А. Н. ЗАЙДЕЛЬ

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. Ф. ИОФФЕ

А. Н. ЗАЙДЕЛЬ

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Ответственный редактор
академик Ж. И. АЛФЕРОВ

ЛЕНИНГРАД
ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1985

УДК 620.088.32

Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. – Л.: Наука, 1985. – 112 с.

В книге элементарно излагается современная теория погрешностей и даются ее приложения к измерениям физических величин. Характер изложения рассчитан на первоначальное изучение основных методов количественной оценки погрешностей, для понимания которых достаточно знания математики в объеме средней школы. Однако книга может также служить пособием для практической работы при проведении различного рода измерений. В ней содержатся необходимые для этого таблицы и формулы, применение которых проиллюстрировано рядом примеров. Даны способы выполнения статистических расчетов с помощью микрокалькуляторов. Большое внимание уделено физическим закономерностям, обусловливающим появление различных погрешностей результата измерений.

Библиогр. 28 назв. Ил. 22. Табл. 22.

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук А.А. ПЕТРОВ, д-р физ.-мат. наук В.Г. ЮРЬЕВ

Александр Натанович Зайдель

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Утверждено к печати
ордена Ленина Физико-техническим институтом
имени А.Ф. Иоффе АН СССР

Редактор издательства Н.К. Шарова
Художник Л.А. Яценко
Технический редактор В.В. Шиханова
Корректор Н.Г. Каценко

ИБ № 8914

Подписано к печати 04.06.85. М-25019. Формат 60х90 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7.00. Усл. кр.-отт. 7.18. Уч.-изд. л. 7.33. Тираж 11800. Тип. зак. № 464. Цена 45 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство „Наука", Ленинградское отделение
199164, Ленинград, В-164, Менделеевская лин., 1

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства „Наука"
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

$З \frac{2706000000-627}{042(02)-85} 312-85-II$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Результат всякого точного измерения имеет малую ценность до тех пор, пока не указана погрешность, с которой оно выполнено. Хотя правила численной оценки величины погрешностей достаточно давно и детально разработаны, однако зачастую они неизвестны даже опытным экспериментаторам и иногда совершенно искаженно излагаются в некоторых учебных пособиях.

Очевидно, что для исправления этого положения необходимо уже на самых первых этапах обучения будущих исследователей и инженеров ознакомить их с основами правильной оценки погрешностей измерений. С этой целью мною около двадцати лет назад была написана книжка „Элементарные оценки ошибок измерений", которая, кажется, способствовала некоторому улучшению преподавания этого раздела науки и довольно широко использовалась в практической работе.

За истекшее время произошли существенные изменения в терминологии, а также в развитии вычислительной техники. Оба эти обстоятельства потребовали радикальной переработки всей книги.

Здесь необходимо остановиться на принятой в теории погрешностей терминологии. Она стихийно складывалась на протяжении многих десятилетий, и это привело к тому, что для одних понятий имеется по нескольку синонимов, тогда как разные величины иногда называются одинаково. В действующем сейчас ГОСТе [24-26] предложена стандартная система наименований, которой мы будем по возможности строго придерживаться при дальнейшем изложении, хотя иногда она кажется нам неудачной. В частности, замена широко распространенного термина „ошибка измерений" термином „погрешность измерений" представляется неоправданной.

Слово „погрешность" (от „грешить") как бы возлагает ответственность за отклонение результата измерения от истинного значения на лицо, проводившее измерения. Между тем такие отклонения имеют совершенно объективные причины, и лишь в случае так называемых грубых погрешностей, или промахов, можно говорить о вине, или „грехе" экспериментатора.

Также не очень удачным кажется термин „наблюдение", введенный вместо общепринятого названия „единичное измерение". Обычно под „наблюдением" понимают качественное, описательное суждение об объекте или явлении, а не количественное определение его характеристик.

В представленной далее табл. I (см. Приложение) приводится используемая в книге терминология, утвержденная ГОСТом, но наряду с ней даны и другие названия, пока все еще широко применяемые в отечественной литературе. Это облегчит читателю работу с публикациями, в которых требования ГОСТа не выполнены.

В конце книги приведен список учебных пособий [1–4, 7, 8, 13, 15, 16] и монографий [5, 6, 9–15, 20, 21, 23], предназначенных для более углубленного изучения предмета. В [5, 10–12, 21] дана подробная библиография по теории погрешностей.

В работе над рукописью очень большую помощь оказал мне А.М. Загрубский. Весь текст детально обсуждался нами, и это способствовало устранению ряда ошибок и неточностей. Программы необходимых расчетов на микрокалькуляторе Б3–34 составила Н.А. Сенкова. И мне приятно выразить им обоим сердечную признательность. Я также очень благодарен читателям, сделавшим ряд ценных замечаний по книге „Элементарные оценки ошибок измерений". Особенно полезной была критика Е.С. Вентцель и А.Е. Шестакова, которые обнаружили ряд существенных упущений в этой работе. С благодарностью будут приняты и замечания по предлагаемой книге.

А.Н. Зайдель
Ленинград, 1985

ВВЕДЕНИЕ

1. ЗАДАЧИ ИЗМЕРЕНИЙ

Каждому физическому объекту присущ ряд свойств, большинство из которых удобно выражать числами. Например, если мы имеем дело с куском медного провода, то к числу таких свойств в первую очередь следует отнести его диаметр, длину, массу, электропроводность, температурный коэффициент расширения и электрическое сопротивление. Некоторые свойства объекта труднее поддаются количественному описанию. В данном случае можно указать, например, на цвет, блеск или способность противостоять многократным изгибам. Однако и для всех этих свойств можно определить соответствующие количественные характеристики. Без их знания мы практически не можем описать объект так, чтобы это описание позволяло достаточно точное его воспроизведение.

Для того чтобы узнать числовые характеристики свойства предмета, необходимо определить, во сколько раз данная его характеристика больше (или меньше) соответствующей характеристики другого объекта, принятой за единицу. Операция сравнения величины исследуемого объекта с величиной единичного объекта называется измерением.

Так, например, за единицу длины принят метр, и в результате измерения некоторой длины l мы определяем, сколько метров содержится в этом отрезке. В основе таких измерений лежит эталон метра – расстояние между штрихами, нанесенными на стержне из особостойкого сплава.

В 1960 г. XI Международной генеральной конференцией по мерам и весам было принято решение о замене метра новой основной единицей длины – длиной волны спектральной линии одного из изотопов криптона – ^{86}Kr. Она была принята равной для вакуума $6057 \times 8021_1 \cdot 10^{-10}$ м. Индекс внизу указывает, что этот знак уже ненадежен вследствие погрешностей измерений. Таким образом, по определению, 1 м $= 1\,650\,763.73\,\lambda_{\text{вак}}\,^{86}Kr$. В 1983 г. на XVII Международной генеральной конференции было введено в качестве новой единицы длины расстояние, которое свет проходит в вакууме за $3.335640951 \cdot 10^{-9}$ с. Такая замена связана с тем, что скорость света, положенная в основу нового определения, может быть измерена значительно точнее, чем длина волны спектральной линии.

Все решения о замене старого эталона метра новым вызваны необходимостью иметь для основных физических измерений не образец, подверженный всякого рода изменениям и деформациям, а неизменную физическую константу. Впрочем, никогда нет полной уверенности в том, что и она не меняется с течением времени. Это относится и к скорости света, которая сейчас принята равной 299 792 458 $мс^{-1}$.

Точно так же при измерении некоторой массы M мы устанавливаем, во сколько раз эта измеряемая масса превосходит массу эталонного образца в один килограмм. Разумеется, практически никогда не пользуются сравнением измеряемых величин с основными эталонами, которые хранятся в специальных государственных метрологических учреждениях. (В СССР таким является Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии – ВНИИМ). Вместо этого пользуются измерительными приборами, тем или иным способом сверенными с эталонами. Это относится как к приборам, с помощью которых измеряют длину, – различного рода линейкам, микрометру, измерительному микроскопу, – так и к определяющим время (часы), массу (весы), а также электроизмерительным, оптическим и другим приборам.

Следует помнить, что никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно. Его результат всегда содержит некоторую погрешность, или, как говорят, результат измерения отягчен погрешностью. Измерения, которые были произведены при сравнении измерительных инструментов и приборов с эталонами, также отягчены большей или меньшей погрешностью. Очевидно, что, измеряя с помощью такого инструмента некоторую величину, мы, как правило, не можем сделать погрешность меньшей, чем та, которая определяется погрешностью измерительного устройства. Иначе говоря, если у нас есть линейка, про которую известно, что ее длина определена с относительной погрешностью 0.1% (т.е. 1 мм при метровой линейке), то, применяя ее, нельзя пытаться измерить длину, скажем, с точностью до 0.01%. Это очевидное положение, к сожалению, иногда забывают.

Итак, в результате измерений мы всегда получаем нужную величину с некоторой погрешностью.

В задачу измерений входит не только нахождение самой величины, но также и оценка допущенной при измерении погрешности.

Принято различать прямые и косвенные измерения. При прямом измерении мы непосредственно сравниваем величину нашего объекта с величиной единичного объекта, например, прикладывая образцовый метр к измеряемой длине либо определяя искомое число прямо по показаниям измерительного прибора – силу тока по амперметру, вес по показаниям пружинных весов и т.д. Однако гораздо чаще измерения проводят косвенно, например, площадь прямоугольника – по измерению его сторон, электрическое сопротивление – по измерениям силы тока и напряжения, концентрацию примеси – по интенсивности ее спектральных линий и т.д. Во всех этих случаях интересующее нас значение измеряемой величины получается путем соответствующих расчетов.

Независимо от того, имеем ли мы дело с прямыми или косвенными измерениями, нам необходимо знать допускаемую при измерениях погрешность результата измерений, т.е. найти, насколько измеренная нами величина отличается от ее истинного значения.

Подчеркнем сразу же, что точно узнать это нельзя. Если бы мы могли определить разность между измеренным и истинным значениями, то, учтя ее в виде поправки к результатам наших измерений, сразу же получили бы точное истинное значение. В действительности дело обстоит сложнее. Мы в лучшем случае можем лишь указать (да и то приближенно) интервал возможных значений измеряемой величины, внутри которого расположено ее действительное значение $x_{ист}$; иначе говоря, если измеренное значение – $x_{изм}$, то в результате измерений мы можем написать

$$x_{изм} - \Delta x < x_{ист} < x_{изм} + \Delta x \,. \qquad (1)$$

Величину Δx называют погрешностью измерения; чем меньше Δx, тем точнее выполнено измерение. Неравенство (1) нестрогое. Оно выполняется лишь с некоторой степенью достоверности, но об этом будет говориться ниже.

Как уже указывалось, всякое измерение должно быть выполнено так, чтобы можно было установить с достаточной надежностью границы интервала, определяемого равенством (1).

С этой целью (если мы ничего не знаем о точности наших измерительных приборов и о погрешностях в процессе измерения) следует сначала сделать несколько наблюдений в одинаковых условиях. Здесь могут возникнуть две ситуации.

1. Результаты измерений во всех опытах (наблюдениях) повторились с той точностью, которую допускает наш измерительный прибор.

2. Каждое отдельное наблюдение дало свой, слегка отличный от других наблюдений, результат.

Если имеет место первый случай, то это еще не значит, что нами получено абсолютно точное значение. Наоборот, мы можем быть почти уверены в том, что переход к более точному измерительному прибору даст несколько отличное от полученного нами значение измеряемой величины. Если мы измерили длину стола линейкой с делениями 1 см и получили число 123 см, то можем быть уверены, что повторные наблюдения не приведут к другому результату. Если же возьмем линейку с ценой деления 1 мм или еще лучше – 0.1 мм, то легко убедимся, что вместо 123 во всех наблюдениях мы получим, например, такой ряд: x =123.21, 123.27, 123.30, 123.22, 123.28 см, т.е. перейдем от первой ко второй ситуации. Несмотря на то что в первом случае нами получено одно постоянное значение 123, а во втором – пять различных, мы все же понимаем, что качество второй серии наблюдений выше – они точнее.

Представляется правильным за лучшую оценку истинного значения результата измерения принять среднее значение из всех величин, полученных в процессе отдельных наблюдений. Действительно, обычно для этого пользуются средним арифметическим $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ = 123.256 или, округляя, $\bar{x}$ = 123.26. Здесь x_i – результат i-го наблюдения, n – общее число наблюдений. В дальнейшем дадим обоснование именно такой оценки, хотя она не является единственно возможной.

Отметим сразу же, что в измерениях, для которых имеет место непредсказуемый разброс результатов от одного наблюдения к другому, проявляется роль так называемых случайных погрешностей, т.е. погрешностей, взыванных различными малыми изменениями условий опыта, которые практически невозможно ни предусмотреть, ни устранить. На первый взгляд кажется, что ничего нельзя сказать о величине этих погрешностей. В действительности, как будет показано дальше, они подчиняются особым – статистическим – закономерностям, которые позволяют достаточно надежно оценить значение погрешностей и их влияние на конечный результат измерений. Пока же ограничимся выводом, что если в результатах опыта проявляется влияние случайных погрешностей, то с целью их выявления и учета необходимо делать несколько наблюдений. Ниже будет показано, что многократные наблюдения дают возможность также уменьшить величину случайной погрешности.

Если мы знаем, что случайная погрешность настолько мала, что не выявляется в данных условиях опыта, то можно ограничиться одним наблюдением, а при малейшем сомнении в его правильности – двумя или тремя, причем роль повторных наблюдений в данном случае сводится только к проверке того, не произошла ли при первом наблюдении грубая погрешность; именно с этой целью кассир почти всегда пересчитывает деньги два раза, и совпадение результатов служит известной (правда, не абсолютной) гарантией того, что счет верен.

2. О ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Под точностью измерений понимается их качество, отражающее близость результатов к измеряемой величине.

Если общая относительная погрешность измерений, включающая и систематическую и случайную составляющие, Σ, то количественно точность принимается равной $1/\Sigma$. Точность, как и относительная погрешность, – величина безразмерная.[1]

Часто стараются произвести измерения с наибольшей достижимой точностью, т.е. сделать погрешность измерения по возможности малой. Однако следует иметь в виду, что чем точнее мы хотим измерить какую-либо величину, тем труднее это сделать. Поэтому не следует требовать от измерений большей точности, чем это необходимо для решения поставленной задачи. Для изготовления книжной

---

[1] Это определение точности соответствует ГОСТу (см. табл. I, позиция 18), но пока не всегда принято в научной литературе.

полки длину досок вполне достаточно измерять не точнее, чем до 0,5–1 см, т.е. с погрешностью около 1%; для производства некоторых деталей шарикоподшипников допустима погрешность не более 0,001 мм, или около 0,01%, а при измерении длин волн спектральных линий иногда величина погрешности не должна превышать 10^{-11} см, или около 10^{-5}%. Не следует увлекаться получением излишней точности, если она не нужна, но необходимо прилагать максимум усилий и не жалеть времени и труда для получения лишнего десятичного знака, когда это требуется. Надо иметь в виду, что очень часто именно повышение точности измерений позволяет вскрыть новые закономерности.

Действительно, всякий закон, устанавливающий количественную связь между физическими величинами, выводится в результат опыта, основой которого служат измерения. Он может считаться верным лишь с той степенью точности, с какой выполнены измерения, положенные в его основу.

Так, например, существует хорошо проверенный со времен Ломоносова и Лавуазье закон сохранения вещества, по которому сумма масс веществ, вступающих в химическую реакцию, равна массе продуктов реакции. Однако при химической реакции поглощается или выделяется энергия. Вследствие этого в соответствии с теорией относительности масса продуктов реакции несколько отличается от суммы реагирующих масс. При сгорании угля это различие составляет 1 г на 3000 т угля. Чтобы заметить его, нужно произвести взвешивание с относительной погрешностью не более $3 \cdot 10^{-8}$%.

Следовательно, лишь в указанных пределах точности $(3 \cdot 10^{9})$ справедлив закон сохранения массы при реакции горения. Научившись взвешивать с такой точностью, мы сумели бы непосредственно обнаружить это изменение массы. Сейчас оно установлено только косвенным путем, так как нужной точности взвешивания мы не достигли.

Однако при ядерных реакциях, когда количество выделяющейся энергии на единицу массы реагирующих веществ гораздо больше, изменение массы может быть относительно легко обнаружено.

В качестве другого примера можно указать, что повышение точности измерений плотности воды привело в 1932 г. к открытию тяжелого изотопа водорода – дейтерия, ничтожное содержание которого в обычной воде немного увеличивает ее плотность.

Почти так же проведенные Рэлеем в 1894 г. точные измерения плотности азота, выделенного из воздуха, показали, что она несколько выше плотности азота, полученного разложением чистого аммиака. Хотя это различие составляет всего около 5 мг/л, оно побудило предсказать примесь к атмосферному азоту более тяжелого газа и привело Рамсая и Рэлея в 1895 г. к открытию инертного газа – аргона (о существовании такой группы газов до этого и не предполагали).

Можно было бы привести еще ряд примеров новых открытий, полученных в результате увеличения точности измерений. Может быть, наиболее важное из них – это изменение массы движущихся тел, требуемое теорией относительности, которая приводит к соотношению

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad (2)$$

где m_0 – масса покоящегося тела, m – движущегося со скоростью v, c – скорость света. В силу малости v/c ко времени создания теории относительности m всегда было равно m_0, так как недостаточная точность измерений не позволяла их различать. По мере увеличения точности измерений и перехода к большим скоростям v такое изменение массы удалось наблюдать. Сейчас соотношение (2) имеет не только теоретический интерес, но и используется в инженерных расчетах. Из сказанного видно, как иногда важно стремиться к максимальному увеличению точности. Для того чтобы этого достичь, нужно руководствоваться определенными правилами и приемами при производстве самих измерений и обработке полученных результатов. Хотя рекомендации в этом отношении не могут быть универсальными, но многие общие приемы хорошо разработаны и будут здесь изложены.

I. ТИПЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Погрешности измерений принято подразделять на систематические, случайные и грубые. Систематические погрешности вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. В качестве примера такой погрешности приведем взвешивание на чашечных весах с помощью неточных гирь. Если взятая нами гиря имеет погрешность, скажем, 0.1 г, то масса тела, допустим, 1000 г будет завышенной (или заниженной) на эту величину, и чтобы найти верное значение, необходимо учесть эту погрешность, прибавив к полученной массе (или вычтя из нее) 0.1 г. Другой пример систематической погрешности приведем также из области взвешивания. Согласно закону Архимеда, измеренный в воздухе вес тела отличается от его истинного веса на вес воздуха в объеме этого тела. Это же относится и к весу и массе гирь. Для того чтобы получить правильную массу, нужно после взвешивания ввести соответствующие поправки на „потерю веса" измеряемого тела и гирь. Если этого не делать, то результат взвешивания будет отягчен систематической ошибкой.

Хотя приведенные в этих двух примерах погрешности относятся к систематическим, они обладают существенным различием. Во втором примере поправку на потерю веса тела в воздухе можно вычислить. Для этого нужно знать плотность воздуха, плотность вещества, из которого сделаны гири, и плотность измеряемого тела. Эти величины обычно известны с достаточной степенью точности.

В первом примере, напротив, поправка на массу гири чаще всего неизвестна. О ней мы знаем лишь то, что она не превышает некоторой величины (в нашем примере – 0.1 г, или 0.01%). Поэтому поправка на неточность гири не может быть учтена, и результат взвешивания мы вынуждены записать в виде

$$M = 1000.0, \text{или } 1000 \pm 0.1 \text{ г.}$$

2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Если мы ничего больше не знаем о погрешности измерения массы гири,[2] кроме того, что она не превосходит 0.1 г, то никакие

[2] Далее погрешность измерения массы гири будем для простоты называть погрешностью гири.

самые лучшие приемы взвешивания не позволят получить о массе тела более точных сведений. Однако, имея в достаточном количестве даже заведомо неточные гири, можно попытаться получить лучшие результаты. Допустим, что мы располагаем разными наборами гирь, причем о каждом из них известно, что он выполнен с погрешностью, не превышающей 0.01%. Это значит, что килограммовая гиря из набора имеет погрешность не более 0.1 г, стограммовая – не более 10 мг, пятидесятиграммовая – 5 мг и т.д.

Очевидно, что хотя во всех наборах гири с номинальной массой в 1 кг будут обладать погрешностью не более 0.1 г, разные экземпляры этих гирь характеризуются различными погрешностями. Гиря одного набора будет, например, иметь погрешность плюс 0.03 г, другого – минус 0.07 г, третьего – плюс 0.04 г и т.д.

Это происходит потому, что погрешности гирь появились в результате неточностей, имевших место при их изготовлении, которые разным образом сказались на каждой из них. Если мы произведем ряд взвешиваний, пользуясь всякий раз гирями из другого набора, то вследствие различия в погрешности каждой из гирь мы получим несколько отличающихся друг от друга значений масс взвешиваемого тела. Пусть этот ряд значений будет, например, 1000.23, 1000.20, 1000.23, 1000.20, 1000.19, 1000.20, 1000.15, 1000.17, 1000.12, 1000.22 г.

Возьмем среднее арифметическое $\bar{x}$ этих значений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (3)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результаты отдельных определений массы. В нашем случае $\bar{x}$ = 1000.19 г. Можно быть практически уверенным, что это число отличается от значения истинной массы меньше, чем на 0.1 г. Последнее следует из того, что среди ряда гирь, использованных нами при взвешивании, вероятно, были такие, у которых погрешность массы положительная (т.е. их масса больше обозначенной на гире), но были и имеющие отрицательные погрешности. Когда мы брали среднее арифметическое, то положительные и отрицательные погрешности хотя бы частично компенсировали друг друга. В результате погрешность среднего арифметического $\bar{x}$ должна быть, вообще говоря, меньше, чем погрешность каждого из отдельных полученных нами значений массы x_i. Хотя это не исключает того, что некоторые из значений x_i могут оказаться ближе к истинной массе, чем $\bar{x}$, – именно те значения, которые были получены с наиболее точными гирями из нашего набора. Но все дело в том, что мы не знаем, какая из наших гирь более точная. Если бы это было известно, то при взвешивании просто нужно воспользоваться лучшими гирями и отпала бы необходимость производить взвешивание несколько раз. Мы это делаем именно потому, что не знаем погрешности каждой из гирь.

Можно полагать, что чем больше наборов таких гирь у нас имеется, а следовательно, чем больше взвешиваний с использованием различных гирь мы сможем произвести, тем ближе к истинному будет значение, вычисленное по формуле (3). Таким образом, результаты наших отдельных взвешиваний оказываются отягченными разными погрешностями для разных взвешиваний, о которых нам пока ничего неизвестно, кроме того, что любая из них не превышает 0.1 г. Средее арифметическое значение из всех взвешиваний также содержит погрешность, которая, вероятно, меньше 0.1 г, но и о ней сейчас мы ничего больше не можем сказать.

Погрешности такого рода носят название случайных (потому что они отличаются друг от друга в отдельных измерениях и эти различия имеют случайную, неизвестную нам величину). Правила определения случайных погрешностей изучаются в теории погрешностей – математической дисциплине, основанной на законах теории вероятностей. В дальнейшем мы приведем некоторые положения теории погрешностей, необходимые для простейшей математической обработки результатов измерений. Выводы этих положений зачастую довольно сложны и громоздки и здесь поэтому не приводятся.

3. ГРУБЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Третий тип погрешностей, с которыми приходится иметь дело, – грубые погрешности, или промахи. Под грубой погрешностью измерения понимается погрешность, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях. Она может быть сделана вследствие неверной записи показаний прибора, неправильно прочитанного отсчета, и т.п. В нашем примере со взвешиванием вследствие промаха могла быть записана масса 100.20 г или, например, 2020.0 г вместо 1000.20 г. При измерении длины линейкой промах может появиться в результате того, что один из концов измеряемого предмета окажется совмещенным не с 0 линейки, а, скажем, с делением 10 см, причем отсчет будет сделан без учета этого обстоятельства, что приведет к завышению измеряемой длины на 10 см.

4. ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Таким образом, мы различаем три основных типа погрешностей.

1. Систематические, значение которых одинаково во всех измерениях, проводящихся одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов.

2. Случайные. Они имеют различные значения даже для измерений, выполненных одинаковым образом. Случайные погрешности обязаны своим происхождением ряду причин, действие которых неодинаково в каждом опыте и не может быть учтено. В приведенном выше примере источником случайных погрешностей была неодинаковая масса гирь, но даже при взвешивании одними и теми же гирями мы, вообще говоря, будем получать разные значения веса. Источником погрешностей может быть, например, колебание воздуха, воздействовавшее неодинаковым образом на чашки весов; пылинка, осевшая на одну из чашек; нагревание одной половины коромысла от приближения руки взвешивающего; разное трение в правом

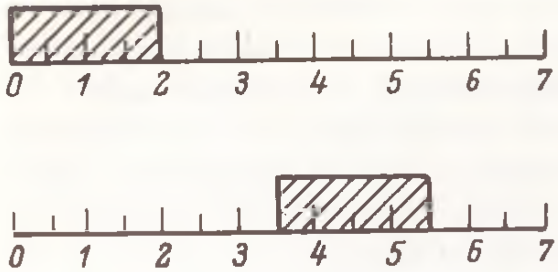


Рис. 1. К исключению грубых погрешностей.

и левом подвесах чашек и множество других причин, которые практически невозможно учесть.

3. Г р у б ы е п о г р е ш н о с т и. Источником таких погрешностей (промахов) является недостаток внимания экспериментатора. Для их устранения нужно соблюдать аккуратность и тщательность в работе и записях результатов. Иногда можно выявить промах, повторив измерение в несколько отличных условиях, например, перейдя на другой участок шкалы прибора, как это изображено на рис. 1. Следует иметь в виду, что многократное измерение подряд одной и той же величины в одних и тех же условиях не всегда дает возможность установить грубую погрешность. Действительно, если при измерении угла наблюдатель записал $45^\circ 32' 20''$ вместо $35^\circ 32' 20''$, то при повторных наблюдениях он иногда будет обращать внимание только на минуты и секунды, продолжая механически записывать 45° вместо 35°. Для того чтобы надежно установить присутствие грубой погрешности, нужно либо сместить шкалу, либо повторить наблюдение, спустя такое время, когда наблюдатель уже забыл полученные им цифры. Разумеется, повторение измерения другим наблюдателем, который не знает результатов, полученных первым, почти всегда поможет вскрыть грубую погрешность, если она имела место. Однако не следует считать и этот метод абсолютно надежным. Если, например, погрешность произошла из-за нечетко обозначенного деления шкалы (иногда путаются цифры 5 и 6 или 3 и 8), то второй наблюдатель может повторить ошибку первого.

Далее будут указаны еще некоторые признаки, позволяющие иногда отличить грубые погрешности от закономерных результатов наблюдений. При всяком опыте такого рода погрешности должны быть исключены, и, как уже говорилось, основной способ их устранения – особая тщательность и внимание во время работы.

5. АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

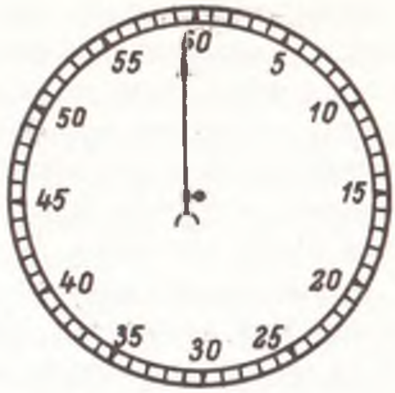
Качество результатов измерений обычно удобно характеризовать не абсолютной величиной погрешности Δx, а ее отношением к найденному значению измеряемой величины $\Delta x / x_{изм}$, которое называют относительной погрешностью и обычно выражают в процентах:

$$k = \Delta x_{отн} = \frac{\Delta x}{x_{изм}} 100\% . \qquad (4)$$

Величина, обратная относительной погрешности, называется точностью и обозначается Q. По определению,

$$Q = \bar{x} / \Delta x . \qquad (5)$$

Рис. 2. Циферблат со смещенной стрелкой.



Удобство такого представления происходит отчасти от того, что с отвлеченными числами обычно проще иметь дело, чем с именованными, но главным образом применение относительной погрешности связано с тем обстоятельством, что в большинстве приложений именно эта величина играет существенную роль. Действительно, если мы измеряем с погрешностью около 1 см какую-либо длину, то в случае, когда речь идет об определении длины карандаша, это будет очень скверная точность (около 10); если же с погрешностью до 1 см определить расстояние от Москвы до Ленинграда, то это будет чрезмерно высокая точность ($\approx 6\cdot 10^7$), и измерять с такой точностью в данном случае очень трудно, да и нет необходимости. Поэтому указание абсолютной погрешности обычно мало говорит о действительной точности, если не сопоставить ее значение со значением измеряемой величины. С этой точки зрения относительная погрешность всегда дает более непосредственное представление о качестве измерений.

Следует иметь в виду, что погрешность, получающаяся в процессе измерений, вообще говоря, различна для разных значений измеряемой величины. Однако для погрешностей той или иной природы связи между значением погрешности и измеряемой величиной могут быть различными.

Поясним сказанное примером. Допустим, что мы определяем длину отрезка с помощью деревянной линейки длиной l, которая удлинилась после ее изготовления и нанесения делений (например, вследствие набухания); пусть удлинение всей линейки равно Δl . Каждый сантиметр линейки оказался удлиненным на величину $\delta l = \Delta l / l$. Если измеряемый отрезок имеет длину A , то вследствие удлинения линейки его длина будет определена с погрешностью $\Delta A = A\dfrac{\Delta l}{l}$.

В этом случае относительная погрешность величины A остается постоянной:

$$\frac{\Delta A}{A} = \delta l . \qquad (6)$$

Разберем теперь случай, когда общая длина измерительной линейки правильна, но каждое деление нанесено так, что погрешность в отсчете от начала шкалы до этого деления не превышает δl . Погрешность измерения длины с помощью такой линейки не будет зависеть от измеряемой длины A , следовательно относительная погрешность измерения

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{\delta l}{A} \qquad (7)$$

будет обратно пропорциональна A .

Возможен случай, когда значение погрешностей периодически меняется с изменением измеряемой величины. Например, это будет иметь место, если измерять время с помощью секундомера, ось стрелки которого не совпадает с центром циферблата (рис. 2). Из рисунка видно, что отсчеты 15 и 45 с будут правильны, отсчет 30 с завышен, а отсчет 60 с занижен. Иное положение оси даст другие погрешности отсчета.

Возможны и более сложные зависимости погрешности от значения измеряемой величины. Чаще всего эта зависимость лежит в промежутке между случаями, описываемыми формулами (6) и (7). Иначе говоря, относительная погрешность измерений не остается постоянной, но меняется медленнее, чем это следует из формулы (7).

Если диапазон изменения измеряемой величины велик, то всегда следует изучить характер изменения погрешностей в этом диапазоне. Обычно целесообразно организовать измерение так, чтобы оставалась по возможности постоянной их относительная погрешность.

6. УЧЕТ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

При производстве измерений одной из основных должна быть забота об учете и исключении систематических погрешностей, которые в ряде случаев бывают так велики, что совершенно искажают результаты измерений.

Систематические погрешности можно разделить на четыре группы.

1. Погрешности, природа которых нам известна, и их значение может быть достаточно точно определено. Такие погрешности устраняются введением соответствующих поправок.

При измерениях длины может оказаться необходимым вводить поправки, связанные, например, с температурным удлинением измеряемого тела и измерительной линейки; при определении веса – поправку, вызванную „потерей веса" в воздухе, величина которой зависит от температуры, влажности воздуха и атмосферного давления, поправку, обусловленную неравноплечностью весов, и т.д. Подобные источники погрешностей нужно тщательно анализировать, величины поправок определять и учитывать в окончательном результате. Однако здесь, как и при всяких измерениях, требуется разумный подход. Поясним это на примере измерения длины. Допустим, что мы определяем диаметр латунного цилиндра с помощью стальной измерительной линейки, изготовленной при температуре 0 °С, а измерения проводятся при 25 °С. Предположим, что измеряемый диаметр равен около 10 см, и мы хотим узнать его размер при нулевой температуре. Коэффициент линейного расширения латуни $19 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}, стали – $11 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}. Легко сосчитать, что при нагревании на 25° удлинение используемого нами участка измерительной линейки составит 0.027 мм, а увеличение диаметра цилиндра – 0.047 мм. Разность этих величин, т.е. 0.02 мм, и является поправкой наших измерений.

Обычная стальная линейка имеет миллиметровые деления. Если считать, что на глаз можно относительно уверенно отсчитать 0.2

деления, то 0,2 мм и будет той наименьшей погрешностью, которая обычно достижима с помощью такого измерительного инструмента. Примерно с такой же точностью нанесены и деления на линейке. Мы видим, что 0,02 мм, которые дает температурная поправка, настолько меньше погрешности, вносимой самой линейкой и способом отсчета, что введение этой поправки лишено смысла. Другое дело, если те же самые измерения производить с помощью точного измерительного микрометра, дающего возможность произвести измерения диаметра с точностью до 0,001 мм. Введение той же самой поправки 0,02 мм при этом не только целесообразно, но и совершенно необходимо.

Величина поправок, которые еще есть смысл вводить, разумеется, устанавливается в зависимости от значения других погрешностей, сопровождающих измерение. Существует правило, устанавливающее, что если поправка не превышает 0,005 от средней квадратической погрешности результата измерений (см. дальше), то ею следует пренебречь. Это правило чрезмерно жесткое; обычно можно пренебречь поправками, имеющими большее значение (что мы и рассмотрим далее).

2. Погрешности известного происхождения, но неизвестной величины. К их числу относится уже упомянутая нами погрешность измерительных приборов. Она оценивается путем сравнения показаний данного прибора с показаниями другого, более точного.

Результат поверки приводится либо в специальном паспорте прибора, либо указанием класса точности, который определяется ГОСТом. Класс точности электроизмерительных приборов и манометров обозначается числом, указывающим максимальную погрешность прибора в процентах от верхнего предела измерений. Так, миллиамперметр, шкала которого изображена на рис. 3,а, дает погрешность в измерении силы тока не более 0.75 мА. Очевидно, что нет никакого смысла пытаться с помощью такого прибора измерять ток точнее, чем до 0.1 мА. (Если, конечно, для этого не применять каких-либо компенсационных схем, в которых наш миллиамперметр уже будет работать только как нуль-гальванометр, а не как измерительный прибор. В последнем случае погрешность измерении будет определяться чувствительностью миллиамперметра, которая численно равна минимальному току, вызывающему заметное отклонение стрелки прибора. Очевидно, что компенсационный метод измерения может снизить погрешность результата, сделав ее существенно меньшей, чем это следует из класса точности).

Широко распространенные сейчас цифровые электроизмерительные приборы (см., например, рис. 3, б) обычно имеют погрешность в одну-две единицы последней значащей цифры, если в паспорте прибора не указана другая величина. Это не относится к счетчикам электроэнергии, погрешность которых существенно больше и может превышать один процент от измеряемой электроэнергии.

Класс точности весоизмерительных приборов обозначается цифрой (от 0 до 5) и буквой (а, б, в). Буква обозначает значащую цифру

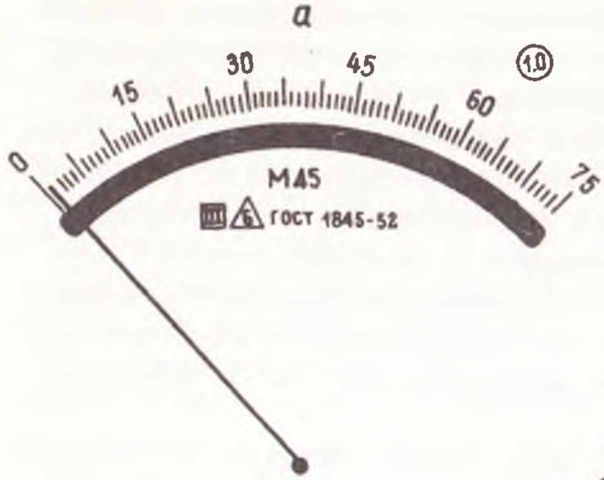
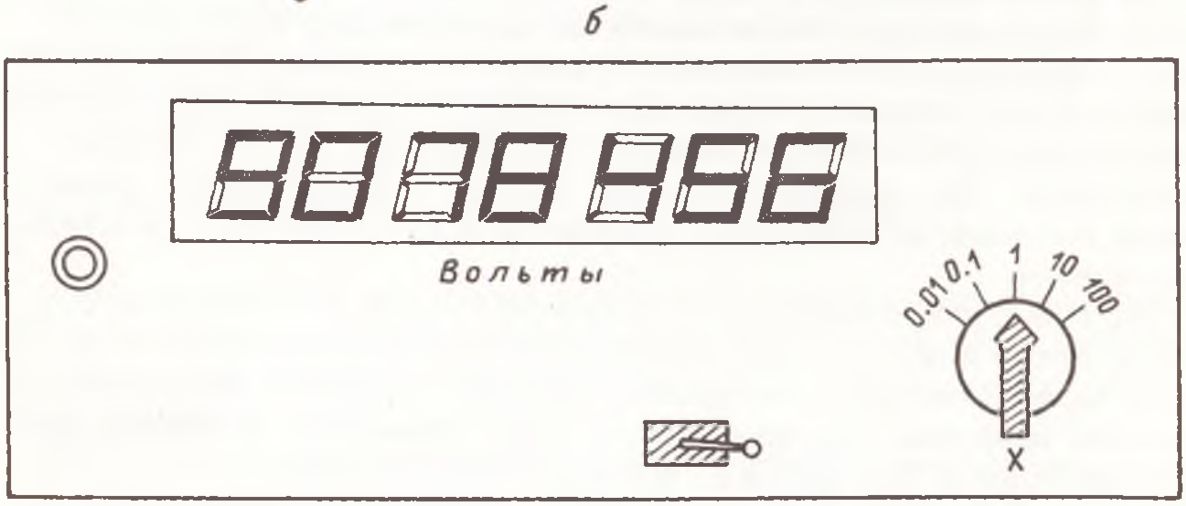


Рис. 3. Шкала миллиамперметра (а) и индикатор цифрового вольтметра (б).



в числе, указывающем относительную погрешность в процентах, а цифра – место, которое она занимает после запятой. Например, класс точности 2б соответствует допустимой погрешности 0.02%, класс 0б – 2% и т.д.

Максимальные погрешности, даваемые измерительными линейками, микрометрами и некоторыми другими приборами, либо указываются на самом приборе, или приводятся в его паспорте. Обычно дается наибольшая абсолютная погрешность, которую мы вынуждены считать постоянной по всей шкале прибора, если последний не сопровождается специальной таблицей поправок для каждого деления шкалы. Такие таблицы прилагаются только к наиболее точным измерительным приборам.

На хороших измерительных приборах цена деления шкалы согласована с классом данного прибора. В таком случае нецелесообразно пытаться на глаз оценивать малые доли деления, если они не отмечены на шкале. Однако это правило при изготовлении приборов не всегда выполняется, и иногда есть смысл оценивать по шкале четверть или даже одну десятую деления, но не следует особенно полагаться на такую оценку, тем более что при оценке на глаз 0.1 деления разные наблюдатели делают различную систематическую погрешность, доходящую до 0.2 деления.

Систематические погрешности описываемой группы, вообще говоря, не могут быть исключены, но их наибольшее значение, как правило, известно, и если мы, измеряя ток с помощью миллиамперметра (рис. 3, а), получили i = 65.3 мА, то можем написать i = 65.3±0.8 мА. Здесь ±0.8 означает, что сила тока лежит где-то в пределах от 64.5 до 66.1 мА. Больше мы ничего о силе тока сказать не можем.

3. П о г р е ш н о с т и, о с у щ е с т в о в а н и и к о т о р ы х м ы н е п о д о з р е в а е м, х о т я о н и м о г у т б ы т ь о ч е н ь з н а ч и т е л ь н ы м и. Чаще всего такие погрешности появляются при сложных измерениях, и иногда бывает, что какая-нибудь величина, которая считается определенной с точностью, например, 50-100, в действительности оказывается в 2 раза больше измеренного значения.

Так, например, если мы захотим измерить плотность какого-то металла и для этого определим объем и массу образца, то совершим грубую ошибку, если измеряемый образец содержал внутри пустоты, например пузыри воздуха, попавшие при отливке.

Здесь приведен простейший пример, и в данном случае источник погрешности и ее размер определить не так уж трудно, хотя при очень точных измерениях плотности описанное обстоятельство может играть немаловажную роль. При более сложных измерениях нужно всегда очень тщательно продумывать их методику, чтобы избежать больших ошибок такого рода; и чем сложнее опыт, тем больше оснований думать, что какой-то источник систематических погрешностей остался неучтенным и вносит недопустимо большой вклад в погрешность измерений. Один из наиболее надежных способов убедиться в отсутствии таких погрешностей - провести измерения интересующей нас величины совсем другим методом и в других условиях. Совпадение полученных результатов служит известной, хотя, к сожалению, не абсолютной, гарантией их правильности. Бывает, что и при измерении разными методами результаты отягчены одной и той же ускользнувшей от наблюдателя систематической погрешностью, и в этом случае оба совпавшие друг с другом результата окажутся одинаково неверными.

Вся история развития точных наук показывает, что от такого рода погрешностей не свободны даже самые лучшие, наиболее тщательно проведенные измерения. Они оказались присущими и основным физическим константам, значения которых в последние годы были неоднократно пересмотрены.

Очень часто какая-либо величина измеряется в нескольких лабораториях одним и тем же методом с погрешностью, скажем, 0.01%. В то же время значения, полученные в этих лабораториях, расходятся между собой иногда на 0.1% или даже более. Поэтому возникло понятие межлабораторной погрешности, которая характеризует такие расхождения. Разумеется, тщательный анализ условий опыта иногда позволяет установить причину расхождения и прийти к согласованному значению. Однако часто это бывает совсем не просто.

В качестве иллюстраций приведем диаграммы, показывающие, как менялись случайные погрешности измерений и численные значения некоторых основных физических констант за период с 1952 по 1973 г. (рис. 4). У каждой точки, дающей относительное отклоне-

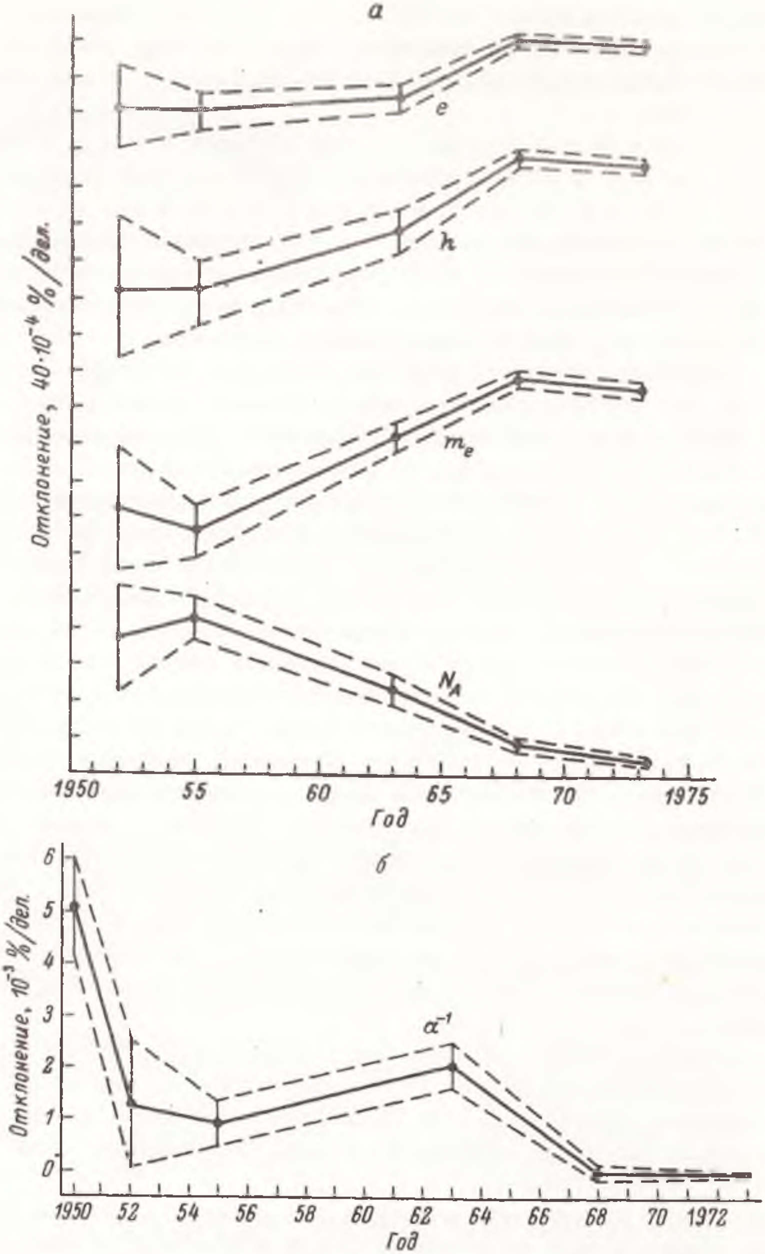


Рис. 4. Изменение значений некоторых физических констант и относительных среднеквадратических погрешностей за период 1950–1973 гг.

а: e – заряд электрона, h – постоянная Планка, m_e – масса электрона, N_A – число Авогадро. б: α^{-1} – постоянная сверхтонкой структуры.

Ныне принятые значения: $e = 1.6021892(46)\cdot10^{-19}$ Кл, $h = 6.626176(36)\cdot10^{-34}$ Дж/Гц, $m_e = 9.109534(47)\cdot10^{-31}$ кг, $N_A = 6.022045(30)\cdot10^{-23}$ 1/моль, $\alpha^{-1} = 137.03604(11)$.

ние от ныне принятого значения константы (точки на оси абсцисс), по вертикали отложены относительные значения случайных погрешностей (см. с. 39). Мы видим, что расхождение между значениями, полученными в разное время, иногда существенно превышает величину случайных погрешностей. Это означает, что, по крайней мере, некоторые результаты измерений содержат наряду со случайной и систематическую погрешность, ответственную за наблюдаемые расхождения.

4. Погрешности, обусловленные объектом измерений. Эта группа, хотя и не связана непосредственно с измерительными операциями, может существенным образом искажать результат измерений.

Поясним сказанное на примере измерения площади сечения цилиндра, который мы считаем круговым, но в действительности он имеет овальное сечение. Если будем измерять диаметр AB (рис. 5), то получим бо́льшие значения, чем при измерении диаметра A'B'. Измерив ряд диаметров и взяв среднее из полученных значений, можно определить число, лучше характеризующее размер цилиндра. Если же измерять только один диаметр и считать цилиндр круглым, то вычисленное по этим измерениям значение будет содержать систематическую погрешность, определяемую степенью овальности цилиндра и выбранным для измерения диаметром.

Однако если при измерении диаметра цилиндра в нескольких направлениях получается одинаковый результат, мы еще не можем быть уверенными в том, что цилиндр круглый. Действительно, проведем три окружности, радиусы которых равны стороне равностороннего треугольника, а центры находятся в его вершинах. Фигура, ограниченная дугами этих окружностей и вершинами треугольников (рис. 6), обладает тем очевидным свойством, что при измерении ее размеров штангенциркулем в любом направлении мы будем получать одно и то же значение, равное длине стороны треугольника a. Рассчитанная по этим значениям площадь „круга" будет $\pi a^2/4$. В действительности легко показать, что площадь этой фигуры будет $(a^2/2)(\pi - \sqrt{3})$. Отношение измеренной и действительной площадей составит 1.16, т.е. будет допущена погрешность около 15%. Этот пример представляется очень любопытным и наглядно показывающим, насколько осторожным нужно быть в выборе метода измерений для исключения систематической погрешности. Цилиндр, имеющий в сечении фигуру рис. 6, является удивительным примером „некруглого катка", с помощью которого можно с успехом перекатывать грузы, как по круглому (рис. 7). Существуют и другие фигуры, обладающие указанным свойством.

Приведем еще пример. Если для измерения электропроводности металла взят отрезок проволоки из этого металла, имеющий какой-либо дефект, например утолщение, трещину, неоднородность, то сопротивление такого куска будет неверно характеризовать электропроводность материала. Происходящая из-за этого погрешность является систематической.

Однако, как мы видели на примере взвешивания с помощью неверной гири, систематическая погрешность в ряде случаев может

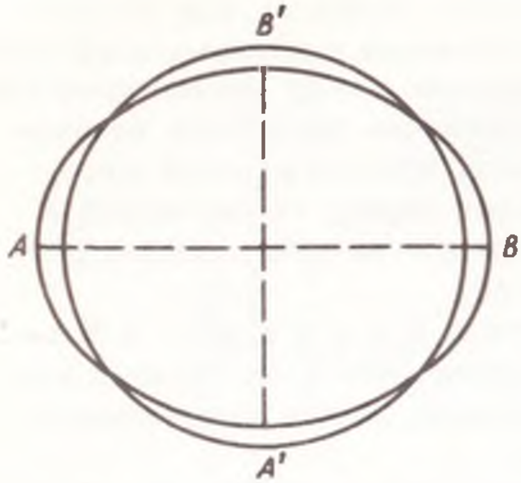


Рис. 5. Сечения цилиндра.

Рис. 6. Овал постоянной ширины.

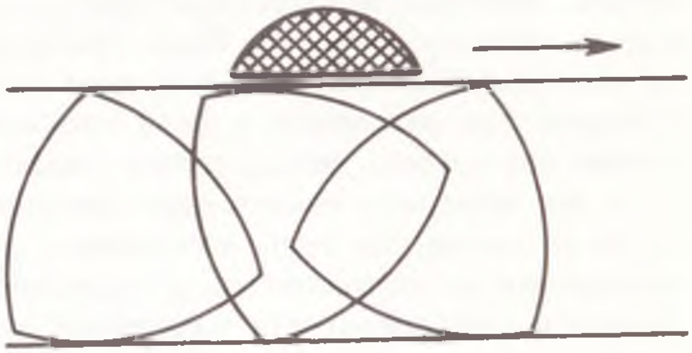


Рис. 7. Катки на некруглых цилиндрах.

быть переведена в случайную. В примере с гирями для этого было необходимо провести несколько взвешиваний, пользуясь для каждого из них гирями из другого набора.

Точно так же систематическая погрешность, связанная со свойствами измеряемого объекта, часто может быть переведена в случайную. В наших примерах для этого нужно: в первом – измерить ряд диаметров цилиндра и взять среднее значение, во втором – измерить сопротивление нескольких отрезков проволоки и взять среднее. Впрочем, как было только что показано, этот прием может и не дать требуемых результатов, ибо не всякий способ усреднения автоматически приводит к исключению систематической погрешности. Действительно, например, присутствующие часто в металле газовые пузырьки всегда снижают его плотность. При измерении плотности разных образцов, взятых из одной и той же отливки, будем иметь несколько отличные значения вследствие неравномерного распределения газовых включений в отливке. Но все полученные значения плотности будут ниже истинной и произведенное таким образом усреднение не может привести к исключению систематической погрешности, обусловленной присутствующим внутри металла газом.

Все же в большом числе случаев перевод систематических погрешностей в случайные оказывается полезным, помогая улучшить точность получаемых результатов.

Из изложенного можно сделать чересчур пессимистический вывод о том, что поскольку численное значение и природа систематических погрешностей нам почти никогда неизвестны и их существование зачастую не может быть установлено, то и результаты измерений всегда могут быть отягчены погрешностью, о которой ничего сказать нельзя, кроме того, что она может иметь место. Такая точка зрения ставит под сомнение любой результат измерений.

К счастью, опыт показывает, что в действительности дело обстоит далеко не так плохо. Если мы и не знаем точного значения систематических погрешностей, то все же внимательный анализ условий эксперимента обычно позволяет установить достаточно надежно по крайней мере верхнюю их границу, и измеренные нами величины определяются с точностью, заслуживающей доверия и непрерывно улучшающейся с ростом техники измерений. Систематическая погрешность, призрак которой всегда преследует экспериментатора, является некоторым стимулом совершенствования техники измерений и, в конце концов, не мешает получению данных, успешно используемых во всех областях науки и техники. Это является лучшей гарантией того, что в подавляющем большинстве измерений систематические погрешности могут быть определены и учтены достаточно хорошо. Хотя, разумеется, от них полностью не застраховано ни одно самое лучшее измерение.

Итак, допустим, что все систематические погрешности у нас учтены, т.е. поправки, которые следовало определить, вычислены, класс точности измерительного прибора известен и есть достаточная уверенность, что отсутствуют какие-либо существенные и неизвестные нам источники систематических погрешностей.

В этом случае результаты измерений все же несвободны от случайных погрешностей, правила вычисления которых даны ниже. Если случайная погрешность окажется меньше систематической, то очевидно, что нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной погрешности, все равно результаты измерений не станут от этого заметно лучше, и, желая получить большую точность, нужно искать пути к уменьшению систематической погрешности. Наоборот, если случайная погрешность больше систематической, то именно случайную погрешность нужно уменьшать в первую очередь.

Мы уже говорили, что если произвести ряд измерений и взять среднее арифметическое из него, то случайная погрешность этого среднего будет меньше, чем погрешность единичного измерения. Для уменьшения случайной погрешности следует произвести не одно, а ряд измерений, причем, как мы увидим дальше, тем больший, чем меньшую величину случайной погрешности мы хотим получить. Однако очевидно, что нет смысла производить измерений больше, чем это необходимо, чтобы систематическая погрешность существенно превышала случайную.

Отсюда вытекают правила, которые будут далее сформулированы более точно.

1. Если систематическая погрешность является определяющей, т.е. она существенно больше случайной погрешности, присущей данному методу, то достаточно выполнить измерение один раз.

2. Если случайная погрешность является определяющей, то измерение следует производить несколько раз. Число измерений целесообразно выбирать таким, чтобы случайная погрешность среднего арифметического была меньше систематической погрешности, с тем

чтобы последняя опять определяла окончательную погрешность результата.

Однако следует иметь в виду, что мы можем ограничиться одним измерением лишь в тех случаях, когда из других источников нам известно, что случайная погрешность меньше, чем систематическая.

Это обычно имеет место при измерениях известным методом, погрешности которого в какой-то степени изучены. Так, например, если определить длину карандаша с помощью измерительной линейки с погрешностью делений в 1 мм, то можно быть уверенным, что случайная погрешность много меньше 1 мм, и следует ограничиться одним измерением. Точно так же мы знаем, что случайная погрешность взвешивания на обычных торговых весах меньше 5 г, в то время как цена деления шкалы таких весов 5 г и присущая им систематическая погрешность близка к этому значению. Следовательно, надо взвешивать на таких весах не более одного раза, что обычно и делается. Наоборот, при взвешивании на некоторых моделях точных лабораторных весов случайная погрешность взвешивания больше систематической, и для повышения точности часто производят несколько взвешиваний.

Таким образом, необходимое число измерений определяется в конечном итоге соотношением значений систематической и случайной погрешностей. Количественное уточнение этого правила будет приведено дальше, после того как мы познакомимся с элементами теории вероятностей, знание которых нужно для количественных оценок случайных погрешностей.

7. СВЯЗЬ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ И СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Выше указывалось, что можно перевести систематическую погрешность в случайную, организовав измерения таким образом, что постоянный фактор, влияющий на результат измерений, в каждом из них действует разным образом, т.е. результат его действия носит случайный характер.

Этот прием превращения систематической погрешности в случайную называется рандомизацией. Он позволяет практически исключить многие неизвестные систематические погрешности. Приведем еще два примера такого исключения систематических погрешностей.

Если мы для определения урожайности поля соберем урожай с какого-либо его участка, а затем помножим результат на отношение площадей поля и контрольного участка, то полученный таким образом общий урожай может быть искажен систематической погрешностью, связанной с тем, что плодородность почвы на поле меняется от одного его края к другому. Чтобы этого избежать, можно разбить поле на ряд малых квадратов одинаковой площади, перенумеровать их и отобрать для измерения ряд участков случайным образом, например, записав номера участков на бумажках, вытягивать их, как в лотерее. Так мы переведем систематическую погрешность, обусловленную различием в урожайности разных частей поля, в случайную.

Другой пример: измеряется удлинение стержня под действием растяжения. Если мы знаем изменение длины и упругих свойств стержня в зависимости от температуры, то, делая измерения при разных температурах, будем вносить соответствующую поправку. Однако вместо этого можно, не зная зависимости свойств стержня от температуры, произвести ряд измерений растяжения при разных случайно выбранных температурах.

Погрешность, происходящая вследствие изменения температуры, будет случайной, а конечный результат – соответствовать удлинению стержня при средней температуре.

Разумеется, такого рода исключение систематических погрешностей практически далеко не всегда возможно. Поэтому разделение всех погрешностей на систематические и случайные целесообразно.

8. ПОГРЕШНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

В тех случаях, когда измеряются какие-то характеристики готовой продукции – диаметр подшипника, состав металла и т.п. – задача измерений обычно состоит не в получении точного значения измеряемой величины, а в необходимости уложиться в определенные допуски, установленные для данной продукции. Те изделия, которые не соответствуют этим требованиям, будем называть браком. Но следствием погрешностей измерений могут быть два обстоятельства: 1) хорошее изделие бракуется и 2) брак пропускается.

Поясним это примером. Диаметр вала равен 60 мм с допуском 0.013 мм. При измерении диаметра мы получили число 60.012 мм. Погрешность нашего измерительного устройства составляет 0.002 мм. Следовательно, мы признаем вал годным, хотя на самом деле он мог иметь диаметр 60.014 мм, т.е. должен считаться браком. В этом случае мы совершили погрешность второго рода. Наоборот, если при той же точности измерений оказалось, что диаметр вала 60.014 мм, то мы его забракуем, хотя в действительности его размеры могут находиться внутри допуска (скажем, составлять 60.012 мм). В этом случае сделана погрешность первого рода. Очевидно, что, когда размеры изделия находятся вблизи границ допуска, всегда есть вероятность сделать погрешность первого или второго рода. Казалось бы, что наиболее страшна погрешность второго рода – пропуск брака. Это действительно так, когда мы имеем дело с очень дорогими и ответственными изделиями. В таком случае иногда лучше забраковать 100 хороших изделий, чем пропустить одно бракованное. Однако для менее ответственных изделий чересчур жесткий контроль, необходимый для полного отсутствия погрешностей второго рода, нецелесообразен. Действительно, чем вернее хотим мы застраховать себя от погрешностей второго рода, тем больше (при неизменной точности измерений) делаем погрешностей первого рода. Разумеется, невыгодно и нецелесообразно переводить в брак сотню хороших шариковых ручек, чтобы не пропустить в партии одной плохой. Такой излишне строгий контроль будет неоправданно увеличивать стоимость изделий. Выбор экономически целесообразной системы измерений и браковки во всех случаях очень важен.

II. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Мы уже знаем, что большинству измерений сопутствуют случайные погрешности, отличающиеся тем, что при каждом повторном измерении они принимают другое, заранее не предсказуемое значение. Существует еще много величин, обладающих тем свойством, что их точное значение не может быть указано и меняется от опыта к опыту. Такого рода величины называют случайными. Но не следует думать, что о численном значении случайных величин вообще ничего нельзя сказать. Как правило, можно указать границы, в которых оно находится, а также установить, насколько часто внутри этого интервала интересующая нас случайная величина принимает то или иное значение. Опыт обычно показывает, что в разных случаях некоторые из этих значений появляются более часто, а другие – реже. Совокупность наблюденных значений такой величины и частоты появления каждого из этих значений позволяет установить так называемый закон распределения случайной величины, который является столь же определенной ее характеристикой, как постоянное числовое значение, – характеристикой неслучайной величины.

Приведем примеры некоторых неслучайных и случайных величин. Моменты начала и конца солнечного затмения могут быть достаточно точно вычислены, и, таким образом, они неслучайны. Также неслучайно время прибытия поезда на станцию, потому что поезд движется по расписанию.[3] Однако момент прихода такси на стоянку уже относится к случайным величинам, так как он заранее не предопределен.

Более внимательное рассмотрение показывает, что разница между этими двумя классами величин не всегда может быть совершенно четко отмечена.

Действительно, время прихода поезда на станцию приводится в часах и минутах. И не случайно „Красная стрела" прибывает в Москву в 8 ч 25 мин. Но если более точно проследить за остановкой поезда, то мы сразу же убедимся, что каждый день это происходит в разные моменты: сегодня, например, в 8 ч 24 мин 33 с,

---

[3] Это – если не учитывать опозданий, которые, увы, бывают. Если иметь в виду опоздание, то время прибытия поезда следует считать случайной величиной.

вчера – в 8 ч 25 мин 2 с и т.д. Поэтому время прихода „Красной стрелы", измеренное с точностью до секунды, – величина случайная. То же время, измеренное с точностью до минуты, – неслучайно.

Точно так же и момент солнечного затмения, вычисленный на основании законов движения тел Солнечной системы, известных с некоторой точностью. Она и задает точность определения времени начала и конца затмения. В этом смысле момент начала затмения не относится к случайным величинам. Однако в пределах интервала времени, меньшего, чем тот, который может быть получен на основании наших знаний о движении Земли и Луны, момент наступления затмения должен рассматриваться как случайный.

Итак, числовые величины, характеризующие то или иное событие, часто являются случайными.

Наряду с этим сами события в одних и тех же условиях опыта могут произойти или не произойти.

Если подбросить монетку, то она может упасть либо гербом, либо противоположной стороной. Для хорошей монеты (не погнутой с ровными краями и т.п.) выпадение герба или „решки" будет в среднем происходить почти одинаково часто. Мы говорим, что то и другое – события случайные, происходящие с равной вероятностью.

Рассмотрим другой характерный пример случайного события. Допустим, имеется урна, о которой известно, что в ней содержатся одинаковые по массе и размеру шары двух цветов – черные и белые. Так как шары ничем, кроме цвета, не отличаются, то, если не смотреть в урну, мы не знаем, какой шар вытащим. Возьмем из урны шар, отметим его цвет и опустим назад в урну. После перемешивания повторим эту операцию снова и снова некоторое, достаточно большое число раз.

Если в урне n белых и n черных шаров, то в среднем мы должны вытащить их примерно одинаковое число. Иначе это можно выразить так: всего в урне $2n$ шаров, из них n белых. Отношение числа белых шаров к общему числу шаров в урне определяет так называемую вероятность появления белого шара. В данном случае эта вероятность будет $n/2n = 1/2$. Такова же вероятность появления черного шара. Если число шаров неодинаково – допустим, белых в два раза больше, чем черных, – то легко сообразить, что вероятность вытянуть белый шар будет равна 2/3, а черный – 1/3. Очевидно, что если, кроме белых и черных, урна других шаров не содержит, то вероятность вытянуть белый или черный шар равна 1 (1/2 + 1/2 в первом случае, 2/3 + 1/3 – во втором).

Пусть в урне содержатся шары более чем двух цветов, скажем, белые, черные и красные, соответственно в количествах n, l и k. Условно назовем появление белого шара благоприятным событием, а появление черного или красного – неблагоприятным.[4]

[4] Термины „благоприятное" и „неблагоприятное" события неудачны. Например, если мы вычисляем смертность от какой-либо причины, то случай смерти придется относить к числу „благопри-

Вероятностью благоприятного события будем называть отношение возможного числа всех благоприятных событий (оно в нашем случае определяется числом белых шаров в урне) к общему числу всех возможных событий, которые задаются количеством всех шаров в урне, равным $n+l+k$. Положив $l+k=m$, можем записать

$$P(n)=\frac{n}{n+m}, \tag{8}$$

$P(n)$ будем называть вероятностью благоприятного события.

Точно так же вероятность неблагоприятного события будет

$$P(m)=\frac{m}{n+m}. \tag{9}$$

Из формул (8) и (9) легко получить

$$P(m)+P(n)=1. \tag{10}$$

Вычислить вероятности событий можно лишь в том случае, когда известно, сколько событий какого типа возможно. В приведенном примере с урной нужно знать число содержащихся в ней белых (n) и число черных и красных (m) шаров. Часто мы этого не знаем и решаем обратную задачу – по частоте появления шаров того или иного цвета в описанном выше опыте определяем вероятность появления белого, черного или красного. Пусть мы проделали N испытаний, т.е. N раз доставали шар из урны, каждый раз записывали его цвет и возвращали обратно в урну. Пусть при этом мы K раз вытащили белый шар, тогда K/N называется частотой появления белого шара. Основной закон теории вероятностей – закон больших чисел – утверждает, что при достаточно большом числе испытаний N частота появления события (с вероятностью, близкой к достоверности) как угодно мало отличается от вероятности этого события, иначе говоря, если

$$P(m)=\frac{m}{m+n}$$

(причем n и m нам неизвестны), то всегда можно выбрать достаточно большое N, чтобы выполнялось соотношение

$$\left|P(m)-\frac{K}{N}\right|<\varepsilon, \tag{11}$$

ятных" событий. Однако такая терминология прочно укрепилась в теории вероятностей, и мы будем ее придерживаться, памятуя эту оговорку.

где ε – как угодно малое положительное число, отличное от нуля. В принципе это соотношение дает возможность устанавливать опытным путем с какой угодно большой точностью вероятность неизвестного нам случайного события. В действительности разность $P(m)-\frac{K}{N}$ убывает с увеличением N очень медленно: для того чтобы увеличить точность приближенного равенства $P(m)\approx\frac{K}{N}$ в n раз, число испытаний надо увеличить в n^2 раз, другими словами, погрешность приближенного определения вероятности обратно пропорциональна квадратному корню из общего числа испытаний. Далее будет показано, что погрешность измерения какой-либо величины при многократных измерениях также уменьшается пропорционально $1/\sqrt{n}$, где n – число единичных измерений.

В отличие от неслучайных событий, о которых нам может быть точно известно, появятся они или не появятся, мы никогда не можем сказать этого о событиях случайных. Частота появления случайного события определяется его вероятностью. Однако вероятностная оценка может быть достаточно надежной, и мы можем опираться на нее даже при предсказании самых важных для нас событий часто не менее уверенно, чем тогда, когда имеем дело с достоверными сведениями о событиях.

Допустим, например, что у кого-то имеется билет лотереи, в которой на каждые 10 билетов приходится один выигрыш. Вероятность выигрыша для каждого билета составляет 0.1, а вероятность того, что он не выиграет, равна соответственно 0.9.

Естественно, что владелец этого билета не будет особенно удивлен ни выигрышем, ни проигрышем. Допустим, однако, что у него есть 50 таких билетов. Какова вероятность того, что он получит хотя бы один выигрыш? В теории вероятностей доказывается, что вероятность того, что совместно произойдут несколько событий, случающихся независимо друг от друга, равна произведению вероятностей каждого из них. В данном случае вероятность того, что не выиграет первый из имеющихся 50 билетов, равна 0.9; вероятность того, что не выиграет второй из них[5] – также 0.9. Тогда вероятность того, что не выиграют ни первый, ни второй, ни третий билеты, – $(0.9)^3$, а вероятность, что ни один из 50 билетов не выиграет, – $(0.9)^{50}$, т.е. приблизительно 0.005.

С другой стороны, вероятность того, что выиграют все 50 билетов, будет еще гораздо меньше – $(0.1)^{50}$. Это означает, что и тот и другой случай практически никогда не осуществляется. Ско-

---

[5] В действительности для второго билета вероятность выиграть несколько больше указанной цифры, так как всего играющих билетов осталось меньше на один билет – первый, который нами учтен как невыигравший. Но при большом числе лотерейных билетов – это деталь, на которую можно сейчас не обращать внимания.

Т а б л и ц а 1

Вероятности лотерейных выигрышей (вероятность выигрыша n билетов из имеющихся 50, если вероятность выигрыша для одного билета составляет 0.1)

n	$P(n)$	n	$P(n)$
0	0.0052	7	0.1077
1	0.0290	8	0.0643
2	0.0779	9	0.0334
3	0.1387	10	0.0191
4	0.1809		
5	0.1850	$P(0)+P(1)+\ldots+P(10)$	0.9953
6	0.1541	$P(11)+P(12)+\ldots+P(50)$	0.0047

рее всего из 50 выиграют 5 билетов, но выигрыш 4 или 6 билетов будет также довольно вероятен. Менее вероятен будет выигрыш 3 или 7–8 билетов. Теория вероятностей дает возможность подсчитать вероятность каждого из этих событий. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Других событий, кроме приведенных в этой таблице, произойти не может. Такая система событий называется полной.

Резонно поставить вопрос: какой должна быть вероятность события, чтобы его наступление можно было считать достоверным? Разумеется, ответ на этот вопрос носит в значительной мере субъективный характер и зависит главным образом от степени важности ожидаемого события. Поясним это двумя примерами.

Известно, что около 5% назначенных концертов отменяется. Несмотря на это, мы все же, взяв билет, обычно идем на концерт, будучи в общем уверены, что он состоится, хотя вероятность этого всего 0.95. Однако если бы в 5% полетов терпели аварию пассажирские самолеты, вряд ли мы стали бы пользоваться воздушным транспортом. Для того чтобы в условиях мирного времени без особой необходимости рисковать жизнью, по-видимому, нужно, чтобы вероятность смертельного исхода была бы не более 0.0001. Впрочем, различные люди, конечно, по-разному относятся к риску, но и самые осторожные легко пойдут на него при вероятности неблагоприятного исхода 10^{-6} или 10^{-7}. Приблизительно такова обычно вероятность оказаться жертвой транспортной катастрофы на улице большого города, но никто из-за этого не боится выходить из дома.

Таким образом, можно назвать практически достоверными события, вероятность которых отличается от единицы на 10^{-6}–10^{-7}, а практически невозможными те, вероятность которых меньше 10^{-6}–10^{-7}.

Однако при достаточно большом числе испытаний эти последние события все же реализуются, и, хотя для каждого человека вероятность попасть сегодня под автомобиль меньше 10^{-6}, в многомиллионном городе эти события, к сожалению, ежедневно происходят.

Тем не менее можно указать события, вероятность которых столь мала, что они вообще никогда в мире не происходили и, видимо, не произойдут. Можно оценить эту вероятность исходя из возраста вселенной T и минимального промежутка времени τ, который можно определить как время отдельного элементарного акта. Если принять в соответствии с современными космологическими представлениями $T \approx 10^{10}$ лет и $\tau \approx 10^{-30}$ с, то всего за время T прошло около 10^{47} таких элементарных промежутков времени. Учитывая размеры нашей галактики ($R \approx 10^{22}$ см) и наименьшую мыслимую по современным представлениям длину ($l \approx$ $\approx 10^{-20}$ см), получаем, что галактика содержит не более 10^{150} элементарных объемов $V\tau$. Поэтому общее число элементарных событий за все время существования галактики не превышает 10^{200}; эта оценка очень груба. Однако вероятность того, что обезьяна, без руководства ударяя пальцами по клавиатуре пишущей машинки, напишет заданное осмысленное произведение, скажем, „Незнакомку" Блока, – как показывает простой расчет, составляет примерно 10^{-2600}. Это число настолько меньше числа 10^{-200}, определяющего вероятность появления одного элементарного акта, что события такого рода, как чудо Джинса – замерзание воды в чайнике на горячей плите (событие с точки зрения кинетической теории возможное, хотя и маловероятное), так же как и чудо печатающей обезьяны, нужно признать не просто маловероятными, но невозможными.

С другой стороны, события, вероятность которых отличается от единицы на 10^{-8}–10^{-10}, следует всегда считать практически достоверными.

2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

При измерениях физических величин в тех случаях, когда основную роль играют случайные погрешности, все оценки точности измерения можно сделать только с некоторой вероятностью. Действительно, случайные погрешности образуются в результате совокупности ряда мелких неучитываемых причин, каждая из которых вносит незначительный вклад в общую погрешность. Следует считать, что часть из этих погрешностей положительна, часть – отрицательна. Общая погрешность, которая образуется в результате сложения таких элементарных погрешностей, может иметь различные значения, но каждому из них будет соответствовать, вообще говоря, разная вероятность.

Поясним сказанное следующим рассуждением. Допустим, нам нужно взвесить сотню образцов, и мы располагаем весами, позволяющими определить массу с погрешностью 0.05 г (например, вследствие того, что самая мелкая гиря, употребляемая при взвешивании, – 0.1 г). Предельная нагрузка, допускаемая весами, не позволяет класть на чашку более одного взвешиваемого образца. Спрашивается: какую погрешность мы можем допустить при определении суммарной массы всех 100 предметов?

Мы знаем, что при каждом взвешивании погрешность может быть как положительной, так и отрицательной, не превышая в обоих случаях 0.05 г. Естественно считать, что мы будем ошибаться одинаково часто как в сторону завышения, так и в сторону занижения массы, т.е. мы можем положить вероятность получить погрешность +0.05, равной вероятности получения погрешности −0.05. Тогда $P(+0.05) = P(-0.05) = 1/2$.

При этом мы считаем, что все отдельные погрешности отличаются только знаком и имеют по абсолютной величине максимально возможное значение 0.05. Такое допущение только завысит общую погрешность результата, что для нас сейчас несущественно. Пусть при измерении первого образца мы допустили погрешность, равную +0.05, вероятность чего, как уже говорилось, равна 1/2. Вероятность того, что и при измерении второго образца мы сделаем снова положительную погрешность, будет в соответствии с известным нам правилом умножения вероятностей равна $(1/2)^2$, т.е. 1/4. Наконец, вероятность при всех 100 измерениях сделать ошибку одного и того же знака будет $(0.5)^{99}$, или примерно $2 \cdot 10^{-30}$. Такая вероятность (в соответствии со сказанным выше) с любой практической точки зрения равна нулю. Таким образом, мы пришли к заключению, что невозможно сделать погрешность в общей массе образцов в 5 г (0.05 · 100), ибо вероятность такой погрешности незначимо мало превышает нуль. Иначе говоря, действительная погрешность при таком способе взвешивания будет всегда меньше 5 г. Мы выбрали наиболее неблагоприятный случай – погрешность каждого взвешивания имеет наибольшее значение, и все погрешности оказались одного знака. Теория вероятностей дает возможность оценить,какова будет вероятность появления погрешностей других численных значений. Для этого введем сперва понятие средней квадратической, а также средней арифметической погрешностей.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Для того чтобы выявить случайную погрешность измерений, необходимо повторить измерение несколько раз. Если каждое измерение дает заметно отличные от других результаты, мы имеем дело с ситуацией, когда случайная погрешность играет существенную роль.

За наиболее вероятное значение измеряемой величины обычно принимают ее среднее арифметическое значение, вычисленное из всего ряда измеренных значений.

Пока мы не будем задаваться вопросом о том, сколько измерений нужно проделать. Допустим, что сделано n измерений. Разумеется, все они выполнены одним и тем же методом и с одинаковой степенью тщательности. Такие измерения называются равноточными.

Пусть минимальный интервал значений измеряемой величины, через который ведутся отсчеты, будет δx. Среднее ее значение равно $\bar{x}$. Вся совокупность измерений может быть представлена в виде

$$k_1\bar{x};\ k_2(\bar{x}+\delta x);\ldots;\ k_n(\bar{x}+n\delta x);\ k_1'(x-\delta x);\ldots;\ k_m'(\bar{x}-m\delta x).$$

Здесь k_i, k_i' – целые числа, показывающие, сколько раз во всем ряду измерений наблюдались соответствующие значения измеряемой величины $(\Sigma k_i + \Sigma k_i' = n)$.

Отложив по оси абсцисс величину погрешностей $\Delta x = m\delta x$, а по оси ординат значения k, получим ступенчатую кривую, называемую гистограммой. Пример гистограммы приведен на рис. 8. Если увеличивать число наблюдений N, а интервал δx устремить к нулю, то гистограмма переходит в пределе в непрерывную кривую (изображенную на рисунке пунктиром), которая носит название кривой распределения погрешностей. Обычно принимается, что погрешности подчиняются нормальному закону распределения. Описывающая его знаменитая формула Гаусса может быть выведена из следующих предположений.

1. Погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений.

2. При большом числе наблюдений погрешности равных значений, но разных знаков встречаются почти одинаково часто.

3. Частота появления погрешностей уменьшается с увеличением значения погрешностей. Иначе говоря, большие погрешности наблюдаются реже, чем малые.

Эти довольно естественные на первый взгляд предположения приводят к закону распределения погрешностей, описываемому следующей функцией:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \tag{12}$$

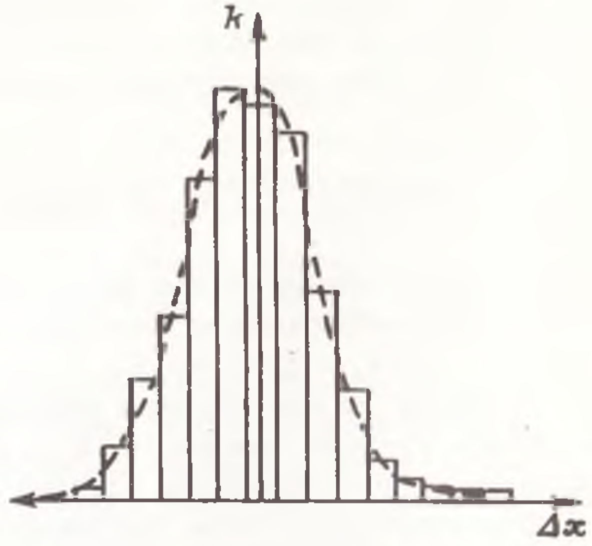
где σ^2 – дисперсия измерений (см. ниже), e – основание натуральных логарифмов [9].

Отметим, что при выводе формулы Гаусса (12) делается ряд допущений, которые не удается достаточно строго обосновать, кроме того, и условия 1–3, в предположении которых она выводилась, никогда не выполняются совершенно строго. Это, например, следует хотя бы из того, что ошибки никогда не могут быть как угодно малыми. Скажем, при измерении длины ограничением всегда являются атомные размеры ($\approx 10^{-8}$ см), при измерении электрического заряда – заряд электрона e ($1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл) и т.д.

Форма кривых Гаусса представлена на рис. 9 для трех значений σ, равных 1, 1/2 и 1/4.

С помощью этих кривых можно установить, насколько часто должны появляться погрешности того или иного численного значения.

Рис. 8. Гистограмма и кривая распределения погрешностей.



Формула Гаусса подвергалась неоднократным экспериментальным проверкам, которые показали, что по крайней мере в той области, где погрешности измерений не слишком велики, она часто находится в отличном согласии с экспериментом.

В ряде случаев экспериментальные данные лучше описываются другими функциями. Тем не менее обычно пользуются нормальным законом распределения, предполагая его справедливость само собой разумеющейся. В действительности дело обстоит сложнее. По поводу этого закона было достаточно точно, хотя и не без сарказма, сказано, что „экспериментаторы верят в него, полагаясь на доказательства математиков, а математики, – полагаясь на экспериментальное обоснование" [17, 22]. О нестрогости математического вывода мы уже говорили. Что же касается экспериментальных обоснований, то они ничего не дают, кроме гистограммы, и всегда можно подобрать достаточно хорошую интерполирующую функцию, от которой, разумеется, точки гистограммы (даже если она очень детально построена) будут всегда отступать в силу случайного характера погрешностей измерений.

Однако в пользу применения нормального распределения имеются очень серьезные основания. Его особое значение связано со следующими обстоятельствами: в тех частых случаях, когда суммарная погрешность появляется в результате совместного действия ряда причин, каждая из которых вносит малую долю в общую погрешность, по какому бы закону ни были распределены погрешности, вызываемые каждой из причин, результат их суммарного действия приведет к гауссовому распределению погрешностей. Эта закономерность является следствием так называемой центральной предельной теоремы Ляпунова.

Основное условие ее применимости – отсутствие отдельных источников доминирующих погрешностей. Для иллюстрации приведем табл. 2, в которой представлены результаты обработки Бесселем погрешностей измерения угла прямого восхождения. Как видим, совпадение наблюденного и рассчитанного чисел погрешностей очень хорошее, если отбросить последнюю строку таблицы, где по формуле Гаусса должно быть 6.1, а в опыте наблюдается 9. Полученное расхождение для случая $\Delta x \gg 1''$ не должно нас удивлять. Ведь формула Гаусса всегда хорошо проверяется и вычисляются ее параметры только для малых Δx . Распространение ее в сторону больших значений погрешностей, т.е. в область, где иногда наблюда-

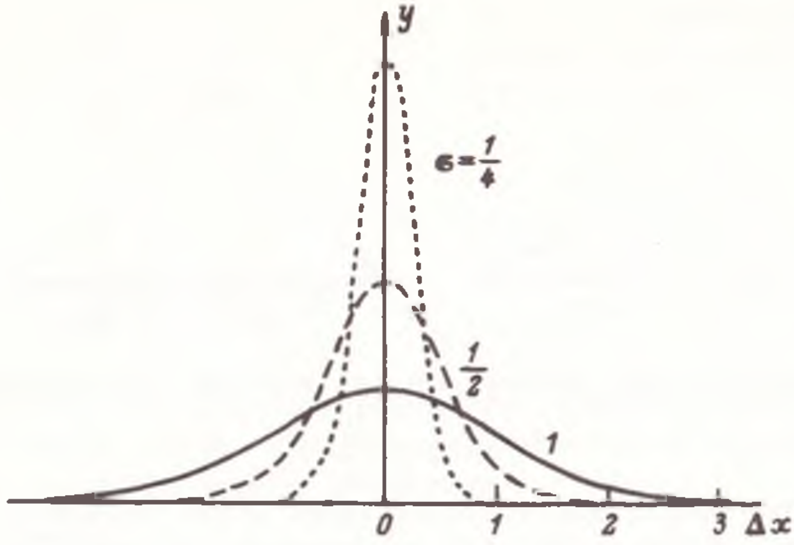


Рис. 9. Кривые Гаусса.

Таблица 2

Распределение погрешностей при измерении угла прямого восхождения

(Общее число наблюдений 470, средняя квадратическая погрешность $\sigma = 0.40''$)

Пределы погрешностей (″)	Число наблюдений с данной погрешностью	
	полученное в опыте	вычисленное по формуле Гаусса
0.0–0.1	94	92.3
0.1–0.2	88	86.5
0.2–0.3	78	76.7
0.3–0.4	58	64.0
0.4–0.5	51	49.8
0.5–0.6	36	36.7
0.6–0.7	26	25.4
0.7–0.8	14	16.9
0.8–0.9	9	9
0.9–1	7	6.1
Более 1	9	6.1

ется появление всего одного–двух значений измеряемой величины, является грубой экстраполяцией, от которой ждать хороших результатов не следует.

Нужно также иметь в виду, что при наблюдении небольшого числа случайных событий относительное уклонение частоты появления

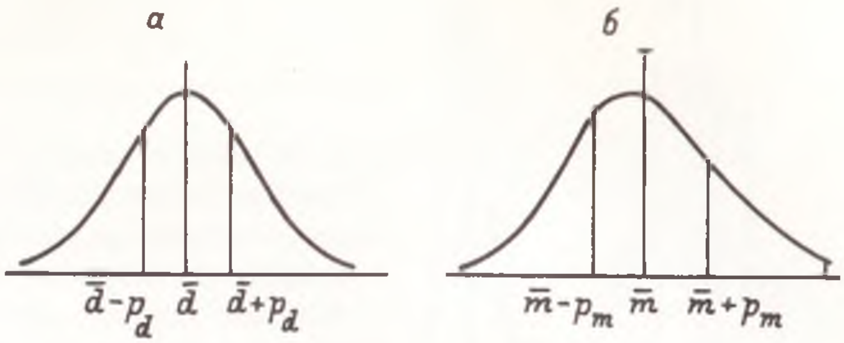


Рис. 10. Распределение диаметров (а) и масс (б) шариков.

события от его вероятности может быть очень большое, так что расхождение в 1.5 раза (9 и 6) достаточно вероятно.

Следует отметить, что часто при нормальном распределении погрешностей прямых измерений, погрешности основанных на них косвенных измерений могут быть распределены по закону, отличному от нормального. Пусть, например, определяются диаметры шариков подшипника, погрешности измерения которых распределены по нормальному закону. Следовательно, кривая распределения симметрична относительно среднего значения диаметра $\bar{d}$ (рис. 10,а). Легко показать, что кривая распределения погрешностей масс шариков будет асимметрична относительно среднего значения массы (рис. 10,б). Это следует из того, что массы шариков m равны $\pi \frac{d^3}{6} \rho$ (здесь ρ – плотность металла). Отсюда следует, что если $|\sigma_d| = |-\sigma_d|$, то $|\sigma_m| > |-\sigma_m|$.

Разумеется, точно так же погрешности момента инерции шариков или площадей их главного сечения будут распределены по закону, который в принципе отличен от нормального. Таким образом, наряду с нормальным законом распределения погрешностей иногда встречаются и другие распределения. Так, возможен случай, когда равновероятно появление ошибки любой величины внутри некоторого интервала, а за его пределами вероятность появления погрешностей равна нулю.

Примером такого распределения служит, скажем, измерение массы с помощью точных весов и разновеса, не имеющего мелких гирь. Если у нас самая мелкая гирька 0.1 г и мы убедились, что масса тела больше 1.2 г., но меньше 1.3 г., то все значения внутри этого интервала нужно считать равновероятными (рис. 11).

Для такого распределения наиболее естественной оценкой измеряемой величины служит также среднее арифметическое.

В практике измерений иногда оказывается, что по нормальному закону распределены не результаты измерений, а их логарифмы. В этом случае за наиболее вероятное значение логарифма измеряемой величины нужно принять среднее арифметическое из логарифмов всех наблюденных значений:

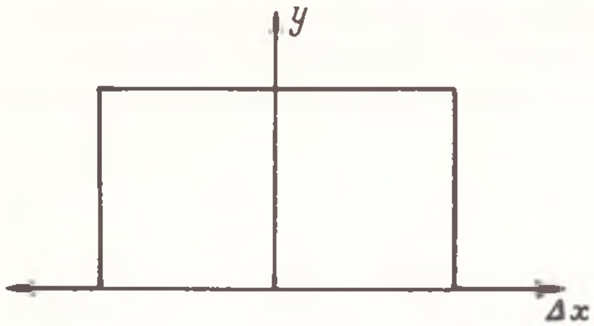


Рис. 11. Равномерное распределение погрешностей.

$$\overline{\lg x} = \frac{\sum_1^N \lg x_i}{n} . \qquad (13)$$

Отсюда следует, что наиболее вероятное значение измеряемой величины x будет уже не среднее арифметическое, а среднее геометрическое из наблюденных значений:

$$\bar{\bar{x}} = \sqrt[N]{\prod_1^N x_i} . \qquad (14)$$

Дискретные случайные величины часто распределены по так называемому закону Пуассона

$$y = \frac{\sigma^{2x} e^{-\sigma^2}}{x!} . \qquad (15)$$

Здесь e = 2.718 – основание натуральных логарифмов.

Имеют место и другие типы распределений.

В ряде случаев экспериментатору приходится выяснять возможность применения нормального распределения и иногда заменять его другим, более подходящим.

Существуют критерии, позволяющие установить, насколько сильно наблюдаемое распределение отличается от нормального. Однако применение этих критериев не всегда дает возможность надежно решить вопрос о целесообразности применения нормального или отличного от него распределения. Более детально этот вопрос рассмотрен, например, в работе [12].

Все дальнейшие расчеты сделаны для случая нормального распределения.

Для оценки значения случайной погрешности измерения существует несколько способов. Наиболее распространена оценка с помощью стандартной или средней квадратической погрешности σ (ее часто называют стандартной погрешностью, или стандартом измерений). Иногда применяются средняя арифметическая погрешность r и вероятная погрешность p .

Средней квадратической погрешностью называется величина

$$^{n}S = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} . \qquad (16)$$

Если число наблюдений очень велико, то подверженная случайным колебаниям величина S стремится к некоторому постоянному значению σ, которое можно назвать статистическим пределом:

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} {}^{n}S . \tag{17}$$

Собственно говоря, именно этот предел и является средней квадратической погрешностью. Квадрат этой величины называется дисперсией измерений. Это та же величина, которая входит в формулу Гаусса (12). В действительности, однако, мы всегда вычисляем не σ, а ее приближенное значение ${}^{n}S$, которое, вообще говоря, тем ближе к σ, чем больше n.

Следует отметить, что существенное различие между обычным пределом и статистическим заключается в том, что в обычном по мере приближения к предельному значению разность между величиной, стремящейся к пределу, и предельным ее значением непрерывно уменьшается. При стремлении к статистическому пределу разность между изменяющейся величиной (в нашем случае ${}^{n}S$) и ее предельным значением σ для любого n может быть сколь угодно велика, но чем больше n, тем меньше вероятность появления больших уклонений ${}^{n}S$ от σ.

Средняя арифметическая погрешность ${}^{n}r$ вычисляется по формуле

$${}^{n}r = \frac{\sum_{1}^{n} \left| (\bar{x} - x_i) \right|}{n} . \tag{18}$$

Точно так же, как и для средней квадратической погрешности, истинное значение средней арифметической погрешности определяется соотношением

$$\rho = \lim_{n \to \infty} {}^{n}r . \tag{19}$$

Вероятная погрешность p соответствует 50% измерений, т.е. половина всех измерений имеет погрешность $|\Delta x| > p$, для другой половины $|\Delta x| < p$.

Обозначим истинное значение измеряемой величины через $x_{ист}$, погрешность измерения этой величины – Δx. Среднее арифметическое значение, полученное в результате измерений, будет $\bar{x}$. Пусть α означает вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину, не большую чем Δx. Это принято записывать в виде

$$P(-\Delta x < x_{\text{ист}} - \bar{x} < \Delta x) = \alpha \qquad (20)$$

или

$$P(\bar{x} - \Delta x < x_{\text{ист}} < \bar{x} + \Delta x) = \alpha \,. \qquad (21)$$

Вероятность α носит название доверительной вероятности, или коэффициента надежности. Интервал значений от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$ называется доверительным интервалом.

Выражение (21) означает, что с вероятностью, равной α, результат измерений не выходит за пределы доверительного интервала от $\bar{x} + \Delta x$ до $\bar{x} - \Delta x$. Разумеется, чем большей надежности мы требуем, тем большим получается соответствующий доверительный интервал и, наоборот, чем больший доверительный интервал мы задаем, тем вероятнее, что результаты измерений не выйдут за его пределы.

Мы пришли к очень важному заключению: для характеристики величины случайной погрешности необходимо задать два числа, а именно величину самой погрешности (или доверительного интервала) и величину доверительной вероятности. Указание одной только величины погрешности без соответствующей ей доверительной вероятности в значительной мере лишено смысла, так как при этом неизвестно, сколь надежны наши данные. Знание доверительной вероятности позволяет оценить степень достоверности полученного результата. Необходимая степень его надежности опять-таки задается характером производимых измерений.

Естественно, что в этом отношении к деталям мотора самолета предъявляются более жесткие требования, чем к лодочному мотору, а к последнему значительно большие, чем, скажем, к ручной тачке.

Более высокая степень надежности, требуемая при ответственных измерениях, означает, что при их производстве нужно выбирать большой (в долях σ) доверительный интервал. Иначе говоря, для получения той же величины погрешности Δx следует производить измерения с большей точностью, т.е. нужно тем или иным способом уменьшить в соответствующее число раз величину σ. Одна из возможностей такого увеличения состоит в многократном повторении измерений (см. стр. 69).

При обычных измерениях можно ограничиться доверительной вероятностью 0.9 или 0.95.

Для измерений, по условиям которых требуется чрезвычайно высокая степень надежности, иногда задают доверительную вероятность 0.999. Бóльшая величина доверительной вероятности в подавляющем большинстве измерительных задач не требуется.

Удобство применения среднеквадратической погрешности в качестве основного численного выражения степени точности, вернее, – воспроизводимости измерений заключается в том, что этой величине соответствует вполне определенная доверительная вероятность, равная 0.68. (Мы, разумеется, здесь и дальше полагаем, что погрешности распределены по нормальному закону). Для любой величины доверительного интервала по формуле Гаусса может быть рассчитана соответствующая доверительная вероятность. Эти вычисления были проделаны, и их результаты сведены в табл. II, помещенную в Приложении.

Приведем примеры пользования табл. II.

Пусть для некоторого ряда измерений мы получили $\bar{x} = 1.27$, $\sigma = 0.03$. Какова вероятность того, что результат отдельного измерения не выйдет за пределы, определяемые неравенством $1.26 < x_i < 1.28$?

Доверительные границы нами установлены в ± 0.01, что составляет (в долях σ) $0.01:0.03 = 0.31$. Из табл. II находим, что доверительная вероятность для $\varepsilon = 0.3$ равна 0.24.

Иначе говоря, приблизительно 1/4 измерений уложится в интервал ошибок ± 0.01. Определим теперь, какова доверительная вероятность для границ $1.20 < x_i < 1.34$. Значение этого интервала, выраженное в долях σ, будет $\varepsilon = 0.07:0.03 \approx 2.3$. По табл. II находим значение α для $\varepsilon = 2.3$, оно равно 0.97. Значит, результаты приблизительно 97% всех измерений будут укладываться в этот интервал.

Поставим теперь другой вопрос: какой доверительный интервал нужно выбрать для тех же измерений, чтобы примерно 98% результатов попадали в него? Из табл. II находим, что значению $\alpha = 0.98$ соответствует значение $\varepsilon = 2.4$, следовательно $\sigma\varepsilon = 0.03 \cdot 2.4 \approx 0.077$, и указанной доверительной вероятности соответствует интервал $1.193 < x < 1.347$ или, округляя, $1.19 < x < 1.35$; иногда этот результат записывают в виде $x = 1.27 \pm 0.08$ с доверительной вероятностью 0.98. Итак, для нахождения случайной погрешности нужно определить два числа – доверительный интервал (значение погрешности) и доверительную вероятность. Средней квадратической погрешности σ соответствует доверительная вероятность 0.68, удвоенной средней квадратической погрешности (2σ) – доверительная вероятность 0.95, утроенной (3σ) – 0.997.

Для других значений погрешностей доверительная вероятность определяется по табл. II.

Приведенные здесь три значения α полезно помнить, так как обычно, когда в книгах или статьях дается значение средней квадратической погрешности, уже не указывается соответствующая ей доверительная вероятность. Если же мы помним три приведенных выше числа, то этого достаточно, чтобы ориентироваться в оценке надежности измерений, когда нам известна их средняя квадратическая погрешность.

Наряду со среднеквадратической погрешностью иногда пользуются средней арифметической погрешностью r, вычисляемой по формуле (3). При достаточно большом числе наблюдений (практически для $n > 30$) между S и r существуют простые соотношения:

$$S = 1.25\,r \quad \text{или} \quad r = 0.8\,S, \tag{22}$$

строго говоря, они верны только для σ и ρ, но не для S и r. Для малых n отношение S/r существенно отличается от предельного значения, причем, как правило, $S/r > \sigma/\rho$. Величины r и p связаны соотношением $p = 0.95r$.

В большинстве случаев целесообразнее пользоваться σ, а не p или ρ. В первую очередь потому, что применяя среднеквадратическую погрешность σ, легче определять доверительные вероятности, так как для этого имеются соответствующие таблицы. Известным преимуществом средней арифметической погрешности r является то, что ее вычислять несколько проще, чем σ. Применение микрокалькулятора практически полностью устраняет это преимущество. Разумеется, при большом значении n вообще безразлично, какой из погрешностей пользоваться, так как между ними существует соотношение (22). При малом n по причине, указанной выше, следует всегда применять среднеквадратическую (абсолютную или относительную) погрешность.

Если пользоваться и при малом n средней арифметической погрешностью, то правильнее ее вычислять не по обычной формуле (18), а по соотношению

$$r = \frac{\sum_{1}^{n} |\bar{x} - x_i|}{\sqrt{n(n-1)}} . \tag{23}$$

При большом n различие, даваемое этими двумя формулами, очень невелико.

4. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Мы приводили расчет доверительного интервала для случая, когда результаты измерений распределены по нормальному закону.

Однако, как было сказано, далеко не всегда закон распределения погрешностей известен и иногда он заведомо отличается от нормального. Вычисление дисперсии и в этом случае позволяет оценить доверительную вероятность, воспользовавшись так называемым неравенством Чебышева, которое получено для произвольного закона распределения и имеет, таким образом, весьма общий характер.

Положим по-прежнему, что σ - среднеквадратическое уклонение, а α - произвольное число, большее 1. Неравенство Чебышева можно записать следующим образом:

$$P\left(|x_{\text{ист}} - \bar{x}| < \sigma\alpha\right) > 1 - \frac{1}{\alpha^2} . \tag{24}$$

Если известно, что закон распределения погрешностей симметричен относительно единственного максимума, то неравенство Чебышева будет иметь вид

Т а б л и ц а 3

Доверительные вероятности

$\alpha\sigma$	$P_{норм}$	$P_{чеб}$	$P_{чеб.сим}$
1	0.68	-	-
1.5	0.87	0.2	0.7
2	0.95	0.75	0.89
3	0.997	0.89	0.95

$$P\left(\left|x_{ист} - \bar{x}\right| < \sigma\alpha\right) > 1 - \frac{4}{9\alpha^2} . \quad (25)$$

В табл. 3 сопоставлены доверительные интервалы и соответствующие им вероятности, вычисленные для случая нормального распределения по формуле Гаусса и для случаев произвольного и симметричного распределений, оцененные по неравенству Чебышева. Из приведенной таблицы видно, что вероятности больших уклонений в случае произвольных распределений существенно больше, чем для нормального. Это естественное следствие того обстоятельства, что при произвольном законе распределения мы располагаем значительно меньшей информацией о вероятности появления погрешностей того или иного численного значения, чем в случае известного закона распределения. Неравенство Чебышева дает доверительные интервалы, так сказать, на все случаи жизни, и, разумеется, они оказываются больше (при заданной доверительной вероятности), чем интервалы для любого конкретного распределения.

Поэтому всегда по возможности следует убедиться в близости исследуемого распределения к нормальному и пользоваться соответствующими оценками доверительных интервалов, не прибегая к неравенству Чебышева, дающему слишком грубые оценки.

5. ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Пусть наша измеряемая величина Z является суммой (или разностью) двух величин - X и Y, результаты измерений которых независимы. Тогда, если S_X^2, S_Y^2, S_Z^2 - дисперсии величин X, Y и Z, то можно доказать, что

$$S_Z^2 = S_X^2 + S_Y^2 \quad (26)$$

или

$$S_Z = \left|\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}\right| . \quad (27)$$

Если Z является суммой не двух, а большего числа слагаемых, то закон сложения погрешностей будет таким же, т.е. средняя квадратическая погрешность суммы (или разности) двух (или нескольких) независимых величин равна корню квадратному из суммы дисперсий отдельных слагаемых. Это - чрезвычайно важное обстоятельство, и необходимо твердо помнить, что для нахождения суммарной погрешности нужно складывать не сами погрешности, а их квадраты.

Разумеется, если мы вычислили не средние квадратические погрешности σ или S, а средние арифметические погрешности r или ρ, или вероятные p, то закон сложения для этих погрешностей будет тот же, например

$$\rho_Z = \sqrt{\rho_X^2 + \rho_Y^2}\,; \qquad p_Z = \sqrt{p_X^2 + p_Y^2}\,. \tag{28}$$

Из закона сложения погрешностей следуют два очень важных вывода. Первый относится к роли каждой из погрешностей в общей погрешности результата. Он состоит в том, что значение отдельных погрешностей очень быстро падает по мере их уменьшения. Поясним сказанное примером: пусть X и Y - два слагаемых, определенных со средними квадратическими погрешностями S_X и S_Y, причем известно, что S_Y в два раза меньше, чем S_X. Тогда погрешность суммы $Z = X + Y$ будет

$$S_Z^2 = S_X^2 + S_Y^2 = S_X^2 + \left(\frac{S_X}{2}\right)^2 = 5/4\ S_X^2\,.$$

Откуда

$$S_Z \approx 1.1\,S_X\,.$$

Следовательно, если одна из погрешностей в два раз меньше другой, то общая погрешность возросла за счет этой меньшей погрешности всего на 10%, что обычно играет очень малую роль. Это означает, что если мы хотим повысить точность измерений величины Z, то нам нужно в первую очередь стремиться уменьшить ту погрешность измерения, которая больше, т.е. погрешность измерения величины X. Если оставим точность измерения X неизменной, то, как бы мы ни повышали точность измерения слагаемого Y, нам не удастся уменьшить погрешность конечного результата измерений величины Z более чем на 10%.

Этот вывод всегда нужно иметь в виду, и для повышения точности измерений в первую очередь уменьшать погрешность, имеющую наибольшее значение. Конечно, если слагаемых много, а не два, как в нашем примере, то и малые погрешности могут внести заметный вклад в суммарную погрешность.

Если нужная нам величина Z является разностью двух независимо измеряемых величин X и Y, то из выражения (27) следует, что ее относительная погрешность

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}}{X - Y}$$

будет тем больше, чем меньше $|X - Y|$, и относительная погрешность возрастает до бесконечности, если X стремится к Y.

Это означает, что невозможно добиться хорошей точности определения какой-либо величины, строя измерения так, что она находится как небольшая разность результатов независимых измерений двух величин, существенно превышающих искомую. В противоположность этому относительная погрешность суммы

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}}{X + Y} \qquad (29)$$

очевидно не зависит от соотношения величин X и Y.

Следующий вывод, вытекающий из закона сложения погрешностей, относится к определению погрешности среднего арифметического. Мы уже говорили, что среднее арифметическое из ряда измерений отягчено меньшей погрешностью, чем результат каждого отдельного измерения. Сейчас этот вывод может быть записан в количественной форме. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ результаты отдельных измерений, причем каждое из них характеризуется одной и той же дисперсией S^2. Образуем величину y, равную

$$y = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i = \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \ldots + \frac{1}{n} x_n .$$

Дисперсии этой величины S_y^2 в соответствии с формулой (26) определяются как

$$S_y^2 = \frac{S^2}{n^2} + \frac{S^2}{n^2} + \ldots + \frac{S^2}{n^2} = \frac{nS^2}{n^2} = \frac{S^2}{n} . \qquad (30)$$

Но y, по определению, это – среднее арифметическое из всех величин x_i, и мы можем написать

$$S_y = S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} . \qquad (31)$$

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического равна средней квадратической погрешности отдельного результата измерений, деленной на корень квадратный из числа измерений. Это – фундаментальный закон возрастания точности при росте числа наблюдений. Из него следует, что, желая повысить точность измерений в 2 раза, мы должны сделать вместо одного – четыре измерения; чтобы повысить точность в 3 раза, нужно увеличить число измерений в 9 раз, и, наконец, увеличение числа наблюдений в 100 раз приведет к десятикратному увеличению точности измерений.

Разумеется, это рассуждение относится лишь к измерениям, при которых точность результата полностью определяется случайной погрешностью. В этих условиях, выбрав n достаточно большим, мы можем существенно уменьшить погрешность результата. Такой метод повышения точности сейчас широко используется, особенно при измерении слабых электрических сигналов.

Рассмотрим снова пример со взвешиванием.

Допустим, что 0.05 г – средняя квадратическая погрешность одного взвешивания, и мы по-прежнему взвешиваем 100 образцов, кладя на весы каждый раз только один из них.

В соответствии с изложенным погрешность определения суммарной массы M этих образцов будет

$$S_M = \sqrt{\sum_1^{100} S_i^2} \quad ;$$

так как погрешности всех измерений одинаковы, а всего измерений 100, то погрешность суммарной массы

$$S_M = \sqrt{100} \cdot S = 10\,S = 10 \cdot 0.05 = 0.5\,\text{г}.$$

Таким образом, мы можем утверждать, что из 1000 измерений общей массы, проделанных описанным выше способом, около 320 дадут отклонения от измеренного значения больше чем на 0.5 г, только около 50 – более чем на 1 г, и около трех – результаты которых будут на 1.5 г и более отличаться от истинного значения.

При практической работе очень важно строго разграничивать применение средней квадратической погрешности отдельного измерения ${}^nS$ и средней квадратической погрешности среднего арифметического $S_{\bar{x}}$.

Последняя применяется всегда, когда нам нужно оценить погрешность того значения, которое мы получили в результате всех произведенных измерений.

В тех случаях, когда мы хотим характеризовать точность применяемого способа измерений, следует использовать погрешность ${}^nS$ или σ, если n достаточно велико.

Поясним сказанное следующим примером.

Было сделано десять измерений электрического сопротивления провода R, в результате которых получены значения, приведенные в табл. 4.

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{10} = 274.7, \quad {}^{10}S \approx 1.6,$$

$$ {}^nS_{\bar{R}} = \frac{1.6}{\sqrt{10}} \approx 0.5.$$

Т а б л и ц а 4

Измерения сопротивления

Номер измерения	R	Номер измерения	R
1	275	6	274
2	273	7	276
3	275	8	275
4	275	9	272
5	278	10	274

Таким образом, средняя квадратическая погрешность $S_{\bar{R}}$ измерения сопротивления данного провода равна 0.5 Ом, или же, переходя к относительным погрешностям, около 0.2%. Но квадратическая погрешность ${}^{10}S$ применяемого метода измерений составляет 1.6 Ом, а относительная его погрешность – около 0.6%.

Если мы описываем метод, которым производилось измерение, то должны указать именно эту последнюю погрешность. Зная ее, можно выбрать нужное число измерений, чтобы, пользуясь табл. IУ, получить желаемую случайную погрешность окончательного результата измерений.

Сейчас принято среднюю квадратическую погрешность результата измерений записывать в скобках непосредственно после результата. В нашем примере это будет выглядеть так:

R = 274.7 (0.5).

6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЕСА

Допустим, что одним и тем же методом с одинаковой степенью точности выполнено k серий измерений. В первой серии число измерений n_1, во второй – n_2 и т.д., в k-й – n_k; если каждое измерение характеризуется погрешностью σ, то погрешность среднего арифметического для серии с номером i будет в соответствии с формулой (26)

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} .$$

Очевидно, что если в одной серии сделано в четыре раза больше измерений, чем в другой, то погрешность результата одной серии будет соответственно в два раза меньше.

Если мы захотим для повышения точности результата усреднять его по средним значениям для обеих серий, то должны учитывать то обстоятельство, что один результат получен с вдвое меньшей погрешностью. С этой целью вводится понятие статистического веса или просто веса наблюдений. В приведенном примере за статистический вес p следует принять число, пропорциональное количеству наблюдений, выполненных в серии, т.е. положить

$$p_i = kn_i .$$

Подставив отсюда значение n_i в (16), имеем

$$p_i = \frac{k\sigma^2}{\sigma_i^2}$$

или, положив коэффициент пропорциональности $k\sigma^2 = K$, получим

$$p_i = \frac{K}{\sigma_i^2} .$$

Если имеется ряд результатов измерений, вообще выполненных в разных условиях, причем для каждого результата известна средняя квадратическая погрешность σ_i, то и в этом случае можно для совместной обработки результатов приписать им соответствующие статистические веса p_i, положив также

$$p_i = \frac{B}{\sigma_i^2} .$$

Здесь B – произвольное число. Оно обычно выбирается таким, чтобы p_i были по возможности небольшими целыми числами. Часто бывает, что σ_i заранее неизвестны и отдельным измерениям приписываются веса на основании разного рода качественных соображений, связанных, например, с квалификацией наблюдателей, производивших отдельные измерения, различием в точности измерительных инструментов, с которыми они производились, и т.п.

Введение статистических весов, определенных на глаз, разумеется нельзя считать строгим приемом, однако он дает возможность хоть как-то использовать всю совокупность наблюдений. Следует иметь в виду, что если веса отдельных наблюдений различаются в 10 и более раз (σ_i и σ_k различаются более чем в три раза), то обычно лучше просто отбросить из рассмотрения наблюдения с малыми весами, так как их учет может только испортить хорошие результаты.

Если нам известна совокупность ряда результатов x_i с соответствующими им статистическими весами p_i, то за наивероятнейшее значение измеряемой величины следует принять уже не среднее арифметическое, а взвешенное среднее, которое также обозначим $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i} . \qquad (32)$$

Разумеется, если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, то (32) переходит в (3).

Среднюю квадратическую погрешность для $\bar{x}$ можно получить аналогично тому, как она была определена для равноточных измерений. В результате

$$^n S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n p_i (\bar{x} - x_i)^2}{(n-1) \sum_1^n p_i}} . \qquad (33)$$

При выборе нужного числа измерений предполагаем, что систематическая погрешность метода достаточно мала. (Подробнее об этом см. на стр. 67).

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА И ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Ранее мы с помощью табл. II определяли доверительные вероятности для отдельного измерения x_i, т.е. вычисляли вероятность того, что x_i не будет уклоняться от истинного значения более чем на Δx. Очевидно, важнее знать, насколько может уклоняться от истинного значения x среднее арифметическое $\bar{x}$ наших измерений. Для этого также можно воспользоваться табл. 1У, взяв, однако, вместо σ значение $\sigma_{\bar{x}}$, т.е. $\sigma_{x_i} / \sqrt{n}$.

Тогда для аргумента ε, с которым мы входим в табл. II, будем иметь значение

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\Delta x \sqrt{n}}{\sigma} . \qquad (34)$$

Мы теперь знаем, как определять доверительную вероятность для любого доверительного интервала, если известна средняя квадратическая погрешность σ. Однако для того чтобы определить последнюю, нужно сделать очень много измерений, а это не всегда возможно и удобно. В тех случаях, когда измерения проводятся с помощью уже хорошо исследованного метода, погрешности которого известны, мы заранее знаем σ. Как правило, однако, погрешность метода приходится определять в процессе измерений. И обычно мы можем определить только величину $^n S$, соответствующую тому или иному, но всегда сравнительно небольшому числу измерений n (^2S, ^3S, $^4S, \ldots, {}^nS$ здесь означают средние квадратические погрешности отдельного измерения, определенные по формуле (16) для случаев двух, трех, четырех и т.д. измерений). Если для оценки доверительной вероятности будем считать, что полученные нами значения совпадают с σ, и воспользуемся табл. II для нахождения доверительной вероятности, то найдем неверные (завышенные) значения α.

Это результат того, что при определении среднеквадратической погрешности из малого числа наблюдений мы находим последнюю с малой точностью. Происходящая вследствие этого неопределенность в определении погрешности приводит к тому, что когда мы заменяем σ на ${}^{n}S$, то уменьшаем надежность нашей оценки, причем тем сильнее, чем меньше n.

Еще сравнительно недавно (лет 25–30 назад) указанные обстоятельства не всегда принимались во внимание, да и сейчас зачастую не делают различия между генеральной σ^2 и выборочной ${}^{n}S^2$ дисперсией.

Пусть мы определили выборочную дисперсию ${}^{n}S^2$ для некоторого числа наблюдений n и хотим определить для заданного нами доверительного интервала $\pm\Delta x$ соответствующую ему доверительную вероятность.

Очевидно, что если в формуле (34) заменим σ на ${}^{n}S$, то такому доверительному интервалу будет соответствовать меньшая доверительная вероятность. Для того чтобы учесть это обстоятельство, интервал Δx можно представить в виде

$$\Delta x = \frac{t_{\alpha,n}\,{}^{n}S}{\sqrt{n}}, \tag{35}$$

откуда

$$t_{\alpha,n} = \frac{\Delta x\sqrt{n}}{{}^{n}S}. \tag{36}$$

Мы видим, что $t_{\alpha,n}$ – величина, аналогичная ε: она играет ту же роль, но в случае, когда число измерений, из которых определена погрешность ${}^{n}S$, не очень велико. Величины $t_{\alpha,n}$, носящие название коэффициентов Стьюдента, вычислены по законам теории вероятностей для различных значений n и α и приведены в табл. III, также помещенной в Приложении.

Сравнивая табл. III с табл. II, легко убедиться, что при больших n значения $t_{\alpha,n}$ стремятся к соответствующим значениям ε. Это естественно, так как с увеличением n ${}^{n}S$ стремится к σ.

Используя коэффициенты Стьюдента, мы можем переписать равенство (21) в виде

$$P(\bar{x} - t_{\alpha,n}\,{}^{n}S/\sqrt{n} < x < \bar{x} + t_{\alpha,n}\,{}^{n}S/\sqrt{n}) = \alpha. \tag{37}$$

Пользуясь этим соотношением и табл. III, легко определять доверительные интервалы и доверительные вероятности при любом небольшом числе измерений.

Дадим примеры применения табл. III. Пусть среднее арифметическое из 5 измерений будет 31,2. Средняя квадратическая погрешность, определенная из 5 измерений, равна 0,24. Мы хотим найти доверительную вероятность того, что среднее арифметическое отличается от истинного значения не более чем на 0.2, т.е. будет выполняться неравенство $31.0 < x < 31.4$.

Значение $t_{\alpha,5}$ определим, подставив полученные результаты в формулу (36), тогда

$$t_{\alpha,5} = \frac{0.2\sqrt{5}}{0.24} = 1.86.$$

По табл. III находим для $n = 5$ при $\alpha = 0.8$ $t_{0.8,5} = 1.5$ и при $\alpha = 0.9$ $t_{0.9,5} = 2.1$.

Вообще говоря, можно обычно удовлетвориться ответом, что доверительная вероятность для этого случая лежит межу 0.8 и 0.9. Если нужно получить более точное значение, то вычислим пропорциональную часть подобно тому, как это обычно делается при пользовании таблицами.

Нужную нам величину вычисляем из пропорции

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{t_{\alpha,n} - t_{0.8,n}}{t_{0.8,n} - t_{0.9,n}},$$

откуда

$$\Delta\alpha = 0.1\frac{0.36}{0.6} = 0.06, \quad \alpha = \alpha_1 + \Delta\alpha = 0.8 + 0.06 = 0.86.$$

Таким образом, доверительная вероятность получается равной 0.86.

Вычислим теперь, какова доверительная вероятность в случае 10 измерений при той же средней квадратической погрешности 0.24 и том же доверительном интервале 31.0–31.4. По формуле (36) определяем

$$t_{\alpha,10} = 0.2\sqrt{10}/0.24 \approx 2.6.$$

Из табл. III находим, что ближайшее меньшее значение

$$t_{\alpha,10} = 2.3 \text{ для } \alpha = 0.95$$

и ближайшее большее значение

$$t_{\alpha,10} = 2.8 \text{ для } \alpha = 0.98.$$

Пропорциональную часть найдем из соотношения

$$\Delta\alpha = \frac{0.3 \cdot 0.03}{0.5} \approx 0.02.$$

Окончательно $\alpha = 0.97$.

8. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

Пусть мы получили ряд измерений одной и той же величины. В нем всегда могут оказаться отдельные результаты, подозрительно отличающиеся (в большую или меньшую сторону) от остальных членов ряда.

Следует ли их принимать во внимание при статистической обработке или нужно отбросить, как явно ошибочные? Очевидно, что нельзя пользоваться интуицией и нужно применять какие-то вероятностные критерии, на основании которых данное измерение признается ошибочным и выбрасывается либо оставляется, как допустимое в данном ряду естественное статистическое отклонение. Не менее важные вопросы возникают при производстве нескольких рядов наблюдений одной и той же физической величины. В результате мы получаем для каждого ряда свои значения $\bar{x}$ и S:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \text{ и } S_1, S_2, \ldots, S_n.$$

Можно ли считать, что все эти результаты принадлежат одной и той же генеральной совокупности или разным? В первом случае их следует обрабатывать совместно и за счет этого уменьшать погрешность результата. Во втором – рассматривать их по отдельности – независимо друг от друга. Очевидно, что все эти вопросы имеют не достоверные, а лишь вероятные ответы. Расхождения между соответствующими результатами считаются значимыми, если вероятность того, что они случайны, превышает некоторую заданную нами величину, например 0.05, 0.01 или 0.001, называемую уровнем значимости.

Выбор того или иного уровня значимости, вообще говоря, произволен и зависит в первую очередь от того, насколько важны последствия ошибочного выбора. Иначе говоря, что произойдет, если считать два числа принадлежащими к одной совокупности, когда они принадлежат к разным и наоборот. Это решается совершенно аналогично вопросу о том, когда можно считать вероятность того или иного события равной нулю (см. стр. 31).

Чем серьезнее последствия такой ошибки, тем при меньшем уровне значимости нужно рассматривать сравниваемые числа как принадлежащие разным совокупностям.

Вначале разберем вопрос о тех погрешностях, с которыми определяется сама погрешность. Если мы находим ${}^{n}S$ из очень большого числа измерений, то получаем величину, как угодно мало отличающуюся от своего предельного значения, но когда n невелико, то ${}^{n}S$ отягчена случайными погрешностями, очевидно, тем меньшими, чем больше n. Точно так же, как и для результатов измерений, существует закон распределения, дающий возможность установить доверительную вероятность того, что определенная нами из n измерений погрешность ${}^{n}S$ будет отличаться от σ на некоторое заданное нами число.

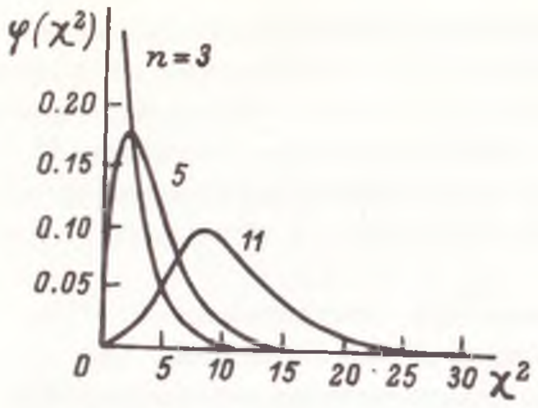


Рис. 12. χ^2 -распределение.

Для определения доверительного интервала, внутри которого находится σ, можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sigma_{^nS} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (38)$$

Здесь $\sigma_{^nS}$ – средняя квадратическая погрешность ${}^nS$, когда ${}^nS$ вычислено из n измерений; вообще говоря, это выражение справедливо для n, большего 30, но в случае грубых оценок его можно использовать и для меньших n.

Из формулы (38) следует, что при $n = 25$ $\sigma_{25_S} = \sigma/7$, т.е. σ определяется с точностью около 7. При $n = 50$ точность определения σ составляет около 10.

Более строгое рассмотрение дает возможность правильной оценки доверительного интервала для σ и при малом числе измерений. Для этого мы введем величину χ^2, которую определим следующим образом:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,{}^nS^2}{\sigma^2}. \qquad (39)$$

Закон распределения этой величины известен под названием χ^2-распределения, которое представлено графически на рис. 12. Функция распределения χ^2 характеризуется асимметричностью, особенно сильной для малых n. Для больших n это распределение переходит в нормальное с дисперсией, определяемой формулой (38). Доверительный интервал для σ вычисляется с помощью таблицы, составленной для нормального распределения.

При более точных оценках доверительного интервала для σ можно воспользоваться табличными значениями, составленными для χ^2 -распределения.

Из выражения (39) следует

$$\sigma^2 = \frac{n-1}{\chi^2}\,{}^nS^2 = \gamma^2\,{}^nS^2. \qquad (40)$$

Табл. III дает возможность определить значения γ_1 и γ_2, удовлетворяющие условию

$$P(\gamma_1 \cdot {}^nS < \sigma) = \alpha_1, \quad P(\gamma_2 \cdot {}^nS > \sigma) = \alpha_2.$$

Так как χ^2-распределение асимметрично, то погрешности равных значений, но противоположного знака не равновероятны, как в случае нормального распределения. Отсюда следует, что при условии $\alpha_1 = \alpha_2$ $\gamma_1 \neq 1/\gamma_2$.

Обычно пользуются соотношением, написанным в виде

$$P(\gamma_1 {}^nS < \sigma < \gamma_2 {}^nS) = \alpha . \qquad (41)$$

При выбранном значении α соответствующие значения γ_1 и γ_2 находятся из табл. 1У.

Приведем два примера пользования табл. 1У.

1. Средняя квадратическая погрешность, определенная из 5 измерений, равна 2. Нужно вычислить доверительный интервал для σ с надежностью 0.95. Из табл. 1У имеем для $n = 5$ и $\alpha = 0.95$ $\gamma_1 = 0.6$ и $\gamma_2 = 2.9$.

Для σ можем написать неравенство, выполняемое с вероятностью 0.95: $0.6 \cdot 2 < \sigma < 2.9 \cdot 2$ или $1.2 < \sigma < 5.7$.

Мы видим, что границы, в которых лежит σ, очень широки и асимметричны (интервал от 2 до 1.2 почти в пять раз меньше интервала от 2 до 5.7).

2. При 40 измерениях $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 1.3$ и получаем для σ неравенство $1.6 < \sigma < 2.6$. Интервал этот значительно более узкий и почти симметричный.

Если пользоваться при $n = 40$ формулой (38), то

$${}^{40}S_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2}{\sqrt{78}} \approx 0.2 .$$

Доверительной вероятности 0.95 соответствует погрешность σ_σ, и для σ можно написать с вероятностью 0.95: $1.55 < \sigma < 2.45$.

Как видим, в этом случае оценки, сделанные по строгим и приближенным формулам, практически не различаются между собой.

Легко показать, что при 5 или 10 измерениях это различие будет весьма значительным.

Положим, что есть два ряда измерений одной и той же величины: один ряд содержит n_1, другой – n_2 измерений. Для этих рядов получены дисперсии ${}^{n_1}S_1^2$ и ${}^{n_2}S_2^2$. Обозначения выберем так, чтобы S_1^2 было больше S_2^2. Определим величину ϑ следующим образом:

$$\vartheta = \frac{n_2 - 3}{n_2 - 1} \; \frac{{}^{n_1}S_1^2}{{}^{n_2}S_2^2} . \qquad (42)$$

Можно показать, что

$$\sigma_\vartheta = \sqrt{\frac{2(n_1 + n_2 - 4)}{(n_1 - 1)(n_2 - 5)}} . \qquad (43)$$

Т а б л и ц а 5

Сравнение результатов анализа

Номер измерения	Содержание C, %		Номер измерения	Содержание C, %	
	Серия 1	Серия 2		Серия 1	Серия 2
1	4.40	4.42	11	4.66	4.57
2	4.66	4.47	12	4.53	4.58
3	4.42	4.70	13	4.90	4.66
4	4.59	4.72	14	4.50	
5	4.55	4.53	15	4.66	
6	4.45	4.55	16	4.80	
7	4.55	4.60	17	4.36	
8	4.39	4.64	18	4.75	
9	4.75	4.29	19	4.28	
10	4.72	4.52	20	4.45	

Положим

$$R = \frac{|\vartheta - 1|}{\sigma_\vartheta}.$$

Это число характеризует, существенно или несущественно различаются между собой выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2. Если $R > 3$, то расхождение между S_1 и S_2 существенно. Если $R < 3$, то – несущественно. Такой критерий, предложенный В.И. Романовским [15] и носящий его имя, соответствует уровню значимости 0.01. Другой критерий – критерий Фишера (см., например, [18]) позволяет с помощью специальных таблиц сличать дисперсии при разных уровнях значимости. В практической работе можно рекомендовать более простой критерий Романовского. В качестве примера приведем сопоставление результатов определения содержания углерода в ряде проб одного и того же соединения [11]. Было выполнено две серии измерений разными лаборантами: в одной серии сделано 20 определений, в другой – 13. Результаты сведены в табл. 5.

Отсюда $S_1^2/S_2^2 = 2.12$, $n_1 = 20$, $n_2 = 13$, $\vartheta = 1.77$, $\sigma_\vartheta = 0.62$, $R = 1.24 < 3$.

Следовательно, разницу в точности анализов двух лаборантов нельзя считать значимой.

9. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть для двух рядов измерений одной и той же величины получены значения $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. По-прежнему полагаем, что $\bar{x}_1$ определено из n_1, а $\bar{x}_2$ из n_2 измерений. В каком случае можно считать расхождение между $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ значимым, в каких случайным?

Иначе говоря, следует установить, насколько значимо $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ отлично от нуля.

Дисперсии S_1^2 и S_2^2 величин x_{1i} и x_{2k} равны соответственно

$$ {}^{n_1}S^2 = \frac{\sum_{1}^{n_1}(\bar{x}_1 - x_{1i})^2}{n_1 - 1} \quad \text{и} \quad {}^{n_2}S^2 = \frac{\sum_{1}^{n_2}(\bar{x}_2 - x_{2k})^2}{n_2 - 1}. \qquad (44) $$

Дисперсия S^2 разности $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ будет

$$ S^2 = \frac{(n_2 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}. \qquad (44а) $$

Можно показать, что величина

$$ t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \qquad (45) $$

– это тот же коэффициент Стьюдента, который используется для определения доверительного интервала при небольшом числе измерений.

Определим, значимо ли расхождение результатов двух серий анализов, приведенных в табл. 5. Из нее следует

$$ \bar{x}_1 = 4.5655, \quad \bar{x}_2 = 4.5577, \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.008, $$

$$ {}^{20}S^2 = 0.003, \quad {}^{13}S^2 = 0.014, \quad S^2 = \frac{0.003.19 + 0.014.13}{31} = 0.008. $$

В соответствии с (45) имеем

$$ t = \frac{0.008}{0.09}\sqrt{\frac{20 \cdot 13}{13}} = 0.25. $$

Полученное значение t нужно сравнить с $t_{\alpha,n}$ для выбранного уровня значимости; n взять равным $n_1 + n_2 - 1$. Если принять уровень значимости 0.05, то $t_{\alpha,n}$ находим по табл. III для $\alpha =$ $= 0.95$ и $n = 32$; $t_{32,0.95} = 2.0$.

Мы видим, что $t_{32,0.95} > t$. Отсюда следует, что результаты двух серий анализов значимо не различаются. Если $t_{\alpha,n} < t$, то результаты $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ не случайно отличны друг от друга.

Для оценки расхождения между средними можно воспользоваться также критерием Романовского [28]. Для этого напишем выражение

$$ R = \frac{t}{S_t}. $$

Средняя квадратическая погрешность величины $t - S_t$ зависит только от числа наблюдений n_1 и n_2. Она определяется по соотношению

$$S_t = \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - 4}} .$$

Если $R > 3$, то расхождения $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ значимы. При $R < 3$ – расхождения можно считать случайными.

В таком виде критерий Романовского соответствует уровню значимости около 0.003. В рассмотренном примере $t = 0.25/\sqrt{31/29} = 0.24 \ll 3$. Следовательно, расхождение между средними случайно, и результаты анализа, полученные обоими лаборантами, совместны, т.е. принадлежат одной совокупности.

Если для обоих рядов измерений нам известны значения генеральных дисперсий σ_1^2 и σ_2^2, то значимость расхождений определяется совсем просто. Находим дисперсию разности $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, т.е. σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} .$$

Пусть $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = k\sigma$. Если k больше 2 или 3 (соответственно уровень значимости 0.05 или 0.003), то следует признать наличие (вернее, достаточно большую вероятность) неслучайного расхождения. Если k меньше 2, то $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ значимо не различаются.

Насколько важно может быть определение существенности расхождений между средними, иллюстрируется историческим примером, который приведен А.К. Митропольским [11]. При сравнении Рэлеем плотности азота, полученного из воздуха путем отделения от него кислорода, CO_2 и водяных паров, с плотностью азота, выделяемого из азотистых соединений, оказалось, что плотность воздушного азота примерно на 0.5% больше плотности химически связанного азота. Статистический анализ (проведенный, правда, значительно позже работы Рэлея) показал значимое различие между этими плотностями. На основании разницы в плотности Рэлей предсказал и доказал существование аргона.

10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Вопрос о принадлежности результатов i-го измерения к данному ряду решается на основании того, что большие случайные погрешности менее вероятны, чем малые, и результат измерения, содержащий погрешность столь большую, что вероятность ее появления в данном ряду практически равна нулю, следует отбросить, как заведомо ошибочный. Вопрос о том, какую вероятность следует считать равной нулю, решается по тем же соображениям, которые были изложены выше.

Т а б л и ц а 6

Результаты измерения длины

Номер измерения	l	Номер измерения	l
1	258.5	9	256.0
2	255.4	10	266.0
3	256.6	11	256.3
4	256.7	12	256.5
5	257.0	13	256.0
6	256.5	14	256.3
7	256.7	15	256.8
8	256.3		

Приведем пример использования этого правила. Возьмем ряд измерений длины (табл. 6). По данным табл. 6 находим среднее арифметическое $\bar{x} = 257.17$, если учитывать все результаты, в том числе первого и десятого измерений. Но результат десятого измерения 266.0 – явный промах: вместо 5 записано 6. Если его отбросить, то $\bar{x} = 256.54$. Однако в этом ряду подозрителен также и результат 258.5 (возможно, что записано 8 вместо 6). Если отбросить и его, то получится среднее арифметическое $\bar{x} = 256.39$. Нетрудно понять, что такой метод отбрасывания результатов, которые кажутся нам слишком сильно выпадающими из других измерений, порочен.

Таким способом легко получить завышенную и совершенно фиктивную точность измерений. Действительно, значение S с учетом всех приведенных в табл. 6 значений получается равным 2.5. Если отбросим два измерения – № 1 и 10, то S окажется равным 0.4. Идя по этому пути, можно отбросить также измерения № 2, 5 и 15, тогда $\bar{x} = 256.39$ и S окажется равным всего 0.26. Очевидно, что такая малая погрешность появилась только как результат незаконного отбрасывания не понравившихся нам результатов измерений. Поэтому следует объективно оценить, является ли данное измерение промахом или же результатом случайного, но совершенно закономерного отклонения.

Если нам известно точное значение σ, то вероятность появления значения, уклоняющегося от среднего арифметического более чем на 3σ, равна 0.003, и все измерения, отличающиеся от $\bar{x}$ на эту (или большую) величину, могут быть отброшены как очень маловероятные. Иначе говоря, мы считаем, что результаты, вероятность получения которых меньше 0.003, могут появиться только как следствие грубой погрешности (промаха). Отбрасывая такие значения, нужно помнить, что существует очень малая, но отличная от нуля вероятность того, что отброшенное значение является не промахом, а естественным статистическим отклонением. Однако если такой маловероятный случай и произойдет, т.е. будет неправильно отброшен один из результатов измерений, то практически это обычно не приведет к существенному ухудшению оценки результатов измерений.

Следует иметь в виду, что для совокупности измерений вероятность появления результата, отличающегося на величину более 3σ от среднего значения, всегда больше 0.003. Действительно, вероятность того, что результат первого измерения не будет отличаться от истинного значения более чем на 3σ, составляет $1 - 0.003 = 0.997$. Вероятность того, что это же будет иметь место для второго измерения, также равна $1 - 0.003$. А вероятность того, что и первое, и второе измерения не выйдут за указанный предел, будет, согласно правилу умножения вероятностей, равна $(1-0.003)^2$.

Соответственно вероятность β того, что ни один из результатов n измерений не будет отличаться от среднего более чем на 3σ, равна

$$\beta=(1 - 0.003)^n.$$

Для не слишком больших n можно приближенно положить $(1-0.003)^n \approx 1 - 0.003n$.

Сказанное означает, что вероятность того, что из 10 измерений хотя бы одно будет случайно отличаться от среднего более чем на 3σ, равна уже не 0.003, а 0.03. А при 100 измерениях вероятность такого события составит около 0.26.

Обычно число производимых измерений не очень велико. Сравнительно редко оно превышает 10–20. При этом точное значение σ неизвестно и мы можем определить лишь его оценку ${}^nS$. Следовательно, отбрасывать результаты, отличающиеся от среднего более чем на $3\,{}^nS$, мы не можем, так как не знаем, насколько значимо они отличаются от среднего. Поэтому следует воспользоваться табл. У1, помещенной в Приложении, с помощью которой легко решить вопрос об отбрасывании подозрительных результатов. Она составлена для $n \leq 25$, при $n > 25$ можно положить ${}^nS = \sigma$ и оценку β делать, пользуясь нормальным распределением (табл. II).

Для применения табл. У1 мы вычисляем среднее арифметическое $\bar{x}$ и среднюю квадратическую погрешность ${}^nS$ из всех измерений, включая подозреваемое x_k, которое, на наш взгляд, недопустимо велико или мало.

Вычисляем относительное уклонение этого измерения от среднего арифметического, выраженное в долях средней квадратической погрешности:

$$v_{max}=\frac{|\bar{x} - x_k|}{{}^nS}\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \tag{46}$$

По табл. У1 находим, какой вероятности β соответствует полученное значение v_{max}. Разумеется, следует договориться, при каких значениях β мы будем отбрасывать измерения.

Табл. У1 составлена так, что наименьшее помещенное в ней значение β равно 0.01. Оставлять результаты, вероятность появления которых меньше этой величины, обычно нецелесообразно.

Следует иметь в виду, что если мы в отдельных случаях и примем естественное случайное отклонение за промах и „неправильно" выбросим такой результат, то это обычно не приведет к заметному изменению оценок измеряемой величины. Важно не выбрасывать „по интуиции", не пользуясь вполне определенными критериями.

В нашем примере l_{10}= 266.0, v_{max} получается равным $\sqrt{15/14}\cdot(266.0-257.2)/2.5 = 3.64$. Наибольшее значение v_{max} для n= 15, приведенное в табл. У1, равно 2.80, чему соответствует β = 0.01. Так как с ростом v_{max} соответствующее значение β уменьшается, то при v_{max}= 3.38 значение β должно быть намного меньше 0.01. Такие β отсутствуют в таблице. Из того, что $\beta \ll 0.01$, следует, что результат 266.0 надо отбросить, считая его промахом.

В оставшемся ряду представляется также подозрительным результат 258.5. Для него v_{max} получается равным $\sqrt{14/13}\cdot(258.5-256.5)/2 \approx 1$. Из табл. У1 видно, что этому значению соответствует $\beta > 0.1$, и результат 258.5, разумеется, нужно оставить.

Рассмотрим еще один пример. Среднее значение плотности ртути d, определенное из 15 наблюдений, равно 13.59504 г/см^3; средняя квадратическая погрешность ^{15}S = $5\cdot10^{-5}$ г/см^3.

В ряду наблюдений имеется один результат: d = 13.59517. Для него

$$v_{max} = \frac{13.59517-13.59504}{5\cdot10^{-5}}\sqrt{\frac{15}{14}} = 2.7.$$

Для n = 15 этому значению v_{max} соответствует уровень значимости около 0.025.

Таким образом, выбрасывая измерение d = 13.5917, мы можем утверждать с вероятностью 0.975, что поступаем правильно, считая его промахом.

Если все же оставить это наблюдение в общем ряду, то легко видеть, что оно изменит среднее значение $\bar{d}$ на 0.00001, т.е. на число, малое по сравнению с ^{15}S и не играющее поэтому никакой практической роли. Следовательно, решая вопрос об отбрасывании выскакивающего измерения, полезно посмотреть, как сильно оно меняет окончательный результат.

Если вероятность появления данного измерения в ряду лежит в промежутке 0.1–0.01, то представляется одинаково правильным – оставить это измерение или отбросить. В случаях же, когда она выходит за указанные пределы, вопрос об отбрасывании, по-видимому, решается однозначно.

Разумеется, если мы отбрасываем какое-то измерение, то $\bar{x}$ и ^{n}S следует пересчитать заново – без учета исключенного результата измерений.

11. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В большинстве случаев измеряется не непосредственно интересующая нас величина, а другая, зависящая от нее тем или иным образом. Например, для измерения площади прямоугольника мы измеряем длину двух его сторон a и b, а площадь вычисляем, пользуясь соотношением $S = ab$.

При таких измерениях, называющихся косвенными (в отличие от прямых, при которых нужная величина измеряется непосредственно), необходимо также уметь вычислять погрешности измерений.

Здесь могут быть два основных случая:

1) интересующая нас величина зависит от одной измеряемой величины;

2) интересующая нас величина зависит от нескольких измеряемых величин.

Общие правила вычисления погрешностей для обоих случаев могут быть легко выведены с помощью дифференциального исчисления. Вначале мы ограничимся простыми частными задачами.

1. Пусть зависимость интересующей нас величины Y от измеряемой величины X имеет наиболее простой вид

$$Y = AX + B. \tag{47}$$

Здесь A и B – постоянные, значения которых точно известны. Если X увеличить или уменьшить на некоторое число ΔX, то Y соответственно изменится на $A\Delta X$. Действительно, зададим X приращение ΔX.

Тогда из выражения (47) имеем

$$Y + \Delta Y = A(X + \Delta X) + B, \tag{48}$$

вычтя (47) из (48), получим

$$\Delta Y = A\Delta X. \tag{49}$$

Если ΔX – погрешность измерения велинины X, то соответственно ΔY будет погрешностью результата.

В общем случае, если $Y = f(X)$, то для погрешностей, малых по сравнению с измеряемой величиной, мы можем с достаточной точностью написать

$$\Delta Y = f'(X)\Delta X. \tag{50}$$

Если мы хотим найти величину относительной погрешности, то из (50) легко получаем

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'(X)}{f(X)}\Delta X. \tag{51}$$

Эти определения относятся и к случайным и к систематическим погрешностям.

2. Простейший случай, когда интересующая нас величина являлась суммой двух или нескольких независимо измеряемых величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, мы уже разбирали и написали для вычисления случайных погрешностей правило сложения дисперсий (26). Теперь дадим правила вычисления погрешностей для случаев произведения и частного.

Если $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, то

$$\sigma_Y^2 = (X_1 X_2 \sigma_{X_3})^2 + (X_2 X_3 \sigma_{X_1})^2 + (X_1 X_3 \sigma_{X_2})^2 . \qquad (52)$$

Аналогично вычисляются погрешности для большего числа сомножителей.

Если $Y = X_1 / X_2$, то

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_2}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{X_2^2}\right)^2 \sigma_{X_2}^2 . \qquad (53)$$

Относительные погрешности для случаев (52) и (53) выглядят одинаково:

$$\left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_3}}{X_3}\right)^2 \qquad (54)$$

и аналогично

$$\left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2 . \qquad (55)$$

Пользуясь обозначениями дифференциального исчисления, можно погрешность функции Y от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представить в виде

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{X_i}\right)^2} . \qquad (56)$$

Формулы (52–56) сохраняют свой вид, если вместо σ мы возьмем среднеквадратические погрешности ${}^nS$, вероятные p или среднеарифметические r. В общем виде

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta X_i\right)^2} . \qquad (57)$$

Относительную погрешность величины Y легко вычислить, написав

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \sum_1^n \left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2 . \tag{58}$$

Так как

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{\partial \ln f}{\partial X_i} ,$$

то для относительной погрешности получаем

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial \ln f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2} \tag{59}$$

Может возникнуть вопрос, как правильнее вычислять среднеарифметическое значение и погрешность результата в случае косвенных измерений?

Если $y = f(x)$ и измерения дают нам ряд значений x_i, то можно поступить двояким образом:

1) вычислить $\bar{x} = \sum_1^n \frac{x_i}{n}$ и, подставив это значение в уравнение $y = f(x)$, получить $\bar{y} = f(\bar{x})$;

2) для каждого из значений x_i вычислить $y_i = f(x_i)$, а затем определить $\bar{y}$ по соотношению

$$\bar{y} = \frac{\sum_1^n y_i}{n} . \tag{60}$$

Соответственно двумя способами можно определять и погрешность величины y : либо, определив погрешность величины $\bar{x}$, воспользоваться соотношением

$$\Delta y = f'(x)\Delta x , \tag{61}$$

либо, вычислив ряд значений y_i, определить погрешность величины y обычным путем, например,

$$\sigma_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\bar{y} - y_i)^2}{n-1}} .$$

Можно показать, что если погрешности измерений малы по сравнению с измеряемой величиной (именно это предположение положено в основу всех наших формул), то оба способа дают достаточно близкие результаты, и поэтому безразлично, каким из них пользоваться.

Здесь следует руководствоваться практическими удобствами расчета, а с этой точки зрения первый способ представляется менее трудоемким. Кроме того, если результаты измерений распределены по нормальному закону, то закон распределения величин y, вообще говоря, отличен от нормального. Поэтому для определения доверительных интервалов по табл. 1У лучше пользоваться первым способом. Если же применять второй способ, то целесообразно убедиться в близости полученного распределения к нормальному.

12. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ РАЗЛИЧНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

При косвенных измерениях нужный нам результат обычно отягчен случайными погрешностями, различными для разных величин X_i, от которых зависит интересующая нас величина Y. Результирующая погрешность и в этом случае определяется с помощью уже известного нам закона сложения случайных погрешностей. Вычисление удобнее выполнять, пользуясь относительными погрешностями.

Поясним это на примере определения плотности. Допустим, что в нашем распоряжении имеется прямоугольный параллелепипед из вещества, плотность которого нужно определить. Длины его граней X_1, X_2 и X_3. Для определения плотности $d = m/V$ (где m – масса параллелепипеда, V – его объем) мы измеряем длины граней и массу нашего образца. Пусть $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}, \sigma_{X_3}$ – среднеквадратические погрешности измерения длин граней, а σ_m – погрешность определения массы. Тогда, согласно формуле (26),

$$\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_3}}{X_3}\right)^2 .$$

Допустим, что взвешивание производится на аналитических весах, дающих погрешность около 1 мг при массе образца около 10 г. Тогда $\sigma_m/m \approx 10^{-4} \approx 10^{-2}\%$.

Пусть объем нашего тела около 1 см^3. Если мы хотим, чтобы точность измерения плотности тела определялась в основном точностью взвешивания, то необходимо, чтобы погрешность в измерении длин граней была меньше погрешности взвешивания, т.е. $\sigma_X/X < 10^{-4}$; это при размере граней в 1 см означает, что σ_X должна быть меньше 10^{-4} см. Если в нашем распоряжении для измерения длины есть инструменты типа штангенциркуля, допускающего погрешность до 0,01 см, то очевидно, что необходимой степени точности мы не получим, так как точность измерения длины составит всего 100. В этом случае для взвешивания можно пользоваться более грубыми весами, дающими погрешность в несколько десятков раз большую, например, так называемыми техническими. Это будет и более целесообразно, ибо потребует меньшей затраты времени и

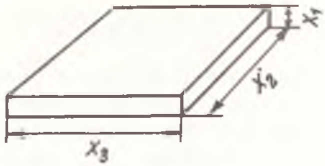


Рис. 13. Плоский параллелепипед.

средств. Однако если нам все же необходимо определить плотность с точностью 10^{-4}, то следует для измерения сторон параллелепипеда пользоваться очень точным микрометром, позволяющим измерить длину с погрешностью, меньшей чем 10^{-3} мм, и в этом случае необходимо взвешивать на аналитических весах.

На приведенном примере можно проследить еще некоторые свойства результирующей погрешности, являющиеся следствием закона суммирования погрешностей. Допустим, что наш параллелепипед имеет плоскую форму, т.е. $X_1 \ll X_2 \approx X_3$ (рис. 13).

Большинство инструментов, применяемых для измерения длины, дает погрешность Δx, величина которой почти не зависит от измеряемой длины (в пределах измерения данным инструментом). Абсолютная погрешность постоянна (см. стр. 15). Поэтому мы и положим $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \sigma_{X_3} = \sigma_x$, но в этом случае

$$\frac{\sigma_{X_1}}{X_1} \gg \frac{\sigma_{X_2}}{X_2} \approx \frac{\sigma_{X_3}}{X_3},$$

и определяющей будет погрешность измерения самой малой грани. Практически, если одна грань в 3–4 раз меньше двух других, то погрешностями измерения последних можно пренебречь.

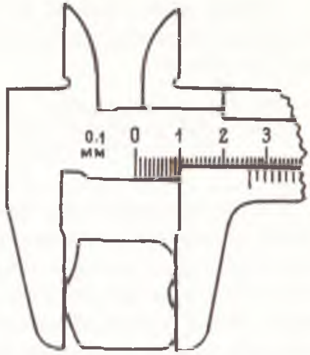
Таким образом, формула (57) всегда позволяет сделать оценку роли погрешностей в различных звеньях измерительного процесса. Причем условия измерений наиболее рационально выбрать так, чтобы относительные погрешности каждого звена были приблизительно одинаковыми. В противном случае точность результата обычно задается какой-то одной величиной, а именно той, точность измерения которой наименьшая.

13. СОГЛАСОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ СО СВОЙСТВАМИ ИЗМЕРЯЕМОГО ОБЪЕКТА

Вернемся к примеру с измерением плотности. В том случае, когда необходимо измерить ее с высокой степенью точности, которая определялась бы в основном погрешностью взвешивания на аналитических весах, нужно, как мы говорили, измерять длины ребер с погрешностью, меньшей 1 мкм. Однако легко показать, что без дополнительных мер предосторожности измерение длин с такой погрешностью все же не приведет к нужной точности в измерении объема.

Действительно, объем параллелепипеда V мы положили равным $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$. На самом деле он отличается от этой величины в

Рис. 14. Измерение ширины параллелепипеда с негладкими поверхностями.



первую очередь потому, что у реального параллелепипеда углы не равны точно 90°, а поверхности не строго плоские. Легко показать, что если один из углов квадрата имеет погрешность в 1°, то это даст погрешность в его площади около 1%.

Для того чтобы объем куба можно было измерить с точностью 10.000 без учета поправок на отклонение углов от 90°, необходимо, чтобы углы были выполнены с отклонением меньше минуты. Достичь такой точности углов в процессе изготовления трудно, и для многих изделий углы отягчены большей погрешностью. Погрешность,определяемая отклонением поверхностей параллелепипеда от плоскости,чаще всего невелика, но если поверхность, например, сильно шероховата, то последнее может внести заметное искажение в измерение длин, как это легко понять из рис. 14, на котором шероховатость представлена в увеличенном виде. В результате неровности поверхности измеренный объем всегда будет больше истинного. Для случая определения плотности описанным методом чаще всего именно погрешности углов параллелепипеда будут ограничивать точность измерения его объема и нет смысла добиваться точности измерения длин большей, чем та, которая может быть достигнута при применении соотношения $V = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, т.е. без учета погрешностей, допущенных при изготовлении параллелепипеда. Эта ситуация совершенно аналогична описанной нами, когда речь шла о роли систематических и случайных погрешностей. Мы тогда указывали, что нет особого смысла стремиться сделать случайную погрешность значительно меньше, чем та систематическая погрешность, которая определяется классом точности измерительного устройства. Совершенно также нет смысла добиваться, чтобы погрешность измерений была меньше погрешности, определяемой той схематизацией, которая принята при наших измерениях. В самом деле, любая формула, устанавливающая количественную связь между физическими величинами, является некоторой математической моделью, в действительности удовлетворяющейся с тем или иным приближением.

В нашем примере не были учтены отклонения углов параллелепипеда от 90° и его поверхности от плоскости. Нетрудно написать более сложную формулу для объема с учетом этих обстоятельств. Но такая формула также всегда будет лишь некоторым приближением к действительности, и погрешность наших измерений должна быть согласована с соответствием принятой модели реальным свойствам измеряемого объекта.

Оценку необходимой точности следует делать в результате тщательного анализа условий опыта и факторов, влияющих на конечный результат.

14. УЧЕТ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ И СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Ранее мы говорили, что измерения следует организовать так, чтобы погрешность результата целиком определялась систематической погрешностью измерений, которая не может быть меньше погрешности измерительного прибора. Для этого рекомендовалось провести такое число измерений, чтобы случайная погрешность результата была незначительна по сравнению с систематической погрешностью.

Однако не всегда возможно осуществить необходимое число измерений. Этому может препятствовать высокая стоимость измерений, а для изменяющихся со временем величин иногда процесс измерения оказывается слишком длительным и мы просто не успеваем произвести достаточное число измерений.

В результате часто приходится мириться с положением, когда систематическая и случайная погрешности измерений близки друг к другу и они обе в одинаковой степени определяют точность результата. К сожалению, в этом случае трудно дать достаточно строгое определение суммарной погрешности измерений.

Когда мы имеем дело только с погрешностью прибора, то, указывая, как в примере с миллиамперметром, погрешность ± 0.75 мА, мы, естественно, не зная свойств данного прибора, ничего не можем сказать о том, какова вероятность сделать погрешность $+0.2$ или -0.3 мА. Мы знаем только верхнюю границу возможных погрешностей. Если к такой систематической погрешности присоединяется случайная, то, очевидно, также почти ничего нельзя сказать о вероятности появления погрешностей различной величины, но можно оценить значения суммарных погрешностей.

В самом деле, если величину систематической погрешности обозначить δ, а дисперсию измерений – σ^2, то в качестве верхней границы суммарной погрешности Σ мы можем принять

$$\Sigma = \delta + 2\sigma \quad . \tag{62}$$

Действительно, с вероятностью более 0.95 мы можем утверждать, что результаты измерений не будут отличаться от истинного значения на величину, превышающую Σ.

Такое правило сложения можно распространить на систематические погрешности любого происхождения.

Подчеркнем еще раз, что вопрос о сложении систематических и случайных погрешностей актуален только тогда, когда одна из них не более чем в несколько раз превышает другую. В противном случае в качестве меры погрешности измерения следует указывать только бóльшую погрешность.

Отметим, что, не имея строгого решения, вопрос о правилах сложения систематической и случайной погрешностей можно решать разным образом.

Иногда рекомендуют вообще отказаться от нахождения суммарной погрешности и давать в качестве меры погрешности измерений две погрешности – систематическую и случайную.

Однако, чтобы воспользоваться результатом измерений, нам, как правило, нужно знать общую его погрешность вне зависимости от причин, ее породивших. Поэтому приходится каким-то образом комбинировать систематическую и случайную погрешности для получения единой числовой характеристики точности измерений.

Одно из возможных правил нахождения такой суммарной погрешности состоит в том, что мы условно полагаем систематическую погрешность распределенной также по нормальному закону и считаем, что указанная величина этой погрешности δ соответствует утроенному значению среднеквадратической условной погрешности σ', т.е. $\delta \approx 3\sigma'$. В этом случае суммарную погрешность нужно писать так:

$$\Sigma = \sqrt{9(\sigma')^2 + 9\sigma^2} = \sqrt{\delta^2 + 9\sigma^2} . \qquad (63)$$

Погрешности Σ тогда можно приписать доверительную вероятность 0.997. Легко показать, что различие, даваемое формулами (62) и (63), невелико. Практически (так как мы не знаем истинного закона распределения систематических погрешностей) можно пользоваться любой из них для ориентировочных оценок суммарной погрешности.

Если известно, что результаты измерения содержат систематические погрешности $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ и случайную σ, то для нахождения суммарной погрешности Σ часто служит формула

$$\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \sum_1^n \delta_i^2} . \qquad (64)$$

В книге Тейлора с соавторами [18] при обсуждении применимости этой формулы указывается, что она дает общее среднеквадратическое отклонение, если все систематические погрешности независимы и каждая характеризуется своим значением δ. Далее авторы пишут: „Хотя нельзя сказать точно, удовлетворяют ли этому условию систематические погрешности, принято считать, что удовлетворяют". К сожалению, последняя оговорка в значительной мере обесценивает обоснованность применения формулы (64), но ею все же широко пользуются даже при таких ответственных процедурах, как согласование численных значений основных физических констант.

В защиту формулы (64) можно, однако, привести следующее: систематические погрешности в данной серии измерений имеют постоянное, но неизвестное нам значение, которое может оказаться иным в другой серии, или при других условиях эксперимента. Значения δ в формулах (62)–(64) – это не истинные значения систематических погрешностей, которые нам неизвестны, а наши оценки этих погрешностей. Такие оценки постоянных величин являются величинами случайными. А если погрешностей δ несколько, то можно с некоторой долей уверенности говорить и о нормальном законе распределения систематических погрешностей.

Отметим, что погрешность σ также является постоянной величиной, точное значение которой нам неизвестно. Взамен него во всех вычислениях всегда фигурирует случайная величина ${}^{n}S$, которая служит оценкой σ, тем лучшей, чем больше n.

Поэтому формулу (64) следует признать вполне закономерной.

15. ОПТИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИЗМЕРЕНИЙ

Для уменьшения случайной погрешности результата, как мы уже знаем, могут быть использованы два пути: улучшение точности измерений, т.е. уменьшение величины σ, и увеличение числа измерений, т.е. использование соотношения $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Сейчас будем говорить только о последнем приеме, условно считая, что все возможности совершенствования техники измерений уже использованы.

Пусть систематическая погрешность измерений, определяемая классом точности прибора или другими аналогичными обстоятельствами, будет δ.

Известно, что уменьшать случайную погрешность целесообразно только до тех пор, пока общая погрешность измерений не будет полностью определяться ее систематической составляющей. Для этого необходимо, чтобы доверительный интервал, определенный с выбранной степенью надежности, был существенно меньше величины систематической погрешности, т.е.

$$\Delta x \ll \delta \quad . \tag{65}$$

Разумеется, нужно условиться, какой степени надежности мы требуем и какую величину для случайных погрешностей следует считать допустимой, т.е. какое соотношение величин Δx и δ можно считать удовлетворяющим условию (65). Строгую оценку этого сделать трудно, однако можно исходить из того, что, как правило, нет необходимости определять общую погрешность с точностью, большей 10. Это означает, что в том случае, когда $\Delta x \leqslant \delta/10$, условие (65) можно считать выполненным. Практически обычно можно удовлетвориться гораздо менее жестким требованием: $\Delta x \leqslant \delta/3$ или даже $\Delta x \leqslant \delta/2$.

Надежность α, с какой мы хотим установить доверительный интервал, в большинстве случаев не должна превышать 0.95, хотя иногда требуются и более высокие значения α. Для оценки оптимального числа измерений в Приложении помещена табл. У [14], в которой Δx дано в долях средней квадратической погрешности. Приведем примеры пользования этой таблицей.

1. Измеряется диаметр шарика с помощью микрометра, имеющего погрешность в 1 мкм. Средняя квадратическая погрешность единичного измерения равна 2.3 мкм. Сколько измерений нужно проделать, чтобы получить погрешность не более 1.5 мкм с надежностью 0,95?

Положим $\Delta x = \delta/2 = 0.5$ мкм, ${}^{n}S = 2.3$ мкм, $\Delta x = 0.5/2.3\,{}^{n}S = 0.22\,{}^{n}S$. Из табл. У для $\alpha = 0.95$ при $\varepsilon = 0.3$ находим $n = 46$ и при $\varepsilon = 0.2$ имеем $n = 100$. Составив соответствующую пропорцию, легко рассчитать,что для $\varepsilon = \Delta x/S = 0.22$ $n \approx 57$.

Таким образом, нужно сделать около 60 наблюдений, чтобы случайная погрешность изменила общую погрешность результата измерений не более чем в полтора раза.

Интересно посмотреть, сколько нужно сделать измерений, если мы наложим еще менее жесткое требование, а именно чтобы систематическая и случайная погрешности были примерно равны по величине. В этом случае полагаем $\delta = \Delta x = 0.45\,S$ и из той же табл. У находим (для $\alpha = 0.95$) $n \approx 23$.

Мы видим, что число необходимых измерений получалось хотя и большое, но такое, которое часто может быть выполнено.

2. Относительная среднеквадратическая погрешность для некоторого измерения составляет 1%. Систематическая погрешность измерений $\delta = 0.1\%$. Сколько измерений нужно проделать, чтобы случайная погрешность практически не играла роли?

Так как все погрешности выражены в относительных единицах, то

$$\frac{\Delta x}{\sigma} = \frac{0.05}{1} = 0.05 .$$

Из табл. У находим для той же доверительной вероятности $\alpha = 0.95$ и для $\Delta x/\sigma = 0.05$ $n = 1500(!)$.

Очевидно, что практически такое число измерений обычно проделать нельзя.

Из этих примеров можно сделать заключение, что увеличением числа измерений можно устранить влияние случайной погрешности на результат только в том случае, если средняя квадратическая погрешность не более чем в несколько раз превосходит систематическую погрешность. Реально это возможно, если $\sigma \leq 5\delta$. При больших значениях σ для существенного уменьшения роли случайной погрешности уже требуются сотни и тысячи, а иногда десятки тысяч измерений, как это видно из табл. У.

При такой ситуации для уменьшения общей погрешности результата измерений необходимо радикально менять методику с тем, чтобы существенно уменьшить случайную погрешность измерений.

III. НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ КРИВЫХ

1. ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Очень часто исследуемая величина меняется с изменением условий опыта, а задача измерений состоит в нахождении функциональной зависимости, которая наилучшим образом описывает закон изменения интересующей нас величины.

Примером таких измерений является исследование зависимости сопротивления провода от его температуры, плотности газа от давления, вязкости жидкости от температуры и т.п. В результате измерений получаем несколько значений измеряемой величины.

Положим, что мы измеряем некоторую величину y , зависящую только от величины x . Для каждого значения x_i проводим ряд измерений и получаем соответствующие значения $\bar{y}_i$, для которых устанавливаем доверительные интервалы Δy_i . Если значения x_i не могут быть заданы точно, а также измеряются с некоторой погрешностью, то и для них известны средние значения $\bar{x}_i$ и соответствующие доверительные интервалы Δx_i . Все $\bar{y}_i$ и $\bar{x}_i$ могут рассматриваться как координаты точек на плоскости, что дает возможность представить графически совокупность наших измерений в виде графика рис. 15, а.

Отрезки, отложенные у каждой точки, означают величину доверительных интервалов, соответствующих измеренным средним значениям $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$. Обычно откладывают значение доверительного интервала для доверительной вероятности 0.7 или 0.95. Значение выбранной доверительной вероятности (одно и то же для всех точек данного графика) следует указать. Если значения одной из координат, скажем x_i , известны практически точно, то на графике показывают только величину доверительного интервала для координаты y_i , и он будет выглядеть, как на рис. 15, б. (Разумеется доверительные интервалы в разных точках могут оказаться разными по величине, как показано на рисунке). Диаграммы рис. 15 позволяют установить с некоторой степенью вероятности ту функциональную зависимость, которой связаны величины x и y . Однако, как и все задачи, в которые входят зависимости между случайными величинами, выбор функции $y = f(x)$ может быть сделан с той или иной степенью надежности. Более того, существует бесчисленное множество функций, как угодно хорошо согласующихся с диаграммой рис. 15. Лучше всего, с точки зрения математического согласования, выбрать в качестве такой функции ломаную ли-

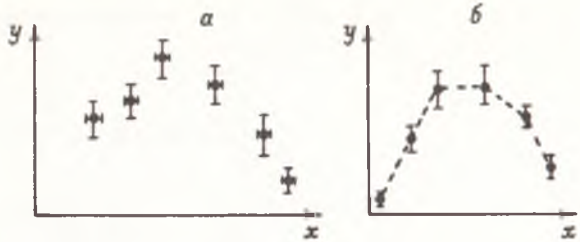


Рис. 15. Графическое представление результатов измерений.

а – обе переменные содержат погрешности; б – $\Delta x = 0$.

нию (x_1 , y_1), (x_2 , y_2), ..., (x_n , y_n), как это показано на рис. 15, б пунктиром. Однако очевидно, что такая линия не дает ничего нового по сравнению с имеющейся диаграммой, и обычно задача ставится так, что нужно на основании каких-то физических законов подобрать плавную кривую, хорошо описывающую полученные экспериментальные результаты. В таком виде задача тоже остается достаточно неопределенной, но во всяком случае имеются пути к ее аналитическому решению. Основным путем этого решения является метод наименьших квадратов, хотя он, конечно, не единственный.

Применение этого метода мы иллюстрируем конкретными примерами.

2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Если из теоретических соображений можно считать, что между x и y существует линейная зависимость, то для интерполяции следует искать не какую-то функцию, лучше всего удовлетворяющую данным точкам, а прямую линию, менее всего уклоняющуюся от них. Уравнение искомой прямой может быть записано в виде

$$y = ax + b. \tag{66}$$

Коэффициенты уравнения a и b надлежит выбрать наилучшим образом. Для нахождения по способу наименьших квадратов уравнения искомой прямой поступим следующим образом: проведем ординаты точек x_i, y_i до их пересечения с искомой прямой (рис. 16). Значение этих ординат будет (ax_i + b). Расстояние по ординате от точки x_i , y_i до прямой равно (ax_i + b – y_i). Положим, что прямая будет наилучшей, если сумма квадратов всех расстояний (ax_i + b – y_i) имеет наименьшее значение. Минимум этой суммы ищется по правилам дифференциального исчисления.

Для нахождения коэффициентов a и b искомой прямой мы должны, таким образом, найти минимум суммы $\sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2$.

Поэтому, как обычно, приравниваем нулю производные этой суммы по параметрам a и b . Получаем

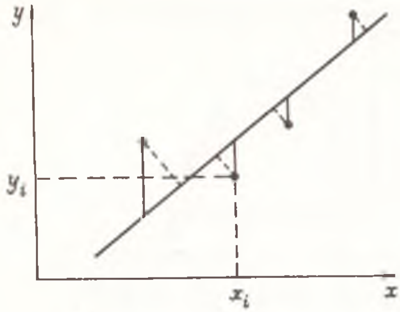


Рис. 16. К способу наименьших квадратов.

$$\frac{d}{da}\left[\sum_1^n (ax_i+b-y_i)^2\right]=0,$$
$$\frac{d}{db}\left[\sum_1^n (ax_i+b-y_i)^2\right]=0. \tag{67}$$

Отсюда легко выводим

$$a\sum_1^n x_i + nb - \sum_1^n y_i = 0,$$
$$b\sum_1^n x_i + a\sum_1^n x_1^2 - \sum_1^n x_1 y_i = 0. \tag{68}$$

Такая система уравнений называется нормальной и легко решается относительно параметров a и b :

$$a = \frac{n\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}, \tag{69}$$

$$b = \frac{\sum_1^n x_i^2 \sum_1^n y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n x_i y_i}{n\sum_1^n x_1^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}, \tag{70}$$

n – число наблюдений. Суммирование производится по всем точкам. Теория дает возможность определить также дисперсию уклонения точек от прямой и дисперсию коэффициентов a и b . Если S_0^2 – дисперсия точек, S_a^2 и S_b^2 – дисперсия коэффициентов a и b , тогда

$$S_0^2 = \frac{\sum_1^n y_i^2}{n-2} - \frac{\left(\sum_1^n y_i\right)^2}{n(n-2)} - \frac{\left(n\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i\right)^2}{n(n-2)\left[n\sum_1 x_i^2 - \left(\sum_1 x_i\right)^2\right]}, \tag{71}$$

$$S_a^2 = \frac{S_0^2 n}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}, \tag{72}$$

$$S_b = \frac{S_0^2 \sum^n x_i^2}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}. \tag{73}$$

Если разделить числители и знаменатели в этих формулах на n^2, то после несложных преобразований можно взамен сумм выразить все коэффициенты через средние значения входящих в них величин. Тогда получим

$$a = \frac{\overline{xy} - (\bar{x})(\bar{y})}{(\bar{x^2}) - (\bar{x})^2}, \tag{69a}$$

$$b = \frac{(\bar{x^2})\bar{y} - \bar{x}(\overline{xy})}{(\bar{x^2}) - (\bar{x})^2}, \tag{70a}$$

$$S_0^2 = \frac{n}{n-2}\left\{(\bar{y^2}) - (\bar{y})^2 - \frac{[\overline{xy} - (\bar{x})(\bar{y})]^2}{(\bar{x^2}) - (\bar{x})^2}\right\}, \tag{71a}$$

$$S_a^2 = \frac{S_0^2}{n[(\bar{x^2}) - (\bar{x})^2]}, \tag{72a}$$

$$S_b^2 = S_a^2 \bar{x^2}. \tag{73a}$$

Такой вид решения системы (68) облегчает вычисления на тех моделях микрокалькуляторов, которые непосредственно дают значения $\bar{x}$ и $\bar{x^2}$.

Существуют также микрокалькуляторы, которые имеют постоянно заложенную в них программу для вычисления параметров уравнения интерполирующей прямой. Для этого следует ввести в калькулятор значения x_i, y_i и нажать одну клавишу.

Разумеется, не всякая зависимость описывается уравнением прямой линии. Однако в ряде случаев можно путем простых преобразований привести к линейной более сложную зависимость. Так, например, если $y = \frac{k}{x} + l$, то, введя новую переменную $z = \frac{1}{x}$, получим линейную связь между y и z. Точно так же, если $y = ab^x$, то логарифмируя, придем к линейной связи между x и $\lg y$. Поэтому, пользуясь линейными уравнениями, можно находить оптимальные функции в довольно большом числе важных случаев. Теория позволяет находить коэффициенты уравнений и тогда, когда связь между измеряемыми величинами описывается более сложными функциями.

Следует подчеркнуть, что способ наименьших квадратов не может дать ответа на вопрос о том, какого вида функция лучше всего аппроксимирует данные экспериментальные точки.

Вид интерполирующей функции должен быть задан на основании каких-то физических соображений. Метод наименьших квадратов позволяет нам лишь выбрать, какая из прямых, экспонент или парабол является лучшей прямой, лучшей экспонентой или лучшей параболой.

Вообще говоря, можно утверждать, что, чем больше произвольных параметров содержит интерполирующая функция, тем лучше она аппроксимирует данные точки. Поэтому задача оптимальной интерполяции, по-видимому, должна ставиться так: подобрать наилучшую интерполирующую функцию при наименьшем числе параметров. Очевидно, что в общем виде эта задача не решается, и выбор вида функции обычно осуществляется либо на основании физических соображений, либо рядом эмпирических проб.

Нетрудно составить систему линейных уравнений для интерполяции с помощью параболы – $y = ax^2 + bx + c$, а также полинома любой степени (разумеется, число используемых точек должно

Т а б л и ц а 6

Скорость резания и срок службы резцов

Скорость резания, м^2/с	Срок службы, с	Скорость резания, м^2/с	Срок службы, с
0.138	2460	0.162	1260
	2580		780
	2100		1080
	1920		1200
0.154	1320	0.170	900
	2100		660
	1740		360
	1080		600

быть не меньше числа коэффициентов, подлежащих определению). Однако практически используются только уравнения первой, реже второй степени.

Применение многочленов более высоких степеней обычно лишено физического смысла, не говоря уже о трудностях вычислений, которые быстро возрастают по мере увеличения числа членов в интерполирующем уравнении. Даже для нахождения коэффициентов линейного уравнения требуется затратить достаточно много труда, и применение хорошей вычислительной техники нужно считать обязательным. В большинстве обычно встречающихся задач можно воспользоваться сравнительно дешевым программируемым микрокалькулятором БЗ-34. Программа вычисления коэффициентов линейного уравнения на этом калькуляторе приведена в табл. X1.

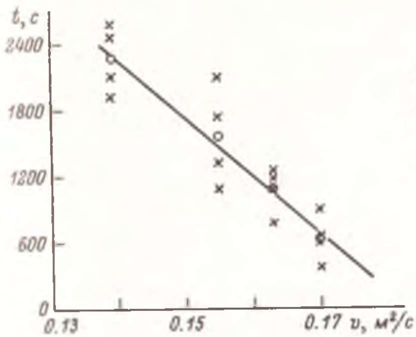
Она, как и программа вычисления статистических характеристик (табл. X), составлена для калькуляторов выпуска 1984 г. Если впоследствии в клавиатуру будут внесены изменения, то программы могут потребовать соответствующей переделки.

В качестве примера применения этой программы найдем уравнение интерполирующей прямой для установленной опытным путем зависимости времени изнашивания резца от скорости резания, которая определяется площадью обработанной заготовки в единицу времени. Соответствующие данные приведены в табл. 6 [5].

Вычисление по этим данным дает зависимость

$$y = 9574 - 52250\,x\ , \quad S_0^2 = 6810,\ S_a = 6420,\ S_b = 1020.$$

Следует отметить, что наблюдаемый разброс точек и соответствующая ему величина S_0^2 (рис. 17) связаны, разумеется, не с погрешностями измерений величин x_i и y_i, которые в данном случае настолько малы, что не сказываются на результатах опыта. Фактически приводятся единичные измерения длительности службы разных резцов, режущих разные заготовки. Таким образом, эти



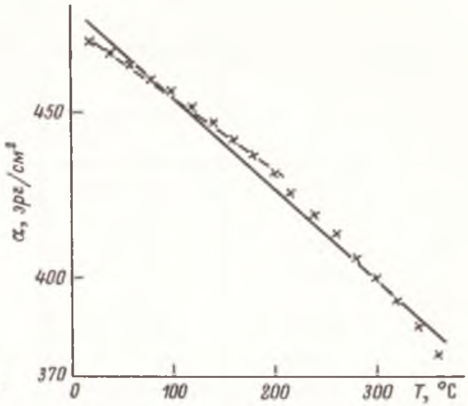


Рис. 17. Зависимость срока службы резца t от скорости резания v.

Крестики – экспериментальные результаты; кружки – средние значения.

Рис. 18. Зависимость коэффициента поверхностного натяжения ртути α от температуры T.

погрешности обусловлены различием свойств объекта измерения (см. стр. 21). Кроме того, разброс не может считаться малым по сравнению с измеряемой величиной. При этом расчеты средних квадратических погрешностей S_0, оценка доверительных интервалов для всех величин должны делаться очень осторожно, помня, что вся теория погрешностей строится в предположении

$$\Delta x \ll x, \quad \Delta y \ll y.$$

Применим эту программу также к линейной интерполяции зависимости коэффициента поверхностного натяжения ртути от температуры. Данные, представленные в табл. 7, приводят к следующим коэффициентам:

$$a = -0.279, \quad b = 483, \quad S_a = 0.008, \quad S_b = 1.7.$$

Соответствующий график приведен на рис. 18.

Из графика отчетливо видно, что зависимость α от t заметно отличается от линейной. Поэтому найденные значения S_0, S_a и S_b определяются суммарными погрешностями – случайными погрешностями измерения коэффициента поверхностного натяжения и систематическим уклонением функции $\alpha = f(T)$ от линейной. Если ограничиться для интерполяции меньшим интервалом температур, скажем от 20 до 200 °С, то этим систематическим уклонением можно пренебречь. Уравнение соответствующей прямой будет

Т а б л и ц а 7

Коэффициент поверхностного натяжения ртути

Номер измерения	T, °C	α, эрг/см^2	Номер измерения	T, °C	α, эрг/см^2
1	20	471.6	10	200	431.2
2	40	468.2	11	220	425.2
3	60	464.4	12	240	419.0
4	80	460.5	13	260	412.7
5	100	456.2	14	280	406.4
6	120	452.0	15	300	399.5
7	140	447.2	16	320	392.3
8	160	442.0	17	340	384.6
9	180	436.8	18	360	376.4

$$y = 478 - 0.224\,x\,.$$

Она нанесена пунктиром на рис. 18.

В качестве еще одного примера рассмотрим зависимость показателя преломления от длины волны. Она достаточно хорошо описывается формулой Коши, имеющей вид

$$n - 1 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots$$

Практически обычно можно ограничиться первыми двумя членами. Воспользуемся табличными данными для водорода при атмосферном давлении [27] (табл. 8). Для линейной интерполяции в данном случае нужно положить $x = 1/\lambda^2$ и искать уравнение в виде $n - 1 = A + Bx$. Для того чтобы применить без изменений ту же программу, вычислим сперва величины $x = 1/\lambda^2$. Они приведены во втором столбце табл. 8.

Можно проводить расчет без этого предварительного этапа, вводя в калькулятор непосредственно значения длин волн. Для этого программу табл. X1 следует дополнить тремя командами, которые вводятся после команды 12: 13. $\boxed{F\ x}$: 14. $\boxed{F\ \div}$ и 15. $\boxed{П\ 1}$.

Номера адресов последующих команд соответственно смещаются.

Решение системы нормальных уравнений в этом случае дает

$$n - 1 = 142 \cdot 10^{-4} + \frac{1.337}{\lambda^2}\,.$$

На рис. 19 приведены графики, построенные по этому уравнению в координатах ($1/\lambda^2$, $n - 1$) и (λ, $n - 1$). По характеру отклонения точек от интерполирующих кривых, можно предположить, что имеют место систематические расхождения между выбранной интерполирующей функцией и функцией $(n-1) = f\,(\lambda)$.

Для ее устранения следовало бы воспользоваться следующим членом

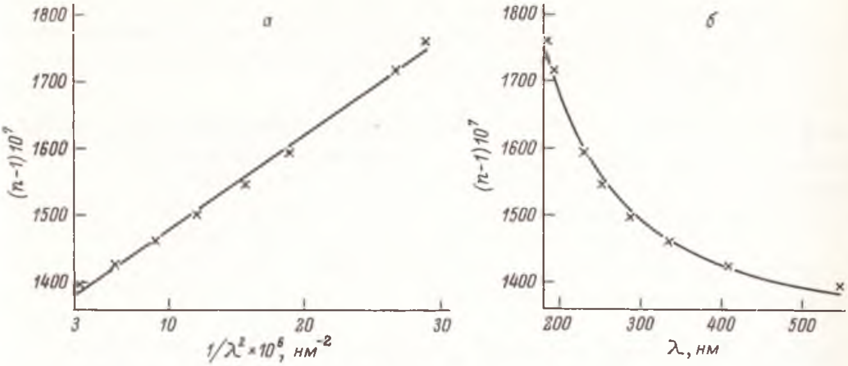


Рис. 19. Зависимость рефракции водорода от длины волны.

а – зависимость от $1/\lambda^2$; б – зависимость от λ .

Т а б л и ц а 8

Показатели преломления водорода

λ, нм	$(1/\lambda^2)\cdot 10^6$ нм$^{-2}$	$(n-1)\cdot 10^7$ наблюденные	$(n-1)\cdot 10^7$ вычисленные
546.23	3.3516	1396.50	1384.41
407.90	6.0102	1426.32	1422.07
334.24	8.9512	1461.33	1463.74
289.45	11.936	1498.59	1506.02
253.56	15.554	1546.90	1557.27
230.29	18.856	1594.18	1604.05
193.58	26.686	1718.24	1714.97
185.46	29.074	1759.26	1748.79

в формуле Коши и искать интерполирующую функцию в виде

$$n - 1 = A \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} .$$

При составлении уравнений по способу наименьших квадратов мы предположили, что погрешностям подвержены только величины y_i, а величины x_i известны точно. Если это не так, то следует искать интерполирующую функцию таким образом, чтобы сумма квадратов расстояний от точек $x_i y_i$ до искомой кривой была минимальной (т.е. определять расстояния вдоль перпендикуляров, опущенных из измеренных точек на искомую кривую (рис. 16)).

Если точности, с которой измерены разные значения $x_i y_i$ и $x_k y_k$, различны, то при проведении интерполирующей кривой это необходимо учитывать, приписывая соответствующие веса отдельным точкам. Это, разумеется, усложняет вычисления, но должно выполняться всегда, когда погрешность измерения существенно зависит от значения измеряемой величины.

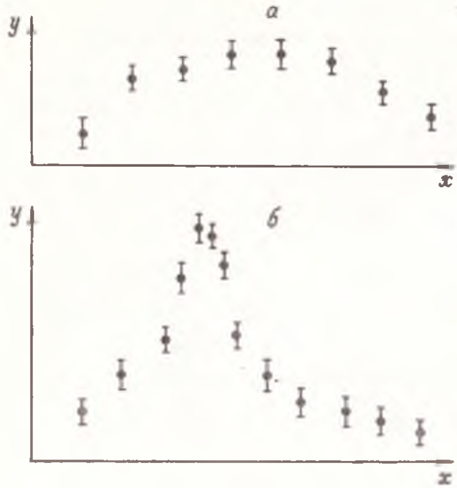
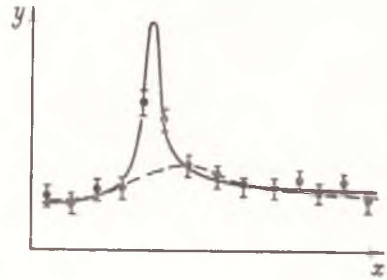


Рис. 20. К выбору интервалов независимой переменной.

Рис. 21. Интерполяция функции с острым максимумом.



При построении интерполирующей кривой по способу наименьших квадратов и выборе интерполирующей функции необходимо соблюдать ряд предосторожностей, чтобы не получить результатов совершенно нелепых. Это замечание, разумеется, относится и к другим способам интерполирования.

Для того чтобы интерполирование дало удовлетворительные результаты, необходимо быть уверенным, что исследуемая зависимость описывается „хорошей" функцией, т.е. такой, которая в изучаемой области не имеет особых точек, разрывов и очень больших значений второй и третьей производных. Иначе говоря, кривая должна быть достаточно гладкой. При этом измеренные точки надлежит располагать по всей исследуемой области достаточно равномерно (рис. 20, а), однако сгущая там, где функция быстро изменяет свое значение (рис. 20, б).

Конечно, когда о ходе зависимости $y = f(x)$ ничего неизвестно, то приходится ограничиваться равномерным расположением, проводя дополнительные измерения при обнаружении подозрительно выскакивающих результатов. Следует помнить, что значительная экстраполяция кривой за пределы крайних точек, для которых произведены измерения, недопустима.

Покажем на примере, к каким грубым ошибкам может привести недостаточно критичное применение метода наименьших квадратов к быстро меняющимся функциям. Допустим, известно, что искомая зависимость представляется кривой, имеющей один острый максимум и медленно спадающие „крылья", как это представлено на рис. 21. Получен ряд экспериментальных точек, измеренных с одинаковой точностью. Очевидно, что небольшое число точек, расположенных вблизи максимума, будет вносить малый вклад в величину $\Sigma\,(y - y_i)^2$. Вследствие этого минимум суммы обеспечит хорошее совпадение интерполирующей кривой с экспериментальными точками на крыльях, совершенно не отражая ход истинной зависимости вблизи максимума, и найденная способом наименьших квадратов кривая может пройти так, как показано, например, на рис. 21 пунктиром.

Этот пример наглядно иллюстрирует, сколь осторожно нужно подбирать интерполирующие функции.

При интерполяции методом наименьших квадратов вычисления довольно громоздки, однако есть ряд приемов, позволяющих их упростить. Здесь мы ограничимся основными сведениями.

Если изучаемая зависимость нелинейна, то ее, как было ранее сказано, часто удается путем несложных преобразований привести к линейной.

При большом количестве линейных уравнений вычисления остаются достаточно трудоемкими. Их можно упростить следующим приемом. В качестве приближенного значения принимается произвольная функция, которая „на глаз" кажется хорошо удовлетворяющей экспериментальным точкам. Вычисляются разности ординат экспериментальных значений и принятой нами аппроксимации. К ним применяется метод наименьших квадратов. При этом числа, с которыми приходится иметь дело, уменьшаются и вычисления существенно упрощаются. Если интервалы Δx между точками, в которых сделаны наблюдения, равны, то это приводит к дальнейшему сокращению объема вычислений.

Для этого положим $x_1 = 1$ и $\Delta x = 1$. Тогда формулы (69) и (70) преобразуются к виду

$$a = \frac{12\sum_1^n i y_i - 6(n+1)\sum_1^n y_i}{n(n^2-1)}, \tag{69б}$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i - \frac{n+1}{2}a. \tag{70б}$$

IV. ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Вычисление всех статистических величин, с которыми приходится иметь дело при подсчете результатов измерений и их погрешностей, можно вести вручную, пользуясь трехзначными таблицами квадратов и квадратных корней, которые даны в Приложении (табл. УIII–IX). Значительно быстрее они выполняются с помощью микрокалькуляторов. Применение более сложных вычислительных машин, во всяком случае при лабораторной работе, вряд ли оправдано.

Ниже приведены приемы вычислений основных величин без применения вычислительных устройств и с помощью микрокалькуляторов.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО

При нахождении среднего арифметического нет необходимости суммировать все результаты измерений. Лучше воспользоваться следующим приемом.

Среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

можно представить в более удобном для вычислений виде: выберем произвольное число x_0, близкое к $\bar{x}$. Тогда выражение, определяющее $\bar{x}$, можно преобразовать:

$$\bar{x} = \frac{[x_0+(x_1-x_0)]+[x_0+(x_2-x_0)]+\ldots+[x_0+(x_n-x_0)]}{n} =$$

$$= x_0 + \frac{\sum_1^n (x_i - x_0)}{n},$$

величины $(x_i - x_0)$ – малые числа, так как x_0 мы выбрали близким к $\bar{x}$. Поэтому суммирование и вычисление среднего существенно облегчается. В качестве примера выберем ряд измерений отрезка длины базиса геодезической съемки, выполненных особенно тщательно (табл. 9) [14].

Вычисления делаются еще более простыми, если обратить внимание на то, что первые шесть значащих цифр (146.308) во всех измерениях одинаковы. От измерения к измерению меняются только последние две цифры. Очевидно, что при вычислении среднего арифметического и также погрешностей первые шесть цифр можно не при-

Т а б л и ц а 9

Обработка измерений геодезического базиса

n	x, м	X	$X_0=60$, X_i-X_0	$X'_0=70$, $X_i-X'_0$	$(X_i-X_0)^2$	$(X_i-X'_0)^2$
1	2	3	4	5	6	7
1	146.30876	76	+16	+6	256	36
2	146.30864	64	+4	−6	16	36
3	146.30856	56	−4	−14	16	196
4	146.30853	53	−7	−17	49	289
5	146.30850	50	−10	−20	100	400
6	146.30862	62	+2	−8	4	64
7	146.30887	87	+27	+17	729	289
8	146.30862	62	+2	−8	4	64
9	146.30879	79	+19	+9	361	81
10	146.30873	73	+13	+3	169	9
	Сумма	–	+62	−38	1704	1464

$$X = 60 + \frac{62}{10} = 66.2, \quad X = 70 - \frac{38}{10} = 66.2, \quad \bar{x} = 146.308662.$$

нимать во внимание, а учитывать их только при вычислении относительной погрешности и в конечном результате. Последние две цифры даны в третьей колонке. Их мы пока можем рассматривать как результаты измерений x_i, и для них будем проводить вычисления. За x_0 принимаем округленное число, кажущееся нам наиболее близким к среднему арифметическому. По-видимому, таким числом является 146.30860 ($X_0 = 60$).

Итак, полагаем $x_0 = 146.30860$. В четвертом столбце табл. 9 выписаны разности $X_i - X_0$, сумму которых легко подсчитать даже в уме. Среднее арифметическое вычисляется теперь с помощью суммирования чисел этой колонки совсем легко. Оно равно 146.308662 м (заметим, что для среднего арифметического указано на один десятичный знак больше, чем дано в результатах отдельных измерений). Такой прием вычислений позволил нам операции с восьмизначными числами заменить операциями с двухзначными. Это заметно экономит время, затрачиваемое на расчеты.

Для контроля правильности вычислений удобно выбирать другое, несколько отличное значение x_0 (обозначенное x'_0), равное, например, 146.30870. В пятом столбце приведены разности $(X_i - X'_0)$, а внизу их сумма. Если вычисления верны, то значение $\bar{x}$, разумеется, получается одним и тем же при использовании чисел как четвертого, так и пятого столбцов.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Приемы вычисления погрешностей мы проиллюстрируем на примере тех же измерений длины, представленных в табл. 9.

Вычисление средней квадратической погрешности проводится просто, если сделать несложное преобразование формулы (16). Напишем выражение для дисперсии, в котором выполним возведение в квадрат:

$$
{}^{n}S^2 = \frac{\sum_1^n(\bar{x}-x_i)^2}{n-1} = \frac{(\bar{x}^2-2\bar{x}x_1+x_1^2)+\ldots+(\bar{x}^2-2\bar{x}x_n+x_n^2)}{n-1} = \tag{74}
$$

$$
= \frac{n\bar{x}^2}{n-1} + \frac{\sum_1^n x_i^2}{n-1} - \frac{2\bar{x}\sum_1^n x_i}{n-1},
$$

но

$$
\frac{\sum_1^n x_i}{n}
$$

есть среднее арифметическое $\bar{x}$. Подставляя это значение $\bar{x}$ в (74), после несложных преобразований получаем

$$
{}^{n}S^2 = \frac{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}{n(n-1)} .
$$

Нетрудно показать, что если мы введем сюда x_0, т.е. заменим x_i на $x_0+(x_i-x_0)$, то окончательно получим

$$
{}^{n}S^2 = \frac{n\sum_1^n (x_0-x_i)^2 - \left(\sum_1^n (x_0-x_i)\right)^2}{n(n-1)} .
$$

Если x_0 выбрано так, что x_0-x_i содержит не более одной-двух значащих цифр, то вычисления не представляют труда. Их легко производить в уме, однако лучше пользоваться таблицами квадратов и квадратных корней, данными в Приложении.

Контроль правильности вычислений также удобнее всего проводить, задавшись двумя несколько различными значениями x_0 и проделав вычисления для каждого из них. Разумеется, окончательные результаты должны совпасть.

Для подсчета погрешности в столбцах 6 и 7 табл. 9 приведены величины $(x_i - x_0)^2$ и $(x_i - x'_0)^2$, а внизу – суммы этих квадратов.

Для вычисления ${}^{n}S$ воспользуемся значением полученных сумм

$$ {}^{n}S^2 = \frac{10\cdot 1704 - 62^2}{9\cdot 10} = 147, \quad {}^{n}S'^2 = \frac{10\cdot 1464 - 38^2}{9\cdot 10} = 147. $$

Таким образом, оба значения ${}^{n}S^2$ совпали:

$$ {}^{n}S = 12.1 \approx 12, \qquad {}^{n}S_{\bar{x}} \approx \frac{12}{\sqrt{10}} = 3.8. $$

При большом числе измерений можно значительно облегчить работу, сгруппировав результаты в определенном порядке.

Удобнее всего расположить их в порядке возрастания величин x_i. Для примера возьмем ряд из пятидесяти наблюдений, в результате которых были получены следующие значения измеряемой величины: 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, причем 125 наблюдалось два раза, 126 – три, 127 – девять раз, и т. д.

Расположим наши результаты и количество наблюдений каждого из них (k) так, как это показано в первом и втором столбцах табл. 10. Дальнейший порядок расчетов виден из таблицы.

Проделав вычисления для двух значений x_0 (128 и 129), мы видим, что оба полученных значения $\bar{x}$ и S совпали. Это обычно является достаточной гарантией правильности вычислений.

$$ \bar{x} = 128 + \frac{14}{50} = 128.28 \approx 128.3, $$

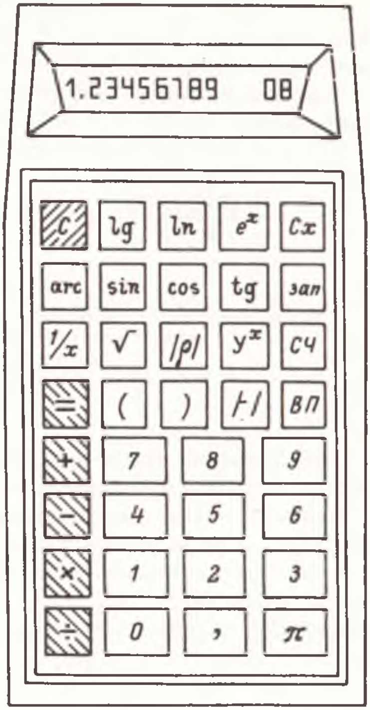
$$ \bar{x}' = 129 - \frac{36}{50} = 128.28 \approx 128.3, $$

$$ S^2 = \frac{112 - \left(\frac{14}{50}\right)^2}{49} = 2.21, $$

$$ S'^2 = \frac{134 - \left(\frac{36}{50}\right)^2}{49} = 2.21, $$

$$ S = 1.49 \approx 1.5, \quad S_{\bar{x}} = \frac{1.5}{\sqrt{50}} \approx 0.2. $$

Рис. 22. Панель микрокалькулятора С3-15.



Произведем эти же расчеты с помощью микрокалькулятора. В некоторых из них можно непосредственно получить $\bar{x}$, ${}^{n}S$ и ${}^{n}S_{\bar{x}}$. Эту возможность дают калькуляторы, в которых специально предусмотрены статистические расчеты, как например Б3-38 или Т1-55-II фирмы „Техас инструментс" (США).

Широко распространенный инженерный калькулятор С3-15 (рис. 22) также позволяет все нужные величины получать достаточно быстро. Для этого у него есть клавиша /ρ/ , нажатием на которую вычисляется $\sqrt{\Sigma x_i^2}$. С его помощью расчет по формуле (74) ведется в следующем порядке. Сначала вычисляем среднее арифметическое $\bar{x}$ (при этом введение приближенного значения x_0 , как при ручном счете, нецелесообразно). Все расчеты ведем, пользуясь только изменяющимися в процессе измерений значащими цифрами (столбец 3 табл. 10). В табл. 11 показан порядок нажатия клавиш.

В табл. 11 вводимые числа даны в косых скобках, нажимаемые клавиши – в круглых. Получаемые значения искомых величин отмечены стрелкой ↓ . Указанный порядок расчета не единственно возможный, но достаточно экономичный.

Для выполнения этих же расчетов на калькуляторе Б3-38 нужно сначала перевести его в режим статистической работы. Для этого нажимаем клавиши (F_2) ($\boxed{\sigma}$) (F_2) (C_6). Затем вводим x_i в следующем порядке:

$$/x_1/(F_2)(+)/x_2/(F_2)(+)\ldots/x_n/(F_2)(+)$$

(F_2) получаем ${}^{n}S$. Не повторяя ввода чисел, нажатием клавиши ($\bar{x}$) получаем $\bar{x}$, аналогично можно получить Σx_i и Σx_i^2 .

Проверку правильности расчета можно сделать, повторив его с изменением порядка суммирования вводимых данных (скажем, x_n , x_{n-1} , ... , x_1 вместо x_1 , x_2 , ... , x_n). Можно также воспользоваться примером проверки программы, приведенным в табл. X.

Т а б л и ц а 10

Обработка большого ряда наблюдений с помощью сгруппированных данных

x_i	k	$x_0=128$			$x'_0=129$		
		x_i-x_0	$k(x_i-x_0)$	$k(x_i-x_0)^2$	$(x_i-x'_0)$	$k(x_i-x'_0)$	$k(x_i-x'_0)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
125	2	–3	–6	18	–4	–8	32
126	3	–2	–6	12	–3	–9	27
127	9	–1	–9	9	–2	–18	36
128	15	0	0	0	–1	–15	15
129	11	+1	+11	11	0	0	0
130	7	+2	+14	28	1	7	7
131	2	+3	+6	18	2	4	8
132	1	+4	+4	16	3	3	9
Сумма	50	–	+14	+112	–	–36	+134

Т а б л и ц а 11

Вычисление $\bar{x}$, ${}^{n}S^2$, ${}^{n}S$ и ${}^{n}S_{\bar{x}}$ на калькуляторе С3-15

$$(\text{C})/x_1/(+)/x_2/(+)\ldots/x_n/(=)(\div)/n/(=)\underset{\bar{x}}{\downarrow}(Y^x)(2)(=)(\times)$$

$$/n/(=)(\text{ЗАП})(1)/x_1/(/\rho/)/x_2/\ldots/x_n/(=)(Y^x)$$

$$(2)(=)(-)(=)(\div)/n-1/(=)\underset{{}^{n}S^2}{\downarrow}(\sqrt{\ })\underset{{}^{n}S}{\downarrow}(\div)/n/(\sqrt{\ })(=)\underset{{}^{n}S_{\bar{x}}}{\downarrow}$$

В тех случаях, когда приходится обрабатывать очень длинные ряды измерений или несколько серий разных измерений, целесообразно пользоваться программируемым микрокалькулятором. Соответствующая программа для калькулятора Б3-34 приведена в табл. X. Введение ее в калькулятор требует нескольких минут труда, зато все последующие расчеты выполняются автоматически по мере ввода исходных данных.

Очень удобно, конечно, если программа сохраняется на неопределенное время в калькуляторе после его выключения, что имеет место, например, в калькуляторе Т1-55-II. Тогда можно работать в течение ряда дней без нового ввода программы.

При использовании сгруппированных данных на микрокалькуляторе можно так же, как и при ручном счете, несколько ускорить вычисления. Это, разумеется, требует некоторого изменения программы и порядка расчетов.

3. О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений. Вычисления, произведенные с бо́льшим числом десятичных знаков, чем это необходимо, требуют лишней затраты труда и создают ложное впечатление о большей точности измерений. В то же время, разумеется, не следует ухудшать результаты измерений, пользуясь излишне грубыми методами вычислений. Так, например, если погрешность измерений составляет около 1%, то для вычислений можно применять логарифмическую линейку, позволяющую надежно отсчитывать три значащие цифры. При измерениях, выполненных с погрешностью 1–0.1%, можно пользоваться четырехзначными таблицами логарифмов.

Во всех случаях нужно придерживаться следующего простого правила.

Погрешность, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок (т.е. в 10 раз) меньше суммарной погрешности измерений. При этом можно быть уверенным, что в процессе арифметических операций мы ощутимым образом не исказим результат.

Поясним это правило на примерах.

1. Для измерения электрического сопротивления провода определена сила протекающего через него тока, оказавшаяся равной 27.3 мА, и падение напряжения на нем 6.45 В. Применявшиеся приборы гарантировали относительную погрешность измерения этих величин не более 1%.

Найдем величину сопротивления из закона Ома:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{6.45}{0.0273} = 236.2627 \text{ Ом};$$

так как V и I определены с точностью около 100, то погрешность определения R несколько больше 1%. Поэтому вычисления целесообразно делать не точнее, чем до четвертого знака, и результат записать в виде 236.3 Ом.

Оценка погрешности результата может быть сделана на том основании, что каждый из двух сомножителей V и $1/I$ определен с точностью до 100. Их произведение вычисляется с погрешностью, несколько большей 1%, но не более 2%. Поэтому результат окончательно может быть записан в виде $R = 236 \pm 4$ Ом. Доверительную вероятность для погрешности в данном случае определить нельзя, ибо указание погрешности прибора дает только верхний ее предел, но не закон распределения погрешностей данного прибора.

2. Сопротивление провода определяется путем измерения его длины и диаметра. Удельное сопротивление известно с точностью, значительно большей, чем измеряемые величины.

В результате десяти измерений длины l и диаметра d получены l =25.32 мм, S_l =0.12 мм, d =1.54 мм, S_d = =0.021 мм.

Относительная среднеквадратическая погрешность R будет определена из соотношения

$$S_R^2 = \frac{S_{d^2}^2}{(d^2)^2} + \frac{S_l^2}{l^2} .$$

Принимая во внимание, что $S_{d^2} = 2 S_d$, имеем

$$\frac{S_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{2S_d}{d^2}\right)^2 + \frac{S_l^2}{l^2}} .$$

Очевидно, что при окончательном подсчете погрешность измерения длины практически можно не учитывать. Относительная среднеквадратическая погрешность измерений площади (квадрата диаметра) будет $S_{d^2} / d^2 = 2 S_d / d^2$ =1.8%. Если мы ограничиваемся доверительной вероятностью 0.95, то табл. 1У дает для этого случая $t_{\alpha,n}$=2.3, и относительная погрешность среднего арифметического из наших десяти измерений будет

$$\frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} = \frac{1.8 \cdot 2.3}{\sqrt{10}} \approx 1.3\%.$$

Это погрешность, соответствующая доверительной вероятности 0.95.

Таким образом, R нужно вычислить с точностью немного большей 100, т.е. ограничиться третьей значащей цифрой.

В случае медного провода для комнатной температуры мы получим

$$R = 1.78 \cdot 10^{-6} \frac{4l}{\pi d^2} = 2.42 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}$$

с относительной погрешностью 1.3% (для доверительной вероятности 0.95).

4. ЧИСЛО ЗНАКОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Мы знаем, что величина случайной погрешности Δx , как и сами результаты измерений, подвержена случайным колебаниям.

Примеры, приведенные ранее (см. стр. 54), показывают, что даже при довольно большом числе измерений доверительные интервалы для ${}^nS$ получаются большие, т.е. величину погрешности мы всегда определяем достаточно грубо.

3. О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений. Вычисления, произведенные с бо́льшим числом десятичных знаков, чем это необходимо, требуют лишней затраты труда и создают ложное впечатление о большей точности измерений. В то же время, разумеется, не следует ухудшать результаты измерений, пользуясь излишне грубыми методами вычислений. Так, например, если погрешность измерений составляет около 1%, то для вычислений можно применять логарифмическую линейку, позволяющую надежно отсчитывать три значащие цифры. При измерениях, выполненных с погрешностью 1-0.1%, можно пользоваться четырехзначными таблицами логарифмов.

Во всех случаях нужно придерживаться следующего простого правила.

Погрешность, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок (т.е. в 10 раз) меньше суммарной погрешности измерений. При этом можно быть уверенным, что в процессе арифметических операций мы ощутимым образом не исказим результат.

Поясним это правило на примерах.

1. Для измерения электрического сопротивления провода определена сила протекающего через него тока, оказавшаяся равной 27.3 мА, и падение напряжения на нем 6.45 В. Применявшиеся приборы гарантировали относительную погрешность измерения этих величин не более 1%.

Найдем величину сопротивления из закона Ома:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{6.45}{0.0273} = 236.2627 \text{ Ом};$$

так как V и I определены с точностью около 100, то погрешность определения R несколько больше 1%. Поэтому вычисления целесообразно делать не точнее, чем до четвертого знака, и результат записать в виде 236.3 Ом.

Оценка погрешности результата может быть сделана на том основании, что каждый из двух сомножителей V и $1/I$ определен с точностью до 100. Их произведение вычисляется с погрешностью, несколько большей 1%, но не более 2%. Поэтому результат окончательно может быть записан в виде $R = 236 \pm 4$ Ом. Доверительную вероятность для погрешности в данном случае определить нельзя, ибо указание погрешности прибора дает только верхний ее предел, но не закон распределения погрешностей данного прибора.

2. Сопротивление провода определяется путем измерения его длины и диаметра. Удельное сопротивление известно с точностью, значительно большей, чем измеряемые величины.

В результате десяти измерений длины l и диаметра d получены l =25.32 мм, S_l =0.12 мм, d =1.54 мм, S_d = =0.021 мм.

Относительная среднеквадратическая погрешность R будет определена из соотношения

$$S_R^2 = \frac{S_{d^2}^2}{(d^2)^2} + \frac{S_l^2}{l^2} .$$

Принимая во внимание, что $S_{d^2} = 2 S_d$, имеем

$$\frac{S_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{2S_d}{d^2}\right)^2 + \frac{S_l^2}{l^2}} .$$

Очевидно, что при окончательном подсчете погрешность измерения длины практически можно не учитывать. Относительная среднеквадратическая погрешность измерений площади (квадрата диаметра) будет $S_{d^2}/d^2 = 2S_d/d^2$ =1.8%. Если мы ограничиваемся доверительной вероятностью 0.95, то табл. 1У дает для этого случая $t_{\alpha,n}$=2.3, и относительная погрешность среднего арифметического из наших десяти измерений будет

$$\frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} = \frac{1.8 \cdot 2.3}{\sqrt{10}} \approx 1.3\%.$$

Это погрешность, соответствующая доверительной вероятности 0.95.

Таким образом, R нужно вычислить с точностью немного большей 100, т.е. ограничиться третьей значащей цифрой.

В случае медного провода для комнатной температуры мы получим

$$R = 1.78 \cdot 10^{-6} \frac{4l}{\pi d^2} = 2.42 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}$$

с относительной погрешностью 1.3% (для доверительной вероятности 0.95).

4. ЧИСЛО ЗНАКОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Мы знаем, что величина случайной погрешности Δx , как и сами результаты измерений, подвержена случайным колебаниям.

Примеры, приведенные ранее (см. стр. 54), показывают, что даже при довольно большом числе измерений доверительные интервалы для ^nS получаются большие, т.е. величину погрешности мы всегда определяем достаточно грубо.

При 10 измерениях ${}^{10}S$ определяется с погрешностью более 30%. Поэтому, как правило, следует в этом случае для ${}^{10}S$ приводить одну значащую цифру, если она больше 3, и две значащие цифры, если первая из них меньше 4.

Например, если ${}^{10}S$ получилось равным 0.523, то приводим одну цифру – ${}^{10}S$ =0.5; если ${}^{10}S$ =0.124; то следует давать две значащие цифры – ${}^{10}S$ =0.12.

При n =25 $\sigma_{{}^nS}$ =1/7. Очевидно, что в этом случае нет смысла вычислять и приводить для ${}^nS$ более двух значащих цифр, т.е. нужно писать ${}^nS$ =2.3, а не 2.34 или ${}^nS$ =0.52, а не 0.523.

При расчетах на микрокалькуляторах необходимо помнить, что мы всегда автоматически получаем больше значащих цифр, чем это соответствует точности измерений. При этом совершенно необходимо в окончательных результатах делать соответствующие округления, так как большое число приводимых десятичных знаков создает ложное впечатление о большой точности измерений.

По этому поводу неоднократно писалось и, казалось бы, здесь все очевидно, однако до сих пор результаты некоторых экспериментальных исследований вызывают удивление излишним числом значащих цифр, ликвидируя которые можно сделать эти результаты и более легко читаемыми и более убедительными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрены основные приемы оценок погрешностей измерений, причем использованы некоторые результаты современных работ в данной области.

Неумение правильно оценить погрешности может привести и в ряде случаев приводит к неправильно установленным метрологическим требованиям к промышленным изделиям, что, разумеется, наносит прямой материальный ущерб. Таким образом, вопрос о правильном применении теории погрешностей имеет отнюдь не чисто академический интерес. В последнее время это стало достаточно ясно всем, кто имеет отношение к научным исследованиям и технологии точных промышленных изделий.

Тем не менее и с преподаванием этого предмета и с применением теории погрешностей не все благополучно, и до сих пор в различных руководствах можно встретить противоречивые рекомендации.

Разумеется, для этого есть и объективные причины. По существу в вопросах применения теории имеется некоторый произвол - произвольно назначаются необходимые уровни значимости и доверительные интервалы. Все результаты и их оценка не носят абсолютного характера.

Нельзя говорить точно о значении всех величин, и само понятие „истинное значение измеряемой величины" может ставиться под сомнение.

Видимо поэтому некоторые математики еще не так давно вообще не признавали теорию вероятностей математической дисциплиной.

Несмотря на элементарный характер этой книжки и то, что она рассчитана на читателя, не имеющего специальной подготовки, автор не старался „заметать мусор под ковер" или „прятать концы в воду". Лучше пусть все трудности будут на виду. Это даст возможность их легче преодолевать.

Хорошо известно, что теория погрешностей, так же как и основы теории вероятностей, - сложны, и их усвоение требует известной вдумчивости и затраты труда, однако, вероятно, гораздо меньшего, чем необходимо для понимания основ математического анализа.

Будем надеяться, что внимательное прочтение этой книжки поможет усвоению элементов теории погрешностей и научит ее правильно применять.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица I

Основные понятия и обозначения

№ п/п	Термин			Определение	Обозначение	Примечания
		Синонимы				
	ГОСТ 16263-70	Не рекомендованы ГОСТом	Не вошедшие в ГОСТ			
1	2	3	4	5	6	7
1	Измерение	Замер		Нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств		
2	Прямое измерение			Измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных		Например: Измерения массы на циферблатных или равноплечных весах, температуры термометром, длины с помощью линейных мер
3	Косвенное измерение			Измерение, при котором искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям		Например: Нахождение плотности однородного тела по его массе и геометрическим размерам; нахождение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения
4	Совместные измерения			Производимые одновременно измерения двух или нескольких неодноименных величин для нахождения зависимости между ними		Например: Измерения, при которых электрическое сопротивление при температуре 20°C и температурные коэффициенты измерительного резистора находят по данным прямых измерений его сопротивления при различных температурах
5	Абсолютное измерение			Измерение, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использования значений физических констант		
6	Относительное измерение			Измерение отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или изменения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную		
7	Результат измерения			Значение величины, найденное путем ее измерения	$x_{изм}$, x_i, $\bar{x}$	
8	Наблюдение при измерении (Наблюдение)	Замер	Единичное измерение	Экспериментальная операция, выполняемая в процессе измерений, в результате которой получают одно значение из группы значений величины, подлежащих совместной обработке для получения результата измерения		
9	Результат наблюдения		Результат единичного измерения	Значение величины, получаемое при отдельном наблюдении	x_i	
10	Случайное отклонение результата наблюдения (Случайное наблюдение)	Остаточная погрешность	Погрешность (ошибка) единичного измерения	Разность между результатом наблюдения и средним значением	$x_i - \bar{x}$, Δx_i	

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

№ п/п	Термин: ГОСТ 16263-70	Синонимы: Не рекомендованы ГОСТом	Синонимы: Не вошедшие в ГОСТ	Определение	Обозначение	Примечания
1	2	3	4	5	6	7
11	Погрешность измерения	Ошибка измерения	Погрешность (ошибка) результата измерения	Отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины	$x_{изм} - x_0$	
12	Абсолютная погрешность измерения		Абсолютная ошибка измерений (абсолютная ошибка)	Погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины	Δx	Абсолютная погрешность измерений Δx в принципе определяется формулой $\Delta x = x_{изм} - x_0$, где $x_{изм}$ – значение, полученное при измерении; x_0 – истинное значение измеряемой величины. Однако, поскольку истинное значение измеряемой величины остается неизвестным, на практике можно найти лишь приближенную оценку погрешности измерения
13	Относительная погрешность измерения			Отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины	$\frac{\Delta x}{x_0}$, $\frac{\Delta x}{x_{изм}}$	Относительная погрешность может быть выражена в процентах. (В качестве оценки обычно принимается отношение погрешности к измеренному значению)
14	Грубая погрешность измерения		Грубая ошибка измерения, промах	Погрешность измерения, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях погрешность		Например: неправильно записанный отсчет прибора ошибка при вычислении, неверное значение использованных физических констант
15	Систематическая погрешность измерения (Систематическая погрешность)		Систематическая ошибка измерения (Систематическая ошибка)	Составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины	δ	Например: погрешность от несоответствия действительного значения меры, с помощью которой выполняют измерения, ее номинальному значению; погрешность вследствие постепенного уменьшения силы рабочего тока в цепи электроизмерительного потенциометра
16			Предельная погрешность (ошибка) измерения	Наибольшая погрешность, которая может произойти в данных условиях измерения		
17	Случайная погрешность измерения (Случайная погрешность)		Случайная ошибка измерения (Случайная ошибка)	Составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины	S	Например: погрешность вследствие вариации показаний измерительного прибора; погрешность округления при отсчитывании показаний измерительного прибора
18	Точность измерений			Качество измерений, отражающее близость их результатов к истинному значению измеряемой величины	Q	1. Высокая точность измерений соответствует малым погрешностям всех видов как систематических, так и случайных. 2. Количественно точность может быть выражена обратной величиной модуля относительной погрешности. Например: если погрешность измерений составляет $10^{-2}\%=10^{-4}$, то точность равна 10^4

Таблица I (продолжение)

№ п/п	Термин: ГОСТ 16263-70	Синонимы: Не рекомендованы ГОСТом	Синонимы: Не вошедшие в ГОСТ	Определение	Обозначение	Примечания
1	2	3	4	5	6	7
19	Правильность измерений	Верность измерений		Качество измерений, отражающее близость к нулю систематических погрешностей в их результатах		
20	Сходимость измерений			Качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в одинаковых условиях		
21	Воспроизводимость измерений			Качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в различных условиях (в различное время, в различных местах, разными методами и средствами)		
22	Поправка			Значение величины, одноименной с измеряемой, прибавляемое к полученному при измерении значению величины с целью исключения систематической погрешности	δ	Поправку, прибавляемую к номинальному значению меры, называют поправкой к значению меры; поправку, вводимую к показанию измерительного прибора, называют поправкой к показанию прибора
23	Поправочный множитель			Число, на которое умножают результат измерения с целью исключения систематической погрешности		
24	Среднее квадратическое отклонение результата наблюдения		Средняя квадратическая (квадратичная) погрешность (ошибка) единичного измерения. Среднеквадратичная погрешность (ошибка); стандарт измерений	Параметр функции распределения результатов наблюдений, характеризующий их рассеивание и равный корню квадратному из дисперсии результата наблюдения (с положительным знаком)	σ, ${}^{n}S$	При ограниченном числе наблюдений можно найти только одну оценку среднего квадратического отклонения результата наблюдения, обычно принимаемую равной корню квадратному из оценки дисперсии результата наблюдения
25	Среднее квадратическое отклонение результата измерения			Параметр функции распределения результатов измерений, характеризующий их рассеивание и равный корню квадратному из дисперсии результата измерения (с положительным знаком)	$\sigma_{\bar{x}}$, ${}^{n}S_{\bar{x}}$	При ограниченном числе измерений можно найти только оценку среднего квадратического отклонения результата измерения, обычно принимаемую равной корню квадратному из оценки дисперсии результата измерения
26			Средняя квадратическая погрешность (ошибка) результата при n измерениях	Среднеквадратическая погрешность среднего арифметического из n измерений	${}^{n}S_{\bar{x}}$	${}^{n}S_{\bar{x}} = {}^{n}S \cdot n^{-1/2}$
27	Доверительные границы случайного отклонения результата наблюдения (Доверительные отклонения)		Доверительный интервал (интервалы)	Верхняя и нижняя границы интервала, накрывающего с заданной вероятностью случайное отклонение результата наблюдения		При симметричных границах термин применяется в единственном числе
28	Доверительные границы погрешности результата			Верхняя и нижняя границы интервала, накрывающего с заданной вероятностью погрешность измерения		При симметричных границах термин применяется в единственном числе

Таблица I (продолжение)

№ п/п	Термин: ГОСТ 16263-70	Синонимы: Не рекомендованы ГОСТом	Синонимы: Не вошедшие в ГОСТ	Определение	Обозначение	Примечания
1	2	3	4	5	6	7
	измерения (Доверительные погрешности)					
29			Доверительная вероятность, коэффициент надежности, коэффициент доверия	Вероятность нахождения результата измерений внутри заданных доверительных границ	α	Коэффициент надежности, коэффициент доверия (K) обычно выражаются в процентах (K=100α%)
30			Среднеарифметическая погрешность (ошибка) измерения; (среднеарифметическая погрешность)	Среднее значение модуля погрешности	r, ρ	
31			Вероятная погрешность (ошибка) измерений	Погрешность, вероятность превышения которой равна 1/2	p	
32			Суммарная погрешность (ошибка)	Погрешность, образующаяся в результате совместного действия случайных и систематических погрешностей	Σ	
33			Выборочная дисперсия	Дисперсия, определяемая из ограниченного числа измерений	${}^{n}S^{2}$	
34			Генеральная дисперсия	Дисперсия, определяемая по всей совокупности значений измеряемой величины	σ^2	

Таблица II

Доверительные вероятности α для доверительного интервала, выраженного в долях средней квадратической погрешности $\varepsilon = \Delta x/\sigma$

ε	α	ε	α	ε	α
0	0	1.2	0.77	2.6	0.991
0.05	0.04	1.3	0.81	2.7	0.993
0.1	0.08	1.4	0.84	2.8	0.995
0.15	0.12	1.5	0.87	2.9	0.996
0.2	0.16	1.6	0.89	3.0	0.997
0.3	0.24	1.7	0.91	3.1	0.9981
0.4	0.31	1.8	0.93	3.2	0.9986
0.5	0.38	1.9	0.94	3.3	0.9990
0.6	0.45	2.0	0.95	3.4	0.9993
0.7	0.52	2.1	0.964	3.5	0.9995
0.8	0.58	2.2	0.972	3.6	0.9997
0.9	0.63	2.3	0.979	3.7	0.9998
1.0	0.68	2.4	0.984	3.8	0.99986
1.1	0.73	2.5	0.988	3.9	0.99990

Таблица III. Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$

n	α												
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	0.16	0.33	0.51	0.73	1.00	1.38	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	0.14	0.29	0.45	0.62	0.82	1.06	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	0.14	0.28	0.42	0.58	0.77	0.98	1.3	1.6	2.4	3.2	4.5	5.8	12.9
5	0.13	0.27	0.41	0.57	0.74	0.94	1.2	1.5	2.1	2.8	3.7	4.6	8.7
6	0.13	0.27	0.41	0.56	0.73	0.92	1.2	1.5	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	0.13	0.27	0.40	0.55	0.72	0.90	1.1	1.4	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	0.13	0.26	0.40	0.55	0.71	0.90	1.1	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	0.13	0.26	0.40	0.54	0.71	0.89	1.1	1.4	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	0.13	0.26	0.40	0.54	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.8
11	0.13	0.26	0.40	0.54	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.2	2.8	3.2	4.6
12	0.13	0.26	0.40	0.54	0.70	0.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.5
13	0.13	0.26	0.40	0.54	0.70	0.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.3
14	0.13	0.26	0.39	0.54	0.69	0.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.0	4.2
15	0.13	0.26	0.39	0.54	0.69	0.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.0	4.1
16	0.13	0.26	0.39	0.54	0.69	0.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	2.9	4.0
17	0.13	0.26	0.39	0.54	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
18	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
19	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	3.9
20	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
21	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
22	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
23	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
24	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
25	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
26	0.13	0.26	0.39	0.53	0.68	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
27	0.13	0.26	0.39	0.53	0.68	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
28	0.13	0.26	0.39	0.53	0.68	0.86	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
29	0.13	0.26	0.39	0.53	0.68	0.86	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
30	0.13	0.26	0.39	0.53	0.68	0.85	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
40	0.13	0.26	0.39	0.53	0.68	0.85	1.1	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.6
60	0.13	0.25	0.39	0.53	0.68	0.85	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
120	0.13	0.25	0.39	0.53	0.68	0.84	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4
	0.13	0.25	0.39	0.52	0.67	0.84	1.0	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	3.3

Т а б л и ц а IУ

Доверительные интервалы для σ

α	0.99		0.98		0.95		0.90	
n \ γ	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
2	0.36	160	0.39	80	0.45	32	0.51	16
3	0.43	14	0.47	10	0.52	6.3	0.58	4.4
4	0.48	6.5	0.51	5.1	0.57	3.7	0.62	2.9
5	0.52	4.4	0.55	3.7	0.60	2.9	0.65	2.4
6	0.55	3.5	0.58	3.0	0.62	2.5	0.67	2.1
7	0.57	3.0	0.60	2.6	0.64	2.2	0.69	1.9
8	0.59	2.7	0.62	2.4	0.66	2.0	0.70	1.8
9	0.60	2.4	0.63	2.2	0.68	1.9	0.72	1.7
10	0.62	2.3	0.64	2.1	0.69	1.8	0.73	1.6
11	0.63	2.2	0.66	2.0	0.70	1.8	0.74	1.6
12	0.64	2.1	0.67	1.9	0.71	1.7	0.75	1.5
13	0.65	2.0	0.68	1.8	0.72	1.6	0.76	1.5
14	0.66	1.9	0.69	1.8	0.73	1.6	0.76	1.5
15	0.67	1.8	0.69	1.7	0.73	1.6	0.77	1.5
16	0.68	1.8	0.70	1.7	0.74	1.5	0.77	1.4
17	0.68	1.8	0.71	1.7	0.75	1.5	0.78	1.4
18	0.69	1.7	0.71	1.6	0.75	1.5	0.79	1.4
19	0.70	1.7	0.72	1.6	0.76	1.5	0.79	1.4
20	0.70	1.7	0.73	1.6	0.76	1.5	0.79	1.4
25	0.73	1.6	0.75	1.5	0.78	1.4	0.81	1.3
30	0.74	1.5	0.77	1.4	0.80	1.3	0.83	1.3
40	0.77	1.4	0.79	1.3	0.82	1.3	0.85	1.2
50	0.79	1.3	0.81	1.3	0.84	1.2	0.86	1.2
70	0.82	1.3	0.84	1.2	0.86	1.2	0.88	1.2
100	0.85	1.2	0.86	1.2	0.88	1.2	0.90	1.1
200	0.89	1.1	0.90	1.1	0.91	1.1	0.93	1.1

Т а б л и ц а У. Необходимое число измерений для получения случайной погрешности ε с надежностью α

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{S}$	α					
	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	130
0.2	13	29	70	100	170	280
0.1	47	110	270	390	700	1100
0.05	180	430	1100	1500	2700	4300
0.01	4500	11000	27000	38000	66000	110000

Т а б л и ц а VI

Оценка выскакивающих измерений $v_{max} = \frac{|\bar{x} - x_k|}{n_S} \sqrt{\frac{n}{n-1}}$

в ряду из n измерений для разных уровней значимости

n	Уровни значимости β			
	0.1	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41
4	1.65	1.69	1.71	1.72
5	1.79	1.87	1.92	1.96
6	1.89	2.00	2.07	2.13
7	1.97	2.09	2.18	2.27
8	2.04	2.17	2.27	2.37
9	2.10	2.24	2.35	2.46
10	2.15	2.29	2.41	2.54
11	2.19	2.34	2.47	2.61
12	2.23	2.39	2.52	2.66
13	2.26	2.43	2.56	2.71
14	2.30	2.46	2.60	2.76
15	2.33	2.49	2.64	2.80
16	2.35	2.52	2.67	2.84
17	2.38	2.55	2.70	2.87
18	2.40	2.58	2.73	2.90
19	2.43	2.60	2.75	2.93
20	2.45	2.62	2.78	2.96
21	2.47	2.64	2.80	2.98
22	2.49	2.66	2.82	3.01
23	2.50	2.68	2.84	3.03
24	2.52	2.70	2.86	3.05
25	2.54	2.72	2.88	3.07

П о я с н е н и я к т а б л. VII–IX

Таблицы предназначены для извлечения квадратных корней и возведения в квадрат трехзначных чисел. Ответ дается также с тремя значащими цифрами. Этого вполне достаточно для вычисления погрешностей.

Когда число, из которого нужно извлечь корень, содержит больше трех значащих цифр, то округляем его, оставляя три цифры. Если четвертая цифра округляемого числа – 5 и больше, то третья цифра увеличивается на единицу; когда четвертая цифра меньше 5, то третья остается без изменений. Например, 34.256 после округления будет 34.3, 0.076137 округляется до 0.0761.

Разбиваем число на группы по две цифры в каждой, ведя счет цифр вправо и влево от точки.

В приведенных примерах разбитые на группы числа будут выглядеть так: ′34.3 и 0.76′1. Если число не содержит десятичных дробей, то отделение групп ведется справа налево, т.е. 423 разбивается так: 4′23, а 47 так: ′47.

В случае, когда в первой левой группе оказывается одна значащая цифра, для отыскивания корня нужно пользозаться табл. УII, а если две - табл. УIII. В соответствии с этим правилом корень из числе 0.07′61 и 4′23 находится по табл. УII, а из числе ′34.3 и ′47 - по табл. УIII.

Корень из числа находится на пересечении строки, номер которой задается первыми двумя значащими цифрами, и колонки, номер которой задается третьей цифрой. Первая цифра ответа помещена только в нулевой колонке, остальные две - в колонке соответствующего номера. Так, $\sqrt{5.42}$ находим на пересечении строк 5.4 и колонки 2 - 2.33.

Число десятичных знаков в результате равно числу групп, которые следует отсчитывать от запятой вправо для чисел меньше единицы и от запятой влево для чисел больше единицы.

Так, $\sqrt{0.07'61}=0.276$, $\sqrt{4'23}=2.06$, $\sqrt{34'3}=5.86$, $\sqrt{47}=6.86$.

Таблица квадратов построена аналогично таблицам квадратных корней.

Для определения в результате положения запятой удобно представить возводимое в квадрат число в виде произведения из числа с одной цифрой в разряде целых на соответствующую степень 10, т.е. 0.0761 записывается в виде $7.61\cdot10^{-2}$, 34.3 - $3.43\cdot10$, и т.д.

При возведении в квадрат показатель степени удваивается, т.е. $(7.61\cdot10^{-2})=(7.61)^2\cdot10^{-4}$ $(7.61)^2$ берем из таблиц - 57.9; окончательно получим $(0.0761)^2=(7.61)^2\cdot10^{-4}=57.9\cdot10^{-4}=0.00579$.

Т а б л и ц а УII

Квадратные корни от 1.0 до 9.9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.00	00	01	01	02	02	03	03	04	04
1.1	05	05	06	06	07	07	08	08	09	09
1.2	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14
1.3	14	14	15	15	16	16	17	17	17	18
1.4	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
1.5	22	23	23	24	24	24	25	25	26	26
1.6	26	27	27	28	28	28	29	29	30	30
1.7	30	31	31	31	32	32	33	33	33	34
1.8	34	35	35	35	36	36	36	37	37	37

Т а б л и ц а УII (продолжение)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.9	38	38	39	39	39	40	40	40	41	41
2.0	41	42	42	42	43	43	43	44	44	44
2.1	45	45	46	46	47	47	47	47	48	48
2.2	48	49	49	49	50	50	50	51	51	51
2.3	52	52	52	53	53	53	54	54	54	55
2.4	55	55	56	56	56	56	57	57	57	58
2.5	58	58	59	59	59	60	60	60	61	61
2.6	61	62	62	62	62	63	63	63	64	64
2.7	64	65	65	65	65	66	66	66	67	67
2.8	67	68	68	68	68	69	69	69	70	70
2.9	70	71	71	71	71	72	72	72	73	73
3.0	73	73	74	74	74	75	75	75	75	76
3.1	76	76	77	77	77	77	78	78	78	79
3.2	79	79	79	80	80	80	81	81	81	81
3.3	82	82	82	82	83	83	83	84	84	84
3.4	84	85	85	85	85	86	86	86	87	87
3.5	87	87	88	88	88	88	89	89	89	89
3.6	90	90	90	90	91	91	91	92	92	92
3.7	92	93	93	93	93	94	94	94	94	95
3.8	95	95	95	96	96	96	96	97	97	97
3.9	97	98	98	98	98	99	99	99	99	2.00
4.0	2.00	00	00	01	01	01	01	02	02	02
4.1	02	03	03	03	03	04	04	04	04	05
4.2	05	05	05	06	06	06	06	07	07	07
4.3	07	08	08	08	08	09	09	09	09	10
4.4	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12
4.5	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14
4.6	14	15	15	15	15	16	16	16	16	17
4.7	17	17	17	17	18	18	18	18	19	19
4.8	19	19	20	20	20	20	20	21	21	21
4.9	21	22	22	22	22	22	23	23	23	23
5.0	24	24	24	24	24	25	25	25	25	26
5.1	26	26	26	26	27	27	27	27	28	28
5.2	28	28	28	29	29	29	29	30	30	30
5.3	30	30	31	31	31	31	32	32	32	32
5.4	32	33	33	33	33	33	34	34	34	34
5.5	2.34	35	35	35	35	36	36	36	36	36
5.6	37	37	37	37	37	38	38	38	38	39
5.7	39	39	39	39	40	40	40	40	40	41
5.8	41	41	41	41	42	42	42	42	42	43
5.9	43	43	43	44	44	44	44	44	45	45
6.0	45	45	45	46	46	46	46	46	47	47
6.1	47	47	47	48	48	48	48	48	49	49
6.2	49	49	49	50	50	50	50	50	51	51
6.3	51	51	51	52	52	52	52	52	53	53

Таблица УII (продолжение)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.4	53	53	53	54	54	54	54	54	55	55
6.5	55	55	55	56	56	56	56	56	57	57
6.6	57	57	57	57	58	58	58	58	58	59
6.7	59	59	59	59	60	60	60	60	60	61
6.8	61	61	61	61	62	62	62	62	62	62
6.9	63	63	63	63	63	64	64	64	64	64
7.0	65	65	65	65	65	66	66	66	66	66
7.1	66	67	67	67	67	67	68	68	68	68
7.2	68	69	69	69	69	69	69	70	70	70
7.3	70	70	71	71	71	71	71	71	72	72
7.4	72	72	72	73	73	73	73	73	73	74
7.5	74	74	74	74	75	75	75	75	75	76
7.6	76	76	76	76	76	77	77	77	77	77
7.7	77	78	78	78	78	78	79	79	79	79
7.8	79	79	80	80	80	80	80	81	81	81
7.9	81	81	81	82	82	82	82	82	82	83
8.0	83	83	83	83	84	84	84	84	84	84
8.1	85	85	85	85	85	85	86	86	86	86
8.2	86	87	87	87	87	87	87	88	88	88
8.3	88	88	88	89	89	89	89	89	89	90
8.4	90	90	90	90	91	91	91	91	91	91
8.5	92	92	92	92	92	92	93	93	93	93
8.6	93	93	94	94	94	94	94	94	95	95
8.7	95	95	95	95	96	96	96	96	96	96
8.8	97	97	97	97	97	97	98	98	98	98
8.9	98	98	99	99	99	99	99	3.00	00	00
9.0	3.00	00	00	01	01	01	01	01	01	01
9.1	02	02	02	02	02	02	03	03	03	03
9.2	03	03	04	04	04	04	04	04	05	05
9.3	05	05	05	05	06	06	06	06	06	06
9.4	07	07	07	07	07	07	08	08	08	08
9.5	08	08	09	09	09	09	09	09	10	10
9.6	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
9.7	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13
9.8	13	13	13	14	14	14	14	14	14	14
9.9	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16

Т а б л и ц а VIII

Квадратные корни от 10 до 99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3.16	17	19	21	22	24	26	27	28	30
11	32	33	35	36	38	39	41	42	44	45
12	46	48	49	51	52	54	55	56	58	59
13	61	62	63	65	66	68	69	70	71	73
14	74	76	77	78	79	81	82	83	85	86
15	87	89	90	91	92	94	95	96	97	99
16	4.00	01	02	04	05	06	07	09	10	11
17	12	14	15	16	17	18	20	21	22	23
18	24	25	27	28	29	30	31	32	34	35
19	36	37	38	39	40	42	43	44	45	46
20	47	48	49	51	52	53	54	55	56	57
21	58	59	60	62	63	64	65	66	67	68
22	69	70	71	72	73	74	75	76	77	79
23	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
24	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
25	5.00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
26	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
27	20	21	22	23	23	24	25	26	27	28
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
29	39	39	40	41	42	43	44	45	46	47
30	48	49	50	50	51	52	53	54	55	56
31	57	58	59	59	60	61	62	63	64	65
32	66	67	67	68	69	70	71	72	73	74
33	74	75	76	77	78	79	80	81	81	82
34	83	84	85	86	87	87	88	89	90	91
35	92	92	93	84	95	96	97	97	98	99
36	6.00	01	02	02	03	04	05	06	07	07
37	08	09	10	11	12	12	13	14	15	16
38	16	17	18	19	20	20	21	22	23	24
39	24	25	26	27	28	28	29	30	31	32
40	32	33	34	35	36	36	37	38	39	40
41	40	41	42	43	43	44	45	46	47	47
42	48	49	50	50	51	52	53	53	54	55
43	56	57	57	58	59	60	60	61	62	63
44	63	64	65	66	66	67	68	69	69	70
45	71	72	72	73	74	75	75	76	77	77
46	78	79	80	80	81	82	83	83	84	85
47	86	86	87	88	88	89	90	91	91	92
48	93	94	94	95	96	96	97	98	99	99
49	7.00	00	01	02	03	04	04	05	06	06
50	07	08	09	09	10	11	11	12	13	13
51	14	15	15	16	17	18	18	19	20	20
52	21	22	22	23	24	25	25	26	27	27
53	28	29	29	30	31	31	32	33	33	34
54	35	36	36	37	38	38	39	40	40	41
55	42	42	43	44	44	45	46	46	47	48

Т а б л и ц а УIII (продолжение)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
56	48	49	50	50	51	52	52	53	54	54
57	55	56	56	57	58	58	59	60	60	61
58	62	62	63	64	64	65	66	66	67	67
59	68	69	69	70	70	71	72	72	73	74
60	75	75	76	76	77	78	78	79	80	80
61	81	82	82	83	84	84	85	85	86	87
62	87	88	89	89	90	91	91	92	92	93
63	94	94	95	96	96	97	97	98	99	99
64	8.00	01	01	02	02	03	04	04	05	05
65	06	07	07	08	09	09	10	11	11	12
66	12	13	14	14	15	15	16	17	17	18
67	19	19	20	20	21	22	22	23	23	24
68	25	25	26	26	27	28	28	29	29	30
69	31	31	32	32	33	34	34	35	35	36
70	37	37	38	38	39	40	40	41	41	42
71	43	43	44	44	45	46	46	47	47	48
72	49	49	50	50	51	51	52	53	53	54
73	54	55	56	56	57	57	58	58	59	60
74	60	61	61	62	63	63	64	64	65	65
75	66	67	67	68	68	69	69	70	71	71
76	72	72	73	73	74	75	75	76	76	77
77	77	78	79	79	80	80	81	81	82	83
78	83	84	84	85	85	86	87	87	88	88
79	89	89	90	90	91	92	92	93	93	94
80	94	95	96	96	97	97	98	98	99	99
81	9.00	01	01	02	02	03	03	04	04	05
82	06	06	07	07	08	08	09	09	10	10
83	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16
84	17	17	18	18	19	19	20	20	21	21
85	22	22	23	24	24	25	25	26	26	27
86	27	28	28	29	30	30	31	31	32	32
87	33	33	34	34	35	35	36	36	37	38
88	38	39	39	40	40	41	41	42	42	43
89	43	44	44	45	45	46	47	47	48	48
90	49	49	50	50	51	51	52	52	53	53
91	54	54	55	55	56	57	57	58	58	59
92	59	60	60	61	61	62	62	63	63	64
93	64	65	65	66	66	67	67	68	69	69
94	70	70	71	71	72	72	73	73	74	74
95	75	75	76	76	77	77	78	78	79	79
96	80	80	81	81	82	82	83	83	84	84
97	85	85	86	86	87	87	88	88	89	89
98	90	90	91	91	92	92	93	93	94	94
99	95	95	96	96	97	97	98	98	99	10.0

Т а б л и ц а IX

Квадраты

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.12	1.14	1.17	1.19
1.1	1.21	1.23	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.37	1.39	1.42
1.2	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.56	1.59	1.61	1.64	1.66
1.3	1.69	1.72	1.74	1.77	1.80	1.82	1.85	1.88	1.90	1.93
1.4	1.96	1.99	2.02	2.04	2.07	2.10	2.13	2.16	2.19	2.22
1.5	2.25	2.28	2.31	2.34	2.37	2.40	2.43	2.46	2.50	2.53
1.6	2.56	2.59	2.62	2.66	2.69	2.72	2.76	2.79	2.82	2.86
1.7	2.89	2.92	2.96	2.99	3.03	3.06	3.10	3.13	3.17	3.20
1.8	3.24	3.28	3.31	3.35	3.39	3.42	3.46	3.50	3.53	3.57
1.9	3.61	3.65	3.69	3.72	3.76	3.80	3.84	3.88	3.92	3.96
2.0	4.00	4.04	4.08	4.12	4.16	4.20	4.24	4.28	4.33	4.37
2.1	4.41	4.45	4.49	4.54	4.58	4.62	4.67	4.71	4.75	4.80
2.2	4.84	4.88	4.93	4.97	5.02	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
2.3	5.29	5.34	5.38	5.43	5.48	5.52	5.57	5.62	5.66	5.71
2.4	5.76	5.81	5.86	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10	6.15	6.20
2.5	6.25	6.30	6.35	6.40	6.45	6.50	6.55	6.60	6.66	6.71
2.6	6.76	6.81	6.86	6.92	6.97	7.02	7.08	7.13	7.18	7.24
2.7	7.29	7.34	7.40	7.45	7.51	7.56	7.62	7.67	7.73	7.78
2.8	7.84	7.90	7.95	8.01	8.07	8.12	8.18	8.24	8.29	8.35
2.9	8.41	8.47	8.53	8.58	8.64	8.70	8.76	8.82	8.88	8.94
3.0	9.00	9.06	9.12	9.18	9.24	9.30	9.36	9.42	9.49	9.55
3.1	9.61	9.67	9.73	9.80	9.86	9.92	9.99	10.0	10.1	10.2
3.2	10.2	10.3	10.4	10.4	10.5	10.6	10.6	10.7	10.8	10.8
3.3	10.9	11.0	11.0	11.1	11.2	11.2	11.3	11.4	11.4	11.5
3.4	11.6	11.6	11.7	11.8	11.8	11.9	12.0	12.0	12.1	12.2
3.5	12.3	12.3	12.4	12.5	12.5	12.6	12.7	12.7	12.8	12.9
3.6	13.0	13.0	13.1	13.2	13.2	13.3	13.4	13.5	13.5	13.6
3.7	13.7	13.8	13.8	13.9	14.0	14.1	14.1	14.2	14.3	14.4
3.8	14.4	14.5	14.6	14.7	14.7	14.8	14.9	15.0	15.1	15.1
3.9	15.2	15.3	15.4	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.8	15.9
4.0	16.0	16.1	16.2	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.6	16.7
4.1	16.8	16.9	17.0	17.1	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6
4.2	17.6	17.7	17.8	17.9	18.0	18.1	18.1	18.2	18.3	18.4
4.3	18.5	18.6	18.7	18.7	18.8	18.9	19.0	19.1	19.2	19.3
4.4	19.4	19.4	19.5	19.6	19.7	19.8	19.9	20.0	20.1	20.2
4.5	20.3	20.3	20.4	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9	21.0	21.1
4.6	21.2	21.3	21.3	21.4	21.5	21.6	21.7	21.8	21.9	22.0
4.7	22.1	22.2	22.3	22.4	22.5	22.6	22.7	22.8	22.8	22.9
4.8	23.0	23.1	23.2	23.3	23.4	23.5	23.6	23.7	23.8	23.9
4.9	24.0	24.1	24.2	24.3	24.4	24.5	24.6	24.7	24.8	24.9
5.0	25.0	25.1	25.2	25.3	25.4	25.5	25.6	25.7	25.8	25.9
5.1	26.0	26.1	26.2	26.3	26.4	26.5	26.6	26.7	26.8	26.9
5.2	27.0	27.1	27.2	27.4	27.5	27.6	27.7	27.8	27.9	28.0
5.3	28.1	28.2	28.3	28.4	28.5	28.6	28.7	28.8	28.9	29.1
5.4	29.2	29.3	29.4	29.5	29.6	29.7	29.8	29.9	30.0	30.1
5.5	30.3	30.4	30.5	30.6	30.7	30.8	30.9	31.0	31.1	31.2
5.6	31.4	31.5	31.6	31.7	31.8	31.9	32.0	32.1	32.3	32.4
5.7	32.5	32.6	32.7	32.8	32.9	33.1	33.2	33.3	33.4	33.5
5.8	33.6	33.8	33.9	34.0	34.1	34.2	34.3	34.5	34.6	34.7
5.9	34.8	34.9	35.0	35.2	35.2	35.4	35.5	35.6	35.8	35.9
6.0	36.0	36.1	36.2	36.4	36.5	36.6	36.7	36.8	37.0	37.1
6.1	37.2	37.3	37.5	37.6	37.7	37.8	37.9	38.1	38.2	38.8

Т а б л и ц а 1X (продолжение)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.2	38.4	38.6	38.7	38.8	38.9	39.1	39.2	39.2	39.4	39.6
6.3	39.7	39.8	39.9	40.1	40.2	40.3	40.4	40.6	40.7	40.8
6.4	41.0	41.1	41.2	41.3	41.5	41.6	41.7	41.9	42.0	42.1
6.5	42.3	42.4	42.5	42.6	42.8	42.9	43.0	43.2	43.3	43.4
6.6	43.6	43.7	43.8	44.0	44.1	44.2	44.4	44.5	44.6	44.8
6.7	44.9	45.0	45.2	45.3	45.4	45.6	45.7	45.8	46.0	46.1
6.8	46.2	46.4	46.5	46.6	46.8	46.9	47.1	47.2	47.3	47.5
6.9	47.6	47.7	47.9	48.0	48.2	48.3	48.4	48.6	48.7	48.9
7.0	49.0	49.1	49.3	49.4	49.6	49.7	49.8	50.0	50.1	50.3
7.1	50.4	50.6	50.7	50.8	51.0	51.1	51.3	51.4	51.6	51.7
7.2	51.8	52.0	52.1	52.3	52.4	52.6	52.7	52.9	53.0	53.1
7.3	53.3	53.4	53.6	53.7	53.9	54.0	54.2	54.3	54.5	54.6
7.4	54.8	54.9	55.1	55.2	55.4	55.5	55.7	55.8	56.0	56.1
7.5	56.3	56.4	56.6	56.7	56.9	57.0	57.2	57.3	57.5	57.6
7.6	57.8	57.9	58.1	58.2	58.4	58.5	58.7	58.8	59.0	59.1
7.7	59.3	59.4	59.6	59.8	59.9	60.1	60.2	60.4	60.5	60.7
7.8	60.8	61.0	61.2	61.3	61.5	61.6	61.8	61.9	62.1	62.3
7.9	62.4	62.6	62.7	62.9	63.0	63.2	63.4	63.5	63.7	63.8
8.0	64.0	64.2	64.3	64.5	64.6	64.8	65.0	65.1	65.3	65.4
8.1	65.6	65.8	65.9	66.1	66.3	66.4	66.6	66.7	66.9	67.1
8.2	67.2	67.4	67.6	67.7	67.9	68.1	68.2	68.4	68.6	68.7
8.3	68.9	69.1	69.2	69.4	69.6	69.7	69.9	70.1	70.2	70.4
8.4	70.6	70.7	70.9	71.1	71.2	71.4	71.6	71.7	71.9	72.1
8.5	72.3	72.4	72.6	72.8	72.9	73.1	73.3	73.4	73.6	73.8
8.6	74.0	74.1	74.3	74.5	74.6	74.8	75.0	75.2	75.3	75.5
8.7	75.7	75.9	76.0	76.2	76.4	76.6	76.7	76.9	77.1	77.3
8.8	77.4	77.6	77.8	78.0	78.1	78.3	78.5	78.7	78.9	79.0
8.9	79.2	79.4	79.6	79.7	79.9	80.1	80.3	80.5	80.6	80.8
9.0	81.0	81.2	81.4	81.5	81.7	81.9	82.1	82.3	82.4	82.6
9.1	82.8	83.0	83.2	83.4	83.5	83.7	83.9	84.1	84.3	84.5
9.2	84.6	84.8	85.0	85.2	85.4	85.6	85.7	85.9	86.1	86.3
9.3	86.5	86.7	86.9	87.0	87.2	87.4	87.6	87.8	88.0	88.2
9.4	88.4	88.5	88.7	88.9	89.1	89.3	89.5	89.7	89.9	90.1
9.5	90.3	90.4	90.6	90.8	91.0	91.2	91.4	91.6	91.8	92.0
9.6	92.2	92.4	92.5	92.7	92.9	93.1	93.3	93.5	93.7	93.9
9.7	94.1	94.3	94.5	94.7	94.9	95.1	95.3	95.5	95.6	95.8
9.8	96.0	96.2	96.4	96.6	96.8	97.0	97.2	97.4	97.6	97.8
9.9	98.0	98.2	98.4	98.6	98.8	99.0	99.2	99.4	99.6	99.8

Т а б л и ц а X

Программа вычислений $\bar{x}$, ${}^{n}S$, ${}^{n}S_{\bar{x}}$ и ${}^{n}S_{\bar{x}}/\bar{x}$ на микрокалькуляторе Б3-34

Порядок работы

1) Нажимаются клавиши [В/О], [F], [ВП]. 2) Вводится программа. 3) Нажимаются клавиши [F], [/–/], [В/О]. 4) Вводятся данные x_i. Для этого набирается значение x_1 и нажимается клавиша [С/П]. После счета высвечивается 1. Набираются следующее x_i и [С/П]. После счета высвечивается i. 5) После того как высвечивается последний номер ($i = n$), нажимаются клавиши [ШГ→], [С/П]. После счета высвечивается ${}^{n}S$. Нажимаются [F ,]. Высвечивается $\bar{x}$. При повторных нажимах [F ,] получаем ${}^{n}S_{\bar{x}}/\bar{x}$ и $S_{\bar{x}}$. 6) Для введения новых данных нажимается [В/О]. Далее, – согласно 4) и 5).

Программа

1 – адрес команды, 2 – нажимаемые клавиши, 3 – код команды.

1	2	3	1	2	3	1	2	3
00	↑	ОЕ	16	ИП 6	66	31	F –	21
01	C_x	ОГ	17	С/П	50	32	П 5	45
02	П 4	44	18	БП	51	33	ИП 6	66
03	П 5	45	19	0 6	06	34	F –	21
04	П 6	46	20	F ,	25	35	÷	13
05	F ,	25	21	ИП 5	65	36	↑	ОЕ
06	↑	ОЕ	22	ИП 4	64	37	ИП 4	64
07	ИП 4	64	23	F ×	22	38	ИП 6	66
08	+	10	24	ИП 6	66	39	÷	13
09	П 4	44	25	÷	13	40	÷	13
10	xy	14	26	–	11	41	F ↑	0
11	F ×	22	27	ИП 6	66	42	ИП 5	65
12	ИП 5	65	28	1	01	43	С/П	50
13	+	10	29	–	11		Конец	
14	П 5	45	30	÷	13			
15	К ИП 6	Г6						

Проверка программы

Вводим данные: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$. Должны получить

${}^3S=1.52...$, $\bar{x}=2.33...$, ${}^3S_{\bar{x}}/\bar{x}=0.377...$, ${}^3S_{\bar{x}}=0.88...$

Т а б л и ц а Х1

Программа для решения системы нормальных уравнений на микрокалькуляторе Б3-34

Порядок работы

1) Нажимаются клавиши [В/О], [F], [ВП]. 2) Вводится программа. 3) Нажимаются клавиши [F], [/-/], [В/О]. 4) Вводятся данные. Для этого набираем значения x_1 и нажимаем [П 1], затем – y_1 и нажимаем [П 2] [С/П]. Аналогично вводим $x_2 y_2, \dots, x_n y_n$. (После введения $x_i y_i$ и счета высвечивается i). 5) Когда введены все x_i и y_i ($i = n$), нажимаются клавиши [$\overrightarrow{ШГ}$], [$\overrightarrow{ШГ}$], [С/П]. После счета высвечивается значение a. 6) Нажимается [$\overleftarrow{\text{ХУ}}$]. Высвечивается значение b. 7) Нажимается [С/П]. После счета высвечивается значение S_0^2. 8) Нажимаются [F ,]. Высвечивается значение S_a^2. 9) Нажимается [$\overleftarrow{\text{ХУ}}$]. Высвечивается значение S_b^2.

П р и м е ч а н и е. Если нужны только значения a и b без оценки погрешностей, можно закончить программу командой 63.

Программа

1 – адрес команды, 2 – нажимаемые клавиши, 3 – код команды (высвечивается на индикаторе).

1	2	3	1	2	3	1	2	3
00	[C_x]	0Г	05	[П 7]	47	10	[+]	10
01	[П 3]	43	06	[П 8]	48	11	[П 0]	40
02	[П 4]	44	07	[П 0]	40	12	[ИП 1]	61
03	[П 5]	45	08	[ИП 2]	62	13	[ИП 3]	63
04	[П 6]	46	09	[ИП 0]	60	14	[+]	10

1	2	3	1	2	3	1	2	3
15	П 3	43	42	П 7	47	69	ИП 1	61
16	ИП 1	61	43	ИП 5	65	70	F x	22
17	ИП 2	62	44	ИП 4	64	71	ИП 7	67
18	x	12	45	x	12	72	x	12
19	ИП 5	65	46	ИП 3	63	73	+	10
20	+	10	47	ИП 0	60	74	−	11
21	П 5	45	48	x	12	75	ИП 4	64
22	ИП 1	61	49	−	11	76	2	02
23	F x	22	50	ИП 7	67	77	−	11
24	ИП 6	66	51	÷	13	78	÷	13
25	+	10	52	П 1	41	79	ИП 4	64
26	П 6	46	53	ИП 6	66	80	÷	13
27	ИП 2	62	54	ИП 0	60	81	П 9	49
28	F x	22	55	x	12	82	ИП 4	64
29	ИП 8	68	56	ИП 3	63	83	x	12
30	+	10	57	ИП 5	65	84	ИП 7	67
31	П 8	48	58	x	12	85	÷	13
32	К ИП 4	Г4	59	−	11	86	П 5	45
33	ИП 4	64	60	ИП 7	67	87	ИП 6	66
34	С/П	50	61	÷	13	88	ИП 9	69
35	БП	51	62	ИП 1	61	89	x	12
36	0 8	08	63	С/П	50	90	ИП 7	67
37	ИП 6	66	64	ИП 4	64	91	÷	13
38	x	12	65	ИП 8	68	92	ИП 5	65
39	ИП 3	63	66	x	12	93	ИП 9	69
40	F x	22	67	ИП 0	60	94	С/П	50
41	−	11	68	F x	22		Конец	

Проверка программы

Вводим значения координат трех точек: (1, 2); (2, 3); (3, 5). Должны получить $a = 1.5$, $b = 0.33...$, $S_0^2 = 0.166...$, $S_a^2 = 0.0833...$, $S_b^2 = 0.389...$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агекян Т.А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. – 2-е изд. М.: Наука, 1972. 169 с.
2. Алексеев Р.И., Коровин Ю.И. Руководство по вычислению и обработке результатов количественного анализа. М.: Атомиздат, 1972. 71 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1958. 464 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965. 400 с.
5. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных/Пер. с англ., под ред. Э.Н. Лецкого. М.: Мир, 1980. 610 с.
6. Идве В., Драйард Д., Джеймс Ф. и др. Статистические методы в экспериментальной физике /Пер. с англ., под ред. А.А. Тяпкина. М.: Атомиздат, 1976. 334 с.
7. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.
8. Кондрашов А.П., Шестопалов Е.В. Основы физического эксперимента и математическая обработка результатов измерений. М.: Атомиздат, 1974. 200 с.
9. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. – 5-е изд. М.; Л.: Техтеориздат, 1950. 398 с.
10. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 352 с.
11. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.
12. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. М.: Физматгиз, 1960. 430 с.
13. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968. 288 с.
14. Романовский В.И. Основные задачи теории ошибок. М.: Гостехиздат, 1947. 115 с.
15. Романовский В.И. Математическая статистика. М.; Л.: ОНТИ, 1938. 527 с.
16. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. М.; Наука, 1971. 192 с.
17. Сквайрс Дж. Практическая физика/Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 247 с.
18. Тейлор Б., Паркер В., Лангренберг Д. Фундаментальные константы и квантовая электродинамика/Пер. с англ., под ред. Б.А. Мамырина. М.: Атомиздат, 1972. 327 с.
19. Уорсинг А., Геффнер Дж./Пер. с англ. М.: ИЛ, 1949. 362 с.
20. Худсон Д. Статистика для физиков/Пер. с англ. М.: Мир, 1970. 296 с.
21. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента/Пер. с англ. М.: Мир, 1972, 381 с.
22. Эльясберг П.Е. Измерительная информация: сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? М.: Наука, 1983. 208 с.
23. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений/Пер. с англ. М.: Мир, 1968. 462 с.
24. Метрология. Термины и обозначения. ГОСТ 16263-70. М.: Издательство стандартов, 1978. 53 с.
25. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров нормального распределения. ГОСТ 11.004-74. М.: Издательство стандартов, 1974, 29 с.
26. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров экспоненциального распределения и распределения Пуассона. ГОСТ 11.005-74. М.: Издательство стандартов, 1974. 29 с.
27. Таблицы физических величин/Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1006 с.
28. Статистические методы обработки эмпирических данных. Рекомендации. Разработаны ВНИИНМАШем. М.: Издательство стандартов, 1978. 232 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ