А. Н. ЗАЙДЕЛЬ

ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

•

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье,
стереотипное

ЛАНЬ®

Санкт-Петербург • Москва • Краснодар
2009

ББК 22
З 12

Зайдель А. Н.

З 12 Ошибки измерений физических величин: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 112 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0643-2

В учебном пособии излагается теория ошибок и ее приложения к измерению физических величин. Характер изложения рассчитан на первоначальное изучение основных методов количественной оценки погрешностей. Однако книга также может служить пособием для практической работы при производстве различного рода измерений благодаря наличию необходимых для этого таблиц, применение которых проиллюстрировано примерами. Основное внимание уделено не математическим методам обработки, а физическим закономерностям, обуславливающим появление различных погрешностей результата измерений.

Книга адресована студентам университетов и высших технических учебных заведений.

ББК 22

Обложка
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

В задачу каждого измерения входит оценка точности результата. Существует ряд приемов обработки полученных из эксперимента данных, позволяющих сделать такую оценку. Несмотря на простоту, эти приемы остаются недостаточно известными. Здесь сделана попытка элементарного изложения этого вопроса.

Разделы, предназначенные для более подготовленного читателя, набраны петитом и могут быть пропущены теми, кто впервые знакомится с теорией ошибок и не обладает необходимым минимумом знаний по математическому анализу.

Насколько известно автору, некоторые из высказанных здесь соображений вообще в элементарных руководствах не излагались, и потому с ними недостаточно хорошо знакомы даже специалисты-экспериментаторы.

Около десяти лет тому назад автором была написана книжка «Элементарные оценки ошибок измерений». Она предназначалась для первоначального общего знакомства с вопросом, однако ее широко использовали специалисты различного профиля в практической работе. Последнее побудило автора дополнить книгу рядом необходимых для этого разделов. Причем первоначальный план книги, так же как и характер изложения, остались прежними.

В конце книги дана основная, относящаяся к вопросу литература, опубликованная на русском языке. Некоторые из приведенных книг содержат подробную библиографию.

А. Н. Зайдель

I. ТИПЫ ОШИБОК

1. ЗАДАЧА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерением какой-либо физической величины называется операция, в результате которой мы узнаем, во сколько раз измеряемая величина больше (или меньше) соответствующей величины, принятой за единицу.

Так, например, за единицу длины принят метр, и в результате измерения некоторой длины l мы определяем, сколько метров содержится на протяжении этого отрезка. В основе таких измерений лежит эталон метра — расстояние между штрихами, нанесенными на стержне из особостойкого сплава.

В 1960 г. Международной XI Генеральной конференцией по мерам и весам было принято решение о замене метра новой основной единицей длины — длиной волны спектральной линии одного из изотопов криптона — ^{86}Kr. Она была принята равной для вакуума $6057.8021_1 \cdot 10^{-10}$ м. Индекс внизу указывает, что этот знак уже ненадежен, вследствие погрешностей измерений. Таким образом, по определению, 1 м$=1\,650\,763.73\ \lambda_{\text{вак}}$ ^{86}Kr. Решение о замене метра новым эталоном было связано с желанием иметь для основных физических измерений не образец, подвергнутый всякого рода изменениям и деформациям, а неизменную физическую константу. Впрочем, никогда нет уверенности в том, что и такой эталон не изменяется с течением времени.

Точно так же при измерении некоторой массы M мы устанавливаем, во сколько раз эта измеряемая масса превосходит массу эталонного образца в один килограмм. Разумеется, практически никогда не пользуются сравнением измеряемых величин с основными эталонами, которые хранятся в специальных государственных метрологических учреждениях. (В СССР таким учреждением является Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии (ВНИИМ)). Вместо этого пользуются измерительными приборами, которые тем или иным способом сверены с эталонами. Это относится как к приборам, с помощью которых измеряют длину — различного рода линейкам, микрометру, измерительному микроскопу, так и к приборам, измеряющим время (часы), массу (весы), а также электроизмерительным, оптическим и другим приборам.

Следует помнить, что никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно. Его результат всегда содержит некоторую ошибку, или, как говорят, результат измерения отягчен ошибкой. Измерения, которые были произведены при сравнении наших измерительных инструментов и приборов с эталонами, также отягчены большей или меньшей ошибкой. Очевидно, что, измеряя с помощью такого инструмента некоторую величину, мы, как правило, не можем сделать ошибки меньшей, чем та, которая определяется погрешностью измерительного устройства. Иначе говоря, если у нас есть линейка, про которую известно, что ее длина определена с погрешностью 0.1% (т. е. с точностью до 1 мм при метровой линейке), то применяя ее, нельзя пытаться измерить длину, скажем, с точностью до 0.01%. Это очевидное положение, к сожалению, иногда забывают.

Итак, в результате измерений мы всегда получаем нужную величину с некоторой погрешностью.

В задачу измерений входит не только нахождение самой величины, но также и оценка допущенной при измерении погрешности.

2. О ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Часто стараются произвести измерения с наибольшей достижимой точностью, т. е. сделать ошибку измерения по возможности малой. Однако следует иметь в виду, что чем точнее мы хотим измерить, тем труднее это сделать. Поэтому не следует требовать от измерений большей точности, чем это необходимо для решения поставленной задачи. Для изготовления книжной полки длину досок вполне достаточно измерять с точностью до 0.5—1 см, или около 1%; для изготовления некоторых деталей шарикоподшипников нужна точность в 0.001 мм, или около 0.01%, а при измерении длин волн спектральных линий иногда необходима точность в 10^{-11} см, или около 10^{-5}%. Не следует увлекаться получением излишней точности, когда она не нужна, но необходимо прилагать максимум усилий и не жалеть времени и труда для получения лишнего десятичного знака, когда это требуется. Надо иметь в виду, что очень часто именно повышение точности измерений позволяет вскрыть новые закономерности.

Действительно, всякий закон, устанавливающий количественную связь между физическими величинами, выводится в результате опыта, основой которого служат измерения. Он может считаться верным лишь с той степенью точности, с какой выполнены измерения, положенные в его основу.

Так, например, существует хорошо проверенный со времен Ломоносова и Лавуазье закон сохранения вещества, по которому сумма масс веществ, вступающих в химическую реакцию, равна массе продуктов реакции. Однако при химической реакции поглощается или выделяется энергия. Вследствие этого в соответствии с теорией относительности масса продуктов реакции несколько отличается от суммы реагирующих масс. При сгорании угля это различие составляет 1 г на 3000 т угля. Чтобы заметить его, нужно произвести взвешивание с точностью до $3 \cdot 10^{-8}$ %.

Следовательно, лишь в указанных пределах точности ($3 \cdot 10^{-8}$%) справедлив закон сохранения массы при реакции горения. Научившись взвешивать с такой точностью, мы сумели бы непосредственно обнаружить это изменение массы. Сейчас оно установлено только косвенным путем, так как нужной точности взвешивания мы не достигли.

Однако при ядерных реакциях, когда количество выделяющейся энергии гораздо больше, изменение массы может быть относительно легко обнаружено.

В качестве другого примера можно указать, что повышение точности измерений плотности воды привело в 1932 г. к открытию тяжелого изотопа водорода — дейтерия, ничтожное содержание которого в обычной воде немного увеличивает ее плотность.

Точно так же проведенные Рэлеем в 1894 г. точные измерения плотности азота, выделенного из воздуха, показали, что она несколько выше плотности азота, полученного разложением чистого аммиака. Хотя это различие составляет всего около 5 мг/л, оно заставило предположить примесь к атмосферному азоту более тяжелого газа и привело Рамсая и Рэлея в 1895 г. к открытию инертного газа — аргона (о существовании этой группы газов до этого и не предполагали).

Можно было бы привести еще ряд примеров новых открытий, полученных в результате увеличения точности измерений. Из сказанного видно, как важно иногда стремиться к максимальному увеличению точности. Для того чтобы этого достичь, нужно руководствоваться определенными правилами и приемами при производстве самих измерений и обработке полученных результатов. Хотя рекомендации в этом отношении не могут быть универсальными, но многие общие приемы хорошо разработаны и будут здесь изложены.

3. ТИПЫ ОШИБОК

Ошибки измерения принято подразделять на систематические и случайные. Систематические ошибки вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. В качестве примера такой ошибки приведем взвешивание на чашечных весах с помощью неточных гирь. Если взятая нами гиря имеет ошибку, скажем, 0.1 г, то вес тела (допустим, 1000 г) будет завышенным (или заниженным) на эту величину, и чтобы получить верное значение, необходимо учесть эту ошибку, прибавив к полученному весу (или вычтя из него) 0.1 г. Другой пример систематической ошибки дадим также из области взвешивания. Согласно закону Архимеда, измеренный в воздухе вес тела отличается от его истинного веса на вес воздуха в объеме этого тела. Это же относится и к весу гирь. Для того чтобы получить правильный вес, нужно после взвешивания ввести соответствующие поправки на «потерю веса» измеряемого тела и гирь. Если этого не делать, то результат взвешивания будет отягчен систематической ошибкой.

Хотя приведенные в этих двух примерах ошибки относятся к систематическим, они обладают существенным различием. Во втором примере поправку на потерю веса тела в воздухе можно вычислить. Для этого нужно знать плотность воздуха, плотность вещества, из которого сделаны гири, и плотность измеряемого тела. Эти величины обычно известны с достаточной степенью точности.

В противоположность этому в первом примере поправка на вес гири чаще всего неизвестна. О ней мы знаем лишь, что она не превышает некоторой величины (в нашем примере — 0.1 г, или 0.01%). Поэтому поправка на неточный вес гири не может быть учтена, результат взвешивания мы вынуждены записать в виде

$$P = (1000 \pm 0.1) \text{ г}.$$

Если мы ничего больше не знаем об ошибке измерения веса гири,* кроме того, что она не превосходит 0.1 г, то никакие самые лучшие приемы взвешивания не позволят получить о весе нашего тела более точных сведений. Однако, имея в достаточном количестве даже заведомо неточные гири, можно попытаться получить лучшие результаты. Допустим, что мы располагаем разными наборами гирь, причем о каждом из них известно, что он выполнен с погрешностью, не превышающей 0.01%. Это значит, что килограммовая гиря из набора имеет ошибку, не превышающую 0.1 г, стограммовая — 10 мг, пятидесятиграммовая — 5 мг, и т. д.

Очевидно, что хотя во всех наборах гири весом в 1 кг будут обладать ошибкой не более 0.1 г, разные экземпляры этих гирь характеризуются различными ошибками. Гиря одного набора будет, например, иметь ошибку плюс 0.03 г, другого — минус 0.07 г, третьего — плюс 0.04 г, и т. д.

Это происходит потому, что ошибки гирь появились в результате неточностей, имевших место при их изготовлении, которые разным образом сказались на каждой из них. Если мы произведем ряд взвешиваний, пользуясь для каждого гирями из другого набора, то вследствие различия в ошибках каждой из гирь мы получим несколько отличающихся друг от друга значений весов

* Далее ошибку измерения веса гири будем для простоты называть ошибкой гири.

взвешиваемого тела. Пусть этот ряд значений будет, например, 1000.23, 1000.20, 1000.23, 1000.20, 1000.19, 1000.20, 1000.15, 1000.17, 1000.12, 1000.22 г.

Возьмем среднее арифметическое $\bar{x}$ этих значений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты отдельных измерений веса. В нашем случае $\bar{x}$=1000.19 г. Можно быть практически уверенным, что это число отличается от значения истинного веса меньше чем на 0.1 г. Это следует из того, что среди ряда гирь, которыми мы пользовались при взвешивании, вероятно, были такие, у которых ошибка в весе положительная (т. е. они весят больше, чем на них обозначено), но были и имеющие отрицательные ошибки. Когда мы брали среднее арифметическое, то положительные и отрицательные ошибки хотя бы частично компенсировали друг друга. В результате ошибка среднего арифметического $\bar{x}$ должна быть, вообще говоря, меньше, чем ошибка каждого из отдельных полученных нами значений веса x_i. Хотя это не исключает того, что некоторые из значений x_i могут оказаться ближе к истинному весу, чем $\bar{x}$: именно те значения, которые были получены с наиболее точными гирями из нашего набора. Но все дело в том, что мы не знаем, какая из наших гирь более точная. Если бы это было известно, то при взвешивании просто нужно было бы воспользоваться лучшими гирями и отпала бы необходимость производить взвешивание несколько раз. Мы это делаем именно потому, что не знаем величины ошибки каждой из гирь.

Можно полагать, что чем больше наборов таких гирь у нас имеется, а следовательно, чем больше взвешиваний с использованием различных гирь мы сможем произвести, тем ближе к истинному значению будет полученный результат, вычисленный по формуле (1). Таким образом, результаты наших отдельных взвешиваний оказываются отягченными разными ошибками для разных взвешиваний. О величинах этих ошибок нам пока ничего неизвестно, кроме того, что любая из них не превышает 0.1 г. Среднее арифметическое значение из всех взвешиваний также содержит ошибку, которая, вероятно, меньше 0.1 г, но о ее величине пока мы тоже ничего не можем сказать.

Ошибки такого рода носят название случайных (потому что они отличаются друг от друга в отдельных измерениях и эти различия имеют случайную, неизвестную нам величину). Правила определения таких случайных ошибок изучаются в теории ошибок — математической дисциплине, основанной на законах теории вероятностей. В дальнейшем мы приведем некоторые положения теории ошибок, необходимые для простейшей математической обработки результатов измерений. Выводы этих положений, как правило, довольно сложны и громоздки и здесь поэтому не приводятся.

Наконец, третий тип ошибок, с которыми приходится иметь дело, — грубые ошибки, или промахи. Под промахом понимается ошибка, сделанная вследствие неверной записи показаний прибора, неправильно прочитанного отсчета и т. п. В нашем примере со взвешиванием вследствие промаха мог быть записан вес 100.20 г или, например, 2020.0 г вместо 1000.20 г. При измерении длины линейкой промах может появиться в результате того, что один из концов измеряемого предмета окажется совмещенным не с 0 линейки, а, скажем, с делением 10 см, причем отсчет будет сделан без учета этого обстоятельства, что приведет к завышению измеряемой длины на 10 см.

Таким образом, мы различаем три основных типа ошибок.

1. Систематические, величина которых одинакова во всех измерениях, проводящихся одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов.

2. Случайные. Величина случайных ошибок различна даже для измерений, выполненных одинаковым образом. Случайные ошибки обязаны своим происхождением ряду причин, действие которых неодинаково в каждом опыте и не может быть учтено. В приведенном выше примере источником случайных ошибок был неодинаковый вес гирь, но даже при взвешивании одними и теми же гирями мы, вообще говоря, будем получать разные значения веса. Источником ошибок может быть, например, колебание воздуха, воздействовавшее неодинаковым образом на чашки весов; пылинка, осевшая на одну из чашек; нагревание одной половины коромысла от приближения руки взвешивающего; разное трение в правом

и левом подвесах чашек и множество других причин, которые практически невозможно учесть.

3. Промахи. Источником последних является недостаток внимания экспериментатора. Для устранения промахов нужно соблюдать аккуратность и тщательность в работе и записях результатов. Иногда можно выявить промах, повторив измерение в несколько отличных условиях, например, перейдя на другой участок шкалы прибора, как это изображено на рис. 1. Следует иметь в виду, что многократное измерение подряд одной и той же вели-

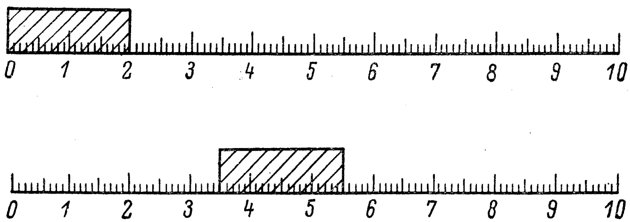

Рис. 1. К устранению промахов.

чины в одних и тех же условиях не всегда дает возможность установить промах. Действительно, если при измерении угла наблюдатель записал 45°32′20″ вместо 35°32′20″, то при повторных наблюдениях он иногда будет обращать внимание только на минуты и секунды, продолжая механически записывать 45° вместо 35°. Для того чтобы надежно установить промах, нужно либо сместить шкалу, либо повторить измерение спустя такое время, когда наблюдатель уже забыл полученные им цифры. Разумеется, повторение измерения другим наблюдателем, который не знает результатов, полученных первым, почти всегда поможет вскрыть промах, если он имел место. Однако не следует считать и этот метод абсолютно надежным. Если, например, промах произошел из-за нечетко обозначенного деления шкалы (иногда путаются цифры 5 и 6 или 3 и 8), то второй наблюдатель может повторить ошибку первого.

Далее будут указаны еще некоторые признаки, позволяющие иногда отличить промахи от закономерных результатов измерений. При всяком опыте промахи должны быть исключены, и, как уже говорилось, основной способ их устранения — особая тщательность и внимание во время работы.

Следует отметить, что чем удобнее условия работы и чем меньше утомлен наблюдатель, тем меньше промахов он делает. Поэтому желательно организовать измерения так, чтобы работать с комфортом, по возможности не переутомляясь и перемежая периоды снятия отсчетов с отдыхом, либо другим видом работы.

4. АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ОШИБКИ

Качество результатов измерений обычно удобно характеризовать не абсолютной величиной ошибки Δx, а ее отношением к измеряемой величине $\Delta x/x$, которое называют относительной ошибкой и обычно выражают в процентах:

$$\Delta x_{\text{отн}} = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%. \qquad (2)$$

Удобство такого представления происходит отчасти от того, что с отвлеченными числами обычно проще иметь дело, чем с именованными, но главным образом применение относительной ошибки связано с тем обстоятельством, что в большинстве приложений именно эта величина играет существенную роль. Действительно, если мы измеряем с точностью до 1 см какую-либо длину, то в случае, когда речь идет об определении длины карандаша, это будет очень скверная точность (около 10%), если же с точностью до 1 см определить расстояние от Москвы до Ленинграда, то это будет чрезмерно высокая точность ($\approx 1.6 \cdot 10^{-5}\%$), и измерять с такой точностью в этом случае очень трудно, да и нет необходимости.

Поэтому указание абсолютной ошибки измерений мало говорит о действительной точности, если не сопоставить величину ошибки и самой измеряемой величины. С этой точки зрения относительная величина ошибки дает более непосредственное представление о точности измерений.

Следует иметь в виду, что величина ошибок, получающихся в процессе измерения, вообще говоря, зависит от значения измеряемой величины. Однако в зависимости от природы той или иной ошибки эта связь может быть различной.

Поясним сказанное примерами. Допустим, что мы измеряем длину с помощью деревянной линейки, длиной l, которая удлинилась после ее изготовления и нанесения делений (например, вследствие набухания); пусть удлинение всей линейки Δl. Каждый сантиметр линейки оказался удлиненным на величину $\delta l = \Delta l / l$. Если измеряемый отрезок имеет длину A, то вследствие удлинения линейки его длина будет определена с ошибкой ΔA:

$$\Delta A = A \frac{\Delta l}{l}$$

или

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (3)$$

В этом случае относительная ошибка величины A остается постоянной.

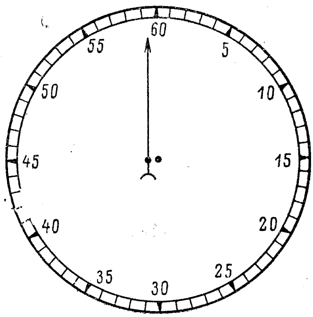

Рис. 2. Возникновение периодической ошибки.

Разберем теперь случай, когда общая длина измерительной линейки правильна, но каждое деление нанесено так, что ошибка в отсчете от начала шкалы до этого деления не превышает δl. Ошибка измерения длины с помощью такой линейки не будет зависеть от измеряемой длины A, следовательно, относительная ошибка измерения

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta l}{A} \qquad (4)$$

будет обратно пропорциональна A.

Возможен случай, когда величина ошибок периодически меняется с изменением измеряемой величины. Например, это будет иметь место, если измерять время с помощью секундомера, ось стрелки которого не совпадает с центром циферблата (рис. 2). Из рисунка видно, что отсчеты 15 и 45 сек. будут правильны, отсчет 30 сек. завышен, а отсчет 60 сек. занижен. Иное положение оси даст другие ошибки отсчета.

Возможны и более сложные зависимости величины ошибки от значения измеряемой величины. Чаще всего эта зависимость лежит в промежутке между случаями, описываемыми формулами (3) и (4). Иначе говоря, относительная ошибка измерений не остается постоянной, но меняется медленнее, чем это следует из формулы (4).

Если диапазон изменения измеряемой величины велик, то всегда следует изучить характер изменения ошибок при изменении измеряемой величины. Обычно целесообразно организовать измерение так, чтобы оставалась по возможности постоянной их относительная ошибка.

5. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ

При производстве измерений одной из основных забот должна быть забота об учете и исключении систематических ошибок, которые в ряде случаев могут быть так велики, что совершенно исказят результаты измерений. Систематические ошибки можно разделить на четыре группы.

1. Ошибки, природа которых нам известна и величина может быть достаточно точно определена. Такие ошибки могут быть устранены введением соответствующих поправок.

При измерениях длины может оказаться необходимым вводить поправки, связанные, например, с температурным удлинением измеряемого тела и измерительной линейки; при определении веса — поправку, вызванную «потерей веса» в воздухе, величина которой зависит от температуры, влажности воздуха и атмосферного давления, поправку, обусловленную неравноплечностью весов, и т. д. Источники таких ошибок нужно тщательно анализировать, величины поправок определять и учитывать в окончательном результате. Однако здесь, как и при всяких измерениях, требуется разумный подход. Поясним это на примере измерения длины. Допустим, что мы определяем диаметр латунного цилиндра с помощью стальной измерительной линейки, изготовленной при температуре 0°, а измерения проводятся при 25° С. Допустим, что измеряемый диаметр имеет размер около 10 см и мы хотим узнать его длину при температуре 0°. Коэффициент линейного расширения латуни $19 \cdot 10^{-6}$ 1/град., стали — $11 \cdot 10^{-6}$ 1/град. Легко сосчитать, что при нагревании на 25° удлинение используемого нами участка измерительной линейки составит 0.027 мм, а увеличение диаметра цилиндра — 0.047 мм. Разность этих величин, т. е. 0.02 мм, и является поправкой наших измерений.

Обычная стальная линейка имеет миллиметровые деления. Если считать, что на глаз можно относительно уверенно отсчитать 0.2 деления, то 0.2 мм и будет той точностью, которая обычно достижима с помощью такого измерительного инструмента. Примерно с такой же точностью нанесены и деления на линейке. Мы видим, что 0.02 мм, которые дает температурная поправка, настолько меньше погрешности, вносимой самой линейкой и способом отсчета, что введение этой поправки лишено смысла. Другое дело, если те же самые измерения мы производим с помощью точного измерительного микрометра, дающего возможность произвести измерения диаметра с точностью до 0.001 мм. Введение той же самой поправки 0.02 мм при этом не только целесообразно, но и совершенно необходимо.

Величина поправок, которые еще есть смысл вводить, разумеется, устанавливается в зависимости от величин других ошибок, сопровождающих измерение. Существует правило, устанавливающее, что если поправка не превышает 0.005 от средней квадратичной ошибки результата измерений (см. дальше), то ею следует пренебречь.

Это правило чрезмерно жесткое; обычно можно пренебречь поправками, имеющими большее значение, что мы разберем далее.

2. Ошибки известного происхождения, но неизвестной величины. К их числу относится уже упомянутая нами погрешность измерительных приборов, которая определяется иногда классом точности прибора. Если на приборе указан класс точности 0.5, то это означает, что показания прибора правильны с точностью до 0.5% от всей действующей шкалы прибора. Иначе говоря, вольтметр, шкала которого изображена на рис. 3, *а*, дает ошибку в измерении напряжения не более 0.75 в, а миллиамперметр (рис. 3, *б*) — в измерении силы тока не более 0.75 ма. Очевидно, что нет никакого смысла пытаться с помощью такого миллиамперметра измерять ток с точностью до 0.01 ма (если, конечно, для этого не применять каких-либо компенсационных схем, в которых наш миллиамперметр уже будет работать только как нульгальванометр, а не как измерительный прибор).

Электроизмерительные приборы характеризуются обычно классом точности в пределах от 0.05 до 4. Менее точные приборы обозначения класса не имеют.

Максимальные погрешности, даваемые измерительными линейками, микрометрами и некоторыми другими прибо-

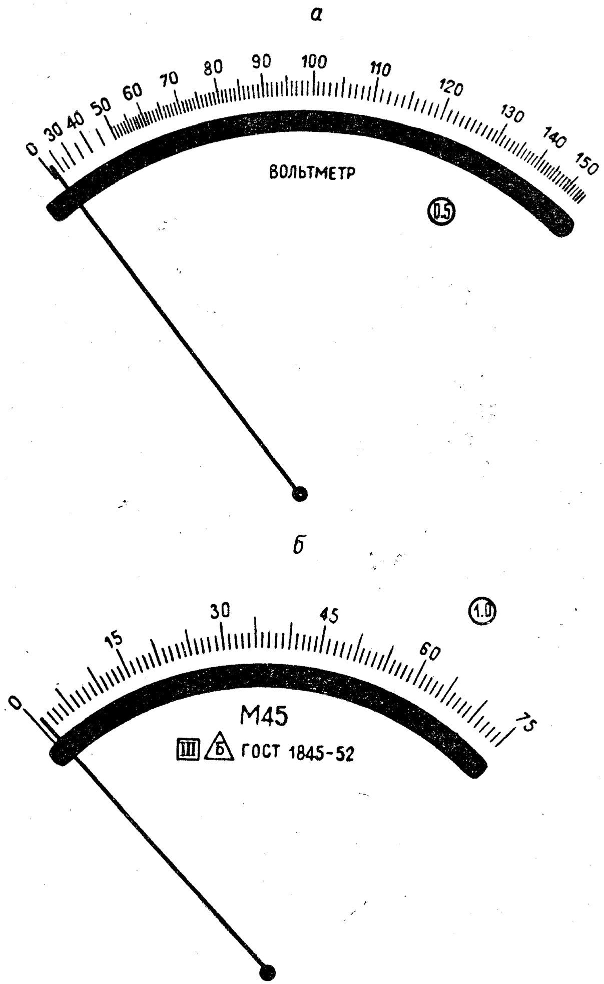

Рис. 3. Шкалы вольтметра и миллиамперметра.

рами, иногда наносятся на самом приборе (рис. 4), иногда указываются в прилагаемом к нему паспорте. Обычно дается наибольшая абсолютная погрешность, которую мы вынуждены считать постоянной по всей шкале прибора, если последний не сопровождается специальной таблицей поправок для каждого деления шкалы. Последняя прилагается только к наиболее точным измерительным приборам.

На хороших измерительных приборах цена деления шкалы согласована с классом данного прибора. В таком случае нецелесообразно пытаться на глаз оценивать малые доли деления, если они не отмечены на шкале. Однако это правило при изготовлении приборов не всегда выполняется, и иногда есть смысл оценивать по шкале четверть или даже одну десятую деления, но не следует особенно полагаться на такую оценку, тем более что при оценке на глаз 0.1 деления разные наблюдатели делают различную систематическую ошибку, доходящую до 0.2 деления.

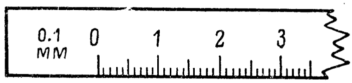

Рис. 4. Шкала измерительной линейки.

Систематические ошибки описанного выше типа, вообще говоря, не могут быть исключены, но их наибольшее значение, как правило, известно, и если мы, измеряя ток с помощью миллиамперметра (рис. 3, *б*), получили $i=65.3$ ма, то можем написать $i=(65.3\pm0.75)$ ма. Здесь ±0.75 означает, что сила тока лежит где-то в пределах от 64.5 до 66.1 ма. Больше мы ничего о величине тока сказать не можем.

3. Третья группа систематических ошибок самая опасная. Это ошибки, о существовании которых мы не подозреваем, хотя величина их может быть очень значительна. Они чаще всего проявляются при сложных измерениях, и иногда бывает, что какая-нибудь величина, которая считается определенной с точностью, например, до 2—3%, в действительности оказывается в 2 раза больше измеренного значения.

Так, например, если мы захотим измерить плотность какого-то металла и для этого определим объем и вес образца, то совершим грубую ошибку, если измеряемый образец содержал внутри пустоты, например пузыри воздуха, попавшие при отливке.

Здесь приведен простейший пример, и в данном случае источник погрешности и ее величину определить не так уж трудно, хотя при очень точных измерениях плотности описанное обстоятельство может играть немаловажную роль. При более сложных измерениях нужно всегда очень тщательно продумывать их методику, чтобы избежать больших ошибок такого рода, и чем сложнее опыт, тем больше оснований думать, что какой-то источник систематических погрешностей остался неучтенным и вносит недопустимо большой вклад в ошибку измерений. Один из наиболее надежных способов убедиться в отсутствии таких погрешностей — провести измерения интересующей нас величины совсем другим методом и в других условиях. Совпадение полученных результатов служит известной, хотя, к сожалению, не абсолютной, гарантией их правильности. Бывает, что и при измерении разными методами результаты отягчены одной и той же ускользнувшей от наблюдателя систематической ошибкой, и в этом случае оба совпавшие друг с другом результата окажутся одинаково неверными.

Вся история развития точных наук показывает, что от такого рода ошибок не свободны даже самые лучшие, наиболее тщательно проведенные измерения. Они оказались присущими и основным физическим константам, значения которых в последние годы были пересмотрены. Очень часто какая-либо величина измеряется в каждой из двух или трех лабораторий одним и тем же методом с погрешностью, скажем, 0.01%. В то же время значения, полученные в этих лабораториях, расходятся между собой иногда на 0.1% или даже более. Поэтому возникло понятие межлабораторной ошибки, величина которой характеризует такие расхождения. Разумеется, тщательный анализ условий опыта иногда позволяет установить причину расхождения и прийти к согласованному значению. Однако часто это бывает совсем не просто.

В качестве иллюстраций на рис. 5 приводится диаграмма, показывающая, как менялись случайные погрешности измерений и численные значения некоторых основных физических констант за период с 1952 по 1970 г. У каждой точки, дающей относительное отклонение от ныне принятого значения константы (точки на оси абсцисс), по вертикали отложены относительные величины случайных погрешностей (коэффициент вариации $\sigma/\bar{x}$, (см. стр. 37). Одно деление шкалы $4 \cdot 10^{-5}$. Мы видим, что расхождение между значениями, полученными в разное время, иногда существенно превышает величину случайных ошибок. Это означает, что, по крайней мере, некоторые результаты измерений содержат, наряду со случайной и систематическую ошибку, ответственную за наблюдаемые расхождения.

4. Наконец, следует указать еще на одну группу систематических ошибок, которые, хотя и не связаны непосредственно с измерительными операциями, могут существенным образом искажать результат измерений.

Речь идет об ошибках, обусловленных свойствами измеряемого объекта.

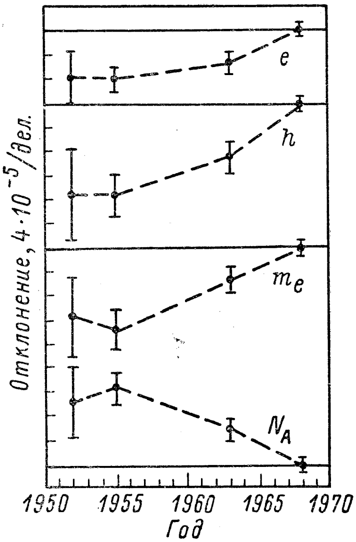

Рис. 5. Погрешности измерения основных констант.

e — заряд электрона, h — постоянная Планка, m_e — масса электрона, N_A — число Авогадро.

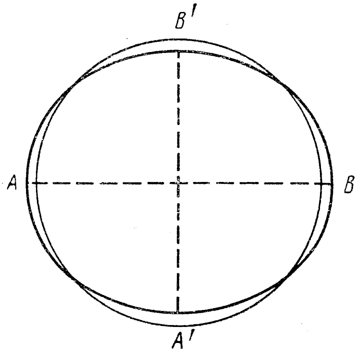

Рис. 6. Цилиндр овального сечения.

Поясним это на примере измерения поверхности цилиндра, который мы считаем круговым, но в действительности имеющим овальное сечение. Если измерять диаметр AB (рис. 6), то мы получим бо́льшие значения, чем при измерении диаметра $A'B'$. Проведя измерения ряда диаметров и взяв среднее из полученных значений, можно определить число, лучше характеризующее размер цилиндра. Если же измерять только один диаметр и считать цилиндр круглым, то вычисленная по этим измерениям площадь будет содержать систематическую ошибку, определяемую степенью овальности цилиндра и выбранным для измерения диаметром.

Однако, если при измерении диаметра цилиндра в нескольких направлениях получается одинаковый результат, мы еще не можем быть уверенными в том, что цилиндр круглый. Действительно, проведем три окружности, радиус которых равен стороне равностороннего треугольника, а центры находятся в его вершинах. Фигура, ограниченная дугами этих окружностей и вершинами треугольников (рис. 7, *а*), обладает тем очевидным свой-

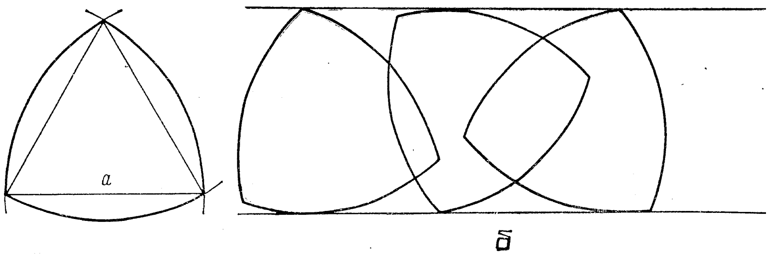

Рис. 7. Некруглый цилиндр постоянного диаметра.

ством, что при измерении ее размеров штангенциркулем в любом направлении мы будем получать одно и то же значение, равное длине стороны треугольника *а*. Измеренная по этим значениям площадь «круга» будет $\pi a^2/4$. В действительности легко показать, что площадь этой фигуры будет $(a^2/2)(\pi-\sqrt{3})$. Отношение измеренной и действительной площадей составит 1.16, т. е. будет допущена ошибка около 15%. Этот пример представляется очень любопытным и наглядно показывающим, насколько осторожным нужно быть в выборе метода измерений для исключения систематической ошибки. Цилиндр, имеющий в сечении фигуру рис. 7, *а*, является удивительным примером «некруглого катка», с помощью которого можно с успехом перекатывать грузы, как по круглому (рис. 7, *б*). Существуют и другие фигуры, обладающие указанным свойством.

Если для измерения электропроводности материала взят отрезок проволоки из этого материала, имеющий какой-либо дефект, например утолщение, трещину, неоднородность, то сопротивление такого куска будет, вообще говоря, неверно характеризовать электропроводность материала.

Происходящая из-за этого ошибка является систематической.

Однако, как мы видели на примере взвешивания с помощью неверной гири, систематическая ошибка в ряде случаев может быть переведена в случайную. В примере с гирями для этого было необходимо провести несколько взвешиваний, пользуясь для каждого из них гирями из другого набора.

Точно так же систематическая ошибка, связанная со свойствами измеряемого объекта, часто может быть переведена в случайную. В наших примерах для этого нужно: в первом — измерить ряд диаметров цилиндра и взять среднее; во втором — измерить сопротивление нескольких отрезков проволоки и взять среднее. Впрочем, как было только что показано, этот прием может и не дать требуемых результатов, так как не всякий способ усреднения автоматически приводит к исключению систематической ошибки. Перевод систематических ошибок в случайные часто оказывается полезным, так как позволяет улучшить точность получаемых результатов.

Допустим, что все систематические ошибки у нас учтены, т. е. поправки, которые следовало определить, вычислены, класс точности измерительного прибора известен и есть уверенность, что отсутствуют какие-либо существенные и неизвестные нам источники систематических ошибок.

В этом случае результаты измерений все же несвободны от случайных ошибок, правила вычисления которых даны ниже. Если случайная ошибка окажется меньше систематической, то очевидно, что нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной ошибки — все равно результаты измерений не станут от этого заметно точнее, и, желая получить большую точность, нужно искать пути к уменьшению систематической ошибки. Наоборот, если случайная ошибка больше систематической, то именно случайную ошибку нужно уменьшать в первую очередь.

Мы уже говорили, что если произвести ряд измерений и взять среднее арифметическое из этого ряда, то случайная ошибка этого среднего будет меньше, чем ошибка единичного измерения. Поэтому для уменьшения случайной ошибки следует произвести не одно, а ряд измерений, причем, как мы увидим дальше, тем больший, чем меньшую величину случайной ошибки мы хотим получить. Однако очевидно, что нет смысла производить измерений больше, чем это необходимо, чтобы систематическая ошибка существенно превышала случайную.

Отсюда вытекают правила, которые будут далее сформулированы более точно.

1. Если систематическая ошибка является определяющей, т. е. ее величина существенно больше величины случайной ошибки, присущей данному методу, то достаточ о выполнить измерение один раз.

2. Если случайная ошибка является определяющей, то измерение следует производить несколько раз. Число измерений целесообразно выбирать таким, чтобы случайная ошибка среднего арифметического была меньше систематической ошибки, с тем чтобы последняя опять определяла окончательную ошибку результата.

Однако следует иметь в виду, что мы можем ограничиться одним измерением лишь в тех случаях, когда из каких-то других источников нам известно, что величина случайной ошибки меньше, чем систематической.

Это обычно имеет место тогда, когда измерения проводятся известным методом, ошибки которого в какой-то степени изучены. Так, например, если измерить длину карандаша с помощью измерительной линейки с погрешностью делений в 1 мм, то можно быть уверенным, что случайная ошибка много меньше 1 мм, и следует ограничиться одним измерением. Точно так же мы знаем, что случайная погрешность взвешивания на обычных торговых весах меньше 5 г, в то время как цена деления шкалы таких весов 5 г и присущая им систематическая ошибка близка к этой величине. Следовательно, следует взвешивать на таких весах не более одного раза, что обычно и делается. Наоборот, при взвешивании на некоторых моделях точных лабораторных весов случайная ошибка взвешивания больше систематической, и для повышения точности часто проводят несколько взвешиваний.

Таким образом, необходимое число измерений определяется в конечном итоге соотношением величины систематической и случайной ошибок. Количественное уточнение второго правила будет приведено дальше, после того как мы познакомимся с элементами теории вероятностей, знание которых нужно для оценок величин случайных ошибок.

6. СВЯЗЬ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ И СЛУЧАЙНОЙ ОШИБОК

Мы уже указывали, что можно перевести систематическую ошибку в случайную, организовав измерения таким образом, что постоянный фактор, влияющий на результат измерений, в каждом из них действует разным образом, т. е. результат его действия носит случайный характер.

Этот прием превращения систематической ошибки в случайную называется рандомизацией. Он позволяет практически исключить многие неизвестные систематические ошибки. Дадим два примера такого исключения систематических ошибок.

Если мы для определения урожайности поля соберем урожай с какого-либо его участка, а затем помножим результат на отношение площадей поля и контрольного участка, то полученный таким образом общий урожай может быть искажен систематической ошибкой, связанной с тем, что плодородность почвы на поле меняется от одного его края к другому. Чтобы этого избежать, можно разбить поле на ряд малых квадратов одинаковой площади, перенумеровать их и отобрать для измерения ряд участков случайным образом, например, записав номера участков на бумажках и вытягивая их, как лотерейные билеты. Таким образом мы переведем систематическую ошибку, обусловленную различием в урожайности разных частей поля, в случайную.

Другой пример: измеряется удлинение стержня под действием растяжения. Если мы знаем изменение длины и упругих свойств стержня в зависимости от температуры, то, делая измерения при разных температурах, можем вносить соответствующую поправку. Однако вместо этого можно, не зная зависимости свойств стержня от температуры, произвести ряд измерений растяжения при разных случайно выбранных температурах.

Ошибка, происходящая вследствие изменения температуры, будет случайной, а конечный результат — соответствовать удлинению стержня при средней температуре.

Разумеется, такого рода исключение систематических ошибок практически далеко не всегда возможно. Поэтому разделение всех ошибок на систематические и случайные оказывается целесообразным.

7. ОШИБКИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

В тех случаях, когда измеряются какие-то свойства готовой продукции — диаметр подшипника, состав металла, и т. п. — задача измерений обычно состоит не в получении точного значения измеряемой величины, а в необходимости уложиться в определенные допуски, установленные для данной продукции. Те изделия, которые не укладываются в эти допуски, будем называть браком. Но следствием ошибок измерений могут быть два обстоятельства: 1) хорошее изделие бракуется и 2) брак пропускается. Поясним это примером: диаметр вала равен 60 мм с допуском 0.013 мм. При измерении диаметра мы получили число 60.012 мм. Ошибка нашего измерительного устройства 0.002 мм. Следовательно, мы признаем вал годным, хотя на самом деле он мог иметь диаметр 60.014 мм, т. е. должен считаться браком. В этом случае мы совершили ошибку второго рода. Наоборот, если при той же точности измерений оказалось, что диаметр вала 60.014 мм, то мы его забракуем, хотя в действительности его размеры могут находиться внутри допуска (скажем, составлять 60.012 мм). В этом случае сделана ошибка первого рода. Очевидно, что когда размеры изделия находятся вблизи границ допуска, всегда есть вероятность сделать ошибку первого или второго рода. Казалось бы, что наиболее страшна ошибка второго рода — пропуск брака. Это действительно так, когда мы имеем дело с очень дорогими и ответственными изделиями. В этом случае иногда лучше забраковать 100 хороших изделий, чем пропустить одно бракованное. Однако для менее ответственных изделий чересчур жесткий контроль, необходимый для полного отсутствия ошибок второго рода, нецелесообразен. Действительно, чем вернее хотим мы застраховать себя от ошибок второго рода, тем больше (при неизменной точности измерений) делаем ошибок первого рода. Разумеется, невыгодно и нецелесообразно переводить в брак сотню хороших шариковых ручек, чтобы не пропустить в партии одной плохой. Такой излишне строгий контроль будет неоправданно увеличивать стоимость изделий. Выбор экономически целесообразной системы измерений и браковки является во всех случаях чрезвычайно важным.

II. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК

1. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Случайными называются такие события, о появлении которых не может быть сделано точного предсказания. Приведем примеры некоторых неслучайных и случайных событий. Момент начала и конца солнечного затмения может быть точно вычислен, и, таким образом, это событие неслучайное. Также не случайно время прибытия поезда на станцию, потому что поезд движется по расписанию. Однако момент прихода такси на стоянку уже относится к случайным событиям, так как он заранее не предопределен.

Более внимательное рассмотрение показывает, что разница между указанными двумя классами событий не всегда может быть совершенно четко указана.

Действительно, время прихода поезда на станцию указывается в часах и минутах. И не случайно «Красная стрела» прибывает в Москву в 8 час. 25 мин. Но если более точно проследить за остановкой поезда, то мы сразу же убедимся, что каждый день это происходит в разные моменты: сегодня, например, в 8 час. 24 мин. 33 сек., вчера — в 8 час. 25 мин. 2 сек. и т. д. Поэтому время прихода «Красной стрелы», измеренное с точностью до секунды, — событие случайное. То же время, измеренное с точностью до минуты, — событие закономерное. Точно так же и момент солнечного затмения. Он вычислен на основании законов движения тел Солнечной системы, известных с некоторой точностью. Она и задает точность определения времени начала и конца затмения.

В этом смысле затмение не относится к случайным событиям. Однако в пределах интервала времени, меньшего, чем тот, который может быть получен на основании наших знаний о движении Земли и Луны, момент наступления затмения должен рассматриваться как случайный.

Для простоты мы сейчас рассмотрим наиболее характерный пример случайного события. Допустим, у нас имеется урна, о которой известно, что в ней содержатся одинаковые по весу и размеру шары двух цветов — черные и белые. Так как шары ничем, кроме цвета, не отличаются, то, если не смотреть в урну, мы не знаем, какой шар вытащим. Возьмем из урны шар, отметим его цвет и опустим назад в урну. После перемешивания повторим эту операцию снова и снова некоторое, достаточно большое, число раз.

Если в урне n белых и n черных шаров, то в среднем мы должны вытащить их примерно одинаковое число. Иначе это можно выразить так: всего в урне $2n$ шаров, из них n — белых. Отношение числа белых шаров к общему числу шаров в урне носит название вероятности появления белого шара. В данном случае эта вероятность будет $n/2n=1/2$. Очевидно, такова же будет вероятность появления черного шара. Если число шаров неодинаково — допустим, белых в два раза больше, чем черных, — то легко сообразить, что вероятность вытянуть белый шар будет 2/3, а черный — 1/3. Очевидно, что если, кроме белых и черных, урна других шаров не содержит, то вероятность вытянуть белый или черный шар равна 1 ($1/2+1/2$ в первом случае, $2/3+1/3$ — во втором).

Будем называть появление интересующего нас события (например, появление белого шара) благоприятным событием,* а появление другого события — неблагоприятным. Если возможны только два типа событий, то вероятностью благоприятного события называется отношение возможного числа всех благоприятных событий к полному числу событий, которое включает в себя как число благоприятных (n), так и число неблагоприятных (m) событий.

---

* Термин «благоприятное событие» неудачен. Например, если мы вычисляем смертности от какой-либо причины, то случай смерти придется относить к числу «благоприятных» событий. Однако такая терминология прочно укрепилась в теории вероятностей, и мы будем ее придерживаться, памятуя эту оговорку.

Записывается это так:

$$P(n)=\frac{n}{m+n}. \tag{5}$$

Точно также вероятность неблагоприятного события будет

$$P(m)=\frac{m}{m+n}. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) легко получить

$$P(m)+P(n)=1. \tag{7}$$

Мы можем вычислить вероятности наших событий лишь в том случае, когда знаем, сколько событий какого типа возможны. В приведенном примере с урной нам нужно знать число содержащихся в ней белых (n) и число черных (m) шаров. Часто мы этого не знаем и решаем обратную задачу — по частоте появлений белых и черных шаров в описанном выше опыте нужно определить вероятность появления того или другого шара. Пусть мы проделали N испытаний, т. е. N раз доставали шар из урны, каждый раз записывали его цвет и возвращали обратно в урну. Пусть при этом мы K раз вытащили белый шар, тогда K/N называется частотой появления белого шара. Основной закон теории вероятностей — закон больших чисел — утверждает, что при достаточно большом числе испытаний N частота появления события как угодно мало отличается от вероятности этого события, иначе говоря, если

$$P(m)=\frac{m}{m+n}$$

(причем n и m нам неизвестны), то всегда можно выбрать достаточно большое N, чтобы выполнялось соотношение

$$\left|P(m)-\frac{K}{N}\right|<\varepsilon, \tag{8}$$

где ε — как угодно малое положительное число, отличное от нуля.

Это соотношение дает возможность устанавливать опытным путем с достаточно хорошим приближением вероятность неизвестного нам случайного события.

Таким образом, в отличие от неслучайных событий, о которых нам может быть точно известно, появятся они или не появятся, мы никогда не можем сказать этого о событии случайном. Частота появления такого события определяется его вероятностью. Однако вероятностная оценка может быть достаточно надежной, и мы можем опираться на нее даже при предсказании самых важных для нас событий часто не хуже, чем тогда, когда имеем дело с достоверными сведениями о событиях.

Допустим, например, что имеется один билет лотереи, где на каждые 10 билетов приходится один выигрыш. Вероятность выигрыша для каждого билета составляет 0.1, а вероятность того, что он не выиграет, соответственно 0.9.

Естественно, что владелец этого билета не будет особенно удивлен ни выигрышем, ни проигрышем. Допустим, однако, что у него есть 50 таких билетов. Какова вероятность того, что он получит хотя бы один выигрыш? В теории вероятностей доказывается, что вероятность того, что совместно произойдут несколько событий, случающихся независимо друг от друга, равна произведению вероятностей каждого из них. В данном случае вероятность того, что не выиграет первый из имеющихся 50 билетов, равна 0.9, вероятность того, что не выиграет второй из них, — также 0.9.* Тогда вероятность того, что не выиграет ни первый, ни второй, будет $0.9 \cdot 0.9 = 0.9^2 = 0.81$, точно так же вероятность того, что не выиграют ни первый, ни второй, ни третий билеты, — 0.9^3, а вероятность, что ни один из 50 билетов не выиграет, — 0.9^{50}, т. е. приблизительно 0.005.

С другой стороны, вероятность того, что выиграют все 50 билетов, будет еще гораздо меньше — $(0.1)^{50}$. Это означает, что и тот и другой случай практически никогда не осуществляются. Скорее всего из 50 выиграют 5 билетов, но выигрыш 4 или 6 билетов будет также довольно вероятен. Менее вероятен будет выигрыш 3 или 7—8 билетов. Теория вероятностей дает возможность подсчи-

---

* В действительности для второго билета вероятность не выиграть несколько больше, так как всего играющих билетов осталось меньше на один билет — первый, который нами уже учтен как невыигравший. Но при большом числе лотерейных билетов — это деталь, на которую можно сейчас не обращать внимания.

тать вероятность каждого из этих событий. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Естественно, что сумма всех приведенных в этой таблице вероятностей равна 1, так как никаких иных событий, кроме тех, которые в ней представлены, произойти не может.

Таблица 1

Вероятности лотерейных выигрышей (вероятность выигрыша n билетов из имеющихся 50, если вероятность выигрыша для одного билета составляет 0.1)

n	$P(n)$	n	$P(n)$
0	0.0051	7	0.1077
1	0.0290	8	0.0643
2	0.0779	9	0.0334
3	0.1387	10	0.0191
4	0.1809		
5	0.1850	$P(0)+P(1)+\ldots+P(10)$	0.9913
6	0.1541	$P(11)+P(12)+\ldots+P(50)$	0.0087

Такая система событий называется полной.

Резонно поставить вопрос, какой должна быть вероятность события, чтобы его наступление можно было считать достоверным. Разумеется, ответ на этот вопрос носит в значительной мере субъективный характер и зависит главным образом от степени важности ожидаемого события. Поясним это двумя примерами: известно, что около 5% назначенных концертов отменяется. Несмотря на это, мы все же, взяв билет, обычно идем на концерт, будучи в общем уверены, что он состоится, хотя вероятность этого всего 0.95. Однако, если бы в 5% полетов терпели аварию пассажирские самолеты, вряд ли мы стали бы пользоваться воздушным транспортом.

Для того чтобы в условиях мирного времени без особой необходимости рисковать жизнью, по-видимому, нужно, чтобы вероятность смертельного исхода была бы не более 0.0001. Впрочем, различные люди, конечно, по-разному относятся к риску, но и самые осторожные легко пойдут на него при вероятности неблагоприятного исхода 10^{-6} или 10^{-7}.

Приблизительно такова обычно вероятность оказаться жертвой транспортной катастрофы на улице большого города, но никто из-за этого не боится выходить из дома.

Таким образом можно назвать практически достоверными события, вероятность которых отличается от единицы на 10^{-6}—10^{-7}, а практически невозможными те, вероятность которых меньше 10^{-6}—10^{-7}.

Однако при достаточно большом числе испытаний эти последние события все же реализуются, и, хотя для каждого человека вероятность попасть сегодня под автомобиль меньше 10^{-6}, в многомиллионном городе эти события, к сожалению, ежедневно происходят.

Тем не менее можно указать события, вероятность которых столь мала, что они вообще никогда в мире не происходили и, видимо, не произойдут. Можно оценить эту вероятность исходя из возраста вселенной T и минимального промежутка времени τ, который можно выделить как отдельный элементарный акт. Если принять, в соответствии с современными космологическими представлениями $T \approx 10^{10}$ лет и $\tau \approx 10^{-30}$ сек., то всего за время T прошло около 10^{50} таких элементарных промежутков времени. Учитывая размеры вселенной, можно оценить число элементарных объемов ν в ней 10^{150}. Таким образом, общее число элементарных событий $\tau\nu \approx 10^{200}$. В тоже время вероятность «чуда Бореля» — вероятность того, что обезьяна без смысла и руководства, ударяя пальцами по клавиатуре пишущей машинки, напишет заданное осмысленное произведение, скажем «Незнакомку» Блока, — как показывает простой расчет, составляет примерно 10^{-2600}. Это число настолько меньше числа 10^{-200}, которое определяет вероятность появления одного элементарного акта, что события такого рода, как «чудо Бореля» или замерзание чайника на плите (событие, с точки зрения термодинамики, возможное, хотя и маловероятное), нужно признать не просто маловероятными, а невозможными. Э. Борель* на основании несколько отличных соображений приходит к гораздо большей вероятности невозможного события, оценивая ее в 10^{-16}.

2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ ОШИБОК

При измерениях физических величин в тех случаях, когда основную роль играют случайные ошибки, все оценки точности измерения можно сделать только с некоторой вероятностью. Действительно, случайные ошибки образуются в результате совокупности ряда мелких неучитываемых причин, каждая из которых вносит незначительный вклад в общую ошибку. Следует считать, что часть из этих ошибок положительна, часть — отрицательна. Общая ошибка, которая образуется в результате

---

* Борель Э. Вероятность и достоверность. М., «Наука», 1969.

сложения таких элементарных ошибок, может иметь различные значения, но каждому из них будет соответствовать, вообще говоря, разная вероятность.

Поясним сказанное следующим рассуждением. Допустим, нам нужно взвесить сотню образцов, для взвешивания которых мы располагаем весами, позволяющими определить вес с погрешностью 0.05 г (например, вследствие того, что самая мелкая гиря, употребляемая при взвешивании, — 0.1 г). Предельная нагрузка, допускаемая весами, не позволяет класть на чашку более одного взвешиваемого образца. Спрашивается, какую ошибку мы можем допустить при определении суммарного веса всех 100 предметов?

Мы знаем, что при каждом взвешивании ошибка может быть как положительной, так и отрицательной, не превышая в обоих случаях 0.05 г. Естественно считать, что мы будем ошибаться одинаково часто как в сторону завышения, так и в сторону занижения веса, т. е. мы можем положить вероятность получить ошибку $+0.05$, равной вероятности получения ошибки -0.05. Тогда $P\ (+0.05)=$ $=P\ (-0.05)=1/2$.

При этом мы считаем, что все отдельные ошибки отличаются только знаком и имеют по абсолютной величине максимальное возможное значение 0.05. Такое допущение только завысит общую ошибку результата, что для нас сейчас несущественно. Пусть при измерении первого образца мы сделали ошибку, равную $+0.05$, вероятность чего, как мы сказали, равна 1/2. Вероятность того, что и при измерении второго образца мы сделаем снова положительную ошибку, будет в соответствии с известным нам правилом умножения вероятностей равна $(1/2)^2$, т. е. 1/4. Наконец, вероятность при всех 100 измерениях сделать ошибку одного и того же знака будет $(0.5)^{99}$, или примерно $2 \cdot 10^{-31}$. Такая вероятность (в соответствии со сказанным выше) с любой практической точки зрения равна нулю. Таким образом, мы пришли к заключению, что невозможно сделать ошибку в общем весе в 5 г ($0.05 \cdot 100$), ибо вероятность такой ошибки незначимо мало превышает нуль. Иначе говоря, действительная ошибка при таком способе взвешивания будет всегда меньше 5 г. Мы выбрали наиболее неблагоприятный случай — ошибка каждого взвешивания имеет наибольшее значение, и все они оказались одного знака.

Теория вероятностей дает возможность оценить, какова будет вероятность появления ошибок другой величины. Для этого введем сперва понятие средней квадратичной и средней арифметической ошибок.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Для того чтобы выявить случайную ошибку измерений, необходимо повторить измерение несколько раз. Если каждое измерение дает заметно отличные от других измерений результаты, мы имеем дело с ситуацией, когда случайная ошибка играет существенную роль.

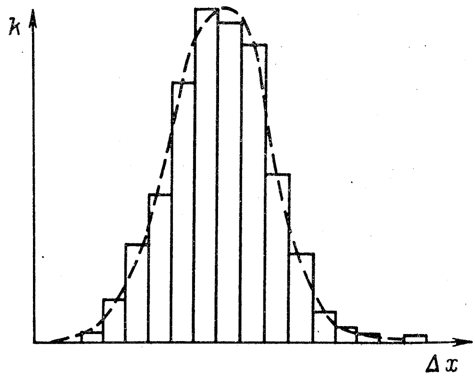

Рис. 8. Гистограмма.

За наиболее вероятное значение измеряемой величины обычно принимают ее среднее арифметическое значение, вычисленное из всего ряда измеренных значений.

Пока мы не будем задаваться вопросом о том, сколько измерений нужно проделать. Допустим, что сделано n измерений. Разумеется, все они проделаны одним и тем же методом и с одинаковой степенью тщательности. Такие измерения называются **равноточными**.

Пусть минимальный интервал значений измеряемой величины, через который ведутся отсчеты, будет δx. Среднее ее значение — $\bar{x}$. Вся совокупность измерений может быть представлена в виде $k_1\bar{x}$; $k_2(\bar{x}+\delta x)$; . . .; $k_n(\bar{x}+h\delta x)$; $k'_1(\bar{x}-\delta x)$; . . ., $k'_m(\bar{x}-m\delta x)$. Здесь k_i —

целые числа, показывающие, сколько раз во всем ряду измерений наблюдались соответствующие значения измеряемой величины.

Отложив по оси абсцисс величину ошибок ($\Delta x = n\delta x$), а по оси ординат значения k, получим ступенчатую кривую, называемую гистограммой. Пример гистограммы дан на рис. 8. Если увеличивать число наблюдений n, а интервал δx стремить к нулю, то гистограмма переходит в пределе в непрерывную кривую, изображенную пунктиром на том же рисунке, которая носит название кривой распределения ошибок. Обычно принимается, что ошибки подчиняются нормальному закону распределения. Описывающая его знаменитая формула Гаусса может быть выведена из следующих предположений.

1. Ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений.

2. При большом числе наблюдений ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто.

3. Частота появления ошибок уменьшается с увеличением величины ошибки. Иначе говоря, большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.

Эти довольно естественные на первый взгляд предположения приводят к закону распределения ошибок, описываемому следующей функцией:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta\ )^2}{2\sigma^2}}, \tag{9}$$

где σ — дисперсия измерений (см. ниже), e — основание натуральных логарифмов.

Отметим, что при выводе формулы Гаусса делается ряд допущений, которые не удается достаточно строго обосновать, кроме того, и условия 1—3, в предположении которых она выводилась, никогда не выполняются совершенно строго. Это, например, следует хотя бы из того, что ошибки никогда не могут быть как угодно малыми. Скажем, при измерении длины ограничением всегда являются атомные размеры ($\approx 10^{-8}$ см), при изменении электрического заряда — величина заряда электрона e ($4.8 \cdot 10^{-10}$ CGSE) и т. д.

Форма кривых Гаусса представлена на рис. 9 для трех значений σ.

С помощью этих кривых можно установить, насколько часто должны появляться ошибки той или иной величины. Формула Гаусса подвергалась неоднократным экспериментальным проверкам, которые показали, что по крайней мере в той области, где ошибки измерений не слишком велики, она часто находится в отличном согласии с экспериментом.

Однако в ряде случаев экспериментальные данные лучше описываются другими функциями. Тем не менее обычно пользуются

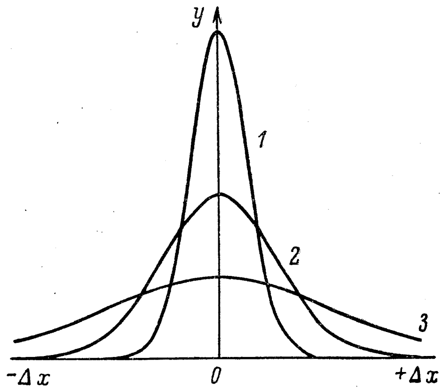

Рис. 9. Кривые Гаусса.

нормальным законом распределения, предполагая его справедливость само собою разумеющейся. В действительности дело обстоит сложнее. По поводу этого закона было достаточно точно, хотя и не без сарказма, сказано, что «экспериментаторы верят в него, полагаясь на доказательства математиков, а математики — полагаясь на экспериментальное обоснование». О нестрогости математического вывода мы уже говорили. Что же касается экспериментальных обоснований, то они ничего не дают, кроме гистограммы, и всегда можно подобрать достаточно хорошую интерполирующую функцию, от которой разумеется, точки гистограммы (даже если она очень детально построена) будут всегда отступать в силу случайного характера погрешностей измерений. Однако в пользу применения нормального распределения имеются очень серьезные основания. Его особое значение связано со следующим обстоятельством: в тех частых случаях, когда суммарная ошибка появляется в результате совместного действия ряда причин, каждая из которых вносит малую долю в общую ошибку, по какому бы закону ни были распределены ошибки, вызываемые каждой из причин, результат их суммарного действия приведет к гауссовому распределению ошибок. Эта закономерность является следствием так называемой центральной предельной теоремы Ляпунова.

Таблица 2

Распределение погрешностей при измерении суммы углов треугольника (Общее число наблюдений 470, средняя квадратичная ошибка $\sigma = 0.40''$)

Пределы погрешностей ($''$)	Число наблюдений с данной погрешностью: наблюденное в опыте	Число наблюдений с данной погрешностью: вычисленное по формуле Гаусса
0.0—0.1	94	92.3
0.1—0.2	88	86.5
0.2—0.3	78	76.7
0.3—0.4	58	64.0
0.4—0.5	51	49.8
0.5—0.6	36	36.7
0.6—0.7	26	25.4
0.7—0.8	14	16.9
0.8—0.9	9	9
0.9—1	7	6.1
Более 1	9	1.1

Основным условием ее применимости является отсутствие отдельных источников доминирующих ошибок. Для иллюстрации приведем табл. 2, в которой представлены результаты обработки погрешностей суммы углов треугольника, измерявшихся при производстве геодезической съемки. Как видим, совпадение наблюденного и рассчитанного чисел ошибок очень хорошее, если отбросить последние числа таблицы, где по формуле Гаусса должно быть 1.1, а в опыте наблюдается 9. Полученное расхождение в 8 раз для случая $\Delta x \geqslant 1''$ не должно нас удивлять. Ведь формула Гаусса всегда хорошо проверяется и вычисляются ее параметры только для малых Δx. Распространение ее в сторону больших значений ошибок, т. е. в область, где иногда наблюдалось появление всего одного-двух значений измеряемой величины, является грубой экстраполяцией, от которой ждать хороших результатов не следует.

Наряду с нормальным законом распределения ошибок иногда встречаются и другие распределения. Так, возможен случай, когда равновероятно появление ошибки любой величины внутри некоторого интервала, а за его пределами вероятность появления ошибок равна нулю.

Примером такого распределения служит, скажем, измерение веса с помощью точных весов и разновеса, не имеющего мелких гирь. Если у нас самая мелкая гирька 0.1 г и мы убедились, что вес тела больше 1.2 г, но меньше

1.3 г, то все значения внутри этого интервала нужно считать равновероятными.

Для такого распределения наиболее вероятным значением измеряемой величины служит также среднее арифметическое.

В практике измерений иногда оказывается,. что по нормальному закону распределены не результаты измерений, а их логарифмы. В этом случае за наиболее вероятное значение логарифма измеряемой величины нужно принять среднее арифметическое из логарифмов всех наблюденных значений:

$$\overline{\lg x} = \frac{\sum_{1}^{n} \lg x_i}{n}. \tag{10}$$

Отсюда следует, что наиболее вероятное значение измеряемой величины x будет уже не среднее арифметическое, а среднее геометрическое из наблюденных значений:

$$\bar{\bar{x}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{11}$$

Дискретные случайные величины часто распределены по так называемому закону Пуассона

$$y = \frac{\sigma^{2x} e^{-\sigma^2}}{x!}. \tag{12}$$

Здесь $e=2.71$ — основание натуральных логарифмов. Имеют место и другие типы распределений.

В ряде случаев экспериментатору приходится выяснять возможность применения нормального распределения и иногда заменять его другим, более подходящим.

Существуют критерии, позволяющие установить, насколько сильно наблюдаемое распределение отличается от нормального. Однако применение этих критериев не всегда позволяет надежно решить вопрос о целесообразности применения нормального или отличного от него распределения. Более детально этот вопрос рассмотрен, например, в книге В. В. Налимова (см. Литературу).

Все дальнейшие расчеты сделаны для случая нормального распределения.

Для оценки величины случайной ошибки измерения существует несколько способов. Наиболее распространена оценка с помощью стандартной или средней квадратичной ошибки (ее часто называют сокращенно — стандартом измерений). Иногда применяется средняя арифметическая ошибка.

Средней квадратичной ошибкой называется величина

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}. \tag{13}$$

Если число наблюдений очень велико, то подверженная случайным колебаниям величина s_n стремится к некоторому постоянному значению σ, которое можно назвать статистическим пределом s_n:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{14}$$

Собственно говоря, именно этот предел и называется средней квадратичной ошибкой. Квадрат этой величины называется дисперсией измерений. Это та же величина, которая входит в формулу Гаусса (9). В действительности, однако, мы всегда вычисляем не величину σ, а ее приближенное значение s_n, которое тем ближе к σ, чем больше n. Относительная величина средней квадратичной ошибки w, выраженная в процентах, носит название коэффициента вариации:

$$w = \frac{\sigma}{\bar{x}}\,100\%. \tag{15}$$

Средняя арифметическая ошибка r_n вычисляется по формуле

$$r_n = \frac{\sum\limits_1^n |\bar{x} - x_i|}{n}. \tag{16}$$

Точно так же, как и для средней квадратичной ошибки, истинное значение средней арифметической ошибки ρ определяется соотношением

$$\rho = \lim_{n\to\infty} r_n. \tag{17}$$

Обозначим истинное значение измеряемой величины через x, погрешность измерения этой величины — Δx. Среднее арифметическое значение, полученное в результате измерений, будет $\bar{x}$. Пусть α означает вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину, не большую чем Δx. Это принято записывать в виде

$$P(-\Delta x < x - \bar{x} < \Delta x) = \alpha, \tag{18}$$

или

$$P(\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x) = \alpha. \tag{19}$$

Вероятность α носит название **доверительной вероятности**, или **коэффициента надежности**. Интервал значений от $x - \Delta x$ до $x + \Delta x$ называется доверительным интервалом.

Выражение (18) означает, что с вероятностью, равной α, результат измерений не выходит за пределы доверительного интервала от $x + \Delta x$ до $x - \Delta x$. Разумеется, чем большей надежности мы требуем, тем большим получается соответствующий доверительный интервал и, наоборот, чем больший доверительный интервал мы задаем, тем вероятнее, что результаты измерений не выйдут за его пределы.

Мы пришли к очень важному заключению: *для характеристики величины случайной ошибки необходимо задать два числа, а именно величину самой ошибки* (или доверительного интервала) *и величину доверительной вероятности*. Указание одной только величины ошибки без указания соответствующей ей доверительной вероятности в значительной мере лишено смысла, так как при этом мы не знаем, сколь надежны наши данные. Знание доверительной вероятности позволяет оценить степень надежности полученного результата.

Необходимая степень его надежности опять-таки задается характером производимых измерений.

Естественно, что в этом отношении к деталям мотора самолета предъявляются более жесткие требования, чем к лодочному мотору, а к последнему значительно большие, чем, скажем, к ручной тачке.

Более высокая степень надежности, требуемая при ответственных измерениях, означает, что при их производстве нужно выбирать большой (в долях σ) доверительный интервал. Иначе говоря, для получения той же величины ошибки (Δx) следует производить измерения с большей точностью, т. е. нужно тем или иным способом уменьшить в соответствующее число раз величину σ. Одна из возможностей такого увеличения состоит в многократном повторении измерений (см. стр. 44).

При обычных измерениях можно ограничиться доверительной вероятностью 0.9 или 0.95.

Для измерений, по условиям которых требуется чрезвычайно высокая степень надежности, иногда задают доверительную вероятность 0.999. Бо́льшая величина доверительной вероятности в подавляющем большинстве измерительных задач не требуется.

Удобство применения стандартной ошибки в качестве основного численного выражения погрешности наблюдений заключается в том, что этой величине соответствует вполне определенная доверительная вероятность, равная 0.68. (Мы, разумеется, здесь и дальше полагаем, что ошибки распределены по нормальному закону). Для любой величины доверительного интервала по формуле Гаусса может быть рассчитана соответствующая доверительная вероятность. Эти вычисления были проделаны, и их результаты сведены в табл. I, помещенную в Приложении.

Приведем примеры пользования табл. I.

Пусть для некоторого ряда измерений мы получили $\bar{x}=1.27$, $\sigma=0.032$. Какова вероятность того, что результат отдельного измерения не выйдет за пределы, определяемые неравенством $1.26<x_i<1.28$.

Доверительные границы нами установлены в ± 0.01, что составляет (в долях σ) $0.01:0.032=0.31$.

Из табл. I находим, что доверительная вероятность для $\varepsilon=0.3$ равна 0.24.

Иначе говоря, приблизительно 1/4 измерений уложится в интервал ошибок ± 0.01. Определим теперь, какова доверительная вероятность для границ $1.20<x_i<1.34$. Значение этого интервала, выраженное в долях σ, будет $\varepsilon=0.07:0.032\approx 2.2$. По табл. I находим значение α для $\varepsilon=2.2$, оно равно 0.97. Иначе говоря, результаты приблизительно 97% всех измерений будут укладываться в этот интервал.

Поставим теперь другой вопрос: какой доверительный интервал нужно выбрать для тех же измерений, чтобы примерно 98% результатов попадали в него? Из табл. I находим, что значению $\alpha=0.98$ соответствует значение $\varepsilon=2.4$, следовательно $\sigma\varepsilon=0.032\cdot 2.4\approx 0.077$, и указанной доверительной вероятности соответствует интервал

$1.193 < x < 1.347$, или, округляя, $1.19 < x < 1.35$; иногда этот результат записывают в виде $x = 1.27 \pm 0.08$ с доверительной вероятностью 0.98. Итак, *для нахождения случайной ошибки нужно определить два числа — доверительный интервал (величину ошибки) и доверительную вероятность. Средней квадратичной ошибке σ соответствует доверительная вероятность 0.68, удвоенной средней квадратичной ошибке (2σ) — доверительная вероятность 0.95, утроенной (3σ) — 0.997.*

Для других значений ошибок доверительная вероятность определяется по табл. I.

Приведенные здесь три значения α полезно помнить, так как обычно, когда в книгах или в статьях дается значение средней квадратичной ошибки, уже не указывается соответствующая ей доверительная вероятность. Если же мы помним три приведенных выше числа, то этого достаточно, чтобы ориентироваться в оценке надежности измерений, когда нам известна их средняя квадратичная погрешность, или коэффициент вариации.

Наряду со среднеквадратичной ошибкой иногда пользуются средней арифметической ошибкой, вычисляемой по формуле (16). При достаточно большом числе наблюдений (практически для $n > 30$) между s и r существуют простые соотношения

$$s = 1.25r \quad \text{или} \quad r = 0.8s, \tag{20}$$

строго говоря, эти соотношения верны только для σ и ρ, но не для s и r. Для малых n отношение s/r существенно отличается от предельного значения, причем, как правило,

$$\frac{s}{r} > \frac{\sigma}{\rho}.$$

В большинстве случаев целесообразнее пользоваться величиной s, а не r. В первую очередь потому, что, пользуясь стандартной ошибкой s, легче определять доверительные вероятности, так как для этого имеются специальные таблицы. Известным преимуществом средней арифметической ошибки r является то, что ее вычислять несколько проще, чем s. Далее будут указаны удобные способы вычислений, практически устраняющие эту трудность. Разумеется, при большом значении n вообще безразлично, какой из ошибок пользоваться, так как между ними существует соотношение (20). При малом n по причине, указанной выше, следует всегда пользоваться стандартной ошибкой или коэффициентом вариации.

Если пользоваться и при малом n средней арифметической ошибкой, то правильнее ее вычислять не по обычной формуле (15), а по соотношению

$$r = \frac{\sum_{1}^{n} |\bar{x} - x_i|}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (21)$$

При большом n различие, даваемое этими двумя формулами, очень невелико.

Таблица 3

$\alpha\sigma$	$P_{норм}$	$P_{Чеб}$
1	0.32	—
1.5	0.13	0.8
2	0.05	0.25
3	0.003	0.11

Мы приводили расчет доверительного интервала для случая, когда результаты измерений распределены по нормальному закону.

Однако, как было сказано, далеко не всегда закон распределения ошибок известен и иногда он заведомо отличается от нормального. Вычисление дисперсии и в этом случае позволяет оценить доверительную вероятность, воспользовавшись так называемым неравенством Чебышева, которое получено для произвольного закона распределения и имеет, таким образом, весьма общий характер.

Положим по-прежнему, что σ — среднеквадратичное уклонение, а α — произвольное число, большее 1. Неравенство Чебышева можно записать в виде

$$P(|\bar{x} - x| > \alpha\sigma) < \frac{1}{\alpha^2}. \qquad (22)$$

Интересно сопоставить доверительные интервалы и соответствующие им вероятности, вычисленные для случая нормального распределения и оцененные по неравенству Чебышева для произвольного распределения. Это сопоставление сделано в табл. 3.

Из этой таблицы мы видим, что вероятности больших уклонений для случая произвольного распределения существенно больше, чем для нормального: это естественное следствие более общего характера, законов распределения, для которых выведено неравенство Чебышева.

Поэтому всегда по возможности следует убедиться в близости исследуемого распределения к нормальному и пользоваться соответствующими оценками доверительных интервалов.

4. ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЕСА

Пусть наша измеряемая величина Z является суммой (или разностью) двух величин X и Y, результаты измерений которых независимы. Тогда, если s_X^2, s_Y^2, s_Z^2 — дисперсии величин X, Y и Z, то можно доказать, что

$$s_Z^2 = s_X^2 + s_Y^2 \tag{23}$$

или

$$s_Z = \left| \sqrt{s_X^2 + s_Y^2} \right|.$$

Если Z является суммой не двух, а большего числа слагаемых, то закон сложения ошибок будет таким же, т. е. средняя квадратичная ошибка суммы (или разности) двух (или нескольких) независимых величин равна корню квадратному из суммы дисперсий отдельных слагаемых.

Это чрезвычайно важное обстоятельство, и необходимо твердо помнить, что *для нахождения суммарной ошибки нужно складывать не сами ошибки, а их квадраты.*

Разумеется, если мы вычислили не средние квадратичные ошибки s или σ, а средние арифметические ошибки r или ρ, то закон сложения для этих ошибок будет тот же, например

$$\rho_Z = \sqrt{\rho_X^2 + \rho_Y^2}. \tag{24}$$

Из закона сложения ошибок следуют два чрезвычайно важных вывода. Первый из них относится к роли каждой из ошибок в общей ошибке результата. Он состоит в том, что значение отдельных ошибок очень быстро падает по мере их уменьшения. Поясним сказанное примером: пусть X и Y — два слагаемых, определенных со средними квадратичными ошибками s_X и s_Y, причем известно, что

s_Y в два раза меньше, чем s_X. Тогда ошибка суммы $Z = X + Y$ будет

$$s_Z^2 = s_X^2 + s_Y^2 = s_X^2 + \left(\frac{s_X}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} s_X^2.$$

Откуда

$$s_Z \approx 1.1 s_X.$$

Иначе говоря, если одна из ошибок в два раза меньше другой, то общая ошибка возросла за счет этой меньшей ошибки всего на 10%, что обычно играет очень малую роль. Это означает, что если мы хотим повысить точность измерений величины Z, то нам нужно в первую очередь стремиться уменьшить ту ошибку измерения, которая больше, т. е. ошибку измерения величины X. Если мы оставим точность измерения X неизменной, то, как бы мы ни повышали точность измерения слагаемого Y, нам не удастся уменьшить ошибку конечного результата измерений величины Z более чем на 10%.

Этот вывод всегда нужно иметь в виду, и при повышении точности измерений *в первую очередь уменьшать ошибку, имеющую наибольшую величину*. Конечно, если слагаемых много, а не два, как в нашем примере, то и малые ошибки могут внести заметный вклад в суммарную ошибку.

Если нужная нам величина Z является разностью двух независимо измеряемых величин X и Y, то из выражения (23) следует, что ее относительная погрешность

$$\frac{\delta Z}{Z} = \frac{\sqrt{\delta^2 X + \delta^2 Y}}{X - Y} \tag{25}$$

будет тем больше, чем меньше $|X - Y|$, и относительная погрешность возрастает до бесконечности, если $X \to Y$.

Это означает, что невозможно добиться хорошей точности измерений какой-либо величины, строя измерения так, что она находится как небольшая разность результатов независимых измерений двух величин, существенно превышающих искомую. В противоположность этому относительная погрешность суммы

$$\delta Z = \frac{\sqrt{\delta^2 X + \delta^2 Y}}{X + Y} \tag{26}$$

очевидно не зависит от соотношения величин X и Y.

Следующий вывод, вытекающий из закона сложения ошибок, относится к определению погрешности среднего арифметического. Мы уже говорили, что среднее арифметическое из ряда измерений отягчено меньшей ошибкой, чем результат каждого отдельного измерения. Сейчас этот вывод может быть записан в количественной форме. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — результаты отдельных измерений, причем каждое из них характеризуется одной и той же дисперсией s^2. Образуем величину y, равную

$$y = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n}. \tag{27}$$

Дисперсии этой величины s_y^2 в соответствии с формулой (23) определяются как

$$s_y^2 = \frac{s^2}{n^2} + \frac{s^2}{n^2} + \ldots + \frac{s^2}{n^2} = \frac{s^2}{n}. \tag{28}$$

Но y, по определению, это среднее арифметическое из всех величин x_i, и мы можем написать

$$s_y = s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{29}$$

Средняя квадратичная погрешность среднего арифметического равна средней квадратичной погрешности отдельного результата, деленной на корень квадратный из числа измерений.

Это фундаментальный закон возрастания точности при росте числа наблюдений. Из него следует, что, желая повысить точность измерений в 2 раза, мы должны сделать вместо одного — четыре измерения; чтобы повысить точность в 3 раза, нужно увеличить число измерений в 9 раз; и, наконец, увеличение числа наблюдений в 100 раз приведет к десятикратному увеличению точности измерений.

Разумеется, это рассуждение относится лишь к измерениям, при которых точность результата полностью определяется случайной ошибкой. В этих условиях, выбрав n достаточно большим, мы можем существенно уменьшить ошибку результата. Такой метод повышения точности сейчас широко используется, особенно при измерении слабых электрических сигналов.

Рассмотрим снова пример со взвешиванием.

Допустим, что 0.05 г — средняя квадратичная ошибка одного взвешивания, и мы по-прежнему взвешиваем 100 образцов, кладя на весы каждый раз только один.

В соответствии с изложенным погрешность определения суммарного веса этих образцов будет

$$s_p = \sqrt{\sum_1^{100} s_i^2},$$

так как погрешности всех измерений одинаковы, а всего измерений 100, то ошибка суммарного веса

$$s_p = \sqrt{100}s = 10s = 10 \cdot 0.05 = 0.5 \text{ г}.$$

Иначе говоря, мы можем утверждать, что из 1000 измерений суммарного веса, проделанных описанным выше способом, около 320 дадут отклонения от измеренного значения больше чем на 0.5 г, только около 50 — более чем на 1 г и около трех, результаты которых будут на 1.5 г и более отличаться от истинной величины.

При практической работе очень важно строго разграничивать применение средней квадратичной ошибки отдельного измерения s и средней квадратичной ошибки среднего арифметического $s_{\bar{x}}$.

Последняя применяется всегда, когда нам нужно оценить погрешность того числа, которое мы получили в результате в с е х произведенных измерений.

В тех случаях, когда мы хотим характеризовать точность применяемого способа измерений, следует характеризовать его ошибкой s.

Поясним сказанное следующим примером.

Было сделано десять измерений электрического сопротивления (R) провода, в результате которых получены значения, приведенные в табл. 4.

Таким образом, средняя квадратичная погрешность $s_{\bar{R}}$ измерения сопротивления данного провода равна 0.6 ома, или же, переходя к относительным погрешностям, коэффициент вариации для данного результата составляет около 0.2%. Но квадратичная погрешность s применяемого метода измерений составляет 1.8 ома, а коэффициент вариации для этого метода — около 0.7%.

Таблица 4

Измерения сопротивления

Номер измерения	R	Номер измерения	R
1	275	6	274
2	273	7	276
3	275	8	275
4	275	9	272
5	278	10	274

$$\bar{R}=\frac{\Sigma R_i}{10}=274.7, \quad s=1.8$$

$$s_{\bar{R}}=\frac{1.8}{\sqrt{10}}\approx 0.6.$$

Если мы описываем метод, которым производилось измерение, то мы должны указать именно эту последнюю ошибку. Зная ее, можно выбрать нужное число измерений, чтобы, пользуясь формулой (29), получить желаемую случайную погрешность окончательного результата измерений.

Допустим, что одним и тем же методом с одинаковой степенью точности выполнено k серий измерений. В первой серии число измерений n_1, во второй — n_2 и т. д., в k-ой — n_k, если каждое измерение характеризуется погрешностью σ, то погрешность среднего арифметического для серии с номером i будет в соответствии с формулой (29)

$$\sigma_i=\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}. \qquad (30)$$

Очевидно, что если в одной серии сделано в четыре раза больше измерений, чем в другой, то погрешность результата одной серии будет соответственно в два раза меньше.

Если мы захотим для повышения точности результата усреднять его по средним значениям для обеих серий, то мы должны учитывать то обстоятельство, что один результат получен с вдвое меньшей погрешностью.

С этой целью вводится понятие статистического веса или просто веса наблюдений. В приведенном примере за вес p_i следует принять число, пропорциональное количеству наблюдений, выполненных в серии, т. е. положить

$$p_i = Kn_i. \tag{30'}$$

Подставив отсюда значение n_i в (30), имеем

$$p_i = \frac{k\sigma^2}{\sigma_i^2}, \tag{30''}$$

или, положив коэффициент пропорциональности $k\sigma^2 = K$, получим

$$p_i = \frac{K}{\sigma_i^2}. \tag{30'''}$$

Если имеется ряд результатов измерений, вообще выполненных в разных условиях, причем для каждого результата известна средняя квадратичная ошибка σ_i, то и в этом случае можно для совместной обработки результатов приписать им соответствующие веса p_i, положив также

$$p_i = \frac{B}{\sigma_i^2}.$$

Здесь B — произвольное число. Оно обычно выбирается таким, чтобы величины p_i были по возможности небольшими целыми числами. Часто бывает, что величины σ_i заранее не известны и отдельным измерениям приписываются веса на основании разного рода качественных соображений, связанных, например, с известной нам квалификацией наблюдателей, производивших отдельные измерения; различием в точности измерительных инструментов, с которыми они производились, и т. п.

Введение весов, определенных «на глазок», разумеется нельзя считать строгим приемом, однако он дает возможность хоть как-то использовать всю совокупность наблюдений. Однако нужно признать, что если веса отдельных наблюдений различаются в 10 и более раз, то обычно лучше просто отбросить из рассмотрения наблюдения с малыми весами, так как их учет может только испортить хорошие результаты.

Если нам известна совокупность ряда результатов x_i с соответствующими им весами p_i, то за наивероятнейшее значение измеряемой величины следует принять уже не среднее арифметическое, а *взвешенное среднее*, которое также обозначим $\bar{x}$:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{1}^{n} p_i x_i}{\sum_{1}^{n} p_i}. \tag{31}$$

Разумеется, если $p_1=p_2=\ldots=p_n$, то (31) переходит в (1).

Среднюю квадратичную погрешность для $\bar{x}$ можно получить аналогично тому, как она была определена для равноточных измерений. В результате имеем

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\Sigma p_i (\bar{x}-x_i)^2}{\Sigma p_i}}. \tag{32}$$

При выборе нужного числа измерений предполагаем, что систематическая ошибка метода достаточно мала. Подробнее об этом см. на стр. 53.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА И ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Ранее мы с помощью табл. I определяли доверительные вероятности для отдельного измерения x_i, т. е. вычисляли вероятность того, что x_i не будет уклоняться от истинного значения более чем на величину Δx. Очевидно, важнее знать, насколько может уклоняться от истинного значения x среднее арифметическое $\bar{x}$ наших измерений. Для этого также можно воспользоваться табл. I, взяв, однако, вместо величины σ_{x_i} величину $\sigma_{\bar{x}}$, т. е. $\sigma_{x_i}/\sqrt{n}$.

Тогда для аргумента ε, с которым мы входим в табл. I, будем иметь значение

$$\varepsilon=\frac{\Delta x}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{\Delta x\sqrt{n}}{\sigma_{x_i}}. \tag{33}$$

Мы теперь знаем, как определять доверительную вероятность для любого доверительного интервала, если известна средняя квадратичная погрешность σ. Однако, для того чтобы определить последнюю, нужно сделать очень много измерений, что не всегда возможно и удобно.

В тех случаях, когда делаем измерения с помощью уже хорошо исследованного метода, ошибки которого известны, мы заранее знаем величину σ. Как правило, погрешность метода приходится определять в процессе измерений. И обычно можем определить только величину s_n, соответствующую тому или иному, но всегда сравнительно небольшому числу измерений n ($s_2, s_3, \ldots, s_n$ здесь означают средние квадратичные ошибки отдельного измерения, определенные по формуле (10) для случаев двух, трех, четырех и т. д. измерений). Если для оценки доверительной вероятности будем считать, что полученные нами значения s_n совпадают с величиной σ, и воспользуемся табл. I для нахождения доверительной вероятности, то найдем неверные (завышенные) значения α.

Это результат того, что при определении среднеквадратичной ошибки из малого числа наблюдений мы находим последнюю с малой точностью. Происходящая вследствие этого погрешность в определении ошибки приводит к тому, что, когда заменяем s_n на σ, мы уменьшаем надежность нашей оценки, причем тем сильнее, чем меньше величина n.

Еще сравнительно недавно указанные здесь обстоятельства не всегда принимались во внимание, да и сейчас часто не делают различия между генеральной (σ^2) и выборочной (s_n^2) дисперсией.

Пусть мы определили выборочную дисперсию s_n^2 для некоторого числа наблюдений n и хотим определить для заданного нами доверительного интервала $\pm\Delta x$ соответствующую ему доверительную вероятность α.

Очевидно, что если в формуле (23) заменим σ на s_n, то такому доверительному интервалу будет соответствовать меньшая доверительная вероятность. Для того чтобы учесть это обстоятельство, интервал Δx можно представить в виде

$$\Delta x = \frac{t_{\alpha n} s_n}{\sqrt{n}}, \qquad (34)$$

откуда

$$t_{\alpha n} = \frac{\Delta x \sqrt{n}}{s_n}. \qquad (35)$$

Мы видим, что $t_{\alpha n}$ — величина, аналогичная ε: она играет ту же роль, но в случае, когда число измерений, из которых определена ошибка s_n, не очень велико. Величины $t_{\alpha n}$, носящие название коэффициентов Стьюдента, вычислены по законам теории вероятностей для различных значений n и α и приведены в табл. II, помещенной в Приложении.

Сравнивая приведенные в ней данные с табл. I, легко убедиться, что при больших n величины $t_{\alpha n}$ стремятся к соответствующим значениям величин ε. Это естественно, так как с увеличением n s_n стремится к σ.

Используя коэффициенты Стьюдента, мы можем переписать равенство (19) в виде

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha n}\frac{s_n}{\sqrt{n}} < x < \bar{x} + t_{\alpha n}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right) = \alpha. \tag{36}$$

Пользуясь этим соотношением и табл. II, легко определять доверительные интервалы и доверительные вероятности при любом небольшом числе измерений.

Дадим примеры применения этой таблицы. Пусть среднее арифметическое из 5 измерений будет 31.2. Средняя квадратичная ошибка, определенная из этих 5 измерений, равна 0.24. Мы хотим найти доверительную вероятность того, что среднее арифметическое отличается от истинного значения не более чем на 0.2, т. е. будет выполняться неравенство $31.0 < x < 31.4$.

Значение $t_{\alpha n}$ найдем, подставив полученные результаты в формулу (35), тогда

$$t_{\alpha n} = \frac{0.2\sqrt{5}}{0.24} = 1.86.$$

По табл. II находим для $n=5$ при $\alpha=0.8$ $t_{0.8;\,5}=1.5$ и при $\alpha=0.9$ $t_{0.9;\,5}=2.1$.

Вообще говоря, можно обычно удовлетвориться ответом, что доверительная вероятность для этого случая лежит между 0.8 и 0.9. Если нужно получить более точное значение, то вычислим пропорциональную часть подобно тому, как это делается при применении таблиц логарифмов.

Нужную нам величину вычисляем из пропорции

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{t_{\alpha n} - t_{0.8;\,n}}{t_{0.8;n} - t_{0.9;\,n}},$$

откуда

$$\Delta\alpha = 0.1\,\frac{0.36}{0.6} = 0.06, \quad \alpha = \alpha_1 + \Delta\alpha = 0.8 + 0.06 = 0.86.$$

Таким образом, доверительная вероятность для этого случая получается равной 0.86.

Вычислим теперь, какова доверительная вероятность в случае 10 измерений при той же среднеквадратичной погрешности 0.24 и том же доверительном интервале 31.0—31.4. По формуле (25) определяем

$$t_{\alpha,10} = \frac{0.2\sqrt{10}}{0.24} \approx 2.6.$$

Из табл. II находим, что ближайшее меньшее значение

$$t_{\alpha,10} = 2.3 \quad \text{для} \quad \alpha = 0.95$$

и ближайшее большее значение

$$t_{\alpha,10} = 2.8 \quad \text{для} \quad \alpha = 0.98.$$

Пропорциональную часть найдем из соотношения

$$\Delta\alpha = \frac{0.3 \cdot 0.03}{0.5} \approx 0.02.$$

Окончательно $\alpha = 0.97$.

6. ПОГРЕШНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ

Если мы определяем s_n из очень большого числа измерений, то получаем величину, как угодно мало отличающуюся от своего предельного значения, но, когда n невелико, то s_n отягчена случайными погрешностями, очевидно, тем меньшими, чем больше n. Точно так же, как и для результатов измерений, существует закон распределения, дающий возможность установить доверительную вероятность того, что определенная нами из n измерений погрешность s_n будет отличаться от σ в некоторое заданное нами число раз.

Для определения доверительного интервала, внутри которого находится σ, можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sigma_{s_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{37}$$

Здесь σ_{s_n} — средняя квадратичная погрешность величины s_n, когда s_n вычислено из n измерений; вообще говоря, это выражение справедливо для n, большего 30, но в случае грубых оценок его можно использовать и для меньших n.

Из формулы (37) следует, что при $n=25$ $\sigma_{s_n}=\sigma/7$, т. е. σ определяется с точностью около 15%. При $n=50$ точность определения σ составляет около 10%.

Более строгое рассмотрение дает возможность верной оценки доверительного интервала для σ и при малом числе измерений. Для этого мы определим величину χ^2 таким образом:

$$\chi^2=\frac{(n-1)\,s_n^2}{\sigma^2}. \quad (38)$$

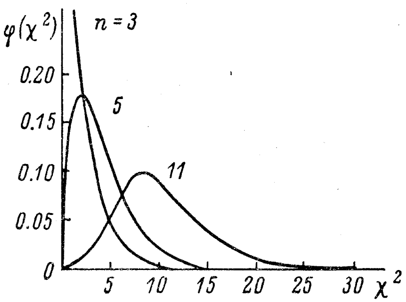

Рис. 10. χ^2-распределение.

Закон распределения этой величины известен под названием χ^2-распределения, которое представлено графически на рис. 10. Функция распределения χ^2 характеризуется асимметричностью, особенно сильной для малых n. Для больших n это распределение переходит в нормальное с дисперсией, определяемой формулой (37).

Доверительный интервал для σ вычисляется с помощью таблицы, составленной для нормального распределения.

При более точных оценках доверительного интервала для σ можно воспользоваться табличными значениями, составленными для χ^2-распределения.

Из выражения (38) следует

$$\sigma^2=\frac{n-1}{\chi^2}\,s_n^2=\gamma^2 s_n^2. \quad (39)$$

Табл. III Приложения дает возможность определить значения γ_1 и γ_2, удовлетворяющие условию

$$P(\gamma_1 s_n<\sigma)=\alpha_1, \quad P(\gamma_2 s_n>\sigma)=\alpha_2. \quad (40)$$

Так как χ^2-распределение асимметрично, то погрешности равной величины, но противоположного знака не равновероятны, как в случае нормального распределения.

Отсюда следует, что при условии $\alpha_1 = \alpha_2$ $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Обычно пользуются соотношением, написанным в виде

$$P(\gamma_1 s_n < \sigma < \gamma_2 s_n) = \alpha. \tag{41}$$

При выбранном значении α соответствующие значения γ_1 и γ_2 находятся из табл. III.

Приведем два примера пользования этой таблицей.

1. Средняя квадратичная погрешность, определенная из 5 измерений, равна 2. Нужно вычислить доверительный интервал для σ с надежностью 0.95. Из табл. III имеем для $n=5$ и $\alpha=0.95$ $\gamma_1=0.6$ и $\gamma_2=2.9$.

Для σ можем написать неравенство, выполняемое с вероятностью 0.95; $0.6 \cdot 2 < \sigma < 2.9 \cdot 2$, или $1.2 < \sigma < 5.7$.

Мы видим, что границы, в которых лежит σ, очень широки и асимметричны (интервал от 2 до 1.2 почти в пять раз меньше интервала от 2 до 5.7).

2. При 40 измерениях $\gamma_1=0.8$, $\gamma_2=1.3$, и получаем для σ неравенство $1.6 < \sigma < 2.6$. Интервал значительно более узкий и почти симметричный.

Если пользоваться при $n=40$ формулой (37), то получаем

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2}{\sqrt{78}} \approx 0.2.$$

Доверительной вероятности 0.95 соответствует погрешность $2\sigma_\sigma$, и для σ можно написать с вероятностью 0.95: $1.55 < \sigma < 2.45$.

Как видим, в этом случае оценки, сделанные по строгим и приближенным формулам, практически не различаются между собой.

Легко показать, что при 5 или 10 измерениях это различие будет весьма значительно.

7. НЕОБХОДИМОЕ ЧИСЛО ИЗМЕРЕНИЙ

Для уменьшения случайной ошибки результата, как мы уже знаем, могут быть использованы два пути: улучшение точности измерений, т. е. уменьшение величины σ, и увеличение числа измерений, т. е. использование соотношения

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Сейчас будем говорить только о последнем приеме, считая, что все возможности совершенствования техники измерений уже использованы. Пусть систематическая ошибка измерений, определяемая классом точности прибора или другими аналогичными обстоятельствами, будет δ.

Известно, что уменьшать случайную ошибку целесообразно только до тех пор, пока общая погрешность измерений не будет полностью определяться систематической ошибкой. Для этого необходимо, чтобы доверительный интервал, определенный с выбранной степенью надежности, был бы существенно меньше величины систематической ошибки. Иначе говоря,

$$\Delta x \ll \delta. \tag{42}$$

Разумеется, нужно условиться, какой степени надежности α мы требуем и какую величину для случайной ошибки следует считать допустимой, т. е. какое соотношение величин Δx и δ можно считать удовлетворяющим условию (42). Строгую оценку этого сделать трудно, однако можно исходить из того, что, как правило, нет необходимости определять общую ошибку с точностью, большей 10%. Это означает, что в том случае, когда $\Delta x \leqslant \delta/10$, условие (42) можно считать выполненным. Практически обычно можно удовлетвориться гораздо менее жестким требованием $\Delta x \leqslant \delta/3$ или даже $\Delta x \leqslant \delta/2$.

Надежность α, с какой хотим установить наш доверительный интервал, в большинстве случаев не должна превышать 0.95, хотя иногда требуются и более высокие значения α. Для оценки необходимого числа измерений в Приложении помещена табл. IV, в которой Δx дано в долях средней квадратичной ошибки. Приведем примеры пользования этой таблицей.

1. Измеряется диаметр шарика с помощью микрометра, имеющего погрешность в 1 мкм. Средняя квадратичная погрешность единичного измерения равна 2.3 мкм. Сколько измерений нужно проделать, чтобы получить ошибку не более 1.5 мкм с надежностью 0.95?

Положим $\Delta x = \delta/2 = 0.5$ мкм, $s_n = 2.3$ мкм, $\Delta x = 0.5/2.3$ $\delta = 0.22$ δ. Из табл. IV находим в колонке $\alpha = 0.95$: для $\varepsilon = 0.3$ $n = 46$ и для $\varepsilon = 0.2$ $n = 100$. Составив соответствующую пропорцию, легко рассчитать, что для $\varepsilon = \Delta x / s = 0.22$ $n \approx 57$.

Иначе говоря, нужно сделать около 60 измерений, чтобы случайная ошибка изменила общую погрешность результата измерений не более чем в полтора раза.

Интересно посмотреть, сколько нужно сделать измерений, если мы наложим еще менее жесткое требование, а именно чтобы систематическая и случайная ошибки были примерно равны по величине? В этом случае полагаем $\delta = \Delta x = 0.45s$ и из той же табл. IV находим (для $\alpha = 0.95$) $n \approx 23$.

Мы видим, что в обоих этих примерах число необходимых измерений получалось хотя и большое, но такое, которое может быть выполнено.

2. Коэффициент вариации w для некоторого измерения составляет 1%. Систематическая ошибка измерений $\delta = 0.1\%$. Сколько измерений нужно проделать, чтобы случайная ошибка практически не играла роли?

Так как все ошибки выражены в относительных единицах, то

$$\frac{\Delta x_{\text{отн}}}{w} = \frac{\Delta x}{s} = \frac{0.05}{1}.$$

Из табл. IV находим для той же доверительной вероятности $\alpha = 0.95$ и для $\Delta x / s = 0.05$ $n = 1500$ (!).

Очевидно, что практически такое число измерений обычно проделать нельзя.

Из этих примеров можно сделать заключение, что увеличением числа измерений можно устранить влияние случайной ошибки на результат только в том случае, если средняя квадратичная погрешность не более чем в несколько раз превосходит систематическую ошибку. Реально это возможно, если $\sigma \leqslant 5\delta$. При больших значениях σ для существенного уменьшения роли случайной ошибки уже требуются сотни и тысячи, а иногда десятки тысяч измерений, как это видно из табл. IV. В таких случаях для уменьшения погрешности результата необходимо радикально менять методику измерений с тем, чтобы уменьшить величину случайной ошибки.

8. ОБНАРУЖЕНИЕ ПРОМАХОВ

Если мы делаем ряд одинаковых измерений, подверженных случайным ошибкам, то в этом ряду могут встретиться измерения и с очень большими случайными ошибками. Однако, как мы уже знаем, большие ошибки имеют малую вероятность, и если среди результатов измерений встретится одно, имеющее резко отличное от других значение, то мы будем склонны приписать такой результат промаху и отбросить его как заведомо неверный. Приведем пример ряда измерений некоторой длины.

Таблица 5

Результаты измерения длины

Номер измерения	l
1	258.5
2	255.4
3	256.6
4	256.7
5	257.0
6	256.5
7	256.7
8	255.3
9	256.0
10	266.0
11	256.3
12	256.5
13	256.0
14	256.3
15	256.9

По данным табл. 5 находим среднее арифметическое $\bar{l}=257.11$, если учитывать все результаты, в том числе первого и десятого измерений. Но результат десятого измерения 266.0 — явный промах: вместо 5 записано 6. Если его отбросить, то $\bar{l}=256.48$. Однако в этом ряду подозрителен также и результат 258.5 (возможно, что записано 8 вместо 6). Если отбросить и его, то получится среднее арифметическое $\bar{l}=256.32$. Нетрудно понять, что такой метод отбрасывания результатов, которые кажутся нам слишком сильно выпадающими из других измерений, порочен.

Таким способом легко получить завышенную и совершенно фиктивную точность измерений. Действительно, величина s с учетом всех приведенных в табл. 5 значений получается равной 2.6. Если отбросим два измерения — №№ 1 и 10, то s окажется равным 0.5. Идя по этому пути, можно отбросить также измерения №№ 2, 5, 8 и 15, тогда $\bar{l}=256.40$ и s окажется равным всего 0.3. Очевидно, что такая малая ошибка появилась только как результат незаконного отбрасывания не понравившихся нам измерений. Поэтому следует объективно оценить, является ли данное измерение промахом или же результатом случайного, но совершенно закономерного отклонения. Этот вопрос может быть решен на основании следующих соображений. Мы можем считать какое-то измерение (x_k) промахом, если вероятность случайного появления такого значения в данном ряду измерений является достаточно малой.

Если нам известно точное значение σ, то, как мы знаем, вероятность появления значения, уклоняющегося от среднего арифметического $\bar{x}$ более чем на 3σ, равна 0.003; и все измерения, отличающиеся от $\bar{x}$ на эту (или бóльшую) величину, могут быть отброшены как очень маловероятные. Иначе говоря, мы считаем, что результаты, вероятность получения которых меньше 0.003, могут появиться только как следствие грубой ошибки (промаха). Отбрасывая такие значения, нужно помнить, что существует очень малая, но отличная от нуля вероятность того, что отброшенное число является не промахом, а естественным статистическим отклонением. Однако если такой маловероятный случай и произойдет, т. е. будет неправильно отброшен один из результатов измерений, то практически это обычно не приведет к существенному ухудшению оценки результатов измерений.

Следует иметь в виду, что для совокупности измерений вероятность появления измерения, отличающегося на величину более 3σ от среднего значения, всегда больше 0.003. Действительно, вероятность того, что результат первого измерения не будет отличаться от истинного значения более чем на 3σ, составляет $1 - 0.003 = 0.997$. Вероятность того, что это же будет иметь место для второго измерения, так же равна $(1 - 0.003)$. А вероятность того, что и первое, и второе измерения не выйдут за указанный предел, будет, согласно правилу умножения вероятностей, равна $(1 - 0.003)^2$.

Соответственно вероятность β того, что ни один из результатов n измерений не будет отличаться от среднего более чем на 3σ, равна

$$\beta = (1 - 0.003)^n.$$

Для не слишком большого n можно приближенно положить $(1 - 0.003)^n = 1 - 0.003n$.

Это значит, что вероятность того, что из 10 измерений хотя бы одно будет случайно отличаться от среднего более чем на 3σ, будет уже не 0.003, а 0.03, или 3%. А при 100 измерениях вероятность такого события уже составит около 30%.

Обычно число производимых измерений не очень велико — сравнительно редко оно превышает 10—20. При этом точное значение σ неизвестно, следовательно отбрасывать измерения, отличающиеся от среднего более чем на 3σ, нельзя.

Для оценки вероятности β случайного появления выскакивающих значений в ряду n измерений (для $n < 25$) на основании результатов, даваемых теорией вероятностей, была составлена табл. V, помещенная в Приложении. При n, большем 25, можно для расчетов такого рода положить $s_n = \sigma$ и оценку β делать, пользуясь соотношением

$$\beta \approx \alpha^n. \tag{43}$$

Здесь α — доверительная вероятность, определяемая для нормального распределения (α берется из табл. I).

Для применения табл. V мы вычисляем среднее арифметическое $\bar{x}$ и среднюю квадратичную погрешность s_n из всех измерений, включая подозреваемое x_k, которое, на наш взгляд, недопустимо велико или мало.

Вычисляем относительное уклонение этого измерения от среднего арифметического, выраженное в долях средней квадратичной ошибки:

$$v_{\text{макс}} = \left| \frac{\bar{x} - x_k}{s_n} \right|. \tag{44}$$

По табл. V находим, какой вероятности β соответствует полученное значение $v_{\text{макс}}$. Разумеется, следует договориться, при каких значениях β мы будем отбрасывать измерения.

Табл. V составлена так, что наименьшее помещенное в ней значение β равно 0.01. Оставлять измерения, вероятность появления которых меньше этой величины, обычно нецелесообразно.

Следует иметь в виду, что если мы в отдельных случаях и примем естественное случайное отклонение за промах и «неправильно» выбросим такой результат, то это обычно не приведет к заметному изменению оценок измеряемой величины. Важно не выбрасывать по интуиции, не пользуясь вполне определенными критериями.

В нашем примере $l_{10}=266$, $v_{\text{макс}}$ получается равным $(266.0 - 257.1)/2.6=3.42$. Наибольшее значение $v_{\text{макс}}$ для $n=15$, приведенное в табл. V, равно 2.80, чему соответствует $\beta=0.01$. Так как с ростом $v_{\text{макс}}$ соответствующее значение β уменьшается, то при $v_{\text{макс}}=3.42$ β должно быть значительно меньше 0.01. Такие значения β отсутствуют в таблице. Из того что $\beta \ll 0.01$, следует, что результат 266.0 надо отбросить, считая его промахом.

В оставшемся ряду представляется также подозрительным результат 257.5. Для него $v_{\text{макс}}$ получается равным $(258.5 - 126.5)/2 = 1.0$. Из табл. V видно, что этому значению соответствует $\beta > 0.1$, и результат 258.5, разумеется, нужно оставить.

Рассмотрим еще один пример.

Среднее значение плотности ртути d, определенное из 15 наблюдений, равно 13.59504 г/см³; средняя квадратичная погрешность $s_{15} = 5 \cdot 10^{-5}$ г/см³.

В ряду наблюдений имеется один результат: $d = 13.59518$. Для него

$$v_{\text{макс}} = \frac{13.59518 - 13.59504}{5 \cdot 10^{-5}} = 2.6.$$

Для $n = 15$ этому значению $\bar{v}_{\text{макс}}$ соответствует $\beta \approx 0.025$.

Таким образом, выбрасывая это измерение, мы можем утверждать с вероятностью 0.975, что поступаем правильно, т. е., что оно действительно является промахом.

Если все же оставить это наблюдение в общем ряду, то легко видеть, что оно изменит среднее значение d на 0.00001, т. е. на величину, малую по сравнению с s и не играющую поэтому никакой практической роли. Следовательно, решая вопрос об отбрасывании выскакивающего измерения, полезно посмотреть, как сильно оно меняет окончательный результат.

Если вероятность появления данного измерения в ряду лежит в промежутке $0.1 > \beta > 0.01$, то представляется одинаково правильным — оставить это измерение или отбросить. В тех случаях, когда β выходит за указанные пределы, вопрос об отбрасывании, по-видимому, решается однозначно.

9. ОШИБКИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В большинстве случаев измеряется не непосредственно интересующая нас величина, а другая, зависящая от нее тем или иным образом. Например, для измерения площади прямоугольника мы измеряем длину двух его сторон a и b, а площадь вычисляем, пользуясь соотношением $S=ab$.

При измерении температуры с помощью ртутного термометра мы измеряем удлинение столбика ртути, которое связано с изменением температуры и законом объемного расширения тел соотношением

$$t_2-t_1=\frac{(h_2-h_1)\,\pi r^2}{v_0\,(\gamma_2-\gamma_1)}\,. \tag{45}$$

Здесь t_1 и t_2 — начальная и конечная температура, v_0 — объем шарика ртути, γ_2 — объемный коэффициент теплового расширения ртути, γ_1 — коэффициент теплового расширения стекла, h_1 и h_2 — начальная и конечная высота столбика ртути; r — радиус капилляра термометра.

При таких измерениях, называющихся косвенными (в отличие от прямых, при которых нужная величина измеряется непосредственно), необходимо также уметь вычислять ошибку измерений.

Здесь могут быть два основных случая:

1) интересующая нас величина зависит от одной измеряемой величины,

2) интересующая нас величина зависит от нескольких измеряемых величин.

Общие правила вычисления ошибок для обоих случаев могут быть легко выведены с помощью дифференциального исчисления. Вначале мы ограничимся наиболее простыми частными задачами.

1. Пусть зависимость интересующей нас величины Y от измеряемой величины X имеет наиболее простой вид

$$Y=AX+B. \tag{46}$$

Здесь A и B — постоянные, значение которых точно известно. Легко показать, что если X увеличить или уменьшить на некоторую величину ΔX, то Y соответственно изменится на величину $A\Delta X$. Действительно, зададим X приращения ΔX.

Тогда из выражения (46) имеем

$$Y+\Delta Y=A\,(X+\Delta X)+B, \tag{47}$$

вычтя (46) из (47), получаем

$$\Delta Y=A\Delta X. \tag{48}$$

Если ΔX — ошибка измерения величины X, то соответственно ΔY будет ошибкой результата.

В общем случае, если $Y=f(X)$, то для ошибок, малых по сравнению с измеряемой величиной мы можем с достаточной точностью написать

$$\Delta Y = f'(X)\,\Delta X. \tag{49}$$

Отметим, что соотношение (49) может оказаться неверным вблизи экстремума $f(X)$, где $f'(X)$ обращается в нуль.

Если мы хотим найти величину относительной ошибки, то из (49) легко получаем

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'(X)}{f(X)}\,\Delta X. \tag{50}$$

Этот способ вычисления относится и к случайным и к систематическим ошибкам.

2. Простейший случай, когда интересующая нас величина являлась суммой двух или нескольких независимо измеряемых величин X_1, $X_2, \ldots, X_n$, мы уже разбирали и написали для вычисления случайных ошибок правило сложений дисперсий (23). Дадим еще правила вычисления ошибок для случаев произведения и частного.

Если $Y=X_1\cdot X_2\cdot X_3$, то

$$\sigma_Y^2 = (X_1X_2\sigma_{X_3})^2 + (X_1X_3\sigma_{X_2})^2 + (X_3X_2\sigma_{X_1})^2. \tag{51}$$

Аналогично вычисляются погрешности для большего числа сомножителей.

Если $Y=X_1/X_2$, то

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{X_1}^2}{X_2^2} + \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2 \sigma_{X_2}^2. \tag{52}$$

Относительные ошибки для случаев (51) и (52) выглядят одинаково

$$\left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_3}}{X_3}\right)^2 \tag{53}$$

и аналогично

$$\left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2. \tag{54}$$

Пользуясь обозначениями дифференциального исчисления, можно ошибку функции Y от переменных X_1, X_2, . . ., X_n представить в виде

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\sigma_{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\sigma_{X_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\sigma_{X_n}\right)^2}. \quad (55)$$

Формулы (51) и (55) сохраняют свой вид, если вместо ошибки σ мы возьмем среднеквадратичные ошибки s_n или среднеарифметические ошибки r. В общем виде

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}. \quad (56)$$

Относительную ошибку величины Y легко вычислить, написав

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \sum_1^n \left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2.$$

Так как

$$\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{\partial \ln f}{\partial X_i},$$

то для относительной погрешности получаем

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial \ln f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}. \quad (56')$$

Может возникнуть вопрос, как правильнее вычислять среднеарифметическое значение и погрешность результата в случае косвенных измерений? Если $y=f(x)$ и измерения дают нам ряд значений x_i, то можно поступить двояким образом:

1) вычислить $\bar{x}=\sum x_i/n$ и, подставив это значение в уравнение $y=f(x)$, получить $\bar{y}=f(\bar{x})$;

2) для каждого из значений x_i вычислить $y_i=f(x_i)$, а затем определить $\bar{y}$ по соотношению

$$\bar{y} = \frac{\sum_1^n y_i}{n}.$$

Соответственно двумя способами можно определять и ошибку величины y либо, определив ошибку величины $\bar{x}$, воспользоваться соотношением

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x,$$

либо, вычислив ряд значений y_i, определить ошибку величины y обычным путем, например

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma (\bar{y} - y_i)^2}{n-1}}.$$

Можно показать, что если ошибки измерений малы по сравнению с измеряемой величиной (именно это предположение положено в основу всех наших формул), то оба способа дают почти тождественные результаты, и поэтому безразлично, каким из них пользоваться.

Здесь следует руководствоваться практическими удобствами расчета, а с этой точки зрения первый способ представляется менее трудоемким. Кроме того, если результаты измерений распределены по нормальному закону, то закон распределения величин σ вообще говоря, отличен от нормального. Поэтому для определения доверительных интервалов по табл. II лучше пользоваться первым способом.

10. СЛУЧАЙНЫЕ ОШИБКИ РАЗЛИЧНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

При косвенных измерениях нужный нам результат обычно отягчен случайными ошибками, различными для разных величин X_i, от которых зависит интересующая нас величина Y. Результирующая ошибка и в этом случае определяется с помощью уже известного нам закона сложения случайных ошибок. Вычисление удобнее выполнять, пользуясь относительными ошибками.

Поясним это на примере определения плотности. Допустим, что в нашем распоряжении имеется прямоугольный параллелепипед из вещества, плотность которого нужно определить. Длины его граней X_1, X_2 и X_3. Для определения плотности $d=m/V$, где m — масса параллелепипеда, V — его объем, мы измеряем длины граней и массу нашего образца. Пусть σ_{X_1}, σ_{X_2} и σ_{X_3} — среднеквадратичные ошибки измерения длины граней,

σ_m — ошибка определения массы. Тогда мы можем написать, согласно формуле (53),

$$\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_3}}{X_3}\right)^2.$$

Допустим, что взвешивание производится на аналитических весах, обеспечивающих точность около 1 мг при весе образца около 10 г. Тогда $\sigma_m/m \approx 10^{-4} \approx 10^{-2}\%$.

Пусть объем нашего тела около 1 см³. Если мы хотим, чтобы точность измерения плотности тела определялась в основном точностью взвешивания, то необходимо, чтобы ошибка в измерении длин граней была меньше ошибки взвешивания, т. е. $\sigma_X/X < 10^{-4}$; это при размере граней в 1 см означает, что σ_X должна быть меньше 10^{-4} см. Если в нашем распоряжении для измерения длины есть инструменты типа штангенциркуля, допускающего ошибку до 0.01 см, то очевидно, что необходимой степени точности мы не получим, так как точность измерения длины составит всего 1%. В этом случае для взвешивания можно пользоваться более грубыми весами, дающими погрешность в несколько десятков раз большую, например так называемыми техническими. Это будет и более целесообразно, так как потребует меньшей затраты времени и средств. Однако если нам все же необходимо определить плотность с точностью $10^{-2}\%$, то следует для измерения сторон параллелепипеда пользоваться очень точным микрометром, позволяющим измерить длину с точностью лучшей чем 10^{-3} мм; и в этом случае необходимо взвешивать на аналитических весах.

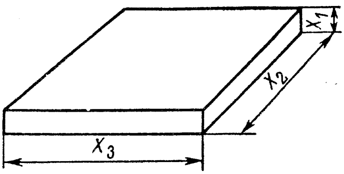

Рис. 11. Плоский параллелепипед.

На приведенном примере можно проследить еще некоторые свойства результирующей ошибки, являющиеся следствием закона суммирования ошибок. Допустим, что наш параллелепипед имеет плоскую форму, т. е. $X_1 \ll X_2 \approx X_3$ (рис. 11).

Большинство инструментов, применяемых для измерения длины, дают ошибку ΔX, величина которой почти не зависит от измеряемой длины (в пределах измерения данным инструментом). Абсолютная ошибка постоянна (см. стр. 12). Поэтому мы и положим $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \sigma_{X_3} = \sigma_X$, но в этом случае

$$\frac{\sigma_{X_1}}{X_1} \gg \frac{\sigma_{X_2}}{X_2} \approx \frac{\sigma_{X_3}}{X_3},$$

и определяющей будет ошибка измерения самой малой грани. Практически, если одна грань в 3—4 раза меньше двух других, то ошибками измерения последних можно пренебречь.

Таким образом, формула (55) всегда позволяет сделать оценку роли ошибок в различных звеньях измерительного процесса. Причем условия измерений наиболее рационально выбрать так, чтобы относительные ошибки каждого звена были приблизительно одинаковыми. В противном случае точность результата обычно задается какой-то одной величиной, а именно той, точность измерения которой наименьшая.

11. СОГЛАСОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ СО СВОЙСТВАМИ ИЗМЕРЯЕМОГО ОБЪЕКТА

Вернемся к примеру с измерением плотности. В том случае, когда необходимо измерить ее с высокой степенью точности, которая определялась бы в основном погрешностью взвешивания на аналитических весах, нужно, как мы говорили, измерять длины ребер с погрешностью, меньшей 1 мкм. Однако легко показать, что без дополнительных мер предосторожности измерение длин с такой точностью все же не приведет к нужной точности в измерении объема.

Действительно, объем параллелепипеда V мы положили равным $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$. На самом деле он отличается от этой величины в первую очередь потому, что у реального параллелепипеда углы не равны точно 90°, а поверхности не строго плоские. Легко показать, что если один из углов квадрата имеет ошибку в 1°, то это даст ошибку в его площади около 1%.

Для того чтобы объем куба можно было измерить с точностью 0.01% без учета поправок на отклонение углов от 90°, необходимо, чтобы углы были выполнены с точностью до минуты. Достичь такой точности углов в процессе изготовления трудно, и для многих изделий углы отягчены большей погрешностью. Ошибка, определяемая отклонением поверхностей параллелепипеда от плоскости, чаще всего невелика, но если поверхность, например, сильно шероховата, то это может внести заметную ошибку в измерении длин, как это легко понять из рис. 12, на котором шероховатость представлена в увеличенном виде. В результате неровности поверхности измеренный объем всегда будет больше истинного. Для

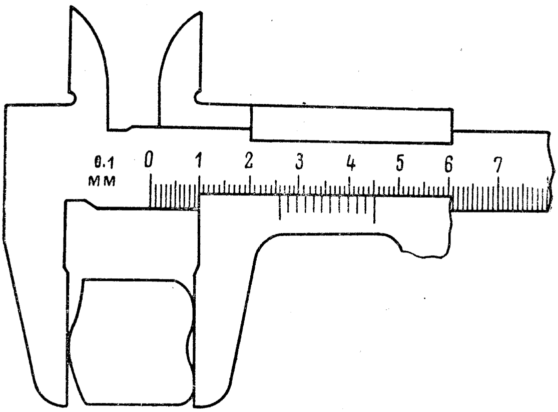

Рис. 12. Измерение длин при неровной поверхности.

случая определения плотности описанным методом чаще всего именно ошибки углов параллелепипеда будут ограничивать точность измерения его объема, и нет смысла добиваться точности измерения длин большей, чем та, которая может быть достигнута при применении соотношения $V=X_1X_2X_3$, т. е. без учета ошибок, допущенных при изготовлении параллелепипеда. Эта ситуация совершенно аналогична описанной нами, когда речь шла о роли систематических и случайных ошибок. Мы тогда указывали, что нет особого смысла стремиться сделать случайную ошибку значительно меньше, чем та систематическая ошибка, которая определяется классом точности измерительного устройства. Совершенно также нет смысла добиваться, чтобы ошибка измерений была меньше погрешности, определяемой той схематизацией, которая принята при наших измерениях. В самом деле, любая формула, устанавливающая количественную связь между физическими величинами, является некоторой математической моделью, в действительности удовлетворяющейся с тем или иным приближением.

В нашем примере не были учтены отклонения углов параллелепипеда от 90° и его поверхности от плоскости. Нетрудно написать более сложную формулу для объема с учетом этих обстоятельств. Но такая формула всегда будет лишь некоторым приближением к действительности, и точность наших измерений должна быть согласована с точностью принятой модели и ее соответствия реальным свойствам измеряемого объекта. Оценку необходимой точности следует делать в результате тщательного анализа условий опыта и факторов, влияющих на конечный результат.

12. УЧЕТ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ И СЛУЧАЙНОЙ ОШИБОК

Ранее мы говорили, что измерения следует организовать так, чтобы погрешность результата целиком определялась систематической ошибкой измерений, которая обычно задается погрешностью измерительного прибора. Для этого рекомендовалось провести такое число измерений, чтобы случайная ошибка результата была незначительна по сравнению с систематической ошибкой.

Однако не всегда можно осуществить необходимое число измерений. Этому может препятствовать высокая стоимость измерений, а для изменяющихся со временем величин иногда процесс измерения оказывается слишком длительным, и мы просто не успеваем произвести достаточное число измерений.

В результате часто приходится мириться с положением, когда систематическая и случайная ошибки измерений близки друг к другу и они обе в одинаковой степени определяют точность результата. К сожалению, в этом случае трудно дать достаточно строгое определение суммарной ошибки измерений.

Когда имеем дело только с ошибкой прибора, то указывая, как в примере с миллиамперметром, ошибку ± 0.75 ма, мы, естественно, не зная свойств данного прибора, ничего не можем сказать о том, какова вероятность сделать ошибку $+0.2$ или -0.3 ма. Мы знаем только верхнюю границу возможных ошибок. Если к такой систематической ошибке присоединяется случайная, то мы, очевидно, также почти ничего не можем сказать о вероятности появления ошибок различной величины, но можем оценить значения суммарных ошибок.

В самом деле, если величину систематической ошибки обозначить δ, а дисперсию измерений — σ^2, то в качестве верхней границы суммарной ошибки Σ мы можем принять

$$\Sigma = \delta + 2\sigma. \tag{57}$$

Действительно, с вероятностью более 0.95 мы можем утверждать, что результаты измерений не будут отличаться от истинного значения на величину, превышающую Σ.

Такое правило сложения можно распространить на систематические ошибки любого происхождения.

Подчеркнем еще раз, что вопрос о сложении систематических и случайных ошибок актуален только тогда, когда одна из них не более чем в несколько раз превышает другую. В противном случае в качестве меры погрешности измерения следует указывать только бо́льшую ошибку.

Отметим, что, не имея строгого решения, вопрос о правилах сложения систематической и случайной ошибок можно решать разным образом.

Иногда рекомендуют вообще отказаться от нахождения суммарной ошибки и давать в качестве меры погрешности измерений две ошибки — систематическую и случайную.

Однако, чтобы воспользоваться результатом измерений, нам, как правило, нужно знать общую его погрешность вне зависимости от причин, ее породивших. Поэтому приходится каким-то образом комбинировать систематическую и случайную ошибки для получения единой числовой характеристики погрешности измерений.

Одно из возможных правил нахождения такой суммарной ошибки состоит в том, что мы полагаем систематическую ошибку распределенной также по нормальному закону и считаем, что указанная величина этой ошибки δ соответствует значению систематической ошибки, равному утроенному значению среднеквадратичной ошибки.

В этом случае суммарную ошибку нужно писать так:

$$\Sigma = \sqrt{\delta^2 + 9\sigma^2}. \tag{58}$$

Погрешности Σ приписываем доверительную вероятность 0,997. Легко показать, что различие, даваемое формулами (57) и (58), невелико.

Практически (так как мы не знаем истинного закона распределения систематических ошибок) можно пользоваться любой из них для ориентировочных оценок суммарной погрешности.

13. НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ КРИВЫХ

Очень часто исследуемая величина меняется с изменением условий опыта, а задача измерений состоит в нахождении функциональной зависимости, которая наилучшим образом описывает закон изменения интересующей нас величины.

Примером таких измерений является исследование зависимости сопротивления провода от его температуры, плотности газа от давления, вязкости жидкости от тем-

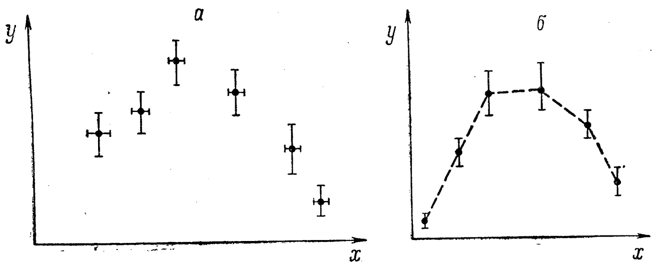

Рис. 13. Интерполирующие кривые.

пературы и т. п. В результате измерений получаем несколько значений измеряемой величины, которые можем считать координатами точек на плоскости.

Положим, что мы измеряем некоторую величину y, зависящую только от величины x. Для каждого значения x_i проводим ряд измерений и получаем величину $\bar{y}_i$, для которой устанавливаем доверительный интервал $\Delta\bar{y}_i$. Если величины x_i не могут быть заданы точно, а также измеряются с некоторой погрешностью, то и для них известны средние значения $\bar{x}_i$ и соответствующие доверительные интервалы Δx_i. Величины $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$ могут рассматриваться как координаты точек на плоскости, что дает возможность представить графически всю совокупность наших измерений в виде графика рис. 13, *а*.

Отрезки, отложенные у каждой точки, означают величину доверительных интервалов, соответствующих измеренным средним значениям $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$. Обычно откладывают значения доверительного интервала, соответствующего доверительной вероятности 0.7 или 0.95. Значение выбранной доверительной вероятности, одно и то же для всех точек данного графика, следует указать. Если величина одной из координат, скажем x, известна практически точно, то на графике показывают только величину доверительного интервала для координаты y, и он будет выглядеть, как на рис. 13, *б*. (Разумеется доверительные интервалы в разных точках могут оказаться разными по величине, как показано на этом рисунке). Диаграммы рис. 13 позволяют установить с некоторой степенью вероятности ту функциональную зависимость, которой связаны величины x и y. Однако, как и все задачи, в которые входят зависимости между случайными величинами, выбор той или иной функции $y=f(x)$ может быть сделан только с той или иной степенью надежности. Более того, существует бесчисленное множество функций, как угодно хорошо согласующееся с диаграммой рис. 13. Лучше всего, с точки зрения математического согласования, выбрать в качестве такой функции ломаную линию (x_1y_1), (x_2y_2), . . ., (x_ny_n), как это показано на рис. 13, *б* пунктиром. Однако, очевидно, что такая линия не дает ничего нового по сравнению с имеющейся диаграммой, и обычно задача ставится так, что нужно на основании каких-то физических законов подобрать плавную кривую, хорошо описывающую полученные экспериментальные результаты. В таком виде задача тоже остается достаточно неопределенной, но во всяком случае имеются пути к ее аналитическому решению. Основным путем этого решения является метод наименьших квадратов.

Таблица 6

Глубина проникновения пули

Номер измерения	E	l
1	41	4
2	50	8
3	81	10
4	104	14
5	120	15
6	139	20
7	154	19
8	180	23
9	208	26
10	241	30
11	250	31
12	269	36
13	301	37

Применение этого метода мы иллюстрируем конкретным примером. В табл. 6 представлены результаты проникновения в преграду пули, как функции ее энергии (доверительные интервалы не указаны. Значения E и l даны в условных единицах). Эти точки приведены также на графике рис. 14.

Из теоретических соображений можно считать, что углубление пули в препятствие прямо пропорционально ее энергии. Поэтому следует искать не какую-то функцию, лучше всего удовлетворяющую данным точкам, а прямую

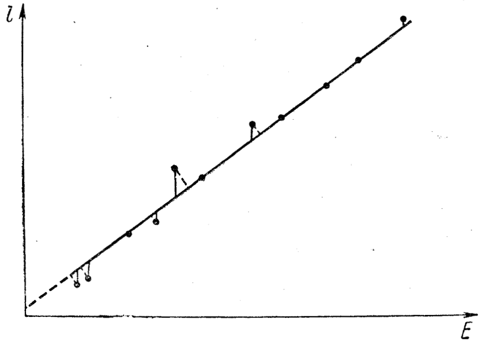

Рис. 14. К способу наименьших квадратов.

линию, менее всего уклоняющуюся от них. Уравнение искомой прямой может быть записано в виде

$$y = ax + b.$$

Коэффициенты уравнения a и b надлежит выбрать наилучшим образом. Для нахождения по способу наименьших квадратов уравнения искомой прямой поступим следующим образом: проведем ординаты точек y_i до их пересечения с искомой прямой (рис. 14). Значение этих ординат будет (ax_i+b). Расстояние по ординате от точки x_iy_i до прямой равно (ax_i+b-y_i). Положим, что прямая будет наилучшей, если сумма квадратов всех расстояний $(ax_i+b - y_i)$ имеет наименьшее значение. Минимум этой суммы ищется по правилам дифференциального исчисления.

Для нахождения коэффициентов a и b искомой прямой мы должны, таким образом, найти минимум суммы $\sum_1^n (ax_i+b-y_i)^2$.

Поэтому, как обычно, приравниваем нулю производные этой суммы по параметрам a и b. Получаем

$$\frac{d}{da} = \sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2 = 0, \quad \frac{d}{db} = \sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2 = 0. \tag{59}$$

Отсюда легко выводим

$$na + b\sum x_i - \sum y_i = 0, \quad a\sum x_i + b\sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0. \tag{60}$$

Такая система уравнений называется нормальной и просто решается относительно параметров a и b. Ее решение дает

$$a = \frac{n\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}, \tag{61}$$

$$b = \frac{\sum_1^n x_i^2 \sum_1^n y_i^2 - \sum_1^n x_i \sum_1^n x_i y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}, \tag{62}$$

n — число наблюдений. Суммирование производится по всем точкам. Подстановка численных значений по табл. 6 для нашего случая дает $a=0.124$, $b=0.7$, и уравнение искомой прямой будет

$$y = 0.124x + 0.7.$$

Заметим, что если энергия пули равна нулю, то она вообще не проникает в препятствие. Следовательно, более правильным было бы искать решение в виде

$$y = ax.$$

Однако внутри измеренного интервала энергий найденная прямая лучше удовлетворяет экспериментальным точкам, чем прямая, проходящая через начало координат. Теория дает возможность определить также дисперсию уклонения точек от прямой и дисперсию коэффициентов

a и b. Если s_0^2 — дисперсия точек, s_a^2 и s_b^2 — дисперсия коэффициентов a и b, тогда

$$s_0^2=\frac{\sum_1^n y_i^2}{(n-2)}-\frac{\left(\sum_1^n y_i\right)^2}{n(n-2)}-\frac{\left(n\sum_1^n x_iy_i-\sum_1^n x_i\sum_1^n y_i\right)^2}{\left[n\sum_1^n x_i^2-\left(\sum_1^n x_i\right)^2\right](n-2)n}, \tag{63}$$

$$s_a^2=\frac{s_0^2 n}{n\sum_1^n x_i^2-\left(\sum_1^n x_i\right)^2}, \tag{64}$$

$$s_b^2=\frac{s_0^2\sum_1^n x_i^2}{n\sum_1^n x_i^2-\left(\sum_1^n x_i\right)^2}. \tag{65}$$

Для нашего случая это дает $s_a=4\cdot 10^{-3}$, $s_b=0.7$. Разумеется, не всякая зависимость описывается уравнением прямой линии. Однако в ряде случаев можно путем несложных преобразований привести к линейной более сложную зависимость. Так, например, если $y=\frac{k}{x}+l$, то, введя новую переменную $z=1/x$, получим линейную связь между y и z. Точно так же, если $y=ab^x$, то логарифмируя, придем к линейной связи между x и $\lg y$. Поэтому, пользуясь линейными уравнениями, можно находить оптимальные функции в довольно большом числе важных случаев. Теория позволяет находить коэффициенты уравнений и в том случае, когда связь между измеряемыми величинами описывается более сложными функциями.

Следует подчеркнуть, что способ наименьших квадратов не может дать ответа на вопрос о том, какого вида функция лучше всего аппроксимирует данные экспериментальные точки.

Вид интерполирующей функции должен быть задан на основании каких-то физических соображений. Метод наименьших квадратов позволяет нам лишь выбрать, какая из прямых, экспонент или парабол является лучшей прямой, лучшей экспонентой или лучшей параболой.

Вообще говоря, можно утверждать, что, чем больше произвольных параметров содержит интерполирующая функция, тем лучше она аппроксимирует данные точки. Поэтому задача оптимальной интерполяции, по-видимому, должна ставиться так: подобрать наилучшую интерполирующую функцию при наименьшем числе параметров. Очевидно, что в общем виде эта задача не решается и выбор вида функции обычно осуществляется либо на основании физических соображений, либо рядом эмпирических проб.

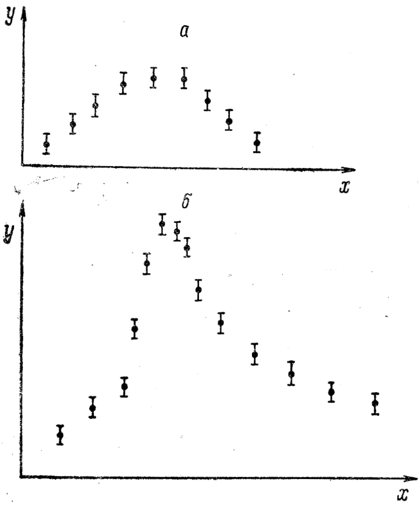

Рис. 15. Выбор интервалов независимой переменной.

Отметим, что вычисления по способу наименьших квадратов достаточно громоздки. Существуют хорошо разработанные схемы, облегчающие вычисление и контроль. Они описаны в специальных руководствах.

При составлении уравнений по способу наименьших квадратов мы предположили, что ошибкам подвержены только величины y_i, а величины x_i известны точно. Если это не так, то следует искать интерполирующую функцию таким образом, чтобы сумма квадратов расстояний от точек $x_i y_i$ до искомой кривой была минимальной. (Т. е. опускать перпендикуляры из наших точек на искомую кривую, как показано на рис. 14 пунктиром). Если точности, с которой измерены разные значения x_i и y_i, различны, то при проведении интерполирующей кривой это необходимо учитывать, приписывая соответствующие веса отдельным точкам. Это, разумеется, усложняет вычисления, но должно выполняться всегда, когда погрешность измерения существенно зависит от значения измеряемой величины.

При построении интерполирующей кривой по способу наименьших квадратов и выборе интерполирующей функции необходимо соблюдать ряд предосторожностей, чтобы не получить результатов совершенно нелепых. Это замечание, разумеется, относится и к другим способам интерполирования.

Для того чтобы интерполирование дало удовлетворительные результаты, необходимо быть уверенным, что исследуемая зависимость описывается «хорошей» функцией, т. е. такой, которая в изучаемой области не имеет особых точек, разрывов и очень больших значений второй и третьей производной. Иначе говоря, кривая должна быть достаточно гладкой. При этом измеренные точки должны быть расположены по всей исследуемой области

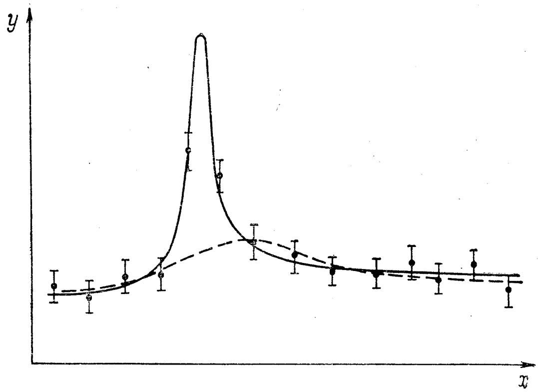

Рис. 16. Интерполирующая кривая для функции с острым максимумом.

достаточно равномерно (рис. 15, *а*), однако сгущаясь там, где функция быстро изменяет свое значение (рис. 15, *б*).

Конечно, когда о ходе зависимости $y=f(x)$ ничего не известно, то приходится ограничиваться равномерным расположением, проводя дополнительные измерения при обнаружении подозрительно выскакивающих результатов. Следует помнить, что экстраполяция кривой за пределы крайних точек, для которых произведены измерения, недопустима.

Приведем пример, показывающий, к каким грубым ошибкам может привести недостаточно критичное применение метода наименьших квадратов к быстро меняющимся функциям. Допустим, известно, что искомая зависимость представляется кривой, имеющей один острый максимум и медленно спадающие «крылья», как это представлено на рис. 16. Получен ряд экспериментальных точек, измеренных с одинаковой степенью точности. Очевидно, что небольшое число точек, расположенных вблизи максимума, будет вносить малый вклад в величину $\sum(y-y_i)^2$. Вследствие этого минимум суммы обеспечит хорошее совпадение интерполирующей кривой с экспериментальными точками на крыльях, совершенно не отражая ход истинной зависимости вблизи максимума, и найденная способом наименьших квадратов кривая может пройти так, как показано, например, на рис. 16 пунктиром.

Этот пример наглядно показывает, сколь осторожно нужно подбирать интерполирующие функции.

III. ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО

При вычислении среднего арифметического нет необходимости суммировать все результаты измерений. Лучше поступать следующим образом.

Среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{66}$$

можно представить в более удобном для вычислений виде: выберем произвольное число x_0, близкое к $\bar{x}$. Тогда выражение, определяющее $\bar{x}$, можно преобразовать:

$$\bar{x} = \frac{[x_0 + (x_1 - x_0)] + [x_0 + (x_2 - x_0)] + \ldots + [x_0 + (x_n - x_0)]}{n} =$$

$$= x_0 + \frac{(x_1 - x_0) + (x_2 - x_0) + \ldots + (x_n - x_0)}{n}, \tag{67}$$

величины $(x_i - x_0)$ — малые числа, так как x_0 мы выбрали близким к x. Поэтому суммирование и вычисление среднего существенно облегчается. В качестве примера выберем ряд измерений отрезка длины базиса геодезической съемки, выполненных особенно тщательно (табл. 7).

Вычисления делаются еще более простыми, если обратить внимание на то, что первые шесть значащих цифр (146.308) во всех измерениях одинаковы.

От измерения к измерению меняются только последние две цифры. Очевидно, что при вычислении среднего арифметического, а также ошибок первые шесть цифр можно не принимать во внимание, учтя их только в конечном результате.

Последние две цифры даны в третьей колонке. Их мы пока можем рассматривать как результаты измерений x_i, и для них будем проводить вычисления. За x_0 принимаем округленное число, кажущееся нам наиболее близким к среднему арифметическому. По-видимому, таким числом является 146.30860 ($x_0=60$).

Таблица 7

Обработка измерений геодезического базиса

n	x, м	x	$x_0=60$, x_i-x_0	$x'_0=70$, $x_i-x'_0$	$(x_i-x_0)^2$	$(x_i-x'_0)^2$
1	2	3	4	5	6	7
1	146.30876	76	+16	+ 6	256	36
2	146.30864	64	+ 4	− 6	16	36
3	146.30856	56	− 4	−14	16	196
4	146.30853	53	− 7	−17	49	289
5	146.30850	50	−10	−20	100	400
6	146.30862	62	+ 2	− 8	4	64
7	146.30887	87	+27	+17	729	289
8	146.30862	62	+ 2	− 8	4	64
9	146.30879	79	+19	+ 9	361	81
10	146.30873	73	+13	+ 3	169	9
	Сумма	—	+62	−38	1704	1464

$$\bar{x}=60+\frac{62}{10}=66.2;\quad \bar{x}'=70-\frac{38}{10}=66.2;\quad \bar{x}=146.308662.$$

Итак, полагаем $x_0=146.30860$. В четвертой колонке табл. 7 выписаны разности (x_i-x_0), сумму которых легко подсчитать даже в уме. Среднее арифметическое вычисляется теперь с помощью суммирования чисел этой колонки совсем легко. Оно равно 146.308662 м (заметим, что для среднего арифметического указано на один десятичный знак больше, чем дано в результатах отдельных измерений). Такой прием вычислений позволил нам операции с восьмизначными числами заменить операциями с двухзначными. Это значительно экономит время, затрачиваемое на расчеты.

Для контроля правильности вычислений удобно выбирать другое, несколько отличное значение x_0, обозначенное x_0', равное, например, 146.30870. В пятой колонке приведены разности $(x_i - x_0')$, а внизу их сумма. Если вычисления верны, то значение $\bar{x}$, разумеется, получается одним и тем же при использовании чисел как четвертой, так и пятой колонок.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОШИБОК

Приемы вычисления ошибок мы проиллюстрируем на примере тех же измерений длины, представленных в табл. 7.

Вычисление средней квадратичной погрешности проводится просто, если сделать несложное преобразование формулы (13). Напишем выражение для дисперсии, в котором выполним возведение в квадрат:

$$s_n^2 = \frac{\sum\limits^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1} = \frac{(\bar{x}^2 - 2\bar{x}x_1 + x_1^2) + \ldots + (\bar{x}^2 - 2\bar{x}x_n + x_n^2)}{n-1} =$$

$$= \frac{n\bar{x}^2}{n-1} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n-1} - \frac{2\bar{x}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n-1},$$

но

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

есть среднее арифметическое $\bar{x}$. Подставляя это значение $\bar{x}$, после несложных преобразований получаем

$$s_n^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \dfrac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{n}}{n-1}. \tag{68}$$

Нетрудно показать, что если мы введем сюда x_0, т. е. заменим x_i на $x_0 + (x_i - x_0)$, то окончательно имеем

$$s_n^2 = \frac{(x_0 - x_1)^2 + \ldots + (x_0 - x_n)^2 - \dfrac{[(x_0 - x_1) + \ldots + (x_0 - x_n)]^2}{n}}{n-1}. \tag{69}$$

Если x_0 выбрано так, что $x_0 - x_i$ содержит не более одной-двух значащих цифр, то вычисления не представляют труда. Их легко производить в уме, однако лучше пользоваться таблицами квадратов и квадратных корней, данных в Приложении (табл. VI—VIII).

Контроль правильности вычислений также удобнее всего проводить, задавшись двумя несколько различными значениями x_0 и проделав вычисления для каждого из них. Разумеется, окончательные результаты должны совпасть.

Для подсчета ошибки в колонках 6 и 7 табл. 7 приведены квадраты величин $(x_i - x_0)^2$ и $(x_i - x_0')^2$, а внизу — суммы этих квадратов.

Для вычисления s_n воспользуемся значением полученных сумм

$$s_n^2 = \frac{1704 - \frac{(62)^2}{10}}{9} = 147,$$

$$s_n'^2 = \frac{1464 - \left(\frac{38}{10}\right)^2}{9} = 147.$$

Таким образом, оба значения s_n^2 совпали:

$$s_n = 12.3 \approx 12, \quad s_{n\bar{x}} \approx \frac{12}{\sqrt{10}} \approx 3.6.$$

При большом числе измерений можно значительно облегчить работу, сгруппировав результаты в определенном порядке.

Таблица 8

Обработка большого ряда наблюдений с помощью сгруппированных данных

x_i	k	$x_0 = 128$			$x_0' = 129$		
		$x_i - x_0$	$k(x_i - x_0)$	$k(x_i - x_0)^2$	$(x_i - x_0')$	$k(x_i - x_0')$	$k(x_i - x_0')^2$
125	2	—3	—6	18	—4	—8	32
126	3	—2	—6	12	—3	—9	27
127	9	—1	—9	9	—2	—18	36
128	15	0	0	0	—1	—15	15
129	11	+1	+11	11	0	0	0
130	7	+2	+14	28	1	7	7
131	2	+3	+6	18	2	4	8
132	1	+4	+4	16	3	3	9
Сумма	50	—	+14	+112	—	—36	+134

Удобнее всего расположить их в порядке возрастания величин x_i. Для примера возьмем ряд из пятидесяти наблюдений, в результате которых были получены следующие значения измеряемой величины: 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, причем 125 наблюдалось два раза, 126 — три, 127 — девять раз, и т. д.

Расположим наши результаты и количество наблюдений каждого из них (k) так, как это показано в первой и второй колонках табл. 8. Дальнейший порядок расчетов виден из таблицы.

Проделав вычисления для двух значений x_0 (128 и 129), мы видим, что оба полученных значения $\bar{x}$ и s совпали. Это обычно является достаточной гарантией правильности вычислений.

$$\bar{x} = 128 + \frac{14}{50} = 128.28 \approx 128.3,$$

$$\bar{x}' = 129 - \frac{36}{50} = 128.28 \approx 128.3,$$

$$s^2 = \frac{12 - \frac{14^2}{50}}{49} = 2.21,$$

$$s'^2 = \frac{134 - \frac{36^2}{50}}{49} = 2.21,$$

$$s = 1.49 \approx 1.5, \quad s_{\bar{x}} = \frac{1.5}{\sqrt{50}} \approx 0.2.$$

При интерполяции методом наименьших квадратов вычисления довольно громоздки, однако есть ряд приемов, позволяющих их упростить.* Здесь мы ограничимся основными сведениями.

Если изучаемая зависимость нелинейна, то ее, как было ранее сказано, часто удается путем несложных преобразований привести к линейной.

При большом числе линейных уравнений вычисления остаются достаточно трудоемкими. Их можно упростить следующим приемом. В качестве приближенного значения принимается произвольная функция, которая «на глаз» кажется хорошо удовлетворяющей экспериментальным точ-

* Подробнее об этом см., например: Уорсинг А. и Геффнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных. ИЛ, 1949.

кам. Вычисляются разности ординат экспериментальных значений и принятой нами аппроксимации. К ним прилагается метод наименьших квадратов. При этом числа, с которыми приходится иметь дело, уменьшаются и вычисления существенно упрощаются. Если интервалы Δx между точками, в которых сделаны наблюдения, равны, то это приводит к дальнейшему сокращению объема вычислений, позволяя пользоваться готовыми таблицами. Разумеется, при большом числе уравнений желательно применение ЭВМ.

3. О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений. Вычисления, произведенные с бóльшим числом десятичных знаков, чем это необходимо, требуют лишней затраты труда и создают ложное впечатление о большой точности измерений. В то же время, разумеется, не следует ухудшать результаты измерений, пользуясь излишне грубыми методами вычислений. Так, например, если точность измерений составляет около 1%, то для вычислений можно пользоваться логарифмической линейкой, позволяющей надежно отсчитывать три значащие цифры. При измерениях, выполненных с точностью 1—0.1%, можно пользоваться четырехзначными таблицами логарифмов.

Во всех случаях нужно придерживаться следующего простого правила.

Ошибка, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок (т. е. в 10 раз) *меньше суммарной ошибки измерений.* При этом можно быть уверенным, что в результате арифметических операций мы ощутимым образом не исказим нашего результата.

Поясним это правило на следующих примерах.

1. Для измерения электрического сопротивления провода определена сила протекающего через него тока, оказавшаяся равной 27.3 ма, и падение напряжения на нем — 6.45 в. Применявшиеся приборы гарантировали точность измерения этих величин в 1%.

Найдем величину сопротивления из закона Ома:

$$R=\frac{V}{I}=\frac{6.45}{0.0273}=236.2637 \text{ ом},$$

так как V и I определены с точностью до 1%, то ошибка определения R несколько больше 1%. Поэтому вычисления целесообразно делать не точнее чем до четвертого знака и результат записать в виде 236.3 ом.

Оценка ошибки результата может быть сделана на том основании, что каждый из двух сомножителей V и $1/I$ определен с точностью до 1%. Их произведение вычисляется с точностью, несколько меньшей, но не худшей чем 2%. Поэтому результат окончательно может быть записан в виде $R=236\pm4$ ом. Доверительную вероятность для ошибки в данном случае определить нельзя, ибо указание погрешности прибора дает только верхний предел ошибки, но не закон распределения ошибок для данного прибора.

2. Сопротивление провода определяется путем измерения его длины и диаметра. Удельное сопротивление известно с относительной точностью, значительно большей, чем измеряемые величины.

В результате 10 измерений длины l и диаметра d получены $l=25.323$ мм, $s_l=0.12$ мм, $d=1.54$ мм, $s_d=0.21$ мм.

Относительная среднеквадратичная погрешность l будет определена из соотношения

$$\frac{s_R^2}{R^2}=\frac{s_{d^2}^2}{(d^2)^2}+\frac{s_l^2}{l^2}.$$

Принимая во внимание, что $s_{d^2}=s_{d\cdot d}=2_{s_d}$, имеем

$$\frac{s_R}{R}=\sqrt{\left(\frac{2_{s_d}}{d^2}\right)^2+\frac{s_l^2}{l^2}}.$$

Очевидно, что при окончательном подсчете ошибку измерения длины практически можно не учитывать. Коэффициент вариации измерений площади (квадрата диаметра) будет $s_{d^2}/d^2=2s_d/d^2=1{\cdot}8\%$. Если мы ограничиваемся доверительной вероятностью 0.95, то табл. II дает для этого случая $t_{\alpha n}=2.3$ и относительная погрешность среднего арифметического из наших десяти измерений будет

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{1.8\%\cdot 2.3}{\sqrt{10}}\approx 1.3\%.$$

Это ошибка, соответствующая доверительной вероятности 0.95.

Таким образом, R нужно вычислить с точностью, немного большей 1%, т. е. ограничиться третьей значащей цифрой.

В случае медного провода для комнатной температуры мы получим

$$R = 1.78 \cdot 10^{-6} \frac{4l}{\pi d^2} = 2.42 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$$

с погрешностью 1.3%, или $3 \cdot 10^{-6}$ ом (для доверительной вероятности 0.95).

4. ЧИСЛО ЗНАКОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Мы знаем, что величина случайной ошибки s_n, как и сами результаты измерений, подвержена случайным колебаниям.

Примеры, приведенные ранее (см. стр. 53), показывают, что даже при довольно большом числе измерений доверительные интервалы для σ получаются большие, т. е. величину ошибки мы всегда определяем достаточно грубо.

При 10 измерениях σ определяется с погрешностью более 30%. Поэтому, как правило, следует в этом случае для σ приводить одну значащую цифру, если она больше 3, и две значащие цифры, если первая из них меньше 4.

Например, если s_{10} получилось равным 0.523, то приводим одну цифру $s=0.5$; если $s_{10}=0.124$, то следует давать две значащие цифры $s=0.12$.

При $n=25$ $\sigma_{s_n}=1/7$. Очевидно, что в этом случае нет смысла вычислять и приводить для σ более двух значащих цифр, т. е. нужно писать $s=2.3$, а не 2.34 или $s=0.52$, а не 0.523.

Необходимые округления всегда следует делать, так как излишне большое число приводимых десятичных знаков создает ложное впечатление о большой точности результата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрены основные приемы оценок ошибок измерений, причем использованы некоторые результаты современных работ в данной области.

Представляется вполне возможным и, более того, необходимым именно такой подход к преподаванию этого раздела науки взамен эклектики из статистики XIX века и ни чем не обоснованных рекомендаций вроде правила вычисления предельной ошибки функции.

В настоящее время обучение проходит примерно следующим образом: с первых дней пребывания в вузе будущие физики и химики, а также инженеры обычно приступают к занятиям в физической лаборатории, основная задача которых — научить правильно измерять различные физические величины.

В программу работы лаборатории включаются как простейшие измерения длины, объема, удельного веса, так и более сложные опыты по измерению различных электрических и оптических величин, молекулярного веса, вязкости и т. п.

Как правило, перед началом лабораторных занятий студентам преподавали элементы теории ошибок, на основе которой они должны были после получения результата измерения оценить его погрешность. В большинстве случаев вопрос об ошибках измерений преподносился в нарочито примитивной форме, а иногда давались даже неверные рекомендации и правила оценки погрешностей.

За последние 10 лет положение несколько изменилось и в ряде высших учебных заведений преподавание теории ошибок приведено в согласие с современным уровнем знаний. Появились соответствующие элементарные руководства.

Однако хотя и существует строгая математическая теория ошибок, великолепно изложенная в ряде классических и современных руководств, наряду с ней все еще бытует другая «теория ошибок», попавшая в большинство руководств к лабораторным занятиям по физике и даже в некоторые справочники, примеры которых, пожалуй, не стоит указывать.

Правила вычисления и оценки погрешностей с позиции этих двух теорий существенно различны, и, к несчастью, студенты иногда обучаются последней «теории ошибок». В результате такого положения некоторые специалисты, порой очень эрудированные в своей области, не всегда умеют грамотно оценить погрешности результата измерений. С этим приходится сталкиваться уже не только в студенческих и дипломных работах, но и в диссертациях, научных статьях и книгах.

Неумение правильно оценить погрешности может привести и в ряде случаев приводит к неправильно установленным метрологическим требованиям к промышленным изделиям, что, разумеется, наносит прямой материальный ущерб. Таким образом, вопрос о правильном применении теории ошибок имеет отнюдь не чисто академический интерес.

В устаревших лабораторных руководствах вопросы об ошибках измерений излагаются обычно по довольно однообразной схеме, включающей следующие основные моменты.

1. Каждое измерение производится несколько раз, и в качестве наиболее вероятного значения принимается среднее арифметическое $\bar{x}$ из результатов отдельных измерений.

2. Вычисляется средняя арифметическая ошибка результата.

3. За меру ошибки величины x принимается либо величина $\sum|\bar{x}-x_1|/R$, либо максимальное из всей серии значение $|x_i-\bar{x}|$. Последнее называется часто предельной, или максимальной ошибкой.

4. Ошибка функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нескольких переменных x_i определяется по соотношению

$$\Delta f=\sum_{n}^{1}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\Delta x_i\right|. \qquad (70)$$

Вычисленная по этой формуле ошибка Δf также называется предельной, или максимальной, причем под Δx_i подразумеваются иногда средние арифметические значения погрешностей $|\bar{x} - x_i|$, иногда максимальные погрешности этих величин.

Однако проведенные таким образом оценки точности измерений приносят очень малую пользу.

Из преподнесенного ему материала студент может сделать (и часто делает) вывод о том, что многократные измерения необходимы только для вычисления погрешностей.

О той роли, которую играют многократные измерения для увеличения точности конечного результата, далеко не всегда даются строгие и последовательные пояснения.

Иногда указывают, что однократно проведенное измерение вообще «не имеет никакой ценности». Между тем практика говорит о другом — большинство измерений, результатами которых мы с успехом пользуемся, выполнены один раз. И так поступают часто не только в технике, но и при научных исследованиях. Очевидно, что единичным измерением можно ограничиваться, когда ошибка результата задается не случайными ошибками эксперимента, а погрешностью измерительного прибора.

Отметим, что увеличение числа измерений не может привести к как угодно малой случайной погрешности, хотя это непосредственно следует из соотношения

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_n}{\sqrt{n}},$$

которое приводится иногда недостаточно критично.

Применение соотношения (70) взамен правильной для независимых измерений формулы (56) приводит, вообще говоря, к завышению ошибки результата.

В этом не было бы ничего плохого, если бы не то обстоятельство, что величина завышения должна оцениваться в каждом конкретном случае, так как она зависит от величин и числа переменных.

Формула (70) обосновывается обычно так: «. . . возьмем худший случай, когда все частные погрешности $\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k\right|\right)$ будут иметь одинаковые знаки».

Допустим, что у нас пять переменных. Тогда вероятность того, что все ошибки будут одного знака, составит

$(1/2)^4=1/16$. При десяти переменных эта вероятность составит около 1/500, а вероятность того, что все ошибки будут одного знака и одновременно иметь максимальное значение, в указанных примерах практически равна нулю.

Зачем же нужны такие завышенные оценки погрешностей? Очевидно, что они совершенно неправильно ориентируют студента, в значительной мере обесценивая качество выполненных им измерений.

Следует иметь в виду, что в отличие от приращения функции (с которым иногда отождествляется погрешность измерений) для указания случайной погрешности измерений нужно задать не одно, а два числа — величину погрешности и доверительную вероятность, которой эта погрешность соответствует.

Часто последняя величина в явном виде не задается, но тогда необходимо указать, как и из какого числа наблюдений вычислялась погрешность.

Именно потому, что формулы теории ошибок позволяют сосчитать не только величину ошибки (доверительный интервал), но и доверительную вероятность, ими всегда следует пользоваться, совершенно исключив из употребления на всех стадиях обучения и практической работы правила, аналогичные сформулированным в пунктах 3 и 4 настоящего раздела.

Пожалуй, следует остановиться на том, какую из ошибок надо вычислять — среднюю арифметическую либо среднюю квадратичную.

В лабораторных руководствах иногда формулируется правило, гласящее, что при большом n нужно вычислять величину s, а при малом — r. Легко видеть, что это правило нецелесообразно. Действительно, если n достаточно велико, то между r и s существует простое соотношение $r=0.8\ s$.

Следовательно, в принципе безразлично, какую из двух ошибок вычислять, и следует остановиться на той, для которой расчеты проще, т. е. ошибкой r. Однако именно при малом числе наблюдений нужно пользоваться средней квадратичной ошибкой, для которой в этом случае легко определить доверительную вероятность, пользуясь таблицами для распределения Стьюдента. В то же время доверительная вероятность для среднеарифметической ошибки довольно сложным образом зависит от числа наблюдений, из которых эта ошибка подсчитана, и необходимые для соответствующих расчетов табличные данные, насколько нам известно, отсутствуют.

Здесь отмечены основные пункты, в которых адаптированная теория погрешностей расходится с правильной. По-видимому, вполне ясны недостатки адаптированной теории, а то, что она преподносится с первых шагов обучения и далеко не всегда дезавуируется впоследствии, приводит иногда к прочному усваиванию ее аксиом будущими физиками, химиками и инженерами.

Представляется также, что следует с самого начала пояснить студентам основные понятия теории вероятностей, случайных ошибок и закона их распределения, после чего сообщить готовые формулы, по которым подсчитываются ошибки, а также ознакомить их с таблицами интеграла вероятностей и коэффициентами Стьюдента.

В необходимости отложить доказательство тех или иных формул до приобретения студентами соответствующих сведений по математике, на наш взгляд, ничего плохого нет.

Один из аргументов, который иногда выдвигается в защиту формулы (70), заслуживает более детального рассмотрения. В ряде случаев погрешность измерений задается не их случайными ошибками, распределенными по гауссовому или близкому к нему закону, а погрешностью измерительного прибора, определяемой как его класс точности. Если случайные ошибки измерений меньше класса точности прибора, то именно последний определяет максимальное возможное расхождение между измеренным и истинным значениями интересующей нас величины. В этом случае класс точности будет определять максимальную ошибку, отпадает необходимость в многократных измерениях и выводе среднего значения, так как в пределах класса точности результаты отдельных измерений будут совпадать. При такой ситуации ошибку суммы двух величин можно определять как сумму ошибок обеих этих величин или как удвоенный класс точности. Однако в данном случае речь идет скорее о систематических ошибках, к которым статистические закономерности можно применять лишь очень осторожно и далеко не всегда.

Нам представляется существенным прежде всего научить студента обработке результатов и правильной оценке случайных ошибок, а также внимательному изучению и исключению или учету систематических ошибок. По поводу необходимости применения формулы (70) приходилось слышать также следующее: в ряде случаев очень существенно определить измеряемую величину так, чтобы она ни в коем случае не превышала заданного значения. Для этого на первый взгляд представляется разумным, задав максимальные значения ошибок Δx_i, получить максимальное приращение функции $f(x_i)$.

Однако при реальных измерениях наибольшее значение $f(x_i)$ не может быть определено. Можно выбрать ошибки Δx так, чтобы им соответствовала достаточно большая доверительная вероятность.

Для этого обычно достаточно выбрать $\Delta x = 2\sigma$, но ничто не мешает в особо ответственных случаях положить $\Delta x = 3\sigma$ или $\Delta x = 5\sigma$, и т. д.

При этом доверительная вероятность для ошибки ΔY, определенной по формуле (70), будет, вообще говоря, больше, чем та, которая задана для Δx_i. Однако эту вероятность мы не можем оценить простыми способами. Поэтому целесообразно пользоваться формулой (56), и если нет возможности доказать, что имеет место нормальное распределение погрешностей для суммарной ошибки, то для определения доверительного интервала и доверительной вероятности воспользоваться неравенством Чебышева.

Наконец, последний момент, который, как нам кажется, следует освещать при обучении, — со сколькими знаками нужно вычислять и приводить погрешность.

Очевидно, что величина ошибки должна вычисляться с той точностью, с которой она может быть определена в процессе измерений. Точность зависит от числа измерений и на это обстоятельство следует указать совершенно определенно.

Хорошо известно, что теория ошибок, так же как и основы теории вероятностей, достаточно сложны для малоподготовленного читателя и их усвоение требует известной вдумчивости и затраты труда, однако, вероятно, гораздо меньшего, чем необходимо для понимания основ математического анализа.

Изложенные выше правила должны не только научить верной оценке ошибок, но и оказаться полезными при последующем изучении строгой теории измерительного процесса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТАБЛИЦЫ

1. Среднее арифметическое величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}.$$

2. Взвешенное среднее

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{n} p_i x_i}{\sum_{1}^{n} p_i}.$$

3. Абсолютная погрешность

$$\Delta x_i = x - x_i$$

или

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i. \qquad (*)$$

Здесь $\bar{x}$ — среднее арифметическое значений измеряемой величины, x — ее истинное значение. Так как x обычно неизвестно, то для определения погрешности служит формула (*).

4. Относительная погрешность

$$\Delta x_{\text{отн}} = \frac{\Delta x_i}{x}, \quad \text{или} \quad \Delta x_{\text{отн}} = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}}.$$

5. Средняя квадратичная ошибка единичного результата при n измерениях

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}}.$$

6. Выборочная дисперсия

$$s_n^2 = \frac{\sum_{n}^{1} (\bar{x} - x_n)^2}{n - 1}.$$

7. Генеральная дисперсия

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} s_n^2.$$

8. Вес измерения

$$p = \frac{k}{\sigma^2}.$$

9. Дисперсия неравноточных измерений

$$s_n^2 = \frac{\sum_{1}^{n} p_i (\bar{x} - x_i)^2}{n \sum_{1}^{n} p_i}.$$

10. Коэффициент вариации

$$w = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \text{ (для генеральной совокупности)},$$

$$w_n = \frac{s_n}{\bar{x}} \cdot 100\% \text{ (для выборочной совокупности)},$$

11. Среднеарифметическая ошибка (выборочная)

$$r_n = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + \ldots + |\bar{x} - x_n|}{n} = \frac{\sum_{1}^{n} |\bar{x} - x_i|}{n}.$$

12. Генеральная среднеарифметическая ошибка

$$\rho = \lim_{n \to \infty} r_n.$$

13. Связь между среднеарифметической и среднеквадратичной ошибками:

$$\rho = 0.80\sigma; \quad \sigma = 1.25\rho.$$

14. Доверительная вероятность для интервалов $\Delta x = k\sigma$

Δx	σ	2σ	3σ
α	0.68	0.95	0.997.

15. Закон сложения дисперсий:

$$\text{если } Z = X + Y, \quad \text{то } s_z^2 = s_x^2 + s_y^2.$$

16. Ошибка среднего арифметического

$$s_{n\bar{x}} = \frac{s_n}{\sqrt{n}}.$$

17. Коэффициент Стьюдента

$$t_{\alpha n} = \frac{\sqrt{n}\,\Delta x}{s_n}.$$

18. Закон сложения независимых случайных ошибок:

$$\text{если } Y = X_1 \cdot X_2 \ldots X_n,$$

то

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta X_n}{X_n}\right)^2;$$

$$\text{если } Y = \frac{X_1}{X_2}, \quad \text{то } \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2;$$

если $Y = AX + B$, где A и B постоянные,

то

$$\Delta Y = A\Delta X.$$

19. Неравенство Чебышева

$$P(|\bar{x} - x_i| < \alpha\sigma) < \frac{1}{\alpha^2}.$$

20. Случайная ошибка функции:

$$\text{если } Y = f(X), \quad \text{то } \Delta Y = f'(X)\,\Delta X$$

и

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f'(X)}{f(X)}\,\Delta X;$$

если $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

то

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\,\Delta X_i\right)^2}$$

и

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\sqrt{\sum_{1}^{n}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\,\Delta X_i\right)^2}.$$

21. Способ наименьших квадратов

$$y=ax+b,$$

$$a=\frac{n\sum_{1}^{n}x_iy_i-\sum_{1}^{n}x_i\sum_{1}^{n}y_i}{n\sum_{1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{1}^{n}x_i\right)^2},$$

$$b=\frac{\sum_{1}^{n}x_i^2\sum_{1}^{n}y_i-\sum_{1}^{n}x_i\sum_{1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{1}^{n}x_i\right)^2},$$

$$s_0^2=\frac{\sum_{1}^{n}y_i^2}{n-2}-\frac{\left(\sum_{1}^{n}y_i\right)^2}{n(n-2)}-\frac{\left(n\sum_{1}^{n}x_iy_i-\sum_{1}^{n}x_i\sum_{1}^{n}y_i\right)^2}{n(n-2)\left[n\sum_{1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{1}^{n}x_i\right)^2\right]},$$

$$s_a^2=\frac{s_0^2n}{n\sum_{1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{1}^{n}x_i\right)^2},$$

$$s_b^2=\frac{s_0^2\sum_{1}^{n}x_i^2}{n\sum_{1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{1}^{n}x_i\right)^2}.$$

ФОРМУЛЫ, УПРОЩАЮЩИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. Среднее арифметическое

$$\bar{x}=x_0+\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i-x_0), \qquad (**)$$

здесь x_0 — произвольное число, близкое к x.

2. Среднеквадратичная ошибка:
а) единичного измерения

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - \frac{\left[\sum_1^n (x_0 - x_i)\right]^2}{n}}{n-1}}, \qquad (***)$$

б) среднего арифметического

$$s_{n\bar{x}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - \left[\sum_1^n (x_0 - x_i)\right]^2}{n-1}}. \qquad (****)$$

Таблица I

Доверительные вероятности α для доверительного интервала, выраженного в долях средней квадратичной ошибки $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma}$

Функция Лапласа: $2\theta(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon = \alpha$

ε	α	ε	α	ε	α
0	0	1.2	0.77	2.6	0.990
0.05	0.04	1.3	0.80	2.7	0.993
0.1	0.08	1.4	0.84	2.8	0.995
0.15	0.12	1.5	0.87	2.9	0.996
0.2	0.16	1.6	0.89	3.0	0.997
0.3	0.24	1.7	0.91	3.1	0.9981
0.4	0.31	1.8	0.93	3.2	0.9986
0.5	0.38	1.9	0.94	3.3	0.9990
0.6	0.45	2.0	0.95	3.4	0.9993
0.7	0.51	2.1	0.964	3.5	0.9995
0.8	0.57	2.2	0.972	3.6	0.9997
0.9	0.63	2.3	0.978	3.7	0.9998
1.0	0.68	2.4	0.984	3.8	0.99986
1.1	0.73	2.5	0.988	3.9	0.99990
				4.0	0.99993

Таблица II

Коэффициенты Стьюдента t_{α_n}

n	α												
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	0.16	0.33	0.51	0.73	1.00	1.38	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	.14	.29	.45	.62	0.82	1.06	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	.14	.28	.42	.58	.77	0.98	1.3	1.6	2.4	3.2	4.5	5.8	12.9
5	.13	.27	.41	.57	.74	.94	1.2	1.5	2.1	2.8	3.7	4.6	8.6
6	.13	.27	.41	.56	.73	.92	1.2	1.5	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	.13	.27	.40	.55	.72	.90	1.1	1.4	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	.13	.26	.40	.55	.71	.90	1.1	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	.13	.26	.40	.54	.71	.90	1.1	1.4	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	.13	.26	.40	.54	.70	.88	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.8
11	.13	.26	.40	.54	.70	.88	1.1	1.4	1.8	2.2	2.8	3.2	4.6
12	.13	.26	.40	.54	.70	.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.5
13	.13	.26	.40	.54	.70	.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.3
14	.13	.26	.39	.54	.69	.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.0	4.2
15	.13	.26	.39	.54	.69	.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.0	4.1
16	.13	.26	.39	.54	.69	.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	2.9	4.0
17	.13	.26	.39	.54	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0

Таблица II (*продолжение*)

n	α												
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
18	0.13	0.26	0.39	0.53	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
19	.13	.26	.39	.53	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	3.9
20	.13	.26	.39	.53	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
21	.13	.26	.39	.53	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
22	.13	.26	.39	.53	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
23	.13	.26	.39	.53	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
24	.13	.26	.39	.53	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
25	.13	.26	.39	.53	.69	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
26	.13	.26	.39	.53	.68	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
27	.13	.26	.39	.53	.68	.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
28	.13	.26	.39	.53	.68	.86	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
29	.13	.26	.39	.53	.68	.86	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
30	.13	.26	.39	.53	.68	.85	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
40	.13	.26	.39	.53	.68	.85	1.1	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.6
60	.13	.25	.39	.53	.68	.85	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
120	.13	.25	.39	.53	.68	.85	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4
∞	.13	.25	.39	.52	.67	.84	1.0	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	3.3

Таблица III

Доверительные интервалы для σ

α	0.99		0.98		0.95		0.90	
n \ γ	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
2	0.36	160	0.39	80	0.45	32	0.51	16
3	0.43	14	0.47	10	0.52	6.3	0.58	4.4
4	0.48	6.5	0.51	5.1	0.57	3.7	0.62	2.9
5	0.52	4.4	0.55	3.7	0.60	2.9	0.65	2.4
6	0.55	3.5	0.58	3.0	0.62	2.5	0.67	2.1
7	0.57	3.0	0.60	2.6	0.64	2.2	0.69	1.9
8	0.59	2.7	0.62	2.4	0.66	2.0	0.70	1.8
9	0.60	2.4	0.63	2.2	0.68	1.9	0.72	1.7
10	0.62	2.3	0.64	2.1	0.69	1.8	0.73	1.6
11	0.63	2.2	0.66	2.0	0.70	1.8	0.74	1.6
12	0.64	2.1	0.67	1.9	0.71	1.7	0.75	1.5
13	0.65	2.0	0.68	1.8	0.72	1.6	0.76	1.5
14	0.66	1.9	0.69	1.8	0.73	1.6	0.76	1.5
15	0.67	1.8	0.69	1.7	0.73	1.6	0.77	1.5
16	0.68	1.8	0.70	1.7	0.74	1.5	0.77	1.4
17	0.68	1.8	0.71	1.7	0.75	1.5	0.78	1.4
18	0.69	1.7	0.71	1.6	0.75	1.5	0.79	1.4
19	0.70	1.7	0.72	1.6	0.76	1.5	0.79	1.4
20	0.70	1.7	0.73	1.6	0.76	1.5	0.79	1.4
25	0.73	1.6	0.75	1.5	0.78	1.4	0.81	1.3
30	0.74	1.5	0.77	1.4	0.80	1.3	0.83	1.3
40	0.77	1.4	0.79	1.3	0.82	1.3	0.85	1.2
50	0.79	1.3	0.81	1.3	0.84	1.2	0.86	1.2
70	0.82	1.3	0.84	1.2	0.86	1.2	0.88	1.2
100	0.85	1.2	0.86	1.2	0.88	1.2	0.90	1.1
200	0.89	1.1	0.90	1.1	0.91	1.1	0.93	1.1

Таблица IV

Необходимое число измерений для получения случайной ошибки ε с надежностью α

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{s}$	α					
	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	130
0.2	13	29	70	100	170	280
0.1	47	110	270	390	700	1100
0.05	180	430	1100	1500	2700	4300
0.01	4500	1100	27000	38000	66000	110000

Таблица V

Оценка выскакивающих измерений

$v_{\text{макс}} = \left| \frac{\bar{x} - x_k}{s} \right|$ *в ряду из n измерений для вероятности* β

n	β			
	0.1	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41
4	1.65	1.69	1.71	1.72
5	1.79	1.87	1.92	1.96
6	1.89	2.00	2.07	2.13
7	1.97	2.09	2.18	2.27
8	2.04	2.17	2.27	2.37
9	2.10	2.24	2.35	2.46
10	2.15	2.29	2.41	2.54
11	2.19	2.34	2.47	2.61
12	2.23	2.39	2.52	2.66
13	2.26	2.43	2.56	2.71
14	2.30	2.46	2.60	2.76
15	2.33	2.49	2.64	2.80
16	2.35	2.52	2.67	2.84
17	2.38	2.55	2.70	2.87
18	2.40	2.58	2.73	2.90
19	2.43	2.60	2.75	2.93
20	2.45	2.62	2.78	2.96
21	2.47	2.64	2.80	2.98
22	2.49	2.66	2.82	3.01
23	2.50	2.68	2.84	3.03
24	2.52	2.70	2.86	3.05
25	2.54	2.72	2.88	3.07

ПОЯСНЕНИЯ К ТАБЛ. VI—VIII

Таблицы предназначены для извлечения квадратных корней и возведения в квадрат трехзначных чисел. Ответ дается также с тремя значащими цифрами. Этого вполне достаточно, если пользоваться для вычислений погрешностей формулами (**)—(****) (стр. 94, 95).

Когда число, из которого нужно извлечь корень, содержит больше трех значащих цифр, то округляем его, оставляя три цифры. Если четвертая цифра округляемого числа — 5 или больше, то третья цифра увеличивается на единицу; когда четвертая цифра меньше 5, то третья остается без изменений. Например, 34.256 после округления будет 34.3; 0.076137 округляется до 0.0761.

Разбиваем число на группы по две цифры в каждой, ведя счет цифр вправо и влево от точки.

В приведенных примерах разбитые на группы числа будут выглядеть так: ′34.3 и 0.76′1. Если число не содержит десятичных дробей, то отделение групп ведется справа налево, т. е. 423 разбивается так: 4′23, а 47 так: ′47.

В случае, когда в первой левой группе оказывается одна значащая цифра, для отыскания корня нужно пользоваться табл. VI, а если две — табл. VII. В соответствии с этим правилом корень из чисел 0.07′61 и 4′23 находится по табл. VI, а из чисел ′34.3 и ′47 — по табл. VII.

Корень из числа находится на пересечении строки, номер которой задается первыми двумя значащими цифрами, и колонки, номер которой задается третьей цифрой. Первая цифра ответа помещена только в нулевой колонке, остальные две — в колонке соответствующего номера. Так, $\sqrt{5.42}$ находим на пересечении строк 5.4 и колонки 2 — 2.33.

Число десятичных знаков в результате равно числу групп, которые следует отсчитывать от запятой вправо для чисел меньше единицы и от запятой влево для чисел больше единицы.

Так, $\sqrt{0.07'61} = 0.276$; $\sqrt{4'.23} = 2.06$; $\sqrt{34'.3} = 5.86$; $\sqrt{47} = 6.86$.

Таблица квадратов построена аналогично таблицам квадратных корней.

Для определения в результате положения запятой удобно представить возводимое в квадрат число в виде произведения из числа с одной цифрой в разряде целых на соответствующую степень 10, т. е. 0.0761 записывается в виде $7.61 \cdot 10^{-2}$; $34.3—3.43 \cdot 10^{2}$, и т. д.

При возведении в квадрат показатель степени удваивается, т. е. $(7.61 \cdot 10^{-2})^2 = (7.61)^2 \cdot 10^{-4}$. $(7.61)^2$ берем из таблиц — 57.9; окончательно получим $(0.0761)^2 = (7.61)^2 \cdot 10^{-4} = 57.9 \cdot 10^{-4} = 0.00579$.

Таблица VI

Квадратные корни от 1.00 до 9.99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.00	00	01	01	02	02	03	03	04	04
1.1	05	05	06	06	07	07	08	08	09	09
1.2	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14
1.3	14	14	15	15	16	16	17	17	17	18
1.4	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22
1.5	22	23	23	24	24	24	25	25	26	26
1.6	26	27	27	28	28	28	29	29	30	30
1.7	30	31	31	31	32	32	33	33	33	34
1.8	34	35	35	35	36	36	36	37	37	37
1.9	38	38	39	39	39	40	40	40	41	41
2.0	41	42	42	42	43	43	43	44	44	44
2.1	45	45	46	46	46	47	47	47	48	48
2.2	48	49	49	49	50	50	50	51	51	51
2.3	52	52	52	53	53	53	54	54	54	55
2.4	55	55	56	56	56	56	57	57	57	58
2.5	58	58	59	59	59	60	60	60	61	61
2.6	61	62	62	62	62	63	63	63	64	64
2.7	64	65	65	65	65	66	66	66	67	67
2.8	67	68	68	68	68	69	69	69	70	70
2.9	70	71	71	71	71	72	72	72	73	73
3.0	73	73	74	74	74	75	75	75	75	76
3.1	76	76	77	77	77	77	78	78	78	79
3.2	79	79	79	80	80	80	81	81	81	81
3.3	82	82	82	82	83	83	83	84	84	84
3.4	84	85	85	85	85	86	86	86	87	87
3.5	87	87	88	88	88	88	89	89	89	89
3.6	90	90	90	90	91	91	91	92	92	92
3.7	92	93	93	93	93	94	94	94	94	95
3.8	95	95	95	96	96	96	96	97	97	97
3.9	97	98	98	98	98	99	99	99	99	2.00
4.0	2.00	00	00	01	01	01	01	02	02	02
4.1	02	03	03	03	03	04	04	04	04	05
4.2	05	05	05	06	06	06	06	07	07	07
4.3	07	08	08	08	08	09	09	09	09	10
4.4	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12
4.5	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14
4.6	14	15	15	15	15	16	16	16	16	17
4.7	17	17	17	17	18	18	18	18	19	19
4.8	19	19	20	20	20	20	20	21	21	21
4.9	21	22	22	22	22	22	23	23	23	23
5.0	24	24	24	24	24	25	25	25	25	26
5.1	26	26	26	26	27	27	27	27	28	28
5.2	28	28	28	29	29	29	29	30	30	30
5.3	30	30	31	31	31	31	32	32	32	32
5.4	32	33	33	33	33	33	34	34	34	34

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	2.34	35	35	35	35	36	36	36	36	36
5.6	37	37	37	37	37	38	38	38	38	39
5.7	39	39	39	39	40	40	40	40	40	41
5.8	41	41	41	41	42	42	42	42	42	43
5.9	43	43	43	44	44	44	44	44	45	45
6.0	45	45	45	46	46	46	46	46	47	47
6.1	47	47	47	48	48	48	48	48	49	49
6.2	49	49	49	50	50	50	50	50	51	51
6.3	51	51	51	52	52	52	52	52	53	53
6.4	53	53	53	54	54	54	54	54	55	55
6.5	55	55	55	56	56	56	56	56	57	57
6.6	57	57	57	57	58	58	58	58	58	59
6.7	59	59	59	59	60	60	60	60	60	61
6.8	61	61	61	61	62	62	62	62	62	62
6.9	63	63	63	63	63	64	64	64	64	64
7.0	65	65	65	65	65	66	66	66	66	66
7.1	66	67	67	67	67	67	68	68	68	68
7.2	68	69	69	69	69	69	69	70	70	70
7.3	70	70	71	71	71	71	71	71	72	72
7.4	72	72	72	73	73	73	73	73	73	74
7.5	74	74	74	74	75	75	75	75	75	76
7.6	76	76	76	76	76	77	77	77	77	77
7.7	77	78	78	78	78	78	79	79	79	79
7.8	79	79	80	80	80	80	80	81	81	81
7.9	81	81	81	82	82	82	82	82	82	83
8.0	83	83	83	83	84	84	84	84	84	84
8.1	85	85	85	85	85	85	86	86	86	86
8.2	86	87	87	87	87	87	87	88	88	88
8.3	88	88	88	89	89	89	89	89	89	90
8.4	90	90	90	90	91	91	91	91	91	91
8.5	92	92	92	92	92	92	93	93	93	93
8.6	93	93	94	94	94	94	94	94	95	95
8.7	95	95	95	95	96	96	96	96	96	96
8.8	97	97	97	97	97	97	98	98	98	98
8.9	98	98	99	99	99	99	99	3.00	00	00
9.0	3.00	00	00	01	01	01	01	01	01	01
9.1	02	02	02	02	02	02	03	03	03	03
9.2	03	03	04	04	04	04	04	04	05	05
9.3	05	05	05	05	06	06	06	06	06	06
9.4	07	07	07	07	07	07	08	08	08	08
9.5	08	08	09	09	09	09	09	09	10	10
9.6	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
9.7	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13
9.8	13	13	13	14	14	14	14	14	14	14
9.9	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16

Таблица VII

Квадратные корни от 10.0 до 99.9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3.16	17	19	21	22	24	26	27	28	30
11	32	33	35	36	38	39	41	42	44	45
12	46	48	49	51	52	54	55	56	58	59
13	60	62	63	65	66	68	69	70	71	73
14	74	76	77	78	79	81	82	83	85	86
15	87	89	90	91	92	94	95	96	97	99
16	4.00	01	02	04	05	06	07	09	10	11
17	12	14	15	16	17	18	20	21	22	23
18	24	25	27	28	29	30	31	32	34	35
19	36	37	38	39	40	42	43	44	45	46
20	47	48	49	51	52	53	54	55	56	57
21	58	59	60	62	63	64	65	66	67	68
22	69	70	71	72	73	74	75	76	77	79
23	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
24	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
25	5.00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
26	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
27	20	21	22	23	23	24	25	26	27	28
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
29	39	39	40	41	42	43	44	45	46	47
30	48	49	50	50	51	52	53	54	55	56
31	57	58	59	59	60	61	62	63	64	65
32	66	67	67	68	69	70	71	72	73	74
33	74	75	76	77	78	79	80	81	81	82
34	83	84	85	86	87	87	88	89	90	91
35	92	92	93	94	95	96	97	97	98	99
36	6.00	01	02	02	03	04	05	06	07	07
37	08	09	10	11	12	12	13	14	15	16
38	16	17	18	19	20	20	21	22	23	24
39	24	25	26	27	28	28	29	30	31	32
40	32	33	34	35	36	36	37	38	39	40
41	40	41	42	43	43	44	45	46	47	47
42	48	49	50	50	51	52	53	53	54	55
43	56	57	57	58	59	60	60	61	62	63
44	63	64	65	66	66	67	68	69	69	70
45	71	72	72	73	74	75	75	76	77	77
46	78	79	80	80	81	82	83	83	84	85
47	86	86	87	88	88	89	90	91	91	92
48	93	94	94	95	96	96	97	98	99	99
49	7.00	00	01	02	03	04	04	05	06	06
50	07	08	09	09	10	11	11	12	13	13
51	14	15	15	16	17	18	18	19	20	20
52	21	22	22	23	24	25	25	26	27	27
53	28	29	29	30	31	31	32	33	33	34
54	35	36	36	37	38	38	39	40	40	41

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	42	42	43	44	44	45	46	46	47	48
56	48	49	50	50	51	52	52	53	54	54
57	55	56	56	57	58	58	59	60	60	61
58	62	62	63	64	64	65	66	66	67	67
59	68	69	69	70	70	71	72	72	73	74
60	74	75	76	76	77	78	78	79	80	80
61	81	82	82	83	84	84	85	85	86	87
62	87	88	89	89	90	91	91	92	92	93
63	94	94	95	96	96	97	97	98	99	99
64	8.00	01	01	02	02	03	04	04	05	05
65	06	07	07	08	09	09	10	11	11	12
66	12	13	14	14	15	15	16	17	17	18
67	19	19	20	20	21	22	22	23	23	24
68	25	25	26	26	27	28	28	29	29	30
69	31	31	32	32	33	34	34	35	35	36
70	37	37	38	38	39	40	40	41	41	42
71	43	43	44	44	45	46	46	47	47	48
72	49	49	50	50	51	51	52	53	53	54
73	54	55	56	56	57	57	58	58	59	60
74	60	61	61	62	63	63	64	64	65	65
75	66	67	67	68	68	69	69	70	71	71
76	72	72	73	73	74	75	75	76	76	77
77	77	78	79	79	80	80	81	81	82	83
78	83	84	84	85	85	86	87	87	88	88
79	89	89	90	90	91	92	92	93	93	94
80	94	95	96	96	97	97	98	98	99	99
81	9.00	01	01	02	02	03	03	04	04	05
82	06	06	07	07	08	08	09	09	10	10
83	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16
84	17	17	18	18	19	19	20	20	21	21
85	22	22	23	24	24	25	25	26	26	27
86	27	28	28	29	30	30	31	31	32	32
87	33	33	34	34	35	35	36	36	37	38
88	38	39	39	40	40	41	41	42	42	43
89	43	44	44	45	45	46	47	47	48	48
90	49	49	50	50	51	51	52	52	53	53
91	54	54	55	55	56	57	57	58	58	59
92	59	60	60	61	61	62	62	63	63	64
93	64	65	65	66	66	67	67	68	69	69
94	70	70	71	71	72	72	73	73	74	74
95	75	75	76	76	77	77	78	78	79	79
96	80	80	81	81	82	82	83	83	84	84
97	85	85	86	86	87	87	88	88	89	89
98	90	90	91	91	92	92	93	93	94	94
99	95	95	96	96	97	97	98	98	99	10.0

Таблица VIII

Квадраты

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.12	1.14	1.17	1.19
1.1	1.21	1.23	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.37	1.39	1.42
1.2	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.56	1.59	1.61	1.64	1.66
1.3	1.69	1.72	1.74	1.77	1.80	1.82	1.85	1.88	1.90	1.93
1.4	1.96	1.99	2.02	2.04	2.07	2.10	2.13	2.16	2.19	2.22
1.5	2.25	2.28	2.31	2.34	2.37	2.40	2.43	2.46	2.50	2.53
1.6	2.56	2.59	2.62	2.66	2.69	2.72	2.76	2.79	2.82	2.86
1.7	2.89	2.92	2.96	2.99	3.03	3.06	3.10	3.13	3.17	3.20
1.8	3.24	3.28	3.31	3.35	3.39	3.42	3.46	3.50	3.53	3.57
1.9	3.61	3.65	3.69	3.72	3.76	3.80	3.84	3.88	3.92	3.96
2.0	4.00	4.04	4.08	4.12	4.16	4.20	4.24	4.28	4.33	4.37
2.1	4.41	4.45	4.49	4.54	4.58	4.62	4.67	4.71	4.75	4.80
2.2	4.84	4.88	4.93	4.97	5.02	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
2.3	5.29	5.34	5.38	5.43	5.48	5.52	5.57	5.62	5.66	5.71
2.4	5.76	5.81	5.86	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10	6.15	6.20
2.5	6.25	6.30	6.35	6.40	6.45	6.50	6.55	6.60	6.66	6.71
2.6	6.76	6.81	6.86	6.92	6.97	7.02	7.08	7.13	7.18	7.24
2.7	7.29	7.34	7.40	7.45	7.51	7.56	7.62	7.67	7.73	7.78
2.8	7.84	7.90	7.95	8.01	8.07	8.12	8.18	8.24	8.29	8.35
2.9	8.41	8.47	8.53	8.58	8.64	8.70	8.76	8.82	8.88	8.94
3.0	9.00	9.06	9.12	9.18	9.24	9.30	9.36	9.42	9.49	9.55
3.1	9.61	9.67	9.73	9.80	9.86	9.92	9.99	10.0	10.1	10.2
3.2	10.2	10.3	10.4	10.4	10.5	10.6	10.6	10.7	10.8	10.8
3.3	10.9	11.0	11.0	11.1	11.2	11.2	11.3	11.4	11.4	11.5
3.4	11.6	11.6	11.7	11.8	11.8	11.9	12.0	12.0	12.1	12.2
3.5	12.3	12.3	12.4	12.5	12.5	12.6	12.7	12.7	12.8	12.9
3.6	13.0	13.0	13.1	13.2	13.2	13.3	13.4	13.5	13.5	13.6
3.7	13.7	13.8	13.8	13.9	14.0	14.1	14.1	14.2	14.3	14.4
3.8	14.4	14.5	14.6	14.7	14.7	14.8	14.9	15.0	15.1	15.1
3.9	15.2	15.3	15.4	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.8	15.9
4.0	16.0	16.1	16.2	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.6	16.7
4.1	16.8	16.9	17.0	17.1	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6
4.2	17.6	17.7	17.8	17.9	18.0	18.1	18.1	18.2	18.3	18.4
4.3	18.5	18.6	18.7	18.7	18.8	18.9	19.0	19.1	19.2	19.3
4.4	19.4	19.4	19.5	19.6	19.7	19.8	19.9	20.0	20.1	20.2
4.5	20.3	20.3	20.4	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9	21.0	21.1
4.6	21.2	21.3	21.3	21.4	21.5	21.6	21.7	21.8	21.9	22.0
4.7	22.1	22.2	22.3	22.4	22.5	22.6	22.7	22.8	22.8	22.9
4.8	23.0	23.1	23.2	23.3	23.4	23.5	23.6	23.7	23.8	23.9
4.9	24.0	24.1	24.2	24.3	24.4	24.5	24.6	24.7	24.8	24.9
5.0	25.0	25.1	25.2	25.3	25.4	25.5	25.6	25.7	25.8	25.9
5.1	26.0	26.1	26.2	26.3	26.4	26.5	26.6	26.7	26.8	26.9
5.2	27.0	27.1	27.2	27.4	27.5	27.6	27.7	27.8	27.9	28.0
5.3	28.1	28.2	28.3	28.4	28.5	28.6	28.7	28.8	28.9	29.1
5.4	29.2	29.3	29.4	29.5	29.6	29.7	29.8	29.9	30.0	30.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	30.3	30.4	30.5	30.6	30.7	30.8	30.9	31.0	31.1	31.2
5.6	31.4	31.5	31.6	31.7	31.8	31.9	32.0	32.1	32.3	32.4
5.7	32.5	32.6	32.7	32.8	32.9	33.1	33.2	33.3	33.4	33.5
5.8	33.6	33.8	33.9	34.0	34.1	34.2	34.3	34.5	34.6	34.7
5.9	34.8	34.9	35.0	35.2	35.3	35.4	35.5	35.6	35.8	35.9
6.0	36.0	36.1	36.2	36.4	36.5	36.6	36.7	36.8	37.0	37.1
6.1	37.2	37.3	37.5	37.6	37.7	37.8	37.9	38.1	38.2	38.3
6.2	38.4	38.6	38.7	38.8	38.9	39.1	39.2	39.3	39.4	39.6
6.3	39.7	39.8	39.9	40.1	40.2	40.3	40.4	40.6	40.7	40.8
6.4	41.0	41.1	41.2	41.3	41.5	41.6	41.7	41.9	42.0	42.1
6.5	42.3	42.4	42.5	42.6	42.8	42.9	43.0	43.2	43.3	43.4
6.6	43.6	43.7	43.8	44.0	44.1	44.2	44.4	44.5	44.6	44.8
6.7	44.9	45.0	45.2	45.3	45.4	45.6	45.7	45.8	46.0	46.1
6.8	46.2	46.4	46.5	46.6	46.8	46.9	47.1	47.2	47.3	47.5
6.9	47.6	47.7	47.9	48.0	48.2	48.3	48.4	48.6	48.7	48.9
7.0	49.0	49.1	49.3	49.4	49.6	49.7	49.8	50.0	50.1	50.3
7.1	50.4	50.6	50.7	50.8	51.0	51.1	51.3	51.4	51.6	51.7
7.2	51.8	52.0	52.1	52.3	52.4	52.6	52.7	52.9	53.0	53.1
7.3	53.3	53.4	53.6	53.7	53.9	54.0	54.2	54.3	54.5	54.6
7.4	54.8	54.9	55.1	55.2	55.4	55.5	55.7	55.8	56.0	56.1
7.5	56.3	56.4	56.6	56.7	56.9	57.0	57.2	57.3	57.5	57.6
7.6	57.8	57.9	58.1	58.2	58.4	58.5	58.7	58.8	59.0	59.1
7.7	59.3	59.4	59.6	59.8	59.9	60.1	60.2	60.4	60.5	60.7
7.8	60.8	61.0	61.2	61.3	61.5	61.6	61.8	61.9	62.1	62.3
7.9	62.4	62.6	62.7	62.9	63.0	63.2	63.4	63.5	63.7	63.8
8.0	64.0	64.2	64.3	64.5	64.6	64.8	65.0	65.1	65.3	65.4
8.1	65.6	65.8	65.9	66.1	66.3	66.4	66.6	66.7	66.9	67.1
8.2	67.2	67.4	67.6	67.7	67.9	68.1	68.2	68.4	68.6	68.7
8.3	68.9	69.1	69.2	69.4	69.6	69.7	69.9	70.1	70.2	70.4
8.4	70.6	70.7	70.9	71.1	71.2	71.4	71.6	71.7	71.9	72.1
8.5	72.3	72.4	72.6	72.8	72.9	73.1	73.3	73.4	73.6	73.8
8.6	74.0	74.1	74.3	74.5	74.6	74.8	75.0	75.2	75.3	75.5
8.7	75.7	75.9	76.0	76.2	76.4	76.6	76.7	76.9	77.1	77.3
8.8	77.4	77.6	77.8	78.0	78.1	78.3	78.5	78.7	78.9	79.0
8.9	79.2	79.4	79.6	79.7	79.9	80.1	80.3	80.5	80.6	80.8
9.0	81.0	81.2	81.4	81.5	81.7	81.9	82.1	82.3	82.4	82.6
9.1	82.8	83.0	83.2	83.4	83.5	83.7	83.9	84.1	84.3	84.5
9.2	84.6	84.8	85.0	85.2	85.4	85.6	85.7	85.9	86.1	86.3
9.3	86.5	86.7	86.9	87.0	87.2	87.4	87.6	87.8	88.0	88.2
9.4	88.4	88.5	88.7	88.9	89.1	89.3	89.5	89.7	89.9	90.1
9.5	90.3	90.4	90.6	90.8	91.0	91.2	91.4	91.6	91.8	92.0
9.6	92.2	92.4	92.5	92.7	92.9	93.1	93.3	93.5	93.7	93.9
9.7	94.1	94.3	94.5	94.7	94.9	95.1	95.3	95.5	95.6	95.8
9.8	96.0	96.2	96.4	96.6	96.8	97.0	97.2	97.4	97.6	97.8
9.9	98.0	98.2	98.4	98.6	98.8	99.0	99.2	99.4	99.6	99.8

ЛИТЕРАТУРА

Агекян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. Изд. 2. М., «Наука», 1972. 169 с.

Алексеев Р. И., Коровин Ю. И. Руководство по вычислению и обработке результатов количественного анализа. М., Атомиздат, 1972. 71 с., библ. 7 назв.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз 1958. 464 с., библ. 9 назв.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965. 400с., библ. 146 назв.

Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. М., «Наука», 1970. 104 с., библ. 28 назв.

Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.—Л., Физматгиз, 1962. 352 с., библ. 58 назв.

Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М., «Наука», 1971. 576 с., библ. 286 назв.

Налимов В. В. Применение математической статистики при анализе вещества. М., Физматгиз, 1960. 430 с., библ. 172 назв.

Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М., «Наука», 1968. 288 с., библ. 9 назв.

Романовский В. И. Основные задачи теории ошибок. М., Гостехиздат, 1947. 115 с., библ. 12 назв.

Румшинский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М., «Наука», 1971. 192с.

Сквайрс Дж. Практическая физика. (Перевод с англ.). М., «Мир», 1972. 247 с. библ. 47 назв.

Худсон Д. Статистика для физиков. (Перевод с англ.). М., «Мир», 1970. 296 с., библ. 66 назв.

Шенк X. Теория инженерного эксперимента. (Перевод с англ.). М., «Мир», 1972. 381 с., библ. 118 назв.

Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. (Перевод с англ.). М., «Мир», 1968. 462 с., библ. 51 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Натанович ЗАЙДЕЛЬ

ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебное пособие

Издание третье,
стереотипное

Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Верстальщик *Д. В. Ринкевич*
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 28.04.09.
Бумага офсетная. Гарнитура Обыкновенная. Формат $84\times108^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 5,88. Тираж 2000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru