальная*) *модель эволюционных процессов* — например, уравнение $N' = \alpha N$ для роста популяций — при больших значениях $N(t)$ тоже *не работает*, ибо в ней не учтен такой фактор, как *ограниченность ресурсов* (пищи, жизненного пространства, и т.д.). Первым приближением к реальности будет так называемая *логистическая модель*¹, в которой коэффициент α *зависит от N* и при больших значениях N отрицателен; в простейшем случае α считается *линейной зависящим от N* : $\alpha(N) = a - bN$, где

¹Впервые эту модель роста биологических популяций предложил П.Ф. Ферхюльст (1845), поэтому соответствующее *логистическое уравнение* (8) называют также *уравнением Ферхюльста*.

$a, b > 0$. Непрерывная логистическая модель описывается дифференциальным уравнением

$$N' = \alpha(N) \cdot N = N(a - bN),$$

или, после умножения обеих частей уравнения на b и введения новой переменной $bN = x$,

$$x' = x(a - x). \quad (8)$$

Итак, векторное поле логистического дифференциального уравнения (8) задается *квадратичной функцией* $v(x) = x(a - x)$, положительной при $0 < x < a$ и отрицательной вне отрезка $[0, a]$ (рис. 55). Следовательно, особая точка $x = 0$, в окрестности которой линейное приближение функции $v(x)$ записывается в виде

$$v(0 + h) = v(h) = h(a - h) = ah - h^2 \approx ah,$$

т.е. как линейная функция с *положительным* угловым коэффициентом a (он характеризует *рост* популяции при малой ее численности), является «отталкивающей», т.е. отвечающей *неустойчивому* стационарному решению $x(t) \equiv 0$. Вторая же особая точка $x = a$, линейное приближение $v(x)$ в окрестности которой записывается как линейная функция с *отрицательным* угловым коэффициентом, ибо для $x = a + h$ выполняется соотношение

$$v(x) = v(a + h) = (a + h)(a - (a + h)) = -(a + h)h = -ah - h^2 \approx -ah,$$

является «притягивающей», т.е. она отвечает *устойчивому* стационарному решению $x(t) \equiv a$. Из этих замечаний *качественное* поведение интегральных кривых понятно: кроме двух стационарных решений «должны быть» решения *трех типов*, показанных на рис. 55: $x(t) > a$, и решение стремится к особой точке $x = a$ (причем, казалось бы, *экспоненциально*); $x(t) < 0$, и решение «уходит» от особой точки $x = 0$, оставаясь отрицательным; $0 < x(t) < a$, и решение от особой точки $x = 0$ «устремляется» к особой точке $x = a$ (причем опять-таки *экспоненциально*).

От *качественного описания* поведения системы перейдем к *точному «количественному»* анализу: проинтегрируем симметричное дифференциальное уравнение

$$t'_x = \frac{1}{x(a - x)}. \quad (9)$$

Чтобы найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x(a - x)}$, представим ее в виде *линейной комбинации простейших дробей* $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x - a}$ с *неопре-*

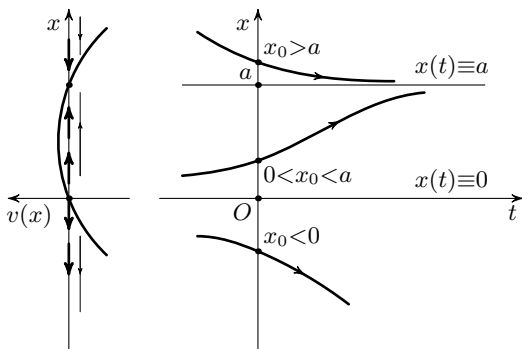


Рис. 55

деленными коэффициентами A и B . Из равенства

$$f(x) = \frac{-1}{x(x-a)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-a} = \frac{A(x-a) + Bx}{x(x-a)} = \frac{(A+B)x - aA}{x(x-a)}$$

получается система уравнений, из которой определяются эти коэффициенты:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -aA=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{a}, \\ B=-A=-\frac{1}{a}, \end{cases}$$

поэтому

$$f(x) = \frac{-1}{x(x-a)} = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} \right).$$

Теперь находим решения дифференциального уравнения (9):

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dx}{x(a-x)} = -\frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{a} (\ln|x-a| - \ln|x|) + \hat{C} \Leftrightarrow \ln|x-a| - \ln|x| = -at + a\hat{C}. \end{aligned} \quad (10)$$

Проще всего разобраться с решениями $x = x(t)$ по отдельности в каждом из указанных ранее случаев, когда начальное условие в нуле $x_0 = x(0) > a$, $0 < x_0 < a$ и $x_0 < 0$.

В области (в полуплоскости) $x > a$ уравнение решений (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \ln(x-a) - \ln x &= -at + aC \Leftrightarrow \ln \frac{x-a}{x} = -at + aC \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x-a}{x} &= 1 - \frac{a}{x} = e^{-at} \cdot e^{aC} = Ae^{-at} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = 1 - Ae^{-at}, \end{aligned}$$

откуда получаем окончательный ответ:

$$x(t) = \frac{a}{1 - Ae^{-at}}, \quad (11)$$

где $A = e^{aC} > 0$ — константа, которая отыскивается из начального условия $x(0) = x_0 > a$. Подставляя в равенство $1 - \frac{a}{x} = Ae^{-at}$ значение $t = 0$,

действительно получаем положительную константу $A = 1 - \frac{a}{x_0}$, к тому же меньшую 1. Следовательно, при $t > 0$ знаменатель дроби (10) не обращается в нуль и, строго возрастаая, стремится к 1 (ибо $Ae^{-at} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$), а само решение (11), убывая, стремится к устойчивому стационарному решению — к константе $x \equiv a$.

Однако знаменатель обращается в нуль при некотором *отрицательном* значении $t = t_1$:

$$1 - Ae^{-at} = 0 \Leftrightarrow e^{-at} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow -at = -\ln A \Leftrightarrow t = t_1 = \frac{\ln A}{a}$$

(это значение t_1 действительно отрицательно, поскольку $0 < A < 1$). Значит, при этом значении t решение (11) не определено (!), а при $t < t_1$ оно отрицательно! Так как при $t \rightarrow -\infty$ экспонента e^{-at} стремится к $+\infty$, мы получаем, что $x(t) \rightarrow 0-$: горизонтальная асимптота на $-\infty$ не совпадает с асимптотой на $+\infty$. Прямая же $t = t_1$ является вертикальной асимптотой задаваемой формулой (11) *пары* интегральных кривых нашего дифференциального уравнения (см. рис. 56).

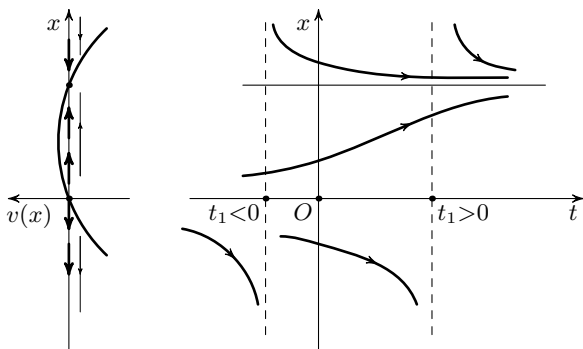


Рис. 56

Заметим, что выражение «критического момента времени» через начальное значение $x_0 > a$ дает формулу

$$t_1 = \frac{\ln A}{a} = \frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{a}{x_0} \right),$$

поэтому при $x_0 \rightarrow +\infty$ значение t_1 стремится к $\frac{1}{a} \ln 1 = 0$: пара интегральных кривых сдвигается вправо так, что вертикальная асимптота «в пределе» совпадает с осью Ox ($t = 0$). Но можно сдвигать интегральные кривые с асимптотами и дальше: как всегда (т.е. для любого автономного дифференциального уравнения вида (1)), получатся интегральные кривые, которые, однако, отвечают уже *отрицательным* начальным условиям $x_0 = x(0)$. Лежащие в полуплоскости $x > a$ их вет-

ви не отвечают никаким начальным условиям в точке $t = 0$, «отрицательные» ветви представляют собой решения, которые за конечное время $t_1 > 0$ уходят на $-\infty$.

Остается рассмотреть решения, графики которых лежат в полосе $0 < x < a$. В этом случае уравнение решений (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \ln(x-a) - \ln x &= -at + aC \Leftrightarrow \ln \frac{a-x}{x} = -at + aC \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1 = e^{-at} \cdot e^{aC} = Ae^{-at} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = 1 + Ae^{-at}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$x(t) = \frac{a}{1 + Ae^{-at}}, \quad (12)$$

где положительная константа при начальном условии $x(0) = x_0 \in (0, a)$ на сей раз равна $A = \frac{a}{x_0} - 1$ и может принимать любые значения $A > 0$. Знаменатель дроби (12) не может обращаться в нуль, соответствующее решение $x(t)$ определено при всех $t \in \mathbb{R}$, строго возрастает на всей оси (ибо знаменатель положителен и убывает), причем $x(t) \rightarrow a$ при $t \rightarrow +\infty$ и $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ в соответствии с нашими качественными «предсказаниями».

Из анализа логистической модели можно заключить, что, какова бы ни была начальная численность популяции $N_0 = N(0)$ (или начальное условие $x_0 = x(0) > 0$), с течением времени эволюция *стабилизируется*, т. е. система асимптотически приближается к устойчивому состоянию равновесия $N \equiv \frac{a}{b}$ (или $x \equiv a$), зависящему только от параметров популяции (но не от начальных условий!).

Из приведенного рассмотрения, как и в предыдущем примере (для уравнения взрыва), следует, что *для логистического уравнения справедлива глобальная теорема единственности*. Но всегда ли это будет так?

4.1.7. Пример неединственности решений уравнения $y' = g(y)$. Продифференцировав функцию $x = t^3$ ($x' = 3t^2$), выразив t через x и подставив это выражение в формулу для x' ,

$$t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x' = 3t^2 = 3(\sqrt[3]{x})^2 = 3\sqrt[3]{x^2},$$

получаем, что *кубическая функция $x(t) = t^3$ является решением дифференциального уравнения*

$$x' = 3\sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow x' = 3|x|^{\frac{2}{3}}, \quad (13)$$

причем удовлетворяющим в точке $t = 0$ нулевому начальному условию $x(0) = 0$. Вот мы и нашли отличное от стационарного ($x \equiv 0$) решение автономного уравнения с непрерывной правой частью!

Применим к уравнению (13) стандартную схему интегрирования (3): проинтегрируем симметричное дифференциальное уравнение

$$t'_x = \frac{1}{3|x|^{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow t = \int \frac{dx}{3|x|^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{x} + C \Leftrightarrow x = (t - C)^3 \quad (14)$$

(первообразную функции $f(x) = \frac{1}{3|x|^{\frac{2}{3}}}$ мы нашли так: при $x > 0$ функция $f(x)$ равна $\frac{1}{3|x|^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, а первообразная любой степенной функции x^α при $x > 0$ и $\alpha \neq -1$ вычисляется по формуле

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$$

в данном случае $\int \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot \frac{1}{3}} + C = x^{\frac{1}{3}} + C = \sqrt[3]{x} + C$, а функция $F(x) = \sqrt[3]{x}$ определена всюду и является нечетной, поэтому ее производная четна, так что из равенства $F'(x) = f(x) = \frac{1}{3|x|^{\frac{2}{3}}}$ для значений $x > 0$ следует, в силу четности функции f , что и при отрицательных значениях x производная $F'(x)$ равна $f(x)$.

Хотя в симметричном уравнении следовало положить $x \neq 0$, все полученные решения пересекают ось Ot , т. е. «запретную» прямую $x = 0$; с другой стороны, в семейство решений (14) не входит стационарное решение $x(t) \equiv 0$. Конечно, его можно добавить; получается, что, кроме него, нулевому начальному условию $x(t_0) = 0$ удовлетворяет и *нестационарное решение* вида (14) — подставляя в «окончательную» формулу $x = (t - C)^3$ значения $t = t_0$, $x = 0$, мы находим такое решение: $x(t) = (t - t_0)^3$. Однако «вкрадывается сомнение»: все ли решения мы нашли, интегрируя, как при выводе формул (14)?

Оказывается, не все, да и вообще функции вида $F(x) = \sqrt[3]{x} + C$ не имеют производной в точке $x = 0$, так что они не являются решениями симметричного дифференциального уравнения, да и само это уравнение лишено смысла при $x = 0$. Приведенное интегрирование справедливо только в полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$, так что и константа C должна быть двузначной: $C = \hat{C} = C_1, C_2$, в зависимости от знака x , и совокупность решений в этих полуплоскостях нужно записывать «составной» формулой:

$$x(t) = \begin{cases} (t - C_1)^3 & \text{в случае } x > 0, \text{ т. е. } t > C_1; \\ (t - C_2)^3 & \text{в случае } x < 0, \text{ т. е. } t < C_2. \end{cases} \quad (15)$$

Если в этой формуле $C_1 = C_2 = C$, то, полагая значение $x(C)$ равным нулю, мы получаем решение, дифференцируемое при всех $t \in \mathbb{R}$. Доопре-

делить на всю ось t задаваемую формулами (15) функцию до решения, отличного от стационарного, можно при любых значениях констант, если только $C_1 > C_2$ (каким образом?). Можно также дополнить нижнюю или верхнюю «ветви» решения нулевой константой; так или иначе, для любого начального условия $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ существует бесконечно много решений дифференциального уравнения (13), удовлетворяющих этому начальному условию!

Неоднозначность решения в данном случае объясняется тем, что векторное поле скоростей $v(x) = 3|x|^{\frac{2}{3}}$ «недостаточно быстро» (скажем, по сравнению с полями $v(x) = kx$ или $v(x) = x^2$) убывает (по абсолютной величине) при $x \rightarrow 0$ (рис. 57), поэтому воображаемая движущаяся точка может за конечное время «дойти» из неособой точки в особую (или наоборот)¹. Это можно увидеть из формулы Барроу для уравнения $x' = v(x)$, по которой вычисляется время, затрачиваемое при движении точки из положения x_0 в положение x в заданном поле скоростей $v(x)$:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{du}{v(u)}.$$

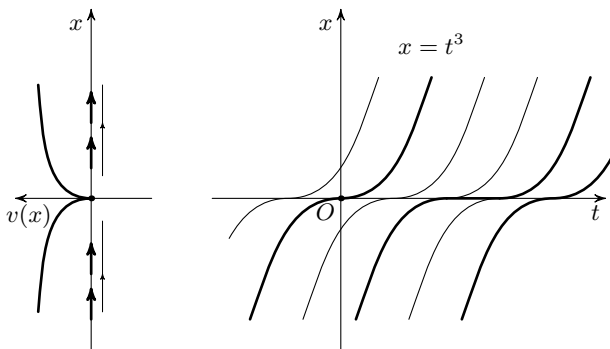


Рис. 57

Подставляя сюда $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ и $v(u) = 3u^{\frac{2}{3}}$, мы получим *несобственный интеграл*

$$t = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}},$$

¹На первый взгляд, различие между упомянутыми полями — в том, что поле дифференциального уравнения (14) не дифференцируемо при $x = 0$, но суть как раз не в этом; например, поле скоростей $v(x) = |x|$ тоже не дифференцируемо в нуле, однако для соответствующего дифференциального уравнения $x' = |x|$ справедлива «глобальная теорема единственности» (докажите!).

который в данном случае *сходится* в смысле существования предела

$$\int_0^x \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^x \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}},$$

а в случае $v(u) = u^2$ или $v(u) = |u|$ — *расходится* (соответствующие пределы равны бесконечности). Проверьте это.

§ 4.2. Формализм Лейбница и уравнения с разделяющимися переменными

В предыдущем параграфе при отыскании решений автономных дифференциальных уравнений первого порядка мы стали применять значок *неопределенного интеграла* $\int$ (как бы интеграл, но без указания пределов интегрирования — отсюда и наименование «неопределенный»):

$$y'(x) = g(y) \Leftrightarrow x'(y) = \frac{1}{g(y)} \Leftrightarrow x = \int \frac{1}{g(y)} dy \stackrel{\text{des}}{=} \int \frac{dy}{g(y)} \quad (1)$$

(последняя запись есть просто *сокращение* предыдущей). Аналогичным образом можно записать и решение *основного уравнения интегрального исчисления*

$$y'(x) = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x) dx,$$

так что схема (1) является частным случаем последней записи (в схеме (1) переменные x и y поменялись местами). С ее помощью мы и объясним подробнее, что же такое «неопределенный интеграл», понятие (и обозначение) которого было введено Лейбницем для *удобства формального оперирования* при отыскании первообразных и решении дифференциальных уравнений. Сопоставляя эту формальную запись с содержательным описанием решений уравнения $y' = f(x)$ с привлечением понятия первообразной,

$$y'(x) = f(x) \Leftrightarrow y = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — произвольная, любая первообразная функции $f(x)$, получаем, что *смысл* неопределенного интеграла в том, что через него записывается *совокупность всех первообразных* подинтегральной функции $f(x)$. Такого понимания пока будет достаточно, но *это еще не все*.

Понятие и обозначение, которые нельзя назвать удачными методологически и даже методически, восходят к Лейбницу. Обозначение это, как мы сейчас увидим, весьма удобно с точки зрения *формализации* (или *алгоритмизации*) интегрирова-

ния. Однако когда мы начинаем с введения термина «неопределенный интеграл» (вместо *первообразной*, как это принято во многих курсах математического анализа), то самый важный и глубокий факт математического анализа: *взаимная обратность операций дифференцирования и интегрирования*, или *основная теорема анализа*, т.е. *связь между интегралом и первообразной*, — превращается в некую тавтологию: получается связь между интегралом и... интегралом!

Чтобы не было путаницы между *интегралом* и *неопределенным интегралом*, знаменитый французский математик, физик и астроном Пьер Симон Лаплас предложил обычный интеграл называть *определенным* (1779 г.). Точные аналитические определения определенного и неопределенного интегралов (! — прочитайте начало предложения еще раз!) приписывают парижскому математику, соратнику Наполеона в реформах образования во Франции, академику Сильвестру Франсуа Лакруа (1765–1843).

4.2.1. Формальное интегрирование уравнения $y' = g(y)$. В предыдущем параграфе был изложен метод решения дифференциального уравнения вида $y' = g(y)$ с помощью сведения его к «*симметричному*» дифференциальному уравнению $x'(y) = \frac{1}{g(y)}$. Этот метод очень просто интерпретируется в *символике Лейбница*. До сих пор мы использовали и терминологию, и обозначения Лагранжа: *производная* функции $y = f(x)$ записывается как y' или $f'(x)$. Ньютон производную называл *флюксией* и обозначал ее точкой над функцией («*флюентой*»): $\dot{y}$ (см. комментарий в п. 1.1.1). Лейбниц же рассматривал в первую очередь так называемые *дифференциалы*¹, подразумевая под *дифференциалом функции* $y = f(x)$ запись

$$dy = f'(x) dx, \quad (2)$$

трактуемую обычно как *главная линейная часть приращения функции* (вспомните: *согласно теореме о линейном приближении* из п. 3.1.3 приращение функции может быть записано в виде

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x,$$

где $\alpha = \alpha(x, \Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$; первое слагаемое в формуле для Δy и называется *главной линейной частью приращения*, записываемой как $dy = f'(x) \Delta x \stackrel{\text{des}}{=} f'(x) dx$. Опирируя с *символами* dx и dy как с *переменными*, для производной $f'(x)$ Лейбниц ввел обозначение

$$f'(x) \stackrel{\text{des}}{=} \frac{dy}{dx}$$

¹Это слово изобрел сам Лейбниц, произведя его от лат. differentia — «разность», «различие».

(правая часть читается «дэ игрек по дэ икс»). Заметим, что при таком подходе равенство (2) становится *тавтологией*¹:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

то есть, так сказать, «сокращаем» на dx , как если бы этот *символ* был переменной или же какой-то *величиной*.

Такой чисто *формальный подход* к производной *при правильном его употреблении приводит*, однако, к *правильным выводам*. Лейбниц особенно уверился в «правомочности» своего подхода, когда заметил, что формула (2) будет справедлива и в том случае, когда x не независимая переменная, а функция: если $x = x(t)$, то $dx = x'(t)dt$, и подстановка этих формул в соотношение (2) дает правило дифференцирования (отыскания дифференциала) сложной функции: для $y = y(x(t))$ выполняется равенство

$$dy = y'(x) dx = y'(x(t)) dx(t) = y'(x(t))x'(t) dt! \quad (3)$$

(Можно привести и совсем «кошунственное» применение символики Лейбница для «вывода» цепного правила, т. е. формулы для производной сложной функции: если $y = y(x(t))$, то

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

ибо dx опять-таки «сокращается»!) Это свойство дифференциала называется *инвариантностью*².

Применим формальный подход Лейбница к дифференциальному уравнению вида $y' = g(y)$, для чего перепишем его в лейбницевых обозначениях и будем «без зазрения совести» преобразовывать. Именно:

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx.$$

Последнее равенство, т. е. совпадение неопределенных интегралов, дает соотношение между первообразной подынтегрального выражения $\frac{1}{g(y)}$ в левой части — обозначим ее (какую-нибудь из первообразных) через $G(y)$ — и первообразной подынтегрального выражения в правой части,

¹На всякий случай напомним: греч. *тавтология*, от греч. *тавто* (тавто) — «то же самое» и *логос* (логос) — «слово», «учение»; *тавтологией* называют повторение того же самого «другими словами», а в данном случае — утверждение, которое фактически *повторяет определение*.

²То есть *независимостью* или *неизменностью*: лат. *invariants* — «неизменяющийся». Этот термин в 1851 г. ввел английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897; между прочим, именно он ввел и термин *дискриминант*).

т. е. первообразной функции $f(x) \equiv 1$, в качестве которой возьмем функцию $F(x) = x$. Эти первообразные *должны отличаться на константу*:

$$G(y) + C = x.$$

В результате получается зависимость x от y , т. е. функция $x(y) = G(y) + C$, которая, очевидно, удовлетворяет «симметричному уравнению»:

$$x'(y) = (G(y) + C)' = G'(y) = \frac{1}{g(y)}.$$

Итак, наши формальные преобразования привели к правильному результату. Нельзя ли применить их в более общих случаях — скажем, для решения *неавтономных* дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$?

Изобретенные Лейбницем обозначения для интеграла $\int$ и дифференциала df можно точно датировать (редкий случай!): впервые знак интеграла был написан 29 октября 1675 г. (до этого Лейбниц употреблял для интеграла $\int y$ сокращение *отп.у* выражения «*отпiа у*» — «*все у*» [лат.]), а дифференциал — 11 ноября того же года. Вскоре в записи « $\int y$ » Лейбниц «ввел» дифференциал под знак интеграла: стал систематически употреблять обозначение $\int y dx$; по этому поводу он писал: «Предупреждаю, чтобы остерегались отбрасывать dx , — ошибка, которую часто допускают и которая препятствует продвижению вперед...», — имея в виду возможные применения свойства инвариантности дифференциала.

По поводу «символизма» в «Очерках по истории математики» Бурбаки (Никола́ Бурбаки́ — коллективный псевдоним группы математиков, авторов фундаментальной концепции «архитектуры» современной математики) писал(и): «...Установленная Лейбницем тенденция формального обращения с символами развивалась в течение всего XVIII в., выходя далеко за пределы того, что могло допустить состояние анализа того времени. В частности, надо признать, что понятие дифференциала, данное Лейбницем, по правде говоря, не имеет никакого смысла. В начале XIX в. оно не пользовалось доверием и только постепенно начало приобретать авторитет...».

Действительно, призыв Лейбница интегрировать не просто функцию φ , а *выражение* $\varphi(x) dx$, намного опередил свое время: точный смысл выражению $\varphi(x) dx$, равно как и понятию дифференциала был придан лишь в XX в. Интегрируемое выражение в «высшей математике» ныне называется *дифференциальной формой* ($\varphi(x) dx$ — это 1-форма на числовой прямой $\mathbb{R}$), а дифференциал функции — так называемая «*точная форма*».

Вообще Лейбниц придавал обозначениям, символике очень большое значение. Так, в 1678 г. он писал немецкому математику, физику и философу Эренфриду Вальтеру фон Чирнгаузу (1651–1708): «Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления». Эти устремления Лейбница тесно соотносятся с его по сути философской идеей создания «*универсального алгоритма*», о которой еще будет речь дальше.

4.2.2. Разделение переменных и формализм Лейбница. Основной момент в приведенном формальном решении дифференциального уравнения $y' = g(y)$ — приведение его к равенству между двумя дифференциальными формами вида $\psi(y) dy = \varphi(x) dx$ (слева — форма от y , справа — от x), когда после формального же применения интеграла к левой и правой части получается равенство между неопределенными интегралами, записываемое как соотношение между функциями (первообразными) от x и от y : $\Psi(y) = \Phi(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Очевидно, для уравнения вида $y' = F(x, y)$ указанное представление возможно лишь в том случае, когда правая часть дифференциального уравнения представима в виде произведения функции от x на функцию от y : $F(x, y) = f(x)g(y)$. Тогда говорят, что функция $F(x, y)$ допускает разделение переменных, и для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными можно осуществить следующие формальные преобразования:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Отсюда получается уже алгебраическое уравнение, связывающее x и y :

$$G(y) = F(x) + C, \quad \text{где} \quad G'(y) = \frac{1}{g(y)}, \quad F'(x) = f(x), \quad C = \text{const.}$$

Остается выразить (если это возможно) из этого уравнения y через x — должно получиться решение $y = y(x; C)$ исходного дифференциального уравнения.

Пример 1. Решим дифференциальное уравнение $y' = 6xy$. При значениях y , отличных от нуля, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 6xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 6x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 6x dx,$$

откуда следует, что

$$\ln |y| = 3x^2 + C \Leftrightarrow |y| = e^{3x^2} e^C \Leftrightarrow y = \pm e^C e^{3x^2}.$$

Иначе это семейство решений записывается через произвольную отличную от нуля мультипликативную константу:

$$y = Ae^{3x^2}, \quad A \neq 0.$$

Кроме того, функция $y \equiv 0$ тоже удовлетворяет дифференциальному уравнению, причем это решение может быть включено в указанное семейство решений $y = Ae^{3x^2}$ — оно отвечает значению $A = 0$.

Вспомним: мы пока не доказали, что применение формализма Лейбница для общих уравнений с разделяющимися переменными всегда приводит к верному ответу. Но это не беда, ибо можно непосредственно

проверить, что любая функция вида $y = Ae^{3x^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 6xy$. Действительно, для этой функции

$$y' = (Ae^{3x^2})' = Ae^{3x^2} \cdot (3x^2)' = Ae^{3x^2} \cdot 6x = 6xy,$$

что и требовалось установить.

Можно изобразить семейство всех интегральных кривых $y = y(x; A)$ данного дифференциального уравнения на плоскости Oxy — будем его и в этом случае называть *фазовым портретом*¹. Такой портрет для уравнения $y' = 6xy$ изображен на рис. 58. Хотя эта картинка ясно показывает, что *через любую точку* $(x_0; y_0)$ *плоскости* Oxy *проходит единственная интегральная кривая*, неплохо было бы установить это и аналитически.

Задание. Докажите, что

1) *любое* решение дифференциального уравнения $y' = 6xy$ представляется в виде $y = Ae^{3x^2}$;

2) для *любого* начального условия $(x_0; y_0)$ существует *единственное* решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = 6xy$, удовлетворяющее этому начальному условию (т. е. такое, что $y(x_0) = y_0$). □

Рассмотрим еще два примера.

Пример 2. Дифференциальное уравнение $y' = -\frac{y}{x}$ следовало бы рассматривать только при $x \neq 0$, т. е. в левой и правой (по отношению к оси Oy) полуплоскостях координатной плоскости Oxy . Поначалу мы так и будем считать. Полагая, что и $y \neq 0$, применим к этому уравнению тот же формальный метод:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x},$$

откуда следует, что

$$\ln |y| = -\ln |x| + C \Leftrightarrow \ln |xy| = C e^C.$$

Иначе семейство решений можно записать через произвольную отличную от нуля константу:

$$y = \frac{A}{x}, \quad A \neq 0$$

($A = \pm e^C \neq 0$; напомним, что $x \neq 0$). Кроме того, две функции $y \equiv 0$, $x \neq 0$ (почему две?) также удовлетворяют рассматриваемому уравнению, и эти решения включаются в указанное семейство решений — они отвечает значению $A = 0$.

¹Ранее, в § 1.2, фазовым портретом называлось семейство фазовых траекторий динамической системы на фазовой плоскости $(x; v)$ (координата-скорость). Если переменная x трактуется как *время*, то принято плоскость Oxy называть *расширенной* фазовой плоскостью, а семейство графиков решений — *обобщенным* или *расширенным* фазовым портретом.

Изобразив фазовый портрет уравнения $y' = -\frac{y}{x}$ (рис. 59), получаем семейство гипербол, а точнее, целых четыре семейства — по одному в каждой из четвертей координатной плоскости. Эти семейства разделяются двумя особыми интегральными кривыми: лучами $x < 0$ и $x > 0$ оси Ox , играющими роль *сепаратрис*¹. К этим сепаратрисам следовало бы добавить лучи $y > 0$ и $y < 0$ оси Oy и снять ограничение $x \neq 0$ — причислить эти лучи к интегральным кривым, считая, что поле направлений дифференциального уравнения $y' = -\frac{y}{x}$ при $x = 0$ и $y \neq 0$ *вертикально*. Что касается точки $(0; 0)$, то в ней поле направлений *не определено* — это *особая точка* для рассматриваемого уравнения. Особая точка такого типа называется *седлом*².

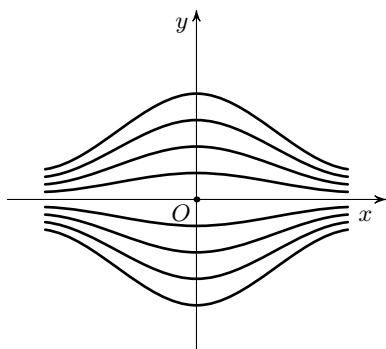


Рис. 58

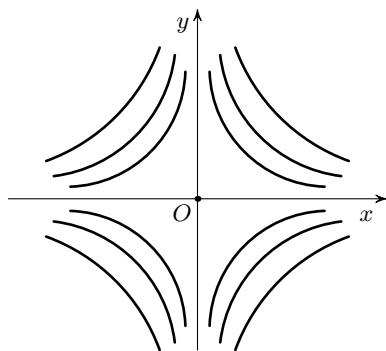


Рис. 59

Заметим, что формулу для интегральных кривых можно переписать как «закон сохранения»:

$$H(x, y) = xy = A = \text{const.}$$

Аналогично фазовым траекториям для консервативных дифференциальных уравнений Ньютона, лежащим, как мы увидим в гл. V, на *линиях уровня энергии* $E = E(x, y)$, рассматриваемые *интегральные кривые* лежат на *линиях уровня функции* $H = H(x, y)$. Такие функции $H(x, y)$, которые *постоянны* «вдоль решений» дифференциального уравнения, т. е. такие, что для любого решения $y = y(x)$ этого уравнения

$$h(x) = H(x, y(x)) = \text{const},$$

¹От лат. separatrix — «разделяющая», «разъединяющая».

²Происхождение этого названия мы объясним потом, в п. 4.3.3.

называются *первыми интегралами* дифференциального уравнения¹. Так, первым интегралом дифференциального уравнения $y' = 6xy$ из примера 1 будет функция $H(x, y) = ye^{-3x^2}$ (объясните!). Знание первого интеграла уравнения вида $y' = F(x, y)$ существенно помогает при построении и анализе фазового портрета этого уравнения.

Задание. Докажите, что

1) каждая функция вида $y = \frac{A}{x}$ действительно удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению $y' = -\frac{y}{x}$;

2) любое решение этого дифференциального уравнения представляется в виде $y = \frac{A}{x}$;

3) для *любого* начального условия $(x_0; y_0)$, для которого $x_0 \neq 0$, существует *единственное* решение $y(x)$ уравнения $y' = -\frac{y}{x}$, удовлетворяющее этому начальному условию. $\square$

Следует отметить, что дифференциальные уравнения из приведенных примеров относятся к *однородным линейным уравнениям с переменными коэффициентами*, т. е. к уравнениям вида $y' = k(x)y$, подробно рассмотренным в § 5.5 (см. теорему 1 и упражнения к этому параграфу). Так что мы могли решить эти уравнения и без помощи формализма Лейбница. Но вот следующий пример к указанным уже не относится.

Пример 3. Применяя «метод Лейбница» (см. комментарии в конце следующего пункта) к дифференциальному уравнению $y' = -\frac{x}{4y}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \Leftrightarrow 4y dy = -x dx \Leftrightarrow \int 4y dy = - \int x dx;$$

следовательно,

$$2y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{C}{2} = A = \text{const.}$$

Таким образом, мы нашли *первый интеграл* рассматриваемого дифференциального уравнения: $H(x, y) = \frac{x^2}{2^2} + y^2$. Его линии уровня суть концентрические (гомотетичные друг другу) *эллипсы* с центром в начале координат и с отношением полуосей 2 : 1, на которых и должны лежать все интегральные кривые уравнения. Если учесть, что правая часть исходного уравнения не определена при $y = 0$, то следует считать, что каждый из эллипсов содержит две интегральные кривые:

$$y = \pm \sqrt{A - \frac{x^2}{4}}, \quad A = \text{const} > 0 \quad (|x| < A).$$

¹Первые интегралы дифференциального уравнения Ньютона называются *законами сохранения* для соответствующей динамической системы.

Если же, как в предыдущем примере, условиться, что при $y = 0$ и $x \neq 0$ поле направлений дифференциального уравнения $y' = -\frac{x}{4y}$ вертикально, то можно считать, что каждый из указанных эллипсов есть *интегральная кривая поля направлений* (или «*обобщенная*» интегральная кривая дифференциального уравнения). Начало координат, естественно, является *особой точкой*, называемой точкой типа *центр*.

Нетрудно доказать, что каждая функция вида $y = y(x) = \pm \sqrt{A - \frac{x^2}{4}}$ удовлетворяет исходному уравнению, однако это несколько «занудно». Поэтому поступим иначе: используем постоянство первого интеграла. Именно, мы знаем, что для любого решения $y = y(x)$ функция

$$h(x) = H(x, y(x)) = \frac{x^2}{4} + y^2(x) \equiv A,$$

является константой, поэтому, с учетом того, что $y(x) \neq 0$, получаем

$$h'(x) = \frac{2x}{4} + 2y(x)y'(x) \equiv 0 \Rightarrow 2yy' = -\frac{x}{2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y},$$

что и требовалось установить.

Задание. Докажите, что

1) *любое* решение $y = y(x)$ рассматриваемого дифференциального уравнения представляется в виде

$$y = y(x) = \pm \sqrt{A - \frac{x^2}{4}};$$

2) для *любого* начального условия $(x_0; y_0)$, для которого $y_0 \neq 0$, существует *единственное* решение $y(x)$ уравнения $y' = -\frac{x}{4y}$, удовлетворяющее этому начальному условию. $\square$

4.2.3. Теоремы об уравнениях с разделяющимися переменными. Рассуждение из последнего примера показывает, как в общем случае обосновать *формализм Лейбница*. Сначала сформулируем соответствующее утверждение на строгом (не *формальном*) математическом языке.

Теорема 1 (о решениях уравнений с разделяющимися переменными). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале I оси Ox , функция $g(y)$ непрерывна и отлична от нуля на интервале J оси Oy , $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на интервале I , $G(y)$ — первообразная функции $\frac{1}{g(y)}$ на интервале J ; наконец, пусть функция $y = \varphi(x)$, $x \in I$, такова, что $\forall x \in I \ y = \varphi(x) \in J$, причем

$$\forall x \in I \quad h(x) = G(\varphi(x)) - F(x) \equiv A = \text{const.}$$

Тогда эта функция $y = \varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$y' = f(x)g(y) \quad (4)$$

на интервале I .

Доказательство. Из того, что $h(x) \equiv \text{const}$ на интервале I , следует, что $h'(x) \equiv 0$ на I . Но

$$h'(x) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) - F'(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} - f(x) = \frac{\varphi'(x) - f(x) \cdot g(\varphi(x))}{g(\varphi(x))},$$

поэтому на интервале I выполняется соотношение

$$\varphi'(x) - f(x) \cdot g(\varphi(x)) \equiv 0 \Rightarrow \varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x)),$$

т.е. для функции $y = \varphi(x)$ выполняется уравнение $y' = f(x)g(y)$, что и требовалось установить. $\square$

Итак, любое решение $y = y(x) = \varphi(x)$ (или $y = y(x; A)$) алгебраическо-го¹ уравнения

$$G(y) - F(x) = A \quad (5)$$

при выполнении указанных в теореме условий удовлетворяет дифференциальному уравнению (4). Докажем и обратное.

Теорема 2 (о первом интеграле уравнения с разделяющимися переменными). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале I оси Ox , функция $g(y)$ непрерывна и отлична от нуля на интервале J оси Oy , $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на интервале I , $G(y)$ — первообразная функции $\frac{1}{g(y)}$ на интервале J .

Тогда функция

$$H(x, y) = G(y) - F(x)$$

является первым интегралом дифференциального уравнения (4) (в прямоугольной области $R = \{(x; y) \mid x \in I, y \in J\}$), т.е. для любого такого решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (4), $y' = f(x)g(y)$, на интервале I , что $\forall x \in I \ y = \varphi(x) \in J$, функция $h(x) = G(\varphi(x)) - F(x)$ является константой.

Доказательство. Как и выше, вычисляем

$$h'(x) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) - F'(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} - f(x) = \frac{\varphi'(x) - f(x) \cdot g(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} \equiv 0$$

на интервале I , ибо в соответствии с дифференциальным уравнением (4) мы имеем

$$\forall x \in I \ \varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x)) \Rightarrow \varphi'(x) - f(x) \cdot g(\varphi(x)) \equiv 0.$$

Требуемое доказано. $\square$

¹В широком смысле (x и A в этом уравнении следует считать параметрами).

Таким образом, в условиях теоремы *дифференциальное уравнение* (4) эквивалентно алгебраическому уравнению (5), и тем самым *формализм, Лейбница в применении к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными*¹ обоснован.

Объясним теперь, почему разобранный способ решения мы называем *формализмом*. Дело в том, что запись $\frac{dy}{dx}$ для производной $y'(x)$ *нельзя рассматривать как дробь* — это только *символическое обозначение* для производной. Правильнее было бы писать, что

$$y'(x) = \frac{d}{dx}y,$$

где $\frac{d}{dx}$ — «значок» для обозначения операции «взятия производной» (или *оператор дифференцирования*); в принципе, можно было бы заменить «штрих» в записи y' на этот значок,

$$y'(x) = y^{\frac{d}{dx}},$$

но, разумеется, такая запись чересчур экзотична (хотя в точности передает *смысл* лейбницева обозначения!). «Операторный» подход весьма удобен при записи высших производных — так, для второй производной $y''(x)$ «по Лейбницу» пишем

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} y \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

(читается «дэ два игрек по дэ икс квадрат»).

«Разрывая» числитель и знаменатель, мы именно *формально* оперируем с записью $\frac{dy}{dx}$ как с дробью — посему речь и идет о *формализме*. Подобное «оперирование» может привести и к бессмыслице, поэтому нужно «думать о смысле»², проверять справедливость конкретных результатов, *обосновывать* возможность формального оперирования в том или ином случае (как это и сделано выше для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными).

Метод решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными применял, причем в содержательной (геометрической) форме, еще Исаак Барроу в своих «Лекциях по оптике и геометрии» (1669–1670); между прочим, в тех же лекциях содержится важное неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ при $x > 0$ и натуральном $n > 1$ — ныне это неравенство носит имя Якоба Бернулли, также опубликовавшего

¹В следующем параграфе будет рассмотрен формализм Лейбница в применении к дифференциальным уравнениям другого типа (точнее, к *системам дифференциальных уравнений* с двумя неизвестными функциями).

²«А мораль отсюда такова: думай о смысле, а слова придут сами», — говорила Герцогиня Алисе. *Льюис Кэрролл*. Алиса в стране чудес. М.: Наука, 1978, с. 73.

Напомним, что Льюис Кэрролл — литературный псевдоним английского математика, профессора Оксфорда Чарлза Лютвиджа Доджсона (1832–1898).

его, но в 1689 г. В лейбницевых обозначениях указанный Барроу метод состоит в переходе

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\psi(y)}{\varphi(x)} \Leftrightarrow \int \varphi(x) dx = \int \psi(y) dy.$$

По-видимому, независимо от Барроу, в работах «Математические лекции о методе интегралов...» (1691–1692) и «Общий способ построения всех дифференциальных уравнений...» (1694) Иоганн Бернулли указал метод решения нескольких типов уравнений путем разделения переменных (см. упражнения). Он первым употребил термин «разделение» (лат. *separatio*) переменных, но узаконил его только Леонард Эйлер (*separatio variabilium*). В 1749 г. Д'Аламбер применил разделение переменных к отысканию частных решений («стоячих волн» — см. далее гл. VI, § 6.2) *волнового уравнения*; Фурье, именем которого назван этот метод (для дифференциальных уравнений *в частных производных*), использовал такие частные решения для представления общего решения.

Заслуга Лейбница по отношению к уравнениям с разделяющимися переменными (не считая методов решения конкретных типов уравнений) — в том, что он изобрел *удобный способ оформления метода разделения переменных*. В конце XIX в. английский инженер, физик и математик Оливер Хевисайд (1850–1925) пошел гораздо дальше, разработав *символическое (операторное) исчисление* и применив его к электротехническим и прочим физическим расчетам. Однако он нисколько не заботился «о смысле», т. е. об обоснованиях, за что много раз был критикован математиками; тем не менее, Хевисайд однажды высказался по этому поводу: «*Даже кембриджские математики заслуживают справедливости!*»

4.2.4. Особые точки дифференциальных уравнений. В примерах 2–3 были рассмотрены *особые точки* дифференциальных уравнений типа *центр* и *седло*. Не вдаваясь в вопрос о том, *что такое*, в общем случае, «особая точка», приведем примеры дифференциальных уравнения с особыми точками еще одного типа, характерного для простейших уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 4. Применим формализм Лейбница к дифференциальному уравнению $y' = \frac{3y}{x}$. При $y \neq 0$ получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 3 \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{dx}{x},$$

откуда следует, что

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + C \Leftrightarrow |y| = |x|^3 \cdot e^C \Leftrightarrow y = \pm e^C x^3 = Ax^3, \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Случаю $A = 0$ отвечают еще две интегральные кривые: лучи $y \equiv 0, x \neq 0$. Кроме того, полагая, что при $x = 0, y \neq 0$ поле направлений дифференциального уравнения $y' = \frac{3y}{x}$ вертикально, добавляем к фазовому портрету (рис. 60) еще две «особые» интегральные кривые: лучи $y > 0$ и $y < 0$ оси Oy . В данном случае особая точка $(0; 0)$ дифференциального уравнения называется *узлом*: все его интегральные кривые как бы «сходятся», «связываются» в особой точке. □

Пример 5. Аналогичным образом для дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{4x}$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{4x} &\Leftrightarrow 4 \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow 4 \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow 4 \ln |y| = \ln |x| + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^4 = |x| \cdot e^C \Leftrightarrow y = \pm e^{C/4} \sqrt[4]{|x|} = A|x|^{1/4}, \quad A \neq 0. \end{aligned}$$

Добавляя к фазовому портрету еще четыре интегральные кривые: положительные и отрицательные лучи координатных осей, — опять получаем особую точку типа *узел* (рис. 61). $\square$

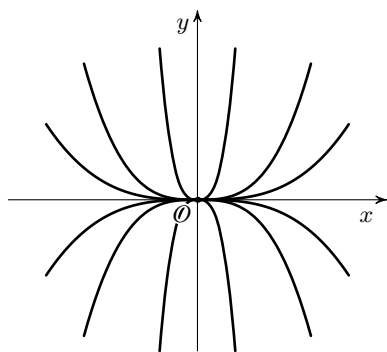


Рис. 60

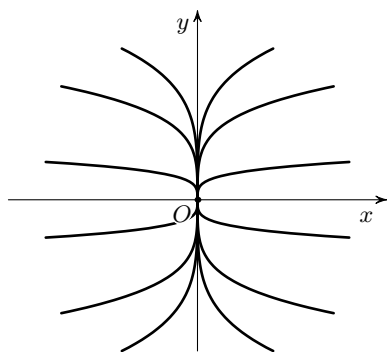


Рис. 61

Итак, простейшие дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными могут иметь особые точки типов *центр*, *седло* и *узел*. В следующей главе мы рассмотрим еще один тип особых точек, разберем их общее определение и обсудим вопрос об их классификации.

4.2.5. Разделение переменных в линейных уравнениях вида $y' = k(x)y + f(x)$. В § 3.5 уже рассматривались линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

$$y' = k(x)y + f(x), \quad (6)$$

разбирался способ их решения с помощью *теоремы Д'Аламбера* и *метода Лагранжа* (вариации произвольной постоянной). Теперь покажем, как уравнения вида (6) решаются *разделением переменных*.

В однородном уравнении

$$y' = k(x)y \quad (7)$$

переменные уже разделены, и формализм Лейбница дает

$$\frac{dy}{dx} = k(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = k(x) dx \Leftrightarrow |y| = \int k(x) dx = K(x) + C,$$

где $K(x)$ — какая-то из первообразных переменного коэффициента $k(x)$ (который, конечно, мы считаем *непрерывным*). Значит,

$$|y| = e^{K(x)} \cdot e^C \Leftrightarrow y = \pm e^C e^{K(x)} = A e^{K(x)}, \quad A \neq 0.$$

Добавляя к этому семейству *стационарное решение* $y \equiv 0$, получаем общий вид решений однородного линейного дифференциального уравнения (7):

$$y = A e^{K(x)}, \quad \text{где } A \in \mathbb{R} \text{ — любое число.}$$

Вполне естественно, мы получили такой же ответ (а фактически такое же и решение — в смысле «метод решения»), как и в § 3.5 (там мы использовали «*вариацию показателя*», сводящую уравнение вида (7) к отысканию первообразной, т. е. к решению дифференциального уравнения $K'(x) = k(x)$).

Разделение переменных в неоднородном линейном уравнении (6) достигается представлением искомой функции $y(x)$ в виде произведения $u(x)v(x)$; тогда

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

поэтому уравнение (6) переписывается как

$$\begin{aligned} u'(x)v(x) + u(x)v'(x) &= k(x)u(x)v(x) + f(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u(x)v'(x) = \{k(x)u(x) - u'(x)\}v(x) + f(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Найдем такую функцию $u = u(x)$, что выражение в фигурных скобках обращается в нуль, т. е. выполняется (при рассматриваемых значениях x) дифференциальное уравнение $u'(x) = k(x)u(x)$. Но это однородное линейное уравнение вида (7), сразу же решаемое, как выше, разделением переменных:

$$\frac{du}{dx} = k(x)u \Leftrightarrow u(x) = A e^{K(x)}, \quad \text{где } K'(x) = k(x), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Взяв константу $A = 1$, для произвольной первообразной $K(x)$ функции $k(x)$ получим решение $u(x) = e^{K(x)}$ вспомогательного уравнения $u' = k(x)u$, *не обращающееся в нуль*. Подставив это решение в уравнение (8), получим дифференциальное уравнение для функции $v = v(x)$, которое немедленно решается интегрированием:

$$e^{K(x)}v'(x) = f(x) \Leftrightarrow v'(x) = f(x)e^{-K(x)} \Leftrightarrow v(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)e^{-K(x)}$. Осталось выписать выражение для искомой функции $y = y(x)$:

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{K(x)}(F(x) + C) = F(x)e^{K(x)} + C e^{K(x)}.$$

Опять-таки получился тот же ответ, что и в § 3.5 (при использовании метода вариации произвольной постоянной).

Заметим, что Ньютон вообще не стремился к отысканию решений дифференциальных уравнений в элементарных функциях и даже в квадратурах — он записывал решения в виде бесконечных степенных рядов. Лейбниц же и его ближайшие последователи Якоб и Иоганн Бернулли положили начало *классификации* дифференциальных уравнений и *методам* их решения путем сведения к квадратурам, т. е. к (неопределенным) интегралам. Их усилия были направлены, прежде всего, на приведение дифференциальных уравнений первого порядка к виду уравнений с разделяющимися переменными.

Одним из первых был найден способ решения так называемых *однородных* дифференциальных уравнений (Иоганн Бернулли, 1691–1692; Лейбниц, 1693; см. упражнение). Разобранный выше метод решения линейных уравнений (подстановкой $y = u(x)v(x)$) принадлежит Лейбницу (этот метод приведен в письме Лопиталю от 6 января 1695 г. — на 80 лет раньше, чем Лагранжем был предложен метод вариации произвольных постоянных).

§ 4.3. Дифференциальные уравнения на плоскости

Во вводном параграфе 3.1 мы уже рассматривали дифференциальные уравнения на плоскости Oxy , записываемые либо в векторном виде,

$$\bar{r}' = \bar{V}(x, y, t) = \bar{V}(\bar{r}, t), \quad \bar{r} = \bar{r}(x, y),$$

либо покоординатно, как системы двух скалярных дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\begin{cases} x'(t) = A(x, y, t), \\ y'(t) = B(x, y, t). \end{cases}$$

Теперь мы рассмотрим их подробнее и научимся решать («интегрировать») некоторые из них. Начнем издалека.

4.3.1. Уравнения на плоскости, векторные поля, фазовые портреты. Все рассмотренные выше дифференциальные уравнения первого порядка являлись (или могли являться) математическими моделями эволюции систем, *состояние* которых описывалось *единственным* параметром — величиной $x = x(t)$, меняющейся во времени с известной *скоростью* $v = v(x, t)$, т. е. в соответствии с обыкновенным дифференциальным уравнением $x' = v(x, t)$ (в других обозначениях $y'(x) = F(x, y)$).

Разумеется, это важный, но самый простой случай: состояния реальных «систем» далеко не всегда могут быть описаны только одним параметром — чаще всего параметров *много*. Мы ограничимся случаем, когда состояние характеризуется *двумя* величинами — скажем, x и y , — как-то меняющимися со временем. Как и ранее, допустим, что известна информация о *скоростях* изменения величин $x(t)$, $y(t)$. Эта информация может быть записана уже как *система* обыкновен-

венных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x'(t) = A(x, y, t), \\ y'(t) = B(x, y, t), \end{cases}$$

где функции *трех переменных* $A(x, y, t)$ и $B(x, y, t)$ считаются известными.

Сделаем еще одно допущение: будем считать, что рассматриваемая система *автономна*, т.е. не испытывает внешних воздействий, и скорость эволюции, заданная функциями A, B , *не зависит от времени*. Это означает, что $A = A(x, y)$ и $B = B(x, y)$, и эволюция такой системы описывается *автономной системой дифференциальных уравнений* вида

$$\begin{cases} x'(t) = A(x, y), \\ y'(t) = B(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку п а р у в е л и ч и н $(x; y)$ можно трактовать как координаты точки X на плоскости Oxy или же как координаты соответствующего вектора $\mathbb{X}$ этой плоскости (радиус-вектора $\overline{OX}$), систему дифференциальных уравнений (1) будем называть *дифференциальным уравнением на плоскости*. Если ввести еще один вектор — приложенный к точке $X(x; y)$ «вектор скоростей» $\mathbb{V} = \overline{XV}$, заданный координатами $(A; B) = (A(x, y); B(x, y))$, или $\mathbb{V}(\mathbb{X}) = (A(\mathbb{X}); B(\mathbb{X}))$, — то систему (1) действительно можно записать как одно *векторное дифференциальное уравнение*

$$\mathbb{X}' = \mathbb{V}(\mathbb{X}) \quad (\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(t)), \quad (2)$$

которое выглядит (благодаря обозначениям!) совершенно аналогично скалярному автономному уравнению $x' = v(x)$ ($x' = x'(t)$; см. § 3.1). Однако дальше эта аналогия «не проходит»: переменные $\mathbb{X}$ (вектор) и t (число) отнюдь не равноправны, поэтому о «симметричном» дифференциальном уравнении и речи быть не может. Здесь опять-таки нам поможет *геометрическая интерпретация* дифференциального уравнения (2) и его решений на плоскости Oxy , которую, как и раньше, будем называть *фазовой плоскостью* уравнения (или описываемой с его помощью реальной эволюционирующей системы).

В этом параграфе векторы чаще всего будут записываться (обозначаться) *прописными «ажурными» буквами* — такая запись обычно используется в векторной алгебре, а также в классической механике. Этот способ записи восходит к Оливеру Хевисайду и довольно удобен.

Вообще обозначения векторов имеют длинную историю. Самое первое обозначение — с помощью черты ($\overline{a}$) — ввел в 1806 г. швейцарский математик-самоучка, изобретатель геометрической интерпретации комплексных чисел Жан Робер Арган

(1768–1822). Обозначение $\overline{AB}$ ввел немецкий математик и астроном Август Фердинанд Мёбиус (1790–1868) — тот самый, который предложил простейшую *одностороннюю поверхность*, известную как «лист Мёбиуса» (или «Лента Мёбиуса» — так назвал один из своих рассказов выдающийся писатель XX в. Хулио Кортасар (1914–1984)). Шотландский физик, математик и астроном Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879), известный «своими» уравнениями для электромагнитного поля, а также названным его именем распределением в молекулярно-кинетической теории, обозначал векторы готическими буквами (а Гамильтон — греческими). Возмущенный выбором Максвелла Хевисайд заметил, что «одного этого достаточно, чтобы вызвать предубеждение читателя против векторного анализа», и предложил обозначать векторы «жирными» буквами: $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ (1891; при этом «обычными» буквами: a , r , v , — он обозначал длины этих векторов).

Стоящую в левой части уравнения (2) производную $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(t)$ уместно трактовать как *производную векторнозначной функции* $t \mapsto \mathbb{X}'(t)$ (см. п. 3.1.6). Соответствие $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{V}(\mathbb{X})$, при котором как бы к каждой точке $X(x; y)$ плоскости Oxy приложен соответствующий вектор $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbb{X}) = \overline{XV}$, также имеет простую геометрическую интерпретацию: это соответствие есть *векторное поле на плоскости* (с точки зрения «чистого» анализа указанное соответствие $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{V}(\mathbb{X})$ есть *векторнозначная функция двух переменных*: $(x; y) \mapsto \mathbb{V} = \mathbb{V}(x, y)^1$).

Векторнозначной функции $\mathbb{X} = \mathbb{X}(t)$ отвечает *годограф*, т.е. траектория, описываемая концом $X_t = X(t) = (x(t); y(t))$ радиус-вектора $\overline{OX}_t = \mathbb{X}(t)$. Производная $\mathbb{X}'(t)$ есть вектор скорости воображаемой движущейся точки X_t ; в случае $\mathbb{X}' \neq \mathbb{O}^2$ он направлен по касательной к траектории (годографу), а его длина равна абсолютной величине скорости (или скалярной скорости движения точки по годографу; см. п. 3.1.7). Пусть векторнозначная функция $\mathbb{X} = \mathbb{X}(t)$ является решением дифференциального уравнения (2) на каком-то промежутке I , т.е.

$$\forall t \in I \quad \mathbb{X}'(t) = \mathbb{V}(\mathbb{X}(t)) \quad (3)$$

(в обозначениях системы скалярных дифференциальных уравнений (1) это означает, что при $t \in I$ выполняются уравнения

$$\begin{cases} x'(t) = A(x(t), y(t)), \\ y'(t) = B(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (4)$$

где $x(t), y(t)$ — координатные функции вектор-функции $\mathbb{X}(t)$). Согласно сказанному выше выполнение равенства (3) означает, что *при движении изображающей состояние системы точки X_t в каждый момент*

¹Есть еще две полезные интерпретации векторного поля — как *отображений плоскости в себя*: во-первых, как отображения, при котором каждая точка $X(x; y)$ переходит в конец $V(x + A; y + B)$ вектора $\overline{XV} = \mathbb{V}(\mathbb{X})$, отложенного от точки X ; во-вторых, как отображения, при котором точка $X(x; y)$ переходит в точку $Y(A; B)$ — в конец вектора $\overline{OY} = \mathbb{V}(\mathbb{X})$, отложенного на сей раз от начала координат O .

²Так обозначается *нулевой вектор*: вектор $\mathbb{O}$ с координатами $(0; 0)$.

времени $t \in I$ скорость движения $\mathbb{X}'(t)$ равна заданному в точке X_t вектору $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\mathbb{X}(t)) = \mathbb{V}(\overline{OX}_t)$.

Таким образом, векторному дифференциальному уравнению (2) отвечает векторное поле на плоскости — поле скоростей движения по траекториям, соответствующих решениям уравнения (2). Можно представлять себе векторное поле именно как поле скоростей установившегося течения какой-то (вообще говоря, сжимаемой) жидкости по плоскости, а траектории — как «линии тока», т. е. кривые, вдоль которых происходит движение «частичек» жидкости. Мы будем называть траектории также *интегральными кривыми* или же *фазовыми траекториями*; совокупность всех фазовых траекторий (с указанием направления движения изображающей точки X_t во времени) будет *фазовым портретом* дифференциального уравнения (2) или системы дифференциальных уравнений (1) (или соответствующего векторного поля; или же и сходной реальной системы, моделью которой является уравнение (2) или система уравнений (1)).

Понятие векторного поля (и соответствующий термин) ввел около 1830 г. знаменитый английский физик-самоучка Майкл Фарадей (1791–1867) — член Royal Society (и Санкт-Петербургской АН), первооткрыватель закона электромагнитной индукции и многих других законов и явлений; именно он ввел понятия и термины *катод*, *анод*, *ион*, *электролиз*, *электрод*...

Главное достижение Фарадея — выдвижение им *концепции поля* (1852), лежащей в основе важнейшего раздела современной физики — *теории поля*. Он ввел понятия магнитного и электромагнитного полей, представление об электрических и магнитных *силовых линиях* (это те же «линии тока»). Альберт Эйнштейн считал, что идея поля была наиболее оригинальной идеей Фарадея, самым важным открытием со времен Ньютона; он писал: «Надо иметь могучий дар научного предвидения, чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а скорее пространство между зарядами и частицами», — ибо пространство вмещает электромагнитное поле!

Понятие векторного поля является одним из основных в *векторном анализе* — разделе математического анализа, в котором изучаются различные обобщения операций дифференцирования и интегрирования на «многомерные объекты» (вектор-функции, функции от векторов, векторные поля,...; см. комментарии в § 3.2).

4.3.2. Фазовые портреты и особые точки: «узлы» и «седла». Заметим, что, как и для обычных автономных дифференциальных уравнений вида $x' = v(x)$, точкам X , в которых векторное поле $\mathbb{V} = \mathbb{V}(X)$ обращается в нуль, отвечают *стационарные решения*: если для некоторой точки $X_0(x_0; y_0)$ выполняется равенство $\mathbb{V}(X_0) = \mathbb{V}(x_0, y_0) = \mathbb{O}$, то *постоянная* вектор-функция $\mathbb{X}(t) \equiv \mathbb{X}_0 = \overline{OX}_0$ (для которой координатные функции суть $x(t) \equiv x_0 = \text{const}$ и $y(t) \equiv \text{const}$) очевидным образом удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). Такие точки называются *особыми точками* дифференциального уравнения (2) или соответствующего векторного поля; они отыскиваются из урав-

нений $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$. Особые точки бывают р а з н ы е — их классифицируют в зависимости от поведения фазовых траекторий в их *окрестности*; под окрестностью точки X_0 понимается любой (открытый)¹ круг с центром в X_0 (ε -окрестность точки X_0 определяется как совокупность точек $U_\varepsilon = \{X \mid X_0 X < \varepsilon\}$). Прежде чем обсуждать вопрос о классификации особых точек (вспомните — о таких точках шла речь в предыдущем параграфе), рассмотрим несколько конкретных примеров: построим фазовые портреты некоторых (простейших) дифференциальных уравнений вида (2), т. е. систем уравнений на плоскости вида (1).

Пример 1. Для построения фазового портрета системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 3y \end{cases}$$

можно попросту *решить* эту систему, благо ее уравнения «расцеплены»: так как в первое уравнение входит только x , а во второе — только y , переменные x и y изменяются *независимо* друг от друга. Уравнения для $x(t)$ и $y(t)$ линейные и легко решаются:

$$\begin{aligned} x' = x &\Leftrightarrow x = ae^t, \text{ причем } a = x(0); \\ y' = 3y &\Leftrightarrow y = be^{3t}, \quad b = y(0). \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли в координатах вектор-функцию, являющуюся *общим решением* исходной системы

$$\mathbb{X}(t) = (ae^t; be^{3t}),$$

где $(a; b) = (x_0; y_0)$ — *начальные условия* в момент времени $t = 0$. Вид траектории и ее расположение на фазовой плоскости определяется знаками констант a, b . Если $a \neq 0$, то переменную y легко выразить через x :

$$x = ae^t \Rightarrow e^t = \frac{x}{a} \Rightarrow y = be^{3t} = b(e^t)^3 = b \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3 = Cx^3, \quad C = \frac{b}{a^3};$$

при этом необходимо учесть *пределы изменения* переменной $x = x(t) = ae^t$, ибо они зависят от знака константы a . Именно, если $a > 0$, то x пробегает положительную полуось $x > 0$, причем если $t \rightarrow +\infty$, то $x(t) \rightarrow +\infty$, а если $t \rightarrow -\infty$, то $x(t) \rightarrow 0+$, — получаются семейства правых ветвей «кубической параболы» $y = Cx^3$, лежащих в I и IV четвертях ($C \neq 0, x > 0$; см. рис. 62), а также (при $C = 0$) правый луч оси Ox . В этом случае изображающая точка движется вправо (на фазовом портрете направление движения указывается «стрелками»).

¹То есть без границы.

Если $a < 0$, то x пробегает отрицательную полуось $x < 0$, если $t \rightarrow +\infty$, то $x(t) \rightarrow -\infty$, а если $t \rightarrow -\infty$, то $x(t) \rightarrow 0-$; опять получаются два семейства частей графиков $y = Cx^3$, $x < 0$, лежащих в левой полуплоскости, вместе с левым лучом оси Ox ; изображающая точка движется влево.

Наконец, остается рассмотреть случай $a = 0$. Тогда

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) = be^{3t};$$

если $b = 0$, то и $y(t) \equiv 0$ — получается стационарное решение, соответствующее особой точке $O(0; 0)$. При $b \neq 0$ получаются еще две прямолinéйные фазовые траектории: положительный и отрицательный лучи оси Oy ; изображающая точка, как и для остальных решений, «уходит» по ним от особой точки на бесконечность. $\square$

Особая точка дифференциального уравнения (или векторного поля), поведение траекторий вблизи которой приблизительно такое, какое получается в разобранным примере, называется *неустойчивым узлом* (в терминах «потока жидкости» подобная особая точка называется *источником*, ибо «линии тока» как бы «исходят» из этой точки). *Неустойчивость* особой точки этого типа заключается в том, что если начальные условия $(x(0); y(0))$ хотя бы «чуть-чуть» отличаются от *нулевых* начальных условий, то фазовая траектория «уходит» от особой точки.

С узлами мы уже сталкивались при рассмотрении особых точек дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (§ 4.2, примеры 4–5). Более того, как легко видеть, фазовый портрет только что рассмотренной системы уравнений *геометрически* (без учета «стрелок») *совпадает* с фазовым портретом дифференциального урав-

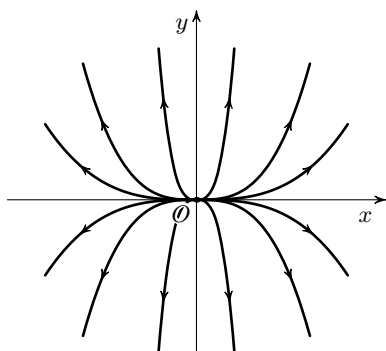


Рис. 62

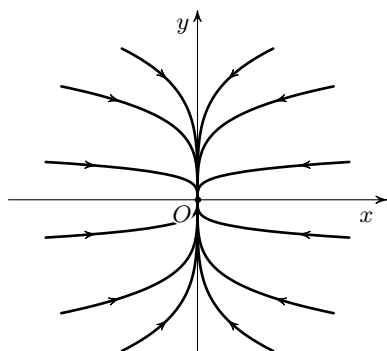


Рис. 63

нения $y' = \frac{3y}{x}$ из примера 4 (§ 4.2; рис. 60). Вопрос: *случайно ли это!* Рассмотрим еще примеры.

Пример 2. В системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -4x, \\ y' = -y \end{cases}$$

переменные x, y также изменяются независимо одна от другой, поэтому, как и в примере 1, находим

$$x' = -4x \Leftrightarrow x = ae^{-4t}, \quad a = x(0);$$

$$y' = -y \Leftrightarrow y = be^{-t}, \quad b = y(0).$$

Следовательно, общее решение системы в координатах записывается экспонентами, но на сей раз *убывающими*, так что *при любых начальных условиях* $(x(0); y(0)) = (a; b)$ *решение стремится к особой точке* («к стационарному решению») $O(0; 0)$:

$$\mathbb{X}(t) = (ae^{-4t}; be^{-t}).$$

В данном случае проще переменную x выразить через y : при $b \neq 0$ мы имеем

$$e^{-t} = \frac{y}{b} \Rightarrow x = ae^{-4t} = a(e^{-t})^4 = a \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^4 = Cy^4, \quad C = \frac{a}{b^4}.$$

Впрочем, можно и наоборот — переменную y выразить через x :

$$x = ae^{-4t} \Rightarrow e^{-4t} = \frac{x}{a} \Rightarrow y = be^{-t} = b(e^{-4t})^{1/4} = b \cdot \left|\frac{x}{a}\right|^{1/4} = D|x|^{1/4}.$$

Так или иначе, в итоге получится четыре семейства «биквадратных полупарабол» $x = Cy^4$, по одному в каждой из четырех четвертей (см. рис. 63), а также еще пять траекторий: положительные и отрицательные полуоси координатных осей и стационарное решение, отвечающее особой точке $O(0; 0)$. Как следует из формул, при любых ненулевых начальных условиях *изображающая точка* $X_t = X(t) = (x(t); y(t))$ *стремится к особой точке*, так что особая точка в данном случае есть *устойчивый узел*, а в терминах потока — «сток», ибо фазовые траектории («линии тока») как бы «входят» в эту точку. Однако заметим, что *изображающая точка* X_t при ненулевом начальном положении $X_0(a; b)$ всего лишь *стремится* к особой точке (причем очень быстро: *экспоненциально!*), но *никогда ее не достигает* (аналогично тому, как для дифференциального уравнения Ньютона движущаяся по сепаратрисе фазовая точка $(x; v)$ в невырожденном случае никогда не достигает соответствующей «точки покоя»; см. далее гл. V). Устойчивый узел можно уподобить притягивающей точке, т. е. *аттрактору*, для дискретных динамических систем итерационного типа (см. гл. II). □

Заметим, что и этот фазовый портрет (рис. 63) встречался раньше: в § 4.2 для дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{4x}$ (пример 5, рис. 61). *Случайно ли это?*

Пример 3. Система

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases}$$

решается аналогично предыдущим:

$$\begin{aligned} x' = x &\Leftrightarrow x = ae^t, & a = x(0); \\ y' = -y &\Leftrightarrow y = be^{-t}, & b = y(0). \end{aligned}$$

Общее решение в координатах записывается экспонентами, для x — *возрастающей*, а для y — *убывающей*:

$$\mathbb{X}(t) = (ae^t; be^{-t}).$$

Таким образом, переменные $x = x(t)$ и $y = y(t)$ при $a, b \neq 0$ связаны соотношением *обратной пропорциональности*:

$$x = ae^t \Rightarrow e^t = \frac{x}{a} \Rightarrow y = be^{-t} = b \cdot \frac{a}{x} = \frac{k}{x}, \quad k = ab \neq 0.$$

Следовательно, фазовый портрет системы состоит из четырех семейств ветвей гипербол $xy = k \neq 0$, по одному семейству в каждой из четырех четвертей (рис. 64). Кроме того, начало координат O есть отдельная траектория, отвечающая стационарному решению. Наконец, полуоси оси Ox суть фазовые траектории, по которым изображающая точка $X(t) = (x(t); y(t)) = (ae^t; 0)$ экспоненциально удаляется от особой точки O , а по полуосям оси Oy изображающая точка $X(t) = (x(t); y(t)) = (0; be^{-t})$, напротив, экспоненциально стремится к особой точке. $\square$

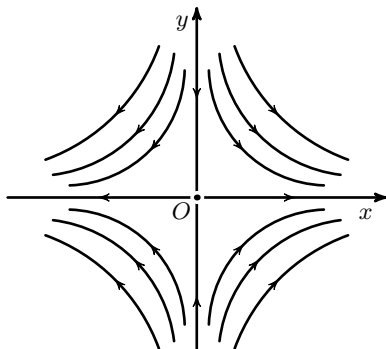


Рис. 64

Полученный фазовый портрет также уже встречался — в примере 2 из § 4.2 для дифференциального уравнения $y' = -\frac{y}{x}$ (см. рис. 59). Особая

точка дифференциального уравнения (или векторного поля), поведение траекторий вблизи которой приблизительно такое, какое получается в разобранным примере, т. е. характеризуется наличием (в некоторой окрестности особой точки) двух пар *сепаратрис* (по двум сепаратрисам точка X_t стремится к особой точке, а по двум другим — удаляется от особой точки), называется, как и раньше, *седлом*, (в терминах потока такую особую точку называют *точкой скрещивания*¹ — по-английски «cross-point»). Заметим, что эту особую точку следует считать *неустойчивой*, ибо для любой начальной точки $X_0(a; b)$, не лежащей на оси Oy (и сколь угодно близкой к точке O), фазовая траектория *уходит* от особой точки (но это *не* репеллер!).

В примерах 1–3 мы преуспели благодаря тому, что описывающие состояние системы переменные x и y изменялись *независимо* одна от другой, т. е. скорость x' изменения переменной x зависела только от значения самой этой переменной: $x' = \varphi(x)$, — и аналогично для переменной y : $y' = \psi(y)$. Поэтому каждое из уравнений получающейся системы

$$\begin{cases} x' = \varphi(x), \\ y' = \psi(y) \end{cases} \quad (5)$$

интегрируется *по отдельности*, а из найденных зависимостей составляется решение системы $\mathbb{X}(t)$. Понятно, что такой «номер» не пройдет, если в правых частях уравнений системы переменные x и y «перепутаны», как, скажем, в следующих двух примерах.

4.3.3. Дальнейшие примеры: еще «седла» и «центры».

Пример 4. Для красивой системы

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x \end{cases} \quad (6)$$

мы покажем целых *три* способа решения (т. е. отыскания ее решений²).

Способ I (хитрый). Складывая и вычитая уравнения системы, согласно правилу дифференцирования суммы и разности функций получаем уравнения $(x + y)' = x + y$ и $(x - y)' = y - x$. Введем новые функции (времени t): $u = x + y$ и $v = x - y$; тогда вместо системы уравнений (6) получится система вида (5):

$$\begin{cases} u' = u, \\ v' = -v. \end{cases}$$

¹Линий тока.

²Слово «*решение*», как и для алгебраических уравнений и систем уравнений, имеет *два* смысла: «решения», составляющие ответ в задаче, и «решение» как *процесс* (отыскания решений!).

Эта система немедленно интегрируется:

$$u' = u \Leftrightarrow u = ae^t, \quad v' = -v \Leftrightarrow v = be^{-t}.$$

Обратно, искомые функции $x(t)$ и $y(t)$ выражаются через u, v :

$$x = \frac{1}{2}(u + v) = \frac{1}{2}(ae^t + be^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(u - v) = \frac{1}{2}(ae^t - be^{-t}).$$

Заметим, что получившиеся функции еще нам встретятся в гл. V при рассмотрении уравнения Ньютона в случае линейной отталкивающей силы, $x'' = \lambda^2 x$ при $\lambda = 1$. Подождав пока с фазовым портретом, приведем еще один «напрашивающийся» подход к исходной системе.

Способ II (*более хитрый*). Из первого уравнения системы $y = x'$; продифференцировав это равенство (что законно, так как функция $y = y(t)$, будучи координатной функцией решения системы, должна быть дифференцируемой), с учетом второго уравнения системы, получим $y' = x'' = x$. В результате мы пришли к *дифференциальному уравнению гиперболических косинуса и синуса*: согласно изложенному в упражнениях к гл. III, получаем

$$x'' = x \Leftrightarrow x = \alpha \operatorname{ch} t + \beta \operatorname{sh} t; \quad \alpha = x(0), \quad \beta = x'(0).$$

Более того, дифференциальное уравнение $x'' = x$ можно трактовать как дифференциальное уравнение Ньютона для линейной отталкивающей силы с «коэффициентом отталкивания» $\lambda = 1$, которое после введения переменной скорости $v = x'$ приводит к *системе дифференциальных уравнений Ньютона*¹

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = x, \end{cases}$$

которая, «с точностью до обозначений», *совпадает с исходной системой* (6). Следовательно, для решений $\mathbb{X}(t) = (x(t); y(t))$ справедлив *закон сохранения*: для любого решения

$$y^2(t) - x^2(t) = C = \text{const.} \quad (7)$$

Не повторяя рассуждений и вычислений из комментариев в упражнениях к гл. III, делаем вывод: фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (6) состоит из равнобочных гипербол² $y^2 - x^2 = C$, $C \neq 0$, пара асимптот которых $y = \pm x$ распадается на две пары «входящих» и «выходящих» сепаратрис и отдельную особую точку типа *седла*

¹См. § 1.2 или начало § 5.1.

²Равнобочными называются гиперболы, у которых в каноническом уравнении $(\pm \frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1)$ параметры a и b равны. («Равнобочный эллипс» — это окружность; впрочем, для эллипса уместнее название «равноосный».)

(рис. 65). На этом примере можно объяснить и происхождение термина «седло»: в данном случае фазовые траектории лежат на линиях уровня функции $y^2 - x^2$, график которой в координатном пространстве $Oxyz$, т. е. поверхность $z = y^2 - x^2$, имеет «седлообразный» вид: при $y = 0$ получается парабола ветвями вниз (вдоль оси Ox), а при $x = 0$ — парабола ветвями вверх (вдоль оси Oy).

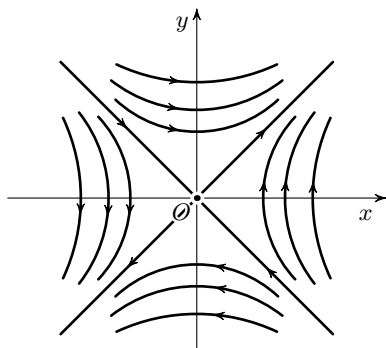


Рис. 65

Способ III (еще более хитрый). Сравнивая закон сохранения (7) с уравнениями исходной системы (6), нетрудно догадаться до такого «хода»: после перемножения уравнений системы (6) «крест-накрест» получится, что

$$x'x = y'y \Leftrightarrow x'x - y'y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - y^2)' = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = D = \text{const},$$

т. е. прежний закон сохранения. С его помощью можно найти интегрированием и зависимость x, y от времени t . $\square$

Следующий пример отличается «только» знаком в одном из уравнений системы из примера 4.

Пример 5. Для системы

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x \end{cases} \quad (8)$$

использованный выше способ I не годится (попробуйте!), однако второй способ — переход к дифференциальному уравнению $x'' = y' = -x$, совпадающему с уравнением гармонических колебаний из § 1.2 при $\omega = 1$, — немедленно дает общий вид решений. Именно, согласно указанному в п. 1.2.5 получаем

$$x'' = -x \Leftrightarrow x(t) = a \cos t + b \sin t; \quad a = x(0), \quad b = x'(0),$$

или же $x(t) = A \cos(t + \varphi)$, и, соответственно,

$$y(t) = x'(t) = b \cos t - a \sin t = -A \sin(t + \varphi).$$

Следовательно, в соответствии с определением косинуса и синуса изображающая точка $X_t(x(t); y(t))$ движется по окружности радиуса A с угловой скоростью 1 в отрицательном направлении («по часовой стрелке»). Таким образом, фазовый портрет рассматриваемой системы дифференциальных уравнений — это семейство концентрических окружностей с центром в особой точке — начале координат $O(0; 0)$; при любых ненулевых начальных условиях $X_0 \neq O$ изображающая точка X_t вращается около особой точки O с единичной угловой скоростью $\omega = -1$, т. е. по часовой стрелке (рис. 66).

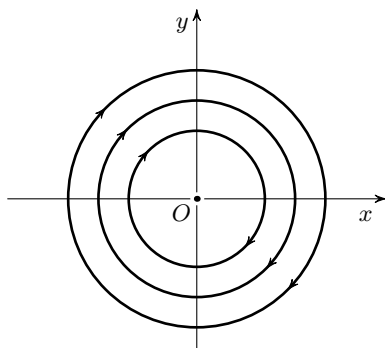


Рис. 66

Ясно, что третий способ решения системы уравнений (6) годится и для рассматриваемой системы (8): после перекрестного перемножения уравнений системы (8) получается, что

$$-x'x = y'y \Leftrightarrow x'x + y'y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2)' = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = D = \text{const}, \quad (9)$$

т. е. для системы (8) выполняется свой закон сохранения. Из него следует, что все фазовые траектории лежат на окружностях, задаваемых уравнением (9); используя это уравнение, можно найти зависимость x и y от времени t . $\square$

Особые точки дифференциальных уравнений, фазовые траектории в (достаточно малой) окрестности которых суть замкнутые линии с периодическим движением вдоль них, называются *центрами*, положительными или отрицательными, в зависимости от направления движения по этим траекториям. Особая точка в примере 5 — *отрицательный центр*; положения устойчивого равновесия для одномерных динамических систем, соответствующие минимумам потенциальной энергии

(см. п. 1.2.4 и § 5.1), суть также отрицательные центры. Центры относятся к *устойчивым* особым точкам, но в несколько другом смысле — они *устойчивы по Ляпунову*¹ — не так, как *устойчивые узлы*, т. е. *аттракторы*...

Здесь траектории не стремятся к особой точке, а просто не могут далеко уходить от нее.

Заметим, что последний способ решения системы дифференциальных уравнений (8) без труда обобщается на *все* системы вида

$$\begin{cases} x' = \alpha y, \\ y' = \beta x \end{cases} \quad (10)$$

($\alpha, \beta \neq 0$); получится, что такие системы имеют «законы сохранения» (*первые интегралы!*) $\beta x^2 - \alpha y^2 = C = \text{const}$ и, соответственно, особые точки типа *седло* или *центр*. Но «перепутывание переменных» не сводится к только что рассмотренному типу — в системе дифференциальных уравнений (1) правые части $A(x, y)$ и $B(x, y)$, разумеется, могут зависеть и от x , и от y *одновременно*. Подобные системы мы рассмотрим на примере дифференциальных уравнений Ньютона в гл. V.

§ 4.4. Интегрируемые системы. Модель биоценоза «хищник-жертва»

4.4.1. Формализм Лейбница для систем на плоскости. Рассмотрим теперь специальный класс систем дифференциальных уравнений на плоскости, *разрешимых в квадратурах*. Отправной точкой будут служить приведенные в § 4.3 примеры 1–3, в которых прослеживалась даже не аналогия, а «геометрическая» *идентичность*, совпадение интегральных кривых систем на плоскости и дифференциальных уравнений первого порядка вида $y'(x) = F(x, y)$:

$$\begin{aligned} x'(t) = x, \quad y'(t) = 3y &\Leftrightarrow y'(x) = \frac{3y}{x}; \\ x'(t) = -4x, \quad y'(t) = -y &\Leftrightarrow y'(x) = \frac{y}{4x}; \\ x'(t) = x, \quad y'(t) = -y &\Leftrightarrow y'(x) = -\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемой ситуации одной и той же буквой y обозначены совсем разные функции, а именно $y = y(t)$ и $y = y(x)$, а одной

¹Заметим, что *устойчивость по Ляпунову* — это *математический термин!* Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) — выдающийся российский математик, достойный соперник знаменитого Анри Пуанкаре (1854–1912) в вопросах устойчивости; Пуанкаре же знаменит тем, что одновременно с Эйнштейном в 1905 г. открыл *специальную теорию относительности*.

буквой x обозначены и функция $x = x(t)$, и «независимая переменная» x (аргумент функции $y = y(x)$), разумно воспользоваться обозначениями Лейбница:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 3y &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}; \\ \frac{dx}{dt} = -4x, \quad \frac{dy}{dt} = -y &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{4x}; \\ \frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -y &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Не нужно особой наблюдательности, чтобы заметить, что в правых частях правых уравнений стоят дроби, получающиеся после деления правых частей уравнений соответствующих систем. Попробуем применить этот «прием» к системам из примеров 4–5 из § 4.3. Вычисляем

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y \, dy = x \, dx \Leftrightarrow y^2 = x^2 + \text{const.}$$

Аналогично

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y \, dy = -x \, dx \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + \text{const.}$$

В обоих случаях мы пришли к верному ответу. Если, *следуя Лейбницу*, формально оперировать с уравнениями систем, то получим совсем простое «доказательство» правомерности продемонстрированного подхода. Именно, считая выражения dx , dy , dt «символьными» числителями или знаменателями «псевдодробей», стоящих в левых частях уравнений, от автономной системы на плоскости переходим к одному, но не автономному уравнению первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = B(x, y) \end{cases} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} : \frac{x}{t} = \frac{y}{x} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)} \Leftrightarrow y'(x) = F(x, y),$$

где $F(x, y) = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$, а dt , так сказать «сократилось», и, тем самым, переменная t «исключилась» из системы. Опять, как в § 4.2, полный триумф символизма Лейбница! Однако пора подумать и о смысле.

4.4.2. Теорема о решениях: обоснование формализма Лейбница.

Теорема 1 (о решениях). Допустим, $\mathbb{X}(t) = (x(t); y(t))$ — решение автономной системы дифференциальных уравнений или векторного

уравнения

$$\begin{cases} x'(t) = A(x, y), \\ y'(t) = B(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}'(t) = \mathbb{V}(\mathbb{X}), \quad (1)$$

которое удовлетворяет начальным условиям $(x(t_0); y(t_0)) = (x_0; y_0)$, т. е. $\mathbb{X}(t_0) = \mathbb{X}_0$. Кроме того, пусть в некоторой окрестности точки $X_0(x_0; y_0)$ функция $A(x, y)$ не обращается в нуль. Тогда каждому значению $x = x(t)$ в некоторой окрестности I точки x_0 отвечает единственное значение $y = y(t)^1$, так что определенная в интервале I функция $x \mapsto y = y(x)$ на всем этом интервале удовлетворяет неавтономному дифференциальному уравнению

$$y'(x) = F(x, y), \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad \text{где} \quad F(x, y) = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}. \quad (2)$$

Доказательство. Геометрически утверждение теоремы очевидно: любая фазовая траектория в каждой своей точке X_t (в конце радиус-вектора $\overline{OX_t} = \mathbb{X}(t)$) касается (отличного от нуля) вектора $\mathbb{V}(\mathbb{X}) = (A(x, y); B(x, y))$, а значит, и заданной этим вектором проходящей через точку X_t прямой $X_t V_t$ ($\overline{X_t V_t} = \mathbb{V}(X_t)$), угловой коэффициент которой равен $k = F(x, y) = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$ (см. рис. 67). Согласно условиям теоремы на каком-то интервале времени $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ траектория является графиком некоторой функции $y = \varphi(x)^2$, производная которой в силу предыдущего замечания равна угловому коэффициенту касательной, т. е. значению $k = F(x, y) = F(x, \varphi(x))$, что и требовалось установить. Нетрудно дать и формальное доказательство.

Поскольку в некоторой окрестности U точки X_0 функция $A(x, y)$ не обращается в нуль, а для значений t из некоторого интервала времени $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ точка $X(t)$ остается в окрестности U , для этих t функция $a(t) = A(x(t), y(t))$ принимает значения одного знака. Так как при $t \in J$ производная $x'(t)$ равна $a(t)$, координатная функция $J \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto x(t)$ обратима, и обратная функция $t = \tau(x)$ заведомо определена на некотором интервале $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Зададим функцию $I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y = \varphi(x)$ формулой $\varphi(x) = y(\tau(x))$; тогда при любом значении $t \in J$, при котором $x = x(t) \in I$, значение $y = \varphi(x)$ совпадает с $y(t)$ (ибо $\tau(x(t)) \equiv t$; рис. 68).

Найдем теперь производную функции $\varphi(x) = y(\tau(x))$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\varphi'(x) = (y(\tau(x)))' = y'(\tau(x)) \cdot \tau'(x),$$

¹Значение t то же самое, что и для переменной $x = x(t)$!

²Чтобы не запутаться, мы будем обозначать зависимость (функцию) y от x как $y = \varphi(x)$.

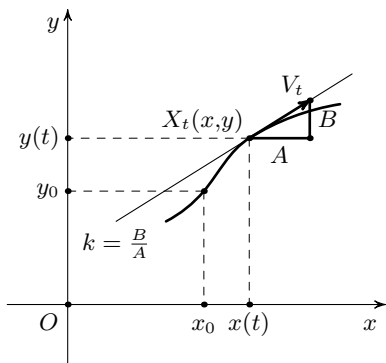


Рис. 67

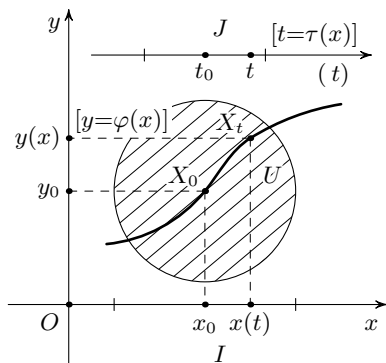


Рис. 68

а согласно уравнениям системы (1) и в силу правила дифференцирования обратной функции

$$\begin{aligned} y'(t) = B(x(t), y(t)) &\Rightarrow y'(\tau(x)) = B(x(\tau(x)), y(\tau(x))) = B(x, \varphi(x)), \\ x'(t) = A(x(t), y(t)) &\Rightarrow \tau'(x) = \frac{1}{x'(t)} \Big|_{t=\tau(x)} = \\ &= \frac{1}{A(x(\tau(x)), y(\tau(x)))} = \frac{1}{A(x, \varphi(x))}. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого значения $x \in I$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi'(x) = y'(\tau(x)) \cdot \tau'(x) = B(x, \varphi(x)) \cdot \frac{1}{A(x, \varphi(x))} = \frac{B(x, \varphi(x))}{A(x, \varphi(x))} = F(x, \varphi(x)),$$

что и требовалось установить. $\square$

4.4.3. Схема Лейбница отыскания решений систем на плоскости. Итак, доказано, что, грубо говоря, интегральные кривые (фазовые траектории) системы дифференциальных уравнений (1) совпадают («геометрически» — как множества точек) с интегральными кривыми дифференциального уравнения (2). Спрашивается, как найти решение $\mathbb{X}(t) = (x(t); y(t))$ системы (1), если уже найдено решение дифференциального уравнения (2)? В рассматриваемом случае проходит следующая схема решения системы (1). Если найдено решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), т. е. на интервале I , о котором говорится в теореме, выполняются соотношения

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = \frac{B(x, y)}{A(x, y)} \quad \text{или} \quad y'(x) = \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) = \frac{B(x, \varphi(x))}{A(x, \varphi(x))},$$

то в первую очередь отыскивается зависимость $x(t)$. Заметим, что для искомого решения $\mathbb{X}(t) = (x(t); y(t))$ координатные функции связаны зависимостью $y = \varphi(x)$, в которую, вообще говоря, входит произвольная

постоянная, определяемая из начального условия $\varphi(x_0) = y_0$. Подставляя эту зависимость в первое уравнение системы (1) и решаем получающееся при этом дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = A(x, \varphi(x)) \stackrel{\text{des}}{=} V(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{V(x)} = dt \Leftrightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dz}{V(z)}.$$

Мы приходим к знакомому выражению — к *интегралу времени* из п. 4.1.7, с помощью которого, *в принципе*, отыскивается зависимость $t = t(x)$ (если записывать эту зависимость с помощью неопределенного интеграла, то в нее войдет еще одна произвольная постоянная, также определяемая начальным условием $x(t_0) = x_0$). Опять-таки, *в принципе*, из уравнения $t = t(x)$ определяется обратная зависимость $x = x(t)$, для которой выполняется первое уравнение системы: $x'(t) = V(x) = A(x, \varphi(x))$. Определив вторую координатную функцию $y = y(t)$ формулой $y(t) = \varphi(x(t))$, проверяем, что она удовлетворяет второму уравнению системы:

$$y'(t) = (\varphi(x(t)))' = \varphi'(x(t)) \cdot x'(t) = F(x, \varphi(x)) \cdot A(x, \varphi(x)) = \frac{B(x, \varphi(x))}{A(x, \varphi(x))}.$$

Значит, если дифференциальное уравнение (2) проинтегрировано, то отыскание решений системы (1) сводится к квадратурам (и решению «алгебраического» уравнения). Можно сказать, что, *в некотором смысле*, система (1) и дифференциальное уравнение (2) *эквивалентны*.

Мы видим, насколько плодотворными для математического анализа оказались идеи и изобретения Лейбница по части поиска «*универсального символического языка*» или, как выражался сам Лейбниц, «*универсальной характеристики*¹». Идея создания «всеобщей характеристики» главенствовала в размышлениях и в многообразной деятельности Лейбница с двадцати лет. В 25 лет он, будучи с дипломатической миссией в Париже, углубился (под влиянием Гюйгенса) сразу в *самую современную* математику (1672 г.) и вскоре (1675 г.) превзошел своих предшественников (но не Ньютона). Пожалуй, только математический анализ, да еще отчасти логика, были теми областями, в которых Лейбниц смог эффективно воплотить свою мечту об «*универсальной характеристике*».

Универсальный гений, под стать замышлявшей им «характеристике», Готфрид Вильгельм Лейбниц родился 1 июля 1646 г. в профессорской семье. В 15 лет окончил гимназию и поступил в университет, где изучал право. Имел феноменальную память и исключительные способности к языкам (некоторые биографы объясняют это «славянскими корнями» Лейбница, считая, что его фамилия — германизированная западно-славянская фамилия Лубенец!). Как впоследствии Пуанкаре, но еще в большей степени, Лейбниц отличался гибкостью, восприимчивостью ко всему, способностью к обобщениям, к синтезированию самых разнообразных идей,

¹ Термин «*характеристика*» — производный от греч. *χαρακτήρ*: «черта», «знак», «примета», в смысле признака, отражающего «форму и существо вещи».

методов и т. д. Он был выдающимся математиком, физиком, историком, дипломатом, правоведом, богословом (он был одержим идеей объединения католической и протестантской церковей) и, возможно, главное — философом.

В основе философской системы Лейбница лежит «монадология» и принцип «предустановленной гармонии». Монады¹ суть как бы атомы всего — и неживой материи, и энергии, и души, и духа; идея монад восходит к пифагорейцам и Платону. «Предустановленная» же гармония правит монадами, т. е. миром, как идеальным, так и феноменологическим. Интересно, что российский математик, профессор Московского университета Николай Васильевич Бугаев² (1837–1903) был по части монад продолжателем Лейбница: согласно его «эволюционной монадологии» прошлое не исчезает, а накапливается; монады же и весь мир все больше и больше совершенствуются!

Скончался Лейбниц 14 ноября 1716 г. в Ганновере. На могильной плите в церкви, где он похоронен, только два слова: «ossa Leibnitii» — «прах Лейбница».

4.4.4. Разделение переменных в системах на плоскости. Все дифференциальные уравнения первого порядка вида $y'(x) = F(x, y(x))$, которые мы умеем решать, относятся к *уравнениям с разделяющимися переменными* или сводятся к ним (см. § 4.2). В случае, когда в правых частях уравнений системы (1) *переменные разделяются*, т. е. $A(x, y) = P(x) \cdot Q(y)$ и $B(x, y) = R(x) \cdot S(y)$, они разделяются и в «эквивалентном» уравнении (2):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x)Q(y), \\ \frac{dy}{dt} = R(x)S(y) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{R(x)S(y)}{P(x)Q(y)} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{Q(y)}{S(y)} dy = \frac{R(x)}{P(x)} dx \Leftrightarrow \mathcal{F}(y) = \mathcal{G}(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\mathcal{F}(y)$ и $\mathcal{G}(x)$ суть первообразные дробей $f(y) = \frac{Q(y)}{S(y)}$ и $g(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ соответственно. Нетрудно догадаться до обобщения приведенного приема на системы вида

$$\begin{cases} x'(t) = P(x)Q(y)k(x, y), \\ y'(t) = R(x)S(y)k(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{R(x)S(y)}{P(x)Q(y)}$$

и т. д. Системы, правые части которых представимы в указанном виде (обратите внимание на то, что множитель $k(x, y)$ один и тот же для обоих уравнений системы), называются *системами с разделяющимися переменными*. Между прочим, к таковым относится и система дифференциальных уравнений Ньютона для автономных консервативных одномерных динамических систем — ими мы займемся в следующей главе.

¹ Не перепутайте с менадами, т. е. «вакханками»!

² Отец поэта и отчасти философа Андрея Белого (Бориса Николаевича Бугаева; 1880–1934).

Применим метод разделения переменных к исследованию весьма интересной математической модели, относящейся к биологии, — *модели биоценоза «хищник-жертва» Вольтерры—Лотки*, рассмотренной в вводном параграфе 1.1 (п. 1.1.8; прочитайте его еще раз!)

4.4.5. Качественный анализ модели Вольтерры—Лотки. Напомним, что данная модель сводится к системе двух уравнений,

$$\begin{cases} x'(t) = ax - bxy, \\ y'(t) = cxy - dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(a - by), \\ y'(t) = y(cx - d), \end{cases} \quad (3)$$

рассматриваемых на I четверти $x > 0, y > 0$ плоскости Oxy — плоскости «жертва-хищник» («карась-щука»!). Векторное поле системы (3),

$$\mathbb{V}(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) = (x(a - by), y(cx - d)), \quad (4)$$

существенно нелинейное и имеет в I четверти единственную особую точку $Q(x_0, y_0)$, где $x_0 = \frac{d}{c}, y_0 = \frac{a}{b}$. Отвечающее ей стационарное решение $(x(t); y(t)) \equiv (x_0; y_0)$ соответствует «гармоническому» сосуществованию популяций — «балансу», когда прирост всегда равен убыли. Разумеется, нас интересуют прочие решения, т. е. *возможная динамика* биоценоза.

Сначала рассмотрим линейное приближение системы (3) в окрестности особой точки, записываемое в «сдвинутых» координатах $z = x - x_0, w = y - y_0$. Очевидно, в этих координатах система (3) имеет вид

$$\begin{cases} z'(t) = -b(x_0 + z)w, \\ w'(t) = c(y_0 + w)z, \end{cases}$$

а ее линейное приближение записывается как

$$\begin{cases} z'(t) = -bx_0w = -\beta w, \\ w'(t) = cy_0z = \gamma z. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что особая точка $(z; w) = (0; 0)$ последней системы является *центром*, и по этой информации нельзя судить о поведении траекторий исходной нелинейной системы (3).

Некоторую информацию о фазовых траекториях можно получить, «прикинув», как ведет себя векторное поле (4), т. е. рассмотрев знаки компонент A, B векторного поля $\mathbb{V} = (A; B)$ в различных точках положительного квадранта $x > 0, y > 0$. Из формул (4) получается, что в этом квадранте $\operatorname{sgn} A(x, y) = -\operatorname{sgn}(y - y_0), \operatorname{sgn} B(x, y) = \operatorname{sgn}(x - x_0)$, поэтому знаки компонент вектора $\mathbb{V}$ и их направления такие, как показано на рис. 69.

Например, если $x > x_0, y > y_0$, то знаки A и B суть $(-; +)$ и вектор $\mathbb{V}$ направлен соответственно *влево-вверх* и т. д. Заметим, что на прямой

$x = x_0$ координата $B(x, y)$ вектора $\mathbb{V}$ равна нулю и вектор направлен горизонтально: вправо при $y < y_0$ и влево при $y > y_0$. Аналогично на прямой $y = y_0$ координата $A(x, y)$ обращается в нуль, и вектор $\mathbb{V}$ направлен по вертикали (см. рис. 69).

Однако и из этой картинки *неясно*, как ведут себя траектории: наматываются ли они на особую точку $Q(x_0; y_0)$, как траектория (А) на рис. 70, крутятся ли они около Q , как траектория (В), или же они уходят от точки Q , как траектория (С)? В принципе, возможно и одно, и другое, и третье. И здесь, как это иногда бывает, помогает «счастливый случай»: переменные x и y в системе (3) *разделяются*, и она интегрируется!

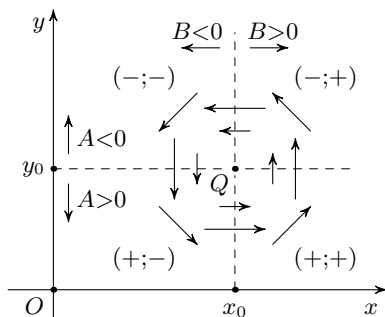


Рис. 69

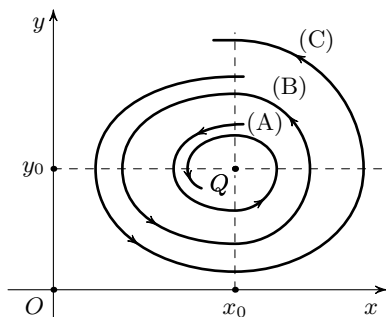


Рис. 70

4.4.6. Интегрирование системы Вольтерры—Лотки. Применяя к системе (3) формализм Лейбница, для зависимости $y = y(x)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(cx-d)}{x(a-by)} \Leftrightarrow \frac{a-by}{y} dy = \frac{cx-d}{x} dx \Leftrightarrow \left(c - \frac{d}{x}\right) dx = \left(\frac{a}{y} - b\right) dy.$$

Интегрируя, приходим к соотношению

$$cx - d \ln x = a \ln y - by + C \Leftrightarrow f(x) = -g(y) + C,$$

где C — константа, а через f и g обозначены похожие одна на другую функции

$$f(x) = cx - d \ln x, \quad g(y) = by - a \ln y.$$

Таким образом, система уравнений Вольтерры—Лотки в I четверти имеет *первый интеграл* — «закон сохранения» вида

$$f(x) + g(y) = C = \text{const} \quad (x > 0, y > 0). \quad (5)$$

Увы, выразить y через x из уравнения (5), мягко говоря, затруднительно. Попробуем-таки получить из этого интеграла информацию о поведении траекторий системы (3).

Исследуем функцию $f(x) = cx - d \ln x$. Ее первая и вторая производные суть

$$f'(x) = c - \frac{d}{x} = \frac{c(x - x_0)}{x}, \quad f''(x) = \left(c - \frac{d}{x}\right)' = \frac{d}{x^2},$$

поэтому на полуоси $x > 0$ выполняются равенства $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0)$; значит, функция f убывает при $x \in (0, x_0)$ и возрастает при $x \in (x_0, +\infty)$, так что x_0 — точка строгого минимума, причем *невыврожденная*, т. е.

$$f''(x_0) = \frac{d}{x_0^2} \neq 0.$$

Значение в точке минимума равно

$$f_0 = f(x_0) = c \cdot \frac{d}{c} - d \ln \frac{d}{c} = d \left(1 - \ln \frac{d}{c}\right),$$

а график функции $f = f(x)$ выпуклый вниз на полуоси $(0, +\infty)$ (рис. 71; напомним, что нас интересуют только положительные значения x).

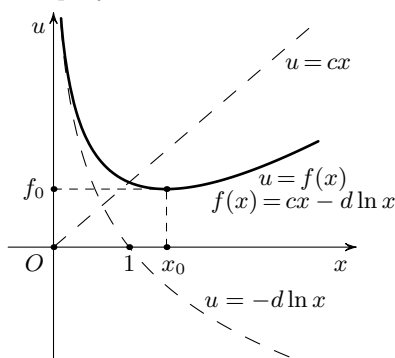


Рис. 71

Аналогичным образом ведет себя и функция $g(y) = by - a \ln y$: для нее $y_0 = \frac{a}{b}$ — невырожденная точка минимума, а значение в ней равно

$$g_0 = g(y_0) = a \left(1 - \ln \frac{d}{c}\right).$$

Из того, что функция $H(x, y) = f(x) + g(y)$ является первым интегралом системы Вольтерры—Лотки, следует, что *каждая фазовая траектория системы Вольтерры—Лотки лежит на линии уровня функции $H(x, y)$, т. е. на линии*

$$\Gamma_h = \{(x; y) \mid H(x, y) = f(x) + g(y) = h = \text{const}\}.$$

Очевидно, функция $H(x, y)$ непрерывно дифференцируема (причем сколько угодно раз) в I четверти и имеет в точке $Q(x_0; y_0)$ *строгий*

минимум, т. е. для любых $x, y > 0$ в случае, когда точка $(x; y)$ отлична от Q , выполнено неравенство $H(x, y) > H(x_0, y_0)$. График этой функции в координатном пространстве $Oxy\zeta$ будет «чашеобразной» поверхностью $\zeta = H(x, y)$, а проекции на плоскость Oxy ее сечений «горизонтальными» плоскостями $\zeta = h$, лежащими выше точки минимума $(x_0; y_0; f_0 + g_0)$ (т. е. при $h > f_0 + g_0$), суть замкнутые линии (рис. 72), которые и будут линиями уровня первого интеграла $H(x, y)$.

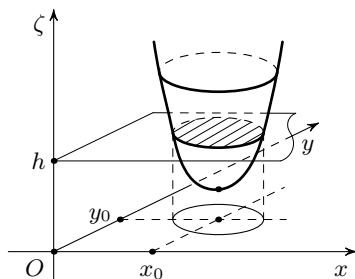


Рис. 72

Заметим, что векторное поле $\mathbb{V}(x, y)$ системы Вольтерры—Лотки обращается в нуль (т. е. вектор $\mathbb{V}$ нулевой) только в точке Q и не равно нулю вдоль любой линии уровня Γ_h (при $h > f_0 + g_0$), так что фазовые траектории системы не просто лежат на этих линиях, а *совпадают* с ними, причем движение фазовой точки $(x; y) = (x(t); y(t))$ вдоль этих линий является *периодическим* (рис. 73). Таким образом, в модели Вольтерры—Лотки биоценоз «хищник-жертва» эволюционирует так, что численности обеих популяций периодически то возрастают до максимальных значений (это «правый верхний угол» фазовой траектории), то убывают до минимальных значений («левый нижний угол» траектории), как и показано на графиках функций $n = x(t)$ и $n = y(t)$ (рис. 74).

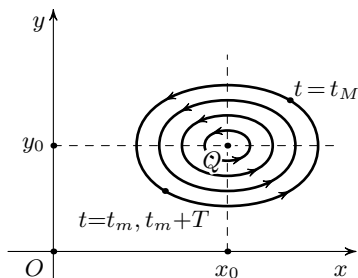


Рис. 73

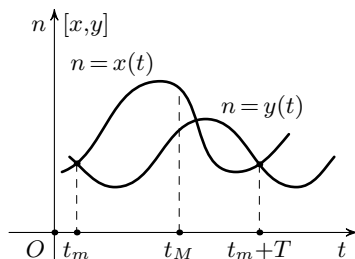


Рис. 74

Объяснить такой характер эволюции на «качественном уровне» можно так. Пусть начальные популяции хищников и жертв небольшие (это «левый нижний угол» фазовой траектории). Тогда незначительное количество хищников позволяет расти x -популяции, при этом y -популяция пока только поддерживает стабильность. Когда карасей станет много, положительное слагаемое в скорости $y'(t)$ изменения популяции щук, т. е. sxy , становится преобладающим — y -популяция растет, «стабилизируя» x -популяцию (фазовая точка $(x; y)$ перемещается из «правого нижнего угла» в «правый верхний угол»). Но когда щук становится много, а популяция карасей не растет, наоборот, отрицательное слагаемое в скорости $y'(t)$ изменения популяции карасей, $-bxy$, будет решающим в динамике карасей — популяция щук держится на более-менее стабильном уровне за счет поедания карасей, популяция которых постепенно «истощается» (фазовая точка $(x; y)$ перемещается из «правого верхнего угла» в «левый верхний угол»). Это приводит к истощению популяции щук (пищи мало!), и все возвращается «на круги своя» — в исходную ситуацию.

В этой модели интересно выяснять, к каким изменениям в динамике «борьбы за существование» приводят те или иные внешние факторы — типа периодической подкормки карасей или отлова щук (или карасей) и т. д. Однако рассмотрение дальнейших модификаций модели Вольтерры—Лотки уводит совсем далеко от нашего курса, да и требует более основательного углубления в теорию.

Упражнения, задачи и задания к гл. IV

1. Найдите общие решения данных дифференциальных уравнений (включая особые или стационарные решения) и изобразите на плоскости Oxy семейство графиков этих решений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = -y^2; & 3) y' = -y^3; & 5) y' = -y^4. \\ 2) y' = y^3; & 4) y' = y^4; & \end{array}$$

2. Выполните то же самое задание для следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = \frac{1}{y}; & 3) y' = \frac{1}{y^2}; & 5) y' = \frac{1}{y^3}. \\ 2) y' = -\frac{1}{y}; & 4) y' = -\frac{1}{y^2}; & \end{array}$$

3. Выполните то же задание для следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = \sqrt{y} \quad (y > 0); & 3) y' = \sqrt[3]{y}; & 5) y' = \frac{1}{2}|y|. \\ 2) y' = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (y > 0); & 4) y' = |y|; & \end{array}$$

4. Выполните то же задание для дифференциальных уравнений (при этом укажите, какие из стационарных решений [если они есть] будут устойчивыми, какие — неустойчивыми):

$$\begin{array}{lll} 1) y' = y^2 - 1; & 3) y' = 1 + y^2; & 5) y' = y^2 - 3y + 2. \\ 2) y' = 1 - y^2; & 4) y' = \sqrt{1 - y^2}; & \end{array}$$

5. Выполните то же задание (как и в предыдущем упражнении) для следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = \cos^2 y; & 3) y' = \operatorname{tg} y; & 5) y' = e^y. \\ 2) y' = \sin^2 y; & 4) y' = -\operatorname{ctg} y; & \end{array}$$

6. Найдите все стационарные решения данных дифференциальных уравнений и для каждого из этих решений укажите, является ли оно устойчивым, неустойчивым («отталкивающим») или же ни тем, ни другим:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = y^3 - y; & 3) y' = y^4 - 1; & 5) y' = -\sin \pi y. \\ 2) y' = 4y - y^3; & 4) y' = \sin y; & \end{array}$$

7. Пусть общее решение дифференциального уравнения $y' = g(y)$ записывается в виде $y = \varphi(x, C)$ (C — произвольная постоянная). Как, используя функцию (выражение) φ , записать общие решения следующих уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = -g(y); & 3) y' = 2g(y); & 5) y' = -3g(2y)? \\ 2) y' = g(-y); & 4) y' = g(3y); & \end{array}$$

8. Используя формализм Лейбница, найдите общие решения и постройте фазовые портреты для следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = \frac{y}{x}; & 5) y' = \frac{x}{2y}; & 9) y' = \frac{2x}{y}; \\ 2) y' = \frac{x}{y}; & 6) y' = -\frac{2y}{x}; & 10) y' = -\frac{y}{2x}; \\ 3) y' = -\frac{x}{y}; & 7) y' = -\frac{x}{2y}; & \\ 4) y' = \frac{2y}{x}; & 8) y' = \frac{y}{2x}; & 11) y' = -\frac{2x}{y}. \end{array}$$

9. Используя формализм Лейбница, найдите общие решения (и, при возможности, постройте фазовые портреты) следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = xy; & 3) y' = 2xy; & 5) y' = \frac{1}{2}xy; \\ 2) y' = -xy; & 4) y' = -2xy; & 6) y' = -\frac{1}{2}xy. \end{array}$$

10. Выполните то же самое задание для следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) y' = x^2 y; & 4) y' = -x y^2; & 7) y' = x^3 y; \\ 2) y' = x y^2; & 5) y' = x^2 y^2; & 8) y' = -x^3 y; \\ 3) y' = -x^2 y; & 6) y' = -x^2 y^2; & 9) y' = x y^3; \end{array}$$

10) $y' = -xy^3$;

12) $y' = x^3y^2$;

14) $y' = -x^3y^2$.

11) $y' = x^2y^3$;

13) $y' = -x^2y^3$;

11. Выполните то же задание для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = \frac{y}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$;

7) $y' = \frac{2x}{\sqrt{y}} \quad (y > 0)$;

2) $y' = -\frac{y}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$;

8) $y' = -\frac{2x}{\sqrt{y}} \quad (y > 0)$;

3) $y' = \frac{2y}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$;

9) $y' = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (x > 0, y > 0)$;

4) $y' = -\frac{2y}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$;

10) $y' = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (x > 0, y > 0)$;

5) $y' = \frac{x}{2\sqrt{y}} \quad (y > 0)$;

11) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, y > 0)$;

6) $y' = -\frac{x}{2\sqrt{y}} \quad (y > 0)$;

12) $y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, y > 0)$.

12. Выполните то же задание для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = y\sqrt{x} \quad (x > 0)$;

2) $y' = -y\sqrt{x} \quad (x > 0)$;

3) $y' = x\sqrt{y} \quad (y > 0)$;

4) $y' = -x\sqrt{y} \quad (y > 0)$;

5) $y' = -x\sqrt{y} \quad (y > 0)$;

6) $y' = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad (x > 0, y > 0)$;

7) $y' = -\sqrt{x}\sqrt{y} \quad (x > 0, y > 0)$.

13. Исследуйте дифференциальное уравнение

$$y' = Ax^\alpha y^\beta,$$

т. е. запишите множество его решений в зависимости от значений параметров $A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

14. Используя формализм Лейбница, найдите общие решения и постройте фазовые портреты для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = \frac{y}{x+1}$;

3) $y' = \frac{x}{y-1}$;

2) $y' = \frac{y+1}{x-2}$;

4) $y' = \frac{x-2}{y+1}$.

15. Используя формализм Лейбница, найдите общие решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = ye^x$;

5) $y' = y \cos x$;

2) $y' = -ye^x$;

6) $y' = y \sin x$;

3) $y' = xe^y$;

7) $y' = y \sin 2x$.

4) $y' = -xe^y$;

16. Приведите пример функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$, не представимой в виде

- 1) суммы $f(x) + g(y)$;
- 2) произведения $f(x) \cdot g(y)$

(с обоснованием!).

17. Докажите, что функция двух переменных $z = \varphi(x, y)$, имеющая производные по каждой из переменных x, y любого порядка, представляется в виде суммы $f(x) + g(y)$ функций от одной переменной, дифференцируемых сколько угодно раз, тогда и только тогда, когда так называемая смешанная производная

$$z'_{xy} \stackrel{\text{des}}{=} (z'_x)'_y,$$

или, в обозначениях Лейбница,

$$\frac{d^2 z}{dy dx} \stackrel{\text{des}}{=} \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy},$$

тождественно равна нулю (все функции здесь предполагаются *всюду определенными*).

18. Докажите, что в указанных функциях переменные *не разделяются*, т. е. эти функции не представимы в виде произведения $f(x) \cdot g(y)$:

- 1) $x + y$;
- 2) $x - y + 1$;
- 3) $x^2 + y^2$;
- 4) $x^2 - y^2 + 1$;
- 5) $x^2 + y^2 + 1$.

19. Придумайте какое-нибудь (разумное) условие того, что в функции $u = \varphi(x, y)$ переменные *разделяются*, т. е. функция u представима в виде произведения $f(x) \cdot g(y)$ (наподобие условия из задачи 17).

Разделение переменных в однородных дифференциальных уравнениях

Определение 1. Функция двух переменных $F(x, y)$ называется *однородной функцией степени k* (или *порядка k* , или *с показателем однородности k*), если при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\forall t \neq 0 \quad F(tx, ty) = t^k F(x, y).$$

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' = F(x, y)$ называется *однородным дифференциальным уравнением*, если его правая часть является *однородной функцией степени $k = 0$* , т. е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\forall t \neq 0 \quad F(tx, ty) = F(x, y).$$

20. Докажите, что любая однородная функция $F(x, y)$ степени $k = 0$ при $x \neq 0$ представляется в виде $F(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Таким образом, при $x \neq 0$ однородное дифференциальное уравнение может быть записано в обозначениях Лейбница в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (*)$$

Поэтому, *по-видимому*, имеет смысл ввести *новую искомую функцию* $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, или, иными словами, искать решение $y(x)$ в виде $y = x \cdot u(x)$.

21. Сделав в уравнении $(*)$ указанную подстановку $y = u(x)x$, запишите получающееся дифференциальное уравнение для функции $u = u(x)$.

Указание: $\frac{d}{dx}(ux) = x \frac{du}{dx} + u$.

Ответ: $\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(u) - u}{x}$.

Комментарий. Таким образом, получается уравнение с разделяющимися переменными, из которого отыскивается первый интеграл указанного уравнения

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} - \ln |x| = C \Leftrightarrow G(u) - \ln |x| = C = \text{const},$$

где $G(u)$ — какая-нибудь первообразная функции

$$\psi(u) = \frac{1}{\varphi(u) - u}$$

(а C — «псевдоконстанта»). Подставляя сюда $u = \frac{y}{x}$, приходим к алгебраическому¹ уравнению, связывающему искомую функцию y и независимую переменную x , или первому интегралу исходного уравнения:

$$H(x, y) = G\left(\frac{y}{x}\right) - \ln |x| = \text{const}.$$

22. Используя однородность, найдите общие решения и постройте фазовые портреты для следующих дифференциальных уравнений:

$$1) \ y' + \frac{4y+x}{y} = 0; \quad 2) \ y' + \frac{y+x}{y} = 0; \quad 3) \ y' = \frac{y-x}{y+x}.$$

23. Используя однородность, найдите первые интегралы и решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \ y' &= \frac{2xy}{x^2 + y^2}; \\ 2) \ y' &= \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x); \\ 3) \ y^2 + x^2 y' &= xy y'. \end{aligned}$$

¹В широком смысле.

Уравнение Бернулли

24. Сделав в дифференциальном уравнении Бернулли¹

$$y' = k(x)y + f(x)y^n \quad (**)$$

($n \in \mathbb{Z}$; впрочем, n можно считать любым действительным числом) подстановку $y = uv$, сведите его к линейному дифференциальному уравнению вида (5) и к уравнению с разделяющимися переменными.

25. Разделив обе части дифференциального уравнения Бернулли (**) на y^n , покажите, что некоторой (какой?) заменой искомой функции это уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению.

Указание. Введите вместо искомой функции $y = y(x)$ функцию $z = z(x) = y^{1-n}$ (при этом случаи $n = 0$ и $n = 1$ придется рассмотреть отдельно).

Дифференциальные уравнения на плоскости

26. Изобразите на плоскости Oxy примерный вид векторных полей $V(x, y) = (A(x, y); B(x, y))$, заданных своими компонентами $(A; B)$:

- | | | |
|----------------|------------------|------------------------|
| 1) $(1; -1)$; | 7) $(-x; -y)$; | 13) $(x - 1; y + 1)$; |
| 2) $(1; 2)$; | 8) $(y; 1)$; | 14) $(1 - x; y + 1)$; |
| 3) $(x; 1)$; | 9) $(-y; 1)$; | 15) $(x; x)$; |
| 4) $(x; y)$; | 10) $(y; x)$; | 16) $(y; -y)$. |
| 5) $(x; -y)$; | 11) $(-y; x)$; | |
| 6) $(-x; y)$; | 12) $(-y; -x)$; | |

Нарисуйте (точно или «примерно») фазовые траектории этих полей, т. е. соответствующих систем дифференциальных уравнений $(x'; y') = (A(x, y); B(x, y))$.

Указание. Можно воспользоваться следующими соображениями:

а) примерное направление векторов поля определяется *знаками* координатных функций A, B ;

б) в частности, можно определить точки, в которых поле направлено горизонтально или вертикально, а также *особые точки* данных векторных полей;

в) более точную информацию о направлении векторов поля можно получить с помощью *изоклин* (т. е. линий, на которых векторы поля образуют одинаковые углы, скажем, с осью Ox ; см. § 2.2 и упражнения к гл. II).

¹Его предложил в 1695 г. Якоб Бернулли как «задачу для решения» (обобщение неоднородного линейного уравнения). Решения дали в 1696–97 гг. Лейбниц и Иоганн Бернулли — оба способа изложены в упражнениях 24–25.

27. Найдите общий вид решений $(x(t); y(t))$ дифференциальных уравнений с заданными своими координатными функциями $(A; B)$ векторными полями $\mathbb{V}(x, y) = (A(x, y); B(x, y))$:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 1) $(-x, -3y)$; | 5) $(-2x, y)$; | 9) $(-y, -2x)$; |
| 2) $(4x, y)$; | 6) $(-2y, x)$; | 10) $(-y, 2x)$; |
| 3) $(-x, y)$; | 7) $(-2y, -x)$; | |
| 4) $(-y, x)$; | 8) $(-x, 2y)$; | |

28. На плоскости параметров Oab изобразите множества тех точек $(a; b)$, для которых особая точка $O(0; 0)$ данных систем дифференциальных уравнений невырожденная и имеет различные типы — узел (устойчивый, неустойчивый, вырожденный), седло, центр (левый или правый), фокус (устойчивый или неустойчивый, левый или правый):

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $x' = ax, \quad y' = by$; | 3) $x' = ax + y, \quad y' = by$; |
| 2) $x' = ay, \quad y' = bx$; | 4) $x' = ax, \quad y' = x + by$. |

29. Выясните, под какими углами пересекают оси абсцисс и ординат фазовые траектории данных систем дифференциальных уравнений:

- 1) $x' = y, \quad y' = -\omega^2 x - 2\alpha y$;
- 2) $x' = y, \quad y' = -\omega^2 x + 2\alpha y$;
- 3) $x' = -y, \quad y' = -\omega^2 x + 2\alpha y$;
- 4) $x' = -y, \quad y' = -\omega^2 x - 2\alpha y$,

где ω и α — положительные параметры. Рассмотрите три случая: $\alpha < \omega$, $\alpha = \omega$, $\alpha > \omega$.

Замечание. При $\alpha < \omega$ особые точки первых трех систем — *фокусы*.

Системы дифференциальных уравнений в полярных координатах

30. Запишите в декартовых координатах $(x; y)$ систему дифференциальных уравнений, которая в полярных координатах $(r; \varphi)$ имеет вид

$$\begin{cases} r'(t) = rf(r), \\ \varphi'(t) = 1, \end{cases} \quad (***)$$

где $f(r)$ — данная непрерывно дифференцируемая на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функция.

Указание. Воспользуйтесь формулами $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$.

Ответ:
$$\begin{cases} x' = -y + xf(r), \\ y' = x + yf(r). \end{cases}$$

Комментарий. Таким образом, система $(***)$ соответствует векторному полю с компонентами $A(x, y) = -y + xf(r)$, $B(x, y) = x + yf(r)$

($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Если функция f есть тождественный нуль, то система (***) задает «стандартный центр», т. е. точка $O(0; 0)$ (которая всегда будет особой для системы (***)) есть центр. Если же f не есть тождественный нуль, то систему (***) можно рассматривать как «возмущение центра». Поведение фазовых траекторий «возмущенного центра» проще исследовать, не переходя к декартовым координатам, благо дифференциальное уравнение $r'(t) = rf(r)$ относится к стандартным, рассмотренным в § 4.1.

31. Найдите все решения системы (***) в случае, когда $f(r) = a - r$ ($a > 0$). Изобразите фазовые портреты системы как на «полярной» полуплоскости $Or\varphi$ (в таких портретах положительную полуось Or , $r > 0$, направляют *вправо*, а ось $O\varphi$ — *вверх*), так и на декартовой плоскости Oxy .

Указание. Дифференциальное уравнение $r' = r(a - r)$ — это хорошо нам знакомое *логистическое уравнение* (см. § 4.1).

Комментарий. Стационарному решению $r(t) \equiv a$ логистического уравнения отвечает единственная *периодическая* траектория системы (***) — так как $\varphi(t) = t + \varphi_0$, это будет окружность радиуса a ($x^2 + y^2 = a^2$), движение по которой происходит с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ (в декартовых координатах $x(t) = a \cos(t + \varphi_0)$, $y(t) = a \sin(t + \varphi_0)$). Замкнутые траектории такого вида называются *циклами*.

Кроме цикла, система имеет особую точку O типа *неустойчивого фокуса*: при $0 < r < 1$ функция $f(r)$ положительна, поэтому $r'(t) > 0$ и точка $(r; \varphi)_p$ удаляется от полюса O . При этом, так как для решения $r(t)$ логистического уравнения $r(t) \rightarrow a$ — при $t \rightarrow +\infty$, уходя от полюса, траектория «наматывается» («навивается») на цикл $r = a$ *изнутри*. С другой стороны, если начальная точка лежит снаружи от цикла (т. е. $r(0) = r_0 > a$), то $r(t) \rightarrow a$ — при $t \rightarrow +\infty$, поэтому такая траектория тоже «наматывается» на цикл $r = a$, но *снаружи*.

Циклы (периодические траектории), к которым при $t \rightarrow +\infty$ «стремятся» близкие траектории, называются *устойчивыми* (притягивающими) *предельными циклами*. Существование такого рода предельных циклов говорит о том, что соответствующая динамическая система как бы «самопроизвольно», «автоматически» выходит на периодический, «колебательный» режим — на режим так называемых *автоколебаний*. Кроме устойчивых предельных циклов рассматривают также *неустойчивые* (*отталкивающие*) *предельные циклы*, когда близкие к циклу траектории не наматываются на цикл, а, напротив, уходят от него; бывают и *полуустойчивые предельные циклы*, где траектории с одной стороны навиваются на цикл, а с другой стороны — уходят от него.

32. Найдите все решения систем (***) в случаях, когда $a > 0$ и

1) $f(r) = r - a$;

2) $f(r) = (r - a)^2$.

Изобразите фазовые портреты систем на полярной полуплоскости $Or\varphi$ и на декартовой плоскости Oxy .

33. Исследуйте поведение решений систем вида (***) для указанных функций $f(r)$ и изобразите примерные фазовые портреты этих систем на полярной полуплоскости и на декартовой плоскости:

1) $f(r) = (r - 1)(r - 2)$;

6) $f(r) = (r - 1)(r - 2)^2$;

2) $f(r) = (r - 1)(2 - r)$;

7) $f(r) = (r - 1)^2(r - 2)^2$;

3) $f(r) = (r - 1)(r - 2)(r - 3)$;

8) $f(r) = \sin(\pi r)$;

4) $f(r) = (r - 1)(2 - r)(r - 3)$;

9) $f(r) = \cos r$;

5) $f(r) = (r - 1)^2(r - 2)$;

10) $f(r) = |\sin(\pi r)|$.

Часть II

Динамические системы

ГЛАВА V

Дифференциальное уравнение Ньютона $x'' = F$

§ 5.1. Закон сохранения энергии

В этой главе мы систематически проанализируем поведение *одномерных динамических систем*, в которых единственная материальная точка массы m движется по координатной прямой Ox под действием известной силы F . *Закон движения*, т. е. зависимость $x = x(t)$ координаты точки от времени $t \in \mathbb{R}$, подчиняется *основному закону динамики*,

$$mx'' = F,$$

впервые сформулированному Исааком Ньютоном в его фундаментальнейшем труде «Начала» — лат. «Principia»: «Philosophiae naturalis principia mathematica», т. е. «*Математические начала натуральной философии*» (1686–1687), и называющемся посему *вторым законом Ньютона*.

Натуральная философия или *натурфилософия* — философия природы: умозрительное истолкование природы, рассматриваемой в ее целостности; от лат. nature — «природа»; *философия*, греч. φιλοσοφία, — буквально «любовь к мудрости», от φιλέω (филео) — «люблю» и σοφία (сófия) — «мудрость». В древности натурфилософия фактически сливалась с естествознанием и в древнегреческой философии обычно называлась *физикой* — греч. φυσικς (физис) — «природа». Галилей и Ньютон заложили основы научной философии естествознания (о чем говорит и название главного труда Ньютона). Фридрих Энгельс (1820–1895) «ввел» вместо натурфилософии «диалектику природы» (1873–1883).

С точки зрения математики второй закон Ньютона есть одна из основных *аксиом* классической механики (в физике принята его *векторная* формулировка: $m\vec{x}'' = \vec{F}$). *Основная задача механики*, как ее понимал Ньютон, — отыскание по данной силе F закона движения $x = x(t)$, или решение выписанного дифференциального уравнения.

В этом и нескольких следующих параграфах мы ограничимся случаем *консервативных динамических систем*, или *консервативной силы* $F = F(x)$, зависящей только от координаты материальной точки. Иными словами, рассмотрим движение материальной точки в заданном *силовом поле* $F(x)$ на оси Ox . Хотя функция $F(x)$ и *скалярная*, ее знак

задает направление действия силы, так что силовое поле на прямой может считаться, как в § 4.3, *векторным полем*, но только на прямой.

Характерное свойство консервативных динамических систем — выполнение закона сохранения энергии (чему эти системы и обязаны своим названием; см. вводный параграф 1.2). Мы рассмотрим два подхода к *доказательству* закона сохранения энергии — формальный («лейбницев») подход и содержательный подход, опирающийся на понятие *работы* силы (точнее, *против силы*) при перемещениях материальной точки.

5.1.1. Энергия как первый интеграл одномерной системы Ньютона. Как мы видели ранее, консервативное (автономное) дифференциальное уравнение Ньютона

$$mx'' = F(x) \quad (1)$$

эквивалентно *системе дифференциальных уравнений Ньютона* — автономной системе

$$\begin{cases} x' = v, \\ mv' = F(x) \end{cases} \quad (2)$$

двух дифференциальных уравнений первого порядка. Система (2) интерпретируется на *фазовой плоскости* Oxv : отвечающие решениям $x(t)$ уравнения (1) или решениям $(x(t); v(t))$ системы (2) *фазовые траектории* $t \mapsto M_t(x(t); v(t))$ во всех своих точках касаются векторов отвечающего системе (1) векторного поля $(x; v) \mapsto \mathbb{V}(x, v) = (v; \frac{1}{m}F(x))$ (рис. 75; см. § 4.3) и составляют *фазовый портрет* рассматриваемой динамической системы.

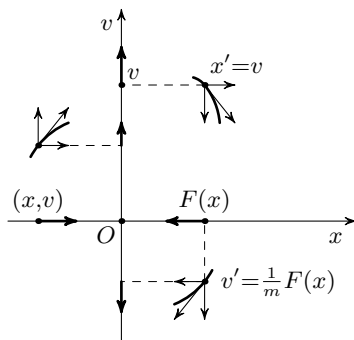


Рис. 75

Заметим, что система Ньютона (2) в рассматриваемом случае консервативного силового поля является системой с *разделяющимися пе-*

ременными x и v . Согласно рассмотрению из § 4.4 она имеет *первый интеграл*, для отыскания которого записывается ассоциированное с системой дифференциальное уравнение на фазовой плоскости Oxv :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = v, \\ mv' = F(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ m \frac{dv}{dt} = F(x) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m \frac{dv}{dx} = \frac{F(x)}{v} \Leftrightarrow mv dv = F(x) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \int F(x) dx = -U(x) + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = C = \text{const}, \end{aligned}$$

где через $U(x)$ обозначена первообразная функции $f(x) = -F(x)$. Эта первообразная, *определенная с точностью до аддитивной константы*, называется (по определению) *потенциальной энергией* в рассматриваемой динамической системе или *потенциалом* рассматриваемого *силового поля*. Произвольный выбор константы отвечает произволу в выборе *уровня отсчета потенциальной энергии*.

Проделанные вычисления (с учетом рассмотрений из предыдущей главы) позволяют сформулировать *закон сохранения энергии* как *математическое предложение*: при движении фазовой точки $M(x; v)$ вдоль любой фазовой траектории $t \mapsto M_t(x(t); v(t))$ полная механическая энергия системы $\frac{1}{2}mv^2 + U(x)$ сохраняется. Совсем точную формулировку этой теоремы вместе с альтернативным ее доказательством мы приведем ниже, предварительно рассмотрев иной подход к понятию потенциальной энергии консервативной системы и несколько конкретных примеров.

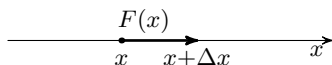
5.1.2. Работа переменной силы. Считается по определению, что при перемещении точки под действием *постоянной силы* $\overline{F}$ на вектор $\overline{\Delta r}$ совершается *работа*, равная $\Delta A = \overline{F} \cdot \overline{\Delta r}$ — скалярному произведению векторов силы и перемещения. В соответствии с этим, если материальная точка в заданном переменном одномерном силовом поле $F(x)$ перемещается из положения x в близкое положение $x + \Delta x$, то *против силы* F совершается *работа*, равная

$$\Delta A \approx -F(x) \cdot \Delta x$$

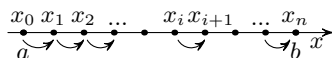
(заметьте, что если $F(x) > 0$ и $\Delta x > 0$, то $\Delta A < 0$ — работа против силы отрицательна, т. е. «сила сама совершает работу»). Любое перемещение точки из положения $x = a$ в положение $x = b$ можно представить как последовательность n *малых* перемещений $\delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ (рис. 76), так что работа против силы F на всем перемещении от a до b прибли-

женно записывается как сумма

$$A = A|_a^b = \sum_i \Delta A_i \approx - \sum_i F(x_i) \Delta x_i.$$



$$\Delta A \approx -F(x) \Delta x$$



$$\Delta A_0 + \Delta A_1 + \dots + \Delta A_i + \dots$$

Рис. 76

Мы полагаем, что в пределе при $n \rightarrow \infty$ это равенство должно быть точным, а поскольку справа записана в точности *интегральная сумма* на отрезке от a до b для функции $F(x)$, которую далее будем считать *непрерывной*, получается следующее *определение работы против переменной силы $F(x)$ при перемещении материальной точки из положения a в положение b* :

$$A|_a^b = - \int_a^b F(x) dx.$$

Понятие *механической работы* ввели в 1826 г. французские ученые Понселе и Кориолис.

Жан Виктор Понселе (1788–1867) — математик и механик, основоположник *проективной геометрии* (в ней изучаются свойства фигур, сохраняющиеся при проектировании; трактаты по проективной и аналитической геометрии Понселе написал в 1812–1814 гг. в Саратове, где находился в русском плену — как лейтенант наполеоновской армии). Был профессором университета Сорбонны, президентом парижской Академии наук, а также бригадным генералом. Занимался *теорией механизмов и приближениями функций* — в этих областях его «преемником» стал знаменитый П. Л. Чебышёв.

Гюстав Гаспар Кориолис (1792–1843) — физик и механик, прежде всего известен по названию сил инерции, возникающих из-за вращательного движения. Был директором основанной при Наполеоне знаменитой парижской Политехнической школы (университета для подготовки офицеров и инженеров). Именно Кориолис ввел множитель $1/2$ в выражение для «*живой силы*» — кинетической энергии $T = \frac{1}{2}mv^2$ (см. далее).

5.1.3. Потенциальная энергия одномерного силового поля.

В физике принято считать, что при совершении работы против какой-то силы (силового поля) мы прибавляем (в алгебраическом смысле, т. е. с учетом знака) рассматриваемой материальной точке некую *потенци-*

*альную энергию*¹: если эта энергия в положениях a и b равна соответственно $U(a)$ и $U(b)$, то приращение потенциальной энергии равно

$$\Delta U = U(b) - U(a) = A|_a^b = - \int_a^b F(x) dx.$$

Эта формула в действительности является еще одним *определением потенциальной энергии силового поля* $F(x)$. Ее можно записать в других обозначениях:

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(z) dz \Leftrightarrow U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^x F(z) dz,$$

откуда по формуле для производной интеграла по верхнему пределу интегрирования следует, что

$$U'(x) = -F(x). \quad (3)$$

Иными словами, *потенциальная энергия*² данного (непрерывного) силового поля $F(x)$, как и раньше (в п. 5.1.1), есть первообразная $U(x)$ функции $-F(x)$. Следовательно, потенциальная энергия определена не однозначно, а с точностью до аддитивной постоянной. Эта произвольная постоянная выбирается «из соображений удобства» и отвечает как бы «уровню отсчета энергии». Обычно полагают, что в какой-то «удобной точке» x_0 значение $U(x_0)$ равно 0.

Пример 1. *Поле тяжести*, или *однородное (постоянное) силовое поле*, задается постоянной функцией $F(x) \equiv f = \text{const}$; для поля тяжести на прямой — оси Oz , направленной вертикально вверх, так, что начало координат O совпадает с «уровнем моря», $F(z) = -mg$ (g — ускорение свободного падения). Из уравнения (3) в этом случае получаем

$$U'(z) = -F(z) = -(-mg) = mg \Leftrightarrow U(z) = mgz + C;$$

выбирая константу $C = 0$, что соответствует выбору «уровня моря» в качестве уровня отсчета энергии, получаем потенциальную функцию $U(z) = mgz$ (график потенциальной энергии $U = U(z)$ см. на рис. 77). □

Пример 2. *Поле линейной притягивающей* (т. е. упругой или псевдоупругой; см. п. 3.2.5) *силы* задается линейной функцией $F(x) = -kx$; $k > 0$ — коэффициент упругости. Из уравнения (3) находим

$$U'(x) = -F(x) = -(-kx) = kx \Leftrightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C;$$

¹ Энергия — от греч. ενεργεια, — «деятельность» (ενεργεω, — «действую»); *потенциальная* — от лат. potentia — «сила».

² Иногда употребляют название *потенциальная функция* или просто *потенциал*.

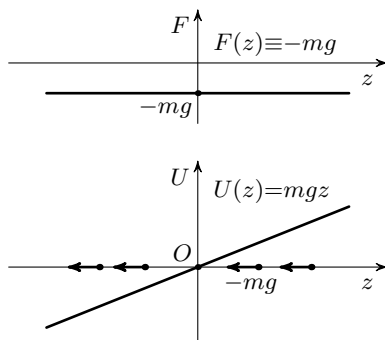


Рис. 77

выбирая константу $C = 0$, что соответствует нулю потенциальной энергии в положении равновесия, получаем стандартную так называемую «потенциальную яму» $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (рис. 78). $\square$

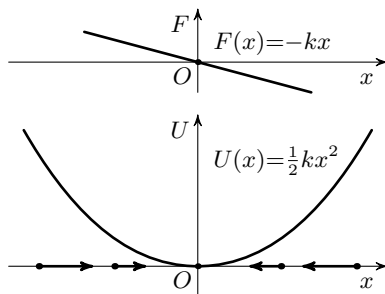


Рис. 78

Пример 3. Поле линейной отталкивающей силы тоже задается линейной функцией, но с положительным угловым коэффициентом: $F(x) = kx$, $k > 0$, и

$$U'(x) = -F(x) = -kx \Leftrightarrow U(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + C.$$

Опять выбираем константу $C = 0$ и получаем, так сказать, «потенциальную горку» $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (рис. 79). $\square$

Пример 4. Ньютоново поле тяготения на полупрямой $r > 0$ моделирует притяжение материальной точки массы m неподвижной закрепленной в положении $r = 0$ точечной массой M . Согласно закону всемирного тяготения

$$F(r) = -\frac{\gamma M m}{r^2},$$

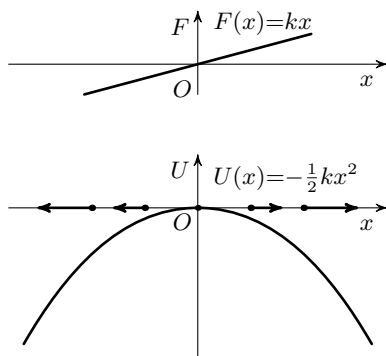


Рис. 79

где γ — гравитационная¹ постоянная, а знак «минус» отвечает за то, что действующая на материальную точку сила притяжения направлена к неподвижной массе. Из уравнения (3) находим

$$U'(r) = -F(r) = -\left(-\frac{\gamma Mm}{r^2}\right) = \frac{\gamma Mm}{r^2} \Leftrightarrow U(r) = -\frac{\gamma Mm}{r} + C \quad (r > 0).$$

Возьмем константу $C = 0$, что соответствует нулю потенциальной энергии на бесконечности. Тогда график потенциальной энергии $U(r) = -\frac{\gamma Mm}{r}$, $r > 0$, представляет собой «бесконечную потенциальную яму» (рис. 80). $\square$

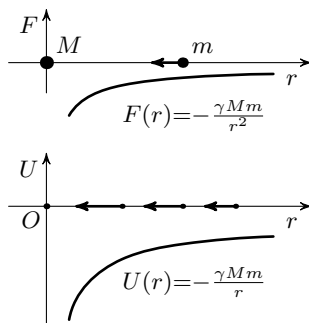


Рис. 80

Первоначально вместо потенциальной энергии или потенциала $U(x)$ рассматривалась так называемая «силовая функция» $V = -U$ — она была введена Лагранжем (1773 г.). Потенциал «ньютоновой» силы тяготения рассмотрел в 1782 г. Пьер Симон Лаплас (1749–1827) — французский математик, физик и астроном, сын крестьянина, член Французской академии «Сорока бессмертных» (как и опекавший

¹Гравитация, от лат. gravitas — «тяжесть»: синоним слова *тяготение* («всемирное»).

его Д'Аламбер; см. комментарии к п. 5.4.3). Именно Лаплас завершил начавшееся с Ньютона создание «небесной механики», объясняющей движения небесных тел; он же являлся одним из создателей математической теории вероятностей. Представления о потенциальной энергии силы тяжести как о произведении массы на высоту подъема были, конечно, еще у Галилея.

5.1.4. Закон сохранения полной механической энергии. Теперь мы объясним, почему потенциальную энергию вообще называют *энергией*.

Теорема 1 (основная теорема классической¹ механики: закон сохранения полной механической энергии). *Если материальная точка движется по прямой Ox в силовом поле $F(x)$ в соответствии со вторым законом Ньютона (1) $mx'' = F(x)$, то полная механическая энергия системы (точки)*

$$E = E(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

сохраняется, т. е. если $x(t)$ — закон движения точки, а $v(t) = x'(t)$ — соответствующая скорость движения, то

$$E(t) = E(x(t), v(t)) \equiv \text{const}$$

(не зависит от времени t).

Заметим, что сама по себе *полная механическая энергия* $E = E(x, v)$ зависит от *состояния* $(x; v)$ системы, т. е. является *функцией* на фазовой плоскости. Сам закон сохранения энергии обычно записывают формулой

$$T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = h, \quad (4)$$

где h — константа (*уровень энергии*), а слагаемое $T = \frac{1}{2}mv^2$ называется *кинетической энергией*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим производную функции

$$E(t) = E(x(t), v(t)) = \frac{1}{2}mv^2(t) + U(x(t))$$

по правилу дифференцирования сложной функции:

$$E'(t) = \frac{1}{2}m \cdot 2v(t) \cdot v'(t) + U'(x(t)) \cdot x'(t) = v(t) \cdot mv'(t) + U'(x(t)) \cdot v(t),$$

откуда с учетом соотношений (1), $mv' = mx'' = F(x)$, и (3), $U'(x) = -F(x)$, получаем, что

$$E'(t) = v(t)(mv'(t) + U'(x(t))) = v(t)(mx''(t) - F(x(t))) \equiv 0 \Rightarrow E(t) \equiv \text{const},$$

что и требовалось установить. $\square$

¹В отличие от так называемой *квантовой* механики.

²Так сказать, *двигательной*, от греч. κίνητικός — относящийся к движению.

Впервые закон сохранения энергии как *принцип живой силы*, состоящий в неизменности суммы произведений масс на квадраты скоростей (она и называлась *живой силой*) и произведений масс на высоты падения выдвинул Гюйгенс (1669 г.) — в случае падения тел (здесь идея восходит еще к Галилею) и при упругом соударении. Лейбниц (1686 г.) попытался распространить этот принцип на *все* случаи и области (например, он полагал, что при неупругом соударении потерянная живая сила «продолжает существовать» в колебаниях молекул), даже на «душевную жизнь»! (Любопытно, что в XX в. знаменитый швейцарский психолог Карл Густав Юнг (1875–1961) в работе «*Психическая энергия*» (1928 г.) рассматривал «закон неразрушимости» этой энергии, полагая его вполне аналогичным закону сохранения энергии в физике.)

В подобном приведенному нами виде закон сохранения энергии встречался в работе «Аналитическая механика» (1788 г.) Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813; подробнее о нем см. далее). Однако первым этот закон записал как равенство $T + U = h$, доказал математически строго для механических систем и распространил на тепловые, электростатические и прочие явления в 26-летнем возрасте немецкий естествоиспытатель Герман Людвиг Фердинанд фон Гельмгольц (1821–1894) — медик, физик, математик, физиолог, психолог и изобретатель. В той же самой работе «О сохранении силы» (1847 г.) Гельмгольц из универсальности закона сохранения энергии сделал вывод о «немыслимости» *perpetuum mobile*, т. е. «вечного двигателя». Среди самых популярных изобретений Гельмгольца можно назвать упоминающийся в § 5.3 простейший колебательный контур: индуктивность плюс конденсатор.

5.1.5. История дифференциальных уравнений. Теперь самое время сделать небольшое историческое и методологическое отступление. С задачами, фактически относящимися к дифференциальным уравнениям, математики встретились еще на рубеже XVI–XVII вв. Первым обращением к таким задачам, по-видимому, было привлечение Джоном Непером кинематических представлений для составления таблиц логарифмов. В современных обозначениях задача, при анализе которой впервые появились логарифмы, может быть записана как система уравнений на плоскости Oxy :

$$x'(t) = v, \quad y'(t) = -\frac{vy}{r}$$

($x(0) = 0, y(0) = r = 10^7$), сводящаяся к одному уравнению

$$y'_x(x) = -\frac{y}{r} \quad \text{или} \quad x'_y(y) = -\frac{r}{y}.$$

Из последнего уравнения и «выскакивают» неперовы логарифмы, которые в действительности записываются формулой

$$x = 10^7 \log_{1/e} \left(\frac{y}{10^7} \right).$$

Это самый первый пример «*почти дифференциального уравнения*», именно *почти*, так как Непер не записывает дифференциальных уравнений: до Ньютона и Лейбница в математике отсутствовало не только понятие *производной* (по Ньютону *флюксии*), но и сколько-нибудь общее понятие *функции*, поэтому вместо дифференциальных уравне-

ний использовали *кинематические описания*. Именно к примеру Непера свелись некоторые задачи, которые впоследствии рассматривали Декарт, Торричелли и Валлис.

Евангелиста Торричелли (1608–1647) — итальянский математик и физик. С 1641 г. был помощником уже слепого в то время Галилео Галилея, а после смерти Галилея (1642 г.) стал его преемником в должности «философа и первого математика великого герцога Тосканского» и профессора математики во Флорентийском университете. Известен не только как продолжатель Галилея, но и как изобретатель ртутного барометра, автор многих передовых для того времени работ, по сути почти предвосхищавших анализ Ньютона—Лейбница. Среди них — решение задачи о *логарифмической спирали*, плоском аналоге *локсодромии*¹ — кривой на земной поверхности, пересекающей все меридианы под одним углом, на важность которой указан еще в 1537 г. португальский математик и отчасти мореплаватель Саласьензе Педру Нуньес (1502–1578). Эта задача сводится, на современном языке, к дифференциальному уравнению такого же вида, какой имеет уравнение Непера, — отсюда и название кривой, которая в *полярных координатах* задается уравнением $r = e^\varphi$ или $\varphi = \ln r$.

Той же задачей занимался и Джон Валлис (правильно Уоллис: Wallis) (1616–1703) — английский математик, священник, член-основатель Лондонского королевского общества, *Royal Society* (оно образовалось в 1662 г. из «кружка» ученых-естественников и математиков, одним из наиболее выдающихся членов которого был Валлис). Обладал феноменальной памятью и математической интуицией. Занимался политикой, а свои способности в криптографии использовал, помогая сначала диктатору Оливеру Кромвелю, а потом и королю Вильгельму III Оранскому (Карлу II), в расшифровке различных донесений. Первым построил график функции $y = \sin x$, ввел знак ∞ для математической «бесконечности».

Рене Декарт (1596–1650) пришел к уравнению, аналогичному уравнению Непера, решая одну из задач, которые предложил его приятель, французский офицер, затем юрист, математик Флоримон де Бон (1601–1652), известный, кроме этих своих задач, тем, что он первый сформулировал утверждение о задании прямой уравнением $ax + by = c$.

Относящиеся, по сути, к дифференциальным уравнениям задачи возникали, в механике (Галилей, свободное падение), в оптике (Декарт — расчет линз исходя из закона преломления) и, как было сказано, в аналитической геометрии (определение кривых по свойствам их касательных — опять-таки Декарт, а также Торричелли, Валлис, Роберваль).

Жиль Роберваль (настоящая фамилия Персонье) (1602–1675) — французский математик и отчасти астроном (изобрел несколько астрономических приборов), академик. Участвовал в знаменитом в свое время споре между Рене Декартом и Пьером Ферма по вопросу о методе отыскания касательных, в результате которого математики пришли к окончательному пониманию касательной как предельного положения секущей. Рассматривал различные задачи о касательных.

Однако не будет преувеличением сказать, вслед за В. И. Арнольдом: «Дифференциальные уравнения изобретены Ньютоном (1642–1727)».

Здесь и ниже цитируется книга: Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984; с.5–6 («Предисловие к третьему изданию»).

¹От греч. *λοξος* — «косой», «кривой», «наклонный» и *δρομος* — «бег».

К «обыкновенным» относятся все дифференциальные уравнения, в которых нужно по информации о производных y' , y'' , y''' , ... найти саму функцию $y = y(x)$ [речь может идти о системе функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_m(x)$]. Такие уравнения называются *обыкновенными*, с тем чтобы отличать их от так называемых *уравнений в частных производных*, из которых отыскиваются функции не одной, а большего числа переменных. К последним относится, например, *волновое уравнение* $u''_{tt} = v^2 \cdot u''_{xx}$ (оно же *уравнение колебаний струны*; здесь $u = u(x, t)$ — функция координаты x и времени t), рассмотренное в следующей гл. VI.

Владимир Игоревич Арнольд (1937–2010) — московский математик, профессор МГУ, академик РАН, сын известного математика и педагога, специалиста в области теории чисел и методики математики, первого в СССР доктора педагогических наук Игоря Владимировича Арнольда (1900–1948; последняя его книга — «Показатели степени и логарифмы в курсе элементарной алгебры», 1948 г.). В. И. Арнольд хорошо известен мировой математической общественности благодаря своим выдающимся работам в самых разнообразных областях математики. Вместе со своим учителем академиком А. Н. Колмогоровым (1903–1987) за работы по проблеме устойчивости динамических систем удостоен Ленинской премии (1965 г.). Автор одного из новейших разделов математики — *теории катастроф*. Талантливый педагог, автор многих книг, в том числе учебников по дифференциальным уравнениям и их приложениям.

В предисловии к третьему изданию учебника по обыкновенным дифференциальным уравнениям Арнольд пишет:

«Ньютон считал это свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы, смысл которой в современных терминах можно вольно передать так: „законы природы выражаются дифференциальными уравнениями“.

Основным аналитическим достижением Ньютона было разложение всевозможных функций в степенные ряды (смысл второй, длинной анаграммы Ньютона в том, что для решения любого уравнения нужно подставить в уравнение ряд и приравнять члены одинаковой степени). Особенное значение имела здесь открытая им формула бинома Ньютона (разумеется, не только с целыми показателями, для которых формулу знал, например, Виет (1540–1603), но и, что особенно важно, с дробными и отрицательными показателями). Ньютон разложил в „ряд Тейлора“ все основные элементарные функции (рациональные, радикалы, тригонометрические, экспоненту и логарифм). Это, вместе с составленной им таблицей первообразных (которая перешла в почти неизменном виде в современные учебники анализа), позволяло ему, по его словам, сравнивать площади любых фигур „за половину четверти часа“».

Анаграмма — это «буквосочетание», получающееся перестановкой букв, составляющих какое-то слово или словосочетание, фразу (от греч. $\alpha\nu\alpha\ldots$ (ана...) — «пере...» и $\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$ (грамма) — буква).

В предисловии к другому своему учебнику, «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений», В. И. Арнольд пишет: «Основное открытие Ньютона, то, которое он считал нужным засекретить и опубликовал лишь в ви-

де анаграммы, состоит в следующем: „*Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*“. В переводе на современный математический язык, это означает: „Полезно решать дифференциальные уравнения“.

Обе анаграммы были предназначены Лейбницу и помещены в двух письмах 1676 г., переданных Лейбницу через тогдашнего секретаря Royal Society (Лондонского королевского общества, т. е. Британской академии наук) Генриха Ольденбурга (1615–1677). По незашифрованной части писем Ньютона адресат понял суть записанного в анаграммах (между тем, скажем, первая из них имела довольно устрашающий вид: `bacsdcae13eff7i3l9n4o4qrr4s9tl2vx`), что видно из ответных писем Лейбница. Ученые того времени нередко прибегали к форме анаграмм — например, их неоднократно использовал Гюйгенс».

Впервые в явном виде дифференциальные уравнения появились у Ньютона в трактате «Метод флюксий и бесконечных рядов», написанном около 1671 г., но изданном только в 1736 г. Однако еще до этого определенный подход к дифференциальным уравнениям и их решению был обозначен в мемуаре «Трактат о квадратуре кривых» (1665–1666, опубликован в 1704 г.) и в сочинении «Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов» (1669 г., издано в 1711 г.). Ньютон не торопился с публикациями, что объясняется его высокими требованиями к ясности и строгости изложения своих методов. Это, однако, не могло помешать ознакомлению с работами Ньютона других математиков, в частности Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1716) и Джеймса Грегори, посредством переписки с Ньютоном через секретаря Лондонского королевского общества Генриха Ольденбурга, а также и непосредственного знакомства с рукописями Ньютона, которые в полном или сокращенном виде хранились у Джона Коллина (1625–1683), книготорговца, бывшего военного моряка, математика-энтузиаста, содействовавшего своим знакомым и друзьям-математикам при издании книг и с помощью обширной переписки державшего их в курсе всех новейших достижений.

Джеймс Грегори (1638–1675) — шотландский математик и астроном, член Royal Society, профессор в Эдинбурге. Интересовался (используя посредничество Джона Коллина) работами Ньютона, вслед за которым ввел широкое употребление бесконечных рядов. Пытался доказать *трансцендентность* чисел e и π . Ранняя смерть помешала ему далее следовать за Ньютоном по его блистательному пути.

Отметим, что именно Джон Коллин был инициатором издания наиболее значительного сочинения непосредственного предшественника, учителя и друга Ньютона Исаака Барроу (1630–1677) — «Лекций по математике» (1669–1670 и 1674 гг.). О «Лекциях» Барроу (и, в частности, о содержащейся в них знаменитой *формуле Ньютона—Лейбница*) см. ниже, а также в гл. IV.

Так, ознакомление с некоторыми результатами Ньютона вызвало у Лейбница желание получить более обстоятельные сведения о них, особенно об употреблении Ньютоном бесконечных рядов (отметим, что всюду здесь идет речь — пока что — о *степенных рядах* с целыми неот-

рицательными или даже отрицательными показателями). При содействии Ольденбурга Лейбниц в 1676 г. получил от Ньютона два содержательных письма по этим вопросам — те самые, в которых главные ньютоновы методы зашифрованы в виде упоминавшихся выше анаграмм. Несмотря на это Лейбниц, который в то время уже сам был близок к взглядам и методам Ньютона, из писем и из хранившейся у Коллина рукописи Ньютона «Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов» получил достаточно полное представление о его исследованиях, что из ответа Лейбница на второе письмо понял и сам Ньютон.

Тем не менее, ни эта ситуация, ни опубликование Лейбницем в 1684–1686 гг. своих фундаментальнейших сочинений, в которых излагаются основные принципы математического анализа, причем весьма доступным и по сути алгоритмизированным способом — имеются в виду мемуар «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных» (1684 г.) и статья¹ «О глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» (1686 г.), — ничто не подвигнуло Ньютона раскрыть свое учение о флюксиях и флюентах. Единственное сразу опубликованное и беспрецедентное как по содержанию, так и по значению для развития науки — физики, математики, философии естествознания — сочинение Исаака Ньютона — это его упомянутые выше знаменитые «Математические начала натуральной философии».

В действительности непосредственным инициатором создания этого фундаментального труда был Эдмунд Галлей (1656–1742) — английский астроном и математик, член Royal Society, директор Гринвичской лаборатории. Галлей встречался и беседовал с русским императором Петром I (1672–1725) о науках, которые следовало бы ввести для изучения в России (между прочим, Петр в 1711–1716 гг. неоднократно обсуждал вопросы распространения образования и наук, а также основание академии наук в России с Лейбницем; в 1700 г. Лейбниц организовал Берлинскую академию наук, а в 1725 г., через несколько месяцев после смерти Петра, была открыта Санкт-Петербургская академия). Рассчитывал траектории комет; в 1705 г. предсказал появление в 1758 г. кометы, которую потом назвали его именем. В математике занимался, в частности, теорией вероятностей, статистикой, степенными рядами. В 1684 г., последовав совету Роберта Гука (1635–1703) — английского ученого-энциклопедиста, секретаря и куратора экспериментов Royal Society, первооткрывателя закона всемирного тяготения, — Галлей обратился к Ньютону с вопросом, не вытекает ли эллиптичность орбит планет (первый закон Кеплера) из обратной пропорциональности притяжения квадрату расстояния. Получив утвердительный ответ (а Ньютон доказал это еще в 1680 г., получив перед этим письмо Гука с правильной формулировкой закона всемирного тяготения), вслед за тем Галлей добился публичного сообщения Ньютоном Королевскому обществу о его крупных достижениях в области небесной механики, а потом взял на себя расходы и заботы по изданию

¹ Оба сочинения опубликованы в выходившем с 1682 г. в Лейпциге журнале «Acta Eruditorum» («Труды ученых»).

«Principia» (сын богатого лондонского пивовара, в то время Галлей уже не был богатым; однако он все же сообщил через некоторое время Ньютону, что выручка от продажи «Начал» покрыла расходы по изданию).

В этом труде Ньютон не употребляет своего метода флюксий, однако описывает и решает несколько важнейших дифференциальных уравнений — частных случаев своего второго закона, впервые там и сформулированного. Среди рассмотренных в «Principia» примеров — движение под действием *упругой силы*, т. е. *гармонические колебания*, происходящие в соответствии с дифференциальным уравнением $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ (см. § 5.3); движение при наличии трения; наконец, движение в соответствии с *законом всемирного тяготения*.

Относительно последнего укажем, что, вопреки распространенному мнению, Исаак Ньютон отнюдь *не открывал* этот закон, а лишь доказал (еще в 1680 г., но опубликовал в «Principia») эллиптичность орбит в поле притяжения по закону обратных квадратов. В «Началах» сам Ньютон отмечает, что этот закон независимо друг от друга нашли Врен, Гук и Галлей. Это обстоятельство, конечно, не умаляет значения его всеобъемлющего труда.

«Начала» состояли из трех книг: первая содержала определения основных понятий (*массы, плотности, импульса, силы, пространства, времени*) и формулировки законов механики (динамики), вторая была посвящена движению тел в сопротивляющейся среде, а третья — «системе мира», т. е. применению закона всемирного тяготения к Солнечной системе, в том числе и к чрезвычайно важной *теории возмущений* орбит планет, их спутников, а также комет. Именно теория возмущений планетных орбит привела в XIX–XX вв. к открытию «на кончике пера» *Нептуна* и *Плутона*. С другой стороны, теория возмущений применяется для расчетов электронных орбит в атомной физике.

После издания «Начал» Ньютон получает довольно широкую известность в своем отечестве. В 1689 г. он был избран в парламент, где заседал вплоть до его роспуска в 1690 г. (однако же не произнес ни одной речи). Кроме политики, в то время Ньютон занимается богословием¹, алхимией, теорией Луны. В 1696 г. он стал хранителем, а потом и главным смотрителем Лондонского монетного двора, которым оставался до своей смерти, проявив на этой должности выдающиеся административные способности. В 1701–1702 гг. Ньютон снова был избран членом парламента, с 1703 г. вплоть до кончины являлся президентом Королевского общества, в 1705 г. ему был пожалован дворянский титул.

¹ Среди теологических сочинений Ньютона имеются, так же как у Непера и Штифеля, работы о *пророчествах Даниила* и об *откровении Иоанна Богослова*, т. е. об «Апокалипсисе» (толкованием «Апокалипсиса» занимался даже Леонард Эйлер!).

Исаак Ньютон родился в семье мелкого фермера, умершего еще до рождения сына, в деревне Вулсторп, примерно в 75 км к северу от знаменитого своим университетом Кембриджа, 25 декабря (по старому стилю) 1642 г.

Скончался же он, окруженный почетом, после нескольких лет тяжелой болезни, во сне, между часом и двумя ночи 31 марта 1727 г., в возрасте 85 лет. Сэр Исаак Ньютон похоронен в Вестминстерском аббатстве в Лондоне; краткая эпитафия на надгробном памятнике заканчивается словами: «Пусть радуются смертные, что существовало такое украшение рода человеческого».

В 1709–1712 гг. Ньютон отдал много сил подготовке второго, исправленного и дополненного, вышедшего в 1713 г. издания «Математических начал», которое редактировал его ученик и друг Котес.

Роджер Котес (Cotes — иначе Котс или Коутс) — проживший недолгую жизнь (1682–1716) английский математик, член Royal Society, профессор Кембриджа. Предложил формулы для разложения выражений $a^n \pm b^n$, названные его именем; формулу для вычисления интеграла, переоткрытую Симпсоном и названную именем последнего. Установил позднее предложенное Эйлером соотношение между тригонометрическими функциями и *комплексной экспонентой*: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (см. § 5.7). Занимался теорией ошибок. Собрание трудов Котеса было опубликовано только посмертно (в 1722 г.).

В этом издании Ньютон признавал, что Г. В. Лейбниц в 1677 г. обладал методами анализа, подобными его собственным, причем совершенно не касался вопроса о том, насколько Лейбниц был обязан своими достижениями известными ему сведениями о работах Ньютона. Однако, будучи спровоцированным приверженцами своими и Лейбница на спор о приоритете в открытии методов нового анализа, в третьем издании «Начал» Ньютон снял все упоминания о Лейбнице.

Лейбниц же после ознакомления с «Началами» Ньютона по изложению их содержания в журнале «Acta Eruditorum», а именно в 1689 г., доказал полученные Ньютоном результаты собственными методами, что и опубликовал в том же журнале. Кроме алгоритмичности методы «исчислений» Лейбница отличаются применением весьма удобной символики — рассмотренного нами в гл. IV «*символизма Лейбница*». И алгоритмичность, и удобные обозначения сделали анализ Лейбница доступным и широко применимым. В. И. Арнольд в цитиrowавшемся выше предисловии пишет следующее.

«С „Principia“ Ньютона начинается современная физика. Завершение формирования анализа как самостоятельной научной дисциплины связано с именем Лейбница < ... >. Огромной заслугой Лейбница является также широкая пропаганда анализа < ... > и доведение его алгоритмов до полного автоматизма: он изобрел таким образом способ научить пользоваться анализом (и преподавать его) людей, вовсе его не понимающих, — тенденция, с которой приходится бороться еще и сегодня».

Как и Ньютон, Лейбниц при решении дифференциальных уравнений использовал степенные ряды, однако он, вместе со своими ближайшими последователями братьями Якобом и Иоганном Бернулли, через некоторое время пришел к задаче отыскания решений уравнений, выражающихся через *элементарные функции* или, по меньшей мере, через так называемые *квадратуры* (см. п. 4.3.2). Здесь Лейбниц и братья Бернулли следовали «Лекциям по математике» Барроу, в которых сведение к квадратурам применялось к *обратной задаче на касательные*.

Исаак Барроу (1630–1677) — английский математик, священник, теолог (по его собственному признанию, он как раз и стал изучать математику, чтобы «...быть хорошим теологом...»); учитель и друг Ньютона, сам учился математике у Валлиса (см. выше). В своих «Лекциях по математике» (ок. 1670 г.) Барроу, в частности, вывел основную формулу, связывающую дифференциальное и интегральное исчисления, известную сейчас как *формула Ньютона—Лейбница*. Он же открыл и формулу линзы, изучаемую в школе (но также не названную его именем).

Отец Барроу состоял на службе у Карла I, верность которому и привела к его гибели при Кромвеле, самому же Барроу пришлось попутешествовать в это время по Европе и Востоку. После реставрации он вернулся в Лондон, принял священнический сан и стал профессором в Кембридже как раз тогда, когда там начал учиться Ньютон. В возрасте 39 лет он передал свою кафедру 27-летнему Ньютону, которому помогал сохранять профессорство без принятия сана, будучи сам придворным священником Карла II (но не бросая занятий математикой до конца жизни). Как проповедник, Исаак Барроу обрел славу, в Англии не уступающую его известности как математика.

Мы имели возможность применить «метод Ньютона» к линейному дифференциальному уравнению $y' = y$ (§5.1). Следует отметить, что, в отличие от нас, Ньютон не очень интересовался вопросом о сходимости рассматриваемых степенных рядов и, тем более, допустимостью их почленного дифференцирования. Поэтому его не заботил и вопрос о *существовании* решений тех или иных дифференциальных уравнений. Первым, кто указал на важность этих вопросов, был О. Л. Коши, результаты которого уточнил норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802–1929).

Отысканием решений в квадратурах вслед за Лейбницем и братьями Бернулли в XVIII в. занимались Д'Аламбер, Эйлер, Д. Бернулли, Лагранж и др. Оказалось, что многие важные дифференциальные уравнения не поддавались такому решению, — тогда и применяли ряды, причем не только степенные, но и *тригонометрические ряды*, т. е. представления функций (периодических или заданных на отрезке) в виде

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mkx + b_m \sin mkx).$$

Математики пришли к этим рядам, решая задачу о колебаниях струны, которую впервые поставил Брук Тейлор (в 1713 г.). Д'Аламбер

(в 1747 г.) привел эту задачу к дифференциальному уравнению совсем нового типа — к рассмотренному в гл. VI *уравнению в частных производных* $u''_{tt} = v^2 u''_{xx}$, из которого следовало найти *функцию двух переменных* $u = u(x, t)$. Даниил Бернулли (в 1753 г.) дал решение этого уравнения (называемого в общем случае *волновым уравнением*) для закрепленной струны в виде тригонометрического ряда (по обоим переменным x и t). Ими занялся и Эйлер, который, однако, утверждал, что представление функций с помощью таких рядов не всегда возможно. Но еще в 1757 г. Клеро в своей работе по небесной механике пришел к выводу о разложимости в тригонометрический ряд любой функции. Этот результат остался незамеченным, хотя в своих работах 1777 г. к тому же выводу пришел, в конечном счете, и Эйлер.

Алексис Клод Клеро (1713–1765) — французский математик, механик и астроном, сын профессора математики Жана Батиста Клеро, второй ребенок в семье (а всего их было 21). Отец обучал его азбуке по чертежам Евклида; в 10 лет юный Клеро читал учебники по анализу; в 12 лет написал трактат по алгебраическим кривым степени 4 (кривые степени 3 изучил Ньютон), опубликованный в «Известиях Берлинской академии»; в 18 лет по специальному разрешению короля был избран в парижскую Академию наук. Пропагандировал и комментировал во Франции работы Ньютона. Участвовал в Лапландской экспедиции по измерению дуги меридиана для уточнения фигуры Земли и написал фундаментальный труд «Теория фигуры Земли» (1747 г.). Рассчитал траекторию кометы Галлея, предсказав ее появление в 1759 г. с ошибкой в несколько дней. За трактат «Теория движения Луны» (1752 г.) был премирован Петербургской академией наук и избран ее почетным членом. Ряды Фурье появились у Клеро в связи с изучением возмущений Солнца.

По сути, *теория* тригонометрических рядов была развита только в XIX в. в работах Фурье (1807–1821 гг.), связанных опять-таки с *уравнением в частных производных*, а именно, с *уравнением теплопроводности*. Для распространения тепла в однородном стержне Фурье получил уравнение $u'_t = a^2 u''_{xx}$, где $u = u(x, t)$ — температура в точке x в момент времени t , а константа a^2 называется *коэффициентом температуропроводности*.

Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик, один из основоположников *математической физики*. Сын бедного портного, осиротел в 8 лет; учился в военной школе, руководимой монахами-бенедиктинцами, и в 12 лет сочинял пользовавшиеся успехом проповеди для парижских священников (!); с 16 лет преподавал в своей школе, а с 1789 г. читал блестящие лекции в Политехнической школе. Сподвижник Наполеона в Египетской кампании (1798 г.), потом префект в Гренобле, где он и написал бессмертную «Математическую теорию тепла». После 1816 г. Фурье был «непременным секретарем» секции математики Французской академии.

Невзирая на критику «чистых» математиков Фурье утверждал универсальность своего метода представления функций с помощью тригонометрических рядов для «более-менее» произвольных функций и дал

(вслед за Клеро) формулу для вычисления коэффициентов a_n, b_n . Его именем и называются тригонометрические ряды. Доказательством сходимости *рядов Фурье* занимался Коши, но только Дирихле (в 1829 г.) и Н. И. Лобачевский (в 1834 г.), которые владели уже современным *понятием функции*, установили разумные условия сходимости этих рядов.

Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859) — немецкий математик, сын почтмейстера, ученик и друг Гаусса, его преемник в Гёттингенском университете. Более всего известны *функция Дирихле* и *принцип Дирихле* (о кроликах). Однако Дирихле внес крупный вклад как в теорию чисел (он якобы спал с гауссовыми «Арифметическими исследованиями» под подушкой!), так и в основания математического анализа (математики под «принципом Дирихле» подразумевают весьма важную теорему о так называемых *гармонических функциях*, играющих существенную роль как в математике, так и в математической физике). В Гёттингене славился как великолепный лектор.

Возникшие из задач решения дифференциальных уравнений *степенные ряды* Ньютона и *тригонометрические ряды* Фурье к середине XIX в. прочно легли в фундамент «арсенала» математических средств и методов, применяемых, наряду с *комплексными числами* (см. § 5.7), буквально всюду.

§ 5.2. Фазовые портреты и интегрирование уравнения Ньютона

Выполнение для одномерной консервативной динамической системы закона сохранения полной механической энергии позволяет не только построить фазовый портрет системы и *качественно* описать поведение фазовых траекторий и соответствующие движения материальной точки, но и проинтегрировать, т. е. *решить в квадратурах*, дифференциальное уравнение Ньютона

$$mx'' = F(x). \quad (1)$$

5.2.1. Фазовые траектории и линии уровня энергии на фазовой плоскости. Так как полная механическая энергия одномерной динамической системы, равная $E = T + U = E(x, v)$, есть *функция на фазовой плоскости* Oxv , закон сохранения энергии допускает совсем простую геометрическую интерпретацию на «плоскости состояний» $(x; v)$. Именно, при каждом значении $h \in \mathbb{R}$ на фазовой плоскости Oxv можно рассмотреть *множество* (чаще говорят «*линию*», пренебрегая тем, что множество не обязано оказаться именно *линией*) *уровня энергии*

$$\Gamma_h = \left\{ (x; v) \mid U(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = h \right\}. \quad (2)$$

Следствие 1 (из закона сохранения энергии). *Любая фазовая траектория $(x(t); v(t))$ (подразумевается, что функции $x(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Ньютона (1): $x'(t) = v(t)$, $mv'(t) = F(x(t))$) целиком лежит на одной из линий уровня энергии Γ_h , где значение h определяется начальными условиями.*

Доказательство, разумеется, очевидно. $\square$

Поскольку в уравнение линии уровня Γ_h переменная v входит только как v^2 , каждая линия уровня симметрична относительно оси Ox . Это можно увидеть также, разрешив уравнение $\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = h$ относительно v :

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = h \Leftrightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{h - U(x)}. \quad (3)$$

Область определения пары функций, заданных формулой (3), выделяется неравенством

$$h - U(x) \geq 0 \Leftrightarrow U(x) \leq h.$$

Если, например, график $U = U(x)$ потенциальной энергии выглядит как некая «потенциальная яма» с минимумом в точке x_0 , $U_{\min} = U(x_0) = h_0$ (рис. 81, сверху), то имеет смысл рассматривать только уровни энергии $h \geq h_0$. При $h = h_0$ «линия уровня энергии» есть единственная точка $(x_0; 0)$ фазовой плоскости, соответствующая *положению равновесия* или *стационарному решению* $x(t) \equiv x_0$ дифференциального уравнения Ньютона (1) (заметим, что силовое поле в этой точке обращается в нуль: $F(x_0) = -U'(x_0) = -0 = 0$). Если же $h > h_0$, то неравенство $U(x) \leq h$ выполняется на некотором отрезке $[x_1, x_2]$, а линия уровня Γ_h получается как «плюс-минус» корень из «перевернутой дуги сегмента» $x_1 x_0 x_2$ (см. рис. 81). Получится некоторый овал¹ Γ_h , симметричный относительно оси Ox , причем *гладкий*: поскольку в точках $x = x_{1,2}$ функция $h - U(x)$ обращается в нуль, а в их окрестностях она является примерно линейной ($h - U(x) \approx a_{1,2}(x - x_{1,2})$, где $a_1 > 0$, $a_2 < 0$), оба графика функций из соотношения (3) $v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{h - U(x)}$ имеют в точках $x_{1,2}$ вертикальные касательные, и гладкость (в данном случае — существование касательных) не нарушается.

Из сформулированного следствия (или попросту из закона сохранения энергии) вытекает, что если в данном случае начальная энергия $E_0 = E(x_0, v_0)$ равна рассматриваемому значению h , то вся фазовая траектория будет проходить «вдоль овала» Γ_h . По какому закону $x = x(t)$ будет двигаться материальная точка — это мы обсудим позже. Но уже заведомо можно утверждать, что координата точки будет ме-

¹ «Яйцевидная» кривая, контур яйца, на фр. *ovale* — от лат. *ovum*: «яйцо».

няться в пределах $x_1 \leq x \leq x_2$, причем если фазовая точка $(x; v)$ находится в верхней полуплоскости $v > 0$, то $x' = v > 0$ и координата x обязательно увеличивается — фазовая точка $(x(t); v(t))$ движется по верхнему «полуовалу» *вправо*; соответственно, по нижнему полуовалу (когда $v < 0$) фазовая точка будет двигаться *влево* — в указанных на рис. 81 стрелками направлениях. Для общего случая этими замечаниями мы пока и ограничимся, обратившись к конкретным потенциалам U .

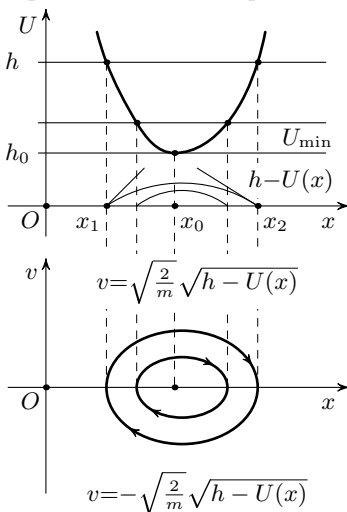


Рис. 81

В случае однородного поля тяготения $F(z) \equiv -mg$ (§ 5.1, пример 1) дифференциальное уравнение Ньютона $mz'' = -mg$, как мы знаем из п. 1.2.2, легко решается:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0, \quad v(t) = -gt + v_0, \quad (4)$$

где z_0 и v_0 — начальные высота и скорость. Из уравнений фазовых траекторий (4) можно выразить z как квадратичную функцию от v . Однако проще воспользоваться законом сохранения энергии: поскольку $U(z) = mgz$, линии уровня энергии Γ_h задаются уравнениями

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = h \Leftrightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{h - mgz},$$

или, иначе, $z = \frac{h}{mg} - \frac{1}{2g}v^2$. Таким образом, получается семейство «горизонтальных» парабол (рис. 82), каждая из которых в соответствии с уравнениями (4) будет отдельной фазовой траекторией. Вершины парабол соответствуют наибольшей высоте «свободного падения» (или,

если хотите, «свободного полета»): $z_{\max} = \frac{h}{mg}$. Точки $(0; v_0)$ пересечения траекторий с положительной полуосью Ov отвечают «подбрасыванию» материальной точки с нулевой высоты с начальной (исключительно кинетической) энергией $h = \frac{1}{2}mv_0^2$; подставив это значение h в формулу для $z_{\max}$, найдем максимальную высоту подброшенной точки: $z_{\max} = \frac{1}{2g}v_0^2$.

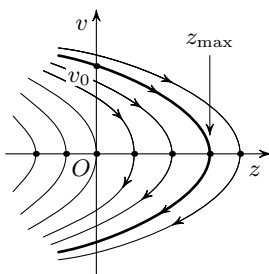


Рис. 82

Фазовые «картинки» (их называют *фазовыми портретами*) для линейной, притягивающей и отталкивающей сил — с потенциалами из § 5.1 (примеры 2–3) разберите самостоятельно (к ним мы обратимся в следующих параграфах). Сейчас же рассмотрим пример ньютонова силового поля притяжения на луче $r > 0$ (§ 5.1, пример 4).

5.2.2. Скорость убегания и вторая космическая скорость.

Как мы видели, для гравитационной силы $F(r) = -\frac{\gamma Mm}{r^2}$ ($r > 0$) потенциальная энергия $U(r) = -\frac{\gamma Mm}{r}$ задает «бесконечную потенциальную яму», поэтому линии уровня энергии Γ_h можно рассматривать при любом значении уровня энергии h . Они задаются уравнениями

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma Mm}{r} = h \Leftrightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{h + \frac{\gamma Mm}{r}}. \quad (5)$$

В случае $h \geq 0$ функции (5) определены при всех $r > 0$ — их графики имеют общую вертикальную асимптоту $r = 0$ (при $r \rightarrow 0+$ $v(r) \rightarrow \pm\infty$) и по асимптоте $v = \pm v_\infty = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{h}$ при $r \rightarrow +\infty$. Соответствующие линии уровня энергии Γ_h распадаются на две отдельные ветви, верхняя из которых (когда $v > 0$) отвечает *уходу притягиваемой точки на бесконечность с предельной скоростью v_∞* (заметьте, что для этого нужно, чтобы точка имела *достаточно большую энергию*), а симметричная нижняя ветвь — *падению точки на неподвижный притягивающий центр* (рис. 83).

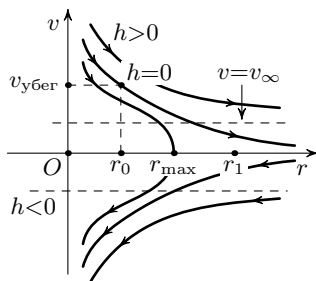


Рис. 83

Если же уровень энергии $h = -|h| < 0$, то функции (5)

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{h + \frac{\gamma M m}{r}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma M m}{r} - |h|}$$

определены только в случае, когда $\frac{\gamma M m}{r} \geq |h|$, т.е. на промежутке $0 < r \leq r_{\max} = \frac{\gamma M m}{|h|}$, так что энергии хватает только на удаление до расстояния $r_{\max}$. Симметричные графики дают *одну* гладкую линию уровня энергий, верхняя часть которой (для $v > 0$) соответствует удалению точки от центра притяжения, а нижняя — ее последующему неизбежному падению на центр.

Зададимся таким вопросом: *какой кинетической энергией надо обладать притягиваемой точке, для того чтобы из положения $r = r_0$ достичь, хотя бы и с нулевой скоростью, положения $r = r_1$?* Чтобы ответить на него, достаточно полную начальную энергию приравнять потенциальной энергии в конечном положении $r = r_1$:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma M m}{r_0} = -\frac{\gamma M m}{r_1} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

(покажите соответствующую фазовую траекторию на картинке!). Если устремить в этой формуле конечное расстояние r_1 к $+\infty$, то мы получим так называемую *скорость убегания* с расстояния r_0 на бесконечность:

$$v_{\text{убег}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}. \quad (6)$$

Разумеется, именно скорость убегания получится, если в уравнение (5) «убегающей» со скоростью $v_{\infty} = 0$ фазовой траектории (она отвечает «минимальной энергии убегания» $h = 0$) подставить значение $r = r_0$ (см. рис. 83).

Скорость убегания от Земли (с поверхности Земли) называется *второй космической скоростью*. Ее можно найти, подставив в формулу (6)

значение гравитационной постоянной γ , массу Земли M и ее радиус r_0 . Проще, однако, заметить, что $\frac{\gamma M}{r_0^2} = g$ (сила притяжения на поверхности Земли есть $mg = \frac{\gamma M m}{r_0^2}$), поэтому *вторая космическая скорость равна*

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0^2} r_0} = \sqrt{2gr_0} \approx 11 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Следует отметить, что на плоскости или в пространстве потенциал силового поля определяется аналогично — например, в случае плоскости Oxy потенциальная энергия $U = U(x, y)$ поля $F = F(x, y) = (A(x, y); B(x, y))$ определяется равенствами $U'_x = -A$, $U'_y = -B$. Однако в этих случаях отнюдь не любое силовое поле имеет потенциал. Математическую теорию потенциала впервые развил английский математик и физик Джордж Грин (1793–1841) в работе «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (1828 г.). В этой работе был введен термин *потенциальная функция*. Здесь же было опубликовано и аналогичное формуле Барроу—Ньютона—Лейбница соотношение между интегралами по объемной фигуре и по ее «границе», т. е. поверхности; в том же 1828 г. это соотношение открыл и один из основателей русской математической школы Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862).

Позднее (около 1840 г.) и независимо от Грина теорией потенциала занимался «король математиков», немецкий астроном, физик и геодезист Карл Фридрих Гаусс (1777–1855). Он ввел термин *потенциал*, определяя его как раз как «возможную работу» (в электростатике — по перемещению заряда). Гаусс также вывел упомянутое соотношение между интегралами (в электростатике), поэтому это соотношение вполне можно было бы назвать *формулой Грина—Остроградского—Гаусса* (формула Грина на самом деле имеет большую общность). Гаусс, как и Лаплас, занимался и небесной механикой (он определил орбиту малой планеты, т. е. астероида, Цереры), и теорией вероятностей. В 1818 г. Гаусс пришел к идее о возможности *неевклидовой геометрии*, но не развил и не опубликовал ее (между прочим, Гаусс был инициатором избрания Н. И. Лобачевского в Гёттингенское научное общество в 1841 г.).

Об алгебраических и аналитических достижениях Гаусса см. далее, в комментариях к § 5.7.

5.2.3. Схема интегрирования уравнения Ньютона. Вернемся к общему случаю — к основной задаче механики для консервативной динамической системы, т. е. отысканию законов движения $x = x(t)$ материальной точки массы m в заданном на оси Ox силовом поле $F(x) = -U'(x)$ с потенциалом $U(x)$.

Как указывалось в п. 5.2.1, построение и исследование линий уровня энергии помогает правильно построить фазовый портрет системы. Однако *семейство линий уровня* и фазовый портрет чаще всего не одно и то же: на одном множестве уровня энергии Γ_h может лежать несколько¹ (и даже *бесконечно много*!) фазовых траекторий. Для *точного* отыскания фазовых траекторий $(x; v)(t) = (x(t); v(t))$ нужно имен-

¹ Скажем, в последнем примере в п. 5.2.2 часть множеств уровня распадалась на *пары* фазовых траекторий.

но найти закон движения, т. е. зависимость $x = x(t)$ (из нее дифференцированием отыскивается зависимость скорости от времени: $v = v(t) = x'(t)$).

Определение решений $x = x(t)$ дифференциального уравнения (1) (с помощью квадратур, т. е. интегрирований) тоже возможно благодаря закону сохранения энергии, ибо соответствующие ему соотношения (3) суть не что иное, как *автономные дифференциальные уравнения первого порядка*. Иначе говоря, поскольку $v = x'$, мы получаем

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = h \Leftrightarrow (x')^2 = \frac{2}{m}(h - U(x)).$$

Обозначая константу $\sqrt{\frac{2}{m}}$ через α и разрешив последнее дифференциальное уравнение относительно производной, мы получаем при каждом значении уровня энергии $h \geq \min U^1$ два автономных дифференциальных уравнения первого порядка в стандартном виде $x' = v(x)$: в случае $x' = v \geq 0$ (на верхней полуплоскости фазовой плоскости)

$$x' = \alpha \sqrt{h - U(x)}, \quad (7a)$$

а в случае $x' = v \leq 0$ (на нижней полуплоскости) —

$$x' = -\alpha \sqrt{h - U(x)}. \quad (7b)$$

Оба уравнения (7) рассматриваются только при тех значениях x , которые принадлежат множеству $M_h = \{x \mid U(x) \leq h\}$. Будем считать, что потенциальная функция $U(x)$ может иметь только *изолированные* точки строгого экстремума (т. е. такие, в некоторой окрестности каждой из которых *нет других точек экстремума*²), причем такова, что при любом значении $h \geq \min U$ множество M_h может являться:

(А) отрезком $[x_1, x_2]$ с концами в нулях функции $Z(x) = h - U(x)$, между которыми $Z(x) > 0$, т. е. $U(x) < h$ («потенциальная ямка»: рис. 84);

(В) полупрямой $[x_1, +\infty)$ или $(-\infty, x_2]$ («положительной» или «отрицательной»), ограниченной нулем функции $Z(x) = h - U(x)$ (соответственно $U(x_1) = h$ или $U(x_2) = h$) и такой, что в остальных точках полупрямой $Z(x) > 0$, т. е. $U(x) < h$ («скат»: на рис. 85 — «скат вправо»);

(С) всей числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, во всех точках которой $Z(x) > 0$, т. е. $U(x) < h$ (этот случай осуществляется, если потенциальная энергия $U(x)$ ограничена сверху);

¹Через $\min U$ здесь и далее обозначается *наименьшее значение* потенциальной энергии рассматриваемой динамической системы; если потенциал $U(x)$ не ограничен снизу (как, например, ньютонов потенциал тяготения $U(r) = -\frac{\gamma Mm}{r}$), то считается, что $\min U = -\infty$: в этом случае уровень энергии h может быть *любым*.

²Пример функции с *неизолированной* точкой экстремума $x_0 = 0$: $f(x) = 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

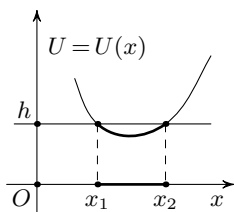


Рис. 84

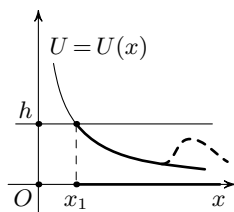


Рис. 85

(D) (изолированным нулем x_0 функции $Z(x) = h - U(x)$, отвечающим точке строгого локального минимума потенциальной энергии — функции $U(x)$ («дно» потенциальной ямы: рис. 86);

(E) «компонентой» типа (A), (B) или (C), однако содержащей в себе изолированные нули функции $Z(x)$, отвечающие точкам строгого локального максимума потенциальной энергии («потенциальным горкам»: рис. 87), — или же объединением компонент перечисленных типов. Всем приведенным условиям удовлетворяют, например, произвольные полиномиальные и дробно-рациональные функции, отличные от констант, тригонометрические полиномы и многие другие аналитические функции.

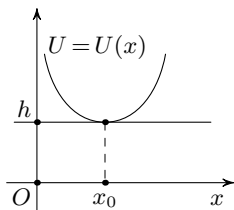


Рис. 86

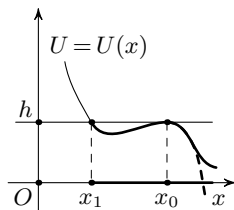


Рис. 87

Согласно изложенному в § 4.1 для отыскания решений дифференциальных уравнений (7) нужно перейти к «симметричным» уравнениям

$$t'_x = \pm \frac{1}{\alpha \sqrt{h - U(x)}} \Leftrightarrow t = \pm \int \frac{dx}{\alpha \sqrt{h - U(x)}}, \quad (8)$$

но рассматривая их только на интервалах знакопостоянства, т. е. при таких значениях x , что $Z(x) = h - U(x) > 0$, — на подмножестве $M_h^0 = \{x \mid U(x) < h\}$ «внутренних точек» множества M_h . Иначе тот же результат получается с помощью формализма Лейбница (§ 4.2):

$$\frac{dx}{dt} = \pm \alpha \sqrt{h - U(x)} \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{\alpha \sqrt{h - U(x)}} \Leftrightarrow t = \pm \int \frac{dx}{\alpha \sqrt{h - U(x)}}.$$

Как мы условились выше, множество M_h может состоять из компонент пяти указанных типов (A)–(E). Для компонент типов (A), (B),

(С) все, в принципе, ясно: дифференциальные уравнения (8) рассматриваются соответственно на интервале (x_1, x_2) , на открытой полупрямой $(x_1, +\infty)$ или $(-\infty, x_2)$, на всей числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (в каждом из этих случаев применима *теорема 1* из § 4.1).

Для изолированного нуля x_0 функции $Z(x) = h - U(x)$, отвечающего точке минимума потенциальной энергии $U(x)$ (для компоненты типа (D)), симметричные уравнения (8) рассматривать *бессмысленно*. Однако можно попросту заметить, что в точке x_0 силовое поле $F(x)$ обращается в нуль: $F(x_0) = -U'(x_0) = 0$, поэтому такая точка соответствует *стационарному решению* $x(t) \equiv x_0$ дифференциального уравнения Ньютона (и $x''(t) \equiv 0$, и $F(x(t)) = F(x_0) = 0$, поэтому при любом t выполняется равенство $mx''(t) = F(x(t))$). Иными словами, точка x_0 является *положением равновесия* системы, которому соответствует фазовая траектория, состоящая из единственной особой точки: $(x; v)(t) \equiv (x_0; 0)$.

В случае компонент типа (Е) симметричные уравнения (8) нельзя рассматривать в нулях x_0 функции $Z(x) = h - U(x)$, отвечающих точкам максимума потенциальной энергии $U(x)$. На интервалах, получающихся после исключения из такой компоненты всех нулей функции $Z(x)$, применима та же *теорема 1* из § 4.1. Кроме того, сразу отметим, что, поскольку в точках x_0 максимума потенциальной энергии $U(x)$ силовое поле $F(x)$ также обращается в нуль, они, равно как и точки минимума, соответствуют стационарным решениям $x(t) \equiv x_0$ уравнения Ньютона (5) и являются положениями равновесия системы, каждому из которых отвечает фазовая траектория, состоящая только из одной особой точки: $(x; v)(t) \equiv (x_0; 0)$. В данном случае (Е) эта особая точка входит в соответствующую *компоненту* линии уровня энергии Γ_h , поэтому существенно выяснить, какие еще фазовые траектории лежат на Γ_h и как они «ведут себя» по отношению к указанной особой точке.

Вообще, *любой* критической точке потенциала $U(x)$, т. е. нулю производной $U'(x) = -F(x)$, независимо от того, будет ли это точка минимума, максимума или перегиба, отвечает стационарное решение (и особая точка, и отдельная фазовая траектория). Значения потенциальной энергии в критических точках далее будем называть *критическими уровнями энергии*. Каково может быть поведение траекторий при уровнях энергии h , близких к критическим, равно как и траекторий, лежащих на линиях *критических* уровней энергии, отвечающих точкам максимума потенциала, мы рассмотрим на примерах конкретных динамических систем (в § 5.3, 5.6).

Возвращаясь к общей схеме решения — переходу от уравнений (7) к симметричным уравнениям (8), — заметим, что следующий переход состоит в отыскании *неопределенного интеграла*, т. е. первообразной

в правой части соотношения (8):

$$t = \pm \int \frac{dx}{\alpha \sqrt{h - U(x)}} \Leftrightarrow t = \pm G(x, h) + C,$$

где $G(x, h)$ — зависящая от значения начальной энергии h первообразная подынтегральной функции, C — произвольная постоянная, также определяемая из начальных условий $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = x'(t_0) = v_0$. Далее из получающихся уравнений $t = \pm G(x, h) + C$ нужно *выразить* координату x через время t . В итоге будет найден¹ *общий закон движения*, т. е. *общее решение* дифференциального уравнения Ньютона

$$x = x(t) = x(t; h, C),$$

включающее две константы, определяемые начальными условиями.

Однако заметим, что в о б щ е м с л у ч а е отнюдь *не доказано*, что найденная указанным способом (методом) зависимость $x(t) = x(t; h, C)$ действительно удовлетворяет уравнению Ньютона (1). Теорема 1 из § 4.1 позволяет сделать вывод только о том, что *на интервалах оси Ox , где правая часть уравнений (7) не обращается в нуль*, функции $x(t)$, обратные к решениям $t = t(x)$ симметричных дифференциальных уравнений (8), удовлетворяют уравнениям (7).

5.2.4. Обоснование схемы интегрирования уравнения Ньютона. Почему для как бы найденной функции $x(t) = x(t; h, C)$ выполняется дифференциальное уравнение Ньютона (1)? Доказательство этого требует дополнительных рассматриваний: нужно показать, что функция $v(t) = x'(t)$ *имеет производную*, причем

$$mv'(t) = mx''(t) = F(x(t)) = -U'(x(t)).$$

Воспользуемся тем, что согласно уравнениям (7) функции $x(t)$ и $v(t) = x'(t)$ связаны еще и *законом сохранения энергии* — соотношением

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{h - U(x)}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + U(x(t)) = h = \text{const.} \quad (9)$$

Теорема 1. При любом значении $h > \min U$ и на любом интервале J оси Ox , на котором $U(x) < h$, определенная выше функция $x = x(t)$, $t \in I$, удовлетворяет дифференциальному уравнению Ньютона (1):

$$\forall t \in I \quad \exists x''(t) = \frac{1}{m}F(x(t)) = -\frac{1}{m}U'(x(t)).$$

Доказательство. Согласно условию теоремы на интервале I функция $v(t) = x'(t)$ *не обращается в нуль* и дифференцируе-

¹ *Может быть найден!*

ма, ибо $x(t) \in J$, откуда следует¹, что $h - U(x(t)) > 0$, а $v(t) = x'(t) = \pm \alpha \sqrt{h - U(x(t))}$. Поэтому функция, записанная в левой части соотношения (9), т. е. $\varphi(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + U(x(t))$, дифференцируема на интервале I , а поскольку для рассматриваемых функций $x(t)$ и $v(t) = x'(t)$ она постоянна на I , мы заключаем, что $\varphi'(t) \equiv 0$ на I , т. е.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}mv^2(t) + U(x(t)) \right)' &= \frac{1}{2}m \cdot 2v(t) \cdot v'(t) + U'(x(t)) \cdot x'(t) = \\ &= mv(t)x''(t) + v(t)U'(x(t)) = v(t)(mx''(t) + U'(x(t))) \equiv 0. \end{aligned}$$

Но на интервале I скорость $v(t)$ не равна 0, поэтому $\forall t \in I \quad x''(t) + U'(x(t)) \equiv 0$ и, следовательно, $mx''(t) = -U'(x(t))$.

Таким образом, доказано как *существование* второй производной, найденной «по схеме» функции $x(t)$, так и то, что $x(t)$ (в условиях теоремы) является решением дифференциального уравнения Ньютона (1).

А как быть, если все-таки скорость в какой-то точке фазовой траектории обращается в нуль? В этом случае представленная схема решения уравнения (1) непосредственно неприменима — соответствующие решения приходится «склеивать» («компоновать», составлять) из рассмотренных в теореме 1. Как это делать в общем случае — показано в заданиях к этой главе. При склейке решений приходится использовать некоторые *общие свойства* решений уравнения Ньютона, важные и сами по себе, — ими мы и закончим теоретический анализ произвольного консервативного уравнения Ньютона (1).

5.2.5. О разрешимости и свойствах решений уравнения Ньютона. Вообще-то, описанная выше схема «идеальная»; при ее реализации могут встретиться значительные трудности. Возможно, первообразная $G(x, h)$ функции $\frac{1}{\alpha \sqrt{h - U(x)}}$ не выражается через элементарные функции (такой пример мы приведем в следующем параграфе), а если и выражается, то может оказаться, что уравнения $t = \pm G(x, h) + C$ неразрешимы относительно x с помощью элементарных функций. Затруднения могут возникнуть и при отыскании потенциальной функции для данного силового поля. Однако во всех подобных случаях можно прибегнуть к вычислительным методам, к численному отысканию интегралов и численному решению алгебраических (в широком смысле) уравнений, так что задача все равно считается разрешимой (через квадратуры и решение уравнений).

¹Здесь мы используем *теорему о дифференцируемости композиции* (см. учебники алгебры и начал анализа).

Учитывая указанные в о з м о ж н ы е трудности, понятно, сколь существенно научиться *качественному анализу дифференциальных уравнений*, в данном случае уравнения Ньютона (1): выяснить характерные свойства его решений и фазовых траекторий. Из *совсем общих* свойств решений уравнения (1) отметим следующие два.

Теорема 2 (об инвариантности решений относительно сдвига во времени). *Если функция $x = \varphi(t)$ является решением дифференциального уравнения $mx'' = F(x)$, то при любом значении $a \in \mathbb{R}$ функция*

$$x_a = \psi(t) \stackrel{\text{des}}{=} \varphi(t + a)$$

*также является решением этого уравнения*¹.

Доказательство. Это утверждение проверяется непосредственной подстановкой функции x_a в дифференциальное уравнение (1) и справедливо для *любого автономного уравнения* (как первого, так и второго и, вообще, *любого* порядка); в данном случае

$$\begin{aligned} x'_a &= \psi'(t) = \varphi'(t + a) \cdot (t + a)' = \varphi'(t + a) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x''_a = \psi''(t) = \varphi''(t + a) \cdot (t + a)' = \varphi''(t + a) = \\ &= \frac{1}{m} F(\varphi(t + a)) = \frac{1}{m} F(\psi(t)) = \frac{1}{m} F(x_a), \end{aligned}$$

что и требовалось установить. $\square$

Теорема 3 (об обратимости решений во времени). *Если функция $x = \varphi(t)$ является решением дифференциального уравнения $mx'' = F(x)$, то функция $x_- \psi(t) \stackrel{\text{des}}{=} \varphi(-t)$ также является решением этого уравнения*².

Доказательство. Это утверждение для уравнений первого порядка, вообще говоря, несправедливо; для уравнения $x' = V(x)$ выполняется равенство

$$\psi'(t) = \varphi'(-t) \cdot (-t)' = -\varphi'(-t) = -V(\varphi(-t)) = -V(\psi(t)),$$

а нужно было бы получить $V(\psi(t))$, так что, если только функция $V(x)$ не есть тождественный нуль, решения³ такого уравнения необратимы во времени. В случае *уравнения Ньютона* данное утверждение справедливо, благодаря тому что в него входят *только* x и x'' (и не входят t и x' : уравнение *автономное*, а силовое поле *консервативное*). Доказывается

¹График функции $x_a = \psi(t)$ получается из графика функции $x = \varphi(t)$ параллельным переносом вдоль оси времени Ot на вектор $(-a; 0)$, поэтому и говорится о *сдвиге во времени*.

²А теперь график функции $x_- = \psi(t)$ получается из графика функции $x = \varphi(t)$ симметрией относительно оси Ox : время как бы «течет» в *обратном направлении*.

³*Нестационарные решения.*

это, как и ранее, подстановкой функции x_- в уравнение (1):

$$\begin{aligned} x'_- &= \psi'(t) = -\varphi'(-t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x''_- = \psi''(t) = -\varphi''(-t) \cdot (-t)' = -(-\varphi''(-t)) = \varphi''(-t) = \\ &= \frac{1}{m}F(\varphi(-t)) = \frac{1}{m}F(\psi(t)) = \frac{1}{m}F(x_-), \end{aligned}$$

что и требовалось установить. $\square$

Следствие 2 (о «двойной инвариантности» решений). *Если функция $x = \varphi(t)$ является решением дифференциального уравнения $mx'' = F(x)$, то при любом значении $a \in \mathbb{R}$ функция $x_\star = \chi(t) \stackrel{\text{des}}{=} \varphi(a - t)$ также является решением этого уравнения.*

Доказательство. По теореме 2 функция $\psi(t) = \varphi_a(t) = \varphi(a + t)$ является решением уравнения $mx'' = F(x)$, поэтому по теореме 3 и функция $\chi(t) = \psi_-(t) = \psi(-t) = \varphi(a - t) = x_\star$ является решением этого уравнения. $\square$

5.2.6. Наглядная интерпретация одномерных консервативных систем. Некоторое представление о характере движений материальной точки по прямой — оси Ox — в заданном силовом поле $x \mapsto \mapsto F(x) = -U'(x)$ можно получить, если переписать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + mgu(x) = h = \text{const}, \quad u(x) = \frac{1}{mg}U(x).$$

В этом виде закон сохранения энергии в данной системе выглядит *в точности так же*, как в системе «шарик в желобе» из п. 1.2.4, если «рельеф» желоба задается указанной функцией $z = u(x)$. Скажем, движение абстрактной материальной точки в «потенциальной яме» типа А соответствует безостановочному периодическому катанию шарика в яме желоба между своими крайними наивысшими положениями на одной высоте h над граничными положениями $x_{1,2}$ проекции шарика на ось Ox (над которой «помещен желоб»).

Однако заметим, что законы движения абстрактной материальной точки и изменения проекции $x = x(t)$ (точечного) шарика на ось Ox отнюдь не совпадают, ибо $x'(t)$ — вовсе не скорость $v(t)$ движения шарика, направленная по касательной к «профилю желоба» — графику $z = u(x)$. Обдумайте это хорошенько — попытайтесь понять, почему x' и v для шарика в желобе не одно и то же. (В действительности v , т. е. модуль скорости, равен производной *пройденного шариком пути* s [т. е. длины пройденного участка графика, отсчитываемого от какой-нибудь его точки] по времени, и уравнение Ньютона записывается в этой «криволинейной» координате s . Более точное объяснение указанной разницы

увело бы нас слишком далеко от школьного курса анализа и данного курса.)

§ 5.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$

Гармонические колебания появились у нас во вводном §3.2 (в п.3.2.5) как изменения величины $x = x(t)$ в соответствии с уравнением вида

$$mx'' = -kx, \quad k > 0, \quad \text{или} \quad x'' = -\omega^2 x, \quad \omega > 0. \quad (1)$$

Там же было показано, что выписанное *дифференциальное уравнение гармонических колебаний* $mx = -kx$ возникает всякий раз, когда рассматриваются *малые колебания* материальной точки около ее положения равновесия: при замене «силы возвращения к положению равновесия» на ее *линейное приближение* $F = -kx$ получается

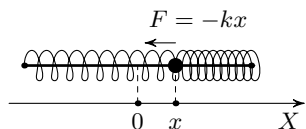


Рис. 88

как раз это уравнение. В примере «шарик на пружинке» из §3.2 такая сила была «силой упругости пружины» или *упругой силой* (рис. 88). В произвольной ситуации сила $F = -kx$ именуется псевдоупругой, а соответствующая динамическая система называется *гармо-*

*ническим осциллятором*¹. Начнем с еще одного конкретного примера гармонического осциллятора.

5.3.1. Математический маятник: малые колебания. *Математическим маятником* называется механическая система: точечный шарик массы m , подвешенный на невесомом стержне длины L ,

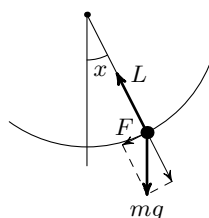


Рис. 89

который может отклоняться от своего положения равновесия *в одной плоскости* на произвольный угол x (рис. 89). Действующая на шарик сила направлена к положению равновесия по касательной к окружности возможных расположений шарика (она является *конфигурационным пространством* системы) и равна равнодействующей силы притяжения mg и силы реакции стержня. Таким образом, она равна тангенциальной составляющей силы тяжести:

$$F = -mg \sin x.$$

¹Это наименование происходит от греч. αρμονικός (армоникос) — «стройный», «слаженный», «соразмерный» и лат. oscillare — «колебаться» (отсюда же *осциллограф* — прибор для наблюдения и «записи» [на экране] колебаний).

Ускорение же равно второй производной от пути — длины проходимой дуги $s = Lx$. Таким образом, второй закон Ньютона $F = ma$ в данном случае записывается в виде

$$ms'' = mLx'' = -mg \sin x, \quad \text{или} \quad x'' = -\frac{g}{L} \sin x.$$

Здесь, как и выше, координата $x = x(t)$ есть функция времени t , и все производные берутся «по времени» — по переменной t .

Теперь заметим, что в случае *малых колебаний* математического маятника, т. е. при углах отклонения $x \approx 0$, функцию $\sin x$ можно заменить на ее линейное приближение: $\sin x \approx x$, — и из последнего уравнения мы получаем дифференциальное уравнение прежнего вида (1):

$$x'' = -\omega^2 x, \quad (2)$$

где на сей раз (для малых колебаний математического маятника) константа ω равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

5.3.2. Фазовый портрет гармонического осциллятора. В примере 2 из § 5.1 была найдена потенциальная функция $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ упругой или псевдоупругой силы $F(x) = -kx$. Закон сохранения энергии для гармонического осциллятора записывается в виде

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = h = \text{const} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2h}{k}}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{m}} \Rightarrow b : a = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega.$$

Следовательно, линии уровня энергии на фазовой плоскости Oxv суть *эллипсы с полуосями* a и b , получающимися из единичной окружности $x^2 + v^2 = 1$ растяжениями/сжатиями по оси Ox в a раз и по оси Ov в b раз. При этом отношение полуосей $b : a$ равно коэффициенту ω из уравнения гармонических колебаний (2). Фазовые траектории $t \mapsto M_t(x(t); v(t))$ лежат на этих эллипсах, и фазовый портрет осциллятора есть семейство «ориентированных» (или «проходимых» фазовой точкой M_t) по часовой стрелке сжатых вдоль оси скоростей (при $\omega < 1$, т. е. когда $k < m$ — в случае сравнительно «мягкой» пружины; рис. 90) или растянутой вдоль нее (при $\omega > 1$, т. е. при «жесткой» пружине; рис. 91).

Гармонические колебания имеют более простую и удобную для различных приложений геометрическую интерпретацию, чем движения фазовой точки по фазовым траекториям. Эта интерпретация связана

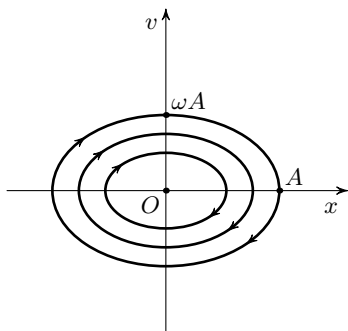


Рис. 90

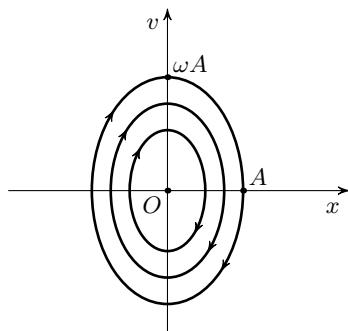


Рис. 91

с явным видом закона гармонических колебаний, т. е. решений уравнения (2).

5.3.3. Решения уравнения гармонических колебаний. Теорема единственности. То ли из кинематического смысла производной векторнозначных функций, как в п. 1.1.5, то ли непосредственно из формул для производных тригонометрических функций — так или иначе, мы знаем, что функции $x_1(t) = \cos \omega t$ и $x_1(t) = \sin \omega t$, а вместе с ними и любая их линейная комбинация

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (3)$$

являются решениями дифференциального уравнения гармонических колебаний (2). Спрашивается, *любое ли решение* уравнения (2) записывается в виде (3)? Оказывается, любое, и при доказательстве этого существенно помогает закон *сохранения энергии* для гармонического осциллятора. Предварительно рассмотрим ряд свойств решений уравнения (2), в том числе и *тригонометрических решений*, записанных в виде (3).

Во-первых, заметим, что уравнение (2), $x'' = -\omega^2 x$, является *линейным*, поэтому для него, как и для более общих линейных уравнений первого и второго порядков, рассмотренных в пп. 3.5.3–4, справедлив *принцип суперпозиции*.

Предложение 1. Если функции $z(t)$ и $z_1(t)$ суть решения дифференциального уравнения (2), то произвольная их линейная комбинация $Z(t) = \alpha z(t) + \beta z_1(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, также является решением этого линейного уравнения.

В частности, наряду с $z(t)$ и $z_1(t)$, решениями будут также и $\alpha z(t)$, и $z(t) \pm z_1(t)$.

Доказательство предложения сводится к простой проверке. □

Предложение 2. *Каковы бы ни были начальные условия*

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v(0) = v_0, \quad (4)$$

существует единственное тригонометрическое решение уравнения (2), имеющее вид (3).

Иными словами, утверждается, что константы a и b тригонометрического решения (3) однозначно определяются начальными условиями (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцировав решение (3),

$$x'(t) = v(t) = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t, \quad (2')$$

подставим в равенства (3), (2') значение $t = 0$ и учтем начальные условия (4):

$$x(0) = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a = x_0,$$

$$x'(0) = v(0) = -\omega a \cdot 0 + \omega b \cdot 1 = \omega b = v_0 \Rightarrow b = \frac{v_0}{\omega}.$$

Требуемое утверждение установлено. □

Теорема 1 (единственности решений дифференциального уравнения $x'' = -\omega^2 x$). *Любое решение $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения (2) представляется в виде (3):*

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

где постоянные a и b однозначно определяются начальными условиями $x(0)$ и $x'(0) = v(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = x(t)$ — произвольное решение уравнения (2). Определим числа x_0 , v_0 как значения этого решения и его производной при $t = 0$ и рассмотрим *тригонометрическое решение* $x = x_T(t)$ уравнения (2) с начальными условиями (4), отвечающими числам x_0 , v_0 , — согласно предложению (3) такое решение существует.

Теперь рассмотрим *разность* взятого произвольного решения $x(t)$ и выбранного тригонометрического решения $x_T(t)$. Из предложения 1 вытекает, что эта разность

$$z(t) = x(t) - x_T(t)$$

также является решением дифференциального уравнения (2), причем согласно выбору тригонометрического решения решение $z(t)$ удовлетворяет *нулевым начальным условиям*:

$$z(0) = x(0) - x_T(0) = x_0 - x_0 = 0, \quad z'(0) = x'(0) - x'_T(0) = v_0 - v_0 = 0.$$

Далее, закон сохранения энергии для динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями (1) или (2), означает, что

для любого решения $x = z(t)$ этих (эквивалентных) уравнений если $v(t) = z'(t)$, то

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const} \Rightarrow (z'(t))^2 + \omega^2 z^2(t) = q(t) \equiv \text{const} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

В данном случае $\text{const} \equiv q(t) = q(0) = 0$, ибо $z(0) = z'(0) = 0$. Но сумма двух неотрицательных величин тождественно равна нулю только тогда, когда каждая из этих величин есть тождественный нуль, поэтому для рассматриваемой разности $z(t)$ справедливо соотношение

$$\omega^2 z^2(t) \equiv 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0.$$

Итак, $z(t) = x(t) - x_T(t) \equiv 0$, значит, $x(t) \equiv x_T(t)$, т. е. произвольное решение $x(t)$ совпадает с указанным тригонометрическим решением, причем его коэффициенты a и b по предложению 2 однозначно определяются начальными условиями. $\square$

5.3.4. Следствия из теоремы единственности: свойства косинуса и синуса. Итак, мы доказали, что любое решение дифференциального уравнения (2) записывается в виде (3), т. е. гармонические колебания всегда происходят по закону (3), который будем называть стандартным видом гармонических колебаний. Из этого вида вытекает, что гармонические колебания периодичны с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Константа ω называется циклической частотой гармонических колебаний. Часто говорят об «обычной» частоте колебаний ν , равной числу колебаний в секунду и измеряемой в герцах: герц = секунда⁻¹ и

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Если циклическая частота колебаний $\omega = 1$, то решениями соответствующего дифференциального уравнения $x'' = -x$ будут функции

$$x(t) = a \cos t + b \sin t,$$

и только они, причем такое решение однозначно определяется начальными условиями: $(a; b) = (x(0); x'(0))$. Следовательно, основные тригонометрические функции косинус и синус суть единственные решения дифференциального уравнения

$$x'' = -x, \tag{5}$$

удовлетворяющие начальным условиям $(x(0); x'(0)) = (1; 0)$ и $(x(0); x'(0)) = (0; 1)$ соответственно. Это свойство функций $\cos t$ и $\sin t$ может быть принято за их определение, уравнение же (5) называется дифференциальным уравнением косинуса и синуса. Из такого определения,

т. е. из уравнения (5), начальных условий и теоремы единственности, могут быть выведены *все свойства косинуса и синуса*.

Пример 1. Покажем, как доказать, что $\sin' t = \cos t$. Имеем

$$\sin t = -\sin'' t \Rightarrow \sin' t = -\sin''' t = -(\sin' t)'.$$

Следовательно, функция $x(t) = \sin' t$ является решением уравнения (5), причем с начальными условиями

$$a = x(0) = \sin' 0 = 1, \quad b = x'(0) = \sin'' 0 = -\sin 0 = -0 = 0,$$

совпадающими с начальными условиями для функции $\cos t$. Следовательно, $x(t) \equiv \cos t$, т. е. $\sin' t = \cos t$, что мы и хотели установить. Совершенно аналогично доказывается, что $\cos' t = -\sin t$. $\square$

Пример 2. Из только что доказанного сразу следует, что

$$\cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1.$$

В самом деле,

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) + 2 \sin x \cdot \cos x \equiv 0,$$

откуда по признаку постоянства функции (§ 4.1, лемма 1) получаем

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \text{const}, \quad \text{const} = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1^2 + 0^2 = 1,$$

что и требовалось установить. $\square$

Пример 3. Покажем еще, как из теоремы единственности выводится формула сложения, например для $\cos(\alpha + \beta)$. Рассмотрим функцию $x(t) = \cos(t + \alpha)$. По уже доказанному (и по теореме о производной сложной функции, с учетом того, что $(t + \alpha)' = 1$) для нее

$$x'(t) = -\sin(t + \alpha), \quad x''(t) = -\cos(t + \alpha) = -x(t).$$

Следовательно, $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (5)¹, и по теореме единственности

$$x(t) = \cos(t + \alpha) = a \cos t + b \sin t, \quad \text{где } a = x(0) = \cos \alpha, \quad b = x'(0) = -\sin \alpha.$$

Тем самым нужная формула сложения,

$$\cos(\alpha + t) = \cos \alpha \cos t - \sin \alpha \sin t,$$

получена. $\square$

¹То же самое можно заключить и из теоремы об инвариантности решений уравнения Ньютона относительно сдвига во времени — теоремы 2 из п. 5.2.5.

5.3.5. Дальнейшие следствия: формула вспомогательного аргумента. Из рассуждения в примере 3 следует, что любая функция вида

$$x(t) = A \cos(t + \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

является решением дифференциального уравнения (5). Ее нетрудно записать в стандартном виде:

$$x(t) = a \cos t + b \sin t, \quad \text{где} \quad a = A \cos \varphi, \quad b = -A \sin \varphi. \quad (7)$$

Обратно, из двух последних соотношений по данным a и b — таким, что $(a, b) \neq (0, 0)$, т. е. отвечающим ненулевому решению $x(t)$, — нетрудно найти A и φ . Действительно, сначала из уравнений (7) исключаем переменную φ , возводя a и b в квадрат и складывая:

$$a^2 + b^2 = A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi = A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2 \Rightarrow A = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Заметим, что в случае ненулевого решения $A \neq 0$, и мы теперь можем разделить все части уравнений (7) на A — получим соотношения для $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{a}{A}, \quad \sin \varphi = -\frac{b}{A}. \quad (8)$$

Предложение 3. На единичной окружности существует единственная точка $P(u, v) = P_\varphi$, для которой выполнены оба уравнения (8).

Для доказательства достаточно проверить, что координаты $u = \frac{a}{A}$, $v = -\frac{b}{A}$ нужной точки $P = P_\varphi$ удовлетворяют уравнению единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$. Но это очевидно из доказанного выше соотношения $a^2 + b^2 = A^2$. $\square$

Итак, система уравнений (7) всегда разрешима относительно A и φ , причем значение A определено с точностью до знака и будет определено однозначно, если потребовать, чтобы выполнялось равенство $A > 0$. После этого значение φ будет определено с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и оно определено однозначно, если положить условие $\varphi \in [0, 2\pi)$. Таким образом, доказано такое следствие.

Следствие 1. Любое решение $x = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, дифференциального уравнения (5) представляется в виде (6), где постоянные A и φ определяются из начальных условий $(a; b) = (x(0); x'(0))$, причем в случае ненулевого решения и выполнения требований $A > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ — единственным образом.

Представление ненулевых решений уравнения (5) в виде $A \cos(t + \varphi)$, где $A > 0$, а значение φ определено с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, будем называть каноническим. Из такого вида решений вытекает такое следствие.

Следствие 2. График $x = x(t)$ любого решения дифференциального уравнения (5) есть сдвинутая (на $-\varphi$) вдоль оси Ot и растянутая или сжатая (в A раз) вдоль оси Ox стандартная косинусоида $x = \cos t$.

Выведенная выше формула

$$a \cos t + b \sin t = A \cos(t + \varphi) \quad (9)$$

в элементарной тригонометрии носит название *формулы вспомогательного аргумента* (этот аргумент есть φ). Она применяется, например, при решении *линейных* тригонометрических уравнений:

$$a \cos t + b \sin t \Leftrightarrow A \cos(t + \varphi) = c,$$

так что линейное уравнение свелось к простейшему (примеры см. в упражнениях).

Пример 4. Найдем множество значений функции $f(t) = a \cos t + b \sin t + c$. Согласно формуле вспомогательного аргумента она может быть записана в виде

$$f(t) = a \cos t + b \sin t + c = A \cos(t + \varphi) + c, \quad \text{где } A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Поскольку $\cos t$, равно как и $\cos(t + \varphi)$, меняется между -1 и 1 (т.е. принимает любые значения в промежутке от -1 до 1), первое слагаемое меняется в пределах от $-A$ до A . Следовательно, сумма меняется в пределах $c \pm A$.

Итак, множество значений рассматриваемой функции есть отрезок $[c - \sqrt{a^2 + b^2}, c + \sqrt{a^2 + b^2}]$. $\square$

Часто для удобства в формуле вспомогательного аргумента ставят знак «минус» перед φ — записывают ее в виде

$$a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \psi). \quad (10)$$

Покажем, как конкретно отыскивается вспомогательный аргумент, скажем, в случае формулы (10). Выполняются следующие преобразования:

$$\begin{aligned} a \cos t + b \sin t &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right) = \\ &= A (\cos t \cos \psi + \sin t \sin \psi) = A \cos(t - \psi), \end{aligned}$$

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, а вспомогательный аргумент ψ определяется из уравнений

$$\cos \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Заметим, что нам нужны *не все* решения этой системы, которых бесконечно много, а *какое-нибудь одно* ее решение. Оно в общем случае выписывается через ту или иную аркфункцию, в зависимости от знаков a и b , т.е. того, в какой четверти находится вспомогательный аргумент ψ .

Вернемся к рассмотрению гармонических колебаний произвольной циклической частоты ω .

5.3.6. Канонический вид и параметры гармонических колебаний. И из теоремы об инвариантности решений уравнения Ньютона относительно сдвига во времени, и непосредственно из формул дифференцирования следует, что любая функция вида

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (11)$$

является решением дифференциального уравнения (2), т. е. задает гармоническое колебание циклической частоты ω . Обратно, из формулы вспомогательного аргумента (9) (с аргументом ωt вместо t) вытекает, что от стандартного вида гармонических колебаний можно перейти к указанному виду (11), называемому каноническим:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где параметры $A > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$ для ненулевого колебания однозначно определяются условиями $A^2 = a^2 + b^2$ и $A \cos \varphi = a$, $A \sin \varphi = -b$ по значениям a и b , а значит, и по начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

Для анализа закона гармонических колебаний $x = x(t)$ более удобной является каноническая форма их записи (11). Поскольку значение $\cos \omega t$ меняется между -1 и 1 , величина $x(t)$ совершает колебания между значениями $-A$ и A (рис. 92). Поэтому коэффициент A называется *амплитудой*¹ колебаний.

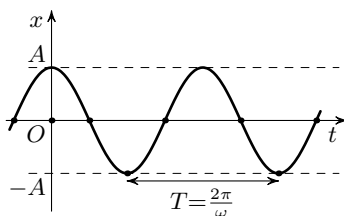


Рис. 92

Далее, значения функции $\cos t$ повторяются через промежуток 2π ; аргументом косинуса в функции $x(t)$ является так называемая *фаза*² — величина $\phi = \omega t + \varphi$, — и она меняется на 2π , если t изменяется на значение $T = \frac{2\pi}{\omega}$, называемое *периодом*³ колебаний. Заметим, что в единицу

¹ *Амплитуда* — от лат. *amplitudo* — «величина».

² Напомним: *фаза* — от греч. *φασις* (фазис) — «утверждение», «подтверждение», «появление»; в данном случае — величина, характеризующая состояние колебательного процесса в каждый момент времени.

³ *Период* — от греч. *περιόδος* (периодос) — «обход», «круговращение», «возвращение».

времени совершается $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ колебаний — это число называется *частотой* колебаний, а пропорциональная ν величина $\omega = 2\pi\nu$ называется *циклической частотой* (как правило, при рассмотрении гармонических колебаний под частотой понимают именно циклическую частоту). Наконец, значение φ , естественно, называется *начальной фазой*.

По-видимому, самый примечательный вывод из анализа дифференциального уравнения гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$ состоит в том, что подчиняющаяся ему величина x всегда совершает колебания с *одной и той же частотой* ω , независимо от начальных условий или амплитуды колебаний. Особо следует отметить случай малых колебаний математического маятника — как мы видели в п. 5.3.1, частота этих колебаний $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, а значит, и их период, не зависят и от массы подвешенного «груза» — этот факт, лежащий в основе устройства маятниковых часов, впервые экспериментально обнаружил Галилео Галилей.

Отметим, что гармонические осцилляторы встречаются не только в механике — напомним про изучаемый в курсе физики простейший *колебательный контур* — замкнутую электрическую цепь, включающую конденсатор емкости C и катушку самоиндукции с индуктивностью L . Нетрудно показать, что напряжение $U = U(t)$ между обкладками конденсатора меняется в соответствии с дифференциальным уравнением

$$U''(t) = -\frac{1}{LC}U(t), \quad \text{т. е.} \quad U'' = -\omega^2 U, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

и, следовательно, совершает гармонические колебания с частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Важную роль играют гармонические осцилляторы также и в атомной физике (с точки зрения математики — в квантовой механике).

5.3.7. Интегрирование дифференциального уравнения гармонических колебаний. Применим к уравнению (2) общую схему интегрирования консервативных уравнений Ньютона, описанную в предыдущем параграфе. За потенциал примем функцию $U = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ и запишем закон сохранения энергии как уравнение:

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = h \Leftrightarrow (x')^2 + \omega^2 x^2 = 2h = c^2,$$

где $c = \sqrt{2h} \geq 0$ (заметим, что возможные уровни энергии $h \geq 0$). Значение $h = 0$ является *критическим*, и ему отвечает единственная особая точка — положение равновесия: $x \equiv 0$, $v \equiv 0$. Рассмотрим значения $h > 0$ и, соответственно, $c > 0$. Разрешенные относительно x' уравнения

$$x' = \pm \sqrt{c^2 - \omega^2 x^2}, \quad |x| \leq \frac{c}{\omega},$$

интегрируются в элементарных функциях:

$$t'_x = \pm \frac{1}{\sqrt{c^2 - \omega^2 x^2}} \Leftrightarrow t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - \omega^2 x^2}} = \pm \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{c}x\right)^2}}.$$

Далее воспользуемся формулой линейной замены в неопределенном интеграле,

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du \Big|_{u=ax},$$

и табличным (стандартным) интегралом

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u \quad (+C), \quad |u| < 1;$$

здесь мы взяли первообразную $-\arccos x$, а не $\arcsin x$, потому что функция $\cos x$ четная, а это поможет избавиться от знака « $\pm$ » при обращении зависимости $t = t(x)$. Получаем

$$t - C = \pm \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{\omega} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \Big|_{u=\frac{\omega}{c}x} = \mp \frac{1}{\omega} \arccos u \Big|_{u=\frac{\omega}{c}x} = \mp \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\omega}{c}x,$$

откуда следует, что

$$\omega t - C_1 = \mp \arccos \frac{\omega}{c}x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Заметим, что из любого значения ωt , не кратного π , можно вычесть константу вида $C_1 = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, так, что разность $\omega t - C_1$ будет заключена между $-\pi$ и π (и отлична от нуля), так что в последнем равенстве t может быть *любым*, за исключением значений, кратных $\frac{\pi}{\omega}$. Применяя к этому равенству функцию $\cos$, для этих значений t находим

$$\cos(\omega t - C_1) = \cos \arccos \frac{\omega}{c}x = \frac{\omega}{c}x \Leftrightarrow x = \frac{c}{\omega} \cos(\omega t - C_1).$$

Продолжая функцию в $x = x(t)$ по непрерывности на всю ось, приходим к хорошо знакомому *каноническому виду гармонических колебаний* с амплитудой $A = \frac{c}{\omega} = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}$. Фазовый портрет в данном случае состоит из особой точки, окруженной периодическими траекториями — гомотетичными эллипсами, получающимися как линии уровня энергии $\Gamma_h = \{(x; v) \mid v^2 + \omega^2 x^2 = 2h\}$. Как и для систем уравнений на плоскости, такие особые точки называются *центрами* — они соответствуют *устойчивым* положениям равновесия системы. И в общем случае точкам строгого локального минимума потенциальной энергии $U(x)$ отвечают похожим образом «устроенные» особые точки фазового портрета — они также называются *центрами*.

Конечно, в данном случае фазовый портрет можно построить исходя непосредственно из явного вида решений уравнения осциллятора:

$$\begin{aligned} x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) &\Rightarrow v(t) = x'(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2(t) + \frac{1}{\omega^2} v^2(t) = A^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(\omega A)^2} = 1; \end{aligned}$$

получилось уравнение эллипсов с отношением полуосей, равным ω .

§ 5.4. Сложение гармонических колебаний

5.4.1. Теорема о сложении гармонических колебаний.

Теорема 1 (о сложении когерентных гармонических колебаний). *Сумма двух функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, описывающих гармонические колебания одной и той же частоты ω (это и означает термин когерентные¹ колебания), является функцией, описывающей гармоническое колебание той же частоты.*

Часто эту теорему формулируют совсем коротко: *сумма гармонических колебаний одной частоты является гармоническим колебанием той же частоты.* Мы представим три способа доказательства этой очень простой, но чрезвычайно важной теоремы.

Первый способ основан на использовании дифференциального уравнения

$$x'' = -\omega^2 x, \quad (1)$$

которому удовлетворяют функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x_1'' = -\omega^2 x_1, \quad x_2'' = -\omega^2 x_2.$$

Сложив эти два равенства, получаем

$$x_1'' + x_2'' = (x_1 + x_2)'' = -\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = -\omega^2 (x_1 + x_2).$$

Следовательно, функция $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) гармонических колебаний с частотой ω . $\square$

(Заметим, что здесь можно было бы сослаться на *принцип суперпозиции*, т. е. на предложение 1 из § 4.3.)

Во *втором способе* доказательства теоремы о сложении колебаний используется явная форма записи гармонических колебаний — *стандартная форма*

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \quad (2)$$

Для гармонических колебаний x_1 и x_2 мы можем записать

$$x_1(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \quad x_2(t) = a_2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t.$$

¹ Когерентность — от лат. *cohaerentia* — «сцепление», «связь», в смысле «согласованность».

Сложение этих двух равенств дает для суммы $x = x_1 + x_2$ представление

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (a_1 + a_2) \cos \omega t + (b_1 + b_2) \sin \omega t$$

в таком же виде (2), откуда и следует, что сумма $x(t)$ задает гармоническое колебание. $\square$

Наконец, 3-й способ доказательства теоремы о сложении основан на второй, канонической форме представления (ненулевых) гармонических колебаний,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad A > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (3)$$

а точнее, на «кинематической» интерпретации такого представления. С нее мы и начнем.

5.4.2. Векторные диаграммы гармонических колебаний. Заметим, что функция $x(t)$, заданная формулой (3), есть не что иное, как x -координата векторнозначной функции

$$\vec{r}(t) = AR^{\omega t + \varphi} \vec{e},$$

или, попросту говоря, абсцисса вектора, который имеет начальное положение

$$\vec{A} = \vec{r}(0) = AR^{\varphi} \vec{e}$$

и равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис. 93). Начальный вектор $\vec{A}$ называется *векторной диаграммой* гармонического колебания, записываемого формулой (3).

Если есть два гармонических колебания,

$$x_1(t) = A_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2(t) = A_2 A \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

то x_1 и x_2 суть абсциссы двух векторов, равномерно и *синхронно* — с одинаковой угловой скоростью ω — вращающихся около начала координат. Теперь вспомним, что сумма абсцисс $x_1 + x_2$ двух векторов равна абсциссе суммы этих векторов. Сумма векторов отыскивается по правилу параллелограмма, который в силу синхронности вращения слагаемых, *не изменяясь*, вращается с той же угловой скоростью ω (рис. 94). Но это и означает, что сумма $x_1(t) + x_2(t)$ соответствует гармоническому колебанию с собственной частотой ω , причем, что важно, *векторная диаграмма суммы получается сложением векторных диаграмм слагаемых*:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad \text{или} \quad AR^{\varphi} \vec{e} = A_1 R^{\varphi_1} \vec{e} + A_2 R^{\varphi_2} \vec{e}.$$

Тем самым мы получили еще одно доказательство теоремы о сложении гармонических колебаний. Более того, это доказательство дает способ отыскивать — геометрически, а значит, и аналитически — амплиту-

ду и начальную фазу суммы двух (или большего числа) когерентных гармонических колебаний.

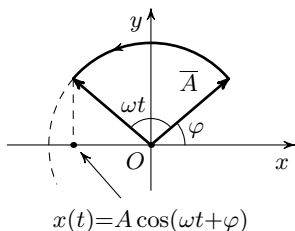


Рис. 93

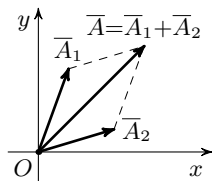


Рис. 94

5.4.3. Пример: трехфазная система токов. Если сложить три когерентных гармонических колебания одинаковой амплитуды с разностями начальных фаз по $\frac{2\pi}{3}$ — их векторные диаграммы суть векторы, направленные в вершины равностороннего треугольника ABC с центром в начале координат O , как показано на рис. 95, — то в сумме получится 0 (см. рисунок).

Это замечание имеет огромное техническое значение: *трехфазный генератор переменного тока* дает как раз три таких гармонических

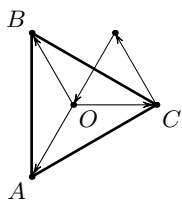


Рис. 95



Рис. 96

колебания — в трех повернутых под углами по 120° одинаковых рамках (обмотках) индукции (рис. 96). Поэтому если три из шести проводов от такого генератора соединить в один, то электрический ток по этому тройному проводу будет *равен нулю* (!) — этот провод можно просто убрать (заземлить), а на объекте использования вместо него вывести «землю»¹. Можно подвести к объекту и два из трех оставшихся проводов — две «фазы»; тогда будет использоваться ток, равный разности фаз (вектор $\overline{AB}$ на рис. 95). Между прочим, именно тем, что в правильном треугольнике $AB : OA = \sqrt{3}$, объясняется интересная связь между стандартными напряжениями 220 и 127 вольт (или 380 и 220 вольт) — их отношение примерно равно $\sqrt{3}$. Эти напряжения как раз получаются при подсоединениях «фаза — фаза» и «фаза — земля».

Объясним кратко, почему вообще переменный ток, вырабатываемый генераторами, меняется по гармоническому закону. В данном случае гармонические колебания появляются не в силу соответствующего

¹ Фактически вместо «тройного провода» используется так называемый нулевой провод — дело в том, что при несимметричном подключении нагрузок в этом проводе будет возникать небольшой «компенсационный» ток.

дифференциального уравнения, а напрямую связаны с вращательным движением.

Простейший генератор переменного тока состоит из проводника — рамки, которая (под действием пара или воды) равномерно вращается в примерно однородном магнитном поле, создаваемом неподвижным магнитом¹ (рис. 97). На движущиеся вместе с рамкой свободные электроны действует *сила Лоренца*², которая создает между концами рамки ЭДС (электродвижущую силу) индукции, равную

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t),$$

где $\Phi(t)$ — поток магнитной индукции через рамку. Найдем зависимость потока индукции Φ от t .

Если S — ограниченная рамкой площадь, $\vec{n} = \vec{n}(t)$ — единичная нормаль (перпендикулярный вектор длины 1) к плоскости рамки (поскольку рамка вращается, эта нормаль зависит от t), $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции (рис. 98), то поток индукции равен скалярному произведению:

$$\Phi = \vec{B} \cdot (S\vec{n}).$$

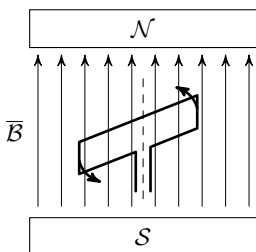


Рис. 97

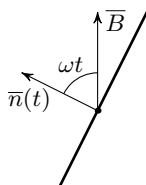


Рис. 98

Если рамка вращается с угловой скоростью ω из такого начального положения, при котором векторы $\vec{n}$ и $\vec{B}$ сонаправлены, то угол между ними в момент времени t равен $\phi = \omega t$ и рассматриваемый нами поток индукции меняется по гармоническому закону:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot (S\vec{n}(t)) = BS \cos \phi = BS \cos \omega t.$$

¹В промышленных генераторах вращается не рамка, а магнитное поле.

²Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) — голландский физик и математик, «предтеча» специальной теории относительности Эйнштейна—Пуанкаре (мы имеем в виду знаменитые «преобразования Лоренца»). Не нужно путать его с двумя однофамильцами — датским физиком-теоретиком Людвигом Валентином Лоренцом (1829–1891) и немецким механиком Гансом Лоренцем (1865–1940).

Следовательно, ЭДС индукции меняется также по гармоническому закону:

$$\mathcal{E}(t) = -\Phi'(t) = \omega BS \sin \omega t.$$

По гармоническому закону будет меняться и напряжение между концами рамки, а в соответствующей замкнутой цепи возникнет *переменный электрический ток*:

$$\mathcal{I}(t) = I \cos(\omega t + \varphi).$$

Такова простейшая модель *генератора однофазного переменного электрического тока*.

Трёхфазная система переменных электрических токов была предложена в 1888 г. русским электротехником М. И. Доливо-Добровольским¹. Он же изобрел асинхронный электродвигатель трёхфазного переменного тока, в котором отражены основные преимущества трёхфазной системы токов.

5.4.4. Амплитуда суммы гармонических колебаний. Пусть складываются два когерентных гармонических колебания с амплитудами A_1 и A_2 . Выясним, какой может оказаться амплитуда суммы. Это совсем просто увидеть с помощью векторных диаграмм. Векторная диаграмма суммы есть $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ — сумма векторных диаграмм слагаемых. Складывая векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ по правилу треугольника (рис. 99), мы получим, вообще говоря, треугольник со сторонами длин A_1 , A_2 и A . Следовательно, согласно неравенству треугольника

$$|A_2 - A_1| \leq A \leq A_1 + A_2,$$

т. е. *амплитуда суммы колебаний может изменяться в пределах от $|A_2 - A_1|$ до $A_1 + A_2$.*

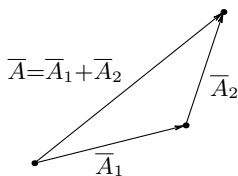


Рис. 99

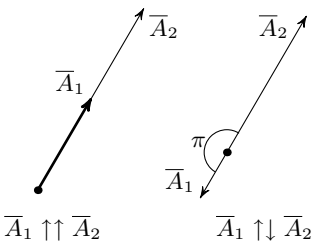


Рис. 100

Заметим, что наибольшее и наименьшее значения амплитуда суммы колебаний будет иметь в том случае, когда упомянутый треугольник

¹Михаил Иосифович Доливо-Добровольский (1862–1919) — русский физик и электротехник, учился и работал в Германии.

«вырождается»: $A = A_1 + A_2$, если векторы $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ сонаправлены, и $A = |A_2 - A_1|$, если эти векторы противоположно направлены (рис. 100). Эти условия можно выразить как связи между начальными фазами φ_1 и φ_2 рассматриваемых колебаний, причем здесь удобно не накладывать на начальные фазы никаких ограничений. Очевидно, сонаправленность векторов $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ означает, что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi k \quad \text{для некоторого } k \in \mathbb{Z}; \quad (4)$$

в этом случае говорят, что колебания происходят *в одной фазе* или *синфазно*; противоположная направленность векторов $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ записывается условием

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 2\pi k \quad \text{для некоторого } k \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

и тогда говорят, что колебания происходят *в противофазе*. Сформулируем соответствующее предложение.

Предложение 1. *При сложении 2 гармонических колебания максимально усиливают друг друга, если они происходят синфазно (выполнено условие (4)), и максимально гасят друг друга, если происходят в противофазе (выполнено условие (5)); во втором случае при равенстве амплитуд слагаемых колебания полностью гасят друг друга).*

Эти простые наблюдения дают возможность объяснить (или даже *предсказать*) важное физическое явление — *интерференцию волн*. Математическую модель волн и явление интерференции мы рассмотрим в следующей гл. VI.

§ 5.5. Вынужденные колебания, резонанс и биения

5.5.1. Уравнение вынужденных колебаний и его решения.

Мы видели в § 5.3, что если на материальную точку массы m , положение которой задается координатой x , действует упругая сила

$$F(x) = -kx, \quad k > 0,$$

то эта точка совершает гармонические колебания по закону

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

т. е. было доказано, что для дифференциального уравнения Ньютона

$$mx'' = -kx \Rightarrow x'' = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{где } A > 0, \quad \varphi \in [0, \pi).$$

Выясним теперь, что получится, если к упругой силе добавляется внешняя, так называемая *вынуждающая*, зависящая от времени сила $\tilde{F}(t)$.

Уравнение Ньютона тогда примет вид

$$x'' = -\omega^2 x + f(t), \quad f(t) = \frac{1}{m} \tilde{F}(t),$$

и задача состоит в исследовании этого дифференциального уравнения — в отыскании и анализе его решений. Конкретно нас будет интересовать случай *гармонической вынуждающей силы*, т. е. когда $\tilde{F}(t)$ меняется по гармоническому закону с некоторой *вынуждающей частотой* ν :

$$f(t) = a \cos \nu t, \quad x'' = -\omega^2 x + a \cos \nu t. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) относится к *неоднородным линейным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами*, а для них справедлива *вторая теорема Д'Аламбера* из п. 5.5.3: *общее решение уравнения (1) представляется в виде суммы любого частного его решения и общего решения соответствующего однородного уравнения $x'' = -\omega^2 x$* .

Однородное уравнение есть просто уравнение «свободных» гармонических колебаний, и его общее решение выписано выше. Частное же решение уравнения (1) в случае гармонической вынуждающей силы $f(t) = a \cos \nu t$ естественно попытаться найти в виде $x_0(t) = B \cos \nu t$ — так, чтобы скомпенсировать фигурирующую в дифференциальном уравнении «гармонику» частоты ν . После подстановки выбранной функции $x_0(t)$ в уравнение (1) получаем соотношение

$$-\nu^2 B \cos \nu t = -\omega^2 B \cos \nu t + a \cos \nu t,$$

выполняющееся, если $(\omega^2 - \nu^2)B = a$. Таким образом, в случае, когда $\nu \neq \omega$, т. е. когда *вынуждающая частота ν отлична от собственной частоты ω* , мы действительно находим частное решение уравнения (1):

$$B = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2}, \quad x_0(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t.$$

Таким образом, из второй теоремы Д'Аламбера вытекает следующее утверждение.

Теорема 1 (о вынужденных колебаниях). *Общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний под воздействием гармонической силы (1) в случае $\nu \neq \omega$ записывается в виде*

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t + A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где A и φ — произвольные постоянные (определяемые из начальных условий).

5.5.2. Анализ решений: резонанс и дрожание. Таким образом, мы выяснили, что наличие гармонической вынуждающей силы

приводит к наложению на собственные колебания гармонического осциллятора (частоты ω — второе слагаемое в формуле (2)) колебаний частоты ν с *не зависящей* от начальных условий амплитудой

$$|B| = \left| \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \right|.$$

Считая собственную частоту ω фиксированной, изобразим график зависимости $|B| = |B|(\nu)$, $\nu > 0$, — так называемую *резонансную кривую* (рис. 101).

Она имеет существенную особенность: если $\nu \rightarrow \omega$, то $|B|(\nu) \rightarrow \infty$. Это означает, что если $\nu \approx \omega$, то, *независимо от начальных условий* (они влияют только на второе слагаемое решения (2)), *вынужденные колебания будут иметь очень большую амплитуду*. Такое явление называется *резонансом*¹ — оно играет важную роль в физике и технике (как положительную, так и отрицательную!).

Резонансная кривая имеет еще одну особенность: если $\nu \rightarrow \infty$, то $|B|(\nu) \rightarrow 0$. Следовательно, при больших значениях вынуждающей частоты ν на собственное колебание $A \cos(\omega t + \varphi)$ накладывается колебание с малым периодом $T = \frac{2\pi}{\nu}$ и малой амплитудой $|B|(\nu)$ — происходит как бы «дрожание» около гармонического колебания частоты ω (рис. 102).

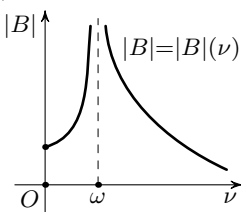


Рис. 101

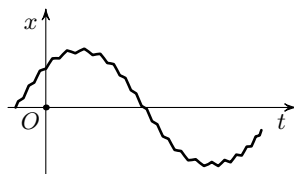


Рис. 102

5.5.3. Анализ решений: резонансное раскачивание и биения. Выясним, как в случае $\nu \approx \omega$ из нулевых начальных условий $x(0) = x'(0) = 0$ происходит выход на режим резонансного раскачивания. Для решения (2) мы имеем

$$x(0) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} + A \cos \varphi; \quad (3)$$

$$x'(0) = -\frac{a\nu}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t - \omega A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow x'(0) = -\omega A \sin \varphi. \quad (4)$$

Приравнявая выписанные выражения для $x(0)$ и $x'(0)$ нулю, из формулы (4) мы получаем $\sin \varphi = 0$, поэтому $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$ или $\pi \pmod{2\pi}$.

¹От лат. resonans — «дающий отклик».

Подставив значение $\varphi = 0$ (и $x(0) = 0$) в формулу (3), получим

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow A = -\frac{a}{\omega^2 - \nu^2},$$

откуда получается следующий довольно изящный вид искомого решения:

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t - \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \cos \omega t. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что второе решение $\varphi = \pi$ уравнения $\sin \varphi = 0$ приводит к тому же результату:

$$\cos \varphi = -1, \quad A = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \Rightarrow x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t + \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \cos(\omega t + \pi),$$

что в силу формул приведения совпадает с соотношением (5).

Итак, при нулевых начальных условиях вынужденные колебания происходят по закону (5) — происходит наложение двух гармонических колебаний разных частот ν и ω , но одинаковой амплитуды $\left| \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \right|$. Преобразуем формулу (5):

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} (\cos \nu t - \cos \omega t) = \frac{2a}{\omega^2 - \nu^2} \sin \frac{\omega - \nu}{2} t \cdot \sin \frac{\omega + \nu}{2} t,$$

т. е.

$$x(t) = A(t) \sin \frac{\omega + \nu}{2} t, \quad \text{где} \quad A(t) = \frac{2a}{\omega^2 - \nu^2} \sin \frac{\omega - \nu}{2} t. \quad (6)$$

Так как при $\nu \approx \omega$ частота $\left| \frac{\omega - \nu}{2} \right|$ колебаний величины $A(t)$ мала, а период $T = \frac{4\pi}{|\omega - \nu|}$, напротив, велик, изменение величины $x(t)$ в соответствии с законом (6) можно представить как колебания частоты $\frac{\omega + \nu}{2} \approx \omega$ с медленно меняющейся амплитудой $|A(t)|$ (рис. 103). Заметим, что максимум амплитуды $A_{\max} = \left| \frac{2a}{\omega^2 - \nu^2} \right|$ примерно пропорционален периоду ее изменения, причем оба увеличиваются обратно пропорционально уменьшению $|\omega - \nu|$. Амплитуда вынужденных колебаний то возрастает до наибольшего значения $A_{\max}$, то спадает до нуля — в физике и технике соответствующее явление называют *биениями*.

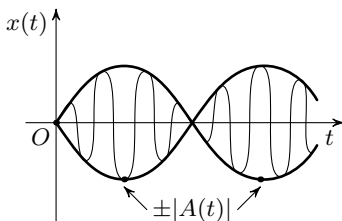


Рис. 103

5.5.4. Точный резонанс. Интересно выяснить, а что же происходит при «точном резонансе», когда вынуждающая частота *в точности* совпадает с собственной: $\nu = \omega$. Мы видели, что частного решения вида $B \cos \nu t$ в этом случае не существует. Попробуем посмотреть на точный резонанс как на «предел биений» при $\nu \rightarrow \omega$. Иначе говоря, перейдем в уравнении биений (6) к пределу при $\nu \rightarrow \omega$, зафиксировав значение переменной t . Преобразуем:

$$\frac{2a}{\omega^2 - \nu^2} \sin \frac{\omega - \nu}{2} t \cdot \sin \frac{\omega + \nu}{2} t = \frac{a}{\omega + \nu} t \cdot \frac{\sin \frac{\omega - \nu}{2} t}{\frac{\omega - \nu}{2} t} \cdot \sin \frac{\omega + \nu}{2} t.$$

При фиксированном t при $\nu \rightarrow \omega$ первый множитель стремится к значению $\frac{a}{2\omega} t$, последний — к $\sin \omega t$, а

$$\lim_{\nu \rightarrow \omega} \frac{\sin \frac{\omega - \nu}{2} t}{\frac{\omega - \nu}{2} t} = 1$$

(это *первый замечательный предел* — см. учебники алгебры и начал анализа). Значит, в пределе уравнение биений дает следующую зависимость:

$$x_0(t) = \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (7)$$

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что эта функция $x_0(t)$ действительно является решением дифференциального уравнения (1) при $\nu = \omega$, причем с нулевыми начальными условиями. Как и в случае биений, закон (7) можно интерпретировать как описывающий колебания частоты ω с переменной амплитудой

$$A(t) = \frac{a}{2\omega} t,$$

которая *неограниченно возрастает* (!) со временем (рис. 104). Конечно, в реальных системах такого не происходит — из-за трения и прочих причин.

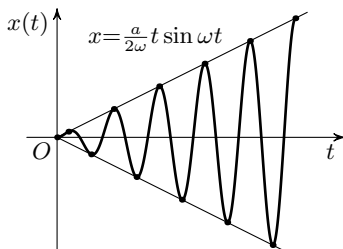


Рис. 104

§ 5.6. Анализ уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Гиперболические функции

При рассмотрении общей одномерной консервативной динамической системы, описывающей движения в гладком (дифференцируемом) силовом поле $F(x) = -U'(x)$ с потенциалом $U(x)$, специальный интерес представляют движения вблизи точек минимума и максимума потенциала. Сами эти точки суть положения равновесия — в них сила F обращается в нуль, и им отвечают стационарные решения уравнения Ньютона. В окрестности же такой точки, если в ней производная $F'(x) = -U''(x)$ отлична от нуля (в этом случае точка экстремума называется *невырожденной*), силу можно считать *примерно линейной*, заменив функцию $F(x)$ на ее *линейное приближение* в этой точке (см. п. 3.1.3). Приняв такую точку за начало координатной оси, мы просто *заменим F линейной силой*, $F(x) = qx$, где $q = F'(0)$.

Если $q < 0$, мы приходим к притягивающей псевдоупругой силе и к уже ранее исследованному уравнению *гармонических колебаний*: $q = -\omega^2$, $x'' = -\omega^2 x$. Близкими к гармоническим колебаниям будут в общем случае и движения вблизи произвольной невырожденной точки минимума потенциала (в потенциальной «ямке»).

Для того же, чтобы понять, каков будет характер движений вблизи невырожденной точки максимума (т. е. в окрестности потенциальной «горки»), нужно рассмотреть поведение точки под действием *отталкивающей* линейной силы $F(x) = qx$, $q > 0$. Записывая ради удобства коэффициент в виде $q = \lambda^2$, где $\lambda > 0$, мы приходим к задаче исследования решений дифференциального уравнения

$$x'' = \lambda^2 x, \quad (1)$$

которой мы и займемся в этом параграфе.

5.6.1. Решения уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Теорема единственности. Нетрудно «угадать» два решения рассматриваемого уравнения: $x_+(t) = e^{\lambda t}$ и $x_-(t) = e^{-\lambda t}$ (проверьте). А из свойства *линейности* этого однородного уравнения (из «принципа суперпозиции», как и для уравнения гармонических колебаний) следует, что и любая *линейная комбинация* этих решений, т. е. *любая функция вида*

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{-\lambda t} \quad (2)$$

также является решением дифференциального уравнения (1).

Спрашивается, нет ли других решений? Оказывается, нет.

Теорема 1 (единственности решений дифференциального уравнения $x'' = \lambda^2 x$). *Любое решение $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения (1), $x'' = \lambda^2 x$ ($\lambda > 0$), представляется в виде (2), $x(t) = \alpha e^{\lambda t} +$*

$+ \beta e^{-\lambda t}$, причем постоянные α и β однозначно определяются начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

Доказательство. Мы приведем два способа доказательства этой теоремы. *Первый способ* напоминает «метод повторного дифференцирования»; который использовался в § 3.5 (пп. 3.5.2–3). Именно, преобразуем левую часть дифференциального уравнения $x'' - \lambda^2 x = 0$:

$$x'' - \lambda^2 x = x'' + \lambda x' - \lambda x' - \lambda^2 x = (x' + \lambda x)' - \lambda(x' + \lambda x). \quad (3)$$

Обозначим выражение в скобках через z : $z = x' + \lambda x$. Согласно равенству (3) для функции $x = x(t)$ выполняется уравнение (1) *тогда и только тогда*, когда вспомогательная функция $z = z(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$z' - \lambda z = 0 \Leftrightarrow z' = \lambda z \Leftrightarrow z = z(t) = Ae^{\lambda t}.$$

Следовательно, для того чтобы функция $x = x(t)$ была решением уравнения (1), *необходимо и достаточно*, чтобы для нее выполнялось уравнение

$$x' + \lambda x = z(t) \Leftrightarrow x' = -\lambda x + Ae^{\lambda t}. \quad (4)$$

Согласно *первой теореме Д'Аламбера* (п. 3.4.3) общее решение дифференциального уравнения (4) записывается в виде суммы частного его решения $x_1(t)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения $x' = -\lambda x$, т. е. $x_0(t) = A_1 e^{-\lambda t}$. Частное решение уравнения (4) естественно искать в виде $x_1(t) = Be^{\lambda t}$, так как эта функция должна как-то «скомпенсировать» неоднородность — слагаемое $Ae^{\lambda t}$ в правой части уравнения. Подставляя указанную функцию $x_1(t)$ в дифференциальное уравнение (4), получаем

$$x'_1 = \lambda Be^{\lambda t} = -\lambda x_1 + Ae^{\lambda t} = -\lambda Be^{\lambda t} + Ae^{\lambda t},$$

что выполняется (*при всех значениях $t \in \mathbb{R}$*) в том и только том случае, когда

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 2\lambda Be^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} \Leftrightarrow 2\lambda B = A \Leftrightarrow B = \frac{A}{2\lambda}.$$

Значит, искомое частное решение есть $x_1(t) = \frac{A}{2\lambda} e^{\lambda t}$, а общее решение неоднородного уравнения (4) записывается в виде

$$x = x_1 + x_0 = \frac{A}{2\lambda} e^{\lambda t} + A_1 e^{-\lambda t},$$

т. е. указанном в формулировке теоремы виде (2). Тем самым представимость любого решения в виде линейной комбинации двух экспонент $x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{-\lambda t}$ доказана.

Остается проверить однозначную определенность констант α и β при заданных начальных условиях $(x(0); x'(0)) = (x_0; v_0)$. Мы имеем

$x(0) = \alpha e^0 + \beta e^0 = \alpha + \beta$; при любом $t \in \mathbb{R}$ $x'(t) = \lambda \alpha e^{\lambda t} - \lambda \beta e^{-\lambda t}$, поэтому $x'(0) = \lambda \alpha - \lambda \beta = \lambda(\alpha - \beta)$. Следовательно, для определения значений α и β получается система уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0, \\ \lambda(\alpha - \beta) = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right), \\ \beta = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{\lambda} \right). \end{cases} \quad (5)$$

Тем самым теорема полностью доказана. $\square$

5.6.2. Второе доказательство теоремы единственности. Второй способ доказательства представимости решений дифференциального уравнения (1) в виде (2) отчасти напоминает доказательство *теоремы единственности решений дифференциального уравнения гармонических колебаний* из § 5.3; используются также только что выведенные формулы, выражающие коэффициенты α и β через начальные условия.

Итак, пусть $x(t)$ — какое-то решение дифференциального уравнения (1). Рассмотрим начальные условия, отвечающие этому решению, $x_0 = x(0)$, $v_0 = x'(0)$, и найдем «экспоненциальное решение» $x_e = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{-\lambda t}$, удовлетворяющее тем же начальным условиям, — как было показано, нужные значения коэффициентов α и β определяются формулами (5). Рассмотрим *разность* произвольного и экспоненциального решений — функцию $z(t) = x(t) - x_e(t)$. Из линейности и однородности дифференциального уравнения (1) следует, что функция $z(t)$ также является решением уравнения (1), т. е.

$$z'' = \lambda^2 z, \quad (6)$$

причем $z(0) = z'(0) = 0$. Выведем отсюда, что $\forall t \in \mathbb{R}$ $z(t) = 0$, откуда и будет следовать *совпадение* произвольного решения $x(t)$ с экспоненциальным $x_e(t)$.

Рассмотрим еще одну вспомогательную функцию $u(t) = z' - \lambda z$. Для нее с учетом формулы (6) имеем

$$\begin{aligned} u' = (z' - \lambda z)' &= z'' - \lambda z' = \lambda^2 z - \lambda z' = -\lambda(z' - \lambda z) = -\lambda u \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = A e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

где $A = u(0) = z'(0) - \lambda z(0) = 0 - \lambda \cdot 0 = 0$. Отсюда следует, что $u(t) = z'(t) - \lambda z(t) \equiv 0$, и рассматриваемая функция $z(t)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $z'(t) - \lambda z(t) = 0$. Значит, $z(t) = A_0 e^{\lambda t}$, где $A_0 = z(0) = 0$. Поэтому $z(t) \equiv 0$. $\square$

5.6.3. Уравнение гиперболических косинуса и синуса. При рассмотрении дифференциального уравнения $x'' = -\omega^2 x$ в § 5.3 особо

выделялся случай $\omega = 1$; этому значению отвечает *дифференциальное уравнение косинуса и синуса*:

$$x'' = -x \Leftrightarrow x(t) = a \cos t + b \sin t,$$

где $(a; b) = (x(0); x'(0))$, причем сами тригонометрические функции $\cos t$ и $\sin t$ могут быть определены как решения указанного дифференциального уравнения, удовлетворяющие начальным условиям $(x(0); x'(0)) = (1; 0)$ и $(0; 1)$ соответственно.

Аналогом такой ситуации ($\omega = 1$) для рассматриваемого уравнения (1) $x'' = \lambda^2 x$ будет случай $\lambda = 1$. Согласно доказанной теореме

$$x'' = x \Leftrightarrow x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}, \quad (7)$$

где постоянные α и β также определяются начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$, но по более сложным формулам по сравнению с константами a, b в решении дифференциального уравнения косинуса и синуса:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x(0), \\ \alpha - \beta = x'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x_0 + v_0}{2}, \\ \beta = \frac{x_0 - v_0}{2}. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим решения дифференциального уравнения $x'' = x$ с такими же начальными условиями, какими задаются функции $\cos t$ и $\sin t$ как решения дифференциального уравнения $x'' = -x$. Если $(x(0); x'(0)) = (1; 0)$ или $(0; 1)$, то из формул (8) находим, что $(\alpha; \beta) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ или $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$. Получающиеся функции $\frac{e^t + e^{-t}}{2}$ и $\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ называются соответственно *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*; они обозначаются

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (9)$$

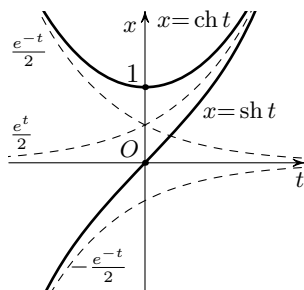


Рис. 105

Эти функции (их графики приведены на рис. 105) использовал еще в 1707 г. Муавр, а приведенные *определяющие соотношения* (9) и обозначения в 1757 г. ввел Винченцо Риккати. Названия этим функциям в 1768 г. дал Ламберт. Он же показал «полный параллелизм» между свойствами гиперболических и тригонометрических функций (несмотря на «полное несходство» графиков!). Например,

$$\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t, \quad \operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$$

(заметьте, что производная гиперболического косинуса равна *плюс* гиперболическому синусу), а также

$$\operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} + 2), \quad \operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - 2),$$

откуда вытекает тождество

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t \equiv 1, \quad (10)$$

которое является аналогом основного тригонометрического тождества $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$. «Геометрический смысл» соотношения (10) заключается в том, что при любом $t \in \mathbb{R}$ точка $(x; y) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ принадлежит гиперболе $x^2 - y^2 = 1$ на плоскости Oxy (точнее, правой ветви гиперболы, так как всегда $x = \operatorname{ch} t \geq 1$; правая ветвь задается уравнением $x = +\sqrt{1 + y^2}$).

Абрахам де Муавр (1667–1754) — английский математик, родом из Франции, эмигрировал в Лондон после 1688 г. по религиозным соображениям. Был членом Royal Society, другом Ньютона и Галлея (с последним заложил начало *математической статистики*). Наиболее известен своей теоремой из теории вероятностей, а также «формулой Муавра» для отыскания комплексных корней из комплексных чисел. Обратил внимание на функции, позже названные Ламбертом гиперболическими, в связи с задачей о квадратуре *равнобочной гиперболы* $x^2 - y^2 = 1$, но привести их определения довелось уже Риккати.

Винченцо Риккати (1707–1775) — итальянский монах-иезуит и в то же время математик, лектор университета в Болонье. Более известен его отец, граф Джакомо Франческо Риккати (1676–1754) — математик, механик, инженер. Развивал идеи Ньютона в области механики. Его имя носит простейшее *нелинейное* (квадратичное по y) дифференциальное уравнение первого порядка: $y'(x) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$. Это так называемое *общее уравнение Риккати* (так его стал называть Д'Аламбер), с которого началась систематическая разработка *теории дифференциальных уравнений* — в первую очередь Леонардом Эйлером и математиками из рода Бернулли (сам граф Риккати сумел решить это уравнение в ряде частных случаев).

Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) — немецкий математик, физик, астроном и философ; как и Эйлер, по происхождению швейцарец. Ламберт первым применил к своим исследованиям гиперболические функции, первым дал доказательство иррациональности числа π (1766 г.). Как и Лейбниц, он пытался изобрести «универсальный язык знаков», стремился ввести строгие математические доказательства не только в анализ, но и во все области естествознания и даже в философию.

Сходство с тригонометрическими функциями $\cos t, \sin t$ (их иногда называют *круговыми функциями*) и в том, что гиперболические функ-

ции $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$ также связаны с кинематикой, только описывают движение не по окружности, а по гиперболе (рис. 106). (Значительное количество аналогий между гиперболическими и тригонометрическими функциями приведено в упражнениях.)

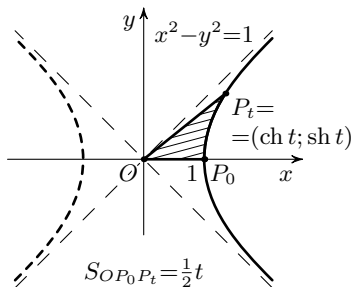


Рис. 106

Для дифференциального уравнения $x'' = x$ гиперболические функции играют в точности такую же роль, как косинус и синус — для уравнения $x'' = -x$. Докажем отдельно теорему единственности решений этого дифференциального уравнения, выражая решения через гиперболические косинус и синус.

Теорема 2 (единственности решений дифференциального уравнения $x'' = x$). Любое решение $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения

$$x'' = x \quad (11)$$

представляется в виде

$$x(t) = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t, \quad (12)$$

где константы a, b однозначно определяются начальными условиями (даже совпадают с ними):

$$(a; b) = (x(0); x'(0)).$$

Доказательство. Проще всего воспользоваться предыдущей теоремой, согласно которой любое решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения (11) представляется в виде $x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$, причем постоянные α и β однозначно определяются начальными условиями $x(0)$ и $x'(0)$. Поскольку из определения гиперболических функций, т. е. из формул (9), получаются выражения экспонент $e^{\pm t}$ через $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$,

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t, \quad e^{-t} = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t,$$

представление решения в виде (7) приводит к выражению этого решения через гиперболические функции, т. е. в виде (12):

$$x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} = \alpha(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) + \beta(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t,$$

где $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$. Поскольку α и β *однозначно* определяются начальными условиями, коэффициенты a и b также *однозначно* определяются ими. Наконец, *совпадение* этих констант с начальными условиями $x(0)$ и $x'(0)$ проверяется непосредственными вычислениями (проверьте!). $\square$

Разумеется, можно дать независимое от теоремы 1 доказательство, основываясь на тех же идеях, что и при *втором* способе доказательства теоремы 1. Допустим, что $x(t)$ — произвольное решение дифференциального уравнения $x'' = x$. Рассмотрим числа $a = x(0)$ и $b = x'(0)$ и «экспоненциальное» решение $x_e(t) = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t$. Это решение будет удовлетворять точно тем же начальным условиям, что и решение $x(t)$:

$$x_e(0) = a \operatorname{ch} 0 + b \operatorname{sh} 0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a = x(0),$$

$$x'_e(t) = a \operatorname{sh} t + b \operatorname{ch} t \Rightarrow x'_e(0) = a \operatorname{sh} 0 + b \operatorname{ch} 0 = b = x'(0).$$

Следовательно, функция $z(t) = x(t) - x_e(t)$, которая также является решением дифференциального уравнения (11) (в силу его линейности), удовлетворяет нулевым начальным условиям. Рассмотрим еще одну вспомогательную функцию $u(t) = z'(t) - z(t)$ и вычислим ее производную, учитывая при этом, что $z'' = z$:

$$u' = (z' - z)' = z'' - z' = z - z' = -u \Rightarrow u = u(0) \cdot e^{-t},$$

а поскольку $u(0) = z'(0) - z(0) = 0$, мы получаем, что $u(t) \equiv 0$, т. е. $z' - z \equiv 0$. Таким образом, функция $z = x - x_e$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z' = z \Rightarrow z = z(0) \cdot e^t \equiv 0,$$

поскольку $z(0) = 0$. Значит, разность $x(t) - x_e(t)$ тождественно равна нулю, поэтому произвольное решение $x(t)$ совпадает с «экспоненциальным» решением вида (12): $x_e(t) = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t$. $\square$

Заметим, что и решения дифференциального уравнения (1) $x'' = \lambda^2 x$ можно записать через гиперболические функции ch и sh :

$$x(t) = a \operatorname{ch} \lambda t + b \operatorname{sh} \lambda t; \quad a = x(0), \quad b = \frac{x'(0)}{\lambda}.$$

5.6.4. Неустойчивые положения равновесия. Прежде чем исследовать фазовые траектории рассматриваемой системы, покажем, в каких конкретных случаях появляется линейная *отталкивающая сила* $F = \lambda^2 x$.

Как указывалось в § 3.2 (п. 3.2.5), в любой *одномерной консервативной механической системе*, когда материальная точка массы m движется по прямой Ox под действием зависящей только от координаты x силы $F(x)$, эту силу в окрестности устойчивого положения равновесия — точки x_0 , в которой $F(x_0) = 0$, — можно считать *псевдоупругой*. Если принять положение равновесия за начало координат, то можно записать: при $x \approx 0$ сила $F(x)$ равна $-kx$ (линейная притягивающая сила), так что второй закон Ньютона $mx'' = F = -kx$ приводит к дифференциальному уравнению гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, со всеми вытекающими отсюда последствиями. В частности, мы получаем и общий закон *малых колебаний около устойчивого положения равновесия*: они являются *гармоническими*, т. е. координата x изменяется по гармоническому закону $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi)$.

Возможен и случай *неустойчивого положения равновесия*, когда, для определенности, в точке $x_0 = 0$ консервативная сила F равна 0, а в окрестности нуля F является *линейной отталкивающей силой* $F = kx$, $k > 0$. В этом случае второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению (1): $x'' = \lambda^2 x$. Таким образом, проанализированное выше уравнение (1) описывает движение материальной точки в окрестности *неустойчивого положения равновесия*.

Когда встречаются такие положения равновесия? Приведем два примера.

Пример 1. «Перевернутый» математический маятник — это просто «математический маятник», т. е. механическая система: точечный шарик массы m , подвешенный на невесомом стержне длины L , который может отклоняться от своего положения равновесия в одной плоскости на произвольный угол x , но рассматриваемый при $x \approx \pi$ — в окрестности неустойчивого верхнего положения равновесия $x = \pi$ (рис. 107). Как

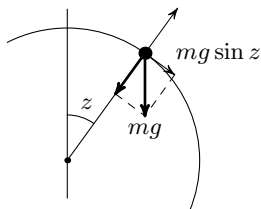


Рис. 107

было показано в § 5.3, при произвольном значении x движение маятника подчиняется вытекающему из второго закона Ньютона дифференциальному уравнению

$$x'' = -\frac{g}{L} \sin x \quad (13)$$

(g — ускорение свободного падения). В случае *малых отклонений* маятника от верхнего положения равновесия $x = \pi$ можно записать, что $x = \pi + z$, где $z \approx 0$. Тогда $x'' = z''$, а по формуле приведения $\sin x = \sin(\pi + z) = -\sin z$, так что уравнение (13) переписывается через угол z отклонения от верхнего

вертикального положения равновесия следующим образом:

$$z'' = -\frac{g}{L}(-\sin z) = \frac{g}{L} \sin z. \quad (14)$$

Поскольку предполагается, что $z \approx 0$, функцию $\sin z$ можно заменить на ее линейное приближение: $\sin z \approx z$, и из уравнения (14) мы получаем дифференциальное уравнение вида (1):

$$z'' = \lambda^2 z \quad \left(\lambda = \sqrt{\frac{g}{L}} \right).$$

Таким образом, движение перевернутого маятника *вблизи* верхнего положения равновесия описывается с помощью приведенных выше решений уравнения (1). $\square$

Пример 2. «Шарик на горке» — довольно общий пример, укладывающийся в рамки описанной в § 5.2 модели: шарик, катающийся в плоском желобе, имеющем форму графика какой-то *дифференцируемой* функции $h = u(x)$ (рис. 108). Положение шарика определяется его координатой по оси Ox , и действующая на шарик сила зависит только от x : она будет пропорциональна производной функции $u(x)$ и направлена в сторону *убывания* этой функции. Положения равновесия шарика

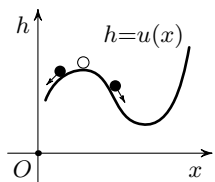


Рис. 108

суть критические точки функции $u(x)$. Устойчивые положения равновесия отвечают точкам минимума функции u , т.е. «ямкам», неустойчивые положения равновесия — точкам максимума u , т.е. «горкам». Если точка максимума — выберем ее за начало координат — *невыврожденная*, т.е. $u'(0) = 0$, но $u''(0) \neq 0$, то в ее окрестности «силу отталкивания» $F(x)$ можно *линеаризовать*, т.е. заменить ее линейным приближением $F = kx$,

где $k > 0$. Таким образом, в данном случае (при катании шарика около горки или через горку) второй закон Ньютона $mx'' = kx$ приводит к прежнему дифференциальному уравнению (1) $x'' = \lambda^2 x$. $\square$

5.6.5. Фазовый портрет уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Качественное описание. Рассмотрим теперь поведение фазовых траекторий, соответствующих движению материальной точки в *отталкивающем* линейном силовом поле, подчиняющемся уравнению

$$x'' = \lambda^2 x \quad (\lambda > 0).$$

Потенциальная функция этого поля равна $U(x) = -\frac{1}{2}\lambda^2 x^2$, закон сохранения энергии записывается как уравнение

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 = h \Leftrightarrow v^2 - \lambda^2 x^2 = 2h,$$

возможные уровни энергии — любые числа $h \in \mathbb{R}$ ($\min U = -\infty$), значение $h = 0$ является критическим, но, в отличие от случая притягивающей силы, ему на фазовой плоскости отвечает не единственная точка, а пара прямых,

$$v^2 - \lambda^2 x^2 = 0 \Leftrightarrow v = \pm \lambda x,$$

пересекающихся в особой точке $(x; v) = (0; 0)$. Прежде чем разбираться с этими прямыми, рассмотрим не критические уровни энергии $h \neq 0$.

Положим $\sqrt{|2h|} = c$; тогда $2h = \pm c^2$, в зависимости от знака h . Линии уровня $v^2 - \lambda^2 x^2 = \pm c^2$ суть пары ветвей гипербол с асимптотами $v = \pm \lambda x$, причем при $h > 0$ ветви лежат целиком выше или ниже оси Ox , а при $h < 0$ — пересекают эту ось (рис. 109). Понятно, что каждая из двух ветвей является в точности фазовой траекторией: пользуясь наглядной интерпретацией движения с помощью «потенциальной горки» $u = U(x) = -\frac{1}{2}\lambda^2 x^2$, нетрудно видеть, что верхние ветви отвечают движениям «шарика», перекаатывающегося через горку слева направо, а нижние показывают перекаатывания справа налево. Если начальной кинетической энергии не хватает для того, чтобы преодолеть горку, то шарик докатывается по «склону» до самого высокого своего положения (мгновенная его скорость в этот момент будет равна нулю, а фазовая точка пересечет ось Ox ($v = 0$)) и катится в обратную сторону (рис. 110): этим движениям отвечают левые и правые ветви гиперболы.

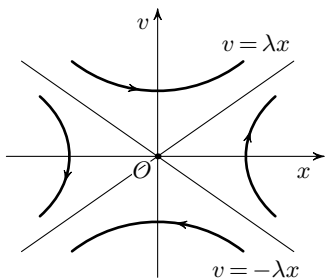


Рис. 109

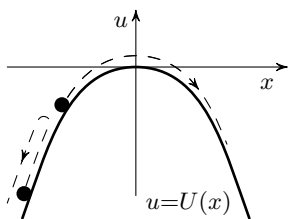


Рис. 110

Возникает вопрос: что будет, если кинетической энергии хватает ровно на то, чтобы добраться до вершины, т.е. начальные условия x_0, v_0 удовлетворяют соотношению $T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 = U(0) - U(x)$ (справа записана работа против отталкивающей силы, которую требуется произвести, чтобы из положения x достичь «центра отталкивания» $x_0 = 0$)? По какому закону будет меняться координата? Сколько времени потребуется, чтобы подняться «на горку»? Пока ясно одно: соответствующ-

щие фазовые траектории лежат на паре прямых, отвечающих нулевому уровню энергии.

5.6.6. Движение по фазовым траекториям. В начале параграфа мы указали явные формулы (2) для закона движения $x = x(t)$ точки под действием отталкивающей силы $F = \lambda^2 x$: $x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{-\lambda t}$, где константы α, β определяются по начальным условиям x_0, v_0 с помощью формул (5). Подставив значения α, β , запишем закон движения при данных начальных условиях в явном виде:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right) e^{\lambda t} + \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{\lambda} \right) e^{-\lambda t}. \quad (15)$$

Из этой формулы не очень-то ясно, как же фазовая точка $M_t(x(t); v(t))$ движется по указанным выше фазовым неособым траекториям (гиперболам), однако если начальная точка $M_0(x_0; v_0)$ лежит на одной из прямых $v = \pm \lambda x$, отвечающих критическому уровню энергии $h = 0$, то один из коэффициентов при экспонентах в формуле (15) обращается в нуль, и можно понять, как происходит движение по этим прямым.

В случае, когда начальная точка лежит на прямой $v = \lambda x$,

$$v_0 = \lambda x_0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 = x_0, \quad \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{\lambda} \right) = 0,$$

и закон движения записывается как $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$. Следовательно, при любом значении $x_0 \neq 0$ абсолютная величина координаты $x(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$, стремясь к $+\infty$, если $x_0 > 0$, и к $-\infty$, если $x_0 < 0$. Точно так же ведет себя и скорость $v(t) = x'(t) = \lambda x(t)$, и фазовая точка удаляется от особой точки $(0; 0)$ соответственно по правому или левому лучам прямой $v = \lambda x$, как то показано на рис. 111.

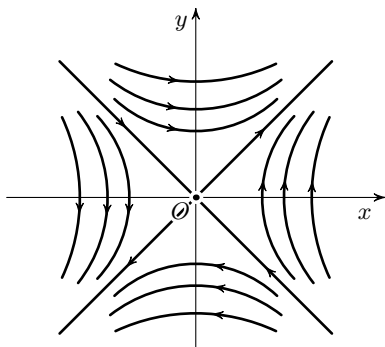


Рис. 111

Когда же начальная точка лежит на второй прямой, $v = -\lambda x$, напротив,

$$v_0 = -\lambda x_0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right) = 0, \quad \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{\lambda} \right) = x_0,$$

а закон движения имеет вид $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$. Следовательно, при любом значении $x_0 \neq 0$ абсолютная величина координаты $x(t)$ неограниченно убывает при $t \rightarrow +\infty$, стремясь к нулю справа, если $x_0 > 0$, и слева, если $x_0 < 0$. Скорость же равна $v(t) = x'(t) = -\lambda x(t)$ и также по модулю стремится к нулю, так что фазовая точка, замедляясь, стремится к особой точке опять-таки соответственно по правому или левому лучам прямой $v = -\lambda x$, но никогда не попадает в нее (тот же рис. 111).

Таким образом, множество уровня энергии, отвечающее критическому уровню энергии, распадается на *пять* фазовых траекторий: отдельную траекторию, состоящую из одной особой точки (и отвечающую стационарному решению $x(t) \equiv 0$) и четыре *сепаратрисы* — две «входящие» в особую точку и две «исходящие» из нее траектории¹, геометрически совпадающие с открытыми (без концов) лучами, на которые пара прямых $v = \pm \lambda x$ делится особой точкой. Сепаратрисы, как и в случае дифференциальных уравнений на плоскости (см. п. 6.2.2), разделяют различные типы фазовых траекторий, а особая точка имеет тип *седла* (см. там же).

Хотя из общего закона движения, записанного в виде (2) или (15), довольно трудно увидеть, что фазовая точка обязана двигаться по гиперболам, из него легко вывести, что все неособые траектории (отвечающие не критическим уровням энергии $h \neq 0$) при $t \rightarrow \pm\infty$ стремятся к сепаратрисам. Действительно, из формул (15) видно, что при $h \neq 0$, т. е. $v_0 \neq \pm \lambda x_0$, оба коэффициента α, β в формуле $x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{-\lambda t}$ отличны от нуля, как и в соответствующей формуле для скорости $v(t) = x'(t) = \lambda \alpha e^{\lambda t} - \lambda \beta e^{-\lambda t}$. При $t \rightarrow +\infty$ вторыми слагаемыми в этих формулах можно пренебречь по сравнению с первыми, так что расстояние между фазовой точкой $M_t(x(t); v(t))$ и лежащей на какой-то из исходящих сепаратрис точкой $(\alpha e^{\lambda t}; \lambda \alpha e^{\lambda t})$ будет стремиться к нулю (при $t \rightarrow +\infty$). При $t \rightarrow -\infty$, напротив, первыми слагаемыми можно пренебречь по сравнению со вторыми, и фазовая точка будет приближаться при $t \rightarrow -\infty$ к входящим сепаратрисам.

Тот же факт, что неособые фазовые траектории геометрически совпадают с гиперболами, можно проверить, минуя закон сохранения энер-

¹Если говорить более точно, то «стремящиеся к особой точке» и «стремящиеся от особой точки».

гии. Если формулу (15) переписать через гиперболические функции,

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} \lambda t + \frac{v_0}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda t,$$

то отсюда находим

$$v(t) = x'(t) = \lambda x_0 \operatorname{sh} \lambda t + v_0 \operatorname{ch} \lambda t,$$

после чего с помощью формулы (10) для разности квадратов гиперболических косинуса и синуса получится соотношение

$$v^2(t) - \lambda^2 x^2(t) = v_0^2 - \lambda^2 x_0^2.$$

Вот вам и уравнения гипербол, и сам закон сохранения!

5.6.7. Интегрирование уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Применим к уравнению (1) общую схему интегрирования консервативных уравнений Ньютона, описанную в § 5.2. Закон сохранения энергии записывается как уравнение

$$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 = h \Leftrightarrow (x')^2 - \lambda^2 x^2 = 2h.$$

Как и ранее, положим $\sqrt{|2h|} = c$, так что $2h = \pm c^2$, в зависимости от знака h . Разрешенные относительно x' уравнения в случае $h > 0$ суть

$$x' = \pm \sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \text{любое число},$$

и при интегрировании симметричных уравнений естественным образом возникает табличный интеграл — гиперболический арксинус (*ареасинус* $\operatorname{arsh} u$ — всюду определенная, нечетная, строго возрастающая и принимающая любые значения функция, обратная к функции $t \mapsto \operatorname{sh} t$; для нее $(\operatorname{arsh} u)' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ — проверьте):

$$\begin{aligned} t'_x = \pm \frac{1}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2}} &\Leftrightarrow t - C = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2}} = \\ &= \pm \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{\lambda} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Big|_{u=\frac{c}{\lambda}x} = \pm \frac{1}{\lambda} \operatorname{arsh} u \Big|_{u=\frac{c}{\lambda}x} = \pm \frac{1}{\lambda} \operatorname{arsh} \frac{\lambda}{c} x, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\lambda t - C_1 = \pm \operatorname{arsh} \frac{\lambda}{c} x \Leftrightarrow \frac{\lambda}{c} x = \pm \operatorname{sh}(\lambda t - C_1) \Leftrightarrow x = \pm \frac{c}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda t - C_1).$$

Очевидно, эти два определенные при всех значениях $t \in \mathbb{R}$ решения отвечают верхним и нижним ветвям гипербол (в данном случае скорость $v(t) = x'(t) = \pm c \operatorname{ch}(\lambda t - C_1)$ принимает значения одного знака).

В случае $h < 0$ получаются несколько другие уравнения,

$$x' = \pm \sqrt{\lambda^2 x^2 - c^2}, \quad |x| \geq \frac{c}{\lambda},$$

и при интегрировании симметричного уравнения появляется другой табличный интеграл — гиперболический арккосинус ($\operatorname{arch} u$ — определенная при $u \geq 1$ строго возрастающая и принимающая любые неотрицательные значения функция, обратная к функции $t \mapsto \operatorname{ch} t$, рассматриваемой на неотрицательной полуоси; для этой функции $(\operatorname{arch} u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}$ при $u > 1$; тоже проверьте):

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \operatorname{sgn} u \cdot \operatorname{arch} |u| (+C), \quad |u| > 1.$$

Используя этот интеграл, получаем

$$\begin{aligned} t'_x = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 x^2 - c^2}} &\Leftrightarrow t - C = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 x^2 - c^2}} = \\ &= \pm \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{\lambda} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \Big|_{u=\frac{\lambda}{c}x} = \pm \frac{1}{\lambda} \operatorname{sgn} u \cdot \operatorname{arch} |u| \Big|_{u=\frac{\lambda}{c}x} = \\ &= \pm \frac{1}{\lambda} \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{arch} \frac{\lambda}{c} |x|. \end{aligned}$$

Отсюда после домножения на λ и применения *четной* функции ch следует, что

$$\begin{aligned} \lambda t - C_1 = \pm \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{arch} \frac{\lambda}{c} |x| &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{c} |x| = \operatorname{ch}(\lambda t - C_1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{c}{\lambda} \operatorname{ch}(\lambda t - C_1). \end{aligned}$$

Очевидно, эти два определенных при всех значениях $t \in \mathbb{R}$ решения отвечают правым и левым ветвям гипербол (координата x принимает значения одного знака, а скорость $v(t) = x'(t) = \pm c \operatorname{sh}(\lambda t - C_1)$ меняет знак в момент времени, когда $|x|$ достигает наименьшего значения).

Наконец, рассмотрим случай нулевого уровня энергии. Тогда

$$(x')^2 - \lambda^2 x^2 = 0 \Leftrightarrow x' = \pm \sqrt{\lambda^2 x^2} = \pm \lambda |x| \Leftrightarrow x' = \pm \lambda x,$$

причем знак в полученных уравнениях выбирается в соответствии со знаками как v , так и x . Не будем рассматривать симметричное уравнение для зависимости $t(x)$, а сразу запишем решения этой пары уравнений.

Если $x' = \lambda x$, то $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} x$, т. е. фазовая траектория может лежать в I и III четвертях (и, в *принципе*, может перейти из одной четверти в другую, «проскочив» особую точку $(0; 0)$); общее решение имеет вид $x = Ae^{\lambda t}$, $A \in \mathbb{R}$ — любое число. Поскольку $v = x' = \lambda Ae^{\lambda t}$, мы имеем $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} A$, и фазовые траектории записываются формулами $(x(t); v(t)) = (Ae^{\lambda t}; \lambda Ae^{\lambda t})$. Возможны три случая:

1) если $A > 0$, то вся траектория лежит в I четверти и соответствует экспоненциальному удалению фазовой точки от точки $(0; 0)$ по правому лучу прямой $v = \lambda x$ ($x > 0$);

2) если $A < 0$, то траектория лежит в III четверти и соответствует экспоненциальному удалению фазовой точки от точки $(0; 0)$ по левому лучу прямой $v = -\lambda x$ ($x < 0$);

3) если $A = 0$, то фазовой траекторией является особая точка $(0; 0)$.

В случае $x' = -\lambda x$ мы имеем $\operatorname{sgn} v = -\operatorname{sgn} x$, фазовая траектория может лежать во II и IV четвертях и записывается формулами $(x(t); v(t)) = (Ae^{-\lambda t}; -\lambda Ae^{-\lambda t})$, где $A \in \mathbb{R}$ — любое число. Опять есть три возможности:

1) при $A > 0$ вся траектория лежит в IV четверти ($x > 0, v < 0$) и соответствует экспоненциальному приближению фазовой точки $(x; v)$ к особой точке $(0; 0)$ по правому лучу прямой $v = -\lambda x$ ($x > 0$);

2) при $A < 0$ траектория лежит во II четверти и тоже соответствует экспоненциальному приближению фазовой точки к особой точке $(0; 0)$ по левому лучу той же прямой;

3) наконец, случай $A = 0$ дает то же самое, что и раньше, — фазовую траекторию из единственной точки $(0; 0)$.

Таким образом, как и ранее, получается, что пара прямых $v = \pm \lambda x$ разбивается на пять различных фазовых траекторий, из которых одна состоит из единственной точки $(0; 0)$, а четыре другие суть сепаратрисы, разделяющие четыре непрерывных семейства гиперболических фазовых траекторий и являющиеся асимптотами для них (при $x \rightarrow \pm\infty$ или, что, в общем-то, то же самое, при $t \rightarrow \pm\infty$) (см. рис. 111).

Заметим, что закон движения по сепаратрисам таков, что фазовая траектория, хотя и стремится к особой точке $(0; 0)$ при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$, но *никогда ее не достигает*. Следовательно, если начальной кинетической энергии хватает ровно на то, чтобы добраться до вершины, т. е. начальные условия x_0, v_0 удовлетворяют соотношению $E = T + U = 0$, то материальная точка будет двигаться до положения равновесия $x = 0$ *бесконечно долго* и никогда его не достигнет! Возникает вопрос: для любого ли неустойчивого положения равновесия («горки» на графике $u = U(x)$ потенциальной энергии) это будет верно? Можно ли за конечное время достичь положения равновесия (с нулевой скоростью) и остановиться там «навсегда»? Ответ дан в упражнениях.

5.6.8. Интегрирование дифференциального уравнения математического маятника. Напомним (см. начало § 5.3), что движения *математического маятника* — системы: точечный шарик массы m , подвешенный на невесомом стержне длины L , который может

отклоняться от своего положения равновесия в одной плоскости на произвольный угол x , — описывается дифференциальным уравнением Ньютона

$$x'' = -k \sin x, \quad k = \frac{g}{L}$$

(g — ускорение свободного падения; масса m в этом уравнении «сократилась»). Будем считать, что коэффициент k в этом уравнении равен 1 (этого можно добиться, сделав замену времени, — см. упражнения), т. е. рассматривать дифференциальное уравнение

$$x'' = -\sin x.$$

«Абстрактно» это будет уравнение Ньютона движения материальной точки массы $m = 1$ в периодическом по оси Ox силовом поле $F(x) = -\sin x$; период равен 2π , а указанная периодичность соответствует тому, что координата x для маятника *угловая*, т. е. «измеряется по модулю» 2π — «с точностью» до слагаемого вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В качестве потенциала выберем функцию $U(x) = -\cos x$; множества уровня энергии Γ_h задаются уравнениями

$$\frac{1}{2}v^2 - \cos x = h \Leftrightarrow v = \pm \alpha \sqrt{h + \cos x} \quad (\alpha = \sqrt{2}),$$

возможные уровни энергии $h \geq -1$. Значения $h = \pm 1$ являются *критическими*: значению $h = -1$ отвечает бесконечное множество невырожденных точек минимума $x_n^- = 2\pi n$, значению $h = 1$ — бесконечное множество невырожденных точек максимума $x_n^+ = \pi + 2\pi n$; в обоих случаях $n \in \mathbb{Z}$, так что соответствующие стационарные решения и точки фазового портрета отвечают всего двум положениям маятника — устойчивому (нижнему) и неустойчивому (верхнему) положениям равновесия (рис. 112).

На фазовой плоскости минимумам отвечают невырожденные центры $(2\pi n; 0)$, окруженные периодическими траекториями. Эти траектории, геометрически совпадающие с овалами

$$v = \pm \alpha \sqrt{h + \cos x}$$

при некритических значениях энергии $h \in (-1, 1)$, соответствуют качаниям маятника. Соответствующие интегралы времени

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dz}{\alpha \sqrt{h + \cos z}}$$

не выражаются через элементарные функции (можно показать, что они приводятся к так называемым *эллиптическим интегралам I рода*, а обратная зависимость $x = x(t)$ может быть записана через *эллиптические синусы*).

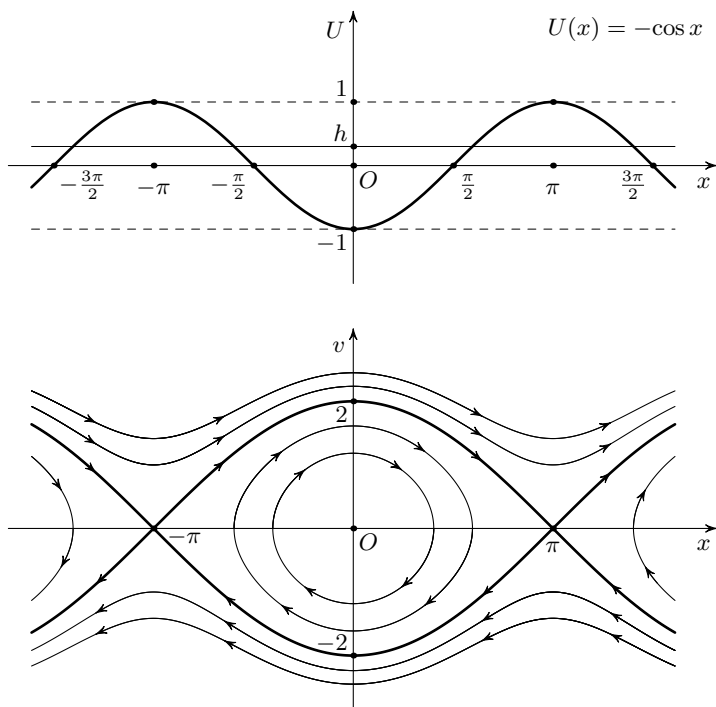


Рис. 112

Некритическим значениям энергии $h > 1$ отвечают пары неограниченных в обе стороны по оси Ox фазовых траекторий, соответствующих вращениям маятника, с «проскакиванием» верхнего положения равновесия в положительном или отрицательном направлении. Эти кривые задаются теми же уравнениями

$$v = \pm \alpha \sqrt{h + \cos x},$$

и они отделяются от семейств периодических траекторий критической линией уровня $v = \pm \alpha \sqrt{h + \cos x}$, на которой лежит бесконечно много особых точек $(\pi + 2\pi n; 0)$, соответствующих невырожденным максимумам потенциала и являющихся невырожденными седлами. Сепаратрисы этих седел геометрически ограничены и идут из одного седла в соседнее; время же движения по ним *неограничено*. Для маятника это означает, что если, например, маятник движется из положения равновесия с начальной скоростью $v_0 = 2$ (тогда начальная энергия как раз будет равна верхнему критическому значению: $\frac{1}{2}v^2 - \cos x =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$), то он будет *бесконечно долго* подниматься, стремясь к верхнему положению равновесия, но никогда не достигая его.

§ 5.7. Анализ уравнения $x'' + px' + qx = 0$

Ранее мы уже рассматривали дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, но вполне исследовали их только в «укороченных» случаях, $x'' + px' = 0$ или $x'' + qx = 0$. Попробуем, насколько это окажется для нас возможным, проанализировать общий случай.

5.7.1. Общее уравнение второго порядка. Достижения Эйлера. Общее однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x'' + px' + qx = 0. \quad (1)$$

Если решения *однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами*, т. е. уравнения $x' + kx = 0$, *всегда* суть экспоненты, $x(t) = x(0) \cdot e^{-kt}$, то, как мы знаем, решения даже двучленного уравнения второго порядка $x'' + qx = 0$ не сводятся единственно к экспонентам: если $q = \omega^2 > 0$, то решениями будут *линейные комбинации* тригонометрических функций $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. В случае $q = -\lambda^2 < 0$ решения суть линейные комбинации экспонент $e^{\lambda t}$ и $e^{-\lambda t}$, которые можно записать и через *гиперболические функции* $\operatorname{ch} \lambda t$ и $\operatorname{sh} \lambda t$, во многом сходные с тригонометрическими.

Внимательный и прозорливый анализ «параллелей» между этими двумя случаями и соответствующими функциями еще в 1748 г. привел Леонарда Эйлера к установлению фундаментальных соотношений между тригонометрическими функциями и экспонентой от «мнимых чисел»: от введенных в алгебру задолго до Эйлера *квадратных корней из отрицательных чисел*, для «легализации» которых достаточно ввести такое «*символическое число*» $i = \sqrt{-1}$, называемое «мнимой единицей», что при выполнении алгебраических операций над содержащими i выражениями i^2 всякий раз заменяется на -1 .

Не следует думать, что математики «придумали» мнимые числа, для того чтобы извлекать не существующие квадратные корни из отрицательных чисел. История комплексных чисел, которые до Эйлера записывались в лучшем случае как формальные выражения вида $a + b\sqrt{-1}$ (Эйлер предложил обозначать $\sqrt{-1}$ буквой i в работе 1777 г., но в обиход буква i была введена лишь К. Ф. Гауссом; он только родился в 1777 г.), гораздо увлекательнее. Математики и не думали отыскивать корни квадратных уравнений, не имеющих корней (т. е. имеющих отрицательный дискриминант, подобно уравнениям вида $z^2 + q = 0$, $q > 0$). Но в 1510–1545 гг. итальянские

математики Сципион дель Ферро (1465–1526), затем Николо Тарталья (1500–1557) и, наконец, Джироламо Кардано (1501–1576) нашли формулу для решения кубических уравнений вида $z^3 + Az = B$ (*) (указанный вид не является ограничением, так как общее кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ линейной заменой $x = z + \alpha$ при подходящем выборе α сводится к указанному). Эта формула имеет вид

$$z = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}},$$

и формальная подстановка ее в выражение $z^3 + Az$ действительно дает B . Она вполне надежно «работает» в случае, когда уравнение (*) имеет единственный корень — например, если $A > 0$. Однако в случае, когда уравнение (*) имеет три действительных корня — скажем, когда $A < 0$, $B = 0$, — число, стоящее под знаками квадратных корней, оказывается отрицательным!

К 1560 г. еще один итальянский математик, Рафаэль Бомбелли (1526–1572), исследовал этот случай, показав, как при надлежащем обращении с комплексными числами получаются действительные корни уравнения (*). Окончательная ясность в данном вопросе была достигнута Эйлером, поэтому приведенную формулу для корней иногда именуют *формулой Кардано—Тарталья—дель Ферро—Эйлера*.

Термин «мнимые» закрепился за «числами» вида $a + b\sqrt{-1}$ после издания знаменитой «Геометрии» Рене Декарта (1637 г.), где говорится, что такие величины *ни как нельзя себе представить*, они только «воображаемые» (лат. *imaginarie*). Термин «комплексные» числа (лат. *complexus*: связь, сочетание чего-либо; в данном случае в смысле «сложные», «составные» числа) ввел в 1803 г. французский государственный, военный и политический деятель, математик, при Наполеоне возведенный в графы, Лазар Никола Маргерит Карно (1753–1823). (Более известен его сын, один из создателей термодинамики Никола Леонард Сади Карно (1796–1832).) Позже (с 1828 г.) наименование «комплексные числа» стал применять К. Ф. Гаусс, причем *систематически* — чтобы изгнать терминологию Декарта.

Знаменитые *формулы Эйлера* похожи (!) на определения гиперболических функций,

$$\cosh t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad (2)$$

так что можно записать $\cosh t = \operatorname{ch} it$, $\sinh t = \operatorname{sh} it$. Мы не будем использовать мнимые и *комплексные* числа (это выражения вида $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$) в нашем анализе, поэтому ограничимся приведенными формулами. Таким образом, будем исследовать дифференциальное уравнение (1), оперируя исключительно с «обычными» числовыми функциями действительной переменной.

Обе формулы Эйлера вытекают из формул для экспоненты от «чисто мнимого» аргумента:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

причем первую из этих формул еще в 1714 г. открыл Р. Котес (друг и ученик Ньютона; мы упоминали о Котесе в п 5.1.5), описавший словесно соотношение $\ln(\cos t + i \sin t) = it$. Эйлер же, не будучи знаком с работами Котеса, в 1740 г., отыскивая решение дифференциального уравнения $x'' + x = 0$ с начальными условиями $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$ *двумя способами*, пришел к двум ответам: $2 \cos t$ и $e^{it} + e^{-it}$, а уже потом нашел и вторую из формул (2).

Отметим, что для дифференциального уравнения $x'' + qx = 0$ возможны не только указанные случаи $q = -\lambda^2 < 0$ и $q = \omega^2 > 0$, но и *промежуточный случай* $q = 0$. Соответствующее дифференциальное уравнение $x'' = 0$ рассматривалось в § 3.1 как уравнение *свободного движения* (т. е. движения без ускорения), решениями которого являются не гиперболические и не тригонометрические функции, а попросту *линейные функции* или *константы*: $x(t) = At + B$.

5.7.2. Характеристическое уравнение. Рассматривая дифференциальное уравнение (1), естественно прежде всего выяснить, не удовлетворяют ли этому уравнению обычные экспоненты: функции вида $x(t) = e^{\lambda t}$. Вычисляем $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, а затем непосредственной подстановкой x'' , x' и x в уравнение (1) проверяем, выполняется ли оно:

$$x'' + px' + qx = \lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1 (об экспоненциальных решениях). *Экспоненциальная функция $x(t) = e^{\lambda t}$ является решением дифференциального уравнения (1), $x'' + px' + qx = 0$, тогда и только тогда, когда ее показатель λ является корнем характеристического многочлена этого дифференциального уравнения, т. е. корнем уравнения*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (3)$$

Остается рассмотреть корни *характеристического уравнения* (3) и соответствующие им решения дифференциального уравнения (1), а затем попытаться найти *все* его решения, т. е. найти *общее решение* (или *общий вид* решения). Начнем со случая, когда дискриминант $D = p^2 - 4q$ квадратного уравнения (3) положителен.

5.7.3. Случай положительного дискриминанта. В случае $D = p^2 - 4q > 0$ многочлен $\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ имеет *два корня*,

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

каждому из которых соответствует экспоненциальное решение дифференциального уравнения (1):

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

В силу линейности рассматриваемого дифференциального уравнения *любая линейная комбинация этих решений*

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} \quad (4)$$

также является решением уравнения (1). Докажем обратное, т. е. тот факт, что любое решение дифференциального уравнения (1) представлено в виде (4).

Теорема 1 (единственности решений дифференциального уравнения $x'' + px' + qx = 0$ в случае $D = p^2 - 4q > 0$). Если дискриминант $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, отвечающего дифференциальному уравнению $x'' + px' + qx = 0$, является положительным, то любое решение $x(t)$ этого дифференциального уравнения представляется в виде (4), т. е.

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t},$$

где $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения, а постоянные коэффициенты a, b однозначно определяются начальными условиями $(x(0); x'(0))$.

Доказательство. Согласно теореме Виета коэффициенты трехчлена $\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ представляются в виде $p = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $q = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, поэтому дифференциальное уравнение (1) можно записать как

$$\begin{aligned} x'' - (\lambda_1 + \lambda_2)x' + \lambda_1\lambda_2 x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x'' - \lambda_2 x' - \lambda_1 x' + \lambda_1\lambda_2 x &= 0 \Leftrightarrow (x' - \lambda_2 x)' - \lambda_1(x' - \lambda_2 x) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если функция $x = x(t)$ является решением дифференциального уравнения (1), то «вспомогательная» функция

$$z = z(t) = x'(t) - \lambda_2 x(t) = x' - \lambda_2 x$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка $z' - \lambda_1 z = 0$. (По сути, мы применили тот же прием, который в предыдущих параграфах был назван «методом¹ повторного дифференцирования».) Теперь используем известные нам теоремы единственности для линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$z' - \lambda_1 z = 0 \Leftrightarrow z' = \lambda_1 z \Leftrightarrow z = Ae^{\lambda_1 t};$$

значит,

$$x' - \lambda_2 x = Ae^{\lambda_1 t} \Leftrightarrow x' = \lambda_2 x + Ae^{\lambda_1 t}. \quad (5)$$

Последнее уравнение выполняется тогда и только тогда, когда $x = x_1 + A_2 e^{\lambda_2 t}$, где $x_1 = x_1(t)$ — частное решение дифференциального уравнения (5) (в соответствии с теоремой Д'Аламбера). Частное ре-

¹ «Метод есть искусственный прием, которым вы пользуетесь дважды». — Дьёрдь Пойа (1887–1985). Как решать задачу. М., 1961, с. 198.

шение $x_1(t)$ можно найти *методом Лагранжа* (методом вариации произвольной постоянной), но проще «подобрать» его, отыскивая решение в виде $x_1(t) = Be^{\lambda_1 t}$, чтобы «скомпенсировать» неоднородность вида $f(t) = Ae^{\lambda_1 t}$.

Подставляя функцию $x_1(t)$ в дифференциальное уравнение (5), получаем

$$x_1' = B \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = \lambda_2 x_1 + Ae^{\lambda_1 t} = \lambda_2 \cdot Be^{\lambda_1 t} + Ae^{\lambda_1 t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_1 t} = Ae^{\lambda_1 t} \Leftrightarrow B = \frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Таким образом, в качестве *частного решения* дифференциального уравнения (5) можно взять функцию

$$x_1(t) = \frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} = A_1 e^{\lambda_1 t}$$

(так как A — произвольная постоянная, пропорциональная ей величина $\frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2}$ тоже принимает *произвольные* — в смысле «любые» — значения, и мы обозначаем эту величину через A_1 как *новую произвольную постоянную*). Общее же решение дифференциального уравнения (1) записывается в виде

$$x(t) = x_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

что и требовалось установить. (Однозначная определенность по начальным условиям $(x(0); x'(0))$ коэффициентов, A_1, A_2 в последней записи или a, b в формулировке теоремы вытекает из тех свойств решений линейных уравнений первого порядка, на которые мы опирались. Отметим, что начальные условия не обязательно задавать именно при $t = 0$ — можно их задать в *любой* точке $t = t_0$.) $\square$

(В этой теореме мы не упомянули о *существовании* решений, т. е. о том, что любая линейная комбинация *базисных решений* $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ и $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), поскольку на это было указано непосредственно перед формулировкой теоремы.)

5.7.4. Случай нулевого дискриминанта. В случае, когда дискриминант $D = p^2 - 4q$ квадратного уравнения (3) равен нулю, характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ имеет *единственный корень*

$$\lambda_0 = -\frac{p}{2}$$

*кратности*¹ 2 — в том смысле, что трехчлен $\chi(\lambda)$ представляется в виде второй степени двучлена $\lambda - \lambda_0$:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2 = (\lambda - \lambda_0)^2.$$

Этому корню соответствует экспоненциальное решение дифференциального уравнения (1) вида $x_0(t) = e^{\lambda_0 t}$, и даже, в силу линейности уравнения (1), целое *семейство* решений

$$x(t) = Ax_0(t) = Ae^{\lambda_0 t}. \quad (6)$$

Но и интуиция, и предыдущие примеры подсказывают, что семейством функций (6) совокупность всех решений дифференциального уравнения (1), которое в данном случае имеет вид $x'' - 2\lambda_0 tx' + \lambda_0^2 x = 0$, не исчерпывается.

Дифференциальное уравнение и в этом случае можно «расписать» через повторное дифференцирование:

$$\begin{aligned} x'' - 2\lambda_0 x' + \lambda_0^2 x = 0 &\Leftrightarrow x'' - \lambda_0 x' - \lambda_0 x' + \lambda_0 \cdot \lambda_0 x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x' - \lambda_0 x)' - \lambda_0 (x' - \lambda_0 x) = 0. \end{aligned}$$

Значит, если $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (1), то вспомогательная функция $z = x' - \lambda_0 x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $z' - \lambda_0 z = 0$. Из него находим

$$z' = \lambda_0 z \Leftrightarrow z = A_0 e^{\lambda_0 t}.$$

Следовательно,

$$x' - \lambda_0 x = A_0 e^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow x' = \lambda_0 x + A_0 e^{\lambda_0 t}, \quad (7)$$

и опять получившееся уравнение выполняется *тогда и только тогда*, когда $x = x_1 + Ae^{\lambda_0 t}$, где $x_1 = x_1(t)$ — частное решение дифференциального уравнения (7). Однако в данном случае частного решения вида $x_1(t) = Be^{\lambda_0 t}$ при $A_0 \neq 0$ не существует: подстановка такой функции $x_1(t)$ в дифференциальное уравнение (7) приводит к соотношениям

$$B \cdot \lambda_0 e^{\lambda_0 t} = \lambda_0 \cdot Be^{\lambda_0 t} + A_0 e^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow B(\lambda_0 - \lambda_0)e^{\lambda_0 t} = A_0 e^{\lambda_0 t},$$

$$\text{т. е. } A_0 e^{\lambda_0 t} \equiv 0 \Rightarrow A_0 = 0.$$

Попробуем сразу найти общее решение дифференциального уравнения (7) *методом Лагранжа*, т. е. методом вариации произвольной по-

¹К сожалению, в учебнике для VIII класса в отношении этой ситуации говорится бессмыслица: *де, мол, «уравнение имеет два одинаковых корня»!* Спрашивается, если «одинаковых», то почему именно *два*, а не три, не сто? В таких случаях в математике (в алгебре) говорится о соответствующей *кратности корня*.

стоянной, подставляя в уравнение функцию $x(t)$ вида $A(t)e^{\lambda_0 t}$:

$$\begin{aligned} x' &= A'(t)e^{\lambda_0 t} + A(t) \cdot \lambda_0 e^{\lambda_0 t} = \lambda_0 x + A_0 e^{\lambda_0 t} = \lambda_0 \cdot A(t)e^{\lambda_0 t} + A_0 e^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A'(t)e^{\lambda_0 t} = A_0 e^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow A'(t) = A_0 \Leftrightarrow A(t) = A_0 t + A_1. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (7), а с ним и дифференциального уравнения (1), записывается в виде

$$x(t) = A(t)e^{\lambda_0 t} = (A_0 t + A_1)e^{\lambda_0 t} = A_0 \cdot te^{\lambda_0 t} + A_1 \cdot e^{\lambda_0 t},$$

т.е. как *линейная комбинация* решений $te^{\lambda_0 t}$ и $e^{\lambda_0 t}$. Такая система (совокупность) решений линейного дифференциального уравнения такая, что *общее решение уравнения представляется как линейная комбинация решений из этой системы, причем единственным образом, называется базисной (или фундаментальной) системой решений уравнения*. Таким образом, как и в случае $D > 0$, мы нашли базисную систему решений дифференциального уравнения (1), $x'' + px' + qx = 0$, при $D = p^2 - 4q = 0$: доказали следующее утверждение.

Теорема 2 (существования и единственности решений дифференциального уравнения $x'' + px' + qx = 0$ в случае $D = p^2 - 4q = 0$). *Если дискриминант $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, отвечающего дифференциальному уравнению $x'' + px' + qx = 0$, равен нулю, то функция $x(t)$ является решением этого дифференциального уравнения тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$x(t) = ate^{\lambda_0 t} + be^{\lambda_0 t}, \quad (8)$$

где λ_0 — кратный корень характеристического уравнения; при этом коэффициенты (константы) a, b однозначно определяются начальными условиями ($x(0); x'(0)$) (или же начальными условиями, заданными в любой другой точке t_0).

5.7.5. Случай отрицательного дискриминанта. Наконец, случай, когда дискриминант $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, отвечающего дифференциальному уравнению $x'' + px' + qx = 0$, отрицателен, мы вынуждены пока опустить, так как экспоненциальных решений вида $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в случае $D < 0$ не существует. Однако пример дифференциального уравнения гармонических колебаний $x'' + \omega^2 x = 0$, для которого как раз $D = -4\omega^2 < 0$, а базисными решениями являются функции $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, наводит на мысль о том, что и решения *полного* дифференциального уравнения с отрицательным дискриминантом связаны с тригонометрическими функциями. Это действительно так, но мы подойдем к таким уравнениям чуть-чуть «с

другой стороны»: рассматривая гармонические колебания при наличии (вязкого) трения.

§ 5.8. Колебания в упруго-вязкой среде

Пусть на материальную точку, движущуюся по оси Ox , наряду с консервативной силой $F(x)$, действует еще и *сила вязкого трения* $F_1 = -rv = -rx'$ (см. п. 5.1.3), противодействующая движению. Тогда она будет стремиться как-то *замедлять*, «затормаживать» движение. В случае *свободного движения* (т. е. равномерного движения, без ускорения: $F(x) \equiv 0$) происходит экспоненциальное замедление движения: точка как бы останавливается по закону $x(t) = C + Ae^{-\alpha t}$, причем остановка совершается за *бесконечное время* (см. п. 5.5.2). Наличие вязкого трения *равноускоренное движение* ($F(x) = a = \text{const} \neq 0$) превращает в *асимптотически равномерное* (см. п. 5.5.3). В этом параграфе мы рассмотрим, как действует наличие вязкого трения на процесс гармонических колебаний, происходящих под действием *упругой силы* $F(x) = -\kappa x$. В таком случае говорят о колебаниях в «упруго-вязкой» (или «вязко-упругой») среде. Можно представить себе, например, малые колебания маятника или шарика на пружине, помещенных в какую-то «вязкую жидкость» (хотя бы в воду).

5.8.1. Уравнение колебаний в упруго-вязкой среде. Анализ «гармонических колебаний» под действием упругой или псевдоупругой силы $F_{\text{упр}} = -\kappa x$ при наличии силы вязкого трения $F_{\text{тр}} = -rx'$ — это фактически *универсальный* пример приложений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. При отсутствии внешней (вынуждающей) силы соответствующее дифференциальное уравнение (второй закон Ньютона) приводится именно к такому уравнению:

$$mx'' = -\kappa x - rx' \Leftrightarrow x'' = -kx' - \omega^2 x, \quad \text{т. е.} \quad x'' + kx' + \omega^2 x = 0.$$

Ради удобства обозначим положительный коэффициент k через 2α , так что *общее дифференциальное уравнение гармонических колебаний с трением* запишется как

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0$, а вместо дискриминанта удобно рассматривать четверть дискриминанта, равную $D^* = \alpha^2 - \omega^2$.

В принципе возможны три случая: $D^* > 0$, $D^* = 0$, $D^* < 0$. Начнем с двух первых.

5.8.2. Случай сильного трения: аperiодическое затухание.

Случай $D^* = \alpha^2 - \omega^2 > 0$, т. е. $\alpha^2 > \omega^2$, или же $\alpha > \omega$ (напомним, что константы α и ω положительны), отвечает *относительно большой силе трения* по сравнению с упругой силой. Как было установлено в теореме 1 из § 5.7, базисными решениями будут две экспоненты $e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, 2$), где λ_i суть корни характеристического уравнения, т. е.

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Оба эти корня *отрицательны*, так что получающийся из общего решения дифференциального уравнения (1) *закон движения*

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

показывает, что любое решение либо есть тождественный нуль, либо оно *асимптотически* и при этом *экспоненциально* стремится к нулю, причем положение равновесия $x = 0$ проходится *максимум* один раз (ни одного или один — это уже зависит от начальных условий).

Подобное движение трудно назвать колебанием — это будет *аperiодическое*¹ «затухание». Возможные графики таких решений показаны на рис. 113.

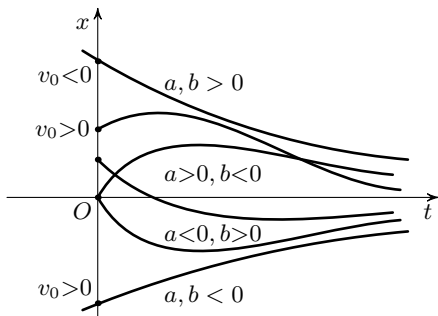


Рис. 113

5.8.3. Промежуточный случай: тоже аperiодическое затухание.

В «промежуточном» случае $D^* = 0$, т. е. $\alpha = \omega$, базисными решениями согласно теореме 2 из § 5.7 будут экспонента $e^{-\alpha t}$ и *квазимногочлен*² $te^{-\alpha t}$, так что в общем случае закон движения записывается как *линейный квазимногочлен* с отрицательным показателем $-\alpha$:

$$x(t) = ate^{-\alpha t} + be^{-\alpha t} = (at + b)e^{-\alpha t}.$$

¹То есть не являющееся периодическим.

²Квазимногочленом с показателем λ называется любая функция, представляемая в виде произведения $e^{\lambda t}p(t)$, где $p(t)$ — многочлен. В упражнениях приведено несколько задач, в которых фигурируют квазимногочлены.

Из теоремы о сравнении роста степенных и показательных функций при $t \rightarrow +\infty$ (см. § 5.3, п. 5.3.4) следует, что и в этом случае любое решение либо есть тождественный нуль, либо оно *асимптотически*, причем опять-таки *экспоненциально*, стремится к нулю. Опять же, положение равновесия $x = 0$ проходится *максимум* один раз, и это движение тоже является аperiодическим затуханием.

Обратимся теперь к самому интересному случаю, когда трение сравнительно мало (по отношению к упругой силе).

5.8.4. Случай малого трения: затухающие колебания. При *относительно небольшой* силе трения — именно, когда $\alpha < \omega$ (но $\alpha > 0$), что соответствует условию $D < 0$, — дифференциальное уравнение гармонических колебаний с трением (1), $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$, не имеет экспоненциальных решений. Однако если коэффициент α обращается в нуль, т. е. трение совсем отсутствует, мы получаем уравнение свободных гармонических колебаний $x'' + \omega^2 x = 0$, решения которого были детально исследованы в § 5.3: они могут быть выражены как линейные комбинации двух базисных решений $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ или же в *каноническом виде*

$$x_K(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

(ω — *собственная* (циклическая) *частота* колебаний, не зависящая от начальных условий; *амплитуда* колебаний A и их *начальная фаза* φ определяются начальными условиями $x(0)$ и $x'(0)$).

Что может измениться, если гармонический осциллятор поместить в вязкую среду? — Мы видели, что при большом трении вместо гармонических колебаний будет аperiодическое затухание. Но у нас трение как раз *небольшое*, так что можно предположить, что режим колебаний сохранится, только амплитуда будет убывать со временем. Исходя из этого применим к отысканию решений дифференциального уравнения (1) аналог метода Лагранжа вариации произвольных постоянных, заменив в формуле (2) константу A на функцию $A(t)$, но *фазу*, т. е. аргумент косинуса $\omega t + \varphi$, оставим по-прежнему *линейной функцией* от t , заменив *собственную* циклическую частоту ω на *неизвестную* частоту $\omega_1 \neq 0$ гипотетических «затухающих колебаний». Подставим решение $x(t)$ в предполагаемом виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

в дифференциальное уравнение (1). Получаем

$$x'(t) = A'(t) \cos(\omega_1 t + \varphi) - \omega_1 A(t) \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

$$x''(t) = A''(t) \cos(\omega_1 t + \varphi) - 2\omega_1 A'(t) \sin(\omega_1 t + \varphi) - \omega_1^2 A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi).$$

После подстановки выражений для x'' , x' и x в левую часть уравнения

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

получится выражение вида

$$a(t) \cos(\omega_1 t + \varphi) + b(t) \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

которое должно тождественно равняться нулю. Для этого *достаточно*, чтобы выражения $a(t)$ и $b(t)$ тождественно равнялись нулю. В данном случае

$$\begin{aligned} a(t) &= A''(t) - \omega_1^2 A(t) + 2\alpha A'(t) + \omega^2 A(t) = \\ &= A''(t) + 2\alpha A'(t) + (\omega^2 - \omega_1^2) A(t), \\ b(t) &= -2\omega_1 A'(t) - 2\alpha \omega_1 A(t) = -2\omega_1 (A'(t) + \alpha A(t)). \end{aligned}$$

Поскольку $\omega_1 \neq 0$, совпадение выражения $b(t)$ с нулем дает для функции $A(t)$ линейное дифференциальное уравнение первого порядка, тотчас же решаемое:

$$A'(t) + \alpha A(t) = 0 \Leftrightarrow A(t) = A_0 e^{-\alpha t}.$$

Подставляя это выражение для переменной амплитуды $A(t)$ в выражение для $a(t)$ и приравнявая результат нулю, получим (сразу вынося константу A_0 за скобку)

$$\begin{aligned} A_0(\alpha^2 e^{-\alpha t} + 2\alpha \cdot (-\alpha e^{-\alpha t}) + (\omega^2 - \omega_1^2) e^{-\alpha t}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_0 e^{-\alpha t} (-\alpha^2 + \omega^2 - \omega_1^2) &= 0, \end{aligned}$$

что справедливо при всех значениях A_0 и $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $-\alpha^2 + \omega^2 - \omega_1^2 = 0$, т. е. при значении частоты «затухающих колебаний» $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ (стоящее под знаком корня число *положительно*, так как в рассматриваемом случае $0 < \alpha < \omega$). Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 1 (теорема существования решений дифференциального уравнения $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$ в случае $0 < \alpha < \omega$). *Если выполняется условие $0 < \alpha < \omega$, то при произвольных значениях констант A, φ и для значения $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ функция вида*

$$x(t) = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (3)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению затухающих колебаний:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0.$$

Вот мы и «расправились» с однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка, у которого характеристический многочлен не имеет действительных корней: результаты, полученные для

уравнения (1) с положительными коэффициентами, легко обобщаются и на *общее* уравнение $x'' + px' + qx = 0$ с отрицательным дискриминантом.

Заметьте, что в предложении мы говорим о *затухающих колебаниях* уже *без кавычек*: формула (3) показывает, что на сей раз положение равновесия проходится бесконечно много раз, причем в моменты, следующие один за другим через *неизменный* промежуток времени — *полупериод затухающих колебаний* $T/2 = \pi/\omega_1$. При этом «размах», т. е. амплитуда, все уменьшается и уменьшается, стремясь к нулю *по экспоненциальному закону*: $|A(t)| = |A_0| \cdot e^{-\alpha t}$ (рис. 114). Величина α характеризует «скорость затухания» и называется его *логарифмическим декрементом*¹.

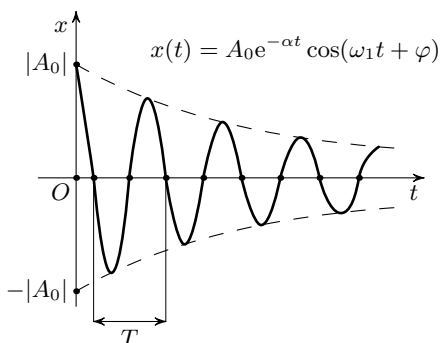


Рис. 114

Добавим еще, что частота ω_1 затухания *меньше*, чем собственная частота осциллятора ω , — трение *замедляет* колебания (и, как мы видели раньше, — это будет, когда величина декремента достигнет значения собственной частоты: при $\alpha \geq \omega$; заметьте, что при $\alpha < \omega$, но $\alpha \rightarrow \omega$ период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$ стремится к $+\infty$).

Используя формулу для косинуса суммы, запишем закон затухающих колебаний (3) еще одним способом:

$$x(t) = ae^{-\alpha t} \cos \omega_1 t + be^{-\alpha t} \sin \omega_1 t = e^{-\alpha t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t). \quad (4)$$

Функции $x_1 = e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t$ и $x_2 = e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t$ составляют *систему базисных решений* для дифференциального уравнения (1) в случае, когда

¹Лат. decrementum — «убавление». Значение α равно скорости убывания логарифма амплитуды. Иногда, впрочем, *логарифмическим декрементом* называют логарифм отношения амплитуд в моменты времени t и $t + \frac{T}{2}$, т. е. через *полупериод* — он равен $\delta = \frac{\pi \alpha}{\omega_1}$.

$\alpha < \omega$. Однако мы этого не доказали: не доказали теорему единственности, которая должна гласить, что любое решение $x(t)$ дифференциального уравнения $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$ в случае $\alpha < \omega$ представляется в виде, допустим, (4), причем единственным образом — в том смысле, что постоянные a, b однозначно определяются начальными условиями $x(0)$ и $x'(0)$.

Можно сказать иначе: общее решение дифференциального уравнения $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$ в случае $\alpha < \omega$ может быть записано формулой (3) (или (4)). Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно (см. также упражнения).

5.8.5. Случай малого трения: формальный подход. Заметим, что в рассматриваемом случае $D^* = \alpha^2 - \omega^2 < 0$ частота затухающих колебаний ω_1 есть корень из $-D^* = \omega^2 - \alpha^2$, и если формально отыскивать «несуществующие» корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0$, то получим примечательные формулы:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\alpha \pm \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \cdot \sqrt{-1} = -\alpha \pm i\omega_1.$$

Эти «корни» суть комплексные числа, причем различные. Для них справедлива теорема Виета:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (-\alpha + i\omega_1) + (-\alpha - i\omega_1) = -2\alpha,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= (-\alpha + i\omega_1)(-\alpha - i\omega_1) = (-\alpha)^2 - i^2 \cdot \omega_1^2 = \\ &= \alpha^2 - (-1)(\omega^2 - \alpha^2) = \omega^2, \end{aligned}$$

поэтому, как при доказательстве теоремы 1 из § 5.7, дифференциальное уравнение (1) можно переписать через «повторное дифференцирование» в виде

$$(x' - \lambda_2 x)' - \lambda_1(x' - \lambda_2 x) = 0.$$

Значит, вспомогательная функция $z = x' - \lambda_2 x$ по-прежнему удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка $z' - \lambda_1 z = 0$. Но тогда, рассуждая формально (при этом формулы будут соответствовать эйлерову определению экспоненты комплексного аргумента), получаем

$$\begin{aligned} z &= C e^{\lambda_1 t} = (A + iB) e^{-\alpha + i\omega_1} t = (A + iB) e^{-\alpha t} e^{i\omega_1 t} = \\ &= (A + iB) e^{-\alpha t} (\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t). \end{aligned}$$

Можно здесь раскрыть скобки, выделить действительную часть и решать затем получающееся уравнение первого порядка $x' - \lambda_2 x = z(t)$ аналогично тому, как мы это делали при доказательстве упомянутой теоремы 1. А можно остановиться на самой первой формуле для $z(t)$: $z = C e^{\lambda_1 t}$, где C — комплексная константа, — а дальше действовать в точности так, как при доказательстве теоремы 1, и лишь на

заключительном этапе выделить действительную часть решения $x(t)$. Тот и другой пути приводят к общему решению дифференциального уравнения (1) в случае $\alpha < \omega$ — попробуйте по ним пойти!

5.8.6. Уравнение вынужденных колебаний с трением: общий вид и поведение решений. Рассмотрим, как в §5.5 (п. 5.5.3), *неоднородное* линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x'' + px' + qx = f(t), \quad (5)$$

где $f(t)$ — заданная функция. Остановимся на конкретном примере, когда к упругой силе и силе вязкого трения, действующим на точку в вязко-упругой среде, добавляется внешняя, *вынуждающая сила*, изменяющаяся по гармоническому закону. Тогда однородное дифференциальное уравнение колебаний с трением $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$ (см. §5.8) превращается в неоднородное уравнение вида (5):

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = a \cos \nu t \quad (6)$$

(ω — собственная частота осциллятора, ν — «вынуждающая частота», т. е. частота колебаний внешней силы).

Согласно *второй теореме Д'Аламбера* из §3.5 общее решение неоднородного дифференциального уравнения (5), равно как и его «специального» случая — уравнения (6), представляется в виде суммы *частного решения* и *общего решения* соответствующего однородного уравнения. В случае уравнения (6) при *малом трении* (точнее, при $\alpha < \omega$) из результатов предыдущего параграфа получается представление

$$x(t) = x_1(t) + A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (7)$$

($\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$), в котором нужно найти *частное решение* $x_1(t)$. Заметим, что, в отличие от вынужденных колебаний *без трения* (§5.5) согласно формуле (7), *при любых начальных условиях* решение $x(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ «стремится» или, лучше сказать, *асимптотически приближается к частному решению* $x_1(t)$: разность $x(t) - x_1(t)$ стремится к нулю, когда $t \rightarrow +\infty$. Попробуем найти частное решение уравнения (6).

5.8.7. Частное решение уравнения вынужденных колебаний с трением. В каком виде целесообразно искать решение? Поскольку необходимо компенсировать неоднородность $f(t) = a \cos \nu t$, а в левую часть уравнения (6) входят не только искомая функция вместе с ее второй производной, но и *первая производная* функции, частное решение целесообразно искать в виде *линейной комбинации* косинуса

и синуса аргумента νt :

$$x_1(t) = A \cos \nu t + B \sin \nu t$$

($A, B \in \mathbb{R}$ — константы).

Вычисляем производные гипотетического частного решения,

$$x_1'(t) = -\nu A \sin \nu t + \nu B \cos \nu t,$$

$$x_1''(t) = -\nu^2 A \cos \nu t - \nu^2 B \sin \nu t,$$

и подставляем выражения для x_1 , x_1' , x_1'' в уравнение (6):

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = a \cos \nu t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\nu^2 A \cos \nu t - \nu^2 B \sin \nu t) + 2\alpha(-\nu A \sin \nu t + \nu B \cos \nu t) + \\ + \omega^2(A \cos \nu t + B \sin \nu t) = a \cos \nu t,$$

откуда следует, что при любом значении $t \in \mathbb{R}$ выполняется

$$(-\nu^2 A + 2\alpha\nu B + \omega^2 A - a) \cos \nu t + (-\nu^2 B - 2\alpha\nu A + \omega^2 B) \sin \nu t = 0. \quad (8)$$

Лемма 1 (о линейной независимости функций $\cos \nu t$ и $\sin \nu t$). Если при $\nu \neq 0$ для каких-то чисел $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ выполняется условие

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad z(t) = A_1 \cos \nu t + B_1 \sin \nu t = 0, \quad (9)$$

то $A_1 = B_1 = 0$.

Доказательство. Подставляя в условие (9) значение $t = 0$, получаем, что $z(0) = A_1 = 0$. Далее, так как производная

$$z'(t) = -\nu A_1 \sin \nu t + \nu B_1 \cos \nu t$$

также тождественно равна нулю, $z'(0) = \nu B_1 = 0$, поэтому и $B_1 = 0$. $\square$

Согласно этой лемме из соотношения (8) вытекает, что рассматриваемая функция $x_1(t) = A \cos \nu t + B \sin \nu t$ является решением дифференциального уравнения (6) тогда и только тогда, когда коэффициенты A и B удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -\nu^2 A + 2\alpha\nu B + \omega^2 A = a, & \text{(I)} \\ -\nu^2 B - 2\alpha\nu A + \omega^2 B = 0 & \text{(II)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(II): } (\omega^2 - \nu^2)B = 2\alpha\nu A \Rightarrow A = \frac{\omega^2 - \nu^2}{2\alpha\nu} B, \\ \text{(I): } (\omega^2 - \nu^2)A + 2\alpha\nu B = \left(\frac{(\omega^2 - \nu^2)^2}{2\alpha\nu} + 2\alpha\nu \right) B = a. \end{cases}$$

Из последнего соотношения находим выражение для B , а затем и для A :

$$B = \frac{2\alpha\nu}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2} a \Rightarrow A = \frac{\omega^2 - \nu^2}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2} a.$$

(Заметим, что знаменатели во всех дробях — в выражениях для A и B , а также в предыдущей системе, — отличны от нуля, так как $\alpha \neq 0$ и $\nu \neq 0$. При этом если «все-таки» $\alpha = 0$, т.е. *трение отсутствует*, то приведенные формулы дают $B = 0$, $A = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2}$ — тот же результат, который был получен в § 5.5.)

5.8.8. Анализ частного решения. Найденное частное решение $x_1(t) = A \cos \nu t + B \sin \nu t$ удобнее переписать с помощью формулы вспомогательного аргумента (из п. 5.3.5) в «каноническом» виде:

$$x_1(t) = A \cos(\nu t + \varphi_1),$$

где амплитуда A основной составляющей вынужденных колебаний равна

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{a}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2} \sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2},$$

откуда получаем, что

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2}}.$$

Чтобы проанализировать характер зависимости амплитуды A от вынуждающей частоты ν , рассмотрим *квадрат знаменателя* дроби из последней формулы:

$$Q = Q(\nu) = (\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2 = \nu^4 - (2\omega^2 - 4\alpha^2)\nu^2 + \omega^4.$$

Дифференцируя эту функцию по переменной ν , находим

$$Q'(\nu) = 4\nu^3 - 2(2\omega^2 - 4\alpha^2)\nu = 4\nu(\nu^2 - (\omega^2 - 2\alpha^2)).$$

Значит, функция $Q(\nu)$ имеет *положительную точку минимума* лишь в случае, когда $\alpha < \frac{\omega}{\sqrt{2}}$, причем эта точка есть $\nu_0 = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2} = \sqrt{\omega_1^2 - \alpha^2}$

(напомним, что $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$). Значение $Q_{\min}$ в ней равно

$$\begin{aligned} Q_{\min} = Q(\nu_0) &= (\omega^2 - (\omega^2 - 2\alpha^2))^2 + 4\alpha^2(\omega^2 - 2\alpha^2) = \\ &= 4\omega^4 + 4\alpha^2\omega^2 - 8\alpha^4 = 4\alpha^2(\omega^2 - \alpha^2) = 4\alpha^2\omega_1^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, график зависимости $Q = Q(\nu)$ имеет вид, показанный на рис. 115: с убыванием значения α минимальное значение $Q_{\min}$ убывает примерно пропорционально величине α^2 .

Соответственно этому функция, выражающая зависимость «главной» амплитуды A от вынуждающей частоты ν , имеет в точке ν_0 *максимум*, причем значение в этой точке, равное

$$A_{\max} = \frac{a}{\sqrt{Q_{\min}}} = \frac{a}{\sqrt{4\alpha^2(\omega^2 - \alpha^2)}} = \frac{a}{2\alpha\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} = \frac{a}{2\alpha\omega_1},$$

возрастает (до бесконечности!), когда $\alpha \rightarrow 0$. Примерный вид *резонансной кривой* при малых значениях α изображен на рис. 116.

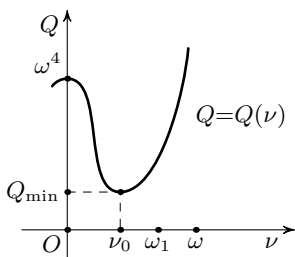


Рис. 115

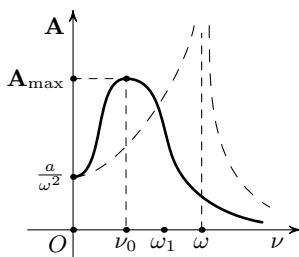


Рис. 116

Теперь мы можем выписать и *общее решение* дифференциального уравнения (6):

$$x(t) = x_1(t) + A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \varphi) = A \cos(\nu t + \varphi_1) + A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \varphi).$$

Какие выводы из полученных результатов можно сделать? Обдумайте это самостоятельно. Сравните новые результаты с теми, которые были получены для вынужденных колебаний в идеальном случае отсутствия трения (в § 5.5).

Упражнения, задачи и задания к гл. V

1. Найдите работу, необходимую для растяжения пружины на 16 см, если сила в 4 Н растягивает ее на 8 см.
2. Найдите работу против силы тяжести, производимую при наполнении цилиндрического бака высоты H с радиусом основания R через отверстие в его дне.
3. Найдите работу против силы тяжести, производимую при насыпании кучи песка с плотностью ρ , имеющей форму конуса высоты H с радиусом основания R .
4. Найдите работу против архимедовой силы выталкивания при полном погружении в воду цилиндра высоты H с радиусом основания R , если погружение осуществляется
 - 1) основанием вниз;
 - 2) «боком» вниз.
5. Найдите такую же работу при погружении в воду конуса высоты H с радиусом основания R , если погружение осуществляется
 - 1) основанием вниз;
 - 2) вершиной вниз.

Не можете ли вы сразу сказать, в каком случае работа будет больше?

6. Найдите такую же работу при погружении в воду куба с ребром a , если погружение осуществляется
 - 1) плашмя (гранью вниз);

- 2) ребром вниз;
- 3) углом (вершиной) вниз.

Не можете ли вы сразу сказать, в каком случае работа будет больше?

7. Найдите суммарную силу давления воды на стенки доверху заполненного аквариума — прямоугольного параллелепипеда $a \times b \times c$.

8. Найдите суммарную силу давления воды на плотину¹ (или задвижку в трубе соответствующего профиля), имеющую форму трапеции высоты h с основаниями $a > b$, если

- 1) большее основание находится на поверхности воды;
- 2) меньшее основание находится на поверхности воды.

9. Решите аналогичную задачу в случае, когда плотина (или задвижка) имеет форму треугольника с основанием a и высотой h , если

- 1) основание находится на поверхности воды;
- 2) противолежащая вершина находится на поверхности воды (а основание параллельно поверхности воды).

10. Решите такую же задачу для плотины (задвижки), имеющей форму полукруга радиуса R , если

- 1) его диаметр находится на поверхности воды;
- 2) противолежащая точка полуокружности находится на поверхности воды (а диаметр параллелен поверхности воды).

* * *

Закон всемирного тяготения формулируется для точечных масс. Для отыскания притяжения точечной массы протяженной массой не обойтись без интегрирования — к нему приходят, разбивая «протяженную массу» на «кусочки» (как бы точечные массы) и суммируя силы, вычисляемые в соответствии с законом всемирного тяготения для точечных масс. Впервые вычисления, которые придется делать при решении задач следующего цикла, проделал в своих «Началах» Исаак Ньютон.

11. Найдите силу притяжения точечной массы m однородным стержнем длины $a = 2R$ и массы M , если расстояние от материальной точки (массы m) до середины стержня равно r , причем точка лежит

- 1) на продолжении стержня;
- 2) на серединном перпендикуляре к стержню.

(Во втором случае выпишите нужный интеграл, не вычисляя его; однако, определите, в каком случае сила больше.)

12. Найдите силу притяжения точечной массы m однородными

- 1) окружностью, 2) кругом

¹Здесь и далее «плотина» считается расположенной вертикально.

радиуса R и массы M , если точка лежит на перпендикуляре к плоскости указанных фигур, восстановленном в центре (окружности, круга) на расстоянии r от него.

13. Решите ту же задачу — о притяжении точечной массы m однородными

1) окружностью, 2) кругом

радиуса R и массы M , если точка лежит в плоскости указанных фигур на расстоянии r от их центров. Для окружности рассмотрите два случая:

а) $r > R$, т. е. точка лежит *вне* окружности;

б) $r < R$, т. е. точка лежит *внутри* окружности.

14. Найдите силу притяжения точечной массы m однородной сферой радиуса R и массы M , если точка лежит на расстоянии r от центра сферы. Рассмотрите отдельно два случая:

1) $r > R$, т. е. точка лежит *вне* сферы;

2) $r < R$, т. е. точка лежит *внутри* сферы.

Указание. В обоих случаях рассмотрите разбиение сферы на «кусочки» коническими поверхностями с вершиной в рассматриваемой материальной точке.

(*Ответы:* 1) сила будет такая же, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в ее центре;

2) сила будет равна нулю!)

15. Найдите силу притяжения точечной массы m однородным шаром радиуса R и массы M , если точка лежит на расстоянии $r > R$ от центра шара.

Указание. Разбейте шар на тонкие сферические слои.

(*Ответ:* сила будет такая же, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в ее центре.)

16. Допустим, что некоторая планета является однородным шаром радиуса R и массы M . Через ее центр «прокопан» сквозной тоннель («бездонная шахта»).

1) Напишите II закон Ньютона для точечной массы m , движущейся в этом тоннеле под действием закона всемирного тяготения.

2) Найдите закон движения этой материальной точки, т. е. зависимость $r = r(t)$ расстояния r от этой точки до центра планеты от времени t .

3) Сделайте этот расчет для планеты Земля, считая ее однородным шаром радиуса $6,37 \cdot 10^6$ м массы $6 \cdot 10^{24}$ кг (иначе, 6 *квадрильонов тонн*).

Комментарий. Получающийся в этой задаче результат довольно удивителен: материальная точка будет совершать гармонические коле-

бания, частота и период которых не зависят от массы m точки. В случае «Земли» период будет примерно равен времени одного оборота спутника вокруг нее — или времени полета Ю. А. Гагарина¹ (проверьте!).

* * *

Для решения следующей задачи потребуется значение *гравитационной постоянной*:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2}.$$

17. Вычислите скорости убегания:

- 1) от Луны (ее масса $M = 7,35 \cdot 10^{25}$ г, радиус — $R = 1,74 \cdot 10^6$ м);
- 2) от Марса ($M = 6,42 \cdot 10^{26}$ г, $R = 3,38 \cdot 10^7$ м);
- 3) от Венеры ($M = 4,87 \cdot 10^{27}$ г, $R = 6,05 \cdot 10^6$ м);
- 4) от Юпитера ($M = 1,90 \cdot 10^{30}$ г, $R = 7,14 \cdot 10^7$ м);
- 5) от Солнца с орбиты Земли² (масса Солнца $M = 1,99 \cdot 10^{33}$ г, средний радиус земной орбиты $R = 1,50 \cdot 10^{11}$ м);
- 6) от Солнца с его поверхности (радиус Солнца $R = 6,96 \cdot 10^8$ м).

* * *

Энергия вращательного движения и момент инерции

Пусть материальная точка массы m вращается с угловой скоростью ω (вообще говоря, $\omega = \omega(t)$, т. е. скорость зависит от времени), находясь на расстоянии r (не зависящем от времени) от центра вращения. Тогда ее «линейная» (скалярная) скорость равна $v = \omega r$ и кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\omega^2 mr^2$. То же можно сказать и для *вращения точки в пространстве около прямой* (оси) Oz , только r в этом случае есть расстояние до оси.

Следующий шаг: около оси Oz вращается с угловой скоростью ω не одна материальная точка, а *система* материальных точек P^i , $i = 1, 2, \dots, n$, массы которых m_i , а расстояния до оси вращения Oz равны r_i . При этом эти расстояния считаются неизменными, а угловая скорость $\omega = \omega(t)$ в любой момент времени одна и та же для всех точек (можно сказать, что система точек вращается около оси Oz как *единое целое*, и представлять себе вращающуюся «жесткую» конфигурацию точек P^i , как бы скрепленных невесомыми стержнями). Тогда кинетическая энергия движения этой системы равна сумме слагаемых вида $\frac{1}{2}\omega^2 m_i r_i^2$:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

¹Первый полет человека в космос состоялся 12 апреля 1961 г.

²Эта скорость называется *третьей космической скоростью*; она равна приблизительно $16,7 \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Разумеется, подобную формулу мы получим и для протяженных тел, опять-таки разбивая их на «кусочки» (точечные массы) и суммируя кинетические энергии «кусочков». В пределе получится некоторая интегральная формула. Аналогично можно поступить при рассмотрении вращения плоской фигуры около лежащей в ее плоскости точки.

18. Выведите формулу для кинетической энергии вращения неоднородного стержня — отрезка $[a, b]$ какой-то прямой (оси) Qx — около центра вращения O (или около оси Oz , проведенной через точку O перпендикулярно плоскости, проходящей через прямую Qx и точку O), если известна линейная плотность стержня — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $\rho(x)$ — и угловая скорость вращения ω .

Ответ: если расстояние от точки x оси Qx до центра вращения O (или до оси вращения Oz) обозначить через $r(x)$, то

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_a^b \rho(x) r^2(x) dx.$$

По-видимому, ясно, что для кинетической энергии вращения *произвольного* ограниченного тела (или ограниченной плоской фигуры) около оси Oz *всегда* получится выражение вида

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot J;$$

появляющийся здесь сомножитель J , выражающийся как некоторая сумма или же интеграл, называется *моментом инерции* вращающегося тела *относительно оси* Oz^1 . Мы не будем приводить точных определений момента инерции для произвольной плоской фигуры или пространственного тела, ибо для этого потребовались бы так называемые *кратные интегралы* (по плоской или пространственной области). Приводимые ниже задачи на отыскание моментов инерции нетрудно свести к обыкновенным интегралам (по отрезкам), и для их решения достаточно следующих определений.

Определение 1. *Моментом инерции материальной точки P массы m относительно центра O называется величина*

$$J = mr^2,$$

где $r = OP$ — расстояние от точки до центра.

Моментом инерции системы материальных точек P^i , $i = 1, 2, \dots, n$, с массами m_i относительно центра O называется сумма моментов инерции этих точек P^i относительно центра O , т. е. сумма

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где $r_i = OP^i$.

¹ Момент инерции при вращательном движении как бы играет «роль массы». В математике момент инерции называют *вторым моментом* — потому что в его определении фигурируют вторые степени расстояний.

Моментом инерции стержня — отрезка $[a, b]$ оси Qx с линейной плотностью $\rho(x)$ — относительно центра O называется *интеграл*

$$\int_a^b \rho(x) r^2(x) dx,$$

где $r(x)$ — расстояние от центра O до точки x оси Qx .

Определение 2. *Моментом инерции материальной точки P массы m относительно оси Oz называется величина*

$$J = mr^2,$$

где r — расстояние от точки до оси.

Моментом инерции системы материальных точек P^i , $i = 1, 2, \dots, n$, с массами m_i относительно оси Oz называется сумма моментов инерции этих точек P^i относительно оси Oz :

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где r_i — расстояние от точки P^i до оси.

Моментом инерции стержня — отрезка $[a, b]$ оси Qx с линейной плотностью $\rho(x)$ — относительно оси Oz называется *интеграл*

$$\int_a^b \rho(x) r^2(x) dx,$$

где $r(x)$ — расстояние от точки x оси Qx до оси Oz .

Во всех приводимых задачах отрезки, плоские фигуры и пространственные тела считайте однородными; ответ лучше давать в двух видах: через массу фигуры и через плотность (линейную, поверхностную или обычную) ρ . Заметьте, что в определениях 1–2 никакое вращательное движение не фигурирует, поэтому задачи даны в самых общих и удобных для вычислений формулировках.

19. Найдите момент инерции отрезка (стержня) массы M и длины L относительно

- 1) его середины;
- 2) одного из его концов;
- 3) прямой, параллельной отрезку и находящейся на расстоянии a от него;
- 4) прямой, перпендикулярной отрезку и такой, что *общий перпендикуляр* прямой и отрезка содержит середину отрезка и равен a .

20. Найдите момент инерции («сплошного») треугольника массы M с основанием a и высотой h относительно основания.

21. Найдите момент инерции квадрата массы M со стороной a относительно

- 1) стороны квадрата;
- 2) «средней линии» квадрата (т.е. прямой, проходящей через середины противоположных сторон);
- 3) диагонали квадрата;
- 4) оси, проходящей через центр квадрата перпендикулярно его плоскости.

22. Найдите момент инерции прямоугольника со сторонами $a > b$ массы M относительно

- 1) стороны a ;
- 2) стороны b ;
- 3) средней линии прямоугольника, параллельной стороне a ;
- 4) средней линии прямоугольника, параллельной стороне b ;
- 5) диагонали прямоугольника;
- 6) оси, проходящей через центр прямоугольника перпендикулярно его плоскости.

23. Найдите момент инерции окружности массы M и радиуса R относительно:

- 1) оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости;
- 2) диаметра окружности.

24. Найдите момент инерции круга (тонкого однородного диска) массы M и радиуса R относительно

- 1) оси, проходящей через центр круга перпендикулярно ему;
- 2) диаметра круга.

25. Найдите момент инерции полуокружности массы $M/2$ и радиуса R относительно

- 1) оси, проходящей через центр исходной окружности перпендикулярно ее плоскости;
- 2) диаметра полуокружности;
- 3) радиуса, проходящего через центр исходной окружности перпендикулярно диаметру полуокружности.

(Не могли бы вы дать ответы в этой и следующей задачах *сразу!*)

26. Найдите момент инерции полукруга массы $M/2$ и радиуса R относительно

- 1) оси, проходящей через центр исходного круга перпендикулярно ему;
- 2) диаметра полукруга;
- 3) радиуса, проходящего через центр исходного круга перпендикулярно диаметру полукруга.

27. Найдите моменты инерции эллиптической пластинки массы M с полуосями a и b относительно ее главных осей (тех, в которых уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$).

28. Найдите моменты инерции относительно осей Ox и Oy параболического сегмента массы M , ограниченного линиями $ay = 2ax - x^2$ ($a > 0$) и $y = 0$.

29. Найдите моменты инерции прямых круговых

- 1) цилиндра; 2) конуса

с массами M , радиусами оснований R и высотами H относительно их осей.

30. Найдите моменты инерции

- 1) шара; 2) сферы

с массами M и радиусами R относительно их диаметров.

31. Изобразите (и опишите) тела вращения куба около

- 1) одного из ребер;
2) средней линии какой-то грани;
3) диагонали какой-то грани;
4) диагонали куба.

Найдите объемы получающихся тел.

32. Найдите моменты инерции куба (сплошного, например деревянного, кубика) относительно четырех осей, указанных в предыдущей задаче.

Уравнения Ньютона и фазовые портреты

33. Постройте фазовые портреты следующих дифференциальных уравнений (здесь $x = x(t)$):

- | | | |
|------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $x'' = -4x$; | 3) $x'' = 4x$; | 5) $x'' = -x + 2$; |
| 2) $x'' = x$; | 4) $x'' = 4 - 2x$; | 6) $x'' = 4x - 6$. |

34. Найдите все решения $x = x(t)$ дифференциального уравнения Ньютона вида $x'' = kx + b$ и исследуйте их фазовые портреты в зависимости от значений параметров k и b .

Указание. Упростите дифференциальное уравнение, сделав подходящую линейную замену (вида $x + a = z$).

35. Опишите все решения $x = x(t)$ данных дифференциальных уравнений и построьте их фазовые портреты:

- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1) $x'' = 2 x $; | 4) $x'' = x - 1$; | 7) $x'' = x + 2 x $; |
| 2) $x'' = - x $; | 5) $x'' = x - 1 $; | 8) $x'' = 2x - x $. |
| 3) $x'' = 1 - x $; | 6) $x'' = x + x $; | |

Указание. Решения описываются «составными» формулами; при этом нужно использовать непрерывность решений.

36. Постройте эскизы фазовых портретов для следующих дифференциальных уравнений (здесь $x = x(t)$):

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1) $x'' = 2 - x $; | 5) $x'' = 2 - x - 1 $; |
| 2) $x'' = x - 1$; | 6) $x'' = x + 1 - 3$; |
| 3) $x'' = x - 1 - 2$; | 7) $x'' = x - 1 $; |
| 4) $x'' = 3 - x + 1 $; | 8) $x'' = x - 1 - 1$. |

37. Выполните то же самое задание для следующих дифференциальных уравнений:

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| 1) $x'' = x^2 - 4$; | 6) $x'' = 2x - x^2$; |
| 2) $x'' = 1 - x^2$; | 7) $x'' = x^2 + x - 6$; |
| 3) $x'' = 3x^2 + 1$; | 8) $x'' = 15 - x^2 + 2x$; |
| 4) $x'' = -1 - x^2$; | 9) $x'' = x^2 - 2x - 15$; |
| 5) $x'' = 3x^2 - 2x$; | 10) $x'' = 6 - x^2 - x$. |

38. Выполните то же задание для следующих дифференциальных уравнений:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $x'' = x^3 - 9x$; | 4) $x'' = 4x - x^3$; |
| 2) $x'' = x^3 - 3x^2$; | 5) $x'' = x^3 + x - 2$; |
| 3) $x'' = 3x^2 - x^3$; | 6) $x'' = -x^3 - x - 2$. |

Гармонические колебания

39. Запишите двумя способами (в стандартном и каноническом видах) решение дифференциального уравнения гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

40. Пусть колебания гармонического осциллятора подчиняются дифференциальному уравнению (1): $mx'' = -kx$. Найдите коэффициент упругости k , если масса $m = 5$ и одно из решений уравнения (1) имеет вид

$$x = 2 \cos \frac{t}{3}.$$

41. В той же ситуации $m = 2$, $k = 8$. Найдите решение $x(t)$ дифференциального уравнения (1), если $x(0) = 1$, $v(0) = 4$. Найдите амплитуду соответствующих колебаний.

42. В той же ситуации $m = 1,5$ и $k = 8$, причем при $t = 0$ и при $t = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ значение $x(t)$ равно -1 . Найдите выражение для скорости колебаний $v(t)$.

43. В той же ситуации $m = 0,2$ и $k = 1,8$, причем при $t = 0$ значение $x(t)$ равно -4 . Найдите скорость колебаний в момент времени $t = \frac{\pi}{6}$. Вообще, в какие моменты времени можно в этом случае вычислить скорость?

44. В той же ситуации $m = 1$ и $k = 0,25$, причем известно, что $x(0) = 1$, $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите закон движения $x = x(t)$ и амплитуду колебаний.

45. Пусть период гармонических колебаний равен $T = \frac{2\pi}{15}$, причем $v(0) = -15$, $v(\frac{\pi}{2}) = 3$. Найдите закон движения $x = x(t)$ и амплитуду колебаний.

46. Найдите амплитуду гармонического колебания $x(t)$, если

1) $x'' = -9x$, $x(0) = 5$, $v(0) = x'(0) = 36$,

2) $x'' = -6x$, $x(0) = 6$, $v(0) = x'(0) = 36$.

47. Найдите длину L секундного маятника, совершающего одно колебание в секунду. Найдите длину минутного маятника.

Периодические функции (I)

Определение 3. Числовая функция f называется *периодической*, если для некоторого отличного от 0 числа T выполнены следующие условия:

$$(1) \forall x \in D(f) \quad x \pm T \in D(f);$$

$$(2) \forall x \in D(f) \quad f(x + T) = f(x).$$

Значения $T \in \mathbb{R}$, обладающие свойствами (1)–(2), называются *периодами* функции f (таким образом, *любая* функция имеет число 0 своим периодом, периодическая же функция обязана иметь *ненулевой* период).

Наименьший из положительных периодов периодической функции f , если таковой существует (!), называется *примитивным периодом* функции f (и часто, говоря о периоде функции f , подразумевают именно примитивный период).

48. Может ли периодическая функция иметь только один ненулевой период? иметь конечное число периодов? не иметь положительных периодов? иметь только положительные периоды? не иметь примитивного периода? иметь периодами все действительные числа?

49. Пусть функция f периодическая, число $T \neq 0$ является ее периодом. Докажите, что тогда

1) число $-T$ тоже является периодом функции f

(и $\forall x \in D(f) \quad f(x - T) = f(x)$);

2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ число nT является периодом функции f

(и $\forall x \in D(f) \quad f(x + nT) = f(x)$).

Каким геометрическим свойством обладают графики периодических функций?

50. Докажите периодичность функций и найдите все их периоды:

1) $f(x) \equiv 17$,

2) $g(x) = \mathcal{D}(x)$ (функция Дирихле),

3) $h(x) = \{2x\}$ (дробная часть $2x$),

4) $r(x) = \mathcal{R}(x)$ (функция Римана).

(Напомним определения *функций Дирихле* и *Римана*:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ & \text{и } x = \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь } (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}); \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

51. Докажите, что

1) сумма $T_1 + T_2$,

2) разность $T_1 - T_2$

двух любых периодов T_1, T_2 периодической функции f тоже являются периодами функции f . (Это свойство множества $\mathcal{P}_f$ всех периодов функции f :

$$\forall T_1, T_2 \in \mathcal{P}_f \quad T_1 \pm T_2 \in \mathcal{P}_f \quad (2)$$

называется *групповым*. Иначе можно сказать, что множество $\mathcal{P}_f$ всех периодов периодической функции f образует *группу по сложению* — *аддитивную подгруппу* группы всех действительных чисел $\mathbb{R}$.)

52. Существует ли периодическая функция, периодами которой были бы все иррациональные числа и нуль, и *только* они? все числа вида $m\sqrt{2}$, $m \in \mathbb{Z}$ (и только они)? все числа вида $a\sqrt{2}$, $a \in \mathbb{Q}$? все числа вида $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in \mathbb{Z}$? все числа вида $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$?

53. Докажите, что, какова бы ни была аддитивная подгруппа $\mathcal{P}$ группы $\mathbb{R}$ (т. е. числовое множество $\mathcal{P}$, обладающее свойством (2)), существует периодическая функция, множество периодов которой совпадает с $\mathcal{P}$.

54. Докажите, что если периодическая функция f имеет примитивный период P , то любой другой ее период есть целое кратное числа P :

$$\forall T \in \mathcal{P}_f \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad T = nP$$

(в этом случае говорят, что *группа периодов $\mathcal{P}_f$ порождена одним своим элементом* — P).

55. Пусть периодическая функция $f(x)$ имеет примитивный период P . Докажите, что тогда и функции

$$1) \ g(x) = Af(x), \quad 2) \ h(x) = f(ax), \quad 3) \ q(x) = f(ax + b)$$

(здесь $A, a \neq 0$) также периодичны и имеют примитивные периоды. Чему они будут равны?

56. Докажите, что следующие функции не являются периодическими:

$$\begin{array}{lll} 1) \ x + 17, & 3) \ \{|x|\}, & 5) \ \sin |x|, \\ 2) \ x^2, & 4) \ x + \sin x, & 6) \ \sin(x^2) \end{array}$$

($\{z\}$ обозначает дробную часть числа z).

57. Докажите, что никакая отличная от константы полиномиальная функция $y = p_n(x)$ ($n \geq 1$) не является периодической.

58. Докажите, что никакая (отличная от константы) дробно-рациональная функция $y = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ (p_m и q_n — многочлены от x) не является периодической.

59. Обязана ли периодическая функция быть ограниченной? Докажите, что если всюду определенная периодическая функция непрерывна (на всей числовой оси), то она ограничена на $\mathbb{R}$.

60. Может ли график периодической функции иметь

1) наклонную, 2) горизонтальную асимптоту?

61. Докажите, что всюду определенная и всюду непрерывная периодическая функция, отличная от константы, обязательно имеет примитивный период.

62. Докажите, что следующие функции периодичны и имеют примитивный период, и найдите этот период (с доказательством!):

- | | |
|----------------------|--------------------------------------|
| 1) $ \sin x $, | 5) $\sin^3 x - \frac{3}{4} \sin x$, |
| 2) $\sin^2 x$, | 6) $\sin 2x + \operatorname{tg} x$, |
| 3) $\sqrt{\sin x}$, | 7) $[\sin x]$, |
| 4) $\sin^3 x$, | 8) $ \{x\} - 0,5 $. |

(напомним, что $[z]$ — целая часть числа z).

63. Пусть функции f и g всюду определены, причем функция f периодическая, g не периодическая. Что можно сказать о периодичности композиций $g(f(x))$ и $f(g(x))$? Приведите соответствующие примеры.

Сложение гармонических колебаний

64. 1) Приведите пример двух гармонических колебаний (разных частот), сумма которых не была бы гармоническим колебанием (никакой частоты).

2) Докажите, что сумма двух ненулевых гармонических колебаний различных частот ω_1 и ω_2 *никогда не является* гармоническим колебанием.

(Указание. Воспользуйтесь тем, что слагаемые x_1 и x_2 удовлетворяют дифференциальным уравнениям $x_1'' = -\omega_1^2 x_1$ и $x_2'' = -\omega_2^2 x_2$.)

65. Постройте векторные диаграммы следующих гармонических колебаний:

- | | |
|---|--|
| 1) $-2 \cos \omega t$, | 3) $-3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, |
| 2) $3 \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$, | 4) $3 \cos\left(-\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$, |

- 5) $4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, 8) $3 \sin\left(-\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$,
 6) $3 \sin \omega t$, 9) $\cos \omega t + \sqrt{3} \sin \omega t$.
 7) $3 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$,

66. Запишите в стандартной ($a \cos \omega t + b \sin \omega t$) и в канонической ($A \cos(\omega t + \varphi)$) формах гармонические колебания частоты ω с векторными диаграммами

- 1) $\overline{A} = (1, 1)$, 2) $\overline{A} = (0, -2)$, 3) $\overline{A} = (-3, 4)$.

67. Используя векторные диаграммы, найдите амплитуды и начальные фазы следующих гармонических колебаний:

- 1) $\cos(\omega t + \pi) - \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$, 3) $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$,
 2) $\cos(\omega t + \pi) - 2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$, 4) $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$.

68. При каком значении начальной фазы φ сумма гармонических колебаний $\cos \omega t$ и $\cos(\omega t + \varphi)$ будет иметь амплитуду

- 1) $\sqrt{2}$, 2) $\sqrt{3}$, 3) 1, 4) 2.

В каждом из этих случаев найдите начальную фазу суммы.

69. Напишите общие формулы для определения амплитуды A и начальной фазы φ суммы гармонических колебаний

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

70. Выясните, когда произведение гармонических колебаний $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ будет тоже гармоническим колебанием.

71. (XI Международная математическая олимпиада.) Для произвольной функции вида

$$f(x) = \cos(x + a_0) + \frac{\cos(x + a_1)}{2} + \frac{\cos(x + a_2)}{4} + \dots + \frac{\cos(x + a_n)}{2^n}$$

докажите, что если для каких-то двух значений x_1 и x_2 выполнены равенства $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то $x_2 - x_1 = \pi k$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

Периодические функции (II)

72. Обязаны ли

- 1) сумма, 2) произведение

двух всюду определенных периодических функций быть периодическими функциями?

73. Докажите, что если две всюду определенные периодические функции имеют какой-то общий ненулевой период, то их сумма и произведение будут периодическими.

Определение 4. Два отличных от 0 действительных числа a и b называются *соизмеримыми*, если их отношение рационально:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

В противном случае числа a и b называются *несоизмеримыми*.

74. Докажите, что если у двух всюду определенных периодических функций есть какие-то соизмеримые периоды, то их сумма и произведение будут периодическими.

75. Докажите, что если две периодические функции имеют общий ненулевой период тогда и только тогда, когда они имеют какие-то два соизмеримых периода.

76. 1) Пусть всюду определенная и всюду дифференцируемая функция f периодична. Докажите, что тогда и ее производная f' периодична.

2) Пусть в той же ситуации функция f имеет примитивный период P . Может ли производная f' вообще не иметь примитивного периода? Иметь примитивный период, меньший P ? Иметь примитивный период, больший P ?

77. Докажите, что перечисленные функции периодичны, причем имеют примитивные периоды; найдите их примитивные периоды (со строгим обоснованием!):

1) $2 \cos x + \cos 3x$,

12) $2 \sin \sqrt{2}x + \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$,

2) $2 \cos x + \cos \frac{x}{3}$,

13) $\cos x + \sin 3x$,

3) $2 \cos 2x + \cos 3x$,

14) $\sin x + \cos 3x$,

4) $2 \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$,

15) $2 \cos \frac{5x}{3} + \cos \frac{3x}{5}$,

5) $2 \cos \frac{x}{8} + \cos \frac{x}{12}$,

16) $2 \sin \frac{2x}{3} + \sin \frac{3x}{2}$,

6) $2 \cos \sqrt{2}x + \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$,

17) $2 \sin \frac{5x}{3} + \sin \frac{3x}{5}$,

7) $2 \sin x + \sin 3x$,

18) $\cos \frac{2x}{3} \cdot \cos \frac{3x}{2}$,

8) $2 \sin x + \sin \frac{x}{3}$,

19) $\sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{2x}{3}$,

9) $2 \sin 2x + \sin 3x$,

20) $\cos \frac{5x}{3} \cdot \cos \frac{3x}{5}$.

10) $2 \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$,

11) $2 \sin \frac{x}{8} + \sin \frac{x}{12}$,

(Указание. При доказательстве того, что некоторая функция $f(x)$ имеет число P своим примитивным периодом, часто бывает полезно следующее соображение: если $P > 0$ — период функции f и две ближайшие точки максимума функции f отстоят одна от другой на промежуток P (т. е. суть точки x_0 и $x_0 + P$), то число P является примитивным периодом функции f (обоснуйте). Для ряда функций из этого упражнения полезны также выводы из предыдущей задачи.)

78. Для произвольных чисел $m, n, M, N \in \mathbb{N}$ и положительных коэффициентов $a, b \in \mathbb{R}$ докажите периодичность и существование примитивных периодов для функций

- 1) $a \cos mx + b \sin nx$,
- 2) $a \cos \frac{x}{M} + b \sin \frac{x}{N}$,
- 3) $a \cos \frac{m}{M}x + b \sin \frac{n}{N}x$,

а также найдите их примитивные периоды.

79. Может ли

- 1) сумма, 2) произведение

двух всюду определенных периодических функций, имеющих общий примитивный период P , не иметь примитивного периода? иметь примитивный период, меньший P ?

Вынужденные колебания

80. Докажите, что функция

$$x_0(t) = \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t$$

является решением дифференциального уравнения резонанса

$$x'' = -\omega^2 x + a \cos \omega t.$$

Найдите (т.е. *выпишите*) общий вид решений этого уравнения.

81. Найдите общий вид решений дифференциальных уравнений

- 1) $x'' = -\omega^2 x + a \sin \nu t$,
- 2) $x'' = -\omega^2 x + a \cos \nu t + b \sin \nu t$

в случае, когда $\nu \neq \omega$.

82. 1) Отыскав частное решение, запишите общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний при постоянной вынуждающей силе:

$$x'' = -\omega^2 x + q. \quad (1)$$

Покажите, в частности, что в данном случае вынужденные колебания будут гармоническими колебаниями с частотой ω только около сдвинутого положения равновесия.

2) Непосредственно переходом к другому началу координат на оси Ox , т.е. линейной заменой координат $x + \lambda = z$, приведите дифференциальное уравнение (1) к уравнению гармонических колебаний $z'' = -\omega^2 z$.

83. Для данных дифференциальных уравнений отыщите (в подходящем виде) их частные решения и запишите общие решения:

- 1) $x'' = -\omega^2 x + a \cos \nu t + b$, $\nu \neq \omega$,
- 2) $x'' = -\omega^2 x + at$,
- 3) $x'' = -\omega^2 x + at + b$,

$$4) \quad x'' = -\omega^2 x + a \cos \nu t + bt, \quad \nu \neq \omega,$$

$$5) \quad x'' = -\omega^2 x + at^2,$$

$$6) \quad x'' = -\omega^2 x + at^2 + bt + c.$$

Представьте примерный вид графиков решений $x = x(t)$ в случаях малого и, напротив, большого значений собственной частоты ω .

84. 1) Докажите, что для вынужденных колебаний, подчиняющихся дифференциальному уравнению Ньютона

$$mx'' = -kx + \tilde{F}(t),$$

полная механическая энергия

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2$$

не сохраняется.

2) Покажите, что в случае постоянной вынуждающей силы $\mathcal{F} = \text{const}$ полная энергия $\mathcal{E}$ колеблется по гармоническому закону около некоторого своего значения.

85. Допустим, что вместо зависящей от времени вынуждающей силы $\tilde{F}(t)$ на колеблющуюся частицу действует *сила вязкого трения*, обратно пропорциональная скорости и направленная противоположно ей: $\mathcal{F}_{\text{тр}} = -\lambda v = -\lambda x'$, так что движение частицы подчинено закону — дифференциальному уравнению

$$mx'' = -kx - \lambda v = -kx - \lambda x'. \quad (2)$$

Докажите, что в этом случае — при *колебаниях с трением* — полная механическая энергия *убывает* со временем¹. (В дальнейшем мы подробно проанализируем дифференциальное уравнение колебаний с трением (2).)

Периодические функции (III)

Замечание. Имеет место следующий *общий факт* (теорема): сумма двух всюду определенных непрерывных периодических функций, не имеющих общих периодов (т. е. таких, примитивные периоды которых несоизмеримы), *не является периодической*. То же можно сказать и о произведении таких функций.

Доказать это — довольно трудная задача (попробуйте!). Ограничимся несколькими конкретными примерами.

86. Докажите, что следующие функции не являются периодическими:

¹Такого типа системы — с трением, энергия в которых убывает со временем («затрачивается на преодоление сил трения»), — в механике называются *диссипативными* (от лат. dissipatio — «рассеивание»), в отличие от *консервативных* (от лат. conservare — «сохранять») систем, полная механическая энергия в которых сохраняется.

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\cos x + \cos \sqrt{2}x$, | 3) $\sin x + \sin \sqrt{2}x$, | 5) $\sin x + \cos \sqrt{2}x$, |
| 2) $\cos x \cdot \cos \sqrt{2}x$, | 4) $\sin x \cdot \sin \sqrt{2}x$, | 6) $\sin x \cdot \cos \sqrt{2}x$. |

87. Докажите, что если числа ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то для любых чисел $a, b > 0$ функции

- | | |
|--|--|
| 1) $a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$, | 4) $a \cos \omega_1 t - b \cos \omega_2 t$, |
| 2) $a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t$, | 5) $a\{\omega_1 t\} + b\{\omega_2 t\}$, |
| 3) $a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_2 t$, | 6) $a\{\omega_1 t\} - b\{\omega_2 t\}$ |

не являются периодическими.

Заметим, что функции из двух последних задач дают довольно изысканные примеры того, что сумма двух гармонических колебаний различных частот не является гармоническим колебанием. Эти функции (за исключением двух последних, с дробной частью) непериодические, но относятся к весьма важному, особенно в физических приложениях, классу так называемых *почтипериодических* функций — они удовлетворяют следующему условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Число T называется *почтипериодом* такой функции f , причем чем меньше значение ε , тем больше будет почтипериод. Грубо говоря, почтипериодичность сумм непрерывных периодических функций с несоизмеримыми примитивными периодами объясняется тем, что иррациональное число (отношение примитивных периодов) с любой степенью точности может быть приближено рациональными числами.

В физике величины измеряются приближенно, поэтому об их иррациональности говорить не приходится. С почтипериодическими процессами в естественных науках сталкиваются тогда, когда рассматривают периодические явления, отношение периодов которых есть не целое число, а *дробь с большим знаменателем*.

Пример 1. При составлении календаря одновременно нужно учитывать обращение Земли вокруг Солнца (с периодом в 1 астрономический год) и вращение Земли около собственной оси (с периодом 1 сутки). Из соображений удобства календарь должен быть периодическим, причем желательно, чтобы его период был общим периодом двух упомянутых. Отношение года к суткам равно

$$\alpha = 365,242199.$$

Если считать это значение точным, то общий период рассматриваемых процессов чересчур велик — 1 миллион лет! Поэтому еще Юлий Цезарь ввел «почтипериод» в 4 года, что соответствует приближению

$$\alpha \approx 365,25 = 365\frac{1}{4}.$$

Принятый в настоящее время календарь был узаконен в 1582 г. римским папой Григорием XIII — он имеет «почтипериод» 400 лет, отвечающий приближенному значению

$$\alpha \approx 365,2425 = 365 \frac{97}{400}.$$

Определение 5. Действительные числа $P_1, P_2, \dots, P_n$ называются *рационально независимыми*, если их *линейная комбинация*

$$m_1 \cdot P_1 + m_2 \cdot P_2 + \dots + m_n \cdot P_n$$

с целыми (или рациональными — здесь разницы нет) коэффициентами m_k обращается в нуль в том и только в том случае, когда все коэффициенты m_k равны нулю.

88. 1) Что означает рациональная независимость в случае двух чисел?

2) Докажите рациональную независимость трех чисел $1, \sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

3) Докажите рациональную независимость четырех чисел $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$.

4) Докажите, что *при любом* натуральном n существуют n рационально независимых действительных чисел.

Заметим, что *для любых* действительных чисел $P_k, k = 1, \dots, n$, числа, представимые в виде

$$m_1 \cdot P_1 + m_2 \cdot P_2 + \dots + m_n \cdot P_n, \quad (1)$$

где все коэффициенты m_k могут быть произвольными целыми числами, образуют *аддитивную группу* — подгруппу группы $\{\mathbb{R}, +\}$ всех действительных чисел (см. выше пункт «Периодические функции (I)»); обозначим эту группу как $\mathbb{Z}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

89. Докажите, что если числа $P_1, P_2, \dots, P_n$ рационально независимы, то представление любого числа из группы $\mathbb{Z}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ в виде (1) *единственно*, т. е. из равенства

$$m_1 \cdot P_1 + m_2 \cdot P_2 + \dots + m_n \cdot P_n = \tilde{m}_1 \cdot P_1 + \tilde{m}_2 \cdot P_2 + \dots + \tilde{m}_n \cdot P_n$$

следует, что все коэффициенты соответственно равны:

$$m_1 = \tilde{m}_1, m_2 = \tilde{m}_2, \dots, m_n = \tilde{m}_n.$$

90. (Сложная задача.) Придумайте две всюду определенные периодические функции без соизмеримых периодов (возможно, даже имеющие несоизмеримые примитивные периоды!), сумма которых была бы периодической.

(Указание. Попробуйте воспользоваться двумя предыдущими задачами и придумать две функции с периодами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, сумма которых имела бы период $\sqrt{5}$.)

Гиперболические функции и отталкивающее силовое поле

Первая группа задач касается различных свойств *гиперболических функций*: *косинуса* и *синуса*,

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

тангенса и *котангенса*,

$$\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad \operatorname{cth} t = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}.$$

91. Укажите области определения и множества значений всех четырех гиперболических функций. Какими *свойствами четности* (*нечетности*) обладают эти функции?

92. Проверьте формулы дифференцирования для гиперболических функций:

$$1) \operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t;$$

$$3) \operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t;$$

$$2) \operatorname{th}' t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t};$$

$$4) \operatorname{cth}' t = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}.$$

93. Постройте графики функций (с исследованием на выпуклость и «на асимптоты»):

$$1) y = \operatorname{ch} t;$$

$$3) y = \operatorname{th} t;$$

$$2) y = \operatorname{sh} t;$$

$$4) y = \operatorname{cth} t.$$

94. Докажите *основные соотношения* между гиперболическими функциями одного аргумента:

$$1) \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1;$$

$$2) \operatorname{th} t \cdot \operatorname{cth} t = 1.$$

95. Рассмотрим векторнозначную функцию, заданную в координатах $(x; y)$ формулой $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t; \operatorname{sh} t)$. Докажите, что

1) векторнозначная функция $\vec{r}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\vec{r}''(t) = \vec{r}(t)$ (аналогично тому, что векторнозначная функция $\vec{r}_c(t) = (\cos t; \sin t)$ удовлетворяет уравнению $\vec{r}_c''(t) = -\vec{r}_c(t)$);

2) годографом этой векторнозначной функции $\vec{r}(t)$ является правая ветвь *равнобочной гиперболы* $x^2 - y^2 = 1$ (аналогично годографом векторнозначной функции $\vec{r}_c(t) = (\cos t; \sin t)$ является *единичная окружность* $x^2 + y^2 = 1$);

3) за время от 0 до t радиус-вектор $\vec{r}$ «заметает площадь», пропорциональную t : площадь *гиперболического сектора* OP_0P_t равна $\frac{t}{2}$ (в точности так же, радиус-вектор $\vec{r}_c(t) = (\cos t; \sin t)$ за время от 0 до t замечает площадь кругового сектора OP_0P_t , равную $\frac{t}{2}$).

Комментарий. Утверждения п. 3) суть частные случаи второго закона Кеплера: в равные времена радиусы-векторы замечают равные площади.

96. Гиперболические косинус и синус образуют *фундаментальную систему решений* дифференциального уравнения $x'' = x$ — они однозначно определяются начальными условиями $(x(0); x'(0)) = (1; 0)$ и $(0; 1)$ соответственно. Указанное дифференциальное уравнение второго порядка можно заменить *системой* дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Введем новые переменные $x + y = u$ и $x - y = v$; тогда $u(0) = v(0) = 1$.

1) Исходя из выписанной системы уравнений, запишите *дифференциальные уравнения*, которым удовлетворяют функции $u = u(t)$ и $v = v(t)$.

2) Найдите их решения, удовлетворяющие указанным начальным условиям $u(0) = v(0) = 1$.

3) Выразите через них соответствующие решения $x(t)$ и $y(t)$.

4) Найдите решения $u = u(t)$ и $v = v(t)$, удовлетворяющие начальным условиям $(u(0); v(0)) = (a; b)$. Изобразите семейство траекторий (годографов) соответствующих векторнозначных функций $(u(t); v(t))$ на плоскости Ouv .

Комментарий. Преобразование H^t координатной плоскости Ouv , при котором точка $(u(0); v(0)) = (a; b)$ переходит в точку $(u(t); v(t))$, называется *гиперболическим поворотом*. Гиперболические функции $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ связаны с гиперболическими поворотами вполне аналогично тому, как тригонометрические («круговые») функции $\cos t$ и $\sin t$ связаны с обычными поворотами¹. В следующей задаче предлагается установить некоторые свойства гиперболических поворотов.

97. (Продолжение задачи 96.) Рассмотрим гиперболический поворот

$$H^t: (u; v) \mapsto (e^t u; e^{-t} v)$$

координатной плоскости Ouv .

1) Докажите, что при любом гиперболическом повороте прямые переходят в прямые.

2) Докажите, что при гиперболических поворотах ни расстояния, ни углы, вообще говоря, *не сохраняются*.

3) Докажите, что при гиперболическом повороте любая плоская фигура (например, параллелограмм) переходит в фигуру *той же площади* (иначе говоря, гиперболические повороты *сохраняют площадь*!).

¹Гиперболические повороты и гиперболические функции играют важную роль в *геометрии Лобачевского*.

4) Запишите формулы для гиперболического поворота H^t в исходных координатах

$$(x; y) = \left(\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2} \right)$$

(см. задачу 96).

98. Докажите формулы двойного аргумента для гиперболических функций:

$$1) \operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = 2\operatorname{ch}^2 t - 1 = 2\operatorname{sh}^2 t + 1;$$

$$2) \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t;$$

$$3) \operatorname{th} 2t = \frac{2\operatorname{th} t}{1 + \operatorname{th}^2 t}.$$

99. Докажите формулы сложения для гиперболических функций:

$$1) \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta;$$

$$2) \operatorname{ch}(\alpha - \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta;$$

$$3) \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta + \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta;$$

$$4) \operatorname{ch}(\alpha - \beta) = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta - \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta;$$

$$5) \operatorname{th}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{th} \alpha + \operatorname{th} \beta}{1 + \operatorname{th} \alpha \cdot \operatorname{th} \beta};$$

$$6) \operatorname{th}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{th} \alpha - \operatorname{th} \beta}{1 - \operatorname{th} \alpha \cdot \operatorname{th} \beta}.$$

100. Докажите, что при любом целом n выполнены следующие «замечательные формулы»:

$$1) (\operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi)^n = \operatorname{ch} n\varphi + \operatorname{sh} n\varphi;$$

$$2) (\operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi)^n = \operatorname{ch} n\varphi - \operatorname{sh} n\varphi.$$

101. Поскольку функция $\operatorname{ch} t$ обратима на промежутке $[0, +\infty)$, она имеет обратную функцию на этом промежутке; эта обратная функция называется обратным гиперболическим косинусом или ареакосинусом¹ и обозначается $\operatorname{arch} x$. Укажите область определения этой функции, постройте ее график и вычислите производную $\operatorname{arch} x$.

102. Функции $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{th} t$, $\operatorname{cth} t$ обратимы на своих областях определения; обратные к ним функции называются обратными гиперболическими синусом, тангенсом, котангенсом (или ареасинусом, ареатангенсом, ареакотангенсом) и обозначаются $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{arch} x$ (соответственно).

1) Укажите области определения этих функций и постройте их графики.

2) Вычислите производные функций $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arth} x$ и $\operatorname{arch} x$.

3) Выразите все обратные гиперболические функции $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arth} x$ и $\operatorname{arch} x$ через натуральный логарифм.

* * *

¹От лат. area — «площадь».

103. Рассмотрим дифференциальное уравнение (второй закон) Ньютона при движении материальной точки массы m под действием линейной отталкивающей силы $F = kx$:

$$mx'' = kx, \quad k > 0. \quad (*)$$

Определим *потенциальную энергию* для этой механической системы формулой

$$U(x) = h - \frac{1}{2}kx^2$$

($h = \text{const}$; в интерпретации с помощью движения «шарика на горке» $u = U(x)$ величина h характеризует как бы «высоту горки»). Докажите, что *полная механическая энергия*

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + h - \frac{1}{2}kx^2$$

при движении в соответствии с уравнением $(*)$ остается постоянной (т. е. докажите *закон сохранения энергии*).

(Дайте доказательство двумя способами: 1) исходя из явного вида решений дифференциального уравнения $(*)$, сводящегося к уравнению вида $x'' = \lambda^2 x$; 2) используя *только само* дифференциальное уравнение $(*)$.)

104. Рассмотрим дифференциальное уравнение (второй закон) Ньютона при движении материальной точки массы m под действием линейной отталкивающей или притягивающей (псевдоупругой) силы $F_{\text{лин}} = kx$ (константа $k \neq 0$ может быть как положительной, так и отрицательной) и дополнительной силы *вязкого трения* $F_{\text{тр}} = -\lambda v = -\lambda x'$, $\lambda > 0$:

$$mx'' = kx - \lambda x'. \quad (**)$$

В обоих случаях *потенциальная энергия* может быть определена формулой $U(x) = -\frac{1}{2}kx^2$. Докажите, что *полная механическая энергия*

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

при движении в соответствии с уравнением $(**)$ не остается постоянной, а *убывает* (если только скорость движения не равна тождественному нулю).

Указание. Продифференцируйте функцию $\varphi(t) = E(x(t), v(t))$ и воспользуйтесь дифференциальным уравнением $(**)$.

105. Рассмотрим дифференциальное уравнение гармонических колебаний с трением

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0 \quad (***)$$

в случае *относительно малого трения*: при $0 < \alpha < \omega$.

1) Докажите, что если для произвольного решения $x(t)$ уравнения (***) через $h(t)$ обозначить функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$h'(t) = 2\alpha v^2(t),$$

то функция

$$\psi(t) = \frac{1}{2}v^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2(t) + h(t)$$

является константой.

2) Докажите, что для любых начальных условий $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ дифференциальное уравнение (***) имеет решение вида

$$\hat{x}(t) = e^{-\alpha t}(a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t),$$

удовлетворяющее этим условиям (здесь $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$).

3) Докажите, что произвольное решение дифференциального уравнения (***) представляется в «экспоненциально-тригонометрическом» виде $\hat{x}(t)$.

Указание к п. 3. Рассуждайте, как при доказательстве теорем единственности. Именно, для произвольного решения $x(t)$ существует решение указанного вида $\hat{x}(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $\hat{x}(0) = x(0)$, $\hat{x}'(0) = x'(0)$; тогда разность $z(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ также является решением уравнения (***), удовлетворяющим нулевым начальным условиям $z(0) = z'(0) = 0$. Для этого решения рассматриваем функцию $h(t)$, как выше, и заключаем, что функция

$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{2}v^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2 z^2(t) + h(t) - h(0)$$

является константой. Остается заметить, что эта константа равна нулю, а поскольку функция $h(t)$ неубывающая, $z(t)$ есть тождественный нуль.

Комментарий. Утверждение п. 3 дает теорему единственности для уравнения гармонических колебаний с трением в случае $0 < \alpha < \omega$. Другое доказательство единственности можно получить, используя утверждение следующей задачи.

106. Запишем общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в виде

$$x'' + 2\alpha x' + qx = 0.$$

Докажите, что функция $x(t)$ является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда функция $u(t) = e^{\alpha t}x(t)$ является решением уравнения

$$u'' + (q - \alpha^2)u = 0.$$

Указание. Подставьте в первое дифференциальное уравнение $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, а во второе — приведенное выражение для $u(t)$.

107. Запишите общий вид решений данных дифференциальных уравнений:

1) $x'' - 3x' + 2x = 0$;

6) $x'' + 4x' + 5x = 0$;

2) $x'' + 3x' + 2x = 0$;

7) $x'' - 2x' + 5x = 0$;

3) $x'' - x' - 2x = 0$;

8) $x'' + 2x' + 5x = 0$;

4) $x'' + x' - 2x = 0$;

9) $x'' - 4x' = 0$;

5) $x'' - 4x' + 5x = 0$;

10) $x'' - 4x' + 4x = 0$.

108. Найдите (подберите) частные решения данных дифференциальных уравнений и запишите их общие решения:

1) $x'' - 4x' + 3x = e^{2t}$;

11) $x'' - 4x' + 5x = \sin 2t$;

2) $x'' - 4x' + 3x = e^{-t}$;

12) $x'' - 4x' + 5x = \sin 2t - \sin 5t$;

3) $x'' - 4x' + 3x = e^t$;

13) $x'' - 3x' + 2x = 4$;

4) $x'' - 4x' + 3x = e^{4t} - 3$;

14) $x'' - 3x' + 2x = t$;

5) $x'' - 4x' + 3x = e^{4t} - 3e^{-2t}$;

15) $x'' - 3x' + 2x = 2 - 2t$;

6) $x'' - 4x' + 5x = e^t$;

16) $x'' - 3x' + 2x = 2t - e^{-t}$;

7) $x'' - 4x' + 5x = e^{2t}$;

17) $x'' - 3x' + 2x = 2te^{-t}$;

8) $x'' - 4x' + 5x = e^{-t} - 5e^{2t}$;

18) $x'' - 3x' + 2x = (1 - 2t)e^{3t}$;

9) $x'' - 4x' + 5x = \cos 2t$;

19) $x'' - 3x' + 2x = (1 - t^2)e^{3t}$;

10) $x'' - 4x' + 5x = \cos t$;

20) $x'' - 3x' + 2x = te^{3t} - 3e^{-t}$.

Замечание. Можно использовать и метод вариации произвольных постоянных.

ГЛАВА VI

Волновое уравнение и колебания

§ 6.1. Бегущие волны и волновое уравнение

В гл. V мы рассмотрели *гармонические колебания* одной материальной точки, т. е. исследовали математическую модель *гармонического осциллятора*. На практике приходится сталкиваться с колебаниями в протяженных средах, как, например, колебания струны или столба воздуха в трубе органа. В этом случае колебания как-то распространяются в пространстве от одной точки к другой — в рассматриваемой среде возникают так называемые волны. Из курса физики вам знакомы звуковые и электромагнитные волны, из жизни — волны на поверхности воды. Мы рассмотрим простейшую математическую модель волновых процессов — распространение волн вдоль прямой — координатной оси Ox . Такие волны называются *одномерными*.

6.1.1. Одномерные волны и гармонические колебания. *Одномерной волной* называется распространение некоторого «возмущения» вдоль прямой (или вдоль одного направления) — вдоль координатной оси Ox . Величина возмущения в точке x в момент времени t есть числовая функция двух переменных $u = u(x, t)$. График $y = Y_t(x) = u(x, t)$ величины u в фиксированный момент времени t называется *профилем* волны. *Бегущая* (без изменения профиля) вдоль оси Ox со скоростью v волна с начальным профилем $y = f(x)$ описывается функцией

$$u(x, t) = f(x - vt). \quad (1)$$

Такая запись и показывает, что график функции f без изменения формы перемещается за время t на расстояние vt , т. е. движется со скоростью v (рис. 117). Обычно считают что в формуле (1) значение положительно, так что эта формула описывает волну, бегущую вправо; влево бегущая волна того же профиля задается формулой

$$\tilde{u}(x, t) = f(x + vt). \quad (2)$$

Особый интерес представляют так называемые *синусоидальные* бегущие волны, начальный профиль которых задается формулой вида

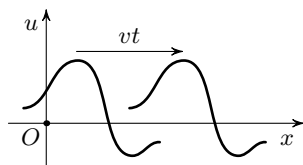


Рис. 117

$f(x) = A \cos kx$. Тогда

$$u(x, t) = A \cos k(x - vt). \quad (3)$$

Заметим, что такая функция $u(x, t)$ дважды периодическая — и по координате x , и по времени t . Период функции (3) вдоль оси Ox , т. е. расстояние между двумя последовательными «горбами» («гребнями») волны (рис. 118), называется *длиной волны* — она равна

$$\lambda = \frac{2\pi}{k};$$

при этом величина k называется *волновым числом*. Если же зафиксировать значение x , то окажется, что величина возмущения в этой точке меняется по гармоническому закону:

$$z = Z_x(t) = u(x, t) = A \cos(kx - kvt) = A \cos(\omega t - kx), \quad (4)$$

где циклическая частота равна $\omega = kv$, а начальная фаза $\varphi = -kx$ зависит от расстояния до начала координат O . Если рассматривать синусоидальные волны только на положительной полуоси, то можно представить себе, что от точки O , как от *источника*, вправо по оси Ox как бы распространяются гармонические колебания.

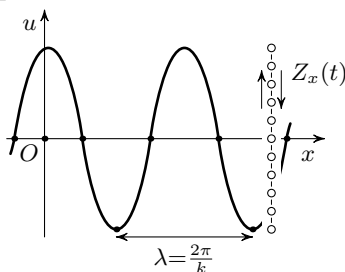


Рис. 118

6.1.2. Интерференция одномерных волн. Представим, что, наряду с источником волны (3), в точке $x_0 = L > 0$ находится *когерентный* с ним источник бегущей *влево* волны, не обязательно той же амплитуды. Согласно формулам (2)–(3) эту волну можно описать функцией

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{A} \cos k(\tilde{x} + vt),$$

где $\tilde{x} = x - L$ — координата точки x оси Ox относительно нового источника колебаний $x_0 = L$. Выясним теперь, что произойдет (на отрезке $[0, L]$ между источниками) при наложении одной волны на другую.

Прежде всего запишем формулу для гармонического колебания, порожденного второй волной в точке x :

$$\tilde{z} = \tilde{Z}_x(t) = \tilde{u}(x, t) = \tilde{A} \cos(k\tilde{x} + kvt) = \tilde{A} \cos(\omega t - k\tilde{x}) = \tilde{A} \cos(\omega t - k\hat{x}),$$

где для удобства дальнейших рассмотрений вместо (отрицательной) координаты $\tilde{x} = x - L$ мы ввели расстояние $\hat{x} = L - x$ от точки x до второго источника $x_0 = L$. Наложение волн u и $\tilde{u}$ в точке x эквивалентно сложению гармонических колебаний одной частоты $\omega = kv$ с начальными фазами $\varphi = -kx$ и $\tilde{\varphi} = -k\hat{x}$, пропорциональными *ходу волн* — так называются расстояния x и $\hat{x}$ от точки до источников. Раньше, в § 5.4, мы выяснили, что такие гармонические колебания максимально усиливают друг друга, если они *синфазны* (см. предложение 1, п. 5.4.4):

$$\tilde{\varphi} - \varphi = -k\hat{x} + kx = k(x - \hat{x}) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Это условие можно переписать так:

$$x - \hat{x} = \frac{2\pi}{k}n = \lambda n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Следовательно, *разность хода волн до точек с максимальным их взаимным усилением равна целому числу длин волн*.

Найдем координаты точек, в которых сумма волн дает колебания наибольшей амплитуды. Подставляя в формулу (5) выражение $\hat{x} = L - x$, получим

$$x - \hat{x} = x - (L - x) = 2x - L = \lambda n \Rightarrow x = \frac{L}{2} + \frac{\lambda}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Значит, такие точки следуют от середины отрезка $[0, L]$ на расстояниях, равных полудлине волны (рис. 119).

Аналогично максимальное взаимное ослабление волн будет в тех точках x , в которых колебания происходят в *противофазе*, и для этих точек получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} - \varphi = k(x - \hat{x}) = \pi + 2\pi n &\Rightarrow x - \hat{x} = 2x - L = \frac{\lambda}{2} + \lambda n \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{L}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Получается, что минимумы суммы волн также отстоят друг от друга на полудлину волны и расположены посередине между максимумами (рис. 119; на рис. 120 изображена примерная зависимость амплитуды суммы волн от x).

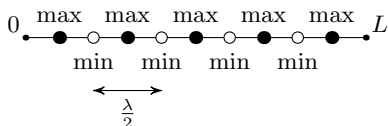


Рис. 119

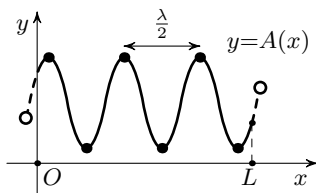


Рис. 120

6.1.3. Интерференция двумерных волн. Получающийся при сложении когерентных синусоидальных волн эффект — неизменное во времени чередование зон максимального усиления и ослабления колебаний, отстоящих одна от другой на полудлину волны, — называется *интерференцией*¹ волн. Реальные (звуковые, световые) волны распространяются в *пространстве*, но качественная картина наложения когерентных волн на участке между источниками колебаний будет такая же, какая была описана для одномерных волн. Рассмотрим чуть подробнее двумерные волны (можно представлять себе волны на воде).

Особо выделяются два вида двумерных волн — *линейные*, распространяющиеся вдоль одного направления (как морские волны), и *круговые*, концентрически распространяющиеся от одной точки — источника O — по лучам (рис. 121). Синусоидальную круговую волну можно описать формулой типа (4):

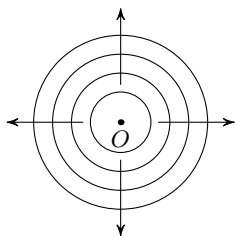


Рис. 121

$$u = u(M, t) = A \cos k(r - vt) = A \cos(\omega t - kr),$$

где M — точка плоскости, $r = OM$ — расстояние от нее до источника. Разница, однако, будет в том, что амплитуда порожденных волной колебаний будет убывать с ростом r (из сохранения энергии волны нетрудно вывести что величина A обратно пропорциональна корню из хода волны r : $A = A(r) = \frac{A_0}{\sqrt{r}}$).

При интерференции двух когерентных круговых волн с источниками O_1 и O_2 , которые можно записать в виде

$$u_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1), \quad u_2(M, t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2),$$

где r_1, r_2 — ход волн от источников до точки M , как и в случае одномерных волн, будет происходить усиление волн в случае, если разность

¹ *Интерференция* — от лат. inter — «между» — и ferentis — «несущий», «переносящий». Смысл слова в целом — «взаимопроникновение», «вмешательство» (для волн — усиление в одних точках и ослабление в других). Термин в 1803 г. ввел английский ученый (вундеркинд и универсал!) *Томас Юнг* (1773–1829) в связи с изучением интерференции света.

хода равна целому числу длин волн: $r_1 - r_2 = \lambda n$, $n \in \mathbb{Z}$, и ослабление, если разность хода равна полуцелому числу длин волн: $r_1 - r_2 = \lambda(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$. На отрезке же O_1O_2 будет в точности такая картина, как в случае одномерных волн, — точки усиления чередуются с точками взаимного гашения, следуя на расстояниях $\frac{\lambda}{4}$ друг от друга (только следует учесть еще убывание амплитуд).

Заметим, что на всей плоскости множества точек M , для которых

$$r_1 - r_2 = MO_1 - MO_2 = \text{const},$$

суть *гиперболы с фокусами* O_1 и O_2 (это одно из определений гипербол; см. упражнения). Таким образом, при наложении двух круговых волн будет наблюдаться следующая *интерференционная картина* (рис. 122): гиперболы максимального усиления волн чередуются с гиперболами наибольшего покоя, образуя в области примерно между источниками характерные *интерференционные полосы*, так что полосы максимума отстоят одна от другой на половину длины волны. Между прочим, этим можно воспользоваться (как и делают в физике) для определения длины волны.

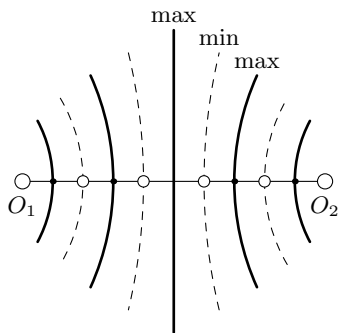


Рис. 122

6.1.4. Волновое уравнение. Вернемся к изучению произвольных одномерных волн. Заметим, что если у функции $u(x, t)$ двух переменных — координаты x и времени t , — описывающей бегущую волну с профилем $f(x)$,

$$u(x, t) = f(x - vt),$$

вычислить вторые производные по каждой из переменных, то мы получим

$$\begin{aligned} u'_x(x, t) &= f'(x - vt) \Rightarrow u''_{xx}(x, t) = f''(x - vt), \\ u'_t(x, t) &= -vf'(x - vt) \Rightarrow u''_{tt}(x, t) = v^2 f''(x - vt) \end{aligned}$$

(индексы внизу показывают, по какой переменной мы берем производную). Такие производные для функций нескольких переменных называют *частными производными*, и мы получаем, что частные производные описывающей волну функции связаны соотношением

$$u''_{tt} = v^2 u''_{xx}, \quad (6)$$

называемым *волновым уравнением*. Подобные уравнения называются *уравнениями в частных производных*¹. Очевидно, наряду с функциями вида $f(x - vt)$, волновому уравнению (6) удовлетворяют и описывающие бегущие влево волны функции вида $g(x + vt)$.

Заметим теперь, что, как и уравнение гармонических колебаний, волновое уравнение *линейно*: если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — решения уравнения (6), то и любая их линейная комбинация $au_1 + bu_2$ является решением данного уравнения (т. е. задает некоторую волну — в физике это утверждение называется *принципом суперпозиции волн*). Таким образом, мы можем выписать более общие решения волнового уравнения, уже не являющиеся просто бегущими волнами:

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (7)$$

где f и g — любые подходящее число раз дифференцируемые функции одной переменной. Оказывается, *любое решение волнового уравнения (6) может быть записано в виде (7)!* Доказывать это мы не будем, а покажем, как появляется волновое уравнение, на простейшем примере.

§ 6.2. Колебания струны. Музыкальная акустика

6.2.1. Уравнение упругой струны. Рассмотрим колебания упругой струны, натянутой вдоль прямой, которую будем считать координатной осью Ox . Будем считать колебания малыми, поперечными (без смещения точек вдоль оси Ox) и происходящими в одной плоскости Oxi , так что профиль струны в момент времени t задается одной функцией $u = u(x, t)$ (рис. 123). Кроме того, предположим, что струна однородная — с линейной плотностью ρ — и гибкая, так что постоянная вдоль всей струны сила натяжения K всегда направлена по касательной к профилю струны.

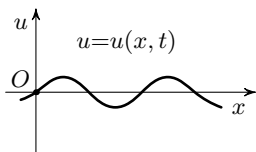


Рис. 123

¹Встречавшиеся же ранее дифференциальные уравнения носят название *обыкновенные дифференциальные уравнения*.

Запишем теперь второй закон Ньютона для малого участка струны — для отрезка $[x, x + \Delta x]$. Его масса равна

$$m = \rho \Delta x, \quad (1)$$

а ускорение можно считать примерно равным ускорению левого конца:

$$a \approx u''_{tt}(x, t). \quad (2)$$

На этот участок действуют две направленных по касательным к струне в концах участка и равных по величине K силы натяжения струны (рис. 124). Поскольку рассматриваются поперечные колебания струны, нас интересует равнодействующая вертикальных (направленных вдоль оси Ou) составляющих этих сил, равная

$$F = K \sin \alpha(x + \Delta x) - K \sin \alpha(x), \quad (3)$$

где через $\alpha(x)$ обозначен угол наклона касательной к профилю струны в точке x (см. рис. 124). Заметим, что тангенс угла наклона касательной равен

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = u'_x(x, t),$$

а так как в силу малости колебаний допустимо считать, что и угол наклона касательной α мал, то можно, согласно формулам линейных приближений для функций $\sin$ и tg , заменить в формуле (3) $\sin \alpha$ на $\operatorname{tg} \alpha = u'_x$: поскольку $\alpha \approx 0$, мы получаем $\sin \alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, поэтому

$$F \approx K(u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t)). \quad (4)$$

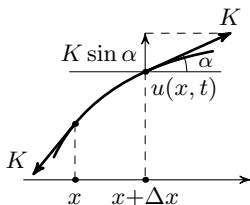


Рис. 124

Принимая во внимание формулы (1), (2) и (4), получаем, что дифференциальное уравнение Ньютона $ma = F$ для малого участка струны приближенно имеет вид

$$\rho \Delta x \cdot u''_{tt}(x, t) \approx K(u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t)). \quad (5)$$

Естественно допустить, что после деления обеих частей этого приближенного равенства на Δx и перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ должно получиться точное равенство:

$$\rho u''_{tt}(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} K \cdot \frac{u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t)}{\Delta x} = K u''_{xx}(x, t).$$

Таким образом, мы пришли к волновому уравнению, которое на сей раз называется *уравнением струны*:

$$u''_{tt} = v^2 u''_{xx}, \quad v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (6)$$

Итак, в упругой струне возникают волны, распространяющиеся со скоростью $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, — она будет тем больше, чем туже натянута струна и чем она тоньше, что непосредственно следует из формулы для v . Теперь, имея в виду конкретно упругую струну, рассмотрим общие волновые процессы чуть детальнее.

6.2.2. Струна с закрепленным концом: отражение и интерференция волн. Пусть «полуструна» — полуось $[0, +\infty)$ — закреплена в точке $x = 0$, так что для волновой функции $u(x, t)$ выполнено *граничное условие*

$$u(0, t) \equiv 0, \quad \text{т. е.} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad u(0, t) = 0. \quad (7)$$

В этом случае говорят о *струне с одним закрепленным концом*. Допустим, влево по этой струне бежит волна $u_+(x, t) = f(x + vt)$. Отраженная от точки O волна бежит вправо и записывается в виде $u_-(x, t) = g(x - vt)$, и для суммарной волны $u = u_+ + u_-$ должно быть выполнено условие неподвижности конца (7):

$$u_+(0, t) + u_-(0, t) \equiv 0.$$

Следовательно, функции f и g связаны соотношением

$$f(vt) + g(-vt) \equiv 0 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} \quad g(z) = -f(-z)$$

(рис. 125), и *колебания струны с одним закрепленным концом происходят по закону*

$$u(x, t) = f(x + vt) - f(vt - x). \quad (8)$$

Конечно, мы пришли бы к тому же самому выводу, просто записав условие неподвижности (7) для общего решения $u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ волнового уравнения (6).

Рассмотрим случай синусоидальной падающей волны:

$$f(z) = A \cos kz, \quad u_+(x, t) = A \cos(kx + \omega t), \quad \omega = kv.$$

Тогда отраженная волна будет также синусоидальной с той же амплитудой, и эти волны интерферируют:

$$u(x, t) = A \cos(kx + \omega t) - A \cos(\omega t - kx) = -2A \sin kx \cdot \sin \omega t.$$

Получается, что в точке x происходит гармоническое колебание с амплитудой $A(x) = |2A \sin kx|$ — образуется так называемая *стоячая волна*, характерным для которой является наличие *узлов*: неподвижных

точек x , в которых $A(x) = 0$, т. е. $\sin kx = 0$, — и *пучностей*: точек колебаний с наибольшей амплитудой, в которых $A(x) = 2A$, т. е. $|\sin kx| = 1$ (рис. 126). Узлы находятся в точках x , для которых $kx = \pi n$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{k}n = \frac{\lambda}{2}n \quad \text{при некотором } n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

($\lambda = \frac{2\pi}{k}$ — это длина волны). В частности, самый левый узел — это закрепленный конец $x = 0$.

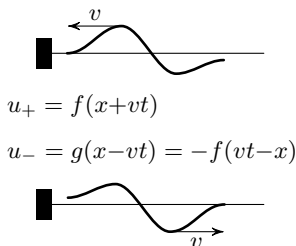


Рис. 125

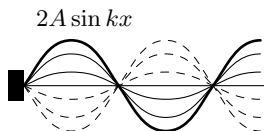


Рис. 126

6.2.3. Струна с закрепленными концами: спектр собственных частот. Рассмотрим теперь струну с двумя закрепленными концами — пусть колеблющийся отрезок струны $[0, L]$ закреплен в обоих концах $x = 0$ и $x = L$. Заметим, что если в такой струне возбуждается стоячая волна, то она должна иметь узел и в точке $x = L$. Отсюда получается существенное ограничение на возможные длины волн в струне длины L :

$$L = \frac{\lambda}{2}n \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{при некотором } n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, в струне длины L с закрепленными концами возможны синусоидальные стоячие волны только с длинами $\lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}$ или с волновыми числами $k = k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{L}n$. Мы также можем вычислить и возможные частоты колебаний такой струны, определяющие высоту тона издаваемых струной звуков:

$$\omega = kv = \frac{\pi v}{L}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, мы получили так называемый *спектр собственных частот* колебаний струны с закрепленными концами — все возможные отвечающие стоячим волнам циклические частоты кратны *основной частоте*:

$$\omega_n = n \cdot \omega_1, \quad \text{где } \omega_1 = \frac{\pi v}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а K и ρ суть натяжение и плотность струны.

Основной частоте отвечает стоячая волна с профилем амплитуды вида $y = A_1 \sin k_1 x = A_1 \sin \frac{\pi}{L} x$, имеющая единственную пучность в середине струны (рис. 127). При $n = 2$ стоячая волна (*вторая гармоника*) в середине струны имеет узел, а пучностей будет уже две. И так далее — n -я гармоника, которая может быть записана в виде

$$u_n(x, t) = A_n \sin k_n x \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (9)$$

имеет n пучностей, расположенных между $n + 1$ узлом, как показано для младших гармоник на рис. 127.

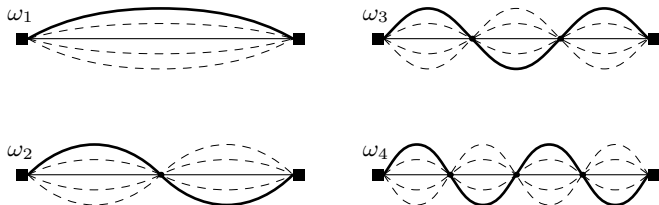


Рис. 127

6.2.4. Несколько слов о музыкальной акустике. Важность рассмотрения стоячих волн — гармоник вида (9) — объясняется тем, что *любое решение уравнения струны (6), удовлетворяющее граничным условиям $u(0, t) = u(L, t) \equiv 0$, представляется в виде бесконечной суммы таких гармоник:*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (10)$$

где $k_n = \frac{\pi}{L} n$, $\omega_n = k_n v$, а константы A_n и φ_n определяются начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u'_t(x, t) = \psi(x)$ — аналогами начального положения и начальной скорости в случае струны. Доказывать это поразительное утверждение мы не будем. Заметим только, что смысл бесконечной суммы в формуле (10) придается предельным переходом:

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Теперь отметим, что колебания реальной струны порождают колебания воздуха с теми же частотами, воспринимаемые как звуковые колебания (или волны). Высота звука определяется частотой колебаний. На практике рассматривают не циклическую, а «обычную» частоту, т. е. число колебаний в единицу времени (если в секунду, то эта единица ко-

лебаний называется *герц*¹: гц = с⁻¹). Эта частота связана с циклической формулой $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, и для струны длины L с закрепленными концами мы получаем тоже *линейный спектр частот*:

$$\nu_n = n\nu_1, \quad \nu_1 = \frac{v}{2L}.$$

Частота звуковых колебаний определяет *высоту звука* или *тон*. Частота ν_1 в музыке называется *основным тоном*, частоты $\nu_2, \nu_3, \dots$ — *обертонами*².

Сформулированное выше (без доказательства) утверждение показывает, что извлекаемый из струны звук есть смесь основного тона и обертонов. Сила звука определяется энергией колебаний, т. е., практически, их амплитудой. Соотношение между амплитудами гармоник A_n определяет *тембр* звучания. Однако, как правило, амплитуда основного тона A_1 превосходит убывающие с ростом n амплитуды обертонов (если только не прижать струну в ее середине, тем самым «погасив» нечетные гармоники, — такой прием при игре на струнных инструментах называется *флажолетом*), поэтому каждая струна воспроизводит звук основной частоты (например, если $\nu_1 = 440$ гц, то это нота «ля» первой октавы), только лишь «окрашенный» обертонами.

Выведенная формула для основной частоты и вытекающая из нее формула для периода «основного колебания»:

$$\nu_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{\nu_1} = 2L \sqrt{\frac{\rho}{K}}$$

объясняют следующие *законы колебания струн*, открытые впервые экспериментально.

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения период колебаний струны пропорционален ее длине.
2. При заданной длине струны период меняется обратно пропорционально корню квадратному из ее натяжения.
3. При заданной длине и натяжении период меняется пропорционально корню квадратному из линейной плотности струны.

Главный из обертонов $\nu_2 = 2\nu_1$ хорошо сочетается с основным тоном (в отличие от седьмого обертона ν_7 , *диссонирующего*³ с ним), и интервал частот между ними является основным при построении музыкального

¹Эта единица названа по имени крупного немецкого физика Генриха Рудольфа Герца (1857–1894) — не путайте с другим немецким физиком, нобелевским лауреатом Густавом Людвигом Герцем (1887–1975).

²То есть «старшими тонами», от нем. ober — приставка, означающая старшинство.

³От лат. dissonans — «нестройно звучащий» (лат. приставка dis означает, в частности, отрицание; лат. sonans — «звучащий»).

строю — поскольку в него принято вмещать восемь ступеней звукоряда, он называется октавой¹.

Упражнения, задачи и задания к гл. VI

Интерференция волн

1. Найдите результат интерференции двух когерентных одномерных волн одинаковой амплитуды. Рассмотрите отдельно случай, когда на отрезке между источниками укладывается целое число полудлин волн.

(Указание и комментарий. В случае одинаковых амплитуд складываемых к сумме можно применить формулу для суммы косинусов. В результате получится формула вида

$$u + \tilde{u} = A(x) \cos \omega t,$$

где в данном случае зависящая от x амплитуда $A(x)$ также будет косинусом. В тех точках, где $A(x) = 0$, колебаний вообще не будет — это точки покоя. Между ними будут находиться точки максимальной амплитуды, причем колебания в соседних таких точках будут совершаться в противофазе. Такая (суммарная) волна называется *стоячей волной*, точки покоя — *узлами*, а точки максимальной амплитуды — *пучностями* стоячей волны. Подобного рода волны на море называются «мертвой зыбью». В случае, когда расстояние между источниками равно $L = \frac{\lambda}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, где λ — длина волны, в обоих источниках будут находиться узлы, и, как мы позже увидим, такая волна возникает в струне с закрепленными концами.)

2. Сколько интерференционных полос (линий, вдоль которых амплитуда суммы волн максимальна) поместится между источниками интерферирующих когерентных волн длины λ , если расстояние между источниками равно L ?

3. 1) Докажите, что гипербола с фокусами O_1 и O_2 , т. е. множество точек

$$\mathcal{H}_c = \{M: MO_1 - MO_2 = \pm c\},$$

где $c \geq 0$ — некоторая константа, всегда симметрична относительно прямой O_1O_2 и серединного перпендикуляра к отрезку O_1O_2 .

2) В каких пределах может меняться константа c в определении гиперболы, если расстояние между ее фокусами равно $O_1O_2 = L$? Во что превращается гипербола в случаях $c = 0$ и $c = L$?

¹Греч. *οκτω* (окте) — восемь.

4. Запишите уравнение гиперболы $\mathcal{H}_c$ в координатах, выбрав оси так, чтобы фокусы имели координаты $O_1(-a, 0)$, $O_2(a, 0)$. В уравнении избавьтесь от радикалов (знаков корня). Докажите, что любая невырожденная гипербола (для которой $c \in (0, 2a)$) имеет две асимптоты — симметричные относительно осей координат прямые, проходящие через середину отрезка O_1O_2 (т.е. начало координат).

Волны и струны

5. Выпишите решение волнового уравнения $u''_{tt} = v^2 u_{xx}$ на неограниченной прямой, если заданы начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_x(x, 0) \equiv 0. \quad (1)$$

(Указание и комментарий. Для струны это означает задание начального профиля при нулевой начальной скорости — такие условия создаются при игре на щипковых струнных инструментах — таких, как гитара или арфа. В случае ударных струнных инструментов — таких, как рояль, — начальные условия выглядят иначе: $u(x, 0) \equiv 0$, $u'_x(x, 0) = \psi(x)$, что означает придание струне начальной скорости [ударом молоточка!] без начального отклонения. Пока мы не можем выписать вид возбуждаемых волн в этом случае. В случае же начальных условий вида (1) ответ можно выписать исходя из общего вида решений волнового уравнения.)

6. Выпишите и проинтерпретируйте решение волнового уравнения на неограниченной прямой, если заданы начальные условия вида (1) с начальным профилем $\varphi(x) = A \sin kx$.

7. Пусть начальный профиль волны в ситуации задачи 5 задан графиком, изображенным на рис. 128. Изобразите, как меняется профиль волны в последующие моменты времени (нужно нарисовать профиль $y = Y_t(x) = u(x, t)$ в моменты времени $t = h, 2h, 3h, \dots$).

8. Пусть в струне $\{x \geq 0\}$ с закрепленным концом $x = 0$ влево движется волна u_+ с профилем, изображенным на рис. 129. Изобразите профиль отраженной (движущейся вправо) волны u_- .

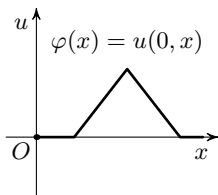


Рис. 128

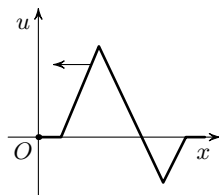


Рис. 129

9. Пусть в такой же струне влево движется волна u_+ с профилем, изображенным на рис. 128. Изобразите все стадии отражения этой волны от закрепленной точки.

10. Пусть левый конец колеблющейся струны длины L закреплен, а правый *свободен*; это означает, что вертикальная составляющая натяжения в правом конце, пропорциональная, как мы видели, производной u'_x , равна нулю. Таким образом, такая струна удовлетворяет граничным условиям

$$u(0, t) \equiv 0, \quad u'_x(L, t) \equiv 0.$$

1) Какие стоячие волны $u(x, t) = A \sin kx \sin \omega t$ могут быть возбуждены в струне с закрепленным и свободным концами?

2) Каковы ограничения на длины таких волн и волновые числа?

3) Каков спектр собственных частот струны с закрепленным и свободным концом?

(Комментарий. Рассматриваемая в этой задаче ситуация типична, скорее, не для струны, а для колебаний столба воздуха в закрытой с одной стороны трубе — например, в трубе органа или других духовых музыкальных инструментов. Это будут *продольные колебания упругой среды*, которые, как не слишком сложно показать, также подчиняются волновому уравнению. Открытый конец трубы как раз соответствует свободному концу струны.)

Стоячие волны и разделение переменных

Допустим, некоторое нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение волнового уравнения представляется в виде

$$u(x, t) = \mathcal{P}(x)K(t). \quad (2)$$

Это означает, что *профили решения для различных моментов времени пропорциональны* — такая волна не бежит, а как бы стоит, и поэтому называется *стоячей волной*. Ранее мы пришли к синусоидальным стоячим волнам исходя из синусоидальных бегущих волн. Сейчас же выясним, какие вообще бывают стоячие волны вида (2).

11. Докажите, что если функция вида (2) удовлетворяет волновому уравнению, то функции $\mathcal{P}(x)$ и $K(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{P}''(x) = -\Lambda \mathcal{P}(x), \quad K''(t) = -v^2 \Lambda K(t)$$

для некоторого числа $\Lambda \in \mathbb{R}$.

12. Докажите, что для струны длины L с закрепленными концами граничные условия $u(0, t) = u(L, t) \equiv 0$ дают для функции $\mathcal{P}(x)$ условия

$$\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(L) = 0. \quad (3)$$

* * *

Можно показать, что в случае струны с закрепленными концами при $\Lambda \leq 0$ уравнение $\mathcal{P}'' = -\Lambda \mathcal{P}$ не имеет нетривиальных решений.

13. Найдите все решения дифференциального уравнения для профиля стоячей волны

$$\mathcal{P}''(x) = -\Lambda \mathcal{P}(x)$$

для струны с закрепленными концами (т. е. удовлетворяющие краевым условиям (3)) в случае, когда $\Lambda > 0$.

14. 1) Для найденных функций профиля $\mathcal{P}(x)$ (точнее, для найденных значений Λ) отыщите все решения дифференциального уравнения

$$K''(t) = -v^2 \Lambda K(t)$$

для коэффициента $K(t)$ изменения профиля во времени.

2) Запишите общее уравнение стоячей волны

$$u(x, t) = \mathcal{P}(x)K(t)$$

в струне с закрепленными концами.

(Комментарий. Результаты последних задач показывают, что в *упругой струне с закрепленными концами могут возбуждаться только синусоидальные стоячие волны* — именно те, которые были изучены нами ранее!)

Александр Николаевич Земляков

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕАЛЬНОСТИ
Дифференциальные уравнения для школьников

Подписано к печати 20.03.2013 г. Формат $60 \times 90/16$. Печать офсетная.
Объем 22,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru
