N. Jerkovski

THE JOUKOWSKY
CENTRAL AEROHYDRODYNAMICAL INSTITUTE

THE N. E. JOUKOWSKY COMMEMORATION COMMITTEE

Prof. N. E. JOUKOWSKY

COLLECTED PAPERS

EDITORIAL BOARD

M. Ac. of Sc. of the USSR S. A. TCHAPLIGIN,
Member-Correspondent of the Ac.
of Sc. of the USSR Prof. A. I. NEKRASOV
Eng. V. A. ARKHANGELSKY
Prof. V. P. VETCHINKIN
Prof. A. P. KOTELNIKOV

VOLUME III

HYDRODYNAMICS

USSR • PEOPLE'S COMMISSARIAT OF HEAVY INDUSTRY
ONTI
UNITED SCIENTIFIC TECHNICAL PUBLISHING HOUSE

MOSCOW 1936 LENINGRAD

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

КОМИТЕТ ПО УВЕКОВЕЧЕНИЮ ПАМЯТИ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Проф. Н. Е. ЖУКОВСКИЙ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
Академик С. А. ЧАПЛЫГИН,
чл. корр. Академии наук СССР
проф. А. И. НЕКРАСОВ,
инж. В. А. АРХАНГЕЛЬСКИЙ,
проф. В. П. ВЕТЧИНКИН,
заслуж. деятель науки и техники
проф. А. П. КОТЕЛЬНИКОВ

ТОМ III

ГИДРОДИНАМИКА

ОНТИ • НКТП • СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ АВИАЦИОННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Н. Е. ЖУКОВСКИЙ.
(1881 г.)

ОТ РЕДАКЦИИ

Том III полного собрания сочинений Н. Е. Жуковского, будучи продолжением тома II, посвящен различным вопросам классической гидродинамики идеальной жидкости.

Статьи расположены в хронологическом порядке.

Одна статья (4) о равновесии цилиндра, плавающего в жидкости, частицы которой притягиваются друг к другу и к частицам цилиндра по закону Ньютона, относится к гидростатике, а остальные — к гидродинамике, причем большинство (1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12) посвящено плоскому движению, а остальные (2, 3, 8) — движению в пространстве трех измерений.

В первой статье „Случай движения жидкой площади по инерции“ выводятся условия, которые должны быть соблюдены для того, чтобы при прямолинейном и равномерном движении каждой точки площадь деформирующейся площадки не изменялась.

В статье „Об ударе шаров“ рассматривается центральный удар падающего по вертикальной линии шара о шар, плавающий в воде.

Все сочинения, которые имелись в то время, когда была впервые напечатана работа „О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью“ (3), касались либо только частных примеров, либо затрагивали указанный вопрос только мимоходом. Н. Е. Жуковский впервые ставит вопрос во всей полноте. Помимо новых общих теорем, Н. Е. Жуковский дает решение задачи для ряда неисследованных форм полостей, в частности для полостей многосвязных; кроме того, он распространяет и решает задачу на случай как вязкой, так и завихренной жидкости.

В работе „Видоизменение метода Кирхгофа“ (5) Н. Е. Жуковский дает новый метод решения задач, в которых

отыскивается течение жидкости, стесненное частью стенками сосуда, частью — линией тока, на которой давление постоянно.

При редактировании этой работы для второго издания (Труды ЦАГИ, вып. 41) академиком С. А. Чаплыгиным и А. П. Минаковым были сделаны примечания с целью исправления вкравшихся в первое издание ошибок вычислений и была написана заметка „Теоретический расчет действия турбины“ с целью отчасти оправдать примечания к § 20, отчасти для того, чтобы развить и обобщить задачу о турбине, которую в качестве примера на приложение своего метода рассматривает Н. Е. Жуковский в § 20. Эта заметка воспроизводится и в настоящем издании.

В статье „Определение движения жидкости при каком-либо условии, данном на линии тока“ (6), метод, данный в предыдущей статье, применяется к задачам, в которых на граничной линии тока должна быть удовлетворена какая-нибудь зависимость между скоростью v и углом θ ее наклонения к оси x.

В статье „О разрезании вихревых шнуров“ (7) рассматривается движение вихря при наличии в жидкости клина, ребро которого параллельно вихрю.

В статье „О движении вихревых колец“ (8) решается задача о движении круглого кольца, несущего заключенную в нем жидкость поступательным движением и имеющего на поверхности вихревой слой. Эта статья снабжена примечаниями А. П. Минакова, назначение которых облегчить понимание встречающихся в статье математических выкладок.

Цель заметки „О подсасывающем действии потока воздуха на пластинку“ (9) заключается в том, чтобы теоретически показать, что составляющая давления воздуха на пластинку, направленная по пластинке, может составлять с направлением потока тупой угол. Между прочим, в этой статье, а равным образом и в статье „О замене диска Релея“ (10) рассматривается поток, обтекающий эллиптический цилиндр, причем во второй статье предполагается, что циркуляция вокруг цилиндра равна нулю, а в первой, что циркуляция нулю не равна.

В первой статье „О снежных заносах“ (11) рассматривается поток, обтекающий горизонтальный круглый цилиндр, причем скорость потока вдали от цилиндра предполагается растущей пропорционально расстоянию от горизонтальной плоскости. Во второй статье (12) изучается движение небольших твердых тел (снежинок) вблизи критической точки гиперболического или эллиптического типа.

К большим работам (3) и (5) добавлено подробное оглавление, которое отсутствовало в первом издании.

Для удобства читателя во всех статьях проведено единство обозначений частных и полных производных: для обозначения частных производных принята буква ∂, для обозначения полных — d.

Большинство чертежей для нового издания сделано заново.

СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ПЛОЩАДИ ПО ИНЕРЦИИ

(1876 г.)

Один из возможных случаев движения несжимаемой жидкой площади, на которую не действуют никакие силы, представляет нам движение частиц жидкости по инерции при давлении, равном нулю.

Мы имеем в виду определить условия, стесняющие начальные скорости такого движения.

Воображаем семейство линий (s), касательные которых направлены по начальным скоростям жидкости, и семейство линий (s'), построенное так, что на каждой линии s' все начальные скорости параллельны. Обозначаем: через a и b косинусы углов, которые касательные к линиям (s) образуют с осями координат, через ρ — радиусы кривизны линий (s) и через d — дифференциал, взятый по их направлению; для линий (s') примем соответственно обозначения: a', b', ρ', d'.

Если назовем через x и y начальные координаты точки, имеющей скорость v, а через ξ и η — ее координаты по прошествии времени t, то найдем:

$$\xi = x + avt, \quad \eta = y + bvt. \tag{1}$$

Подставляем величины (1) в условие неизменяемости элемента площади, которое помощью криволинейных координат (s) и (s') может быть представлено формулой:

$$\frac{d\xi}{ds}\frac{d'\eta}{d's'} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d'\xi}{d's'} = \frac{dx}{ds}\frac{d'y}{d's'} - \frac{dy}{ds}\frac{d'x}{d's'}. \tag{2}$$

На основании равенств

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{d'x}{d's'} = a', \quad \frac{d'y}{d's'} = b', \quad \frac{d'a}{d's'} = 0, \quad \frac{d'b}{d's'} = 0$$

получаем после подстановки уравнение:

$$\left[b'\frac{da}{ds}-a'\frac{db}{ds}+(ab'-ba')\frac{d\lg v}{ds}\right]t+$$
$$+\left(b\frac{da}{ds}-a\frac{db}{ds}\right)\frac{d'v}{d's'}t^2=0. \qquad (3)$$

Приравнивая нулю коэфициенты при степенях t и пользуясь равенствами:

$$\frac{da}{ds}=-\frac{b}{\rho},\quad \frac{db}{ds}=\frac{a}{\rho},$$

найдем для начальных скоростей условия:

$$\frac{d\lg v}{ds}=\frac{a'\dfrac{db}{ds}-b'\dfrac{da}{ds}}{ab'-ba'}=\frac{1}{\rho}\,\frac{aa'+bb'}{ab'-ba'}, \qquad (4)$$

$$\left(a\frac{db}{ds}-b\frac{da}{ds}\right)\frac{d'v}{d's'}=\frac{1}{\rho}\,\frac{d'v}{d's'}=0. \qquad (5)$$

Условие (5) удовлетворяется двумя положениями:

$$\rho=\infty,\quad \frac{d'v}{d's'}=0,$$

из которых первое требует, чтобы линии (s) были прямые, а второе — чтобы скорость v не изменялась на каждой из кривых (s'). Так как первое положение на основании уравнения (4) дает:

$$\frac{dv}{ds}=0$$

и представляет потому движение точек жидкости по параллельным прямым линиям с произвольными скоростями на каждой прямой [1], то мы займемся только вторым положением.

Мы имеем:

$$dd'v=0,$$

а так как

$$dd'v=d'dv,$$

[1] При этом за систему линий (s') можно принять любую систему линий.

то из уравнения (4) получаем:

$$d'\left(\frac{b'da - a'db}{ab' - ba'}\right) = 0.$$

Производя диференцирование и замечая, что

$$d'da = dd'a = 0,\ d'db = dd'b = 0,$$

найдем уравнение:

$$(adb - bda)(a'd'b' - b'd'a') = 0. \qquad (6)$$

Так как первая скобка может равняться нулю только при $\rho = \infty$, то вторая скобка должна быть равна нулю. Пользуясь формулами

$$\frac{d'a'}{d's'} = -\frac{b'}{\rho'},\ \frac{d'b'}{d's'} = \frac{a'}{\rho'},$$

находим условие:

$$\frac{1}{\rho'} = 0. \qquad (7)$$

Оно показывает, что линии (s') должны быть прямые.

Теперь вся задача решена. Проведя на плоскости произвольное семейство прямых линий (s') и одну из линий s, найдем все остальные линии семейства (s), так как все они будут пересекать каждую прямую s' под одинаковыми углами; построив же линии (s), мы найдем v, интегрируя уравнение (4).

Уясним сказанное примером. Предположив, что прямые (s') пересекаются в одной точке и что одна из линий s есть эллипс, имеющий эту точку центром, найдем, что все семейство (s) представит подобные эллипсы.

Пусть

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = \lambda^2 \qquad (8)$$

будет уравнение этого семейства, где e — эксцентриситет, а λ — малая ось, принятая за параметр семейства.

Назовем через φ угол, образуемый центральным радиусом-вектором одного из эллипсов с осью x, и определим помощью этого угла величины a', b', a, b, ρ, ds:

$$a' = \cos\varphi,\quad b' = \sin\varphi,\quad a = -\frac{\sin\varphi}{[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}},$$

$$b = \frac{(1-e^2)\cos\varphi}{[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\rho = \frac{\lambda\,[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)\,[(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$

$$ds = \frac{\lambda\,[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}}{[(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi.$$

Подставляя все эти величины в формулу (4), получаем:

$$d\lg v = \frac{(1-e^2)\,e^2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi}{[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]\,[(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]}.$$

Чтобы удобнее взять интеграл, заменим $(1-e^2)$ его тождественной величиной:

$$(1-e^2) = [(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]\,(2-e^2) - [(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi].$$

Это дает диференциальное уравнение:

$$d\lg v = \frac{(2-e^2)\,e^2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} - \frac{e^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi},$$

интеграл которого выразится формулой:

$$v = k\left\{\frac{(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{(1-e^2,\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (9)$$

Эта формула, в которой k есть произвольное постоянное, позволяет определить v на всякой прямой s' по углу φ.

Если бы мы хотели определить, на какую линию перейдут во время t точки, лежащие в начале времени на одном из эллипсов (8), то должны бы были выразить по формулам (1) x и y через ξ и η. Это даст, на основании найденных значений a, b и v, следующие величины:

$$x = \frac{\lambda^2\xi + kt\lambda\eta}{\lambda^2 + k^2t^2(1-e^2)}, \qquad y = \frac{\lambda^2\eta - kt\lambda(1-e^2)\xi}{\lambda^2 + k^2t^2(1-e^2)}.$$

Подставляя эти величины в уравнение (8), находим уравнение:

$$\xi^2(1-e^2)+\eta^2=\lambda^2+k^2t^2(1-e^2), \qquad (10)$$

которое показывает, что по прошествии времени t точки, лежащие на одном из эллипсов (8), переходят на эллипс того же семейства, квадрат малой оси которого увеличен на $k^2t^2(1-e^2)$.

Воображая часть жидкости, заключенную между двумя эллипсами семейства (8), которым соответствуют параметры λ, λ_1, и называя через λ_2, λ_3 параметры эллипсов, ограничивающих эту часть жидкости по прошествии времени t, найдем:

$$\lambda^2-\lambda_1^2=\lambda_2^2-\lambda_3^2.$$

Это уравнение, умноженное на $\pi\sqrt{1-e^2}$, покажет нам, что рассматриваемая часть жидкости не изменила площади.

Эта работа была доложена Московскому математическому обществу 18 сентября 1876 г. и напечатана в VIII томе Математического сборника. Второй раз она была напечатана в I томе Сочинений Н. Е. Жуковского изд. 1912 г., стр. 146—153. *Прим. ред.*

A CASE OF MOTION OF A LIQUID LAMINA DUE TO INERTIA

In this note Prof. Joukowsky establishes the conditions imposed on the initial velocities of points of a liquid lamina when every particle moves with constant velocity along a straight line, and the area of each element does not change.

Imagine a family of lines (s) whose tangents are directed along the initial velocity of the liquid, and a family of lines (s') constructed so that the initial velocities of all points of every line (s') are parallel. From condition (2), in which x, y are the initial coordinates of a particle, and ξ, η — its coordinates after a time interval t, in view of the condition of invariability of the element of area, Prof. Joukowsky finds that there are only two possible cases of inertia motion: 1) all particles move in straight parallel lines with arbitrary but constant velocities for each line and 2) lines (s') are straight and the parallel velocities of all points of a line (s') are equal. In the latter case we can arbitrarily assume a family of straight lines (s') and one of the (s) lines, all other (s) lines being determined by the condition that they must cut the straight lines (s') at the same angles as the representative line (s). As regards velocity v, it is determined from equation (4). The following example is considered at the end of the article: all straight lines s' intersect at one point and one of the lines s is an ellipse having this point for its centre.

ОБ УДАРЕ ДВУХ ШАРОВ, ИЗ КОТОРЫХ ОДИН ПЛАВАЕТ В ЖИДКОСТИ

(*1883 г.*)

Пусть шар массы m, падая в вертикальном направлении со скоростью v, наносит прямой удар шару массы m', плавающему в жидкости. Плотность шара m' возьмем равной половине плотности жидкости ρ; радиус его назовем через r_1 и предположим, что центр его совпадает с центром полусферического сосуда, в который доверху налита жидкость.

Чтобы определить скорости u и u' шаров после удара, покажем, что потерянное количество движения уравновешивается силами удара:

$$Q = \int_0^\tau P\,dt, \quad q = \int_0^\tau p\,dt,$$

где P и p — функции времени, выражающие взаимное давление шаров и давление внутри жидкости в продолжение весьма малого времени удара τ.

Получим:

$$Q = m(v-u) = m'u' + \int q \sin\theta\, ds, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Интеграл в формуле (1) распространяется на погруженную поверхность шара m', причем ds есть элемент площади этой

поверхности, а θ — угол, который радиус, проведенный к этому элементу, образует с горизонтальной плоскостью. В формуле (2) φ есть потенциальная функция скоростей точек жидкости после удара. Эта функция должна для всей жидкой массы удовлетворять условию

$$\Delta_2 \varphi = 0,$$

которое вследствие полной симметрии относительно вертикальной оси может быть с помощью сферических координат написано таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right] = 0. \qquad (3)$$

Кроме того, мы должны иметь на погруженной поверхности шара:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = u' \sin\theta, \qquad (4)$$

на стенках сосуда:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \qquad (5)$$

и на свободной поверхности жидкости:

$$\varphi = 0. \qquad (6)$$

Последнее уравнение пишем потому, что на основании формулы (1) можно принять:

$$q = -\rho\varphi, \qquad (7)$$

а на свободной поверхности $q = 0$.

Для того чтобы удовлетворить всем этим условиям, возьмем:

$$\varphi = \sin\theta R,$$

где R есть функция одного радиуса-вектора.

Подставляя эту величину в уравнение (3), найдем для определения R уравнение:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - 2R = 0,$$

интеграл которого будет:

$$R = cr + \frac{c_1}{r^2}.$$

Вследствие этого

$$\varphi = \sin\theta\left(cr + \frac{c_1}{r^2}\right).$$

Эта функция обращается в 0 при $\theta = 0$, поэтому уравнение (6) удовлетворено. Чтобы удовлетворить уравнения (4) и (5), выбираем произвольные постоянные c и c_1 так, чтобы

$$c - \frac{2c_1}{r_1^3} = u',$$

$$c - \frac{2c_1}{r_2^3} = 0.$$

Получаем, что

$$c_1 = -u'\,\frac{r_1^3 r_2^3}{2(r_2^3 - r_1^3)},$$

$$c = -u'\,\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Таким образом находим:

$$\varphi = -u'\sin\theta\,\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(r + \frac{r_2^3}{2r^2}\right). \qquad (8)$$

Пользуясь формулами (7) и (8), определяем интеграл, входящий в формулу (1):

$$\int q\sin\theta\,ds = \pi\rho r_1^3\,\frac{2r_1^3 + r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}\,u'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi\rho r_1^3}{3}\,\frac{r_2^3 + 2r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\,u'.$$

Полагая для сокращения

$$\mu = \frac{\pi\rho r_1^3}{3}\,\frac{r_2^3 + 2r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} \qquad (9)$$

напишем уравнение (1) в виде:

$$m(v - u) = (m' + \mu)\,u'. \qquad (10)$$

Если шары не упруги, то к уравнению (10) надо прибавить условие $u = u'$, что дает:

$$u = u' = \frac{mv}{m + m' + \mu}. \tag{11}$$

Если же шары вполне упруги, то надо написать, что первоначальная живая сила шара m равна сумме живых сил обоих шаров и жидкости после удара:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{m'u'^2}{2} + \frac{\rho}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} d\sigma, \tag{12}$$

где $d\sigma$ — элемент объема жидкой массы. Чтобы определить входящий сюда интеграл, напишем по теореме Грина, что

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} d\sigma = -\int\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds.$$

Интеграл во второй части распространяется на все поверхности, ограничивающие жидкую массу; но так как на свободной поверхности $\varphi = 0$, а на стенках сосуда $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, то его надо распространить только на погруженную поверхность шара m'. Отсюда по формулам (4) и (7)

$$\rho\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} d\sigma = u'\int q\sin\theta\, d\sigma = u'^2\mu.$$

На основании этого уравнения формуле (12) можно дать следующий вид:

$$m(v^2 - u^2) = (m + \mu)u'^2.$$

Делим это уравнение на уравнение (10); находим:

$$v + u = u'. \tag{13}$$

Решая уравнения (10) и (13), получим для упругих шаров:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{v(m - m' - \mu)}{m + m' + \mu}, \\ u' &= \frac{2mv}{m + m' + \mu}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Формулы (11) и (14) отличаются от обыкновенных формул удара шаров только тем, что в них m' заменено на $m' + \mu$.

Таким образом, погружая один из шаров в жидкость, мы как бы увеличиваем его массу. Формула (8) показывает, что при $r_2 = \infty$ масса μ равна половине массы вытесненной жидкости.

Работа эта представляет доклад Н. Е. Жуковского на VII съезде русских естествоиспытателей и врачей в г. Одессе в 1883 г. Она была опубликована в „Трудах“ названного съезда. Второй раз она была напечатана в I томе Сочинений Н. Е. Жуковского, изд 1912 г.

Прим. ред.

IMPACT OF TWO BALLS, OE WHICH ONE IS FLOATINC IN A LIQUID

The problem considered in this article is as follows: a ball of mass m, falling vertically with velocity v, impinges on a ball of mass m' floating in a liquid. The density of ball m' is equal to half of the density of the liquid, its radius is r, and its centre coincides with the centre of the semi-spherical vessel of radius r_2 filled to the top with liquid. To determine the velocities u and u' of the balls after the impact.

Prof. Joukowsky finds the impulsive pressure at the time of impact (formulae 7, 8), hence, by applying the equation of activity and the Principle of Energy (in the case of an elastic impact), obtains for velocities u and u' formulae (11) and (14), wich differ from the usual formulae of impact of balls only in that in the case considered the mass of the floating ball m is replaced by $m' + \mu$, where μ is given by formula (9).

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ПОЛОСТИ, НАПОЛНЕННЫЕ ОДНОРОДНОЙ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

(*1885 г.*)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рядом с задачей о движении твердого тела в беспредельной жидкой массе возникла другая задача — о движении твердого тела, заключающего в себе жидкие массы. Насколько нам известно, Стокс первый обратил внимание на эту интересную задачу. В своих мемуарах „On some cases of fluid motion“ [1] и „On the critical values of sums of periodic series“ [2], читанных в 1842 и 1847 гг., он рассмотрел два случая полостей, из которых одна имеет форму прямоугольного параллелепипеда, а другая—форму цилиндра с основанием по круговому сектору, и высказал весьма важную мысль, что движение твердого тела не изменится, если заменим в нем жидкую массу некоторым *эквивалентным твердым телом* (equivalent solid); впрочем, справедливость такой замены он доказывает только для случая малых скоростей.

В 1860 г. Гельмгольц в своем сочинении „Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten“ [3] исследовал колебательное движение твердого тела под влиянием трения жидкости, наполняющей его сферическую полость, а в 1873 г. эта же задача с большей подробностью была разобрана Любеком в его сочинении „Ueber den Einfluss, welchen auf die Bewegung eines Pendels mit einem kugelförmigen Hohlraume eine in ihm enthaltene

---

[1] Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII, p. 105.

[2] Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII, p. 533.

[3] Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. XL, S. 607.

reibende Flüssigkeit ausübt“ [1]. В своем прекрасном курсе по гидродинамике, вышедшем в 1873 г., Ламб при изложении задачи о движении твердого тела в беспредельной жидкости касается также и задачи о движении тела, заключающего в себе жидкие массы, и разбирает, как пример, случай эллипсоидальной полости [2].

Наконец, в 1883 г. появляется сочинение Неймана „Hydrodynamische Untersuchungen“ [3], в котором задача о движении тел в жидкости получает самую общую постановку, а вместе с ней и задача о движении тела, заключающего в себе жидкие массы, которую он в отличие от первой задачи называет „innere Probleme“. Нейман рассматривает односвязные и многосвязные полости и показывает, что в последнем случае начальное движение, сообщенное жидкой массе при покоящемся твердом теле, оказывает на движение тела жироскопический эффект.

Вот все известные нам сочинения о движении твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы. Одни из них относятся к частным примерам, другие же останавливаются на интересующей нас задаче только мимоходом, — при исследовании более важной задачи о движении тел в беспредельной жидкой массе. Таким образом не существует сочинения, из которого бы читатель получил полное представление о движении твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы; а между тем эта задача значительно проще задачи о движении тела в беспредельной жидкой массе и может быть изложена с большей полнотой, нежели последняя. Вследствие этого мы считаем не бесполезным наше сочинение, в котором вместе с некоторыми новыми общими теоремами читатель найдет описание движений, соответствующих многим формам полостей, до сих пор не исследованных. Это сочинение состоит из трех глав.

В первой главе излагается общая теория движения тела и заключенных в нем жидких масс, пренебрегая трением и предполагая, что скорости жидкостей имеют потенциальные

---

[1] Borchardts Journal, Bd. 77, S. 1.

[2] Lamb, A. Treatise on the Motion of Fluids, p. 112.

[3] Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig, 1883.

функции. При этом оказывается, что внутреннее движение жидкости вполне определяется по вращению тела и не зависит от его поступательного движения; само же движение тела совершается так, как будто бы жидкие массы были заменены эквивалентными твердыми телами. Массы эквивалентных тел равны массам жидкостей; их центры тяжестей совпадают с центрами тяжестей жидких масс; что же касается до их моментов инерции, то мы доказываем, что момент инерции эквивалентного тела относительно всякой оси, проходящей через его центр тяжести, менее момента инерции соответственной жидкой массы относительно той же оси. Если тело имеет многосвязные полости и находящимся в них жидким массам сообщено начальное движение, то, заменяя эти массы эквивалентными телами, мы должны еще присоединить к телу некоторый жироскоп, направление оси вращения и момент начального количества движения которого вполне определяются по главному моменту количеств движения жидких масс при покоящемся теле. Здесь в нашем изложении делается невозможным то сомнение, которое, по словам Неймана, возникало при его методе исследования [1]. Оканчивая первую главу, мы излагаем в сокращенной форме также и метод Неймана, хотя наше исследование ведется независимо от него.

Вторая глава заключает в себе определение внутреннего движения жидкости и эллипсоидов инерции эквивалентных тел для различных форм полостей. Мы начинаем ее подробным исследованием случая эллиптической полости и разъясняем внутреннее движение, совершающееся в ней с помощью особого вида движения, которое мы называем *эллиптическим вращением*. После этого мы разбираем задачу о цилиндрических полостях. Для исследования движения жидкости, появляющегося в них от вращения около оси, параллельной образующей цилиндра, мы пользуемся, следуя указанию Томсона и Тета [2], тем методом, который употребляет С. Венан в задаче о кручении призм; переходя потом к вращению тела около оси, перпендикулярной образующей цилиндра, мы излагаем

[1] Hydrodynamische Untersuchungen, S. 236.

[2] Natural Philosophy, § 705.

[3] Mémoire sur la torsion des prismes, Savants Etrangers, T. XIV.

задачу Стокса о полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, и решаем с помощью Бесселевых функций новую задачу о полости, имеющей форму прямого круглого цилиндра. Далее мы обращаемся к полостям, имеющим форму тел вращения, и показываем, что эта задача может быть исследована с помощью сферических функций совершенно так же, как задача С. Венана с помощью тригонометрических функций. Таким образом получается обратный способ решения задачи, который может дать сколько угодно различных форм полостей, для которых известны внутреннее движение жидкости и эллипсоид инерции эквивалентного тела. С помощью такого способа мы находим коническую полость, полость, образованную вращением пересекающихся гипербол, и кольцевидную полость. Как пример прямого решения задачи о телах вращения мы исследуем с помощью сферических функций случай полости, имеющей форму полушара. Вторая глава оканчивается примерами многосвязных полостей и разъяснением жироскопического эффекта, происходящего от начального движения жидких масс.

Третья глава посвящена движению жидкости с трением. Указав общий способ, служащий для определения движения тела и находящейся в нем жидкости, мы излагаем задачу Гельмгольца и прибавляем к ней новую задачу о движении замкнутой трубки, наполненной жидкостью. Эта последняя задача исследуется нами с помощью теории трубок Пуазеля, и решение ее проверяется на одном выполненном нами приборе.

ГЛАВА I

Вспомогательные теоремы

§ 1. Мы изложим сначала некоторые гидродинамические теоремы, которые послужат основанием нашего исследования. Будем вместе с Томсоном называть *циркуляцией скорости* (circulation) по какому-нибудь контуру, лежащему внутри жидкости, взятый по этому контуру интеграл:

$$\int V \cos\theta \, ds,$$

где V — скорость жидкости, ds — элемент контура, θ — угол между V и ds. Определим сперва, чему равна циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру. Пусть (фиг. 1) $OmlO$ будет такой контур.

Берем начало прямоугольных осей координат x, y, z в точке O и направляем ось Oz по оси вращения частицы жидкости. Скорости точек жидкости, бесконечно близких к O, могут быть разложены каждая на две скорости, из которых одна имеет потенциальную функцию скоростей $\varphi(x, y, z)$, а другая является скоростью вращательного движения около оси Oz с угловой скоростью вращения ω частицы жидкости. Сделав такое разложение скоростей, найдем, что для замкнутого контура $OmlO$

$$\int V \cos\theta \, ds = \int \frac{d\varphi}{ds} \, ds + \int r\omega \cos\psi \, ds,$$

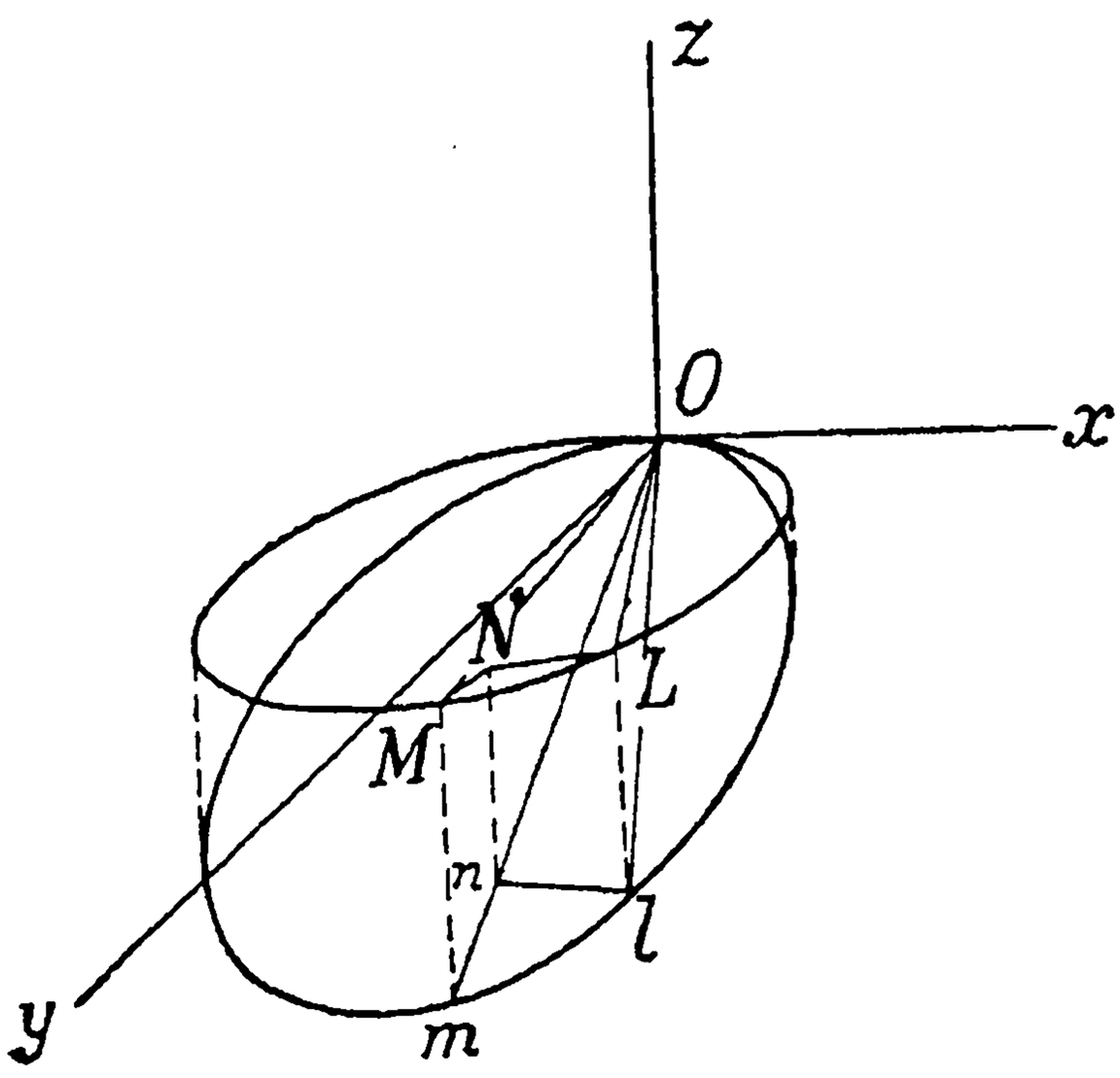
где r — проекция радиуса-вектора точки на плоскость xy, а ψ — угол между ds и направлением скорости от вращательного движения. Первый интеграл, взятый по замкнутому кон-

туру, пропадает, и у нас остается только второй интеграл, в котором можно положить:[1]

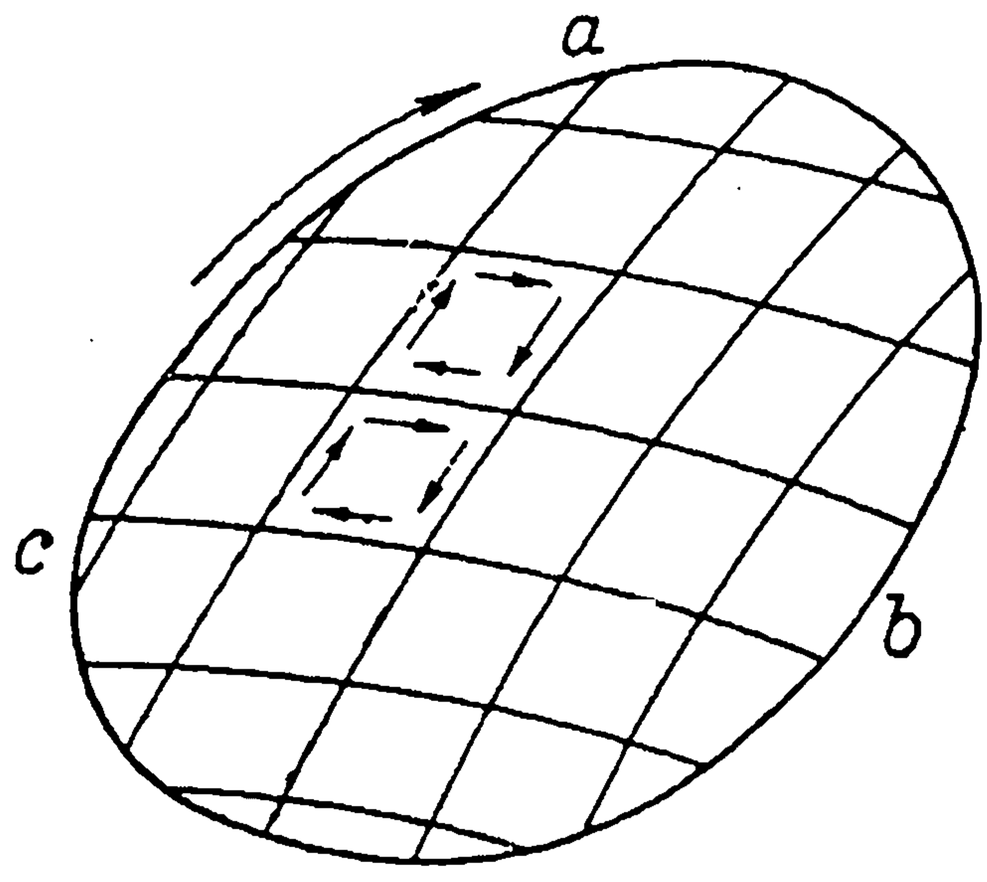
$$\cos\psi\, ds = r\, d\lambda,$$

где λ — угол между r и Ox. Мы получаем:

$$\int V\cos\theta\, ds = \omega \int r^2\, d\lambda = 2\omega\, d\sigma,$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

где $d\sigma$ есть бесконечно малая площадь проекции контура $OmlO$ на плоскость xy. Так как эта площадь есть не что иное, как площадь перпендикулярного сечения вихревой нити, полученной с помощью проведения через все точки контура $OmlO$ линий вихря, то можно сказать, что *циркуляция скорости по бесконечно малому замкнутому контуру равна удвоенному напряжению вихревой нити, построенной на этом контуре.*

Переходим к определению циркуляции скорости по конечному контуру, *обращаемому в точку*. Мы будем называть таким образом контур, который может быть обращен в точку посредством непрерывного изменения, не выходя из жидкой массы. Через такой контур всегда можно провести поверхность, которая вся будет лежать в жидкости. Вообразим (фиг. 2), что такая поверхность проведена через данный нам

[1] Из фиг. 1 видно, что $Ol = r$, $ln = LN = r\, d\lambda$, и из треугольника LNM что $LN = \cos\psi\, ds$. Фиг. 1 заменена аналогичной, но более наглядной фигурой из „Лекций по гидродинамике“ Н. Е. Жуковского. *Прим. ред.*

контур *abca*, и построим на ней два ряда линий, которые разделят контур на бесконечно малые части. Нетрудно видеть, что циркуляция скорости по контуру *abca* может быть заменена суммой циркуляций по всем бесконечно малым контурам, взятым в том же направлении, потому что при таком суммировании циркуляции по всем внутренним линиям сократятся. Так как циркуляция по всякому бесконечно малому замкнутому контуру равна удвоенному напряжению вихревой нити, построенной на этом контуре, то сумма всех таких циркуляций будет равна сумме удвоенных напряжений всех вихревых нитей, проходящих сквозь контур *abca*. Отсюда получается теорема Стокса [1]: *циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, обращаемому в точку, равна удвоенной сумме напряженцй всех вихревых нитей, проходящих через этот контур*. Напряжение вихря надо считать положительным, если вращение частицы совершается в ту сторону, в которую берем циркуляцию, и отрицательным — в обратном случае.

§ 2. Прилагаем теорему Стокса к исследованию движения жидкой массы без вращения частиц жидкости. Если пространство, занимаемое жидкой массой, односвязно, то все замкнутые контуры, проводимые внутри его, обращаемы в точку, и потому циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру при отсутствии вращения частиц равна нулю. Для жидкой массы, занимающей многосвязное пространство, подобное заключение необходимо только для замкнутых контуров, обращаемых в точку, но в ней могут быть проводимы также и замкнутые контуры, в точку не обращаемые, для которых циркуляция скорости не должна быть равна нулю. Докажем что для всяких двух таких контуров, которые могут быть посредством непрерывного изменения, не выходя из жидкой массы, преобразованы из одного в другой, циркуляции скорости одинаковы.

Пусть (фиг. 3) *abca* и *defd* будут два такие контура. Мы всегда можем провести между ними линию *ad* так, что контур *abcadfeda* будет обращаться в точку. Вслед-

[1] Stokes, Cambridge University Calendar, 1854.

ствие этого, условившись обозначать циркуляцию скобкой, в которую вписан контур, получаем:

$$0 = (abcadfeda) = (abca) + (ad) + (dfed) + (da)$$

или

$$(abca) = (defd).$$

Проведя n перегородок, обращающих $n+1$ — связное пространство, занимаемое жидкой массой, в односвязное, построим для каждой перегородки замкнутый контур, который пересекает ее один раз и не пересекает других перегородок. Такие контуры, числом n, будем называть *главными контурами*; они не обращаются в точки и не преобразуются из одного в другой. Циркуляции по главным контурам мы будем называть *главными циркуляциями*. Докажем, что циркуляция по всякому замкнутому контуру может быть выражена алгебраической суммой главных циркуляций. Возьмем, например, четырехсвязную полость (фиг. 4) и напишем, что

$$(abcdefghfdia) = (abia) + (ibcdi) + (defd) + (fghf);$$

называя через k, k_1, k_2 главные циркуляции, взятые по часовой стрелке для перегородок *I*, *II* и *III*, преобразуем эту формулу в такой вид:

$$(abcdefghfdia) = k + k_1 - 2k_2.$$

Обозначая вообще через k, $k_1, \ldots, k_{n-1}$ главные циркуляции, соответствующие n перегородкам, можем выразить циркуляцию по какому-нибудь замкнутому контуру $abca$ формулой:

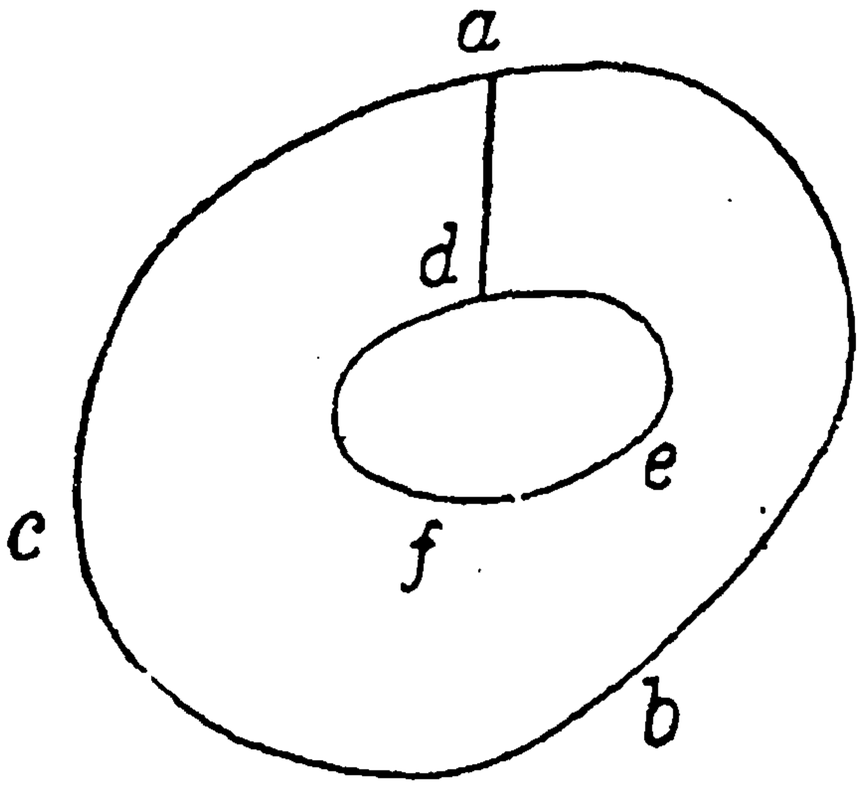
$$(abca) = mk + m_1k_1 + \ldots + m_{n-1}k_{n-1},$$

в которой m, $m_1, \ldots, m_{n-1}$ — некоторые положительные или отрицательные целые числа. Для получения числа m, например, надо сосчитать, сколько раз рассматриваемый контур пересекает первую перегородку, идя в направлении, одинаковом с первым главным контуром (т. е. в том направлении, в каком бралась циркуляция k), и сколько раз он пересекает ее, идя в обратном направлении, и взять разность этих чисел.

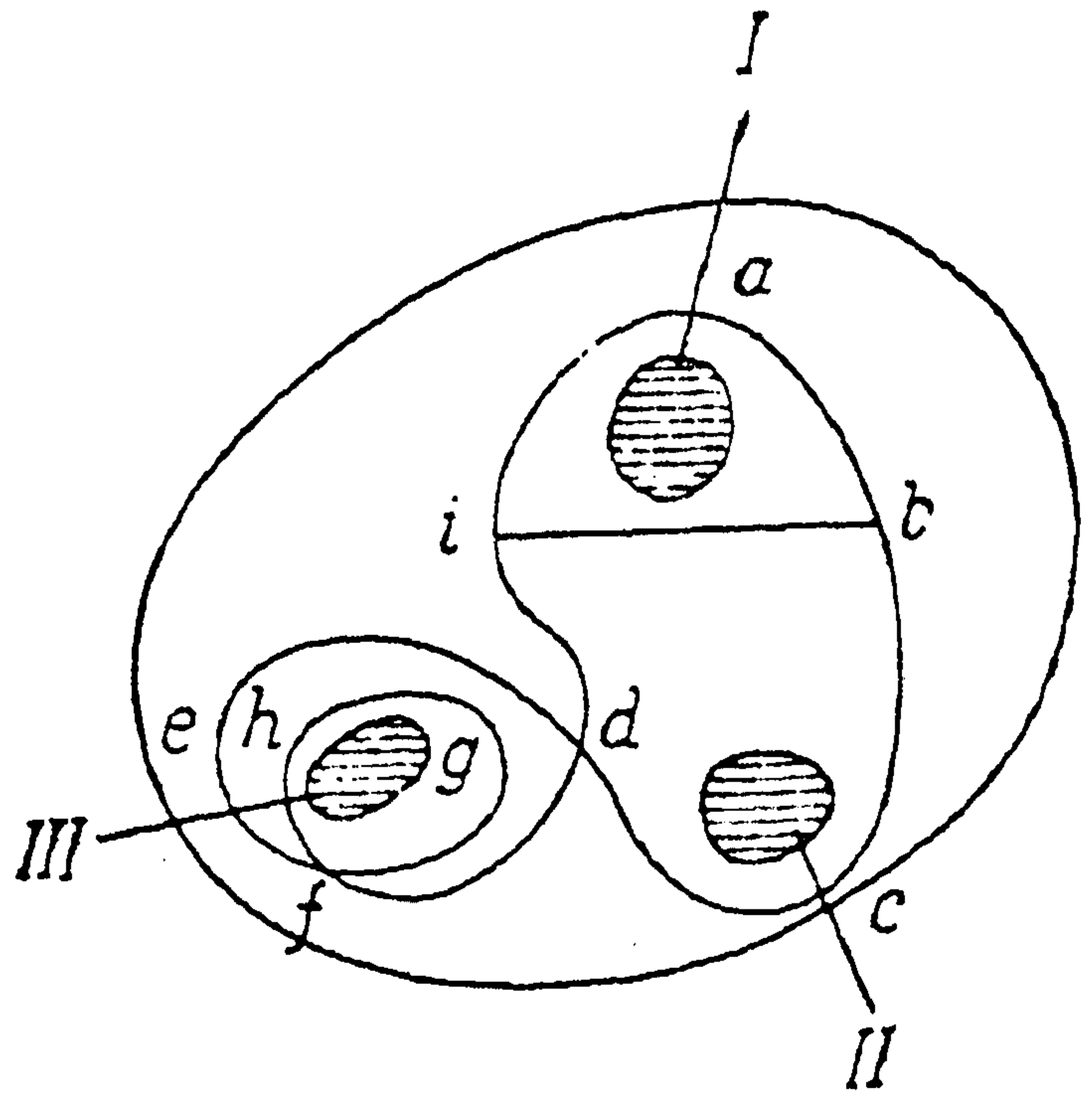
Найденная формула показывает, что циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру в многосвязном пространстве равна нулю, если

$$k = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0.$$

На основании сказанного о циркуляции скорости можно доказать теорему Гельмгольца, что *скорости несжимаемой*



Фиг. 3.



Фиг. 4.

жидкости, движущейся без вращения частиц, вполне определяются по их нормальным составляющим на границах жидкой массы и по главным циркуляциям. Если бы мы допустили, что существуют два течения несжимаемой жидкости, удовлетворяющие данным условиям, то, вычитая геометрически из скоростей первого течения скорости второго, нашли бы течение несжимаемой жидкости без вращения частиц, нормальные составляющие скоростей которого на границах жидкости были бы равны нулю. В таком течении вследствие несжимаемости жидкости все линии токов должны быть замкнутые кривые, по которым жидкость должна течь в одном направлении. Если бы скорости этого течения не были равны нулю, то, взяв циркуляции по линиям токов в сторону движения жидкости, мы бы получили некоторые положительные величины, а между тем вследствие $k = k_1 \ldots = k_{n-1} = 0$ циркуляции по всем замкнутым контурам должны быть равны нулю. Следовательно, геометрические разности скоростей двух допущенных течений должны быть нули, т. е. эти тече-

ния должны быть одинаковы. Если жидкая масса заполняет полость, стенки которой неподвижны, то она может иметь движение без вращения частичек только в том случае, когда пространство полости многосвязно и когда циркуляции по некоторым из главных контуров не равны нулю; при этом линии токов будут непременно замкнутыми контурами, не обращающимися в точки.

Составим потенциальную функцию скоростей при течении жидкости без вращения частиц. Для этого обратим $n+1$-связное пространство, занимаемое жидкостью, в односвязное посредством проведения n перегородок и, взяв внутри полученного таким образом односвязного пространства постоянную точку a, будем составлять циркуляции скорости для различных разомкнутых контуров ab:

$$(ab) = \int V \cos\theta \, ds.$$

Эти циркуляции будут зависеть только от координат точки b, потому что для двух путей acb и $ac'b$ имеем:

$$0 = (acbc'a) = (acb) + (bc'a)$$

или

$$(acb) = (ac'b).$$

Таким образом заключаем, что

$$(ab) = \varphi(x, y, z),$$

где x, y, z суть координаты точки b.

Написав это в виде

$$\varphi(x, y, z) = \int V \cos\theta \, ds,$$

найдем:

$$\frac{d\varphi}{ds} = V \cos\theta,$$

откуда следует, что $\varphi(x, y, z)$ есть потенциальная функция скоростей рассматриваемого течения. Если возьмем две бесконечно близкие точки b и b', лежащие с двух сторон первой перегородки так, что направление bb' одинаково с направлением первого главного контура, то

$$(abb'a) = k,$$

а следовательно,

$$(ab) - (ab') = k.$$

Эта формула показывает, что при переходе через перегородку в направлении главного контура потенциальная функция скоростей убывает скачком на величину циркуляции скорости по этому контуру. Если пространство, занимаемое жидкой массой, односвязно или если оно многосвязно, но все главные циркуляции равны нулю, то скорости жидкости имеют *однозначную* потенциальную функцию; в противном же случае скорости имеют *многозначную* потенциальную функцию, модули периодичности которой суть главные циркуляции.

§ 3. Подобно циркуляции скорости по данному контуру, лежащему внутри жидкой массы, можно взять по этому контуру интеграл, который мы назовем *циркуляцией полного ускорения*. Он представляется так:

$$\int j \cos \mu \, ds,$$

где j — полное ускорение точек жидкости, ds — элемент контура, а μ — угол между j и ds. Рассматривая координаты x, y, z точек жидкости как функции времени и начальных координат a, b, c, предположим, что наш контур в начале времени представлялся уравнениями:

$$b = f(a), \quad c = f_1(a);$$

потом исключим с помощью этих уравнений b и c из функций, выражающих x, y, z, так что получим:

$$x = F(t, a), \quad y = F_1(t, a), \quad z = F_2(t, a).$$

Приписывая диференциалу, взятому по t, знак ∂, а диференциалу, взятому по a, знак d, напишем:

$$\cos \mu \, ds = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dy + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t} dx + \frac{\partial y}{\partial t} dy + \frac{\partial z}{\partial t} dz\right) -$$

$$- \left[\frac{\partial x}{\partial t} d\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \frac{\partial y}{\partial t} d\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial z}{\partial t} d\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]$$

или, сохраняя для V и θ значения § 1:

$$j\cos\mu\,ds = \frac{\partial}{\partial t}(V\cos\theta\,ds) - d\frac{V^2}{2}.$$

Если рассматриваемый контур замкнутый, то последний член при интеграции пропадает, и мы получаем формулу:

$$\int j\cos\mu\,ds = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int V\cos\theta\,ds\right], \qquad (1)$$

которая дает нам теорему Томсона [1]: *циркуляция полного ускорения по замкнутому контуру равна полной производной по времени от циркуляции скорости по этому контуру.* Эта теорема одинаково верна, обращаем ли данный контур в точку или нет.

§ 4. Предположим, что однородная несжимаемая жидкость движется с потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z)$ и определим для данного момента времени сумму элементарных работ ее количеств движения (мы рассматриваем количества движения частиц жидкости, как силы при каком-нибудь бесконечно малом, возможном для нее перемещении). Называя возможные перемещения частиц жидкости через δx, δy, δz и их массы через m, выразим искомую элементарную работу суммой

$$\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right),$$

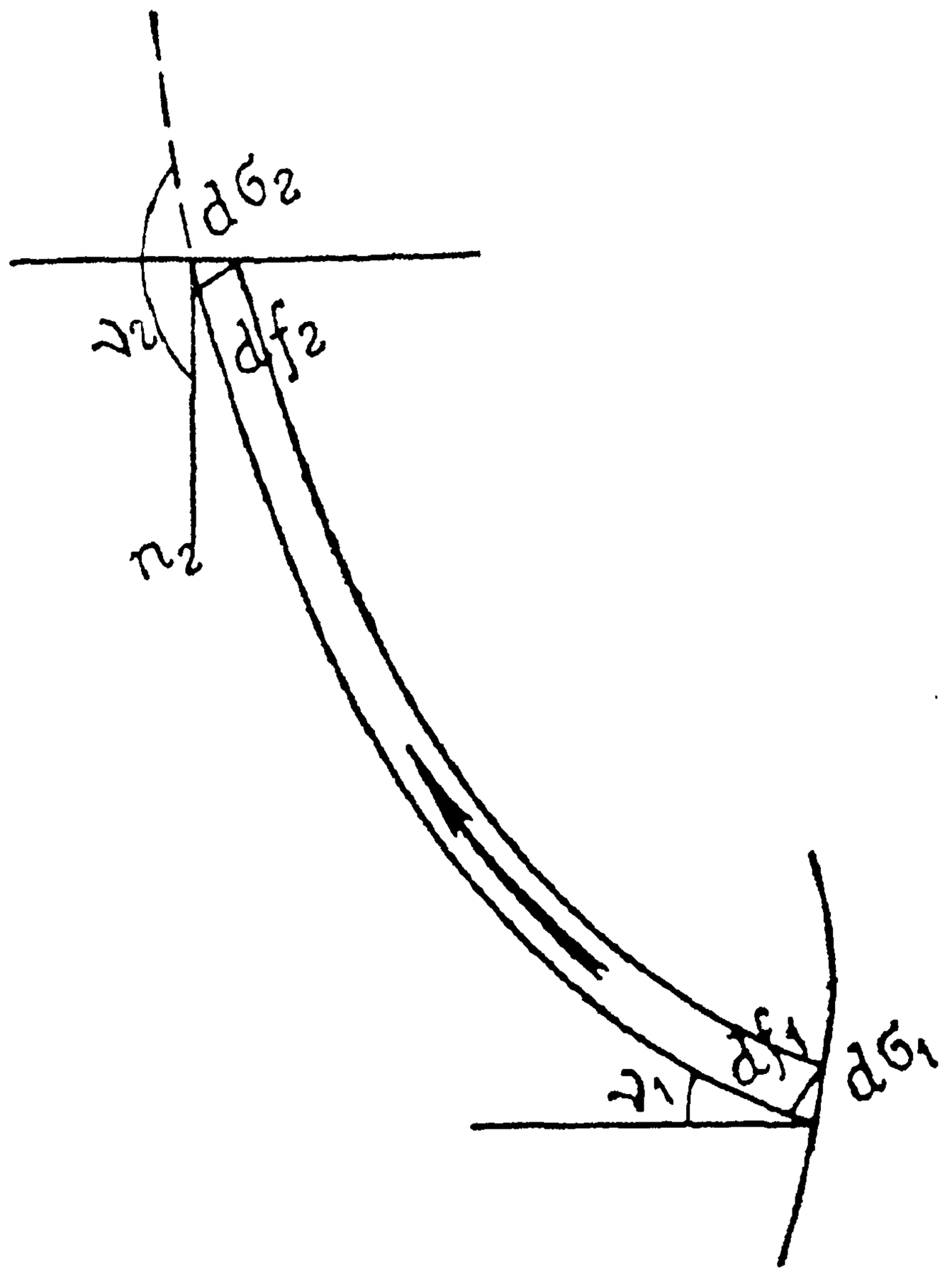
распространяемой на всю жидкую массу. Чтобы удобнее определить эту сумму, вообразим систему линий (s), элементы которых направлены по перемещениям δs точек жидкости, и разделим с помощью поверхностей, проходящих чрез эти линии, всю жидкую массу на бесконечно тонкие трубки. Пусть df будет площадь сечения такой трубки; тогда вследствие несжимаемости вдоль всей трубки произведение $\delta s\,df$ будет постоянно. Рассматривая часть нашей суммы, относящуюся к одной из трубок, положим $m = \rho\,df\,\delta s$, где ρ — плотность жидкости, δs — элемент линии s. Эта часть суммы будет:

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)\rho\,df\,\delta s = \rho\,df\,\delta s\int\frac{d\varphi}{ds}ds,$$

[1] On vortex motion, Philos. Trans. R. S. Edin., 1869, p. 274.

где интеграция производится по линии s, которую берем в направлении перемещения жидкости.

Предположив, что пространство, занимаемое жидкой массой, сделано с помощью проведения n перегородок односвязным, можем рассматривать функцию φ в этом односвязном пространстве как однозначную, а перегородки отнести к границам жидкости. Если рассматриваемая нами бесконечно тонкая трубка не пересекает установленных таким образом границ и замыкается в рассматриваемом пространстве, то интеграл в вышенаписанной формуле будет равен нулю; если же трубка пересекает границы, то мы будем отдельно рассматривать каждую ее часть между двумя точками пересечения и считать каждую за особую трубку. Обозначая величины, относящиеся к началу трубки, индексом 1, а величины, относящиеся к ее концу, индексом 2 и обращая внимание на фиг. 5, найдем:



Фиг. 5.

$$\rho df \delta s \int \frac{d\varphi}{ds} ds = \rho (\varphi_2 \delta s_2 df_2 - \varphi_1 \delta s_1 df_1) = -\rho (\varphi_2 \delta s_2 \cos \nu_2 d\sigma_2 + \varphi_1 \delta s_1 \cos \nu_1 d\sigma_1),$$

где $d\sigma$ представляет площадь, вырезываемую трубкой на поверхностях границ, а ν — угол между перемещением δs и нормалью к поверхности границы, взятой внутрь жидкой массы [1]. Рассуждая подобным образом относительно всех

[1] Во всем нашем сочинении мы будем брать направление нормали внутрь жидкой массы.

бесконечно тонких трубок, найдем, что

$$\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)=-\rho\int\int\varphi\delta s\cos\nu d\sigma, \quad (2)$$

где интеграл во второй части распространяется на поверхность жидкой массы и обе стороны поверхностей всех перегородок.

Если функция φ однозначна, то все интегралы, распространенные на перегородки, обращаются в нули, ибо с двух противоположных сторон каждой перегородки $\delta s\cos\nu$ имеет равные величины, но противоположные знаки; так что в этом случае можно пользоваться формулой (2), относя ее вторую часть только к поверхности жидкости. Для многозначной функции φ по той же причине интегралы могут быть взяты только по одной стороне перегородок, а формула (2) на основании § 2 может быть написана так:

$$\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)=$$

$$=-\rho\int\int\varphi\delta s\cos\nu\, d\sigma+\rho\int\int k\delta s'\cos\nu' d\sigma', \quad (3)$$

где первый интеграл распространяется на поверхность жидкости, а второй — на те стороны перегородок, нормаль которых направлена в сторону главного контура [1].

Движение жидкости, наполняющей полость движущегося твердого тела

§ 5. Положим, что в начальный момент твердое тело неподвижно, и посмотрим, какое движение без вращения частиц может иметь жидкость, заключенная в его полости? Из сказанного в § 2 следует, что в случае односвязной полости жидкость должна быть неподвижна; в случае же многосвязной полости она может двигаться с потенциальной функцией скоростей, вполне определяемой по главным циркуля-

[1] Формулы (2) и (3) могут быть получены как частный случай формулы Грина. *Прим. ред.*

циям k, $k_1 \ldots k_{n-1}$. Эта функция χ может быть представлена в виде

$$\chi = k\vartheta + k_1\vartheta_1 + \ldots + k_{n-1}\vartheta_{n-1}, \qquad (4)$$

где ϑ, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ суть функции точки, удовлетворяющие уравнению Лапласа и дающие на стенках полости производные по нормали, равные нулю. При этом функция ϑ убывает на единицу при переходе через первую перегородку в направлении первого главного контура и изменяется непрерывно при переходе чрез все остальные перегородки; функция ϑ_1 убывает на единицу при переходе через вторую перегородку в направлении второго главного контура и изменяется непрерывно при переходе через все другие перегородки и т. д.

Такое движение жидкости с потенциалом скоростей χ могло бы, по мнению Стокса [1], быть получено, материализируя на время перегородки, обращающие пространство полости в односвязное, и сообщая им такие движения и деформации, чтобы скорости двух бесконечно близких точек жидкости, лежащих с двух противоположных сторон перегородки, имели равные величины и направления.

§ 6. Задавшись вышеуказанным начальным движением жидкости и предположив, что частицы ее все время находятся под действием сил, имеющих однозначную потенциальную функцию, сообщим нашему твердому телу какое-нибудь движение.

По началу Даламбера силы, действующие на частицы жидкости, вместе с силами инерции этих частиц должны уравновешиваться; а так как условие, необходимое и достаточное для равновесия однородной и несжимаемой жидкой массы, наполняющей полость тела, состоит только в том, что силы, на нее действующие, должны иметь однозначную потенциальную функцию, то в нашей задаче во все время движения должна существовать однозначная потенциальная функция полных ускорений точек жидкости. Внося это предположение в формулу (1), приходим к заключению, что циркуляция скорости по замкнутому контуру, образуемому одними и теми же

---

[1] On some cases of fluid Motion, § 2.

точками жидкой массы, не изменяется со временем. Следовательно, в нашей полости циркуляции скорости будут равны нулю все время для замкнутых контуров, обращаемых в точки, и будут оставаться постоянными для главных контуров. Из сказанного видим, что во все время движения скорости жидкости будут иметь потенциальную функцию скоростей, главные циркуляции которой суть начальные циркуляции k, $k_1, \ldots, k_{n-1}$. Также и наоборот: если мы допустим существование такой потенциальной функции, то по теореме Томсона придем к заключению, что циркуляция полного ускорения по всякому замкнутому контуру должна быть равна нулю, откуда следует, что силы инерции имеют однозначную потенциальную функцию и уравновешиваются вместе с силами, действующими на жидкую массу, давлениями стенок полости.

Потенциальная функция скоростей вполне определяется по главным циркуляциям k, $k_1, \ldots, k_{n-1}$ и по тому условию, что ее производные по нормали на стенках полости равны нормальным скоростям точек самих стенок; силы же, действующие на частицы жидкости, не имеют никакого влияния на их движение внутри полости и производят только изменение в давлении жидкости.

Разлагаем движение твердого тела на поступательное со скоростью какой-нибудь точки O и вращательное около этой точки. Так как скорости всякого поступательного движения имеют однозначную потенциальную функцию, то это движение прямо сообщается жидкой массе и не оказывает никакого влияния на ее внутреннее движение. Последнее изменяется только от вращательного движения тела около точки O и будет одно и то же, если мы сделаем эту точку неподвижной и будем вращать около нее тело так, как оно вращается около движущейся точки O. Сделав это, вообразим прямоугольные оси координат x, y, z, неизменно соединенные с телом и имеющие начало в точке O. Предположив, что потенциальная функция скоростей точек жидкости выражена по координатам точки относительно каких-нибудь неподвижных осей координат, заменим в ней эти координаты с помощью x, y, z и представим ее в виде $\Phi(x, y, z, t)$. Для $t=0$ эта функция

обращается в функцию χ, данную в § 5; для какого-нибудь другого момента мы можем положить:

$$\Phi = \chi + \varphi.$$

Так как функция χ удовлетворяет внутри полости уравнению Лапласа, дает по главным контурам циркуляции $k, k_1, \ldots, k_{n-1}$ и ее нормальные производные на стенках полости равны нулю, то функция φ должна быть однозначной функцией координат, удовлетворяющей внутри полости уравнению Лапласа и дающей на ее стенках

$$\frac{d\varphi}{dn} = \cos\alpha\,(z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta\,(x\omega_3 - z\omega_1) + \\ + \cos\gamma\,(y\omega_1 - x\omega_2), \qquad (5)$$

где dn — элемент внутренней нормали, α, β, γ — углы, образуемые dn с осями Ox, Oy, Oz, а ω_1, ω_2, ω_3 — проекции на эти оси мгновенной угловой скорости ω вращения тела.

Мы удовлетворим всем условиям, наложенным на функцию φ, если положим:

$$\varphi = \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_3\psi_3, \qquad (6)$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — однозначные функции координат x, y, z, удовлетворяющие внутри полости уравнению Лапласа и дающие на ее стенках:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dn} &= y\cos\gamma - z\cos\beta, \\ \frac{d\psi_2}{dn} &= z\cos\alpha - x\cos\gamma, \\ \frac{d\psi_3}{dn} &= x\cos\beta - y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Из сказанного следует, что время t входит в функцию Φ только через ω_1, ω_2, ω_3. *Если по прошествии некоторого времени тело останавливается и ω_1, ω_2, ω_3 обращаются в нули, то функция Φ обращается в функцию χ, т. е. жидкость получает внутри полости то же движение, какое имела сначала; если в начале времени жидкость была неподвижна ($k = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0$), то при остановке тела останавливается и жидкость, заключенная в его полости.*

Проекции на оси Ox, Oy, Oz скоростей абсолютного движения частиц жидкости выражаются формулами:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

проекции же на эти оси скоростей относительного движения частиц жидкости получатся, если из абсолютных скоростей вычтем скорости от вращательного движения твердого тела, и будут:

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (z\omega_2 - y\omega_3),$$

$$v = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - (x\omega_3 - z\omega_1), \qquad (8)$$

$$w = \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (y\omega_1 - x\omega_2).$$

Определяя по этим формулам составляющие вращения жидкой частицы в относительном движении, найдем для них величины:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\omega_1,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\omega_2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\omega_3,$$

которые показывают, что частицы жидкости в их относительном движении имеют вращение, противоположное вращению тела. Это понятно само собой, так как относительное движение жидкости, слагаясь с движением тела, должно дать движение без вращения частиц жидкости.

Кирхгоф показал, что в случае движения жидкой массы с потенциалом скоростей наибольшая скорость жидкости

может находиться только на ее границах[1]; вследствие этого наибольшая абсолютная скорость нашей жидкой массы будет находиться на стенках полости. Точно так же можно доказать, что *наибольшей скоростью в относительном движении жидкости будет обладать точка, лежащая на поверхности.* Написав квадрат относительной скорости

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

возьмем от его половины частные производные по x, y, z:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + 2(w\omega_2 - v\omega_3),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + 2(u\omega_3 - w\omega_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + 2(v\omega_1 - u\omega_2).$$

От этих формул берем соответственно производные по x, y, z и складываем полученные результаты:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) =$$

$$= \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + 2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + 4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2).$$

Обращая внимание на условие несжимаемости и на величины ω_1, ω_2, ω_3, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,$$

[1] Vorlesungen über Mathematische Physik, S. 186.

откуда заключаем, что вторые производные по x, y и z от квадрата скорости не могут внутри полости одновременно иметь отрицательные величины, следовательно, внутри полости скорость V не может получить наибольшее значение [1].

Когда ω_1, ω_2, ω_3 даны как функции времени, то определение места каждой частицы жидкости во всякое время внутри полости может быть сделано посредством интегрирования совместных диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt.$$

В частном случае, когда жидкость в начальный момент неподвижна и тело вращается около неподвижной оси, положение частиц жидкости может быть определено по положению тела. Мы имеем:

$$\omega_1 = \frac{d\theta}{dt}\cos\lambda, \quad \omega_2 = \frac{d\theta}{dt}\cos\mu, \quad \omega_3 = \frac{d\theta}{dt}\cos\nu,$$

где θ — угловое перемещение тела, а λ, μ и ν — постоянные углы, образуемые осью вращения с осями Ox, Oy и Oz. Подставляем эти величины ω_1, ω_2, ω_3 в вышенаписанные диференциальные уравнения и разделяем их на $\frac{d}{d\theta}$:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\cos\mu + \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\cos\nu - (z\cos\mu - y\cos\nu)} =$$

$$= \frac{dy}{\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\cos\lambda + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\cos\nu - (x\cos\nu - z\cos\lambda)} =$$

$$= \frac{dz}{\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\cos\lambda + \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\cos\mu + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\cos\nu - (y\cos\lambda - x\cos\mu)} = d\theta.$$

Интегрирование этих уравнений позволяет определить координаты каждой точки жидкости в функции θ [2].

---

[1] Доказанная теорема является обобщением аналогичной теоремы, обнаруженной А. П. Соколовым в его сочинении „Задача о кручении призматических тел“, Математический сборник, т. IX, стр. 301.

[2] При этом, как будет показано на примере эллипсоидальной полости, положение жидкости зависит также от числа оборотов твердого тела.

Сказанное не может быть распространено на общий случай движения тела, так как, определяя положение его относительно неподвижных осей координат с помощью трех эйлеровых углов, мы не имеем возможности выразить координаты x, y, z частицы жидкости с помощью этих углов.

§ 7. Переходим к определению давления жидкости, заключенной в полости. Так как оно зависит не только от вращательного, но и от поступательного движения твердого тела, то прибавляем к потенциальным функциям χ и φ еще потенциальную функцию от скоростей поступательного движения, так что за потенциальную функцию абсолютных скоростей принимаем:

$$F(x, y, z, t) = \chi + \varphi + px + qy + rz,$$

где p, q и r — проекции на подвижные оси Ox, Oy и Oz скорости точки O. На основании формулы (8) u, v и w выразятся по функции F так:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} - (p + z\omega_2 - y\omega_3),$$

$$v = \frac{\partial F}{\partial y} - (q + x\omega_3 - z\omega_1),$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial z} - (r + y\omega_1 - x\omega_2).$$

Вообразим неподвижные оси координат x', y', z', которые в рассматриваемый момент времени сливаются с нашими подвижными осями, и, выразив потенциальную функцию скоростей в координатах x', y', z', назовем ее через F'. Обозначая через p гидродинамическое давление, а через U—силовую функцию, найдем по известной формуле гидродинамики, что

$$\frac{1}{\rho} p - U = \tau - \frac{\partial F'}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right],$$

где τ—некоторая функция одного времени, $\frac{\partial F'}{\partial t}$ — частная производная от функции F' по времени. Предполагая для простоты, что время t начинает считаться от рассматриваемого

момента, найдем по прошествии бесконечно малого времени t, что

$$F' = F[x' - (p + \omega_2 z - \omega_3 y)\, t,\ y' - (q + \omega_3 x - \omega_1 z)\, t,\ z' - (z + \omega_1 y - \omega_2 x)\, t,\ t],$$

откуда

$$\frac{\partial F'}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} - \left[\frac{\partial F}{\partial x}(p + \omega_2 z - \omega_3 y) + \frac{\partial F}{\partial y}(q + \omega_3 x - \omega_1 z) + \frac{\partial F}{\partial z}(r + \omega_1 y - \omega_2 x)\right].$$

Подставляя эту величину в выражение для p и составляя V^2 по вышенаписанным формулам для u, v, w, найдем весьма простое выражение гидродинамического давления:

$$\frac{1}{\rho} p - U = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}(V^2 - V'^2), \tag{9}$$

где V' — так называемая скорость влечения от движения твердого тела. Эта формула вполне определяет изменение давления при переходе от одной точки жидкости к другой и имеет сходство с известной формулой Бернулли, от которой она отличается присутствием членов $-\frac{\partial F}{\partial t}$ и $+\frac{1}{2}V'^2$. Но мы не можем с помощью этой формулы определить абсолютную величину давления во всякой точке жидкости, так как в нее входит еще функция времени τ, для определения которой задача не представляет никаких данных, подобно тому, как нет данных для определения величины давления на четыре ножки абсолютно твердого стола. Мы можем только указать нижний предел величины τ; так как давление p не может быть отрицательно, то

$$\tau > \max\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}(V^2 - V'^2) - U\right].$$

Эта формула показывает, что *если в одной из точек жидкости скорость относительного движения становится весьма большой, то и давление во всей полости сделается тоже весьма большим.*

Движение твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы

§ 8. При исследовании движения тела, заключающего внутри себя жидкие массы, под действием каких-нибудь внешних сил мы будем для сокращения формул рассматривать только тот случай, когда одна точка твердого тела неподвижна, потому что в случае свободного движения нашей системы нам придется только прибавить к ее движению около центра тяжести, как около неподвижной точки, надлежащее поступательное движение. Возможность такого прибавления видна из того, что силы инерции точек системы в полученном сложном движении будут слагаться из прежних сил инерции и сил инерции в поступательном движении; все же внешние силы могут быть заменены силой, проходящей через центр тяжести системы, и парой. Пара уравновешивается силами инерции прежнего движения (когда центр тяжести рассматривался как неподвижная точка), сила же может быть уравновешена силами инерции надлежащим образом выбранного поступательного движения. Действительно, силы инерции поступательного движения частиц жидкости уравновешиваются на жидких массах в полостях тела, так как скорости поступательного движения имеют однозначную потенциальную функцию.

Эти силы инерции разовьют в жидкостях добавочные давления, действие которых на тело может быть заменено действием сил, приложенных в центрах жидких масс, направленных в сторону, противоположную ускорению поступательного движения, и равных произведению этого ускорения на массы соответствующих жидкостей. Все такие силы, происходящие от добавочных давлений, с силами инерции частиц твердого тела дадут одну равнодействующую, которая пройдет через центр тяжести всей системы, будет направлена в сторону, противоположную ускорению поступательного движения, и будет равна произведению этого ускорения на массу системы. Для того чтобы эта сила уравновесила равнодействующую внешних сил, нужно только, чтобы ускорение поступательного движения было направлено по этой равно-

действующей силе и было равно ее величине, разделенной на массу системы.

§ 9. Пусть O будет неподвижная точка твердого тела: примем ее за начало прямоугольных осей координат x, y, z, неизменяемо соединенных с телом, и постараемся определить проекции на эти оси главного момента G количеств движения всех материальных точек нашей системы относительно O. Этот момент будет слагаться геометрически из главного момента g_0 количеств движения твердого тела и главных моментов g, g_1, g_2,... количеств движения жидких масс в первой, второй и т. д. полостях. Если

$$f_0(x, y, z) = 1$$

будет уравнение эллипсоида инерции твердого тела относительно точки O, то проекции главного момента количеств движения тела на оси Ox, Oy и Oz представятся производными:

$$\text{пр}_x g_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_1}, \quad \text{пр}_y g_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_2},$$

$$\text{пр}_z g_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_3}, \tag{10}$$

где ω_1, ω_2, ω_3 попрежнему выражают проекции на оси Ox, Oy, Oz мгновенной угловой скорости тела ω.

Переходим к составлению проекций главного момента g. Так как абсолютное движение жидкости по § 6 слагается из движения, имеющего потенциальную функцию скоростей φ, и из движения, имеющего потенциальную функцию скоростей χ, то момент g слагается геометрически из моментов g' и g'', соответствующих первому и второму движению. Проекции по осям Ox, Oy, Oz момента g'' не будут изменяться со временем и представятся на основании формулы (4) линейными функциями главных циркуляций k, k_1,... Проекции по осям момента g' могут быть найдены с помощью сказанного в § 4 о работе количеств движения однородной несжимаемой жидкой массы. Известно, что для получения проекции главного момента системы сил на какую-нибудь ось, проходящую через центр моментов, надо повернуть точки приложения этих сил на

бесконечно малый угол около этой оси и разделить сумму элементарных работ, совершенных силами, на угловое перемещение. Предположим, что в формуле (2) δx, δy, δz — проекции по осям координат бесконечно малых перемещений точек жидкой массы при ее вращении около оси Ox на бесконечно малый угол $\delta\theta$; тогда

$$\delta x = 0,\ \delta y = -z\delta\theta,\ \delta z = y\delta\theta,$$

вследствие чего

$$\text{пр}_x g' = -\frac{\rho}{\delta\theta}\int\int \varphi\delta s\cos\gamma\, d\sigma =$$

$$= -\rho\int\int \varphi(y\cos\gamma - z\cos\beta)\, d\sigma,$$

где α, β, γ — углы внутренней нормали поверхности полости с осями координат. На основании формулы (7) и теоремы Грина найденная величина проекции может быть преобразована:

$$\text{пр}_x g' = -\rho\int\int \varphi\frac{d\psi_1}{dn}\, d\sigma =$$

$$= \rho\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Условившись в обозначении

$$\rho\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = [\varphi, \psi],$$

представим найденную формулу вместе с двумя другими для осей Oy и Oz в следующем виде:

$$\text{пр}_x g' = [\varphi, \psi_1],\ \text{пр}_y g' = [\varphi, \psi_2],\ \text{пр}_z g' = [\varphi, \psi_3].$$

Подставляем сюда величину φ из формулы (6)

$$\begin{aligned}
\text{пр}_x g' &= \omega_1[\psi_1, \psi_1] + \omega_2[\psi_1, \psi_2] + \omega_3[\psi_1, \psi_3],\\
\text{пр}_y g' &= \omega_1[\psi_2, \psi_1] + \omega_2[\psi_2, \psi_2] + \omega_3[\psi_2, \psi_3],\\
\text{пр}_z g' &= \omega_1[\psi_3, \psi_1] + \omega_2[\psi_3, \psi_2] + \omega_3[\psi_3, \psi_3].
\end{aligned}$$

Составляем двойную живую силу нашей жидкой массы в движении, определяемом функцией скоростей φ. Называя

эту двойную живую силу через $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, найдем по формуле (6):

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = [\psi_1, \psi_1]\,\omega_1^2 + [\psi_2, \psi_2]\,\omega_2^2 + [\psi_3, \psi_3]\,\omega_3^2 + \\ + 2[\psi_2, \psi_3]\,\omega_2\omega_3 + 2[\psi_3, \psi_1]\,\omega_3\omega_1 + 2[\psi_1, \psi_2]\,\omega_1\omega_2. \quad (11)$$

Эта формула показывает, что найденные нами величины проекции g могут быть представлены в виде производных:

$$\text{пр}_x g' = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_1}, \quad \text{пр}_y g' = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_2},$$

$$\text{пр}_z g' = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_3}. \quad (12)$$

Так как функция $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ положительна при всевозможных значениях ω_1, ω_2, ω_3, то уравнение

$$f(x, y, z) = 1$$

представляет нам некоторый эллипсоид. Докажем, что *этот эллипсоид всегда заключает внутри себя эллипсоид инерции рассматриваемой жидкой массы*. Пусть уравнение эллипсоида инерции жидкой массы относительно точки O будет:

$$F(x, y, z) = 1.$$

Пишем по формуле (8) равенства:

$$z\omega_2 - y\omega_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right),$$

$$x\omega_3 - z\omega_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right),$$

$$y\omega_1 - x\omega_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right),$$

возводим их в квадрат, складываем и, умножив результат на массу m частицы жидкости, берем от обеих частей сумму, распространенную на всю полость. Получим:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \sum m\left[\left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2\right] - 2\sum m\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(u - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(v - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(w - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\right].$$

Преобразуем последнюю сумму. Для этого умножаем и делим ее на некоторое бесконечномалое время δt и полагаем:

$$\left(u-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\delta t=\delta x,\quad \left(v-\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\delta t=\delta y,\quad \left(w-\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\delta t=\delta z.$$

Эти величины δx, δy, δz будут проекции бесконечно малых путей δs, пройденных во время δt в движении жидкости, слагающемся из ее относительного движения и ее начального движения, взятого в обратную сторону. По формуле (2) получаем:

$$\sum m\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(u-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v-\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(w-\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\delta t}\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)=-\frac{\rho}{\delta t}\int\int\varphi\delta s\cos\nu d\sigma,$$

но так как для рассматриваемых перемещений δs имеем $\cos\nu=0$, то преобразуемая сумма есть нуль. Вследствие этого находим, что

$$F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)+\sum m\left[\left(u-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(v-\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2+\left(w-\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right],\qquad(13)$$

откуда

$$f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)<F(\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

Заменяем в этом неравенстве ω_1, ω_2, ω_3 на $\cos a$, $\cos b$ и $\cos c$:

$$f(\cos a,\ \cos b,\ \cos c)<F(\cos a,\ \cos b,\ \cos c).$$

Если предположим, что a, b и c — углы, образуемые с осями координат центральными радиусами-векторами r и R эллипсоидов

$$f(x,y,z)=1,\quad F(x,y,z)=1,$$

то найдем:

$$\frac{1}{r^2}=f(\cos a,\ \cos b,\ \cos c),\quad \frac{1}{R^2}=F(\cos a,\ \cos b,\ \cos c),$$

так что наше неравенство дает:

$$r>R,$$

т. е. первый эллипсоид заключает внутри себя второй. Распространяя сказанное о первой полости на все остальные, условимся приписывать в них соответственным величинам индексы 1, 2, . . .; складываем геометрически главные моменты g'', g_1'', g_2'', . . . и называем через P, Q и R проекции их равнодействующего момента на оси Ox, Oy и Oz; потом составляем функцию:

$$T = \frac{1}{2}\left[f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \ldots\right] + P\omega_1 + Q\omega_2 + R\omega_3. \tag{14}$$

На основании формул (10), (12) и подобных же формул для других полостей заключаем, что искомые нами проекции на оси Ox, Oy, Oz главного момента количеств движения G выражаются производными от функции T по составляющим угловой скорости:

$$\text{пр}_x G = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}, \quad \text{пр}_y G = \frac{\partial T}{\partial \omega_2}, \quad \text{пр}_z G = \frac{\partial T}{\partial \omega_3}. \tag{15}$$

§ 10. Пользуясь найденными проекциями главного момента количеств движения нашей системы, легко можем составить диференциальные уравнения движения твердого тела по способу, предложенному Буром [1]. Вообразим неподвижные оси координат x', y', z', совпадающие в рассматриваемый момент времени с нашими подвижными осями x, y, z, и назовем через L, M и N проекции главного момента внешних сил относительно точки O на оси Ox', Oy' и Oz'. Эти проекции должны быть равны производным по времени от проекции на оси Ox', Oy', Oz' главного момента количества движения G, т. е. должны быть равны проекциям на эти оси скорости точки, лежащей в конце вектора G. Так как скорость этой точки слагается из скорости относительно подвижных осей и скорости влечения от движения этих осей, то по формуле (15) находим:

---

[1] Bour, Cours de Mécanique, III Fascicule, p. 146.

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\omega_2 - \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\omega_3, \\ M &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\omega_3 - \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\omega_1, \\ N &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\omega_1 - \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Это и будут диференциальные уравнения движения нашего твердого тела. Если в начальный момент, когда твердое тело неподвижно, жидкие массы тоже неподвижны, т. е. все величины k равны нулю, то $P = Q = R = 0$. Уравнения (16) представляют в этом случае обыкновенные диференциальные уравнения движения твердого тела, имеющего относительно неподвижной точки эллипсоид инерции:

$$f_0(x, y, z) + f(x, y, z) + f_1(x, y, z) + \ldots = 1. \qquad (17)$$

Такое твердое тело можно получить, присоединяя к данному твердому телу вместо жидких масс неизменяемые тела, имеющие относительно точки O эллипсоиды инерции:

$$f(x, y, z) = 1, \quad f_1(x, y, z) = 1 \ldots$$

Мы будем эти тела выбирать таким образом, чтобы их масса равнялась массе заменяемой жидкости и центр тяжести совпадал с ее центром тяжести. Такие твердые тела мы назовем вместе со Стоксом [1] *эквивалентными телами.*

Посмотрим, каковы должны быть центральные эллипсоиды инерции эквивалентных тел? Называя координаты центра тяжести C первой полости через ξ, η, ζ, возьмем этот центр за начало осей x', y', z', параллельных осям x, y, z, и представим уравнение центрального эллипсоида инерции первого эквивалентного тела в виде:

$$f'(x', y', z') = 1.$$

Так как момент инерции рассматриваемого тела относительно какой-нибудь оси, проходящей через точку O и образующей с осями Ox, Oy, Oz углы a, b, c, равен его моменту относительно параллельной оси, проходящей через точку C,

[1] Stokes, Mathematical and Physical Papers, V. I, p. 65.

сложенному с произведением массы жидкости M в первой полости на квадрат расстояния между этими осями, то

$$f(\cos a,\ \cos b,\ \cos c) = f'(\cos a,\ \cos b,\ \cos c) + \\ + M[(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c) - \\ -(\xi\cos a+\eta\cos b+\zeta\cos c)^2].$$

Заменяем здесь $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ на ω_1, ω_2, ω_3:

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + M[(\zeta\omega_2-\eta\omega_3)^2 + \\ +(\xi\omega_3-\zeta\omega_1)^2+(\eta\omega_1-\xi\omega_2)^2].$$

Разложим теперь движение нашей системы на поступательное со скоростями

$$\zeta\omega_2-\eta\omega_3,\quad \xi\omega_3-\zeta\omega_1,\quad \eta\omega_1-\xi\omega_2$$

и вращательное относительно точки C. Вследствие этого вращательного движения жидкая масса первой полости получит скорости, имеющие потенциальную функцию φ', отличную от φ. Так как скорости нашей жидкой массы слагаются из скоростей ее центра тяжести и скоростей ее точек относительно этого центра тяжести, то по известной теореме механики ее живая сила будет равна живой силе в движении относительно центра тяжести, сложенной с половиной произведения массы на квадрат скорости центра тяжести. Отсюда следует, что

$$[\dot\varphi, \dot\varphi] = [\dot\varphi', \dot\varphi'] + M[(\zeta\omega_2-\eta\omega_3)^2+(\xi\omega_3-\zeta\omega_1)^2+(\eta\omega_1-\xi\omega_2)^2].$$

Замечая, что $[\dot\varphi, \dot\varphi] = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, и сравнивая найденную формулу с предыдущей, находим:

$$f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = [\dot\varphi', \dot\varphi'].$$

Таким образом уравнение центрального эллипсоида инерции первого эквивалентного тела может быть получено по формуле (11) в предположении, что неподвижная точка находится в центре первой полости. Мы видим из этого, что эквивалентные тела не зависят от места неподвижной точки O; так что, заменив все жидкие массы эквивалентными телами, мы вполне заменяем их механический эффект, будет ли твердое тело вращаться около какой-нибудь неподвижной точки или

двигаться свободно (последнее видно из § 8). Из того обстоятельства, что эллипсоиды инерции эквивалентных тел заключают внутри себя эллипсоиды инерции соответственных жидких масс, следует, что *эквивалентные тела имеют относительно всякой оси меньшие моменты инерции, нежели соответствующие им жидкие массы.*

Переходим к предположению, что P, Q и R не равны нулю. Направляя оси Ox, Oy и Oz по главным осям эллипсоида, представленного уравнением (17), мы приведем это уравнение к виду

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

а формулы (16) при этом обратятся в следующие:

$$\left.\begin{aligned} L &= A\frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\,\omega_2\omega_3 + R\omega_2 - Q\omega_3, \\ M &= B\frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\,\omega_3\omega_1 + P\omega_3 - R\omega_1, \\ N &= C\frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\,\omega_1\omega_2 + Q\omega_1 - P\omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Эти уравнения одинаковы с уравнениями движения твердого тела, к которому присоединен вращающийся жироскоп. *Ось вращения этого жироскопа образует с осями Ox, Oy, Oz углы, косинусы которых находятся в отношении*

$$P : Q : R,$$

а произведение начальной скорости жироскопа (при покоящемся твердом теле) *на момент инерции относительно оси вращения равно:*

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Таким образом эффект жидких масс, не имеющих начальных скоростей, тождествен с эффектами некоторых эквивалентных твердых тел; жидкие же массы в многосвязных полостях, получившие начальные скорости, производят, кроме того, еще влияние, подобное действию некоторого вращающегося жироскопа, присоединенного к телу.

Метод Неймана

§ 11. Решим нашу задачу о движении твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы, относительно неподвижной точки с помощью принципа Гамильтона. Для этого рядом с действительным движением нашей системы рассмотрим некоторые воображаемые движения ее, в которых положения твердого тела получаются из одновременных положений его в действительном движении, сообщая ему относительно подвижных осей x, y, z бесконечно малые угловые перемещения $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$; жидкость же движется без вращения частиц с теми же главными циркуляциями, как в действительном движении. Приняв, что в начале и в конце времени t имеем $\delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \delta\theta_3 = 0$, найдем, что в эти моменты все материальные точки твердого тела в воображаемом движении займут те же места, как в действительном; относительно же частиц жидкости подобное заключение не имеет места (§ 6), поэтому, следуя Нейману, мы приложим принцип Гамильтона к одному твердому телу и напишем:

$$\int_0^t (\delta T' + L'\delta\theta_1 + M'\delta\theta_2 + N'\delta\theta_3 - \int\int p\delta s \cos\nu\, d\sigma)\, dt = 0, \quad (19)$$

где T' — живая сила, L', M', N' — суммы моментов сил, действующих на него, относительно осей Ox, Oy, Oz, а

$$-\int\int p\delta s \cos\nu\, d\sigma$$

— элементарная работа сил давления на стенки его полостей, совершенная при переходе тела из его действительного положения в одновременное положение в воображаемом движении.

Чтобы определить эту работу сил давления, возьмем неподвижные оси координат x', y', z' и напишем уравнения гидродинамики:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial x'} - \frac{d^2x'}{dt^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'} = \frac{\partial U}{\partial y'} - \frac{d^2y'}{dt^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'} = \frac{\partial U}{\partial z'} - \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Назовем через $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ бесконечно малые перемещения, которые надо сообщить частицам жидкости, чтобы перевести жидкие массы из их положения в действительном движении в одновременные положения в воображаемом движении; умножим вышенаписанные уравнения на $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ и, сложив их, сделаем во второй части некоторое преобразование:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial p}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial p}{\partial z'}\delta z'\right) = \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial z'}\delta z' - \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\delta x' + \frac{dy'}{dt}\delta y' + \frac{dz'}{dt}\delta z'\right) + \delta\frac{V^2}{2}.$$

Заменяем в этом равенстве скорости жидкости производными от потенциальной функции скоростей Φ и, умножив его на массу частицы m, берем от обеих его частей сумму, распространенную на все жидкие массы:

$$\frac{1}{\rho}\sum m\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial p}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial p}{\partial z'}\delta z'\right) =$$

$$= \delta\sum mU - \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\Phi}{dz'}\delta z'\right) + \delta\sum\frac{mV^2}{2}.$$

Здесь

$$-\sum mU = W, \quad \sum\frac{mV^2}{2} = T''$$

представляют потенциальную и кинетическую энергию жидких масс; далее по формулам (2) и (3) имеем:

$$\frac{1}{\rho}\sum m\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial p}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial p}{\partial z'}\delta z'\right) = -\int\int p\delta s\cos\nu\, d\sigma,$$

$$\sum m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\delta z'\right) =$$

$$= -\rho\int\int\Phi\delta s\cos\nu\, d\sigma + \rho\int\int k\delta s'\cos\nu'\, d\sigma',$$

где интеграл с $d\sigma$ распространяется на все поверхности полостей, а интеграл с $d\sigma'$ — на одну сторону каждой перегородки.

Подставляя, найдем формулу Неймана для определения работы сил давления:

$$-\int\int p\,ds\cos\nu\,d\sigma = \delta(T''-W)+\frac{d}{dt}\rho\int\int\Phi\delta s\cos\nu d\sigma -$$

$$-\frac{d}{dt}\rho\int\int k\delta s'\cos\nu'\,d\sigma'. \qquad (20)$$

Внося эту формулу в формулу (19) и совершая интегрирование по времени в двух последних членах, получим:

$$\int_0^t[\delta(T'+T''-W)+L'\delta\theta_1+M'\delta\theta_2+N'\delta\theta_3]\,dt -$$

$$-\rho\int\int k\delta s'\cos\nu'\,d\sigma' = 0, \qquad (21)$$

потому что в начале времени $\delta s = \delta s' = 0$, а в конце времени $\cos\nu = 0$, а $\cos\nu'$ не равен нулю. Переходим к преобразованию двукратного интеграла, входящего в полученную формулу. Рассматривая часть его, относящуюся к одной из перегородок, найдем, что она будет равна величине k, умноженной на

$$\int\int\delta s'\cos\nu'\,d\sigma'.$$

Так как в конце времени t положения перегородки в воображаемом и в действительном движении совпадают, то этот интеграл представляет разность объемов жидкости, протекших во время t через рассматриваемую перегородку в воображаемом и действительном движении жидкости относительно тела. По формуле (8) объем жидкости, протекший во время t через перегородку, в действительном движении жидкости относительно тела будет:

$$\int_0^t dt\int\int\left[\frac{d\varphi}{dn'}+\frac{d\chi}{dn'}-\cos\alpha'(z\omega_2-y\omega_3)-\right.$$

$$\left.-\cos\beta'(x\omega_3-z\omega_1)-\cos\gamma'(y\omega_1-x\omega_2)\right]d\sigma',$$

где n' — нормаль перегородки, взятая в сторону главного контура, а α', β', γ' — углы этой нормали с осями координат x,

y, z. Разность таких объемов в воображаемом и действительном движении вследствие того, что

$$\delta \frac{d\chi}{dn'} = \frac{d\delta\chi}{dn} = 0$$

может быть представлена в виде:

$$\int_0^t dt\delta \int\int \left[\frac{d\varphi}{dn'} - \cos\alpha' (z\omega_2 - y\omega_3) - \cos\beta' (x\omega_3 - z\omega_1) - \right.$$

$$\left. - \cos\gamma' (y\omega_1 - x\omega_2) \right] d\sigma'.$$

Если теперь введем обозначение

$$\Omega = -\rho \int\int k \left[\frac{d\varphi}{dn'} - \cos\alpha' (z\omega_2 - y\omega_3) - \cos\beta' (x\omega_3 - z\omega_1) - \right.$$

$$\left. - \cos\gamma' (y\omega_1 - x\omega_2) \right] d\sigma', \qquad (22)$$

где интегралы распространяются на все перегородки, и положим

$$-\delta W + L'\delta\theta_1 + M'\delta\theta_2 + N'\delta\theta_3 = L\delta\theta_1 + M\delta\theta_2 + N\delta\theta_3,$$

то наша формула (21) примет вид:

$$\int_0^t [\delta (T' + T'' + \Omega) + L\delta\theta_1 + M\delta\theta_2 + N\delta\theta_3] dt = 0.$$

Здесь, согласно обозначениям § 9,

$$T' = \frac{1}{2} f_0 (\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

$$T'' = \frac{1}{2} [\varphi, \varphi] + \frac{1}{2} [\chi, \chi] + [\varphi, \chi] + \frac{1}{2} [\varphi_1, \varphi_1] + \frac{1}{2} [\chi_1, \chi_1] +$$

$$+ [\varphi_1, \chi_1] + \dots,$$

$$(\varphi, \varphi) = f (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (\varphi_1, \varphi_1) = f_1 (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \dots$$

По теореме Грина находим, что

$$[\varphi, \chi] + [\varphi_1, \chi_1] + \dots = -\int\int \varphi \frac{d\chi}{dn} d\sigma,$$

где интеграл распространяется на все поверхности полостей и на обе стороны каждой перегородки. Так как на стенках полостей $\frac{d\chi}{dn}=0$, а на стенках перегородок $\frac{d\chi}{dn}$ имеет противоположные знаки для точек, лежащих с двух противоположных сторон перегородки, то

$$[\varphi, \chi]+[\varphi_1, \chi_1]\ldots=0.$$

С другой стороны, вследствие того, что главные циркуляции в действительном и воображаемых движениях одинаковы

$$\delta[\chi, \chi]=\delta[\chi_1, \chi_1]=\ldots=0.$$

На основании всего этого получаем:

$$\delta(T'+T'')=\delta\frac{1}{2}[f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)+f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)+$$

$$+f_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)+\ldots].$$

Переходим к преобразованию выражения Ω. По теореме Грина пишем равенство:

$$\int\int \chi\frac{d\varphi}{dn}d\sigma=\int\int \varphi\frac{d\chi}{dn}d\sigma,$$

в котором интегралы распространены на все стенки полостей и обе стороны каждой перегородки. Так как $\frac{d\chi}{dn}$ на стенках полостей равна нулю, а с двух противоположных сторон каждой перегородки имеет противоположные знаки, то вторая часть нашего равенства обращается в нуль, следовательно, равна нулю и его первая часть. Это можно написать так:

$$\int\int \chi\frac{d\varphi}{dn}d\sigma=\int\int k\frac{d\varphi}{dn'}d\sigma',$$

где первый интеграл относится только к стенкам полостей, а второй — только к тем сторонам перегородок, нормаль которых направлена в сторону главных контуров. Преобразуем полученное равенство на основании формулы (5):

$$\int\int k\frac{d\varphi}{dn'}d\sigma'=\int\int \chi[\cos\alpha(z\omega_2-y\omega_3)+\cos\beta(x\omega_3-z\omega_1)+$$

$$+\cos\gamma(y\omega_1-x\omega_2)]d\sigma.$$

Подставляем это равенство в выражение для Ω:

$$\Omega = -\rho \int\int \gamma [\cos\alpha (z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta (x\omega_3 - z\omega_1) +$$

$$+ \cos\gamma (y\omega_1 - x\omega_2)]\, d\sigma + \rho \int\int k [\cos\alpha' (z\omega_2 - y\omega_3) +$$

$$+ \cos\beta' (x\omega_3 - z\omega_1) + \cos\gamma' (y\omega_1 - x\omega_2)]\, d\sigma'. \qquad (23)$$

Если вообразим, что наши жидкие массы повернуты относительно осей Ox, Oy, Oz на бесконечно малые углы $\omega_1\delta t$, $\omega_2\delta t$, $\omega_3\delta t$, то перемещения их точек будут:

$$\delta x = (z\omega_2 - y\omega_3)\,\delta t,$$

$$\delta y = (x\omega_3 - z\omega_1)\,\delta t,$$

$$\delta z = (y\omega_1 - x\omega_2)\,\delta t;$$

проекции же этих перемещений на нормали dn и dn' выразятся через

$$\delta s \cos\nu = [\cos\alpha (z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta (x\omega_3 - z\omega_1) +$$

$$+ \cos\gamma (y\omega_1 - x\omega_2)]\,\delta t,$$

$$\delta s' \cos\nu' = [\cos\alpha' (z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta' (x\omega_3 - z\omega_1) +$$

$$+ \cos\gamma' (y\omega_1 - x\omega_2)]\,\delta t;$$

так что

$$\Omega\delta t = -\rho \int\int \gamma\delta s \cos\nu\, d\sigma + \rho \int\int k\delta s' \cos\nu'\, d\sigma'.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3), приходим к заключению, что $\Omega\delta t$ есть элементарная работа количеств движения жидких масс, движущихся с потенциалами скоростей γ, γ_1, ..., при сообщении им бесконечно малых вращений $\omega_1\delta t$, $\omega_2\delta t$, $\omega_3\delta t$. Но если назовем через P, Q, R проекции на оси x, y, z главного момента количеств движения жидких масс при покоящемся твердом теле, то найдем, что вышеупомянутая элементарная работа будет:

$$P\omega_1\delta t + Q\omega_2\delta t + R\omega_3\delta t,$$

откуда

$$\Omega = P\omega_1 + Q\omega_2 + R\omega_3. \qquad (24)$$

Вследствие всего сказанного формула Гамильтона принимает вид:

$$\int_0^t (\delta T + L\delta\theta_1 + M\delta\theta_2 + N\delta\theta_3)\, dt = 0,$$

где функция T определяется по формуле (14). Отсюда легко получить наши уравнения (16). Выражаем $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ с помощью $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$. Для этого будем рассматривать мгновенную угловую скорость нашего твердого тела как некоторый вектор и заметим, что изменения его проекций $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ происходят от двух причин: во-первых, оттого, что при переходе от действительного движения к воображаемому сам вектор ω изменяется, так как для получения тела в воображаемом движении надо к вращению в действительном движении прибавить вращение, составляющие которого суть $\frac{d\delta\theta_1}{dt}$, $\frac{d\delta\theta_2}{dt}$, $\frac{d\delta\theta_3}{dt}$; во-вторых, оттого, что подвижные оси x, y, z получают в воображаемом движении новое направление, вследствие чего конец вектора ω получает относительно этих осей перемещения

$$\omega_2\delta\theta_3 - \omega_3\delta\theta_2, \quad \omega_3\delta\theta_1 - \omega_1\delta\theta_3, \quad \omega_1\delta\theta_2 - \omega_2\delta\theta_1.$$

Соединяя изменения от этих двух причин, найдем:

$$\delta\omega_1 = \frac{d\delta\theta_1}{dt} + \omega_2\delta\theta_3 - \omega_3\delta\theta_2, \quad \delta\omega_2 = \frac{d\delta\theta_2}{dt} + \omega_3\delta\theta_1 - \omega_1\delta\theta_3,$$

$$\delta\omega_3 = \frac{d\delta\theta_3}{dt} + \omega_1\delta\theta_2 - \omega_2\delta\theta_1.$$

Подставляя в формулу Гамильтона, представляем ее в виде уравнения:

$$\int_0^t \left(\frac{\partial T}{\partial\omega_1}\frac{d\delta\theta_1}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial\omega_2}\frac{d\delta\theta_2}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\omega_3}\frac{d\delta\theta_3}{dt}\right) dt +$$

$$+\int_0^t \left[\left(L + \frac{\partial T}{\partial\omega_2}\omega_3 - \frac{\partial T}{\partial\omega_3}\omega_2\right)\delta\theta_1 + \left(M + \frac{\partial T}{\partial\omega_3}\omega_1 - \frac{\partial T}{\partial\omega_1}\omega_3\right)\delta\theta_2 + \right.$$

$$\left. + \left(N + \frac{\partial T}{\partial\omega_1}\omega_2 - \frac{\partial T}{\partial\omega_2}\omega_1\right)\delta\theta_3\right] dt = 0,$$

из которого прямо следуют уравнения (16).

ГЛАВА II

Эллипсоидальная полость

§ 12. Переходя к приложению нашей общей теории к примерам, мы остановимся сначала на случае эллипсоидальной полости, разобранном Ламбом. Предполагая, что полость вращается около ее центра и направив оси x, y, z по осям эллиптической поверхности, ограничивающей ее, представим уравнение этой поверхности в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Косинусы углов внутренней нормали будут:

$$\cos\alpha=-\frac{hx}{a^2},\quad \cos\beta=-\frac{hy}{b^2},\quad \cos\gamma=-\frac{hz}{c^2},$$

где h — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на плоскость, прикасающуюся к его поверхности в точке x, y, z. Поставим эти величины косинусов в формулу (7) первой главы:

$$\frac{d\psi_1}{dn}=hyz\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

$$\frac{d\psi_2}{dn}=hzx\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right),$$

$$\frac{d\psi_3}{dn}=hxy\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

Положив $\psi_1=Ayz$, мы удовлетворим уравнению Лапласа; для того же, чтобы удовлетворить первому из вышенаписанных условий, которое принимает вид:

$$-Ahyz\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=hyz\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

мы должны взять

$$A = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2},$$

откуда

$$\psi_1 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} yz.$$

Таким же образом найдем ψ_2 и ψ_3, так что вся функция φ будет:

$$\varphi = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \omega_1 yz + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \omega_2 zx + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \omega_3 xy. \qquad (1)$$

Составляем уравнение эллипсоида инерции эквивалентного тела, пользуясь формулой (11) первой главы. Так как $[\psi_2, \psi_3]$, $[\psi_3, \psi_1]$, $[\psi_1, \psi_2]$ обращаются в нули, ибо они представляют интегралы, взятые от произведения двух различных координат, то главные оси искомого эллипсоида совпадут с осями полости, а его уравнение будет:

$$\frac{M}{5} \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2} x^2 + \frac{M}{5} \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2} y^2 + \frac{M}{5} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} z^2 = 1, \quad (2)$$

где M — масса жидкости в полости. Очевидно, что полуоси этого эллипсоида больше соответствующих полуосей эллипсоида инерции самой жидкой массы, который имеет уравнение:

$$\frac{M}{5} (b^2 + c^2) x^2 + \frac{M}{5} (c^2 + a^2) y^2 + \frac{M}{5} (a^2 + b^2) z^2 = 1, \quad (3)$$

так как коэфициенты уравнения (2) получаются из коэфициентов уравнения (3) через умножение на величины

$$\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\right)^2, \quad \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\right)^2, \quad \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2,$$

меньшие единицы. Если мы желаем дать эквивалентному телу форму эллипсоида, то должны определить его полуоси a', b', c' и плотность ρ' его вещества из формул:

$$b'^2 + c'^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2},$$

$$c'^2 + a'^2 = \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2},$$

$$a'^2 + b'^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2},$$

$$\rho' = M : \frac{4}{3}\pi a' b' c'.$$

В частном случае, когда полость имеет форму шара, надо положить $a = b = c$, а потому $a' = b' = c' = 0$, так что эквивалентное тело представляет в этом случае материальную точку, в которой сосредоточена вся масса M.

Пользуясь формулой (8) первой главы, в которой полагаем $\chi = 0$, и заменяя φ формулой (1), находим скорости частиц жидкости относительно твердого тела:

$$\left.\begin{aligned} u &= a^2(qz - ry), \\ v &= b^2(rx - pz), \\ w &= c^2(py - qx), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где для сокращения положено

$$p = -\frac{2\omega_1}{b^2 + c^2}, \quad q = -\frac{2\omega_2}{c^2 + a^2}, \quad r = -\frac{2\omega_3}{a^2 + b^2}. \qquad (5)$$

Линии токов рассматриваемого относительного движения выразятся диференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{a^2(qz - ry)} = \frac{dy}{b^2(rx - pz)} = \frac{dz}{c^2(py - qx)},$$

которые дают нам интегралы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \text{const},$$

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} + \frac{rz}{c^2} = \text{const}.$$

Эти интегралы показывают, что рассматриваемые линии токов представляют семейства эллипсов, по которым плоскости, сопряженные направлению $p : q : r$, пересекают семейство концентрических эллипсоидов, подобных полости.

Мы назовем найденное движение жидкости *эллиптическим вращением.* Формулы (4) показывают, что все частицы жидкости, лежащие на прямой

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r},$$

в рассматриваемый момент времени не имеют относительного движения.

Эту прямую, проходящую через центры всех эллипсов, по которым текут частицы жидкости, мы назовем осью эллиптического вращения. Формулы (5) позволяют по направлению оси вращения твердого тела найти направление оси эллиптического вращения заключенной в нем жидкости. Для этого стоит только провести к оси вращения тела перпендикулярную плоскость, прикасающуюся к эллипсоиду инерции, данному уравнением (3), и соединить точку касания с центром полости прямой, которая и будет искомой.

Так как знаки p, q, r противоположны знакам ω_1, ω_2, ω_3, то жидкая масса имеет около найденной оси эллиптическое вращение в сторону, обратную вращению тела. Если твердое тело вращается относительно неподвижной оси, то и ось эллиптического вращения жидкой массы имеет неизменное положение внутри полости. Вышеописанные линии токов представляют при этом траектории относительного движения частиц жидкости; все частицы, лежащие в плоскости, проходящей через ось эллиптического вращения, будут оставаться в одной плоскости, вращаясь вместе с ней около этой оси; объем жидкости, заключенный между двумя такими плоскостями, не будет изменяться. Из всего этого следует, что рассматриваемое движение жидкой массы определяется изменением одного параметра. За такой параметр мы примем величину θ', которая равна произведению 2π на отношение объема жидкости, протекшей через какую-нибудь площадку, взятую внутри полости, к объему замкнутой трубки, образованной эллиптическими траекториями, проходящими через точки контура площадки. Понятно, что величина θ' не зависит от выбора площадки и обращается в так называемое угловое перемещение, когда эллиптическое вращение обращается в обыкновенное.

Производная

$$\frac{d\theta'}{dt} = \omega'$$

есть величина, аналогичная угловой скорости. Определим ее. Для этого рассмотрим слой жидкости, заключенный между диаметральной плоскостью, сопряженной направлению $p : q : r$, и бесконечно к ней близкой параллельной плоскостью. Проведем из центра диаметральной плоскости какой-нибудь радиус-вектор и сделаем по нему перпендикулярное сечение нашего слоя. Полученный в сечении бесконечно малый прямоугольник примем за вышеупомянутую площадку. Величина ω' будет равна произведению 2π на отношение объема жидкой массы, протекшей в единицу времени (при неизменяющейся скорости) через построенный прямоугольник, к объему всего слоя, заключенного между нашими плоскостями; а так как это отношение может быть заменено отношением секториальной скорости (vitesse aréolaire) радиуса-вектора ко всей площади, описанной им при полном обороте, то

$$\omega'^2 = \frac{\pi^2}{s^2}\left[(yw - zv)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - uy)^2\right],$$

где s — площадь эллипса, описанного радиусом-вектором, x, y, z — координаты конца радиуса-вектора, а u, v, w — скорости, выражаемые по формулам (4). Мы находим по этим формулам, что

$$yw - zv = b^2c^2\left[p\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - x\left(\frac{qy}{b^2} + \frac{rz}{c^2}\right)\right];$$

но так как

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} + \frac{rz}{c^2} = 0,$$

то

$$yw - zv = b^2c^2p.$$

Так же получим:

$$zu - xw = c^2a^2q, \quad xv - yu = a^2b^2r.$$

Площадь s определяется с помощью длины перпендикуляра h, опущенного на нашу диаметральную плоскость из конца ее сопряженного диаметра:

$$s = \frac{\pi abc}{h}.$$

Подставляя найденные величины в формулу для ω'^2, находим:

$$\omega' = h\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}p^2 + \frac{c^2a^2}{b^2}q^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}r^2};$$

но так как

$$h = \frac{\sqrt{\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2} + \dfrac{r^2}{c^2}}}{\sqrt{\dfrac{p^2}{a^4} + \dfrac{q^2}{b^4} + \dfrac{r^2}{c^4}}},$$

то

$$\omega' = abc\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}.$$

Подставляя сюда величины p, q, r из формул (5), в которых берем:

$$\omega_1 = \omega\cos\lambda, \quad \omega_2 = \omega\cos\mu, \quad \omega_3 = \omega\cos\nu,$$

найдем связь между ω' и ω:

$$\omega' = \omega\sqrt{\left(\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)^2\cos^2\lambda + \left(\frac{2ca}{c^2+a^2}\right)^2\cos^2\mu + \left(\frac{2ab}{b^2+c^2}\right)^2\cos^2\nu}.$$

Если же заменим здесь ω' на $\frac{d\theta'}{dt}$, а ω — на $\frac{d\theta}{dt}$, где θ — угловое перемещение тела, и обинтегрируем, положив $\theta' = 0$ при $\theta = 0$, то получим подобную же связь между величинами θ' и θ:

$$\theta' = \theta\sqrt{\left(\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)^2\cos^2\lambda + \left(\frac{2ca}{c^2+a^2}\right)^2\cos^2\mu + \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2\cos^2\nu}. \quad (6)$$

Отсюда очевидно, что

$$\theta' < \theta.$$

Таким образом *твердое тело при своем вращении всегда упреждает жидкость, совершающую внутри полости эллиптическое вращение в обратную сторону*. Когда твердое тело совершит полный оборот и θ возрастет на 2π, θ' еще не возрастет на 2π и жидкость не займет внутри полости прежнего места. Если корень в формуле (6) есть число соизмеримое, то можно найти такое число оборотов, после которого тело и жидкая масса займут в пространстве прежние места; в противном же случае наша система после нескольких оборотов может быть возвращена в свое первоначальное положение только посредством вращения на то же число оборотов в обратную сторону.

Цилиндрические полости

§ 13. Предположим, что объем жидкости, заключенной в теле, ограничен цилиндрической поверхностью и двумя плоскостями, нормальными к этой поверхности. Направим ось Oz параллельно образующей цилиндра, а плоскость xOy возьмем так, чтобы она рассекала цилиндрическую полость пополам. Покажем, что при этом *одна из главных осей инерции эквивалентного тела будет направлена по оси* Oz. Для этого обнаружим, что в формуле (11) первой главы

$$[\psi_2, \psi_3] = 0, \quad [\psi_3, \psi_1] = 0.$$

По теореме Грина и формуле (7) первой главы находим:

$$[\psi_2, \psi_3] = -\rho \int\int \frac{d\psi_2}{dn} \psi_3 d\sigma = -\rho \int\int \psi_3 (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\, d\sigma,$$

где интеграл распространяется на всю поверхность полости. Функция ψ_3 будет в нашем случае зависеть только от x и y. Для точек, лежащих на поверхности цилиндра, надо положить $\cos\gamma = 0$, вследствие чего для двух точек, имеющих координаты x, y, z и x, y, $-z$ подинтегральные функции $\psi_3 z\cos\alpha$ будут равны по величине, но противоположны по знаку; на нижнем и верхнем дне цилиндра надо положить $\cos\alpha = 0$ и взять $\cos\gamma = +1$ для нижнего дна и $\cos\gamma = -1$ для верхнего дна, вследствие чего для точек с равными x, y

подинтегральная функция $\psi_3 x \cos\gamma$ будет иметь на этих днах равные величины, но противоположные знаки. Таким образом все элементы интеграла сокращаются, и мы получаем:

$$[\psi_2,\ \psi_3] = 0.$$

Точно так же докажем, что

$$[\psi_3,\ \psi_1] = 0.$$

§ 14. Исследуем сначала движение жидкости, происходящее от вращения ω_3 около оси Oz. Потенциальная функция скоростей абсолютного движения выражается при этом через $\omega_3\psi_3$, скорости же относительного движения по формуле (8) первой главы будут:

$$u = \omega_3\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + y\right),$$

$$v = \omega_3\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - x\right).$$

$$w = 0.$$

Введем вместо ψ_3 другую функцию $f(x, y)$, положив:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi_3}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y},\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y} &= -\frac{\partial f}{\partial x},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

вследствие чего функция f, так же как и ψ_3, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

Скорости относительного движения выразятся с помощью функции f в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}u &= \omega_3\frac{\partial}{\partial y}\left[f + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right],\\ v &= -\omega_3\frac{\partial}{\partial x}\left(f + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right],\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$w = 0.$$

Подставив их в диференциальное уравнение

$$u\,dy - v\,dx = 0$$

и обинтегрировав его, найдем для траекторий относительного движения:

$$f + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const}; \qquad (10)$$

линии же токов абсолютного движения будут по формуле (7) иметь уравнения

$$f = \text{const}.$$

Так как контур перпендикулярного сечения нашей полости должен быть одной из линий семейства (10), то функция f на контуре сечения должна или равняться

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

или отличаться от этой функции на постоянную величину. Момент инерции эквивалентного тела относительно оси Oz может быть на основании формулы (7) выражен по f:

$$[\psi_3, \psi_3] = [f, f] = 2l\rho \int\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \qquad (11)$$

где интеграл распространяется на площадь контура, а $2l$ — длина образующей цилиндра. На основании теоремы Грина можем представить этот момент инерции еще в таких видах:

$$[f, f] = -2l\rho \int f \frac{df}{dn}\,ds = l\rho \int (x^2 + y^2)\frac{df}{\partial n}\,ds, \qquad (12)$$

где ds есть элемент контура перпендикулярного сечения, по которому и совершается интеграция, а dn — элемент его внутренней нормали. Последний вид формулы (12) не может быть употреблен, если контур ограничен двумя линиями семейства (10), потому что тогда функция f на той и другой линии получается, прибавляя к функции $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ различные постоянные величины.

Так как функция f внутри контура перпендикулярного сечения удовлетворяет уравнению (8) и имеет известное значение на самом контуре, то определение ее представляет решение задачи о распределении температуры в бесконечно длинном цилиндре по данной температуре на его поверхности; она решается с помощью тригонометрических строк, когда найдены изотермические координаты, соответствующие данному контуру. Но, кроме этого, можно также пользоваться обратным приемом решения вопроса, который употреблял С. Венан в своей задаче о кручении призм, аналогичной нашей гидродинамической задаче. Этот прием заключается в предварительном задании функции f, удовлетворяющей уравнению (8), и в подборе входящих в нее параметров и постоянного в уравнении (10) таким образом, чтобы полученный контур имел простую форму.

§ 15. Чтобы разъяснить прием С. Венана на простейших примерах, положим:

$$f = \frac{k}{2}\left[(x + y\sqrt{-1})^n + (x - y\sqrt{-1})^n\right] = kr^n \cos n\eta,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \eta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

При $n = 2$ имеем:

$$f = k(x^2 - y^2),$$

так что формула (10) дает:

$$x^2\left(\frac{1}{2} + k\right) + y^2\left(\frac{1}{2} - k\right) = \text{const.} \qquad (13)$$

Приняв $1 > 2k > -1$, найдем, что траектории относительного движения будут подобные эллипсы и полость будет иметь форму эллиптического цилиндра. Скорости относительного движения будут:

$$u = \omega_3(1 - 2k)\,y;$$

$$v = -\omega_3(1 + 2k)\,x,$$

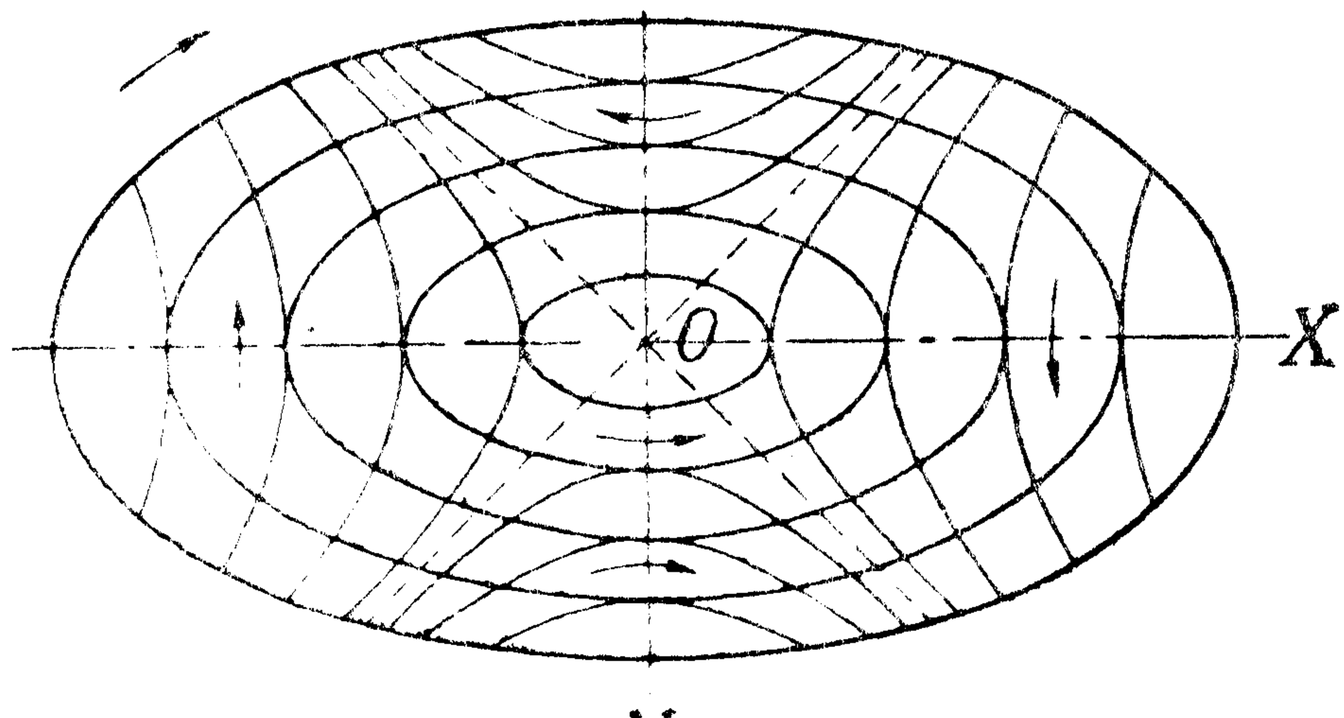
откуда следует, что это движение есть эллиптическое вращение относительно оси цилиндра. Линии токов в абсолютном движении будут равносторонние гиперболы:

$$k(x^2 - y^2) = \text{const.}$$

На фиг. 6 представлены линии токов рассматриваемого относительного и абсолютного движений и указаны стрелками направления течений. Момент инерции эквивалентного тела определим по формуле (11):

$$[f, f] = 8k^2 l\rho \int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy = k^2 M (a^2 + b^2),$$

где M — масса всей жидкости, а a и b — полуоси эллиптического контура, из которых первая будет большой полуосью при отрицательном k. Так как момент инерции эллиптического цилиндра относительно его оси есть



Фиг. 6.

$$M\frac{a^2 + b^2}{4},$$

то отношение момента инерции эквивалентного тела к моменту инерции соответствующей массы жидкости есть $4k^2$. Эта величина определится из уравнения:

$$\frac{1 + 2k}{1 - 2k} = \frac{b^2}{a^2}$$

и будет:

$$4k^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2. \qquad (14)$$

При $n = 3$ имеем:

$$f = k(x^3 - 3xy^2) = kr^3 \cos 3\eta,$$

так что уравнения траекторий относительного движения по формуле (10) будут:

$$k(x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Решаем это уравнение относительно y^2:

$$y^2 = \frac{2kx^3 + x^2 - 2\,\text{const}}{6kx - 1} = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3k}\right)^2 + \frac{\frac{1}{27k^2} - 2\,\text{const}}{6kx - 1}.$$

Полагаем для большего удобства $k = \frac{1}{2a}$:

$$y^2 = \frac{1}{3}\left(x + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{\frac{4a^3}{27} - 2a\,\text{const}}{3x - a}. \tag{15}$$

Для контура берем ту траекторию, для которой

$$\text{const} = \frac{2a^2}{27}.$$

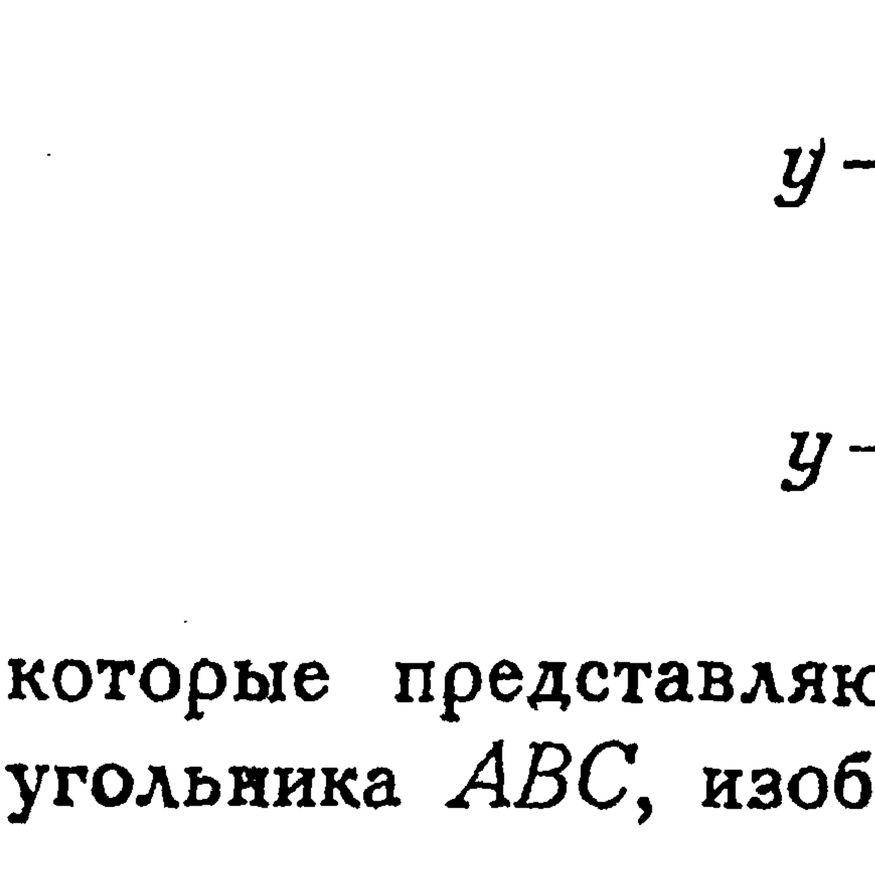
Эта траектория распадается на три прямые линии:

$$3x - a = 0,$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{2a}{3}\right) = 0,$$

$$y + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{2a}{3}\right) = 0,$$

которые представляют три стороны равностороннего треугольника ABC, изображенного на фиг. 7. Высота этого треугольника $CD = a$, а стороны имеют длину $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.



Фиг. 7.

Траектории относительного движения строятся с помощью уравнения (5), давая в нем числителю дроби положительные значения от 0 до $\frac{4}{27}a^3$, и имеют вид, представленный на фигуре; линии токов в абсолютном движении будут кубические гиперболы, которые представятся полярным уравнением

$$r^3 \cos 3\eta = \text{const}.$$

Момент инерции эквивалентного тела удобно вычислять по формуле (11), полагая в ней

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{r\partial \eta}\right)^2=9k^2r^4=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{a}\right)^2 r^4;$$

таким образом найдем, что

$$[f,\ f]=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^2 l\rho\int\int (x^2+y^2)^2\,dx\,dy=\frac{2}{5}M\left(\frac{a}{3}\right)^2. \quad (16)$$

Так как момент инерции жидкости, заключенной в нашей треугольной призме, относительно ее оси есть

$$M\left(\frac{a}{3}\right)^2,$$

то *момент инерции эквивалентного тела около той же оси будет составлять только* $\frac{2}{5}$ *момента инерции жидкой массы.*

§ 16. Обращаемся к контурам, образованным координатными линиями изотермической системы криволинейных координат. Пусть контур перпендикулярного сечения данной цилиндрической полости ограничен двумя софокусными эллипсами с фокусным расстоянием c[1]. Направляя оси Ox и Oy по осям этих эллипсов, найдем соответственные изотермические координаты из положения:

$$\xi+\eta\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\ \text{arc cos}\ \frac{x+y\sqrt{-1}}{c}$$

или

$$x+y\sqrt{-1}=c\,(\cosh\xi\cos\eta+\sinh\xi\sin\eta\sqrt{-1}),$$

где

$$\cosh\xi=\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2},\quad \sinh\xi=\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}$$

суть так называемые гиперболические косинус и синус. Определим x и y:

$$x=c\cosh\xi\cos\eta,\ y=c\sinh\xi\sin\eta. \quad (17)$$

---

[1]) Аналогичная задача в теории кручения призм разобрана А. П. Соколовым „Задача о кручении призматических тел“, § 8.

Отсюда видно, что координатные линии имеют уравнения:

$$\frac{x^2}{\cosh^2\xi}+\frac{y^2}{\sinh^2\xi}=c^2,$$

$$\frac{x^2}{\cos^2\eta}-\frac{y^2}{\sin^2\eta}=c^2$$

и представляют семейства софокусных эллипсов и гипербол с фокусным расстоянием $2c$. Положим, что два из этих эллипсов, соответствующие параметрам $\xi=\xi_1$ и $\xi=\xi_2$, ограничивают перпендикулярное сечение нашей полости с внешней и внутренней стороны. Уравнение (8), выраженное в прямоугольных изотермических координатах ξ, η, будет:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=0, \tag{18}$$

а величина $r^2=x^2+y^2$ на основании уравнения (17) будет:

$$r^2=c^2(\cosh^2\xi\cos^2\eta+\sinh^2\xi\sin^2\eta);$$

она может быть преобразована с помощью формул:

$$(\cosh^2\xi+\sinh^2\xi)(\cos^2\eta+\sin^2\eta)=\cosh 2\xi,$$

$$(\cosh^2\xi-\sinh^2\xi)(\cos^2\eta-\sin^2\eta)=\cos 2\eta$$

в

$$r^2=\frac{c^2}{2}(\cosh 2\xi+\cos 2\eta). \tag{19}$$

Искомая нами функция f должна внутри контура удовлетворять уравнению (18), на самом же контуре функция

$$f+\frac{c^2}{4}(\cosh 2\xi+\cos 2\eta)$$

не должна зависеть от η. Мы удовлетворим этим требованиям, положив:

$$f=(Ae^{2\xi}+Be^{-2\xi})\cos 2\eta$$

и выбрав A и B так, чтобы член, стоящий в скобках, обращался при $\xi=\xi_1$ и $\xi=\xi_2$ в $-\frac{c^2}{4}$. Таким образом найдем,

что

$$f = -\frac{c^2}{4}\,\frac{\sinh 2(\xi_1 - \xi) + \sinh 2(\xi - \xi_2)}{\sinh 2(\xi_1 - \xi_2)}\cos 2\eta$$

или

$$f = -\frac{c^2}{4}\,\frac{\cosh(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi)}{\cosh(\xi_1 - \xi_2)}\cos 2\eta. \qquad (20)$$

Траектории относительного движения на основании формулы (10) будут представлены уравнениями:

$$\cosh 2\xi + \frac{2\sinh(\xi_1 - \xi)\sinh(\xi - \xi_2)}{\cosh(\xi_1 - \xi_2)}\cos 2\eta = \text{const}. \qquad (21)$$

По этим траекториям частицы жидкости будут течь со скоростью V, которая в наших криволинейных координатах на основании формулы (9) выражается через

$$V^2 = \omega_3{}^2 h^2 \left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f + \frac{1}{2}r^2\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(f + \frac{1}{2}r^2\right)\right]^2\right\}, \qquad (22)$$

где h — первый дифференциальный параметр функций ξ и η:

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 =$$

$$= c^2(\cosh^2\xi\sin^2\eta + \sinh^2\xi\cos^2\eta).$$

Это выражение дифференциального параметра может быть преобразовано на основании формул, послуживших нам для преобразования r^2:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{2}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta). \qquad (23)$$

Составим величину скорости V для точек внутреннего контура. Так как на контуре

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(f + \frac{1}{2}r^2\right) = 0,$$

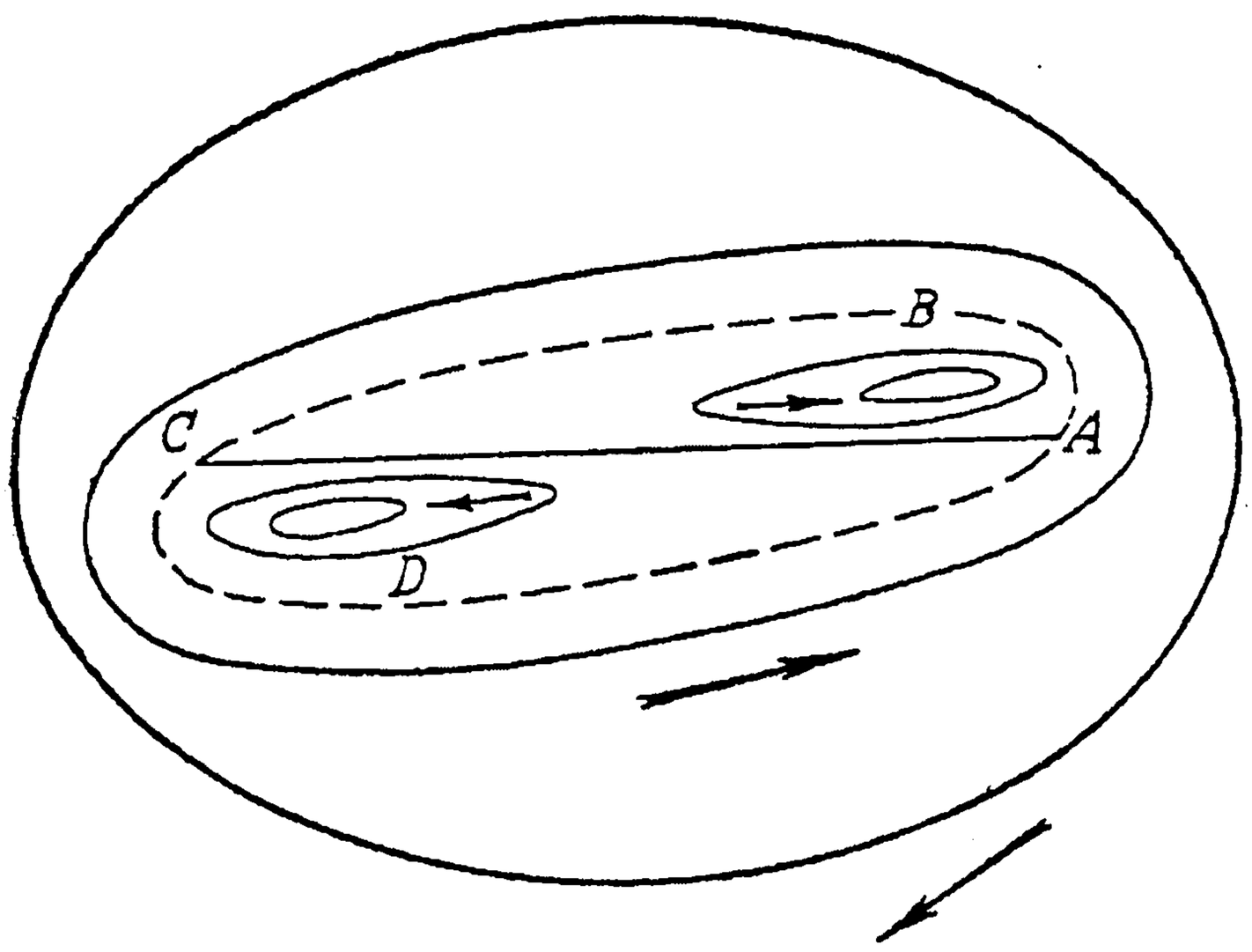
то формула (22) дает нам на основании формул (19), (20) и (23):

$$V = \frac{\omega_3 c}{\sqrt{2(\cosh 2\xi_2 - \cos 2\eta)}}\left[\sinh 2\xi_2 + \frac{\sinh(\xi_1 - \xi_2)}{\cosh(\xi_1 - \xi_2)}\cos 2\eta\right].$$

Написанная величина будет тем больше, чем больше $\cos 2\eta$, так что наибольшую относительную скорость на внутреннем контуре имеют точки, лежащие на концах его большой оси, как это видно из формулы (17). Эта наибольшая скорость выражается формулой:

$$V = \frac{\omega_3 c}{\sqrt{2(\cosh 2\xi_2 - 1)}} \left[\sinh 2\xi_2 + \frac{\sinh(\xi_1 - \xi_2)}{\cosh(\xi_1 - \xi_2)} \right] \quad (24)$$

и стремится к ∞ при приближении ξ_2 к нулю. Так как при этом во всех остальных точках жидкостей скорость остается конечной, то формула (24), начиная с известного значения ξ_2, дает наибольшую относительную скорость всего течения жидкости. Этого нельзя сказать вообще, так как на основании § 6 наибольшая относительная скорость может находиться и на внешнем контуре.



Фиг. 8.

Случай $\xi_2 = 0$ соответствует полости, имеющей форму эллиптического цилиндра, внутри которого сделана прямоугольная пластинка, пересекающая нижнее и верхнее основания цилиндра по прямым, соединяющим фокусы. То обстоятельство, что при вращении этого цилиндра около оси, параллельной его образующей, наибольшая относительная скорость бесконечно велика, приводит нас на основании § 7 к заключению, что давление жидкости внутри такой полости тоже беспредельно велико. В действительности в этом случае происходит разрыв сплошности, на который указывает Гельмгольц, [1] и траектории частиц жидкости отступают от вида, данного уравнением (21). Внутри полости образуется некоторая

[1] „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen", Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.

поверхность раздела $ABCD$ (фиг. 8), с двух сторон которой жидкость будет течь с различными скоростями; но гидродинамические давления с той и другой стороны поверхности раздела должны быть, разумеется, одинаковы. Поэтому на основании формулы (9) первой главы заключаем, что при равномерном вращении разности квадратов скоростей относительного течения с обеих сторон поверхности раздела постоянны вдоль всей этой поверхности. Переходим к определению момента инерции эквивалентного тела. На основании формулы (12) имеем:

$$[f,\ f] = 2l\rho \int_0^{2\pi} \left(\Big|_{\xi_2}^{\xi_1} f \frac{df}{d\xi} \right) d\eta,$$

так как

$$dn = \frac{d\xi}{h},\ \ ds = \frac{d\eta}{h}.$$

Подставляем сюда функцию f из формулы (20):

$$[f,\ f] = \frac{lc^4\rho}{2} \frac{\sinh(\xi_1 - \xi_2)}{\cosh(\xi_1 - \xi_2)} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\eta d\eta = \frac{\pi}{2} lc^4\rho \frac{\sinh(\xi_1 - \xi_2)}{\cosh(\xi_1 - \xi_2)}.$$

Если назовем через a, b, a', b' полуоси внешнего и внутреннего эллипса, то

$$c\cosh\xi_1 = a,\ c\sinh\xi_1 = b,\ c\cosh\xi_2 = a',\ c\sinh\xi_2 = b',$$

вследствие чего найденный момент инерции получает вид:

$$[f,\ f] = \frac{Mc^4(ba' - ab')}{4(ab - a'b')(aa' - bb')}. \tag{25}$$

Для случая $b' = 0$ эта формула дает нам величину

$$[f,\ f] = \frac{Mc^4}{4a^2},$$

которая получается из момента инерции жидкой массы:

$$\frac{M(a^2 + b^2)}{4}$$

через умножение его на дробь

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2(a^2 + b^2)}.$$

Эта дробь более той, которая дается формулой (14).

§ 17. Как второй пример рассмотрим цилиндрическую полость, перпендикулярное сечение которой имеет форму кругового сектора, соответствующего радиусу a и углу β [1]).

Принимаем начало координат в центре круга и направляем ось Ox по одному из крайних радиусов сектора.

Соответственные изотермические координаты найдутся из уравнения

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = \lg(x + y\sqrt{-1}),$$

из которого

$$\xi = \lg\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \eta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Функция f должна внутри сектора удовлетворять уравнению (18), а на его стенках должна обращаться в

$$-\frac{1}{2}e^{2\xi}.$$

Чтобы определить эту функцию, представляем ее суммой двух функций

$$f = f_1 + f_2,$$

из которых первая есть [2])

$$f_1 = -\frac{e^{2\xi}\cos(\beta - 2\eta)}{2\cos\beta}$$

и потому удовлетворяет уравнению (18) и имеет желаемую величину на крайних радиусах сектора; вторая же вследствие этого должна удовлетворять уравнению (18) внутри

---

[1]) Этот пример разобран Стоксом, Mathematical and Physical Papers, v. I, p. 305.

[2]) Мы исключаем пока случай $\beta = \frac{\pi}{2}$, имея в виду от общей формулы момента инерции эквивалентного тела перейти к этому случаю в пределе.

сектора, на его крайних радиусах должна обращаться в нуль, а на его дуге в

$$\frac{e^{2\xi}}{2}\left(\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}-1\right).$$

Эту вторую функцию можно представить в виде тригонометрического ряда

$$f_2=\sum C_n e^{\frac{n\pi}{\beta}\xi}\sin\frac{n\pi}{\beta}\eta,$$

в котором n следует приписывать целые нечетные значения от 1 до ∞, потому что в пределах $0\leqq\eta\leqq\beta$ имеем разложение:

$$\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}-1=\frac{16}{\pi}\left\{\frac{\sin\frac{\pi\eta}{\beta}}{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2-4}+\frac{\sin\frac{3\pi\eta}{\beta}}{3\left[\left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^2-4\right]}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\frac{5\pi\eta}{\beta}}{5\left[\left(\frac{5\pi}{\beta}\right)^2-4\right]}+\cdots\right\}.$$

Положив для сокращения письма

$$\frac{\pi}{\beta}=\nu,$$

найдем для определения коэфициентов C_n формулу:

$$C_n=\frac{8a^2}{n\pi\left[(n\nu)^2-4\right]}\frac{1}{a^{n\nu}}.$$

Складывая найденную функцию f_2 с f_1 и выражая ξ по r, получим искомую функцию:

$$f=-\frac{r^2}{2}\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}+\frac{8a^2}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{\sin(n\nu\eta)}{n\left[(n\nu)^2-4\right]}\left(\frac{r}{a}\right)^{n\nu}. \quad (26)$$

При составлении уравнений траекторий относительного движения по формуле (10) мы разложим в них член

$$-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}-1\right)$$

по вышеприведенной строке, так что получим:

$$\sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n\left[(n\nu)^2-4\right]}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^{n\nu}-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\sin(n\nu\eta)=\text{const.} \quad (27)$$

Переходя к определению величины скорости относительного движения, мы найдем ее только для точек, лежащих на крайних радиусах сектора. Полагая в формуле (22)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f+\frac{1}{2}r^2\right)=0,\ h=\frac{1}{r},$$

найдем:

$$V=-\omega_3 r\,\mathrm{tg}\,\beta+\frac{8\omega_3 a^\nu}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n^2\nu^2-4}\left(\frac{r}{a}\right)^{n\nu-1}. \quad (28)$$

Всякий раз, как $\beta<\pi$, будем иметь $\nu>1$ и найдем, что скорость жидкости в центре дуги сектора равна; нулю если же $\beta>\pi$, то $\nu<1$, и скорость при $r=0$ обращается в ∞. Здесь мы опять встречаемся со случаем, при котором давление жидкости внутри полости должно бы быть бесконечно велико, если бы частицы текли в относительном движении по траекториям, данным уравнением (27); но такое беспредельное возрастание давления устраняется схождением частиц жидкости с контура перпендикулярного сечения в точке пересечения радиусов, как это указал Стокс в вышеупомянутом сочинении.

Для определения момента инерции эквивалентного тела пользуемся вторым видом формулы (12):

$$[f,\ f]=l\rho\int_0^a r\left|_\beta^0\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)dr-a^3 l\rho\int_0^\beta\left(\left|_0^a\frac{\partial f}{\partial r}\right.\right)d\eta.\right.$$

Подставляя сюда формулу (26) и совершая указанные действия, получаем

$$[f,\ f]=\frac{2Ma^{2\nu}}{\pi}\left[\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{4}-\frac{16\nu}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{(n\nu-2)\,n\nu\,(n\nu+2)^2}\right]. \quad (29)$$

Для $\beta=\frac{\pi}{2}$ первый и второй члены этой формулы обращаются в ∞, но разность этих членов стремится к конеч-

ному пределу. Положив $\frac{\pi}{2} - \beta = \mu$, найдем для этой разности:

$$\lim_{\mu=0} \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\operatorname{tg}\mu} - \frac{(\pi-2\mu)^3}{\pi\mu(\pi-\mu)^2}\right\} = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому для рассматриваемого случая момент инерции эквивалентного тела будет:

$$[f, f] = \frac{2Ma^{2\nu}}{\pi^2}\left\{1 - 16\nu \sum_{n=3,5,\ldots} \frac{1}{(n^\nu-2)\,n^\nu\,(n^\nu+2)^2}\right\}. \qquad (30)$$

Формулы (29) и (30) дают нам хорошо сходящиеся строки, с помощью которых можем вычислять моменты инерции эквивалентных тел для различных углов β. Таким образом получаем следующий результат: если полость тела имеет форму круглого цилиндра, то момент инерции эквивалентного тела около оси цилиндра по формуле (14) равен нулю; если же разделим эту полость диаметральными перегородками на две, четыре или восемь равных частей, то *момент инерции эквивалентного тела составит 0,6211, 0,7904 или 0,9077 от момента инерции всей жидкой массы.*

§ 18. Переходим к исследованию вращательного движения около оси, перпендикулярной к образующей цилиндрической полости. Пусть вращение совершается около оси Ox. Абсолютные скорости жидкости будут при этом по формуле (6) первой главы иметь потенциальную функцию $\omega_1\psi_1$; относительные же ее скорости по формуле (8) той же главы будут:

$$u = \omega_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x},$$

$$v = \omega_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + z\right),$$

$$w = \omega_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - y\right).$$

Полагаем здесь $\psi_1 = F - yz$; тогда формулы скоростей относительного движения обратятся в

$$\left.\begin{aligned} u &= \omega_1 \frac{\partial F}{\partial x}, \\ v &= \omega_1 \frac{\partial F}{\partial y}, \\ w &= \omega_1 \left(\frac{\partial F}{\partial z} - 2y\right); \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

что же касается функции F, то она должна внутри жидкости удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \tag{32}$$

так как функция yz ему удовлетворяет; на стенках же цилиндра и его верхнем и нижнем основаниях она должна, по формуле (7) первой главы, давать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dn} &= 0, \\ \frac{dF}{dn} &= \mp 2y. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Для более удобного определения момента инерции эквивалентного тела относительно оси Ox с помощью функции F обращаемся к формуле (13) первой главы. Полагая в ней $\chi = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ и заменяя относительные скорости u, v, w по формуле (31), находим:

$$[\psi_1, \psi_1] = \rho \int\int\int (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz -$$

$$- \rho \int\int\int \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz +$$

$$+ 4\rho \int\int\int \frac{\partial F}{\partial z} y\, dx\, dy\, dz - 4\rho \int\int\int y^2 dx\, dy\, dz.$$

Первый интеграл представляет момент инерции жидкой массы, который мы назовем через A; второй интеграл может быть преобразован по теореме Грина и уравнениям (33) и соединен с третьим; в четвертом же можно совершить интеграцию по z.

Таким образом получаем:

$$[\psi_1, \psi_1] = A + 2\rho \int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F \right) y\, dx\, dy - 8\rho l \int\int y^2\, dx\, dy, \quad (34)$$

где двойная интеграция распространяется на контур перпендикулярного сечения.

Подобным же образом можем исследовать движение, происходящее от вращения ω_2, положив $\psi_2 = F' + xz$, и составить формулу для $[\psi_2, \psi_2]$, т. е. для момента инерции эквивалентного тела относительно оси Oy. Что же касается $[\psi_1, \psi_2]$, то эту величину можно также вывести с помощью формулы (13) первой главы, приняв в ней $\chi = 0$, $\omega_3 = 0$ и заменив u, v, w суммой относительных скоростей, происходящих от вращений ω_1 и ω_3. Сравнение коэфициентов при произведении $\omega_1\omega_2$ даст нам тогда:

$$[\psi_1, \psi_2] = 9\rho \int\int\int xy\, dx\, dy\, dz -$$

$$- 2\rho \int\int\int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F'}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz -$$

$$- 4\rho \int\int\int \left(x\frac{\partial F}{\partial z} - y\frac{\partial F'}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Заменяем входящие сюда объемные интегралы интегралами, распространенными на площадь перпендикулярного сечения, и исключаем из них функцию F'. По теореме Грина, формулам (33) и аналогичной формуле для F' имеем:

$$\int\int\int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F'}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= -2 \int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F \right) x\, dx\, dy,$$

$$\int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F' \right) y\, dx\, dy = -\int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F \right) x\, dx\, dy.$$

Поэтому

$$[\psi_1, \psi_2] = 18\rho l \int\int xy\, dx\, dy - 4\rho \int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F \right) x\, dx\, dy. \quad (35)$$

Если полость симметрична относительно оси y, то этим свойством будет обладать и функция F. Поэтому в обоих интегралах формулы (35) подинтегральная функция будет при переходе от точки (x, y) к точке $(-x, y)$ сохранять величину, но менять знак, вследствие чего $[\psi_1\psi_2]=0$, и *наши оси координат будут главными осями инерции эквивалентного тела.*

Отыскание функции F, удовлетворяющей уравнениям (32) и (33), представляет большие затруднения, поэтому мы дадим решение этой задачи только в некоторых частных случаях.

§ 19. Предположим, что полость имеет форму прямоугольного параллелепипеда, который можем принять за цилиндр, дающий в сечении прямоугольник со сторонами a и b. Пусть ось Oz совпадает с ребром $2l$, а оси Ox и Oy идут по сторонам a и b среднего перпендикулярного сечения. Мы удовлетворим уравнению (32) и первому условию (33), положив

$$F=Cz+\sum C_n \sinh\frac{n\pi z}{b}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

где n — целые числа. Составим производную по dn от написанной функции F для верхнего и нижнего оснований полости:

$$\frac{dF}{dn}=\mp\left(C+\sum C_n\frac{n\pi}{b}\cosh\frac{n\pi l}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)$$

и обратимся ко второму условию (33). Так как в пределах $0\leqq y\leqq b$ имеем разложение:

$$2y=b-\frac{8b}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi y}{b}+\frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi y}{b}+\frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi y}{b}+\dots\right),$$

то в нашей сумме числу n надо приписывать только нечетные положительные значения. Для определения коэфициентов получаем формулы:

$$C=b,$$

$$C_n=-\frac{8b^2}{\pi^3}\frac{1}{n^3\cosh\frac{n\pi l}{b}},$$

так что искомая функция будет:

$$F = bz - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi z}{b}}{\cosh \frac{n\pi l}{b}} \cos \frac{n\pi y}{b}. \qquad (36)$$

Подставляя эту функцию в формулы (31), найдем скорости относительного движения жидкости, а по ним определим траектории, которые будут параллельны плоскости zy, ибо $u = 0$. Составим момент инерции эквивалентного тела относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно оси Ox. Для этого мы можем воспользоваться формулой (34), внося в нее величину F из формулы (36) и вычитая из ее второй части $\frac{Mb^2}{4}$. Так как

$$A - \frac{Mb^2}{4} = \frac{M(b^2 + 4l^2)}{12},$$

то искомый момент инерции, который мы обозначим через K, будет:

$$K = \frac{M(a^2 + 4l^2)}{12} -$$

$$- Mb^2 \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 \frac{b}{l} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n^5} \frac{\sinh \frac{n\pi l}{b}}{\cosh \frac{n\pi l}{b}} \cos \frac{n\pi 4}{b} \right\}. \qquad (37)$$

Мы можем в этой формуле всегда считать $2l < b$, так как от нашего произвола зависит, которое из двух ребер параллелепипеда, перпендикулярных Ox, принять за $2l$. Строка, входящая в формулу (37), быстро сходится и может быть удобно вычисляема с помощью таблиц гиперболических тангенсов[1]. Для случая куба имеем $a = b = 2l$, поэтому

$$K = Ma^2 \left\{ \frac{64}{\pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \frac{\sinh \frac{n\pi}{2}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} - \frac{1}{6} \right\} = 0{,}0261\, Ma^2.$$

[1] Стокс представляет момент инерции эквивалентного тела с помощью двух бесконечных строк. Mathematical and Physical Papers, v. I, p. 64.

Так как момент инерции куба есть $\frac{Ma^2}{6}$, то *момент инерции эквивалентного тела составляет только 0,1565 момента инерции жидкой массы.* Самому эквивалентному телу в этом случае можно дать форму шарика, радиус которого равен 0,2554 a.

§ 20. Как второй пример рассмотрим полость, имеющую форму круглого цилиндра. Возьмем начало координат в центре полости и, положив:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\eta = \frac{y}{x},$$

выразим уравнение (32) в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0. \qquad (38)$$

Мы удовлетворим этому уравнению, положив:

$$F = \sin\eta \sum C_n R_n \sinh(\lambda_n z),$$

где R_n есть функция r, определяемая диференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr} + \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{r^2}\right) R_n = 0. \qquad (39)$$

Если введем сюда новое независимое переменное, положив $r\lambda_n = \zeta$, то все функции R будут даны одним диференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 R}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dR}{d\zeta} + \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) R = 0. \qquad (40)$$

Общий интеграл этого уравнения может быть выражен с помощью Бесселевых функций первого порядка первого и второго рода [1]. Но так как по смыслу нашей задачи при $r = 0$ должно получиться $R = 0$, потому что скорость

$$\frac{\partial F}{r\partial \eta}$$

[1] Studien über die Bessel'schen Functionen von Lommel, 1868, s. 105.

для точек, лежащих на оси цилиндра, не может быть бесконечной, то мы припишем R значение Бесселева интеграла первого порядка и первого рода:

$$R = J_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(\zeta\cos\theta)\sin^2\theta\, d\theta.$$

Что касается до λ_n, то он должен быть выбран таким образом, чтобы удовлетворить первому условию (33). Если назовем через a радиус основания цилиндра, то найдем для определения величины λ_n уравнение:

$$\frac{dJ_1(a\lambda_n)}{da} = 0. \tag{41}$$

Вместо того чтобы решать это уравнение относительно λ_n, мы можем определять корни ζ_n уравнения:

$$\frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta} = 0 \tag{42}$$

и полагать:

$$\lambda_n = \frac{\zeta_n}{a}.$$

Известно, что все корни уравнения (42) действительны и представляют ряд беспредельно возрастающих чисел, разность двух последовательных членов которого стремится к π. Пользуясь таблицами Ганзена, приложенными к курсу Ломмеля, мы вычислили несколько последовательных корней уравнения (42):

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= 1{,}8412,\\
\zeta_2 &= 5{,}4315,\\
\zeta_3 &= 8{,}5363,\\
\zeta_4 &= 11{,}7060,\\
\zeta_5 &= 14{,}8633,\\
\zeta_6 &= 18{,}0155.
\end{aligned}$$

Переходим ко второму условию (33). Для этого берем от найденной функции:

$$F = \sin\gamma_l \sum C_n J_1(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n z)$$

производную по нормали для верхнего и нижнего дна цилиндра и приравниваем ее $\mp 2y$:

$$\mp \sin\eta \sum C_n \lambda_n J_1(\lambda_n r) \cosh(\lambda_n l) = \mp 2r \sin\eta$$

или

$$\sum C_n \lambda_n J_1(\lambda_n r) \cosh(\lambda_n l) = 2r. \tag{43}$$

Для того чтобы из этого равенства определить коэфициенты C_n, выведем две вспомогательные формулы. По уравнению (39) имеем:

$$\frac{d^2 J_1(\lambda r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_1(\lambda r)}{dr} = \left(\frac{1}{r^2} - \lambda^2\right) J_1(\lambda r),$$

$$\frac{d^2 J_1(\lambda_n r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_1(\lambda_n r)}{dr} = \left(\frac{1}{r^2} - \lambda_n{}^2\right) J_1(\lambda_n r),$$

где λ_n — корень уравнения (41), а λ — пока произвольная величина. Умножаем первое уравнение на $rJ_1(\lambda_n r)\,dr$, второе — на $rJ_1(\lambda r)\,dr$ и, совершив вычитание, берем от обеих частей полученного равенства интеграл от 0 до a:

$$a\left[\frac{dJ_1(\lambda a)}{da} J_1(\lambda_n a) - \frac{dJ_1(\lambda_n a)}{da} J_1(\lambda a)\right] =$$

$$= (\lambda_n{}^2 - \lambda^2) \int_0^a J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda r)\, r dr;$$

отсюда на основании формулы (41)

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda r)\, r\, dr = \frac{a}{\lambda_n{}^2 - \lambda^2} \frac{dJ_1(\lambda a)}{da} J_1(\lambda_n a).$$

Если допустим, что здесь λ есть тоже некоторый корень λ_m уравнения (41), то

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_m r)\, r\, dr = 0; \tag{44}$$

если же допустим, что λ стремится к величине λ_n, то надо обратиться к определению предельного значения второй части нашей формулы. Мы имеем по уравнению (39).

$$\lim \frac{\frac{dJ_1(\lambda a)}{da}}{\lambda_n^2 - \lambda^2} = -\frac{a}{2\lambda_n^2}\frac{d^2 J_1(\lambda_n a)}{da^2} =$$

$$= \frac{a}{2\lambda_n^2}\left[\frac{1}{a}\frac{dJ_1(\lambda_n a)}{da} + \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{a^2}\right) J_1(\lambda_n a)\right] =$$

$$= \frac{\lambda_n^2 a^2 - 1}{2a\lambda_n^2} J_1(\lambda_n a),$$

откуда следует, что

$$\int_0^a [J_1(\lambda_n r)]^2 r\, dr = \frac{\lambda_n^2 a^2 - 1}{2\lambda_n^2} [J_1(\lambda_n a)]^2. \qquad (45)$$

Умножаем равенство (43) на $J_1(\lambda_n r)\, r\, dr$ и берем от обеих его частей интеграл от 0 до a, пользуясь формулами (44) и (45). Это дает нам:

$$C_n = \frac{4\lambda_n}{(\lambda_n^2 a^2 - 1)\cosh \lambda_n l [J_1(\lambda_n a)]^2} \int_0^a J_1(\lambda_n r)\, r^2\, dr.$$

Чтобы определить вошедший сюда интеграл, вводим переменное ζ и пользуемся уравнением (40):

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r)\, r^2\, dr = \frac{1}{\lambda_n^3}\int_0^{\zeta_n} J_1(\zeta)\, \zeta^2\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^3}\int_0^{\zeta_n}\left(J_1(\zeta) - \zeta\frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta} - \zeta^2\frac{d^2 J_1(\zeta)}{d\zeta^2}\right) d\zeta.$$

Интегрируем по частям, обращая внимание на уравнение (42):

$$\int_0^{\zeta_n} J_1(\zeta)\, d\zeta = J_1(\zeta_n)\,\zeta_n - \int_0^{\zeta_n}\zeta\frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta}\, d\zeta,$$

$$-2\int_0^{\zeta_n}\zeta\frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta}\, d\zeta = \int_0^{\zeta_n}\zeta^2\frac{d^2 J_1(\zeta)}{d\zeta^2}\, d\zeta.$$

Следовательно,

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r)\, r^2\, dr = \frac{J_1(\zeta_n)\,\zeta_n}{\lambda^3_n}. \tag{46}$$

Подставляем эту величину в формулу для C_n и заменяем в найденном результате λ_n на $\frac{\zeta_n}{a}$:

$$C_n = \frac{4a^2}{\zeta_n(\zeta_n^2 - 1)\cosh\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right) J_1(\zeta_n)}.$$

Теперь мы можем окончательно составить нашу функцию F:

$$F = 4a^2 \sin\eta \sum \frac{1}{\zeta_n(\zeta^2_n - 1)} \frac{J_1\left(\zeta_n \frac{r}{a}\right)}{J_1(\zeta_n)} \frac{\sinh\left(\zeta_n \frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}. \tag{47}$$

Внутреннее движение жидкости в цилиндрической полости по формулам (31) будет слагаться из движения, для которого найденная функция F есть потенциал скоростей, и из движения, параллельного оси цилиндра, со скоростями $-2r\sin\eta$. Поэтому, обозначив для сокращения письма вторую часть уравнения (47) через $2\sin\eta f(r, z)$, найдем для определения движения в цилиндрических координатах уравнения:

$$\frac{dz}{dt} = 2\omega_1 \sin\eta \left(-r + \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\frac{dr}{dt} = 2\omega_1 \sin\eta \frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 2\omega_1 \cos\eta \frac{f}{r^2}.$$

Определим с помощью этих формул уравнения траекторий частиц жидкости на поверхности цилиндрической полости. Так как при $r = a$ имеем $\frac{df}{dr} = 0$, то второе из вышенаписанных уравнений дает $r = \text{const}$, а первое и третье по исключении dt и разделении переменных дают:

$$d\lg\cos\eta = \frac{2\sum \frac{1}{\zeta_n(\zeta_n^2-1)}\frac{\sinh\left(\zeta_n\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\zeta_n\frac{l}{a}\right)}}{1-2\sum\frac{1}{\zeta_n^2-1}\frac{\cosh\left(\zeta_n\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\zeta_n\frac{l}{a}\right)}}\frac{dz}{a},$$

откуда по интеграции находим, что

$$\cos\eta = \cos\eta_0 e^{\chi(z)},$$

где η_0 есть значение η при $z=0$, а

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{2\sum \frac{1}{\zeta_n(\zeta_n^2-1)}\frac{\sinh\left(\zeta_n\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\zeta_n\frac{l}{a}\right)}}{1-2\frac{1}{(\zeta_n^2-1)}\frac{\cosh\left(\zeta_n\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\zeta_n\frac{l}{a}\right)}}\frac{dz}{a}.$$

Найденное уравнение представляет нам кривые линии двойной кривизны, расположенные симметрически относительно плоскостей xOy и xOz.

Переходим к определению момента инерции эквивалентного тела. Величины, независимые от функции F, в формуле (34) будут:

$$A = M\left(\frac{l^2}{3}+\frac{a^2}{4}\right);$$

$$-8\rho l\int\int y^2\,dx\,dy = -Ma^2,$$

член же, зависящий от F, вследствие того, что значения этой функции при $z=l$ и $z=-l$ противоположны по знаку, выразится интегралом:

$$4\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{a} Fr^2 \sin\eta \, d\eta \, dr =$$

$$= 16\rho a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\eta \, d\eta \sum \frac{1}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)} \frac{\sinh\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}{J_1(\zeta_n) \cosh\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)} \times$$

$$\times \int J_1(\lambda_n r)\, r^2 \, dr.$$

Взяв интегралы во второй части, причем последний получается по формуле (46), составим искомый момент инерции эквивалентного тела:

$$[\psi_1, \psi_1] = M\left(\frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right) -$$

$$- Ma^2 \left\{ 1 - 8\frac{a}{l} \sum \frac{1}{\zeta_n^3 (\zeta_n^2 - 1)} \frac{\sinh\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}{\cosh\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)} \right\}. \qquad (48)$$

Вычисление этой формулы производится с помощью вышеприведенных значений корней ζ_n и таблиц гиперболических тангенсов. Положив $a = l$, мы нашли $[\psi_1, \psi_1] = 0{,}0953\, Ma^2$, и так как момент инерции жидкой массы в этом случае есть $\frac{7}{12} Ma^2$, то найденный момент инерции эквивалентного тела составляет его 0,1633 часть.

О полостях, имеющих форму тел вращения

§ 21. Легко видеть, что вращательное движение около оси полости, имеющей форму тела вращения, не вызывает никакого абсолютного движения жидкости. Действительно, если направим ось Oz по оси вращения полости, то найдем:

$$\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\cos\beta}{y},$$

откуда по формуле (7) первой главы убедимся, что $\frac{d\psi_3}{dn} = 0$, т. е. $\psi_3 = \text{const}$. Вследствие этого находим $[\psi_3, \psi_3] = [\psi_2, \psi_3] = -[\psi_3, \psi_1] = 0$, и заключаем, что *эквивалентное тело представляет бесконечно тонкую палочку, расположенную по оси полости и имеющую массу жидкости M и длину, которая при точке* 0 *в центре полости будет*:

$$\sqrt{\frac{12[\psi_1, \psi_1]}{M}}.$$

Весь вопрос состоит в определении движения жидкости, происходящего от вращения тела около оси, перпендикулярной оси полости, например около оси Ox. Вообразим систему полярных координат, имеющих полюсом точку O, полярной осью Oz и первым меридианом плоскость xOz; назовем радиус-вектор через r, полярный угол — через θ и долготу — через η. Условие $\Delta_2\psi_1 = 0$ представится в этих новых координатах таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial\psi_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2} = 0.$$

Предполагаем, что

$$\psi_1 = \sin\eta\, F(r, \theta)$$

и определяем функцию F уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) - \frac{F}{\sin^2\theta} = 0. \quad (49)$$

Условие, стесняющее функцию F на поверхности полости, по уравнению (7) первой главы будет:

$$\sin\eta\,\frac{dF}{dn} = y\cos\gamma - z\cos\beta.$$

Построим для рассматриваемой точки поверхности меридианальное сечение и проведем в нем через полюс O радиус-вектор r и линию On, идущую в направлении внутренней нормали точки. Угол θ считается от оси Oz до r так, чтобы он был менее 180°; угол же γ будем отсчитывать от Oz до

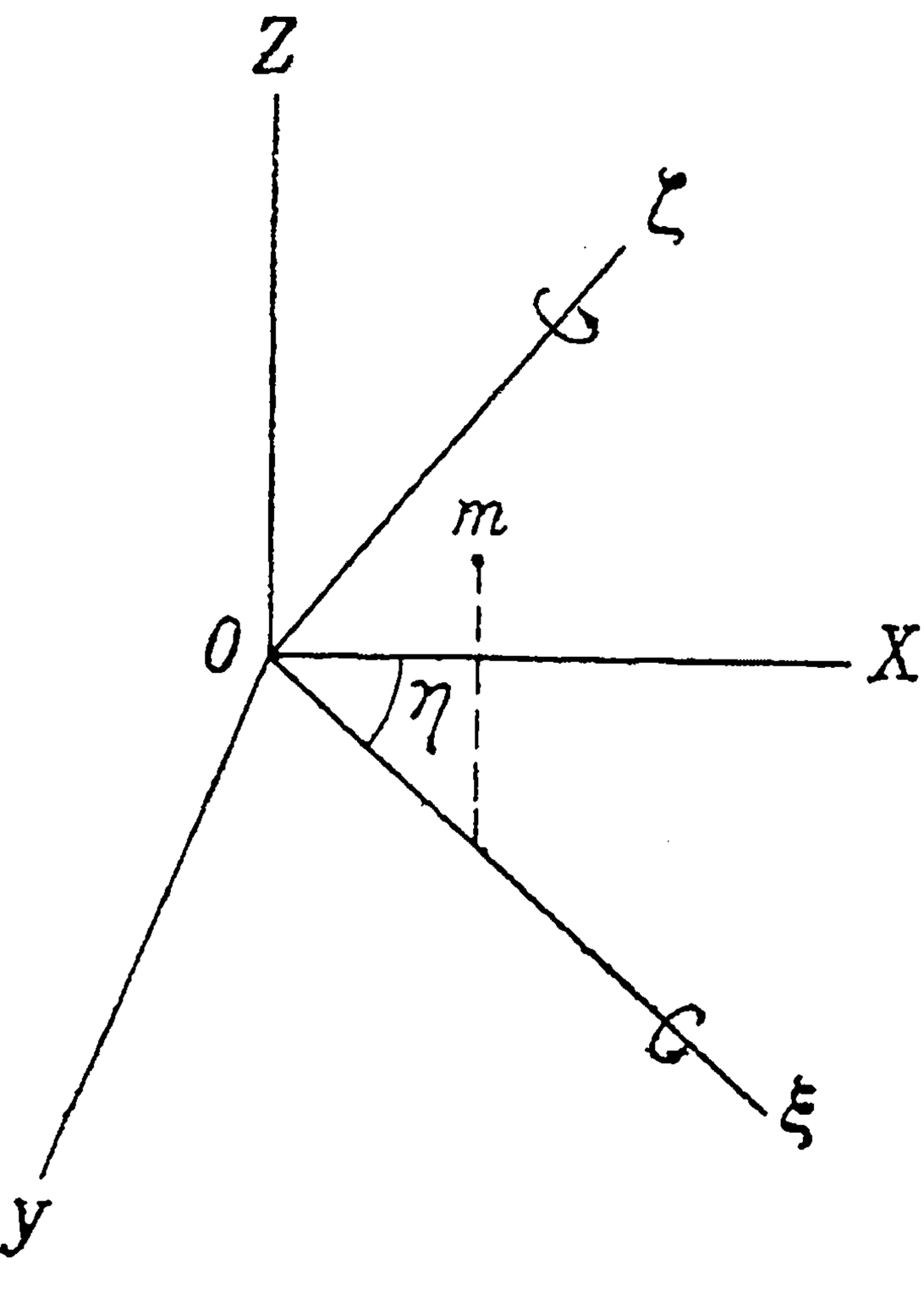
вектора On в ту же сторону, как дугу θ, так что γ будет получать значения от 0 до 360°. Подставляя в вышенаписанную формулу

$$y = r\sin\theta\sin\eta,\ z = r\cos\theta,\ \cos\beta = \sin\gamma\sin\eta,$$

найдем, что

$$\frac{dF}{dn} = -r\sin(\gamma-\theta) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(r^2). \tag{50}$$

Здесь направление элемента контура ds меридианального сечения (его половины) получается, если повернуть элемент внутренней нормали dn на прямой угол в плоскости меридионального сечения так, чтобы для наблюдателя, смотрящего с той стороны контура, в которую угол η возрастает, вращение пришлось против стрелки часов.



Фиг. 9.

Когда функция F будет найдена, то скорости относительного движения могут быть составлены по формуле (8) первой главы, но будет удобнее вывести их самостоятельно, замечая, что относительное движение слагается от абсолютного и вращательного движения в обратную сторону вращения тела. Проведя через точку жидкости m меридианальное сечение $zO\xi$ (фиг. 9), назовем проекцию радиуса-вектора $Om = r$ на ось $O\xi$ через ξ; разложим угловую скорость ω_1, совершающуюся около оси Ox против часовой стрелки, на скорости $\omega_1\cos\eta$ и $\omega_1\sin\eta$, совершающиеся в том же направлении около оси $O\xi$ и оси $O\zeta$, перпендикулярной плоскости $zO\xi$. От этих вращений точка m получит скорость $z\omega_1\cos\eta$, перпендикулярную плоскости $zO\xi$, и скорости $-\xi\omega_1\sin\eta$, $z\omega_1\sin\eta$, параллельные осям Oz и $O\xi$; скорости же абсолютного движения по направлению Oz, $O\xi$ и перпендикулярно

меридианальному сечению найдутся как соответственные производные от функции $F\sin\eta$. Таким образом внутреннее движение жидкости выразится уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \omega_1 \sin\eta \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \xi\right), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \omega_1 \sin\eta \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} + z\right), \\ \xi\frac{d\eta}{dt} &= \omega_1 \cos\eta \left(\frac{F}{\xi} + z\right). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z} - \xi}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi} + z}, \tag{52}$$

т. е. *одно из семейств поверхностей тока в относительном движении есть семейство поверхностей вращения.* Когда уравнение (52) проинтегрировано и z выражен в функции ξ, то η определяется квадратурой:

$$\lg\cos\eta = -\int \frac{\dfrac{1}{\xi}F + z}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi} + z}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{53}$$

Эта формула дает уравнение траекторий частиц жидкости на соответствующей поверхности вращения.

Переходим к определению момента инерции $[\psi_1, \psi_1]$. По теореме Грина получаем формулу:

$$[\psi_1, \psi_1] = -\rho\int\int \psi_1 \frac{d\psi_1}{dn}\, d\sigma = -\rho\int_0^{2\pi} \sin^2\eta\, d\eta \int F\frac{dF}{dn}\xi\, ds,$$

которая по совершении интеграции по η и замене $\dfrac{dF}{dn}$ его величиной по формуле (50) обращается в

$$[\psi_1, \psi_1] = \frac{\pi}{2}\rho\int F\xi d(r^2). \tag{54}$$

Интеграции здесь совершаются только по одной половине меридианального сечения в направлении, указанном при выводе формулы (50).

При решении задач о полостях, имеющих форму тел вращения, мы можем, также как при исследовании цилиндрических полостей, или отыскивать функцию F по данной полости, или задаваться наперед функцией F, удовлетворяющей уравнению (49), и по уравнению (52) определять форму полости.

При употреблении этого последнего приема мы будем полагать:

$$F = \sum B_n r^n \vartheta_n^{(1)}, \tag{55}$$

где n — целые и положительные числа, а $\vartheta_n^{(1)}$ — сферические функции, принадлежащие к так называемым „*Zugeordnete Functionen erster Art*“. Эти функции удовлетворяют уравнению:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta}\right)+\left(n(n+1)-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\vartheta_n^{(1)}=0, \tag{56}$$

которое получается при подстановке в уравнение (49) вместо F функции $r^n\vartheta_n^{(1)}$, и могут быть представлены произведением $\sin\theta$ на некоторую целую и рациональную функцию $(n-1)$ степени от $\cos\theta$. Полагая в уравнении (56)

$$\vartheta_n^{(1)} = \sin\theta\, T$$

и принимая за независимое переменное $\cos\theta = \mu$, находим, что

$$(1-\mu^2)\frac{d^2T}{d\mu^2} - 4\mu\frac{dT}{d\mu} + (n-1)(n+2)\,T = 0.$$

Подставляем сюда

$$T = C_n(\mu^{n-1} + a_1\mu^{n-3} + a_2\mu^{n-5} + \ldots),$$

находим, приравнивая нулю коэфициент при μ^{n-1}, тождество:

$$(n-1)(n+2) - (n-1)(n+2) = 0;$$

приравнивая же нулю коэфициент при μ^{n-2i-1}, получаем:

$$a_i = -a_{i-1}\frac{(n-2i+1)(n-2i)}{2i(2n-2i+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\vartheta_n^{(1)} = C_n \sin\theta \left\{ \cos^{n-1}\theta - \frac{(n-1)\ (n-2)}{2\,(2n-1)} \cos^{n-3}\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{2\cdot 4\cdot (2n-1)\ (2n-3)} \cos^{n-5}\theta \ \ldots \right\}. \quad (57)$$

Кроме этой формы функции $\vartheta_n^{(1)}$, нам еще понадобится ее выражение однородной функцией n-й степени от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Это выражение могло бы быть получено из формулы (57) через умножение ее второго члена на $(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$, третьего — на $(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2$ и т. д. Но удобнее для этой цели воспользоваться приемом Томсона и Тета[1]. Положим, что

$$p = y + x\sqrt{-1},\ q = y - x\sqrt{-1},$$

тогда

$$x = \frac{p-q}{2\sqrt{-1}};\ y = \frac{p+q}{2};\ pq = z^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}\right);\ \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

и уравнение Лапласа дает нам:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -4\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}.$$

Предполагаем, что функция T представляется в виде:

$$T = \cos^{n-1}\theta + b_1\cos^{n-3}\theta\sin^2\theta + b_2\cos^{n-5}\theta\sin^4\theta + \ldots$$

Умножив ее на $r^n \sin\eta \sin\theta$, найдем, что функция

$$y\,(z^{n-1} + b_1 z^{n-3}\xi^2 + b_2 z^{n-5}\xi^4 + \ldots) =$$

$$= \frac{p+q}{2}\,(z^{n-1} + b_1 z^{n-3} pq + b_2 z^{n-5} p^2 q^2 + \ldots)$$

---

[1] Natural Philosophy, 1879. Part. I, p. 188. Обозначение $\vartheta_n^{(1)}$ мы заимствуем из этого же сочинения, p. 205.

должна удовлетворять уравнению Лапласа. Это дает нам весьма простое соотношение между коэфициентами b:

$$b_i = -\, b_{i-1}\, \frac{(n-2i+1)\,(n-2i)}{4\,(i+1)\,i}\,.$$

Таким образом получаем:

$$\vartheta_n^{(1)} = \sin\theta \left\{ \cos^{n-1}\theta - \frac{(n-1)\,(n-2)}{4\cdot 2\cdot 1}\cos^{n-3}\theta\sin^2\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{4^2\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\cos^{n-5}\theta\sin^4\theta - \ldots \right\} \quad (58)$$

Сравнивая коэфициент при наибольшей степени $\sin\theta$ в формуле (58) с коэфициентом наименьшей степени $\cos\theta$ в формуле (57), найдем величину постоянного C_n:

$$C_n = 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\ldots(n+1)}\,.$$

Функции $\vartheta_n^{(1)}$ играют в задаче о полостях, имеющих форму тел вращения, такую же роль, какую $\sin(n\theta)$ и $\cos(n\theta)$ играют в цилиндрических полостях.

§ 22. Для первого примера положим в формуле (55):

$$B_1 = k,\ B_2 = l,\ B_3 = 4m,\ B_4 = 0,\ B_5 = 0\ldots;$$

найдем по формуле (58):

$$F = k\xi + l\xi z + m\,(4\xi z^2 - \xi^3).$$

Здесь k, l, m — параметры, которыми мы можем располагать для получения более простой формы меридианального сечения. По формуле (52) найдем для поверхностей тока во внутреннем движении жидкости уравнение:

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{8m\xi z + (l-1)\,\xi}{4mz^2 - 3m\xi^2 + (l+1)\,z + k}\,,$$

которое можно привести к линейному виду:

$$\frac{d\xi^2}{dz} + \frac{3m}{4mz - \dfrac{1-l}{2}}\,\xi^2 - \frac{4mz^2 + (1+l)\,z + k}{4mz - \dfrac{1-l}{2}} = 0\,.$$

Полагаем для простоты $l=1$, что соответствует известному выбору места начала координат на оси вращения полости. Получаем:

$$\frac{d}{dz}+\frac{3}{4z}\,\xi^2-z-\frac{1}{2m}-\frac{k}{4mz}=0\,.$$

Интеграл этого уравнения будет:

$$\xi^2=\frac{4}{11}\left(z^2+\frac{11}{14}\,\frac{z}{m}+\frac{11}{12}\,\frac{k}{m}\right)+\frac{\text{const}}{z^{\frac{3}{4}}}\,.$$

Приписываем параметру k такое значение, чтобы трехчлен в скобках обратился в полный квадрат, т. е. полагаем:

$$k=\frac{33}{196m}\,,$$

тогда

$$\xi^2=\frac{4}{11}\,(h-z)^2+\frac{\text{const}}{z^{\frac{3}{4}}}\,, \tag{59}$$

где для сокращения положено:

$$h=-\frac{11}{28m}\,.$$

Коэфициенты m и k выражаются по h следующим образом

$$m=-\frac{11}{28h}\,,\qquad k=-\frac{3}{7}\,h;$$

так что рассматриваемая функция F обращается в

$$F=\frac{11}{28h}\,(\xi^3-4\xi z^2)+\xi z-\frac{3}{7}\,h\xi. \tag{60}$$

Для контура меридианального сечения полагаем в уравнении (59) const $=0$. При таком положении это уравнение распадается на уравнения трех прямых линий:

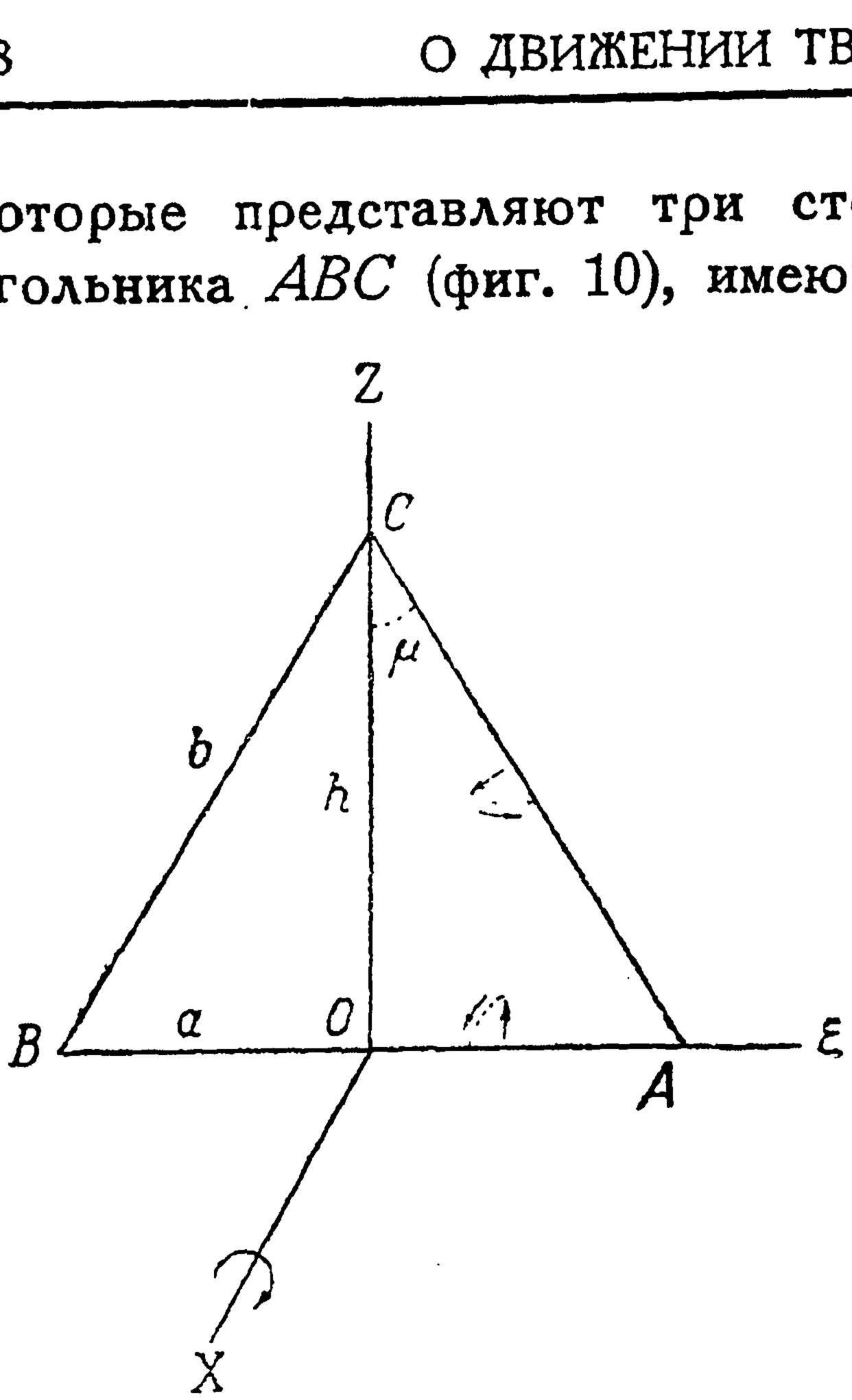
$$z=0,$$

$$\xi-\frac{2}{\sqrt{11}}\,(h-z)=0\,,$$

$$\xi+\frac{2}{\sqrt{11}}(h-z)=0,$$

которые представляют три стороны равнобедренного треугольника ABC (фиг. 10), имеющего высоту h и основание

$$2a = \frac{4}{\sqrt{11}}\, h.$$



Фиг. 10.

Обозначая через 2μ угол при вершине этого треугольника, найдем:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{2}{\sqrt{11}},$$

так что $\mu = 31°5'27{,}3''$. Для получения момента инерции эквивалентного тела мы должны подставить F из формулы (60) в формулу (54) и совершить интеграцию по OA и AC. Повернув против часовой стрелки внутреннюю нормаль на контуре OA, получим направление от A к O, в котором надо совершить интеграцию; вместо этого можно изменить знак в интеграле формулы (54) и совершить интеграцию от O до A. Таким образом найдем для контура OA:

$$-\pi\rho\int_0^a \left(\frac{11}{28h}\xi^3 - \frac{3}{4}h\xi\right)\xi^2\, d\xi = \frac{Ma^2}{4},$$

где M — масса всей жидкости. Интеграции по AC надо совершить от C до A. Приняв за переменное интеграции ξ, полагаем в формуле (54):

$$z = h - \frac{\sqrt{11}}{2}\,\xi,\quad r^2 = \xi^2 + \left(h - \frac{\sqrt{11}}{2}\,\xi\right)^2.$$

Находим:

$$\pi\rho\int_0^a \left(-\frac{110}{28h}\xi^3 + \frac{15}{14}\sqrt{11}\,\xi^2 - h\xi\right)\left(\frac{15}{4}\,\xi - \frac{\sqrt{11}}{2}\,h\right)\xi d\xi = \frac{Ma^2}{56}.$$

Из сказанного заключаем, что

$$[\psi_1, \psi_1] = \frac{Ma^2}{4} + \frac{Ma^2}{56} = \frac{15}{56} Ma^2. \quad (61)$$

Определив относительно той же оси Ox момент инерции жидкой массы, найдем для него величину

$$\pi\rho\left(\frac{ha^4}{20} + \frac{h^3a^2}{30}\right) = \frac{17}{40} Ma^2.$$

Вычитая из найденного момента инерции эквивалентного тела и этого момента инерции жидкой массы величину

$$\frac{Mh^2}{16} = \frac{11}{64} Ma^2,$$

получим моменты инерции эквивалентного тела и жидкой массы относительно оси, проходящей через центр тяжести конуса параллельно его основанию. Первый из них будет иметь величину

$$\frac{43}{448} Ma^2,$$

а второй

$$\frac{81}{320} Ma^2.$$

Таким образом *в случае конической полости рассматриваемого вида момент инерции эквивалентного тела составляет* $\frac{215}{567}$ *от момента инерции жидкой массы.* Эта дробь близка к дроби $\frac{2}{5}$, найденной нами для трехгранной призмы.

Определим уравнения траекторий относительного движения, останавливаясь только на тех частицах жидкости, которые лежат на поверхности нашей конической полости. Для частиц, лежащих на дне конуса, мы должны подставить в формулу (53):

$$z = 0, \; F = \frac{\sqrt{11}}{14a}(\xi^3 - 3a^2\xi), \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{3\sqrt{11}}{14a}(\xi^2 - a^2).$$

Это дает:

$$-\lg\cos\eta = \int\left[\frac{1}{\xi}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\xi-a}+\frac{1}{\xi+a}\right)\right]d\xi,$$

откуда

$$\cos\eta = \text{const}\left(\frac{a^2-\xi^2}{\xi^3}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{62}$$

При $\text{const}=0$ находим $\eta=\frac{\pi}{2}$, т. е. одна из траекторий будет направлена по диаметру BA (фиг. 11), перпендикулярному оси вращения Ox; при $\text{const}=\infty$ получаем $\xi=a$, что дает траекторию, совпадающую с окружностью основания. Все другие траектории будут представлены дугами кривых третьего порядка, проходящими через точки A и B.

Для получения траектории частиц, лежащих на боковой поверхности конуса, подставляем в формулу (53):

$$z=\frac{\sqrt{11}}{2}(a-\xi),\ F=\frac{\sqrt{11}}{2a}\left(-\frac{10}{7}\xi^3+\frac{15}{7}\xi^2a-\xi a^2\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial\xi}=\frac{\sqrt{11}}{2a}\left(-\frac{8}{7}\xi^2+\frac{15}{7}a\xi-a^2\right)^1.$$

Это дает нам:

$$-\lg\cos\eta=\int\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{4(a-\xi)}\right)d\xi,$$

откуда

$$\cos\eta=\text{const}\,\frac{1}{\xi(a-\xi)^{\frac{1}{4}}}.$$

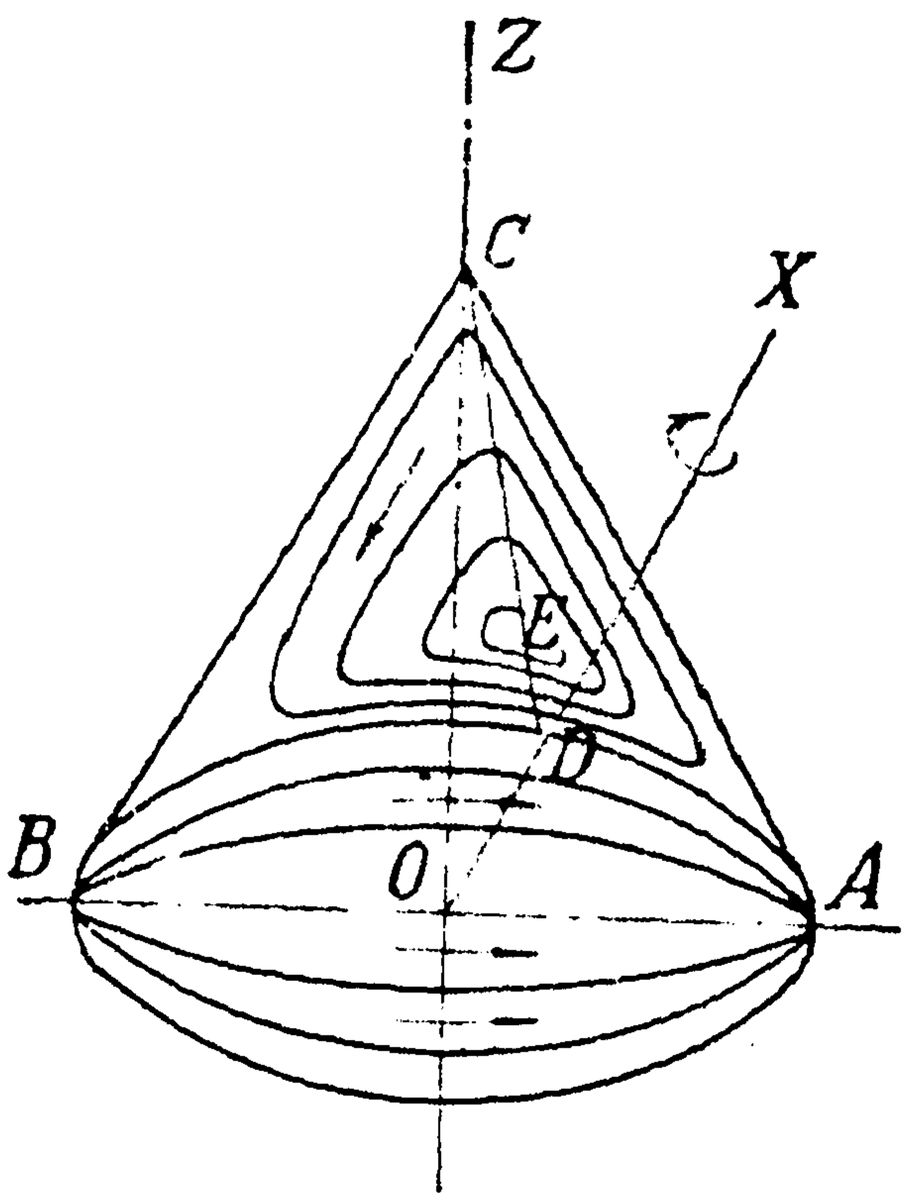
Если назовем через s расстояние точки от вершины конуса и через b — длину образующей конуса, то можем, изменив постоянное в найденном уравнении, заменить в нем ξ и a на s и b:

$$\cos\eta=\frac{\text{const}}{s(b-s)^{\frac{1}{4}}}. \tag{63}$$

---

[1] Надо сначала взять частную производную F (формула 60) по ξ, а затем подставить $z=\frac{\sqrt{11}}{2}(a-\xi)$. *Прим. ред.*

При const $=0$ мы удовлетворим этому уравнению, полагая или $\eta=\frac{\pi}{2}$, или $s=b$, т. е. траектория в этом случае представляется (фиг. 11) образующими CA и CB и полуокружностью ADB. Замечая далее, что знаменатель второй части уравнения (63) имеет наибольше е значение при $s=\frac{4}{5}b$, находим, что при const $=\frac{4}{5}b\left(\frac{1}{5}b\right)^{\frac{1}{4}}$ траектория обращается в точку E, лежащую на образующей CD на расстоянии $\frac{1}{5}$ этой образующей от точки D. Все остальные траектории, соответствующие величинам постоянного между нулем и $\frac{4}{5}b$, представляют замкнутые кривые двойной кривизны, заключающие внутри себя точку E и заключенные внутри контура $ACBDA$.



Фиг. 11.

Наибольшее значение угла η для этих траекторий найдется из формулы

$$\cos\eta=\frac{\text{const}}{\frac{4}{5}b\left(\frac{1}{5}b\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

При отрицательных значениях const найдем на задней стороне боковой поверхности конуса такие же траектории, как на передней его стороне. На фиг. 11 указаны стрелками направления течений жидкости.

§ **23**. Для второго примера полагаем в формуле (55):

$$B_1=0,\ B_2=k,\ B_3=0,\ B_4=4l,\ B_5=0,\ B_6=0,\ldots$$

Получаем:

$$F=k\xi z+l(4\xi z^3-3\xi^3 z),$$

где k и l — некоторые параметры. Составляем по формуле (52) диференциальное уравнение поверхностей тока:

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{12\xi z^2 - 3\xi^3 + m\xi}{4z^3 - 9\xi^2 z + nz},$$

где для сокращения положено,

$$m = \frac{k-1}{l}, \quad n = \frac{k+1}{l}.$$

Представив это диференциальное уравнение в виде

$$dz^2(4z^2 - 9\xi^2 + n) - d\xi^2(12z^2 - 3\xi^2 + m) = 0,$$

делаем подстановку:

$$\xi^2 = p + \alpha^2, \; z^2 = q + \beta^2,$$

в которой постоянные величины α^2 и β^2 выбираем так, чтобы

$$4\beta^2 - 9\alpha^2 + n = 0, \; 12\beta^2 - 3\alpha^2 + m = 0.$$

Получаем однородное уравнение:

$$dq(4q - 9p) - dp(12q - 3p) = 0$$

или

$$d(4q^2 + 3p^2 - 21pq) = 3(q\,dp - p\,dq).$$

Это уравнение по разделении на интегрирующий делитель

$$4q^2 + 3p^2 - 21pq$$

совершении интеграции дает нам:

$$(p - \lambda_1 q)^{\lambda_1 - \lambda_2 - 1}(p - \lambda_2 q)^{\lambda_1 - \lambda_2 + 1} = \text{const},$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\lambda^2 - 7\lambda + \frac{4}{3} = 0.$$

Эти корни суть:

$$\lambda_1 = 6{,}804, \; \lambda_2 = 0{,}196;$$

так что наше уравнение будет иметь вид:

$$(p - \lambda_1 q)^{5{,}608}(p - \lambda_2 q)^{7{,}608} = \text{const}. \qquad (64)$$

Для меридианального сечения полости принимаем const $= 0$; при этом уравнение (64) распадается на два уравнения:

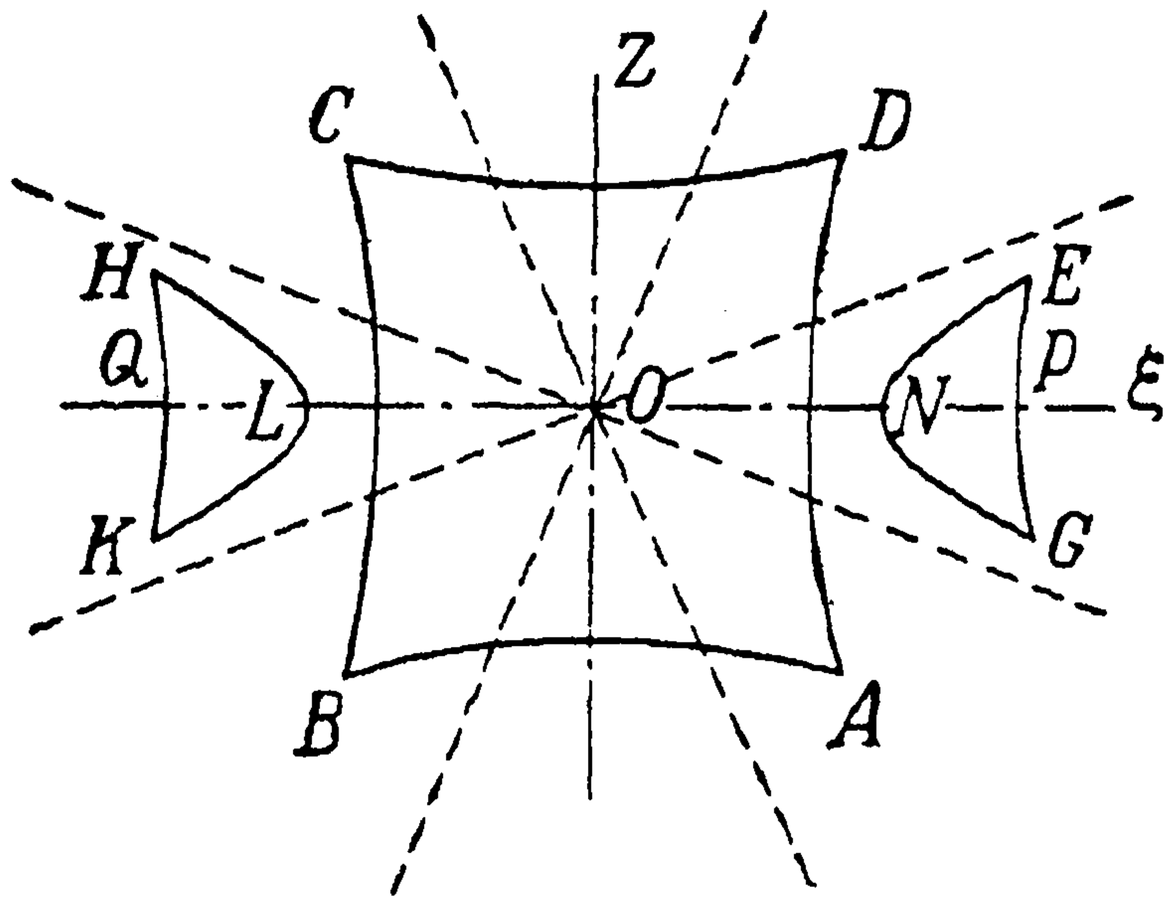
$$p - \lambda_1 q = 0, \quad p - \lambda_2 q = 0$$

или

$$\xi^2 - \lambda_1 z^2 = \alpha^2 - \lambda_1 \beta^2, \quad \xi^2 - \lambda_2 z^2 = \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2.$$

Найденные уравнения представляют две гиперболы (фиг. 12), пересекающиеся в точках $\xi = \pm \alpha$, $z = \pm \beta$. Ассимптоты этих гипербол образуют с осью $O\xi$ углы $\mu_1 = 20°58'31''$, $\mu_2 = 66°7'12''$. Если

$$\lambda_1 > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 > \lambda_2,$$



Фиг. 12.

то действительная ось первой гиперболы будет направлена по Oz, а второй — по $O\xi$. Обе гиперболы в этом случае образуют, пересекаясь между собой, криволинейный четыреугольник $ABCD$, вписанный в прямоугольник со сторонами, равными 2α и 2β. Если же

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 > \lambda_1,$$

то обе гиперболы будут иметь действительную ось $O\xi$ и образуют, пересекаясь между собой, два симметрических замкнутых контура $EPGN$ и $HQKL$, расположенных вправо и влево от оси Oz. Наконец, при

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \lambda_2$$

обе гиперболы имеют действительную ось Oz и образуют, пересекаясь между собой, два симметрических замкнутых контура, расположенных сверху и снизу от оси $O\xi$. Из этих трех случаев для нас наиболее интересен второй, так как в нем мы получаем *кольцевидную полость*. Поэтому при составлении момента инерции эквивалентного тела мы займемся только этим вторым случаем, предоставляя читателю

распространить предложенный способ интеграции на первый и третий случай. Согласно сказанному выше, мы должны в формуле (54) совершить интеграцию по контуру GNE в направлении от G до E и по контуру EPG — в направлении от E до G. Так как найденная нами функция F изменяет знак с изменением знака z, то искомый момент инерции предста-вится разностью удвоенного интеграла формулы (54), взятого по NE, и подобного удвоенного интеграла, взятого по PE. Выражая k и l через α^2 и β^2, находим:

$$l = \frac{1}{3\alpha^2 + 4\beta^2}, \quad k = 2\,\frac{3\alpha^2 - 4\beta^2}{3\alpha^2 + 4\beta^2};$$

подставляя же эти величины в функцию F, получаем:

$$F = \frac{\xi z}{3\alpha^2 + 4\beta^2}\,[4z^2 - 3\xi^2 - 2\,(4\beta^2 - 3\alpha^2)\,]. \qquad (65)$$

Таким образом искомый момент инерции эквивалентного тела представится разностью интегралов:

$$\frac{\pi}{4\beta^2 + 3\alpha^2}\int_0^{\beta} \xi^2 z\,[4z^2 - 3\xi^2 - 2\,(4\beta^2 - 3\alpha^2)]\,d\,(\xi^2 + z^2)\,,$$

взятых по контурам NE и PE по независимому переменному z. Для получения первого интеграла надо подставить

$$\xi^2 = \alpha^2 - \lambda_1\beta^2 + \lambda_1 z^2,$$

что даст нам после интегрирования:

$$\frac{2\pi\,(1 + \lambda_1)\,\beta^3}{105\,(4\beta^2 + 3\alpha^2)}\,(105\alpha^4 - 196\alpha^2\beta^2 + 88\lambda_1\beta^4 - 24\lambda_1{}^2\beta^4)\,.$$

Второй интеграл получаем, изменяя в найденном результате λ_1 на λ_2. Произведя вычисления и заменяя $\lambda_1 + \lambda_2$ через 7 и $\lambda_1\lambda_2$ через $\frac{4}{3}$, находим окончательно:

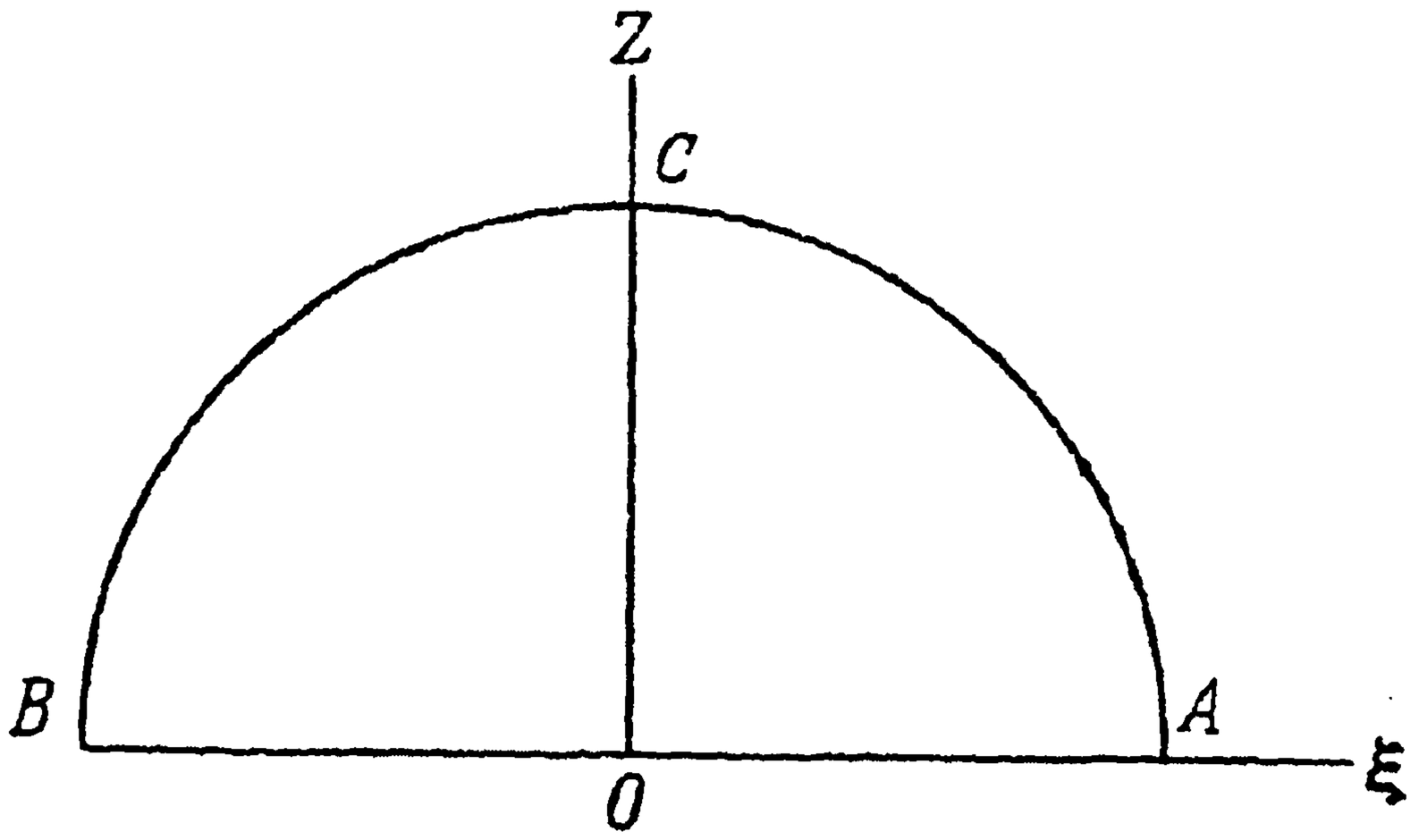
$$[\psi_1, \psi_1] = \frac{2\pi\beta^3\,(\lambda_1 - \lambda_2)}{105\,(4\beta^2 + 3\alpha^2)}\,(105\alpha^4 - 196\alpha^2\beta^2 - 608\beta^4)\,. \qquad (66)$$

§ **24.** Рассмотрим теперь пример, в котором функция F определяется по заданной полости. Положим, что меридиональное сечение представляет полукруг ACB (фиг. 13), так что полость имеет форму полушара, и возьмем начало координат в центре сферы. По формуле (50) функция F на радиусе OA должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{dF}{dn} = \xi,$$

а на дуге AC должна давать:

$$\frac{dF}{dn} = 0.$$



Фиг. 13.

Положим:

$$F = z\xi + \Phi,$$

где $z\xi = r^2\vartheta_2^{(1)}$ удовлетворяет уравнению (49); тогда функция Φ будет стеснена следующими условиями: внутри контура OAC она должна удовлетворять уравнению (49); на радиусе OC она должна обращаться в нуль; на дуге круга AC

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -a\sin 2\theta,$$

а на радиусе OA

$$\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta} = 0.$$

Посмотрим, нельзя ли удовлетворить всем этим условиям положением

$$\Phi = \sum A_n r^n \vartheta_n^{(1)}.$$

Первое и второе условия будут при этом удовлетворены; третье же условие даст:

$$\sum A_n n a^{n-1} \vartheta_n^{(1)} = -a\sin 2\theta. \qquad (67)$$

Вторая часть этого равенства может быть в пределах $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ разложена в тригонометрический ряд:

$$-a \sin 2\theta = -\frac{4a}{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{3} + \frac{\sin 3\theta}{5} - \frac{\sin 5\theta}{21} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^i \frac{\sin(2i-1)}{(2i-1)^2-4} \ldots\right);$$

останавливаясь в нем на i-ом члене, можем все входящие сюда синусы нечетных дуг выразить линейными функциями от $\vartheta_1^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$, $\ldots \vartheta_{2i-1}^{(1)}$ [1]) и, таким образом, представить вторую часть уравнения (67) с желаемой степенью точности через функции $\vartheta_n^{(1)}$ нечетного порядка. Таким образом мы можем удовлетворить условию (67), приписывая n только нечетные значения, чем удовлетворяется четвертое условие, так как при $\theta = \frac{\pi}{2}$ для нечетных n имеем по уравнению (57):

$$\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta} = 0.$$

Для того чтобы определить коэфициенты A, напомним читателю две формулы относительно функций $\vartheta_n^{(1)}$. Считая указатели n и n' оба нечетными или оба четными, напишем на основании формулы (56):

$$\frac{\vartheta_{n'}^{(1)}}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta}\right) - \frac{\vartheta_n^{(1)}}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\vartheta_{n'}^{(1)}}{d\theta}\right) +$$

$$+ [n(n+1) - n'(n'+1)]\,\vartheta_n^{(1)}\vartheta_{n'}^{(1)} = 0.$$

Умножим это равенство на $\sin\theta\, d\theta$ и возьмем от его первой части интеграл между пределами 0 и $\frac{\pi}{2}$:

---

[1]) Синусы нечетных дуг могут быть представлены линейными функциями от $\sin\theta$, $\sin\theta\cos^2\theta$, $\sin\theta\cos^4\theta$, ..., а эти члены по формуле (57) представляются линейными функциями от $\vartheta_1^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$, $\vartheta_5^{(1)}$, ...

$$\left[\sin\theta\left(\vartheta_{n'}^{(1)}\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta}-\vartheta_n^{(1)}\frac{d\vartheta_{n'}^{(1)}}{d\theta}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=[n'(n'+1)-n(n+1)]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vartheta_n^{(1)}\vartheta_{n'}^{(1)}\sin\theta\,d\theta.$$

Первая часть обращается здесь в нуль, потому что при нижнем пределе $\sin\theta=0$, а при верхнем для четных n и n':

$$\vartheta_n^{(1)}=\vartheta_{n'}^{(1)}=0,$$

а для нечетных

$$\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta}=\frac{d\vartheta_{n'}^{(1)}}{d\theta}=0.$$

Таким образом, если n и n' — неравные между собой четные или нечетные числа, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vartheta_n^{(1)}\vartheta_{n'}^{(1)}\sin\theta\,d\theta=0. \tag{68}$$

Для получения подобной формулы при $n=n'$ заметим связь между $\vartheta_{n+1}^{(1)}$, $\vartheta_n^{(1)}$ и $\vartheta_{n-1}^{(1)}$, которая непосредственно проверяется формулой (57):

$$\frac{\vartheta_n^{(1)}}{C_n}\cos\theta-\frac{\vartheta_{n+1}^{(1)}}{C_{n+1}}=\frac{n^2-1}{4n^2-1}\frac{\vartheta_{n-1}}{C_{n-1}}.$$

Заменяем здесь n на $n-1$:

$$\frac{\vartheta_{n-1}^{(1)}}{C_{n-1}}\cos\theta-\frac{\vartheta_n^{(1)}}{C_n}=\frac{(n-1)^2-1}{4(n-1)^2-1}\frac{\vartheta_{n-2}^{(1)}}{C_{n-2}}.$$

Умножаем первое и второе равенства последовательно на

$$\frac{\vartheta_{n-1}^{(1)}}{C_{n-1}}\sin\theta\,d\theta,\quad\frac{\vartheta_n^{(1)}}{C_n}\sin\theta\,d\theta$$

и вычитаем их; потом берем от обеих частей полученного уравнения интеграл от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и обращаем внимание на формулу (68):

$$\frac{1}{C_n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta=\frac{n^2-1}{4n^2-1}\,\frac{1}{C^2_{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_{n-1}^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta.$$

Так как $C_1=1$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_1^{(1)})^2\sin\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{2}{3},$$

то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\,C_n^2\,\frac{(n^2-1)\,[(n-1)^2-1]\ldots3}{(4n^2-1)\,[4(n-1)^2-1]\ldots15}.$$

Подставляем сюда величину C_n и делаем сокращение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta=\frac{4}{n(n+1)\,(2n+1)}. \tag{69}$$

Пользуясь формулами (68) и (69), находим из уравнения (67) величину коэфициентов A:

$$A_n=-\frac{(n+1)(2n+1)}{2a^{n-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta.$$

Чтобы определить входящий сюда интеграл, выведем общую формулу для интеграла вида

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})\cos^k\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

при нечетном n. Замечаем предварительно, что этот интеграл обращается в нуль при

$$k=0,2,4,\ldots,n-3,$$

потому что по формуле (57) можно выразить $\sin\theta, \sin\theta\cos^2\theta, \ldots, \sin\theta\cos^{n-3}\theta$ линейными функциями от $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}, \ldots \vartheta_{n-2}^{(1)}$ и получить интегралы вида (68) от произведения двух нечетных сферических функций.

Принимаем за переменное интеграции $\cos\theta = \mu$ и обозначаем через 1, α, $\beta, \ldots$, ω коэфициенты во второй части формулы (57); получаем:

$$V = -\int_0^1 C_n [\mu^{n+1} + (\alpha - 1)\mu^{n-1} + (\beta - \alpha)\mu^{n-3} + \ldots - \omega]\mu^k d\mu =$$

$$= -C_n \left\{ \frac{1}{n+2+k} + \frac{(\alpha-1)}{n+k} + \frac{(\beta-\alpha)}{n-2+k} + \ldots - \frac{\omega}{1+k} \right\} =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{(n+2+k)(n+k)(n-2+k)\ldots(1+k)}.$$

Здесь $\varphi(k)$ дожна бы быть целой рациональной функцией от k степени $\frac{n+1}{2}$, но так как коэфициент при $k^{\frac{1}{2}(n+1)}$ есть

$$-C_n[1 + (\alpha - 1) + (\beta - \alpha) + \ldots - \omega] = 0,$$

то она будет степени $\frac{n-1}{2}$; при этом все $\frac{n-1}{2}$ корня уравнения $\varphi(k) = 0$ нам известны, так как они суть $k = 0,2,4,\ldots, n-3$. Таким образом находим, что

$$\varphi(k) = \lambda k(k-2)(k-4)\ldots(k-n+3).$$

Множитель λ будет коэфициентом при $k^{\frac{1}{2}(n-1)}$. Называя через s сумму знаменателей написанных выше дробей, получим:

$$\lambda = C_n[-s + n + 2 + k + (-s + n + k)(\alpha - 1) +$$
$$+ (-s + n - 2 + k)(\beta - \alpha) + \ldots] = 2C_n(1 + \alpha + \beta + \ldots + \omega).$$

Для определения этой величины стоит только сравнять вторые части формул (57) и (58) и, сократив их на $\sin\theta$, положить $\theta = 0$; таким образом получаем:

$$\lambda = 2.$$

На основании сказанного находим величину искомого интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta_n^{(1)} \cos^k\theta \sin^2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{2k(k-2)(k-4)\ldots(k-n+3)}{(n+2+k)(n+k)(n-2+k)\ldots(1+k)}.$$

Полагаем здесь $k=1$ и подставляем найденный результат в выражение коэфициента A_n:

$$A_n = -\frac{2n+1}{a^{n-2}(n+3)} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{-1}{n-3} \cdot \frac{-3}{n-5} \cdots \frac{-(n-4)}{2},$$

где для $n=1$ надо взять одну дробь, для $n=3$ — две дроби, для $n=5$ — три дроби и т. д.

Искомая нами функция Φ будет:

$$\Phi = -\frac{3}{4} ra \vartheta_1^{(1)} +$$

$$+ r^2 \sum_{n=3,5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2n+1}{(n+3)(n-2)} \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \vartheta_n^{(1)}. \quad (70)$$

Строка, обозначенная здесь знаком суммы, — сходящаяся, потому что абсолютные величины функций $\vartheta_{(n)}^{(1)}$ и величины дробей $\frac{r}{a}$ не могут быть более единицы, а ряд, составленный из коэфициентов:

$$Q = \sum \frac{1}{n+3} \frac{2n+1}{n-2} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)},$$

есть сходящийся. Для доказательства этого последнего положения заменяем $(n+3)$ на $(n+2)$, так что каждый член ряда увеличивается, потом полагаем:

$$\frac{1}{n+2} = 1 - \frac{n+1}{n+2};$$

тогда получается неравенство:

$$Q<\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+$$

$$+\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}+$$

$$+\frac{15}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}-\frac{15}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}+\ldots,$$

в котором вторая часть представляет знакопеременный ряд беспредельно убывающих членов.

Займемся теперь определением момента инерции эквивалентного тела. Интеграл в формуле (54) нам придется брать только по радиусу OA в направлении от A к O, так как на дуге AC имеем $dr^2=0$. Вследствие того что на радиусе OA функция F равна Φ,

$$[\psi_1, \psi_1]=-\pi\rho\int_0^a \Phi r^2 dr.$$

Функции $\vartheta_n^{(1)}$ на радиусе OA получают величины, которые найдутся, полагая в формуле (58) $\theta=\frac{\pi}{2}$:

$$\vartheta_n^{(1)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)}\frac{2}{n+1}.$$

Подставляя эти величины и производя интегрирование, находим, что момент инерции эквивалентного тела выражается следующей формулой:

$$[\psi_1, \psi_1]=3Ma^2\left\{\frac{3}{32}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=3,5\ldots}\frac{2n+1}{(n+3)^2(n+1)(n-2)}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n-2}{2\cdot4\cdot6\cdots n-1}\right)^2\right\}. \quad (71)$$

Мы вычислили величину, даваемую этой формулой, с точностью до 0,0001 и нашли:

$$[\psi_1, \psi_1]=0{,}2387\ Ma^2.$$

Отсюда получается интересный вывод: если будем вращать сферу, наполненную жидкостью около ее диаметра, то момент инерции эквивалентного тела будет нуль; *если же разделим сферу плоскостью, проходящей через этот диаметр, на две полости, то момент инерции эквивалентного тела составит 0,5968 момента инерции отвердевшей жидкой массы.*

О многосвязных полостях

§ 25. В конце § 10 первой главы было показано, что скорости, сообщаемые жидким массам в многосвязных полостях при покоящемся твердом теле, влияют на его движение так же, как присоединенный к нему вращающийся жироскоп. Рассмотрим здесь подробнее это влияние. Предположим, что центр жироскопа совпадает с неподвижной точкой O и назовем через D и E моменты инерции жироскопа относительно осей, проходящих через точку O по направлению его оси вращения и перпендикулярно к ней. Предположим, что на жироскоп не действуют никакие силы, кроме сил давления тела на концы его оси, и докажем, по уравнениям Эйлера, что скорость n вращения жироскопа относительно его оси есть постоянная величина. Обращаясь после этого к составлению главного момента количеств движения всех материальных точек рассматриваемой системы относительно центра O, найдем, что он слагается: из момента количеств движения твердого тела, момента Dn, направленного по оси жироскопа, и момента $E\omega'$, направленного по проекции ω' угловой скорости тела на плоскость, перпендикулярную к оси жироскопа. Этот последний момент может быть включен в главный момент количеств движения твердого тела, когда присоединим к телу материальную бесконечно тонкую палочку, направленную по оси жироскопа и имеющую относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку O, момент инерции E. Полученное таким образом твердое тело будем называть *преобразованным телом.*

Рассуждая теперь, как в § 10, мы составим для движения рассматриваемой системы уравнения, подобные уравнению (18)

первой главы. Роль P, Q и R будут играть проекции Dn, а уравнение

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

будет представлять эллипсоид инерции преобразованного тела. Хотя движение твердого тела с присоединенным к нему жироскопом рассматривалось некоторыми авторами [1], но мы думаем, что для читателя будет не лишена интереса та геометрическая интерпретация этого движения, которая может быть получена для случая $L = M = N = 0$.

Известно, что движение по инерции твердого тела, имеющего неподвижную точку, интерпретируется или с помощью *конуса полоиды*, катящегося без скольжения по неподвижному *конусу герполоиды*, или с помощью конуса, ортогонального конусу *неизменяемой прямой* (место главного момента количеств движения в теле), который катится и скользит по *неизменяемой плоскости* [2]. Эту последнюю интерпретацию нам удалось распространить и на тот случай, когда к телу присоединен жироскоп. Умножаем уравнение (18) первой главы сперва на $\omega_1 dt$, $\omega_2 dt$, $\omega_3 dt$, потом на

$$(A\omega_1 + P)\,dt, \quad (B\omega_2 + Q)\,dt, \quad (C\omega_3 + R)\,dt$$

и, сложив первую и вторую группы, берем интегралы от полученных уравнений:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = H, \tag{72}$$

$$(A\omega_1 + P)^2 + (B\omega_2 + Q)^2 + (C\omega_3 + R)^2 = G^2, \tag{73}$$

где H и G — постоянные величины, представляющие двойную живую силу преобразованного тела и величину главного момента количеств движения всей системы.

Построим эллипсоид Mac Cullagh:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M}, \tag{74}$$

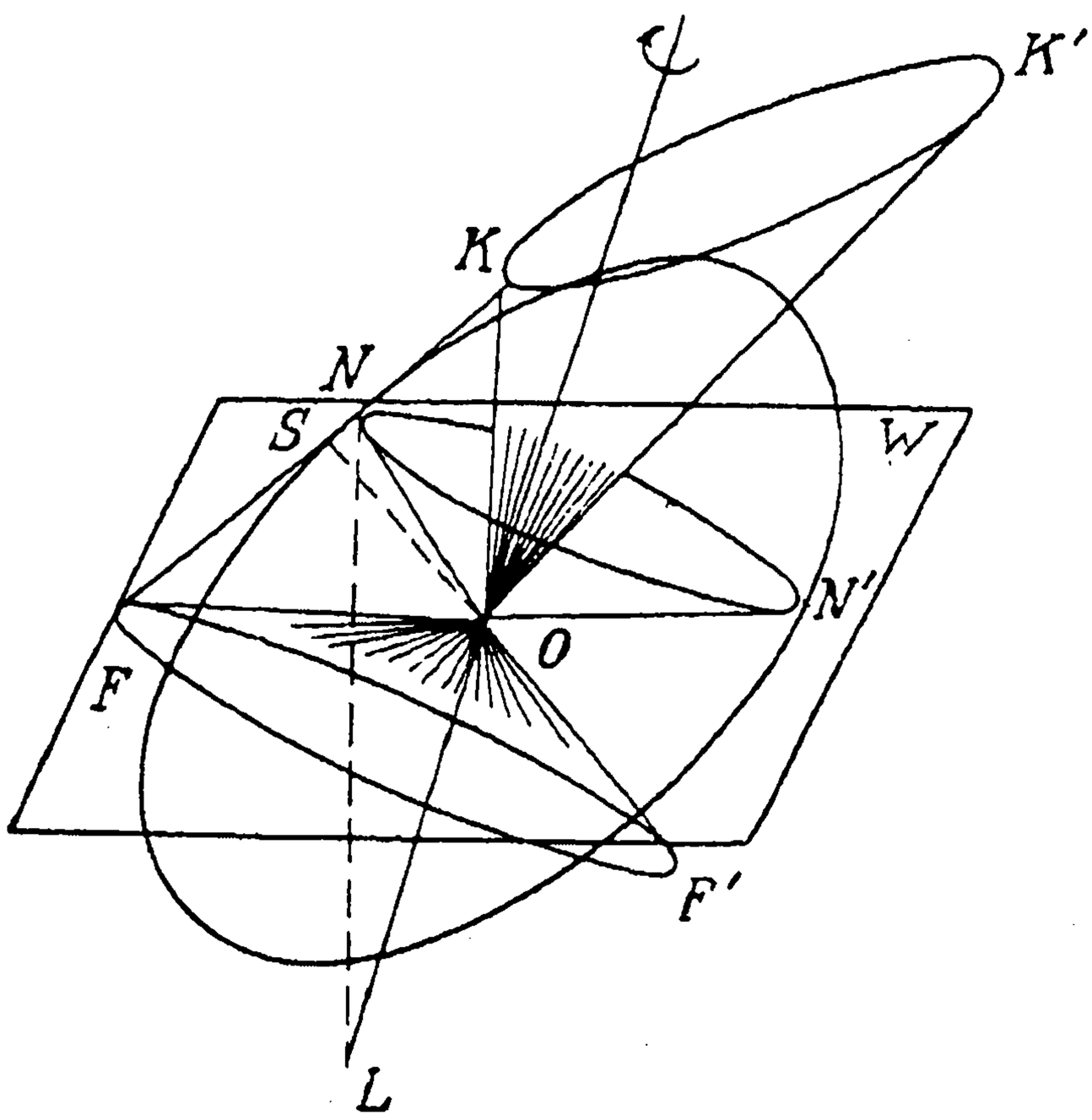
---

[1] Hoppe, Ueber den Einfluss des Rotation eines Schwungrads auf die Bewegung eines damit verbundenen Körpers, Zeitschrift von Schlömilch, 16, J., S, 167.

[2] Routh, Rigid Dynamics, London. 1877. Chap. IX.

где M — масса преобразованного тела, и предположим, что главный момент G' количеств движения этого тела пересекает этот эллипсоид (фиг. 14) в точке $N(x, y, z)$, имеющей радиус $ON = r$; тогда

$$\frac{x}{A\omega_1} = \frac{y}{B\omega_3} = \frac{z}{C\omega_2} = \frac{r}{G'}. \tag{75}$$



Фиг. 14.

Подставляем определенные отсюда величины x, y, z в уравнение (74) и обращаем внимание на уравнение (72):

$$G' = r\sqrt{MH}. \tag{76}$$

Проведем в точке N к поверхности рассматриваемого эллипсоида касательную плоскость и опустим на нее из O перпендикуляр $OS = p$. Так как углы α, β, γ, образуемые этим перпендикуляром с осями Ox, Oy, Oz, удовлетворяют пропорции

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{x}{A} : \frac{y}{B} : \frac{z}{C},$$

то по формуле (75) заключаем, что направление этого перпендикуляра дает направление угловой скорости ω. Далее находим из уравнения (74):

$$p = \frac{1}{M\sqrt{\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} + \dfrac{z^2}{C^2}}},$$

откуда по замене x, y, z их величинами из уравнений (75) и преобразовании по формуле (76) получаем:

$$\omega = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{H}{M}}. \tag{77}$$

Обращаемся теперь к построению конуса неизменяемой прямой. Проведем прямую

$$OL = \frac{Dn}{\sqrt{MH}},$$

лежащую на оси жироскопа так, что при взгляде из L к O вращение n совершалось бы против часовой стрелки; примем точку L за центр и опишем из него сферу радиусом

$$\frac{G}{\sqrt{MH}};$$

предположим, что эта сфера пересечет наш эллипсоид по некоторой кривой NN'; примем ее за направляющую конусов NON' и NLN', имеющих вершины в O и в L; потом из вершины O проведем конус KOK', образующие которого параллельны образующим конуса NLN'. Этот конус KOK' и будет искомым нами конусом неизменяемой прямой. Действительно, если момент G' направляется внутри тела по образующим конуса NON', то его величина по формуле (76) получается, умножая образующие ON на $\sqrt{MH}$; с другой стороны, момент Dn имеет направление LO и получается, умножая эту длину на ту же величину; от сложения этих двух моментов получается момент, направленный по образующим OK, параллельным замыкающим сторонам LN треугольников LON; величина этого момента находится, умножая LN на $\sqrt{MH}$, и потому она равна G, что и требовалось доказать. Так как главный момент количеств движения G должен сохранять в пространстве неизменное направление, то тело должно двигаться таким образом, что в каждый момент времени одна из образующих конуса KOK' перпендикулярна к неизменяемой плоскости W.

Такое движение получится, если построим в теле конус FOF', ортогональный конусу KOK', и предположим, что движение тела получается вследствие того, что этот конус катится и скользит по плоскости W. Для того чтобы определить угловые скорости его вращения и скольжения (последняя есть угловая скорость вращения около оси OK), разложим вращение ω, совершающееся около OS, на два вра-

щения, совершающиеся около соответственных образующих OK и OF. Величины θ и θ' угловых скоростей этих вращений определятся с помощью отрезков OK и OF, которые касательная плоскость, проведенная к эллипсоиду в точке N, отсекает на упомянутых образующих. Пользуясь фиг. 14 и формулой (77), находим, что

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{OK}\sqrt{\frac{H}{M}},\\ \theta' &= \frac{1}{OF}\sqrt{\frac{H}{M}}.\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Проведя касательные плоскости к эллипсоиду во всех точках кривой NN', отметим места точек пересечения этих плоскостей с соответственными образующими конусов KOK' и FOF'. Пусть эти места будут кривые KK' и FF'; по этим кривым обрежем наши конусы. Теперь все движение нашего твердого тела приводится к тому, что *конус FOF', прикасаясь постоянно к неизменяемой плоскости, скользит и катится по ней, причем угловые скорости скольжения и вращения обратно пропорциональны длинам образующих конуса неизменяемой прямой и ортогонального конуса.*

Когда $n=0$ и точка L совпадает с O, тогда конус KOK' совпадает с NON', и потому угловая скорость скольжения есть постоянная величина

$$\theta = \frac{H}{G},$$

как это имеет место при движении твердого тела без жироскопа. Если n весьма велико, то точка L находится очень далеко от O, вследствие чего конус NLN' близок к цилиндру, имеющему в перпендикулярном сечении плоскую кривую NN'; конус KOK' делается весьма тонким, а конус FOF' — весьма плоским. Ось вращения жироскопа в этом случае будет приближенно сохранять в пространстве свое положение. Какое бы конечное количество движения мы ни сообщили телу, мы изменим через это конус NON', а следовательно, и вид кривых FF' и KK', характеризующих катание и скольжение ортогонального конуса, но почти не изменим направления

образующих OK, которые будут оставаться весьма близки к направлению оси жироскопа.

Относя этот результат к нашей гидродинамической задаче, приходим к заключению: *если жидким массам в многосвязных полостях сообщены при покоящемся твердом теле весьма быстрые движения* (когда некоторые из циркуляций k, k_1,... весьма велики), *так что P, Q и R получают весьма большие величины, то прямая, проведенная в теле по составляющей P, Q и R, остается приблизительно неподвижной, какое бы конечное количество движения ни было сообщено телу* [1].

§ 26. Переходя теперь к примерам, заметим, что величины P, Q и R не зависят от места неподвижной точки. Это происходит от того, что при сложении начальных количеств движения по правилам статики мы получаем только пары, ибо центры тяжестей всех жидких масс при неподвижном твердом теле неподвижны.

Величины P, Q и R могут быть определяемы или как суммы моментов количеств движения относительно осей координат, когда известны скорости начального движения жидкостей, или по формулам (23) и (22) первой главы, когда известны функции χ или φ. Формула (22) дает, таким образом, возможность определить движение твердого тела, не определяя начального движения жидкости; но, к сожалению, самое определение функции φ для многосвязных полостей весьма затруднительно. Что касается функции χ, то для всех полостей вращения она дается формулой:

$$\chi = \frac{k}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

где ось Oz считается направленной по оси вращения полости.

§ 27. Как первый пример рассмотрим двусвязную полость, представляющую бесконечно тонкую замкнутую трубку произ-

---

[1] Мы сомневаемся в справедливости заключения Неймана, который предполагает, что при бесконечнобольших k, k_1, ... всякое прибавленное к телу конечное количество движения производит только малые колебания осей Ox, Oy, Oz. Hydrodynamische Untersuchungen, S. 256.

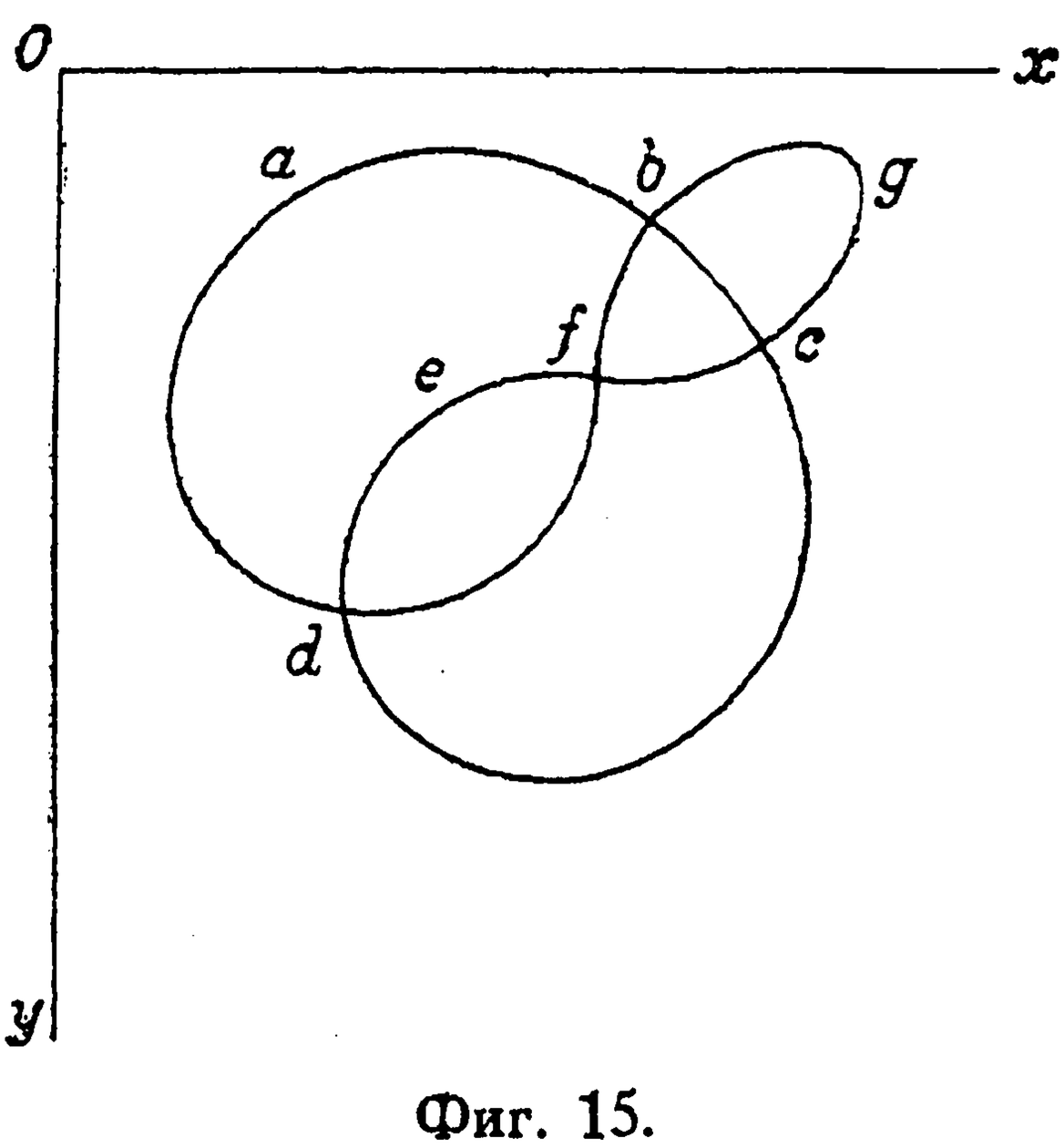
произвольного вида и сечения. Предполагая, что тело неподвижно, а жидкость в трубке приведена в движение, найдем:

$$P = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 2\sum m\frac{d\sigma_x}{dt},$$

$$Q = \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 2\sum m\frac{d\sigma_y}{dt},$$

$$R = \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 2\sum m\frac{d\sigma_z}{dt},$$

где $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ — площади, описываемые во время dt проекциями радиусов-векторов частиц жидкости на плоскостях координат, а m — массы частиц жидкости. Называем через V скорость жидкости в трубке, через ds — элемент длины трубки, через dc — площадь ее перпендикулярного сечения и через dq — количество жидкости, протекшей через это сечение в единицу времени; подставляем в найденные формулы:



Фиг. 15.

$$dt = \frac{ds}{V},\ m = \rho\, dc\, ds,\ V dc = dq;$$

получаем:

$$P = 2\rho\, dq \int \frac{d\sigma_x}{ds} ds = 2\rho\, dq\, \sigma_x,$$

$$Q = 2\rho\, dq \int \frac{d\sigma_y}{ds} ds = 2\rho\, dq\, \sigma_y,$$

$$R = 2\rho\, dq \int \frac{d\sigma_z}{ds} ds = 2\rho\, dq\, \sigma_z.$$

Так как здесь интеграцию надо было произвести вдоль всей длины трубки в направлении течения жидкости, то σ_x, σ_y, σ_z суть площади контуров, полученных при проектировании трубки на плоскости координат. Эти площади опреде-

ляются по следующему правилу: если (фиг. 15) *abcdefcgbfda* будет проекция трубки на плоскость xOy, написанная в направлении течения жидкости, то

$$\sigma_z = \text{пл. } abcda - \text{пл. } fbgcf + \text{пл. } defd.$$

Входящая в наши формулы величина dq может быть определена с помощью циркуляции скорости, которую назовем через k. Мы имеем:

$$k = \int V ds = dq \int \frac{ds}{dc};$$

подставляем $dc = dc_0 \psi(s)$, где dc_0 — постоянная бесконечно малая площадь, и определяем dq:

$$dq = \frac{k dc_0}{\int \frac{ds}{\psi(s)}}.$$

Для трубки с постоянным сечением dc_0 имеем $\psi(s) = 1$ так что

$$dq = \frac{k dc_0}{l},$$

где l — длина трубки. В этом предположении наши формулы принимают вид:

$$P = \frac{2\rho k dc_0}{l} \sigma_x, \quad Q = \frac{2\rho k dc_0}{l} \sigma_y, \quad R = \frac{2\rho k dc_0}{l} \sigma_z. \qquad (79)$$

Таким образом находятся величина и направление момента Dn жироскопа, заменяющего эффект начальных скоростей жидкости в нашей трубке. Определим для нее момент инерции эквивалентного тела. Для этого воспользуемся формулой (13) первой главы. Предположив, что при движении трубки жидкость будет двигаться по ней со скоростью $V + V'$, найдем по упомянутой формуле, что

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - \sum m V'^2.$$

Преобразуем здесь последнюю сумму:

$$\sum m V'^2 = \rho dq' \int V' ds,$$

где dq' — количество жидкости, протекшей через сечение трубки от скорости V'. Выражаем, как это делали выше, dq' с помощью циркуляции скорости V':

$$\sum mV'^2 = \frac{\rho dc_0}{\int \frac{ds}{\psi(s)}} \left[\int V' ds\right]^2.$$

Что касается входящей сюда циркуляции, то она должна быть равна по величине, но противоположна по знаку циркуляции скорости влечения по тому же контуру. Определим циркуляцию скорости влечения по теореме Стокса. Для этого разлагаем в каждой точке тела угловую скорость частицы ω на ω_1, ω_2, ω_3 и таким образом заменяем все вихревые нити в движении тела тремя системами прямолинейных вихревых нитей, параллельных осям координат. Составляя удвоенные суммы напряжений вихревых нитей, проходящих сквозь контур трубки, находим:

$$\int V' ds = -2(\omega_1\sigma_x + \omega_2\sigma_y + \omega_3\sigma_z). \tag{80}$$

Таким образом

$$\sum mV'^2 = \frac{4\rho dc_0}{\int \frac{ds}{\psi(s)}} (\omega_1\sigma_x + \omega_2\sigma_y + \omega_3\sigma_z)^2.$$

Принимая для простоты $\psi(s) = 1$, находим для эллипсоида инерции эквивалентного тела следующее уравнение:

$$F(x, y, z) - \frac{4\rho dc_0}{l} (x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)^2 = 1. \tag{81}$$

Так как для случая $\psi(s) = 1 V'$ есть величина постоянная вдоль всей трубки, то из формулы (80) получаем:

$$V' = \frac{-2(\omega_1\sigma_x + \omega_2\sigma_y + \omega_3\sigma_z)}{l}. \tag{82}$$

При употреблении этой формулы надо наперед задаться направлением контура и в этом смысле определить σ_x, σ_y, σ_z, потом судить по знаку формулы (82), согласно ли это напра-

вление с направлением V' или нет. В первом случае должен получиться знак $(+)$, а во втором $(-)$.

§ 28. В случае полостей вращения момент Dn направлен, очевидно, по оси полости; что же касается его величины, то она определяется весьма просто, пользуясь вышеприведенной функцией χ. Если положим

$$x^2 + y^2 = \xi^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \eta,$$

то наша функция χ будет:

$$\chi = \frac{k}{2\pi} \eta.$$

Скорости жидкости будут перпендикулярны ξ и выразятся производной

$$\frac{d\chi}{\xi d\eta} = \frac{k}{2\pi\xi};$$

отсюда

$$Dn = \frac{k}{2\pi} \sum \frac{m}{\xi} \xi = \frac{Mk}{2\pi}, \tag{83}$$

где M — масса тела. Таким образом *для всех кольцевидных полостей вращения главный момент начального количества движения равен произведению массы жидкости на циркуляцию скорости, разделенную на* 2π.

Пользуясь этим правилом, мы можем вполне решить задачу о движении тела, имеющего кольцевидную полость, меридиональное сечение которой образовано двумя пересекающимися гиперболами, ибо соответственный жироскоп найдется по формуле (83), а эквивалентное тело — по формуле (66).

ГЛАВА III

Случаи вихревого движения жидкости в полостях движущегося тела

§ 29. Мы начнем эту главу исследованием нашего вопроса в случае, когда начальное движение жидкости есть вихревое, так как это исследование послужит постепенным переходом от вышерассмотренной к более трудной задаче, получаемой при обращении внимания на трение жидкости [1]. Пусть Ox, Oy, Oz будут оси координат, направленные по осям инерции *преобразованного тела*, а u', v', w' — проекции на эти оси начальной скорости жидкости (при покоящемся теле). Эти скорости в односвязной полости вполне определяются по составляющим ξ, η, ζ угловых скоростей вращения частиц жидкости, которые суть:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right);$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right); \qquad (1)$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right).$$

если же полость многосвязна, то надо еще дать величины циркуляций скорости по *главным контурам* (так как здесь циркуляции по *приводимым контурам* неодинаковы, то за главные контуры будем брать определенные контуры и будем для различных времен приводить их через одни и те же частицы жидкости).

---

[1] О случаях вихревого движения не упоминается в предисловии, так как мы прибавили эту статью, по совету Ф. А. Слудского, уже во время печатания сочинения.

Действительно, если бы существовало два течения, удовлетворяющие данным условиям, то, составив течение, скорости которого суть геометрические разности скоростей этих течений, мы нашли бы течение несжимаемой жидкости без вращения частиц, циркуляции которого по главным контурам суть нули, а такое течение по § 2 не может иметь места в неподвижной полости.

Задача об определении u', v', w' по вышеуказанным данным приводится к обыкновенной задаче гидродинамики об определении функции скоростей несжимаемой жидкости по нормальным скоростям на ее границах и главным циркуляциям. Построив линии вихрей, продолжаем их за границы жидкости так, чтобы все они замкнулись, и определяем для точек вне жидкости ξ, η, ζ из условия постоянства напряжения вихря вдоль вихревой трубки. Мы получаем таким образом новый объем, заключающий внутри себя нашу жидкую массу, для всех точек которого ξ, η, ζ известны. Так как поверхность, ограничивающая этот объем, есть поверхность вихрей, то на ней

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = 0,$$

где α, β, γ — углы ее внутренней нормали с осями координат.

Составим интегралы:

$$A = \int\int\int \frac{\xi}{r}\, da\, db\, dc,$$

$$B = \int\int\int \frac{\eta}{r}\, da\, db\, dc,$$

$$C = \int\int\int \frac{\zeta}{r}\, da\, db\, dc,$$

распространенные на построенный объем, в которых r есть расстояние между точкой (x, y, z) и точкой объема (a, b, c); потом определяем скорость:

$$l = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right),$$

$$m = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right),$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

некоторого течения жидкости и доказываем, что соответствующие ему компоненты вихря суть ξ, η, ζ. Мы имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial z}\right)=-\frac{1}{4\pi}\Delta_2 A+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

где по теореме Пуассона

$$\Delta_2 A=-4\pi\xi;$$

далее, на основании соображений § 4,

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=$$

$$=\int\int\int\left[\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]da\,db\,dc=$$

$$=-\int\int\frac{1}{r}(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)\,d\sigma=0,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial z}\right)=\xi.$$

Определив нормальные скорости найденного течения на поверхности полости, увидим что они вообще не будут равны нулю; вследствие этого к найденному течению надо еще прибавить течение с потенциальной функцией скоростей f, которая вполне определяется по полученным нормальным скоростям и главным циркуляциям. Эти главные циркуляции равны разностям между данными циркуляциями и циркуляциями скоростей l, m, n.

Определив f, получаем:

$$\left.\begin{aligned} u'&=l+\frac{\partial f}{\partial x},\\ v'&=m+\frac{\partial f}{\partial y},\\ w'&=n+\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 30. Переходим к определению внутреннего движения жидкости в полости тела в предположении, что жидкость

находится под действием сил, имеющих силовую функцию, а тело получает какое-нибудь движение.

Решение этого вопроса, подобно изложенному в § 6, удобно получается из теоремы Томсона. Отбрасывая поступательное движение, как не влияющее на внутреннее движение жидкости, делаем начало O наших подвижных осей Ox, Oy, Oz неподвижным. Выражаем проекции абсолютной скорости точки жидкости на эти оси через:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + u', \\ v_2 &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + v', \\ v_3 &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + w', \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где функция φ определяется по § 6, а u', v', w' — некоторые добавочные скорости, которые в начальный момент имеют величины, данные в § 29.

Так как течение с функцией скоростей φ не имеет вращений, то компоненты вихря в движении нашей жидкой массы выражаются по формуле (1); с другой стороны, так как $\Delta_2\varphi = 0$ и $\frac{d\varphi}{dn}$ равна нормальной скорости самих стенок, то течение u', v', w' не дает изменения объема и имеет поверхностью тока стенки полости. Выведем уравнения, вытекающие из того условия, что полные ускорения в абсолютном движении жидкости имеют однозначную потенциальную функцию. По теореме Томсона это условие требует, чтобы полная производная от циркуляции скорости по всякому замкнутому контуру была равна нулю. Вообразим неподвижные оси координат Ox', Oy', Oz', совпадающие в рассматриваемый момент времени с нашими подвижными осями, и построим бесконечно малый треугольник abc. Назовем координаты точек жидкости a, b и c относительно неподвижных осей через (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), площадь треугольника — через σ, ее проекции — через:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[(y'' - y')(z''' - z') - (z'' - z')(y''' - y')\right],$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[(z'' - z')(x''' - x') - (x'' - x')(z''' - z')\right],$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left[(x'' - x')(y''' - y') - (y'' - y')(x''' - x')\right],$$

проекции же угловой скорости частицы жидкости на неподвижные оси — через ξ', η', ζ'. Так как по теореме Стокса

$$(abc) = 2(\xi'\sigma_1 + \eta'\sigma_2 + \zeta'\sigma_3),$$

то мы должны иметь:

$$\frac{d}{dt}(\xi'\sigma_1 + \eta'\sigma_2 + \zeta'\sigma_3) = 0.$$

При составлении этой полной производной заметим, что $\frac{d\xi'}{dt}$ может быть рассматриваема как проекция на ось Ox' скорости точки, лежащей в конце вектора, имеющего на подвижных осях составляющие ξ, η, ζ, вследствие чего

$$\frac{d\xi'}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \omega_2\zeta - \omega_3\eta;$$

с другой стороны, производная $\frac{d\sigma_1}{dt}$, на основании уравнений [1]:

$$\frac{d}{dt}(x'' - x') = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x'' - x') + \frac{\partial v_1}{\partial y}(y'' - y') + \frac{\partial v_1}{\partial z}(z'' - z'),$$

$$\frac{d}{dt}(x''' - x') = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x''' - x') + \frac{\partial v_1}{\partial y}(y''' - y') + \frac{\partial v_1}{\partial z}(z''' - z'),$$

. . . . . .

может быть представлена в виде:

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\sigma_1 - \frac{\partial v_2}{\partial x}\sigma_2 - \frac{\partial v_3}{\partial x}\sigma_3$$

---

[1] Эти уравнения получаются как выражения для разности слагающих скоростей в бесконечно близких точках a и b, a и c и т. д. *Прим. ред.*

и преобразована на основании условия несжимаемости в

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\sigma_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x}\sigma_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x}\sigma_3\right).$$

Таким образом находим, что

$$\sigma_1\left(\frac{d\xi}{dt} + \omega_2\zeta - \omega_3\eta - \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} - \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z}\right) +$$

$$+\sigma_2\left(\frac{d\eta}{dt} + \omega_3\xi - \omega_1\zeta - \xi\frac{\partial v_2}{\partial x} - \eta\frac{\partial v_2}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v_2}{\partial z}\right) +$$

$$+\sigma_3\left(\frac{d\zeta}{dt} + \omega_1\xi - \omega_2\eta - \xi\frac{\partial v_3}{\partial x} - \eta\frac{\partial v_3}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v_3}{\partial z}\right) = 0.$$

Для того чтобы это условие было удовлетворено для всякого бесконечно малого контура, необходимо, чтобы во всякой точке жидкости удовлетворялись три уравнения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z} - \omega_2\zeta + \omega_3\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi\frac{\partial v_2}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_2}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_2}{\partial z} - \omega_3\xi + \omega_1\zeta,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \xi\frac{\partial v_3}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_3}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_3}{\partial z} - \omega_1\eta + \omega_2\xi.$$

Так как они заключают в себе только величины, относящиеся к неподвижным осям, то все эти величины могут быть рассматриваемы как функции x, y, z и времени.

Обозначив через $\frac{\partial}{\partial t}$ взятую в этом смысле частную производную по времени и приписывая буквам u, v, w значения, даваемые формулой (8) первой главы при $\chi = 0$, подставим в первое из найденных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x}(u+u') + \frac{\partial\xi}{\partial y}(v+v') + \frac{\partial\xi}{\partial z}(w+w');$$

получаем после некоторых преобразований на основании формулы (3):

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (\omega_2 z - \omega_3)y + u'\right) + \eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (\omega_2 z - \omega_3 y) + u'\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (\omega_2 z - \omega_3 y) + u'\right) - \frac{\partial\xi}{\partial x}(u+u') - \frac{\partial\xi}{\partial y}(v+v') - \frac{\partial\xi}{\partial z}(w+w').$$

Это уравнение вместе с двумя другими для осей Oy и Oz приводится на основании формулы (8) первой главы к следующим основным уравнениям нашей задачи:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \xi\frac{\partial(u+u')}{\partial x} + \eta\frac{\partial(u+u')}{\partial y} + \zeta\frac{\partial(u+u')}{\partial z} - \\
&\quad - (u+u')\frac{\partial\xi}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial\xi}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial\xi}{\partial z}, \\
\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \xi\frac{\partial(v+v')}{\partial x} + \eta\frac{\partial(v+v')}{\partial y} + \zeta\frac{\partial(v+v')}{\partial z} - \\
&\quad - (u+u')\frac{\partial\eta}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial\eta}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial\eta}{\partial z}, \\
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \xi\frac{\partial(w+w')}{\partial x} + \eta\frac{\partial(w+w')}{\partial y} + \zeta\frac{\partial(w+w')}{\partial z} - \\
&\quad - (u+u')\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial\zeta}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial\zeta}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Мы вывели эти уравнения как необходимое следствие существования потенциальной функции полных ускорений, но легко видеть, наоборот, что они обусловливают это существование. Когда они удовлетворены во всякой точке жидкости и для всякого времени, тогда циркуляция скорости по всякому бесконечномалому треугольнику, построенному на одних и тех же точках жидкости, не будет изменяться со временем, а следовательно, циркуляция скорости по всякому конечному замкнутому контуру, проводимому через одни и те же точки жидкости, будет постоянна, если он обращаем в точку, так как всякий такой контур может быть разбит на бесконечно малые треугольные контуры. Отсюда, по теореме Томсона, следует существование потенциальной функции полных ускорений. В случае односвязной полости эта функция по § 2 будет однозначна; но если полость многосвязна, то надо еще

выразить условие, что циркуляция скорости постоянна и для всех замкнутых контуров, в точку не обращаемых. Рассуждая, как в § 2, найдем, что это условие будет удовлетворено для всех контуров, необращаемых в точку, если оно удовлетворено для главных контуров.

Теперь мы имеем все данные, чтобы определить u', v', w', переходя от одного момента времени к другому, бесконечно близкому. Пусть для времени t скорости u', v', w' известны. Чтобы найти приращения du', dv', dw', соответствующие приращению времени dt, определяем из уравнения (4) бесконечно малые компоненты вихря $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ и отыскиваем по § 29 соответствующие этим вихрям бесконечно малые скорости l, m, n; потом находим нормальные составляющие этих скоростей на стенках полости и циркуляции по главным контурам, которые складываем с приращениями циркуляций от изменения вида контуров во время dt; определив по найденным нормальным скоростям и циркуляциям, взятым с обратным знаком, соответствующую функцию f, получаем искомые приращения скоростей du', dv', dw' по формуле (2).

От момента $t+dt$ переходим к моменту $t+2dt$ и т. д. Когда движение твердого тела не дано наперед, а даны внешние силы, его производящие, то для решения задачи о движении нашей системы мы должны к уравнению (4) прибавить еще диференциальные уравнения движения твердого тела. Эти уравнения составляются подобно тому, как было указано в § 9 и 10, с той только разницей, что за P, Q и R мы должны принять компоненты главного момента количеств движения жидкости в течении u', v', w'. Так как u', v', w' изменяются со временем, то P, Q и R будут тоже изменяться, поэтому уравнения (16) первой главы для рассматриваемого случая дадут вместо (18) следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} L &= A\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{dP}{dt} + (C-B)\,\omega_2\omega_3 + R\omega_2 - Q\omega_3, \\ M &= B\frac{d\omega_2}{dt} + \frac{dQ}{dt} + (A-C)\,\omega_3\omega_1 + P\omega_3 - R\omega_1, \\ N &= C\frac{d\omega_3}{dt} + \frac{dR}{dt} + (B-A)\,\omega_1\omega_2 + Q\omega_1 - P\omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Совместные уравнения (4) и (5) служат для полного решения задачи о движении нашей системы.

§ 31. Если бы желали еще определить гидродинамическое давление внутри полости, то могли бы для этого воспользоваться формулой, которая отличается от формулы (9) первой главы добавочным членом. Для вывода этой формулы обратимся к рассмотрению полных ускорений частиц жидкости в их абсолютном движении, которое слагается из движения влечения и относительного движения со скоростями $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$. По теореме Кориолиса полное ускорение абсолютного движения представляется геометрической суммой трех векторов: относительного ускорения, поворотного ускорения и ускорения влечения.

Присоединив к функции φ функцию $\alpha x + \beta y + \gamma z$, определяющую поступательное движение нашего тела [1], положим, что

$$F = \varphi + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} - (\alpha + z\omega_2 - y\omega_3),$$

$$v = \frac{\partial F}{\partial y} - (\beta + x\omega_3 - z\omega_1),$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial z} - (\gamma + y\omega_1 - x\omega_2).$$

Составляем проекции на ось Ox трех вышеупомянутых ускорений. Проекция ускорения относительного движения будет:

$$\frac{\partial (u+u')}{\partial t} + (u+u')\frac{\partial (u+u')}{\partial x} + (v+v')\frac{\partial (u+u')}{\partial y} +$$

$$+ (w+w')\frac{\partial (u+u')}{\partial z} = \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) -$$

$$- \left(\frac{d\alpha}{dt} + z\frac{d\omega_2}{dt} - y\frac{d\omega_3}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right) -$$

$$- 2[\omega_2 (w+w') - \omega_3 (v+v')] + 2[\eta (w+w') - \zeta (v+v')],$$

[1] Мы берем здесь α, β, γ вместо букв p, q и r в § 7, чтобы не смешивать с давлением p.

где V — скорость относительного движения; проекция поворотного ускорения будет:

$$2\left[\omega_2\left(w+w'\right)-\omega_3\left(v+v'\right)\right];$$

наконец, проекция ускорения влечения будет:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\omega_2 z-\omega_3 y\right)^2+\left(\omega_3 x-\omega_1 z\right)^2+\left(\omega_1 y-\omega_2 x\right)^2\right]+$$

$$+\frac{d\alpha'}{dt}+z\frac{d\omega_2}{dt}-y\frac{d\omega_3}{dt},$$

где α', β', γ' — проекции скорости точки O на неподвижные оси Ox', Oy', Oz' (взятые в § 30), так что

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}+\omega_2\gamma-\omega_3\beta=$$

$$=\frac{d\alpha}{dt}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\omega_2 z-\omega_3 y\right)\alpha+\left(\omega_3 x-\omega_1 z\right)\beta+\left(\omega_1 y-\omega_2 x\right)\gamma\right].$$

От сложения всех этих трех проекций получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2-V'^2}{2}\right)+\frac{\partial u'}{\partial t}+2\left[\eta\left(w+w'\right)-\zeta\left(v+v'\right)\right],$$

где V' — скорость влечения. Составив подобным образом проекции полного ускорения абсолютного движения на оси Oy и Oz, умножаем все три полученные проекции соответственно на dx, dy, dz и берем интеграл от их суммы. Тогда получится потенциальная функция полных ускорений абсолютного движения жидкости, вычитая которую из силовой функции U найдем до постоянного (функции времени) $\frac{p}{\rho}$, Таким образом получается следующая формула для определения гидродинамического давления:

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{\rho}-U=\tau-\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(V^2-V'^2\right)-\\ -\int\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+2\left[\eta\left(w+w'\right)-\zeta\left(v+v'\right)\right]\right)dx+\right.\\ +\left(\frac{\partial v'}{\partial t}+2\left[\zeta\left(u+u'\right)-\xi\left(w+w'\right)\right]\right)dy+\\ \left.+\left(\frac{\partial w'}{\partial t}+2\left[\xi\left(v+v'\right)-\eta\left(u+u'\right)\right]\right)dz\right].\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Выражение, стоящее здесь под знаком интеграла, представляет полный диференциал, в чем легко убедиться, составляя условия интегрируемости. Первое из этих условий может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (u+u')\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) - (v+v')\frac{\partial \xi}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial \xi}{\partial z} -$$

$$-\xi\left(\frac{\partial (v+v')}{\partial y}+\frac{\partial (w+w')}{\partial z}\right)+\eta\frac{\partial (u+u')}{\partial y}+\zeta\frac{\partial (u+u')}{\partial z}$$

и обращается на основании условий несжимаемости для компонентов ξ, η, ζ и $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$ в первое из уравнений (4).

§ 32. Как первый пример, рассмотрим движение жидкости в цилиндрической полости, образующие которой параллельны оси Oz при вращении тела около этой оси. Мы видели в § 14, что в этом случае $w=0$, а u и v — функции x и y. Если в начальный момент w', u', v' удовлетворяют тому же условию, и, следовательно, $\xi=\eta=0$, то по прошествии бесконечно малого времени dt по уравнениям (4) $d\xi=0$, $d\eta=0$, а $d\zeta$ есть некоторая функция x и y, откуда на основании сказанного об определении du', dv', dw' придем к заключению, что $dw'=0$, а du' и dv' — функции x и y. Таким образом, переходя от одного момента времени к другому, убедимся, что во все время движения $w'=0$, а u' и v' — функции x и y. От уравнений (4) у нас остается только третье, которое будет иметь вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(u+u')\frac{\partial \zeta}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \qquad (7)$$

Воспользуемся этим уравнением для определения таких значений u', v' которые не изменяются со временем, как бы тело ни вращалось около оси Oz. Предположив сначала, что тело неподвижно, подставляем в уравнение (7):

$$u=v=0,\ u'=\frac{\partial f_1}{\partial y},\quad v'=-\frac{\partial f_1}{\partial x},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}=0;$$

получаем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0$$

и заключаем, что

$$\zeta = \psi(f_1).$$

Потом, положив, что тело имеет какое-нибудь движение, подставляем в уравнение (7) найденную величину ζ и

$$u' = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad u = \omega_3 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad v = -\omega_3 \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

где на основании уравнения (9) второй главы

$$f_2 = f + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

получаем:

$$\omega_3 \psi'(f_1)\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right] = 0$$

и заключаем, что

$$f_1 = \chi(f_2).$$

Таким образом *для того, чтобы течение* u', v' *было перманентно, оно должно совершаться по траекториям, данным уравнением* (*10*) *второй главы*. Составим теперь ζ по формуле (1):

$$\zeta = -\frac{1}{2}\Delta_2 f_1 = -\frac{1}{2}\left\{\chi''\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right] + \chi'\Delta_2 f_2\right\}.$$

Так как $\Delta_2 f_2 = 2$, а первый диференциальный параметр от f_2, вообще говоря, не есть функция от f_2, то необходимо иметь $\chi'' = 0$, отсюда

$$f_1 = cf_2 + c_1,$$

$$\zeta = -c,$$

$$u' = c\,\frac{\partial f_2}{\partial y}, \tag{8}$$

$$v' = -c\,\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Обращаясь к уравнениям (5) и полагая в них $\omega_1 = \omega_2 = \rho = Q = L = M = 0$, $R =$ const, найдем одно уравнение:

$$N = C\,\frac{d\omega_3}{dt},$$

показывающее, что тело будет вращаться около оси Oz так, как если бы жидкости не было сообщено никакого начального движения.

Положив, что тело вращается равномерно и $c = -\omega_3$, найдем по уравнениям (8) и вышенаписанным значениям u и v, что $u + u' = 0$ и $v + v' = 0$. В этом случае жидкость не будет иметь относительного движения и будет двигаться так, как будто бы она отвердела; но если посредством действия внешней силы тело будет остановлено, то жидкость, сохранив без изменения свое течение u', v', начнет двигаться относительно тела со скоростями:

$$u' = \mp \omega_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad v' = \omega_3 \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Это соображение дает весьма удобный способ проверять на опытах виды траекторий, найденные в § 15, 16 и 17. Мы сделали две цинковые цилиндрические коробки небольшой высоты, которые прикрывались сверху притертыми стеклами, а снизу имели шипы, с помощью которых их можно было прикрепить к колесу центробежной машины. Первая коробка имела в основании равносторонний треугольник, а вторая—эллиптическое основание, к которому по линии фокусов была припаяна перпендикулярно прямоугольная перегородка, доходящая до плоскости стекла. Коробки наполнялись водой, содержащей в себе маленькие запятообразные водоросли, удельный вес которых был близок к единице, и прикрывались под водой стеклами, которые прижимались к их краям пинцетами. Приведя коробку посредством центробежной машины в равномерное вращение, мы сразу останавливали ее и наблюдали пути, описываемые водорослями. Пути эти для треугольной коробки были схожи с траекториями, изображенными на фиг. 7; в эллиптической же коробке получалась отчетливо линия раздела, которая оказалась приблизительно симметричной относительно осей эллипса; троектории же внутри этой линии были несколько сдвинуты в правую и левую сторону, как представлено на фиг. 8 (течение надо взять в обратную сторону).

§ 33. Для второго примера рассмотрим полость, имеющую форму эллипсоида вращения около оси Ox, центр которого совпадает с неподвижной точкой O.

Положим, что тело продолжительное время вращается равномерно около некоторой неподвижной оси, проходящей через точку O, вследствие чего жидкость в полости, увлекаясь трением, начинает двигаться вместе с телом как одна неизменяемая система.

Когда такое движение установилось, подействуем на тело весьма большими силами, которые остановят его в весьма малый промежуток времени. В конце этого промежутка u, v, w обращаются в нули, а во время его $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ имеют весьма большие величины; так как эти производные не входят в уравнения (4), то приращения $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ за время удара весьма малы и u', v', w' можно принять неизменяющимися за это время.

В начале удара $u + u' = 0$, $v + v' = 0$, $w + w' = 0$, поэтому в конце его $u' = -u$, $v' = -v$, $w' = -w$, где u, v, w определяются по угловым скоростям до удара из формул (4) второй главы. Взяв в этих формулах вместо p, q, r, величины $-p'$, $-q'$, $-r'$ и положив $b = c$, найдем, что в момент остановки тела жидкость будет двигаться со скоростями:

$$\left.\begin{aligned} u' &= a^2(q'z - r'y), \\ v' &= b^2(r'x - p'z), \\ w' &= b^2(p'y - q'x). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

После первого удара сообщим телу второй удар, от действия которого оно получает некоторые угловые скорости ω_1, ω_2, ω_3, скорости же u', v', w' от этого удара тоже не изменяются, так что внутреннее движение жидкости под конец второго удара будет иметь скорости $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$, где на основании формул (4) и (5) второй главы:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{2a^2}{a^2 + b^2}(\omega_2 z - \omega_3 y), \\ v &= -2b^2\left(\frac{\omega_3 x}{a^2 + b^2} - \frac{\omega_1 z}{2b^2}\right), \\ w &= -2b^2\left(\frac{\omega_1 y}{2b^2} - \frac{\omega_2 x}{a^2 + b^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Произведя второй удар, предоставляем нашей системе двигаться по инерции и задаемся вопросом об определении ее движения, пренебрегая трением [1].

Скорости u, v, w будут во все время движения выражаться по формулам (10), в которых за ω_1, ω_2, ω_3 надо считать изменяющиеся со временем компоненты угловой скорости тела. Посмотрим, нельзя ли удовлетворить уравнения (4) и (5), допуская, что u', v', w' все время движения выражаются формулами (9), в которых p', q', r' суть некоторые функции времени. Формулы (9), представляя эллиптическое вращение в нашей полости, дают течение без изменения объема, имеющее одной из поверхностей тока стенки полости. Определим с помощью их ξ, η, ζ и P, Q, R:

$$\left.\begin{aligned} \xi = b^2 p', \quad \eta = \frac{a^2+b^2}{2} q', \quad \zeta = \frac{a^2+b^2}{2} r', \\ P = \frac{2Mb^4}{5} p', \quad Q = \frac{2Ma^2b^2}{5} q', \quad R = \frac{2Ma^2b^2}{5} r', \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где M — масса жидкости. Положив для простоты $B = C$, подставляем формулы (9), (10) и (11) в формулы (4) и (5) и делаем некоторые преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= -\frac{a^2}{b^2}(\omega_2 r' - \omega_3 q'), \\ \frac{dq'}{dt} &= -\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2+b^2} p'r' + \omega_1 r' - \frac{4b^4}{(a^2+b^2)^2}\omega_3 p', \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2+b^2} p'q' - \omega_1 q' + \frac{4b^4}{(a^2+b^2)^2}\omega_2 p', \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\frac{A-B}{B}\omega_1\omega_3 + \frac{2Ma^2b^4(a^2-b^2)}{5B(a^2+b^2)} p'r' - \\ &\quad - \frac{2Mb^4}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 p'\omega_3, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

[1] Действительное движение будет схоже с подобным движением только в продолжение небольшого времени, пока трение, зародившись при поверхности полости, не даст ему совершенно другой характер.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{A-B}{B}\omega_1\omega_2 - \frac{2Ma^2b^4(a^2-b^2)}{5B(a^2+b^2)}p'q' + \\ &+ \frac{2Mb^4}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 p'\omega_2.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Так как надлежащим выбором p', q', r', ω_1, ω_2, ω_3 можно всегда удовлетворить этим шести совместным уравнениям, то сделанное нами предположение о виде скоростей u', v', w справедливо.

Нам удалось получить все интегралы интересующей нас задачи. Четвертое из уравнений (12) дает:

$$\omega_1 = \text{const}. \quad (13)$$

Умножаем второе уравнение на q', третье — на r' и складываем:

$$q'\frac{dq'}{dt} + r'\frac{dr'}{dt} = \frac{4b^4p'}{(a^2+b^2)^2}(\omega_2 r' - \omega_3 q');$$

подставляем сюда $\omega_2 r' - \omega_3 q'$ из первого уравнения и интегрируем:

$$q'^2 + r'^2 = \text{const} - \frac{4b^6}{a^2(a^2+b^2)^2}p'^2. \quad (14)$$

Умножим пятое уравнение на ω_2, шестое — на ω_3 и складываем:

$$\omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{2Ma^2b^4}{5B}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}p'(\omega_2 r' - \omega_3 q');$$

преобразуем на основании первого уравнения и интегрируем:

$$\omega_2^2 + \omega_3^2 = \text{const} - \frac{2Mb^6}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)p'^2. \quad (15)$$

Исключаем из второго и пятого уравнений члены, содержащие $p'r'$, а из третьего и шестого — члены, содержащие $p'q'$:

$$\frac{2Ma^2b^2}{5B}\frac{dq'}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} =$$

$$= -\frac{A-B}{B}\omega_1\omega_3 - \frac{2Mb^4}{5B}\omega_3 p' + \frac{2Ma^2b^2}{5B}\omega_1 r',$$

$$\frac{2Ma^2b^2}{5B}\frac{dr'}{dt}+\frac{d\omega_3}{dt}=$$

$$=\frac{A-B}{B}\omega_1\omega_2+\frac{2Mb^4}{5B}\omega_2p'-\frac{2Ma^2b^2}{5B}\omega_1q';$$

умножаем эти уравнения соответственно на

$$\frac{2Ma^2b^2}{5B}q'+\omega_2,\quad \frac{2Ma^2b^2}{5B}r'+\omega_3,$$

складываем их, преобразуем по первому из уравнений (12) и интегрируем:

$$\left(\frac{2Ma^2b^2}{5B}q'+\omega_2\right)^2+\left(\frac{2Ma^2b^2}{5B}r'+\omega_3\right)^2=$$

$$=\text{const}-\left(\frac{2Mb^4}{5B}p'+\frac{A\omega_1}{B}\right)^2;$$

пользуясь уравнениями (14) и (15), преобразуем найденный интеграл в

$$\omega_2q'+\omega_3r'=\text{const}-$$

$$-\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left\{\frac{Mb^2}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)-\frac{1}{2}\right\}p'^2-\frac{Ab^2}{Ba^2}\omega_1p'$$

и упрощаем его положением

$$B=\frac{\gamma M}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2},\tag{16}$$

где $\gamma>1$ на основании формулы (2) второй главы:

$$\omega_2q'+\omega_3r'=\text{const}-\frac{b^4[2b^2-\gamma(a^2-b^2)]}{2\gamma a^2(a^2+b^2)}p'^2-\frac{Ab^2}{Ba^2}\omega_1p'.\tag{17}$$

Для дальнейшего интегрирования пишем тождество:

$$(\omega_2^2+\omega_3^2)(q'^2+r'^2)-(\omega_2q'+\omega_3r')^2=(\omega_2r'-\omega_3q')^2\tag{18}$$

и представляем его первую часть в виде $\frac{b^4}{a^4}f(p')$ на основании формул (14), (15) и (17), вторую же часть на основании первого из уравнений (12) представляем через

$$\frac{b^4}{a^4}\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2;$$

тогда по разделении переменных и интегрировании находим:

$$t = \int \frac{dp'}{\sqrt{f(p')}}. \tag{19}$$

Так как $f(p')$ есть многочлен четвертой степени от p', то найденный интеграл приводится к эллиптическому интегралу первого рода. Чтобы не усложнять формул, мы рассмотрим только тот случай, когда постоянная угловая скорость $\omega_1 = 0$, причем читатель увидит, что вся дальнейшая интеграция выполнима и без этого предположения. Формула (17) показывает, что при $\omega_1 = 0$ уравнение

$$f(p') = 0 \tag{20}$$

будет биквадратное. Подставив в $f(p')$ начальное значение p', мы получим на основании уравнения (18) некоторую положительную величину; будем увеличивать p', изменяя его непрерывно до $+\infty$; при значении p', обращающем в нуль вторую часть формулы (15), функция $f(p')$, которая сама представляет первую часть формулы (18), умноженную на $\frac{a^4}{b^4}$, сделается отрицательной; наконец, при $p' = +\infty$ функция $f(p')$ будет иметь знак коэфициента n при p'^4 в уравнении (20), который имеет величину

$$n = \frac{8b^8a^2}{\gamma(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)} - \frac{b^4[2b^2-\gamma(a^2-b^2)]^2}{4\gamma^2(a^2+b^2)^2}. \tag{21}$$

На основании сказанного следует, что при $n > 0$ все четыре корня уравнения (20) будут действительны и представятся в виде $\pm\alpha$ и $\pm\beta$; в случае же $n < 0$ корни будут или указанного вида, или они будут $\pm\alpha\sqrt{-1}$ и $\pm\beta$.

Условимся в случае действительных корней брать $\beta > \alpha$. Формула (21) показывает нам, что при $a < b$ коэфициент n отрицателен, так что в этом случае корни могут быть или все действительные, или два мнимые. Мы должны теперь рассмотреть три случая:

1) $n > 0$, все корни действительные, p' может изменяться между $-\alpha$ и $+\alpha$,

$$f(\rho') = n(\alpha^2 - p'^2)(\beta^2 - p'^2).$$

Полагаем, что при $t=0$, $p'=0$ и делаем в уравнении (19) подстановку $p'=\alpha x$; находим, что

$$t\beta\sqrt{n}=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left[1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 x^2\right]}},$$

откуда

$$p'=\alpha \sin \operatorname{am}(t\beta\sqrt{n}) \tag{22}$$

при модуле

$$k=\frac{\alpha}{\beta}.$$

2) $n<0$, два корня мнимые, p' может изменяться между $-\beta$ и $+\beta$,

$$f(p')=-n(\alpha^2+p'^2)(\beta^2-p'^2).$$

Полагаем при $t=0$, $p'=\beta$ и делаем подстановку:

$$p'=\beta\sqrt{1-x^2};$$

получаем:

$$t\sqrt{-n(\alpha^2+\beta^2)}=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}x^2\right)}},$$

откуда

$$p'=\beta \cos \operatorname{am}\left[t\sqrt{-n(\alpha^2+\beta^2)}\right] \tag{23}$$

при модуле

$$k=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

3) $n<0$, все корни действительны, p' может изменяться между α и β,

$$f(p')=-n(p'^2-\alpha^2)(\beta^2-p'^2).$$

Полагаем при $t=0$, $p'=\beta$ и делаем подстановку

$$p'=\sqrt{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)x^2};$$

получаем:

$$t\beta\sqrt{-n}=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{\beta^2-x^2}{\beta^2}x^2\right)}},$$

откуда

$$p' = \beta \Delta \operatorname{am}(t\beta\sqrt{-n}) \tag{24}$$

при модуле

$$k = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta}.$$

Найденные формулы показывают, что при непрерывном возрастании t, p' будет периодически изменяться в первом случае между $-\alpha$ и $+\alpha$, во втором — между $-\beta$ и $+\beta$ и в третьем — между α и β. Время T полного колебания для этих трех случаев будет:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{4}{\beta\sqrt{n}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{\beta}\right), \\ T &= \frac{4}{\sqrt{-n(\alpha^2+\beta^2)}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \\ T &= \frac{2}{\beta\sqrt{-n}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$, третья из этих формул дает:

$$T = \frac{2}{\beta\sqrt{-n}} F\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \infty,$$

так что p' будет, начиная от значения β, постоянно уменьшаться, стремясь к нулю.

Определив p' в функции времени, мы можем на основании формул (14) и (15) выразить в функциях времени

$$\sqrt{q'^2 + r'^2} \text{ и } \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}.$$

Определять отдельно q', r', ω_2, ω_3 мы не будем, так как, пользуясь тремя найденными величинами, легко отыскать интегралы, дающие положение тела в пространстве, и внутреннее движение заключенной в нем жидкости во всякое время.

Вообразим (фиг. 16) сферу, проведенную радиусом единицы из центра O, и примем за ее полярную ось направление OP главного момента количеств движения всех точек нашей системы, а за плоскость ее экватора — *неизменяемую пло-*

скость. Назовем через θ и φ широту и долготу точки Q, в которой ось Ox пересекает эту сферу.

Разложим наш главный момент G на составляющие OH и OS, из которых первая идет по оси Ox, а вторая лежит в плоскости yOz и имеет некоторое направление Oy''. Первая составляющая будет вследствие $\omega_1 = 0$ и формулы (11):

Фиг. 16.

$$G \sin\theta = \frac{2Mb^4}{5} p',$$

откуда

$$\sin\theta = \frac{2Mb^4}{5G} p', \quad (26)$$

где p' должно быть заменено по формулам (22), (23) и (24)

Положив

$$\sin\theta_1 = \frac{2Mb^4}{5G}\alpha, \quad \sin\theta_2 = \frac{2Mb^4}{5G}\beta,$$

найдем, что точка Q будет описывать волнообразный путь, заключенный между двумя параллельными кругами, которые имеют широты $\pm\theta_1$ в первом случае, $\pm\theta_2$ — во втором случае и θ_1, θ_2 — в третьем случае. Между этими кругами точка Q будет совершать свои колебания по закону маятника во времена, указанные формулой (25); при этом в тот момент, когда Q будет вступать на экватор (в первом и во втором случаях) p' будет обращаться в нуль.

Переходим к составляющей главного момента $OS = G\cos\theta$. Она слагается геометрически из моментов:

$$OD = B\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}, \quad OE = \frac{2Ma^2b^2}{5}\sqrt{q'^2 + r'^2}.$$

В параллелограме $ODSE$ мы знаем, таким образом, стороны и диагональ; но, кроме того, легко определить проек-

цию OK момента OD на диагональ OS. Можно предположить, что все вращательное движение нашего твердого тела происходит от трех вращений: относительно оси OP, оси Ox и оси Oz'', перпендикулярной двум первым, с угловыми скоростями

$$\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\psi}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt},$$

где ψ — угол между Oz'' и Oz. Так как оси двух последних вращений перпендикулярны прямой OS, то проекция угловой скорости вращения тела на эту прямую будет:

$$\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta;$$

отсюда следует, что

$$OK = B\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta.$$

Теперь мы можем, пользуясь фиг. 16, написать, что

$$B^2(\omega_2^2+\omega_3^2) - B^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos^2\theta = 4\frac{M^2a^4b^4}{25}(q'^2+r'^2) - \left[G - B\frac{d\varphi}{dt}\right]^2\cos^2\theta;$$

отсюда определяем $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{2B} + \frac{25B^2(\omega_2^2+\omega_3^2) - 4M^2a^4b^4(q'^2+r'^2)}{50BG\cos^2\theta};$$

преобразуем на основании формул (14), (15), (16) и (26):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{2B}\left(1+\frac{\gamma^3(a^2-b^2)^3-8a^2b^4}{2b^2(a^2+b^2)^2}\right) + \frac{m}{1-\frac{4M^2b^8}{25G^2}}p'^2, \tag{27}$$

где величина m может быть определена по начальным значениям p' и $\frac{d\varphi}{dt}$. Подставляем сюда p' из формул (22), (23) и (24) и, положив для сокращения письма

$$e = \frac{G}{2B}\left(1+\frac{\gamma^3(a^2-b^2)^3-8a^2b^4}{2b^2(a^2+b^2)^2}\right),$$

производим интеграцию:

$$\varphi = et + l \int \frac{du}{1 + \lambda \sin^2 \operatorname{am} u}. \tag{28}$$

В вошедшем сюда эллиптическом интеграле третьего рода надо приписывать модулю и аргументу u значения, указанные в формулах (22), (23), (24); что же касается параметра λ, то он для трех рассматриваемых случаев будет иметь величины:

$$\lambda = -\sin^2 \theta_1,$$

$$\lambda = \operatorname{tg}^2 \theta_2,$$

$$\lambda = \frac{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2};$$

множителю l надо для этих трех случаев приписывать значения:

$$l = \frac{m}{\beta \sqrt{n}},$$

$$l = \frac{m}{\cos^2 \theta_2 \sqrt{-n(\alpha^2 + \beta^2)}},$$

$$l = \frac{m}{\cos^2 \theta_2 \beta \sqrt{-n}}.$$

Пользуясь формулой (28), можно определить разность долгот двух последовательных точек прикосновения кривой, описываемой точкой Q, с предельным параллельным кругом. Эта разность будет [1]:

$$\varphi_0 = eT + nl\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, k\right), \tag{29}$$

где T, l, λ и k имеют для трех рассматриваемых случаев указанные значения, а n равно 4 в первом и втором случае и 2 — в третьем случае.

[1] При вычислении этой формулы следует выразить интеграл третьего рода $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, k\right)$ по известным правилам с помощью функций Якоби. Величины параметров λ показывают, что в первом случае мы будем иметь интеграл третьего рода первого класса, а во втором и третьем — четвертого класса.

Обращаемся к определению ψ. Припоминая сказанное о разложении вращения тела на три вращения около осей OP, Ox, Oz'', находим, что

$$\omega_1 = 0 = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta;$$

определяем отсюда $d\psi$ и преобразуем его на основании формул (27), (26), (22), (23), (24):

$$-\beta\sqrt{n}\,d\psi = e\sin\theta_1\sin\operatorname{am}u\,du + \frac{m\sin\theta_1\sin\operatorname{am}u}{1-\sin^2\theta_1\sin^2\operatorname{am}u}\,du;$$

$$-\sqrt{-n(\alpha^2+\beta^2)}\,d\psi = e\sin\theta_2\cos\operatorname{am}u\,du +$$

$$+\frac{m\sin\theta_2\cos\operatorname{am}u}{1-\sin^2\theta_2\cos^2\operatorname{am}u}\,du;$$

$$-\beta\sqrt{-n}\,d\psi = e\sin\theta_2\Delta\operatorname{am}u\,du + \frac{m\sin\theta_2\Delta\operatorname{am}u}{1-\sin^2\theta_2\Delta^2\operatorname{am}u}\,du.$$

Совершая здесь интеграцию, находим, что все квадратуры выполняются с помощью логарифмических и круговых функций от эллиптических функций:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta\sqrt{n}\,\psi + \text{const} = e\sin\theta_2\lg\left(\Delta\operatorname{am}u + \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\operatorname{am}u\right) + \\
&+\frac{m\operatorname{tg}\theta_2}{2\cos\theta_1}\lg\left(\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2\Delta\operatorname{am}u + \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\operatorname{am}u}{\cos\theta_1\sin\theta_2\Delta\operatorname{am}u - \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\operatorname{am}u}\right),\\
&\sqrt{-(\alpha^2+\beta^2)}\,\psi + \text{const} = e\sqrt{\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2}\operatorname{arc}\sin(\Delta\operatorname{am}u) - \\
&-\frac{m\sin^2\theta_2}{\cos\theta_2\sqrt{(1+\sin^2\theta_1)(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)}}\times\\
&\times\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{(1+\sin^2\theta_1)(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)}}{\cos\theta_2\sin\theta_2}\frac{\sin\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}\right),\\
&\beta\sqrt{-n}\,\psi + \text{const} = -e\sin\theta_2\operatorname{am}u - \\
&-\frac{m\operatorname{tg}\theta_2}{\cos\theta_1}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\operatorname{tg}\operatorname{am}u\right).
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Теперь вопрос о движении нашего твердого тела при $\omega_1 = 0$ нами вполне разрешен. Если бы мы желали еще знать для всякого момента времени течение u', v', w', то могли бы рассматривать его как эллиптическое вращение, относимое к осям Ox, Oz'', Oy'' и определяемое параметрами p', r'', q'', имеющими то же значение, как p', r', q' в формуле (9). Величина p' дается формулами (22), (23), (24); r'' получается, разделяя KS (фиг. 16) на $\frac{2Ma^2b^2}{5}$:

$$r'' = \frac{5\left(G - B\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos\theta}{2Ma^2b^2};$$

q'' же может быть определен, выражая сумму моментов количеств движения относительно оси Oz'', которая должна быть равна нулю:

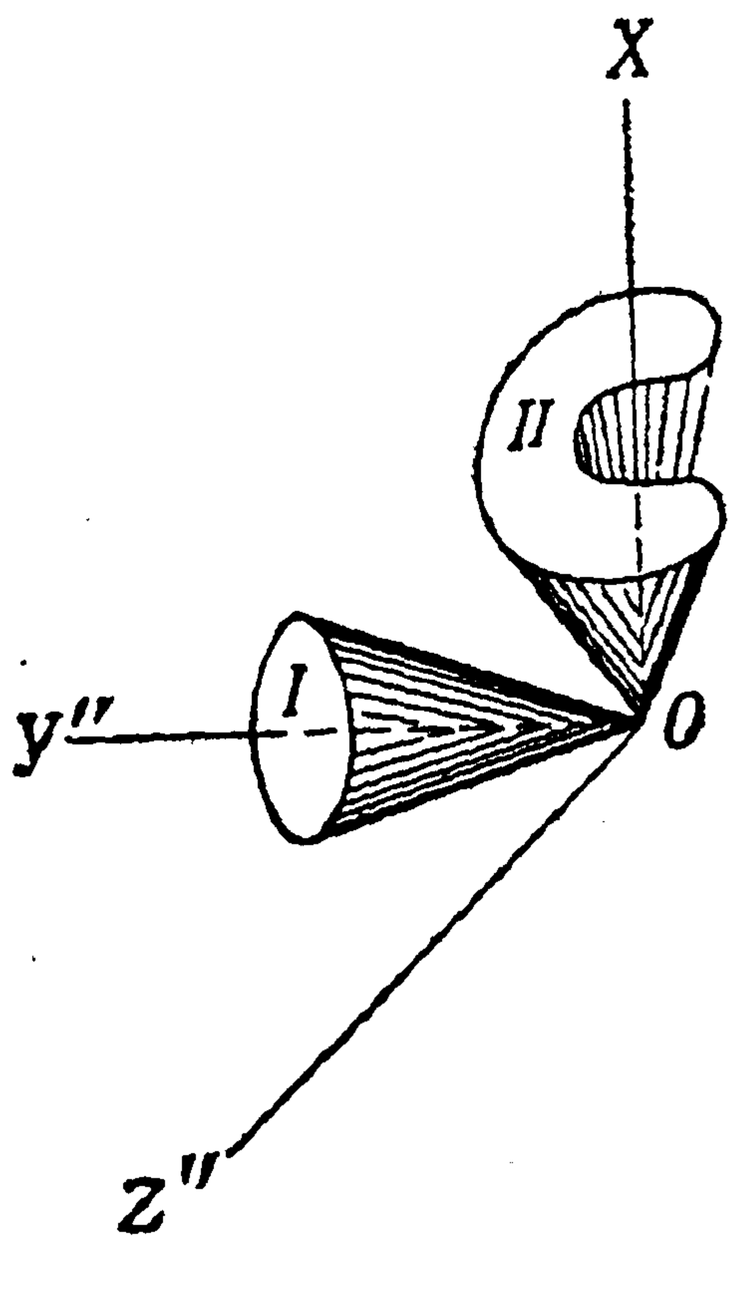
$$q'' = \frac{5B\frac{d\theta}{dt}}{2Ma^2b^2}.$$

Преобразуя эти величины r'' и q'' с помощью формул (27), (26), (22), (23), (24), находим для наших трех случаев:

$$\left.\begin{aligned}
r'' &= \frac{5}{2Ma^2b^2}\left(G - eB - \right.\\
&\left. - \frac{m}{1-\sin^2\theta_1\sin^2\operatorname{am} u}\sqrt{1-\sin^2\theta_1\sin^2\operatorname{am} u}\right),\\
r'' &= \frac{5}{2Ma^2b^2}\left(G - eB - \right.\\
&\left. - \frac{m}{1-\sin^2\theta_2\cos^2\operatorname{am} u}\sqrt{1-\sin^2\theta_2\cos^2\operatorname{am} u}\right),\\
r'' &= \frac{5}{2Ma^2b^2}\left(G - eB - \right.\\
&\left. - \frac{m}{1-\sin^2\theta_2\Delta^2\operatorname{am} u}\sqrt{1-\sin^2\theta_2\Delta^2\operatorname{am} u}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
q'' &= \frac{25GB\sin\theta_1\sin\theta_2\sqrt{n}}{4M^2a^2b^6}\,\frac{\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1\sin^2\operatorname{am}u}},\\
q'' &= -\frac{25GB\sin\theta_2\sqrt{-n(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)}}{4M^2a^2b^6}\times\\
&\qquad\times\frac{\sin\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2\cos^2\operatorname{am}u}},\\
q'' &= -\frac{25GB(\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_1)\sqrt{-n}}{4M^2a^2b^6}\,\frac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2\Delta^2\operatorname{am}u}}.
\end{aligned}
\right\}\qquad(32)
$$

Мы видим из формул (32), что в момент вступления точки Q на предельные параллельные круги величина q'' обращается в нуль, а во всякое другое время имеет знак $+$ или $-$, смотря по тому, идет ли точка Q вниз или вверх на фиг. 16. Далее, формулы (31) показывают нам, что в моменты вступления точки Q на тот или другой предельный круг величина r'' в первом и втором случаях будет одинакова, в третьем же случае мы получим для этих моментов две различные величины r'', которые даже могут иметь различные знаки. Присоединяя к этому то обстоятельство, что в первом и втором случаях p'' изменяет знак, а в третьем — имеет постоянный знак, приходим к заключению, что ось эллиптического вращения течения u', v', w' в первом и втором случаях описывает (фиг. 17) конус вида I, а в третьем — вида II.



Фиг. 17.

Решение задачи, принимая во внимание трение жидкости

§ 34. Принимая во внимание трение жидкости в полости движущегося тела, мы должны прибавить к силам, действующим на ее частицы, еще силы, проекции которых на оси Ox, Oy, Oz (взятые в § 29) суть

$$F_1 = \frac{\mu}{\rho}\Delta_2 v_1,\quad F_2 = \frac{\mu}{\rho}\Delta_2 v_2,\quad F_3 = \frac{\mu}{\rho}\Delta_2 v_3,$$

где μ — коэфициент внутреннего трения, а v_1, v_2, v_3 — скорости, выраженные формулой (3).

Так как по условию несжимаемости имеем тождество:

$$\Delta_2 v_1 = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right),$$

которое на основании формул (3) и (1) дает:

$$\Delta_2 v_1 = -2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right),$$

то силы F_1, F_2, F_3 могут быть еще представлены формулами:

$$F_1 = -\frac{4\mu}{\rho}\xi_1, \quad F_2 = -\frac{4\mu}{\rho}\eta_1, \quad F_3 = -\frac{4\mu}{\rho}\zeta_1, \tag{33}$$

в которых

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right),$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right),$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

Вихри ξ_1, η_1, ζ_1 мы будем называть вихрями второго порядка, так как они суть вихри течения несжимаемой жидкости со скоростями ξ, η, ζ; подобным же образом мы будем называть вихрями третьего порядка и обозначать через ξ_2, η_2, ζ_2 вихри течения несжимаемой жидкости со скоростями ξ_1, η_1, ζ_1.

Кроме прибавления указанных сил, мы должны еще стеснить относительное течение жидкости при поверхности полости, выражая, что поверхностное трение уравновешивается тангенциальной составляющей внутреннего трения. Сила поверхностного трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости V, и выражается, вообще говоря, некоторой функцией $f(V)$. Рассматривая малые скорости, мы примем вместе со Стоксом[1]:

$$f(V) = \nu V,$$

где ν — коэфициент внешнего трения.

---

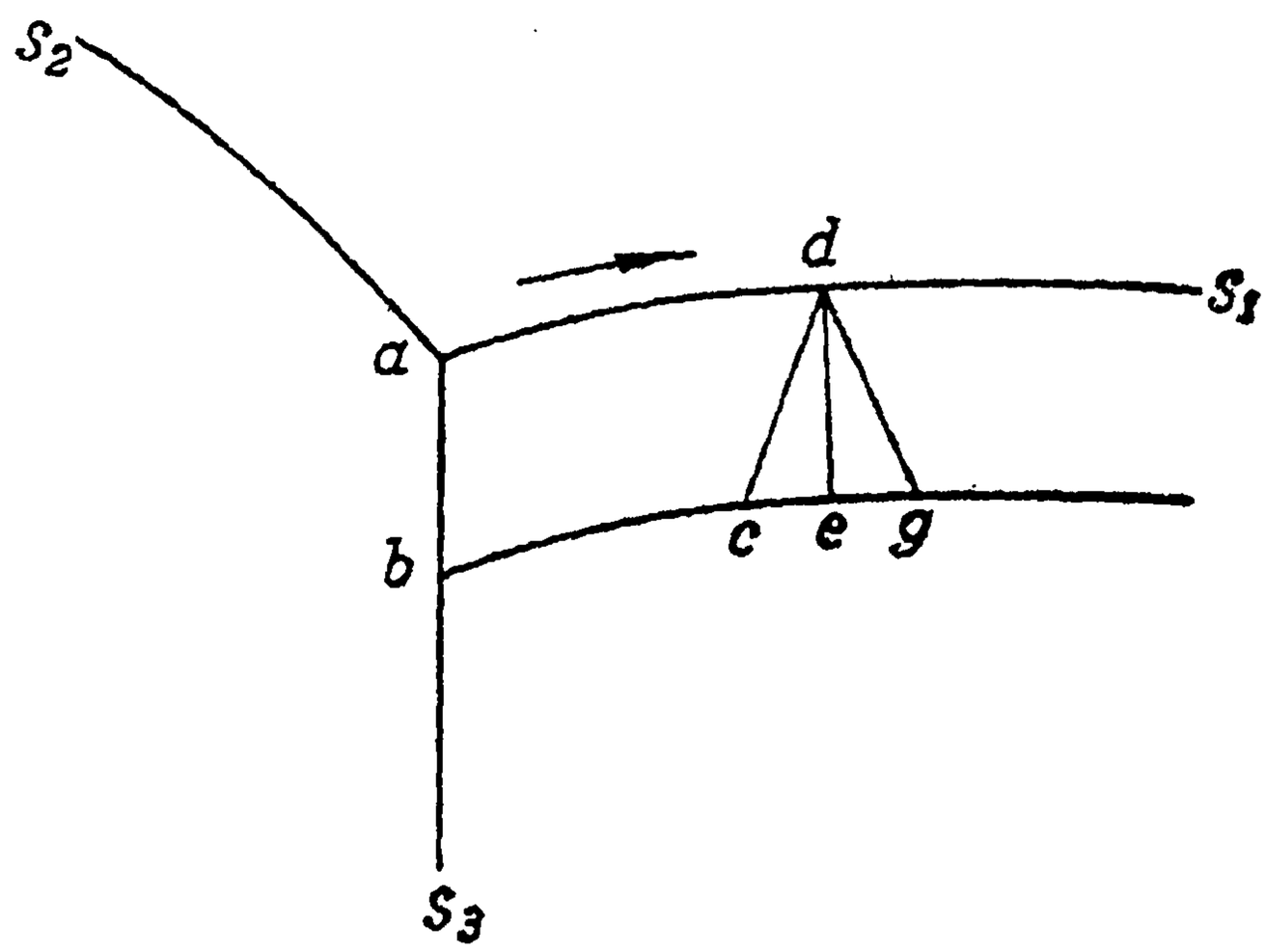
[1] On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. Mathematical and Physical Papers, v. I, p. 75.

Для определения тангенциальной силы внутреннего трения построим на поверхности полости (фиг. 18) семейство линий тока (s_1) для относительного движения жидкости и семейство (s_2) линий, ортогональных линиям тока; проведем к поверхности нормаль as_3 и через нее поверхность тока s_1as_3; назовем через $2\theta_1$ и $2\theta_2$ скольжения, соответствующие прямым углам s_2as_3 и s_3as_1. Проекции искомой силы на касательные к as_1 и as_2 в точке a будут:

$$T_2 = 2\mu\theta_2, \quad T_1 = 2\mu\theta_1,$$

и так как эти силы должны уравновеситься поверхностным трением, то

$$\theta_1 = 0, \quad 2\mu\theta_2 = \nu V.$$



Фиг. 18.

Первое условие показывает, что *поверхность тока относительного движения, проведенная через нормаль к стенке полости, должна быть ортогональна этой стенке.* Чтобы определить θ_2 во втором уравнении, проведем по поверхности тока s_3as_1 линию тока bg бесконечно близко к as_1 и положим, что во время dt точки жидкости a и b переходят в их относительном движении в точки d и g. Проведя элемент dc ортогональной линии к линиям тока по поверхности s_1as_3 и отложив $be = ad$, найдем по фиг. 18, что

$$\theta_2 = \frac{1}{2dt}\,\frac{ce + eg}{cd},$$

но так как

$$\frac{1}{dt}\,\frac{ce}{cd} = \frac{\left(\frac{ce}{cd}\right)}{ad}\,\frac{ad}{dt} = \frac{V}{R},$$

$$\frac{1}{dt}\,\frac{eg}{cd} = \frac{1}{cd}\left(\frac{bg}{dt} - \frac{be}{dt}\right) = \frac{dV}{ds_3},$$

то

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{ds_3} + \frac{V}{R}\right),$$

где R — радиус нормальной кривизны поверхности стенок в направлении линии тока s_1. Таким образом находим второе условие на поверхности:

$$V = \frac{\mu'}{\nu}\left(\frac{dV}{ds_3} + \frac{V}{R}\right). \tag{34}$$

Для случая $\nu = \infty$ это условие дает $V = 0$, как это принимают в теории трубок Пуазеля.

Переходим к составлению диференциальных уравнений движения тела и заключенной в нем жидкости, пользуясь тем же самым способом рассуждения, каким мы пользовались для решения задачи без трения.

В нашем случае жидкая масса в полости должна быть в равновесии под действием сил, имеющих потенциальную функцию, сил инерции и сил трения; для этого необходимо, чтобы силы инерции вместе с силами трения имели потенциальную функцию, т. е. чтобы циркуляция полного ускорения по всякому замкнутому контуру равнялась циркуляции по этому контуру вектора (F_1, F_2, F_3). Так как вследствие формулы (33) для бесконечно малого треугольника, рассматриваемого в § 30, циркуляция вектора (F_1, F_2, F_3) по теореме Стокса будет:

$$-\frac{8\mu}{\rho}(\xi_2\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \zeta_2\sigma_3),$$

то вместо формул (4) в случае жидкости с трением мы должны взять:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial t} = \xi\frac{\partial(u+u')}{\partial x} + \eta\frac{\partial(u+u')}{\partial y} + \zeta\frac{\partial(u+u')}{\partial z} - \\
&-(u+u')\frac{\partial\xi}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial\xi}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{4\mu}{\rho}\xi_2, \\
&\frac{\partial\eta}{\partial t} = \xi\frac{\partial(v+v')}{\partial x} + \eta\frac{\partial(v+v')}{\partial y} + \zeta\frac{\partial(v+v')}{\partial z} - \\
&-(u+u')\frac{\partial\eta}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial\eta}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{4\mu}{\rho}\eta_2, \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \xi\frac{\partial(w+w')}{\partial x} + \eta\frac{\partial(w+w')}{\partial y} + \zeta\frac{\partial(w+w')}{\partial z} - \\
&-(u+u')\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial\zeta}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{4\mu}{\rho}\zeta_2.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Что касается диференциальных уравнений движения твердого тела, то они и в задаче с трением выражаются формулами (5), так как силы трения не влияют на главный момент всех сил, действующих на рассматриваемую систему. Влияние этих сил на движение тела заключается только в изменении течения (u', v', w'), вместе с которым изменяются и P, Q, R.

Формулы (5) и (35) показывают нам, что в задаче об ударе вихревое движение жидкости, заключенной в полости, и трение ее частиц не играют никакой роли. Предположим, что в момент t на тело подействовали пары с весьма большими моментами L, M, N, которые в бесконечно малое время $t' - t$ изменили угловые скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$. Так как во вторые части формул (35) не входят $\frac{d\omega_1}{dt}$, $\frac{d\omega_2}{dt}$, $\frac{d\omega_3}{dt}$, то приращения $d\xi, d\eta, d\zeta$ за время удара $t' - t$ будут бесконечно малы, отсюда du', dv', dw', а следовательно и dP, dQ, dR, будут тоже бесконечно малы. Вследствие этого формулы (5) дадут нам:

$$\omega'_1 - \omega_1 = \frac{1}{A}\int_t^{t'} L\,dt,$$

$$\omega'_2 - \omega_2 = \frac{1}{B}\int_t^{t'} M\,dt,$$

$$\omega'_3 - \omega_3 = \frac{1}{C}\int_t^{t'} N\,dt.$$

Таким образом *удар тел, заключающих в своих полостях жидкость, может быть рассматриваем как удар неизменяемых систем, когда прибавим к телам соответственные эквивалентные тела.*

Обращаемся затем к составлению величины гидродинамического давления. Мы можем воспользоваться всем изложенным в § 31 для получения проекций на оси Ox, Oy, Oz полного ускорения частицы жидкости. Вычитая из этих проекций

силы трения F_1, F_2, F_3, данные формулами (33), мы должны получить частные производные по x, y, z от некоторой функции координат; вычитая же эту функцию из силовой функции, мы найдем до постоянного $\frac{p}{\rho}$ [1]):

$$\frac{p}{\rho} - U = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}(V^2 - V'^2) -$$

$$- \int \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + 2[\eta(w+w') - \zeta(v+v')] + \frac{4\mu}{\rho}\xi_1 \right) dx + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + 2[\zeta(u+u') - \xi(w+w')] + \frac{4\mu}{\rho}\eta_1 \right) dy +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + 2[\xi(v+v') - \eta(u+u')] + \frac{4\mu}{\rho}\zeta_1 \right) dz \right\}. \quad (36)$$

Легко показать, как это было сделано в § 31, что условия интегрируемости входящего сюда интеграла дают уравнения (35).

При решении задач, отнесенных к криволинейным координатам, мы будем вместо уравнений (35) прямо пользоваться этим условием интегрируемости, которое для большего удобства сформулируем в виде следующей теоремы: *частные производные по времени от u', v', w' вместе с поворотными ускорениями, которые определяются по вращению частицы и ее относительной скорости и вихрями второго порядка, умноженными на $\frac{4\mu}{\rho}$, должны иметь потенциальную функцию.*

---

[1]) Для устранения сомнения относительно нашей неопределенной функции времени τ просим читателя вообразить полое раскрывающееся яйцо, которое несколько раздвинуто и заполнено жидкостью, потом приложить к нему две равные и противоположные силы P, стремящиеся закрыть его, но не могущие этого сделать вследствие несжимаемости жидкости. Пусть яйцу сообщено некоторое вращение. Составив по формуле (36) давление жидкости на разрез яйца и приравняв его P, читатель определит τ, которое вообще будет некоторой функцией времени. Но так как для абсолютно твердого тела вышеуказанная сила P неизвестна, то неизвестно и τ.

§ 35. Для первого примера рассмотрим задачу Гельмгольца о колебании около неподвижной оси тела, содержащего в своей шаровой полости радиуса a трущуюся жидкость и находящегося под действием пары, момент которой пропорционален угловому перемещению тела, считая от положения его равновесия. Примем в формуле (5) ось Ox за ось вращения тела и определим A, присоединив к твердому телу эквивалентное тело, которое в нашем случае будет материальной точкой, равной по массе жидкости и помещенной в центре шара.

При определении внутреннего движения жидкости и зависящей от него величины P можем предполагать, что стенки полости вращаются около диаметра, параллельного оси вращения. Примем этот диаметр за полярную ось системы полярных координат, в которых r, θ и φ представляют радиус-вектор, полярный угол и долготу. Согласно нашему воззрению, внутреннее движение жидкости слагается из течения u, v, w, определяемого по формуле (8) первой главы (при $\chi = 0$), и течения u', v', w', происходящего от трения.

В нашей задаче первое течение будет:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\omega_1;$$

для второго же течения Гельмгольц берет:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \psi, \tag{37}$$

где ψ есть функция одного r.

Для этого второго течения мы должны определить вихри первого и второго порядка, что делается весьма удобно, прилагая теорему Стокса [1] к элементарным четырехугольникам, образованным координатными линиями, потом по найденным

---

[1] Чтобы найти компоненту вихря в направлении данного элемента (см. таблицу), вычисляют циркуляцию по контуру элементарного четырехугольника (образованного координатными линиями), поверхность которого ортогональна к взятому элементу; затем применяют теорему Стокса. При вычислении компонент вихрей второго порядка найденные компоненты вихрей первого порядка принимают за линейные скорости точек жидкости в соответствующих направлениях. *Прим. ред.*

вихрям первого порядка следует определить поворотные ускорения скоростей $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$, следуя правилу Кориолиса (надо проектировать скорость на плоскость, перпендикулярную оси вихря, умножить ее на двойную угловую скорость вихря и повернуть на прямой угол в сторону вращения вихря). Компоненты составленных таким образом векторов по направлению элементов координатных линий написаны в следующей таблице:

Элементы	Вихри 1-го порядка	Вихри 2-го порядка	Поворотные ускорения
dr	$\psi \cos\theta$	0	$(\omega_1-\psi)\left(2r\psi+\right.$ $\left.+r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin^2\theta$
$rd\theta$	$-\left(\psi+\frac{1}{2}r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin\theta$	0	$r(\omega_1-\psi)\psi\sin 2\theta$
$r\sin\theta\, d\varphi$	0	$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{r\partial^2\psi}{4\partial r^2}\right)\sin\theta$	0

Прилагая теорему § 34 к величинам, данным в этой таблице, находим, что для существования движения, выраженного формулой (37), необходимо условие интегрируемости дифференциального выражения:

$$(\omega_1-\psi)\left(2r\psi+r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin^2\theta\, dr+(\omega_1-\psi)\psi r^2\sin 2\theta\, d\theta+$$
$$+\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{4}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\right]r^2\sin^2\theta\, d\varphi.$$

Так как здесь коэфициенты при dr и $d\theta$ не содержат φ, то коэфициент $d\varphi$ должен быть некоторое постоянное c; но при таком предположении давление p в формулах (36) должно бы возрастать на $-2\pi c$ при обходе по параллельному кругу, потому $c=0$ и

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{4}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right). \qquad (38)$$

Остающаяся часть нашего диференциального выражения может быть представлена в виде:

$$d\left[(\omega_1 - \psi)\,\psi r^2 \sin^2\theta\right] + r^2\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin^2\theta\,dr. \qquad (39)$$

Если отбросить здесь последний член, коэфициент которого второго порядка относительно малой угловой скорости ψ, то требуемое условие будет удовлетворено, и в сделанном приближении движение может быть выражено формулами (37) и (38). Обращаемся к интегрированию уравнения (38). Положим:

$$\psi = e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\,\chi; \qquad (40)$$

тогда

$$-\lambda^2\chi = \frac{4}{r}\,\frac{d\chi}{dr} + \frac{d^2\chi}{dr^2}.$$

Это уравнение может быть приведено к линейному с постоянными коэфициентами. Для этого умножаем его на $r\,dr$ и интегрируем:

$$-\lambda^2\int \chi r\,dr = 2\chi + \frac{d(\chi r)}{dr},$$

потом полагаем:

$$\int \chi r\,dr = \frac{z}{r};$$

получаем:

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \lambda^2 z = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения будет:

$$z = C\sin\lambda r + C'\cos\lambda r,$$

поэтому:

$$\chi = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{C}{r}\sin\lambda r + \frac{C'}{r}\cos\lambda r\right).$$

Разлагая здесь синус и косинус в ряды, видим, что при приближении r к нулю χ будет стремиться к ∞, если C' не равно нулю, поэтому надо взять $C' = 0$. Таким образом получаем:

$$\chi = C\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\sin\lambda r}{r}\right). \qquad (41)$$

Подставив эту величину χ в формулу (40), найдем одно из частных значений функции ψ; определим для него производную от момента P по времени в формуле (5):

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi\rho \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^a \frac{\partial\psi}{\partial t}\, r^4\, dr = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^a \frac{\partial\psi}{\partial t}\, r^4\, dr.$$

Последний интеграл на основании формулы (38) приводится к

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8\pi\mu}{3} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\, r^4\right) dr = 2Ma\, \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_a,$$

где M — масса жидкости, так что по формуле (40)

$$\frac{dP}{dt} = 2Ma\, \frac{\mu}{\rho}\, e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a. \tag{42}$$

Обращаясь теперь к формуле (5), назовем через φ_1 угловое перемещение твердого тела и положим:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad L = -k\varphi_1;$$

найдем, что

$$A\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + k\varphi_1 + \frac{dP}{dt} = 0. \tag{43}$$

Вследствие формулы (42) один из частных интегралов этого уравнения будет:

$$\varphi_1 = -\frac{2Ma\,\frac{\mu}{\rho}}{A\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^4 + k}\, e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{2Ma\,\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^2}{A\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^4 + k}\, e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a. \tag{44}$$

Переходим к условиям при поверхности полости. Первое из этих условий в нашей задаче удовлетворяется, так как

поверхность тока, проведенная через нормаль к шару, представляет конус, ортогональный к его поверхности. Обращаясь ко второму условию, полагаем в формуле (34):

$$V = (\psi - \omega_1) r \sin\theta, \quad R = a, \quad ds_3 = -dr;$$

находим по сокращении:

$$\omega_1 - \psi_a = \frac{\mu}{\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_a. \tag{45}$$

Разлагаем в формуле (41) $\sin(\lambda r)$ в ряд и, произведя указанные действия, полагаем:

$$\chi = -\frac{C\lambda^3}{3} Q,$$

где

$$Q = 1 - \frac{\lambda^2 r^2}{2\cdot 5} + \frac{\lambda^4 r^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} - \frac{\lambda^6 r^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$$

Формула (45) по подстановке в нее соответствующих величин из формул (40), (41), (44) и по сокращении дает уравнение для определения λ:

$$\left\{\frac{2Ma\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^2}{A\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^4 + k} - \frac{\mu}{\nu}\right\}\left(\frac{dQ}{dr}\right)_a - Q_a = 0. \tag{46}$$

Это уравнение, как видно из вышенаписанной функции Q, не может иметь чисто мнимых корней, потому что при λ^2 отрицательном первая часть его будет некоторая отрицательная величина. Любек показал [1], что оно может иметь только действительные корни и четыре мнимых корня вида

$$\pm(\sigma + \tau\sqrt{-1}); \quad \pm(\sigma - \tau\sqrt{-1}).$$

Так как все условия [формулы (38), (43), (45)], которым должна удовлетворять функция ψ, линейного вида, то общее ее выражение представится суммой частных решений:

$$\psi = \sum e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\chi, \tag{47}$$

[1] Lübek, Borchardts Journal, Bd. 77, S. 26.

где сумма распространяется на все корни уравнения (46), а коэфициенты C, входящие в функции χ, определяются по начальным значениям φ_1, ω_1 и начальному движению жидкости.

Гельмгольц распространяет эту сумму только на мнимые корни; при этом, так как функция χ [формула (41)] с переменой знака λ не изменяет абсолютной величины, то он берет только два сопряженных корня.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \sigma + \tau\sqrt{-1} = m(\sin\varepsilon + \sqrt{-1}\cos\varepsilon), \\ \bar{\lambda} &= \sigma - \tau\sqrt{-1} = m(\sin\varepsilon - \sqrt{-1}\cos\varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

будут эти корни; положим для первого корня:

$$C = -B\sqrt{-1},$$

а для второго:

$$C = +B\sqrt{-1};$$

тогда ψ представится мнимой частью от выражения

$$2Be^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{\lambda\cos\lambda r}{r^2} - \frac{\sin\lambda r}{r^3}\right).$$

Положив для сокращения:

$$\frac{\mu}{\rho}m^2\cos 2\varepsilon = -\beta, \qquad \frac{\mu}{\rho}m^2\sin 2\varepsilon = \gamma$$

и обращая внимание на формулы:

$$e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t} = e^{-\beta t}(\cos\gamma t - \sqrt{-1}\sin\gamma t),$$

$$\lambda = m(\cos\varepsilon - \sqrt{-1}\sin\varepsilon)\sqrt{-1},$$

$$2\cos(\lambda r) = e^{\tau r}(\cos\sigma r - \sqrt{-1}\sin\sigma r) + e^{-\tau r}(\cos\sigma r + \sqrt{-1}\sin\sigma r),$$

$$2\sin(\lambda r) = \sqrt{-1}\,[e^{\tau r}(\cos\sigma r - \sqrt{-1}\sin\sigma r) - e^{-\tau r}(\cos\sigma r + \sqrt{-1}\sin\sigma r)],$$

находим, что

$$\psi = \frac{mB}{r^2}[e^{-\beta t+\tau r}\cos(\sigma r + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\beta t-\tau r}\cos(\sigma r - \gamma t - \varepsilon)] - \frac{B}{r^3}[e^{-\beta t+\tau r}\cos(\sigma r + \gamma t) - e^{-\beta t-\tau r}\cos(\sigma r - \gamma t)]. \qquad (49)$$

Гельмгольц замечает, что здесь движение, соответствующее первому и третьему членам, передается в виде волны с уменьшающимся напряжением от поверхности к центру со скоростью $\frac{\gamma}{\sigma}$, а движение, соответствующее второму и четвертому членам, передается от центра к поверхности тоже с уменьшающимся напряжением и с той же скоростью.

Время полного колебания шара и заключенной в нем жидкости будет:

$$T = \frac{2\pi}{\gamma},$$

а логарифмический декремент убывания амплитуд будет:

$$\lg(\varphi_1)_n - \lg(\varphi_1)_{n+1} = \beta T.$$

Эти-то величины, наблюденные Пиотровским, и послужили Гельмгольцу для определения коэфициентов трения. Когда они известны, то известны γ и β, а следовательно и величины:

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{\mu}{\rho} m^2 = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}; \tag{50}$$

поэтому, поставив в уравнение (46) величину λ из формулы (48), приравняв нулю действительную и мнимую части и исключив ε и m с помощью формулы (50), мы будем иметь два уравнения для определения μ и ν.

§ 36. Пока речь идет о движении твердого тела, то отброшенный нами член в диференциальном выражении (39) не играет заметной роли в явлении; но, когда является вопрос о виде траекторий частиц жидкости, то едва ли можно остановиться на предположении, что частицы движутся по параллельным кругам. Оказывается, что отброшенный нами член развивает силы, которые хотя и будут второго порядка (относительно ψ), но, действуя в одном и том же направлении, могут дать совершенно другой вид траекториям частиц жидкости. В этом параграфе мы вносим в рассматриваемую задачу второе приближение, при котором член, отброшенный в выражении (39), принимается во внимание, но силы трения и

поворотные ускорения в течении жидкости, вызываемые этим членом, пренебрегаются. Полагаем, что к течению, данному формулой (37), присоединяется течение:

$$\frac{dr}{dt} = q, \quad \frac{d\theta}{dt} = \vartheta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

и назовем через

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q', \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \vartheta'$$

частные производные от скоростей q и ϑ по времени. Вследствие этого к выражению (39) прибавляется

$$q'\,dr + r^2\vartheta'\,d\theta,$$

и нам надо выразить условие интегрируемости выражения:

$$\left(q' + \frac{r^2}{2}\,\frac{\partial\psi^2}{\partial r}\sin^2\theta\right)dr + r^2\vartheta'\,d\theta.$$

Это условие будет:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\vartheta') - \frac{\partial q'}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\psi^2}{\partial r}\,r^2\sin 2\theta; \tag{51}$$

присоединим к нему условие несжимаемости, которое в полярных координатах выражается следующим уравнением:

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(q'r^2) + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\vartheta'\sin\theta) = 0. \tag{52}$$

Умножаем уравнение (51) на r^2 и берем от обеих частей его производную по r:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2\vartheta')\right] - \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2q')\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\psi^2}{\partial r}\,r^4\right]\sin 2\theta;$$

исключаем отсюда q' с помощью формулы (52):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2\vartheta')\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\vartheta' r^2\sin\theta)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\psi^2}{\partial r}\,r^4\right]\sin 2\theta.$$

Если теперь сделаем подстановку

$$\vartheta' r^2 = z \sin 2\theta,$$

то $\sin 2\theta$ сделается общим множителем, так что, сократив на него наше уравнение, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial z}{\partial r}\right) - 6z = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi^2}{\partial r} r^4\right),$$

или

$$r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial z}{\partial r} - 6z = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi^2}{\partial r} r^4\right). \tag{53}$$

Для того чтобы определить интеграл этого линейного уравнения с последним членом, мы должны сперва найти интеграл уравнения без последнего члена:

$$r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial z}{\partial r} - 6z = 0,$$

который будет:

$$z = c_1 r^{k_1} + c_2 r^{k_2},$$

где k_1 и k_2 — корни уравнения

$$k^2 + k - 6 = 0,$$

и потому $k_1 = 2$, $k_2 = -3$.

Таким образом

$$z = c_1 r^2 + \frac{c_2}{r^3}. \tag{54}$$

Следуя способу Лагранжа, мы должны считать здесь постоянные c_1 и c_2 за функции r и определить их так, чтобы удовлетворить уравнению (53). Для этого берем:

$$r^2 \frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial c_2}{\partial r} = 0,$$

$$2r^3 \frac{\partial c_1}{\partial r} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi^2}{\partial r} r^4\right);$$

отсюда следует, что

$$c_1 = \frac{1}{10}\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right)\frac{dr}{r^3} = \frac{1}{10}\left(r\frac{\partial\psi^2}{\partial r} + 3\psi^2\right),$$

$$c_2 = -\frac{1}{10}\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right)r^2\,dr =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(r^6\frac{\partial\psi^2}{\partial r} - 2\psi^2 r^5 + 10\int_0^r \psi^2 r^4\,dr\right).$$

Общий интеграл уравнения (53) найдется, прибавляя ко второй части формулы (54) интеграл, получаемый от замены в этой формуле постоянных c_1 и c_2 найденными функциями.

Так как член $\frac{c_2}{r^3}$ в найденном таким образом интеграле будет обращаться в ∞ при $r=0$, а функция z должна везде внутри шара оставаться конечной, то мы должны положить $c_2=0$; таким образом найдем:

$$z = c_1 r^2 + \frac{1}{2}\psi^2 r^2 - \frac{1}{r^3}\int_0^r \psi^2 r^4\,dr.$$

Зная z, определяем ϑ':

$$\vartheta' = \left(c_1 + \frac{\psi^2}{2} - \frac{1}{r^5}\int_0^r \psi^2 r^4\,dr\right)\sin 2\vartheta.$$

Когда ϑ' известно, то q' можно определить из уравнения (52). Подставляя в это уравнение ϑ' и совершая интегрирование, находим, что

$$q' = \frac{2}{3}(3\sin^2\vartheta - 2)\,r\left\{c_1 + \frac{3}{2r^3}\int_0^r \psi^2 r^2\,dr - \frac{3}{r^3}\int_0^r \frac{dr}{r^3}\left[\int_0^r \psi^2 r^4\,dr\right]\right\}.$$

Делаем здесь в двукратном интеграле преобразование Дирихле:

$$\int_0^r \frac{dy}{y^3}\int_0^y \psi^2 x^4\,dx = \int_0^r \psi^2 x^4\,dx\int_x^r \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2}\int_0^r \psi^2 x^2\,dx - \frac{1}{2r^2}\int_0^r \psi^2 x^4\,dx,$$

вследствие чего

$$q' = \frac{2}{3}\left(3\sin^2\theta - 2\right) r\left(c_1 + \frac{3}{2r^5}\int_0^r \psi^2 r^4\, dr\right).$$

Постоянное c_1, вошедшее сюда, послужит нам для выполнения условия обращения q' в нуль на поверхности сферы; мы должны для этого взять:

$$c_1 = -\frac{3}{2a^5}\int_0^a \psi^2 r^4\, dr,$$

так что

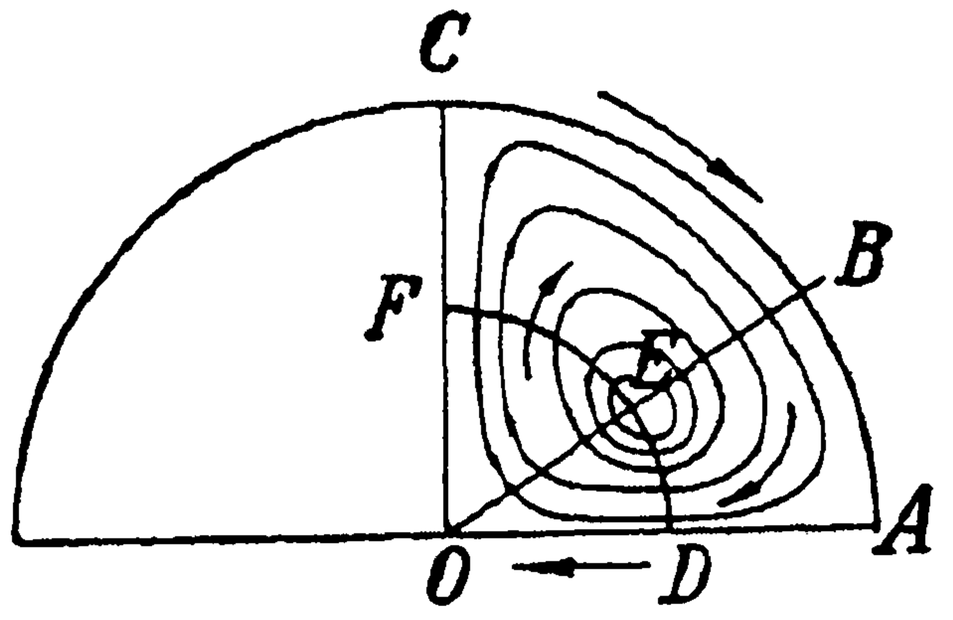
$$q' = (3\sin^2\theta - 2)\, r\left\{\frac{1}{r^5}\int_0^r \psi^2 r^4\, dr - \frac{1}{a^5}\int_0^a \psi^2 r^4\, dr\right\}. \qquad (55)$$

Внося величину c_1 в формулу для ϑ', получаем:

$$\vartheta' = \sin 2\theta\left\{\frac{\psi^2}{2} - \frac{1}{r^5}\int_0^r \psi^2 r^4\, dr - \frac{3}{2a^5}\int_0^a \psi^2 r^4\, dr\right\}. \qquad (56)$$

Формулы (55) и (56) решают нашу задачу, так как, зная q' и ϑ', сейчас же находим:

$$q = \int_0^t q'\, dt, \quad \vartheta = \int_0^t \vartheta'\, dt. \qquad (57)$$



Фиг. 19.

Переходя к исследованию найденных формул, вообразим (фиг. 19) некоторое меридианальное сечение нашей полости и посмотрим, как совершается в нем найденное течение. Формулы (56), (55), (57) показывают, что при одинаковом радиусе ϑ и q изменяются пропорционально $\sin 2\theta$ и $3\sin^2\theta - 2$. Это значит, что на полярной оси OC и экваторе OA скорость $\vartheta = 0$, а при $\theta = 45°$ она имеет наибольшую величину; скорость q обращается в нуль на радиусе OB, для которого

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

т. е. $\theta = 54°44'8''$; для точек, лежащих выше этого радиуса, q будет иметь один знак, а для точек, лежащих ниже его,— другой.

Для того чтобы определить, какой именно знак q будет соответствовать тем и другим точкам, возьмем производную по r от функции

$$w = \frac{1}{r^5}\int_0^r \psi^2 r^4\,dr - \frac{1}{a^5}\int_0^a \psi^2 r^4\,dr,$$

входящей в формулу (55), и преобразуем результат с помощью интеграции по частям:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r^6}\int_0^r \frac{\partial \psi^2}{\partial r} r^5\,dr.$$

Так как при $r = a$, $w = 0$, то при положительном значении этого интеграла для всякого r функция w будет внутри сферы отрицательна, а при отрицательном — положительна. Отсюда, обращая внимание на формулы (55) и (57), приходим к заключению: *если средний квадрат угловой скорости*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \psi^2\,dt$$

возрастает от центра к поверхности, то q положительно в угле COB и отрицательно в угле AOB, если же он убывает, то наоборот.

Подобный же признак можно установить для знака скорости ϑ на поверхности сферы. Полагаем в формуле (56) $r = a$:

$$\vartheta_a' = \sin 2\theta\left(\frac{\psi_a^2}{2} - \frac{5}{2a^5}\int_0^a \psi^2 r^4\,dr\right);$$

интегрируем по частям:

$$\vartheta_a' = \frac{\sin 2\theta}{2a^5}\int_0^a \frac{\partial \psi^2}{\partial r} r^5\,dr.$$

Отсюда следует, что *в случае возрастания среднего квадрата угловой скорости от центра к поверхности жидкость течет от полюса к экватору, а в случае его убывания — от экватора к полюсу*. Зная вид функции ψ, можно отыскать круг DF, на котором $\vartheta' = 0$ и за которым течение жидкости по меридианам получает направление, обратное течению по поверхности.

На нашей фигуре представлено течение для того случая, в котором средний квадрат угловой скорости возрастает от центра к поверхности. Может случиться, что производная по r от среднего квадрата угловой скорости не будет иметь постоянного знака на всем радиусе; тогда о направлении течения по поверхности следует судить по знаку интеграла

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial r}\left[\int_0^t \psi^2\, dt\right] r^5\, dr,$$

течение же жидкости по радиусам AO или CO может и не достигать до центра O.

Найденные нами результаты вполне оправдываются и на опыте. Мы воспользовались стеклянным шаром центробежной машины (употребляемым для опыта со ртутью и водой) и наполнили его водой, в которой находились мелкие водоросли, одинаковой с ней плотности. Когда шар из покоя приводился во вращательное движение, и, следовательно, угловая скорость шла, убывая от поверхности к центру, водоросли двигались от полюса к экватору; когда же шар сначала был приведен в быстрое вращение, а потом остановлен, так что угловая скорость шла, убывая от центра к поверхности, то замечалось движение водорослей от экватора к полюсам.

Весьма резкое явление представляло колебательное движение, которое мы сообщали шару, качая колесо машины однообразно в ту и другую сторону.

Здесь, как следует из соображений Гельмгольца [1], средний

[1] На стр. 203 Wissenschaftliche Abhandlungen, Band. I, читаем: „Daraus geht hervor, wie schnell die Bewegung in kleiner Entfernung von Oberflache bis zum Verschwinden schwächt“.

квадрат угловой скорости быстро уменьшается при передвижении к центру; согласно с этим, после нескольких колебаний устанавливалось течение, подобное изображенному на фиг. 19; даже точка E, около которой крутились водоросли, лежала на радиусе, образующем с полярной осью угол, довольно близкий к 54°.

§ 37. Для второго примера решим, принимая во внимание трение жидкости, задачу § 27. Рассматривая сначала трубку круглого сечения радиуса a, ось которой представляет произвольную замкнутую кривую, дадим приближенное решение задачи, пренебрегая кривизной трубки сравнительно с ее толщиной. Расположим наши подвижные оси координат x, y, z так, чтобы ось трубки касалась оси Ox в начале координат, и примем вследствие малой кривизны оси трубки, что частицы жидкости вблизи начала имеют относительно этих осей скорости, параллельные Ox и равные

$$v' + q,$$

где v' — функция времени, определяемая по формуле (82) второй главы, а скорость q происходит от трения и представляет функцию времени и координат y, z. Положив

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$

находим на основании нашей теоремы, что диференциальное выражение [1]

$$\left[\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right)\right]dx - (q+v')\frac{\partial q}{\partial y}\partial y - (q+v')\frac{\partial q}{\partial z}dz$$

должно быть полным диференциалом. Так как здесь коэфициенты при dy и dz не зависят от x, то коэфициент при dx будет постоянное количество и притом оно будет равно нулю, потому что давление p [в формуле (3б)] не должно прирастать при обходе по оси трубки. Таким образом

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right)$$

---

[1] Здесь автор предполагает, что q зависит только от r и t. *Прим. ред.*

или, если положим $q = s - v'$,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right). \tag{58}$$

Что касается остающейся части нашего диференциального выражения, то она будет полным диференциалом:

$$-d\frac{1}{2}(q+v')^2.$$

Решим нашу задачу в предположении, что трубка сначала была неподвижна, потом сразу была приведена в движение с постоянной угловой скоростью около постоянной оси, так что v' есть постоянная величина. Уравнение (58) под условием конечности s везде внутри трубки интегрируется с помощью Бесселевых функций первого рода нулевого порядка:

$$s = \sum C_i e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda_i^2 t} J_0(\lambda_i r); \tag{59}$$

здесь Бесселева функция $J_0(\lambda_i r)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 J_0(\lambda_i r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_0(\lambda_i r)}{dr} + \lambda_i^2 J_0(\lambda_i r) = 0, \tag{60}$$

которое подстановкой $\lambda_i r = \zeta$ обращается в

$$\frac{d^2 J_0(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dJ_0(\zeta)}{d\zeta} + J_0(\zeta) = 0.$$

Положив в формуле (34) $\nu = \infty$, найдем, что скорость относительного движения s должна обращаться в нуль при $r = a$; этому условию можно удовлетворить, приписывая в формуле (59) величинам λ_i значения

$$\lambda_i = \frac{\zeta_i}{a},$$

где ζ_i — корни уравнения

$$J_0(\zeta) = 0.$$

Все эти корни действительны и представляют ряд беспредельно возрастающих величин, начиная с $\zeta_1 = 2{,}4048$.

Условие, служащее для определения коэфициентов C_i, состоит в том, что при $t=0$ во всех точках трубки надо иметь $s=v'$. Мы получаем из формулы (59), что

$$\sum C_i J_0(\lambda_i r) = v'.$$

Пользуясь формулами

$$\int_0^a J_0(\lambda_i r) J_0(\lambda_{i'} r)\, r\,dr = 0,$$

$$\int_0^a [J_0(\lambda_i r)]^2\, r\,dr = \frac{a^2 (J_1 \zeta_i)^2}{2},$$

получаемыми из уравнения (60) и соотношения

$$\frac{dJ_0(\zeta)}{d\zeta} = -J_1(\zeta),$$

находим [1]:

$$C_i = \frac{2v'}{a^2 [J_1(\zeta_i)]^2} \int_0^a J_0(\lambda_i r)\, r\,dr.$$

Здесь

$$\int_0^a J_0(\lambda_i r)\, r\,dr = \frac{a^2}{\zeta_i} J_1(\zeta_i),$$

поэтому

$$C_i = \frac{2v'}{\zeta_i J_1(\zeta_i)}.$$

Таким образом относительная скорость в рассматриваемом движении будет

$$s = 2v' \sum \frac{J_0(\lambda_i r)}{\zeta_i J_1(\zeta_i)} e^{-\frac{\mu}{\rho}\frac{\zeta_i^2}{a^2} t}. \qquad (61)$$

Эта формула показывает, что s быстро уменьшается с возрастанием времени, стремясь к нулю при приближении t к ∞.

[1] Умножая обе части равенства $\sum C_i J_0(\lambda_i r) = v'$ на $J_0(\lambda_i r)\, r\,dr$ и интегрируя по r от 0 до a. *Прим. ред.*

Но, несмотря на то, что скорость обращается в нуль только по прошествии бесконечно большого времени, пространства, пройденные частицами жидкости, и количество жидкости, протекшей через разрез трубки, будут конечны. Определим количество Q жидкости, протекшей через разрез трубки:

$$Q = 2\pi \int_0^\infty dt \int_0^a sr\,dr = \frac{4\pi a^4 \rho v'}{\mu} \sum \frac{1}{\zeta_i^4};$$

откуда, пользуясь равенством [1]

$$\sum \frac{1}{\zeta_i^4} = \frac{1}{32},$$

имеем:

$$Q = \frac{\pi a^4 \rho v'}{8\mu}. \qquad (62)$$

Если угловая скорость вращения трубки и направление оси ее вращения изменяются со временем, то v' будет некоторая переменная величина, и тогда для решения вопроса можно будет или прибегнуть к тому способу, которым воспользовался И. С. Громека в своем сочинении „К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках“ [2], или обратиться к приему Римана [3]. Для нашей задачи удобнее прием Римана. Обозначаем через $\psi(t)$ вторую часть формулы (61) без множителя v', который в свою очередь обозначаем через $\chi(t)$.

Предполагаем, что трубка и жидкость сначала покоятся, потом трубка сразу получает движение, вызывающее в жидкости относительную скорость $\chi(0)$; если бы движение трубки осталось без перемены, то по прошествии времени t от действия трения скорость жидкости обратилась бы в $\chi(0)\psi(t)$; но по прошествии времени dt к движению тела прибавляется

---

[1] Это равенство дано у Strutt в „On Bessel's Functions“, Philosoph. Magazine. 1872.

[2] К теории движения жидкостей в узких цилиндрических трубках, Казань, 1882, § 4.

[3] Riemann, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf Physikalische Fragen, Braunschweig, 1859, § 52.

некоторое движение, сообщающее жидкости скорость $\chi'(dt)\,dt$; если бы после этого движение трубки не изменялось, то по прошествии времени $t-dt$ скорость жидкости стала бы $\chi(0)\psi(t)+\chi'(dt)\,dt\,\psi(t-dt)$; но по прошествии следующего элемента времени dt скорость тела еще прирастает, вследствие чего скорость жидкости прирастает на $\chi(2dt)\,dt$, так что, если бы после этого скорость тела не изменялась, то скорость жидкости через время $t-2dt$ обратилась бы в $\chi(0)\psi(t)+\chi'(dt)\,dt\,\psi(t-dt)+\chi'(2dt)\,dt\,\psi(t-2dt)$. Продолжая рассуждать таким образом и разбив время t на n бесконечно малых промежутков, найдем, что скорость s в конце времени t будет:

$$s=\chi(0)\psi(t)+\chi'(dt)\psi(t-dt)\,dt+\chi'(2dt)\psi(t-2dt)\,dt+\ldots$$

$$\ldots+\chi'[(n-1)\,dt]\psi[t-(n-1)\,dt]\,dt$$

или

$$s=\chi(0)\psi(t)+\int_0^t\chi'(x)\psi(t-x)\,dx.$$

Интегрируя по частям [1], найдем формулу для q:

$$q=\int_0^t\chi(x)\psi'(t-x)\,dx. \tag{63}$$

Для того чтобы выяснить влияние кривизны оси трубки на движение заключенной в нем жидкости, рассмотрим полость, имеющую форму тора, вращающуюся с постоянной скоростью ω_3 около своей оси симметрии. Назовем через b радиус средней окружности трубки и через a, попрежнему, радиус сечения; отнесем движение жидкости к цилиндрическим координатам, начало 0 которых лежит в центре кольца, а ось Oz идет по оси кольца. Называя через $b+x$, z и φ цилиндрические координаты точки жидкости (φ отсчитывается от плоскости, неподвижной в кольце), выразим элемент дуги формулой:

$$d\sigma^2=dx^2+dz^2+(b+x)^2\,d\varphi^2.$$

---

[1] Здесь надо принять во внимание, что $\psi(0)=1$, ибо в этом предположении определены C_i. *Прим. ред.*

Внутреннее течение, не зависящее от трения, будет:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_3, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Посмотрим, нельзя ли удовлетворить нашей теореме, положив, что к этому движению от трения прибавляется движение:

$$(b+x)\frac{d\varphi}{dt} = q, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Составим по теореме Стокса компоненты вихрей первого и второго порядка по направлению элементов координатных линий, а также составляющие по этим направлениям поворотных ускорений; при этом в компонентах двух последних векторов будем пренебрегать отношением $\frac{x}{b}$. Получим таблицу [1]:

Элементы	Вихри 1-го порядка	Вихри 2-го порядка	Поворотные ускорения
dx	$-\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial z}$	0	$(\omega_3 b - q)\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{b}\right)$
dz	$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{b+x}\right)$	0	$(\omega_3 b - q)\frac{\partial q}{\partial z}$
$(b+x)\,d\varphi$	0	$-\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{b^2}\right\}$	0

Мы видим, что выражение

$$(\omega_3 b - q)\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{b}\right)dx + (\omega_3 b - q)\frac{\partial q}{\partial z}dz + \left[\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{b^2}\right)\right](b+x)\,d\varphi$$

должно быть полным диференциалом. Так как коэфициенты при dx и dz не содержат φ, то для этого необходимо, чтобы

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{b^2}\right). \qquad (64)$$

[1] См. примечание редакции на стр. 153.

Остающаяся часть выражения будет:

$$-d\frac{1}{2}(q-\omega_3 b)^2+\left(\omega_3 q-\frac{q^2}{b}\right)dx.$$

Так как здесь последний член не есть полный дифференциал, то сделанное нами предположение о том, что частицы жидкости не будут иметь скорости, направленной по плоскости сечения трубки, не может иметь места. Упомянутый член вызовет течение, которое при известном q легко может быть определено, даже принимая во внимание силы трения этого течения (они будут лежать в плоскости сечения), но дело в том, что сама скорость q зависит от этого течения. Не имея возможности решить задачу точно, мы должны решать ее приблизительно: по уравнению (64) определить q; по q отыскать течение в плоскостях сечения трубки и, зная это течение, поправить q, обратив внимание на эффект поворотных ускорений. Мы не станем здесь производить подобные вычисления, а обратимся к интегрированию уравнения (64). Так как мы решились отбрасывать в этом уравнении члены порядка $\frac{x}{b}$, то вместо него можем написать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]=\frac{\mu}{\rho}\left\{\left(1-\frac{x}{2b}\right)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]+\frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{q}{b^2}\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right\}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]=\frac{\mu}{\rho}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]-\frac{q}{b^2}\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right\}.$$

Обинтегрировав это уравнение, придется разделить результат на $1-\frac{x}{2b}$, чтобы получить q, поэтому с принятой

мерой точности можно определить q прямо из уравнения:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \frac{q}{b^2}\right)^{1)}. \qquad (64')$$

Положим здесь:

$$s = \omega_3 b\left(1 + \frac{x}{b}\right) - q = \omega_3 b - q, \quad x = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta;$$

найдем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) - \frac{\mu}{\rho}\frac{s}{b^2}\ ^{2)}. \qquad (65)$$

При интегрировании этого уравнения с помощью формулы (59) мы должны будем в уравнении (60) заменить λ_i^2 на $\lambda_i^2 + \frac{1}{b^2}$; вследствие этого в формуле (61) придется взять вместо $\frac{\zeta_i^2}{a^2}$ величину $\frac{\zeta_i^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, а формула (62) обратится в

$$Q = \frac{4\pi a^4 \rho \omega_3 b}{\mu} \sum \frac{1}{\zeta_i^2\left(\zeta_i^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)}. \qquad (66)$$

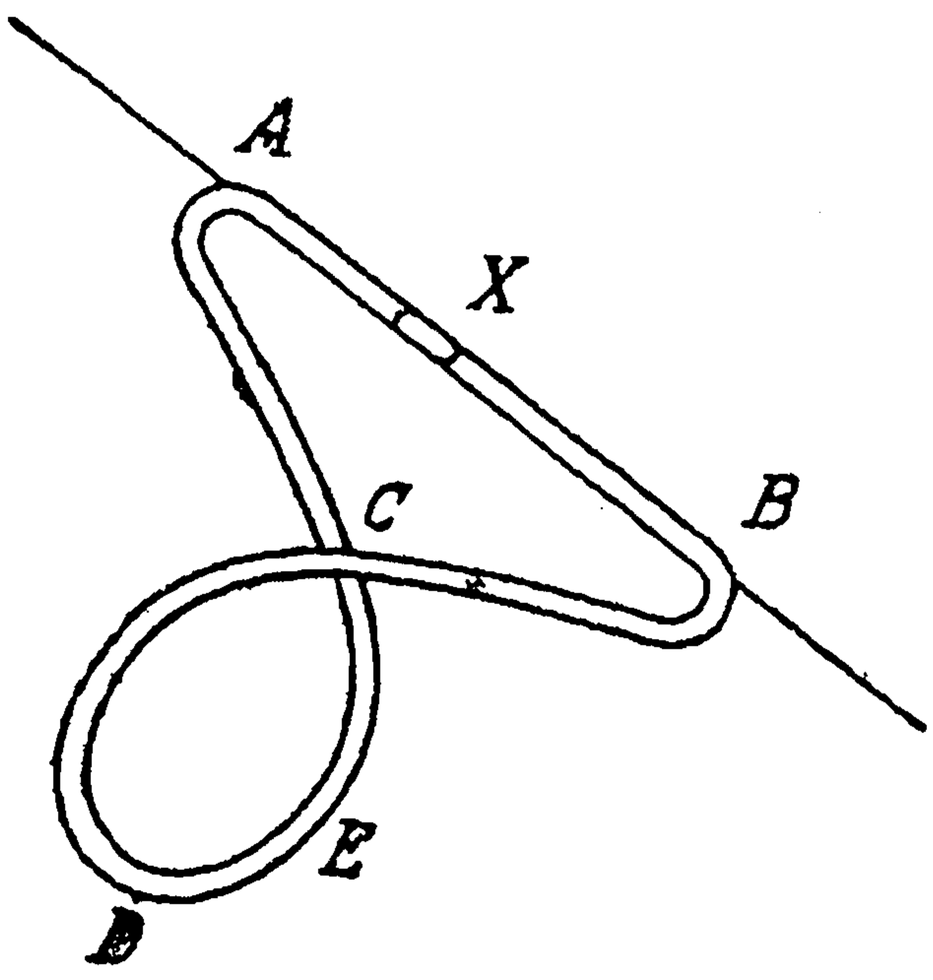
Эта формула показывает, что при малом отношении $\frac{a}{b}$ кривизна трубки не оказывает заметного влияния на количество жидкости, протекающей через разрез трубки.

---

1) Акад. С. А. Чаплыгин обратил внимание на то, что уравнение (64′) подстановкой $q_1 = qe^{\frac{x}{2b}}$ преобразуется в уравнение (64′), если в этом последнем заменим b через $b\frac{2}{\sqrt{5}}$. *Прим. ред.*

2) В уравнении (65) пропущен член $\frac{\mu\omega_3}{\rho b}$. Интегралом уравнения (65) будет $s = \omega_3 b - q$, где q удовлетворяет уравнению (64′). Если q представить рядом (59), заменив в показателе λ_i^2 через $\lambda_i^2 + \frac{1}{b^2}$, определить C_i из условия $\sum C_i J_0(\lambda_i r) = \omega_3 b$, а λ_i взять прежними, то s удовлетворяет таким условиям: при $t = 0$ $s = 0$; при $r = a$ $s = \omega_3 b$. Таким образом полученное решение s соответствует тому случаю, когда вращающуюся трубку мгновенно останавливают. *Прим. ред.*

Для проверки описанного движения жидкости на опыте мы приготовили несколько замкнутых стеклянных трубок, одна из которых представлена на фиг. 20. Все эти трубки имели прямую часть AB, которая служила осью вращения, и часть CDE, плоскость которой перпендикулярна оси AB. Трубки заполнялись водой, причем в них оставлялся маленький воздушный пузырек x. К точкам A и B привязывались нитки, с помощью которых весь прибор приводился во вращение около оси AB, причем пузырек оставался хорошо виден. Как только трубка начинала вращаться, пузырек приходил в движение в сторону, указываемую формулой (82) второй главы. Но если вращение совершалось равномерно, то, пройдя некоторый путь, пузырек останавливался. Когда после этого мы мгновенно останавливали трубку, то пузырек шел назад и возвращался приблизительно на прежнее место. Это согласно с нашей теорией, потому что при сообщении трубке сразу некоторой угловой скорости жидкость внутри ее получает скорость v', от которой по формуле (62) пузырек должен пройти путь $\frac{Q}{\sigma}$, где σ — площадь сечения трубки; когда же трубка останавливается, то жидкость получает внутреннюю скорость $-v'$ и все движение повторяется в обратную сторону.



Фиг. 20.

Ввиду простоты формулы (62) было бы интересно произвести с замкнутыми трубками измерительные опыты, в которых по пути, пройденному пузырьком, определялось бы μ. Такие опыты мы надеемся сделать в скором времени.

§ 38. Оканчивая здесь наше сочинение, сделаем некоторые замечания о движении свободного тела, внутри которого заключена трущаяся жидкость. Как было указано в § 8, поступательное движение тела будет совершаться так, как будто жидкость отвердела, вращательное же движение около центра тяжести должно быть определено по формулам (5) и (35), при-

чем последние могут быть заменены теоремой § 34. Интегрирование уравнений (5), даже в том случае, когда $L = M = N = 0$, а полость имеет форму шара или тонкой замкнутой трубки, представляет большие затруднения. Если бы, например, мы приняли последнюю форму полости, то должны бы были прежде определить P, Q и R по формулам § 27:

$$P = 2\rho\, dq\sigma_x, \quad Q = 2\rho\, dq\sigma_y, \quad R = 2\rho\, dq\sigma_z,$$

в которых количество dq протекшей жидкости от скорости q должно быть определено по формуле (63). Функция $\chi(x)$ в свою очередь определялась бы по формуле (82) второй главы и зависела бы от ω_1, ω_2, ω_3. Таким образом наши дифференциальные уравнения будут содержать ω_1, ω_2, ω_3 и их производные по времени как в явной форме, так и под знаками интегралов вида формулы (63), освободиться от которых посредством диференцирования не явится возможности, так как в формулу (63) t входит еще в $\psi'(t - x)$.

Но, несмотря на такую трудность задачи, даже при простейших формах полости, мы можем для всякого произвольного вида полости указать то предельное движение, которое получит тело по прошествии весьма большого времени.

Положив в уравнении (5) $L = M = N = 0$, умножаем их соответственно на ω_1, ω_2, ω_3 и складываем:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + \left(\omega_1\frac{dP}{dt} + \omega_2\frac{dQ}{dt} + \omega_3\frac{dR}{dt}\right) = 0;$$

умножая здесь второй член на δt, можем рассматривать его как элементарную работу сил, имеющих компоненты $m\frac{\partial u'}{\partial t}$, $m\frac{\partial v'}{\partial t}$, $m\frac{\partial w'}{\partial t}$ при бесконечно малом угловом перемещении $\omega\delta t$ около мгновенной оси вращения; поэтому

$$\left(\omega_1\frac{dP}{dt} + \omega_2\frac{dQ}{dt} + \omega_3\frac{dR}{dt}\right)\delta t =$$

$$= \sum m\left[\frac{\partial u'}{\partial t}(\omega_2 z - \omega_3 y)\,\delta t + \frac{\partial v'}{\partial t}(\omega_3 x - \omega_1 z)\,\delta t + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial w'}{\partial t}(\omega_1 y - \omega_2 x)\,\delta t\right].$$

Отбрасываем множитель δt и подставляем сюда на основании формулы (8) первой главы (при $\chi = 0$)

$$\omega_2 z - \omega_3 y = -u + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\omega_3 x - \omega_1 z = -v + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\omega_1 y - \omega_2 x = -w + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

получаем:

$$\omega_1 \frac{dP}{dt} + \omega_2 \frac{dQ}{dt} + \omega_3 \frac{dR}{dt} =$$

$$= -\sum m \left(u \frac{\partial u'}{\partial t} + v \frac{\partial v'}{\partial t} + w \frac{\partial w'}{\partial t} \right) +$$

$$+ \sum m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial t} \right).$$

Так как бесконечно малые приращения скорости du', dv', dw' удовлетворяют условию несжимаемости и имеют поверхностью тока стенки полости, то по § 4

$$\sum m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} du' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dv' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dw' \right) = 0.$$

Подставляя, находим, что

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) -$$

$$- \sum m \left(u \frac{\partial u'}{\partial t} + v \frac{\partial v'}{\partial t} + w \frac{\partial w'}{\partial t} \right) = 0. \qquad (67)$$

Обращаемся затем к формуле (36). Положив в ней

$$s = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} (V^2 - V'^2) - \frac{p}{\rho} + U,$$

составим производные:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial t} + 2 [\eta (w + w') - \zeta (v + v')] + 4 \frac{\nu}{\rho} \xi_1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial t} + 2[\zeta(u+u') - \xi(w+w')] + 4\frac{\mu}{\rho}\eta_1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial t} + 2[\xi(v+v') - \eta(u+u')] + 4\frac{\mu}{\rho}\zeta_1.$$

Умножаем эти уравнения соответственно на $m(u+u')$, $m(v+v')$, $m(w+w')$ и, сложив их, берем от обеих частей полученного равенства сумму, распространенную на всю полость:

$$\sum m\left[\frac{\partial s}{\partial x}(u+u') + \frac{\partial s}{dy}(v+v') + \frac{\partial s}{\partial z}(w+w')\right] =$$

$$= \sum m\left(u\frac{\partial u'}{\partial t} + v\frac{\partial v'}{\partial t} + w\frac{\partial w'}{\partial t}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + w'^2) +$$

$$+ \frac{4\mu}{\rho}\sum m[(u+u')\xi_1 + (v+v')\eta_1 + (w+w')\zeta_1].$$

Сумма в первой части по § 4 обращается в нуль, потому что течение $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$ не дает изменения объема и имеет поверхностью тока стенки полости. Определив первую сумму второй части, подставляем ее в формулу (67):

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + \frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + w'^2)\right] =$$

$$= -\frac{4\mu}{\rho}\sum m[(u+u')\xi_1 + (v+v')\eta_1 + (w+w')\zeta_1]. \quad (68)$$

Переходим к формулам (3). Возвысим их в квадрат и, сложив, умножаем полученное равенство на $\frac{m}{2}$ и берем от обеих его частей сумму, распространенную на всю полость:

$$\frac{1}{2}\sum m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + w'^2) +$$

$$+ \sum m\left(u'\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v'\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w'\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Так как здесь последняя сумма во второй части по § 4 равна нулю, ибо течение u', v', w' не дает изменения объема и имеет поверхностью тока стенки полости, то живая сила нашей жидкой массы равна сумме ее живых сил в движении, которое бы имело место при отсутствии трения, и в движении, которое вызывается трением. В первой части формулы (68)

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right)$$

представляет живую силу твердого тела и жидкости при отсутствии трения, поэтому вся первая часть формулы (68) представляет нам

$$\frac{d}{dt}T,$$

где T — живая сила всей системы.

Итак,

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{4\mu}{\rho}\sum m\left[(u+u')\,\xi_1 + (v+v')\,\eta_1 + (w+w')\,\zeta_1\right].$$

Здесь

$$\xi_1 = -\frac{1}{4}\Delta_2 u', \quad \eta_1 = -\frac{1}{4}\Delta_2 v', \quad \zeta_1 = -\frac{1}{4}\Delta_2 w',$$

а так как по формуле (8) второй главы

$$\Delta_2 u = 0, \quad \Delta_2 v = 0, \quad \Delta_2 w = 0,$$

то можно написать:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{4}\Delta_2(u+u'), \\ \eta_1 &= -\frac{1}{4}\Delta_2(v+v'), \\ \zeta_1 &= -\frac{1}{4}\Delta_2(w+w'); \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

получим:

$$\frac{dT}{dt} = \mu\int\int\int\left[(u+u')\,\Delta_2(u+u') + (v+v')\,\Delta_2(v+v') + (w+w')\,\Delta_2(w+w')\right]dx\,dy\,dz. \tag{70}$$

Преобразуем формулу (70) двумя способами. По теореме Грина напишем:

$$\frac{dT}{dt} = -\mu \int\int \left[(u+u') \frac{d(u+u')}{dn} + (v+v') \frac{d(v+v')}{dn} + \right.$$

$$\left. + (w+w') \frac{d(w+w')}{dn} \right] d\sigma - \mu \int\int\int \{ [\Delta_1 (u+u')]^2 +$$

$$+ [\Delta_1 (v+v')]^2 + [\Delta_1 (w+w')]^2 \} \, dx\, dy\, dz, \qquad (71)$$

где Δ_1 — знак первого диференциального параметра; с другой стороны, заметив, что

$$\Delta_2 (u+u') = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right),$$

. . . . . .

где

$$N_1 = 2\mu \frac{\partial (u+u')}{\partial x}, \quad N_2 = 2\mu \frac{\partial (v+v')}{\partial y}, \quad N_3 = 2\mu \frac{\partial (w+w')}{\partial z},$$

$$T_1 = \mu \left(\frac{\partial (v+v')}{\partial z} + \frac{\partial (w+w')}{\partial y} \right),$$

$$T_2 = \mu \left(\frac{\partial (w+w')}{\partial x} + \frac{\partial (u+u')}{\partial z} \right),$$

$$T_3 = \mu \left(\frac{\partial (u+u')}{\partial y} + \frac{\partial (v+v')}{\partial x} \right),$$

делаем преобразование второй части формулы (70) по теореме Клапейрона[1]:

$$\frac{dT}{dt} = -\mu \int\int [(u+u')^2 + (v+v')^2 + (w+w')^2] \, d\sigma -$$

$$- \frac{1}{\mu} \int\int\int \left[\frac{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2}{2} + T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \right] dx\, dy\, dz. \qquad (72)$$

Формула (72) показывает, что живая сила нашей системы, вообще говоря, будет постоянно убывать с возрастанием времени. Она перестанет убывать только в том случае, когда

[1] Lamé, Théorie de l'élasticité, § 32.

вторая часть формулы обратится в нуль, для чего необходимо, чтобы внутри полости

$$N_1 = N_2 = N_3 = T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

а на поверхности ее

$$u + u' = 0, \quad v + v' = 0, \quad w + w' = 0. \tag{73}$$

Приняв это последнее условие и обращаясь к формуле (71), видим, что внутри полости

$$[\Delta_1 (u + u')]^2 = 0, \quad [\Delta_1 (v + v')]^2 = 0, \quad [\Delta_1 (w + w')]^2 = 0,$$

т. е. $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$ должны быть постоянны; а так как на поверхности они равны нулю, то везде внутри полости должны быть удовлетворены уравнениями (73). Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы живая сила нашей системы перестала убывать и сделалась постоянной; так как по этому условию жидкость теряет свое относительное движение, то вся система начинает вращаться как одна неизменяемая система. Переходя теперь к нашей теореме, вытекающей из формулы (3б), и обращая внимание на формулы (73) и (69), видим, что диференциальное выражение

$$\frac{\partial u'}{\partial t} dx + \frac{\partial v'}{\partial t} dy + \frac{\partial w'}{\partial t} dz$$

должно быть полным диференциалом; это требует, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right] = 0,$$

откуда по формуле (73) и формуле (8) первой главы

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial t} = 0.$$

Таким образом необходимо, чтобы ω_1, ω_2, ω_3 не изменялись со временем, а это возможно только тогда, когда тело

начнет вращаться около оси инерции всех масс нашей системы (твердого тела и жидкости).

Нам предоставляется теперь сделать два предположения: или живая сила нашей системы будет постоянно убывать, и система после весьма большого промежутка времени остановится, или мгновенная ось займет в пределе направление одной из главных осей инерции рассматриваемых масс, и система будет вращаться равномерно около этой оси как одно твердое тело. Первое предположение невозможно, потому что главный момент количеств движения всех точек системы остается неизменным по величине и направлению, следовательно, нам остается только второе предположение.

Итак, *если в теле имеется какая-нибудь полость, наполненная тущейся жидкостью, и такой системе сообщены какие-нибудь начальные скорости, то движение ее будет стремиться к предельному состоянию, при котором одна из главных осей инерции рассматриваемых масс займет направление главного момента начальных количеств движения, и вся система будет вращаться около нее как одно неизменяемое тело с постоянной угловой скоростью, получаемой от разделения главного момента начальных количеств движения на момент инерции системы относительно этой оси.*

Не этой ли теоремой следует объяснить то обстоятельство, что, несмотря на всякие случайные начальные скорости, планеты вращаются около своих осей инерции?

Эта работа была удостоена Московским университетом в 1886 г. премии им. Брашмана и напечатана в первый раз в „Журнале Русского физико-химического общества“, т. XVII, 1885, вып. 6, 7 и 8, и второй раз в „Трудах Центрального аэрогидродинамического института“, вып. 92, 1931.

Прим. ред.

ON THE MOTION OF A RIGID BODY HAVING CAVITIES FILLED WITH A HOMOGENEOUS LIQUID

Prof. Joukowsky's work „On the Motion of a Rigid Body Having Cavities Filled with a Homogeneous Liquid" was printed in 1885 in the Journal of the Physico-Chemical Society, Vol. XVII, Parts 6, 7 and 8.

All works on the problem of the motion of a rigid body containing cavities filled with liquid masses which existed at the time, either dealt with particular examples or only touched on the problem. Prof. Joukowsky's work is the first general treatment of the subject, and contains, in addition to several new general theorems, solutions of the problem for a number of shapes of cavities, not previously investigated and for multiply-connected cavities, and extensions of the problem to the case of viscous fluid and to that of vortex motion.

In Chapter I is discussed the general theory of motion of the body with liquid masses contained within, on the assumption of absence of friction and of existence of the velocity potential.

The internal motion of the liquid is shown to be completely determined by the rotation of the body and to be independent on its motion of translation (§ 6). It is also shown that in the relative motion of the liquid the particle possessing the highest velocity will be one on the surface of the cavity (§ 6) and that if the velocity of relative motion at any point in the liquid becomes very high the pressure in the entire volume of the cavity becomes very high also (§ 7).

From differential equations (§ 10, formula 16) the motion of the body itself is shown (§ 10) to be such as if the liquid

masses were replaced by equivalent solids [1]. The masses of the equivalent solids are equal to those of the liquid. The centres of gravity of the equivalent solids coincide with the centres of gravity of the liquid masses. The moment of inertia of the equivalent solid about any axis through its centre of gravity is shown to be less than the moment of inertia about the same axis of the corresponding liquid mass (§ 9 and 10). When the body has multiply-connected cavities in which for the liquid masses is given an initial motion (i. e. are given initial circulations around closed contours), then in replacing these masses by equivalent solids it is necessary to attach to the body a certain gyroscope, of which the direction of the axis of rotation and the moment of the initial momentum are completely determined by the principal moment of momentum of the liquid masses when the body is at rest. The corresponding equations of motion are given by formula (18) of § 10. Prof. Joukowsky points out that in his method of treatment of the case of multiply-connected cavities there is no room for the doubt which was felt by Neumann in investigating the problem [2].

At the end of the chapter (§ 11) is given a brief outline of Neumann's method of deducing the differential equations of motion. The method consists in applying Hamilton's Principle to the rigid body alone, which is considered as subjected to directly applied forces and to liquid pressures. Prof. Joukowsky in his analysis deduces the differential equations of motion (§ 8, 9 and 10) by first calculating the principal moments of momenta of the body (§ 9, formula 10) and of the liquid masses (§ 9, formula 12), and then forming in the usual manner the differential equations of motion of the system with respect to a fixed point.

Chapter II deals with the determination of the internal motion of the liquid and of the ellipsoids of inertia of equivalent solids for different shapes of cavities.

---

[1] The possibility of replacing a liquid mass by an equivalent solid was proved by Stokes only for the case when the velocities are low. Prof. Joukowsky proves the general case.

[2] Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig, 1883, S. 236.

First is given a detailled treatment of the case of an ellipsoidal cavity (§ 12). When a body containing such a cavity is in rotary motion the lines of flow in the relative motion of the liquid within the cavity represent a family of ellipses formed by intersections by planes conjugate to the direction of the axis of rotation, of the family of concentric ellipsoids similar to the cavity. Such motion is termed by Prof. Joukowsky an elliptic rotation.

Next is discussed the problem of cylindrical and of prismatic cavities (§ 13). Taking first the case of rotation about an axis parallel to the generators, in his analysis of the motion of the liquid the author makes use of de Saint-Venant's method (§ 14): i. e. assumes the velocity potential and selects the parameters so as to obtain a simple shape of the cross-section of the cylinder. This method is used in the investigation of cavities in the shape of an elliptic cylinder (§ 15, Fig. 6) and of a triangular equilateral prism (§ 15, Fig. 7).

The same method is applied in the solution of the problem of a cylindrical cavity, of which the cross-section at right angles to the generators is bounded by two confocal ellipses. As a particular case is considered an elliptic cylinder with a rectangular partition (Fig. 8) intersecting the upper and the lower bases of the cylinder along straight lines connecting the foci of the cylinder (§ 16). Lastly (§ 17) is considered a cylindrical cavity having a cross-section in the shape of a sector of a circle. Turning to the case of rotation of the body about an axis at right angles to the generators (§ 18) the author states Stokes's problem of a cavity in the shape of a rectangular parallelepiped (§ 19) and gives a solution, by means of Bessel's functions (formula 40), of a new problem of a cavity in the shape of a right circular cylinder (§ 20).

Next is taken up the question of cavities having the shape of solids of revolution, the body itself rotating about an axis at right angles to the axis of the cavity. Prof. Joukowsky shows that the problems relating to this case are solved with the aid of associated spherical functions of the first kind (§ 21, formula 56). In his analysis he makes use both of the direct method and of de Saint-Venant's method. The last-named-

method is applied in the investigation of a conical cavity (§ 22, Figs 10 and 11), of a cavity formed by rotation of mutually intersecting hyperboles and of a ring-shaped cavity bounded by hyperboloids (§ 23, Fig. 12). As an example of direct solution is given the case of a cavity in the shape of a hemisphere (§ 24, Fig. 13).

Turning to the discussion of multiply-connected cavities Prof. Joukowsky first extends the interpretation of the motion of a rigid body about a fixed point, by means of the cone of the principal moments of momenta and of the invariable plane, to the case when the body has a gyroscope attached to it (§ 25, 26 and Fig. 14). At the end of the second chapter is considered a doubly-connected cavity in the shape of an infinitely thin closed tube of arbitrary shape (§ 27, Fig. 15); it is shown (§ 28) that for all thoroidal cavities the principal moment of the initial momentum is equal to the product of the mass of the liquid by the velocity ciruclation divided by 2π.

In Chapter III Prof. Joukowsky first considers the case of a vortical motion of the liquid in the cavities of a moving body and forms equations which must be satisfied by the components of the angular velocity of the body (§ 30, formula 4) and by the components of the vortex (§ 30, formula 5); to these he annexes the formula for the pressure of the liquid (§ 31, formula 6). The general theory is illustrated by the examples of a cylindrical cavity (§ 32) and of an elliptical cavity (§ 33); there are also described tests for an experimental verification of theoretical trajectories of particles (§ 32).

The author next proceeds to a consideration ot the motion of a liquid when friction is taken into account. After deducing the corresponding equations of motion of the body (§ 30, formula 5) and of the liquid (§ 34, formula 35) and formula for the pressure (§ 34, formula 36) the author states Helmholtz's problem of oscillations about a fixed axis, of a body containing viscous fluid within a spherical cavity and subjected to the action of a couple proportional to the angle of rotation of the body (§ 35 and § 36).

In addition, the author solves (§ 37) a new problem, that of the motion of a closed tube filled with a liquid. This problem

is investigated by the aid of Poiseuille's theory of laminar tubes and the solution is verified by means of an apparatus constructed by the auhtor (Fig. 20).

Concluding his work Prof. Joukowsky makes several remarks (§ 38) regarding the motion of a free body in the interior of which is confined a viscous liquid.

Prof. Joukowsky proves that if some initial velocities are imparted both to the body containing a cavity filled with a viscous liquid and to the liquid, the motion of the system tends to an ultimate state in which one of the principal axes of inertia of the masses considered has the direction of the principal moment of the initial momenta, and the whole system will rotate about this axis with a certain constant angular velocity as one invariable body. This result is of great importance in cosmogony.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОСТАТИКИ

(1886 г.)

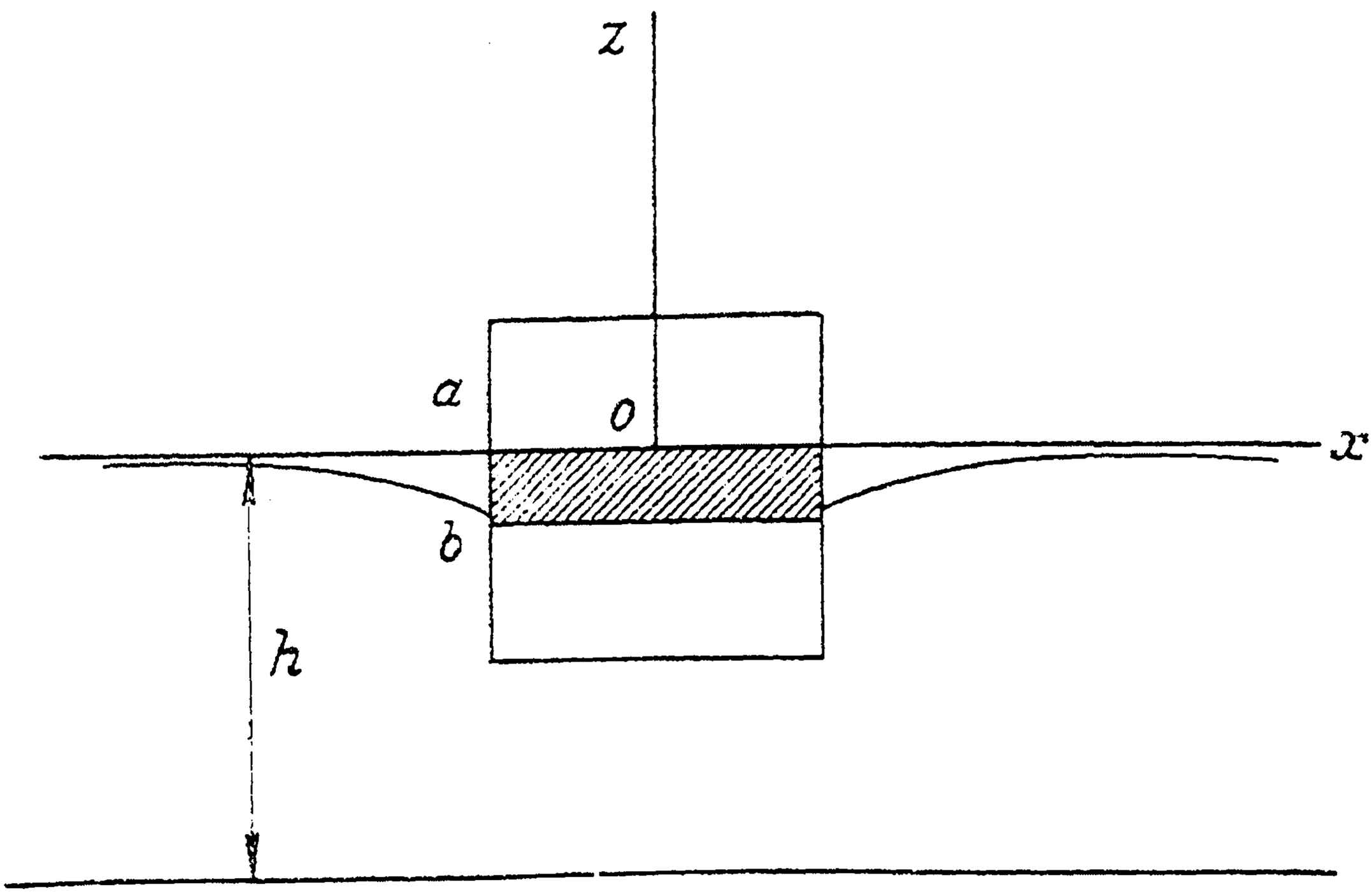
§ 1. Мы приводим здесь решение одной задачи о равновесии плавающего тела, которая находится в некоторой связи с интересными исследованиями Ф. А. Слудского о взаимном расположении поверхностей земного эллипсоида и геоида [1]. Эта задача состоит в следующем: жидкая масса плотности ρ заполняет беспредельное пространство, заключенное между двумя параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на весьма большое расстояние h; в этот слой погружается конечное твердое тело плотности $\frac{\rho}{2}$, имеющее форму прямого цилиндра с произвольным основанием, так что плоскость основания параллельна плоскостям, ограничивающим слой. Определить глубину, на которую цилиндр войдет в жидкость, и изменение свободной поверхности жидкого слоя, принимая во внимание силы взаимного притяжения между частицами жидкости и частицами жидкости и цилиндра.

§ 2. На весьма большом расстоянии от цилиндра свободная поверхность жидкости будет горизонтальна; продолжив эту горизонтальную плоскость до пересечения с цилиндром, назовем (фиг. 1) через a часть высоты цилиндра, находящуюся над ней, и через b — часть высоты цилиндра, лежащую ниже ее. Примем за начало прямоугольной системы координат центр тяжести O площади сечения цилиндра с вышеупомянутой плоскостью; ось Oz направим перпендикулярно этой плоскости в сторону от слоя, а оси Ox и Oy — по этой

---

[1] „La figure de la terre d'après les observations du pendule", Bulletin de la Société Imperiale des Naturalistes de Moscou, 1386.

плоскости. Будет показано, что разность $b - a$ есть величина порядка h^{-1}, а координата z свободной поверхности есть величина порядка h^{-2}; поэтому при составлении потенциала всех имеющихся масс, в котором пренебрегаются малые величины порядка h^{-1}, можно предположить, что $b = a$ и что свободная поверхность жидкости есть плоскость xy. Сделав это предположение, заменим массу плотности $\frac{\rho}{2}$, наполняющую погруженную часть цилиндра, двумя однородными массами плотностей ρ и $-\frac{\rho}{2}$, потом составляем потенциал трех масс: массы слоя плотности ρ, заключенного между плоскостями $z = 0$ и $z = -h$, массы плотности $\frac{\rho}{2}$, заполняющей выступающую часть цилиндра, и массы плотности $-\frac{\rho}{2}$, заполняющей погруженную часть цилиндра. Пусть U и U' будут потенциалы первой массы для точки, имеющей положительную или отрицательную координату z, а V и V' — подобные потенциалы второй и третьей массы. Известно, что беспредельный слой толщины h и плотности ρ, заключенный между



Фиг. 1.

двумя параллельными плоскостями, притягивает внешнюю точку единицы массы с постоянной силой

$$Z = -2\pi\mu\rho h,$$

где μ — коэфициент ньютонова притяжения. Этой силе соответствует потенциал

$$U = \int Z dz + C = -2\pi\mu\rho h z + C, \qquad (1)$$

в котором постоянное C представляет значение U на плоскости xy. Для внутренней точки сила притяжения сложится из противоположных сил притяжений двух слоев и будет:

$$Z' = -2\pi\mu\rho(h+z) - 2\pi\mu\rho z = -2\pi\rho\mu h - 4\pi\rho\mu z,$$

так что потенциал слоя для внутренней точки представится так:

$$U' = \int Z' dz + C = -2\pi\rho\mu h z - 2\pi\rho\mu z^2 + C, \qquad (2)$$

где C — то же, что в предыдущей формуле.

Потенциалы V и V' могли бы быть легко определены, если бы мы имели широкий цилиндр очень малой высоты, потому что тогда эти потенциалы выразились бы с помощью сферического изображения площади основания, но для определения разности $b - a$ нам нет нужды знать V и V', а достаточно только заметить, что при $b = a$ в симметричных точках верхнего и нижнего основания $V = -V'$.

Обращаемся к формуле гидростатического давления:

$$p = \rho(U' + V') + C'.$$

Для определения постоянного C' предполагаем, что при $z = 0$, $p = 0$ и замечаем, что на плоскости xy функция $U' = C$, а функция $V' = 0$ (вследствие $b = a$).

Находим $C' = -C\rho$, так что по формуле (2)

$$p = -2\pi\rho^2\mu h z - 2\pi\rho^2\mu z^2 + \rho V'. \qquad (3)$$

Полагая в этой формуле $z = -b$, найдем величину гидростатического давления на всякую точку дна цилиндра, давление же на все дно площади s будет:

$$\int p ds = 2\pi\rho^2\mu h b s - 2\pi\rho^2\mu b^2 s + \rho \int V' ds. \qquad (4)$$

Это давление должно уравновесить силу R притяжения цилиндра жидкой массой. Назвав через φ потенциал силы действия на материальную точку единицы массы, помещенную внутри цилиндра, массы жидкости и массы вещества цилиндра, представим силу R интегралом:

$$R = \frac{\rho}{2} \int\int\int \frac{d\varphi}{dz}\, dx\, dy\, dz,$$

распространенным на весь объем цилиндра, потому что введенная в эту формулу лишняя сила действия цилиндра самого на себя равна нулю. Совершив интеграцию по z, найдем, что

$$R = \frac{\rho}{2} \int\int \varphi ds - \frac{\rho}{2} \int\int \varphi' ds, \qquad (5)$$

где первый двойной интеграл распространяется на верхнее основание цилиндра, а второй — на нижнее. Так как потенциал φ изменяется непрерывно при переходе через поверхность цилиндра, то мы можем положить на основаниях цилиндра по формулам (1) и (2):

$$\varphi = -2\pi\mu\rho ha + V + C,$$

$$\varphi' = 2\pi\mu\rho hb - 2\pi\mu\rho b^2 + V' + C.$$

Вследствие этого положения и упомянутого равенства $V = -V'$ формула (5) обращается в

$$R = -\pi\mu\rho^2 h\,(a+b)\,s + \pi\mu\rho^2 b^2 s - \rho \int\int V' ds. \qquad (6)$$

Эту силу R мы должны сложить с силой давления на дно цилиндра, выраженной формулой (4), и приравнять сумму нулю:

$$\pi\mu\rho^2 h\,(b-a)\,s - \pi\mu\rho^2 b^2 s = 0.$$

Отсюда находим искомую величину:

$$(b-a) = \frac{b^2}{h}. \qquad (7)$$

§ 3. При определении вида свободной поверхности жидкости мы должны заменить формулу (3) формулой, в которой

обращено внимание на члены порядка h^{-1}. При этом мы можем составлять потенциал нашего беспредельного слоя плотности ρ, продолжая предполагать, что он ограничен параллельными плоскостями, но при составлении V' мы уже не можем считать $b = a$. Назовем разность $b - a$, выражаемую по формуле (7), через 2δ, и разобьем наш потенциал V' на потенциал ψ, принадлежащий (см. фиг. 1) верхнему и нижнему цилиндру толщины a и плотностей $\frac{\rho}{2}$ и $-\frac{\rho}{2}$, и на потенциал χ промежуточного цилиндрического слоя толщины 2δ и плотности $-\frac{\rho}{2}$. Легко видеть на фигуре, что при $z = -\delta$ $\psi = 0$ и $\frac{d\chi}{dz} = 0$, вследствие чего, принимая z за малую величину порядка высшего, нежели h^{-1}, можем разложить функцию V' в следующую строку:

$$V' = \chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta) + \ldots$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и замечая, что на свободной поверхности $p = 0$, найдем следующее уравнение свободной поверхности:

$$-2\pi\rho\mu hz - 2\pi\rho\mu z^2 + \chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta) = 0.$$

При составлении этой формулы мы принимали во внимание малые величины порядка h^{-1}, поэтому, разделив ее на h, получим формулу, верную до величин порядка h^{-2}:

$$z = \frac{1}{2\pi\rho\mu h}\left[\chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta).\right] - \frac{z^2}{h}.$$

Если отбросим здесь члены второй части, содержащие z, которые весьма малы сравнительно с величиной z, находящейся в первой части, то искомое уравнение свободной поверхности представится в следующем простом виде:

$$z = \frac{1}{2\pi\rho\mu h}\left[\chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}\delta\right]. \qquad (8)$$

Здесь χ, представляя потенциал отрицательных масс, помещенных в цилиндре бесконечно малой толщины 2δ, будет некоторой отрицательной величиной порядка h^{-1}, так что вся вторая часть формулы будет малой величиной порядка h^{-2}. Определим кривую, по которой найденная поверхность пересекает плоскость xz. Вблизи цилиндра эта кривая будет зависеть от формы его основания, но при очень большом расстоянии x от цилиндра вид ее уже не зависит от этой формы и определяется по площади s.

Действительно, при очень большом x можно положить, что

$$\chi_{z=-\delta} = -\frac{\mu\rho\delta s}{x}$$

или по формуле (7)

$$\chi_{z=-\delta} = -\frac{\mu\rho s b^2}{2xh};$$

с другой стороны, рассматривая $\frac{d\psi}{dz}$ как силу, направленную по оси Oz, находим:

$$\frac{d\psi}{dz} = 2sa\mu\,\frac{\rho}{2}\,\frac{1}{x^2}\,\frac{\delta+\frac{a}{2}}{x} = \frac{\mu\rho sab}{2x^3}.$$

Отсюда следует, что на весьма большом расстоянии от цилиндра рассматриваемая кривая может быть представлена уравнением:

$$z = -\frac{s}{4\pi h^2}\left(\frac{b^2}{x} - \frac{ab^3}{2x^3}\right).$$

Так как здесь последний член второй части может быть отброшен перед первым, то можно просто положить:

$$z = -\frac{sb^2}{2\pi h^2}\,\frac{1}{x}. \qquad (9)$$

Таким образом при приближении к нашему плавающему телу по свободной поверхности жидкости из бесконечной дали

мы заметим, что эта свободная поверхность начнет опускаться вниз (к дну цилиндра), образуя поверхность вращения равносторонней гиперболы около ее ассимптоты; при приближении же к цилиндру на конечное расстояние эта поверхность примет вид, зависящий от формы основания цилиндра.

Эта статья была напечатана в „Известиях Московского общества испытателей природы“, 1836, № 2. См. также „Бюллетень Московского общества естествоиспытателей“, 1885—1886. *Прим. ред.*

SOLUTION OF A PROBLEM IN HYDROSTATICS

The problem solved by Prof. Joukowsky is as follows: a liquid mass of density ρ fills an unlimited space enclosed between two parallel planes separated from each other by a very great distance h; a finite solid body of density $\frac{\rho}{2}$, having the form of a straight cylinder with an arbitrary base, is immersed in this layer so that the plane of the base is parallel to the planes bounding the layer; to determine the depth to which the cylinder will be immersed in the liquid and the change in the free surface of the liquid layer, taking into consideration the force of mutual attraction between the particles of liquid and the cylinder.

At a very great distance from the cylinder the free surface of the liquid will be horizontal; continue this surface up to the point of intersection with the cylinder (Fig. 1) and call a the height of the portion of the cylinder above the surface, and b the height of the portion of the cylinder below the surface.

In the potential of all masses considered and of all forces acting on the cylinder we suppose that $b = a$ and that the free surface of the liquid is the xy-plane; in this case, the potential of the cylinder will not be included in the conditions of its equilibrium, and the difference $b - a$ is given by formula (7).

To determine the shape of the free surface we have to make an approximate calculation of the potential of the cylinder. The curve along which the surface of the liquid cuts the xz-plane depends on the form of the cylinder, but, given the very great distance of x from the cylinder, its shape does not depend on that form and is given in terms of the area s by equation (9).

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ МЕТОДА КИРХГОФФА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ ПРИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ, ДАННОЙ НА НЕИЗВЕСТНОЙ ЛИНИИ ТОКА

(1890 г.)

§ 1. Краткий обзор литературы вопроса. Один из замечательных результатов современных исследований в области гидродинамики представляется нам в разрешении задач, в которых разыскивается течение жидкости в двух измерениях, стесненное частью стенками сосудов, частью неизвестной наперед линией тока, на которой обыкновенно принимают скорость данной постоянной величиной.

Начало для решения таких задач было положено в 1868 г Гельмгольцом [1], который определил вид струи жидкости, втекающей из беспредельного пространства в канал, заключенный между двумя параллельными плоскостями.

В том же году Кирхгофф [2] предложил общий прием решения подобных задач.

Прием этот дает различные течения с линиями тока, на которых скорость постоянна, в зависимости от того, какое значение приписывается некоторой произвольной функции, но не позволяет направляться на решение определенной задачи.

Ввиду этого в 1876 г. Кирхгофф видоизменил свой метод [3].

---

[1] Helmholtz, Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen, Monatsberichte der königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.

[2] Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Borchardt's Journal, Bd. 70, 1869.

[3] Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik, 21 Vor., 1876.

сведя выбор произвольной функции к конформному преобразованию некоторой области мнимого переменного

$$\zeta = \frac{1}{v}(\cos\theta + i\sin\theta),$$

где v — скорость жидкости, а θ — ее угол с осью Ox, в область мнимого переменного

$$\omega = \varphi + \psi i,$$

где φ — потенциал скоростей, а ψ — количество жидкости, протекающей между начальной и рассматриваемой линией тока. При этом область ω берется между двумя параллельными прямыми, на которых ψ постоянно, а область ζ выбирается по скорости на границах искомого течения.

Кирхгофф приложил свой прием к определению вида струи, вытекающей из весьма большого сосуда, ограниченного двумя плоскими стенками, и к определению течений беспредельного потока и струи конечной ширины, ударяющихся о плоскую стенку и образующих за ней поверхности раздела, на которых скорость постоянна. При исследовании этих задач Кирхгофф ограничивался только определением линий тока. Более детальная разработка их была сделана лордом Релеем [1] в 1876 г., напечатавшим две заметки, из которых одна посвящена вопросу о количестве истекающей жидкости и сжатии струи, а другая — вопросу о давлении беспредельного потока на погруженную в него пластинку.

В 1881 г. проф. Д. К. Бобылев [2] исследовал давление, производимое потоком беспредельной ширины на равнобокий клин. Эта задача для неравнобокого клина при потоке, направление которого образует угол с осью клина, была разрешена в 1885 г. Герлахом [3] и исследована более обстоятельно в 1886 г.

---

[1] Lord Rayleigh, Notes on Hydrodynamics. Philosophical Magazine, v. II, 1876, p. 144, „On the Resistance of Fluids". Ibid, p. 431.

[2] Д. К. Бобылев, Заметка о давлении, производимом потоком неограниченной ширины на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом. „Журнал Русского физико-химического общества", т. XIII, стр. 63.

[3] Gerlach, Einige Bemerkungen über den Widerstand, der eine ebene Platte und ein Keil von einer gleichförmigströmenden Flüssigkeit erfährt Civilingenieur, Bd. XXXI, 1885.

И. В. Мещерским [1], причем последний выполнил квадратуры, входящие в задачу, и дал таблицы для определения силы давления потока в зависимости от угла клина и от направления потока. Наконец, в недавно появившемся сочинении А. П. Котельникова [2] та же задача решается для удара струи конечной ширины, причем, переходя к пределу и допуская ширину струи бесконечно большой, А. П. Котельников получает из своих формул формулы Мещерского.

Расширение области задач, решаемых методом Кирхгоффа, было сделано Фохтом [3], который исследовал вопрос о соударении между собой двух и нескольких струй.

Критическую оценку метода Кирхгоффа мы имеем в сочинении Brillouin [4].

Во всех упомянутых работах авторы придерживались метода Кирхгоффа, и попытка видоизменить этот метод была только сделана в сочинении Планка [5], который, задавшись мыслью об освобождении метода от теории мнимого переменного с целью его распространения на пространство трех измерений, сводит задачу к отысканию функции переменного l и функции переменного m таким образом, чтобы некоторое выражение, зависящее от этих функций и их производных, было функцией от ml. Но, не говоря уже о задачах трех измерений, автор не разрешил с помощью своего метода ни одной новой задачи, а разобрал только некоторые из простейших задач Кирхгоффа.

По нашему мнению, главным недостатком метода Планка является то обстоятельство, что в нем, так же как и в первоначальном методе Кирхгоффа, мы не можем направиться на решение определенной задачи. Конформное преобразование,

---

[1] И. В. Мещерский, К вопросу о сопротивлении жидкостей, „Журнал Русского физико-химического общества“, т. XVIII, 1886.

[2] А. П. Котельников, О давлении жидкой струи на клин, Собрание протоколов секции физико-математических наук в Казани, т. VIII, 1889.

[3] Voigt, Zur Theorie der Flüssigeitsstrahlen, Mathematische Annalen, Bd. XXVIII, S. 14. 1886.

[4] Brillouin, Questions d'Hydrodynamique, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. т. I, 1887.

[5] Planck, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, Wiedemann Annalen, Bd. XXI, S. 499, 1884.

введенное Кирхгоффом, устраняет это затруднение, но зато вводит в задачу лишнюю, иногда очень трудную операцию. Ввиду того, что число известных конформных преобразований замкнутой области в область, ограниченную двумя параллельными прямыми, невелико, невелико и число задач, решаемых методом Кирхгоффа. При этом важным обстоятельством является то, что обыкновенно рассматривали область переменного ζ, ограниченную или конечным контуром, или контуром, имеющим две уходящие в бесконечность прямые, и тем стесняли течение жидкости условием: иметь не более одной нулевой критической точки[1].

В предлагаемом нами изменении метода Кирхгоффа мы даем возможность обратиться к решению определенной задачи, не прибегая наперед к конформному преобразованию областей контуров, соответствующих данной задаче, и тем устраняем, как это было в первоначальном методе Кирхгоффа, лишнюю операцию. При этом мы не стесняем задачи ни числом нулевых критических точек, ни числом струй. Вследствие этого нашим методом удалось решить много новых задач, которые не поддавались методу Кирхгоффа.

§ 2. Изложение метода Кирхгоффа. Припомним сначала, в чем состоит метод Кирхгоффа. Называя через x и y прямоугольные координаты точки жидкости и полагая

$$x + yi = z,$$

найдем для невихревого течения несжимаемой жидкости в двух измерениях:

$$\varphi + \psi i = \omega = F(z), \tag{1}$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = F'(z).$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = v \cos \theta, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v \sin \theta, \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Точка, в которой скорость равна нулю. См. наше сочинение „Кинематика жидкого тела“, Математический сборник, т. VIII, стр. 179, 1876 (или т. II настоящего Полного собрания сочинений Н. Е. Жуковского, стр. 93. *Прим. ред).*

поэтому

$$v(\cos\theta - i\sin\theta) = F'(z).$$

или

$$\frac{1}{v}(\cos\theta + i\sin\theta) = \zeta = \frac{1}{F'(z)}. \tag{3}$$

Формулы (3) и (1) показывают, что

$$\zeta = f(\omega), \tag{4}$$

где f — функция, которая должна быть выбрана по решаемой задаче. Прежде чем сделать это, поясним, в каком направлении функции φ и ψ возрастают.

Если умножим уравнения (2) соответственно на

$$dx = ds\cos\theta,$$

$$dy = ds\sin\theta,$$

где ds — элемент линии тока, и сложим, то получим:

$$d\varphi = v\,ds. \tag{5}$$

Если же умножим их соответственно на

$$dy = d\sigma\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$dx = d\sigma\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $d\sigma$ — элемент эквипотенциальной линии, и вычтем второе из первого, то найдем, что

$$d\psi = v\,d\sigma. \tag{6}$$

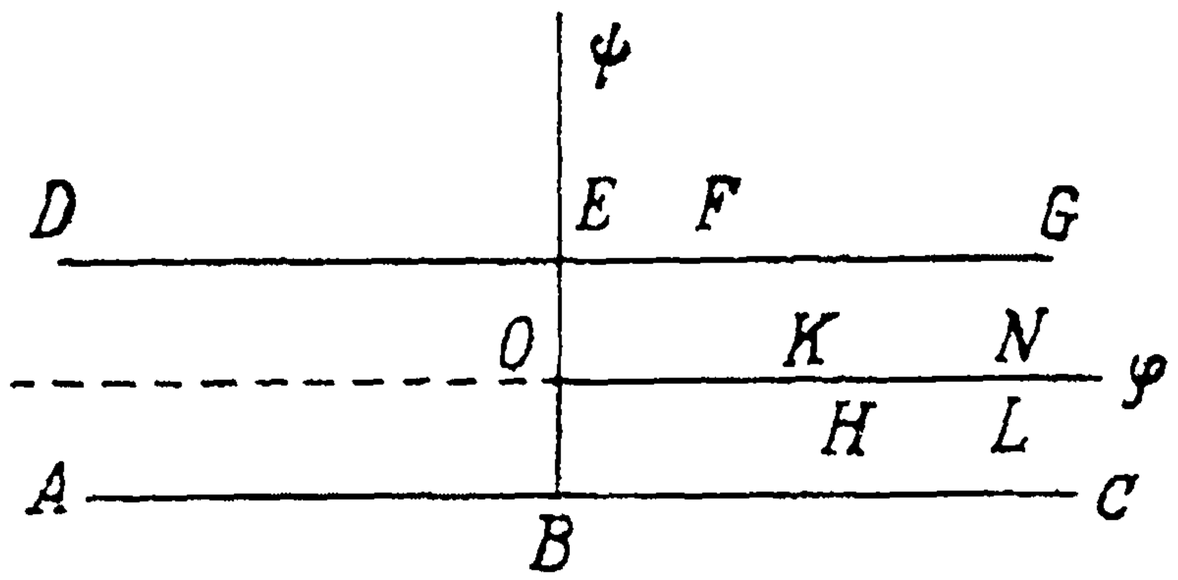
Формулы (5) и (6) показывают, что φ возрастает в направлении скорости, а ψ возрастает в том направлении эквипотенциальной линии, которое получается, *повернув вектор, представляющий скорость, около его начала на прямой угол в сторону от положительной оси Ox к положительной оси Oy*. Кроме того, из формулы (6) прямо видно, что ψ *есть количество протекающей жидкости.*

Принимая (фиг. 1) это количество на какой-нибудь линии тока равным нулю, представим эту линию на плоскости (φ, ψ)

осью абсцисс $O\varphi$. Граничные же линии тока нашего течения будут иметь уравнения:

$$\psi = -Q, \quad \psi = Q',$$

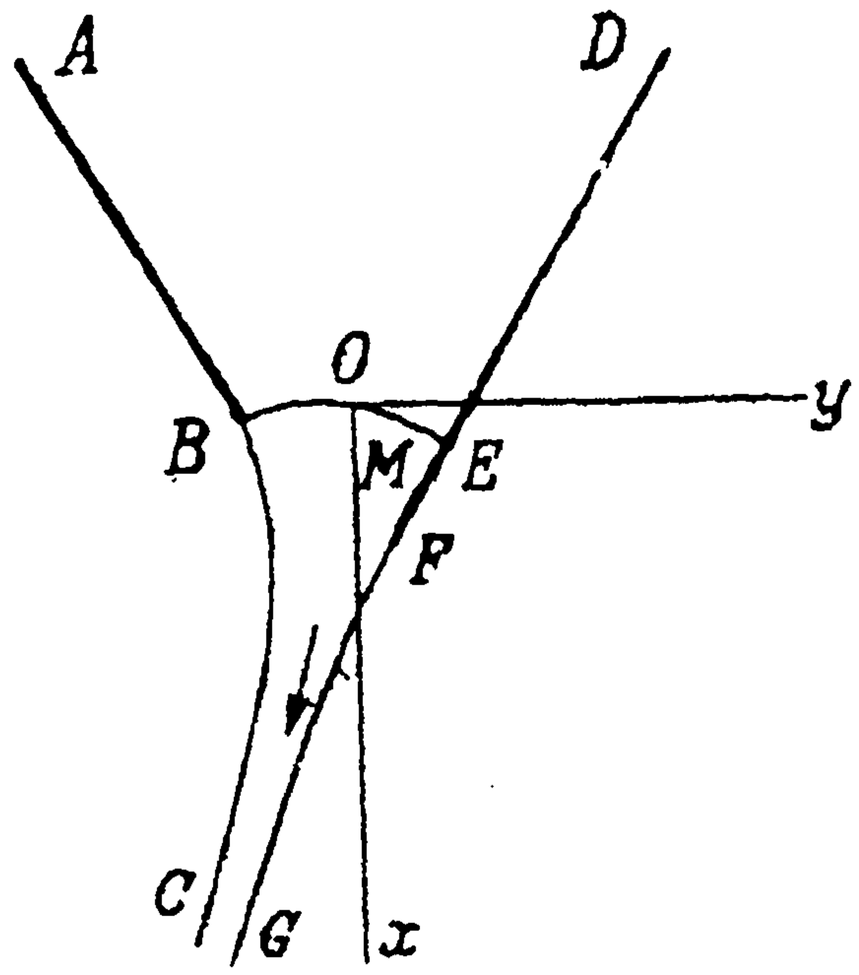
где Q и Q' — количества жидкости, протекающей между ними и нашей начальной линией тока, и представятся на фиг. 1 параллелями AC и DG оси абсцисс. Полагая, что на какой-нибудь эквипотенциальной линии $\varphi = 0$, представим ее отрезком оси ординат BE; отходя же от этой эквипотенциальной линии в направлении течения жидкости и в обратном направлении, будем иметь изменение φ от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$. Таким образом все рассматриваемое течение будет представлено на фиг. 1 областью переменного ω, заключенной между параллельными прямыми AC и DG. Для построения области переменного ζ обратимся к какой-нибудь частной задаче.



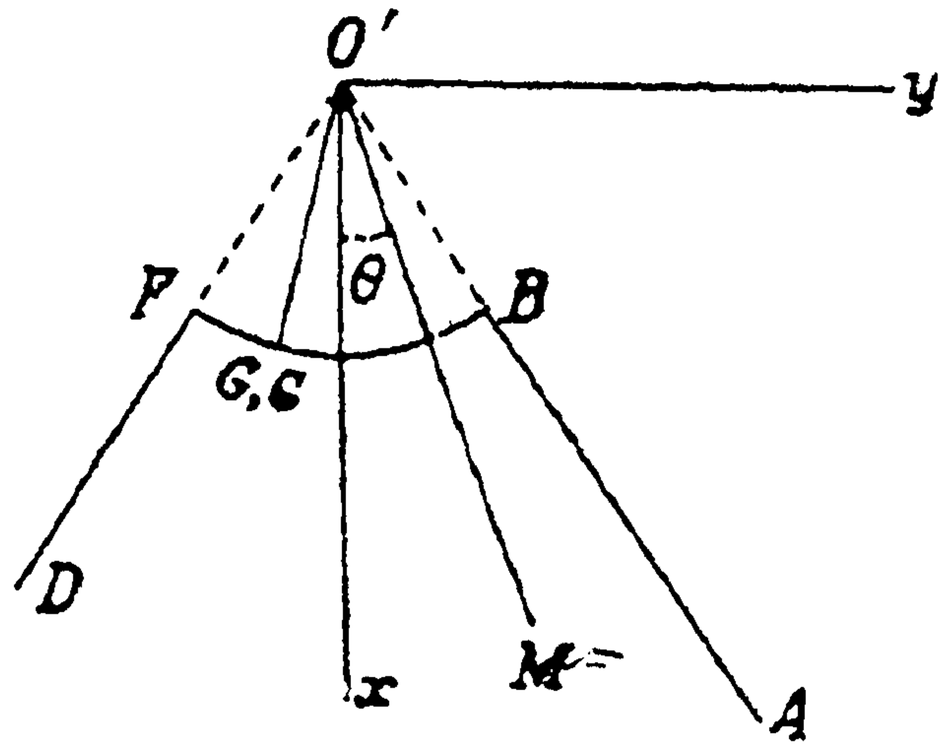
Фиг. 1.

Положим (фиг. 2), что жидкость вытекает из сосуда, ограниченного бесконечными плоскими стенками AB и DF, и образует струю $BCGF$, на граничных линиях тока которой скорость имеет постоянную величину w. Приняв $\psi = 0$ на какой-нибудь промежуточной линии тока, проходящей через O, будем по нашему правилу иметь влево от этой линии отрицательные значения ψ, а вправо — положительные, так что линии тока ABC и DFG будут на фиг. 1 параллельными прямыми ABC и DFG. Построив на фиг. 3 область переменного ζ, мы увидим, что она будет ограничена контуром $ABCGFD$, составленным дугой круга BF и продолжением двух ее радиусов BA и FD, причем точки, представленные на фиг. 3 и 2 одинаковыми буквами, суть соответственные. Радиусы BA и FD будут соответствовать стенкам сосуда и давать постоянное направление скорости, а дуги BC и FG будут соответствовать контурам струи и давать постоянную величину скорости $\left(O'B = \frac{1}{w}\right)$. Так как наибольшее значе-

ние скорости и наибольшее или наименьшее значение θ [1] может соответствовать только точкам, лежащим на фиг. 2 на границах течения, то всякая точка M, радиус-вектор которой на фиг. 3 представляет обратную скорость точки M на фиг. 2 и образует с осью Ox тот же угол θ, какой образует эта скорость, будет лежать внутри контура $ABCGFD$. Таким образом область, ограниченная на фиг. 3 этим контуром, будет областью ζ рассматриваемого течения.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

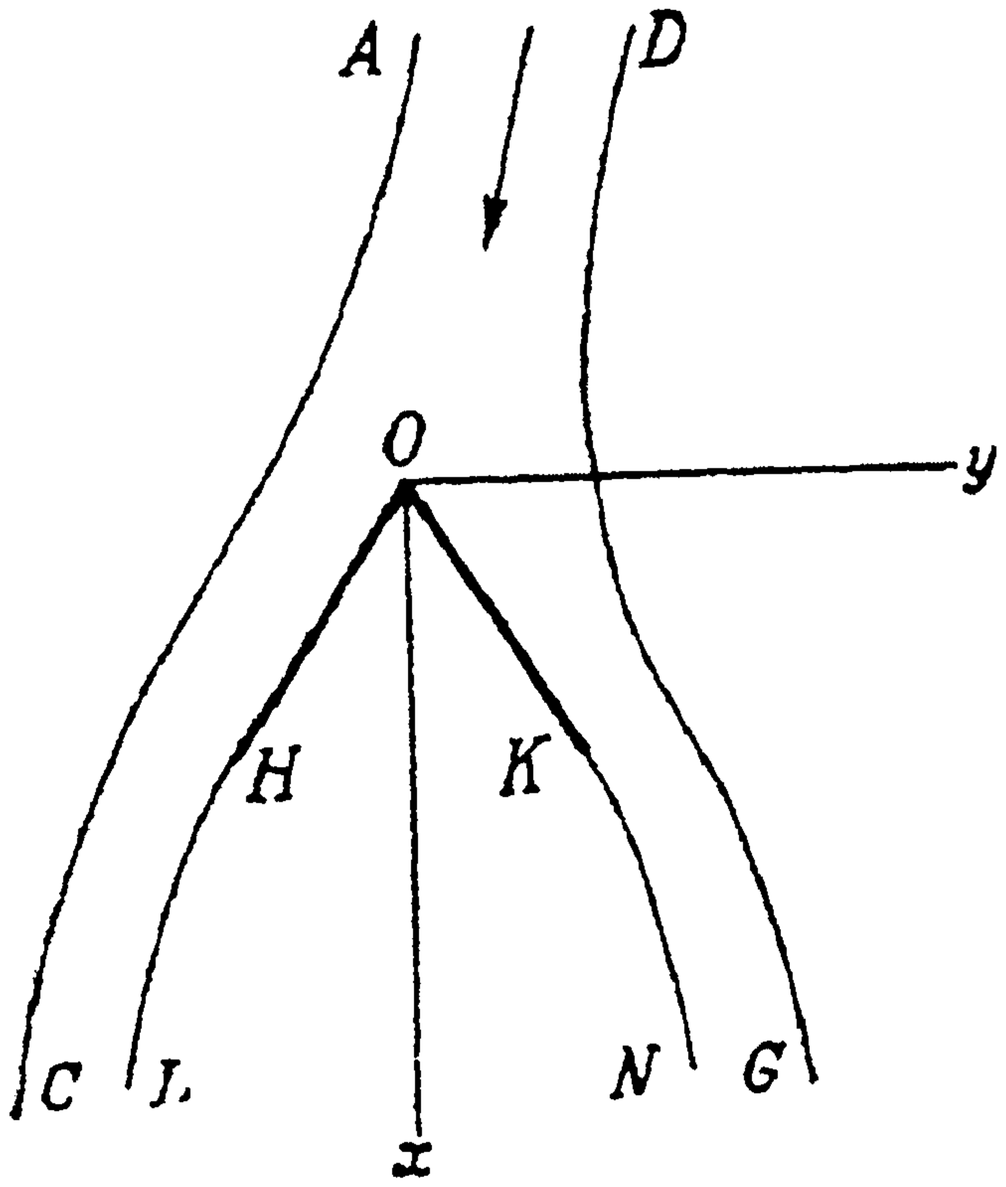
Для определения функции f мы должны будем сделать конформное преобразование области ζ (фиг. 3) в область ω (фиг. 1) так, чтобы точки A, B, C, G, F, D были соответственными в той и другой областях. Критической точкой в этом примере является бесконечно удаленная часть сосуда, что соответствует на фиг. 3 бесконечно удаленной части области ζ. Положим теперь, что струя жидкости (фиг. 4), имеющая на свободной поверхности скорость w, встречает на своем

[1] Относительно скорости см. Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik, S. 186. Что касается θ, то из наших формул (1) и (3) получаем: $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0$, а это, как известно, приводит к заключению, что функция θ может иметь maximum или minimum только на границах рассматриваемого течения жидкости.

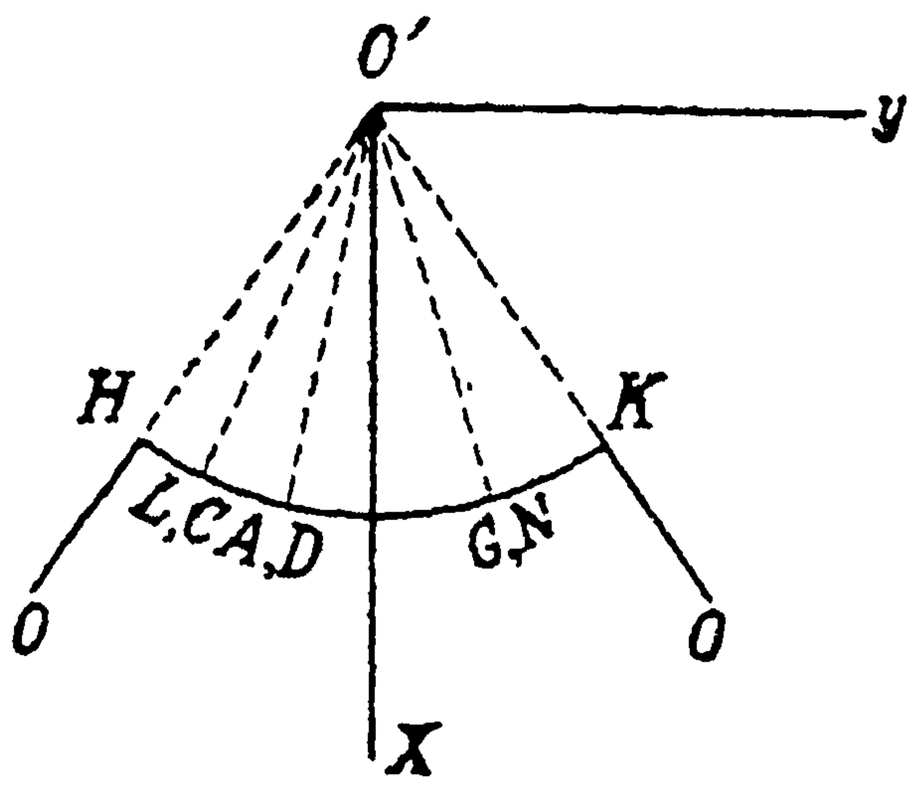
Из формул (1) и (3) следует также, что $\frac{\partial^2 \lg v}{dx^2} + \frac{\partial^2 \lg v}{\partial y^2} = 0$.

Это уравнение приводит к мысли, что наименьшее значение скорости может быть только нуль.

пути некоторый клин HOK и, ударяясь о него, разделяется на две струи. Примем за линию тока $\psi = 0$ ту линию тока, которая проходит через вершину клина O и, образуя здесь критическую точку, разделяется на две части OHL и OKN. Так как на фиг. 1 в рассматриваемом случае верхняя и нижняя части прямой $O\varphi$ соответствуют точкам жидкости, имеющим различные скорости, то следует принять, что вышеуказанная область переменного ω имеет по положительной оси $O\varphi$ разрез, причем точки K и N, лежащие на верхней стороне разреза, соответствуют на фиг. 4 правой струе, а точки H и L, лежащие на нижней стороне разреза, соответствуют на фиг. 4 левой струе. Область переменного ζ ограничивается в рассматриваемом случае, так же как в предыдущем, частью дуги круга и продолжением двух ее радиусов; только соответственные точки здесь располагаются иначе, как это можно видеть, сличая одинаковые буквы на фиг. 5 и 4. Для определения функции f мы должны будем сделать конформное преобразование областей ζ и ω, представленных на фиг. 5 и 1, так, чтобы параллели AC и DG соответствовали одноименным дугам кругов, а нижняя и верхняя части разреза $O\varphi$ представлялись контурами OHL и OKN, состоящими из радиусов и дуг круга. Конформные преобразования в обеих задачах Кирхгофф предлагает получать с помощью данного им преобразования областей луночек [1]. (До сих пор удалось применить теорию луночек во второй задаче только для случая $Q = Q'$).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

[1] Vorlesungen, S. 286. 1876.

Собственно говоря, если не считать исследования Фохта, который пользуется листами Римана, двумя вышеупомянутыми случаями исчерпываются все задачи, разобранные методом Кирхгоффа, так как случай удара на клин или пластинку беспредельного потока найдется из второго случая, полагая, как это сделал А. П. Котельников,

$$Q = Q' = \infty.$$

При этом прямые AC и DG отодвигаются в бесконечность, так что область ω будет представлена всей плоскостью (φ, ψ) с разрезом $O\varphi$; радиусы же $O'C$, $O'A$, $O'D$ и $O'G$ на фиг. 5 сливаются в один.

Когда функция f найдена, то разыскание течения жидкости уже не представляет никакого труда. Из уравнений (1), (3) и (4) имеем:

$$f(\omega) = \frac{1}{\frac{d\omega}{dz}}$$

или

$$z = \int f(\omega)\, d\omega.$$

Сравнивая в этом уравнении действительные и мнимые части, выразим x и y в функции φ и ψ. Для определения же уравнений линий тока останется только исключить из выражений для x и y величину φ.

§ 3. **Изложение метода автора.** Переходим к разъяснению нашего метода. Вместо мнимого переменного ζ мы рассматриваем мнимое переменное

$$\eta + i\vartheta = \lg w + \lg\left(\frac{w}{v}\right) + i\vartheta, \qquad (7)$$

так что

$$\eta = \lg\left(\frac{w}{v}\right). \qquad (8)$$

В силу уравнения (4) мнимое переменное $\eta + i\vartheta$ должно быть функцией от мнимого переменного $\varphi + \psi i$. Мы устанавливаем эту зависимость таким образом. Строим прямоугольные оси координат (ξ, η) и рассматриваем мнимое перемен-

ное $u = \xi + i\eta$ в области, ограниченной осью абсцисс и соответствующей положительным значениям координат η.

Потом полагаем:

$$\varphi + i\psi = \chi(u),$$
$$\vartheta + i\theta = \Phi(u). \qquad (9)$$

Здесь функции $\chi(u)$ и $\Phi(u)$ в рассматриваемой области конечны, однозначны и могут обращаться в бесконечность и изменяться скачком только при обходе по бесконечно малым полуокружностям некоторых точек, лежащих на оси ξ; в бесконечно удаленных точках области функции Φ и χ могут обращаться в ∞, причем функция Φ может быть только бесконечностью логарифмического порядка. Таким образом каждой точке u рассматриваемой области соответствуют вполне определенные значения φ, ψ, ϑ, θ.

Выразив эти переменные по ξ и η, рассмотрим семейства взаимно ортогональных изотермических линий:

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const}$$

и семейства взаимно ортогональных изотермических линий:

$$\vartheta = \text{const}, \quad \theta = \text{const}.$$

Два первые семейства линий условимся называть *образующей сетью*, а два вторые — *направляющей сетью*. На образующую сеть мы налагаем то условие, чтобы ось ξ, являющаяся границей рассматриваемого нами пространства, вся состояла из ветвей линий $\psi = \text{const}$, а на направляющую — то условие, чтобы ось ξ состояла поочередно из ветвей линий $\vartheta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$. При таком выборе сетей границы рассматриваемого течения, которые соответствуют оси ξ, будут состоять из линий тока, на которых поочередно то $\theta = \text{const}$, то $\vartheta = \text{const}$, т. е. получаются или стенки сосудов, или контуры свободных струй.

Мы удовлетворим условию, наложенному на образующую сеть, если положим:

$$\chi = F(u) + \alpha_1 \lg\left(\frac{u - \gamma_1}{\beta_1}\right) + \alpha_2 \lg\left(\frac{u - \gamma_2}{\beta_2}\right) + \alpha_3 \lg\left(\frac{u - \gamma_3}{\beta_3}\right) + \ldots, \qquad (10)$$

где $F(u)$ — некоторая алгебраическая рациональная целая функция с действительными коэфициентами[1], а α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2... суть некоторые действительные количества. В самом деле, идя по оси ξ, т. е. приписывая u действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, мы будем иметь мнимую часть в формуле (10) равной той или другой постоянной величине, почему вся ось ξ будет состоять из различных линий $\psi = \text{const}$. При этом, так как обход по всякому бесконечно малому полукругу точки $(\gamma, 0)$ дает функции χ приращение $-\pi\chi i$, то число ветвей образующей сети, составляющих ось ξ, будет на единицу более числа этих точек. Будем называть эти точки *полюсами образующей сети. Число полюсов образующей сети соответствует числу струй данной задачи* [если не считать струи с бесконечным количеством протекающей жидкости, которая соответствует функции $F(u)$], а *абсолютная величина* $\pi\alpha$ *дает количество жидкости, которое несет всякая струя*, так как приращение функция ϕ есть количество жидкости, протекающее между соответствующими линиями тока.

Для удовлетворения условия, наложенного на направляющую сеть, пишем:

$$\phi = m \int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3)\ldots}}. \qquad (11)$$

Здесь $f(u)$ есть алгебраическая рациональная функция с действительными коэфициентами, могущая иметь точки бесконечности только на оси ξ или в бесконечности, причем в последнем случае порядок ее бесконечности должен быть менее порядка бесконечности корня не менее, нежели на 1; c_1, c_2, c_3...—действительные величины; m есть величина, равная 1 или i; интеграция совершается по какому-нибудь контуру, лежащему внутри области, от некоторой постоянной точки до рассматриваемой точки u (так как все точки бесконечности и разветвления подинтегральной функции лежат

[1] $F(u)$, соответствующая струе с бесконечным количеством протекающей жидкости, не должна быть выше второй степени; в противном случае будет многозначность изображения. Эта же функция может содержать мнимое постоянное, как например, в § 10 этой работы. *Прим. ред.*

на границе рассматриваемой нами области, то значение интеграла не зависит от пути интеграции). Для простоты рассуждения возьмем начало интеграции на оси абсцисс и посмотрим, что будет, когда интегрирование совершается по этой оси. Точки (c, o) будем называть *фокусами направляющей сети.* Если число фокусов есть n и $c_1 < c_2 < c_3 \ldots$, то при изменении u от $-\infty$ до c_1 будем иметь в выражении ϕ постоянную действительную или мнимую часть, смотря по тому, будет ли мнимо или действительно $\frac{m}{(i)^n}$. Положим, что это количество действительно. Тогда при изменении u от $-\infty$ до c_1 постоянна мнимая часть функции ϕ, т. е. мы имеем $\vartheta = \text{const}$; при изменении u от c_1 до c_2 постоянной сделается действительная часть функции ϕ, и мы будем иметь $\vartheta = \text{const}$ и т. д.

Таким образом вся ось ξ будет поочередно состоять из линий направляющей сети $\theta = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$, что и было желательно. Мы видим теперь, что всякий раз, как ветвь образующей сети, лежащая на оси ξ, вся будет заключена между двумя смежными фокусами направляющей сети, вся она будет представлять или стенку сосуда, или границу свободной струи; всякий же раз, как ветвь образующей сети на оси ξ захватывает пространство с несколькими фокусами направляющей сети, она будет представлять линию тока, которая является поочередно то контуром стенок сосуда, то контуром свободной струи.

Предполагая, что все точки бесконечности функции $f(u)$ однократны, разложим ее на простые дроби:

$$f(u) = F_1(u) + \frac{A_1}{u - e_1} + \frac{A_2}{u - e_2} + \frac{A_3}{u - e_3} + \ldots, \qquad (12)$$

где $F_1(u)$ — некоторая целая и рациональная функция u, а A_1, A_2, A_3,..., e_1, e_2, e_3,.., суть действительные величины. Мы будем называть точки (e, o) *полюсами направляющей сети* и будем всегда выбирать их так, чтобы они лежали на фокальных отрезках (отрезок оси ξ между двумя смежными фокусами), на которых $\theta = \text{const}$. Тогда при обходе полюса

e направляющей сети по бесконечно малому полукругу в направлении возрастающего ξ функция Φ получает приращение

$$\frac{Am\pi i}{\sqrt{(e-c)(e-c_1)(e-c_2)\ldots}},$$

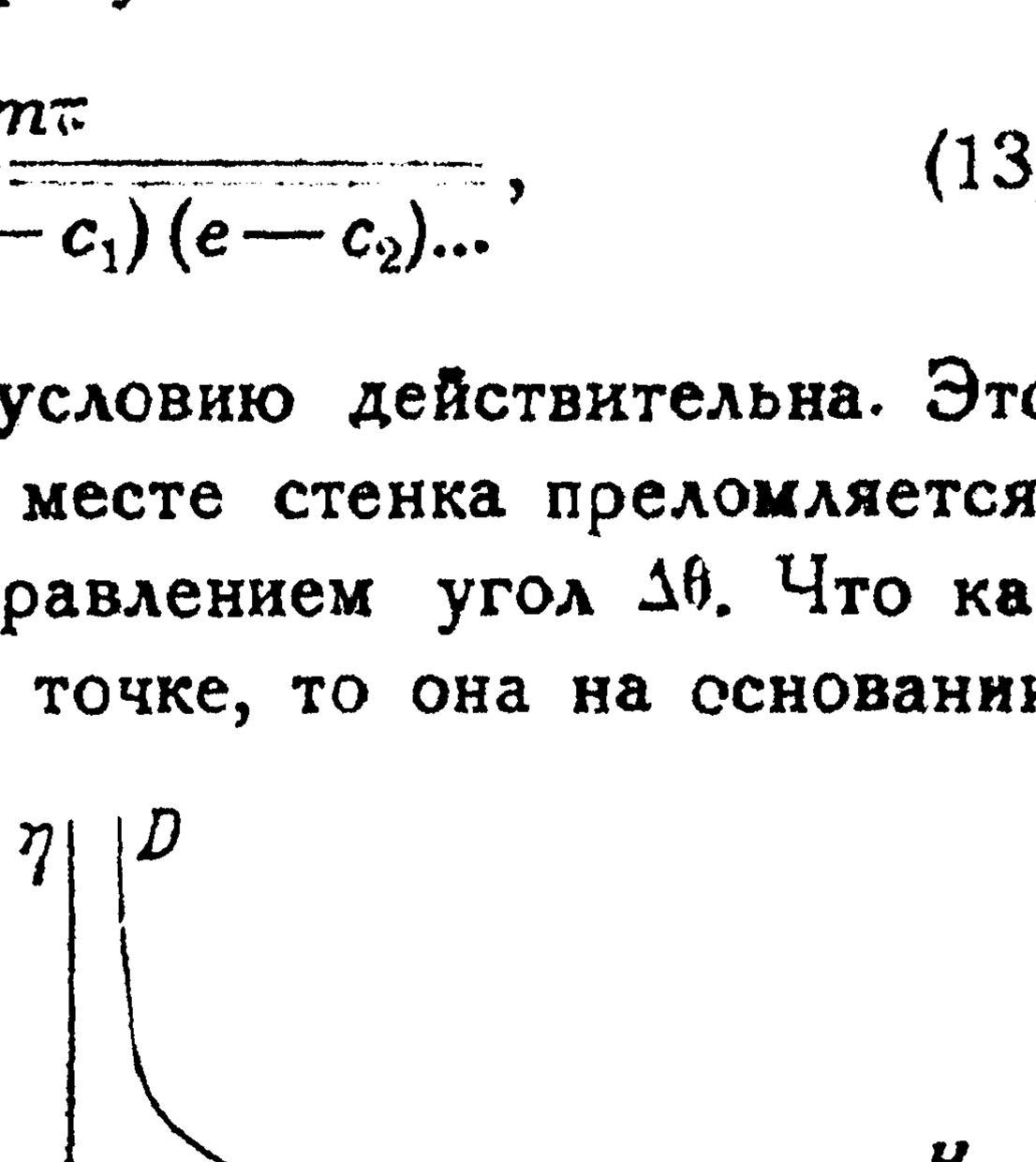
и, следовательно, угол θ изменяется при передвижении по рассматриваемой стенке сосуда сразу на

$$\Delta\theta = -\frac{Am\pi}{\sqrt{(e-c)(e-c_1)(e-c_2)\ldots}}, \qquad (13)$$

причем эта величина будет по условию действительна. Это значит, что в рассматриваемом месте стенка преломляется, образуя со своим прежним направлением угол $\Delta\theta$. Что касается величины скорости в этой точке, то она на основании формул (12) и (13) может быть представлена так:

$$\lg\frac{w}{v} = -\frac{\Delta\theta}{\pi}\Big|^{u=e} \lg(e-u) + B,$$

где B — конечная величина. Мы видим из этой формулы, что при $\Delta\theta > 0$ вторая часть стремится к $+\infty$, и v в точке e обращается в нуль; если же $\Delta\theta < 0$, то вторая часть стремится к $-\infty$, и v в точке e обращается в бесконечность. Чтобы разобрать геометрический смысл этого условия, обратимся к фиг. 6. Пусть линия $\psi = \text{const}$ образующей сети есть $\eta o \xi$, причем, идя в направлении от η к ξ, мы имеем возрастание параметра φ; тогда, по нашему правилу, переход к бесконечно близкой линии DH, на которой ψ постоянно, соответствует положительному приращению ψ. Отсюда заключаем, что, отходя от границы FPF' действительного течения жидкости внутрь ее, мы будем иметь положительное приращение ψ. Если жидкость течет в направлении FPF', то по указан-



Фиг. 6.

тимся к фиг. 6. Пусть линия $\psi = \text{const}$ образующей сети есть $\eta o \xi$, причем, идя в направлении от η к ξ, мы имеем возрастание параметра φ; тогда, по нашему правилу, переход к бесконечно близкой линии DH, на которой ψ постоянно, соответствует положительному приращению ψ. Отсюда заключаем, что, отходя от границы FPF' действительного течения жидкости внутрь ее, мы будем иметь положительное приращение ψ. Если жидкость течет в направлении FPF', то по указан-

ному правилу построенное нами течение должно получиться от стенки FPF' вверх. Пусть P будет полюс направляющей сети, в котором θ прирастает на $\Delta\theta$; ему будет соответствовать на стенке сосуда вершина P угла $FPF' < \pi$, если $\Delta\theta > 0$, или угла $FPF'' > \pi$, если $\Delta\theta < 0$. В первом случае скорость в точке P будет равна нулю, а во втором она будет равна бесконечности. Таким образом *всякий раз, как стенки сосуда, составляющие одну и ту же линию тока, образуют между собой угол менее двух прямых, в вершине этого угла получается критическая точка со скоростью нуль; всякий же раз, как этот угол тупой, скорость будет равна* ∞ *и невозможно течение жидкости, при котором обе стенки составляют одну линию тока.*

Когда направляющая и образующая сети заданы, то мы знаем величину и направление скорости для данного значения φ любой линии тока. Действительно, идя в плоскости (ξ, η) по кривой $\psi = \text{const}$, будем по направляющей сети определять для всякой точки кривой значения θ и ϑ. Для решения различных задач на течения жидкости с образованием неизвестных наперед свободных поверхностей струй имеют собственно интерес выражения θ и ϑ в функции φ на границе течения, так как, зная θ на свободной поверхности струи, мы определяем вид поверхности струи, а зная ϑ на стенке сосуда, мы определяем давление жидкости на эту стенку.

Умножив уравнение (5) соответственно на $\cos\theta$ и $\sin\theta$, будем иметь для определения вида поверхностей струй уравнения:

$$dx = \frac{1}{w} e^{\vartheta} \cos\theta \, d\varphi,$$

$$dy = \frac{1}{w} e^{\vartheta} \sin\theta \, d\varphi.$$

При этом, если на контуре струи постоянная скорость есть w, то $e^{\vartheta} = 1$ и уравнения обращаются в

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{w} \cos\theta \, d\varphi, \\ dy &= \frac{1}{w} \sin\theta \, d\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Написав же величину гидродинамического давления p при отсутствии внешних сил и при давлении, равном нулю для $v = w$, получим:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}(w^2 - v^2) = \frac{vw}{2}\left(\frac{w}{v} - \frac{v}{w}\right)$$

или

$$p = \frac{\rho}{2} vw\,(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}),$$

где ρ — плотность жидкости.

Определяем из уравнения (5) ds и, умножив на него обе части написанного уравнения, берем от них интеграл вдоль всей стенки. Получим величину всего давления P на стенку:

$$P = pw \int \sin h\,\vartheta\, d\varphi. \tag{15}$$

К этой формуле надо еще прибавить формулу, выражающую длину стенки, которая получается, интегрируя уравнение:

$$ds = \frac{d\varphi}{v} = \frac{1}{w} e^{\vartheta}\, d\varphi.$$

Она будет:

$$s = \frac{1}{w} \int e^{\vartheta}\, d\varphi. \tag{16}$$

Так как при переходе по оси ξ через фокус величина ϑ изменяется непрерывно, то при сходе со стенки сосуда поверхность струи соприкасается с этой стенкой. Что касается кривизны контура струи в этом месте, то, как показал Кирхгофф, она равна бесконечности, т. е. радиус кривизны контура струи в этом месте равен нулю. С нашей точки зрения эту теорему можно доказать так. Из формулы (7) следует, что кривые $\vartheta = \text{const}$ и $v = \text{const}$ образуют на плоскости (x, y), к которой мы относим течение жидкости, изотермическую сеть.

Первый диференциальный параметр h функций ϑ и ψ может быть с помощью криволинейных координат φ и ψ, которым

соответствует первый диференциальный параметр v, представлен в таком виде:

$$h = \sqrt{v^2\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + v^2\left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2}.$$

Но касательная к линии тока образует с осью Ox угол θ, а касательная к эквипотенциальной линии — угол $\theta + \frac{\pi}{2}$, поэтому радиусы кривизны ρ и ρ' этих линий выразятся так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{d\theta}{d\sigma},$$

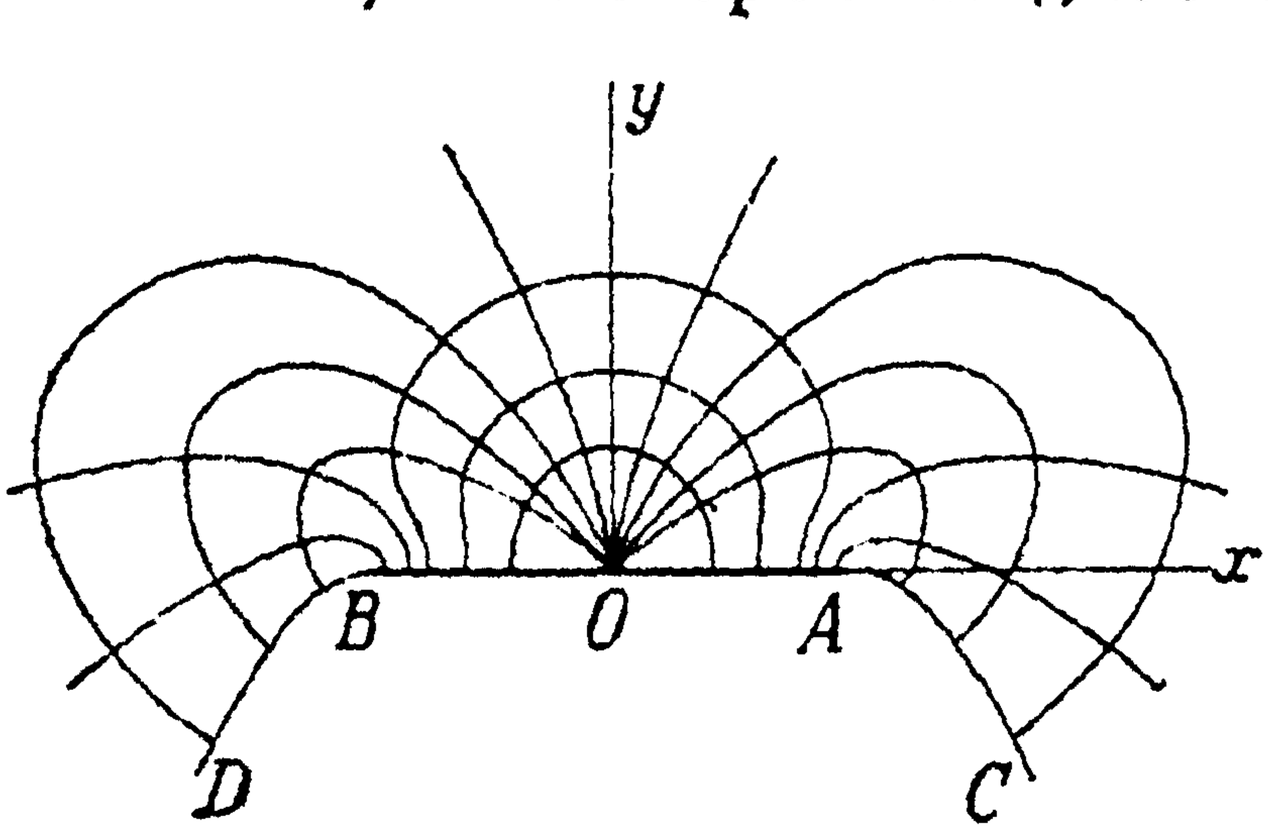
или по формулам (5) и (6)

$$\frac{1}{\rho} = v\frac{d\theta}{d\varphi}, \qquad \frac{1}{\rho'} = v\frac{d\theta}{d\psi}.$$

Отсюда следует, что

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho'}\right)^2}.$$

Для упомянутой изотермической сети $\vartheta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ точка A, в которой жидкость покидает стенку (фиг. 7), является критической точкой с бесконечным значением диференциального параметра h. Ибо, как видно на фигуре, линии $\vartheta = \text{const}$ должны быть перпендикулярны к стенке OA, а одна из них должна слиться с контуром струи AC; точно так же линии $\theta = \text{const}$ должны быть перпендикулярны AC, а одна из них должна слиться с OA. Таким образом в точке A имеем $h = \infty$. Но, идя по контуру струи от точки C к точке A, мы будем иметь, несмотря на беспредельное возрастание h, постоянно



Фиг. 7.

$$\frac{1}{\rho'} = v\frac{d\theta}{d\psi} = v\frac{d\vartheta}{d\varphi} = 0,$$

поэтому величина ρ при приближении к точке A по линии CA будет стремиться к нулю.

§ 4. Истечение жидкости из сосудов, ограниченных двумя плоскими бесконечными симметричными стенками. Мы приложим сначала наш метод исследования к задачам, уже разобранным методом Кирхгоффа, для того чтобы читатель мог сравнить простоту анализа в том и другом способах, а потом перейдем к решению многих новых задач.

Полагаем в формуле (11):

$$c_1 = -c_2 = c,\ c_3 = c_4 = \ldots = 0^{1)},\ m = i,\ f(u) = -\frac{cq}{u},$$

где q — некоторое отвлеченное число, и берем за нижний предел интеграции $u = \infty$. Получаем:

$$\varphi = -qi\int \frac{c}{u}\,\frac{du}{\sqrt{u^2-c^2}} = qi\int \frac{d\left(\frac{c}{u}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{u}\right)^2}} =$$

$$= qi \arcsin\left(\frac{c}{u}\right). \qquad (17)$$

Отсюда по формуле (9) следует, что

$$\frac{c}{u} = \sin\left(\frac{\theta}{q} - i\frac{\vartheta}{q}\right).$$

Положим:

$$u = r(\cos\lambda + i\sin\lambda),$$

где r и λ суть полярные координаты точки (ξ, η) при полярной оси, направленной по $O\xi$, и при полюсе в O. Тогда при сравнении действительных и мнимых частей получаем:

$$\frac{c}{r}\cos\lambda = \sin\frac{\theta}{q}\cosh\frac{\vartheta}{q},$$
$$\frac{c}{r}\sin\lambda = \cos\frac{\theta}{q}\sinh\frac{\vartheta}{q}. \qquad (18)$$

---

[1]) Точнее было бы сказать, что подрадикальная функция в формуле (11) сводится в этой задаче к двум первым двучленам, причем

$$c_1 = -c_2 = c.$$

Прим. ред.

Чтобы выяснить, какова будет построенная нами направляющая сеть, заметим, что в случае связи:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi}{c} &= \sin\frac{\theta}{q}\cosh\frac{\eta}{q},\\ \frac{\eta_1}{c} &= \cos\frac{\theta}{q}\sinh\frac{\eta}{q},\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

семейства линий $\eta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ суть однофокусные эллипсы и гиперболы с фокусным расстоянием $2c$. Уравнения их таковы:

$$\frac{\xi^2}{\cosh^2\frac{\eta}{q}} + \frac{\eta_1^2}{\sinh^2\frac{\eta}{q}} = c^2,$$

$$\frac{\xi^2}{\sin^2\frac{\theta}{q}} - \frac{\eta_1^2}{\cos^2\frac{\theta}{q}} = c^2.$$

При этом параметр $\frac{\theta}{q}$ представляет угол, который асимптота рассматриваемой ветви гиперболы образует с осью η_1, считаемый положительным, когда он отсчитывается от этой оси вправо, а параметр $\frac{\eta}{q}$ связан с эксцентриситетом e соответственного эллипса условием:

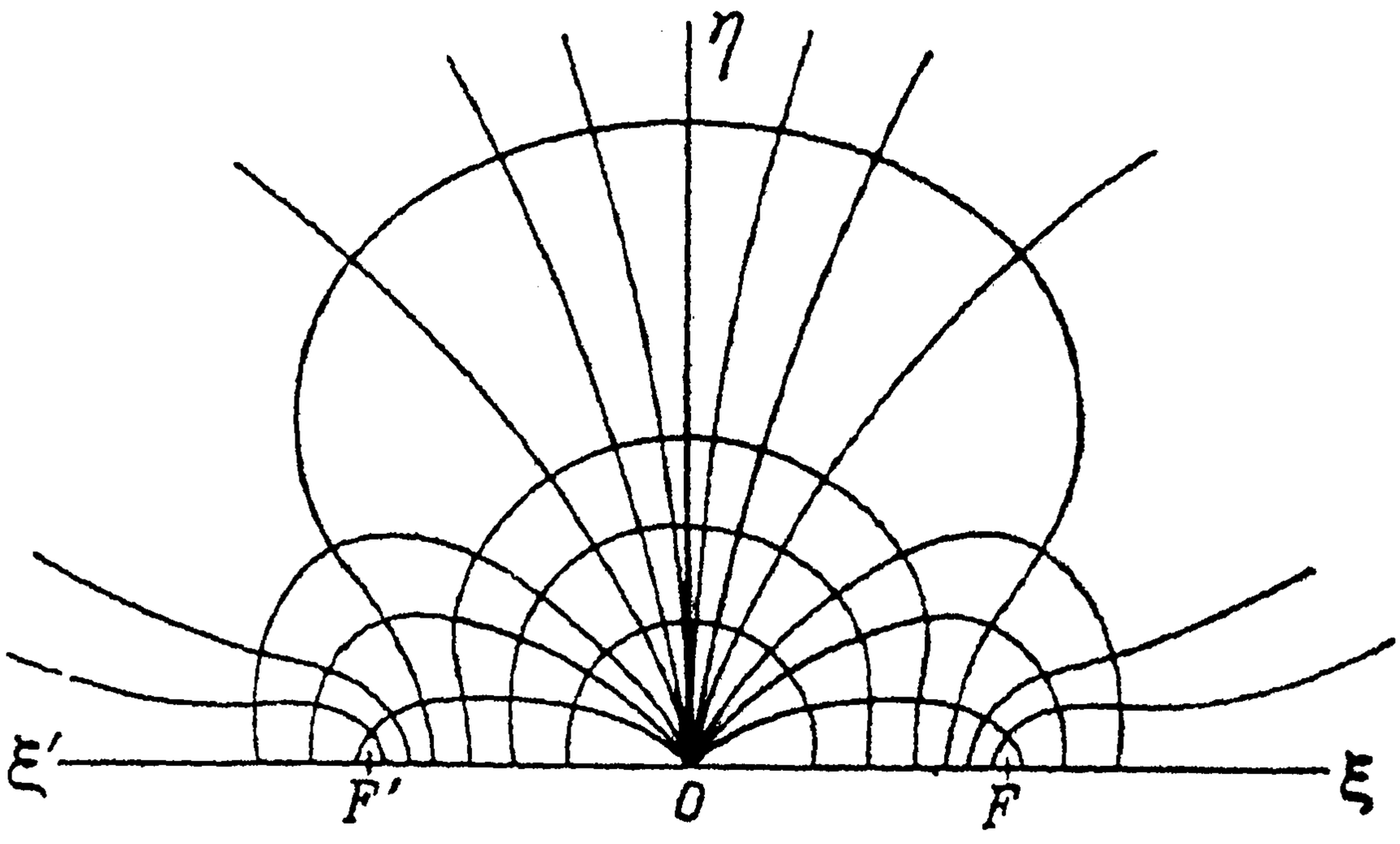
$$\cosh\frac{\eta}{q} = \frac{1}{e}$$

и может получать всякие положительные значения от 0 до ∞.

Сравнение формул (19) и (18) показывает, что найденная нами направляющая сеть получается из упомянутой эллиптической сети с помощью преобразования посредством обратных радиусов-векторов, причем центром преобразования является начало координат осей $\xi\eta_1$, и произведение радиусов-векторов должно равняться c^2.

Все ветви гипербол обратятся при этом (фиг. 8) в кривые, проходящие через точку O и пересекающие под прямым углом ось $O\xi$ вне фокального отрезка FF'. При этом касательные, проведенные к этим кривым в точке O, будут образовывать с осью $O\eta$

углы, представляющие значение параметра $\frac{b}{q}$. Ветви гипербол, бесконечно близкие к оси $O\eta$, обратятся в кривые, которые, направляясь из точки O по этой оси, охватят в бесконечности всю рассматриваемую область. Все эллипсы обратятся в замкнутые кривые, пересекающие фокальный отрезок FF' в двух симметричных точках, причем эллипс, кото-



Фиг. 8.

рый совпадал с фокальным отрезком FF', представится бесконечными отрезками оси абсцисс $F\xi$ и $F'\xi'$ и кривой, охватывающей в бесконечности всю рассматриваемую область. Таким образом построенная направляющая сеть дает для всех бесконечных точек рассматриваемой области $b = 0$ и $b = 0$.

Для построения образующей сети полагаем в формуле (10):

$$F(u) = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \beta_1 = c,\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0.$$

Получаем:

$$\gamma = \alpha \lg \frac{u}{c}$$

и

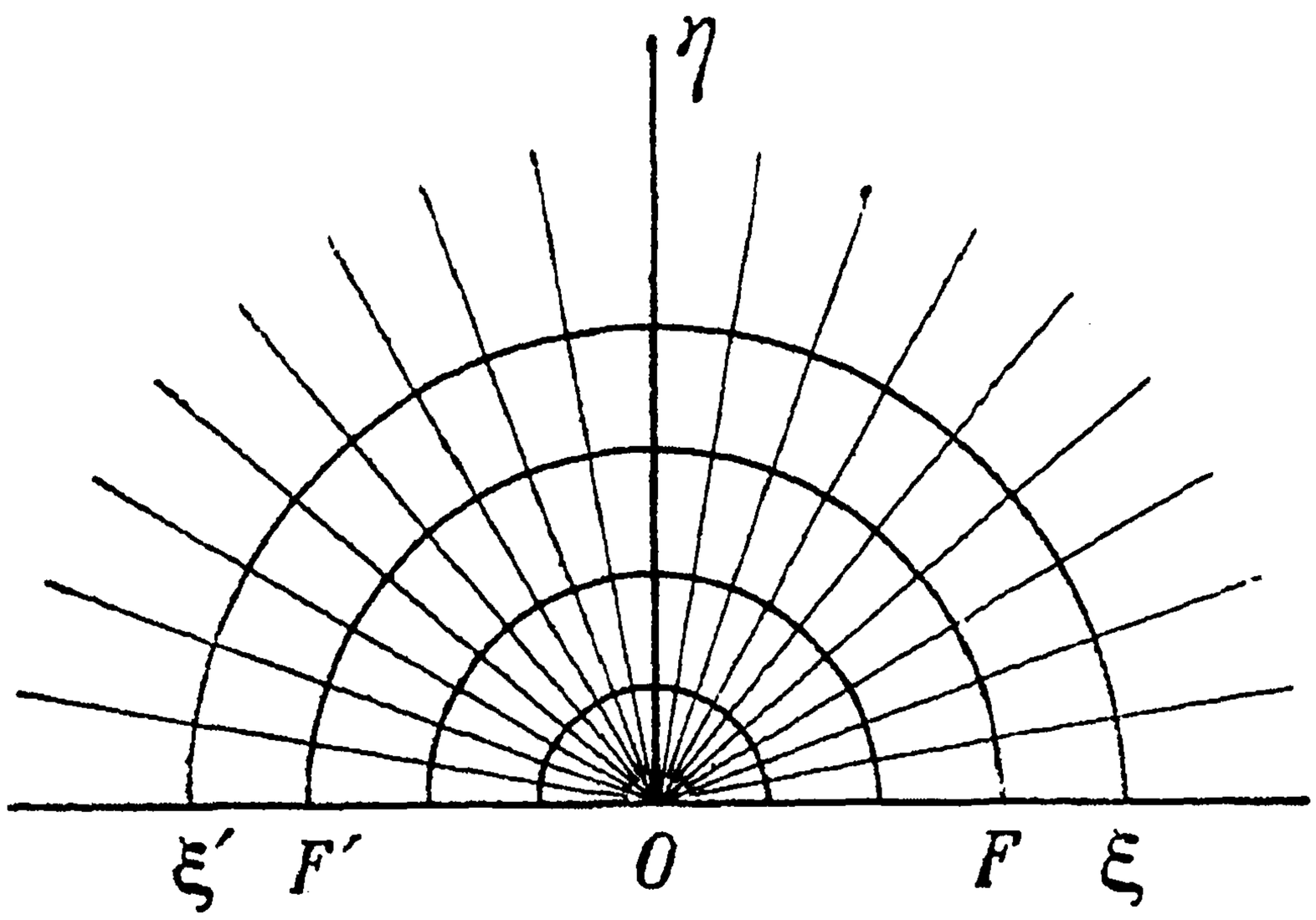
$$\varphi = \alpha \lg \frac{r}{c}, \qquad \psi = \alpha\lambda. \tag{20}$$

Это показывает (фиг. 9), что образующая сеть представляется системой концентрических кругов и их радиусов.

При $\lambda = 0$ имеем $\psi = 0$, а при $\lambda = \pi$ имеем $\psi = \alpha\pi$, так что все количество протекающей жидкости есть:

$$Q = \pi\alpha. \tag{21}$$

Предположим теперь, что фиг. 8 и 9 друг на друга наложены так, что оси $\xi\eta$ обеих фигур совпадают; тогда для всякого данного φ и ψ на образующей сети мы сейчас же най-

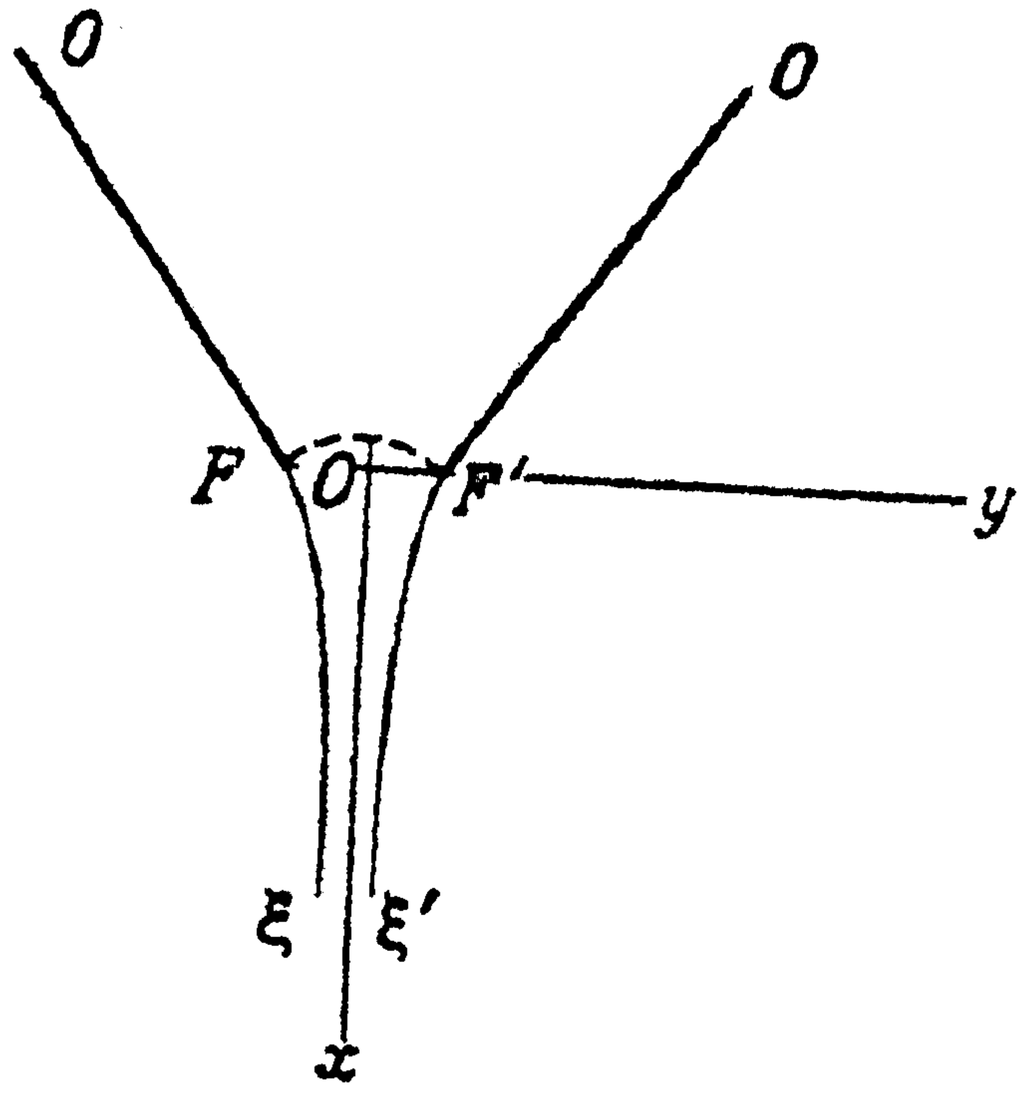


Фиг. 9.

дем величины ϑ и θ по направляющей сети. Пусть мы идем по линии образующей сети $\psi = 0$, которая в действительном течении жидкости соответствует одной из граничных линий тока. На наших совмещенных плоскостях $\xi\eta$ это соответствует перемещению по оси $O\xi$. Если мы перемещаемся от начала O в положительную сторону оси абсцисс, то это соответствует по формулам (20) изменению параметра φ от $-\infty$ до $+\infty$, причем $\varphi = 0$ в точке F; на линии же тока это соответствует перемещению в направлении течения жидкости.

На отрезке оси абсцисс OF будем иметь $\frac{\vartheta}{q} = \frac{\pi}{2}$ или $\vartheta = q\frac{\pi}{2}$, а на бесконечном ее отрезке $F\xi$ будем иметь $\vartheta = 0$. В действительном течении жидкости это соответствует (фиг. 10) стенке сосуда OF, наклоненной к оси Ox под углом $q\frac{\pi}{2}$, и контуру струи $F\xi$. Согласно данному нами правилу, при отступлении от начертанной линии тока $OF\xi$ направо, мы

будем иметь возрастание ψ, поэтому исследуемое течение располагается направо от этой линии тока. Если будем теперь перемещаться на фиг. 8 и 9 по оси абсцисс от точки O влево, т. е. пойдем по линии направляющей сети $\psi = \pi x$, то будем иметь изменение параметра φ опять от $-\infty$ до $+\infty$ при $\varphi = 0$ в точке F', и на линии тока действительного течения мы будем перемещаться в направлении движения жидкости. На отрезке оси абсцисс OF' мы будем иметь $\frac{\theta}{q} = -\frac{\pi}{2}$ или $\theta = -q\frac{\pi}{2}$, на бесконечном отрезке $F'\xi'$ будем иметь $\theta = 0$. В действительном течении жидкости это соответствует стенке сосуда OF', наклоненной к оси Ox под углом $-q\frac{\pi}{2}$, и контуру струи $F'\xi'$. Мы получили таким образом решение задачи об истечении в пустоту жидкости, находящейся под некоторым напором в сосуде $OFF'O$, стенки которого симметричны относительно оси. На фиг. 10 эта ось симметрии принята за ось Ox, а начало координат взято на прямой FF', соответствующей отверстию сосуда. На основании сказанного выше на ортогонале FF' к линиям тока мы будем иметь $\varphi = 0$.



Фиг. 10.

Обратимся к определению вида контура струи и количества вытекающей жидкости.

Пишем по уравнению (14):

$$dy = \frac{1}{w}\sin\theta\, d\varphi.$$

Далее, полагаем в первом уравнении (18) $\theta = 0$, $\lambda = 0$ и пишем его рядом с первым уравнением (20):

$$\frac{c}{r} = \sin\frac{\theta}{q}, \qquad \varphi = \alpha \lg\frac{r}{c}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = -\alpha \lg \sin \frac{\theta}{q}, \qquad d\varphi = -\frac{\alpha}{q} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right) d\theta.$$

Подставляем эту величину $d\varphi$ в формулу для dy и интегрируем:

$$y = -\frac{\alpha}{qw} \int \sin\theta \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right) d\theta + \text{const.}$$

Произвольное постоянное определяем под условием, что в точке F имеем $y = -b$, где $2b$ — ширина отверстия сосуда и $\theta = \frac{\pi}{2} q$.

Получаем:

$$b + y = \frac{\alpha}{qw} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2} q} \sin\theta \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right) d\theta. \tag{22}$$

Эта формула устанавливает связь между ординатой y и углом θ наклонения касательной контура $F\xi$ к оси Ox, поэтому ее можно рассматривать как уравнение контура $F\xi$. Что касается контура $F'\xi'$, то он будет представлять кривую, симметричную $F\xi$. Уравнение (22) служит для определения количества Q вытекающей жидкости. В бесконечных частях струи мы имеем:

$$\theta = 0, \quad y = -\frac{Q}{2w}.$$

Подставляя эти значения в формулу (22) и заменяя в ней коэфициент α его значением, определенным из формулы (21), получаем:

$$b - \frac{Q}{2w} = \frac{Q}{\pi q w} \int_{0}^{\frac{\pi q}{2}} \sin\theta \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right) d\theta.$$

Определяем отсюда Q и вводим при этом новое переменное интеграции, положив $\frac{\theta}{q} = \sigma$:

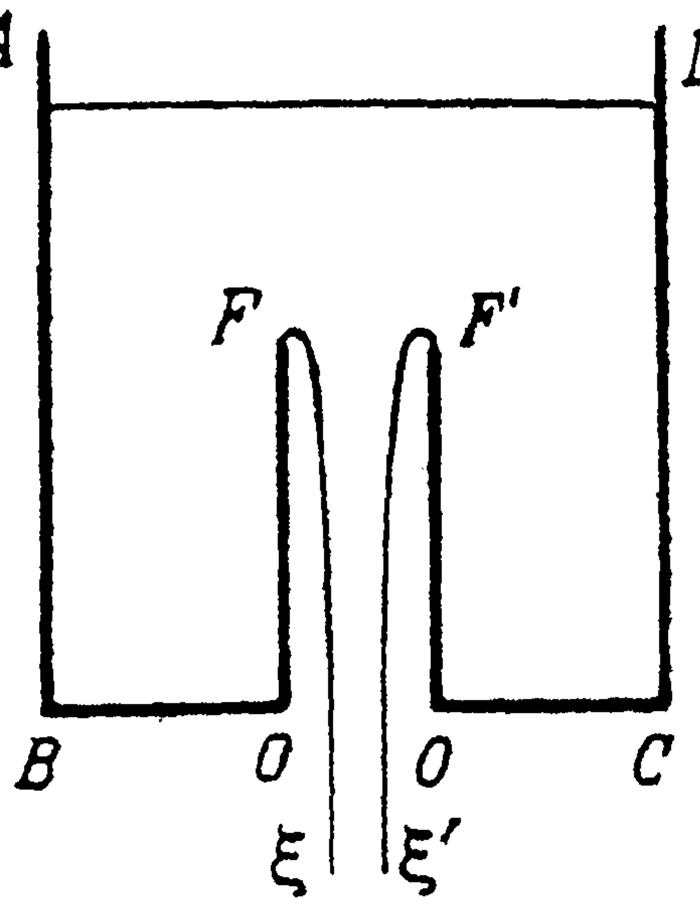
$$Q = 2bw\pi : \left[\pi + 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(q\sigma) \operatorname{ctg}\sigma \, d\sigma\right]. \tag{23}$$

Эта формула позволяет определять количество вытекающей жидкости при различных значениях q.

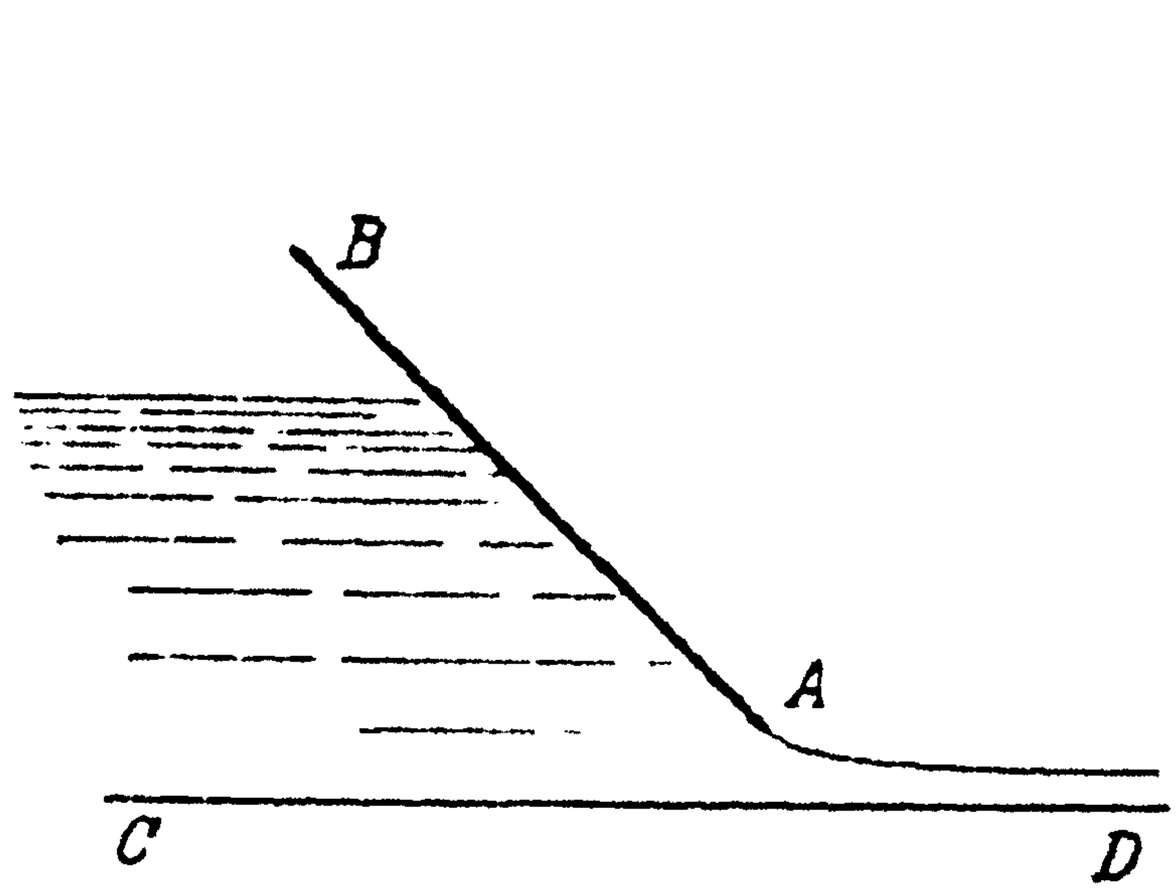
Для $q = 1$, т. е. при истечении из отверстия, сделанного в плоском дне весьма большого сосуда, имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sigma\, d\sigma = 1,$$

$$Q = \frac{\pi}{\pi + 2} 2bw = 0{,}61 \cdot 2bw. \tag{24}$$



Фиг. 11.



Фиг. 12.

При $q = 2$ имеем (фиг. 11) разобранное Релеем истечение жидкости из весьма большого сосуда $ABCD$ в отверстие между двумя параллельными плоскостями OF и OF', перпендикулярными к стенке сосуда BC и проникающими внутрь его. В этом случае

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\sigma\, d\sigma = \frac{\pi}{2},$$

$$Q = bw, \tag{25}$$

что вполне согласно с опытом Борда.

При $q = \frac{1}{2}$ имеем истечение жидкости из сосуда, стенки которого наклонены к оси симметрии под углом в 45°. Если заменим эту ось симметрии, которая соответствует линии тока, неподвижной стенкой CD, то будем иметь истечение

жидкости из впуска с напором при угле наклонения щита AB (фиг. 12) в $45°$ к горизонту.

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\sigma}{2}\cos\sigma\, d\sigma}{\sin\sigma} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2\frac{\sigma}{2}-1}{\cos\frac{\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{2} = \sqrt{2} - \lg\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}, \\ \frac{Q}{2} &= \frac{\pi}{\pi+1{,}07}\, bw = 0{,}75\ \ bw, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

здесь $\frac{Q}{2}$ есть количество жидкости, вытекающей из впуска. Мы видим, что это количество более того, которое вытекло бы при вертикальном щите.

§ 5. **Удар беспредельного потока о симметричный клин, ось которого направлена по направлению течения потока.** За направляющую сеть в этой задаче принимаем направляющую сеть, изображенную на фиг. 8, а для получения образующей сети полагаем в формуле (10):

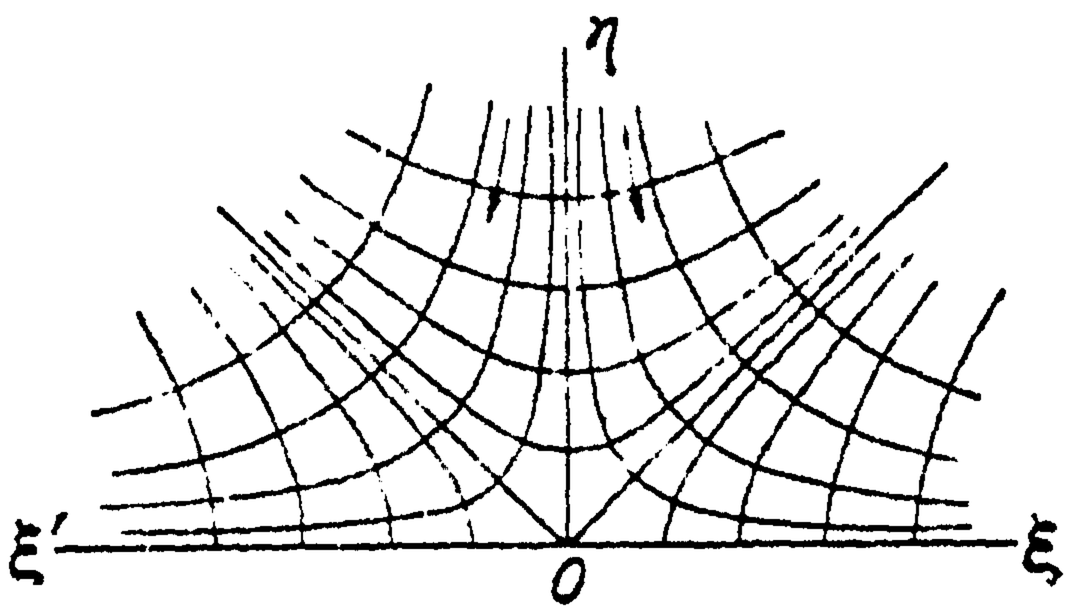
$$F(u) = ku^2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0.$$

Это дает нам:

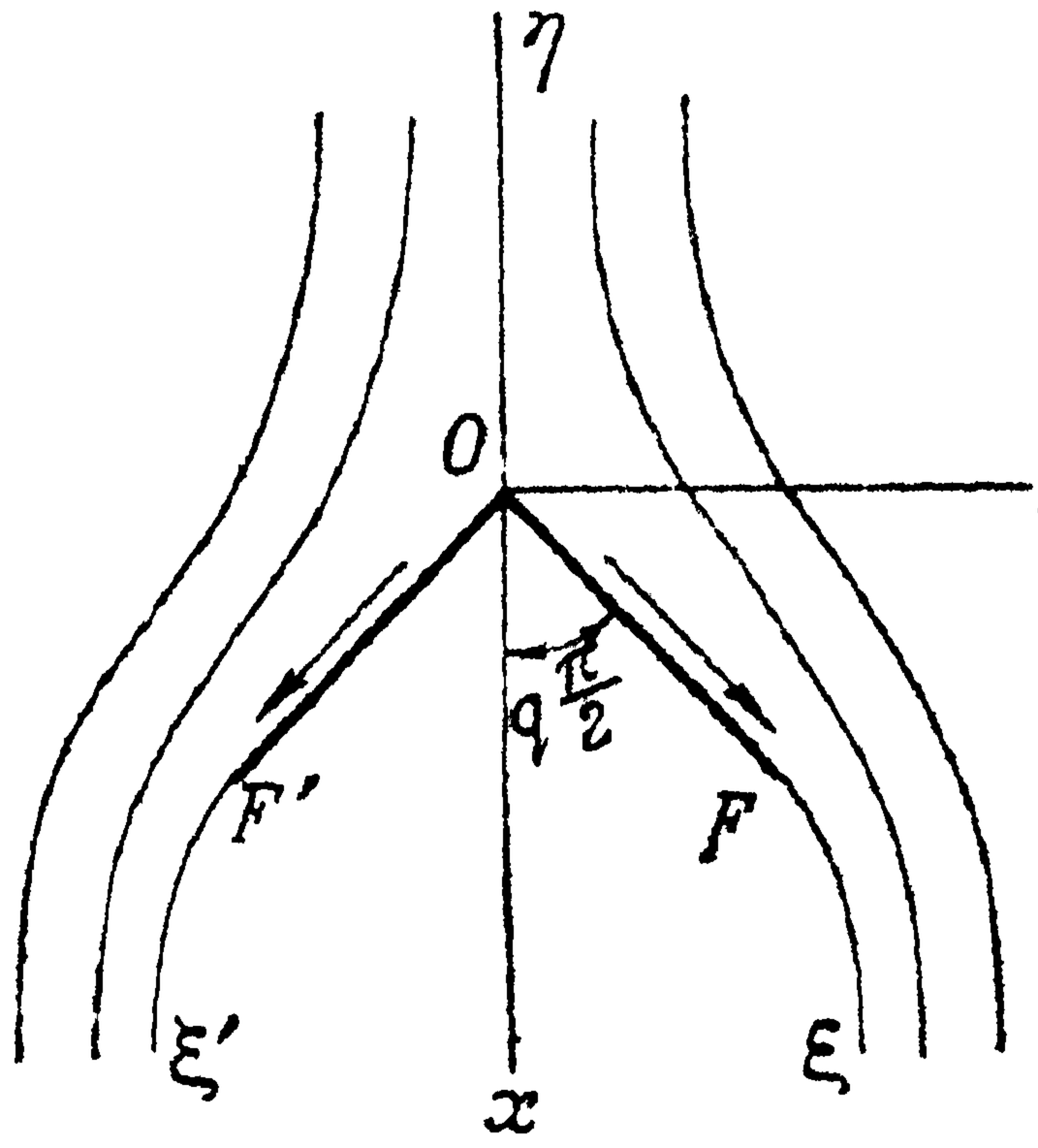
$$\chi = ku^2, \quad \varphi = k(\xi^2 - \eta^2), \quad \psi = 2k\xi\eta. \qquad (27)$$

Линии $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ представляют семейства взаимно ортогональных равносторонних гипербол (фиг. 13). При $\psi = 0$ имеем две гиперболы, сливающиеся сначала с осью $O\eta$ и поворачивающиеся в точке O под прямым углом так, что одна гипербола сливается с правой половиной оси абсцисс, а другая — с левой. Изменяя ψ от 0 до $+\infty$, получим гиперболы правой половины рассматриваемой полуплоскости, а изменяя ψ от 0 до $-\infty$, получим гиперболы левой половины этой полуплоскости. Изменение φ от $-\infty$ до $+\infty$ дает нам передвижение по гиперболам $\psi = \text{const}$ в направлении, указанном на фигуре стрелками. Наложив фиг. 13 на фиг. 8 так, чтобы оси $\xi\eta$ совпали, пойдем по линии $\psi = 0$, изменяя φ

от $-\infty$ до $+\infty$. На ηO параметр $\frac{\theta}{q}$ направляющей сети будет нуль, и потому $\theta = 0$; на отрезке оси абсцисс OF этот параметр будет иметь значение $\frac{\pi}{2}$, и потому $\theta = q\frac{\pi}{2}$; на бесконечном отрезке оси абсцисс $F\xi$ будем иметь $\theta = 0$; на отрезке оси абсцисс OF' параметр $\frac{\theta}{q}$ будет иметь значение $-\frac{\pi}{2}$, и потому $\theta = -q\frac{\pi}{q}$; на бесконечном же отрезке $F'\xi'$ будем иметь



Фиг. 13.



Фиг. 14.

$\theta = 0$. В действительном течении жидкости (фиг. 14) это будет соответствовать линии тока ηO, направленной по оси Ox, которая в критической точке O разделится на две прямые линии тока OF и OF', соответствующие щекам клина; в точках же F и F' эти прямые линии тока перейдут в бесконечные ветви $F\xi$ и $F'\xi'$ контуров струи. Жидкость будет течь в направлении, указанном на фигуре стрелками. Согласно данному правилу, вправо от $\eta OF\xi$ функция ψ должна возрастать, а влево от $\eta OF'\xi'$ она должна убывать. Согласно фиг. 13, это показывает, что поток жидкости расположится вправо и влево от контуров $\eta OF\xi$ и $\eta OF'\xi'$. Количество протекающей жидкости с той и другой стороны будет бесконечно велико, ибо ψ изменяется от 0 до $+\infty$ и $-\infty$. При этом везде в бесконечности $\vartheta = 0$ и $\theta = 0$, т. е. скорость потока имеет постоянную величину w и направлена параллельно оси Ox.

Главным вопросом в рассматриваемой задаче является

определение давления потока на клин. По формулам (18) и (27) имеем на отрезке OF оси $O\xi$.

$$\frac{c}{r} = \cosh\frac{\vartheta}{q}, \quad \varphi = kr^2,$$

откуда

$$\varphi = \frac{kc^2}{\cosh^2\dfrac{\vartheta}{q}}. \tag{28}$$

Подставляем эту величину φ в формулу (15):

$$P = \rho k c^2 w \int_{\omega}^{0} \sinh\vartheta d\left(\frac{1}{\cosh^2\dfrac{\vartheta}{q}}\right) =$$

$$= -\rho k c^2 w \int_{0}^{\infty} \sinh\vartheta d\left(\frac{1}{\cosh^2\dfrac{\vartheta}{q}}\right).^{1}$$

Интегрируем по частям, замечая, что вследствие $q<2$ члены от подстановки обращаются в нуль; потом умножаем полученную величину P на $2\sin\left(q\dfrac{\pi}{2}\right)$, чтобы получить равнодействующую R сил давления на клин, направленную по оси Ox. Получаем:

$$R = 2\rho w \varphi_0 \sin\frac{q\pi}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{\cosh\vartheta}{\cosh^2\dfrac{\vartheta}{q}}\, d\vartheta, \tag{29}$$

где φ_0 по формуле (28) есть значение φ при $\vartheta = 0$, т. е. в точке F.

---

[1] Правильнее было бы обозначить пределы интеграла так:

$$\int_{\vartheta=\infty}^{\vartheta=0},$$

так как значения ∞ и 0 приобретает не вся функция, стоящая под знаком диференциала, но лишь переменная ϑ.

Такой условный способ обозначения пределов интеграла встречается во многих местах этого сочинения и будет нами отмечаться. *Прим. ред.*

Чтобы взять входящий сюда интеграл, делаем подстановку:

$$e^{-2\vartheta} = \sigma^q,$$

$$\cosh^2\left(\frac{\vartheta}{q}\right) = \frac{1}{4}(1+\sigma)^2\sigma^{-1},$$

$$e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} = \sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}},$$

$$d\vartheta = -\frac{q\,d\sigma}{2\sigma}.$$

Это дает нам:

$$R = 2\rho w\rho_0 q \sin\frac{q\pi}{2}\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma =$$

$$= 2\rho w\rho_0 q \sin\frac{q\pi}{2}\left(\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{q}{2}}\,d\sigma}{(1+\sigma)^2} + \int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}\,d\sigma}{(1+\sigma)^2}\right).$$

Преобразуем каждый из входящих сюда интегралов. В первом совершаем интеграцию по частям:

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = -\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{q}{2}-1}}{(1+\sigma)}\,d\sigma;$$

во втором пишем:

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = -\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{2-q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma + \int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)}\,d\sigma$$

и берем первый интеграл второй части последнего равенства по частям:

$$-\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{2-q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = \frac{1}{2} - \left(1-\frac{q}{2}\right)\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)}\,d\sigma,$$

так что

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = \frac{1}{2} + \frac{q}{2}\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)}\,d\sigma.$$

Подставляем в формулу для R:

$$R = \rho w \varphi_0 q^2 \sin\frac{q\pi}{2} \int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}-1}}{(1+\sigma)}\, d\sigma,$$

где q заключено между 0 и 2. Для всех таких значений q имеем [1]:

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}-1}}{(1+\sigma)}\, d\sigma = \frac{\pi}{\sin\frac{q\pi}{2}}.$$

Поэтому сила давления потока на клин представляется такой формулой:

$$R = \pi \rho w q^2 \varphi_0. \tag{30}$$

Теперь надо выразить φ_0 с помощью длины s бока клина. Для этого пользуемся формулой (16), в которую подставляем значение $d\varphi$ из формулы (28):

$$s = -\frac{\varphi_0}{w} \int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\vartheta}{q}}\right).$$

Интегрируем по частям:

$$s = \frac{\varphi_0}{w}\left(1 + \int_0^\infty \frac{e^{\vartheta}}{\cosh^2\frac{\vartheta}{q}}\, d\vartheta\right).$$

Полагаем здесь также, что

$$e^{-2\vartheta} = \sigma^q.$$

Получаем:

$$s = \frac{\varphi_0}{w}\left(1 + 2q \int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\, d\sigma\right).$$

---

[1] Bertrand, Traité de calcul intégral. Paris, 1870. § 144.

Преобразуем по предыдущему:

$$s = \frac{\varphi_0}{w}\left(1 + q + q^2 \int_0^1 \frac{\sigma - \frac{q}{2}}{(1+\sigma)}\, d\sigma\right). \tag{31}$$

Формулы (31) и (30), которые были выведены проф. Д. К. Бобылевым [1], вполне решают вопрос об определении силы давления потока на равнобокий клин, ось которого направлена по течению потока. Определив из формулы (31) φ_0 по s и подставив в (30), мы найдем силу R, которая будет пропорциональна w^2 и s. Д. К. Бобылев берет интеграл, входящий в формулу (31), для случая соизмеримого q и составляет таблицы величины R для различных углов клина. Из этих таблиц следует, что при одном и том же s наибольшая величина R соответствует углу $q\pi$, заключенному между 200 и 220°. Для определения силы удара потока на пластинку мы должны в наших формулах положить $q = 1$. Это даст:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sigma)}\, d\sigma = \frac{\pi}{2}, \\ &s = \frac{\varphi_0}{w}\left(2 + \frac{\pi}{2}\right), \\ &R = \frac{\pi}{4+\pi}\, 2\rho s w^2 = 0{,}44 \cdot 2\rho s w^2. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

§ 6. Истечение из сосудов, ограниченных двумя плоскими бесконечными несимметричными стенками. Если стенки сосуда несимметрично расположены относительно прямой, делящей угол между ними пополам и равно отстоящей от краев отверстия, то симметричная направляющая сеть, представленная на фиг. 8, должна быть заменена аналогичной несимметричной направляющей сетью. Полагаем в формуле (11):

$$c_1 = -c_2 = c, \quad c_3 = c_4 = \ldots = 0\ ^{2)}, \quad m = i,$$

$$f(u) = -\frac{q\sqrt{c^2 - e^2}}{u - e},$$

---

[1] Журнал Русского физико-химического общества, т. XIII. стр., 63.

[2] См. примечание к стр. 211. *Прим. ред.*

где $e < c$. Получаем:

$$\varphi = -qi \int \frac{\sqrt{c^2 - e^2}}{u - e} \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

Вводим сюда новое переменное, положив:

$$u' = u - e,$$

и делаем некоторые преобразования:

$$\varphi = qi \int \frac{d\,\frac{\sqrt{c^2 - e^2}}{u}}{\sqrt{1 + \frac{2e}{u'} - \frac{c^2 - e^2}{u'^2}}} =$$

$$= qi \int \frac{d\,\frac{c^2 - e^2}{u'}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c^2 - e^2}{cu'} - \frac{e}{c}\right)^2}} =$$

$$= qi \arcsin\left(\frac{c^2 - e^2}{cu'} - \frac{e}{c}\right), \tag{33}$$

где за нижний предел интеграции по u принято $u = \frac{c^2}{e}$; следовательно,

$$u' = \frac{c^2 - e^2}{e}.$$

Отсюда по формуле (9) следует, что

$$\frac{c^2 - e^2}{u'} = e + c \sin\left(\frac{\theta}{q} - i\frac{\eta}{q}\right).$$

Если положим здесь

$$u' = r(\cos\lambda + i \sin\lambda),$$

где r и λ будут полярные координаты точки плоскости $\xi\eta$ относительно полюса $(e, 0)$, то найдем, что

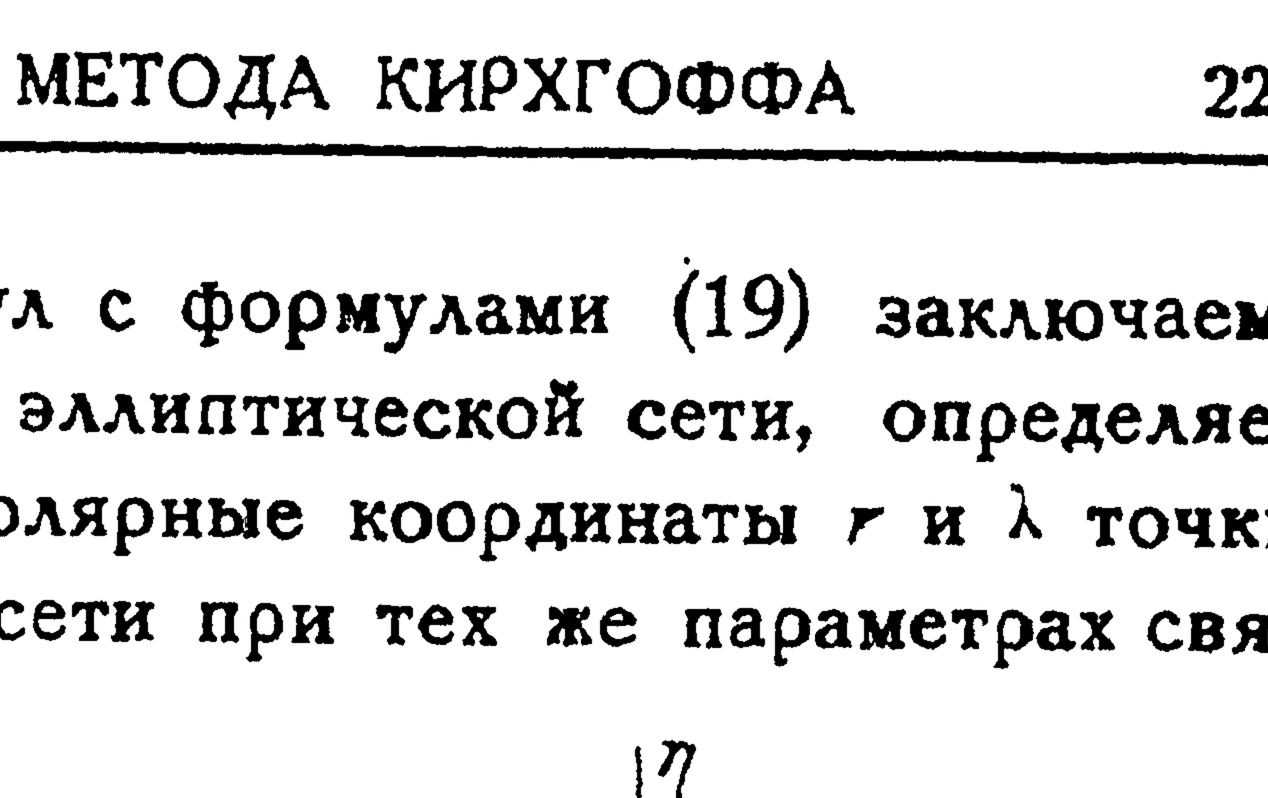
$$\frac{c^2 - e^2}{r} \cos\lambda = e + c \sin \frac{\theta}{q} \cosh\frac{\eta}{q},$$

$$\frac{c^2 - e^2}{r} \sin\lambda = c \cos \frac{\theta}{q} \sinh\frac{\eta}{q}. \tag{34}$$

Из сравнения этих формул с формулами (19) заключаем, что координаты ξ и η точки эллиптической сети, определяемые параметрами θ и ϑ, и полярные координаты r и λ точки нашей новой направляющей сети при тех же параметрах связаны уравнениями:

$$\frac{c^2 - e^2}{r}\cos\lambda = e + \xi,$$

$$\frac{c^2 - e^2}{r}\sin\lambda = \eta.$$



Фиг. 15.

Это показывает, что определяемая нами направляющая сеть может быть получена из эллиптической сети с помощью преобразования последней посредством обратных радиусов-векторов из центра преобразования $(-e, 0)$, причем произведение радиусов равно $c^2 - e^2$, и с помощью передвижения найденной в этом преобразовании сети в направлении оси $O\xi$ на расстояние $2e$. Легко усмотреть, что при таком преобразовании плоскости точки F и F', отстоящие от O на расстоянии c, переходят сами в себя. Действительно, после преобразования с помощью обратных векторов точка F отстоит от полюса $(-e, 0)$ на расстоянии

$$\frac{c^2 - e^2}{c + e} = c - e,$$

а после передвижения вправо на $2e$ точка F отстоит от O на расстоянии $c - e + e = c$. Таким образом получается сеть, представленная на фиг. 15. Все ветви гипербол переходят в ней в кривые, проходящие через полюс O', отстоящий от начала O на расстоянии e. Параметры этих кривых $\frac{\theta}{q}$ будут выражаться углами, которые их касательные в точке O' образуют с осью $O\eta$. Все эти кривые будут пересекать ось $O\xi$ под прямым углом вне отрезка FF'. При этом та гипербола, которая в эллиптической сети проходила через точку $(-e, 0)$, обратится в рассматриваемой сети в кривую $O'L$, разделяю-

щую ветви кривых $\frac{\theta}{q} = \text{const}$, идущих направо и налево, и охватывающую в бесконечности все рассматриваемое пространство. Линии $\frac{\vartheta}{q} = \text{const}$, которые преобразуются из эллипсов эллиптической сети, будут замкнутые кривые, пересекающие под прямым углом ось $O\xi$ внутри фокусного отрезка FF'. Бесконечно тонкий эллипс, сливающийся в эллиптической сети с отрезком FF', представляется в рассматриваемой сети частью оси абсцисс вне отрезка FF' и охватывает в бесконечности все рассматриваемое пространство. Таким образом в рассматриваемой сети все точки бесконечности имеют параметр $\frac{\vartheta}{q} = 0$ и параметр $\frac{\theta}{q}$, равный углу $-\frac{\mu}{q}$, который касательная к кривой $O'L$ в точке O' образует с осью $O\eta$. Этот угол найдется, полагая в формуле (34) $\vartheta = 0$, $r = \infty$, $\theta = -\mu$, что дает:

$$\sin\frac{\mu}{q} = \frac{e}{c}. \tag{35}$$

Определив отсюда e и подставляя его в формулы (34), представим их в виде:

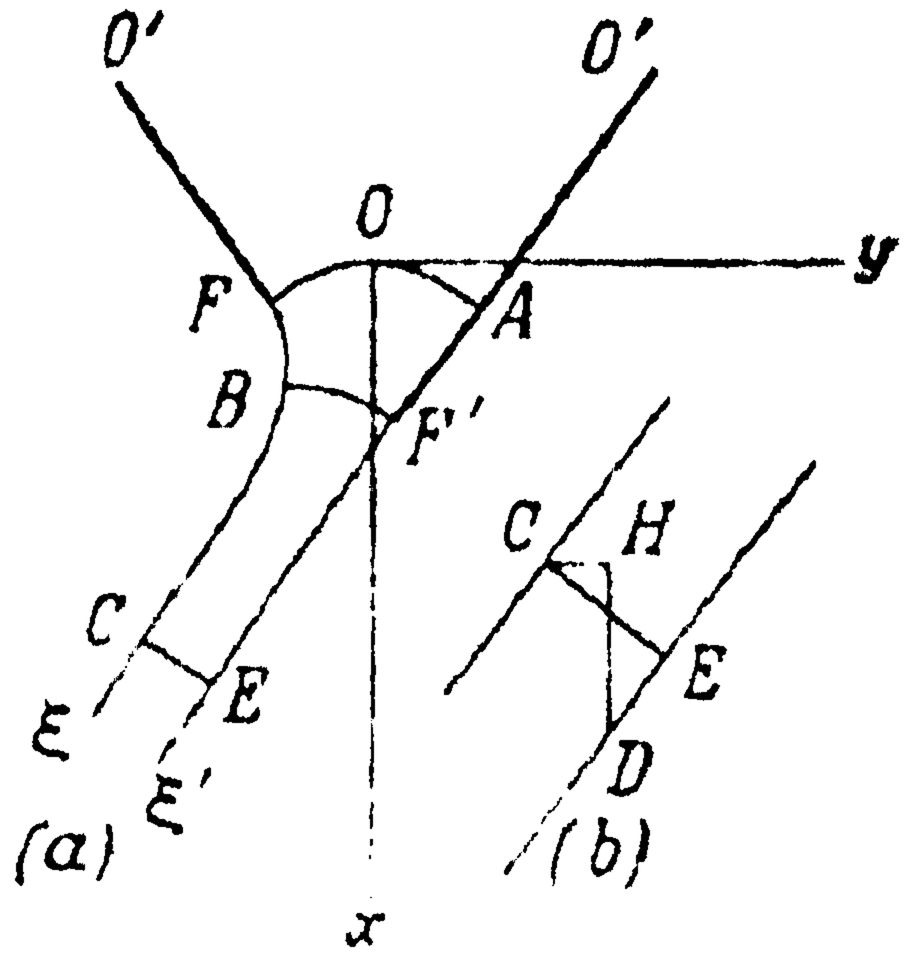
$$\left.\begin{aligned} \frac{c}{r}\cos^2\frac{\mu}{q}\cos\lambda &= \sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta}{q}\cosh\frac{\vartheta}{q}, \\ \frac{c}{r}\cos^2\frac{\mu}{q}\sin\lambda &= \cos\frac{\theta}{q}\sinh\frac{\vartheta}{q}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

За образующую сеть для решения предложенной задачи мы примем сеть, представленную на фиг. 9. Налагаем эту сеть на фиг. 15 так, чтобы точка O фиг. 9 совпала с полюсом O' фиг. 15 и чтобы ось $O\xi$ пошла по $O'\xi$, а оси $O\eta$ были направлены в одну сторону. Заменяем в формулах (20) c на $c - e$:

$$\varphi = \alpha \lg\frac{r}{c-e}, \quad \psi = \alpha\lambda. \tag{37}$$

Посмотрим, как расположится теперь течение жидкости, даваемое нашими сетями. Идя по прямой $O'F$, будем иметь:

$\psi = 0$, φ изменяется от $-\infty$ до 0, $\theta = \frac{q\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0; идя далее по прямой $F\xi$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от 0 до $+\infty$, $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует [(фиг. 16), (a)] в действительном движении жидкости стенке сосуда $O'F$ и контуру струи $F\xi$, причем на эквипотенциальной линии FA принято $\varphi = 0$. С другой стороны, идя по прямой $O'F'$, мы будем иметь: $\psi = \pi\alpha$, φ изменяется от $-\infty$ до φ_0, $\theta = -\frac{q\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0; идя далее по прямой $F'\xi'$, будем иметь: $\psi = \pi\alpha$, φ изменяется от φ_0 до $+\infty$, $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует в действительном движении жидкости стенке сосуда $O'F'$ и контуру струи $F'\xi'$. Мы видим, что оба контура струи образуют в бесконечности с осью Ox угол $-\mu$, определяемый по формуле (35).



Фиг. 16.

Согласно правилу об изменении ψ следует, что рассматриваемое течение жидкости будет лежать направо от линии тока $O'F\xi$ и налево от линии тока $O'F'\xi'$. Возьмем начало координат O на эквипотенциальной линии FA и предположим что ось Ox, которая, как мы видели, делит угол между стенками сосуда пополам, равно отстоит от краев F и F' отверстия сосуда.[1]

Обратимся к составлению уравнений контуров струи и к определению количества вытекающей жидкости. Мы имеем

[1] Правильнее было бы опустить слова „которая, как мы видели" и „... равно отстоит от краев F и F' отверстия сосуда ...", потому что биссектриса угла между стенками несимметричного сосуда не может равно отстоять от точек F и F'. Сам автор после формулы (39) пишет: $\ldots x'_0 - x_0 = 2a$, $y'_0 - y_0 = 2b$, где x_0, y_0, x'_0 и y_0' — координаты краев отверстия F и F'. *Прим. ред.*

по формулам (36) и (37) на отрезках $F\xi$ и $F'\xi'$, соответствующих контурам струи $F\xi$ и $F'\xi'$:

$$r = \pm c \frac{\cos^2 \frac{\mu}{q}}{\sin \frac{\mu}{q} + \sin \frac{\theta}{q}} = c \left(1 - \sin \frac{\mu}{q}\right) e^{\frac{\varphi}{\alpha}},$$

откуда следует, что

$$d\varphi = - \frac{\cos \frac{\theta}{q}}{\sin \frac{\mu}{q} + \sin \frac{\theta}{q}} \frac{\alpha\, d\theta}{q}. \tag{38}$$

Подставляя эту величину в формулы (14), получим:

$$dx = - \frac{\alpha}{qw} \frac{\cos\theta \cos \frac{\theta}{q}}{\sin \frac{\mu}{q} + \sin \frac{\theta}{q}} d\theta,$$

$$dy = - \frac{\alpha}{qw} \frac{\sin\theta \cos \frac{\theta}{q}}{\sin \frac{\mu}{q} + \sin \frac{\theta}{q}} d\theta.$$

Совершая интеграцию и приписывая координатам контура $F'\xi'$ обозначения x' и y' для отличия от координат x и y контура $F\xi$, находим:

$$\left.\begin{aligned} x &= - \frac{\alpha}{qw} \int_{\frac{q\pi}{2}}^{\theta} \frac{\cos\theta \cos \frac{\theta}{q}}{\sin \frac{\mu}{q} + \sin \frac{\theta}{q}} d\theta + x_0, \\ y &= - \frac{\alpha}{qw} \int_{\frac{q\pi}{2}}^{\theta} \frac{\sin\theta \cos \frac{\theta}{q}}{\sin \frac{\mu}{q} + \sin \frac{\theta}{q}} d\theta + y_0, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{\alpha}{q\omega}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\mu}\frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta+x'_0,\\ y' &= -\frac{\alpha}{q\omega}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\mu}\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta+y'_0, \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

где x_0, y_0, x_0', y_0' суть координаты краев отверстия F и F'. В первых двух интегралах верхний предел θ получает для различных точек контура значения от $\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$, а во вторых двух интегралах — значения от $-\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Если положим, что

$$x_0'-x_0=2a, \quad y_0'-y_0=2b$$

и вычтем из третьей формулы (39) первую, а из четвертой вторую, приняв при этом для верхних пределов в первых двух формулах $\theta=-\mu+\varepsilon$, а во вторых двух $\theta=-\mu-\varepsilon'$, где ε и ε' бесконечно малы, то найдем:

$$\left.\begin{aligned} x'-x=2a-\frac{\alpha}{q\omega}\Bigg\{&\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{-\mu-\varepsilon'}\frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta+\\ &+\int_{-\mu+\varepsilon}^{\frac{q\pi}{2}}\frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta\Bigg\}, \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

$$y'-y=2b-\frac{\alpha}{qw}\left\{\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{-\mu-\varepsilon'}\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta+\right.$$

$$\left.+\int_{-\mu+\varepsilon}^{\frac{q\pi}{2}}\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta\right\}. \qquad (40)$$

Вторые части этих формул при произвольных бесконечно малых величинах ε и ε' произвольны. Легко усмотреть, что при этом и первые части их остаются неопределенными, так как они представляют разность координат двух каких-нибудь бесконечно удаленных точек, взятых на правом и левом контурах струи.

Другое дело будет, если мы наложим на ε и ε' некоторое условие. Предположим (фиг. 16), что значения $\theta=-\mu-\varepsilon'$ и $\theta=-\mu+\varepsilon$ соответствуют бесконечно удаленным точкам струи D и C, в которых разность потенциалов скоростей есть φ_0, т. е. имеет ту же величину, как в точках F' и F.

Тогда по формуле (38) имеем:

$$\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{-\mu-\varepsilon'}\frac{\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta+\int_{-\mu+\varepsilon}^{\frac{q\pi}{2}}\frac{\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta=0. \qquad (41)$$

На основании этого условия мы можем вторым частям формул (40) дать вполне определенный вид:

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= 2a + \frac{\alpha}{q\omega}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta, \\ y' - y &= 2b - \frac{\alpha}{q\omega}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\sin\mu + \sin\theta}{\sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta. \end{aligned}\right\} \quad (40')$$

Проведем (фиг. 16) через точку C эквипотенциальную линию CE, которая будет прямая, перпендикулярная к контурам струи. Очевидно [1], что длина этого перпендикулярного сечения $CE = \frac{Q}{\omega}$; что же касается отрезка ED, то $ED = \frac{\varphi_0}{\omega}$. Если теперь проведем через точки C и D прямые CH и DH, параллельные осям координат, то увидим, что $DH = x' - x$ и $CH = y' - y$. На основании этого замечания получаем:

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= \frac{Q}{\omega}\sin\mu + \frac{\varphi_0}{\omega}\cos\mu, \\ y' - y &= \frac{Q}{\omega}\cos\mu - \frac{\varphi_0}{\omega}\sin\mu. \end{aligned}\right\} \quad (40'')$$

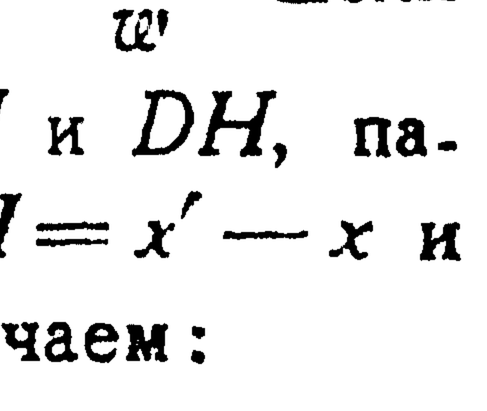
По формуле (21) находим, что

$$\alpha = \frac{Q}{\pi}.$$

[1] Перед формулой (41) автор говорит, что в точках C и D (фиг. 16, b) разность потенциалов скоростей есть φ_0. Отрезок CE есть эквипотенциальная линия; следовательно, разность потенциалов в точках D и E тоже будет φ_0. Поэтому

$$w = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{\varphi_0}{ED}; \quad ED = \frac{\varphi_0}{w},$$

что и написано в тексте. *Прим. ред.*



Фиг. 16b.

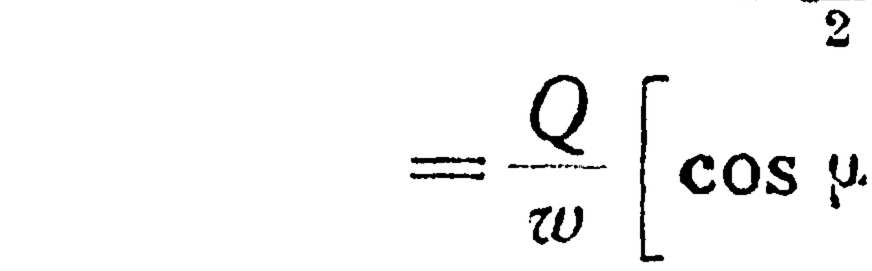
Далее, на основании формулы (37), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{Q}{\pi}\lg\frac{c+e}{c-e} = \frac{Q}{\pi}\lg\frac{1+\sin\frac{\mu}{q}}{1-\sin\frac{\mu}{q}} = \\ &= \frac{2Q}{\pi}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2q}\right). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Сравнивая формулы (40′) и (40″) и пользуясь (42), получим:

$$\left.\begin{aligned} 2a &+ \frac{Q}{q\pi w}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\cos\mu-\cos\theta}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta = \\ &= \frac{Q}{w}\left[\sin\mu+\frac{2\cos\mu}{\pi}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2q}\right)\right], \\ 2b &- \frac{Q}{q\pi w}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\sin\mu+\cos\theta}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta = \\ &= \frac{Q}{w}\left[\cos\mu-\frac{2\sin\mu}{\pi}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2q}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Уравнения (43) позволяют нам при данных a, b и q определить количество вытекающей жидкости Q и угол μ, образуемый струей с бисектором угла между стенками сосуда. Для примера рассмотрим случай $q=1$, $b=0$, который соответствует (фиг. 17) истечению из весьма большого сосуда, дно которого состоит из двух горизонтальных плоскостей AB и EH, расположенных на различной высоте, но сходящихся краями B и E на одну вертикальную плоскость, на которой и образуется отверстие ширины $2a$. При сделанном предположении формулы (43) обращаются в следующие:



Фиг. 17.

$$\left.\begin{aligned} 2aw\pi = Q\Bigg[& \pi\sin\mu + 2\cos\mu \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right) - \\ & - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\mu + \sin\theta}\cos\theta\, d\theta\Bigg], \\ \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right) = & \frac{2+\pi\cos\mu}{2\sin\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Последнее из этих уравнений служит для определения угла μ, который не зависит от a. Решая его, мы найдем, что $\mu = 68°52'$. По первому уравнению определяется количество вытекающей жидкости. Входящий в него интеграл легко берется:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\mu + \sin\theta}\cos\theta\, d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\mu + \sin\theta}\cos\theta\, d\theta +$$

$$- \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\mu - \sin\theta}\cos\theta\, d\theta = -2\sin\mu \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\mu + \cos\theta} =$$

$$= -\pi\sin\mu + 2\sin\mu\cos\mu \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\mu + \cos\theta} =$$

$$= -\pi\sin\mu + \cos\mu \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right).$$

Следовательно, находим:

$$Q = \frac{\pi}{2\pi\sin\mu + \cos\mu \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right)} 2aw = 0{,}96 \cdot 2aw. \quad (45)$$

Таким образом *в рассмотренной задаче конец струи будет образовывать с дном сосуда угол в* $21°8'$, *а коэфи-*

циент истечения будет 0,96, т. е. более того, который имеется в формуле (24) [1].

§ 7. **Удар беспредельного потока о несимметрично относительно его расположенный неравнобокий клин.** Для решения этой задачи берем направляющую сеть, представленную на фиг. 15, и образующую сеть, представленную на фиг. 13. Налагаем эти сети друг на друга так, чтобы точка O фиг. 13 совпала с точкой O' фиг. 15 и чтобы оси $O\xi$ и $O'\xi$ совпали. Мы увидим, что во всех бесконечно удаленных точках течения жидкости $\vartheta = 0$ и угол ϑ есть постоянная величина $-\mu$, определяемая из формулы (35):

$$\mu = q \arcsin \frac{e}{c}. \tag{46}$$

Это будет угол, который бисектор угла между щеками клина образует с направлением потока. Идя затем по оси $\eta O'$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от ∞ до 0, θ изменяется от $-\mu$ до 0 и ϑ изменяется от 0 до ∞; идя далее по $O'F$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от 0 до φ_0, $\theta = \frac{q\pi}{2}$, ϑ изменяется от ∞ до 0; идя еще далее по $F\xi$, будем иметь: $\psi = 0$,

[1] Этот вывод неточен. В интегрирование выражения

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\mu + \sin\theta} \cos\theta \, d\theta$$

вкралась описка; этот интеграл равен

$$-\pi \sin\mu + 2\cos\mu \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right),$$

а не

$$-\pi \sin\mu + \cos\mu \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right).$$

Поэтому

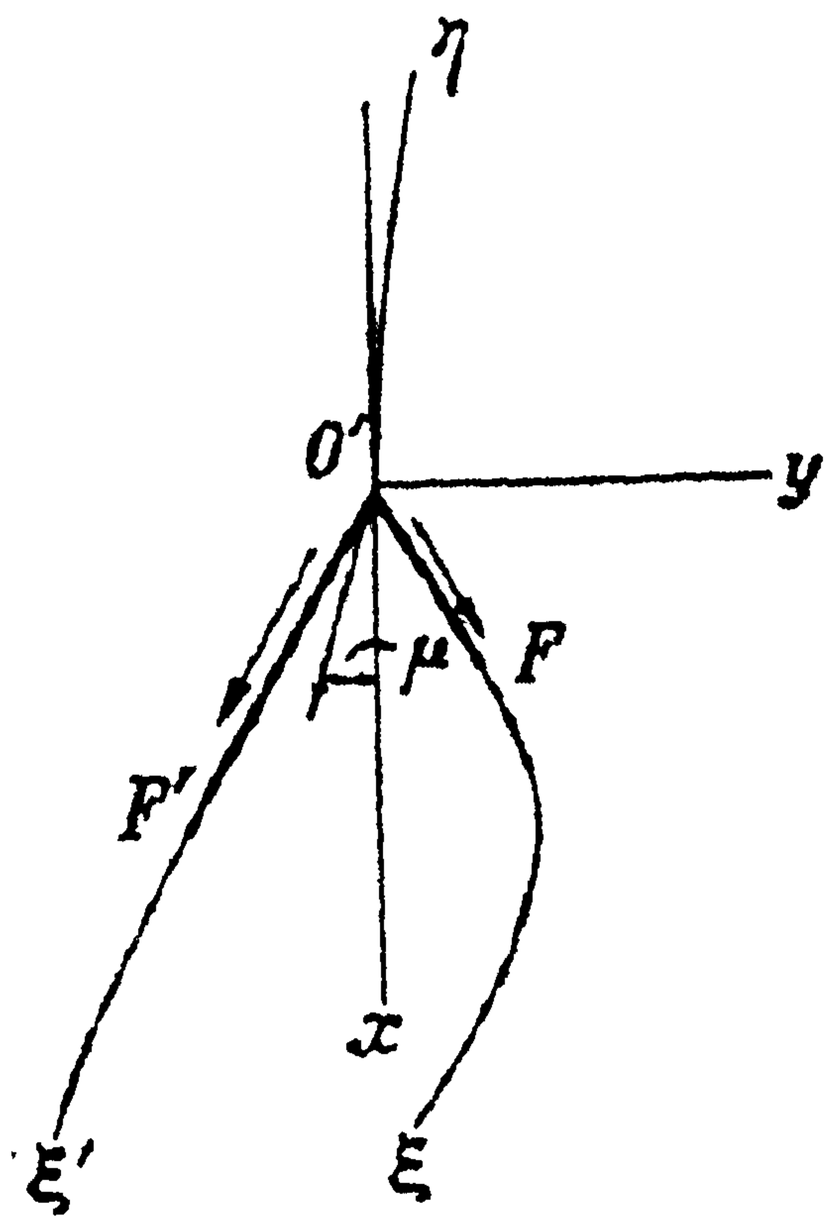
$$Q = \frac{1}{2\sin\mu} \cdot 2aw = \infty 0{,}54 \cdot 2aw,$$

а не

$$0{,}96 \cdot 2aw,$$

и, следовательно, коэфициент истечения будет равен 0,54, т. е. он меньше, а не больше того, который имеется в формуле (24). *Прим. ред.*

φ изменяется от φ_0 до ∞, $\psi = 0$ и θ изменяется от $\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует (фиг. 18) в действительном движении жидкости линии тока $\eta O'F\xi$, состоящей из кривой линии $\eta O'$, доходящей до критической точки O', из щеки клина $O'F$ и из контура струи $F\xi$. С другой стороны, идя по оси $O\mu'$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от $-\infty$ до 0, θ изменяется от $-\mu$ до 0 и ϑ изменяется от 0 до ∞; идя далее по $O'F'$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от 0 до φ_0', $\theta = -\frac{q\pi}{2}$, ϑ изменяется от ∞ до 0; идя еще далее по $F'\xi'$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от φ_0' до ∞, $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует в действительном движении жидкости линии тока $\eta O'F'\xi'$, которую, собственно говоря, можно считать вместе с вышеописанной за одну и ту же линию тока, разделяющуюся в критической точке O' на две. Во второй ее половине $O'F'$ представляет вторую щеку клина, а $F'\xi'$ — вторую граничную линию струи.



Фиг. 18.

Легко усмотреть согласно данному правилу, что рассматриваемое течение жидкости заполнит всю плоскость xy, располагаясь направо от $\eta O'F\xi$ и налево от $\eta O'F'\xi'$. Начало осей xy мы берем в вершине клина O', так что $O'x$ будет бисектором угла клина $q\pi$.

Определим силу давления потока на клин. Для этого выражаем φ по ϑ на отрезках $O'F$ и $O'F'$. По формулам (27) и (36) имеем на этих отрезках:

$$\varphi = kr^2, \quad \frac{c}{r}\cos^2\frac{\mu}{q} = \cosh\frac{\vartheta}{q} \pm \sin\frac{\mu}{q},$$

где верхний знак относится к отрезку $O'F$, а нижний — к отрезку $O'F'$.

Отсюда получаем:

$$\varphi = kc^2\left(\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\cosh\frac{\vartheta}{q} \mp \sin\frac{\mu}{q}}\right)^2. \tag{47}$$

Если положим здесь $\vartheta = 0$, то найдем φ_0 и φ_0':

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= kc^2\frac{\cos^4\frac{\mu}{q}}{\left(1+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2},\\ \varphi_0' &= kc^2\frac{\cos^4\frac{\mu}{q}}{\left(1-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Подставляем $d\varphi$ из формул (47) в формулу (15) и составляем силы P и P' давления потока на правую и левую щеки клина:

$$P = -\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\,kc^2\int_0^\infty \sinh\vartheta\, d\left(\frac{1}{\cosh\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}}\right)^2, \quad ^{1})$$

$$P' = -\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\,kc^2\int_0^\infty \sinh\vartheta\, d\left(\frac{1}{\cosh\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}}\right)^2.$$

Совершаем интегрирование по частям, заметив, что $q < 2$:

$$\left.\begin{aligned}P &= -\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\,kc^2\int_0^\infty \frac{\cosh\vartheta}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\,d\vartheta,\\ P' &= -\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\,kc^2\int_0^\infty \frac{\cosh\vartheta}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\,d\vartheta.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

[1]) О пределах интеграла см. примечание на стр. 220. *Прим. ред.*

Вводим новое переменное:

$$e^{-\vartheta} = \sigma^q,$$

$$d\vartheta = -q\frac{d\sigma}{\sigma},$$

$$e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} = \sigma^q + \sigma^{-q},$$

$$\frac{1}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\frac{\mu}{q}\right)^2} = \frac{4\sigma^2}{\left(\sigma^2 + 2\sigma\sin\frac{\mu}{q} + 1\right)^2},$$

$$\frac{1}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q} - \sin\frac{\mu}{q}\right)^2} = \frac{4\sigma^2}{\left(\sigma^2 - 2\sigma\sin\frac{\mu}{q} + 1\right)^2}.$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} P &= 2q\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\int_0^1\frac{(\sigma^q + \sigma^{-q})\sigma}{\left(\sigma^2 + 2\sigma\sin\frac{\mu}{q} + 1\right)^2}d\sigma, \\ P' &= 2q\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\int_0^1\frac{(\sigma^q + \sigma^{-q})\sigma}{\left(\sigma^2 - 2\sigma\sin\frac{\mu}{q} + 1\right)^2}d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Что касается длин боков клина $O'F = s$ и $O'F' = s'$, то они найдутся по формулам (16) и (47):

$$\left.\begin{aligned} s &= -\frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\int_0^\infty e^{\vartheta}d\frac{1}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\frac{\mu}{q}\right)^2}, \\ s' &= -\frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\int_0^\infty e^{\vartheta}d\frac{1}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q} - \sin\frac{\mu}{q}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Совершаем интегрирование по частям, обращая внимание на условие $q < 2$:

$$s = \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\left[\frac{1}{\left(1+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+\int_0^\infty\frac{e^\vartheta d\vartheta}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\right],$$

$$s' = \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\left[\frac{1}{\left(1-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+\int_0^\infty\frac{e^\vartheta d\vartheta}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\right].$$

Полагаем здесь тоже, что

$$e^{-\vartheta} = \sigma^q.$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\left[\frac{1}{\left(1+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+\right.\\ &\left.+4q\int_0^1\frac{\sigma^{-q+1}d\sigma}{\left(\sigma^2+2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2}\right],\\ s' &= \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}kc^2\left[\frac{1}{\left(1-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+\right.\\ &\left.+4q\int_0^1\frac{\sigma^{-q+1}d\sigma}{\left(\sigma^2-2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Формулы (50) и (52) совпадают с теми, которые были выведены И. В. Мещерским; из них следует, что во всех случаях $P' > P$ и $s' > s$. Исключая kc^2, определим P и P' и установим связь между s, s', μ и q. Эта связь получается через составление $\frac{s}{s'}$ из формул (52). Таким образом при данном угле наклонения μ и данном угле клина $q\pi$ длины щек его должны иметь данное отношение для того, чтобы было возможно рассматриваемое нами течение жидкости. Если отношение щек клина не будет такое, *то получаемое течение жидкости не будет давать раздельную линию*

тока ηO, проходящую через вершину клина и делящую угол клина пополам, а будет соответствовать иной раздельной линии тока, как это показано в § 12. И. В. Мещерский выполняет интеграцию в формулах (50) и (52) для всякого $q < 2$. Отсылая читателя к его работе [1], мы рассмотрим здесь только случай $q = 1$, соответствующий пластинке и разобранный еще в сочинении Релея. В этом случае сила давления на пластинку $R = P + P'$ выразится по формуле (49) через:

$$R = 2\rho w \cos^4 \mu kc^2 \int_0^\infty \frac{1 + \sin^2 \mu + \sinh^2 \vartheta}{(\cos^2 \mu + \sinh^2 \vartheta)^2} d(\sinh \vartheta).$$

Полагаем $\sinh \vartheta = z$:

$$R = 2\rho w \cos^4 \mu kc^2 \left[\int_0^\infty \frac{z^2 dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} + \right.$$

$$\left. + (1 + \sin^2 \mu) \int_0^\infty \frac{dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} \right].$$

Мы имеем:

$$\int \frac{z^2 dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} = -\frac{z}{2(\cos^2 \mu + z^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\cos^2 \mu + z^2} =$$

$$= \frac{-z}{2(\cos^2 \mu + z^2)} + \frac{1}{2\cos \mu} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{z}{\cos \mu} \right),$$

$$\int \frac{dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \mu} \int \frac{dz}{\cos^2 \mu + z^2} - \frac{1}{\cos^2 \mu} \int \frac{z^2 dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^3 \mu} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{z}{\cos \mu} \right) + \frac{z}{2\cos^2 \mu} \frac{1}{(\cos^2 \mu + z^2)}.$$

Подставляя эти неопределенные интегралы в нашу формулу и обращая внимание на пределы интеграции, получаем:

$$R = \rho w \cos \mu kc^2 \pi. \qquad (53)$$

[1] Журнал Русского физико-химического общества, т. XVIII, стр. 342.

Что касается формул (52), то они обращаются в

$$s = \frac{1}{w}\cos^4\mu kc^2\left[\frac{1}{(1+\sin\mu)^2} + 4\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\mu+1)^2}\right],$$

$$s' = \frac{1}{w}\cos^4\mu kc^2\left[\frac{1}{(1-\sin\mu)^2} + 4\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\mu+1)^2}\right].$$

Входящие сюда интегралы легко могут быть приведены к вышеописанным. Положив

$$z = \sigma + \sin\mu,$$

найдем:

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\mu+1)^2} = \int_{\sin\mu}^{1+\sin\mu} \frac{dz}{(z^2+\cos^2\mu)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\mu}\left[\frac{1}{\cos\mu}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sin\mu}{\cos\mu} - \mu\right) + \left(\frac{1}{2} - \sin\mu\right)\right].$$

Так же получим:

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\mu+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\mu}\left[\frac{1}{\cos\mu}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sin\mu}{\cos\mu} + \mu\right) + \left(\frac{1}{2} + \sin\mu\right)\right].$$

Подставляем это в выражения для s и s' и составляем сумму $s + s' = 2b$, обращая внимание на равенство:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sin\mu}{\cos\mu} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sin\mu}{\cos\mu} = \frac{\pi}{2}.$$

Получим:

$$2b = \frac{kc^2}{w}(\pi\cos\mu + 4). \qquad (54)$$

Исключая из формул (53) и (54) величину kc^2, получаем формулу Релея для силы давления потока на пластинку, поставленную под углом $\frac{\pi}{2} - \mu$ к направлению потока:

$$R = \frac{\pi\cos\mu}{4+\pi\cos\mu}2bw^2\rho. \qquad (55)$$

Эта формула отличается от (32) тем, что вместо π в коэффициенте взято $\pi\cos\mu$.

§ 8. Удар струи о симметрично расположенный относительно ее равнобокий клин. Эта задача разрешается с помощью направляющей сети, представленной на фиг. 8, и с помощью образующей сети, которая должна иметь два полюса, так как струя после удара о пластинку разделяется на две струи. Для получения этой образующей сети полагаем в формуле (10), что

$$F(u)=0,\ \alpha_1=\alpha_2=-\alpha,\ \alpha_3=\alpha_4=\ldots=0,$$

$$\beta_1=-\beta,\ \beta_2=\beta,\ \gamma_1=\gamma,\ \gamma_2=-\gamma.$$

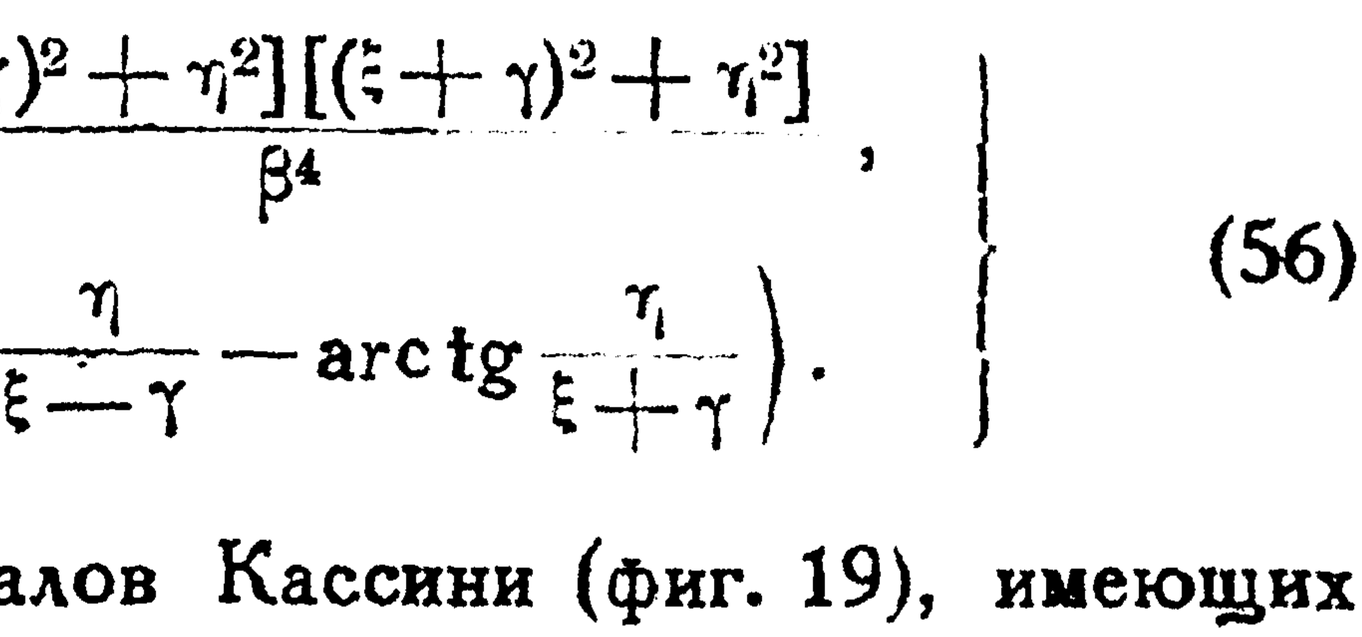
Получаем:

$$\chi=-\alpha\lg\frac{u^2-\gamma^2}{\beta^2}+\alpha\pi i$$

и

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=-\frac{\alpha}{2}\lg\frac{[(\xi-\gamma)^2+\eta^2][(\xi+\gamma)^2+\eta^2]}{\beta^4},\\ \psi&=\alpha\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi+\gamma}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

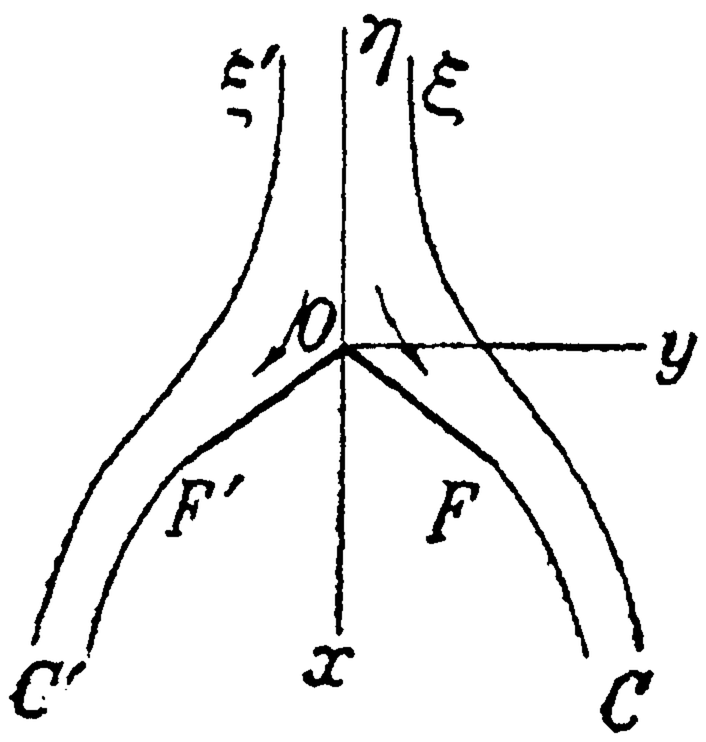
Эта сеть состоит из овалов Кассини (фиг. 19), имеющих фокусами точки C и C' с координатами $(\gamma, 0)$, $(-\gamma, 0)$, и из равносторонних гипербол, проходящих через эти точки. Так как параметр ψ по формуле (56) равен умноженной на α разности углов MCC' и $MC'C$, то, приближая точку M по какой-нибудь гиперболе к полюсу C, усматриваем, что ψ есть умноженный на α угол, образуемый касательной гиперболы в точке C с прямой CC'; если же гипербола проходит через полюс C', то для нее ψ есть умноженный на $-\alpha$ угол касательной гиперболы в полюсе C' с прямой $C'C$. Гиперболы, для которых $\psi=0$, представляются отрезками осей $O\eta_1$ и OC или $O\eta$ и OC'; гиперболы же, для которых $\psi=\alpha\pi$ и $\psi=-\alpha\pi$,



Фиг. 19.

представятся отрезками $C\xi$ и $C'\xi'$. Изменяя ψ от $-\alpha\pi$ до $+\alpha\pi$, мы проходим через все гиперболы, заполняющие нашу полуплоскость. Изменяя φ от $-\infty$ до $+\infty$, мы передвигаемся по гиперболам от бесконечно удаленного овала Кассини к полюсу C или C'.

Предположим, что $\gamma > c$, и наложим образующую сеть фиг. 19 на направляющую сеть фиг. 8 так, чтобы оси координат совпали. При этом полюсы C и C' лягут вне фокального отрезка FF'. Посмотрим, каково будет течение жидкости, определяемое нашими сетями. При $\psi = 0$ будем иметь: $\vartheta = 0$ на ηO, $\vartheta = \frac{q\pi}{2}$ на OF, $\vartheta = 0$ на FC, $\vartheta = -\frac{q\pi}{2}$ на OF', $\vartheta = 0$ на $F'C'$. Это соответствует (фиг. 20) прямой линии тока ηO, которая в критической точке O разделяется на две половины, идя по стенкам клина OF и OF' и образуя внутренние контуры FC и $F'C'$ сбегающих струй. Так как от η до C и C' функция φ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, то жидкость течет по найденной линии тока в направлении, указанном на фигуре стрелками.



Фиг. 20.

При $\psi = \alpha\pi$ будем иметь отрезок оси абсцисс ξC, на всем протяжении которого $\vartheta = 0$. Это соответствует правому крайнему контуру струи ξC. При $\psi = -\alpha\pi$ будем иметь отрезок оси абсцисс $\xi' C'$, на всем протяжении которого $\vartheta = 0$. Это соответствует левому крайнему контуру струи $\xi' C$.

Займемся определением силы давления струи на щеку клина OF. По формулам (18) и (56) имеем на отрезке OF:

$$\frac{c}{r} = \cosh\frac{\vartheta}{q},$$

$$\varphi = -\alpha \lg \frac{\gamma^2 - r^2}{\beta^2}.$$

Будем считать $\varphi = 0$ в точке O и для этого положим $\beta = \gamma$, так что последняя формула примет вид:

$$\varphi = -\alpha \lg\left(1 - \frac{r^2}{\gamma^2}\right).$$

Подставляем сюда величину r:

$$\varphi = -\alpha \lg\left(1 - \frac{c^2}{\gamma^2}\,\frac{1}{\cosh^2\frac{\vartheta}{q}}\right).$$

Определяем отсюда $d\varphi$:

$$d\varphi = -\frac{2\alpha c^2}{q\gamma^2}\,\frac{\sinh\frac{\vartheta}{q}\,d\vartheta}{\left(1-\frac{c^2}{\gamma^2}\,\frac{1}{\cosh^2\frac{\vartheta}{q}}\right)\cosh^3\frac{\vartheta}{q}}. \qquad (57)$$

Подставляем величину этого диференциала в формулу (15):

$$P = 2\rho w\alpha\,\frac{c^2}{q\gamma^2}\int_0^\infty \frac{\sinh\vartheta\sinh\frac{\vartheta}{q}}{\left(\cosh^2\frac{\vartheta}{q}-\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\cosh\frac{\vartheta}{q}}\,d\vartheta. \qquad (58)$$

Вводим новое переменное, положив:

$$e^{-\vartheta} = \sigma^q, \quad d\vartheta = -\frac{q\,d\sigma}{\sigma}.$$

Получаем:

$$P = \frac{4\rho w\alpha c^2}{\gamma^2}\int_0^1 \frac{(1-\sigma^2)(\sigma^{-q}-\sigma^q)\,\sigma\,d\sigma}{\left(1+2\frac{c}{\gamma}\sigma+\sigma^2\right)\left(1-2\frac{c}{\gamma}\sigma+\sigma^2\right)(1+\sigma^2)}. \qquad (59)$$

По этой величине P определим всю силу давления струи на клин, которая будет $R = 2P\sin\frac{q\pi}{2}$. Переходим к определению длины щек клина. Для этого подставляем формулу (57) в выражение (16):

$$s = \frac{2c^2\alpha}{w\gamma^2 q}\int_0^\infty \frac{e^\vartheta\sinh\frac{\vartheta}{q}\,d\vartheta}{\left(\cosh^2\frac{\vartheta}{q}-\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\cosh\frac{\vartheta}{q}}. \qquad (60)$$

Вводим сюда то же переменное интеграции σ, какое было введено выше:

$$s = \frac{8\alpha c^2}{w\gamma^2}\int_0^1 \frac{(1-\sigma^2)\,\sigma^{-q+1}\,d\sigma}{\left(1+2\frac{c}{\gamma}\sigma+\sigma^2\right)\left(1-2\frac{c}{\gamma}\sigma+\sigma^2\right)(1+\sigma^2)}. \quad (61)$$

Формулы (59) и (61) совпадут с формулами А. П. Котельникова, если последние применим к равнобокому клину, положив входящую в них величину θ равной нулю [1]. Исключение коэфициента $\frac{\alpha c^2}{\gamma^2}$ из формул (59) и (61) позволяет определить P по q, s, w и $\frac{c}{\gamma}$. Что же касается величины $\frac{c}{\gamma}$, то она должна быть определена из формулы (61), в которой на основании сказанного в начале этого параграфа об изменении ψ следует положить:

$$\alpha = \frac{Q}{2\pi},$$

где Q — все количество жидкости, протекающей в секунду. А. П. Котельников совершает все интеграции, входящие в его формулы для какого-нубудь $q > 2$. Мы остановимся здесь только на случае $q = 1$, соответствующем пластинке. Для этого случая будет удобнее воспользоваться прямо формулами (58) и (60). Положив $c = \gamma \sin\nu$, представим эти формулы в виде:

$$R = 4\rho w\alpha \sin^2\nu \int_0^\infty \frac{\sinh^2\vartheta \cosh\vartheta\, d\vartheta}{(\cosh^2\vartheta - \sin^2\nu)\cosh^2\vartheta},$$

$$s = \frac{2\alpha}{w}\sin^2\nu \int_0^\infty \frac{(\sinh\vartheta + \cosh\vartheta)\sinh\vartheta\, d\vartheta}{(\cosh^2\vartheta - \sin^2\nu)\cosh\vartheta} =$$

$$= \frac{2\alpha}{w}\sin^2\nu\left\{\int_0^\infty \frac{\sinh^2\vartheta\cosh\vartheta\, d\vartheta}{(\cosh^2\vartheta - \sin^2\nu)\cosh^2\vartheta} + \int_0^\infty \frac{\sinh\vartheta\, d\vartheta}{(\cosh^2\vartheta - \sin^2\nu)}\right\}.$$

[1] Протокол 89 заседания Секции физико-математических наук в Казани, 1889, стр. 22.

Вводим в интеграл первой формулы и в одинаковый с ним интеграл второй формулы подстановку $\sinh \vartheta = z$, а во второй интеграл формулы второй вводим подстановку $\cosh \vartheta = z$. Получаем:

$$R = 4\rho w a \sin^2 \nu \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{(z^2 + \cos^2 \nu)(1 + z^2)},$$

$$s = \frac{2a}{w} \sin^2 \nu \left\{ \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{(z^2 + \cos^2 \nu)(1 + z^2)} + \int_1^\infty \frac{dz}{(z^2 - \sin^2 \nu)} \right\}.$$

Берем интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^2 dz}{(z^2 + \cos^2 \nu)(1 + z^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \nu} \int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^2} - \frac{\cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + \cos^2 \nu} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \nu} \frac{\pi}{2} (1 - \cos \nu),$$

$$\int_1^\infty \frac{dz}{z^2 - \sin^2 \nu} = \frac{1}{2 \sin \nu} \lg \frac{1 + \sin \nu}{1 - \sin \nu}.$$

Подставляя, находим:

$$R = 2\pi w \rho a (1 - \cos \nu),$$

$$s = \frac{a}{w} \left\{ \pi (1 - \cos \nu) + \sin \nu \lg \left(\frac{1 + \sin \nu}{1 - \sin \nu} \right) \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$R = \frac{\pi}{\nu} 2s\rho w^2, \qquad (62)$$

$$\pi + \frac{\cos \frac{\nu}{2}}{\sin \frac{\nu}{2}} \lg \left(\frac{1 + \sin \nu}{1 - \sin \nu} \right)$$

где вспомогательный угол ν определяется из формулы:

$$\pi (1 - \cos \nu) + \sin \nu \lg \left(\frac{1 + \sin \nu}{1 - \sin \nu} \right) = \frac{2s\pi w}{Q}. \qquad (63)$$

При $Q = \infty$ получаем:

$$\nu = 0, \quad \lim \frac{\cos \frac{\nu}{2}}{\sin \frac{\nu}{2}} \lg \left(\frac{1 + \sin \nu}{1 - \sin \nu} \right) = 4,$$

так что формула (62) обращается при этом в формулу (32) для силы удара беспредельного потока.

Если бы мы, воспользовавшись образующей сетью фиг. 19, за направляющую сеть приняли сеть фиг. 15, то получили бы удар косой струи о клин, т. е. ту самую задачу, которую разобрал А. П. Котельников. Но при этом в задаче останется указанное А. П. Котельниковым ограничение, требующее, чтобы, ударившись о клин, струя разделилась на две струи, несущие каждая одно и то же количество жидкости. Задача перестала бы быть стесненной этим ограничением, если бы при направляющей сети фиг. 15 мы взяли образующую сеть фиг. 21, которая будет описана в следующем параграфе.

§ 9. О соударении двух струй жидкости. Мы рассмотрим здесь задачу Фохта о соударении струй, ограничиваясь только случаем двух струй, несущих из бесконечности равные количества жидкости с равными скоростями. Эта задача решена у Фохта только для того случая, когда угол между направлениями струй в бесконечности есть прямой; мы же разрешим ее для всякого угла между направлениями струй. Для решения предложенной задачи мы построим образующую сеть несколько более общего вида, нежели образующая сеть фиг. 19. Именно при всех положениях, которые были приняты для построения сети (фиг. 19), будем считать: $\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = -\alpha'$, где $\alpha' > \alpha$, и $\beta_1 = -\beta$, $\beta_2 = \beta'$, где

$$\beta = \frac{2\alpha}{\alpha + \alpha'} \gamma, \quad \beta' = \frac{2\alpha'}{\alpha + \alpha'} \gamma.$$

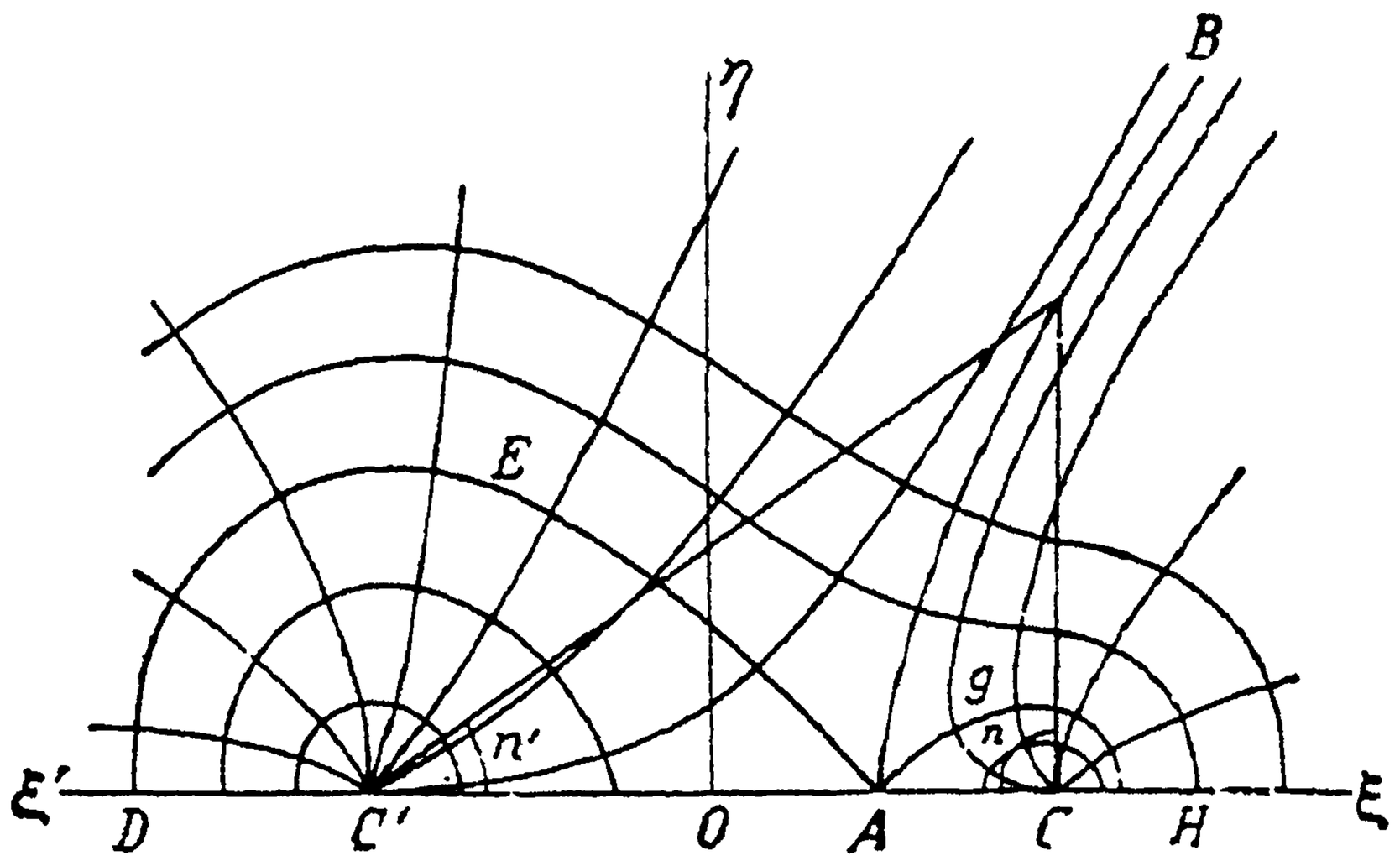
Тогда формулы (56) обратятся в

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2} [(\xi - \gamma)^2 + \eta^2] - \frac{\alpha'}{2} \lg [(\xi + \gamma)^2 + \eta^2] + \alpha \lg \beta + \alpha' \lg \beta',$$

$$\psi = \alpha \left(\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi + \gamma} \right) - \alpha' \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi + \gamma}. \qquad (64)$$

Легко увидеть, что условие $\psi = 0$ будет удовлетворено всеми точками (фиг. 21) отрезка оси абсцисс CC', заключенного между полюсами $(\gamma, 0)$ и $(-\gamma, 0)$; кроме того, это условие будет удовлетворено точками, лежащими на кривой AB, для которых между углами n и n' существует соотношение:

$$n = \frac{\alpha'}{\alpha} n'.$$



Фиг. 21.

Так как вследствие того, что A есть критическая точка, кривая BA пересекает CC' под прямым углом, то написанное соотношение между углами n и n' приводит нас к заключению, что $CA = \beta$ и $C'A = \beta'$, где β и β' имеют вышеуказанные значения [1].

---

[1] Из прилагаемого чертежа очевидно, что мы имеем такие соотношения:

$$\eta = (\xi - \gamma) \operatorname{tg} (\pi - n); \qquad \pi - n = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\eta}{\xi - \gamma} \right);$$

$$\eta = (\xi + \gamma) \operatorname{tg} n'; \qquad n' = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\eta}{\xi + \gamma} \right).$$

Следовательно, ψ принимает вид:

$$\psi = \alpha\pi - \alpha (\pi - n) - \alpha' n' = \alpha n - \alpha' n'.$$

Положив $\psi = 0$, имеем:
или 1)

$$n = n' = 0,$$

что соответствует точкам отрезка $C'C$;
или 2)

$$\alpha n = \alpha' n',$$

При $\psi = \alpha\pi$ будем иметь бесконечный отрезок на оси абсцисс $C\xi$, а при $\psi = -\alpha'\pi$ будем иметь бесконечный отрезок на оси абсцисс $C'\xi'$. При изменении ψ от 0 до $\alpha\pi$ будем получать линии $\psi = \text{const}$, проходящие чрез полюс C и заключенные внутри контура $BA\xi$; а при изменении ψ от 0 до $-\alpha'\pi$ будем получать кривые $\psi = \text{const}$, проходящие через полюс C' и заключенные внутри контура $BA\xi'$.

Линия $\varphi = 0$ имеет вид $DEAGH$; она проходит через точку A [что следует из обращения в нуль второй части первой из формул (64) при $\eta = 0$, $\gamma - \xi = \beta$, $\gamma + \xi = \beta'$] и охватывает полюсы C и C'. При изменении φ от 0 до $-\infty$ мы будем получать линии $\varphi = \text{const}$, охватывающие кривую $DEAGH$, а при изменении φ от 0 до $+\infty$ мы будем иметь линии $\varphi = \text{const}$,

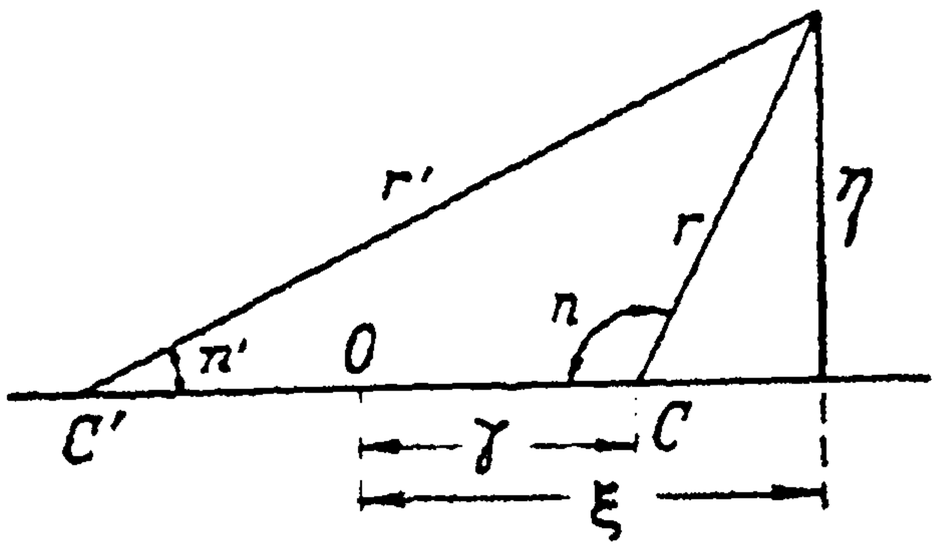
---

т. е.

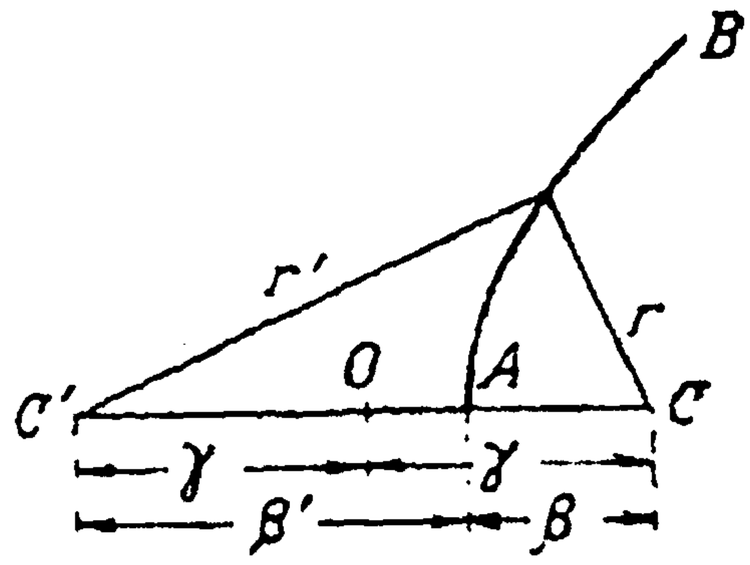
$$n = \frac{\alpha'}{\alpha} n.$$

Далее:

$$r \sin n = r' \sin n';$$



Фиг. А.



Фиг. Б.

для малых n и n' это соотношение можно написать в виде:

$$rn = r'n',$$

откуда

$$\frac{r'}{r} = \frac{n}{n'} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Следовательно:

$$\frac{r + r'}{r} = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha},$$

но

$$\lim_{n \to 0} (r + r') = 2\gamma, \qquad \lim_{n \to 0} r = \beta,$$

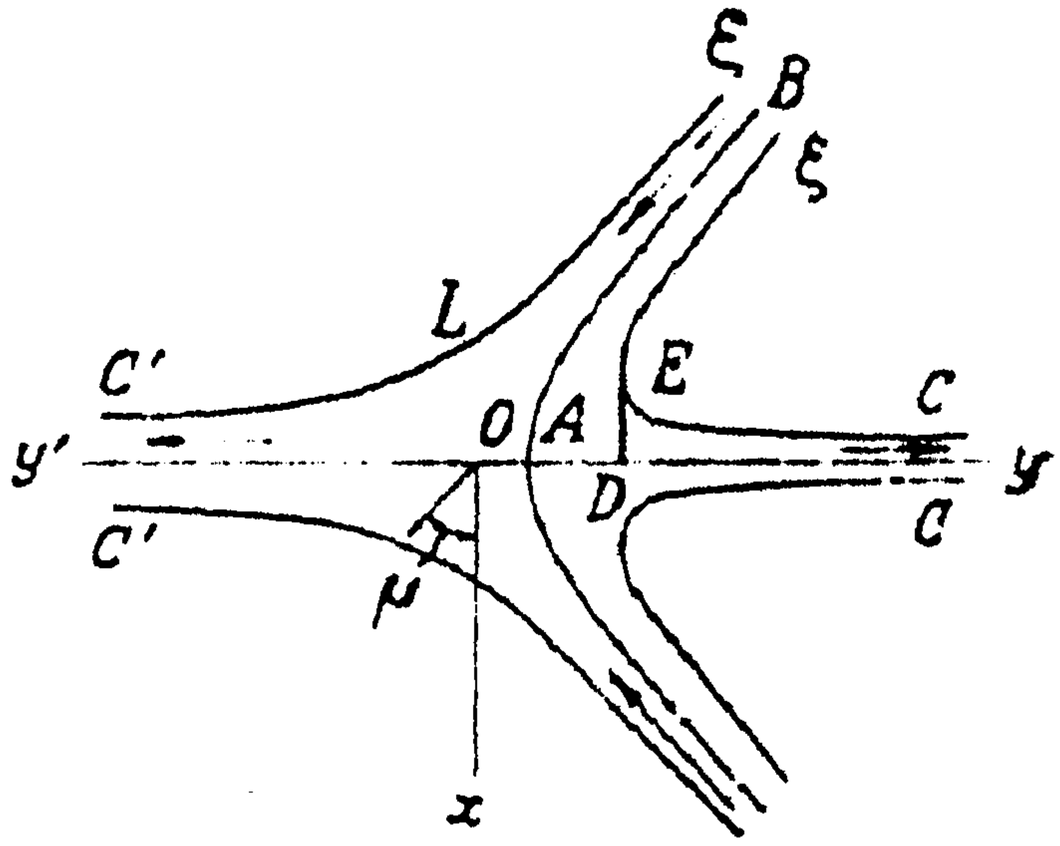
поэтому

$$\frac{2\gamma}{\beta} = \frac{\alpha' + \alpha}{\alpha}, \qquad \beta = \frac{2\alpha}{\alpha + \alpha'} \gamma,$$

и мы получили формулы, предшествующие формуле (64). *Прим. ред.*

состоящие каждая из двух замкнутых кривых, охватывающих полюсы C и C' и лежащих внутри петель AGH и AED, причем при $\varphi = \infty$ эти кривые обратятся в полюсы C и C'.

Примем для решения предложенной задачи направляющую сеть фиг. 15, допустив, что $c = \gamma$ и $e = \gamma \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' + \alpha}$, т. е. что фокусное расстояние FF' направляющей сети равно расстоянию CC' между полюсами нашей образующей сети и что расстояние $O'O$ полюса O' направляющей сети равно расстоянию AO точки A образующей сети. Предположим, что направляющая сеть фиг. 15 наложена на образующую сеть фиг. 21 так, что фокусы F и F' совпадают с полюсами C и C'; тогда и полюс O' совпадает с точкой A. Допуская, что $q = 1$, будем иметь для всех бесконечно удаленных точек, от которых идет течение, $\vartheta = 0$ и $\theta = -\mu$. При этом по формуле (35) и данному выше значению e следует, что



Фиг. 22.

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha + \alpha'} = \sin \mu,$$

откуда

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu}. \tag{65}$$

Пойдем по линии $\psi = 0$, изменяя φ от $-\infty$ до $+\infty$. На кривой BA будем иметь: ϑ изменяется от 0 до ∞ и θ изменяется от $-\mu$ до 0, что соответствует в действительном течении жидкости (фиг. 22) линии тока BA. Поворачивая затем на отрезок оси абсцисс AC, будем иметь на нем: $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, что соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока AC. Если же мы повернем при значении $\psi = 0$ по оси абсцисс налево вдоль отрезка AC', то будем иметь на нем: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется

от ∞ до 0, что соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока AC'. Для линии тока $\psi = \pi\alpha$ мы должны итти по отрезку оси абсцисс ξC, на котором $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\mu$ до $\frac{\pi}{2}$, так что в действительном течении жидкости получим при этом правый контур струи ξC. Наконец, при $\psi = -\pi\alpha'$ мы должны итти по отрезку оси абсцисс $\xi' C'$, на котором $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\mu$ до $-\frac{\pi}{2}$, что соответветствует левому контуру струи $\xi' C'$.

Мы получили таким образом решение задачи об ударе струи о плоскость yy'. Если вообразим снизу плоскости yy' другую струю, симметричную первой, то имеем право (вследствие равенства давлений сверху и снизу плоскости) плоскость отнять и получить решение задачи о соударении двух одинаковых струй, направляющихся друг к другу из бесконечности под углом $\pi - 2\mu$.

Вследствие сказанного выше все количество жидкости в каждой из струй есть

$$Q = \pi\alpha + \pi\alpha'.$$

Эта масса по соударении разбивается на две:

$$Q_1 = \pi\alpha \quad \text{и} \quad Q_2 = \pi\alpha',$$

причем первая течет направо, а вторая — налево. Из формулы (65) следует, что

$$Q_1 = \frac{Q}{2}(1 - \sin\mu), \qquad Q_2 = \frac{Q}{2}(1 + \sin\mu). \tag{66}$$

Отсюда видно, что при μ, близком к $\frac{\pi}{2}$, т. е. при очень остром угле между соударяющими струями, Q_1 мало, и количество жидкости, попадающее в возвратную струю CC, невелико.

Составим уравнения контуров свободных поверхностей наших струй. Из формул (36) и (64) имеем для отрезков $C\xi$ и $C'\xi'$:

$$\pm\frac{c}{r}\cos^2\mu = \sin\mu + \sin\theta,$$

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\{(1-\sin\mu)\lg[r \mp c(1-\sin\mu)] + (1+\sin\mu)\lg[r \mp c(1+\sin\mu)]\} + \text{const.}$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \mp\frac{c}{r}\cos^2\mu - \sin\mu, \\ \cos\theta &= \sqrt{1-\left(\frac{c}{r}\cos^2\mu \mp \sin\mu\right)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$d\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1-\sin\mu}{r \mp c(1-\sin\mu)} + \frac{1+\sin\mu}{r \mp c(1+\sin\mu)}\right]dr.$$

Подставляем формулы (67) в формулы (14) и вводим новое независимое переменное $\sigma = \frac{c}{r}$. Находим:

$$dy = \frac{Q}{2\pi w}\left[\mp\cos^2\mu - \frac{\sin\mu}{\sigma}\right]\left[\frac{1-\sin\mu}{1 \mp (1-\sin\mu)\sigma} + \frac{1+\sin\mu}{1 \mp (1+\sin\mu)\sigma}\right]d\sigma, \tag{68}$$

$$dx = \frac{Q}{2\pi w}\sqrt{1-(\mp\sigma\cos^2\mu - \sin\mu)^2}\left[\frac{1-\sin\mu}{1 \mp (1-\sin\mu)\sigma} + \frac{1+\sin\mu}{1 \mp (1+\sin\mu)\sigma}\right]\frac{d\sigma}{\sigma},$$

где параметр σ получает значение от 0 до

$$\sigma = \frac{1}{1 \mp \sin\mu}.$$

Для интеграции первого уравнения представляем его в виде:

$$dy = \frac{Q}{2\pi w}\left[-\frac{2\sin\mu}{\sigma} \mp \frac{(1-\sin\mu)^2}{1 \mp (1-\sin\mu)\sigma} \mp \frac{(1+\sin\mu)^2}{1 \mp (1+\sin\mu)\sigma}\right]d\sigma.$$

Интегрируем:

$$y = \frac{Q}{2\pi w}\{-2\sin\mu\lg\sigma - (1-\sin\mu)\lg[1 \mp (1-\sin\mu)\sigma] + (1+\sin\mu)\lg[1 \mp (1+\sin\mu)\sigma]\} + C, \tag{69}$$

где C — произвольное постоянное, зависящее от места начала координат O. Мы видим, что при верхнем знаке y обращается в $+\infty$ при $\sigma = 0$ и при $\sigma = 1 : (1 - \sin\mu)$, т. е. контур струи имеет вид ξEC; при нижнем же знаке y обращается в $+\infty$ при $\sigma = 0$ и обращается в $-\infty$ при $\sigma = 1 : (1 + \sin\mu)$, что соответствует контуру струи $\xi' LC'$. Рассматривая первую формулу (68), видим, что при нижнем знаке dy не обращается в нуль ни для каких из указанных значений σ; при верхнем же знаке мы имеем $dy = 0$ при

$$\sigma = \frac{\sin\mu}{\cos^2\mu} = \frac{\sin\mu}{1 - \sin^2\mu}.$$

Подставляя это значение σ в формулу (69), находим наименьшее значение $y_{\min} = OD$; оно будет:

$$y_{\min} = \frac{Q}{2\pi w}\{-2\sin\mu \lg\sin\mu + (1+\sin\mu)\lg(1+\sin\mu) - (1-\sin\mu)\lg(1-\sin\mu)\} + C.$$

Теперь следует интегрировать вторую из формул (68) и, выразив x по параметру σ, исключить этот параметр из полученной формулы и формулы (69). Но будет несколько проще установить связь между координатой y и дугой s определяемой кривой. Для этого пишем по формулам (68):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = = \frac{Q}{2\pi w}\left[\frac{1-\sin\mu}{1 \mp (1-\sin\mu)\sigma} + \frac{1+\sin\mu}{1 \pm (1+\sin\mu)\sigma}\right]\frac{d\sigma}{\sigma} = = -\frac{Q}{2\pi w}\left(\mp\frac{(1-\sin\mu)^2}{1 \mp (1-\sin\mu)\sigma} \pm \frac{(1+\sin\mu)^2}{1 \pm (1+\sin\mu)\sigma} - \frac{2}{\sigma}\right)d\sigma.$$

Интегрируем:

$$s = -\frac{Q}{2\pi w}\{(1-\sin\mu)\lg[1 \mp (1-\sin\mu)\sigma] + (1+\sin\mu)\lg[\pm(1+\sin\mu)\sigma] - 2\lg\sigma\} + C', \qquad (70)$$

где C' зависит от начала счета дуг.

Исключение σ между уравнениями (69) и (70) дает нам искомую связь между y и s.

§ 10. Удар бесконечно широкого потока о пластинку, поставленную при его свободной поверхности. В предыдущих параграфах мы изложили с помощью нашей теории почти весь материал различных исследований по интересующему нас вопросу. Читатель видит, что весь этот материал получается весьма просто с помощью направляющих сетей фиг. 8 и 15. Прежде нежели перейти к задачам, решаемым с помощью новых направляющих сетей, покажем, что и задачи, относящиеся к этим двум сетям, еще далеко не исчерпаны. Так, в конце § 8 было сказано, что исследования А. П. Котельникова относятся к случаю, при котором струя после удара о клин разбивается на две половины с равными количествами протекающей жидкости, и что это стеснение может быть устранено, когда при направляющей сети фиг. 8 или 15 возьмем образующую сеть фиг. 21. Исследуем в этом параграфе тот интересный случай, в котором одна из половин разбившейся струи несет бесконечное количество жидкости, а другая — конечное. Образующая сеть этой задачи может быть получена из образующей сети фиг. 21 при $\alpha = \infty$ и $\gamma = \infty$; но мы построим ее здесь прямо из нашей общей формулы (10). Полагаем [функция $F(u)$ может иметь мнимое постоянное] в этой формуле:

$$F(u) = \alpha\left(\pi i - \frac{u}{\gamma}\right),$$

$$\alpha_1 = -\alpha,\ \beta_1 = \gamma,\ \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0,\ \gamma_1 = \gamma.$$

Это дает нам:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\gamma}\left(-u + \gamma\pi i - \gamma \lg \frac{u-\gamma}{\gamma}\right)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\alpha}{\gamma}\left(\xi + \frac{\gamma}{2}\lg\frac{(\xi-\gamma)^2+\eta_1^2}{\gamma^2}\right), \\ \psi &= \frac{\alpha}{\gamma}\left[\left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}\right)\gamma - \eta\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

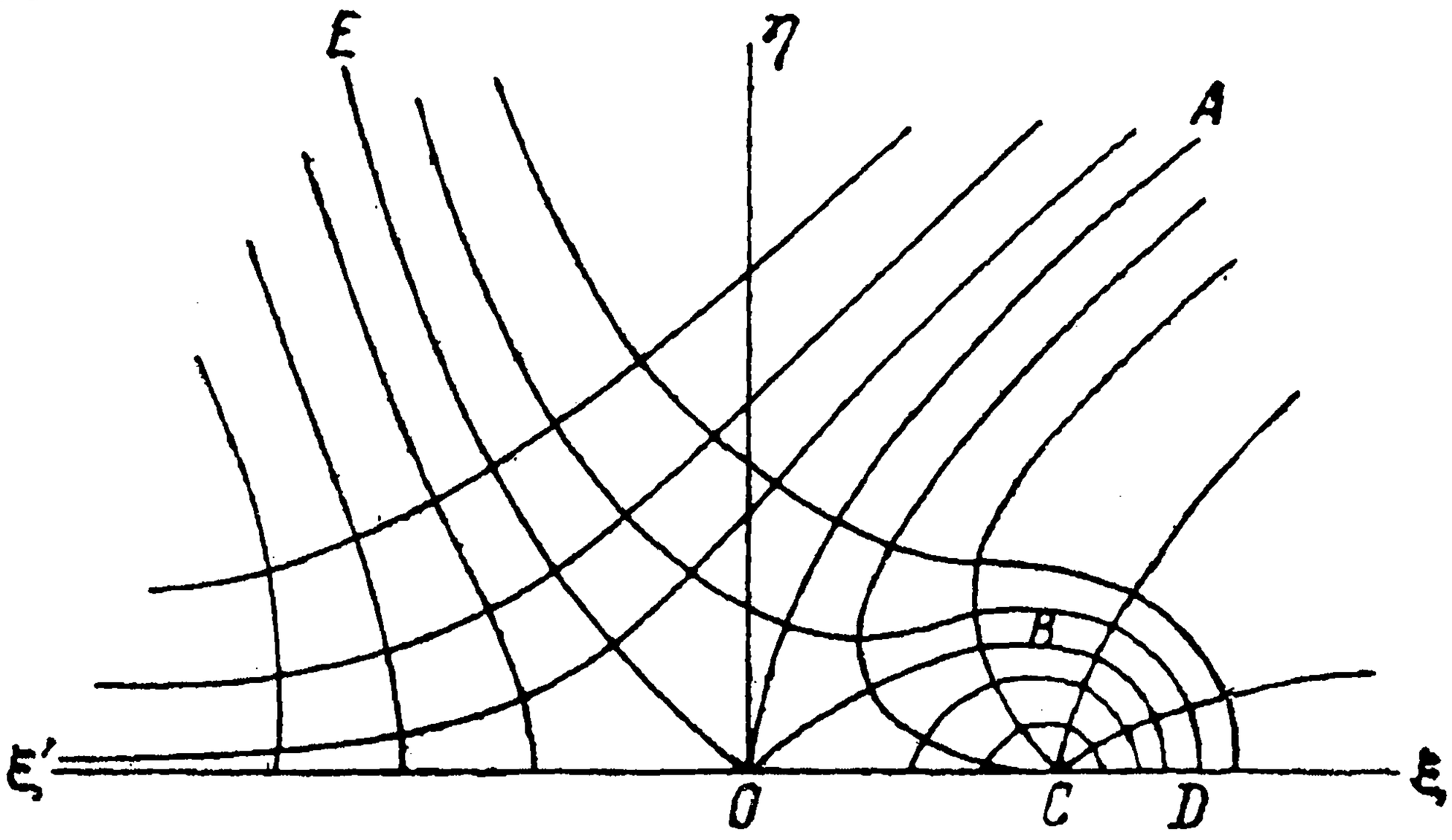
Линия $\psi = 0$ дается в получении образующей сети уравнением:

$$\eta = \gamma\left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}\right).$$

Эта линия состоит (фиг. 23) из части оси абсцисс $\xi' C$, так как для всех точек этого отрезка $\eta = 0$ и

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi - \gamma} = \pi,$$

и из кривой ветви OA, которую легко построить по написанному уравнению. При $\psi = \alpha\pi$ получим для соответственной



Фиг. 23.

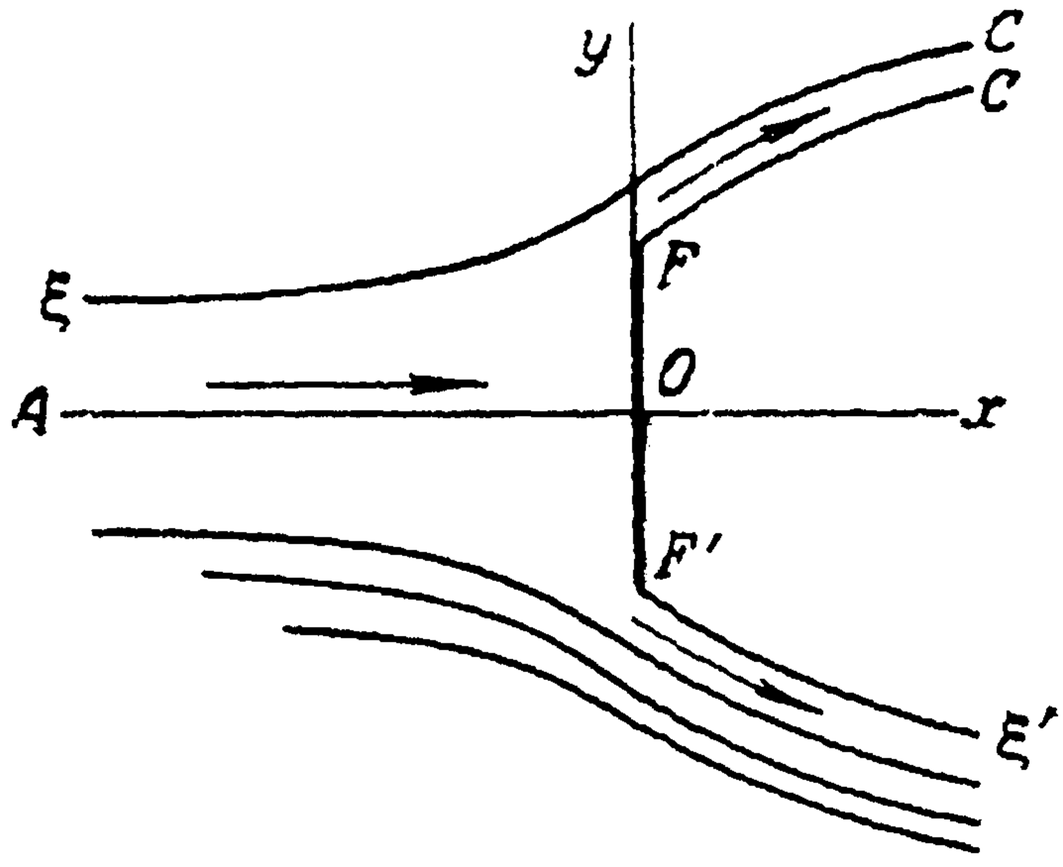
линии образующей сети отрезок оси абсцисс $C\xi$; для значения же ψ между 0 и $\alpha\pi$ будем иметь линии образующей сети, выходящие из полюса C и заполняющие все пространство ξCOA. Для изменения ψ от 0 до $-\infty$ будем иметь кривые образующей сети, заполняющие всю остальную полуплоскость, как это представлено на фиг. 23. Кривая образующей сети $\varphi = 0$ будет иметь уравнение:

$$(\xi - \gamma)^2 + \eta^2 = \gamma^2 e^{-\frac{2\xi}{\gamma}}$$

и представится на нашей полуплоскости кривой $EOBD$ с кратной точкой в начале координат O. Все кривые $\varphi = \text{const}$ при изменении постоянного от 0 до ∞ будут состоять из двух ветвей, из которых одна замкнутая заключена внутри петли OBD, а другая разомкнутая лежит влево от кривой OE. При изменении же постоянного от 0 до $-\infty$ будем получать кривые, расположенные влево от кривой $EOBD$.

Предположим теперь, что направляющая сеть фиг. 8, для которой $c < \gamma$ и $q = 1$, наложена на образующую сеть фиг. 23

так, что оси координат совпадают, и посмотрим, какое при этом получится течение жидкости. Идя по линии тока $\psi = 0$, будем иметь на линии AO угол θ и величину ϑ изменяющимися, что дает в действительном течении жидкости (фиг. 24) некоторую линию тока AO. Переходя при том же значении $\psi = 0$ в точке O на отрезок оси абсцисс OF, будем иметь сразу изменение θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и потом на всем отрезке будем иметь $\theta = \frac{\pi}{2}$, что соответствует в действительном течении жидкости части пластинки OF; продолжая затем итти на оси абсцисс вдоль отрезка FC, мы будем иметь $\vartheta = 0$, что соответствует в действительном течении жидкости нижнему контуру FC струйки, перекинутой через пластинку. Наконец, переходя при том же значении $\psi = 0$ на отрезок оси абсцисс OF', будем иметь на нем $\theta = -\frac{\pi}{2}$, что соответствует в действительном течении жидкости нижней половине пластинки OF; продолжая же итти в том же направлении по бесконечному отрезку оси абсцисс $F'\xi'$, будем иметь на нем $\vartheta = 0$, что соответствует в действительном течении контуру $F'\xi'$ свободной поверхности убегающего беспредельного потока. Поворачивая скорость, представленную на фиг. 24 стрелкой, от оси Ox к Oy, мы убедимся, что, переходя от линии $AOF'\xi'$ вниз, мы будем иметь убывание ψ от 0 до $-\infty$, откуда следует, что бесконечный поток располагается вниз от линии $AOF'\xi'$. С другой стороны, таким же образом убеждаемся, что, переходя от линии тока $AOFC$ вверх, мы будем иметь возрастание ψ от 0 до $\alpha\pi$.



Фиг. 24.

При $\psi = \alpha\pi$ мы должны итти на фиг. 23 по отрезку оси абсцисс $C\xi$, на котором $\vartheta = 0$, что соответствует на фиг. 24 верхней свободной поверхности струи ξC.

Количество жидкости, перебрасываемое в единицу вре-

мени через пластинку струйкой ξCCF, будет согласно сказанному:

$$Q = \alpha\pi.$$

Определим силу давления потока на пластинку по данным w, Q и ширине пластинки $2b$. Для частей пластинки OF и OF' будем иметь по формулам (18) и (71):

$$\cosh\vartheta = \frac{c}{r}, \quad \sinh\vartheta = \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - 1},$$
$$\varphi = -\frac{\alpha}{\gamma}\left(\pm r + \gamma \lg\frac{\gamma \mp r}{\gamma}\right), \tag{72}$$

где верхний знак относится к отрезку FO, а нижний знак — к отрезку OF'. Составим с помощью последней из этих формул величину диференциала:

$$d\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{rdr}{\gamma \mp r}. \tag{73}$$

Подставляя в формулу (15) величины, данные формулами (72) и (73), получим для выражения сил давления P и P' на части OF и OF' нашей пластинки формулы:

$$P = \frac{\rho w \alpha}{\gamma}\int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\,\frac{dr}{\gamma - r},$$

$$P' = \frac{\rho w \alpha}{\gamma}\int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\,\frac{dr}{\gamma + r}.$$

Чтобы удобнее взять эти интегралы, сделаем сначала подстановку:

$$r = c \cdot \cos 2\omega,$$
$$\sqrt{c^2 - r^2} = 2c \cdot \sin\omega\cos\omega,$$
$$dr = -4c \cdot \sin\omega\cos\omega d\omega.$$

Получим:

$$P = \frac{8c^2 w\alpha\rho}{\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\omega\cos^2\omega d\omega}{(\gamma - c)\cos^2\omega + (\gamma + c)\sin^2\omega},$$

$$P' = \frac{8c^2 \varpi x \rho}{\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \omega \cos^2 \omega d\omega}{(\gamma + c)\cos^2 \omega + (\gamma - c)\sin^2 \omega}.$$

Так как вторая формула получается из первой через замену c на $-c$, то займемся только первой формулой. Полагаем $\operatorname{tg} \omega = z$:

$$P = \frac{8\rho \varpi c^2 \alpha}{\gamma(\gamma + c)} \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2 (e^2 + z^2)},$$

где

$$e^2 = \frac{\gamma - c}{\gamma + c}.$$

Назовем интеграл, входящий в эту формулу, через V и напишем:

$$V = \frac{1}{1-e^2}\left\{\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)^2} - e^2 \int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)(e^2+z^2)}\right\},$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)(e^2+z^2)} = \frac{1}{1-e^2}\left(-\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} + \int_0^1 \frac{dz}{e^2+z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{e}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{e}\right),$$

$$V = \frac{\gamma + c}{2c}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma-c}}\right).$$

Таким образом

$$P = \frac{4\rho \varpi c \alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma-c}}\right),$$

а следовательно,

$$P' = \frac{4\rho w c \alpha}{\gamma}\left(-\frac{1}{4}+\frac{\pi\gamma}{8c}-\frac{\sqrt{\gamma^2-c^2}}{2c}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\gamma-c}{\gamma+c}}\right).$$

Складывая P с P' и замечая, что

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma-c}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\gamma-c}{\gamma+c}}=\frac{\pi}{2},$$

найдем искомую силу R давления потока о пластинку:

$$R = \pi\rho w\alpha\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}\right]. \qquad (74)$$

Переходим к определению длин $OF = s$ и $OF' = s'$. Для этого подставляем в формулу (16) величину $d\varphi$ из формул (73) и на основании формул (72) полагаем, что

$$e^{\vartheta} = \cosh\vartheta+\sinh\vartheta = \frac{c}{r}+\sqrt{\frac{c^2}{r^2}-1}.$$

Получаем:

$$s = \frac{\alpha}{w\gamma}\left(c\int_0^c\frac{dr}{\gamma-r}-\int_0^c\sqrt{c^2-r^2}\,\frac{dr}{\gamma-r}\right),$$

$$s' = \frac{\alpha}{w\gamma}\left(c\int_0^c\frac{dr}{\gamma+r}+\int_0^c\sqrt{c^2-r^2}\,\frac{dr}{\gamma+r}\right).$$

Первые интегралы, входящие в эти формулы, берутся прямо, вторые же нами уже взяты при определении величин P и P'. Поэтому прямо получаем:

$$s = \frac{\alpha c}{w\gamma}\left(\lg\frac{\gamma}{\gamma-c}+1+\frac{\pi\gamma}{2c}-2\frac{\sqrt{\gamma^2-c^2}}{c}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma-c}}\right),$$

$$s' = \frac{\alpha c}{w\gamma}\left(\lg\frac{\gamma+c}{\gamma}-1+\frac{\pi\gamma}{2c}-2\frac{\sqrt{\gamma^2-c^2}}{c}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\gamma-c}{\gamma+c}}\right).$$

Составляя сумму этих величин, найдем ширину пластинки $2b$:

$$2b = \frac{\alpha}{w}\left\{\frac{c}{\gamma}\lg\frac{1+\frac{c}{\gamma}}{1-\frac{c}{\gamma}}+\pi\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}\right)\right\}. \qquad (75)$$

Исключаем α из формул (74) и (75):

$$R = \frac{\pi}{\pi + \frac{\frac{c}{\gamma}\lg\left(\frac{1+\frac{c}{\gamma}}{1-\frac{c}{\gamma}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}}} 2b\rho w^2. \tag{76}$$

Сюда входит отношение $\frac{c}{\gamma}$, которое должно быть определено из формулы (75) по замене в ней α на $\frac{Q}{\pi}$.

Если сделаем эту замену и положим $\frac{c}{\gamma} = \sin\nu$, то формулы (75) и (76) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2b\pi w}{Q} &= \pi(1-\cos\nu) + \sin\nu \lg\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}, \\ R &= \frac{\pi}{\pi + \frac{\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\lg\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}} 2b\rho w. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

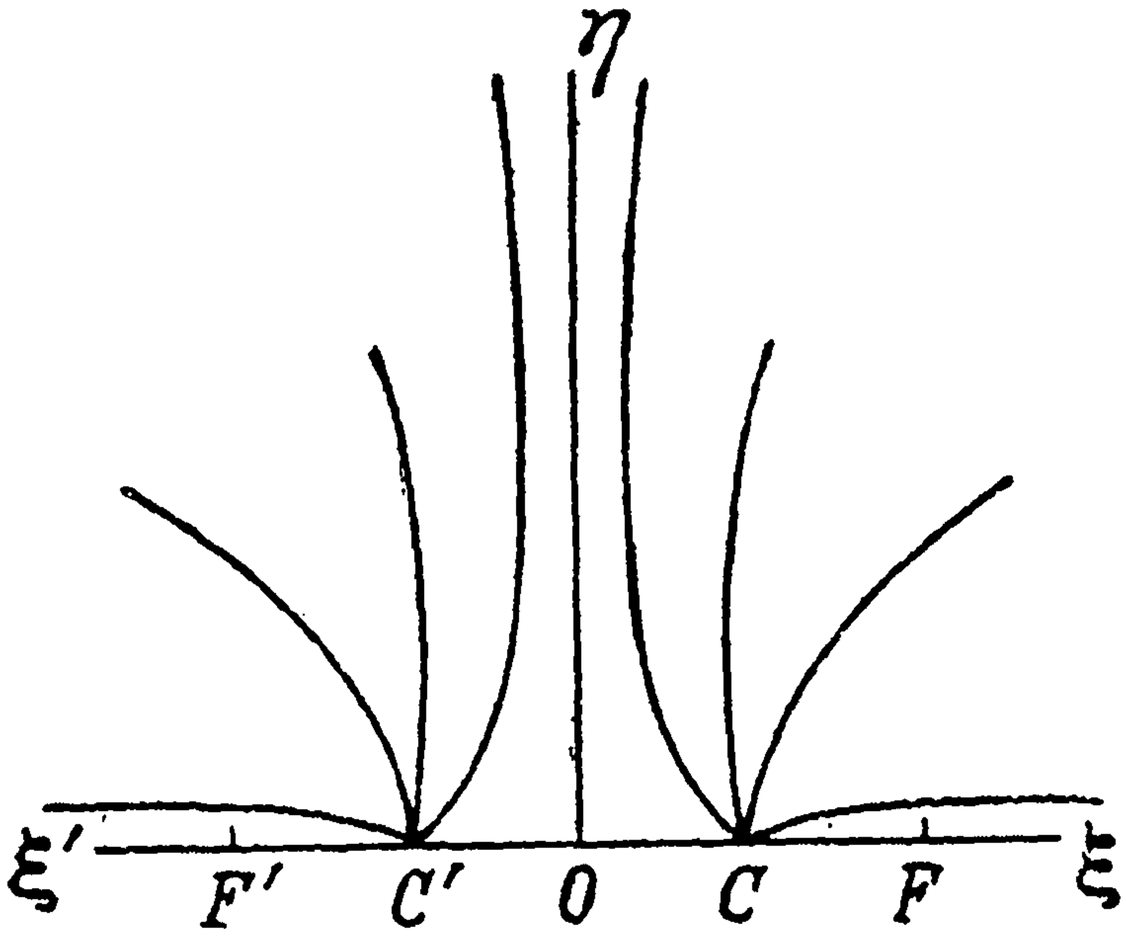
Сравнение этих формул с формулами (63) и (62) приводит нас к интересному заключению. *Бесконечный поток скорости w, ударяющий в край пластинки и бросающий через нее количество жидкости Q, производит на пластинку то же давление, как струйка, пущенная на середину пластинки из бесконечной дали со скоростью w и с количеством жидкости Q.*

§ 11. Истечение жидкости из дна сосуда, прикрытого сверху и имеющего бесконечную ширину и конечную вышину. Эта задача решается с помощью тех же сетей фиг. 19 и 8, с помощью которых была разрешена задача § 8, с той только разницей, что там мы брали $\gamma > c$, а теперь предположим $\gamma < c$, вследствие чего фокусы F и F' (фиг. 25) попадут за полюсы C и C'.

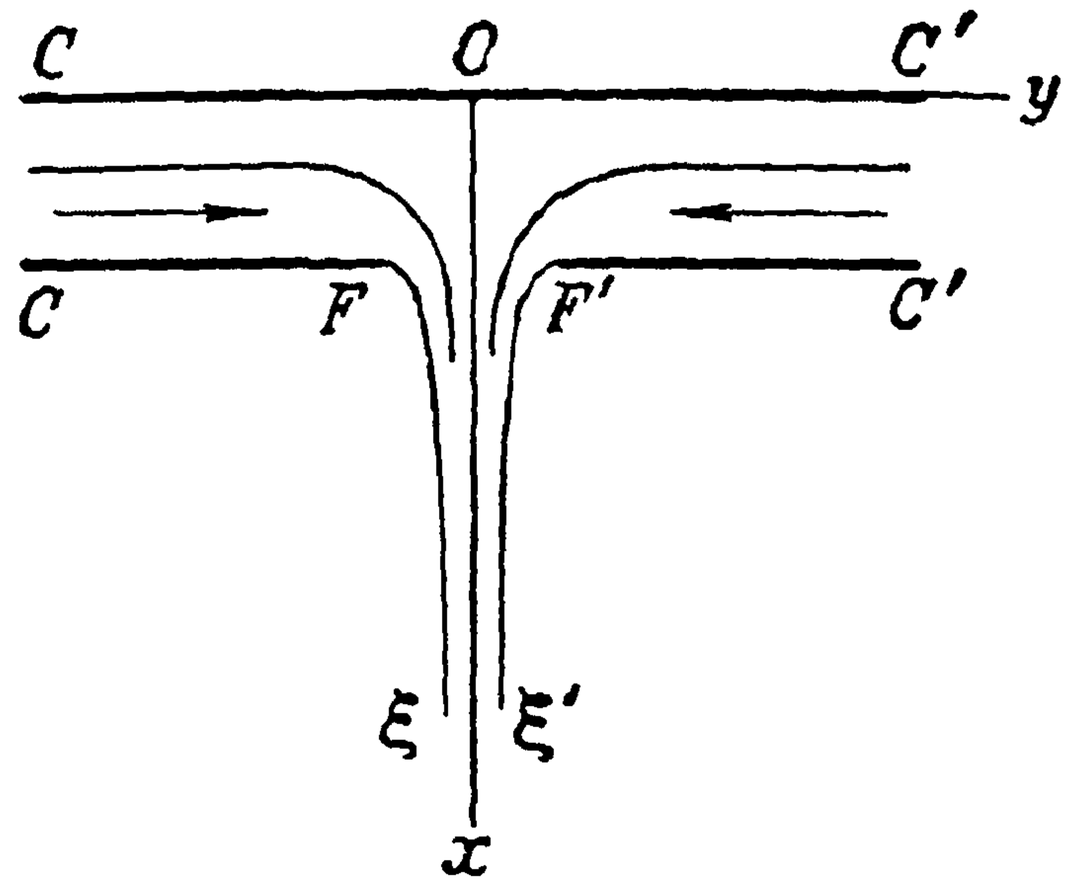
Напишем формулы (56), изменяя в них применительно к нашей задаче α на $-\alpha$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha}{2}\lg\frac{[(\xi-\gamma)^2+\eta^2]\,[(\xi+\gamma)^2+\eta^2]}{\beta^4}, \\ \psi &= -\alpha\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi+\gamma}\right). \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Значению $\psi = 0$ соответствует на фиг. 25 ось ординат ηO и отрезки оси абсцисс OC и OC'; линии $\psi = -\alpha\pi$ и $\psi = \alpha\pi$ соответствуют отрезкам оси абсцисс $C\xi$ и $C'\xi'$; изменение φ от $-\infty$ до $+\infty$ соответствует переходу от полюсов C и C' к бесконечно удаленным точкам. При значении $\psi = 0$ можем итти на фиг. 25 или по $CO\eta$, или по $C'O\eta$, что в действительном течении жидкости фиг. 26 соответствует части CO крышки сосуда и средней линии тока Ox или части $C'O$ крышки сосуда и средней линии тока Ox. Значению $\psi = -\pi\alpha$ соответствует на фиг. 25 конечный отрезок оси абсцисс CF и бесконечный отрезок ее $F'\xi$, что дает на фиг. 26 часть дна сосуда CF и левый контур струи $F\xi$. Значению $\psi = \pi\alpha$ соответствуют на фиг. 25 конечный отрезок оси абсцисс $C'F'$ и бесконечный отрезок ее $F'\xi'$, что дает на фиг. 26 часть дна сосуда $C'F'$ и правый контур струи $F'\xi'$.



Фиг. 25.



Фиг. 26.

Для определения количества вытекающей жидкости

$$Q = 2\pi\alpha$$

по скорости w, высоте сосуда $2h$ и ширине $2b$ отверстия составим уравнение контура $F\xi$. По формулам (78) и (18) имеем для этого контура при $q=1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c}{r} &= \sin\theta, \\ \varphi &= \alpha \lg \frac{r^2-\gamma^2}{\beta^2}, \\ d\varphi &= \frac{2\alpha r dr}{r^2-\gamma^2}. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Подставляем эти величины в формулу (14):

$$dy = \frac{2\alpha c}{w}\frac{dr}{r^2-\gamma^2}.$$

Интегрируем и заменяем α через Q:

$$y = \text{const} - \frac{Q}{2\pi w}\frac{c}{\gamma}\lg\frac{r+\gamma}{r-\gamma}. \tag{80}$$

Исключая из этого уравнения и из второго уравнения (79) r и заменяя φ через sw, где s — длина дуги контура, которая при надлежащем выборе β может отсчитываться от F, получим связь между y и s. Связь эту можно рассматривать, как уравнение кривой $F\xi$. Но для определения Q удобно воспользоваться прямо уравнением (80). Замечаем, что в точке F при $r=c$ имеем:

$$y = -b,$$

а в бесконечно удаленной точке ξ при $r=\infty$ имеем:

$$y = -\frac{Q}{2w}.$$

Получаем по формуле (80):

$$b-\frac{Q}{2w} = \frac{Q}{2\pi w}\frac{c}{\gamma}\lg\frac{1+\frac{\gamma}{c}}{1-\frac{\gamma}{c}}.$$

Отсюда следует, что

$$Q = \frac{\pi}{\pi + \frac{c}{\gamma} \lg \frac{1+\frac{\gamma}{c}}{1-\frac{\gamma}{c}}} 2bw.$$

Для определения входящей сюда величины $\frac{c}{\gamma}$ надо рассмотреть скорость v жидкости в сосуде на бесконечном расстоянии от отверстия FF'. С одной стороны, эта скорость есть $v = Q:2h$, а с другой, — она определяется по величине ϑ в точке C, которая на основании формулы (18) удовлетворяет уравнению:

$$\cosh \vartheta = \frac{c}{\gamma}.$$

Из этой формулы

$$v = we^{-\vartheta} = w\left[\frac{c}{\gamma} - \sqrt{\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2 - 1}\right].$$

Сравнение обеих величин v дает нам соотношение:

$$\frac{Q}{2wh} = \frac{c}{\gamma}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2}\right].$$

Если положим

$$\frac{\gamma}{c} = \sin \nu,$$

то найдем

$$Q = \frac{\pi}{\pi + \frac{1}{\sin \nu} \lg \frac{1+\sin \nu}{1-\sin \nu}} 2bw, \tag{81}$$

$$\frac{b}{h} = \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{1}{\pi \sin \nu} \lg \frac{1+\sin \nu}{1-\sin \nu}\right). \tag{82}$$

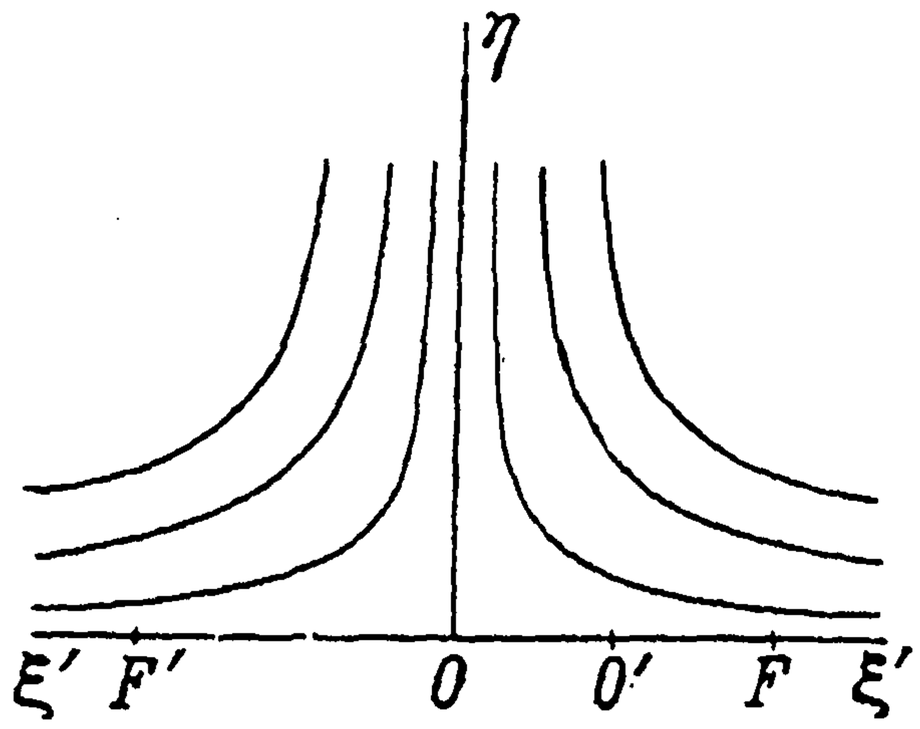
Если вместо логарифма дроби напишем разность логарифмов и развернем их в ряды по степеням $\sin \nu$, то получим:

$$\frac{1}{\sin \nu} \lg \frac{1+\sin \nu}{1-\sin \nu} = 2\left(1 + \frac{1}{3} \sin^2 \nu + \frac{1}{5} \sin^4 \nu + \frac{1}{7} \sin^6 \nu + \ldots\right).$$

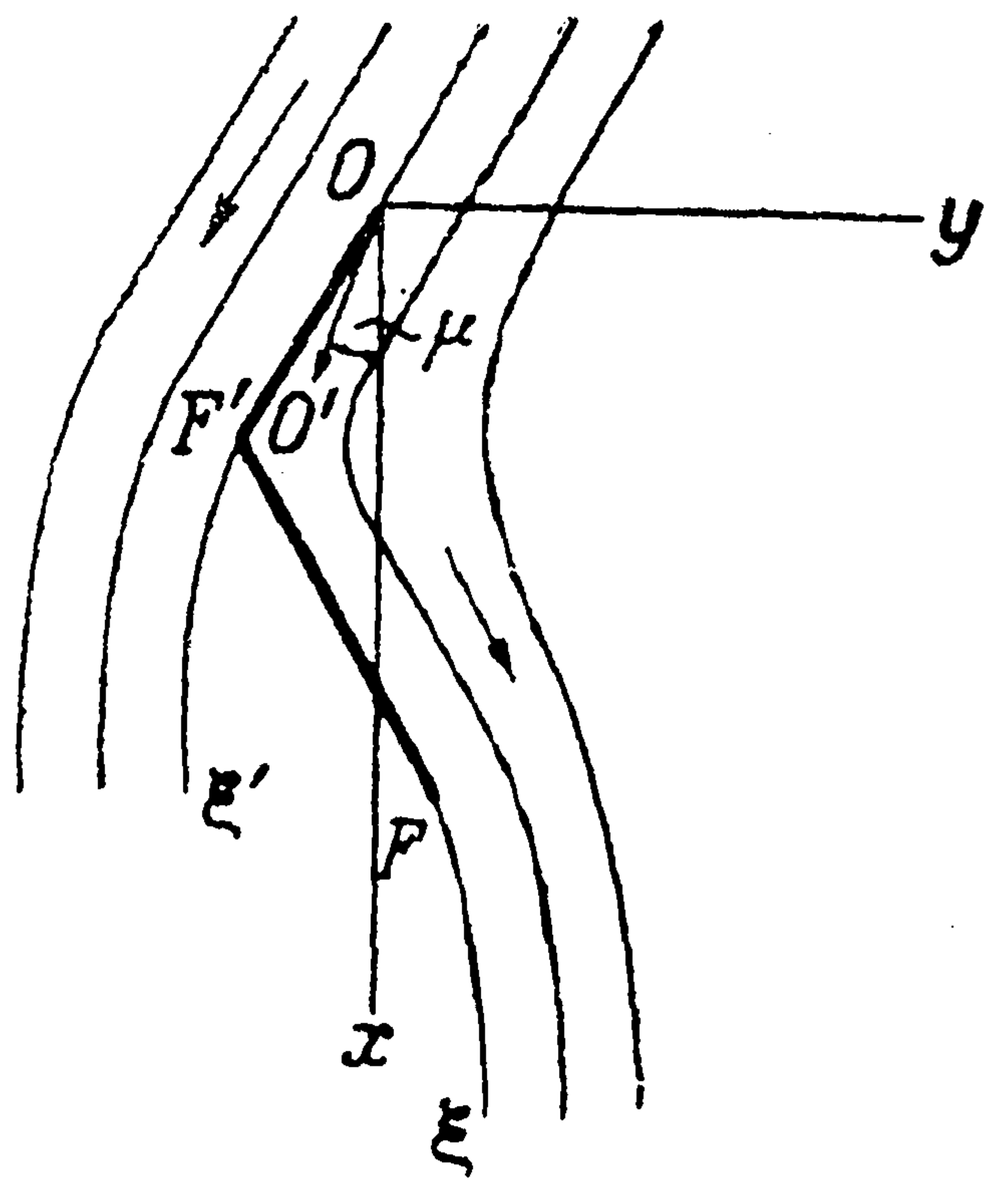
Из формулы (82) следует, что при $h = \infty$ надо взять $\nu = 0$; полученная же строка показывает, что в этом случае формула (81) обращается в формулу (24). Если же высота h конечна, то количество вытекающей жидкости, даваемое формулой (81), будет менее количества, даваемого формулой (24), и будет уменьшаться с увеличением угла ν, т. е. с убыванием h.

§ 12. Об ударе беспредельного потока жидкости о ломаную пластинку в случае, когда жидкость вступает на нее по направлению края. Рассматривая в § 7 удар беспредельного потока о две пластинки, образующие двугранный угол, мы сказали, что в основе исследований И. В. Мещерского лежит предположение, что раздельная линия тока проходит через вершину угла между пластинками и образует на ней критическую точку, между тем как возможны еще и другие невихревые течения жидкости, этим условием не обладающие. Если направление скорости в бесконечности, проведенное через вершину угла между пластинками (мы считаем за угол тот, который менее 180°), лежит вне этого угла, то, кроме упомянутого расположения раздельной линии тока, можно еще рассматривать те случаи, когда эта линия проходит под прямым углом через критическую точку, лежащую на той или другой пластинке, и разбившись в этой точке на две ветви, идет в одну сторону вдоль части одной пластинки, а в другую — вдоль оставшейся части первой пластинки и вдоль второй пластинки, образуя в вершине угла между пластинками вторую критическую точку. Такие течения жидкости, как имеющие две критические точки, могут быть исследованы с помощью направляющей сети, о которой говорится в начале § 15. Если же направление скорости потока в бесконечности, проведенное через вершину угла между пластинками, попадает внутри этого угла, то, кроме предположения И. В. Мещерского о раздельной линии тока, могут быть еще рассматриваемы невихревые течения, при которых поток обтекает ту или другую пластинку тем способом, который исследован Релеем (разумеется, при этом нужно, чтобы контуры струй, сошедших с одной пластинки, не пересекали другой). Это течение возможно тоже, когда направление скорости в бес-

конечности попадает внутри угла, смежного с углом пластинки, но здесь при известном отношении между длинами пластинок возможно еще одно невихревое течение жидкости, которое мы и рассмотрим в этом параграфе как последний пример на направляющие сети фиг. 15 и 8. Это есть случай, изображенный на фиг. 28, в котором раздельная линия тока вступает на одну из пластинок по направлению ее края. Он



Фиг. 27.



Фиг. 28.

имеет, по мнению Парсеваля [1]), важное значение для воздухоплавания, так как представляет особое расположение, при котором устраняется развитие вихрей, имеющих место при весьма косом ударе о пластинку и являющихся следствием очень крутого поворота линий тока в передней стороне пластинки.

Наложим (фиг. 27) направляющую сеть фиг. 15 на образующую сеть фиг. 13 так, чтобы оси абсцисс совпали и чтобы полюс O' фиг. 15 лег на фиг. 13 на расстоянии $OO' = \gamma$ вправо от O, причем это расстояние менее $O'F$, т. е.

$$\gamma < c\left(1 + \sin\frac{\mu}{q}\right).$$

Идя при $\psi = 0$ на фиг. 27 по оси ординат $O\eta$, мы получим в действительном течении на фиг. 28 некоторую линию тока ηO, которая в бесконечности образует с осью Ox угол $-\mu$. Поворачивая затем при том же значении $\psi = 0$ вправо, мы

[1]) Parseval, Die Mechanik des Vogelflugs. Wiesbaden, 1889, S. 24, 25.

найдем, что отрезкам оси абсцисс OO', $O'F$ и $F\xi$ соответствуют на фиг. 28 пластинка OO', образующая с осью Ox угол $-\frac{q\pi}{2}$, пластинка $O'F$, образующая с осью Ox угол $\frac{q\pi}{2}$, и контур струи $F\xi$. При повороте же по оси абсцисс налево мы найдем, что отрезкам OF' и $F'\xi'$ на фиг. 27 соответствуют на фиг. 28 пластинка OF' и контур струи $F'\xi'$. То обстоятельство, что $OO' = OF'$, дает нам уравнение, служащее для определения γ.

Назовем: через P силу давления потока на пластинку $O'F$, s — ее длину, P' — силу давления потока на сторону второй пластинки OO', s' — ее длину и P'' — силу давления потока на сторону второй пластинки OF'. Положив для сокращения письма $\frac{\mu}{q} = \nu$, получим по формулам (36) и (27) для отрезков оси абсцисс $O'F$, OO' и OF' следующие величины φ:

$$\varphi = k\left(\gamma + \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)^2,$$

$$\varphi = k\left(\gamma - \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2,$$

$$\varphi = k\left(\frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q}\sin\nu} - \gamma\right)^2.$$

Подставляем эти величины в формулы (15) и (16) и называем при этом через ϑ_1 значение ϑ в точке O. Получим [1]):

$$\left.\begin{aligned} P &= k\rho w\int_{\infty}^{0}\sinh\vartheta\, d\left(\gamma + \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)^2, \\ P' &= k\rho w\int_{\vartheta_1}^{\infty}\sinh\vartheta d\left(\gamma - \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2, \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

[1]) См. примечание на стр. 220. *Прим. ред.*

$$P'' = k\rho w \int_{\vartheta_1}^{0} \sinh\vartheta\, d\left(\gamma - \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2,$$

$$O'F = s = \frac{k}{w}\int_{\infty}^{} e^{\vartheta} d\left(\gamma + \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\sin\nu + \cosh\frac{\vartheta}{q}}\right)^2,$$

$$OO' = s' = \frac{k}{w}\int_{\vartheta_1}^{0} e^{\vartheta} d\left(\gamma - \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2; \qquad (83)$$

$$OF' = s'' = \frac{k}{w}\int_{\vartheta_1}^{0} e^{\vartheta} d\left(\gamma - \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\cosh\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2.$$

Определим сначала P:

$$P = k\rho wc^2\cos^4\nu\left[-\int_{0}^{\infty}\sinh\vartheta\, d\left(\frac{1}{\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{0}^{\infty}\sinh\vartheta\, d\left(\frac{1}{\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)\right].$$

Берем оба интеграла по частям, замечая, что подстановка при нижнем и верхнем пределах пропадает, так как по предположению $q < 1$. Получим:

$$P = k\rho wc^2\cos^4\nu\left[\int_{0}^{\infty}\frac{\cosh\vartheta\, d\vartheta}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{0}^{\infty}\frac{\cosh\vartheta\, d\vartheta}{\cosh\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right].$$

Вводим теперь ту же самую подстановку:

$$e^{-\vartheta} = \sigma^q, \tag{84}$$

которой мы пользовались при выводе формул (50), причем заметим, что первый интеграл нашей формулы есть тот самый, который фигурирует в первой формуле (49). Эта подстановка дает нам:

$$P = 2qk\rho w c^2 \cos^4 \nu \left[\int_0^1 \frac{(\sigma^q + \sigma^{-q})\,\sigma d\sigma}{(\sigma^2 + 2\sigma \sin \nu + 1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu} \int_0^1 \frac{(\sigma^q + \sigma^{-q})\, d\sigma}{\sigma^2 + 2\sigma \sin \nu + 1} \right]. \tag{85}$$

Потом определим разность $P' - P''$, так как ею измеряется вся сила давления потока на пластинку OO':

$$P' - P'' = k\rho w \int_0^\infty \sinh \vartheta d \left(\gamma - \frac{c \cdot \cos^2 \nu}{\cosh \frac{\vartheta}{q} - \sin \nu} \right)^2 =$$

$$= k\rho w c^2 \cos^4 \nu \left[\int_0^\infty \sinh \vartheta d \left(\frac{1}{\cosh \frac{\vartheta}{q} - \sin \nu} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu} \int_0^\infty \sinh \vartheta d \left(\frac{1}{\cosh \frac{\vartheta}{q} - \sin \nu} \right) \right].$$

Интегрируя по частям и введя подстановку (84), получим формулу, аналогичную (85):

$$P' - P'' = 2qk\rho w c^2 \cos^4 \nu \left[- \int_0^1 \frac{(\sigma^q + \sigma^{-q})\,\sigma d\sigma}{(\sigma^2 - 2\sigma \sin \nu + 1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu} \int_0^1 \frac{(\sigma^q + \sigma^{-q})\, d\sigma}{\sigma^2 - 2\sigma \sin \nu + 1} \right]. \tag{86}$$

Переходим к определению s:

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[- \int_0^\infty e^\vartheta d \frac{1}{\left(\operatorname{cosh} \frac{\vartheta}{q} + \sin \nu \right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu} \int_0^\infty e^\vartheta d \frac{1}{\left(\operatorname{cosh} \frac{\vartheta}{q} + \sin \nu \right)} \right].$$

Интегрируем по частям:

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[\frac{1}{(1 + \sin \nu)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu (1 + \sin \nu)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{e^\vartheta d\vartheta}{\left(\operatorname{cosh} \frac{\vartheta}{q} + \sin \nu \right)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu} \int_0^\infty \frac{e^\vartheta d\vartheta}{\operatorname{cosh} \frac{\vartheta}{q} + \sin \nu} \right].$$

Делаем подстановку (84):

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[\frac{1}{(1 + \sin \nu)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu (1 + \sin \nu)} + \right.$$

$$\left. + 4q \int_0^1 \frac{\sigma^{-q+1} d\sigma}{(\sigma^2 + 2\sigma \sin \nu + 1)^2} + \frac{4\gamma q}{c \cdot \cos^2 \nu} \int_0^1 \frac{\sigma^{-q} d\sigma}{\sigma^2 + 2\sigma \sin \nu + 1} \right]. \quad (87)$$

Прежде чем определить s', выведем условие, вытекающее из двух последних формул (83). Сравнивая вторые части этих формул, находим:

$$\int_0^\infty e^\vartheta d \left(\gamma - \frac{c \cdot \cos^2 \nu}{\operatorname{cosh} \frac{\vartheta}{q} - \sin \nu} \right)^2 = 0$$

или

$$\int_0^\infty e^\vartheta d \left(\frac{1}{\operatorname{cosh} \frac{\vartheta}{q} - \sin \nu} \right)^2 -$$

$$- \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu} \int_0^\infty e^\vartheta d \left(\frac{1}{\operatorname{cosh} \frac{\vartheta}{q} - \sin \nu} \right) = 0.$$

Интегрируем по частям и вводим подстановку (84):

$$-\frac{1}{(1-\sin\nu)^2}+\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu(1-\sin\nu)}-4q\int_0^1\frac{\sigma^{-q+1}d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)^2}+$$

$$+\frac{4\gamma q}{c\cdot\cos^2\nu}\int_0^1\frac{\sigma^{-q}d\sigma}{\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1}=0. \qquad (88)$$

Из этого уравнения мы можем определить $\frac{\gamma}{c}$. Теперь остается только преобразовать пятую из формул (83) для определения s'.

Пишем:

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[\int_{\vartheta_1}^{\infty}e^{\vartheta}d\left(\frac{1}{\cosh\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{\vartheta_1}^{\infty}e^{\vartheta}d\left(\frac{1}{\cosh\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right)\right].$$

Интегрируем по частям:

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[-\frac{e^{\vartheta_1}}{\left(\cosh\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma e^{\vartheta_1}}{c\cdot\cos^2\nu\left(\cosh\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)}-\right.$$

$$\left.-\int_{\vartheta_1}^{\infty}\frac{e^{\vartheta}d\vartheta}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{\vartheta_1}^{\infty}\frac{e^{\vartheta}d\vartheta}{\left(\cosh\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu\right)}\right].$$

Вводим подстановку (84):

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[-\frac{e^{\vartheta_1}}{\left(\cosh\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma e^{\vartheta_1}}{c\cdot\cos^2\nu\left(\cosh\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)}-\right.$$

$$\left.-4q\int_0^{\sigma_1}\frac{\sigma^{-q+1}d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)^2}+\frac{4\gamma q}{c\cdot\cos^2\nu}\int_0^{\sigma_1}\frac{\sigma^{-q}d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)}\right], \qquad (89)$$

где нижний предел σ_1 определяется из условия:

$$\sigma_1 = e^{-\frac{\vartheta_1}{q}}.$$

Что же касается $\frac{\vartheta_1}{q}$, то эта величина вполне определяется по $\frac{\gamma}{c}$, так как из первой формулы (36) имеем:

$$\cosh\frac{\vartheta_1}{q} = \sin\nu + \frac{c}{\gamma}\cos^2\nu. \tag{90}$$

Формулы (85), (86), (87), (88), (89) и (90) решают предложенную задачу. Задавшись углом $\frac{q\pi}{2}$ и меньшим его углом μ, мы будем знать ν, что позволит из формулы (88) определить $\frac{\gamma}{c}$. После этого формулы (87) и (89) дадут нам отношение между s и s', которое позволит выбрать только одну из пластинок произвольной. Составляя далее из формул (85), (86), (87) и (89) отношения $P:s$ и $(P' - P''):s'$, мы определим средние силы гидродинамического давления потока на ту и другую пластинку. В задаче о воздухоплавании имеет интерес тот случай, когда угол $\frac{q\pi}{2}$ и, следовательно, μ (в нашей задаче $\mu < \frac{q\pi}{2}$) малы. На этом случае мы и остановимся здесь подробнее. Полагая в формуле (88) q весьма малой величиной, имеем:

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\cos^2\nu}{2(1-\sin\nu)} = \frac{1+\sin\nu}{2}.$$

Внося эту величину в формулу (90), находим:

$$\cosh\frac{\vartheta_1}{q} = 2 - \sin\nu.$$

Обращаясь затем к формулам (87) и (89), имеем при сделанном предположении:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{2kc^2}{w}(1-\sin\nu), \\ s' &= \frac{kc^2}{4w}(1+\sin\nu)^2\ ^{1}). \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Что касается давлений P и $P'-P''$, то они будут в нашем предположении малыми величинами первого порядка относительно q. Берем интегралы, которые войдут в выражение этих величин:

$$2\int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} = \int_0^1 \frac{(2\sigma+2\sin\nu)\,d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} -$$

$$-2\sin\nu\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} = -\frac{1}{2(1+\sin\nu)}+1-$$

$$-2\sin\nu\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2}.$$

Но при выводе формулы (54) мы имели:

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\mu+1)^2} = \frac{1}{2\cos^3\nu}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sin\nu}{\cos\nu}-\nu\right)+$$

$$+\frac{1}{4\cos^2\nu}-\frac{\sin\nu}{2\cos^2\nu} = \frac{1}{2\cos^3\nu}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{1}{4\cos^2\nu}-\frac{\sin\nu}{2\cos^2\nu},$$

поэтому

$$2\int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} =$$

$$= -\frac{\sin\nu}{\cos^3\nu}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)-\frac{1}{2(1+\sin\nu)}+\frac{2-\sin\nu}{2\cos^2\nu}.$$

---

[1]) Из формулы (89) получается:

$$s' = \frac{kc^2}{4w}(1+\sin\nu)^2\,e^{\vartheta_1},$$

а не

$$s' = \frac{kc^2}{4w}(1+\sin\nu)^2.$$

Прим. ред.

Изменяя знак ν, получим отсюда, что

$$2\int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma^2 - 2\sigma\sin\nu + 1)^2} = \frac{\sin\nu}{\cos^3\nu}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\nu}{2}\right) - \\ - \frac{1}{2(1-\sin\nu)} + \frac{2+\sin\nu}{2\cos^2\nu}.$$

Далее:

$$2\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^2 + 2\sigma\sin\nu + 1} = 2\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma+\sin\nu)^2 + \cos^2\nu} =$$

$$= \frac{2}{\cos\nu}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sin\nu}{\cos\nu} - \nu\right) = \frac{2}{\cos\nu}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}\right),$$

$$2\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^2 - 2\sigma\sin\nu + 1} = \frac{2}{\cos\nu}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\nu}{2}\right).$$

С помощью найденных величин интегралов получаем:

$$\left.\begin{aligned} P &= 2k\rho\omega c^2 q\left[\cos\nu\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\cos^2\nu}{2}\right]. \\ P' - P'' &= 2k\rho\omega c^2 q\left[\cos\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\nu}{2}\right) - \frac{\cos^2\nu}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Называя через R и R' составляющие этих сил давления по направлению, обратному оси Oy (фиг. 28), и по направлению, совпадающему с Ox, будем иметь:

$$R = \pi k\rho\omega c^2 q\cos\nu,\ ^{1})$$

$$R' = 2k\rho\omega c^2 q\,(\cos^2\nu - \nu\cos\nu)\sin\frac{q\pi}{2}. \quad (93)$$

---

[1]) Из формулы (92) получается:

$$R = \pi k\rho\omega c^2 q\cos\frac{q\pi}{2}\cos\nu,$$

а не

$$R = \pi k\rho\omega c^2 q\cos\nu.$$

Прим. ред.

Любопытно, что сила R положительна при остром угле ν, тогда как по теории Ньютона она должна быть отрицательна всякий раз, как $OF' > F'F$. Если предположим теперь, что наша пластинка (фиг. 28) $OO'F$ движется в спокойном воздухе по направлению, противоположному Ox, то это будет соответствовать рассмотренному течению жидкости при $\nu = 0$ (при этом сеть фиг. 15 обращается в сеть фиг. 8). Мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} s' &= \frac{s}{8}, \\ R &= \alpha s \rho w^2, \\ R' &= \frac{2}{\pi}\alpha^2 s \rho w^2, \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

где положено

$$\left.\alpha = \frac{q\pi}{2}.\right\}$$

§ 13. Истечение жидкости из сосуда конечной ширины и бесконечно большой длины. Мы перейдем теперь к решению задач, в которых отыскиваются течения жидкости со многими критическими точками и которые поэтому требуют направляющей сети с несколькими полюсами. Для решения предложенной задачи берем направляющую сеть с двумя фокусами и двумя полюсами и полагаем в нашей формуле (11):

$$c_1 = -c_2 = c, \quad m = i,$$

$$f(u) = -q\sqrt{c^2 - e^2}\left(\frac{1}{u-e} + \frac{1}{u+e}\right),$$

где $e < c$.

Получаем:

$$\phi = -qi\sqrt{c^2 - e^2}\left[\int \frac{du}{(u-e)\sqrt{u^2 - c^2}} + \int \frac{du}{(u+e)\sqrt{u^2 - c^2}}\right].$$

Вводим в первом интеграле новое переменное $u_1 = u - e$, а во втором — новое переменное $u_2 = u + e$.

Это дает при надлежащем нижнем пределе:

$$\varphi = qi\left\{\int \frac{d\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}-\frac{e}{c}\right)^2}}+\right.$$

$$\left.+\int \frac{d\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}+\frac{e}{c}\right)^2}}\right\} = \tag{95}$$

$$= qi \arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}-\frac{e}{c}\right)+qi\arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}+\frac{e}{c}\right).$$

Сделаем положения:

$$\vartheta_1+\theta_1 i = iq \arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}-\frac{e}{c}\right),$$

$$\vartheta_2+\theta_2 i = iq \arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}+\frac{e}{c}\right),$$

так что по формуле (9)

$$\vartheta = \vartheta_1+\vartheta_2, \quad \theta = \theta_1+\theta_2. \tag{96}$$

Переходя от обратных тригонометрических функций к прямым и полагая для сокращения письма, что

$$\frac{e}{c} = \sin\frac{\mu}{q},$$

получим:

$$c\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{u_1}-\sin\frac{\mu}{q} = \sin\left(\frac{\theta_1}{q}-i\frac{\vartheta_1}{q}\right),$$

$$c\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{u_2}+\sin\frac{\mu}{q} = \sin\left(\frac{\theta_2}{q}-i\frac{\vartheta_2}{q}\right).$$

Вводим сюда подстановки:

$$u_1 = r_1(\cos\lambda_1+i\sin\lambda_1),$$

$$u_2 = r_2(\cos\lambda_2+i\sin\lambda_2),$$

где r_1 и r_2 суть радиусы-векторы рассматриваемой точки относительно полюсов (e, O), $(-e, O)$, а λ_1 и λ_2 — углы этих радиусов-векторов с осью $O\xi$. Раскрыв синусы и сравнивая действительные и мнимые части, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\mu}{q}\cos\lambda_1 = \sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta_1}{q}\cosh\frac{\vartheta_1}{q},\\
&\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\mu}{q}\sin\lambda_1 = \cos\frac{\theta_1}{q}\sinh\frac{\vartheta_1}{q},\\
&\frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\mu}{q}\cos\lambda_2 = -\sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta_2}{q}\cosh\frac{\vartheta_2}{q},\\
&\frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\mu}{q}\sin\lambda_2 = \cos\frac{\theta_2}{q}\sinh\frac{\vartheta_2}{q}.
\end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

Сравнивая эти формулы с (36) и обращая внимание на формулу (96), приходим к заключению, что найденная нами направляющая сеть получается из сложения двух направляющих сетей, из которых одна есть сеть фиг. 15, дающая в бесконечности $\vartheta = 0$ и $\theta = -\mu$, другая — симметричная ей сеть относительно оси $O\eta$, дающая в бесконечности $\vartheta = 0$ и $\theta = \mu$. При этом под сложением сетей подразумеваем построение сети, изотермические параметры которой равны сумме изотермических параметров слагаемых сетей. Это замечание вполне выясняет вид построенной сети, которая изображена на фиг. 29. Эта сеть симметрична относительно осей; она имеет два фокуса F и F' на расстоянии c от начала координат и два полюса P и P' на расстоянии e, меньшем c, от этого начала. Все линии $\theta = \text{const}$ проходят в ней через полюс P или P' и пересекают еще раз ось абсцисс вне фокального отрезка FF' под прямым углом. На PF мы получаем $\theta_1 = q\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = q\frac{\pi}{2}$, поэтому $\theta = q\pi$. На PP' имеем $\theta_1 = q\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = -q\frac{\pi}{2}$ [1]), поэтому $\theta = 0$. Очевидно, что $\theta = 0$

[1]) Точнее, наоборот:

$$\theta_1 = -q\frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = +q\frac{\pi}{2}.$$

Прим. ред.

точно так же и для всех точек оси $O\eta$, ибо на ней θ_1 и θ_2 имеют равные по величине, но противоположные по знаку значения, а также и для всех бесконечно удаленных точек, ибо в бесконечности $\theta_1 = -\mu$, $\theta_2 = \mu$. На $P'F'$ имеем $\theta_1 = -\frac{q\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{q\pi}{2}$, а потому $\theta = -q\pi$. Из сказанного следует, что при изменении θ от $q\pi$ до 0 линии $\theta = \text{const}$ изменяются от PF до линии $PO\eta$, причем последняя в бесконечности охватывает всю правую часть рассматриваемой области; при изменении же θ от 0 до $-q\pi$ линии $\theta = \text{const}$ изменяются от $P'O\eta$ до $P'F'$, причем первая в бесконечности охватывает всю левую часть рассматриваемой области. Линии $\vartheta = \text{const}$ при ϑ очень большом представляют две бесконечномалые замкнутые кривые, охватывающие полюсы P и P'; с уменьшением ϑ они расширяются и, пройдя через кривую с кратной точкой в O, начинают охватывать оба полюса, все более и более расширяясь, причем они всегда пересекают ось абсцисс под прямым углом на фокальном отрезке FF'. При $\vartheta = 0$ мы получаем линию, идущую на конечном расстоянии по отрезкам оси абсцисс $F\xi$ и $F'\xi'$ и охватывающую в бесконечности всю рассматриваемую область. Значение $\vartheta = \vartheta_0$ для линии с кратной точкой найдется, полагая в первой формуле (97):

$$r_1 = e, \lambda_1 = -\pi, \frac{\theta_1}{q} = -\frac{\pi}{2}.$$

Это дает:

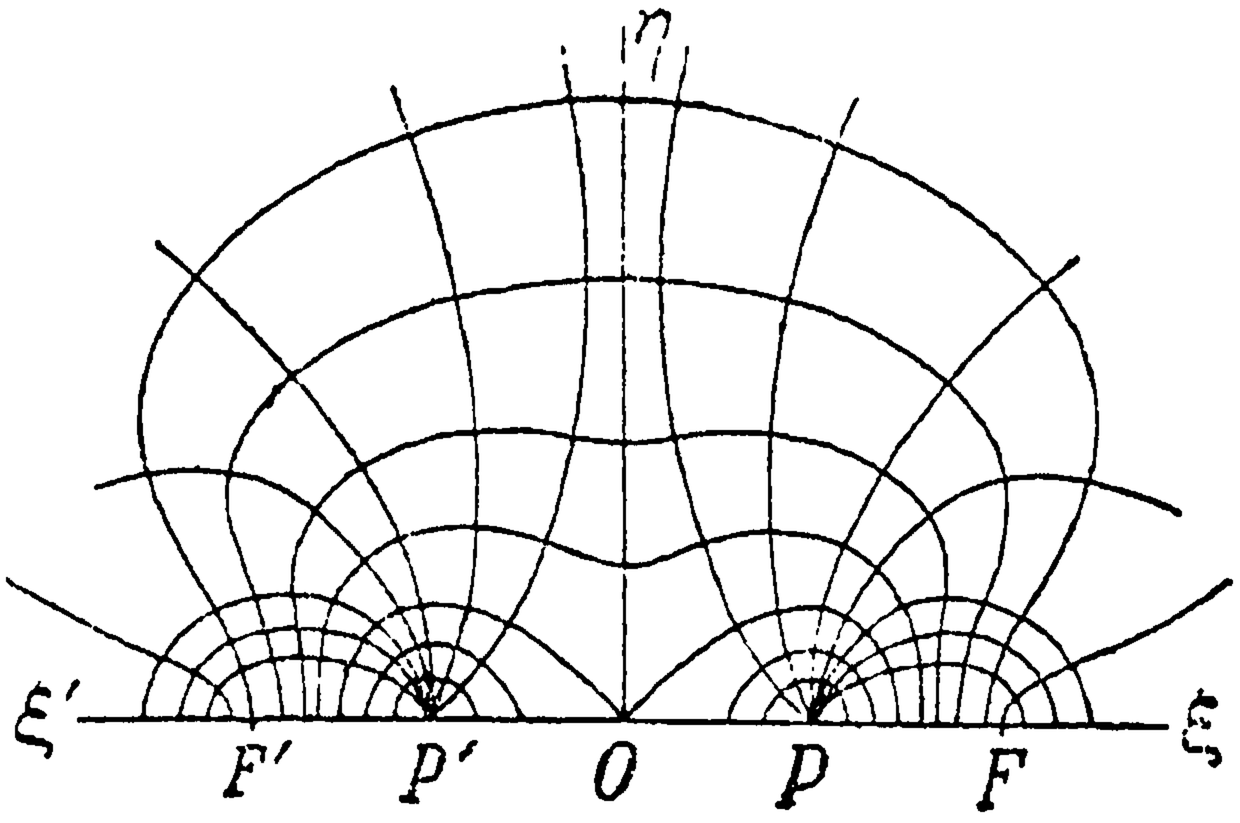
$$\cosh\frac{\vartheta_1}{q} = \sin\frac{\mu}{q} + \frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}} = \frac{1}{\sin\frac{\mu}{q}},$$

откуда

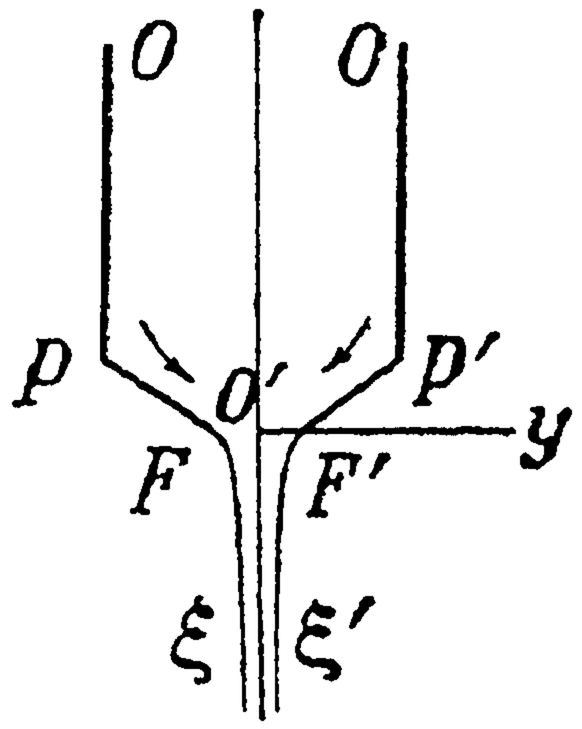
$$\vartheta_0 = 2\vartheta_1 = 2q\lg\left(\frac{1+\cos\frac{\mu}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}}\right). \qquad (98)$$

За образующую сеть принимаем сеть фиг. 9 и налагаем ее на найденную направляющую сеть так, чтобы оси коор-

динат совпали. Идя по линии $\psi = 0$, будем иметь: $\theta = 0$ на пространстве от O до P, что соответствует в действительном течении на фиг. 30 бесконечной стенке сосуда OP; $\theta = q\pi$ на пространстве от P до F, что соответствует в действительном течении части дна сосуда PF, образующего со стенкой OP угол $\pi(1-q)$; наконец, $\vartheta = 0$ на пространстве от F до ξ, что соответствует на фиг. 30 левому контуру струи $F\xi$. Ана-



Фиг. 29.



Фиг. 30.

логичным образом, идя по линии $\psi = \pi$, получаем в действительном течении правый граничный контур $OP'F'\xi'$. Вследствие симметрии задачи оба контура будут симметрично расположены относительно оси $O'x$, когда возьмем начала координат посреди отверстия сосуда FF'. По известному правилу относительно изменения ψ заключаем, что найденное течение будет заключено между данными контурами, как это и потребно для нашей задачи. Определим количество истекающей жидкости

$$Q = \alpha\pi.$$

Для этого рассмотрим контур струи $F\xi$. По формулам (97) имеем на отрезке оси абсцисс $F\xi$:

$$\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\mu}{q} = \sin\frac{\theta_1}{q} + \sin\frac{\mu}{q},$$

$$\frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\mu}{q} = \sin\frac{\theta_1}{q} - \sin\frac{\mu}{q}.$$

Подставляем сюда выражения радиусов r_1 и r_2 по расстоянию r от точки O:

$$r_1 = r - e = r - c\sin\frac{\mu}{q},$$

$$r_2 = r + e = r + c\sin\frac{\mu}{q}.$$

Потом определяем $\sin\frac{\theta_1}{q}$ и $\sin\frac{\theta_2}{q}$:

$$\sin\frac{\theta_1}{q} = \frac{c - r\sin\frac{\mu}{q}}{r - c\sin\frac{\mu}{q}},\quad \sin\frac{\theta_2}{q} = \frac{c + r\sin\frac{\mu}{q}}{r + c\sin\frac{\mu}{q}}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos\frac{\theta_1}{q} = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r - c\sin\frac{\mu}{q}},\quad \cos\frac{\theta_2}{q} = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r + c\sin\frac{\mu}{q}}.$$

Далее

$$\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{q} = 1 - 2c^2\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2 - c^2\sin^2\frac{\mu}{q}},$$

или по (96):

$$\cos\frac{\theta}{q} = 1 - 2c^2\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2 - c^2\sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Определяем отсюда r:

$$r = c\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\sin^2\frac{\theta}{2q}} + \sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Подставляем эту величину в первую из формул (20):

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} \lg \left(\frac{\cos^2 \frac{\mu}{q}}{\sin^2 \frac{\theta}{2q}} + \sin^2 \frac{\mu}{q} \right).$$

Теперь нам остается только подставить это значение φ во вторую формулу (14), чтобы получить диференциальную связь между y и θ:

$$dy = -\frac{\alpha}{2wq} \frac{\cos \frac{\theta}{2q} \sin \theta d\theta}{\left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2q} \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{q}\right) \sin \frac{\theta}{2q}}.$$

Называя ширину отверстия через $2b$ и замечая, что $\alpha = \frac{Q}{\pi}$ и ширина струи в бесконечности есть $\frac{Q}{w}$, интегрируем наше уравнение, изменяя θ от πq до 0:

$$b - \frac{Q}{2w} = -\frac{Q}{2\pi q w} \int_{\pi q}^{0} \frac{\cos \frac{\theta}{2q} \sin \theta d\theta}{\left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2q} \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{q}\right) \sin \frac{\theta}{2q}}.$$

Отсюда получаем искомое количество вытекающей жидкости:

$$Q = \frac{\pi}{\pi q + \frac{1}{q} \int_0^{\pi q} \frac{\cos \frac{\theta}{2q} \sin \theta d\theta}{\left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2q} \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{q}\right) \sin \frac{\theta}{2q}}} 2bw. \qquad (99)$$

Входящий сюда неизвестный угол μ определяется по отношению ширины сосуда $2a$ к ширине отверстия $2b$ из некоторого трансцендентного уравнения, получаемого при составлении другого выражения для Q.

По формулам (98) и (8) находим, что скорость жидкости в сосуде на весьма большом расстоянии от отверстия есть

$$v = w\left(\frac{\sin\frac{\mu}{q}}{1+\cos\frac{\mu}{q}}\right)^{2q}. \qquad (100)$$

Поэтому

$$Q = 2aw\left(\frac{\sin\frac{\mu}{q}}{1+\cos\frac{\mu}{q}}\right)^{2q} = 2aw\left(\operatorname{tg}\frac{\mu}{2q}\right)^{2q}.$$

Из сравнения этой формулы с (99) получаем искомое уравнение:

$$\frac{b}{a} = \left(\operatorname{tg}\frac{\mu}{2q}\right)^{2q}\left[1+\frac{1}{\pi q}\int_0^{\pi q}\frac{\cos\frac{\theta}{2q}\sin\theta\, d\theta}{\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2q}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\right)\sin\frac{\theta}{2q}}\right]. \qquad (101)$$

Остановимся на предположении $q=\frac{1}{2}$, т. е. рассмотрим истечение жидкости из прямоугольного сосуда. Мы имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta d\theta}{1+\operatorname{tg}^2 2\mu\sin^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}2\mu}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}2\mu\sin\theta) = \frac{2\mu}{\operatorname{tg}2\mu}.$$

Поэтому формулы (100) и (101) принимают в рассматриваемом случае следующий вид:

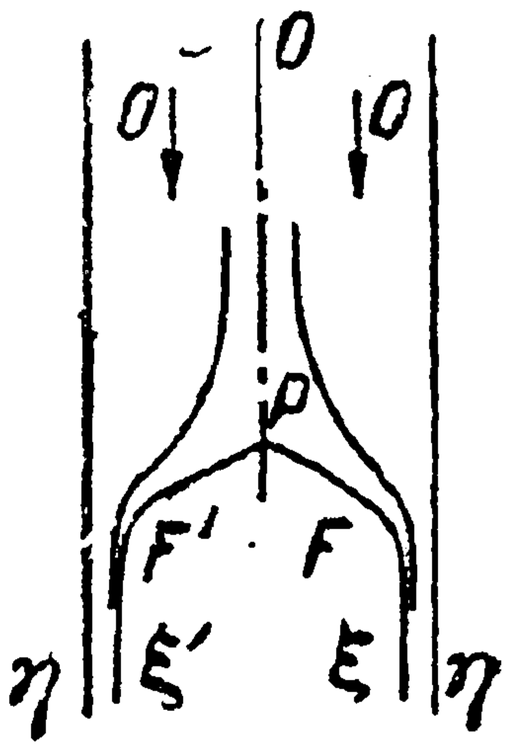
$$Q = \frac{\pi}{\pi+2\frac{2\mu}{\operatorname{tg}2\mu}}2bw, \qquad (102)$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\mu\left(1+\frac{2}{\pi}\frac{2\mu}{\operatorname{tg}2\mu}\right).$$

При $a=\infty$, $\mu=0$ и выражение для Q обращается в выражение, данное формулой (24). Вообще же количество жид-

кости, даваемое формулой (102), более того, которое получается из формулы (24), ибо дуга менее своего тангенса. Таким образом *прибавление боковых стенок увеличивает количество истекающей жидкости против сосуда весьма большой ширины.*

§ 14. Удар потока, заключенного между двумя параллельными стенками, на симметрично относительно его расположенный равнобокий клин. Задача, решенная в предыдущем параграфе, при несколько ином расположении границ течения жидкости обращается в задачу об ударе потока, заключенного между двумя параллельными стенками, на симметрично относительно него расположенный равнобокий клин. Предположим, что к сосуду, изображенному на фиг. 30, приставлен слева такой же сосуд так, что его вертикальная стенка совпадает со стенкой OP, и что из обоих сосудов жидкость вытекает с одной и той же скоростью w. Так как во всех точках стенки OP скорости жидкости с правой и с левой сторон будут одинаковы, то эту стенку можно отнять; с другой стороны, так как в правом и левом сосудах осевые линии суть линии тока, то их можно заменить стенками некоторого канала. Мы получим (фиг. 31) течение жидкости в канале $O\eta O\eta$, внутри которого помещен равнобокий клин FPF'. Определим силу давления на этот клин.



Фиг. 31.

По формулам (97) имеем для отрезка PF:

$$\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\mu}{q} = \cosh\frac{\vartheta_1}{q} + \sin\frac{\mu}{q},$$

$$\frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\mu}{q} = \cosh\frac{\vartheta_1}{q} - \sin\frac{\mu}{q}.$$

Подставляем сюда, как и в предыдущем параграфе:

$$r_1 = r - c\sin\frac{\mu}{q},$$

$$r_2 = r + c\sin\frac{\mu}{q}$$

и определяем $\cosh\frac{\vartheta_1}{q}$ и $\cosh\frac{\vartheta_2}{q}$:

$$\cosh\frac{\vartheta_1}{q}=\frac{c-r\sin\frac{\mu}{q}}{r-c\sin\frac{\mu}{q}},\quad \cosh\frac{\vartheta_2}{q}=\frac{c+r\sin\frac{\mu}{q}}{r+c\sin\frac{\mu}{q}}.$$

Отсюда находим, что

$$\sinh\left(\frac{\vartheta_1}{q}\right)=\frac{\sqrt{c^2-r^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r-c\sin\frac{\mu}{q}},\quad \sinh\left(\frac{\vartheta_2}{q}\right)=\frac{\sqrt{c^2-r^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r+c\sin\frac{\mu}{q}}$$

и

$$\cosh\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{q}\right)=-1+\frac{2c^2\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2-c^2\sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Эта формула вследствие уравнений (96) обращается в

$$\cosh\frac{\Omega}{q}=-1+\frac{2c^2\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2-c^2\sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Определим отсюда r:

$$r=c\sqrt{\sin^2\frac{\mu}{q}+\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\cosh^2\frac{\vartheta}{2q}}}.$$

Подставляем эту величину в первую из формул (20):

$$\varphi=\frac{\alpha}{2}\lg\left(\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\cosh^2\frac{\vartheta}{2q}}+\sin^2\frac{\mu}{q}\right).$$

Определяем $d\varphi$:

$$d\varphi = -\frac{\alpha}{2q}\frac{\sinh\frac{\vartheta}{2q}}{\cosh\frac{\vartheta}{2q}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\cosh^2\frac{\vartheta}{2q}\right)}.$$

Вносим эту величину $d\varphi$ в формулы (15) и (16):

$$\left.\begin{aligned} P &= \rho w\frac{\alpha}{2q}\int_0^\infty \frac{\sinh\vartheta\sinh\frac{\vartheta}{2q}d\vartheta}{\cosh\frac{\vartheta}{2q}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\cosh^2\frac{\vartheta}{2q}\right)}, \\ s &= \frac{\alpha}{2qw}\int_0^\infty \frac{e^\vartheta\sinh\frac{\vartheta}{2q}d\vartheta}{\cosh\frac{\vartheta}{2q}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\cosh^2\frac{\vartheta}{2q}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Входящая сюда величина μ определяется по формуле (101); что же касается связи между скоростью струи w и скоростью потока v, то она дается формулой (100). Здесь любопытно заметить, что формулы (100) и (101) позволяют по данной скорости v и гидродинамическому давлению внутри потока определить скорость w и гидродинамическое давление за клином (следовательно, определить величину недавления Дюбуа).

Обращаемся к случаю пластинки. Для этого полагаем в формулах (103) $q = \frac{1}{2}$. Получаем:

$$P = \rho w\alpha\int_0^\infty \frac{\sinh^2\vartheta\cosh\vartheta d\vartheta}{\cosh^2\vartheta(1+\operatorname{tg}^2 2\mu\cosh^2\vartheta)},$$

$$s = \frac{\alpha}{w}\int_0^\infty \frac{(\cosh\vartheta+\sinh\vartheta)\sinh\vartheta d\vartheta}{\cosh\vartheta(1+\operatorname{tg}^2 2\mu\cosh^2\vartheta)} =$$

$$= \frac{\alpha}{w}\int_0^\infty \frac{\sinh^2\vartheta\cosh\vartheta d\vartheta}{\cosh^2\vartheta(1+\operatorname{tg}^2 2\mu\cosh^2\vartheta)} + \frac{\alpha}{w}\int_0^\infty \frac{\sinh\vartheta d\vartheta}{1+\operatorname{tg}^2 2\mu\cosh^2\vartheta},$$

Делаем в интеграле, входящем в P, и в первом интеграле, входящем в s, подстановку $\sinh\vartheta = z$, а во втором интеграле, входящем в s, подстановку $\cosh\vartheta = z$. Получаем:

$$P = \rho w x \cos^2 2\mu \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{(1+z^2)(1+\sin^2 2\mu \cdot z^2)},$$

$$s = \frac{\alpha}{w}\cos^2 2\mu \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{(1+z^2)(1+\sin^2 2\mu \cdot z^2)} + \frac{\alpha}{w}\int_1^\infty \frac{dz}{1+\operatorname{tg}^2 2\mu \cdot z^2}.$$

Берем интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^2 dz}{(1+z^2)(1+\sin^2 2\mu \cdot z^2)} = \frac{1}{\cos^2 2\mu}\left(\int_0^\infty \frac{dz}{1+\sin^2 2\mu \cdot z^2} - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\sin 2\mu}{\sin 2\mu \cos^2 2\mu},$$

$$\int_1^\infty \frac{dz}{1+z^2\operatorname{tg}^2 2\mu} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\mu}\left(\frac{\pi}{2} - 2\mu\right).$$

Подставляя, получим [1]:

$$P = \frac{\pi\rho w\alpha}{2}\,\frac{1-\sin 2\mu}{\sin 2\mu},$$

$$s = \frac{\alpha}{w}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\sin 2\mu}{\sin 2\mu}\right) + \frac{1}{\operatorname{tg} 2\mu}\left(\frac{\pi}{2} - 2\mu\right)\right].$$

Отсюда следует, что вся сила давления на пластинку $R = 2P$ есть:

$$R = \frac{\pi}{\pi + 2\,\dfrac{\cos 2\mu}{1-\sin 2\mu}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\mu\right)}\, 2\rho s w^2.$$

---

[1] Та же величина для s могла бы быть получена из формул § 13, взяв $s = a - b$.

Так как

$$\frac{1-\sin 2\mu}{\cos 2\mu} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\mu\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\mu\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\mu\right),$$

то найденная сила давления может быть еще представлена так:

$$R = \frac{\pi}{\pi + 4\dfrac{\frac{\pi}{4}-\mu}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\mu\right)}}\, 2s\rho w^2. \qquad (104)$$

Входящий сюда угол μ определяется по второй формуле (102), в которой $2a$ надо считать за ширину потока и положить $b = a - s$. Сила давления, определяемая формулой (104), всегда более той, которая давалась формулой (32). Это увеличение еще будет заметнее, если введем в формулу (104) вместо скорости w скорость потока в канале v, которая по формуле (100) выражается уравнением:

$$v = w \operatorname{tg} \mu,$$

где $\mu < \frac{\pi}{4}\left(\text{ибо } 2\mu < \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом *прибавление стенок канала увеличивает силу давления потока на пластинку.*

§ 15. Удар беспредельного потока жидкости в прямоугольный сосуд, поставленный отверстием навстречу потока. Направляющая сеть фиг. 29 была построена нами, слагая две сети фиг. 15 с одинаковыми c и q и различными по знаку, но одинаковыми по величине углами μ. Подобным образом может быть получена направляющая сеть более общего вида с двумя фокусами и со многими полюсами на фокальном отрезке. Для этого надо сложить много сетей, подобных сети фиг. 15, с одинаковыми c и различными μ и q. Когда при такой направляющей сети употребим образующую сеть фиг. 9, поместив полюс ее O в одном из полюсов P направляющей сети, то получим решение задачи об истечении жидкости из многогранного сосуда, ограниченного несколькими конечными

стенками и двумя бесконечными расходящимися стенками; если мы поместим полюс O на отрезке оси абсцисс между двумя полюсами P и P', то получим решение задачи об истечении жидкости из многогранного сосуда, две бесконечные стороны которого параллельны. Когда же при упомянутой направляющей сети мы возьмем образующую сеть фиг. 13, то будем иметь решение задачи об ударе бесконечного потока на многогранную пластинку. При этом, если точка O образующей сети фиг. 13 помещена в одном из полюсов P направляющей сети, то раздельная линия тока будет вступать на пластинку, образуя на ней критическую точку; если же точка O помещена на одном из отрезков PP', то раздельная линия тока будет вступать на пластинку по направлению одной из ее сторон, как это было в задаче § 12.

Рассмотрим здесь удар беспредельного потока жидкости в прямоугольный сосуд, поставленный отверстием навстречу потока. Направляющая сеть этой задачи получается из сложения направляющей сети фиг. 29 с направляющей сетью фиг. 8, считая в них величины q различными. Вследствие этого параметры ϑ и θ этой направляющей сети выражаются суммами:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta' + \vartheta_1 + \vartheta_2, \\ \theta &= \theta' + \theta_1 + \theta_2, \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

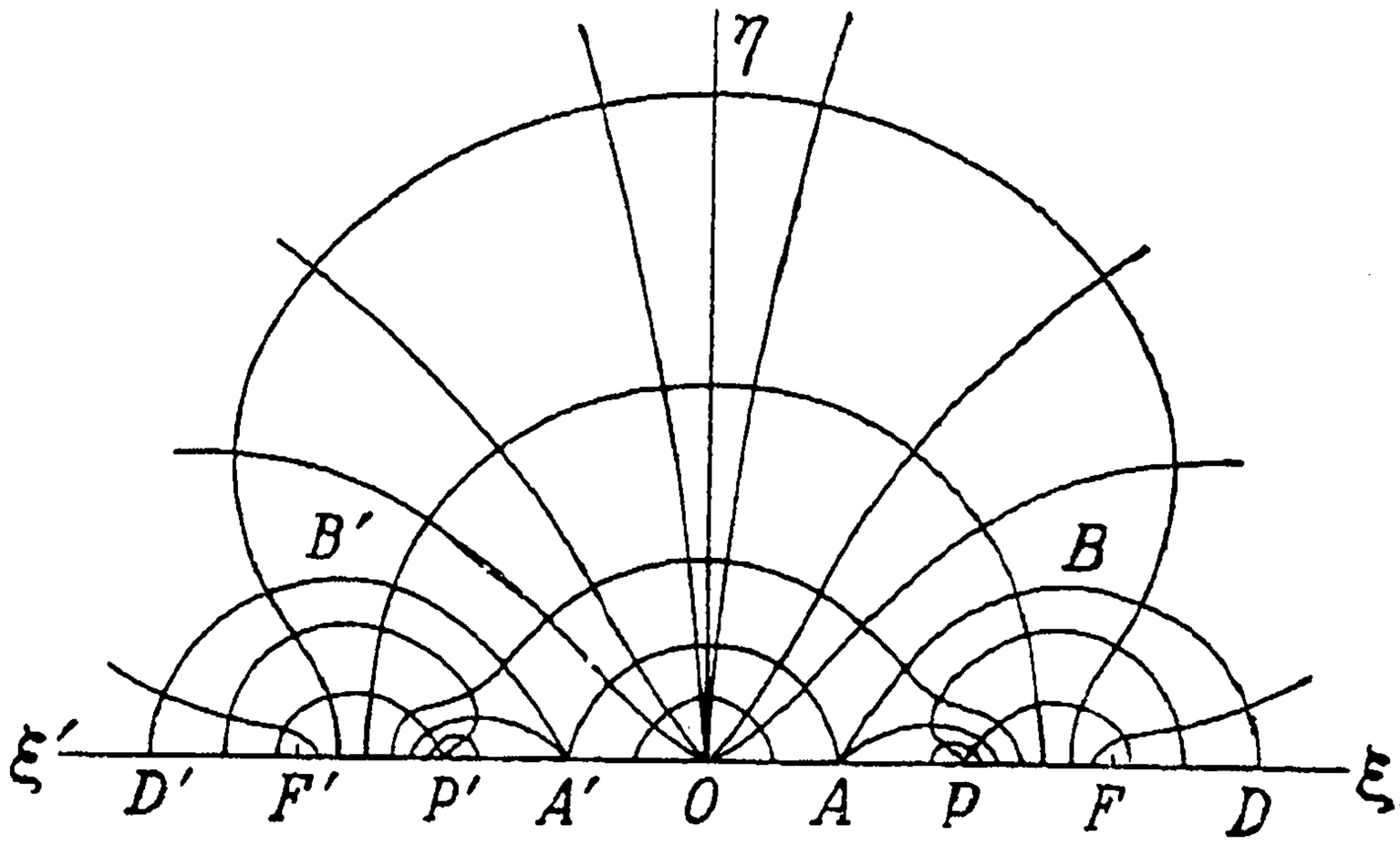
где ϑ' и θ' определяются из уравнений [1]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c}{r}\cos\lambda &= \sin\frac{\theta'}{q'}\cosh\frac{\vartheta'}{q'}, \\ \frac{c}{r}\sin\lambda &= \cos\frac{\theta'}{q'}\sinh\frac{\vartheta'}{q'}, \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

а ϑ_1, ϑ_2, θ_1 и θ_2 — из уравнений (97). Эта сеть (фиг. 32) симметрична относительно осей; она имеет два фокуса F, F' и три полюса P, O и P'. Все линии $\theta = \text{const}$ проходят в ней через один из полюсов и пересекают во второй раз ось абсцисс вне фокального отрезка FF' под прямым углом. Мы имеем: в бесконечности по формулам (105) $\theta = 0$, на отрезке PF угол $\theta = \pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$, на отрезке PO угол $\theta = \frac{\pi q'}{2}$ на отрезке OP'

[1] См. уравнения (18). *Прим. ред.*

угол $\theta = -\frac{\pi q'}{2}$, наконец, на отрезке $P'F'$ угол $\theta = -\pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$. При изменении θ от $\pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$ до $\frac{\pi q'}{2}$ линии $\theta = \text{const}$ изменяются от PF до $PABD$; при изменении θ от $\frac{\pi q'}{2}$ до $-\frac{\pi q'}{2}$ линии $\theta = \text{const}$ изменяются от $OABD$ до $OA'B'D'$; наконец, при изменении θ от $-\frac{\pi q'}{2}$ до $-\pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$ линии $\theta = \text{const}$ изменяются от $P'A'B'D'$ до $P'F'$. Линия $\theta = 0$ идет на конечном расстоянии по оси $O\eta$ и, разделяясь в бесконечности на правую и левую ветви, охватывает всю рассматриваемую область.

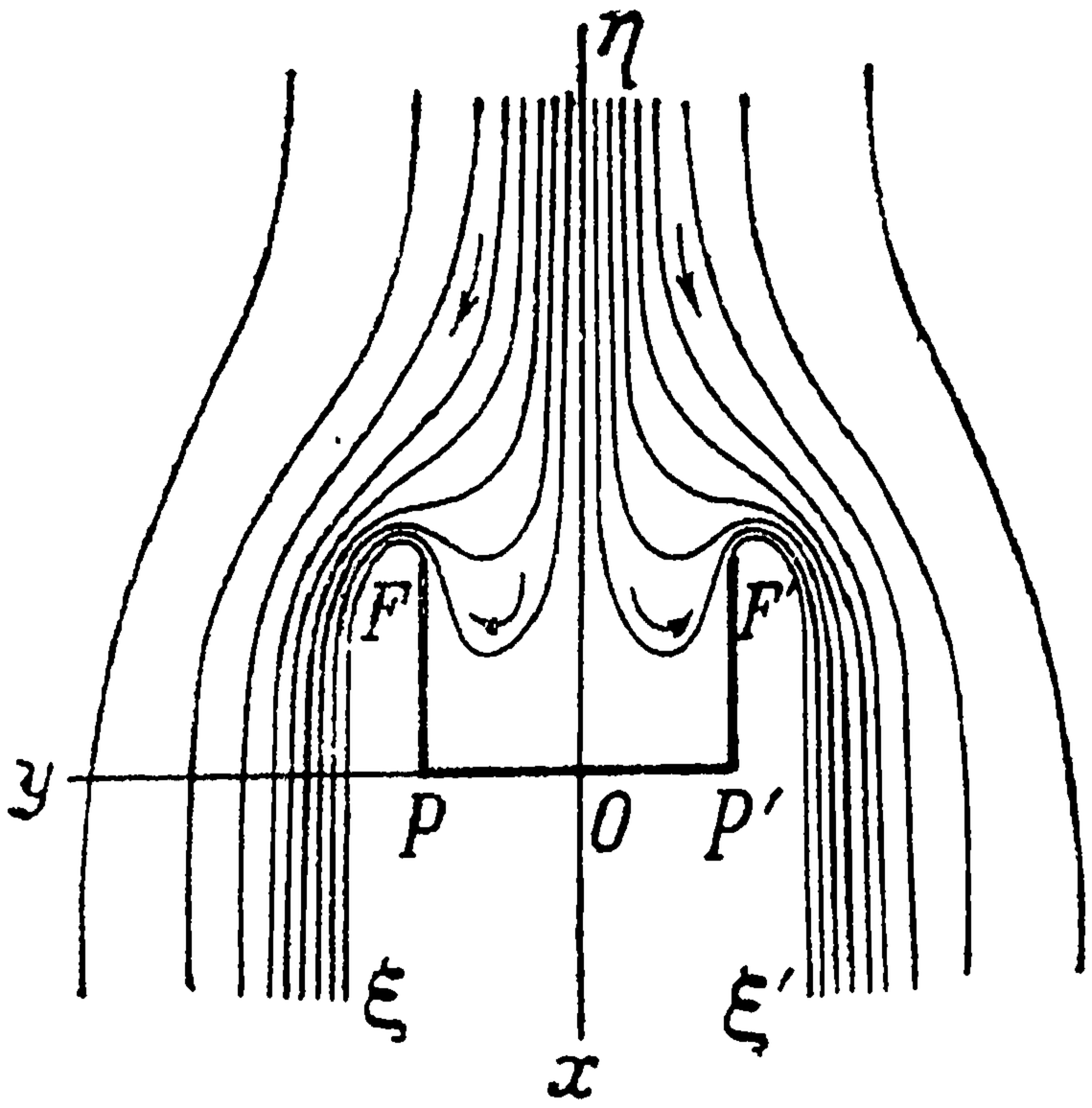


Фиг. 32.

Линии $\vartheta = \text{const}$ при ϑ очень большом представляют три бесконечно малые замкнутые кривые, охватывающие полюсы P, O и P', с уменьшением ϑ они расширяются и, пройдя через кривую с двумя кратными точками в A и A', начинают охватывать все три полюса, все более и более расширяясь, причем они всегда пересекают ось абсцисс под прямым углом на фокальном отрезке FF'. При $\vartheta = 0$ мы получаем линию, идущую на конечном расстоянии по отрезкам оси абсцисс $F\xi$ и $F'\xi'$ и охватывающую в бесконечности всю рассматриваемую область. Предположим, что образующая сеть фиг. 13 наложена на направляющую сеть фиг. 32 так, что оси координат совпадают, причем применительно к нашей задаче положим $q = \frac{1}{2}$, $q' = 1$. Идя по линии $\psi = 0$, мы будем иметь: на ηO угол $\theta = 0$, на OP угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, на PF угол $\theta = \pi$, на $F\xi$ величина $\vartheta = 0$, на OP' угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$, на $P'F'$ угол $\theta = -\pi$, на $F'\xi'$ величина $\vartheta = 0$.

Это соответствует в действительном течении жидкости (фиг. 33): раздельной линии тока ηO, левой половине дна сосуда OP, его стенке PF и левому контуру струи $F\xi$, или правой половине дна сосуда OP', стенке $P'F'$ и правому контуру струи $F'\xi'$.

Обращаемся к определению величины ϑ на дне и стенках сосуда. По формулам (106) и (97) имеем на отрезках OP и PF (причем верхние знаки соответствуют первому, а нижние знаки — второму отрезку):



Фиг. 33.

$$\cosh \vartheta' = \frac{c}{r},$$

$$\cosh 2\vartheta_1 = \frac{c}{r_1}\cos^2 2\mu \mp \sin 2\mu,$$

$$\cosh 2\vartheta_2 = \frac{c}{r_2}\cos^2 2\mu + \sin 2\mu.$$

Полагаем здесь:

$$r = c \cdot \sin 2\nu,$$

$$r_1 = \mp c\,(\sin 2\mu - \sin 2\nu),$$

$$r_2 = c\,(\sin 2\mu + \sin 2\nu).$$

Получаем:

$$\cosh \vartheta' = \frac{1}{\sin 2\nu},$$

$$\cosh 2\vartheta_1 = \mp \frac{1 - \sin 2\nu \sin 2\mu}{\sin 2\mu - \sin 2\nu},$$

$$\cosh 2\vartheta_2 = \frac{1 + \sin 2\nu \sin 2\mu}{\sin 2\mu + \sin 2\nu}.$$

Первая из этих формул дает нам:

$$\sinh \vartheta' = \frac{\cos 2\nu}{\sin 2\nu},$$

и, следовательно:

$$e^{\vartheta'} = \frac{\cos \nu}{\sin \nu}. \qquad (107)$$

Далее две вторые формулы дают:

$$\cosh\vartheta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\vartheta_1 + 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1 \pm \sin 2\nu)(1 \pm \sin 2\mu)\,^{1})}{\pm \sin 2\mu \mp \sin 2\nu}},$$

$$\sinh\vartheta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\vartheta_1 - 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1 \pm \sin 2\nu)(1 \mp \sin 2\mu)}{\pm \sin 2\mu \mp \sin 2\nu}},$$

$$\cosh\vartheta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\vartheta_2 + 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1 + \sin 2\nu)(1 + \sin 2\mu)}{\sin 2\mu + \sin 2\nu}},$$

$$\sinh\vartheta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\vartheta_2 - 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1 - \sin 2\nu)(1 - \sin 2\mu)}{\sin 2\mu + \sin 2\nu}}.$$

Отсюда получаем:

$$e^{\vartheta_1} = \sqrt{\frac{\cos(\mu + \nu)}{\pm \sin(\mu - \nu)}}, \quad e^{\vartheta_2} = \sqrt{\frac{\cos(\mu - \nu)}{\sin(\mu + \nu)}}. \tag{108}$$

Теперь по формуле (105) имеем:

$$\left.\begin{aligned} e^{\vartheta} &= \frac{\cos\nu}{\sin\nu}\sqrt{\frac{(\cos 2\nu + \cos 2\mu)}{\pm(\cos 2\nu - \cos 2\mu)}}, \\ \sinh\vartheta &= \frac{\cos 2\mu + \cos^2 2\nu}{\sin 2\nu\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}}, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

причем последняя формула написана только для отрезка OP.

Эти формулы в соединении с формулой (27) позволят нам определить давление $R = 2P$ на дно нашего прямоугольного сосуда и величины дна $PP' = 2b$ и сторон его $PF = P'F' = a$

Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \alpha c^2 \sin^2 2\nu, \\ d\vartheta &= 4\alpha c^2 \sin 2\nu \cos 2\nu d\nu. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

---

1) В первой круглой скобке числителя под радикалом должно стоять:

$$1 \mp \sin 2\nu,$$

а не

$$1 \pm \sin 2\nu.$$

Прим. ред.

Подставляем величины (109) и (110) в формулу (15):

$$R = 8\rho w \alpha c^2 \int_0^{2\mu} \frac{\cos 2\mu + \cos^2 2\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} \cos 2\nu d\nu. \quad ^{1})$$

Берем интегралы:

$$\int_0^{2\mu} \frac{\cos 2\nu d\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{2\mu} \frac{\cos^3 2\nu d\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} = \cos^2 2\mu \int_0^{2\mu} \frac{\cos 2\nu d\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} +$$

$$+ \int_0^{2\mu} \sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu} \cos 2\nu d\nu =$$

$$= \frac{\pi \cos^2 2\mu}{4} + \frac{\pi \sin^2 2\mu}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \sin^2 2\mu.$$

Подставляем их:

$$R = 2\rho w \alpha c^2 \pi \left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2} \sin^2 2\mu\right). \qquad (111)$$

Для определения b и a подставляем формулы (109) и (110) в (16):

$$b = \frac{4\alpha c^2}{w} \int_0^{2\mu} \sqrt{\frac{(1 + \cos 2\nu)(\cos 2\nu + \cos 2\mu)}{(1 - \cos 2\nu)(\cos 2\nu - \cos 2\mu)}} \sin 2\nu \cos 2\nu d\nu,$$

$$a = \frac{4\alpha c^2}{w} \int_{2\mu}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(1 + \cos 2\nu)(\cos 2\nu + \cos 2\mu)}{(1 - \cos 2\nu)(\cos 2\mu - \cos 2\nu)}} \sin 2\nu \cos 2\nu d\nu.$$

---

[1]) В этом и во всех последующих интегралах до формулы (112) точнее было бы поставить в пределах не 2μ и $\frac{\pi}{2}$, а μ и $\frac{\pi}{4}$ (см. также примечание к стр. 220). *Прим. ред.*

Вводим подстановку $\cos 2\nu = z$. Получаем:

$$b = \frac{2\alpha c^2}{w} \int_{\cos 2\mu}^{1} \frac{(1+z)(\cos 2\mu + z)}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}} z\,dz =$$

$$= \frac{2\alpha c^2}{w} [A \cos 2\mu + B(1+\cos 2\mu) + C]; \qquad (112)$$

$$a = \frac{2\alpha c^2}{w} \int_{0}^{\cos 2\mu} \frac{(1+z)(\cos 2\mu + z)}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}} z\,dz =$$

$$= \frac{2\alpha c^2}{w} [A' \cos 2\mu + B'(1+\cos 2\mu) + C'],$$

где

$$A = \int_{\cos 2\mu}^{1} \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}},$$

$$A' = \int_{0}^{\cos 2\mu} \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}},$$

$$B = \int_{\cos 2\mu}^{1} \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}},$$

$$B' = \int_{0}^{\cos 2\mu} \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}},$$

$$C = \int_{\cos 2\mu}^{1} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}},$$

$$C' = \int_{0}^{\cos 2\mu} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}}.$$

Чтобы взять эти интегралы, положим, что

$$z^2 = 1 - \sigma^2 \sin^2 2\mu.$$

Для двух первых интегралов эта подстановка дает:

$$A = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad A' = \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}} = \lg \operatorname{ctg} \mu.$$

Точно так же окончательно берутся два последние интеграла:

$$C = \int_0^1 \frac{(1-\sigma^2 \sin^2 2\mu)\, d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} =$$

$$= \cos^2 2\mu \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \sin^2 2\mu \int_0^1 \sqrt{1-\sigma^2}\, d\sigma =$$

$$= \cos^2 2\mu \frac{\pi}{2} + \sin^2 2\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sin^2 2\mu;$$

$$C' = \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \frac{(1-\sigma^2 \sin^2 2\mu)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}} =$$

$$= \cos^2 2\mu \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}} - \sin^2 2\mu \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \sqrt{\sigma^2-1}\, d\sigma =$$

$$= \cos 2\mu \lg \operatorname{ctg} \mu - \frac{1}{2} \cos 2\mu + \frac{1}{2} \sin^2 2\mu \lg \operatorname{ctg} \mu.$$

Что касается интегралов B и B', то они приводятся к эллиптическим.

Мы имеем:

$$B = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\sigma^2 \sin^2 2\mu}\, d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \qquad B' = \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \frac{\sqrt{1-\sigma^2 \sin^2 2\mu}\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}}.$$

Полагаем в первом интеграле $\sigma = \sin\alpha$:

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 2\mu \sin^2\alpha}\, d\alpha = E\left(\sin 2\mu, \frac{\pi}{2}\right).$$

Во втором интеграле полагаем:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sin^2 2\mu}(1 - \cos^2 2\mu \sin^2\alpha).$$

Это дает:

$$B' = \cos^2 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 2\mu \sin^2\alpha}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 2\mu \sin^2\alpha}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 2\mu \sin^2\alpha}\, d\alpha =$$

$$= F\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставим теперь все найденные интегралы в формулы (112):

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{2\alpha c^2}{w}\left\{\frac{\pi}{2}\left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu\right) + \right.\right. \\ &\quad \left. + (1 + \cos 2\mu) E\left(\sin 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \\ a &= \frac{2\alpha c^2}{w}\left\{\lg \operatorname{ctg}\mu\left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu\right) - \frac{1}{2}\cos 2\mu + \right. \\ &\quad \left.\left. + (1 + \cos 2\mu)\left[F\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

Исключая αc^2 из формулы (111) и первой формулы (113), находим величину силы давления потока на наш прямоугольный сосуд:

$$R = \frac{\pi}{\pi + 2\dfrac{(1+\cos 2\mu)\,E\left(\sin 2\mu, \dfrac{\pi}{2}\right)}{1+\cos 2\mu - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\mu}}\, 2b\rho w^2. \qquad (114)$$

Входящий сюда угол μ определяется из трансцендентного уравнения, получаемого из формул (113):

$$\frac{a}{b}\left[\frac{\pi}{2}\left(1+\cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2\mu\right) + (1+\cos 2\mu)\,E\left(\sin 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \lg \operatorname{ctg}\mu\left(1+\cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2\mu + (1+\cos\mu)\left[F\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (115)$$

Если $\alpha = 0$, то уравнение удовлетворяется положением $\mu = \frac{\pi}{4}$, так как $F\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = E\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Величина R обращается при этом в величину, данную формулой (32), ибо $E\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Этого и следовало ожидать, так как сосуд наш обращается при этом в пластинку.

Если же $\alpha = \infty$, т. е. сосуд весьма длинен, то мы удовлетворим уравнению (115), полагая $\mu = 0$. Величина R обращается при этом в

$$R = b\rho w^2.$$

§ 16. Истечение жидкости из бесконечного сосуда в наставку. Эта задача решается с помощью направляющей сети с четырьмя фокусами, которая получается из нашей общей формулы (11), полагая в ней:

$$c_1 = -c_2 = c, \qquad c_3 = -c_4 = c', \qquad m = 1, \qquad f(u) = \frac{2qcc'}{u}.$$

Это дает нам:

$$\varphi = q\int \frac{2cc'\,du}{u\sqrt{(c'^2-u^2)(c^2-u^2)}} =$$

$$= qi\int \frac{cc'd\,\frac{1}{u^2}}{\sqrt{-1+(c'^2+c^2)\frac{1}{u^2}-\frac{c'^2c^2}{u^4}}} =$$

$$= qi\int \frac{\frac{2c^2c'^2}{c'^2-c^2}\,d\left(\frac{1}{u^2}\right)}{\sqrt{1-\left[\frac{2c'^2c^2}{c'^2-c^2}\frac{1}{u^2}-\frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2}\right]^2}} =$$

$$= qi\arcsin\left[\frac{2c'^2c^2}{c'^2-c^2}\frac{1}{u^2}-\frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2}\right]-\beta i, \qquad (116)$$

где β — некоторое произвольное постоянное. Далее, по формуле (9):

$$\frac{c'^2c^2}{c'+c}\frac{1}{u^2} = \frac{c'^2+c^2}{2(c'+c)} + \frac{c'-c}{2}\sin\left(\frac{\theta+\beta}{q}-i\frac{\vartheta}{q}\right).$$

Положим, что

$$u = r(\cos\lambda + i\sin\lambda).$$

Тогда при сравнении действительной и мнимой частей получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{c'^2c^2}{c'+c}\frac{\cos 2\lambda}{r^2} &= \frac{c'^2+c^2}{2(c'+c)} + \frac{c'-c}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{q}\cosh\frac{\vartheta}{q},\\ \frac{c'^2c^2}{c'+c}\frac{\sin 2\lambda}{r^2} &= \frac{c'-c}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{q}\sinh\frac{\vartheta}{q}.\end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Сравнение этих формул с формулами (19) показывает нам, каким образом рассматриваемая изотермическая сеть может быть получена из эллиптической сети [роль параметра θ играет в формуле (117) $\theta+\beta$]. Пусть (фиг. 34) $OF = c$ и $OF' = c'$. Построим эллиптическую сеть с фокальным отрезком FF'. Потом возьмем некоторый центр преобразования O' между O и F на расстоянии

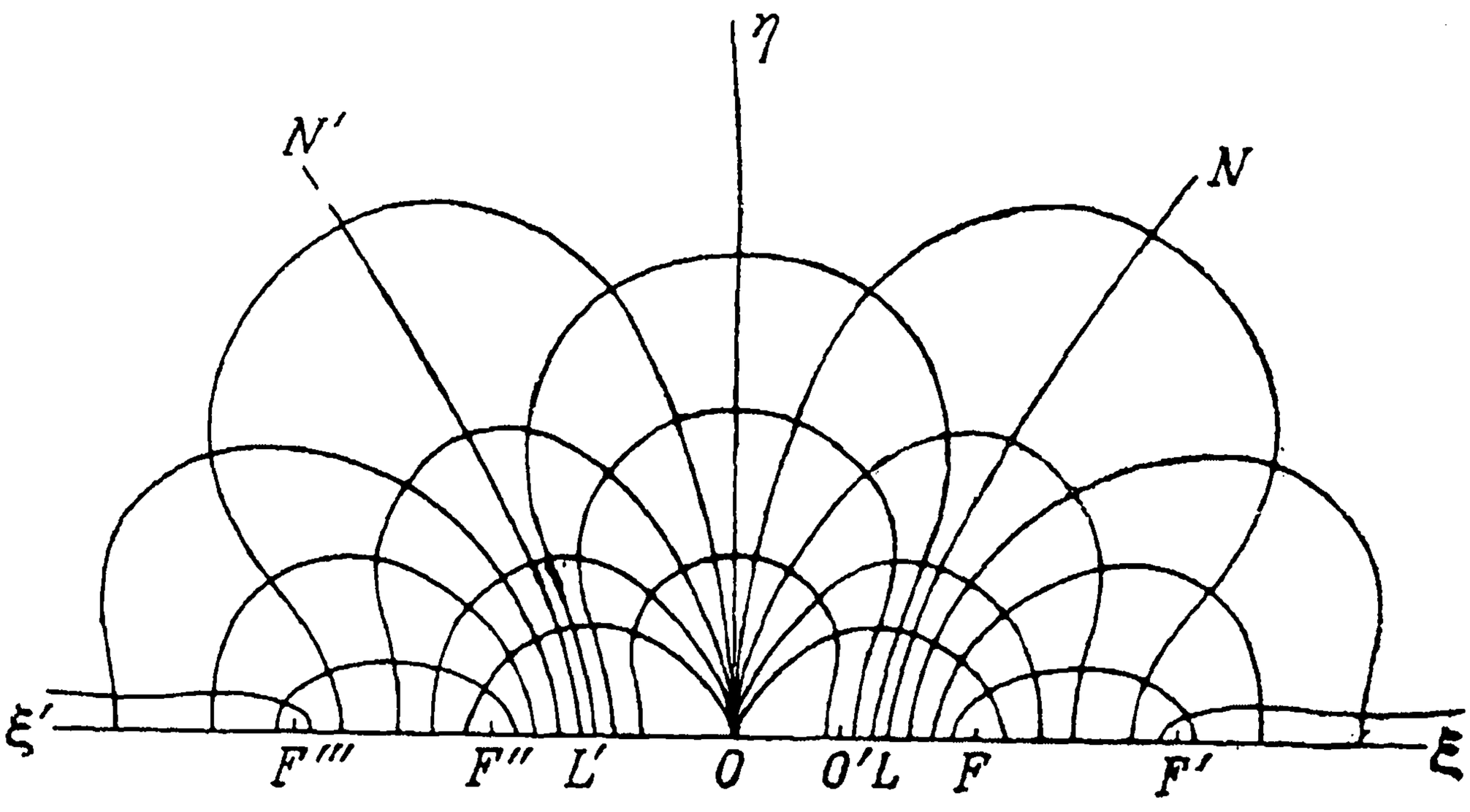
$$O'O = \frac{cc'}{c+c'}$$

от начала координат и, следовательно, на расстоянии

$$\frac{c'+c}{2}-\frac{cc'}{c'+c}=\frac{c'^2+c^2}{2(c'+c)}$$

от центра C эллиптической сети.

Приняв центр преобразования O' за полюс и ось $O'\xi$ за полярную ось, каждой точке эллиптической сети построим



Фиг. 34.

соответственную точку, уменьшая полярный угол в два раза и заменяя радиус-вектор новым таким образом, чтобы произведение квадрата нового радиуса-вектора на прежний радиус-вектор равнялось

$$\frac{c'^2c^2}{c+c'}.$$

После такого преобразования фокусы F и F' эллиптической сети заменяются четырьмя точками, расположенными симметрично относительно точки O' (эллиптическая сеть с полной плоскости преобразуется на полуплоскость). При этом точки, соответственные F, будут отстоять от O' на расстоянии

$$\sqrt{\frac{c'^2c^2}{c+c'}:O'F}=\sqrt{\frac{c'^2c^2}{c+c'}:\left(c-\frac{cc'}{c+c'}\right)}=c',$$

а точки, соответственные F', будут отстоять на расстоянии c. Если теперь передвинем всю полученную сеть по оси абсцисс

влево на расстояние $\frac{cc'}{c+c'}$, то она расположится симметрично относительно осей координат, причем фокус эллиптической сети F' будет в новой сети представлен фокусами F и F'', а фокус эллиптической сети F будет в новой сети представлен фокусами F' и F'''.

Такое происхождение рассматриваемой сети из эллиптической разъясняет нам ее вид. Так как точка O' соответствует параметрам

$$\frac{\theta+\beta}{q}=-\frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\vartheta}{q}=\frac{\vartheta_0}{q},$$

где

$$\cosh\left(\frac{\vartheta_0}{q}\right)=\frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2},^{1}) \tag{118}$$

то эти значения параметров будут иметь все бесконечно удаленные точки нашей области. На отрезке оси абсцисс $\xi F'$ мы будем иметь $\theta+\beta=-q\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ϑ_0 до 0; на отрезке $F'F$ мы будем иметь $\vartheta=0$ и $\theta+\beta$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}q$ до $+\frac{\pi}{2}q$; на отрезке FO будем иметь $\theta+\beta=\frac{\pi}{2}q$ и ϑ изменяется от 0 до ∞; на оси ординат $O\eta$ будем иметь $\theta+\beta=-\frac{\pi}{2}q$ и ϑ изменяется от ∞ до ϑ_0; на отрезке оси абсцисс OF'' будем иметь $\theta+\beta=-\frac{3}{2}\pi q$ и ϑ изменяется от ∞ до 0; на отрезке $F''F'''$ будем иметь $\theta+\beta$ изменяется от $-\frac{3}{2}\pi q$ до $-\frac{\pi}{2}q$ и $\vartheta=0$;

---

[1]) Вторая из формул (117) дает для точки O, т. е. при

$$\frac{\theta+\beta}{q}=-\frac{\pi}{2},\quad \lambda=0,\quad r=\frac{cc'}{c+c'},$$

такое выражение:

$$\cosh\left(\frac{\vartheta_0}{q}\right)=\frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2}-2\frac{c'+c}{c'-c},$$

а не

$$\cosh\left(\frac{\vartheta_0}{q}\right)=\frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2}.$$

Прим. ред.

наконец, на отрезке $F'''\xi'$ будем иметь $\theta+\beta=-\frac{\pi}{2}q$ и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0. Так как бесконечные точки всех гипербол эллиптической сети после преобразования и передвижения попадут в точку O, то все линии $\theta=\text{const}$ пройдут через эту точку. Они пересекут ось абсцисс еще на отрезках FF' и $F''F'''$ под прямым углом, как это представлено на фиг. 34. Что касается линий $\vartheta=\text{const}$, которые преобразуются из эллипсов, то они будут пересекать ось абсцисс вне фокальных отрезков FF'' и $F''F'''$. Два эллипса эллиптической сети, из которых один лежит своим контуром на бесконечно малое расстояние вправо от O', а другой — влево от O', обратятся после преобразования и передвижения в кривые LN и $L'N'$, которые в бесконечности разделяются каждая на две и охватывают всю рассматриваемую область.

Применительно к нашей задаче положим в формулах (117) $q=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{\pi}{4}$ и введем в них для сокращения подстановку: $c=c'\cos\nu$. Получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2c^2}{\sin^2\nu}\frac{\cos 2\lambda}{r^2}&=\frac{1+\cos^2\nu}{\sin^2\nu}-\cos 2\theta\cosh 2\vartheta,\\ \frac{2c^2}{\sin^2\nu}\frac{\sin 2\lambda}{r^2}&=\sin 2\theta\sinh 2\vartheta.\end{aligned}\right\}\qquad(119)$$

Что касается формулы (118), то она при этом обратится в

$$\cosh 2\vartheta_0=\frac{1+\cos^2\nu}{\sin^2\nu},$$

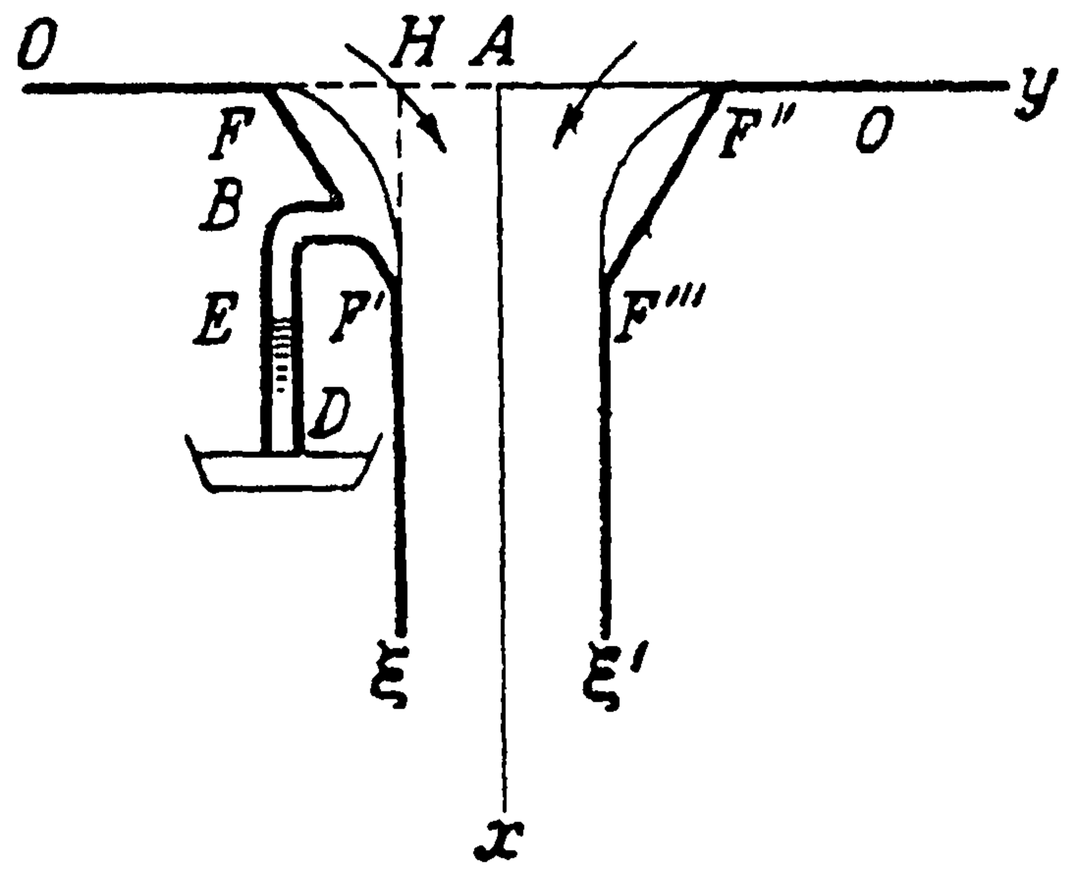
откуда

$$\sinh 2\vartheta_0=\frac{2\cos\nu}{\sin^2\nu}.$$

Вычитая первые и вторые части этих формул, определим скорость v, соответствующую ϑ_0:

$$\left.\begin{aligned}e^{-2\vartheta_0}=\left(\frac{v}{w}\right)^2&=\frac{(1-\cos\nu)^2}{\sin^2\nu},\\ v&=w\,\mathrm{tg}\,\frac{\nu}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(120)$$

За образующую сеть примем сеть фиг. 9 и наложим ее на направляющую сеть фиг. 34 так, чтобы оси координат совпали. Все точки бесконечности рассматриваемого течения предстаются на фиг. 34 точкой O, поэтому во всех этих точках скорость будет бесконечно мала и будет иметь всевозможные направления, изменяющиеся от $\theta = \frac{\pi}{2}$ до $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Идя по линии $\psi = 0$, соответствующей на фиг. 34 оси $O\xi$, мы будем иметь: на отрезке OF угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, на отрезке FF' величина $\vartheta = 0$ и угол θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, на отрезке $F'\xi$ угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0. В действительном течении жидкости на фиг. 35 это будет соответствовать: горизонтальной стенке сосуда OF, контуру струи FF' и стенке наставки $F'\xi$. Подобным же образом, идя по линии $\psi = \pi\alpha$, мы будем иметь: на OF'' угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, на $F''F'''$ $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0; на $F'''\xi'$ угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0.



Фиг. 35.

Это будет соответствовать в действительном течении жидкости правому граничному контуру $OF''F'''\xi'$, который при надлежащем выборе начала координат A симметричен левому граничному контуру $OFF'\xi$.

Составим уравнение контура FF'. По формулам (119) и (20) имеем для отрезка FF':

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \alpha \lg \frac{r}{c}, \\ \cos 2\theta &= \frac{1+\cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} - \frac{2c^2}{r^2 \sin^2 \nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

Отсюда имеем:

$$\cos 2\theta = \frac{1 + \cos^2 \nu - 2e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}{\sin^2 \nu},$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}.$$

Подставляем эти величины в формулу (14):

$$dx = \frac{1}{w \sin \nu} \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}\, d\varphi,$$

$$dy = \frac{1}{w \sin \nu} \sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu}\, d\varphi.$$

Чтобы взять интегралы, делаем в первой формуле подстановку:

$$1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} = \sigma^2, \quad d\varphi = \frac{\alpha \sigma d\sigma}{1 - \sigma^2},$$

а во второй — подстановку:

$$e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu = \sigma^2,$$

$$d\varphi = -\frac{\alpha \sigma d\sigma}{\cos^2 \nu + \sigma^2}.$$

Получаем:

$$\int \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}\, d\varphi = \alpha \int \frac{\sigma^2 d\sigma}{1 - \sigma^2} =$$

$$= \alpha \left(-\sigma + \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \right) + \text{const},$$

$$\int \sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu}\, d\varphi = -\alpha \int \frac{\sigma^2 d\sigma}{\sigma^2 + \cos^2 \nu} =$$

$$= \alpha \left(-\sigma + \cos \nu \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma}{\cos \nu} \right) + \text{const}.$$

Таким образом уравнение контура струи выразится так:

$$x = \frac{\alpha}{w \sin \nu}\left(- \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}} \right) + \text{const},$$

$$y = \frac{\alpha}{w \sin \nu}\left(- \sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu} + \right.$$

$$\left. + \cos \nu \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu}}{\cos \nu} \right) + \text{const}. \qquad (122)$$

Замечаем, что на основании формулы (121) в точках F и F'' мы имеем $\varphi = 0$ и

$$\varphi = -\alpha \lg \cos \nu.$$

Назовем ширину отверстия входной воронки FF'' через $2b$, ширину наставки $F'F'''$ через $2a$ и вышину воронки $F'H$ через l. Координаты точек F и F' будут при этом $(0, -b)$ и $(l, -a)$. Составляем по формуле (122) разности этих координат, а из формулы (120) определяем a:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{Q}{\pi w}\left[-1 + \frac{1}{\sin \nu} \lg \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2} \right) \right], \\ b - a &= \frac{Q}{\pi w}\left(1 - \frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right), \\ a &= \frac{Q}{2v} = \frac{Q}{2w} \operatorname{ctg} \frac{\nu}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

Задавшись углом ν $\left(\text{который по предположению менее } \frac{\pi}{2}\right)$, определим из этих формул размеры воронки с помощью отношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{a} &= \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\left[\frac{1}{\sin\nu}\lg\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)-1\right], \\ \frac{b-a}{a} &= \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Что же касается количества Q истекающей жидкости, то оно представится формулой:

$$Q = \frac{\pi}{\pi+2\left[\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}-\frac{\nu}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right)\right]}\,2bv\,. \tag{125}$$

Величина, стоящая здесь в знаменателе множителем при 2, положительна, ибо она может быть представлена в виде двух положительных членов:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2};$$

с другой стороны, эта величина менее единицы, ибо при вычитании из нее единицы мы получаем отрицательную величину:

$$-\left(1-\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\right).$$

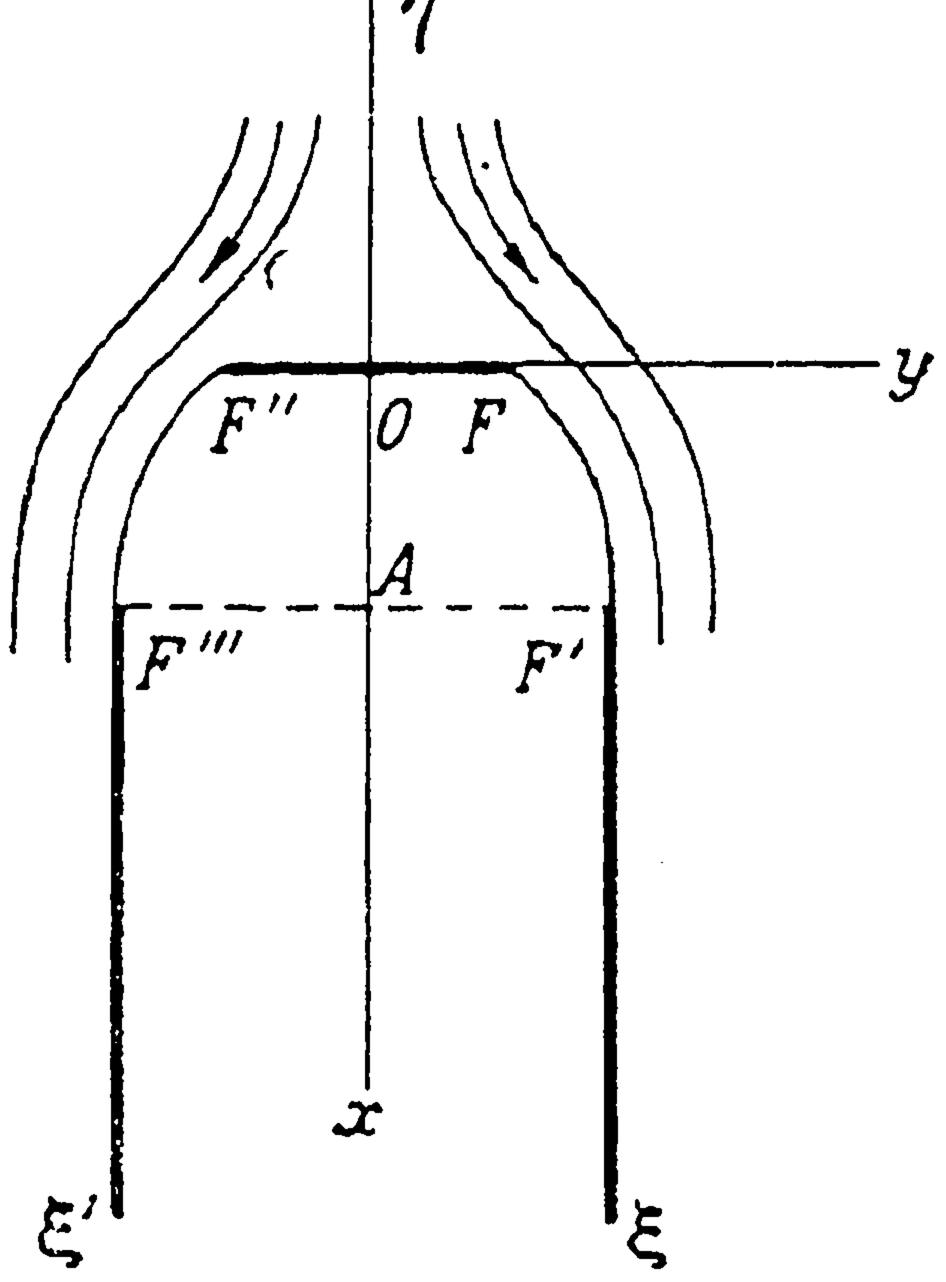
Это показывает, что формула (125) дает большее количество вытекающей жидкости, нежели формула (24), т. е. *прибавление наставки увеличивает количество вытекающей жидкости.*

Предположим, что к стенке воронки против контура струи FF' прикреплена пиезометрическая трубка BD, и определим высоту $ED = h$, на которую жидкость (той же плотности, как текущая жидкость) поднимется в этой трубке. Полагая, что давление на поверхность жидкости сосуда D и на жидкость, вытекающую из весьма длинной наставки, одно и то же, получим:

$$h = \frac{w^2-v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\nu}{2}-1\right).$$

§ 17. Об ударе потока жидкости о пластинку, прикрывающую вход в канал с параллельными стенками. Наложим на направляющую сеть фиг. 34 $\left(\text{при } q=\frac{1}{2} \text{ и } \beta=\right.$

$= -\frac{\pi}{4}$) образующую сеть фиг. 13 так, чтобы оси координат совпали. Во всех бесконечно удаленных точках рассматриваемого течения жидкости мы получим при этом $\theta = 0$ и скорость v, определяемую по формуле (120), так что течение будет соответствовать беспредельному потоку жидкости. Идя по линии $\psi = 0$, будем иметь: на ηO угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞, на OF угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, на FF' величина $\vartheta = 0$ и угол θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, на $F'\xi$ угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0, равным образом на OF'' угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, на $F''F'''$ величина $\vartheta = 0$ и угол θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, на $F'''\xi'$ угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0. Это соответствует (фиг. 36) в действительном течении жидкости раздельной линии тока $O\eta$, которая, дойдя до пластинки FF'', разбивается в критической точке O на две ветви: левая ветвь обтекает часть пластинки OF, образует контур струи FF' и потом переходит на внешнюю стенку канала $F'\xi$; правая же ветвь обтекает часть пластинки OF'', образует контур струи $F''F'''$ и потом переходит на внешнюю часть левой стенки канала $F'''\xi'$. Определим уравнения контура струи FF'. По формулам (119) и (27) имеем на отрезках OF и FF':



Фиг. 36.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= kr^2, \\ \cosh 2\vartheta &= \frac{2\frac{c^2}{r^2} - 1 - \cos^2\nu}{\sin^2\nu}, \\ \cos 2\theta &= \frac{1 + \cos^2\nu - 2\frac{c^2}{r^2}}{\sin^2\nu}, \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

причем первая формула относится к обоим отрезкам, вторая — к отрезку OF и третья — к отрезку FF'.

Переходим от функций от 2ϑ и 2θ к функциям от ϑ и θ:

$$\left.\begin{aligned}
\sinh\vartheta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{\frac{c^2}{r^2}-1}\,,\\
\cosh\vartheta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{\frac{c^2}{r^2}-\cos^2\nu}\,,\\
\sin\theta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{\frac{c^2}{r^2}-\cos^2\nu}\,,\\
\cos\theta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{1-\frac{c^2}{r^2}}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

На основании первых формул из групп (126) и (127) и формулы (15) получим для силы R давления потока на пластинку выражение:

$$2P = R = \frac{4\rho w k}{\sin\nu}\int_0^c \sqrt{c^2-r^2}\,dr = \frac{\rho w k c^2 \pi}{\sin\nu}. \qquad (128)$$

Далее, называя длину пластинки через $2b$, будем иметь по формулам (126), (127), (16):

$$\left.\begin{aligned}
b &= \frac{2k}{w}\int_0^c(\cosh\vartheta+\sinh\vartheta)\,r\,dr = \frac{2k}{w\sin\nu}\left(\int_0^c\sqrt{c^2-r^2}\,dr+\right.\\
&\left.+\int_0^c\sqrt{c^2-r^2\cos^2\nu}\,dr\right) = \frac{c^2k}{w\sin\nu}\left(\frac{\pi}{2}+\sin\nu+\frac{\pi-2\nu}{2\cos\nu}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

Из формул (128) и (129) следует, что

$$R = \frac{\pi}{\pi+2\left(\sin\nu+\dfrac{\pi-2\nu}{2\cos\nu}\right)}\,2bw^2\rho\,. \qquad (130)$$

Эта формула дает бóльшую величину R, чем формула (32), так как в знаменателе множитель при 2 при изменении ν от $\frac{\pi}{2}$

до 0 идет, уменьшаясь от 2 до $\frac{\pi}{2}$. Коэфициент еще более увеличивается, если мы вместо w введем в формулу (130) скорость потока v из формулы (120).

Подставляем $\sin\theta$ и $\cos\theta$ из двух последних формул (127) и величину $d\varphi$ из первой формулы (126) в формулу (14):

$$dx = \frac{2k}{w\sin\nu}\sqrt{r^2 - c^2}\,dr,$$

$$dy = \frac{2k}{w\sin\nu}\sqrt{c^2 - r^2\cos^2\nu}\,dr.$$

Интегрируем:

$$x = \frac{kc^2}{w\sin\nu}\left[\frac{r}{c}\sqrt{\frac{r^2}{c^2}-1} - \lg\left(\frac{r}{c}+\sqrt{\frac{r^2}{c^2}-1}\right)\right] + \text{const},$$

$$y = \frac{kc^2}{w\sin\nu\cos\nu}\left(\frac{r}{c}\cos\nu\sqrt{1-\cos^2\nu\frac{r^2}{c^2}} + \arcsin\frac{r\cos\nu}{c}\right) + \text{const}.$$

Произвольные постоянные определяем под условием, что в точке F при $r = c$ имеем $x = 0$, $y = b$. После этого определения уравнения получают вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{kc^2}{w\sin\nu}\left[\frac{r}{c}\sqrt{\frac{r^2}{c^2}-1} - \lg\left(\frac{r}{c}+\sqrt{\frac{r^2}{c^2}-1}\right)\right], \\ y - b &= \frac{kc^2}{w\sin\nu\cos\nu}\left[\frac{r}{c}\cos\nu\sqrt{1-\cos^2\nu\frac{r^2}{c^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin\left(\frac{r}{c}\cos\nu\right) - \sin\nu\cos\nu - \frac{\pi}{2} + \nu\right]. \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Исключая отсюда $\frac{r}{c}$ и потом определяя постоянное kc^2 по формулам (129), найдем уравнение контура FF'.

Называя ширину канала $F'F'''$ через $2a$ и расстояние OA пластинки от отверстия канала через l, отнесем уравнения (131) к точке F', в которой $r = \frac{c}{\cos\nu}$. Получим:

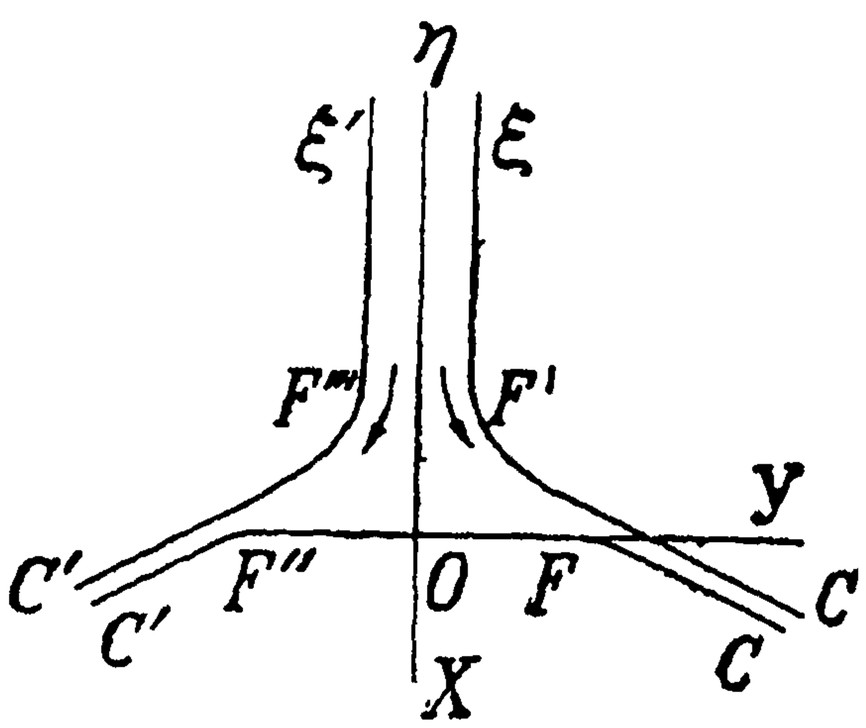
$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{kc^2}{w}\left[\frac{1}{\cos^2\nu} + \frac{1}{\sin\nu}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\right], \\ a-b &= \frac{kc^2}{w}\left(\frac{\nu}{\sin\nu\cos\nu}-1\right). \end{aligned}\right\} \quad (132)$$

Отсюда и из формулы (129) получим пропорции:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{a-b} &= \frac{\operatorname{tg}\nu + \cos\nu\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)}{\nu-\sin\nu\cos\nu}, \\ \frac{a}{a-b} &= \frac{\pi(1+\cos\nu)}{2(\nu-\sin\nu\cos\nu)}, \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

которые при данном ν позволяют определить размеры пластинки и ее расстояние от отверстия канала при условии возможности рассматриваемого течения жидкости.

§ 18. Удар о пластинку струи жидкости, выходящей из канала с параллельными стенками. Приняв ту же направляющую сеть фиг. 34 $\left(\text{при } q=\frac{1}{2} \text{ и } \beta=-\frac{\pi}{4}\right)$, наложим на нее образующую сеть фиг. 19 так, чтобы оси координат совпали. Допустим, что $c'>e>c$, т. е. полюсы C и C' образующей сети попадают на фокальные отрезки FF' и $F''F'''$ направляющей сети. Назовем через θ_1 величину параметра θ для фокуса $C\,(e, 0)$ образующей сети. Идя по линии $\psi=0$, мы будем иметь (фиг. 34): на линии ηO угол $\theta=0$ и ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞, на OF угол $\theta=\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, на FC $\vartheta=0$ и θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до θ_1, на OF''' угол $\theta=-\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, на $F''C'$ величина $\vartheta=0$ и угол θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $-\theta_1$. Это соответствует



Фиг. 37.

в действительном течении жидкости на фиг. 37 раздельной линии тока ηO, которая в критической точке O разбивается на две половины: правая идет по части пластинки OF и образует контур струи FC, а левая идет по части пластинки OF'' и образует контур струи $F''C'$. Идя по линии $\psi = \pi\alpha$, будем иметь: на отрезке $\xi F'$ угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от ϑ_0 до 0, на отрезке $F'C$ величина $\vartheta = 0$ и θ изменяется от 0 до θ_1. Это соответствует на фиг. 37 правой стенке канала $\xi F'$ и верхнему контуру $F'C$ правой струи. При $\psi = -\pi\alpha$ будем иметь: на отрезке $\xi' F'''$ угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от ϑ_0 до 0, на отрезке $F'''C'$ величина $\vartheta = 0$ и угол θ изменяется от 0 до $-\theta_1$. Это соответствует на фиг. 37 левой стенке канала $\xi' F'''$ и верхнему контуру $F'''C'$ левой струи.

Определим теперь уравнения контуров FC и $F'C$. По формулам (56) и (119) имеем при $\gamma = e$ для отрезков CF и CF':

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\alpha \lg [\pm (e^2 - r^2)] + 2\alpha \lg \beta, \\ \cos 2\theta &= \frac{1 + \cos^2 \nu - 2\frac{c^2}{r^2}}{\sin^2 \nu}, \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - \cos^2 \nu}, \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

При этом из двух последних формул определяется угол θ_1, который образует направление струи в бесконечно удаленной точке C с осью Ox. Для этого стоит только положить $r = e$:

$$\left.\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{\frac{c^2}{e^2} - \cos^2 \nu}, \\ \cos \theta_1 &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{1 - \frac{c^2}{e^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Подставляем величину $d\varphi$, а также и значения $\sin\theta$ и $\cos\theta$ из формул (134) в формулы (14):

$$dx = \frac{2\alpha}{w \sin \alpha} \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{e^2 - r^2} dr,$$

$$dy = \frac{2\alpha}{w \sin \nu} \frac{\sqrt{c^2 - r^2 \cos^2 \nu}}{e^2 - r^2} dr,$$

где применительно к контуру CF надо брать $c < r < e$, а к контуру $F'C$ надо брать $e < r < \frac{c}{\cos \nu}$.

Интегрируем:

$$x = \frac{2\alpha}{w \sin \nu} \left\{ (e^2 - c^2) \int \frac{dr}{(e^2 - r^2)\sqrt{r^2 - c^2}} - \right.$$

$$\left. - \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right\} + \text{const},$$

$$y = \frac{2\alpha}{w \sin \nu} \left\{ (c^2 - e^2 \cos^2 \nu) \int \frac{dr}{(e^2 - r^2)\sqrt{c^2 - r^2 \cos^2 \nu}} + \right.$$

$$\left. + \cos^2 \nu \int \frac{dr}{\sqrt{c^2 - r^2 \cos^2 \nu}} \right\} + \text{const}.$$

Выполняем интегрирование, пользуясь для первых интегралов, входящих во вторые части наших уравнений, подстановкой:

$$r = \frac{ez}{\sqrt{z^2 \mp 1}}.$$

Получаем:

$$x = \frac{2\alpha}{w \sin \nu} \left[\frac{\sqrt{e^2 - c^2}}{e} \lg \left(z + \sqrt{z^2 \mp \frac{c^2}{e^2 - c^2}} \right) - \right.$$

$$\left. - \lg (r + \sqrt{r^2 - c^2}) \right] + \text{const},$$

$$y = \frac{2\alpha}{w \sin \nu} \left[\frac{\sqrt{c^2 - e^2 \cos^2 \nu}}{e} \lg \left(z + \sqrt{z^2 \mp \frac{c^2}{c^2 - e^2 \cos^2 \nu}} \right) - \right.$$

$$\left. - \cos \nu \arccos \left(\frac{r \cos \nu}{c} \right) \right] + \text{const}.$$

Для определения постоянных обращаем внимание на координаты точек F и F', которые пусть будут $(0, b)$, $(-h, a)$. Определив постоянные и заменив z его величиной, найдем

$$x = \frac{2\alpha}{w \sin \nu}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{c}{e}\right)^2}\ \lg \frac{\left[\frac{r}{c}\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-1}+\frac{e}{c}\sqrt{\left(\frac{r}{c}\right)^2-1}\right]}{\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2}} - \lg\left[\frac{r}{c}+\sqrt{\left(\frac{r}{c}\right)^2-1}\right]\right\},$$

$$y = \frac{2\alpha}{w \sin \nu}\left\{\sqrt{\left(\frac{c}{e}\right)^2-\cos^2\nu}\ \lg \frac{\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-1}\left[\frac{r}{c}\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}+\frac{e}{c}\sqrt{1-\left(\frac{r}{c}\right)^2\cos^2\nu}\right]}{\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}+\frac{c}{e}\sin\nu\right]} - \right.$$

$$\left. - \cos\nu\left(\arccos\frac{r\cos\nu}{c}-\nu\right)\right\}+b, \qquad (136)$$

$$x' = \frac{2\alpha}{w \sin \nu}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}\left[\frac{r'}{c}\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-1}+\frac{e}{c}\sqrt{\left(\frac{r'}{c}\right)^2-1}\right]\right.$$

$$\sqrt{\left(\frac{r'}{e}\right)^2-\left(\frac{e}{c}\right)^2}\left[\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-1}+\frac{e}{c}\sin\nu\right]$$

$$\left. - \lg\left[\frac{\cos\nu}{1+\sin\nu}\left(\frac{r'}{c}+\sqrt{\left(\frac{r'}{c}\right)^2-1}\right)\right]\right\}-h,$$

$$y' = \frac{2\alpha}{w \sin \nu}\left\{\sqrt{\left(\frac{c}{e}\right)^2-\cos^2\nu}\ \lg \frac{\frac{r'}{c}\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}+\frac{e}{c}\sqrt{1-\left(\frac{r'}{c}\right)^2\cos^2\nu}}{\sqrt{\left(\frac{r'}{c}\right)^2-\left(\frac{e}{c}\right)^2}} - \cos\nu\arccos\frac{r'\cos\nu}{c}\right\}+a,$$

где индексы поставлены при величинах, относящихся к контуру $F'C$. Исключая из первых двух уравнений (136) величину $\frac{r}{c}$, а из вторых двух $\frac{r'}{c}$, найдем уравнение контуров FC и $F'C$. Но для нас имеет, главным образом, интерес установление связей между постоянными величинами, входящими в нашу задачу. Для получения таких связей обращаемся к бесконечно удаленной точке струи C, в которой $r = r' = e$. При таком положении все координаты x, y, x', y' обращаются в бесконечность и разности $x' - x$ и $y' - y$ делаются неопределенными. Но эта неопределенность устраняется предположением, что мы составляем разность координат точек, лежащих на одной эквипотенциальной линии, так как при таком допущении имеем из первой формулы (134):

$$e^2 - r^2 = r'^2 - e^2.$$

Для точки C пишем:

$$x - x' = \frac{Q}{2w} \sin \theta_1 ,$$

$$y' - y = \frac{Q}{2w} \cos \theta_1 .$$

Кроме того, мы положим, что

$$\alpha = \frac{Q}{2\pi}$$

и воспользуемся формулами (135). На основании сказанного получим из формул (136):

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{2w} \sin \theta_1 &= h - \frac{Q}{\pi w}\left[\cos \theta_1 \lg \frac{\sin \theta_1}{1 + \cos \theta_1} - \lg \frac{\cos \nu}{1 + \sin \nu}\right]^{1)}, \\ \frac{Q}{2w} \cos \theta_1 &= a - b - \frac{Q}{\pi w}\left[\sin \theta_1 \lg \frac{\cos \theta_1}{1 + \sin \theta_1} + \nu \cos \nu\right]. \end{aligned}\right\} \quad (137)$$

---

[1]) В формуле (137) для

$$\frac{Q}{2w} \sin \theta_1$$

перед вторым логарифмом должен стоять коэфициент

$$\frac{1}{\sin \nu};$$

Сюда следует прибавить еще уравнение (120), которому можно дать вид:

$$\frac{Q}{2a} = w \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} . \qquad (138)$$

Из уравнений (137) и (138) мы можем по данным a, b, h, w определить вспомогательные углы ν, θ_1 и количество Q вытекающей жидкости.

Найдем теперь силу давления струи на пластинку FF''. По формуле (15) и первой из формул (127) имеем:

$$2P = \frac{2\rho w}{\sin \nu} \int_0^c \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - 1}\, d\varphi .$$

Подставляем сюда величину $d\varphi$ из первой формулы (134), в которой для отрезка OF надо взять знак $(+)$:

$$2P = \frac{4\rho w \alpha}{\sin \nu} \int_0^c \frac{\sqrt{c^2 - r^2}}{e^2 - r^2} dr =$$

$$= \frac{4\rho w \alpha}{\sin \nu} \left[(c^2 - e^2) \int_0^c \frac{dr}{(e^2 - r^2)\sqrt{c^2 - r^2}} + \int_0^c \frac{dr}{\sqrt{c^2 - r^2}} \right] .$$

Преобразуем первый интеграл формулы, положив:

$$r = \frac{ez}{\sqrt{z^2 + 1}} ,$$

и выполняем интегрирование:

$$P = \frac{2\rho w \alpha}{\sin \nu} \pi \left(1 - \frac{\sqrt{e^2 - c^2}}{e} \right) .$$

точно так же во второй формуле (137) последний член должен быть не

$$+ \nu \cos \nu ,$$

а

$$+ \nu \operatorname{ctg} \nu ;$$

это отражается и на формуле (140) (см. примечание к стр. 312).

Прим. ред.

Выражаем здесь α и $\frac{c}{e}$ через Q и θ_1:

$$P = \rho w Q \left(\frac{1}{\sin \nu} - \cos \theta_1 \right)^{1)}. \qquad (139)$$

В частном случае, когда $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, вторая формула (137) при конечных Q, w, a требует, чтобы $b = \infty$, т. е. пластинка обратилась в беспредельную стену. Первая же формула (137) на основании формулы (138) принимает вид:

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \left[1 - 2 \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2} \right) \right]^{2)}. \qquad (140)$$

Давая здесь ν разные значения, мы будет получать отношение расстояния канала от стены к половине ширины канала. Что же касается силы давления P, то она по данному углу ν определится формулой:

$$P = \frac{\rho Q w}{\sin \nu} = \frac{b \rho w^2}{\cos^2 \frac{\nu}{2}}. \qquad (141)$$

По формулам (141) и (140) удобно составить таблицы, выражающие величину P в зависимости от отношения $\frac{h}{a}$.

При $\frac{h}{a} = \infty$ имеем из (140) $\nu = \frac{\pi}{2}$, и уравнение (141) обращается в известную формулу гидравлики:

$$P = \rho Q w.$$

---

1) В этой и в предыдущей формулах для давления P должен стоять знак $(+)$ между членами в круглых скобках, а не $(-)$. *Прим. ред.*

2) Точнее

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi \sin \nu} \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2} \right) \right],$$

а не

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \left[1 - 2 \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2} \right) \right].$$

Прим. ред.

§ 19. Концентрирование струи жидкости. Рассмотрим задачу о концентрировании струи жидкости посредством воронки, поставленной на пути струи. Эта задача разрешается с помощью направляющей сети, получаемой при рассматривании эллиптического интеграла первого вида. Берем в формуле (11) четыре множителя под корнем и полагаем в ней:

$$c_1 = -c_2 = c, \quad c_3 = -c_4 = c', \quad f(u) = c'q, \quad m = i,$$

потом, полагая $c' > c$, делаем в ней подстановку:

$$u = cu'.$$

Находим при надлежащем выборе произвольного постоянного:

$$\varphi = iq \int_0^{u'} \frac{du'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} + \omega' q, \qquad (142)$$

где $k = \frac{c}{c'}$, а ω' есть полный эллиптический интеграл при дополнительном модуле $k' = \sqrt{1-k^2}$. Полный эллиптический интеграл при модуле k мы будем обозначать через ω. Подставляя величину φ из формулы (9) и определяя u' или u, находим:

$$\frac{u}{c} = \sin \operatorname{am}\left[\frac{\theta}{q} + \left(\omega' - \frac{\vartheta}{q}\right) i\right]. \qquad (143)$$

Так как

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\vartheta}{q} i + \omega' i\right) = \frac{1}{k \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\vartheta}{q} i\right)},$$

то найденная формула может быть написана еще так:

$$\frac{c'}{u} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\vartheta}{q} i\right). \qquad (144)$$

Формулы (143) и (144) показывают нам, что в начале координат $\theta = 0$ и $\vartheta = \omega' q$, а во всех бесконечно удаленных точках нашей полуплоскости $\theta = 0$ и $\vartheta = 0$. При $c = 0$ имеем $k = 0$, синус амплитуды обращается в обыкновенный синус

и формула (144) дает нам сеть фиг. 8; если же $c' = \infty$, то мы имеем также $k = 0$ и формула (143) дает нам обыкновенную эллиптическую сеть.

При c и c' конечных мы получим сеть, представленную на фиг. 28. Уравнения этой сети найдутся, раскрывая в формуле (144) синус амплитуды и пользуясь известными формулами:

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\, i\right) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right),$$

$$\cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\, i\right) = \frac{1}{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q} i\right) = \frac{\Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)},$$

где $\operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)$ есть амплитуда при модуле k'. Введя вместо координат ξ, η рассматриваемой точки ее полярные координаты r, λ, получаем:

$$\frac{c' \cos \lambda}{r} =$$

$$= \frac{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right) + k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}. \quad (145)$$

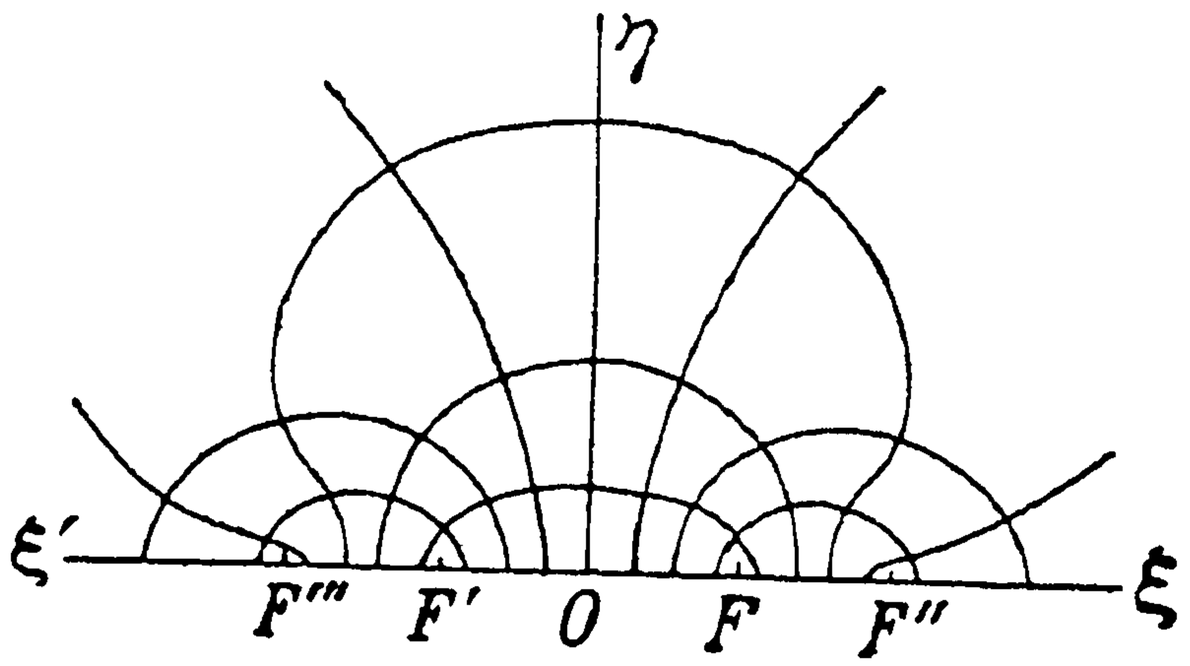
$$\frac{c' \sin \lambda}{r} =$$

$$= \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\right) \sin \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right) \cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, \quad '\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right) + k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}. \quad (145')$$

При $\lambda = \frac{\pi}{2}$ имеем $\theta = 0$; при $\lambda = 0$ и $r < c$ получим $\vartheta = \omega' q$ и $0 < \theta < \omega q$; при $\lambda = 0$ и $c < r < c'$ получаем $\theta = \omega q$ и

$\omega' q > \vartheta > 0$; наконец, при $\lambda = 0$ и $r > c'$ имеем $\vartheta = 0$ и $\omega q > \theta > 0$. Если положим $\lambda = \pi$, то найдем такое же изменение θ и ϑ, как и в случае $\lambda = 0$, только θ будет отрицательно.

Из сказанного следует (фиг. 38), что линии направляющей сети $\theta = \text{const}$ пересекают ось $O\xi$ вне фокальных отрезков FF''' и $F'F'''$ ($OF = c$, $OF''' = c'$). При $\theta = 0$ линия этого семейства идет по оси $O\eta$ и охватывает в бесконечности всю рассматриваемую область. При θ, изменяющемся от 0 до ωq, мы получаем линии $\theta = \text{const}$ правой стороны, которые, охватывая фокальный отрезок FF''' и постоянно суживаясь, переходят в этот отрезок при $\theta = \omega q$. При θ, изменяющемся от 0 до $-\omega q$, мы получаем линии $\theta = \text{const}$ левой стороны, охватывающие фокальный отрезок $F'F'''$ и переходящие в этот отрезок при $\theta = -\omega q$. Линии направляющей сети $\vartheta = \text{const}$ охватывают фокальный отрезок FF' и пересекают $O\xi$ на фокальных отрезках FF''' и $F'F'''$. При изменении ϑ от $\omega' q$ до 0 эти линии изменяются от линии, совпадающей с фокальным отрезком FF', до линии, идущей по отрезкам оси абсцисс $F'''\xi$ и $F'''\xi'$ и охватывающей в бесконечности всю рассматриваемую область.



Фиг. 38.

Любопытно заметить, что линия $\vartheta = \frac{\omega' q}{2}$ есть круг, описанный радиусом $\sqrt{cc'}$ из начала координат. Это вытекает из формул (143) и (144), которые при упомянутом значении ϑ дают:

$$\frac{u}{c} = \operatorname{sin\,am}\left(\frac{\theta}{q} + \frac{\omega' i}{2}\right),$$

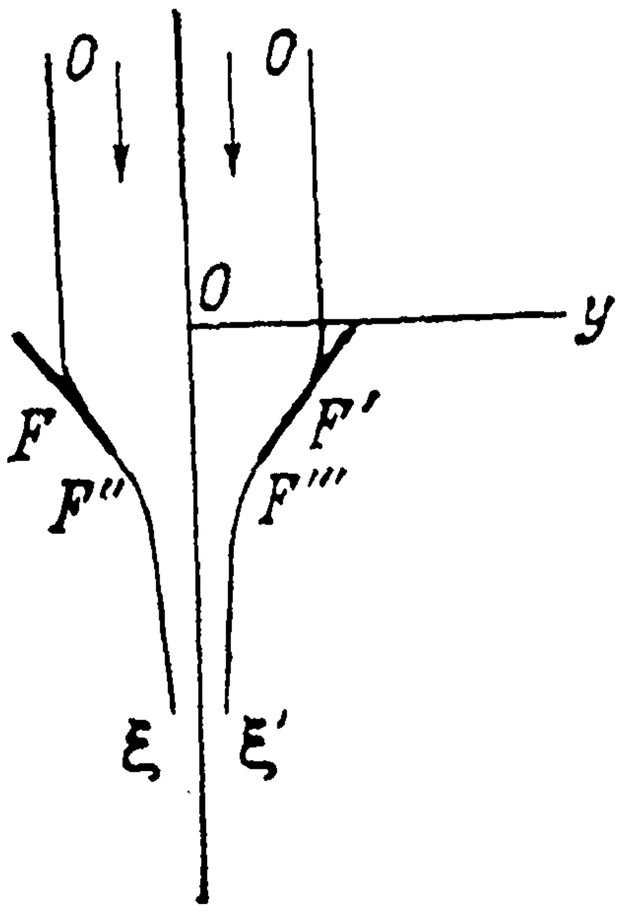
$$\frac{c'}{u} = \operatorname{sin\,am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\omega' i}{2}\right).$$

Если назовем через ρ модуль u, то модуль второй части первой формулы будет $\frac{\rho}{c}$. Перемножая формулы, найдем, что

$$\frac{c'}{c} = \frac{\rho^2}{c^2}, \quad \rho = \sqrt{cc'}.$$

За образующую сеть в рассматриваемой нами задаче примем сеть фиг. 9 и наложим ее на направляющую сеть фиг. 38 так, чтобы оси координат совпали.

Идя по линии $\psi = 0$, т. е. по оси $O\xi$, в направлении возрастающего φ, будем иметь: на отрезке OF величина $\vartheta = \omega' q$ и угол θ изменяется от 0 до ωq, на отрезке FF'' угол $\theta = \omega q$ и величина ϑ изменяется от $\omega' q$ до 0, на отрезке $F''\xi$ величина $\vartheta = 0$ и угол θ изменяется от ωq до 0. Это соответствует в действительном течении жидкости на фиг. 39: границе струи OF, стенке воронки FF'' и границе $F''\xi$ сконцентрированной струи жидкости.



Фиг. 39.

Идя по линии $\psi = \frac{Q}{2}$, т. е. по оси $O\eta$, будем иметь: во всех точках этой линии $\theta = 0$, что соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока, направленной по оси симметрии фиг. 39. Следуя же в направлении возрастающего φ по линии $\psi = Q$, т. е. по отрезку $O\xi'$ оси абсцисс, будем иметь: на OF' величина $\vartheta = \omega' q$ и θ изменяется от 0 до $-\omega q$, на $F'F'''$ угол $\theta = -\omega q$ и ϑ изменяется от $\omega' q$ до 0, на $F'''\xi'$ $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\omega q$ до 0.

Это соответствует в действительном течении жидкости: правому контуру струи OF', правой стенке воронки $F'F''$ и правому контуру сконцентрированной струи $F'''\xi'$.

Вопросом, подлежащим разрешению в этой задаче, является вопрос о зависимости сжатия струй от формы воронки. Назовем через $2a$ ширину FF' струи при входе в воронку и через $2b$ ее ширину $F'F'''$ при выходе из воронки, через 2μ — угол между стенками воронки, через v — скорость струи до входа в воронку и через w — ее скорость по выходе из воронки.

На основании сказанного выше имеем:

$$\left.\begin{aligned} v &= we^{-\omega' q}, \\ \mu &= \omega q. \end{aligned}\right\} \qquad (146)$$

Обращаемся к составлению уравнений контуров струи. По формуле (20) имеем:

$$\varphi = \alpha \lg \frac{r}{c}.$$

С другой стороны, из первой формулы (145) находим для отрезков OF и $F''\zeta$:

$$\frac{r}{c} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right),$$

$$\frac{r}{c} = \frac{1}{k \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}.$$

Отсюда для первого и второго отрезков соответственно находим:

$$\varphi = \alpha \lg \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right),$$

$$\varphi = -\alpha \lg \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) - \alpha \lg k.$$

Определив $d\varphi$ и подставив его в формулу (14), получим диференциальные уравнения контуров OF и $F''\xi$:

$$dy = \frac{\alpha}{qv} \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)} \sin\theta d\theta,$$

$$dy = -\frac{\alpha}{qw} \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)} \sin\theta d\theta.$$

Интегрируем эти уравнения и определяем произвольные постоянные под условием, что при $\theta = \omega q$ в первом уравнении $y = -a$, а во втором $y = -b$. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} a+y &= \frac{\alpha}{qv}\int_{q\omega}^{\theta}\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)\Delta\operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin\operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}\sin\theta\,d\theta,\\ b+y &= \frac{\alpha}{qw}\int_{\theta}^{\omega q}\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)\Delta\operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin\operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}\sin\theta d\theta. \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

Обращаясь к бесконечно далеким точкам O и ξ, лежащим в начале и конце нашей струи, мы должны положить для точки O угол $\theta = 0$ и

$$y = -\frac{Q}{2v},$$

а для точки ξ угол $\theta = 0$ и

$$y = -\frac{Q}{2w}.$$

Делая эту подстановку и выражая α через $\frac{Q}{\pi}$, найдем:

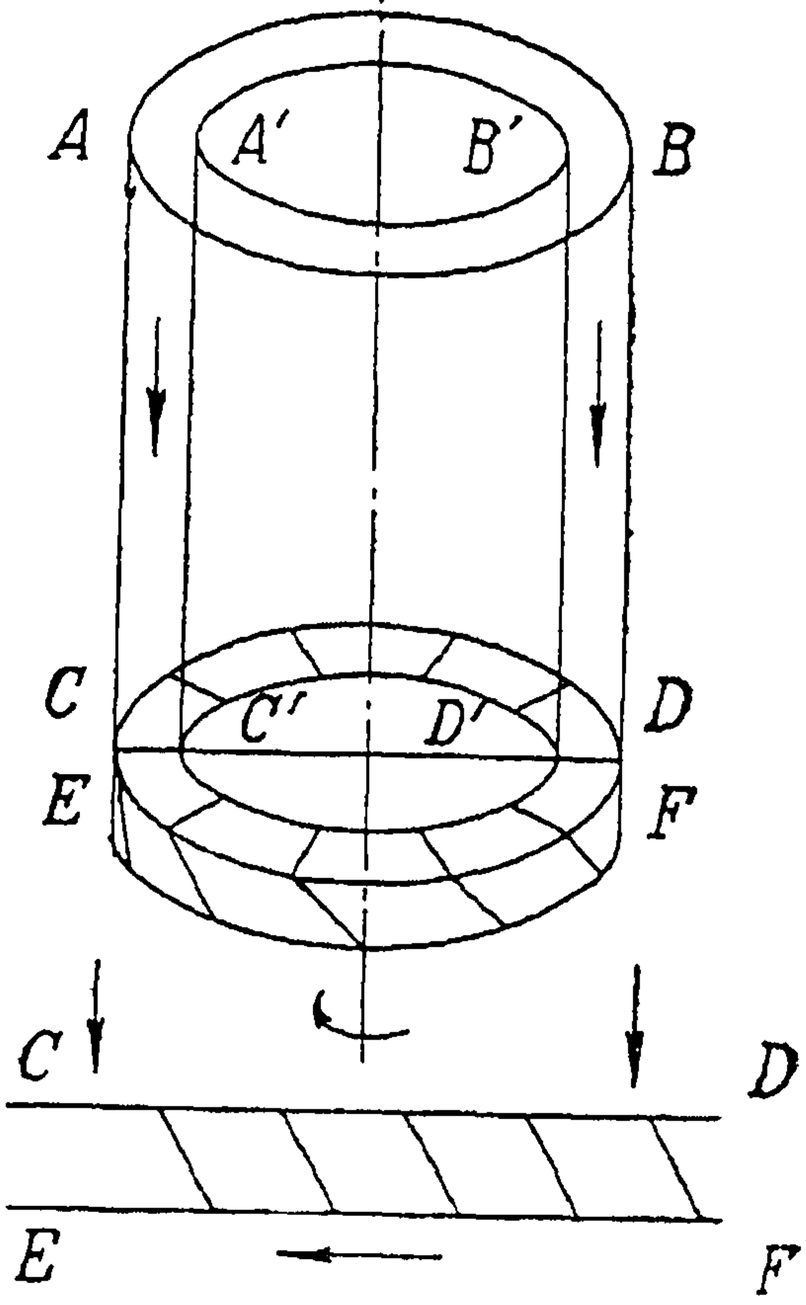
$$\frac{\frac{Q}{2v}-a}{\frac{Q}{2v}} = \frac{b-\frac{Q}{2w}}{\frac{Q}{2w}} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\omega}\frac{\cos\operatorname{am}\sigma\,\Delta\operatorname{am}\sigma}{\sin\operatorname{am}\sigma}\sin(\sigma q)\,d\sigma. \quad (148)$$

Здесь в интеграле введено новое переменное $\frac{\theta}{q} = \sigma$.

Формула (148) показывает нам, что *сжатие струи при входе ее в воронку и при выходе из воронки одинаково.*

Задавшись величинами μ и q, мы будем иметь по формуле (146) величину ω и определим по таблицам эллиптических интегралов k и ω'; потом выразим ω по v и определим из формулы (148) сжатие струи; после этого сейчас же найдем по данному b величины Q и a.

§ 20. Теоретические данные для исследования действия турбин. Оканчивая наше сочинение, сделаем приложение данного метода к теории турбин. Пусть (фиг. 40) вода под напором вступает в пространство, ограниченное двумя концентрическими цилиндрами $ABDC$ и $A'B'D'C'$, из него переходит на колесо осевой турбины $CDFE$



Фиг. 40.

и, пройдя между перьями колеса, изливается в воздух, образуя в нем свободные струи. Предполагая, что диаметр колеса турбины DC весьма значителен сравнительно с шириной колеса CC', позволим себе рассматривать течение воды между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями как движение между двумя плоскостями, т. е. как невихревое движение в двух измерениях. При таком воззрении колесо турбины заменится рядом параллельных пластинок, заключенных между параллельными прямыми CD и EF и движущихся в направлении стрелки под действием беспредельного потока жидкости, притекающего сверху из бесконечной дали перпендикулярно CD. Сообщив всей жидкой массе и пластинкам скорость полосы $CDFE$, взятую в обратном направлении, мы будем иметь случай удара беспредельного потока о бесконечно длинный ряд неподвижных пластинок, причем скорость потока v в бесконечности образует с направлением CD некоторый угол. Пройдя через ряд неподвижных пластинок, наш поток весь разобьется на свободные струи, скорость на поверхности которых будет некоторой постоянной величиной w.

Для исследования подобного течения жидкости мы должны будем воспользоваться сетями с бесконечным множеством полюсов и фокусов.

Полагаем в формуле (10):

$$F(u)=0, \quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=-\alpha, \quad \gamma_1=0, \gamma_2=(a+b),$$
$$\gamma_3=-(a+b), \quad \gamma_4=2(a+b), \quad \gamma_5=-2(a+b),$$

$$\gamma_6 = 3(a+b), \quad \gamma_7 = -3(a+b)\ldots, \quad \beta_1 = \frac{a+b}{\pi},$$

$$\beta_2 = \beta_3 = a+b, \quad \beta_4 = \beta_5 = 2(a+b), \quad \beta_6 = \beta_7 = 3(a+b)\ldots.$$

Получаем:

$$\chi = -\alpha \lg \left\{ \left(\frac{\pi u}{a+b}\right)\left(1-\frac{u}{a+b}\right)\left(1+\frac{u}{a+b}\right)\left(1-\frac{u}{2(a+b)}\right)\times \right.$$
$$\left.\left(1+\frac{u}{2(a+b)}\right)\left(1-\frac{u}{3(a+b)}\right)\left(1+\frac{u}{3(a+b)}\right)\cdots\right\}.$$

Это выражение преобразуется с помощью известного разложения синуса в бесконечный ряд:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{k=+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Это дает нам:

$$\chi = -\alpha \lg \sin \frac{\pi u}{a+b}, \tag{149}$$

или

$$\chi = -\alpha \lg \left[\sin \frac{\pi\xi}{a+b} \cosh \frac{\pi\eta}{a+b} + \cos \frac{\pi\xi}{a+b} \sinh \frac{\pi\eta}{a+b} i \right].$$

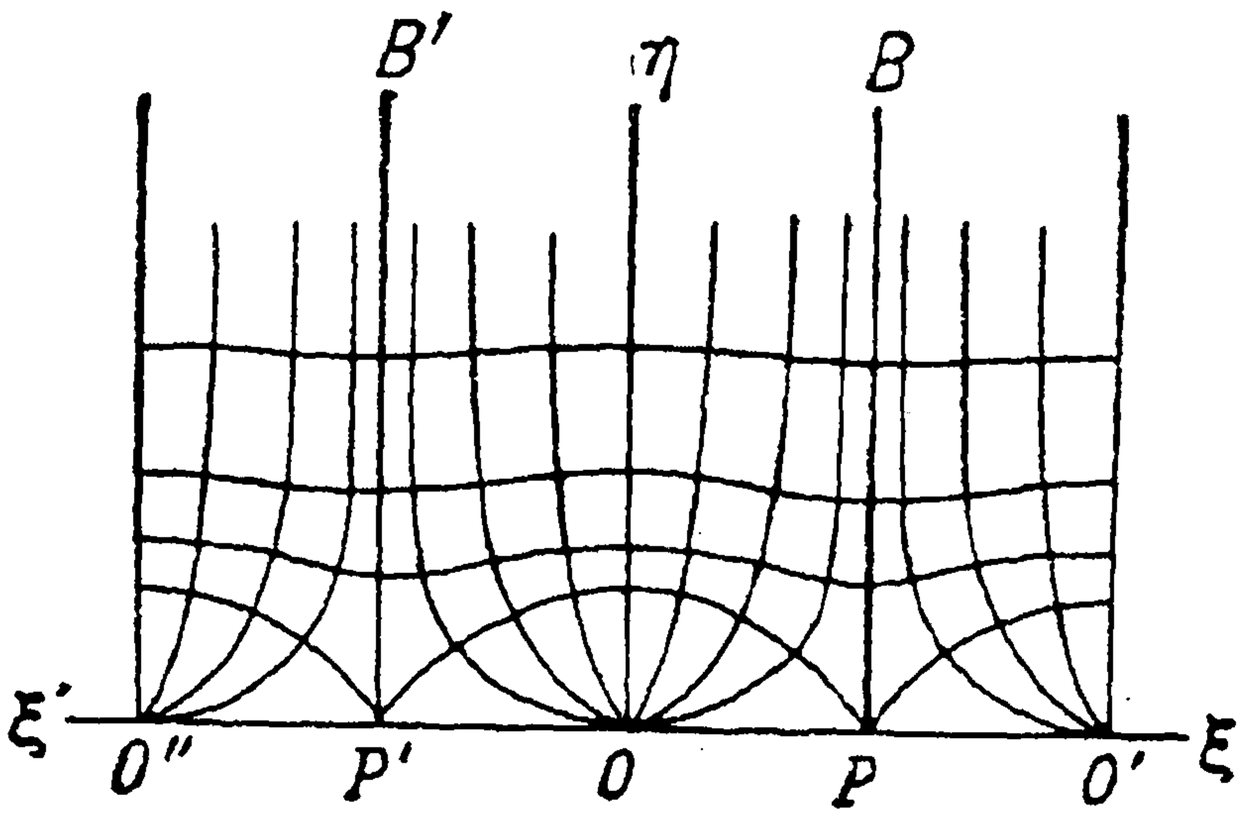
Подставляем величину χ из формулы (9) и сравниваем действительные и мнимые части:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\alpha}{2} \lg \frac{1}{2}\left(\cosh \frac{2\pi\eta}{a+b} - \cos \frac{2\pi\xi}{a+b}\right), \\ \psi &= \alpha\pi - \alpha \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tgh} \dfrac{\pi\eta}{a+b}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi\xi}{a+b}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Мы прибавили здесь постоянное $\alpha\pi$, так как к функции χ всегда можно прибавить некоторое мнимое постоянное.

При $\xi = 0$ и $\eta = 0$ получаем из формулы (150) $\varphi = \infty$ и ψ неопределенное, что показывает (фиг. 41), что начало координат будет полюсом образующей сети, через который прой-

дет пучок линий $\psi = \text{const}$. При $\eta = 0$ и $-\frac{a+b}{2} < \xi < 0$ будем иметь $\psi = 0$; то же будем иметь при $\xi = -\frac{a+b}{2}$ и всяком положительном η. Это показывает, что линия $\psi = 0$ будет состоять из отрезка оси абсцисс OP' и параллели оси ординат $P'B'$. При $\xi = 0$ имеем $\psi = \frac{\alpha\pi}{2}$, т. е. ось ординат есть линия $\psi = \frac{\alpha\pi}{2}$. Наконец, при $\eta = 0$ и $\frac{a+b}{2} > \xi > 0$ будем иметь $\psi = \alpha\pi$, и соответственная кривая будет представлена отрезком оси абсцисс OP и параллелью оси ординат PB. Таким образом при изменении ψ от 0 до π линии $\psi = \text{const}$, проходя через полюс O, изменяются от $OP'B'$ до OPB. При $\eta = \infty$, $\varphi = -\infty$ и возрастает до $+\infty$ при передвижении по линиям $\psi = \text{const}$ до полюса O.



Фиг. 41.

Так как φ и ψ суть периодические функции ξ с периодом $n(a+b)$, то вся полуплоскость разобьется на полосы, в которых кривые образующей сети будут иметь то же расположение, как на полосе $B'P'PB$.

Для получения направляющей сети полагаем в формуле (11):

$$c_1 = \frac{a+b}{2} - \partial, \qquad c_2 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right),$$

$$c_3 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right) + (a+b), \qquad c_4 = \frac{a+b}{2} - \partial - (a+b),$$

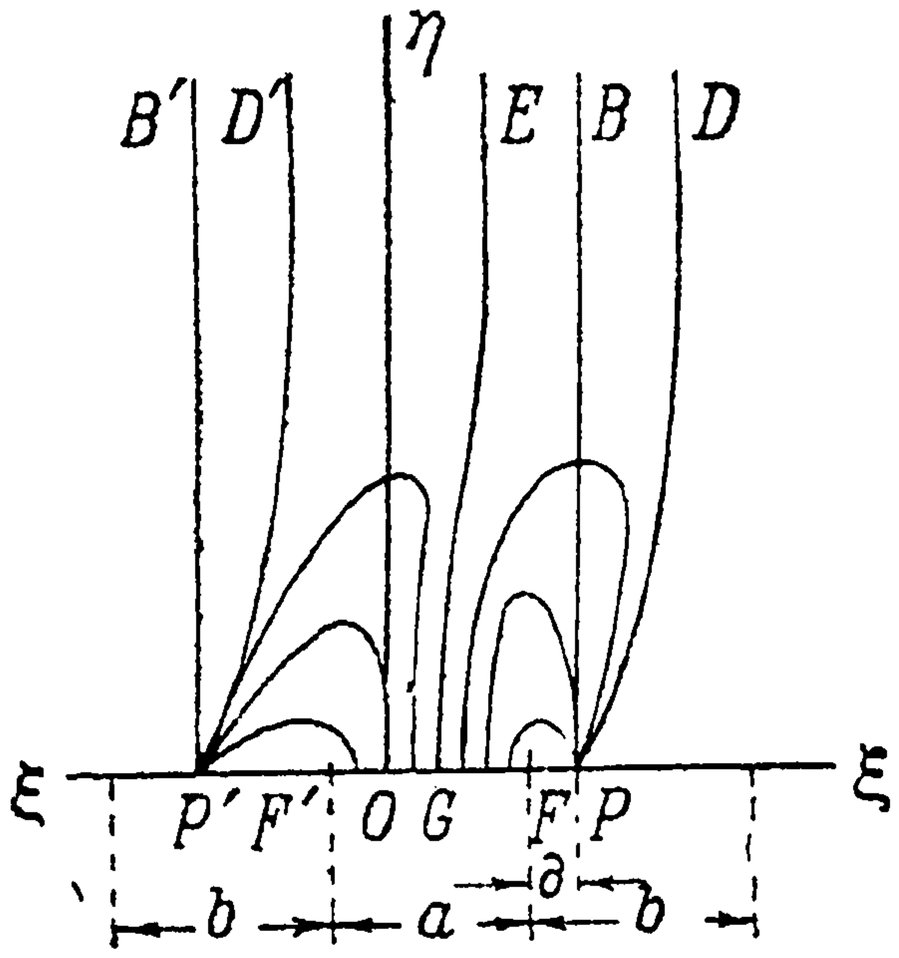
$$c_5 = \frac{a+b}{2} - \partial + (a+b), \qquad c_6 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right) - (a+b),$$

$$c_7 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right) + 2(a+b), \quad c_8 = \frac{a+b}{2} - \partial - 2(a+b), \ldots$$

$$f(u)=\frac{A}{\left[1-\frac{2u}{a+b}\right]\left[1+\frac{2u}{a+b}\right]\left[1-\frac{2u}{3(a+b)}\right]\left[1+\frac{2u}{3(a+b)}\right]\cdots},$$

$$m=i^{n-1},$$

где A — постоянная величина, а n — бесконечно большое число половины всех фокусов образующей сети. Все эти фокусы (фиг. 42) F', F, F'', F'''... отстоят друг от друга поочередно на расстоянии a или b. Кроме фокусов, наша направляющая сеть при сделанных положениях будет еще иметь бесконечное множество полюсов P', P, P''..., которые все располагаются на фокальных отрезках b и отстоят от их левых концов на расстоянии ∂; при этом мы будем брать $\partial < \frac{b}{2}$. Начало координат O мы берем посреди двух смежных полюссв P и P', так что



Фиг. 42.

$$OP=OP'=\frac{a+b}{2}.$$

Легко увидеть, что $c_1 > \dot{-} c_2$, так как неравенство

$$\frac{a+b}{2}-\partial > \frac{a-b}{2}+\partial$$

приводится к $\partial < \frac{b}{2}$.

Произведя указанные подстановки в формулу (11) и обратив внимание на вышеприведенное разложение синуса, а также на разложение

$$\cos z=\prod_{-\infty}^{+\infty}\left[1-\frac{2z}{\pi(2k+1)}\right],$$

получаем:

$$\varphi = A' \int \frac{du}{\cos\left(\frac{\pi u}{a+b}\right)\sqrt{\sin\pi\frac{\left(u+\partial-\frac{b}{2}\right)+\frac{a}{2}}{a+b}\sin\pi\frac{\left(u+\partial-\frac{b}{2}\right)-\frac{a}{2}}{a+b}}} =$$

$$= A' \int \frac{du}{\cos\left(\frac{\pi u}{a+b}\right)\sqrt{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi a}{a+b}-\cos\frac{\pi[2u-(b-2\partial)]}{a+b}\right]}}.$$

Введем подстановки:

$$\frac{\pi u}{a+b}=z, \quad \frac{\pi a}{a+b}=\nu, \quad \frac{\pi(b-2\partial)}{a+b}=\mu; \qquad (151)$$

потом, умножив числителя и знаменателя на i, представим наш интеграл в таком виде:

$$\varphi = -qi \int \frac{d\left[\frac{\operatorname{tg} z(\cos\nu+\cos\mu)}{\sin\nu}\right]}{\sqrt{1-\left[\frac{\operatorname{tg} z(\cos\nu+\cos\mu)-\sin\mu}{\sin\nu}\right]^2}} =$$

$$= -qi \arcsin\left[\frac{\operatorname{tg} z(\cos\nu+\cos\mu)-\sin\mu}{\sin\nu}\right], \qquad (152)$$

где q — некоторая постоянная величина.

Замечая теперь, что

$$\sin\left[\frac{\vartheta}{q}i-\frac{\theta}{q}\right] = -\sin\frac{\theta}{q}\cosh\frac{\vartheta}{q}+i\cos\frac{\theta}{q}\sinh\frac{\vartheta}{q},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{a+b}(\xi+i\eta)\left\{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{tgh}^2\frac{\pi\eta}{a+b}\right\} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}-\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{tgh}^2\frac{\pi\eta}{a+b}+$$

$$+i\left\{\operatorname{tgh}\frac{\pi\eta}{a+b}+\operatorname{tgh}\frac{\pi\eta}{a+b}\operatorname{tg}^2\frac{\pi\xi}{a+b}\right\},$$

получаем из формулы (151) основные формулы рассматриваемой направляющей сети:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}\,\frac{1-\operatorname{tgh}^2\dfrac{\pi\eta}{a+b}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{tgh}^2\dfrac{\pi\eta}{a+b}}-\\
&\qquad-\frac{\sin\mu}{\sin\nu}=-\cosh\frac{\vartheta}{q}\sin\frac{\theta}{q},\\
&\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tgh}\frac{\pi\eta}{a+b}\,\frac{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi\xi}{a+b}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{tgh}^2\dfrac{\pi\eta}{a+b}}=\\
&\qquad=\sinh\frac{\vartheta}{q}\cos\frac{\theta}{q}.
\end{aligned}\right\}\qquad(153)$$

Из этих формул следует, что найденная направляющая сеть дает при $\eta=\infty$ величины θ_0 и ϑ_0, определяемые по уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
\cosh\frac{\vartheta_0}{q}\sin\frac{\theta_0}{q}&=\frac{\sin\mu}{\sin\nu},\\
\sinh\frac{\vartheta_0}{q}\cos\frac{\theta_0}{q}&=\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}.
\end{aligned}\right\}\qquad(154)$$

Эти величины являются, таким образом, эллиптическими координатами точки

$$\xi=\frac{\sin\mu}{\sin\nu},\quad \eta=\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}$$

при фокусном расстоянии эллипсов, равном 2. Очевидно, что

$$\sin\frac{\theta_0}{q}<\frac{\sin\mu}{\sin\nu}.$$

При

$$\xi=\pm\frac{a+b}{2},\quad \eta=0$$

имеем $\vartheta=\infty$, и θ есть неопределенная величина. Это показывает нам, что точки P и P' суть полюсы направляющей сети, о чем было уже сказано выше.

При $\xi = 0$ и $\eta = 0$ имеем $\vartheta = 0$ и угол θ обращается в величину θ_1, определяемую из уравнения:

$$\sin \frac{\theta_1}{q} = \frac{\sin \mu}{\sin \nu}, \tag{155}$$

где $\mu < \nu$, потому что это условие приводит к неравенству $b - 2\partial < a$ или

$$\frac{a-b}{2} + \partial > 0.$$

Условие $\eta = 0$ может быть формулами (153) удовлетворено, во-первых, положением:

$$\vartheta = 0, \quad \sin \frac{\theta}{q} = \frac{\sin \mu}{\sin \nu} - \frac{\cos \nu + \cos \mu}{\sin \nu} \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b}$$

и, во-вторых, положением:

$$\vartheta = \pm \frac{\pi q}{2}, \quad \pm \operatorname{cosh} \frac{\theta}{q} = \frac{\sin \mu}{\sin \nu} - \frac{\cos \nu + \cos \mu}{\sin \nu} \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b}.$$

Так как $\operatorname{cosh} \frac{\theta}{q} > 1$, то второе положение имеет место при

$$\frac{\sin \mu}{\sin \nu} - \frac{\cos \nu + \cos \mu}{\sin \nu} \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b} > 1,$$

$$\frac{\sin \mu}{\sin \nu} - \frac{\cos \nu + \cos \mu}{\sin \nu} \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b} < -1.$$

Это дает нам:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b} < -\frac{\sin \nu - \sin \mu}{\cos \nu + \cos \mu},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b} > \frac{\sin \nu + \sin \mu}{\cos \nu + \cos \mu},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b} < -\operatorname{tg} \frac{\nu - \mu}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{a+b} > \operatorname{tg} \frac{\nu + \mu}{2}.$$

Отсюда по формуле (151) имеем:

$$\xi < -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right),$$

$$\xi > \frac{a+b}{2} - \partial,$$

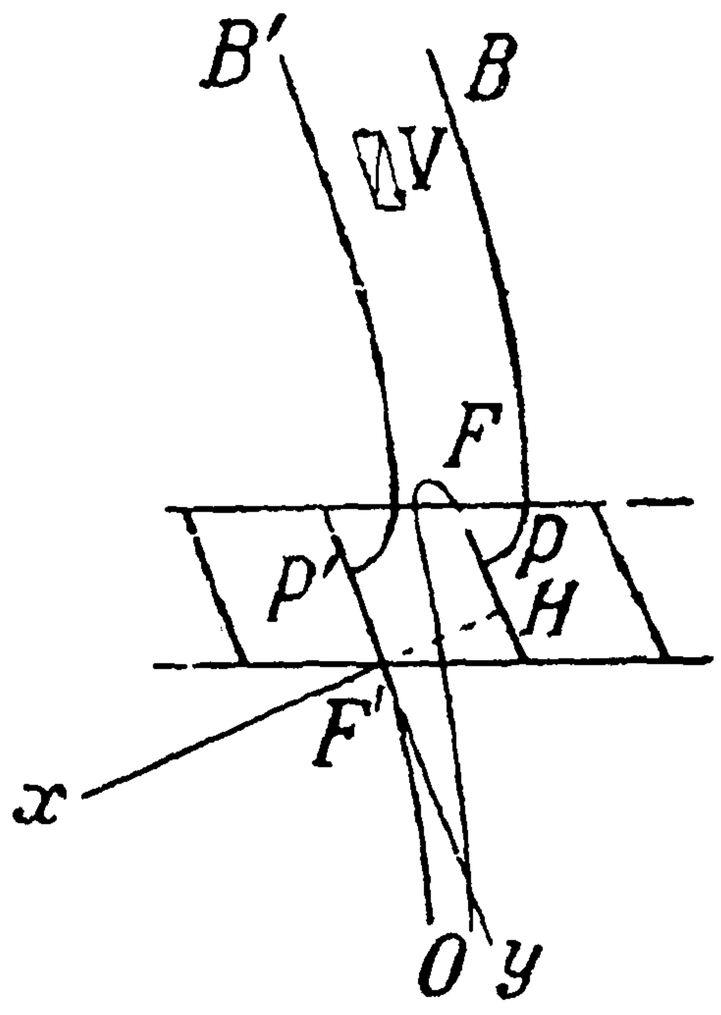
т. е. $\xi < c_2$ или $\xi > c_1$. Совершенно так же найдем, что положение первое будет иметь место при $\xi > c_2$ или $\xi < c_1$, причем в первом случае угол θ будет положительная величина, а во втором — отрицательная.

Из сказанного следует (фиг. 42), что на отрезке оси абсцисс $P'F'$ имеем $\theta = \frac{\pi}{2} q$ и θ изменяется от ∞ до 0; на отрезке $F'O$ величина $\theta = 0$ и угол θ изменяется от $\frac{\pi q}{2}$ до θ_1; на отрезке OF величина $\theta = 0$ и угол θ изменяется от θ_1 до $-\frac{\pi q}{2}$; наконец, на отрезке FP имеем $\theta = -\frac{\pi q}{2}$ и θ изменяется от 0 до ∞.

На фиг. 42 изображены линии $\theta = \text{const}$ рассматриваемой направляющей сети в предположении, что const принимает значения от $\frac{\pi q}{2}$ до $-\frac{\pi q}{2}$. При $\theta = \frac{\pi q}{2}$ получаем отрезок $P'F'$; с убыванием θ кривые, выходя из полюса P, пересекают ось абсцисс на фокальном отрезке $F'F$, причем эта точка пересечения для линии $\theta = \theta_1$ есть начало координат O; кривая $\theta = \theta_0$ представляется бесконечными ветвями: $P'D'$, EG и DP; при $\theta < \theta_0$ мы получаем линии $\theta = \text{const}$, проходящие уже через полюс P и приближающиеся с уменьшением θ к отрезку PF, с которым они сливаются при $\theta = -\frac{\pi q}{2}$. Так как формулы (153) суть периодические относительно ξ и имеют период $a + b$, то все кривые $\theta = \text{const}$ направляющей сети получатся через повторение комплекса линий $D'P'PD$.

Примем в построенной направляющей сети $q = 1$ и наложим на нее образующую сеть (фиг. 41) так, чтобы оси координат совпали; тогда и точки P и P' образующей сети лягут на одноименные точки направляющей.

Идя по линии $\psi = 0$ в сторону возрастающего φ, мы будем иметь: на $B'P'$ величина ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞ и угол θ изменяется от θ_0 до 0, на отрезке $P'F'$ угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ и величина ϑ изменяется от ∞ до 0, на отрезке $F'O$ величина $\vartheta = 0$ и угол θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до θ_1. Это будет соответствовать в действительном течении жидкости на фиг. 43: линии тока $B'P'$, части пера турбины $P'F'$ и контуру струи $F'O$. Если же мы пойдем по линии $\psi = \alpha\pi$, то будем иметь: на прямой BP величина ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞ и угол θ изменяется от θ_0 до 0, на отрезке PF угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и величина ϑ изменяется от ∞ до 0, на отрезке FO величина $\vartheta = 0$ и угол θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до θ_1. Это будет соответствовать в действительном течении жидкости: линии тока BP, части пера турбины PF и контуру струи FO.



Фиг. 43.

С помощью двух найденных линий тока мы выделим из текущей жидкости часть $B'P'F'OFPB$, причем при координатах, изображенных на фиг. 43, будет удовлетворено условие, требующее возрастания функции ψ от линии тока $B'P'F'O$ до линии тока $BPFO$. При дальнейшем возрастании или убывании ψ на целое число $\alpha\pi$ мы будем иметь повторение таких же масс текущей жидкости, расположенных вправо и влево от массы, изображенной на фиг. 43.

Положим теперь, что длина пера турбины есть l, т. е.

$$P'F' + PF = l,$$

расстояние между двумя последовательными перьями есть $F'H = h$, расстояние подошвы перпендикуляра, опущенного из нижнего конца пера на смежное перо, от верхнего конца этого смежного пера есть $HF = e$, сила давления жидкости на все перо есть P, и постараемся определить все эти величины.

На отрезках $P'F'$ и PF имеем по формулам (150) и (153):

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2}\lg\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi\xi}{a+b}\right),$$

$$\mp\cosh\vartheta = \frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} - \frac{\sin\mu}{\sin\nu}.$$

Исключаем отсюда ξ:

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2}\lg\frac{(\sin\nu\cosh\vartheta\mp\sin\mu)^2}{(\cos\nu+\cos\mu)^2+(\sin\nu\cosh\vartheta\mp\sin\mu)^2}.$$

Подставляем $d\varphi$ в формуле (16), заменяя в ней e^{ϑ} на $\sinh\vartheta+\cosh\vartheta$:

$$\left.\begin{aligned} P'F' &= \frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_0^\infty\frac{\cosh\vartheta\sinh\vartheta+\sinh^2\vartheta}{D'}\,d\vartheta,\\ PF &= \frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_0^\infty\frac{\cosh\vartheta\sinh\vartheta+\sinh^2\vartheta}{D}\,d\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

где

$$D' = (\sin\nu\cosh\vartheta-\sin\mu)\left[(\cos\nu+\cos\mu)^2+(\sin\nu\cosh\vartheta-\sin\mu)^2\right],$$

$$D = (\sin\nu\cosh\vartheta+\sin\mu)\left[(\cos\nu+\cos\mu)^2+(\sin\nu\cosh\vartheta+\sin\mu)^2\right].$$

Так как первый интеграл получается из второго, изменив знак угла μ, то мы можем взять только второй интеграл и в полученном результате сделать изменение знака μ. Разбиваем интеграл, входящий в PF, на два интеграла M и N по двум слагаемым числителя и делаем в первом интеграле подстановку:

$$\sin\nu\cosh\vartheta+\sin\mu = \sigma.$$

Получаем, обозначая $\sin\nu+\sin\mu$ через σ_1:

$$M = \frac{1}{\sin^2 \nu} \int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{(\sigma - \sin \mu)\, d\sigma}{\sigma\left[(\cos \nu + \cos \mu)^2 + \sigma^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \nu} \int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{d\sigma}{(\cos \nu + \cos \mu)^2 + \sigma^2} - \frac{\sin \mu}{\sin^2 \nu} \int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{\frac{d\sigma}{\sigma^3}}{\left(\frac{\cos \nu + \cos \mu}{\sigma}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\nu + \mu}{2} \right) (\cos \nu + \cos \mu) + \right.$$

$$\left. + \sin \mu \lg \sin \frac{\nu + \mu}{2} \right].$$

Интеграл N представляем в виде:

$$N = 8 \int_0^{\infty} \frac{\cosh^2 \frac{\vartheta}{2} \sinh^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{d\vartheta}{2}}{L},$$

где

$$L = \left[2 \sin \nu \cosh^2 \frac{\vartheta}{2} - (\sin \nu - \sin \mu) \right] \left\{ (\cos \nu + \cos \mu)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[2 \sin \nu \cosh^2 \frac{\vartheta}{2} - (\sin \nu - \sin \mu) \right]^2 \right\};$$

потом делаем в нем подстановку:

$$\operatorname{tgh} \frac{\vartheta}{2} = \sigma.$$

Тогда

$$N = 8 \int_0^1 \frac{\sigma^2 d\sigma}{S},$$

где

$$S = [2 \sin \nu - (\sin \nu - \sin \mu)(1 - \sigma^2)] \{(\cos \nu + \cos \mu)^2 (1 - \sigma^2)^2 + $$

$$+ [2 \sin \nu - (\sin \nu - \sin \mu)(1 - \sigma^2)]^2\}.$$

Определим корни знаменателя. Первый множитель, будучи приравнен нулю, дает:

$$1 - \sigma^2 = \frac{2 \sin \nu}{\sin \nu - \sin \mu},$$

$$\sigma = \pm i \sqrt{\frac{\sin \nu + \sin \mu}{\sin \nu - \sin \mu}}.$$

Подобным образом, приравнивая нулю второй множитель, получаем:

$$1 - \sigma^2 = \frac{2 \sin \nu}{\sin \nu - \sin \mu \pm i (\cos \nu + \cos \mu)} =$$

$$= \frac{\sin \nu}{\cos \frac{\nu + \mu}{2}} \left(\sin \frac{\nu - \mu}{2} \mp i \cos \frac{\nu - \mu}{2} \right),$$

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\cos \frac{\nu - \mu}{2}}{\cos \frac{\nu + \mu}{2}}} \left[\cos \frac{\nu}{2} \mp i \sin \frac{\nu}{2} \right].$$

Предположив, что рациональная дробь, входящая в наш интеграл N, разложена по этим шести корням в простые дроби, составляем по известной формуле коэфициенты этих дробей. Коэфициенты, соответствующие двум первым корням, будут заключены в формуле:

$$\pm i \frac{\sqrt{\sin (\nu + \mu) \sin (\nu - \mu)}}{8 \sin^2 \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2};$$

коэфициенты же, соответствующие следующим четырем корням,—в формуле:

$$\pm \frac{\sqrt{\cos \frac{\nu + \mu}{2} \cos \frac{\nu - \mu}{2}}}{8 \sin^2 \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2} \left(\sin \frac{\mu}{2} \mp i \cos \frac{\mu}{2} \right).$$

Пользуясь найденными корнями и коэфициентами, получаем:

$$N=-2\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\times$$

$$\times\left\{\sin\frac{\mu}{2}\lg\frac{\cos\frac{\nu+\mu}{2}-2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}{\cos\frac{\nu+\mu}{2}+2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\right.$$

$$\left.+2\cos\frac{\mu}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin\frac{\mu}{2}}\right\}.^{1})$$

Подставляем найденные интегралы M и N во вторую формулу (156):

$$PF=\frac{a}{w\sin\nu}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\nu+\mu}{2}\right)(\cos\nu+\cos\mu)+\sin\mu\lg\sin\frac{\nu+\mu}{2}-\right.$$

$$-2\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}+$$

$$+\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\mu}{2}\lg\frac{\cos\frac{\nu+\mu}{2}-2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}{\cos\frac{\nu+\mu}{2}+2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}-\right.$$

$$\left.\left.-2\cos\frac{\mu}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin\frac{\mu}{2}}\right)\right]. \qquad (157)$$

---

[1]) Перед последним членом должен стоять знак минус, а не плюс. Этот знак проходит в формулах (158) и (159). Далее мы из других соображений придем к такому же выводу (см. наше прибавление к последнему параграфу сочинения). *Прим. ред.*

Изменив знак при угле μ, мы получим из этой формулы $P'F'$. Сложив составленную таким образом величину $P'F'$ с вышенаписанной величиной PF и заменив α на $\frac{Q}{\pi}$, найдем:

$$l = \frac{Q}{w}\left[\frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\left(\frac{\pi-\nu}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\lg\frac{\sin\frac{\nu+\mu}{2}}{\sin\frac{\nu-\mu}{2}} + \right.$$

$$+2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{3}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\frac{\cos\frac{\mu}{2}}{\sin\nu} - \left. - \frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu}\right]. \quad (158)$$ [1])

Определим величину давления P, которое сложится из давления P_1 на площадку PF и из давления P_1' на площадку $P'F'$. Мы имеем по формуле (15):

$$P_1 = \alpha\rho w\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2 N,$$
$$P_1' = \alpha\rho w\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2 N',$$

где N' есть интеграл, полученный из N через изменение знака μ. Так как интеграл N нами взят, то мы можем прямо написать величину давления на всю лопатку:

$$P = Q\rho w\left(2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\frac{\cos\frac{\mu}{2}}{\sin\nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu}\right). \quad (159)$$ [2])

Переходим к определению уравнений контуров струи $F'O$ и FO. Пишем по формулам (150) и (153):

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2}\lg\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi\xi}{a+b}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} - \frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}.$$

[1]) См. примечание на стр. 331. *Прим. ред.*

[2]) См. примечание на стр. 331. *Прим. ред.*

Исключаем ξ:

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2}\lg\frac{(\sin\nu\sin\theta-\sin\mu)^2}{(\cos\nu+\cos\mu)^2+(\sin\nu\sin\theta-\sin\mu)^2} \qquad (160)$$

Подставляем отсюда величину $d\varphi$ в формулы (14) и совершаем интеграцию по θ:

$$x' = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos^2\theta d\theta}{R},$$

$$y' = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{R},$$

$$x = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{\pi}^{\theta}\frac{\cos^2\theta d\theta}{R}-h,$$

$$y = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{R}-e,$$

где

$$R=[\sin\nu\sin\theta-\sin\mu]\,[(\cos\nu+\cos\mu)^2+(\sin\nu\sin\theta-\sin\mu)^2].$$

Здесь x', y' обозначают координаты контура $F'O$, а x, y— координаты контура FO.

Составляем по написанным формулам разности $x'-x$ и $y'-y$ для бесконечно удаленных точек контуров струи:

$$\left.\begin{aligned}x'-x=\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\Bigg[&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1-\varepsilon}\frac{\cos^2\theta d\theta}{R}+\\&+\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta d\theta}{R}\Bigg]+h,\end{aligned}\right\}\qquad (161)$$

$$y' - y = \frac{\alpha}{w} \sin\nu (\cos\nu + \cos\mu)^2 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1 - \varepsilon} \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta}{R} + \right.$$
$$\left. + \int_{\theta_1 - \varepsilon'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta}{R} \right] + e. \qquad (161)$$

Здесь ε и ε' суть некоторые бесконечно малые положительные величины. При произвольности этих величин вторые части формулы (161) делаются неопределенными. Мы устраним эту неопределенность, предположив, что обе бесконечно удаленные точки контуров струи лежат на одной и той же эквипотенциальной линии. Составляя по формуле (160) разность значений φ в точках F' и F, найдем для нее величину:

$$\alpha \lg \frac{\sin\frac{\nu + \mu}{2}}{\sin\frac{\nu - \mu}{2}}.$$

Представляя эту разность еще интегралами, распространенными на рассматриваемые контуры струи, будем иметь:

$$\alpha \lg \frac{\sin\frac{\nu + \mu}{2}}{\sin\frac{\nu - \mu}{2}} = \alpha \sin\nu (\cos\nu + \cos\mu)^2 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1 - \varepsilon} \frac{\cos\theta d\theta}{R} + \int_{\theta_1 - \varepsilon'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{R} \right]. \qquad (162)$$

Умножив обе части этого уравнения на $\frac{\sin\mu}{w \sin\nu}$, придаем их к соответствующим частям второго уравнения (161). Получим:

$$y' - y - \frac{\alpha}{w} \frac{\sin\mu}{\sin\nu} \lg \frac{\sin\frac{\nu + \mu}{2}}{\sin\frac{\nu - \mu}{2}} =$$
$$= \frac{\alpha}{w} (\cos\nu + \cos\mu)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{(\cos\mu + \cos\nu)^2 + (\sin\theta \sin\nu - \sin\mu)^2} + e.$$

Здесь подинтегральная функция уже не обращается между пределами в бесконечность и потому можно опустить величины ε и ε'. Совершаем интеграцию и подставляем:

$$\alpha = \frac{Q}{\pi},\ y' - y = -\frac{Q}{w}\cos\theta_1\ ^{1}) = -\frac{Q}{w}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\right)^2} =$$

$$= -\frac{Q}{w}\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu}.$$

Получаем:

$$-\frac{Q}{w}\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu} + \frac{Q}{\pi w}\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\lg\frac{\sin\frac{\nu+\mu}{2}}{\sin\frac{\nu-\mu}{2}} =$$

$$= \frac{Q}{\pi w}\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\cos\nu+\cos\mu} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\nu+\sin\mu}{\cos\nu+\cos\mu}\right] + e.$$

Замечая, что величина, стоящая во второй части в скобках, есть

$$\frac{\nu-\mu}{2} + \frac{\nu+\mu}{2} = \nu,$$

определяем из формулы e:

$$e = \frac{Q}{w}\left(-\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)(\sin\nu-\mu)}}{\sin\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\lg\frac{\sin\frac{\nu+\mu}{2}}{\sin\frac{\nu-\mu}{2}} - \frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\frac{\nu}{\pi}\right). \qquad (163)$$

---

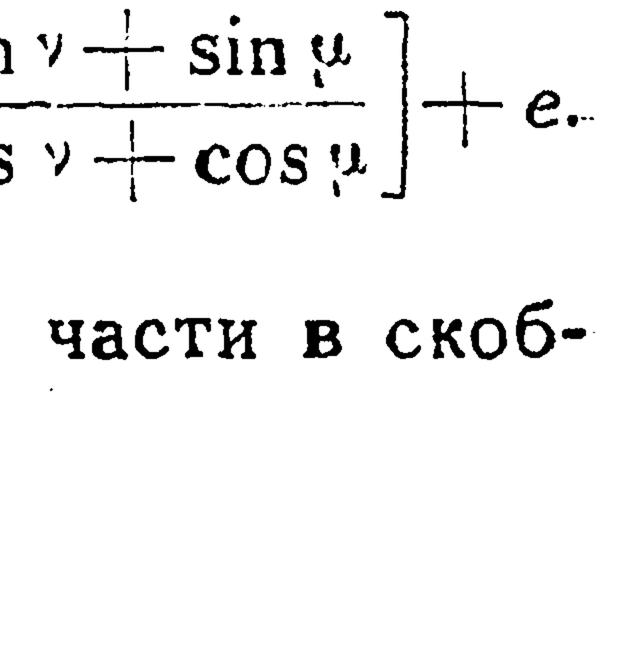
[1]) Пусть $AB \parallel EN \parallel y$, а $MC \parallel ND \parallel x$, где MN — ортогональная линия в струе в бесконечности (фиг. 44).

Тогда:

$$MN = \frac{Q}{w},\ -EN = y' - y;$$

отсюда

$$y' - y = -MN\cos\theta_1 = -\frac{Q}{w}\cos\theta_1.$$



Фиг. 44.

Прим. ред.

Переходим к определению h. Вводим в первое уравнение (161) подстановку:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

и пишем его, сначала не обращая внимания на то, что подинтегральная функция обращается между пределами в бесконечность:

$$x' - x = \frac{\alpha}{w} \sin \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \lambda d\lambda}{R'} + h =$$

$$= \frac{\alpha}{w} \sin \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2 N' + h,$$

где

$$R' = [\sin \nu \cos \lambda - \sin \mu] [(\cos \nu + \cos \mu)^2 + (\sin \nu \cos \lambda - \sin \mu)^2].$$

Что касается величины N', то ее можно представить:

$$N' = 8 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \frac{\lambda}{2} \sin^2 \frac{\lambda}{2} \frac{d\lambda}{2}}{L'},$$

где

$$L' = \left[2 \sin \nu \cos^2 \frac{\lambda}{2} - (\sin \nu + \sin \mu)\right] \left\{(\cos \nu + \cos \mu)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[2 \sin \nu \cos^2 \frac{\lambda}{2} - (\sin \nu + \sin \mu)\right]^2\right\}.$$

Положим здесь:

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \sigma;$$

найдем:

$$N' = 8 \int_0^{\infty} \frac{\sigma^2 d\sigma}{L'},$$

где

$$L' = [2 \sin \nu - (\sin \nu + \sin \mu)(1 + \sigma^2)] \{(\cos \nu + \cos \mu)^2 (1 + \sigma^2)^2 + $$

$$+ [2 \sin \nu - (\sin \nu + \sin \mu)(1 + \sigma^2)]^2\}.$$

Определим корни знаменателя. Первый множитель, будучи приравнен нулю, дает:

$$1+\sigma^2=\frac{2\sin\nu}{\sin\nu+\sin\mu},$$

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}.$$

Приравнивая же нулю второй множитель, получаем:

$$1+\sigma^2=\frac{2\sin\nu}{\sin\nu+\sin\mu\mp i(\cos\mu+\cos\nu)}=$$

$$=\frac{\sin\nu}{\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\left(\sin\frac{\nu+\mu}{2}\mp i\cos\frac{\nu+\mu}{2}\right),$$

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{\cos\frac{\nu+\mu}{2}}{\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}\left(-\sin\frac{\nu}{2}\pm i\cos\frac{\nu}{2}\right).$$

Коэфициенты разложения подинтегральной функции по этим шести корням будут:

$$\mp\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{8\sin^2\nu(\cos\mu+\cos\nu)^2},$$

$$\pm\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{8\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\left(-\cos\frac{\mu}{2}\pm i\sin\frac{\mu}{2}\right).$$

Пользуясь найденными корнями и коэфициентами, получаем:

$$N'=\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{8\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sigma+\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sigma-\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}}\right)d\sigma-\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{4\sin^2\nu(\cos\mu+\cos\nu,^2}\pi\sin\frac{\mu}{2}\ ^1).$$

[1]) Здесь вкралась описка. Автор забывает умножить интеграл на ко-

Представим вошедший сюда интеграл в следующем виде:

$$\int_{\sigma_1+\varepsilon''}^{\infty} \lg\frac{\sigma+\sigma_1}{\sigma-\sigma_1} + \int_{0}^{\sigma_1-\varepsilon'''} \lg\frac{\sigma_1+\sigma}{\sigma_1-\sigma} = \lg\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'''},$$

где

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}},$$

а ε'' и ε''' суть некоторые бесконечно малые величины, зависящие от ε и ε'. Из формулы (160) легко усмотреть, что точки той и другой струи, имеющие одинаковое φ, дают углы θ и θ':

$$\sin\theta = \frac{p+\sin\mu}{\sin\nu}, \quad \sin\theta' = \frac{-p+\sin\mu}{\sin\nu},$$

где p — некоторая переменная величина.

Отсюда следует, что

$$\cos\theta\cdot\varepsilon = \frac{dp}{\sin\nu}, \quad \cos\theta'\cdot\varepsilon' = \frac{dp}{\sin\nu},$$

а потому для бесконечно удаленных точек струи, для которых $\cos\theta = \cos\theta'$, имеем:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 1.$$

Но

$$\sigma = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right),$$

потому

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}, \quad \varepsilon''' = \frac{\varepsilon'}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}, \quad \frac{\varepsilon'''}{\varepsilon''} = 1.$$

эфициент 8. Поэтому множитель перед интегралом не должен иметь восьмерки в знаменателе, а последний член будет:

$$\frac{2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin^2\nu\,(\cos\nu+\cos\mu)^2}\,\pi\sin\frac{\mu}{2}.$$ *Прим. ред.*

Мы находим, таким образом:

$$N'' = \frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{4\sin^2\nu(\cos\mu+\cos\nu)^2}\,\pi\sin\frac{\mu}{2}\,^{1}).$$

Так как для бесконечно удаленных точек струи, согласно формуле (155),

$$x'-x = \frac{Q}{w}\sin\theta_1 = \frac{Q}{w}\,\frac{\sin\mu}{\sin\nu},$$

то первая формула (161) получает окончательный вид:

$$h = \frac{Q}{w}\,\frac{\sin\mu}{\sin\nu} + \frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{4\sin^2\nu(\cos\mu+\cos\nu)^2}\,\pi\sin\frac{\mu}{2}\,^{2}). \qquad (164)$$

Теперь вся задача решена.

Задавшись углами μ и ν, мы определим по формуле (155) угол θ_1, а по формуле (154) — угол θ_0 и установим связь между v и w, которая вместе с теоремой Бернулли определит эти скорости. Далее по формулам (158), (163) и (164) определим размеры турбины, а по (159) — силу давления на ее лопатки.

После этого следует определить абсолютную скорость жидкости по направлению, перпендикулярному к полосе CD (фиг. 40). Потом будет уже легко вычислить работу турбины.

В частном случае, когда $\mu = 0$, мы получаем на фиг. 42 $2\partial = b$. Образующая сеть делается симметричной относительно оси $O\eta$, причем линии $P'D'$, GE, PD сливаются с прямыми $P'B'$,

---

[1]) См. предыдущее примечание на стр. 337. Надо было бы написать:

$$N' = -\frac{2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\,\pi\sin\frac{\mu}{2}.$$ *Прим. ред.*

[2]) Очевидная описка. Отрезок h выражается формулой:

$$h = \frac{2Q}{w}\,\frac{\sin\frac{\mu}{2}}{\sin\nu}\left(\cos\mu - \sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\right).$$

См. наше прибавление к этой работе. *Прим. ред.*

$O\eta$, PB и дают $\theta = \theta_0 = 0$, что видно из формулы (154); точно так же из формулы (155) следует $\theta_1 = 0$. Фиг. 43 обращается при этом в фиг. 30, причем кривые линии тока $P'B'$ и PB фиг. 43 переходят в прямые линии тока PO и $P'O$ фиг. 30.

Формула (163) может в этом предположении быть представлена в виде:

$$Q = -\frac{\pi}{\pi + 2\frac{\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}} ew.$$

Это совпадает с формулой (102), если принять во внимание, что в нашем случае $e = -2b$ и $\frac{\nu}{4} = \mu$.

Последнее следует из того, что по (154)[1]

$$v = w \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}.$$

§ 21. Заключение. Приведенных примеров достаточно, чтобы выяснить достоинство предлагаемого нами метода исследования. Остается еще много интересных задач, которые могут быть с помощью его разрешены. Так, весьма интересны случаи течения жидкости, при которых на контуре свободной струи получается точка перегиба. Они могли бы быть исследованы с помощью формулы (11), предполагая, что $f(u)$ обращается в нуль в некоторых точках, лежащих на фокальных отрезках, соответствующих контурам струй.

При некотором видоизменении функции ϕ возможно также решение задач об ударе беспредельного потока на тела, ограниченные кривыми контурами, и об истечении жидкости из сосудов с кривыми стенками. Мы решили несколько таких задач, но нам не удалось при этом получить простых видов контуров. Так, нам не удалось, несмотря на продолжительные изыскания, решить задачу об ударе беспредельного потока на круглый цилиндр. Может быть, эта задача могла бы быть

[1] А также по формуле (100) при $q = \frac{1}{2}$. *Прим. ред.*

разрешена как предельный случай задачи об ударе потока на многогранный контур, причем в пределе выходящие углы дали бы конечное значение для скорости.

Эта работа была доложена 5 января 1890 г. на VIII съезде русских естествоиспытателей и врачей и напечатана в первый раз в „Математическом сборнике“, т. XV, и во второй раз в „Трудах Центрального аэрогидродинамического института“, вып. 41, 1930 г. *Прим. ред.*

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДЕЙСТВИЯ ТУРБИНЫ

(Обобщение решения Н. Е. Жуковского)

Проф. *С. Чаплыгин* и *А. Минаков*

Назовем область, занятую жидкостью, областью переменного

$$z = x + iy.$$

Ось x направим вдоль пластинки (пера) AB навстречу потоку (фиг. 1), начало осей возьмем в той точке, где крайняя струя вступает на перо. Введем мнимые переменные:

$$\left.\begin{aligned} u &= \xi + i\eta, \\ f &= \varphi + i\varphi, \\ \tau &= \vartheta + i\theta = \lg\left(w\frac{dz}{df}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

где $\vartheta = \lg\dfrac{w}{v}$,

v = скорость,

w = скорость в струе, в бесконечной дали,

θ = угол вектора-скорости с осью x,

f = функция течения,

φ = потенциал скоростей,

ψ = функция тока.

Условимся, кроме того, отмечать индексом $(_0)$ величины в бесконечности в потоке, индексом $(_1)$ величины в бесконечности в струе.

Устанавливаем такие соотношения между этими перемен-ными:

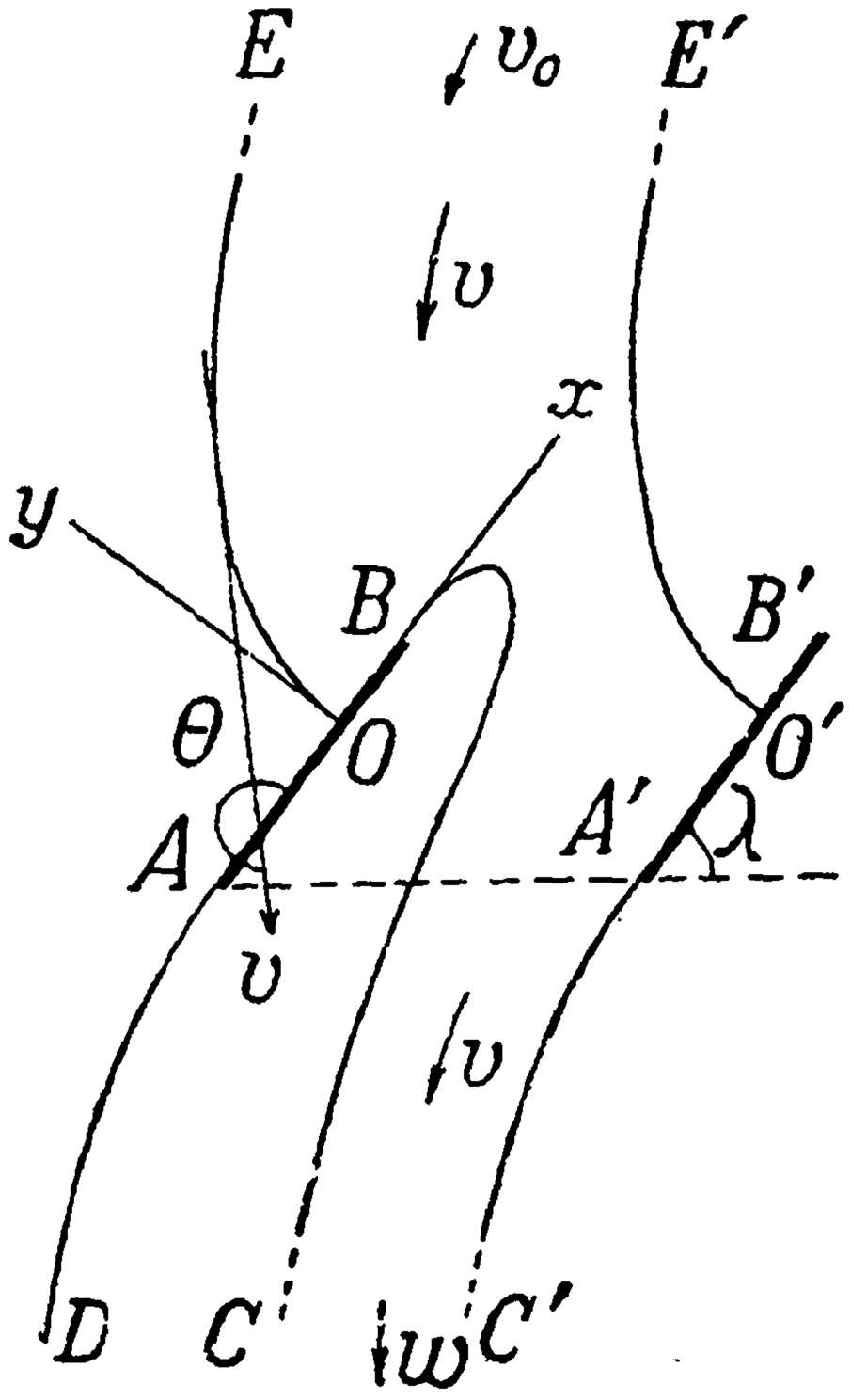
$$\frac{d\tau}{du} = -\frac{\sqrt{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)}}{\sin u\sqrt{2\sin(\alpha-u)\sin(\beta-u)}}, \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{df}{du} = -kw\frac{\sin u}{\sin(u-\gamma)}, \qquad \text{(III)}$$

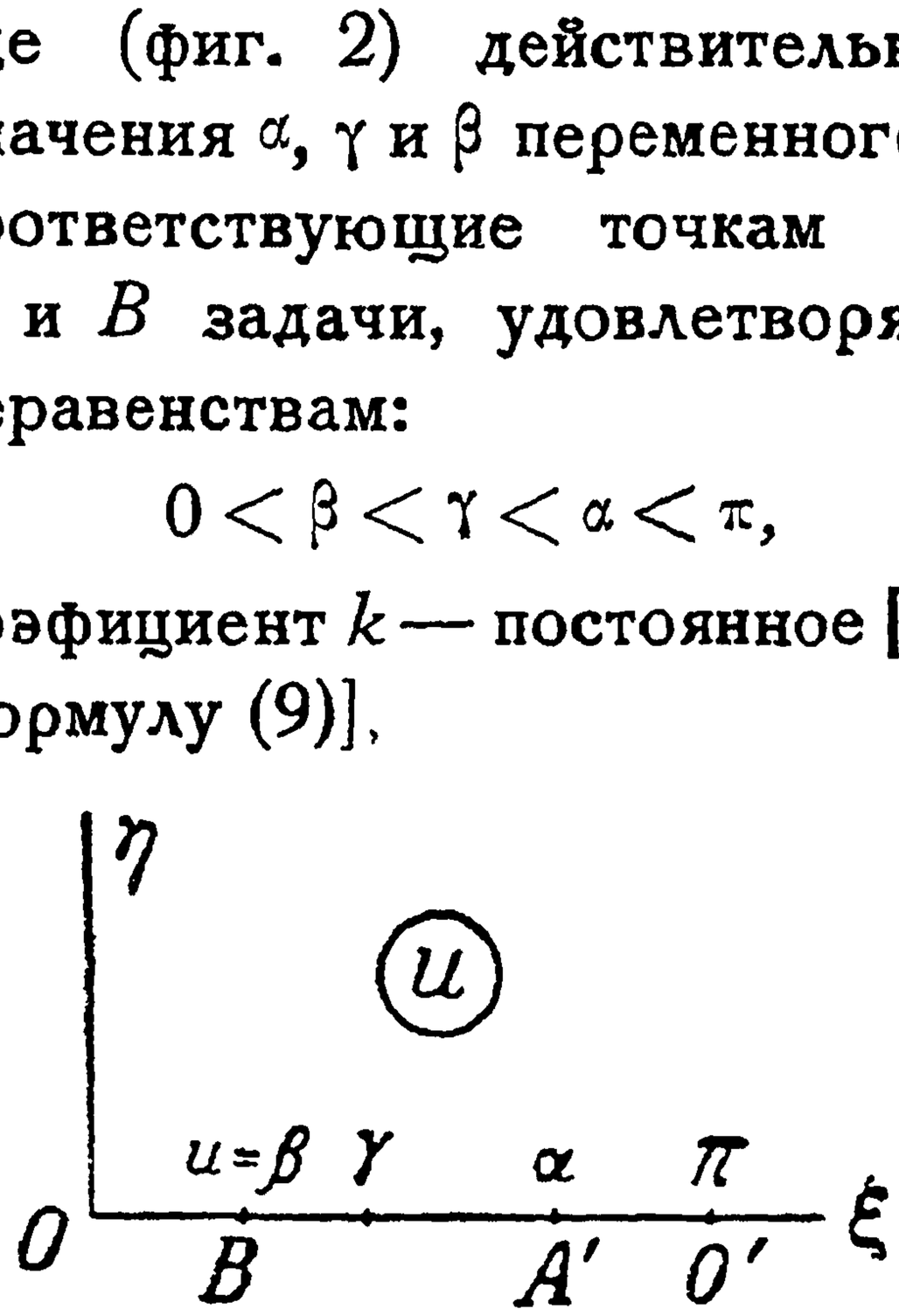
где (фиг. 2) действительные значения α, γ и β переменного u, соответствующие точкам A', C и B задачи, удовлетворяют неравенствам:

$$0 < \beta < \gamma < \alpha < \pi,$$

коэфициент k — постоянное [см. формулу (9)].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

§ 1. Так как

$$\sqrt{2\sin(\alpha-u)\sin(\beta-u)} =$$

$$= \sin u\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{2\sin\alpha\sin\beta}}\sqrt{(m\operatorname{ctg}u-n)^2-1},$$

где

$$m = \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}, \quad n = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \qquad (1)$$

то

$$\frac{d\tau}{du} = -\frac{m}{\sin^2 u\sqrt{(m\operatorname{ctg}u-n)^2-1}} =$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{(m\operatorname{ctg}u-n)^2-1}}\frac{d}{du}(m\operatorname{ctg}u-n),$$

и следовательно,

$$\tau = \lg\left[(m\operatorname{ctg}u-n)+\sqrt{(m\operatorname{ctg}u-n)^2-1}\right]+\text{const.}$$

Для определения константы воспользуемся тем, что в точке B

$$\tau = 0, \qquad u = \beta,$$

т. е.

$$m \operatorname{ctg} u - n = 1;$$

получаем:

$$\tau = \lg [(m \operatorname{ctg} u - n) + \sqrt{(m \operatorname{ctg} u - n)^2 - 1}],$$

или

$$\operatorname{cosh} \tau = m \operatorname{ctg} u - n. \tag{2}$$

На основании этой формулы находим:
так как, во-первых, в потоке, в бесконечности

$$u \to i \cdot \infty,$$

$$\operatorname{ctg} u = -i,$$

$$\tau = \tau_0 = \vartheta_0 + i\theta_0,$$

то

$$\operatorname{cosh} \tau_0 = -n - im; \tag{3}$$

так как, во-вторых, в струе, в бесконечной дали:

$$u = \gamma,$$

$$\tau = \tau_1 = \vartheta_1 + i\theta_1 = i\theta_1,$$

то

$$\operatorname{cosh} \tau_1 = \cos \theta_1 = -n + cm, \tag{4}$$

где

$$c = \operatorname{ctg} \gamma. \tag{5}$$

§ 2. Период $AA' = L$ решетки. Вектор

$$\bar{L} = Le^{-i\lambda} = \int_{FF'} dz, \tag{6}$$

где λ — угол наклона (см. фиг. 1) пера, а интегрирование совершается в потоке в бесконечности вдоль отрезка $\overline{FF'} \# \overline{EE'}$.

Вычислим этот интеграл.

Из уравнений (I) и (III) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{df} &= \frac{1}{w} e^{\tau}, \\ \frac{df}{du} &= -kw \frac{\sin u}{\sin (u - \gamma)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{du} = -k\frac{e^{\tau}\sin u}{\sin(u-\gamma)}. \tag{8}$$

Поэтому уравнение (6) будет иметь вид:

$$Le^{-i\lambda} = -k\int_{FF'}\frac{e^{\tau}\sin u}{\sin(u-\gamma)}\,du = -k\int_{FF'}\frac{e^{\tau_0}\,du}{\cos\gamma-\sin\gamma\operatorname{ctg}u} =$$

$$= -\frac{ke^{\tau_0}}{\cos\gamma+i\sin\gamma}\int_{u_0}^{u_0+\pi} du = -k\pi e^{\tau_0-i\gamma}.$$

Таким образом

$$Le^{-i\lambda} = -k\pi e^{\vartheta_0+i(\theta_0-\gamma)}.$$

Сравнивая действительные и мнимые части, находим:

$$\left.\begin{aligned} L\cos\lambda &= -k\pi e^{\vartheta_0}\cos(\theta_0-\gamma),\\ L\sin\lambda &= +k\pi e^{\vartheta_0}\sin(\theta_0-\gamma); \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} L &= \pi k e^{\vartheta_0} = \pi k\frac{w}{v_0},\\ \lambda &= \pi-(\theta_0-\gamma) = \pi-\theta_0+\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

§ 3. Объемный расход Q. Так как

$$f = \varphi + i\psi,$$

то [1]

$$Q = \Re\left(\frac{\rho}{i}\int_{cc'} df\right) = \Re\left(\frac{\rho}{i}\int_{cc'}\frac{df}{du}\,du\right).$$

Заменяем $\frac{df}{du}$ ее выражением (7) и интегрируем в области u, обходя полюс (C, C') по полукругу:

$$Q = \pi\rho\Re\left(\left|\operatorname{Rés}\frac{df}{du}\right|_{u=\gamma}\right) = \pi\rho\, wk\left|\frac{\sin u}{\cos(u-\gamma)}\right|_{u=\gamma} = \pi\rho\, wk\sin\gamma.$$

[1] ($\Re$) символ Weierstrass для действительной части функции, стоящей в скобках.

Отсюда в связи с (9) и (I):

$$Q = \pi\rho\, kw \sin\gamma = Lw\rho e^{\vartheta_0} \sin\gamma = Lv_0\rho \sin\gamma. \qquad (10)$$

§ 4. Длина l пера турбины. Из уравнения (8) имеем:

$$\frac{dz}{du} = -k\frac{e^{\tau}\sin u}{\sin(u-\gamma)} = \frac{k}{\sin\gamma}\quad\frac{e^{\tau}}{\operatorname{ctg} u - c}.$$

Но из (2) следует:

$$\operatorname{ctg} u = \frac{\cosh\tau + n}{m};$$

следовательно,

$$\frac{dz}{du} = \frac{k}{\sin\gamma}\cdot\frac{me^{\tau}}{\cosh\tau - (mc-n)} = \frac{k}{\sin\gamma}\quad\frac{me^{\tau}}{\cosh\tau - \cos\theta_1}. \qquad (11)$$

Диференцируя уравнение (2), находим:

$$-mdu = \frac{\sinh\tau\cdot d\tau}{1+\operatorname{ctg}^2 u} = \frac{\sinh\tau\cdot d\tau}{(\operatorname{ctg} u + i)(\operatorname{ctg} u - i)}.$$

Пользуясь опять формулой (2), напишем:

$$-mdu = \frac{m^2\sinh\tau\cdot d\tau}{(\cosh\tau - \cosh\tau_0)(\cosh\tau - \cosh\tau_2)},$$

где $\cosh\tau_2$ есть величина, сопряженная $\cosh\tau_0$, т. е.:

$$\left.\begin{aligned}\cosh\tau_0 &= -n - im,\\ \cosh\tau_2 &= -n + im.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Таким образом из уравнения (11) получим окончательно:

$$dz = -\frac{km^2}{\sin\gamma}\frac{e^{\tau}\sinh\tau\cdot d\tau}{(\cosh\tau - \cosh\tau_0)(\cosh\tau - \cosh\tau_2)(\cosh\tau - \cos\theta_1)} = F(\tau)\,d\tau.$$

Очевидно, что длина l пера складывается из двух (см. фиг. 1): $\overline{OB}$ и $\overline{A'O'}$. Но (фиг. 3):

$$\overline{OB} = \int_{OB} dz = \int_{\infty+0.i}^{0+0\cdot i} F(\tau)\,d\tau = \int_{\infty}^{+1}\varphi(\sigma)\,d\sigma,$$

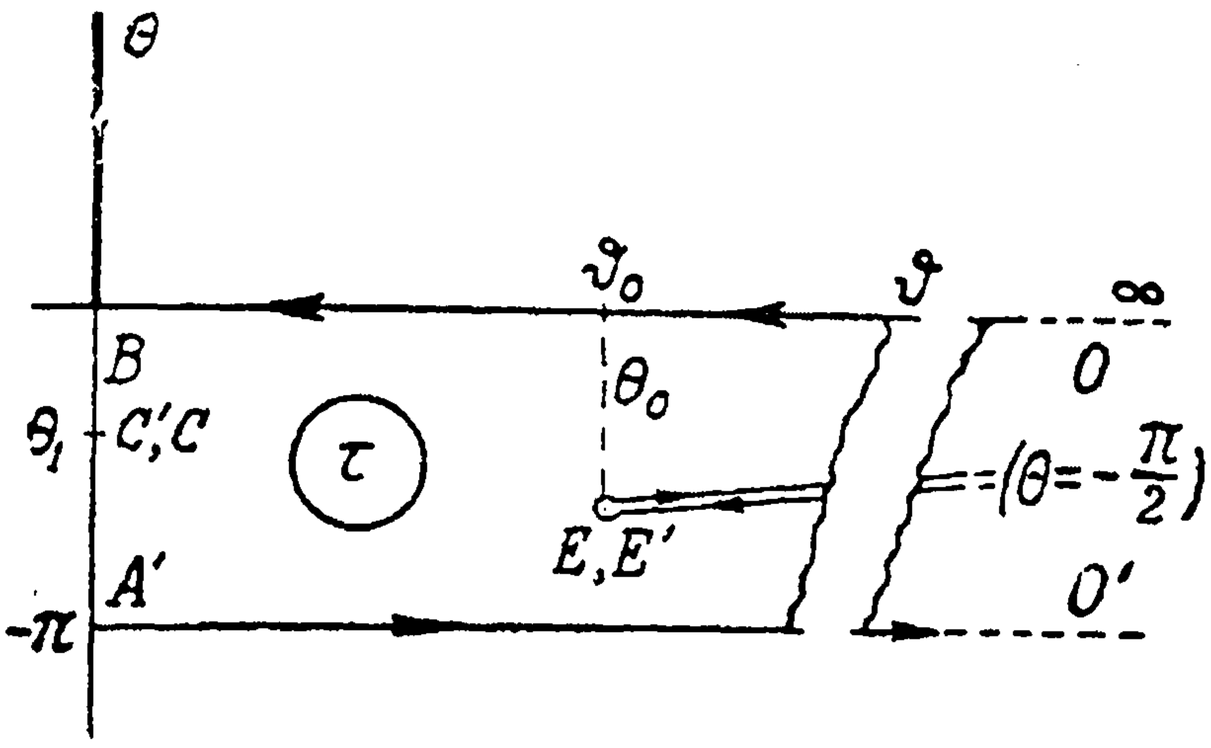
где $\sigma = e^{\tau}$,

$$\overline{A'O'} = \int_{A'O'} dz = \int_{0-i\pi}^{\infty-i\pi} F(\tau)\,d\tau = \int_{-1}^{\infty}\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

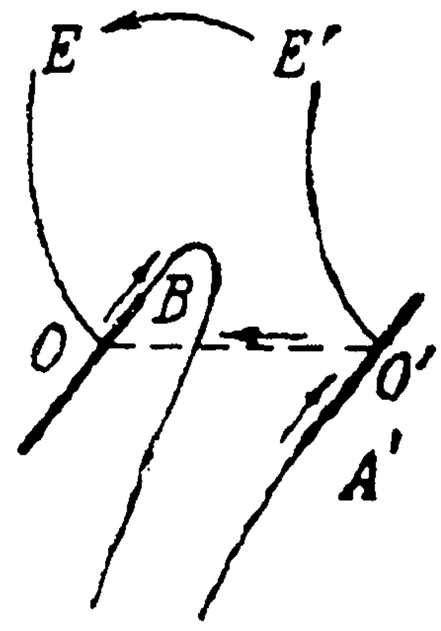
Следовательно,

$$l = \int_{-1}^{\infty} \varphi(\sigma)\, d\sigma + \int_{\infty}^{+1} \varphi(\sigma)\, d\sigma.$$

Далее, $F(\tau)$ обращается в бесконечность в точке E, E' (где $\tau = \tau_0$), а непрерывному обходу в области τ от A' к B вдоль контура (фиг. 3) соответствует обход по перьям и контуру потока в области z (см. фиг. 1) по тем же буквам. Этот



Фиг. 3.



Фиг. 4.

последний обход можно заменить (фиг. 4) обходом $A'O'OB$, где $\overline{O'O}$ — прямолинейный отрезок (вектор), соединяющий O' с O. Но так как интеграция совершается параллельно действительной оси, то

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\sigma)\, d\sigma$$

будет отличаться от величины l на действительную компоненту вектора $\overline{O'O}$, т. е. на $-L\cos\lambda$; поэтому

$$l = \int_{-1}^{+1} \varphi(\sigma)\, d\sigma - (-L\cos\lambda) = I + L\cos\lambda. \qquad (13)$$

Перейдем к вычислению этой величины l. Вычислим прежде всего входящий в нее интеграл:

$$I = -\frac{km^2}{\sin\gamma} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\tau}\sin\tau\, d\tau}{(\cosh\tau - \cosh\tau_0)\ \cosh\tau - \cosh\tau_2)\ (\cosh\tau - \cos\theta_1)}. \qquad (14)$$

Обозначим:

$$e^{\tau_0} = \sigma_1 = \sigma_3^{-1},$$
$$e^{\tau_2} = \sigma_2 = \sigma_4^{-1},$$
$$e^{i\theta_1} = \sigma_5 = \sigma_6^{-1}.$$

Тогда подинтегральную дробь можно написать так:

$$\frac{S(\sigma)}{T(\sigma)} \equiv \frac{4\sigma^2(\sigma^2-1)}{\prod\limits_r (\sigma-\sigma_r)}, \qquad (r=1, 2, \ldots, 6).$$

Разложим ее на шесть дробей:

$$\frac{S(\sigma)}{T(\sigma)} = \sum_{r=1}^{r=6} \frac{A_r}{(\sigma-\sigma_r)}.$$

Коэфициенты A определятся по формуле:

$$A_q = S(\sigma_q) : \left[\frac{\prod\limits_r (\sigma-\sigma_r)}{\sigma-\sigma_q}\right]_{\sigma=\sigma_q}, \qquad (q=1, 2, \ldots, 6). \quad (15)$$

1. Возьмем первую пару корней и вычислим интеграл:

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{A_1}{\sigma-\sigma_1} + \frac{A_2}{\sigma-\sigma_2}\right) d\sigma.$$

Определяя коэфициенты A_1 и A_2 по формуле (15), найдем:

$$A_1 = \frac{\sigma_1}{(\cosh\tau_0 - \cosh\tau_2)(\cosh\tau_0 - \cos\theta_1)},$$
$$A_2 = \frac{-\sigma_2}{(\cosh\tau_0 - \cosh\tau_2)(\cosh\tau_2 - \cos\theta_1)}.$$

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{R}\int_{-1}^{+1} \frac{M\sigma + [N - (e^{\tau_0}+e^{\tau_2})M]}{\sigma^2 + (e^{\tau_0}+e^{\tau_2})\sigma + e^{\tau_0+\tau_2}} d\sigma =$$
$$= \frac{M}{2R}\Big|\lg[\sigma^2 + (e^{\tau_0}+e^{\tau_2})\sigma + e^{\tau_0+\tau_2}]\Big|_{-1}^{+1} +$$
$$+ \frac{2N - M(e^{\tau_0}+e^{\tau_2})}{iR(e^{\tau_0}-e^{\tau_2})}\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{\sigma - \frac{1}{2}(e^{\tau_0}+e^{\tau_2})}{\frac{i}{2}(e^{\sigma_0}-e^{\tau_2})}\right|_{-1}^{+1},$$

где

$$\left.\begin{aligned} M &= e^{\tau_0}\cosh\tau_2 - e^{\tau_2}\cosh\tau_0 - (e^{\tau_0} - e^{\tau_2})\cos\theta_1, \\ N &= e^{2\tau_0}(\cosh\tau_2 - \cos\theta_1) - e^{2\tau_2}(\cosh\tau_0 - \cos\theta_1), \\ R &= (\cosh\tau_0 - \cosh\tau_2)(\cosh\tau_0 - \cos\theta_1)(\cosh\tau_2 - \cos\theta_1) = \\ &= \frac{m^2}{\sin^2\gamma}(\cosh\tau_0 - \cosh\tau_2). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Подставляя пределы, получим:

$$I_1 = \frac{M}{2R}\lg\frac{1 + e^{\tau_0+\tau_2} - e^{\tau_0} - e^{\tau_2}}{1 - e^{\tau_0+\tau_2} + e^{\tau_0} + e^{\tau_2}} + \\ + \frac{2N - M(e^{\tau_0} + e^{\tau_2})}{iR(e^{\tau_0} - e^{\tau_2})}\operatorname{arc\,tg}\frac{i(e^{\tau_0} - e^{\tau_2})}{e^{\tau_0+\tau_2} - 1}. \quad (17)$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма:

$$\lg\frac{1 + e^{\tau_0+\tau_2} - e^{\tau_0} - e^{\tau_2}}{1 - e^{\tau_0+\tau_2} + e^{\tau_0} + e^{\tau_2}} = \lg\frac{\cosh(\tau_0 + \tau_2) - \cosh(\tau_0 - \tau_2)}{2(\cosh\tau_0 + 1)(\cosh\tau_2 + 1)}. \quad (18)$$

Пользуясь формулами (1), (2) и (3), найдем, что

$$\left.\begin{aligned} \cosh(\tau_0+\tau_2) &= m^2 + n^2 + \sqrt{m^2 + (n+1)^2}\,\sqrt{m^2 + (n-1)^2}, \\ \cosh(\tau_0 - \tau_2) &= m^2 + n^2 - \sqrt{m^2 + (n+1)^2}\,\sqrt{m^2 + (n-1)^2}; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

поэтому преобразованный логарифм будет равен:

$$\lg\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \quad (20)$$

Выражение под знаком arc tg приведем к такому виду:

$$\frac{i(e^{\tau_0} - e^{\tau_2})}{e^{\tau_0+\tau_2} - 1} = i\frac{\cosh\tau_0 - \cosh\tau_2}{\cosh(\tau_0 + \tau_2) - 1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (21)$$

следовательно, вместо arc tg мы получим просто:

$$\frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (22)$$

Подставляя формулы (20), (22) в (17), получим:

$$I_1 = \frac{M}{2R}\lg\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{2N - M(e^{\tau_0} + e^{\tau_2})}{iR(e^{\tau_0} - e^{\tau_2})}\,\frac{(\alpha - \beta)}{2}.$$

2. Интеграл I_2, соответствующий второй паре корней знаменателя подинтегральной функции (14), т. е.

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{A_3}{\sigma - \sigma_3} + \frac{A_4}{\sigma - \sigma_4} \right) d\sigma,$$

берется очень легко благодаря следующим обстоятельствам.

Как видно из формул (18) и (21), величины, стоящие под знаками lg и arc tg, не меняются при перемене знака у τ_0 и τ_2. То же самое можно сказать и относительно величины R в формуле (16).

Поэтому можно сразу написать:

$$I_1 + I_2 = \frac{M + M'}{2R} \lg \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \left[\frac{2N - M(e^{\tau_0} + e^{\tau_2})}{iR(e^{\tau_0} - e^{\tau_2})} + \right.$$

$$\left. + \frac{2N' - M'(e^{-\tau_0} + e^{-\tau_2})}{iR(e^{-\tau_0} - e^{-\tau_2})} \right] \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad (23)$$

где M' и N' — величины, полученные из M и N при замене τ_0 и τ_2 на $-\tau_0$ и $-\tau_2$.

Первый член, стоящий в квадратных скобках, легко преобразовать и привести к такому виду:

$$-\frac{i}{R}[e^{\tau_0 + \tau_2} + \cosh(\tau_0 - \tau_2) - (e^{\tau_0} + e^{\tau_2}) \cos \theta_1];$$

переменив знак у τ_0 и τ_2, получим второй член в квадратных скобках.

Поэтому весь коэфициент при $\frac{\alpha - \beta}{2}$ в формуле (23) будет:

$$-\frac{2i}{R}[\cosh(\tau_0 + \tau_2) + \cosh(\tau_0 - \tau_2) - (\cosh \tau_0 - \cosh \tau_2) \cos \theta_1];$$

воспользовавшись опять формулами (3), (12) и (19), перепишем это выражение в таком виде:

$$2 \frac{\sin^2 \gamma}{m^2} \quad \frac{2 \sin \alpha \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) \operatorname{ctg} \gamma}{\sin(\alpha - \beta)}. \qquad (24)$$

Коэфициент при логарифме в формуле (23) можно привести подобным же образом к виду

$$-\frac{\sin^2\gamma}{m^2}\cos\theta_1. \tag{25}$$

Подставив выражения (24) и (25) в (23), находим окончательно:

$$I_1+I_2=\frac{\sin^2\gamma}{m^2}\left[\frac{2\sin\alpha\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\gamma}{\sin(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta)-\right.$$
$$\left.-\cos\theta_1\lg\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right]. \tag{26}$$

3. Последняя пара корней нашего интеграла (14), а именно:

$$\sigma_5=e^{i\theta_1},$$
$$\sigma_6=e^{-i\theta_1},$$

даст:

$$I_3=\int_{-1}^{+1}\left(\frac{A_5}{\sigma-\sigma_5}+\frac{A_6}{\sigma-\sigma_6}\right)d\sigma;$$

коэфициенты A_5 и A_6, согласно формуле (15), таковы:

$$A_5=\frac{e^{i\theta_1}}{(\cos\theta_1-\cosh\tau_0)(\cos\theta_1-\cosh\tau_2)};$$

$$A_6=\frac{e^{-i\theta_1}}{(\cos\theta_1-\cosh\tau_0)(\cos\theta_1-\cosh\tau_2)};$$

поэтому

$$I_3=2\frac{\sin^2\gamma}{m^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\sigma\cos\theta_1-1}{\sigma^2-2\cos\theta_1+1}d\sigma=$$
$$=-\frac{\sin^2\gamma}{m^2}\left[\cos\theta_1\lg\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_1}{2}\right)+\pi\sin\theta_1\right]. \tag{27}$$

Подставив выражение I_1+I_2 из формулы (26) и только что найденный интеграл (27) в формулу длины пера (13), получаем:

$$l = k \sin\gamma \left[\cos\theta_1 \lg \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \right.$$

$$- \frac{2\sin\alpha\sin\beta + \sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\gamma}{\sin(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta) +$$

$$\left. + \cos\theta_1 \lg\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_1}{2}\right) + \pi\sin\theta_1 \right] + L\cos\lambda. \qquad (28)$$

Переходим теперь к определению величины

$$L\cos\lambda.$$

Из формулы (9) имеем:

$$L = k\pi e^{\vartheta_0};$$

следовательно, задача состоит в определении величины e^{ϑ_0}.

Вычислим ее так.

Согласно формуле (3),

$$\cosh\tau_0 = \cosh(\vartheta_0 + i\theta_0) = -n - im;$$

сравнивая действительные и мнимые части, находим:

$$\left.\begin{aligned} \cosh\vartheta_0\cos\theta_0 &= -n, \\ \sinh\vartheta_0\sin\theta_0 &= -m. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Возведем оба выражения в квадрат, помножим соответственно на $\sin^2\theta_0$ и $\cos^2\theta_0$ и вычтем второе из первого; получим такое уравнение:

$$\cos^4\theta_0 - (1 + m^2 + n^2)\cos^2\theta_0 + n^2 = 0,$$

которое, если заменить в нем m и n выражениями (1), примет такой вид:

$$\cos^4\theta_0 - 2\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha-\beta)}\cos^2\theta_0 + \frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)} = 0.$$

Решая это уравнение, находим:

$$\cos\theta_0 = + \frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad (30)$$

причем при извлечении 1 корня взят знак минус, так как

$$\cos\theta_0 \leqq 1.$$

Далее первое из выражений (29) дает такое уравнение:

$$e^{2\vartheta_0} - \frac{2n}{\cos\theta_0} e^{\vartheta_0} + 1 = 0,$$

откуда

$$e^{\vartheta_0} = \frac{n^2}{\cos\theta_0} - \sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\theta_0} - 1}; \tag{31}$$

или, заменяя опять n его выражением (1), а $\cos\theta_0$ только что найденным (30), получаем:

$$e^{\vartheta_0} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\left[\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\right] =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{32}$$

Знак минус перед корнем в формуле (31) взят потому, что в противном случае существенно положительная величина e^{ϑ_0} окажется отрицательной, так как тогда мы будем иметь в числителе формулы (32) знак минус перед круглыми скобками.

Так как согласно (9), или (9′)

$$\lambda = \pi - (\theta_0 - \gamma),$$

т. е.

$$\cos\lambda = -\cos\theta_0\cos\gamma - \sin\theta_0\sin\gamma,$$

то, заменяя $\cos\theta_0$ и $\sin\theta_0$ при помощи формулы (30), находим:

$$\cos\lambda = -\frac{1}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\left[\sin\gamma\sqrt{\sin\alpha\sin\beta} - \cos\gamma\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right];$$

поэтому

$$-L\cos\lambda=\frac{2\pi k}{\sin(\alpha-\beta)}\left[\left(\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\right.\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\right)\cos\gamma-$$

$$\left.-\left(\sin\alpha\sin\beta-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\right)\sin\gamma\right].$$

Теперь мы можем написать окончательно длину пера так:

$$l=k\sin\gamma\left[\cos\theta_1\lg\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-\frac{2\sin\alpha\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\gamma}{\sin(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta)+\right.$$

$$\left.+\cos\theta_1\lg\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_1}{2}\right)+\pi\sin\theta_1\right]-$$

$$-\frac{2\pi k}{\sin(\alpha-\beta)}\left[\left(\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\right)\cos\gamma+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}-\sin\alpha\sin\beta\right)\sin\gamma\right],$$

или, собирая отдельно члены с $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$, так:

$$l=k\left\{\left[\cos\theta_1\lg\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_1}{2}\right)-\right.\right.$$

$$-\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}[\pi-(\alpha-\beta)]-\frac{2\pi\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin(\alpha-\beta)}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}+$$

$$\left.+\pi\sin\theta_1\right]\sin\gamma-\left[\pi\left(\sin(\alpha+\beta)-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)\right]\frac{\cos\gamma}{\sin(\alpha-\beta)}\right\},\qquad(33)$$

где, согласно формуле (4),

$$\cos\theta_1=mc-n=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}[2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{ctg}\gamma-\sin(\alpha+\beta)].$$

Заметим тут же, что если в этой формуле положить $\gamma=\frac{\pi}{2}$, то член с $\cos\gamma$ исчезает; кроме того:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= -\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \\ \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) &= -\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha, \\ \sin\theta_1 &= -\sqrt{-\sin 2\alpha\sin 2\beta}\,\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}, \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

[1])

и мы получаем:

$$l = \frac{k}{\sin(\alpha-\beta)}\left[\sin(\alpha+\beta)\lg\left(-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)+\right.$$

$$+2\sin\alpha\sin\beta\,[\pi-(\alpha-\beta)]-2\pi\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}-$$

$$\left.-\pi\sqrt{-\sin 2\alpha\sin 2\beta}\right]. \quad (33')$$

Эта формула понадобится нам несколько позже, когда мы будем доказывать, что наше решение совпадает с решением Н. Е. Жуковского.

§ 5. Величина *e*. Вычислим теперь величину, которую Н. Е. Жуковский обозначает буквой *e*. Эта величина есть расстояние подошвы перпендикуляра, опущенного из точки A' (нижний конец правого пера) на левое перо, от верхнего конца этого пера. Совершенно очевидно, что этот отрезок можно рассматривать как проекцию на ось x ломаной $A'O'OB$; но эта проекция есть не что иное, как наш интеграл I в формуле (13). Поэтому достаточно в формуле (28) отбросить член $L\cos\lambda$, чтобы получить величину e.

Итак,

$$e = k\sin\gamma\left[\cos\theta_1\lg\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\sin\alpha\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\gamma}{\sin(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta)+\pi\sin\theta_1\right]. \quad (35)$$

---

[1]) Знак минус перед корнем взят по следующим основаниям: $\cos\theta_1$, как видно из первой формулы (34), отрицателен и, следовательно, θ_1 лежит во 2-й или 3-й четверти, но этот угол по существу лежит в 3-й четверти, синус же в 3-й четверти отрицателен.

Напишем эту формулу для частного случая $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (как это мы сделали с длиной пера), т. е. воспользуемся формулами (34).

Получаем:

$$e = \frac{k}{\sin(\alpha-\beta)}\left[\sin(\alpha+\beta)\lg\left(-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)-\right.$$

$$\left.-2\sin\alpha\sin\beta(\alpha-\beta)-\pi\sqrt{-\sin 2\alpha\sin 2\beta}\right]. \qquad (35')$$

§ 6. Расстояние h между перьями. Опять совершенно ясно из фиг. 1, что

$$h = L\sin\lambda = \pi k e^{\vartheta_0}\sin\lambda.$$

Найдя $\sin\lambda$ из формулы (9) так же, как мы находили $\cos\lambda$, и беря e^{ϑ_0} из формулы (32), получаем:

$$h = \frac{2\pi k}{\sin(\alpha-\beta)}\left[\left(\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\gamma+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}-\sin\alpha\sin\beta\right)\cos\gamma\right]. \qquad (36)$$

Положив опять $\gamma = \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$h = \frac{2\pi k}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (36')$$

§ 7. Давление P на перо турбины. Для определения давления P на перо турбины AB воспользуемся теоремой количеств движения для всей жидкости, занимающей объем $EE'CC'$ (фиг. 1), где

$$EE' \# AA' \# CC'.$$

Импульс, сообщаемый этому объему жидкости пластинкой AB, будет, очевидно, как раз равен P, так как на части $A'O'$ правого пера и части OB — левого имеется избыточное давление, направленное вверх; на части же AB, снизу пера, —

давление, господствующее в смежной области $ABCD$, направленное вниз.

Поэтому теорема количеств движения в проекции на направление AA' (перпендикулярное оси турбины) напишется так (фиг. 1):

$$P_H = P \sin \lambda = -Qv_0 \cos(\lambda + \theta_0 - \pi) + Qw \cos(\lambda + \theta_1 - \pi)$$

или, согласно формулам (9) и (10):

$$P_H = \rho L v_0 \sin \gamma \,[w \cos(\gamma + \theta_1 - \theta_0) - v_0 \cos \gamma]. \qquad (37)$$

Положив:

$v_0 \sin \gamma = v_0 \sin(\lambda + \theta_0 - \pi) = V_0$ — вертикальная составляющая скорости потока,

$v_0 \cos \gamma = v_0 \cos(\lambda + \theta_0 - \pi) = U_0$ — горизонтальная составляющая скорости потока,

$w \cos(\gamma + \theta_1 - \theta_0) = v_0 \cos(\lambda - \theta_1 - \pi) = U_1$ — горизонтальная составляющая скорости отходящей воды,

перепишем уравнение (37) так:

$$P_H = \rho L V_0 (U_0 - U_1). \qquad (38)$$

Скорость вращения колеса турбины будет:

$$N = \frac{30}{\pi r} U_0 \text{ об/мин},$$

где r — радиус колеса, а мощность

$$W = \frac{\rho}{75} L U_0 V_0 (U_0 - U_1) \text{ л. с.} \qquad (39)$$

Заметим, наконец, что уравнение количеств движения удовлетворяется тождественно в проекции на ось x.

Покажем это.

Мы имеем:

$$-L(p_0 - p_1) \sin \lambda = -Q(v_0 \cos \theta_0 - w \cos \theta_1). \qquad (40)$$

Но *а*) согласно формулам (4) и (5),

$$\cos\theta_1 \sin\gamma = (cm - n)\sin\gamma =$$

$$= (\cosh\vartheta_0 \cos\theta_0 - \sinh\vartheta_0 \sin\theta_0 \operatorname{ctg}\gamma)\sin\gamma =$$

$$= \sin\gamma \cosh\vartheta_0 \cos\theta_0 - \cos\gamma \sinh\vartheta_0 \sinh\theta_0; \qquad (41)$$

б) по теореме Бернулли

$$p_1 - p_0 = \rho\frac{v_0^2 - w^2}{2} = \rho\frac{v_0 + w}{v_0}\,\frac{v_0 - w}{w}\,\frac{v_0 w}{2} =$$

$$= \rho\,(e^{\vartheta_0} + 1)\,(e^{-\vartheta_0} - 1)\,\frac{v_0 w}{2} =$$

$$= -\rho v_0 w \sinh\vartheta_0 = -\rho w^2 e^{-\vartheta_0}\sinh\vartheta_0; \qquad (42)$$

в) согласно формуле (9),

$$\sin\lambda = \sin(\theta_1 - \gamma); \qquad (43)$$

г) согласно формуле (10),

$$Q = \rho v_0 L \sin\gamma. \qquad (44)$$

Поэтому левая часть уравнения (40) будет:

$$L\rho v_0 w \sinh\vartheta_0 \sin(\gamma - \theta_0),$$

правая же:

$$Lv_0\rho\sin\gamma(w\cos\theta_1 - v_0\cos\theta_0) = Lv_0\rho w\,(-\cos\gamma\sinh\vartheta_0\sin\theta_0 +$$

$$+\sin\gamma\cosh\vartheta_0\cos\theta_0 - e^{-\vartheta_0}\cos\theta_0\sin\gamma) =$$

$$= L\rho v_0 w\,(\sin\gamma\cos\theta_0\sinh\vartheta_0 - \cos\gamma\sinh\vartheta_0\sin\theta_0) =$$

$$= L\rho v_0 w\sinh\vartheta_0\sin(\gamma - \theta_0),$$

т. е. та же, что и левая часть.

Перейдем опять к частному случаю и вычислим P в предположении, что $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Из формулы (37) находим, опустив значок при P:

$$P = \rho\frac{Lv_0 w}{\sin\lambda}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1 - \theta_0\right).$$

Но, согласно формуле (10),

$$\rho L v = Q.$$

Следовательно,

$$P = + \frac{\rho Q w}{\sin \lambda} \sin (\theta_0 - \theta_1).$$

Далее, так как теперь формула (9) дает:

$$\sin \lambda = - \cos \theta_0,$$

то

$$P = \rho Q w (\sin \theta_1 - \cos \theta_1 \operatorname{tg} \theta_0);$$

подставляя сюда $\sin \theta_1$ и $\cos \theta_1$ из (34), находим:

$$P = - \frac{Q w \rho}{\sin (\alpha - \beta)} [\sin (\alpha + \beta) \operatorname{tg} \theta_0 + \sqrt{- \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}].$$

Здесь знак минус получился потому, что мы делили $P_н$ на $\sin \lambda$, а λ лежит в 4-й четверти.

Итак,

$$|P| = \frac{Q w \rho}{\sin (\alpha - \beta)} [\sin (\alpha + \beta) \operatorname{tg} \theta_0 + \sqrt{- \sin 2\alpha \sin 2\beta}].$$

Но на основании формулы (30) мы имеем:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\sqrt{\sin \alpha \sin \beta}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}};$$

поэтому окончательно

$$|P| = \frac{\rho Q w}{\sin (\alpha - \beta)} \left[2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sqrt{\sin \alpha \sin \beta} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{- \sin 2\alpha \sin 2\beta} \right]. \qquad (45)$$

§ 8. Получение формул Н. Е. Жуковского из нашего решения. Покажем теперь, что наше решение содержит в себе как частный случай решение Н. Е. Жуковского.

Обратимся для этого прежде всего к фиг. 43 (стр. 327) и сравним ее с нашей фиг. 1. Мы видим, что нашим точкам O, B, A' и O' соответствуют точки P, F, F', P' Н. Е. Жуковского.

Сопоставим затем фиг. 42 (стр. 322) и нашу фиг. 2. Мы видим, что (фиг. 5):

$$\partial = \beta,$$

$$a = \alpha - \beta,$$

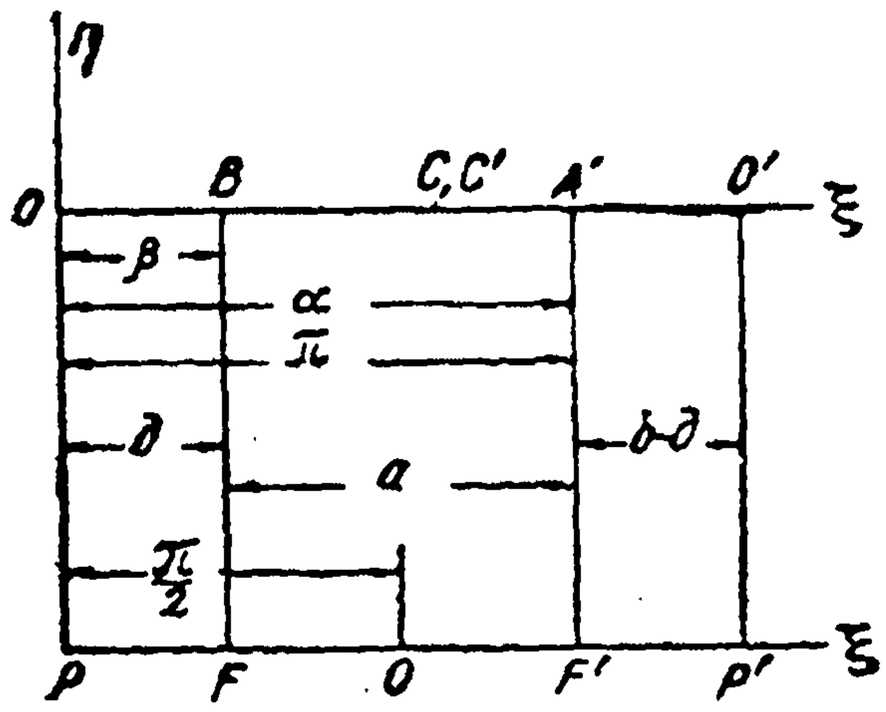
$$b - \partial = \pi - \alpha,$$

$$b = \pi - (\alpha - \beta).$$

Следовательно, формулы (151) Н. Е. Жуковского дают:

$$\nu = \frac{\pi a}{a + b} = \alpha - \beta,$$

$$\mu = \frac{\pi}{a + b}(b - 2\partial) = \pi - (\alpha + \beta).$$



Фиг. 5.

Сравнивая далее расположение осей координат на нашей фиг. 1 с осями, принятыми Н. Е. Жуковским на его фиг. 43, мы видим, что между нашим углом θ_1 и углом θ_1 Н. Е. Жуковского существует такая зависимость:

$$\theta_1 = \frac{3}{2}\pi - (\theta_1),$$

где в круглых скобках поставлен угол струи с осями Н. Е. Жуковского.

Обращаясь теперь к формуле (155) Н. Е. Жуковского, находим:

$$\sin(\theta_1) = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} = -\cos\theta_1,$$

между тем наша формула (4) дает:

$$\cos\theta_1 = \frac{2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{ctg}\gamma - \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\sin\nu} - \frac{\sin\mu}{\sin\nu};$$

следовательно,

$$2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{ctg}\gamma = 0,$$

откуда

$$\gamma = \frac{\pi}{2},$$

так как ни α, ни β не равны, вообще, нулю.

Следовательно, задача, решенная Н. Е. Жуковским, есть частный случай нашей задачи, соответствующий $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Наконец, из нашей формулы (10) находим:

$$k = \frac{Q}{\pi \rho w}.$$

Итак, для перехода от наших формул к решению Н. Е. Жуковского мы должны везде положить:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} + \frac{\nu - \mu}{2}, \\ \beta &= \frac{\pi}{2} - \frac{\nu + \mu}{2}, \\ \gamma &= \frac{\pi}{2}, \\ k &= \frac{Q}{\pi \rho w} = \frac{Q}{\pi w}, \text{ так как } \rho = 1. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Произведя эти подстановки в наших формулах, мы получим:

1. Формула (33′):

$$l = \frac{Q}{\pi w \sin \nu}\left[\sin \mu \lg \left(\frac{\sin \frac{\nu + \mu}{2}}{\sin \frac{\nu - \mu}{2}}\right) + \right.$$

$$+ 2 \cos \frac{\nu + \mu}{2} \cos \frac{\nu - \mu}{2} (\pi - \nu) - 2\pi \cos \frac{\mu}{2} \sqrt{\cos \frac{\nu + \mu}{2} \cos \frac{\nu - \mu}{2}} -$$

$$\left. - \pi \sqrt{\sin (\nu + \mu) \sin (\nu - \mu)}\right],$$

т. е. формула (158) Н. Е. Жуковского. Наше исправление знака при третьем члене получает свое подтверждение.

2. Формула (35′):

$$e = \frac{Q}{\pi w \sin\nu}\left[\sin\mu \lg\left(\frac{\sin\frac{\nu+\mu}{2}}{\sin\frac{\nu-\mu}{2}}\right) - 2\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}\nu - \right.$$

$$\left. - \pi\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}\right],$$

т. е. формула (163) Н. Е. Жуковского.

3. Формула (36′):

$$h = \frac{2Q}{w\sin\nu}\left(\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}} - \cos\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\mu}{2};$$

мы получили опять исправленную нами раньше и на других основаниях формулу (164) Н. Е. Жуковского.

4. Формула (45):

$$|P| = \frac{Qw}{\sin\nu}\left[2\cos\frac{\mu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}\right],$$

т. е. формула (159) Н. Е. Жуковского.

Покажем еще, что наша подинтегральная функция в формуле (14) вполне соответствует функции в формуле (159) (стр. 332) Н. Е. Жуковского.

Мы имели формулу (14):

$$\overline{OB} = -\frac{km^2}{\sin\gamma}\int_{OB}\frac{e^{\tau}\sinh\tau\, d\tau}{(\cosh\tau-\cosh\tau_0)(\cosh\tau-\cosh\tau_2)(\cosh\tau-\cos\theta_0)},$$

где интеграция совершается в области τ (фиг. 3) вдоль прямой $\vartheta = 2\pi$ от ∞ до $\vartheta = 0$.

Поэтому

$$\cosh\tau = \cosh(\vartheta + i2\pi) = \cosh\vartheta$$

$$\sinh\tau = \sinh\vartheta,$$

и мы получаем:

$$\overline{OB} = -\frac{km^2}{\sin\gamma}\int_{\infty}^{0}\frac{(\sinh\vartheta\cosh\vartheta + \sinh^2\vartheta)\,d\vartheta}{(\cosh\vartheta - \cosh\tau_0)(\cosh\vartheta - \cosh\tau_2)(\cosh\vartheta - \cos\theta_0)}.$$

Этот интеграл вполне соответствует интегралу $\overline{PF}$ Н. Е. Жуковского [формула (156) на стр. 328]. Действительно, числители подинтегральных функций одинаковы. Что касается знаменателя нашего выражения, то поступаем так. Расположим его по нисходящим степеням $\cosh\vartheta$, подведя предварительно множитель m^2 под интеграл и полагая $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Получаем:

$$\frac{1}{m^2}\{\cosh^3\vartheta - (\cosh\tau_0 + \cosh\tau_2 + \cos\theta_1)\cosh^2\vartheta +$$
$$+ [\cosh\tau_0\cosh\tau_2 = (\cosh\tau_0 - \cosh\tau_2)\cos\theta_1]\cosh\vartheta -$$
$$- \cosh\tau_0\cosh\tau_2\cos\theta_1\}.$$

Но, согласно нашим формулам (19) и (34), это выражение можно переписать так:

$$\frac{1}{(2\sin\alpha\sin\beta)^2\sin(\alpha-\beta)}\{\sin^3(\alpha-\beta)\cosh^3\vartheta +$$
$$+ 3\sin(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)\cosh^2\vartheta +$$
$$+ [3\sin^2(\alpha+\beta) + (2\sin\alpha\sin\beta)^2]\sin(\alpha-\beta)\cosh\vartheta +$$
$$+ \sin(\alpha+\beta)[\sin^2(\alpha+\beta) + (2\sin\alpha\sin\beta)^2]\}.$$

Произведя теперь подстановку (46), т. е. переходя к величинам ν и μ Н. Е. Жуковского, находим:

$$\frac{1}{(\cos\nu + \cos\mu)\sin\nu}\{\sin^3\nu\cosh^3\vartheta + 3\sin\mu\sin^2\nu\cosh^2\vartheta +$$
$$+ [3\sin^2\mu + (\cos\nu + \cos\mu)^2]\sin\nu\cosh\vartheta +$$
$$+ \sin\mu[\sin^2\mu + (\cos\nu + \cos\mu)^2]\}.$$

Подведя же множитель $\sin\nu(\cos\nu + \cos\mu)$ в формуле (156), стр. 328 в знаменатель под знак интеграла и раскрыв скобки в выражении D, найдем то же самое.

Таким образом благодаря нашему полугеометрическому способу нахождения длины l пера мы избежали сложных вычислений, которые приходится делать, определяя l по способу Н. Е. Жуковского, а в особенности тех, которые связаны с нахождением отрезка e и расстояния h между перьями.

A MODIFICATION OF KIRCHHOFF'S METHOD OF REPRESENTING A TWO-DIMENSIONAI MOTION OF A FLUID, GIVEN A CONSTANT VELOCITY ALONG AN UNKNOWN STREAM-LINE

The modification introduced in to. Kirchhoff's method by Prof. Joukowsky is formulated by him in par. 1 of this work in the following words:

„In the proposed modification of Kirchhoff's method we afford the means to proceed to the solution of a particular problem without a preliminary conformal transformation of the regions of the corresponding contours, and thus eliminate a superfluous operation which was necessary in the original Kirchhoff's method. The problem is not restricted either by the number of points of zero velocity nor by the number of currents. Owing to this our method has enabled the solution of many new problems that did not lend themselves to the treatment by Kirchhoff's method".

Joukowsky's method is as follows:

Let the region of the problem be the region of a complex variable $z = x + iy$. Then, as is known, the characteristic stream-function will be

$$F(z) = \varphi + i\psi, \tag{1}$$

φ being the velocity potential and ψ the stream-function.

Differentiating and denoting by ζ the reciprocal of $\frac{1}{F'(z)}$, we have:

$$\zeta = \frac{1}{F'(z)} = \frac{1}{v}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1}{v}e^{i\theta},$$

where v is the velocity and θ the angle of the velocity with the x-axis. The value ζ is at the base of Kirchhoff's method.

The essential change introduced by Prof. Joukowsky consists in the first place in that he considers not ζ itself, but the value $\log(w\zeta)$, where w is constant velocity on the contour of a free current Evidently

$$\lg(w\zeta) = \lg\left(\frac{w}{v}\right) + i\theta = \vartheta + i\theta. \tag{7}$$

This logarithmic function of Prof. Joukowsky has the following very important property: on the contours of free currents the real part of the function is zero, since v is equal to w, and on rectilinear walls of vessels the imaginary part becomes constant, as the direction of velocity is unchanged.

The complex variables (1) and (7) are the fundamental variables in Joukowsky's method. There exists a relation connecting these variables in view of $\zeta = \frac{1}{F'(z)}$. This relation is defined by Joukowsky as follows. He introduces an auxiliary variable

$$u = \xi + i\eta$$

and puts

$$\left.\begin{aligned} \varphi + i\psi &= \chi(u), \\ \vartheta + i\theta &= \Phi(u). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Separating the real and the imaginary parts of the function $\chi(u)$ and making them equal to arbitrary constants, Prof Joukowsky obtains on the upper half-plane (ξ, η) two families of mutually orthogonal isothermal lines

$$\varphi = \text{const} \quad \text{and} \quad \psi = \text{const}.$$

These two families are termed by Prof. Joukowsky the g e n e r a t i n g s e t.

Similarly, for the function $\Phi(u)$ are obtained another two families of curves

$$\vartheta = \text{const} \quad \text{and} \quad \theta = \text{const},$$

termed the d i r e c t i n g s e t.

Both of the two sets are made by Prof. Joukowsky to satisfy the following fundamental conditions. In the first place, both sets are disposed, as has been mentioned, in the upper half-plane

(ξ, η). The ξ-axis must represent the boundaries of the flow considered, i. e. the contours of free currents and of walls of vessels.

Accordingly it must, firstly, consist of different branches of the curves $\psi = \text{const}$ and, secondly, of alternating portions $\vartheta = \text{const}$ and $\theta = \text{const}$. Then the segments on which simultaneously $\psi = \text{const}$ and $\theta = \text{const}$ will give the rectilinear walls of vessels, and the segments $\psi = \text{const}$ and $\vartheta = \text{const}$ — the contours of the stream-lines.

In order to satisfy the conditions imposed on the generating set (φ, ψ), Prof. Joukowsky puts

$$\chi = F(u) + \sum_k \alpha_k \lg \left(\frac{u - \gamma_k}{\beta_k} \right), \qquad (10)$$

where $F(u)$ is a whole algebraic function of the order not above the second, with real coefficients, which may involve an additional imaginary constant and which corresponds to a stream with an infinite volume of passing fluid; the values α_k, β_k, γ_k are real quantities. The points (γ_k, 0) are termed the poles of the generating set.

The number of poles corresponds to the number of currents of the problem in question. Since when a circle is described around one of the poles, the function $\chi(u)$ is increased by $i\pi\alpha_k$, the quantity of fluid carried by each current will be $\pi\alpha_k$.

As to the function $\phi(u)$, this function is written by Prof. Joukowsky, in accordance with the conditions previously stated, in the following form:

$$\phi(u) = m \int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{(u - c_1)(u - c_2)(u - c_3) \ldots \ldots}}, \qquad (11)$$

where m is unity, or i, and c_1, $c_2 \ldots c_k$ are real quantities. The points (c_k, 0) are termed the foci of the directing set: they are the boundaries of the portions $\theta = \text{const}$. and $\vartheta = \text{const}$, i. e. they correspond to the places of transition from the walls to the free currents.

The function $f(u)$ has the form:

$$f(u) = F_1(u) + \sum_k \frac{A_k}{u - e_k}, \qquad (12)$$

where $F_1(u)$ is a whole rational function; A_k and e_k are real quantities. The points $(e_k, 0)$ are termed the poles of the directing set; they are situated on focal segments and correspond to points where the direction of a wall turns through a finite angle.

When the generating and the directing sets are constructed, all currents are easily determined. In fact, by superposing both sets so as to make the corresponding points coincide, we shall be able, by following in the plane (ξ, η) the stream-line $\psi = \text{const}$, to find from the directing set the values of θ and ϑ at every point of the curve for the given value of the potential φ. Thus θ and ϑ will be obtained as functions of the potential φ; there remains but to find the shape of the contour of the current from the obtained values of θ on its free surface, and to determine the pressure exerted by the fluid on the wall from the known value of ϑ for the wall in question.

This is done by Prof. Joukowsky in the following manner.

Since

$$ds = \frac{d\varphi}{v} = \frac{1}{w} e^{\vartheta} d\varphi,$$

hence for the shape of the contour of the currents we have:

$$dx = \frac{1}{w} e^{\vartheta} \cos\theta d\varphi,$$

$$dy = \frac{1}{w} e^{\vartheta} \sin\theta d\varphi,$$

or, for $v = w$:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{w} \cos\theta d\varphi, \\ dy &= \frac{1}{w} \sin\theta d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

The length of the wall will, evidently, be;

$$s = \frac{1}{w} \int e^{\vartheta} d\varphi. \tag{16}$$

The pressure on the wall

$$P = \int p\,ds = \rho w \int \sinh \vartheta\, d\varphi, \qquad (15)$$

as

$$p = \frac{\rho}{2}(w^2 - v^2) = \rho w \sinh \vartheta.$$

By applying his method Joukowsky solves a large number of problems, enumerated in the Table of Contents. The majority of them have not been solved by anyone before. These problems are the following.

The first class of problems embraces those dealing with the efflux of a fluid from vessels. The problems belonging to this class are those of the efflux from a symmetrical and from an unsymmetrical vessel having infinite flat walls (§ 4 and 6), and from a vessel of finite width and of infinite height, or vice versa (§ 11 and 13); somewhat by itself stands the problem of the efflux from an infinite vessel through a mouthpiece (§ 16).

The second class of problems embraces those of the impact of a stream. The problems considered are those of the impact against a symmetrical, symmetrically disposed wedge, and against an unsymmetrical wedge (§ 5 and 7); the impact against a plate placed at the free surface of the stream (§ 10); the impact against an angle plate, the fluid impinging along the edge of the plate (§ 12); the impact of a stream bounded by parallel walls against a symmetrical wedge (§ 14); the impact against a rectangular vessel (§ 15); the impact against a plate obstructing the entrance to a channel with parallel walls (§ 17).

Finally, there are problems dealing with the impact of jets, viz. the impact against a symmetrical wedge (§ 8); the mutual impact of two jets (§ 9); the impact against a plate at the outlet from a channel with parallel walls (§ 18); the problem of concentrating a jet (§ 19).

The work ends with a discussion of the case of a stream passing through a lattice (§ 20). Owing to a certain inaccuracy admitted, the author believed the formulae relating to a lattice to answer the problem of the action of turbines; but an analysis of the formulae given has shown that the oncoming stream at

infinitely distant points has in the relative motion a direction at right angles to the axis of the lattice. Owing to this, in solving the problem ,of turbines the analysis given has to be modified as stated in the Appendix by Prof. S. A. Tchapligin and A. P. Minakoff.

Joukowsky's method completely solves the problem of the streaming of a fluid past rectilinear contours with a sweeping away of the currents. Almost simultaneously with Joukowsky's work there appeared that of Michell „On the Theory of Free Stream-Lines" (London, 1890), in which some of the problems solved by Joukowsky are solved by Kirchhoff's method combined with the conformal transformation of Christoffel-Schwartz. Nevertheless with Prof. Joukowsky's method rests the advantage of greater convenience.

Joukowsky concludes his work by the following words:

„A certain modification of the function $\phi(u)$ makes it possible also to solve the problems of the impact of an infinite stream against bodies bounded by curvilinear contours, and of the efflux from vessels with convilinear walls. We have solved some of such problems but did not succeed in obtaning contours of simple form. Thus, we were unable, notwithstanding prolonged investigations, to solve the problem of impact of an infinite stream against a circular cylinder. Perhaps this problem might be solved as the limiting case of the problem of the impact of a stream against a polyhedral contour, the salient angles giving, in passing to the limit, a finite value for the velocity".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ КАКОМ-НИБУДЬ УСЛОВИИ, ДАННОМ НА ЛИНИИ ТОКА

(1891 г.)

§ 1. В нашей работе, доложенной на VIII съезде русских естествоиспытателей и врачей [1], мы показали, каким образом понятие об образующих и направляющих сетях может лечь в основание решения задач на определение течений жидкости при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока [2]. В этой заметке мы имеем в виду распространить упомянутый метод исследования на те случаи, в которых на граничной линии тока должна быть удовлетворена какая-нибудь зависимость между скоростью v и углом θ ее наклонения к оси Ox.

§ 2. Во всех исследованиях о свободных струях предполагается, что на жидкость не действуют никакие силы; теперь же мы будем рассматривать жидкость под действием тяжести. Пусть направление оси Ox совпадает с направлением силы тяжести. Скорость жидкости на контуре струи выразится формулой:

$$v^2 = 2gx + \text{const}, \qquad (1)$$

---

[1] „Видоизменение метода Кирхгоффа для определения течения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока". Математический сборник, т. XV, 1890.

[2] Почти одновременно с нашим докладом был сделан в Лондонском королевском обществе доклад сочинения Michell „On the theory of free stream lines" (Philosophical transactions of the Royal Society of London, v. 181, 1890), в котором автор соединяет метод Кирхгоффа с конформными преобразованиями Шварца и Христофеля и решает, таким образом, некоторые из решенных нами задач. Просмотрев сочинение Michell, мы остаемся при мнении, что способ образующих и направляющих сетей является самым удобным для решения рассматриваемых задач.

где g — напряжение тяжести. Берем диференциал от обеих частей этой формулы, переходя по контуру струи в направлении течения жидкости на элемент дуги ds. Получим:

$$v\,dv = g\,dx = gd\cos\theta = \frac{g\cos\theta d\varphi}{v},$$

где φ — потенциал скоростей. Из этой формулы следует, что

$$v^3 = 3g\int\cos\theta\,d\varphi,$$

или

$$\vartheta = \lg\left(\frac{w}{v}\right) = -\frac{1}{3}\lg\left(\frac{3g}{w^3}\int\cos\theta d\varphi\right), \qquad (2)$$

где w есть некоторая постоянная скорость.

Назовем через ψ количество протекающей жидкости и рассмотрим две мнимые величины $\varphi + \psi i$ и $\vartheta + \theta i$, по которым составляются образующая и направляющая сети[1]. Полагаем, что обе эти мнимые величины суть функции переменного $u = \xi + \eta i$, представляющего точки некоторой полуплоскости (ξ придаем всякие действительные значения, а η — только положительные), и пишем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi + \psi i &= \chi(u),\\ \vartheta + \theta i &= \Phi(u) + i\Phi_1(u).\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

При этом функцию $\chi(u)$ выбираем так, чтобы все ее точки бесконечностей лежали на оси ξ или в бесконечности и чтобы вся ось ξ представлялась линиями $\psi = \text{const}$. Функции $\Phi(u)$ и $\Phi_1(u)$ выбираем так, чтобы они имели только логарифмические точки бесконечности, лежащие на оси ξ или в бесконечности, и чтобы все точки оси ξ удовлетворяли или условию $\theta = \text{const}$, или условию (2).

Первое условие будет удовлетворено на тех частях оси ξ, на которых функция $\Phi(u)$ действительна, а функция $\Phi_1(u)$ есть чисто мнимая величина. Положим, что на остальных отрезках оси ξ функции $\Phi(u)$ и $\Phi_1(u)$ будут действительны и постараемся выбрать их так, чтобы удовлетворить второму условию.

---

[1] Видоизменение метода Кирхгоффа, § 3.

Сделаем подстановку:

$$\varphi_1(u) = \arccos[f(u)]$$

и определим $\varphi(u)$ с помощью $f(u)$ и $\chi(u)$ по уравнению (2). Получим:

$$\varphi(u) = -\frac{1}{3}\lg\left[\frac{3g}{w^3}\int f(u)\chi'(u)\,du\right],$$

так что направляющая сеть искомого течения будет дана формулой:

$$\vartheta + \theta i = -\frac{1}{3}\lg\left[\frac{3g}{w^3}\int f(u)\chi'(u)\,du\right] + i\arccos[f(u)]. \quad (4)$$

Если бы на некоторых отрезках оси ξ функция $\varphi_1(u)$ была бы действительна, а функция $\varphi(u)$ состояла из действительной части и мнимой части $\pm\pi i$, то и тогда уравнение (2) было бы удовлетворено, потому что, присоединяя $\pm\pi$ к углу θ в формуле (2), мы этим сделаем величину, стоящую под знаком логарифма, из отрицательной положительной.

Весь успех решения будет теперь зависеть от удачного выбора функций $\chi(u)$ и $f(u)$.

§ 3. Положим, что

$$f(u) = \frac{u}{c}, \quad \chi(u) = \frac{w^3}{2g}\frac{u^2}{c^2}. \quad (5)$$

По формуле (4) найдем:

$$\vartheta + \theta i = -\lg\left(\frac{u}{c}\right) + i\arccos\left(\frac{u}{c}\right). \quad (6)$$

Из второй формулы (5) видим, что образующая сеть в сделанном предположении состоит из равносторонних гипербол, данных уравнениями:

$$\varphi = \frac{w^3}{2gc^2}(\xi^2 - \eta^2), \quad \psi = \frac{w^3}{gc^2}\xi\eta. \quad (7)$$

Линия тока $\psi = 0$ представляется в этой сети верхней половиной оси ординат и правой и левой половинами оси абсцисс. Передвижения по гиперболам $\psi = \text{const}$ в направле-

нии убывающего η соответствуют изменению φ от $-\infty$ до $+\infty$.

Параметры ϑ и θ направляющей сети представятся у нас разностями параметров некоторой эллиптической и полярной сети, так как, положив

$$\xi = ce^{\vartheta_1}\cos\theta_1, \quad \eta = ce^{\vartheta_1}\sin\theta_1, \tag{8}$$

$$\xi = c\cdot\cos\theta_2\cosh\vartheta_2, \quad \eta = c\cdot\sin\theta_2\sinh\vartheta_2, \tag{9}$$

найдем на основании формулы (6), что

$$\left.\begin{aligned}\theta &= -\vartheta_1 + \theta_2,\\ \vartheta &= -\vartheta_1 + \vartheta_2.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

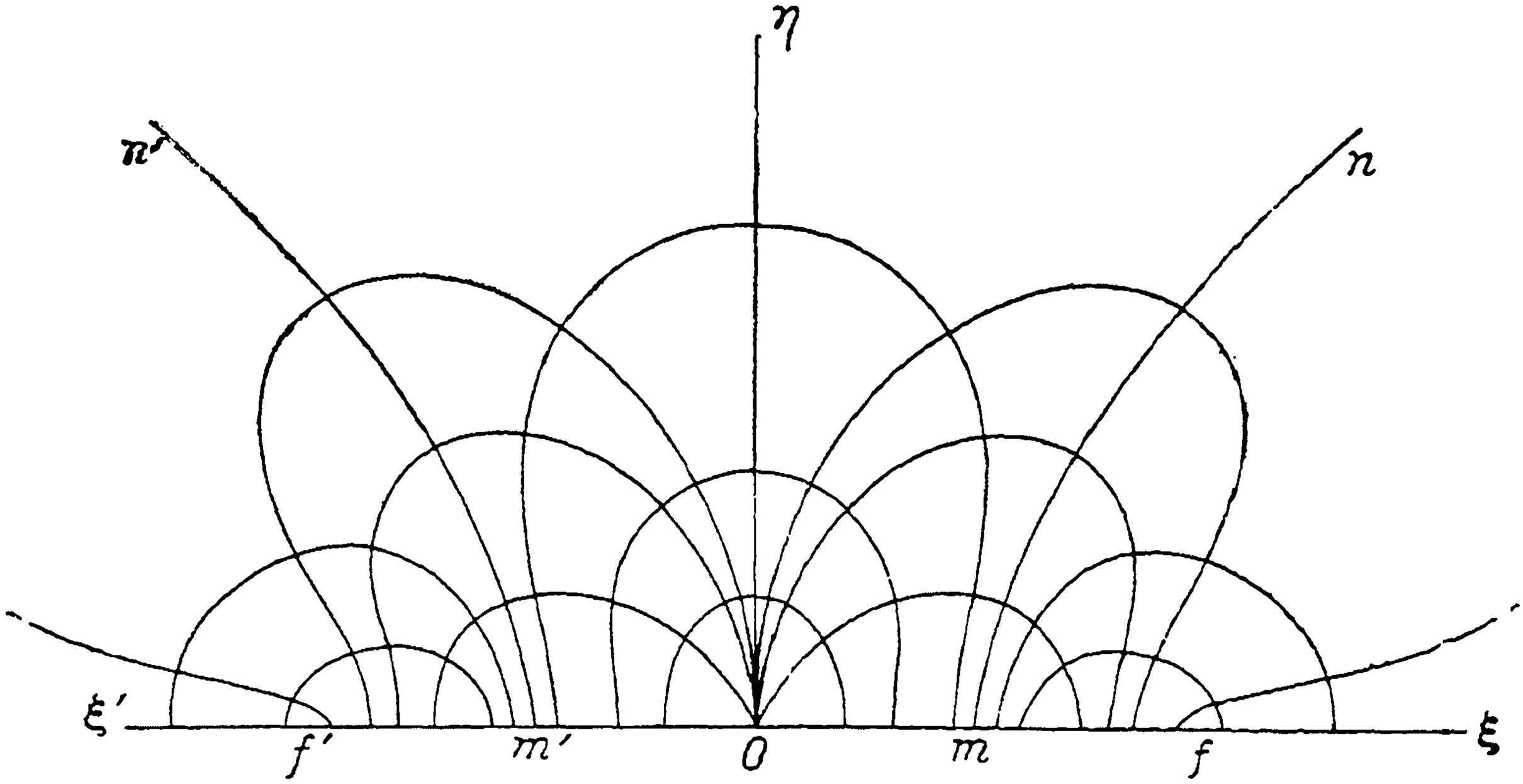
Сеть, выраженная этими формулами, представлена на фиг. 1. Она имеет полюс O в начале координат и два фокуса f и f'[1]) на расстояниях c от этого начала. Все линии $\theta = \text{const}$ выходят из полюса O и пересекают еще раз ось абсцисс под косым углом. При постоянном, равном нулю, линия этого семейства удаляется в бесконечность по оси $O\eta$ и, разделившись в бесконечности на две ветви, возвращается к фокусам f и f' по отрезкам оси абсцисс $\xi f'$ и $\xi' f'$. При изменении постоянного от 0 до $\frac{\pi}{2}$ мы получим линии $\theta = \text{const}$, идущие направо и пересекающие ось абсцисс на отрезке Of, а при изменении его от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ — линии, идущие налево и пересекающие ось абсцисс на отрезке Of'.

Семейство линий $\vartheta = \text{const}$ при $\text{const} = \lg 2$ дает две бесконечные линии mn и $m'n'$, разделяющиеся в бесконечности на две части и охватывающие всю рассматриваемую область. При изменении постоянного от $\lg 2$ до бесконечности линии $\vartheta = \text{const}$ охватывают полюс O и уменьшаются до совпадения с ним; при изменении же постоянного от $\lg 2$ до 0 линии $\vartheta = \text{const}$ пересекают ось абсцисс вправо и влево от фокуса f и вправо и влево от f' и приближаются к линиям, прикасающимся к оси абсцисс в точках f и f' и лежащим вне рассматриваемой области.

---

[1]) Мы называем так точки, в которых линия тока переходит со стенки сосуда в контур струи.

Наложим теперь на построенную направляющую сеть вышеупомянутую гиперболическую образующую сеть так, чтобы оси координат совпали. Так как в образующей сети ψ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, то мы имеем дело с бесконечным потоком жидкости. При этом вследствие того, что во всех точках бесконечности $\vartheta = \lg 2$ и $\theta = 0$, поток будет течь по



Фиг. 1.

направлению оси Ox со скоростью $\frac{w}{2}$. Пойдем на наших сетях по линии тока $\psi = 0$, изменяя φ от $-\infty$ до $+\infty$. На оси $O\eta$ будем иметь: $\theta = 0$ и ϑ изменяется от $\lg 2$ до бесконечности. В точке O угол θ сразу изменяется из 0 в $\frac{\pi}{2}$ или в $-\frac{\pi}{2}$, смотря по тому, совершаем ли мы переход на отрезок оси абсцисс Of или Of', а $\vartheta = \infty$ (т. е. скорость $v = 0$). На отрезках Of и Of' удовлетворяется условие (2), причем угол θ изменяется от $\pm\frac{\pi}{2}$ до 0 и ϑ изменяется от ∞ до 0. На $f\xi$ и $f'\xi'$ угол $\theta = 0$ и ϑ изменяется от 0 до $\lg 2$.

Это соответствует в действительном течении потока жидкости (фиг. 2) линии тока ηO, которая в критической точке O разделяется на две половины и образует контуры струй жидкости Of и Of', переходящие в точках f и f' на неподвижные стенки, параллельные оси Ox. Такой случай мог бы иметь

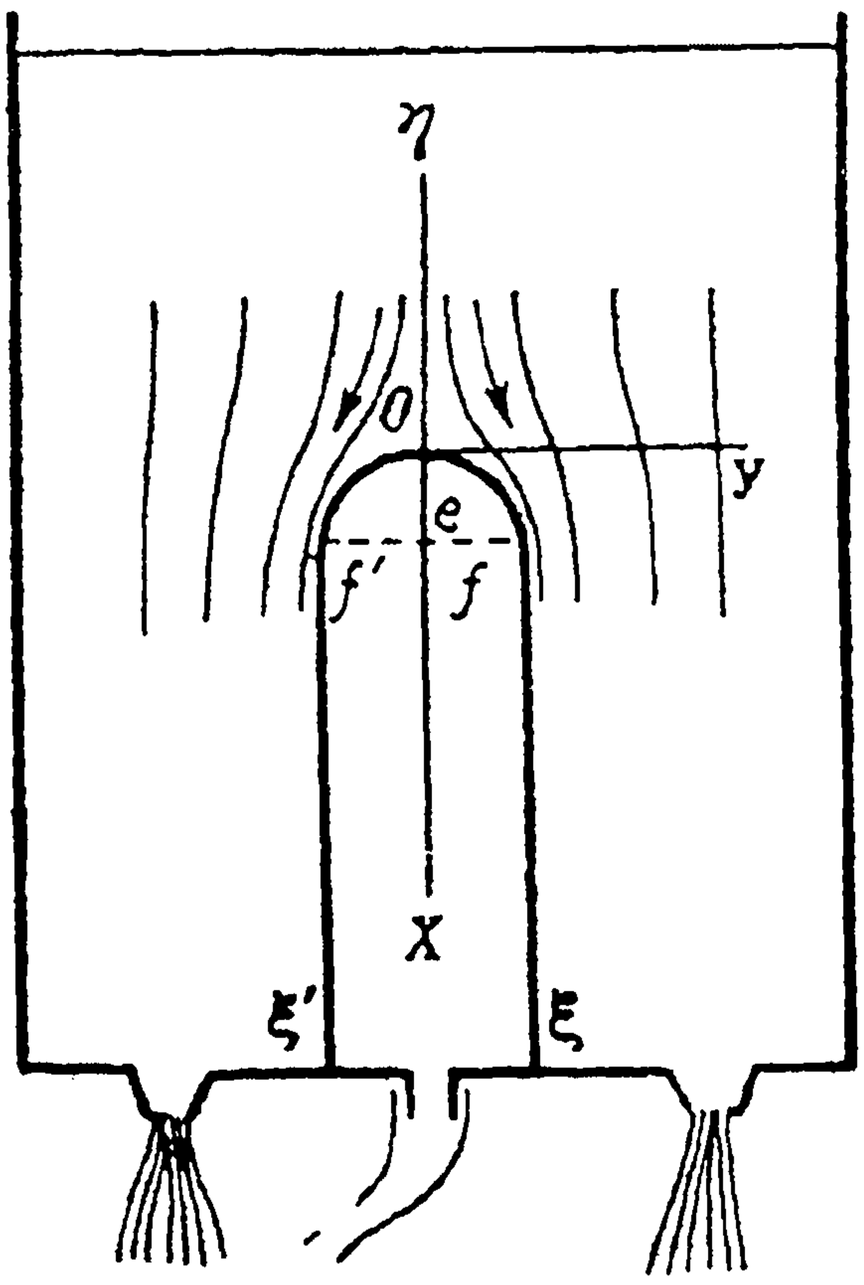
место, если бы мы в нисходящем потоке тяжелой жидкости устроили вертикальный канал $\xi ff'\xi'$ и соединили его с резервуаром воздуха под некоторым определенным давлением. Мы будем иметь результаты, близкие к рассматриваемому идеальному случаю беспредельного потока, если устроим прибор, изображенный на фиг. 2, причем размеры сосуда возьмем значительно больше размеров канала.

Определим уравнение контура Of. На основании формул (7), (8), (9), (10) пишем[1] для отрезка Of:

$$\varphi = \frac{w^3}{2gc^2}\xi^2, \quad \vartheta = \lg\frac{c}{\xi}; \quad \cos\theta = \frac{\xi}{c}. \tag{11}$$

С другой стороны, легко усмотреть, что для всякой линии тока имеют место диференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} dx = ds\cos\theta = \frac{d\varphi}{v}\cos\theta = \frac{e^{\vartheta}}{w}\cos\theta\, d\varphi, \\ dy = \frac{e^{\vartheta}}{w}\sin\theta\, d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$



Фиг. 2.

Выражая с помощью формулы (11) φ и ϑ через θ и подставляя в формулу (12), получим:

$$dx = -\frac{w^2}{g}\cos\theta\sin\theta\, d\theta,$$

$$dy = -\frac{w^2}{g}\sin^2\theta\, d\theta.$$

Интегрируя и определяя произвольные постоянные под условием $x = 0,\ y = 0$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{w^2}{2g}\cos^2\theta, \\ y &= \frac{w^2}{2g}\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

[1] Полагаем: $\eta = 0,\ \theta_1 = 0,\ \vartheta_2 = 0$. *Прим. ред.*

Эти формулы показывают, что на фиг. 2 отрезки

$$eO = \frac{w^2}{2g}, \quad ef = \frac{w^2}{2g}\,\frac{\pi}{2},$$

и что уравнение контура Of есть:

$$y = \frac{w^2}{2g}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2gx}{w^2}} + \sqrt{\frac{2gx}{w^2}}\sqrt{1-\frac{2gx}{w^2}}\right).$$

§ 4. Перейдем теперь к предположению, что на контуре струи давление жидкости и давление воздуха взаимно уравновешиваются нормальной силой, происходящей от капиллярного натяжения поверхности жидкости.

Если назовем через p давление внутри жидкости и через p_1 давление воздуха, прилегающего к контуру струи, то будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} p &= \text{const} - \frac{v^2\rho}{2}, \\ p_1 &= p + \frac{\mu}{R}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где ρ—плотность жидкости, μ—коэфициент волосности, а R—радиус кривизны контура струи, считаемый положительным при направлении от жидкой массы. Из двух написанных формул получаем:

$$\frac{1}{R} = a + bv^2, \tag{15}$$

где

$$a = \frac{p_1 - \text{const}}{\mu}, \quad b = \frac{\rho}{2\mu}. \tag{16}$$

Но

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{d\theta}{ds} = \pm\frac{v\,d\theta}{d\varphi},$$

поэтому

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \pm\left(\frac{a}{v} + bv\right),$$

или

$$\theta = \pm\int\left(\frac{a}{v} + bv\right)d\varphi. \tag{17}$$

В этой формуле при положительном R надо брать знак (+), если по направлению течения жидкости угол θ возрастает, и знак (—), если в этом направлении угол θ убывает; при отрицательном R надо поступать наоборот. Приняв, что в рассматриваемых задачах образующая и направляющая сети выражаются теми же формулами (3), как в вышерассмотренном случае, наложим на функции $\varphi(u)$ и $\varphi_1(u)$ прежние условия; только потребуем, чтобы на отрезке оси ξ, соответствующем действительным значениям этих функций, было удовлетворено не уравнение (2), а уравнение (17). Легко увидеть, что для этого надо положить:

$$\varphi_1(u) = \pm \int \left(\frac{a}{w} e^{\beta(u)} + bwe^{-\beta(u)} \right) \chi'(u)\, du. \qquad (18)$$

Вследствие этого направляющая сеть искомого течения будет дана формулой:

$$\vartheta + \theta i = \varphi(u) \pm i \int \left(\frac{a}{w} e^{\beta(u)} + bwe^{-\beta(u)} \right) \chi'(u)\, du. \qquad (19)$$

§ 5. Положим, что

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2} \lg \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)$$

и напишем по формуле (18), принимая R положительным и b возрастающим, что

$$\varphi_1(u) = -\frac{bw}{c} \int \frac{u^2 - \alpha^2}{\sqrt{c^2 - u^2}} \chi'(u)\, du,$$

где

$$\alpha^2 = c^2 \left(1 + \frac{a}{bw^2} \right). \qquad (20)$$

Потом возьмем для $\chi'(u)$ такое значение:

$$\chi'(u) = \frac{c}{bw(u^2 - \alpha^2)},$$

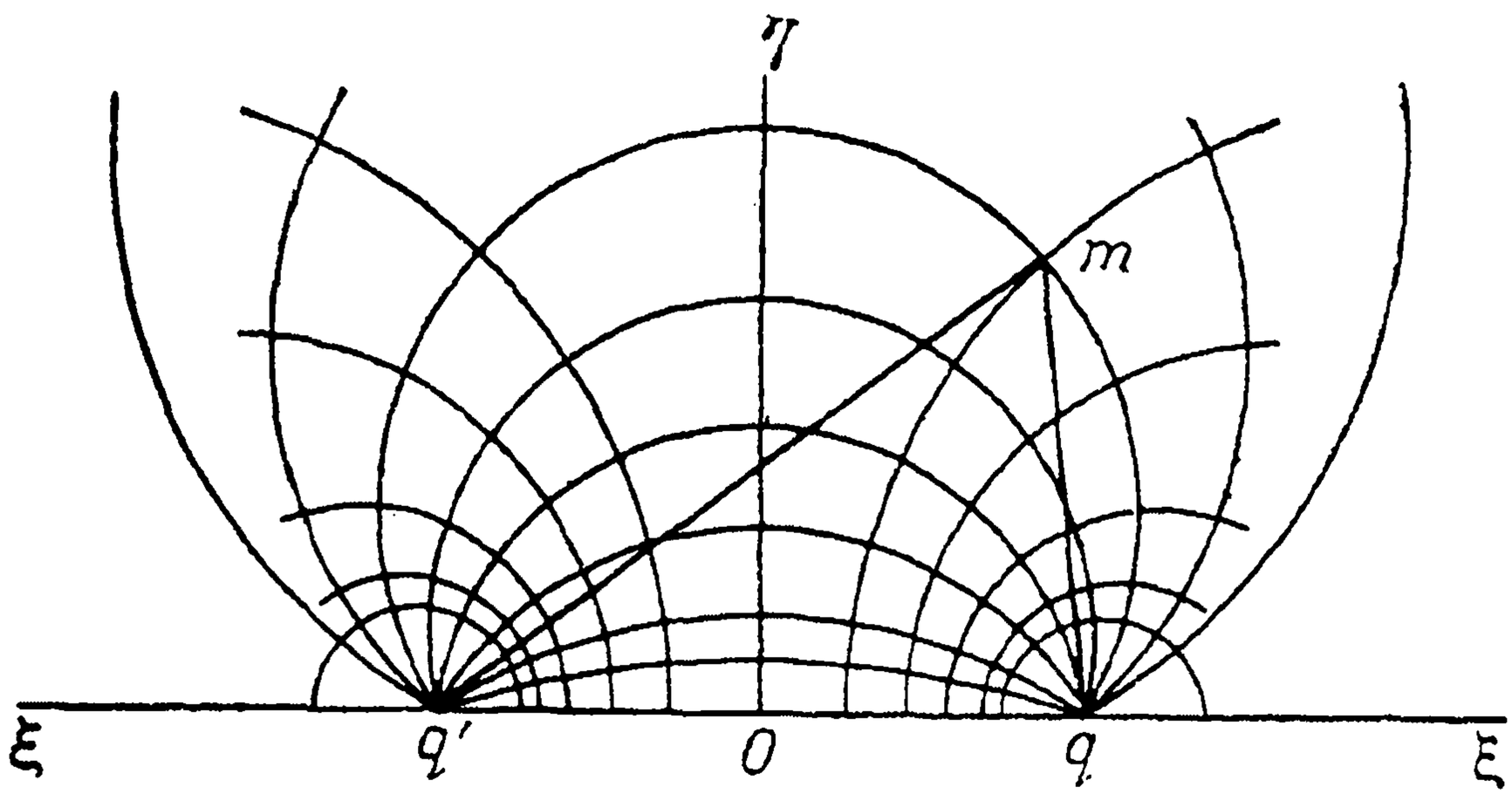
откуда следует, что

$$\chi(u) = \frac{c}{2b\alpha w} \lg \frac{u - \alpha}{u + \alpha}. \qquad (21)$$

Направляющая сеть рассматриваемой задачи будет при сделанных положениях дана формулой (19):

$$\vartheta + \theta i = -\frac{1}{2}\lg\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) + i\arccos\left(\frac{u}{c}\right). \qquad (22)$$

Построим теперь найденные образующую и направляющую сети. Из формулы (21) усматриваем, что образующая сеть представляется системой взаимно ортогональных окружностей,



Фиг. 3.

из которых одни (фиг. 3) проходят через полюсы q и q', лежащие на оси ξ на расстояниях α от начала координат, и имеют центр на оси η, другие же имеют центр на оси ξ, а точки q и q' относительно них взаимно полярны. Для какой-нибудь точки m нашей полуплоскости параметр ψ измеряется произведением величины

$$\frac{c}{2b\alpha w}$$

на угол qmq', а величина параметра φ измеряется произведением этой величины на логарифм отношения радиусов mq и mq'. При изменении ψ от 0 до

$$\frac{c\pi}{2ba w}$$

линии $\psi = \text{const}$ изменяются от отрезков оси абсцисс $q\xi$ и $q'\xi'$ до отрезка оси абсцисс qq'; при изменении же φ от $-\infty$ до $+\infty$ линии $\varphi = \text{const}$ изменяются от бесконечно малого круга,

охватывающего полюс q, до бесконечно малого круга, охватывающего полюс q'.

Параметры направляющей сети данной формулы (22) представляют нам сумму параметров эллиптической сети и сети

$$\vartheta_1 + \theta_1 i = -\frac{1}{2}\lg\frac{u^2 - c^2}{c^2} + \frac{1}{2}\pi i.$$

Эта последняя сеть дана на фиг. 19 нашего сочинения „Видоизменения метода Кирхгоффа...“ и состоит из овалов Кассини и гипербол, проходящих через полюсы на расстояниях c от начала координат. Мы получаем, таким образом:

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \theta_1 + \theta_2,\\ \vartheta &= \vartheta_1 + \vartheta_2,\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

где θ_2 и ϑ_2 определяются по формуле (9), а θ_1 [1] и ϑ_1 — по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi - c} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi + c}\right),\\ \vartheta_1 &= -\frac{1}{4}\lg\left(\frac{[(\xi - c)^2 + \eta^2]\,[(\xi + c)^2 + \eta^2)]}{c^4}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

[1]) Кривые $\theta_1 = \text{const}$ представляют собой гиперболы, проходящие через фокусы f и f'. Угол θ_1 есть [см. формулу (24)] умноженный на $\frac{1}{2}$ угол, образуемый касательной к такой гиперболе в точке f с прямой ff' (для гипербол, проходящих через f', множитель будет $-\frac{1}{2}$, а не $+\frac{1}{2}$).

Поэтому

на отрезке $f\xi$ угол $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$,

на отрезке fOf' угол $\theta_1 = 0$.

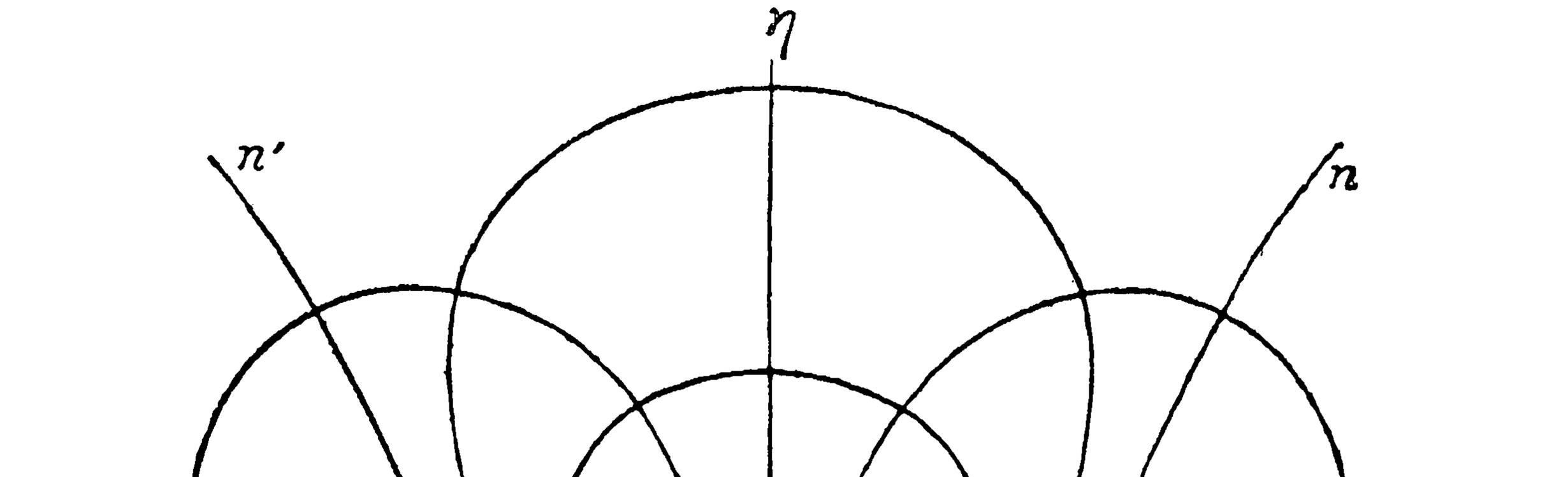
Далее, согласно формуле (9), на отрезке $f\xi$ угол $\theta_2 = 0$ (так как $\eta = 0$) и $\vartheta_2 = \operatorname{arc\,cosh}\frac{\xi}{c}$; согласно (24), $\vartheta_1 = \lg\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - c^2}}$.

Итак, на отрезке $f\xi$:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \operatorname{arc\,cosh}\frac{\xi}{c} + \lg\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - c^2}} = \lg\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - c^2}}\right).$$

Результат сложения дает нам сеть, представленную на фиг. 4. Точки f и f', отстоящие от начала координат на расстоянии c, служат для этой сети полюсами и фокусами. Линии $\theta = \text{const}$ выходят из полюса f или f' и пересекают еще раз ось абсцисс на отрезке ff' под косым углом. При



Фиг. 4.

изменении постоянного от 0 до $\frac{\pi}{2}$ эти линии выходят из фокуса f и изменяются от бесконечно малой линии до линии, идущей по отрезку оси абсцисс $f\xi$ в бесконечность и возвращающейся по оси ординат ηO; при изменении же постоянного от $\frac{\pi}{2}$ до π мы получаем линии, выходящие от полюса f' и

На отрезке fOf' угол $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \arccos\frac{\xi}{c}$; согласно формуле (9) при $\eta = 0$, $\vartheta_2 = 0$; согласно формуле (24), $\vartheta_1 = -\frac{1}{2}\lg\frac{c^2-\xi^2}{c^2}$.

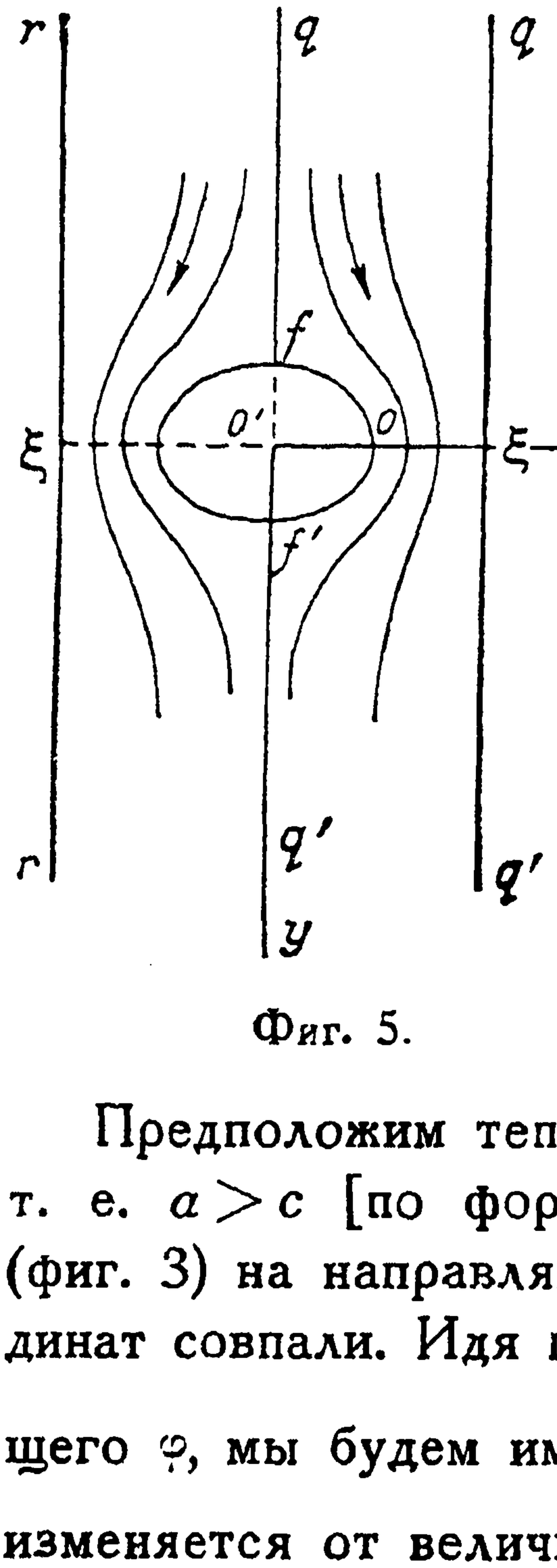
Итак, на отрезке fOf':

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 = \arccos\frac{\xi}{c},$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \vartheta_1 = \lg\frac{c}{\sqrt{c^2-\xi^2}}.$$

Прим. ред.

изменяющиеся от линии, идущей по отрезку $f\xi'$ оси абсцисс в бесконечность и возвращающейся по оси ординат $O\eta$ до некоторой бесконечно малой линии. Линии семейства $\vartheta = \text{const}$ при $\text{const} = \lg 2$ дают две бесконечные линии mn и $m'n'$, разделяющиеся в бесконечности на две части и охватывающие всю рассматриваемую область. При изменении постоянного от $\lg 2$ до 0 линии рассматриваемого семейства, будучи заключены между mn и $m'n'$, изменяются до линии, прикасающейся к оси абсцисс в точке O и лежащей вне рассматриваемой области; при изменении же постоянного от $\lg 2$ до бесконечности эти линии охватывают полюсы f и f_1 и убывают до бесконечно малых размеров. Из сказанного следует, что во всех точках бесконечности



Фиг. 5.

$$\theta = \frac{\pi}{2}\vartheta = \lg 2.$$

Предположим теперь, что a есть величина положительная, т. е. $a > c$ [по формуле (20)], и наложим образующую сеть (фиг. 3) на направляющую сеть (фиг. 4) так, чтобы оси координат совпали. Идя по линии $\psi = 0$ в направлении возрастающего φ, мы будем иметь: на отрезке $q\xi$ угол θ равен $\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от величины

$$\vartheta_0 = \lg\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\right)$$

до $\lg 2$; на отрезке $\xi' q'$ угол θ равен $\frac{\pi}{2}$, а ϑ изменяется от $\lg 2$ до ϑ_0. Это соответствует фиг. 5 в действительном течении жидкости прямой линии тока $q\xi q'$, идущей параллельно y. Пойдем теперь по линии

$$\psi = \frac{c\pi}{2b\alpha w} \tag{25}$$

в направлении возрастающего φ. Будем иметь на отрезке оси абсцисс qf угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞; в точке f угол θ сразу изменяется в нуль и $\vartheta = \infty$; на отрезке оси абсцисс ff' удовлетворено условие (17), угол θ изменяется от 0 до π, а ϑ от бесконечности убывает до 0 (в точке O) и потом опять возрастает до бесконечности; в точке f' угол θ сразу изменяется на $\frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = \infty$; наконец, на отрезке $f'q'$ угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от бесконечности до ϑ_0. Это соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока qf контуру струи fOf', на котором действует волосное натяжение, и прямой линии тока $f'q'$. Рассматриваемое нами течение жидкости будет заключено между двумя найденными контурами [1]. При этом наше предположение о том, что R положительно и θ возрастает, будет удовлетворено. Если присоединим к найденному течению симметричное течение с другой стороны оси y, то получим решение задачи о форме воздушного пузыря, помещенного внутри жидкости, текущей в канале $qq'rr'$; если же прибавим ко всей системе скорость

$$v_0 = w\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\right) \tag{26}$$

в направлении, противоположном оси $O'y$, то получим решение задачи о движении воздушного пузыря внутри жидкости, покоящейся в канале.

Составим уравнение контура fOf'. По формулам (23), (9), (24) и (21) имеем [2] на отрезке Of:

$$\left.\begin{aligned} &\theta = \theta_2,\ \xi = c\cdot\cos\theta,\ \vartheta = -\frac{1}{2}\lg\left(1 - \frac{\xi^2}{c^2}\right) = -\lg\sin\theta, \\ &\varphi = \frac{c}{2b\alpha w}\lg\frac{\alpha - \xi}{\alpha + \xi} = \frac{c}{2b\alpha w}\lg\frac{\alpha - c\cdot\cos\theta}{\alpha + c\cdot\cos\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

---

[1] Видоизменение метода Кирхгоффа, § 2. См. о направлении, в котором ψ возрастает.

[2] См. предыдущее примечание. *Прим. ред.*

Подставляем величины, определенные из этих формул, в уравнение (12):

$$dx = \frac{c^2}{bw^2} \frac{\cos\theta d\theta}{\alpha^2 - c^2\cos^2\theta},$$

$$dy = \frac{c^2}{bw^2} \frac{\sin\theta d\theta}{\alpha^2 - c^2\cos^2\theta}.$$

Интегрируем и определяем произвольные постоянные под условием, что при $\theta = 0$ имеем $x = 0$, а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем $y = 0$. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{bw^2} \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{c\cdot\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}, \\ y &= \frac{1}{bw^2} \frac{c}{2\alpha} \lg \frac{\alpha - c\cdot\cos\theta}{\alpha + c\cdot\cos\theta}, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

где для получения точек контура fOf' надо приписывать θ значения от 0 до π. Мы видим, что полуоси пузыря будут иметь длину:

$$OO' = \frac{1}{bw^2} \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} \operatorname{arc\ tg} \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}},$$

$$O'f = \frac{1}{bw^2} \frac{c}{2\alpha} \lg \frac{\alpha + c}{\alpha - c}.$$

Легко увидеть, что $OO' > O'f'$. Это следует из очевидного неравенства:

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 - c^2)(\alpha^2 - x^2)}} > \int_0^c \frac{dx}{\alpha^2 - x^2},$$

которое по выполнении интеграции дает:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} \operatorname{arc\,sin} \frac{c}{\alpha} > \frac{1}{2\alpha} \lg \frac{\alpha + c}{\alpha - c}.$$

Что касается ширины канала, то она найдется из формул (25) и (26) через разделение количества протекающей жидкости на скорость в бесконечно удаленных частях канала:

$$\xi\xi = \frac{2\psi}{v_0} = \frac{\pi}{bw^2} \frac{c}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\right). \qquad (29)$$

Задавшись отношением $\frac{c}{\alpha}$ и величиной w, мы определим по формулам (29) и (26) ширину канала и скорость v_0, а по формуле (28) найдем вид воздушного пузыря.

§ 6. Мы ограничиваемся в этой заметке двумя приведенными примерами, но думаем, что формулы (4) и (19) при надлежащем выборе входящих в них произвольных функций приведут еще к решению многих других интересных задач о движении жидкости под действием силы тяжести и под влиянием волосных натяжений на свободном контуре струи.

Эта статья была напечатана в первый раз в „Журнале Русского физико-химического общества“, т. XXII, 1891 г., и второй раз в „Трудах Центрального аэрогидродинамического института“, вып. 41, 1930 г.

Прим. ред.

DETERMINATION OF THE MOTION OF A FLUID FOR ANY CONDITION GIVEN ON A STREAM-LINE

This note by Prof. Joukovsky is an extension of the method of the directing and generating sets to the ease of motion of a fluid when the velocity along the stream-line on the boundary does not remain constant, as has been assumed in Prof. Joukovsky's preceding work, but is dependent on its direction. Prof. Joukovsky considers the following two cases:

1. Motion of a heavy unbounded fluid when in the downcoming flow there is arranged a vertical channel in which a certain constant pressure is maintained (e. g. that of air), defined by the condition that the fluid cannot enter the channel and the air cannot escape from it. There is determined the shape of the contour of the current (equations 13) along which the fluid approaches the vertical walls of the channel, and the dimensions of the channel which for the conditions imposed are proportional to the square of velocity.

2. Motion of a fluid when within the channel there is a region occupied by a stationary bubble of air, on the surface of which are acting capillary tensile forces. This last problem gives also the answer to the problem of the form of the bubble of air rising in a channel filled with a fluid at rest.

К ВОПРОСУ О РАЗРЕЗАНИИ ВИХРЕВЫХ ШНУРОВ

§ 1. Рядом с доказательством невозможности образования в жидкости без трения новых вихрей высказывается обыкновенно положение о невозможности разделения вихревого шнура на части — о невозможности его разрезания. Это последнее положение, насколько мне известно, не было обстоятельно теоретически исследовано и опирается более на опыты Томсона с дымными вихревыми кольцами, которые уклоняются от приближаемого к ним ножа.

Но следует заметить, что при таких опытах все-таки является возможность получить в продолжение некоторого времени вихревое кольцо разрезанным на две половины. Стоит только пустить его так, чтобы острие ножа направлялось по диаметру кольца; тогда, набежав на нож, кольцо разделится на два полукольца, опирающиеся своими концами на бока ножа. Эти полукольца, проскользнув по ножу, воссоединятся опять в вихревое кольцо (такой опыт мы много раз демонстрировали).

Резкое уклонение вихревого кольца от подносимого ножа собственно замечается в том случае, когда мы желаем разрезать кольцо, поднося нож сбоку.

Было бы весьма интересно исследовать этот вопрос теоретически, т. е. решить задачу о движении вихревого кольца вблизи острия клина, погруженного в жидкую массу, но задача эта очень трудная. Ввиду трудности задачи в трех измерениях мы предлагаем здесь решение аналогичной задачи в двух измерениях, которую ставим так: исследовать движение прямолинейного вихревого шнура вблизи острия погруженного в жидкость клина, причем острие клина направлено параллельно оси вихревого шнура.

§ 2. Выведем сначала некоторые общие формулы о движении центра вихревой площадки (нормального сечения шнура). Предположим, что течение несжимаемой жидкости в двух измерениях характеризуется формулами:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где u и v — проекции скорости жидкости на некоторые прямоугольные оси координат x, y, а

$$\psi = \text{const}$$

дает уравнения линий тока. Во всех точках жидкости вне вихревых площадок функция ψ удовлетворяет условию

$$\Delta_2 \psi = 0,$$

а на вихревых площадках дает:

$$\Delta_2 \psi = 2\omega,$$

где ω — угловая скорость частицы жидкости, считаемая положительной при вращении по солнцу.

Выделим мысленно одну вихревую площадку и разобьем функцию ψ на две части, из которых часть ψ_1 зависит от граничных условий и от влияния всех вихревых площадок, кроме первой, а остающаяся часть зависит только от влияния первой вихревой площадки. Тогда

$$\psi = \psi_1 + \frac{1}{\pi} \int\int \omega \lg R d\sigma, \qquad (2)$$

где R есть расстояние рассматриваемой точки жидкости от элемента площади $d\sigma$ выделенной площадки, а двойная интеграция распространяется на всю площадь этой площадки.

Составим, как это делает Lamb [1], выражения компонентов скорости центра тяжести рассматриваемой площадки в пред-

[1] Lamb, A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids, § 138.

положении, что по ней распределена материя с плотностью ω. Называя через x_1, y_1 координаты упомянутого центра тяжести, найдем по формулам (1) и (2):

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{k}\left\{ \int\int \frac{d\psi_1}{dy}\,\omega d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\int\int\int \frac{\omega\omega'}{R^2}(y-y')\,d\sigma\,d\sigma' \right\},$$

$$-\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{k}\left\{ \int\int \frac{d\psi_1}{dx}\,\omega d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\int\int\int \frac{\omega\omega'}{R^2}(x-x')\,d\sigma\,d\sigma' \right\},$$

где

$$k = \int\int \omega d\sigma$$

представляет напряжение рассматриваемого вихревого шнура или половину циркуляции скорости по охватывающему его контуру. Четырехкратный интеграл в первой формуле берется два раза по площади рассматриваемой площадки, и так как в нем всякому элементу

$$\frac{\omega\omega'\,d\sigma\,d\sigma'}{R}(y-y')$$

соответствует другой элемент

$$\frac{\omega\omega'\,d\sigma\,d\sigma'}{R}(y'-y)$$

с обратным знаком, то весь этот четырехкратный интеграл обращается в нуль. Также обращается в нуль и четырехкратный интеграл второй формулы.

Мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{k}\int\int \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,\omega\,d\sigma, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{k}\int\int \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,\omega\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Переходим к предположению, что площадь нормального сечения вихревого шнура исчезающе мала, а напряжение вихря k конечно.

Так как функция ψ_1 зависит только от граничных условий и влияния вихревых площадок, кроме рассматриваемой,

то она вместе со своими производными остается непрерывной и конечной вблизи первой площадки и при вступлении внутрь ее. Мы можем в формуле (3) вынести производные ψ_1 за знаки интегралов и приписать им значения, соответствующие точке, лежащей вне площадки на расстоянии, весьма близком от ее центра. Получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}. \tag{4}$$

Определим ψ_1 по формуле (2), предполагая, что размеры площадки сравнительно с расстоянием от центра площадки точки, для которой определяется ψ_1, суть малые величины высшего порядка.

В этом предположении R можно считать за расстояние центра тяжести площадки от рассматриваемой точки и вынести $\lg R$ в формуле (2) за знак интеграла:

$$\psi_1 = \psi - \frac{k}{\pi} \lg R. \tag{5}$$

Подставляя в уравнения (4), найдем для скоростей центра тяжести площадки, которые мы будем звать *центром вихря*, формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi - \frac{k}{\pi} \lg R\right), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi - \frac{k}{\pi} \lg R\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь надо во вторых частях сначала взять производные по y и x, а потом положить $x = x_1$, $y = y_1$. Предположим теперь, что рассматриваемое течение жидкости в двух измерениях, содержащее бесконечно малые вихревые площадки, из которых одна имеет координаты x_1, y_1, характеризуется функцией мнимого переменного $z = x + yi$, которую мы разбиваем на действительную и мнимую части:

$$F(x + yi) = \varphi + \psi i.$$

Умножаем второе уравнение (6) на i и вычитаем из первого:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = \Big|^{z=z_1} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i - \frac{k}{\pi} \left(\frac{\partial \lg R}{\partial y} + \frac{\partial \lg R}{\partial x} i \right) \right\}, \quad (7)$$

где подстановка показывает, что после взятия производных надо везде z заменить на z_1, т. е. x и y на x_1 и y_1.

На основании известных свойств действительной и мнимой частей функции мнимого переменного имеем [1]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \lg R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \lg \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Вследствие этого уравнение (7) преобразуется в следующую основную формулу для определения движения центра вихря:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = \Big|^{z=z_1} \frac{d}{dz} \left(F - \frac{ik}{\pi} \lg (z - z_1) \right). \quad (8)$$

---

[1] R есть модуль расстояния между точками (x_1, y_1) и (x, y). Поэтому вектор

$$\overline{R} = (z - z_1) = Re^{i\alpha},$$

где

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Логарифмируя это выражение, находим:

$$f(z) = \lg \overline{R} = \lg R + i\alpha = X + iY, \text{ где } X = \lg R, \quad Y = \alpha.$$

По известному свойству аналитических функций пишем:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y} = -i \left(\frac{\partial X}{\partial y} + i \frac{\partial X}{\partial x} \right),$$

или

$$i \frac{df}{dz} = \frac{\partial X}{\partial y} + i \frac{\partial X}{\partial x},$$

т. е.

$$i \frac{df}{dz} = \frac{\partial \lg R}{\partial x} + i \frac{\partial \lg R}{\partial x},$$

что и подтверждает правильность преобразования уравнения (7) в уравнение (8). *Прим. ред.*

§ 3. Приложим формулу (8) к двум простым примерам, которые лягут в основание разрешения интересующей нас задачи.

Пусть дано:

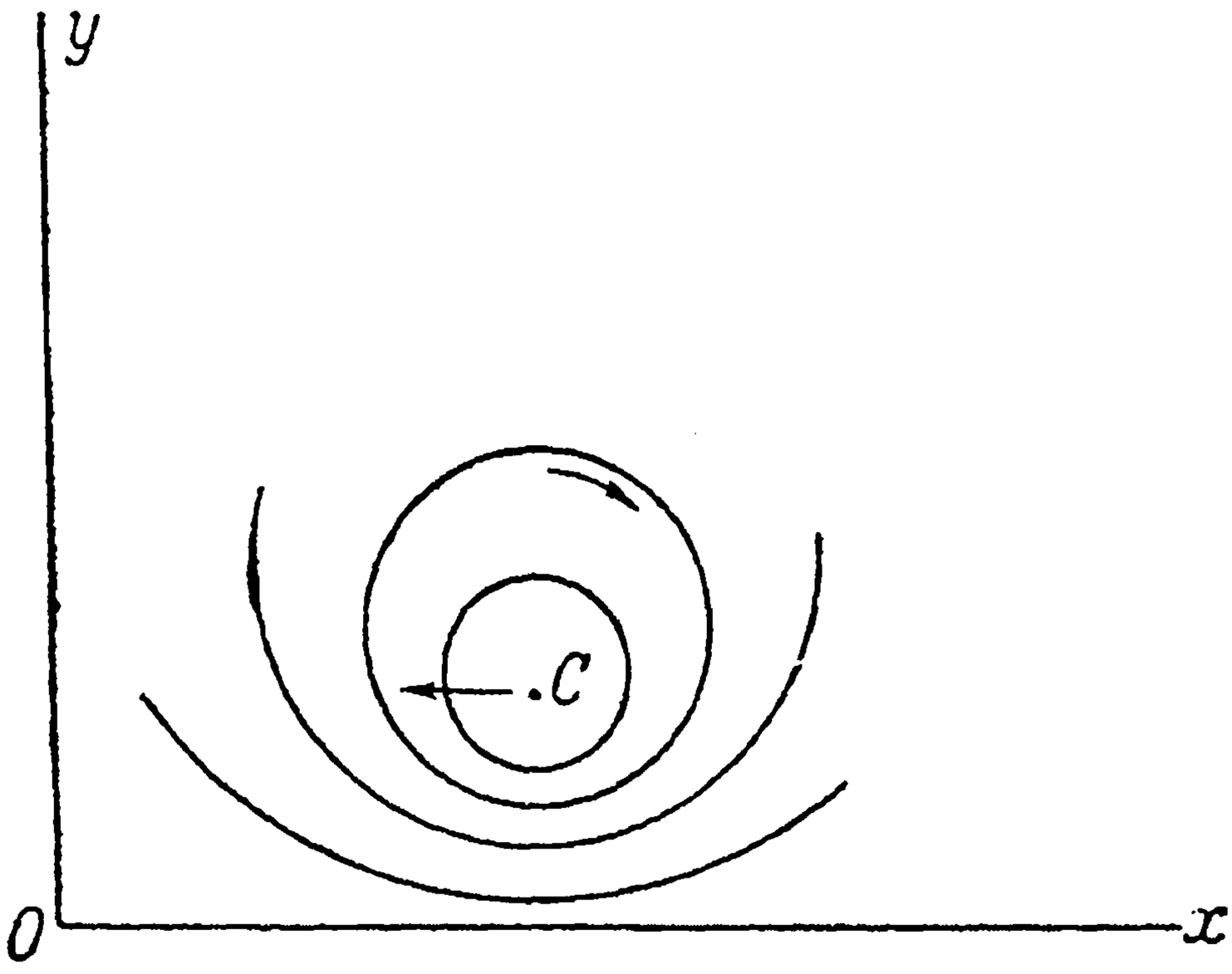
$$F = \frac{ki}{\pi} \lg \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{9}$$

где

$$z_1 = x_1 + y_1 i,$$

$$z_2 = x_1 - y_1 i.$$

Точки (z_1) и (z_2) являются центрами двух вихревых площадок, имеющих напряжения вихря, равные k и $-k$. Ось Ox есть одна из линий тока, так что она может быть принята за неподвижную границу, и все течение может быть рассматриваемо на полуплоскости. Линии токов этого течения будут (фиг. 1) окружности, охватывающие центр вихря C (точку z_1) и приближающиеся, расширяясь, к прямой Ox. Скорость во всякой точке течения на основании уравнения (1) находится по формуле:



Фиг. 1.

$$u - vi = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i$$

или

$$u - vi = \frac{dF}{dz}. \tag{10}$$

Для нашего случая эта формула дает:

$$u - vi = \frac{ki}{\pi} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right)$$

и показывает, что при $z = \infty$, скорость равна нулю; все точки на конечном расстоянии от C имеют скорости, неравные нулю.

Подставляя значение F из формулы (9) в формулу (8), находим для движения центра вихря уравнение:

$$\frac{d}{dt}[x_1 - y_1 i] = -\frac{k}{2\pi y_1},$$

откуда

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{k}{2\pi y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0. \tag{11}$$

Таким образом центр вихря C будет двигаться параллельно оси Ox с постоянной скоростью, которая направлена от x к O, если вращение вихря совершается по солнцу.

Для второго примера возьмем:

$$F = wz + \frac{ki}{\pi} lg \frac{z - z_1}{z - z_2}. \tag{12}$$

Течение жидкости, представляемое этой функцией, имеет те же вихревые центры z_1 и z_2, как и предыдущее течение, и тоже расположено симметрично относительно оси Ox, так что эта ось может быть принята за неподвижную границу и все течение может быть рассматриваемо на полуплоскости.

Скорость в бесконечности направлена параллельно оси Ox и равна w, потому что на основании формул (10) и (12)

$$u - vi = w + \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right), \tag{13}$$

где вторая часть обращается в w при $z = \infty$.

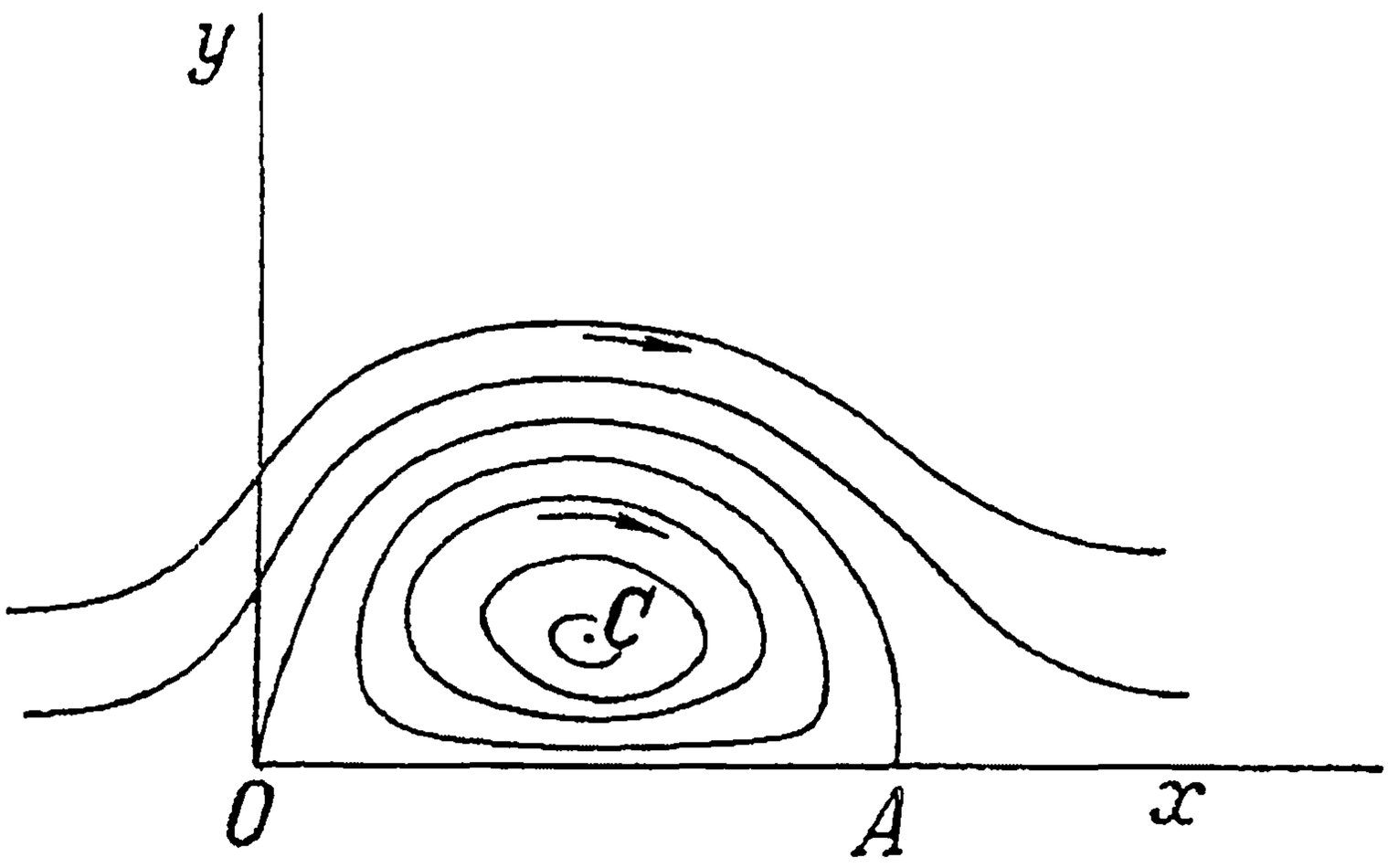
В рассматриваемом течении существуют две критические точки с нулевой скоростью. Предполагая, что одна из этих точек лежит в начале координат, мы должны обратить в нуль вторую часть формулы (13) положением $z = 0$. Это дает:

$$w = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{2ky_1}{\pi(x_1^2 + y_1^2)}. \tag{14}$$

На основании равенства (14) формула (13) может быть написана в виде:

$$u - vi = \frac{kzi}{\pi}\left(\frac{1}{z_1(z-z_1)} - \frac{1}{z_2(z-z_2)}\right), \qquad (15)$$

где вторая часть, кроме $z=0$, обращается еще в нуль при $z=2x_1$. Таким образом другая критическая точка нулевой скорости будет лежать на оси Ox на расстоянии $2x_1$ от начала координат.



Фиг. 2.

Линии токов рассматриваемого течения расположатся, как представлено на фиг. 2, на которой C есть центр вихря, а точки O и A — критические точки нулевой скорости. Движение центра вихря C на основании формул (8) и (12) найдется из уравнения:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = w - \frac{k}{2\pi y_1},$$

которое дает:

$$\frac{dx_1}{dt} = w - \frac{k}{2\pi y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0. \qquad (16)$$

Таким образом и здесь центр вихря будет двигаться параллельно оси Ox с постоянной скоростью. Эта скорость имеет направление от O к x, если

$$w > \frac{k}{2\pi y_1},$$

и наоборот.

Вместе с центром вихря C перемещаются по оси Ox с той же скоростью и критические точки O и A.

Расстояние $2x_1$ между этими точками в частном случае при

$$w = \frac{2k}{\pi y_1}$$

обращается в нуль [1], причем в такой слившейся критической точке линии токов пересекают ось Ox уже не под прямыми углами, как на фиг. 2, а под углами в 45°.

§ 4. Решение поставленной нами задачи получается с помощью конформного преобразования двух вышеописанных течений жидкости. Поэтому, прежде чем приступить к этому решению, посмотрим, как преобразуется формула (8), когда течение, определяемое функцией $\Phi(\zeta)$ на плоскости мнимого переменного $\zeta = \xi + \eta i$, преобразуется в течение, определенное на плоскости переменного z функцией $F(z)$, причем между точками первой и второй плоскостей установлено соответствие с помощью уравнения:

$$\zeta = f(z), \tag{17}$$

вследствие чего

$$\Phi(f(z)) = F(z).$$

Соответствие (17) установлено так, что центры вихря второго течения соответствуют центрам вихря первого и что в рассматриваемых границах каждой точке одного течения соответствует одна определенная точка другого. Предполагая, что центру вихря $z_1 = x_1 + y_1 i$ соответствует в преобразованном течении центр вихря $\zeta_1 = \xi_1 + \eta_1 i$, напишем для движения этого второго центра формулу (8) в таком виде:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i) = \Big|^{r=r_1} \frac{d}{d\zeta}\left(\Phi(\zeta) - \frac{ki}{\pi}\lg(\zeta - \zeta_1)\right).$$

Величину, стоящую во второй части в скобках, представим сначала в виде функции z. Для этого заменяем $\Phi(\zeta)$ на $F(z)$ и полагаем, что

$$\lg(\zeta - \zeta_1) = \lg(f(z) - f(z_1)).$$

---

[1] См. уравнение (14). *Прим. ред.*

Считая в последней формуле z за величину, близкую к z_1, сделаем разложение:

$$\lg(f(z)-f(z_1))=\lg\left(f'(z_1)(z-z_1)+\frac{f''(z)}{2}(z-z_1)^2+\dots\right)=$$

$$=\lg f'(z_1)+\lg(z-z_1)+\lg\left(1+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\dots\right)=$$

$$=\lg f'(z_1)+\lg(z-z_1)+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\dots$$

По подстановке получаем:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=\int^{r=r_1}\left[\frac{d}{dz}\left(F-\frac{ki}{\pi}\lg(z-z_1)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{ki}{\pi}\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}\right]\frac{dz}{d\zeta}. \tag{18}$$

§ 5. Конформное преобразование, которым мы будем пользоваться, характеризуется подстановкой

$$z=\zeta^{\mu}, \tag{19}$$

которая по введении полярных координат

$$x=r\cos\alpha,\quad \xi=\rho\cos\theta,$$

$$y=r\sin\alpha,\quad \eta=\rho\sin\theta,$$

дает соотношение:

$$\rho=\sqrt[\mu]{r},\ \theta=\frac{\alpha}{\mu}. \tag{20}$$

Это показывает, что полярные координаты точки плоскости $\xi\eta$ получаются из полярных координат соответственной точки на плоскости xy через разделение полярного угла на μ и через изменение величины радиуса-вектора посредством извлечения из нее корня степени μ.

Приложим такое преобразование к течению, представленному формулой (9), считая при этом $\mu>1$.

Получим течение, определенное формулой

$$\Phi=\frac{ki}{\pi}\lg\frac{\zeta^{\mu}-\zeta_1{}^{\mu}}{\zeta^{\mu}-\zeta_2{}^{\mu}}, \tag{21}$$

в котором неподвижной границей будет уже не прямая стенка, а стороны угла меньшего двух прямых и равного $\frac{\pi}{\mu}$. Пользуясь указанным правилом соответствия, мы можем из линий тока на фиг. 1 получить линии тока нового течения, представленные на фиг. 2. Скорость жидкости в этом течении при вершине угла и в бесконечности будет равна нулю, потому что производная формулы (10)

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{d\zeta} = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta^{\mu} - \zeta_1{}^{\mu}} - \frac{1}{\zeta^{\mu} - \zeta_2{}^{\mu}}\right)\mu\zeta^{\mu-1} \qquad (22)$$

обращается в нуль при $\zeta = 0$ и при $\zeta = \infty$.

Переходим к исследованию движения центра вихря C, которому по формуле (21) соответствует напряжение k.

Выразим

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i)$$

в полярных координатах. Подставляя сюда

$$\xi_1 = \rho_1 \cos\theta_1, \quad \eta_1 = \rho_1 \sin\theta_1,$$

находим, что

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i) = (\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)\left(\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

Так как

$$\zeta_2 = \rho_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1),$$

то написанное выражение можно представить еще так:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i) = \zeta_2\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

На основании этого замечания и формулы (18) получаем:

$$\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\,\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right) = -\frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{\zeta_1{}^{\mu-1}}{\zeta_1{}^{\mu} - \zeta_2{}^{\mu}} + \frac{1-\mu}{2\mu}\,\frac{1}{\zeta_1}\right\}. \qquad (23)$$

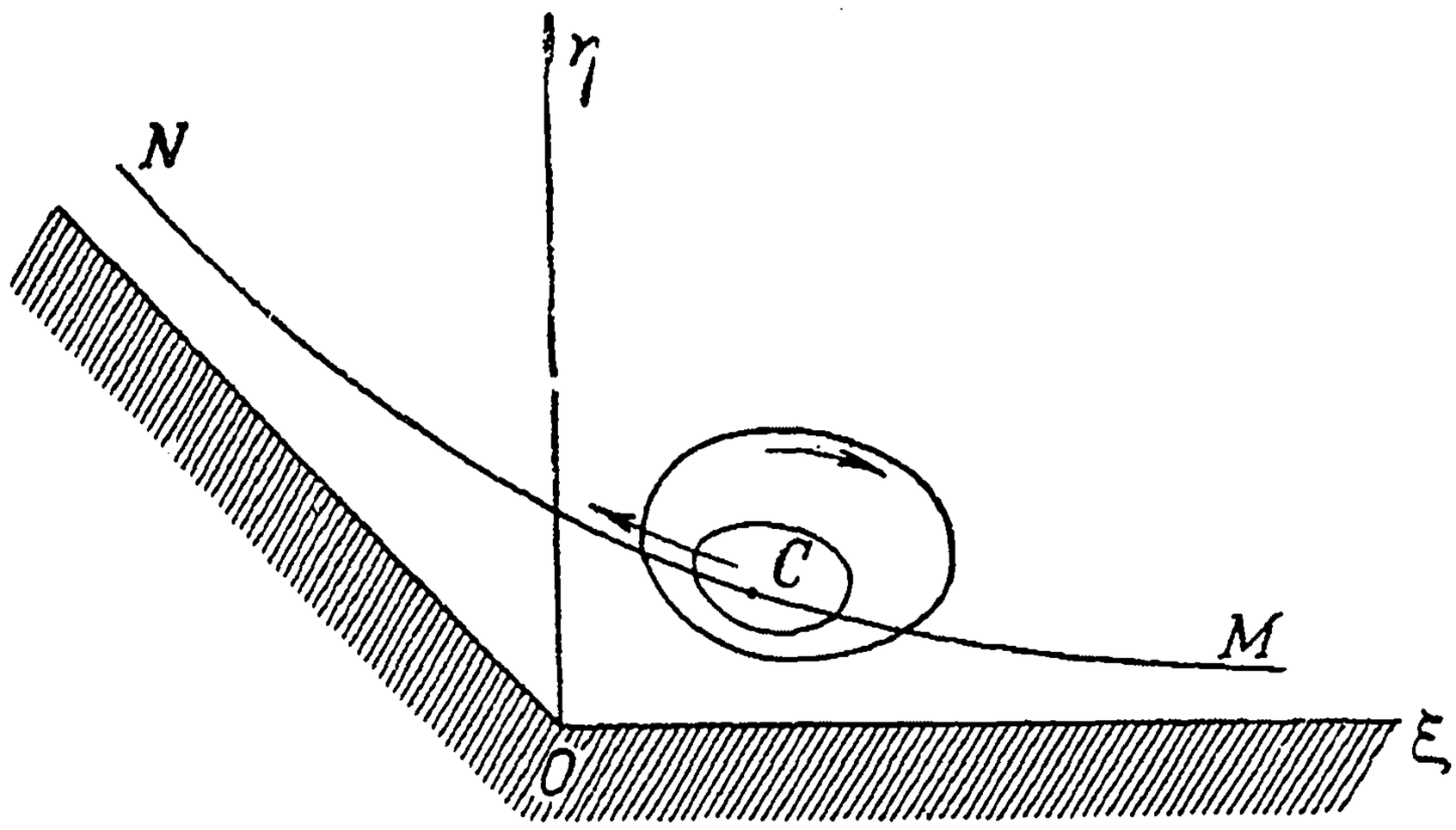
Пользуясь соотношением $\zeta_1\zeta_2 = \rho_1{}^2$ и заменяя все координаты на полярные, получим:

$$\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{k}{2\pi\rho_1}\left(-\frac{\mu\cos\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1} - i\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{-d\rho_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu\cos\mu\theta}{\sin\mu\theta_1}, \\ \rho_1\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Эти формулы показывают, что со временем радиус ρ_1 убывает до тех пор, пока не достигает наименьшей величины



Фиг. 3.

при $\theta_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, а потом возрастает. Что касается угла θ_1, то он при положительном k постоянно возрастает.

Таким образом центр вихря C двигается (фиг. 3) по некоторой траектории MN в направлении от M к N, если вращение вихря совершается по солнцу.

Чтобы составить уравнение траектории MN, умножаем первое из уравнений (24) на $\rho_1 d\theta_1$, второе — на $d\rho_1$ и складываем:

$$\frac{\mu\cos\mu\theta_1\, d\theta_1}{\sin\mu\theta_1} + \frac{d\rho_1}{\rho_1} = 0.$$

Интегрируя находим [1]:

$$\rho_1\sin\mu\theta_1 = \lambda, \tag{25}$$

где λ — произвольное постоянное.

---

[1] Это уравнение получает Gröbli в сочинении „Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfaden“ для случая целого μ и Greenhill в сочинении „Plane Vortex Motion“ („Quart. Journ.“ v. XV, § 6) для случая всякого $\mu > 1$.

Кривые, представляемые этим уравнением, имеют асимптотами стороны угла, ограничивающего рассматриваемое течение.

Чтобы установить связь между θ_1 и временем, представляем второе уравнение (24) на основании (25) в виде:

$$dt = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \frac{d\theta_1}{\sin^2 \mu\theta_1}$$

и совершаем интегрирование:

$$t = \tau - \frac{2\pi\lambda^2}{k\mu} \operatorname{ctg} \mu\theta_1, \tag{26}$$

где τ — произвольное постоянное.

§ 6. Мы рассмотрели случай движения центра вихря в пространстве, ограниченном сторонами угла, меньшего π, но интересующая нас задача относится к случаю, когда угол заключен между π и 2π.

Если бы мы в исследовании § 5 положили

$$1 > \mu > \frac{1}{2},$$

то получили бы течение жидкости, обтекающее клин, но на острие этого клина, как видно из формулы (22), скорость была бы бесконечно велика.

Для получения течения, ограниченного боками клина и дающего при острие критическую точку нулевой скорости, сделаем конформное преобразование (19) над течением жидкости, представленным формулой (12).

Вместо уравнения (22) мы получим в этом случае на основании формулы (15) нижеследующее равенство:

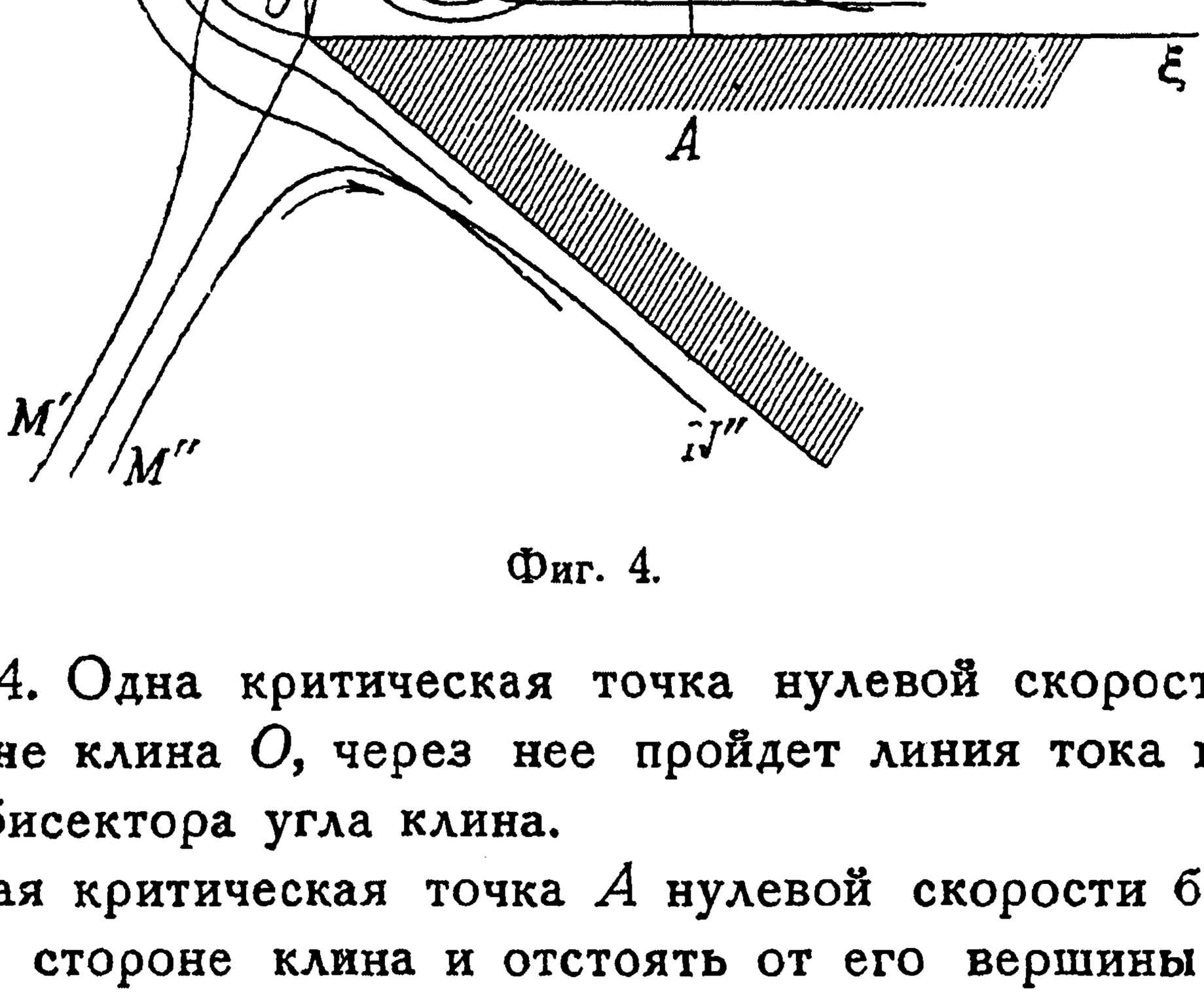
$$\frac{dF}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_1{}^\mu)\zeta_1{}^\mu} - \frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_2{}^\mu)\zeta_2{}^\mu}\right\}\zeta^{2\mu-1}. \tag{27}$$

Здесь вторая часть обращается в нуль при $\zeta = 0$ вследствие $\mu > \frac{1}{2}$, при $\zeta = \infty$ вследствие $\mu < 1$. Кроме этого, на стороне клина имеется еще некоторая критическая точка

нулевой скорости, потому что вторая часть формулы (27) обращается в нуль также и при

$$\zeta^{\mu} = 2\rho_1{}^{\mu} \cos \mu\theta_1.$$

Преобразуя линии токов, изображенные на фиг. 2, с помощью соответствия (20), получим линии токов, изображенные



Фиг. 4.

на фиг. 4. Одна критическая точка нулевой скорости будет в вершине клина O, через нее пройдет линия тока в направлении бисектора угла клина.

Другая критическая точка A нулевой скорости будет лежать на стороне клина и отстоять от его вершины на расстоянии

$$\delta = \rho_1 (2 \cos \mu\theta_1)^{\frac{1}{\mu}}. \qquad (28)$$

Здесь следует взять абсолютную величину косинуса. При этом если

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2\mu},$$

то точку A надо взять на верхней стороне клина, а если имеет место обратное неравенство, то на нижней.

Обращаемся к исследованию движения центра вихря C. Основная формула, определяющая это движение, будет отличаться от формулы (23) добавочным членом, зависящим от w. Приписывая этот член и выражая u по формуле (14), найдем:

$$\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right) = -\frac{k\mu i}{\pi}\left(\frac{{\zeta_1}^{\mu-1}}{{\zeta_1}^{\mu}-{\zeta_2}^{\mu}} + \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1}{\zeta_1}\right) + \\ + \frac{k\mu i}{\pi}{\zeta_1}^{\mu-1}\left(\frac{1}{{\zeta_1}^{\mu}} - \frac{1}{{\zeta_2}^{\mu}}\right). \qquad (29)$$

Вводя сюда полярные координаты и делая некоторые простые преобразования, получаем:

$$\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{k}{2\pi\rho_1}\left\{\left(-\frac{\mu\cos\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1} + 4\mu\cos\theta_1\sin\mu\theta_1\right) - \right.$$
$$\left. -(1-4\mu\sin^2\mu\theta_1)\,i\right\},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu\cos\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1}(1-4\sin^2\mu\theta_1), \\ \rho_1\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}(1-4\mu\sin^2\mu\theta_1). \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Последняя из этих формул показывает, что при положительном k угол θ_1 возрастает со временем всякий раз, как угол θ_1 заключен между 0 и β, причем β определяется из уравнения:

$$\sin\mu\beta = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}.$$

Если угол θ_1 заключен между β и $\frac{\pi}{\mu}-\beta$, то он убывает со временем; наконец, если он заключен между $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ и $\frac{\pi}{\mu}$, то он опять возрастает со временем.

Умножаем первое уравнение (30) на $\rho_1 d\theta_1$, второе — на $d\rho_1$ и складываем:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1}(1-4\mu\sin^2\mu\theta_1) + \frac{(1-4\sin^2\mu\theta_1)\,d\sin\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1} = 0.$$

Разделяем переменные и делаем некоторые преобразования:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} + \frac{d\sin\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1} - \frac{4(1-\mu)\sin\mu\theta_1 d\sin\mu\theta_1}{1-4\mu\sin^2\mu\theta_1} = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\rho_1 \sin\mu\theta_1 (1-4\mu\sin^2\mu\theta_1)^{\frac{1-\mu}{2\mu}} = \lambda, \qquad (31)$$

где λ — произвольное постоянное.

Уравнение (31) показывает нам, что радиус ρ_1 убывает от бесконечности и потом опять возрастает до бесконечности три раза: на промежутке изменения θ_1 от 0 до β, от β до $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ и от $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ до $\frac{\pi}{\mu}$. Это соответствует трем ветвям траекторий MN, $M'N'$, $M''N''$. Асимптотами этих траекторий являются стороны клина и прямые, наклоненные к сторонам клина под углом β.

На основании сказанного выше об изменении угла θ_1 со временем видно, что центр вихря, вращающегося по солнцу, движется по упомянутым ветвям в направлении, указанном на фиг. 4 стрелками.

Для определения связи между углом θ_1 и временем исключаем ρ_1 из второго уравнения (30) с помощью уравнения (31):

$$dt = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \frac{d\theta_1}{\sin^2\mu\theta_1 (1-4\mu\sin^2\mu\theta_1)^{\frac{1}{\mu}}}.$$

Вводя новое переменное

$$\operatorname{ctg}\mu\theta_1 = \gamma,$$

получаем:

$$t+\tau = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \int \frac{d\gamma}{\left(1-\frac{4\mu}{1+\gamma^2}\right)^{\frac{1}{\mu}}}. \qquad (32)$$

Вместе с перемещением центра C будет перемещаться по стороне клина критическая точка A. При этом место ее будет всякий раз находиться по формуле (28).

Если центр вихря C движется по траектории $M'N'$, то при прохождении через биссектор клина, т. е. при $\theta_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, величина δ проходит через нуль, и точка A переходит с одной стороны клина на другую.

Рассматривая траектории MN, $M'N'$, $M''N''$ центра вихря, замечаем, что вихревой шнур уклоняется от подносимого к нему острия клина.

§ 7. От клина легко перейти к случаю весьма тонкого ножа. Для этого стоит только в формуле предыдущего параграфа положить $\mu = \frac{1}{2}$.

При таком положении формула (27) принимает вид:

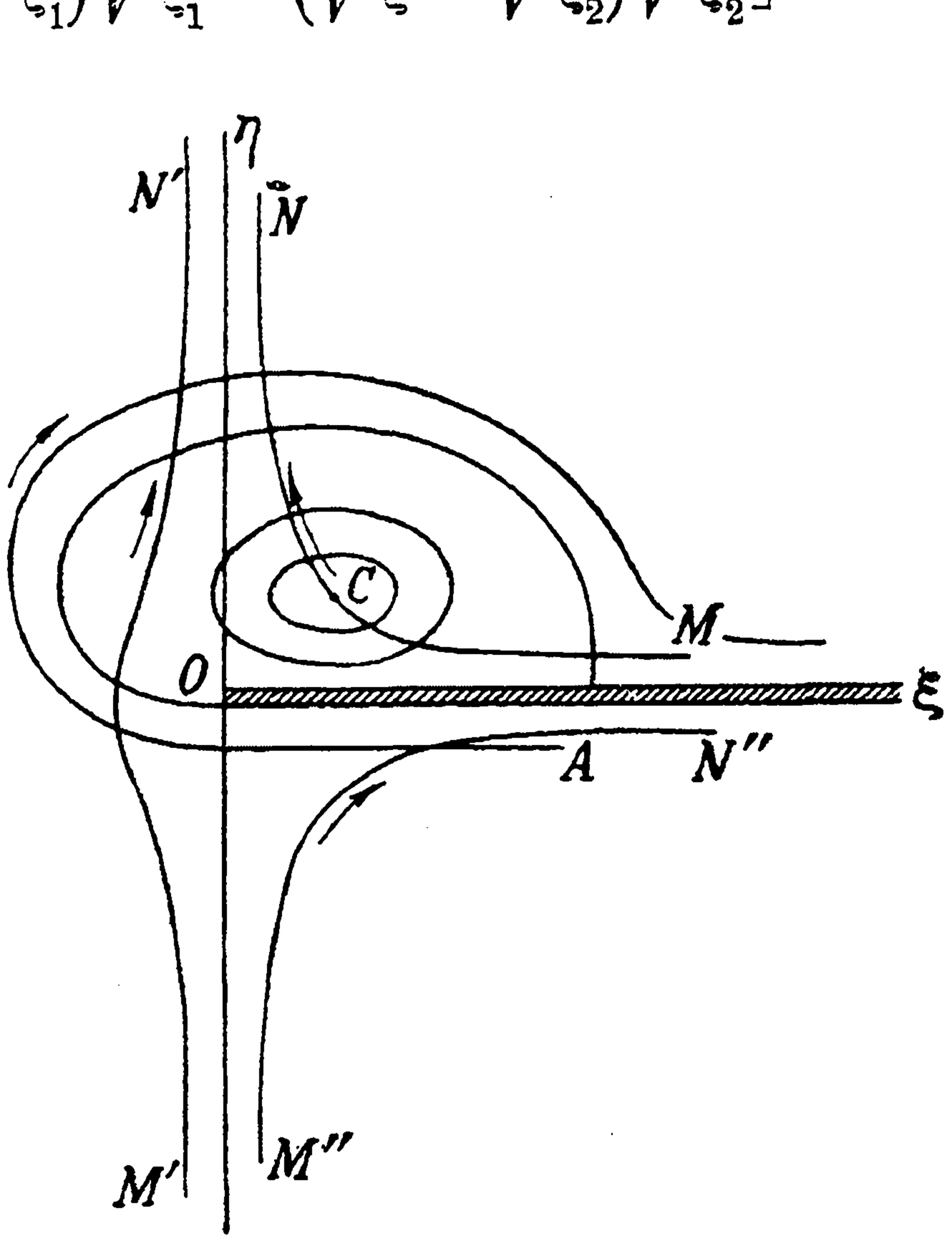
$$\frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{ki}{2\pi}\left[\frac{1}{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta_1})\sqrt{\zeta_1}} - \frac{1}{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta_2})\sqrt{\zeta_2}}\right]. \quad (33)$$

Мы видим отсюда, что скорость в бесконечности и в критической точке A (фиг. 5), отстоящей от острия ножа на расстоянии

$$\delta = 4\rho_1 \cos^2\frac{\theta_1}{2}, \quad (34)$$

равна нулю; скорость же на острие ножа есть конечная величина, ибо при $\zeta = 0$ вторая часть формулы (33) обращается в

$$-\frac{k\sin\theta_1}{\pi\rho_1}.$$



Фиг. 5.

Отрицательный знак показывает, что при $k > 0$ и $\theta_1 < \pi$ скорость жидкости в точке O направлена по оси $O\xi$ от ξ к O.

Уравнение (31) в нашем частном случае принимает вид:

$$\rho_1 \sin\frac{\theta_1}{2}\sqrt{\cos\theta_1} = \lambda. \quad (35)$$

Это дает нам ветви траекторий центра вихря: MN, $M'N'$, $M''N''$, имеющие асимптотами оси $O\xi$ и $O\eta$.

Связь между временем и углом θ_1, выраженная формулой (32), упрощается для предельного случая так:

$$t+\tau=\frac{2\pi\lambda^2}{k}\int\left(\frac{\gamma^2+1}{\gamma^2-1}\right)^2 d\gamma,$$

или по совершении интегрирования:

$$t+\tau=\frac{2\pi\lambda^2}{k}\left\{\gamma-\frac{2\gamma}{\gamma^2-1}+\lg\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right\}, \tag{36}$$

где τ — произвольное постоянное, а

$$\gamma=\operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{2}.$$

Вместе с перемещением по плоскости точки C перемещается по стороне ножа точка A, расстояние которой от O определяется во всякий момент времени по формуле (34). Если центр вихря описывает траекторию $M'N'$, то при $\theta_1=\pi$ точка A вступает на острие ножа и потом переходит с его нижней стороны на верхнюю. Нам понятно теперь, почему нельзя разрезать ножом вихревой шнур вдоль его длины. Поднесение острия ножа приведет центр вихря в движение по одной из трех траекторий MN, $M'N'$, $M''N''$, по которым вихрь будет всегда убегать от острия ножа.

Эта статья была сообщена на IX съезде русских естествоиспытателей и врачей 8 января 1894 г. и напечатана в первый раз в „Математическом сборнике“, т. XVII, 1894 г. Во второй раз она была напечатана в „Трудах Центрального аэрогидродинамического института“, вып. 95. *Прим. ред.*

ON THE PROBLEM OF CUTTING OF VORTEX FILAMENTS

In this article Prof. Joukowsky raises the question of a theoretical investigation of the impossibility of cutting a vortex filament into parts. This problem, considered in two dimensions, is stated by him as follows: given a straight vortex filament and a wedge immersed in the fluid and having its edge parallel to the axis of the filament, to investigate the motion of the filament in the vicinity of the edge. To solve the problem Prof. Joukowsky deduces formula (8) giving the velocity of the area of a vortex in a flow defined by a function of a complex variable $F(z)$. This formula enables him to determine the velocity of the vortex near a straight boundary of infinite length in the two following cases, viz, 1) when at infinite distance the fluid is at rest (formula 11, Fig. 1), and 2) when at infinite distance the fluid is moving along the boundary with a velocity w (formula 16, Fig. 2).

When the flow defined by the function $F(z)$ is conformally transformed by formula (17), the velocity of the vortex in the transformed flow will be given by formula (18). This formula is used by Prof. Joukowsky to determine, after transforming the two flows considered above, 1) the velocity of the vortex and the equation of its path (equation 25, Fig. 3) within an obtuse, or a sharp, angle occupied by the fluid, and 2) the velocity and the equation of the path of the vortex (equation 31, Fig. 4) in the presence of the wedge. As it is seen on reference to Fig. 4, the path of the vortex in the second case always deviates from the edge, hence the impossibility of cutting the vortex. Prof. Joukowsky also deduces the law of motion of the vortex along the path in the two cases of motion considered, i. e. the relation giving the position of the vortex in function of time. This relation is expressed by formulae (26) and (32) referring, respectively, to the first and to the second case.

ЗАМЕТКА О ДВИЖЕНИИ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ

(1907 г.)

§ 1. Обыкновенно предполагают, что вся жидкость, заключенная в вихревом кольце, имеет вихревое движение. Мы имеем в виду в этой заметке рассмотреть задачу о движении круглого вихревого кольца, несущего заключенную в нем жидкость поступательным движением и имеющего на поверхности вихревой слой.

§ 2. Определим сначала скорость, сообщаемую бесконечно тонким вихревым кольцом с центром C и радиусом a точке жидкости N, отстоящей от окружности кольца на весьма малом расстоянии ρ (фиг. 1). Проведем через N плоскость, перпендикулярную кольцу, и построим на ней прямоугольные оси координат, приняв начало O на окружности кольца и направив ось $O\xi$ по радиусу кольца, а ось $O\eta$ — перпендикулярно к плоскости кольца. Суммируя эффекты всех элементов $ds = ad\varphi$ на точку N, найдем для проекций v и u скорости этой точки на оси $O\eta$ и $O\xi$ следующие выражения (1) [1]:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[a^2(1-\cos\varphi)+a\xi\cos\varphi]\,d\varphi}{[2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ u &= -\frac{k}{5\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\eta\cos\varphi\,d\varphi}{[2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь k есть бесконечно малая циркуляция скорости по контуру, охватывающему кольцо так, что напряжение вихре-

[1] См. примечания в конце статьи. *Прим. ред.*

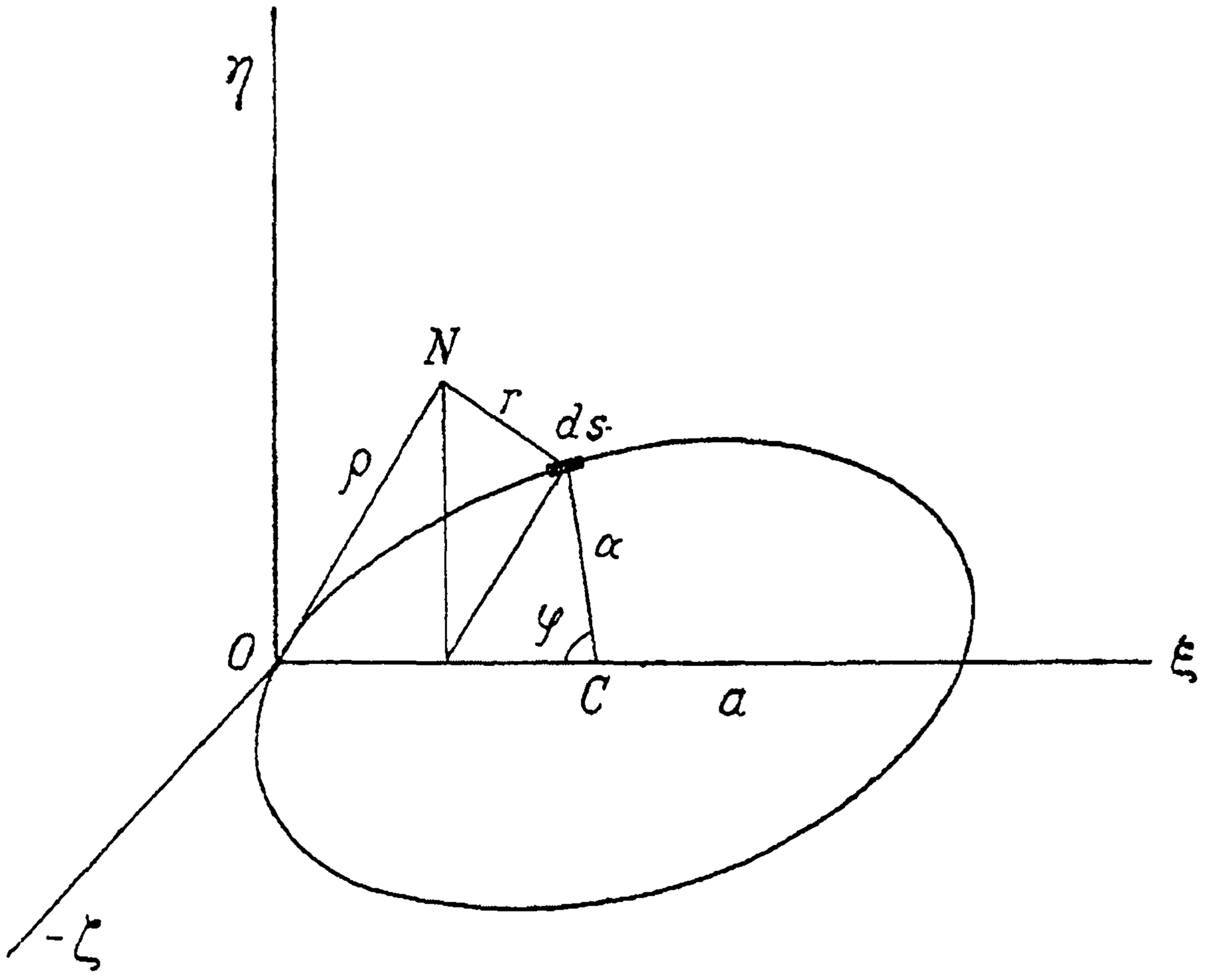
вого кольца есть $m = \frac{k}{2}$, а ξ и η суть координаты точки N.

Преобразуем интеграл:

$$A = \frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 (1 - \cos\varphi)\, d\varphi}{[2 (a^2 - a\xi)\, (1 - \cos\varphi) + \rho^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

подстановкой $\varphi = 2\theta$ и отбрасыванием $\frac{\xi}{a}$:

$$A = \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^2 \sin^2\theta d\theta}{[4 (a^2 - a\xi) \sin^2\theta + \rho^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2\theta d\theta}{(4a^2 \sin^2\theta + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



Фиг. 1.

Вообразим бесконечно малый угол ψ, но весьма большой сравнительно с бесконечно малой величиной ρ, так что $\frac{\rho}{\psi} = 0$, и разобьем наш интеграл A на два:

$$A = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\psi} \frac{a^2\theta^2 d\theta}{(4a^2\theta^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k}{4\pi a} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} =$$

$$\cdot = \frac{k}{2\pi}\left\{\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{4a^2\theta^2+\rho^2}} - \int_0^{\psi}\frac{\rho^2 d\theta}{(4a^2\theta^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\right\}.$$

Мы имеем:

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{4a^2\theta^2+\rho^2}} = \frac{k}{4\pi a}\int_0^{\psi}\frac{\frac{2a\,d\theta}{\rho}}{\sqrt{\frac{4a^2\theta^2}{\rho^2}+1}} =$$

$$= \frac{k}{4\pi a}\Bigg|_0^{\psi}\lg\left[\frac{2a\theta}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{2a\theta}{\rho}\right)^2+1}\right] = \frac{m}{2\pi a}\lg\left(\frac{4a\psi}{\rho}\right);$$

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{\frac{\rho^2 d\theta}{\theta^3}}{\left(4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{2\pi}\Bigg|_0^{\psi}\frac{1}{\sqrt{4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}}} = \frac{m}{2\pi a};$$

$$\frac{k}{4\pi a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{k}{4\pi a}\Bigg|_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -\frac{m}{2\pi a}\lg\frac{\psi}{2}.$$

На основании всего сказанного выражение A предста-вится так:

$$A = \frac{m}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{\rho}-1\right]. \qquad (2')$$

Нам остается еще определить входящий в выражение v интеграл:

$$B = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\xi\cos\varphi\,d\varphi}{[2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Вводим в него тоже подстановку $\varphi = 2\theta$, вследствие ко-торой

$$B = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\xi\,(1-2\sin^2\theta)\,d\theta}{[4\,(a^2-a\xi)\sin^2\theta+\rho^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{\xi}{a}A + \frac{ka\xi}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[4\,(a^2-a\xi)\sin^2\theta+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

В пределах рассматриваемой точности первый член второй части может быть отброшен, и мы получаем по замене $4\,(a^2-a\xi)$ на n:

$$B = -\frac{ka\xi}{\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{n\sin^2\theta+\rho^2}}.$$

Берем входящий сюда интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{n\sin^2\theta+\rho^2}} = \int_0^{\psi} \frac{d\theta}{\sqrt{n\theta^2+\rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\Big|_0^{\psi} \lg\left(\frac{\theta\sqrt{n}}{\rho}+\sqrt{\frac{n\theta^2}{\rho^2}+1}\right)+\int_{\psi}^{2} \lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\lg\left(\frac{4\sqrt{n}}{\rho}\right).$$

По подстановке в формулу (3′) получим:

$$B = \frac{m}{\pi}\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi^2}{\rho^2}.$$

Теперь мы можем написать выражение скорости v, в котором сохранены конечные величины и весьма большие величины логарифмического и первого порядка:

$$v = \frac{m}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{\rho}-1\right] + \frac{m}{\pi}\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi^2}{\rho^2}. \qquad (4)$$

Что касается проекции скорости на ось $O\xi$, то составлять ее не придется, ибо она получается из выражения B в формуле (3) только заменой в числителе множителя ξ на $-\eta$.

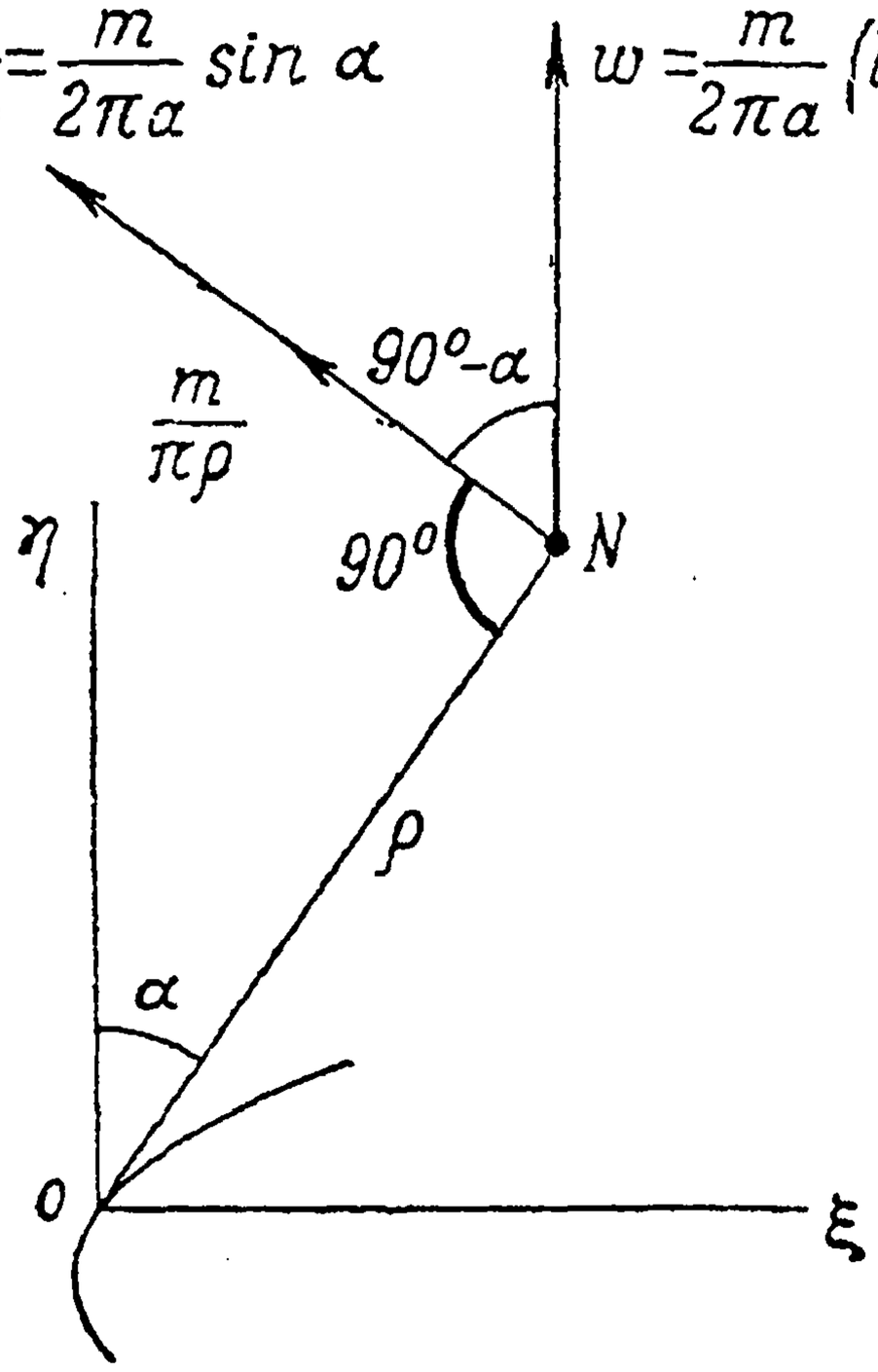
Получаем:

$$u = -\frac{m}{\pi}\frac{\eta}{\rho^2} - \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi\eta}{\rho^2}. \tag{5}$$

Рассмотрение формул (4) и (5) приводит нас к заключению, что *бесконечно тонкое вихревое кольцо сообщает точке N, отстоящей от него на очень близком расстоянии ρ, три скорости* (фиг. 2): 1) *скорость w, направленную по оси кольца и имеющую величину*

$$w = \frac{m}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{\rho} - 1\right], \tag{6}$$

зависящую только от ρ; 2) *скорость вихревого вращательного движения около касательной, проведенной к кольцу в точке O, с напряжением вихря m*; 3) *скорость вращательного движения около той же касательной, имеющую конечную переменную величину* $\frac{\xi}{\rho}$.



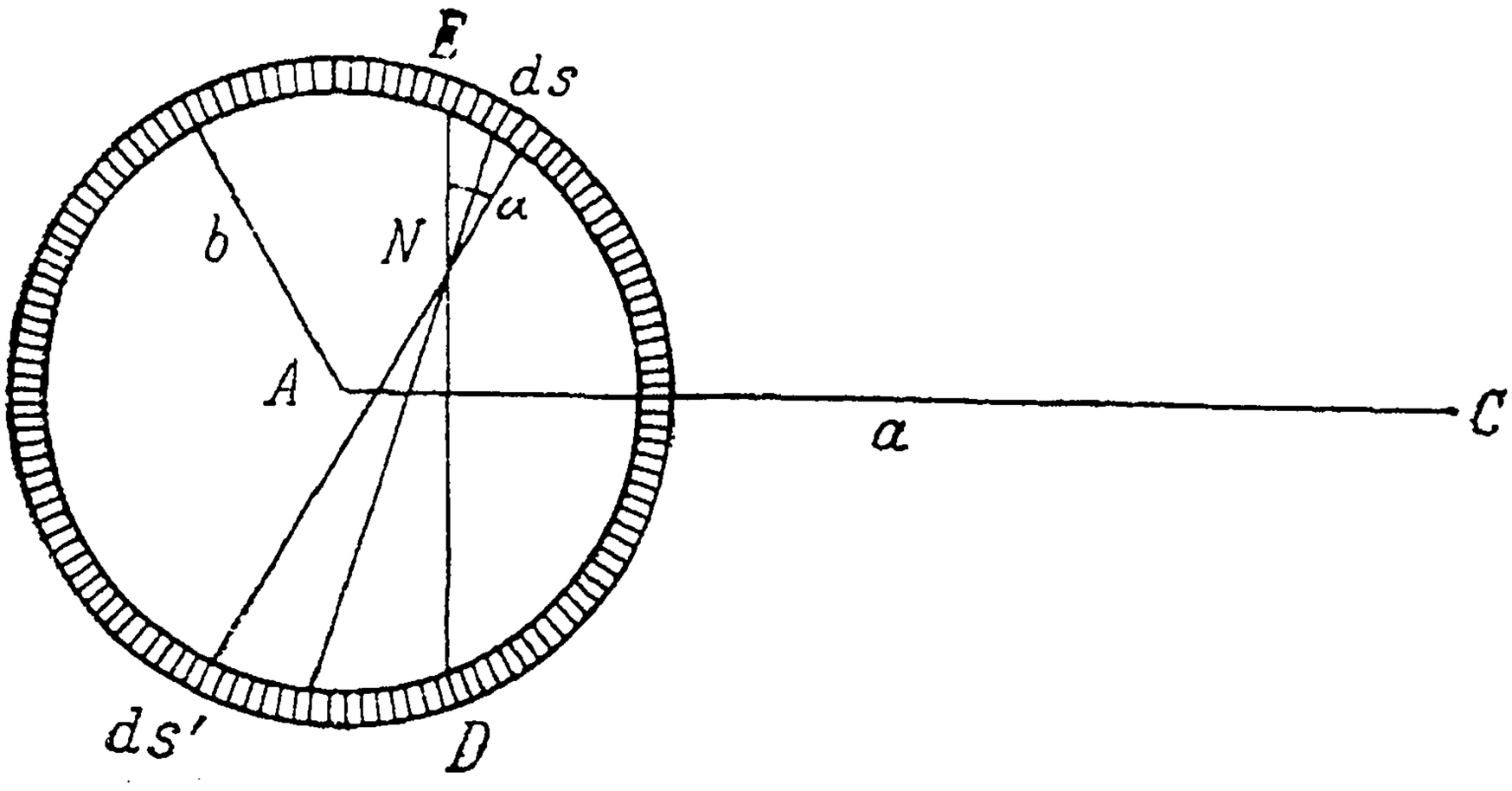
Фиг. 2.

§ 3. Предположим теперь, что бесконечно тонкие вихревые кольца расположены по поверхности тора, сечение которого имеет радиус b, так что на каждый элемент ds контура этого сечения приходится напряжение вихрей $m = \gamma ds$, и посмотрим, какую скорость сообщают все эти кольца точке жидкости N, заключенной внутри тора (фиг. 3). Слагая все скорости w, происходящие от всех элементарных вихревых колец с напряжениями γds, получим на основании

формулы (6) по оси вихря скорость w:

$$w = \frac{M}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{b} - 1\right], \tag{7}$$

потому что все точки, лежащие внутри весьма тонкого кругового слоя, при логарифмическом законе притяжения имеют



Фиг. 3.

одинаковый потенциал, равный потенциалу внешней точки, прилегающей к слою.

Чтобы сложить геометрически все скорости вихревых движений, получаемых точкой N от элементов вихря, покрывающих слой, замечаем, что скорость вихревого движения от одного элемента $\gamma\, ds$ направлена перпендикулярно к радиусу ρ, соединяющему этот элемент с точкой N, и равна $\frac{m}{\pi}\frac{1}{\rho}$. Эта скорость получается, таким образом, поворотом на прямой угол силы притяжения элементом $\gamma\, ds$ точки N единицы массы по закону обратной пропорциональности расстоянию. Сложив геометрически все такие силы притяжения и повернув их равнодействующую на прямой угол, мы получим скорость точки N от всех вихревых движений.

Но круговой слой по закону обратной пропорциональности расстоянию внутренней точки не притягивает, поэтому скорость точки N, полученная от всех движений второго рода (вихревых), есть нуль. Остается рассмотреть равнодействующую скорость точки N от всех движений третьего рода. Проведем (фиг. 3) через N параллельно оси тора хорду DE и

назовем через α угол между радиусом ρ, идущим от точки N к элементу ds, и NE. Проекции искомой результирующей скорости на ось тора и на его радиусы на основании формул (4) и (5) будут:

$$\frac{\gamma}{2\pi a}\left[\int_0^{\pi}\sin^2\alpha\,(ds+ds')\right];\quad -\frac{\gamma}{2\pi\alpha}\left[\int_0^{\pi}\sin\alpha\cos\alpha\;(ds+ds')\right],$$

где через ds' мы называем элемент дуги, вертикальной относительно точки N элементу ds.

Так как угол, образованный двумя внутренними секущими, измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами, то

$$ds+ds'=2b\,d\alpha$$

и

$$\frac{\gamma}{2\pi a}\int_0^{\pi}\sin^2\alpha\,(ds+ds')=\frac{\gamma b}{\pi a}\int_0^{\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha=\frac{M}{4\pi a},$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi a}\int_0^{\pi}\sin\alpha\cos\alpha\,(ds+ds')=$$

$$=-\frac{\gamma b}{4\pi a}\int_0^{\pi}\sin 2\alpha\,2d\alpha=\frac{\gamma b}{4\pi a}\Big|_0^{\pi}\cos 2\alpha=0.$$

Соединяя все скорости точки N, приходим к заключению, что результирующая этих скоростей для всякого места точки N внутри тора совпадает с поступательной скоростью [1]:

$$W=\frac{M}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{b}-1\right]+\frac{M}{4\pi a}=\frac{M}{2\pi a}\left[\lg\left(\frac{8a}{b}\right)-\frac{1}{2}\right]. \qquad (8)$$

Таким образом *все движение тора приводится к поступательному движению заключенной в нем массы жидкости вдоль оси тора со скоростью, данной формулой* (8).

---

[1] Этот случай соответствует указанному в курсе Basset (A. Treatise on Hydrodynamics v. II. p. 87—88) с помощью значительно более сложного анализа.

Укажем под конец этой заметки, что формулы (4) и (5) удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

так как

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{m}{\pi}\frac{\xi^2-\eta^2}{\rho^4} + \frac{m\xi}{\pi a\rho^2} - \frac{m\xi^3}{a\pi\rho^4} =$$

$$= -\frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{m}{\pi}\frac{\xi^2-\eta^2}{\rho^4} + \frac{m}{\pi a}\frac{\xi\eta^2}{\rho^4},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{m}{\pi}\frac{\xi^2-\eta^2}{\rho^4} - \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{\pi a}\frac{\xi\eta^2}{\rho^4}.$$

Точно так же формулы (4) и (5) удовлетворяют условию несжимаемости:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{a-\xi}u = 0^{(3)},$$

ибо

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{m}{2\pi a}\frac{\eta}{\rho^2} - \frac{m\xi^2\eta}{\pi a\rho^4} - \frac{2\xi\eta}{\rho^4}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{m}{2\pi a}\frac{\eta}{\rho^2} + \frac{m\eta\xi^2}{\pi a\rho^4} + \frac{2\xi\eta}{\rho^4}, \tag{4}$$

а при отбрасывании конечных величин перед величинами порядка $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{u}{a-\xi} = -\frac{m\eta}{a\pi\rho^2}^{(4)}.$$

Эта работа была доложена в заседании Математического общества 27 февраля 1907 г. и напечатана в первый раз в „Математическом сборнике“, т. XXVI, 1907 г. и во второй раз отдельным оттиском в том же 1907 г. *Прим. ред.*

Примечания

А. Минаков.

1. Как известно, компоненты скорости, сообщаемой частице $N(x, y, z)$ вихревым кольцом, имеют выражения [см., например, H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, § 149, формула (2)]:

$$u = \frac{k}{4\pi}\int \frac{1}{r^3}\left[(z-z_1)\frac{dy_1}{ds} - (y-y_1)\frac{dz_1}{ds}\right]ds,$$

$$\frac{k}{4\pi}\int \frac{1}{r^3}\left[(x-x_1)\frac{dz_1}{ds} - (z-z_1)\frac{dx_1}{ds}\right]ds,$$

$$\frac{k}{4\pi}\int \frac{1}{r^3}\left[(y-y_1)\frac{dx_1}{ds} - (x-x_1)\frac{dy_1}{ds}\right]ds,$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты элемента ds кольца.

Сообразно принятому в статье направлению осей ξ, η и принимая во внимание, что $ds = ad\varphi$, эти формулы надо переписать, произведя замену:

$$u \mid u, \qquad x \mid \xi - a,\ \xi_1 = a - a\cos\varphi,\ \xi \neq 0,$$

$$v \mid -w,\ y \mid -\zeta, \quad \eta_1 = 0, \qquad \eta \neq 0,$$

$$w \mid v, \qquad z \mid \eta, \qquad \zeta_1 = a\sin\varphi, \qquad \zeta = 0.$$

Получим:

$$u = -\frac{k}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{1}{r^3}\,\eta d\zeta_1,$$

$$w = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}\,\eta d\xi_1,$$

$$v = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}\left[\zeta_1 d\xi_1 - (\xi-\xi_1)\,d\zeta_1\right].$$

Отсюда и получаются для u и v приводимые в статье формулы (1).

2. При выводе формулы (7) Н. Е. Жуковский делает, очевидно, допущение, что радиус b сечения тора весьма мал по сравнению с радиусом a колец, из которых слагается оболочка тора (ср., например, A. Basset, A. Treatise on Hydrodynamics, v. II, § 237; H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. § 162).

Поэтому он берет для всех колец средний радиус, равный расстоянию CA на фиг. 3, т. е. равный радиусу самого тора, и обозначает его той же буквой a.

Кроме того, он пользуется, как сказано в статье после формулы (7), тем, что „все точки имеют потенциал, равный потенциалу внешней точки, прилегающей к слою“, т. е. удаленной от центра A сечения на расстояние b.

Ввиду всего сказанного, написав

$$w = \sum \frac{\gamma ds}{2\pi a}\left(\lg \frac{8a}{\rho} - 1\right),$$

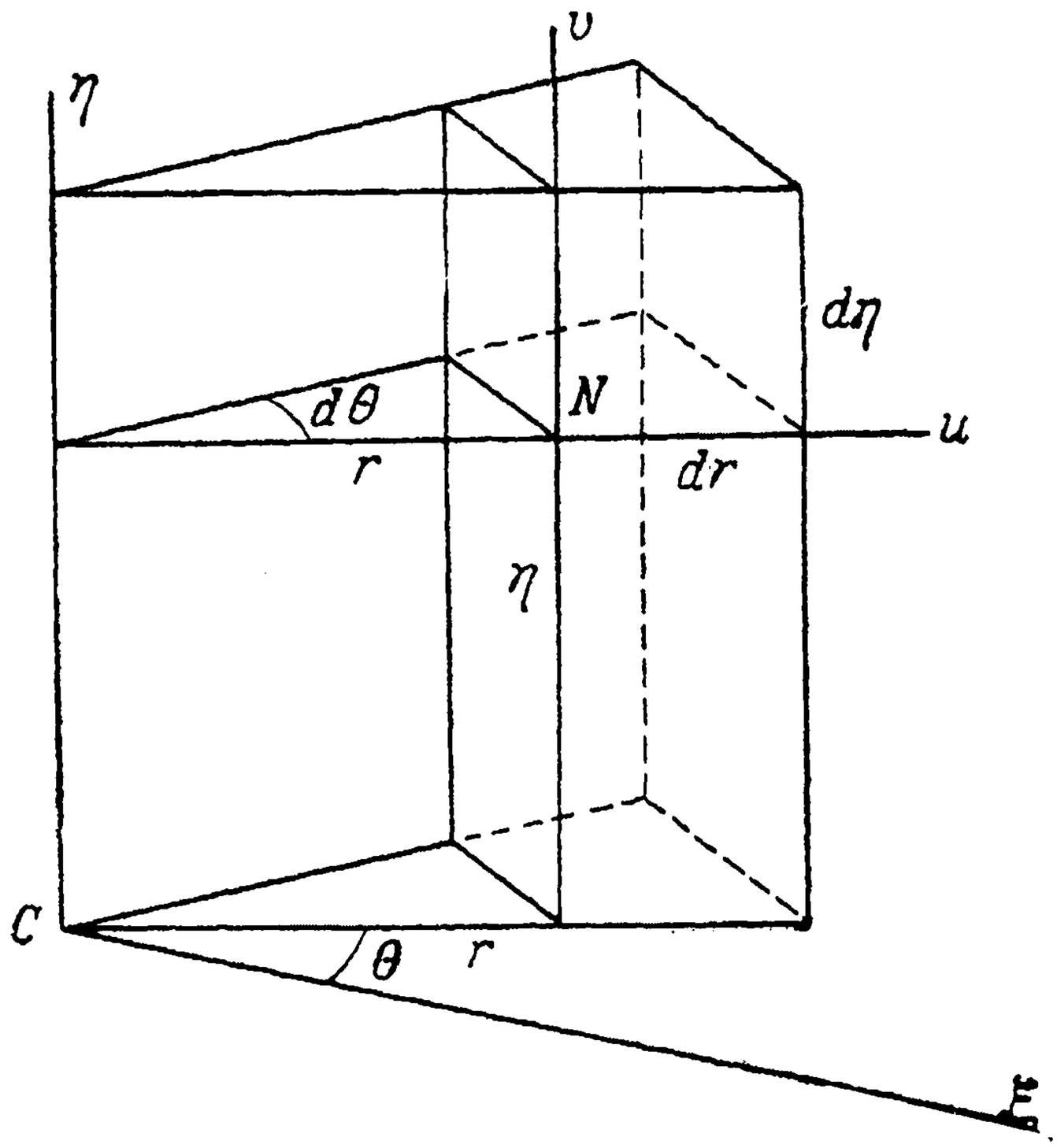
Н. Е. Жуковский заменяет все ρ на b и считает a для всех колец одинаковым, т. е. пишет:

$$w = \frac{\gamma}{2\pi a}\left(\lg \frac{8a}{b} - 1\right)\sum ds = \frac{M}{2\pi a}\left(\lg \frac{8a}{b} - 1\right),$$

где

$$M = \gamma \sum ds = 2\pi b\gamma.$$

3. Выведем уравнение несжимаемости в цилиндрических координатах r, θ, η, взяв начало осей в центре кольца, а ось η вдоль его оси и выделив элементарный объем $(dr \cdot r\,d\theta \cdot d\eta)$ с вершиной в точке $N(r, \theta, \eta)$ (фиг. 4).



Фиг. 4.

Так как движение симметрично относительно оси η, то вихревые линии перпендикулярны ко всякой плоскости, проходящей через эту ось, а следовательно, и к грани $(dr \cdot d\eta)$ и противоположной ей грани. А так как секундные количества жидкости, протекающие сквозь поперечные сечения вихревой трубки, одинаковы для всех сечений, то

количество жидкости, вошедшее в секунду сквозь указанные грани в выделенный нами элементарный объем, равно нулю.

Рассмотрим теперь две другие пары граней. Количество жидкости, протекшей в 1 сек. сквозь грань $(r\,d\theta \cdot d\eta)$, равно $ur\,d\theta\,d\eta$; для противоположной грани оно будет равняться

$$ur\,d\theta\,d\eta + \frac{\partial (ur)}{\partial r}\,dr\,d\theta\,d\eta.$$

Таким образом сквозь эту пару граней входит количество жидкости

$$\frac{\partial (ur)}{\partial r}\,dr\,d\theta\,d\eta. \qquad (1)$$

Рассуждая аналогично для грани $(r\,d\theta \cdot d\eta)$ и ей противоположной, найдем количество вошедшей в элемент жидкости равным

$$r\frac{\partial v}{\partial \eta}\,d\eta\,dr\,d\theta. \qquad (2)$$

Сумма найденных двух количеств (1) и (2) должна в силу несжимаемости жидкости равняться нулю, поэтому

$$\frac{\partial (ur)}{\partial r}\,dr\,d\theta\,d\eta + r\frac{\partial v}{\partial \eta}\,dr\,d\theta\,d\eta = 0$$

или

$$\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Но так как на фиг. 2 частица N лежит в плоскости (ξ, O, η) и начало координат находится не в центре кольца, а на кольце, т. е. смещено на расстояние $-a$, то в полученном нами уравнении надо заменить r на $(\xi - a)$, и мы получаем:

$$\frac{u}{\xi - a} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

4. Подставим в выражение $-\frac{u}{a-\xi}$ величину u из формулы (5):

$$-\frac{u}{a-\xi}=\frac{m\eta}{\pi\rho^2}\left(1+\frac{\xi}{2a}\right)\frac{1}{a-\xi}=$$

$$=\frac{m\eta}{2\pi a\rho^2}\,\frac{2a+\xi}{a-\xi}=\frac{m\eta}{2\pi a\rho^2}\,\frac{2+\frac{\xi}{a}}{1-\frac{\xi}{a}};$$

пренебрегая, как это делается во всей статье, величиной $\frac{\xi}{a}$, получим:

$$-\frac{u}{a-\xi}=\frac{m\eta}{\pi a\rho^2}.$$

A NOTE ON THE MOTION OF VORTEX RINGS

In this note Prof. Joukowsky discusses the problem of motion of a circular vortex ring carrying the fluid contained within in a motion of translation, and having on its surface a layer of vortices. The method of attack used by Prof. Joukowsky in solving the problem is much simpler than that given by Basset in his treatise. There is first determined the velocity of a point N situated at a small distance ρ from a point O of a vortex filament of vanishingly small thickness, the strength of the filament being m and the shape that of a ring of radius a. The velocity is made up of three component velocities (formulae 4 and 5), viz. 1) the velocity

$$w = \frac{m}{2\pi a}\left(\lg\frac{8a}{\rho} - 1\right)$$

in the direction at right angles to the plane of the vortex, 2) the velocity of vortical rotation about the tangent to the ring at the point O, and 3) the velocity of motion of rotation about the same tangent, this velocity having a finite variable magnitude $\frac{\xi}{\rho}$, where ξ — projection of ρ on the radius of the ring.

Assuming the vortex rings to be disposed on the surface of a thoroid, of which the radius of cross-sections is b, Prof. Jous kowsky determines the velocity imparted by all these ring- to a point N of the fluid contained within the thoroid. The resultant velocity of the point N due to all motions of the second group is found to be zero, that due to motions of the first group is

$$\frac{M}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{b} - 1\right]$$

where M is the strength of all the rings, and that due to motions of the third group is $\frac{M}{4\pi a}$. Hence all points within the thoroid have a common velocity in the direction of the axis of the thoroid

$$\frac{M}{2\pi a}\left[\lg\frac{8a}{b}-\frac{1}{2}\right]$$

and the whole mass of fluid within the thoroid is in a motion of translation.

О ПОДСАСЫВАЮЩЕМ ДЕЙСТВИИ ПОТОКА ВОЗДУХА НА ПЛАСТИНКУ

(1909 г.).

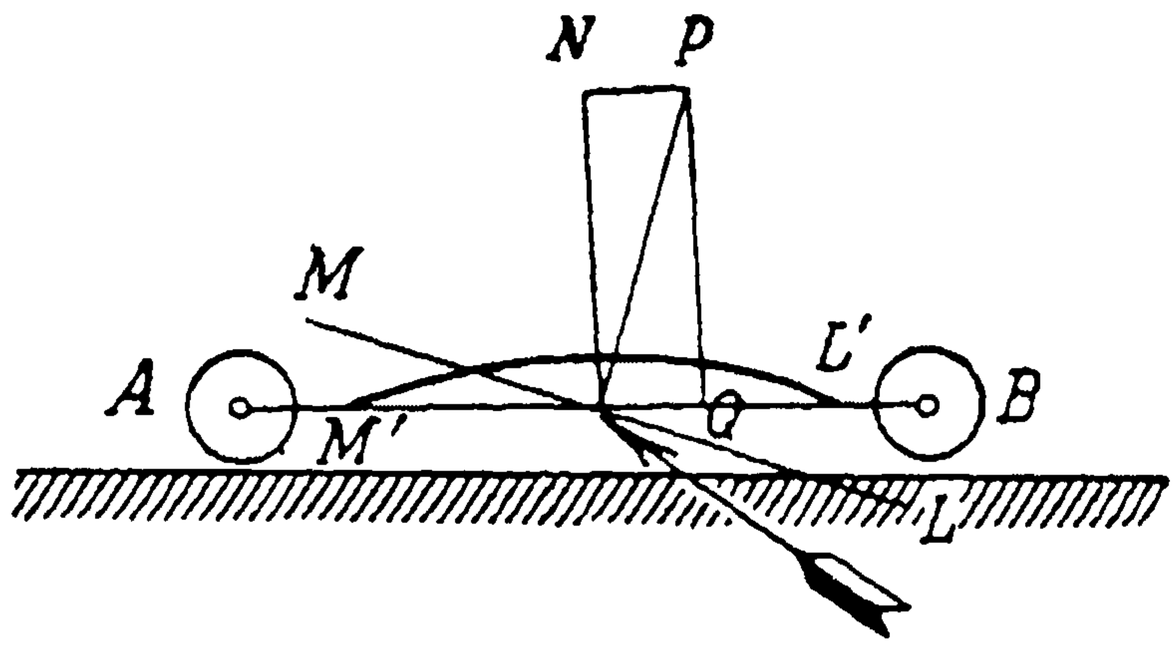
§ 1. Марсель Депре [1] в сообщении, напечатанном в Comptes Rendus, объясняет парение птиц восходящим потоком воздуха. Он описывает прибор (фиг. 1), в котором пластинка ML, увлекая за собою тележку AB, движется против потока воздуха, образующего с горизонталью AB некоторый малый угол $\frac{\pi}{2} - \mu$, больший угла наклонения пластинки к тележке. Действие прибора объясняется простым разложением силы P нормального давления ветра на пластинку: на подсасывающую силу Q и на силу N, уменьшающую вес аппарата. Для вогнутых пластинок может получиться подсасывающая сила против ветра даже в том случае, когда хорда $M'L'$ направлена по AB, как это следует из принципа Лилиенталя. Но надо думать, что подсасывающий эффект против ветра может получиться и для тонкой параллелепипедальной пластинки, направленной по AB. Это следует из наблюдений Д. П. Рябушинского [2] над самовращением секторов в потоке воздуха, движущегося перпендикулярно к плоскости сектора. На фиг. 2 изображен такой сектор, который, находясь в потоке воздуха, движущегося параллельно оси сектора O, может сохранять сообщенное ему вращение с некоторой угловой скоростью ω. Эта угловая скорость зависит от угла наклонения $\frac{\pi}{2} - \mu$ направления относительного ветра к плоскости сектора на его

---

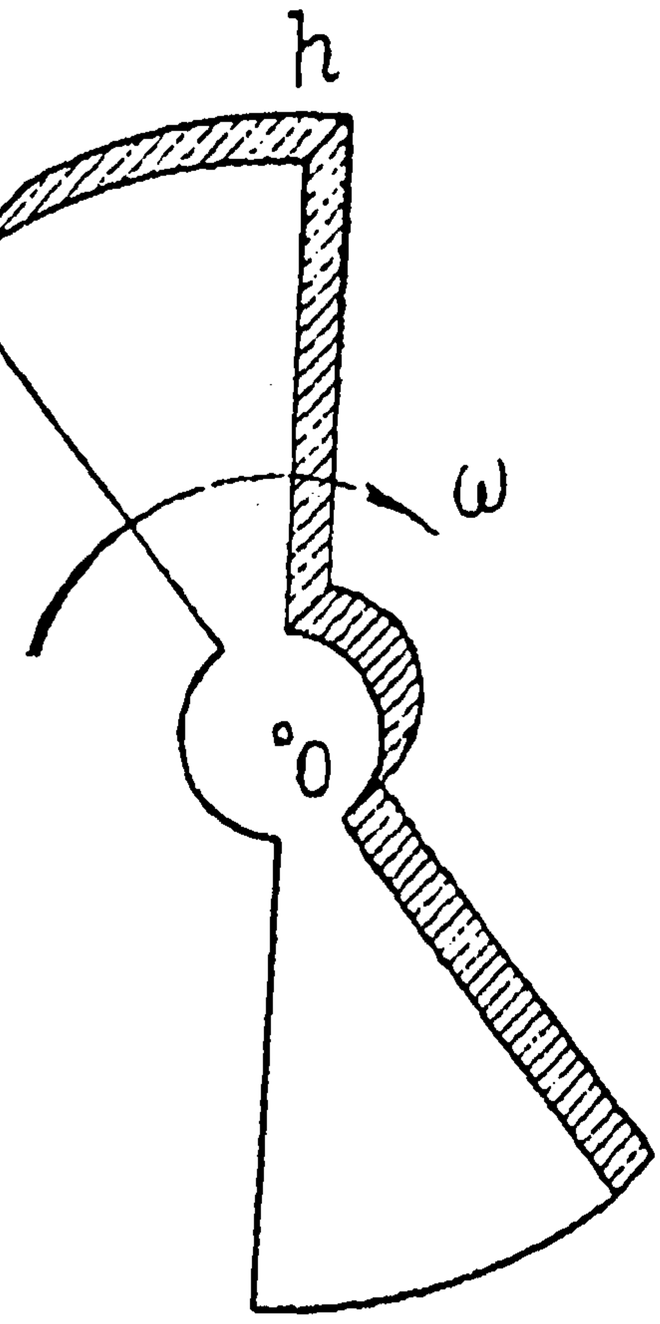
[1] Marcel Deprez, Comptes Rendus, T. CXLVI, № 15, 1908.

[2] Bulletin de l'Institut Aérodynamique de Koutchino, Fascicule 1.

концах и от толщины сектора h. При этом с уменьшением h возрастает ω. В предлагаемом сочинении мы указываем два течения жидкости, при которых может образоваться подсасывающий эффект ветра на пластинку. В первом течении невихревой поток образует при схождении с края пластинки свободную струю определенного



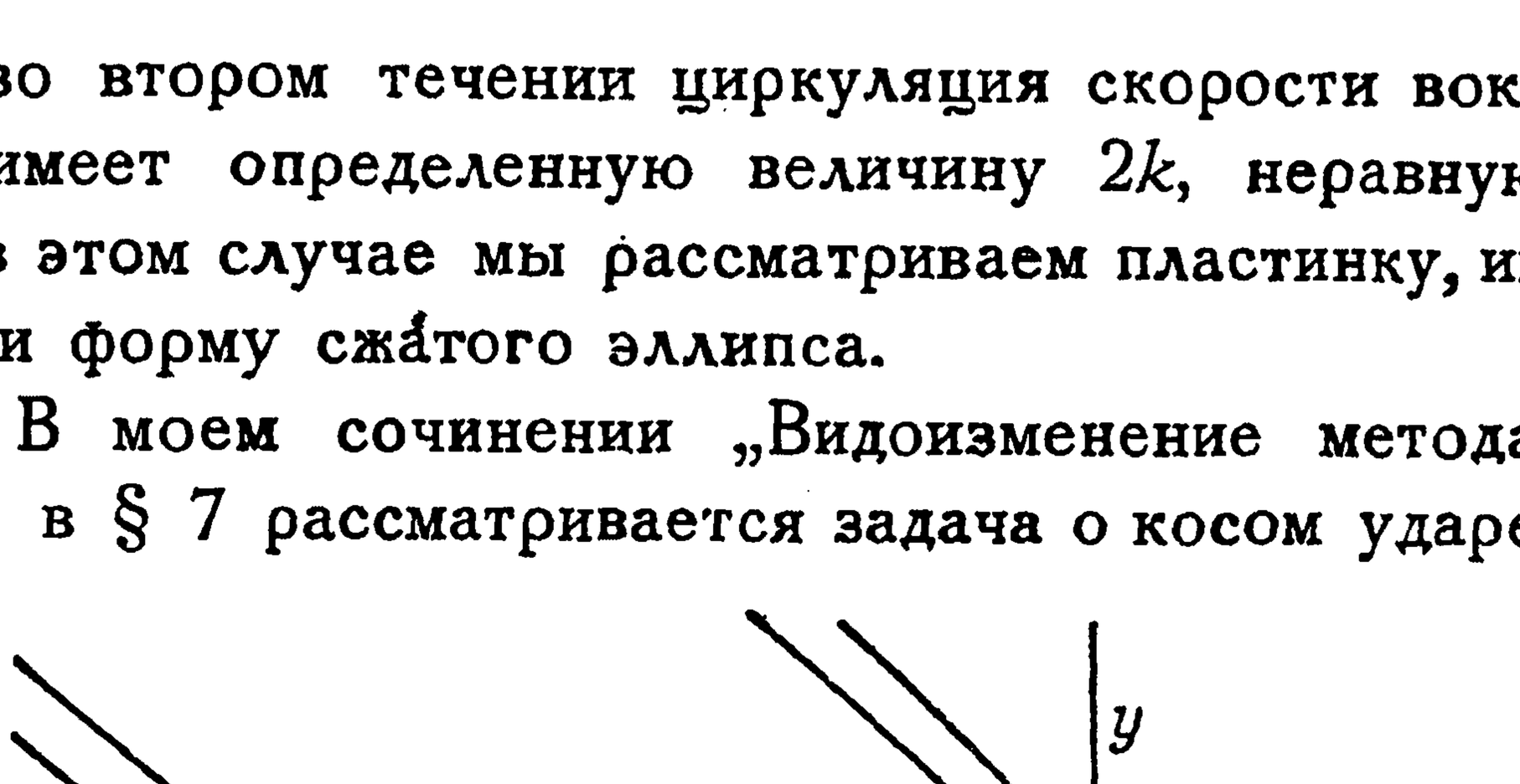
Фиг. 1.



Фиг. 2.

вида, а во втором течении циркуляция скорости вокруг пластинки имеет определенную величину $2k$, неравную нулю, причем в этом случае мы рассматриваем пластинку, имеющую в сечении форму сжа́того эллипса.

§ 2. В моем сочинении „Видоизменение метода Кирхгоффа“ [1] в § 7 рассматривается задача о косом ударе потока



Фиг. 3.

[1] Н. Жуковский. Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Москва, 1890.

на пластинку. По данным мной формулам [формулы (27), (36) и (54)] можно определить отрезок OE (фиг. 3), который струя, сбегая с пластинки $O'O$, образует на перпендикуляре OY к пластинке. Пока этот отрезок более толщины пластинки h, никакого подсасывающего эффекта в направлении OX не должно получаться. Но если угол $\frac{\pi}{2}-\mu$ уменьшается, то наступает, наконец, положение, когда EO становится очень близко к h; тогда пространство ODE замыкается и в нем развивается пониженное давление, на которое указывает Базен [1] в своей теории водосливов. Пониженное давление и вызывает подсасывающий эффект, действующий на пластинку в направлении OX. Указанное соображение позволяет по данному отношению $\frac{h}{2b}$ толщины пластинки к ее ширине $2b=OO'$ определять угол $\frac{\pi}{2}-\mu$, при котором начинается подсасывание. Разлагая скорость потока w относительно пластинки на скорость v, перпендикулярную пластинке, и скорость u, направленную по пластинке, замечаем, что эта последняя скорость будет равна и противоположна скорости движения пластинки, если речь идет о движении в потоке нормально к пластинке дующего ветра. Так как

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{u}{v},$$

то задача об определении нижнего предела скорости u сводится к определению μ под условием $OE=h$. На основании формул, приведенных в моем вышеуказанном сочинении, можно вывести несложное соотношение между μ и $\frac{h}{2b}$.

Потенциал скоростей φ на струе ODE выражается формулой:

$$\varphi=2bw\frac{\cos^4\mu}{\pi\cos\mu+4}\frac{1}{(\sin\theta+\sin\mu)^2}, \qquad (1)$$

---

[1] Bazin, Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir, Paris, 1898.

в которой θ выражает угол скорости жидкости с осью OY, считаемый положительным, когда скорость от оси OY уклоняется вправо.

Если назовем через dx и dy проекции на оси элемента ds линии тока ODE, то найдем:

$$dx = \frac{d\varphi}{w}\sin\theta, \quad dy = \frac{d\varphi}{w}\cos\theta,$$

откуда по формуле (1)

$$\left.\begin{aligned} dx &= -4bw\,\frac{\cos^4\mu}{\pi\cos\mu + 4}\,\frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^3}, \\ dy &= -4bw\,\frac{\cos^4\mu}{\pi\cos\mu + 4}\,\frac{\cos^2\theta d\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Определим значение угла $\theta = \nu$ для точки пересечения E струи с осью OY. Это значение найдется, составляя по первой формуле (2) величину x и полагая ее равной нулю:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\nu} \frac{\sin\theta d(\sin\theta)}{(\sin\theta+\sin\mu)^3} = 0. \qquad (3)$$

Так как интегрирование по частям дает нам:

$$\int \frac{\sin\theta d\sin\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^3} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^2} + \frac{1}{\sin\theta+\sin\mu}\right],$$

то формула (3) приводится к виду:

$$\frac{\sin\mu - 2\sin\nu}{(\sin\mu-\sin\nu)^2} - \frac{\sin\mu+2}{(1+\sin\mu)^2} = 0. \qquad (4)$$

Это квадратное уравнение имеет два корня. Один корень будет $\sin\nu = -1$ и соответствует пересечению контура ODE с осью OY в точке O; другой корень будет:

$$\sin\nu = \frac{\sin\mu}{2+\sin\mu} \qquad (5)$$

и соответствует точке пересечения E.

Обращаемся теперь ко второй формуле (2) и пишем на основании ее, что

$$\frac{h}{2b} = \frac{-2\cos^4\mu}{\pi\cos\mu + 4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\overline{\quad}} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(\sin\theta + \sin\mu)^3}. \tag{6}$$

Чтобы удобнее взять входящий сюда интеграл, делаем сначала подстановку:

$$\sin\theta + \sin\mu = t.$$

Эта подстановка дает нам:

$$-\int \sqrt{1-(t-\sin\mu)^2}\,\frac{dt}{t^3} = \int \sqrt{\cos^2\mu - t^2 + 2t\sin\mu}\,\frac{1}{t}\,d\left(\frac{1}{t}\right);$$

потом полагаем, что

$$\operatorname{tg}\mu + \frac{\cos\mu}{t} = \frac{\cos\mu}{\sin\theta + \sin\mu} + \operatorname{tg}\mu = z;$$

при этом пределы z_0 и z_1 при интеграции по z выразятся так:

$$z_0 = \frac{1}{\cos\mu}, \tag{7}$$

$$z_1 = \frac{1}{\cos\mu} + 2\frac{\operatorname{ctg}\mu}{1+\sin\mu}.$$

На основании сказанного формула (6) получает вид:

$$\frac{h}{2b} = \frac{2\cos^3\mu}{\pi\cos\mu + 4}\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{\cos^2\mu}\right)}\,dz. \tag{8}$$

Входящий сюда интеграл представляет площадь равносторонней гиперболы с действительной полуосью $\frac{1}{\cos\mu}$. Эта площадь отсекается от гиперболы хордой, перпендикулярной действительной оси, отстоящей от вершины гиперболы на расстояние $z_1 - z_0$. Выразив эту площадь, найдем искомое соотношение между $\frac{h}{2b}$ и μ, при котором начинается подсасывающий эффект потока на пластинку:

$$\frac{h}{2b} = \frac{\cos^3\mu}{\pi\cos\mu + 4}\left[z_1\sqrt{z_1^2 - \frac{1}{\cos^2\mu}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\cos^2\mu}\lg\left(\frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - \frac{1}{\cos^2\mu}}}{\frac{1}{\cos\mu}}\right)\right]. \qquad (9)$$

Здесь для вычисления второй части по таблицам гиперболических функций удобно ввести подстановку:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\cos\mu} + \frac{2\operatorname{ctg}\mu}{1+\sin\mu} = \frac{1}{\cos\mu}\cosh\xi, \\ \cosh\xi &= 1 + \frac{2\cos^2\mu}{(1+\sin\mu)\sin\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

В силу этой подстановки формула (9) примет вид:

$$\frac{h}{2b} = \frac{\cos\mu}{\pi\cos\mu + 4}\left[\frac{\sinh(2\xi)}{2} - \xi\right]. \qquad (11)$$

Мы видим из формулы (10), что с возрастанием μ величина ξ убывает, а потому отношение $\frac{h}{2b}$ тоже убывает. Это согласно с вышеупомянутыми наблюдениями над самовращением секторов. Пользуясь таблицами гиперболических функций, легко по данному μ из формулы (11) определить отношение $\frac{h}{2b}$.

§ 3. Предположим теперь, что пластинка имеет в перпендикулярном сечении форму весьма сжатого эллипса AB и что на нее ударяет под углом $\frac{\pi}{2} - \mu$ поток незавихренной жидкости, дающей по замкнутому контуру, охватывающему пластинку, циркуляцию скорости, равную $2k$, причем циркуляция берется в направлении, обратном движению стрелки часов. Покажем, что в рассматриваемом случае давление потока развивает поддерживающую силу, направленную по OY, и подсасывающую силу, направленную по OX. Будем пользоваться эллиптическими координатами, которым соответствует

фокальное расстояние 2α, близкое к длине нашей пластинки. Связь между декартовыми координатами y, x и эллиптическими ϑ, θ выражается известными формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cosh \vartheta \cos \theta, \\ y &= \alpha \sinh \vartheta \sin \theta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если бы пластинка обтекалась потоком, текущим на большом расстоянии от нее в направлении XO со скоростью w_1, при циркуляции скорости по охватывающему контуру, равной нулю, то потенциальная функция была бы

$$\varphi_1 = -w_1 \alpha \cosh \vartheta \cos \theta + Me^{-\vartheta} \cos \theta, \tag{13}$$

где постоянное M надо определить под условием, что при значении $\vartheta = \vartheta_0$, соответствующем эллипсу, ограничивающему пластинку, имеем $\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0$. Мы получим:

$$M = -w_1 \alpha \sinh \vartheta_0 e^{\vartheta_0}.$$

Подставляя эту величину в формулу (13), получим для точек, лежащих на пластинке:

$$\varphi_1 = -w_1 \alpha e^{\vartheta_0} \cos \theta.$$

Если бы мы имели поток, текущий в бесконечности со скоростью w_2 в направлении OY, то ему соответствовала бы на поверхности пластинки функция скорости:

$$\varphi_2 = w_2 x e^{\vartheta_0} \sin \theta. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь вихревое течение жидкости, в котором скорость в бесконечности равна нулю, а циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающему пластинку, взятая против стрелки часов, есть $2k$. Это течение имеет потенциальную функцию скоростей:

$$\varphi_3 = \frac{k}{\pi} \theta. \tag{16}$$

Если сложить кинематически все три рассматриваемые течения жидкости, то получится течение, имеющее в бесконечности скорость

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2},$$

наклоненную к оси OY под углом μ, причем

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{w_1}{w_2}. \tag{17}$$

Циркуляция скорости этого течения по контуру, охватывающему пластинку, будет $2k$.

Значение потенциальной функции скоростей на поверхности пластинки ($\vartheta = \vartheta_0$) будет такое:

$$\varphi = \alpha e^{\vartheta_0}(-w_1\cos\theta + w_2\sin\theta) + \frac{k}{\pi}\theta. \tag{18}$$

Определим отсюда скорость V по контуру эллипса. Мы имеем по формуле (12):

$$V = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}} =$$

$$= \frac{d\varphi}{\alpha d\theta}\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\vartheta_0\sin^2\theta + \sinh^2\vartheta_0\cos^2\theta}} =$$

$$= \frac{d\varphi}{\alpha d\theta}\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\vartheta_0 - \cos^2\theta}},$$

откуда по формуле (18):

$$V = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\vartheta_0 - \cos^2\theta}}\left\{(w_1\sin\theta + w_2\cos\theta)\,e^{\vartheta_0} + \frac{k}{\pi\alpha}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\vartheta_0 - \cos^2\theta}}\left[we^{\vartheta_0}\cos(\theta - \mu) + \frac{k}{\pi\alpha}\right]. \tag{19}$$

Критические точки на контуре пластинки найдутся, приравнивая V нулю и определяя параметр θ из уравнения:

$$\cos(\theta - \mu) = -\frac{ke^{\vartheta_0}}{\pi\alpha w}. \tag{20}$$

Если $\frac{\pi}{2} + \lambda$ будет угол, косинус которого представляется второй частью уравнения (20), то искомые значения θ будут:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda + \mu,$$

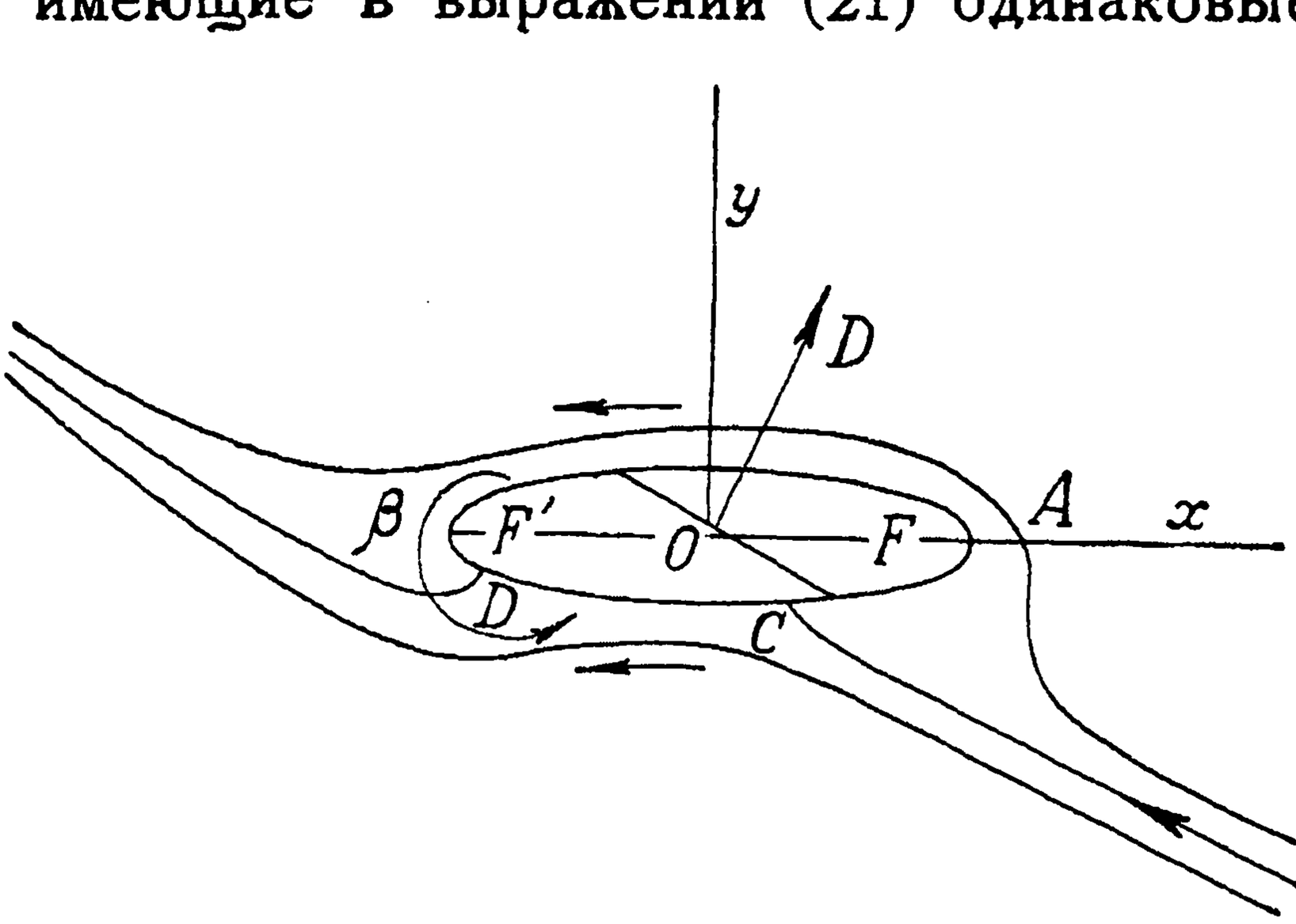
$$\theta = 3\frac{\pi}{2} - \lambda + \mu.$$

Эти значения определяют на фигуре две критические точки C и D, служащие точками раздела струй текущей жидкости.

Гидродинамическое давление во всякой точке, прилегающей к пластинке, на основании формулы (19) будет такое:

$$p = \text{const} - \frac{\rho}{2(\cosh^2 \vartheta_0 - \cos^2 \theta)} \left(e^{2\vartheta_0} w^2 \cos^2 (\theta - \mu) + \right.$$
$$\left. + \frac{k^2}{\pi^2 a^2} + \frac{2ke^{\vartheta_0}}{\pi a} w \cos (\theta - \mu) \right). \qquad (21)$$

Составляя по этой формуле проекции X и Y сил давления на оси координат, построенные на фиг. 4, заметим, что все члены, имеющие в выражении (21) одинаковые значения



Фиг. 4.

для θ и $\theta + \pi$, в состав сил X и Y не войдут, и нам надо только обратить внимание на член:

$$\frac{-ke^{\vartheta_0} w\rho}{\pi a (\cos h^2 \vartheta_0 - \cos^2 \theta)} \cos (\theta - \mu),$$

от которого получается:

$$X = \frac{kwe^{\vartheta_0}\rho}{\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos (\theta - \mu)}{\cosh^2 \vartheta_0 - \cos^2 \theta} \frac{dy}{ds} ds,$$

$$Y = -\frac{kwe^{\vartheta_0}\rho}{\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos (\theta - \mu)}{\cosh^2 \vartheta_0 - \cos^2 \theta} \frac{dx}{ds} ds,$$

где интеграция распространяется на весь контур пластинки. Сокращая на ds и выражая диференциалы dy и dx по формуле (12) через $d\theta$, получаем при отбрасывании членов, сокращающихся в пределах интеграции:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{kwe^{\vartheta_0}}{\pi}\,\rho\sinh\vartheta_0\cos\mu\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta},\\ Y &= \frac{kwe^{\vartheta_0}}{\pi}\,\rho\cosh\vartheta_0\sin\mu\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Совершаем интегрирование:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}=\cosh^2\vartheta_0\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}-\int_0^{2\pi}d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cosh^2\vartheta_0\sin^2\theta+\sinh^2\vartheta_0\cos^2\theta}=$$

$$=\frac{4}{\sinh\vartheta_0\cosh\vartheta_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{ctg}\operatorname{h}\vartheta_0\operatorname{tg}\theta)}{1+\operatorname{ctgh}^2\vartheta_0\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{2\pi}{\sinh\vartheta_0\cosh\vartheta}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}=2\pi\left(\frac{\cosh\vartheta}{\sinh\vartheta}-1\right)=\frac{2\pi e^{-\vartheta_0}}{\sinh\vartheta_0}.$$

Другой интеграл, входящий во вторую формулу (22) будет иметь величину:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}=\frac{2\pi e^{-\vartheta_0}}{\cosh\vartheta_0}.$$

Это следует из того, что, складывая оба вышенаписанные равенства, получаем ранее выведенную формулу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cosh^2\vartheta - \cos^2\theta} = 2\pi e^{-\vartheta_0} \frac{\cosh\vartheta_0 + \sinh\vartheta_0}{\cosh\vartheta_0 \sinh\vartheta_0} = \frac{2\pi}{\cosh\vartheta_0 \sinh\vartheta_0}.$$

Подставляем величины найденных интегралов в формулу (22) и обращаем внимание на то, что $w\cos\mu = w_2$, $w\sin\mu = w_1$. Получаем выражение компонентов силы давления на пластинку по осям координат:

$$\left.\begin{aligned} X &= 2kw_2\rho, \\ Y &= 2kw_1\rho. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Так как при принятом направлении осей оба эти компонента положительны, то поток дает на нашей фиг. 4 подъемную силу Y и подсасывающий эффект X против относительного ветра. Формулы (23) вполне согласны с общей теоремой, предложенной в моей статье „О присоединенных вихрях“. Согласно этой теореме, сила действия потока на пластинку получилась бы через умножение вектора w на $2k$ и через его поворот на прямой угол в сторону, обратную циркуляции. Проекции полученного при этом вектора на оси координат, как легко усмотреть, и выражаются формулами (23).

Эта статья была доложена Московскому математическому обществу 23 сентября 1908 г. и напечатана в „Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания“, т. XIV, вып. 2, 1909 г. *Прим. ред.*

ON SUCTION EXERTED ON LAMINA BY FLOW OF AIR

By the term suction Prof. Joukowsky denotes the projection on the direction of the lamina of the pressure experienced by the lamina when the projection is directed opposite to the flow.

Prof. Joukowsky distinguishes two kinds of flow in which suction can be produced.

In the flow of the first kind — a non-vortical flow — a free current is formed in the fluid where this departs from the edge of the lamina (Fig. 3). By formulae given in the paper „A Modification of Kirchhoff's Method" the segment $OE = h$ can be determined that is cut on the perpendicular OY to the lamina by the current departing from the lamina $O'O$ (formula 11). In formula (11) μ is the angle between the direction of flow and the normal to the lamina, $2b$ is the width of the lamina, and ξ is the quantity given by formula (10). So long as the segment OE is larger than the thickness of the lamina there will be no suction in the direction of the X-axis. But if angle μ is increased there will arise the condition when OE will but slightly differ from the thickness of the lamina; the space ODE will then become closed, thus forming a region of reduced pressure that will cause suction in the direction of OX.

As it is seen from formula (11), an increase of μ brings about a reduction of h. This result is in perfect agreement with Riaboushinsky's experiments on autorotation of a sector (Fig. 2) washed by a flow of air at right angles to the plane of the sector.

In the flow of the second kind, the velocity circulation around the plate has a determinate value $2k$ not equal to zero, and the plate has a cross-section in the form of a narrow ellipse. The velocity potential is made up of three functions, viz, fun-

ction φ_1 (13), function φ_2, obtained from φ_1 by replacing w_1 and the cosines by w_2 and sines, and function φ_3 (16). The sum $\varphi_1 + \varphi_2$ of the two first of these functions determines a flow of which the velocity projections on the axes are $-w_1$ and w_2, and which has no circulation around the lamina; the third function adds to the flow a circulation of magnitude $2k$ around the lamina. Both projections X and Y of the pressure are positive. The first of these projections produces suction. The formulae obtained for X and Y fully agree with the general theorem enunciated by Prof. Joukowsky in the paper „On Adjoined Vortices".

О ЗАМЕНЕ ДИСКА РЕЛЕЯ ПРОДОЛГОВАТОЙ ПЛАСТИНКОЙ

(*1909 г.*)

В. Д. Зернов [1] устроил прибор для определения абсолютной силы звука, в котором диск Релея заменяется продолговатой пластинкой. В этой заметке предлагается простая формула для определения момента гидродинамических давлений стоячей звуковой волны на пластинку, перпендикулярное сечение которой есть эллипс. Гидродинамическое давление невихревого течения выражается известной формулой:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{V^2}{2}, \tag{1}$$

в которой ρ — плотность жидкости, V — ее скорость в данной точке, а φ — потенциальная функция скоростей. Примем для рассматриваемого случая

$$\varphi = \psi f, \tag{2}$$

где ψ — периодическая функция времени, а f — функция координат x, y, удовлетворяющая уравнению Лапласа, дающая на поверхности пластинки $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ и в бесконечности

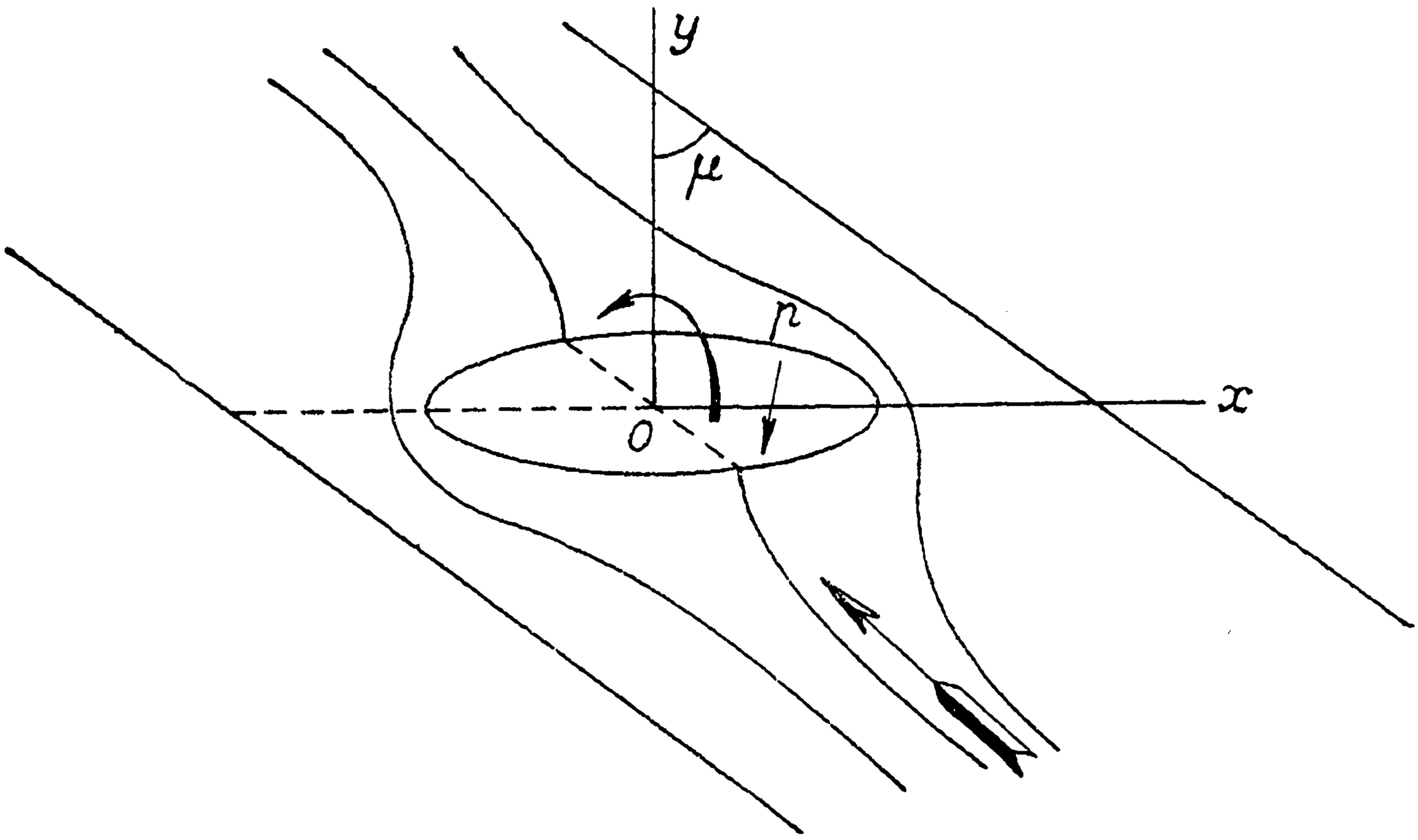
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -w \sin \mu, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= w \cos \mu. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если наибольшее значение периодической функции есть единица, то w представляет наибольшую скорость колеба-

[1] В. Д. Зернов, Абсолютное измерение силы звука, Москва, 1909.

тельного движения; что касается угла μ, то он заключен между направлением колебательного движения и осью Oy, как это изображено на фиг. 1. Чтобы удобнее определить функцию f, воспользуемся эллиптическими координатами ϑ и θ, которые связаны с декартовыми координатами x, y известными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cosh \vartheta \cos \theta, \\ y &= \alpha \sinh \vartheta \sin \theta, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$



Фиг. 1.

причем величина α равна фокусному расстоянию эллипса, соответствующего сечению пластинки. Если бы течение воздуха было направлено по xO со скоростью $w \sin \mu$, то функция f получила бы значение:

$$f_1 = -w \sin \mu \alpha \cosh \vartheta \cos \theta + Me^{-\vartheta_0} \cos \theta,$$

где постоянное M определилось бы из условия, что при $\vartheta = \vartheta_0$, причем ϑ_0 — значение параметра на поверхности пластинки, $\frac{\partial f_1}{\partial \vartheta}$ обращается в нуль. Это дает нам:

$$-w \sin \mu \alpha \sinh \vartheta_0 - Me^{-\vartheta_0} = 0,$$

$$M = -\alpha w \sin \mu e^{\vartheta_0} \sinh \vartheta_0.$$

Подставляя значение M в выражение для f_1, найдем для точек, лежащих на поверхности пластинки:

$$f_1 = -w\alpha \sin \mu e^{\vartheta_0} \cos \theta. \tag{5}$$

Рассуждая подобным же образом о случае, в котором течение совершается в направлении Oy со скоростью $w \cos \mu$, найдем для него:

$$f_2 = w\alpha \cos \mu e^{\vartheta_0} \sin \theta. \tag{6}$$

Если сложим f_1 и f_2, то получим значение на поверхности пластинки функции f в предположении, что направление течения образует с осью Oy уголь μ. Это значение будет:

$$f = w\alpha e^{\vartheta_0} \sin (\theta - \mu). \tag{7}$$

На основании формулы (2) потенциальная функция скоростей для точек, лежащих на поверхности пластинки, представится в виде:

$$\varphi = w\alpha\psi e^{\vartheta_0} \sin (\theta - \mu). \tag{8}$$

С помощью формул (8) и (4) определим скорость жидкости V на поверхности пластинки:

$$V = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{d\theta} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}} = \frac{w\psi e^{\vartheta_0} \cos (\theta - \mu)}{\sqrt{\cosh^2 \vartheta_0 - \cos^2 \theta}}.$$

Подстановка формул (2) и (9) в формулу (1) дает для гидродинамического давления на поверхности пластинки выражение:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} + w\alpha \frac{\partial\psi}{\partial t} e^{\vartheta_0} \sin (\theta - \mu) - \frac{w^2\psi^2 e^{2\vartheta_0} \cos^2 (\theta - \mu)}{2(\cosh^2 \vartheta_0 - \cos^2 \theta)}. \tag{10}$$

Составим теперь величину L момента сил давления относительно оси O нашей пластинки (фиг. 1).

Величина момента, отнесенная к единице длины пластинки, выразится формулой:

$$L = -\int p\left(y\frac{dy}{ds}+x\frac{dx}{ds}\right)ds = -\int_0^{2\pi} p\left(y\frac{dy}{d\theta}+x\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p\frac{d(x^2+y^2)}{d\theta}d\theta.$$

Но формула (4) дает нам:

$$x^2+y^2 = \alpha^2(\cosh^2\vartheta - \sin^2\theta),$$

$$d(x^2+y^2) = -\alpha^2\sin 2\theta d\theta,$$

поэтому

$$L = -\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2\pi} p\sin 2\theta d\theta. \qquad (11)$$

Подставляя в формулу (11) значение p, обращаем внимание на то, что члены, содержащие в числителе $\sin^2\theta\cos\theta$ и $\sin^3\theta\cos\theta$, в пределах интеграции дадут в результате нули, потому что имеют одинаковые по величине и различные по знаку значения при θ и $\pi-\theta$; равным образом члены, содержащие в числителе $\cos^2\theta\sin\theta$ и $\cos^3\theta\sin\theta$, в пределах интеграции дадут в результате нули, так как имеют равные по величине, но различные по знаку значения при θ и $2\pi-\theta$. У нас остается только член, содержащий в числителе $\sin^2\theta\cos^2\theta$. Таким образом

$$L = -2w^2\alpha^2\psi^2\rho\sin 2\mu e^{2\vartheta_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}d\theta. \qquad (12)$$

Входящий сюда интеграл легко берется:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta}d\theta =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta + \cosh^2\vartheta_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta d\theta}{\cosh^2\vartheta_0-\cos^2\theta} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cosh\vartheta_0 e^{-\vartheta_0} = \frac{\pi}{4}e^{-2\vartheta_0}.$$

Подставляя в формулу (12), получаем искомое выражение момента гидродинамических давлений, действующих на пластинку эллиптического сечения:

$$L = -\frac{\pi}{2}\psi^2 w^2 \alpha^2 \rho \sin 2\mu. \qquad (13)$$

Знак (—) в этой формуле показывает, что при $\mu < \frac{\pi}{2}$ гидродинамические силы стремятся повернуть пластинку (фиг. 1) против стрелки часов. Если колебание скорости потока совершается довольно быстро, как это имеет место в звуковой волне, то надо рассматривать среднюю величину L и брать в формуле (14) среднее значение периодической функции ψ^2. Например если $\psi = \sin\frac{2\pi t}{T}$, то надо брать среднюю величину от $\sin^2\frac{2\pi t}{T}$ за время, значительно превосходящее T, т. е. подставлять в формулу (14) вместо ψ^2 величину, равную $\frac{1}{2}$.

Формула (14) показывает нам, что момент сил, вращающих пластинку в стоячей звуковой волне, пропорционален квадрату наибольшей скорости колеблющегося воздуха, синусу двойного угла, образованного направлением колебания с малой осью эллиптического сечения пластинки, и квадрату фокусного расстояния этого сечения. Последнее обстоятельство приводит нас к любопытному заключению, что звуковая волна действует на все софокусные эллиптические пластинки одинаково.

Эта статья была сообщена в Московском математическом обществе и напечатана в „Математическом сборнике“, т. XXVII, 1909 г. *Прим. ред.*

ON SUBSTITUTION OF AN ELONGATED LAMINA FOR RAYLEIGH'S DISC

In this note Prof. Joukowsky deduces a simple formula for the moment of hydrodynamic pressure of a standing sound wave on a plate of which the normal cross-section is an ellipse.

The velocity potential is expressed as the product $\varphi = \psi f$, where ψ is a periodic function of time, and f is a function of coordinates, determining a flow of the kind considered in the article „On Suction Exerted on a Lamina by a Flow of Air", only it is assumed that the velocity circulation $2k$ around the lamina is equal to zero. The moment of hydrodynamic pressure is given by formula (13), which shows that the hydrodynamic forces tend to place the major axis of the plate at right angles to the direction of the sound wave, and that the moment depends on the distance between the foci, and on the angle between the direction of the axes and that of the sound wave, and does not depend on the dimensions of the plate.

О СНЕЖНЫХ ЗАНОСАХ

(1911 г.)

§ 1. Когда вьюга несет низовой снег и встречает на своем пути неподвижные предметы, тогда перед преградой образуется снежная выемка, а на некотором расстоянии от преграды — снежный бугор. В этой заметке дается объяснение упомянутого явления, предполагая, что преграждающий предмет есть выступающий из снега весьма длинный круглый цилиндр радиуса основания a с горизонтальной осью, перпендикулярной направлению ветра.

§ 2. Направим (фиг. 1) ось Oz по оси цилиндра, ось Ox — навстречу ветру и ось Oy — по вертикали вверх.

Скорость ветра во время вьюги быстро возрастает при удалении от поверхности земли. Представим ее формулой:

$$u = -w - \lambda y. \tag{1}$$

Этой формуле соответствует функция тока:

$$\psi_1 = -wy - \frac{\lambda y^2}{2} = -wr\sin\theta - \frac{\lambda}{2} r^2 \sin^2\theta, \tag{2}$$

потому что при этом проекции скорости u и v на оси Ox и Oy будут:

$$u = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -w - \lambda y,$$

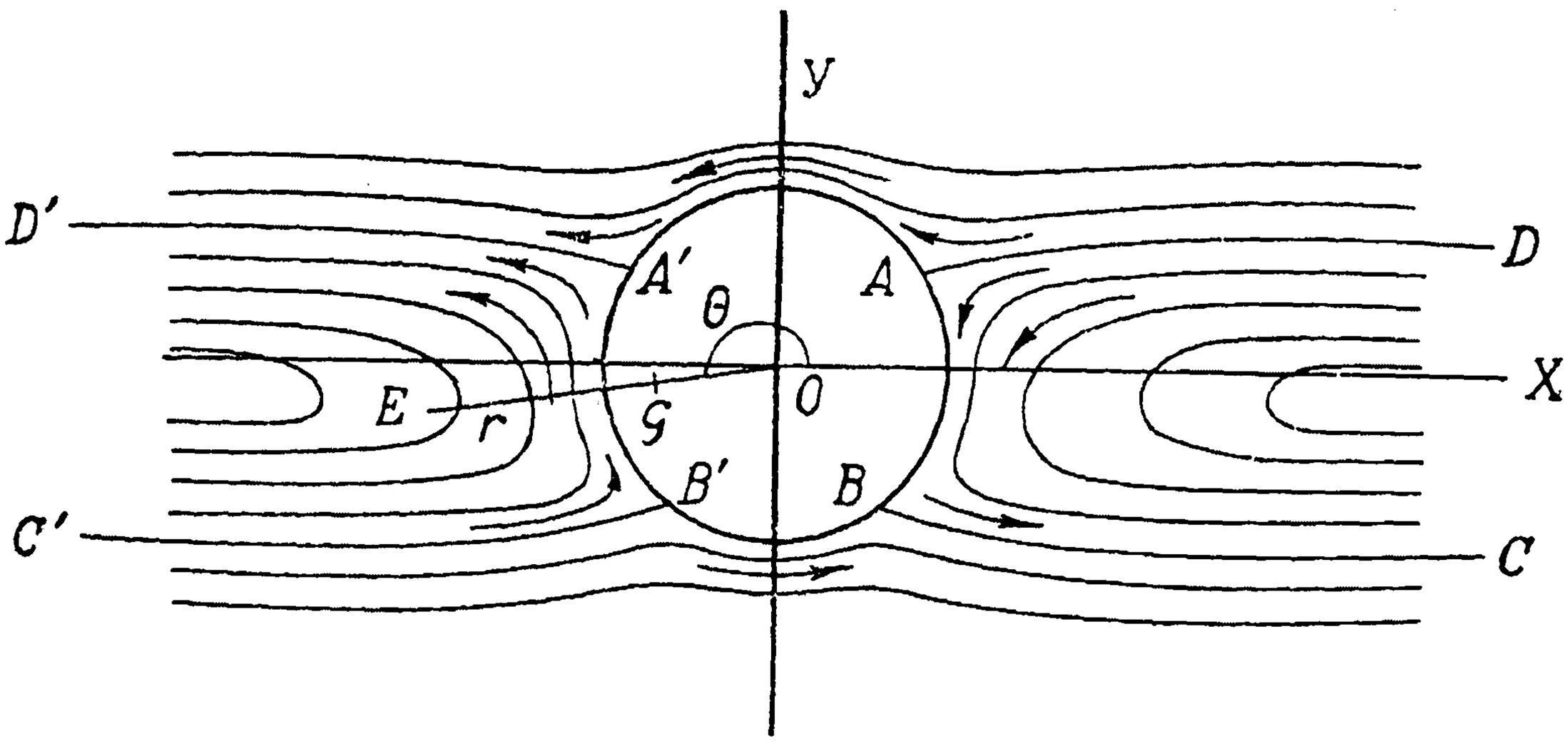
$$v = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0.$$

Величины r и θ представляют радиус-вектор относительно точки O и угол, образуемый этим радиусом с осью Ox, считая его против стрелки часов.

Для того чтобы на поверхности цилиндра скорость по нормали была равна нулю, прибавим к данному течению еще два другие, выражаемые функциями токов ψ_2 и ψ_3:

$$\psi_2 = \frac{wa^2y}{r^2} = \frac{wa^2\sin\theta}{r}, \tag{3}$$

$$\psi_3 = -\frac{\lambda a^4(x^2-y^2)}{4r^4} = -\frac{\lambda a^4(1-2\sin^2\theta)}{4r^2}. \tag{4}$$



Фиг. 1.

Функция тока сложного течения будет:

$$\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 =$$

$$= -\left[wr\sin\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\lambda r^2\sin^2\theta}{2}\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right) + \frac{\lambda a^4}{4r^2}\right] \tag{5}$$

и даст скорость по радиусу-вектору:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} = -w\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) - \lambda r\sin\theta\cos\theta\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right), \tag{6}$$

которая обращается в нуль при $r = a$.

Уравнение линий тока будет:

$$wy\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\lambda}{2}y^2\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right) + \frac{\lambda}{4}\frac{a^4}{r^2} = \text{const}. \tag{7}$$

При

$$\text{const} = \frac{\lambda}{4}a^2$$

мы найдем раздельную линию токов, уравнение которой распадается на два множителя:

$$\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left[wy+\frac{\lambda}{2}y^2\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\lambda a^2}{4}\right]=0. \qquad (8)$$

Приравнивая нулю первый множитель, получаем уравнение окружности перпендикулярного сечения цилиндра, а приравнивая нулю второй множитель, получаем уравнение некоторой кривой четвертого порядка:

$$y^2\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{2w}{\lambda}y-\frac{a^2}{2}=0, \qquad (9)$$

которая симметрична относительно оси Oy.

Чтобы исследовать вид этой кривой, решим уравнение (9) относительно r^2:

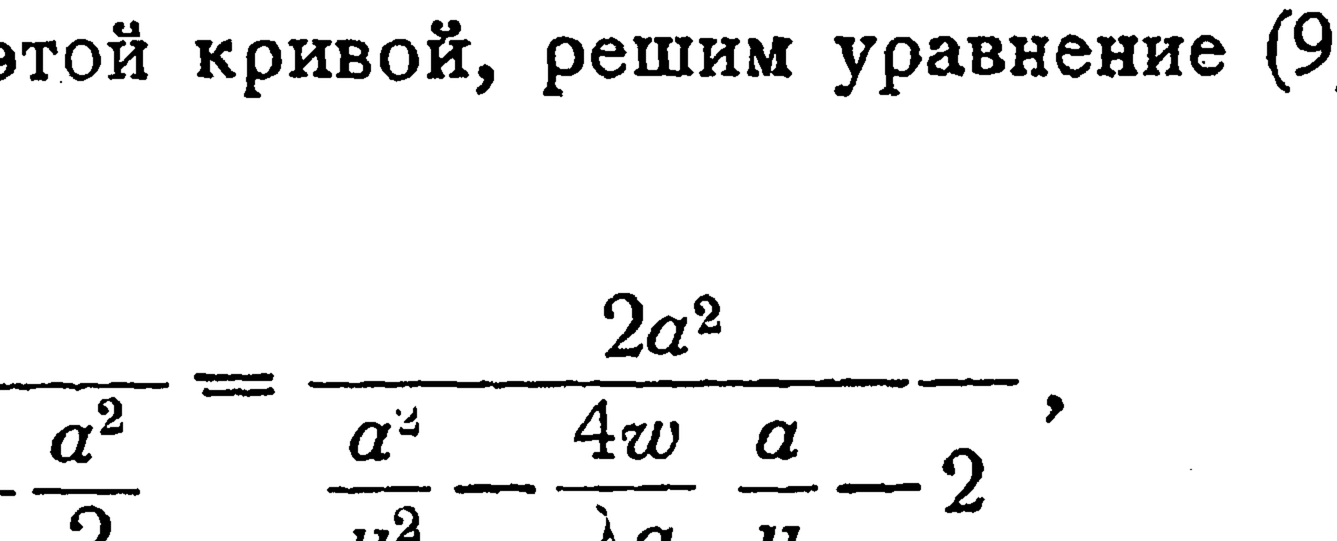
$$r^2=\frac{a^2y^2}{-y^2-\frac{2w}{\lambda}y+\frac{a^2}{2}}=\frac{2a^2}{\frac{a^2}{y^2}-\frac{4w}{\lambda a}\frac{a}{y}-2},$$

потом подставим

$$\frac{a^2}{r^2}=\eta, \qquad \frac{a}{y}=\xi.$$

Это даст нам уравнение параболы:

$$2\eta=\xi^2-\frac{4w}{\lambda a}\xi-2, \qquad (10)$$



Фиг. 2.

которая изображена на фиг. 2. Парабола пересекает ось $O\xi$ в точках M и M', имеющих абсциссы:

$$\xi_1=\frac{2w}{\lambda a}+\sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2a^2}+2},$$

$$\xi_2=\frac{2w}{\lambda a}-\sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2a^2}+2}. \qquad (11)$$

Определенные по этим абсциссам величины:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{a}{\xi_1} = -\frac{a}{2}\xi_2, \\ y_2 &= \frac{a}{\xi_2} = -\frac{a}{2}\xi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

дают нам значения ординат y_1 и y_2 точек кривой, выраженной уравнением (9), для $r = \infty$. Ордината y_1 положительна, а ордината y_2 отрицательна и по абсолютной величине более y_1. Это показывает, что кривая, выраженная уравнением (9), имеет четыре ветви (фиг. 1), из которых ветви AD и $A'D'$ расстилаются по асимптоте, параллельной оси Ox и отстоящей от нее на расстоянии y_1, а ветви BC и $B'C'$ расстилаются по асимптоте, параллельной оси Ox и отстоящей от этой оси на расстоянии y_2.

Так как η должно быть положительно и не более 1, то ξ может на фиг. 2 изменяться только от OM до OL или от OM' до OL', причем

$$LN = L'N' = 1.$$

Абсциссы $OL = \xi_3$ и $OL' = \xi_4$ найдутся, положив в уравнении (10) $\eta = 1$. Они будут иметь величины:

$$\left.\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{2w}{\lambda a} + \sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2 a^2} + 4}, \\ \xi_4 &= \frac{2w}{\lambda a} - \sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2 a^2} + 4}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

и дадут на фиг. 1 ординаты y_3 и y_4 критических точек нулевой скорости A, A', B, B':

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= \frac{a}{\xi_3} = -\frac{a}{4}\xi_4, \\ y_4 &= \frac{a}{\xi_4} = -\frac{a}{4}\xi_3. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

В этих точках рассматриваемые ветви пересекают окружность $ABB'A'$ под некоторыми косыми углами, так как из трех функций тока, вошедших в состав функции ψ_0, функция

тока ψ_1 представляет завихренное движение. На фиг. 2 видно, что непрерывному уменьшению η от 1 до 0 соответствует непрерывное уменьшение по абсолютной величине ξ от ξ_3 до ξ_1 или от ξ_4 до ξ_2. Это показывает нам, что ветви AD, $A'D'$, BC и $B'C'$ с возрастанием r непрерывно приближаются к своим асимптотам.

Все возможные линии токов, получаемые с помощью уравнения (7) при различных значениях const, представляют четыре группы линий: линии, располагающиеся сверху линии $D'A'AD$; линии, располагающиеся снизу линии $CBB'C'$; линии, заключенные внутри контура $DABC$; линии, заключенные внутри контура $D'A'B'C'$. Две последние группы линий, будучи симметричны друг относительно друга по отношению оси Oy, имеют форму, аналогичную параболам, причем все их вершины расположены снизу оси $x'Ox$. Последнее обстоятельство можно доказать, отыскивая точки прикосновения окружностей, проведенных из центра O, с рассматриваемыми линиями токов. В таких точках скорость $\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}$ по радиусу-вектору есть нуль, поэтому из уравнения (6) получаем:

$$\cos\theta = 0, \tag{15}$$

или

$$\sin\theta = -\frac{wr}{\lambda(r^2 + a^2)}. \tag{16}$$

Первое равенство показывает, что для линий первой и второй групп все точки прикосновения лежат на оси Oy, из второго равенства следует, что все точки прикосновения для линий третьей и четвертой групп ниже оси $x'Ox$. При этом из формулы (16) следует, что данное расстояние r точки прикосновения E вполне определяет направление вектора OE и ему симметричного вектора с правой стороны.

На фиг. 1 изображены линии токов всех четырех упомянутых групп и обозначены стрелками направления скоростей течения.

§ 3. Прибавим еще к изученному в предыдущем параграфе плоскопараллельному течению жидкости течение, вызы-

ваемое вихревой площадкой E (фиг. 3) и ее зеркальным изображением G относительно круга $ABB'A'$, так что

$$OG \cdot OE = a^2. \tag{17}$$

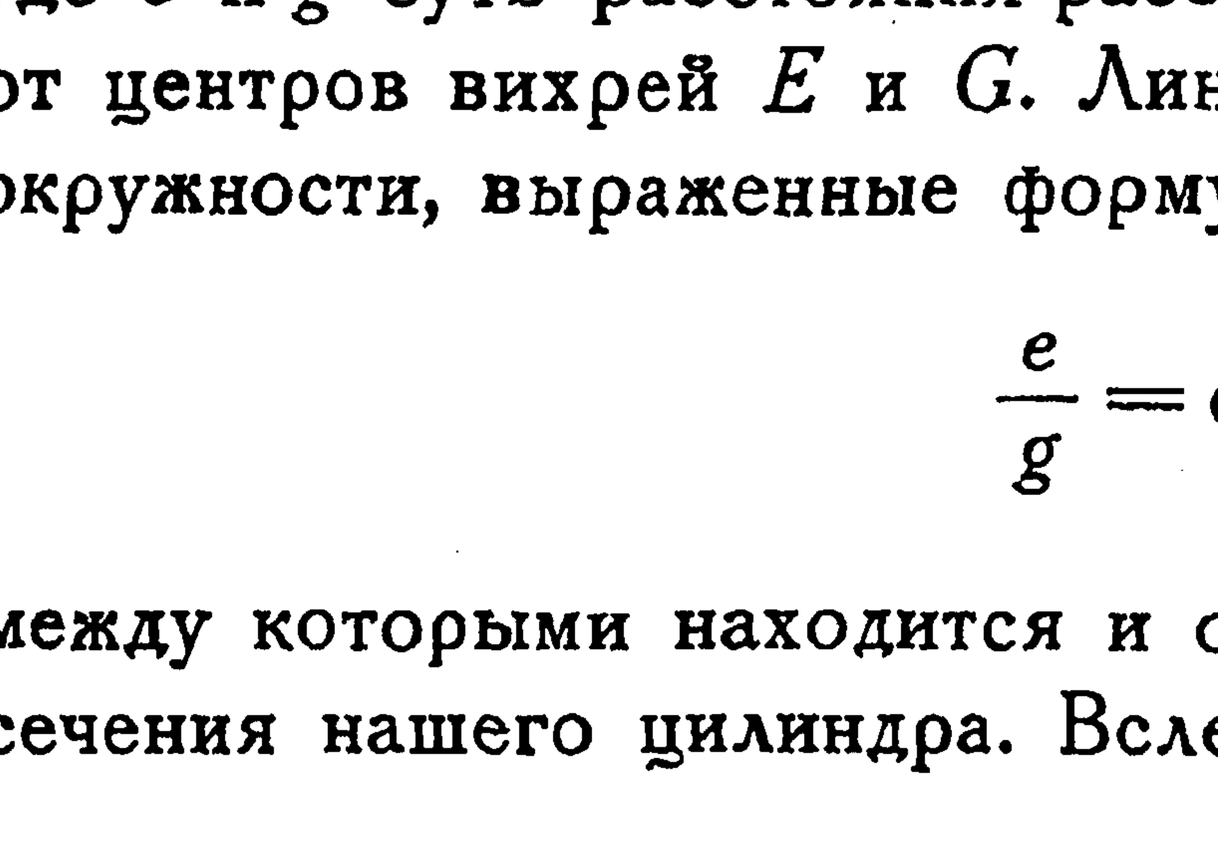
При этом примем, что оба вихря имеют одно и то же напряжение k, но вихрь с центром E вращается по стрелке часов, а вихрь с центром G — против стрелки часов. Движение жидкости, вызываемое парой указанных вихрей, имеет функцию тока:

$$\psi_1 = \frac{k}{\pi} lg \frac{e}{g}, \tag{18}$$

где e и g суть расстояния рассматриваемой точки жидкости M от центров вихрей E и G. Линии токов этого движения суть окружности, выраженные формулой:

$$\frac{e}{g} = \text{const}, \tag{19}$$

между которыми находится и окружность перпендикулярного сечения нашего цилиндра. Вследствие этого прибавление упомянутого нового течения не нарушает условия равенства нулю нормальных скоростей на поверхности цилиндра. Место точки E и напряжение вихря k выберем так, чтобы центр вихревой площадки E оставался неподвижным. Этот центр будет получать скорость, во-первых, от движения, описанного в § 2, и во-вторых, от действия вихря G. Так как последняя скорость перпендикулярна вектору GE, то место E надо выбрать под условием удовлетворения уравнению (16), при котором скорость от функции тока ψ_0 направлена перпендикулярно к радиусу-вектору $OE = r$. Эта скорость будет направлена, как показывают стрелки фиг. 1, вверх; скорость же от действия вихря G на частицу жидкости E будет напра-



Фиг. 3.

влена вниз, так как вихрь G вращает против стрелки часов. Для того чтобы вихрь E был неподвижен, нужно только, чтобы абсолютные величины обеих скоростей были между собой равны, т. е. чтобы

$$\frac{k}{\pi GE} = \frac{kr}{\pi (r^2 - a^2)} = \frac{\partial \psi_0}{\partial r}.$$

На основании формулы (5) это равенство принимает вид:

$$\frac{kr}{\pi (r^2 - a^2)} =$$

$$= -\left[w \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \lambda \sin^2\theta \left(r + \frac{a^4}{r^3}\right) - \frac{\lambda a^4}{2r^3}\right].$$

Если подставим сюда значение $\sin\theta$ из формулы (1б), то найдем для определения k по заданному r нижеследующую формулу:

$$\frac{k}{\pi (r^2 - a^2)\lambda} = \frac{a^4}{r^4}\left[\frac{2w^2}{\lambda^2 a^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2} + \frac{1}{2}\right]. \qquad (20)$$

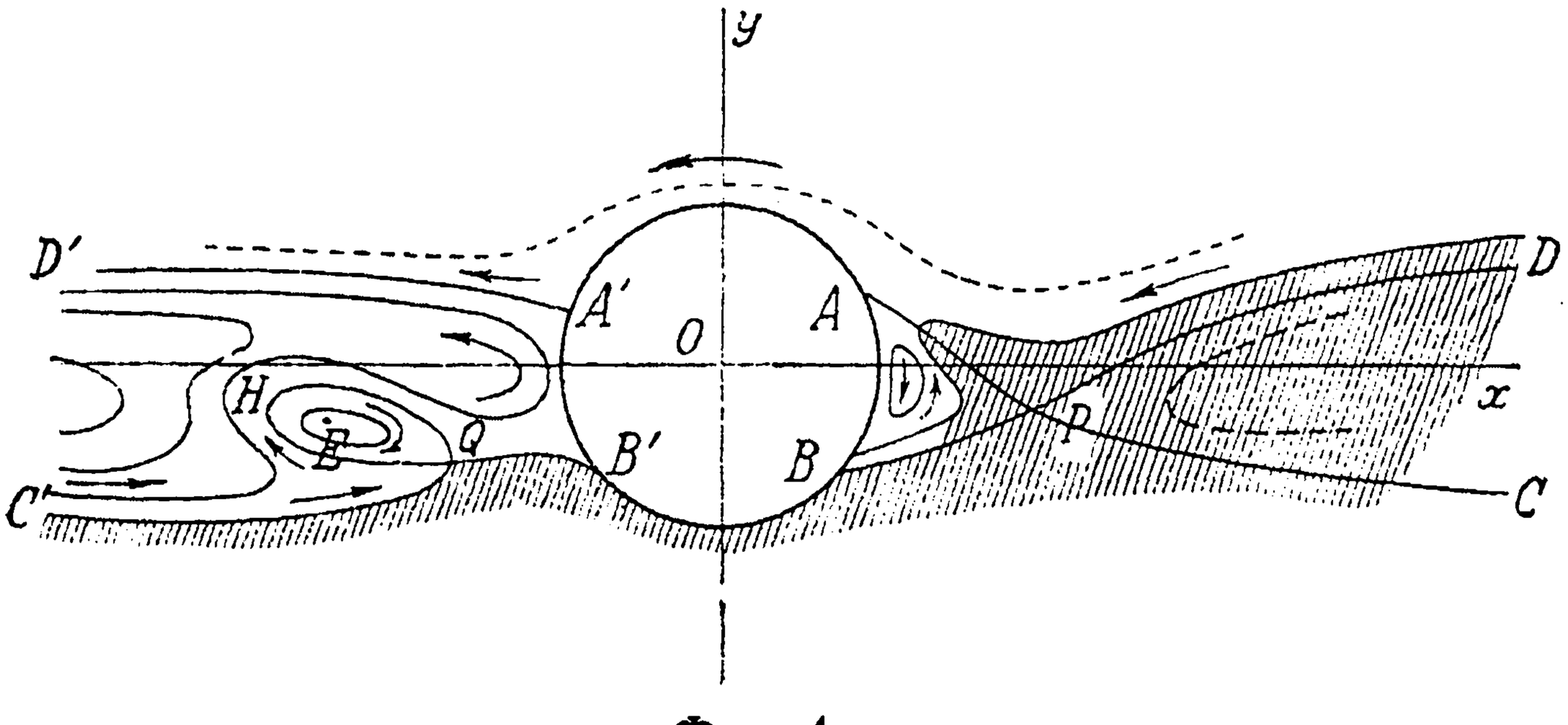
Задавшись расстоянием r точки E от O, мы определяем по формуле (1б) угол θ, а по формуле (20) напряжение вихря k, и таким образом получаем неподвижную вихревую площадку E.

От действия вихрей E и G частицы жидкости текут по окружностям, выраженным формулой (19), в направлении, указанном на фиг. 3 стрелками. Каждая из окружностей, данных формулой (19), прикасается к линии токов третьей и четвертой группа семейства $\psi_0 = \text{const}$, и в этих точках прикосновения P и Q скорость по окружности и скорость по параболообразным кривым направлена в противоположные стороны. Мы можем выбрать эти точки P и Q так, чтобы упомянутые скорости были равны по абсолютной величине. Таким образом найдутся внутри течения, данного функцией тока $\psi = \psi_0 + \psi_4$, две критические точки нулевой скорости P и Q: одна — перед обтекаемым цилиндром, другая — за ним.

Так как течение с функцией тока ψ_4 дает на окружности сечения цилиндра скорость в направлении, обратном часовой стрелке, а прежнее течение с функцией тока ψ_0 дает на дуге AB

скорость, направленную вниз, а на дуге $A'B'$ скорость, направленную вверх, то в сложном течении, выраженном функцией тока $\psi = \psi_0 + \psi_1$, критические точки A и B между собой сдвигаются; то же происходит и с критическими точками A' и B'. Уравнение (7) раздельной линии тока в новом течении заменится уравнением:

$$\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\left[wy + \frac{\lambda}{2} y^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\lambda a^2}{4}\right] - lg\left(\frac{e}{g}\right) = 0. \quad (21)$$



Фиг. 4.

Так как при $r = a$ $\frac{e}{g} = \text{const}$, то в состав раздельной линии тока входит окружность перпендикулярного сечения цилиндра, и так как при $r = \infty$ $\frac{e}{g} = 1$, то ветви предельной кривой заключены между асимптотами, указанными в § 2. Но присутствие критических точек P и Q изменяет вид предельной кривой вблизи цилиндра, как показано на фиг. 4. Все остальные линии токов образуют шесть групп: верхние линии токов, расположенные над кривой $DPAA'D'$; нижние линии токов, расположенные под кривой $CPBB'QC'$; замкнутые линии токов на подветренной стороне, заключенные в контуре APB; замкнутые линии токов за цилиндром, заключенные внутри петли QH; параболообразные линии, заключенные внутри контура DPC; линии токов, заключенные внутри контура $D'A'B'HC'$.

Направления движения жидкости по всем этим линиям токов указаны на фиг. 4 стрелками.

4. Найденное нами течение воздуха, охарактеризованное функцией тока

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4, \tag{22}$$

есть установившееся движение, потому что оно плоскопараллельное и имеет постоянную скорость вращения частиц около оси, перпендикулярной плоскости движения. Находящаяся же в течении вихревая площадка E неподвижна. Скорость вращения частиц ω выражается формулой:

$$2\omega = \Delta\psi,$$

где Δ — знак второго диференциального параметра.

Согласно формулам (1), (2), (3), (4) и (18)

$$\Delta\psi_1 = -\lambda,$$

$$\Delta\psi_2 = wa^2 \frac{\partial}{\partial y} [\Delta (\lg r)] = 0,$$

$$\Delta\psi_3 = -\frac{\lambda}{4} a^4 \frac{\partial^2}{\partial^2 y} [\Delta (\lg r)] = 0,$$

$$\Delta\psi_4 = \frac{k}{\pi} \Delta \left[\lg \left(\frac{e}{g}\right)\right] = 0,$$

а потому

$$\omega = -\frac{\lambda}{2}. \tag{23}$$

Давление p во всякой точке нашего потока найдется по уравнениям гидродинамики.

Принимая во внимание, что все рассмотренные нами течения имеют функции тока и потому не дают изменения объема, будем считать плотность воздуха ρ за постоянную величину и напишем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) &= -2\omega v = -\lambda \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) &= +2\omega u = -\lambda \frac{\partial\psi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Интегрирование дает для всякой точки течения:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{V^2}{2} - \lambda\psi. \tag{25}$$

На большом расстоянии от цилиндра

$$V^2 = (w + \lambda y)^2, \qquad \psi = -wy - \frac{\lambda}{2} y^2$$

и давление будет постоянной величиной

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{w^2}{2}.$$

В точке E давление будет очень большой отрицательной величиной, но мы предполагаем, что площадь вихревой площадки при данном напряжении вихря k имеет конечную величину.

§ 5. Переходим теперь к поставленной нами задаче и предполагаем, что определенный функцией тока ψ поток воздуха несет низом снежные частицы, а поверхность снежного покрова ограничена (фиг. 4) линией $DPBB'QC'$. Тогда снег, наносимый на поверхности DP, будет бросаться слоем некоторой толщины в направлении PA; струя, несущая этот слой, в точке A цилиндрической преграды будет разделяться на две. Часть ее будет перебрасываться через цилиндр, а другая часть по линии ABP будет возвращаться к точке P. Вследствие этого около точки P будет образовываться снежный нанос, свеши-вающийся по направлению к цилиндру, а перед цилиндром образуется снежная выемка. За цилиндром будет область медленного движения воздуха, но на некотором расстоянии разовьется вихрь E, крутящий снег и образующий бугор Q. Сделанное здесь теоретическое объяснение движения снега подходит довольно близко к наблюдениям снежных заносов перед продолговатыми преградами.

Статья напечатана впервые в „Сборнике статей, посвященных проф. Г. К. Суслову“, 1911 г. Второй раз она напечатана в „Опытно-мелиоративной части“ НКЗ, вып, 30. *Прим. ред.*

ON SNOWDRIFTS

When a stationary object is met by a snowstorm, at some distance leeward of the obstacle there is formed a heap of deposited snow, while in front of the obstacle there is formed a depression. Prof. Joukowsky gives an explanation of this phenomenon, assuming the obstacle to be a cylinder of radius a, projecting above the snow, the axis of the cylinder being horizontal and normal to the direction of wind. The current function $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ (5) for the flow of air round such a cylinder is obtained by adding to the current function ψ_1 (2) characterizing the velocity of wind $u = -w - \lambda y$ near the ground in the absence of the cylinder, the functions ψ_2 (3) and ψ_3 (4). If in the equation $\psi_0 = \text{const}$ (7) of the lines of flow the constant is given the value $\frac{\lambda}{4a^4}$, there will be obtained a dividing line of flow, made up of the circumference of a normal cross-section of the cylinder and of the curve of the fourth order (9), of which two branches AD and $A'D'$ (Fig. 1) have a horizontal asymptote $y_1 = -\frac{a}{2}\xi_2$, and the branches BC and $B'C'$ have the asymptote $y_2 = -\frac{a}{2}\xi_1$, where ξ_1 and ξ_2 are given by equation (11). This curve divides all the lines of flow into the following four groups, viz, the lines of flow disposed above the line $D'A'AD$, the lines of flow disposed beneath the line $CBB'C'$, the lines of flow enclosed within the contour $DABC$, and the lines of flow enclosed within the contour $D'A'B'C'$.

To this flow there is added by Prof. Joukowsky also a flow with the current function $\psi_4 = \frac{k}{\pi}\lg\frac{e}{g}$, which is due to the

vortex E (Fig. 3) and its image G in the circle $ABB'A'$. By the letters e and g are denoted the distances of a point of the liquid from the points E and G. If the strength of the vortex k and its polar coordinates $r = OE$ and θ are determined by formulae (20) and (16), then the vortex E will be stationary and the motion defined by the current function $\psi_0 + \psi_4$ will be steady; the vorticity will be $\omega = -\frac{\lambda}{2}$. In this motion there will exist two critical points, P and Q, at which the velocity will be zero—one in front of the cylinder, and the other in the rear of the cylinder. The lines of flow will be given by the equation $\psi_0 + \psi_4 = \text{const}$, and the dividing line of flow, which in this case also will have two horizontal asymptotes, will divide all lines of flow into six groups: the upper lines of flow above the curve $DPAA'D'$, the lower lines of flow, beneath the curve $CPBB'QC'$, the closed lines of flow on the leeward side, bounded by the contour APB, the closed lines of flow in the rear of the cylinder, bounded by the contour DPC, and the lines of flow enclosed within the contour $D'A'B'HC'$.

Now let us suppose the surface of the snow to be bounded by the line $DPBB'QC$. Then the snow which is drifted on the surface DP will be thrown in the direction PA, and the current carrying this snow will at the point A be divided in two. A portion of the snow will be carried over the cylinder, while the rest will return to the point P, describing the path ABP, and there will be formed at the point P a snowdrift slanting towards the cylinder. In the rear of the cylinder there will be a region of stalled motion, but further away there will be generated a vortex whirling the snow and forming the mound Q.

О СНЕЖНЫХ ЗАНОСАХ И ЗАИЛЕНИИ РЕК

(1919 г.)

§ 1. Гидравлическая скорость. Мы будем называть гидравлической скоростью ту скорость, с которой падают снежинки или снежная пыль в спокойном воздухе, а равно и ту скорость, с которой падают в спокойной воде подвешенные в ней частицы песка или ила. На основании наблюдений Эйфеля и Лукьянова следует принять, что мелкие частицы при малых скоростях подвержены силе сопротивления жидкости, прямо пропорциональной скорости. Лукьянов [1] испытывал в аэродинамической трубе шарики различных диаметров (начиная от 0,028 *м*) и строил графики, откладывая по оси абсцисс произведение скорости v на радиус шарика r, а по оси ординат — отношение силы сопротивления R к $\pi r^2 v^2$. Получаемые кривые для малых значений rv имели вид равносторонних гипербол; при возрастающем же rv гиперболы переходили в прямые линии. Таким образом при малых rv имеет место равенство:

$$\frac{R}{\pi r^2 v^2} = \frac{A}{rv},$$

т. е.

$$R = A\pi rv.$$

Сила сопротивления выходит пропорциональной скорости и радиусу. Такой же результат дала бы нам известная формула Стокса, определяющая силу сопротивления по одной вязкости:

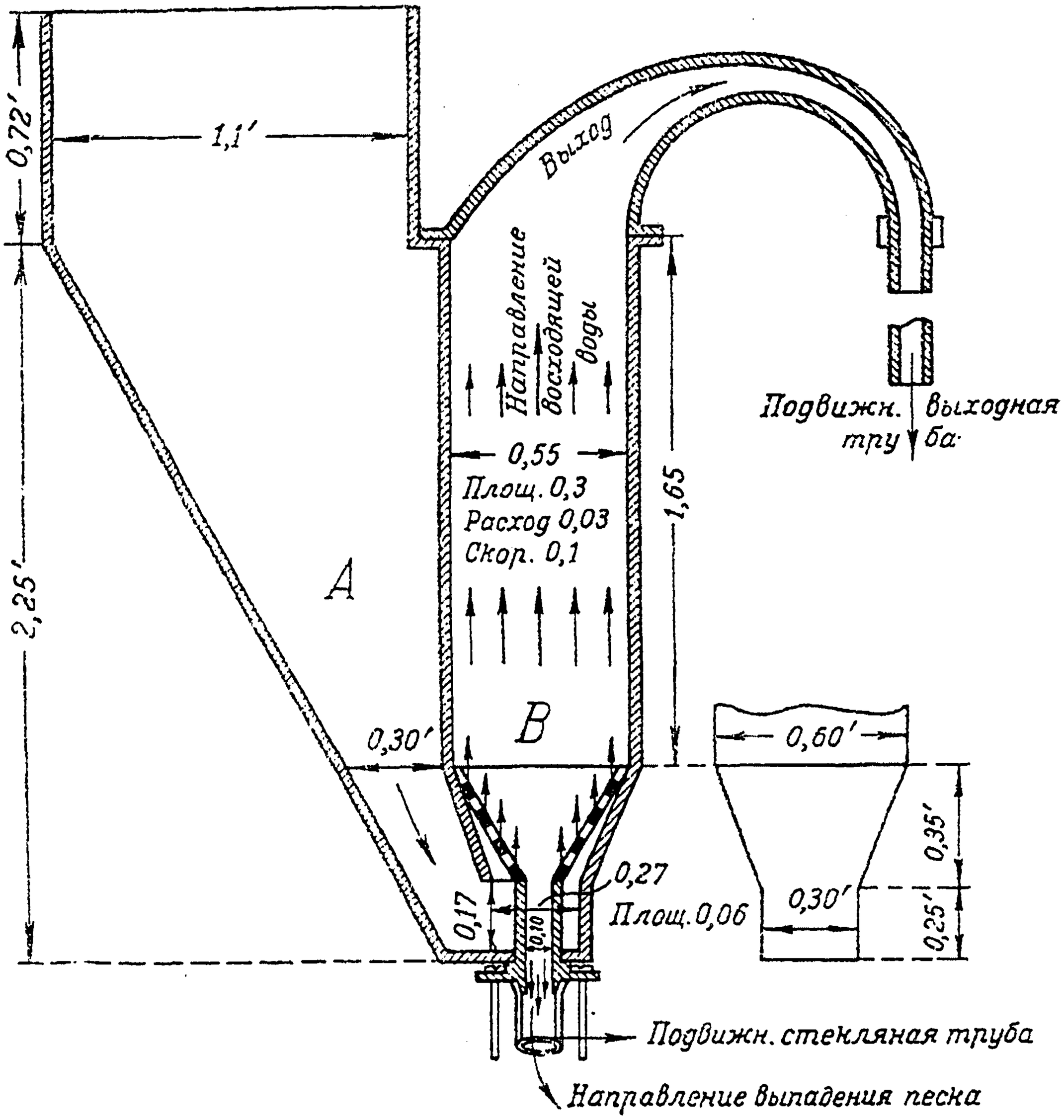
$$R = 6\pi\mu\rho rv,$$

---

[1] Joukowski, Bases théoriques de l'aéronautique, p. 60, Paris, 1916.

где μ — коэфициент вязкости, а ρ — плотность жидкости. В предлагаемом нами анализе мы будем полагать:

$$R = kv$$



Фиг. 1.

в предположении, что k определено из наблюдения над предельной скоростью и весом частиц. Когда частица веса mg ниспадает равномерно со скоростью v, тогда

$$kv = mg,$$

$$v = \frac{mg}{k}.$$

Эта формула и определяет гидравлическую скорость.

При исследовании вопросов ирригации подвешенные частицы разделяют обыкновенно на категории по их гидравли-

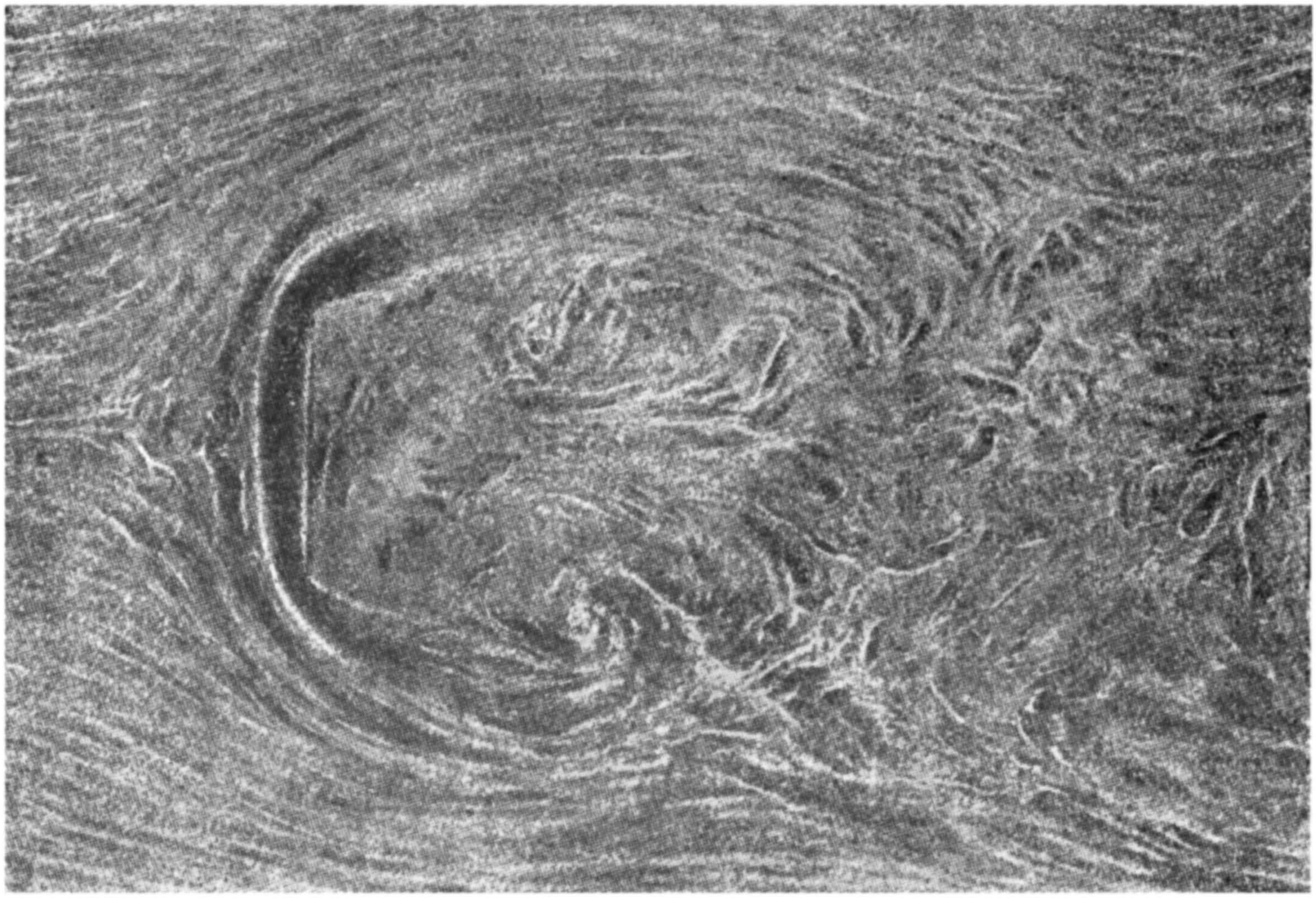
ческой скорости, или, как говорят, гидравлическому размеру. Для этого пользуются прибором Кеннеди, изображенным на фиг. 1. *A* представляет резервуар с водой, в которой подвешены твердые частицы; *B* — сосуд, через который снизу вверх перегоняется с различными скоростями струя воды; в нижней части этого сосуда имеются отверстия, в которые втягивается вода из сосуда *A*. Эта вода перемешивается с водой резервуара *B*, текущей вверх с данной скоростью v. Те частицы, вес которых может удерживаться скоростью v, т. е. которые имеют гидравлическую скорость, меньшую v, будут подниматься вверх и переходить в резервуар *D*. Таким образом, меняя скорость в сосуде *B*, можно отделять частицы различных гидравлических размеров.

§ 2. О аэродинамических спектрах. В моем сочинении „О снежных заносах“, напечатанном в 1911 г. [1], рассматривается спектр линий тока потока с параллельными горизонтальными вихревыми прямолинейными шнурами постоянного напряжения, который обтекает весьма длинный горизонтальный круглый цилиндр. Рассмотрение этого спектра, изображение которого дано на фиг. 2, разъясняет причину образования перед продолговатыми преградами снежной выемки перед самой преградой и снежного бугра, следующего за ней, считая с подветренной стороны. Но в моей статье, так же

Фиг. 2.

[1] См. первую статью.

как и в работе Н. А. Рынина [1], в которой вычерчены наблюдения над аэродинамическими спектрами потока, обтекающего модели выемок железнодорожного полотна с поставленными снежными заграждениями, не выяснена основная причина наседания снега в определенные места. Эта причина сделалась мне понятной, когда я обратил внимание на то, что



Фиг. 3.

снежный бугор слагается из ряда последовательных полос. Такая рябь замечается как на снеге, так и на песчаных наносах в реках.

Способ Д. П. Рябушинского фотографирования аэродинамических спектров с помощью плаунового порошка, наседающего на плоскость, на которую поставлены обтекаемые тела, подтверждает мою мысль о наседании легких частиц в виде ряда полос. Способ состоит в том, что половина испытуемой модели помещается в аэродинамической трубе на горизонтальный мост, покрытый слоем порошка плауна, потом труба

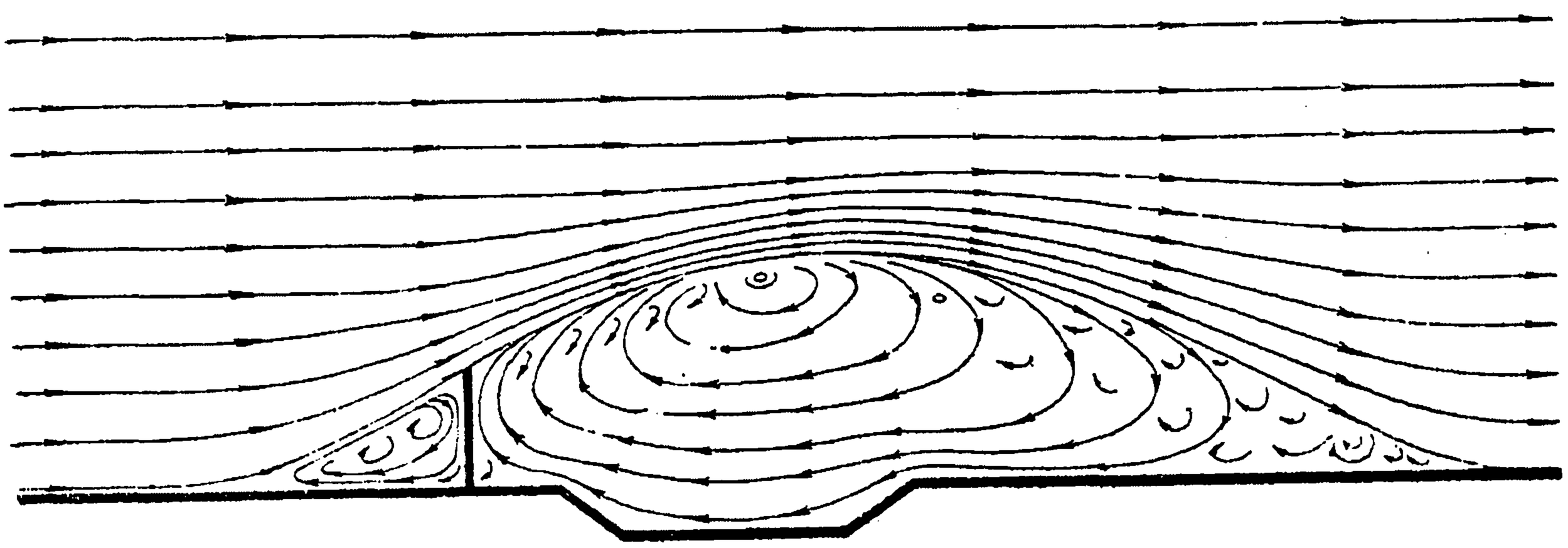
[1] Труды Аэродинамической лаборатории института путей сообщения, стр. 259, вып. II, Петроград, 1914 г.

приводится в действие, и одновременно листу, на котором насыпаны споры плауна, наносится снизу легкий удар молотком, так что порошок подбрасывается и наносится потоком воздуха на модель; после этого действие трубы прекращается. Лист, на котором образовались полосы порошка, вынимается из трубы, и вид полос фотографируется.

Я думаю, что такие фотографии представляют не аэродинамические спектры, а скорее расположения снежных заносов перед преграждающими предметами и за ними.

На фиг. 3 дана фотография Д. П. Рябушинского для потока, обтекающего прямоугольную пластинку. Мы видим на ней перед обтекаемым предметом выемку, затем параллельные бугры.

§ 3. Теория спектров Рябушинского и снежных отложений перед преградой. Так как поток, скользя по горизонтальной плоскости, завихривается, то, встречая преграду, он не доходит до нее с образованием критической точки нулевой скорости на самой преграде, а образует такую точку перед

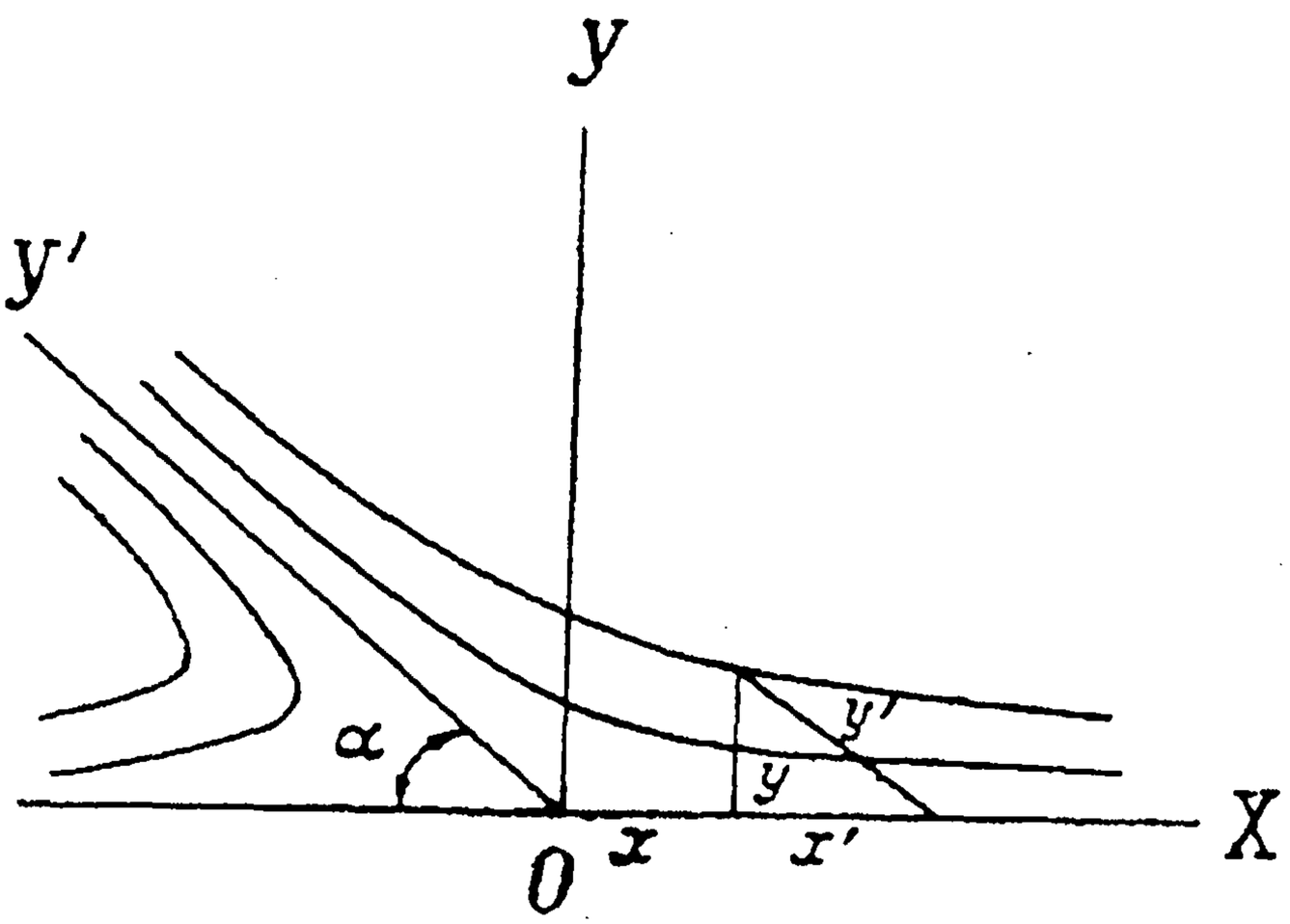


Фиг. 4.

преградой, развивая перед ней завихренное пространство так, как это видно на спектре, полученном Н. А. Рыниным в Аэродинамической лаборатории Петроградского института путей сообщения, изображенном на фиг. 4.

Докажем теоретически, что снег, несомый потоком указанного вида, будет наноситься перед поставленной преградой в виде ряда параллельных бугров, расположенных между критической точкой и преградой, как это получается на спектрах Рябушинского.

Прежде всего заметим, что воздух под атмосферным давлением при малых скоростях можно рассматривать как несжимаемую жидкость; с другой стороны, как показано в моем сочинении „Кинематика жидкого тела“ [1], вблизи критической точки нулевой скорости линии токов для несжимаемой жидкости можно рассматривать как гиперболы. Примем критическую точку за начало двух систем координат: косоугольных $x'Oy'$ и прямоугольных xOy, причем горизонтальные оси Ox' и Ox у них совпадают, а ось Oy' направлена по асимптоте гипербол, выражающих линии токов вблизи критической точки (фиг. 5).



Фиг. 5.

Функция тока в косоугольных координатах представится тогда формулой:

$$\psi = -Ax'y'.$$

Подставляем сюда значения прямоугольных координат, пользуясь формулами перехода:

$$x' = x + y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$y' = \frac{y}{\sin\alpha}.$$

Получаем:

$$\psi = -\frac{A}{\sin\alpha}(xy + y^2 \operatorname{ctg}\alpha). \qquad (1)$$

По этой функции тока проекции u и v скорости ветра на прямоугольные оси Ox и Oy выражаются так:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{A}{\sin\alpha}[x + 2y\operatorname{ctg}\alpha]; \qquad (2)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = A\frac{y}{\sin\alpha}.$$

[1] Полное собрание сочинений Н. Е. Жуковского, т. II.

Если бы по этим формулам мы определили напряжение вихря

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{A\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

то увидели бы, что рассматриваемый поток жидкости имеет постоянное завихривание и тем большее, чем α меньше (с практической стороны — чем дальше критическая точка от обтекаемой преграды).

На основании сказанного в § 1 мы примем, что силы, действующие на летящую частицу снега или порошка в опыте Рябушинского, суть сила веса частицы mg и сила сопротивления воздуха kV, где V — относительная скорость ветра по отношению к летящей частице. Слагающие этих сил по осям координат будут:

$$k\left(u - \frac{dx}{dt}\right), \quad k\left(v - \frac{dy}{dt}\right) - mg,$$

так как u и v — проекции абсолютной скорости ветра. Вследствие этого диференциальные уравнения частицы снега, увлекаемой рассматриваемым потоком жидкости, представляются в следующем виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(\frac{Ax}{\sin\alpha} + 2Ay\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{dx}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + k\left(A\frac{y}{\sin\alpha} - \frac{dy}{dt}\right),$$

где, согласно формуле Стокса, $k = 6\pi\mu\rho r$.

Напишем эти уравнения в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kdx}{mdt} + \frac{Ak}{m\sin\alpha}x + 2\frac{Ak\cos\alpha}{m\sin^2\alpha}y = 0, \quad (3')\\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{kdy}{mdt} - \frac{Ak}{m\sin\alpha}y + g = 0. \quad (3'')\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Общий интеграл второго уравнения будет:

$$y = Ce^{\lambda t} + C_1e^{\lambda_1 t} + \frac{m\sin\alpha}{Ak}g, \quad (4)$$

где λ и λ_1 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{Ak}{m \sin \alpha} = 0, \tag{5}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -\frac{k}{2m} + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + \frac{Ak}{m \sin \alpha}}, \\ \lambda_1 &= -\frac{k}{2m} - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + \frac{Ak}{m \sin \alpha}}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Если предположить, что при $t = 0$ частица находилась на поверхности земли и была подброшена вверх с вертикальной скоростью v_0, то для определения произвольных постоянных C и C_1 будем иметь уравнения:

$$C + C_1 + \frac{m \sin \alpha}{Ak} g = 0,$$

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 = v_0.$$

Решая их относительно C и C_1, найдем:

$$C = \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\left(v_0 + \lambda_1 \frac{m \sin \alpha}{Ak} g \right), \tag{6}$$

$$C_1 = -\frac{1}{\lambda - \lambda_1}\left(v_0 + \lambda \frac{m \sin \alpha}{Ak} g \right).$$

Так как на основании формулы (5′) λ есть величина положительная, а λ_1 — отрицательная, то C_1 отрицательно, а C может быть отрицательно или положительно, причем первое будет иметь место при

$$v_0 < -\lambda_1 \frac{m \sin \alpha}{Ak} g. \tag{7}$$

При существовании этого неравенства кривая, выраженная уравнением (4), с беспредельным возрастанием t дает $y = -\infty$; но так как при $t = 0$, $y = 0$, а $\frac{dy}{dt} = v_0$ — величине положительной, то эта кривая сначала поднимается над осью абсцисс в положительную сторону, а потом переходит в сторону отри-

цательных y. Отсюда следует, что в случае существования неравенства (7) по прошествии некоторого времени $t = \tau$ снежная частица опять упадет на землю. Если же это неравенство обращается в равенство, то, будучи нулем при $t = 0$, y обращается опять в нуль только при $t = \infty$. Точно так же y не обращается более в нуль, если знак неравенства в формуле (7) будет $>$.

Переходим теперь к интегрированию первого уравнения (3), в котором надо вместо y подставить выражение (4). Сначала составляем общий интеграл диференциального уравнения без последней части:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kdx}{mdt} + \frac{Ak}{m \sin \alpha} x = 0.$$

Этот интеграл будет:

$$x = De^{\mu t} + D_1 e_1^{\mu_1 t}, \tag{8}$$

где μ и μ_1 — корни уравнения:

$$\mu^2 + \frac{k}{m}\mu + \frac{Ak}{m \sin \alpha} = 0, \tag{9}$$

т. е.

$$\mu = -\frac{k}{2m} + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{Ak}{m \sin \alpha}}, \tag{9'}$$

$$\mu_1 = -\frac{k}{2m} - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{Ak}{m \sin \alpha}}. \tag{9'}$$

Сделаем предположение, что подкоренная величина в формуле (9′) отрицательна, и положим:

$$\beta^2 = \frac{k^2}{g^2 m^2}\left(\frac{Ag}{\sin \alpha}\frac{mg}{k} - \frac{g^2}{4}\right).$$

Здесь $\frac{mg}{k}$ — скорость падения снежинок в спокойном воздухе, а $\frac{Ag}{\sin \alpha}$, на основании формулы (2), есть скорость воздуха у самой земли ($y = 0$) на расстоянии $x = g$ от критической точки O (фиг. 5). Предположение о положительности β^2

соответствует допущению, что во время вьюги среднее геометрическое этих двух скоростей более

$$\frac{g}{2} = 4{,}9 \ м/сек.$$

В сделанном предположении интеграл (8) представляется в виде:

$$x = (E \cos \beta t + E_1 \sin \beta t)\, e^{-\frac{k}{2m} t}. \qquad (8')$$

Для получения интеграла уравнения (3′) нужно к выражению (8′) приложить какой-нибудь частный интеграл (первого) уравнения (3′). Таким интегралом является выражение:

$$x_1 = Be^{\lambda t} + B_1 e^{\lambda_1 t} - 2\frac{m}{Ak} g \cos \alpha, \qquad (10)$$

так как по подстановке в уравнение (3′) вместо x этого значения ($x = x_1$), а вместо y интеграла (4) члены, не содержащие времени, сокращаются; надлежащим же подбором B и B_1 можно будет обратить в нуль и коэфициенты при членах, содержащих время, которое войдет в выражение только в виде $e^{\lambda t}$ и $e^{\lambda_1 t}$.

Подстановка дает нам:

$$e^{\lambda t}\left[B\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{Ak}{m \sin \alpha} \right) + 2C \frac{Ak}{m} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] +$$

$$+ e^{\lambda_1 t}\left[B_1\left(\lambda_1{}^2 + \frac{k}{m}\lambda_1 + \frac{Ak}{m \sin \alpha} \right) + 2C_1 \frac{Ak}{m} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому условию при всяком t, надо положить, принимая во внимание уравнение (5):

$$B = -C \operatorname{ctg} \alpha,$$
$$B_1 = -C_1 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Вследствие этого наш частный интеграл будет иметь вид:

$$x_1 = -\operatorname{ctg} \alpha \,(Ce^{\lambda t} + C_1 e^{\lambda_1 t}) - 2\frac{m}{Ak} g \cos \alpha. \qquad (10')$$

Прикладывая его к выражению (8′), найдем искомый общий интеграл первого из уравнений (3):

$$x = (E\cos\beta t + E_1\sin\beta t)\,e^{-\frac{k}{2m}t} -$$

$$-\operatorname{ctg}\alpha\,(Ce^{\lambda t} + C_1e^{\lambda_1 t}) - 2\frac{m}{Ak}g\cos\alpha. \qquad (11)$$

Определим здесь произвольные постоянные так, чтобы при $t = 0$, $x = x_0$,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{A}{\sin\alpha}x_0,$$

т. е. чтобы частица сначала, до момента подскакивания, согласно формуле (2), скользила по поверхности снега со скоростью потока воздуха. Так как вторая скобка в уравнении (11) есть на основании формулы (4)

$$y - m\frac{\sin\alpha}{Ak}g,$$

а $y = 0$ при $t = 0$, то будем иметь:

$$E = x_0 + \frac{m}{Ak}g\cos\alpha.$$

С другой стороны, производная по времени от упомянутой скобки на основании сказанного должна быть v_0; поэтому

$$-\frac{A}{\sin\alpha}x_0 = E_1\beta - \frac{k}{2m}E - \operatorname{ctg}\alpha\,v_0.$$

Отсюда

$$E_1 = \operatorname{ctg}\alpha\frac{v_0}{\beta} + \frac{k}{2m}\frac{x_0}{\beta} - \frac{A}{\sin\alpha}\frac{x_0}{\beta} + \frac{\cos\alpha}{2A}\frac{g}{\beta}.$$

Подставляем в формулу (11) найденные значения коэфициентов E и E_1 и отбираем члены, содержащие множителем x_0:

$$x = x_0 \left[\cos \beta t - \left(\frac{A}{\beta \sin \alpha} - \frac{k}{2m\beta} \right) \sin \beta t \right] e^{-\frac{k}{2m} t} +$$

$$+ \left[\frac{m}{Ak} g \cos \alpha \cos \beta t + \right.$$

$$\left. + \left(\operatorname{ctg} \alpha \frac{v_0}{\beta} + \frac{\cos \alpha}{2A\beta} g \right) \sin \beta t \right] e^{-\frac{k}{2m} t} -$$

$$- \operatorname{ctg} \alpha \, y - \frac{m}{Ak} g \cos \alpha. \qquad (12)$$

Эта формула приводит нас к заключению, изложенному в начале § 3.

Если определим некоторое время $t = \tau$ под условием:

$$\operatorname{tg} \beta \tau = \frac{B}{\frac{A}{\sin \alpha} - \frac{k}{2m}} \qquad (13)$$

и предположим, что это время соответствует времени падения на землю снежинок, имеющих скорость v_0, удовлетворяющую неравенству (7), то увидим, что все эти снежинки упадут в одно и то же место, при каком бы значении x_0 они ни поднялись на воздух.

Так как уравнение (13) удовлетворяется при всяких значениях n

$$\beta t = \beta \tau + \pi n,$$

то все снежинки, имеющие скорость v_0, соответствующую этим различным временам падения, будут располагаться в виде полос, определяемых абсциссами:

$$x = \left[\frac{m}{Ak} g \cos \alpha \cos (\beta \tau + n\pi) + \right.$$

$$\left. + \left(\operatorname{ctg} \alpha \frac{v_0}{\beta} + \frac{\cos \alpha}{2A\beta} g \right) \sin (\beta \tau + n\pi \right] e^{-\frac{k}{2m\beta} (\beta \tau + n\pi)} -$$

$$- \frac{m}{Ak} \cos \alpha g. \qquad (14)$$

По мере возрастания n эти абсциссы приближаются к предельному значению

$$x = -\frac{m}{Ak}\cos\alpha\, g,$$

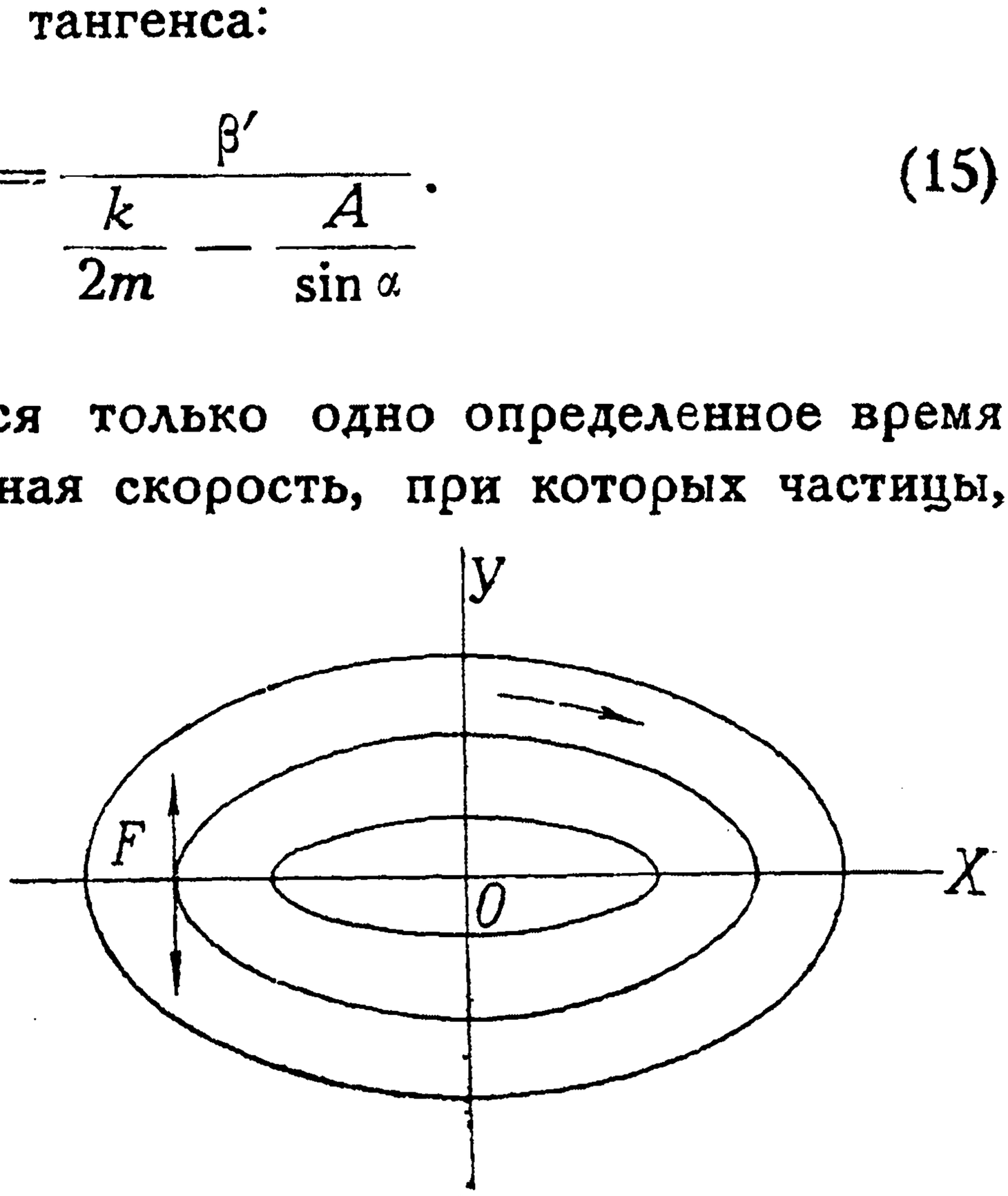
которое будет соответствовать наиболее высокой полосе снежного заноса.

Предложенный анализ хорошо объясняет наблюдения Д. П. Рябушинского и, по моему мнению, входит в глубь явления снежных заносов.

Если $\frac{A}{\sin\alpha}$ недостаточно велико и β^2 отрицательно, то β будет мнимая величина $\beta' i$, и формула (13) представится с помощью гиперболического тангенса:

$$\operatorname{tgh}\beta' t = \frac{\beta'}{\frac{k}{2m} - \frac{A}{\sin\alpha}}. \qquad (15)$$

В этом случае имеется только одно определенное время полета и одна определенная скорость, при которых частицы, поднявшиеся на воздух при различных x, упадут в одно и то же место, определяемое по формуле (14), причем в ней надо заменить $\beta\tau + n\pi$ на $\beta' i\tau$. Занос будет состоять только из одного бугра, расположенного за критической точкой.



Фиг. 6.

§ 4. Снежные отложения за преградой. Перейдем теперь к рассмотрению движения снежинок в вихревом потоке воздуха, расположившемся за преградой над выемкой железнодорожного полотна, как это представлено было на фиг. 4.

Предполагая для простоты, что линии токов суть подобные эллипсы (фиг. 6), что соответствует равномерно завихрен-

ному полю, найдем для функции тока выражение:

$$\psi = q\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

откуда компоненты скорости u, v будут:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{2q}{b^2}\, y,$$
$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{2q}{a^2}\, x. \qquad (16)$$

Если по этим компонентам составить угловую скорость вращения частицы жидкости, то найдем постоянную величину:

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = q\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right). \qquad (17)$$

Диференциальные уравнения снежинки принимают при этом вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kdx}{mdt} - \frac{k2q}{mb^2}\, y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{kdy}{mdt} + \frac{k2q}{ma^2}\, x + g = 0. \qquad (18)$$

Отыскиваем частные интегралы этих уравнений, отбросив сначала постоянную часть g:

$$x = he^{\lambda t},$$

$$y = h'e^{\lambda t}.$$

Для определения λ, h и h' будем иметь уравнения:

$$h\lambda^2 + \frac{k}{m}\,\lambda h - \frac{k2q}{mb^2}\, h' = 0,$$

$$h'\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda h' + \frac{k2q}{ma^2}\, h = 0.$$

Отсюда

$$\frac{h'}{h} = \frac{\lambda^2 + \frac{k}{m}\,\lambda}{\frac{k2q}{mb^2}}, \qquad \frac{h}{h'} = -\frac{\lambda^2 + \frac{k}{m}\,\lambda}{\frac{k2q}{ma^2}}. \qquad (19)$$

Перемножая, находим для определения λ уравнение:

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda\right)^2 = -\left(\frac{k}{m}\right)^2 \frac{4q^2}{a^2b^2}, \tag{20}$$

которое дает нам:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = \pm \frac{k2q}{mab} i, \tag{20'}$$

где

$$i = \sqrt{-1}.$$

Искомые четыре корня будут заключаться в формуле:

$$\lambda = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} \mp i\frac{k2q}{mab}}. \tag{21}$$

Если положим:

$$\frac{k^2}{4m^2} = R\cos\nu, \qquad \frac{k2q}{mab} = R\sin\nu,$$

$$R = \sqrt{\frac{k^4}{16m^4} + \frac{k^2}{m^2}\frac{4q^2}{a^2b^2}}, \tag{21}$$

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{2q}{ab}\ \frac{4m}{k} = \frac{8qm}{abk},$$

то все четыре корня λ будут представлены в виде:

$$\lambda = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{R}\left(\cos\frac{\nu}{2} \mp \sin\frac{\nu}{2} i\right). \tag{22}$$

Взяв в скобке $+$, будем иметь частный интеграл:

$$x = he^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} e^{\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2} it} =$$

$$= he^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t}\left[\cos\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t\right)\right]; \tag{23}$$

$$y = h'e^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t}\left[\cos\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t\right)\right].$$

На основании формул (19) и (20)

$$\frac{h'}{h} = \mp i \frac{b}{a}.$$

Чтобы избежать мнимого выражения интегралов, сложим два интеграла вида (23), взяв в скобке формулы (23) один раз (+), а другой раз (—) и сложив полученные частные интегралы. Найдем:

$$x = he^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} \cos\left[\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}\right)t\right],$$

$$y = h\frac{b}{a}e^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} \sin\left[\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}\right)t\right].$$

Одинаковое рассуждение можно повторить, взяв сначала h мнимым, и тогда получится частный интеграл:

$$x = -He^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} \sin\left[\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}\right)t\right],$$

$$y = H\frac{b}{a}e^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} \cos\left[\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}\right)t\right].$$

Сумма двух пар указанных интегралов приведет нас к паре интегралов с двумя произвольными постоянными:

$$\left.\begin{aligned} x &= aAe^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} \cos\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t + E\right), \\ y &= bAe^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}\right)t} \sin\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t + E\right). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Так же найдем другую пару интегралов, взяв в формуле (22) перед скобкой знак (—):

$$\left.\begin{aligned} x &= aBe^{-\left(\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} \cos\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t + E_1\right), \\ y &= bBe^{-\left(\frac{k}{2m} + \sqrt{R}\cos\frac{\nu}{2}\right)t} \sin\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t + E_1\right). \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Степень e в формулах (25) отрицательна; легко показать, что в формулах (24) она выходит положительной. Действительно, неравенство

$$\sqrt{R}\ \cos\frac{\nu}{2} > \frac{k}{2m}$$

дает:

$$R\,\frac{1+\cos\nu}{2} > \frac{k^2}{4m^2},$$

или

$$R > \frac{k^2}{2m^2} - R\cos\nu,$$

что, согласно с формулами (21), приводит к очевидному неравенству:

$$\sqrt{\frac{k^4}{16m^4} + \frac{k^2}{m^2}\,\frac{4q^2}{a^2b^2}} > \frac{k^2}{4m^2}.$$

Общий интеграл уравнений (18) без постоянного g представится суммой интегралов (24) и (25). Если же сохранить в диференциальных уравнениях член g, то их общий интеграл представится суммой значений координат, данных выражениями (24) и выражениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= aBe^{-\left(\frac{k}{2m}+\sqrt{R}\,\cos\frac{\nu}{2}\right)t}\cos\left(\sqrt{R}\sin\frac{\nu}{2}t+E_1\right) - \frac{mg}{k}\,\frac{a^2}{2q},\\ y &= bBe^{-\left(\frac{k}{2m}+\sqrt{R}\,\cos\frac{\nu}{2}\right)t}\sin\left(\sqrt{R}\,\sin\frac{\nu}{2}t+E_1\right). \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Движение снеговой частицы в рассматриваемом случае слагается из двух движений, выраженных формулами (24) и (26). Первое движение совершается по траекториям:

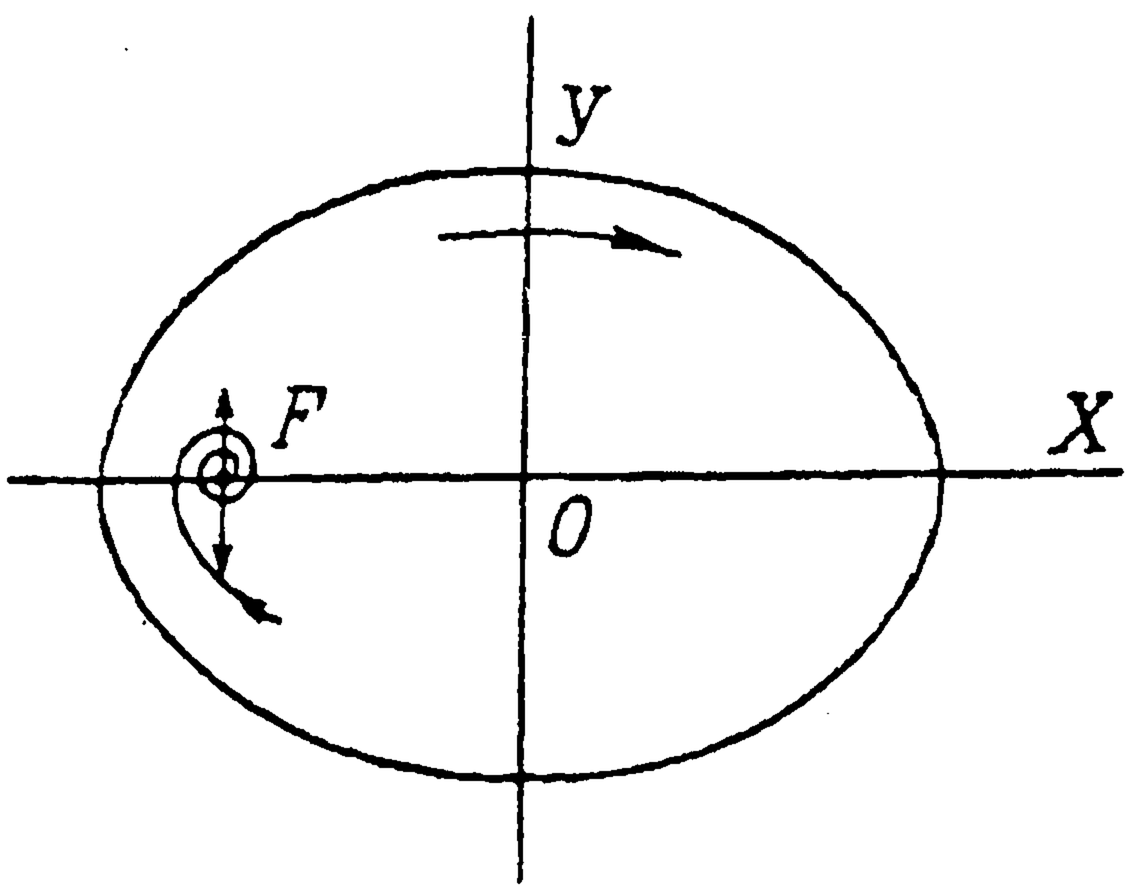
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = A^2e^{2\left(-\frac{k}{2m}+\sqrt{R}\,\cos\frac{\nu}{2}t\right)},$$

а второе — по траекториям:

$$\frac{\left(x+\frac{mg}{k}\,\frac{a^2}{2q}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = B^2e^{-2\left(\frac{k}{2m}+\sqrt{R}\,\sin\frac{\nu}{2}\right)t}.$$

Первые траектории представляют эллипсы, подобные и концентрические линиям токов, с возрастающими осями, а вторые траектории представляют эллипсы, подобные линиям токов данного потока, но центры их смещены по оси Ox влево в некоторую точку F, причем

$$OF = \frac{mg}{k}\frac{a^2}{2q}, \tag{29}$$



Фиг. 7.

а полуоси постоянно убывают, стремясь в пределе к нулю. В общем случае, если $A \neq 0$, то снежинка выбрасывается из эллиптического вихря. Но если начальные данные удовлетворяют условию $A = 0$, то снежинка, совершая спиралеобразный путь, приближается к точке F, как это представлено на фиг. 7.

Можно сказать, что при этом условии вихрь втягивает в себя снежинки, приближая их к точке F. Вступив в точку F, снежинка будет в равновесии, так как, приравнивая ее вес скорости, умноженной на k, будем иметь:

$$mg - k\frac{2q}{a^2}OF,$$

откуда

$$OF = \frac{mga}{2kq},$$

что согласно с формулой 29.

§ 5. Заиление рек. Формула Кеннеди. Изложенный в предыдущем параграфе анализ может послужить для разрешения основной задачи ирригации об условии заиления каналов.

Если вышерассмотренный эллиптический вихрь был бы поднят вверх общим течением жидкости, то он мог бы удерживать подвешенные в нем твердые частицы, помещенные,

согласно их гидравлическому размеру $\frac{mg}{k}$, в определенной точке F на большой горизонтальной оси вихря.

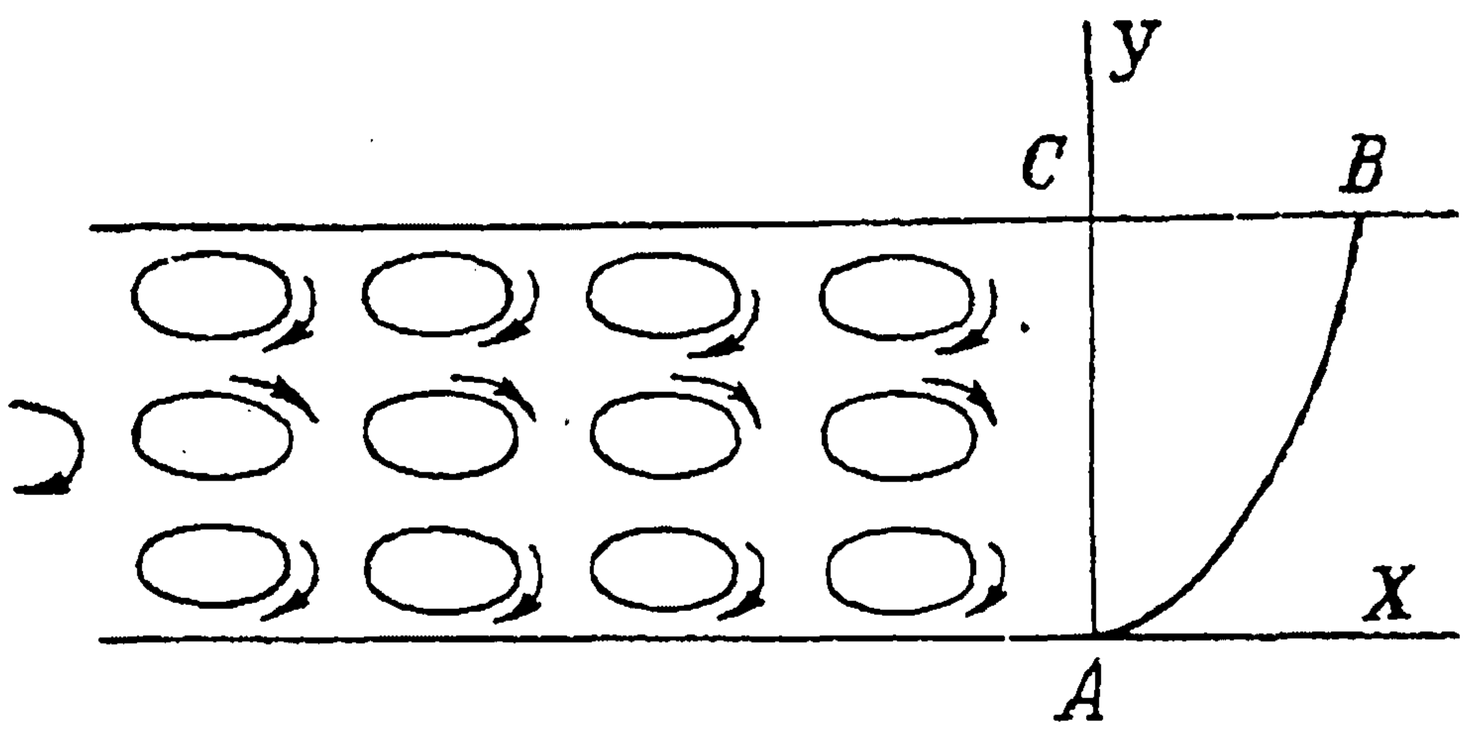
Предполагаем сначала, что жидкость, в которой имеются твердые частицы, течет горизонтально с малой средней скоростью v, меньшей той скорости v_0, которая соответствует числу Рейнольдса:

$$R = \frac{\rho v_0 d}{\mu}, \tag{30}$$

где d — глубина канала, а μ — коэфициент вязкости.

Течение будет совершаться горизонтальными слоями и твердые частицы будут ниспадать на дно с малыми скоростями $\frac{mg}{k}$, соответствующими их гидравлическим размерам. Канал будет заиливаться.

Когда же средняя скорость превосходит ту, которая соответствует числу Рейнольдса, тогда завихренный поток завертывается в отдельные эллиптические вихри, как это представлено на фиг. 8. Центры этих эллиптических вихрей движутся горизонтально со скоростями u, возрастающими по мере удаления от дна канала. Это будет местная средняя скорость, которая, согласно теории Буссинека, будет следовать параболическому закону и представится на фиг. 8 параболой AB.



Фиг. 8.

Если предположить, что центры эллипсов на дне канала неподвижны, то закон распределения местных средних скоростей выразится формулой:

$$u = \frac{4gp}{H} \sin i \,[d^2 - (d - y)^2], \tag{31}$$

где d — глубина канала, i — угол наклона дна к горизонту, а H — некоторый коэфициент, который при движении, перешедшем за Рейнольдсово число, согласно Буссинеку, выражается формулой:

$$H = \alpha v d, \tag{32}$$

где v — средняя скорость всего течения, а α — постоянное, зависящее от вязкости. Формула (31) дает на дне при $y = 0$, $u = 0$, а на свободной поверхности при $y = d$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, что и должно быть.

Полагая в формуле (31) $y = d$ и внося в нее значение H из формулы (32), получим для скорости на свободной поверхности:

$$u_d = \frac{4g\rho \sin id}{\alpha v}.$$

Так как, согласно параболическому распределению скоростей,

$$v = \frac{2}{3} u,$$

то для средней скорости получаем обыкновенную гидравлическую формулу:

$$v^2 = Ad \sin i. \tag{33}$$

Угловая скорость частицы жидкости на расстоянии y от дна будет:

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4gp}{H} \sin i (d - y). \tag{34}$$

Эта угловая скорость будет уменьшаться по мере удаления от дна канала и обратится в нуль на свободной поверхности. Применяя для определения ω формулу 17

$$\omega = q \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right), \tag{17}$$

мы должны будем допустить, что при постоянных a и b величина q уменьшается с уменьшением глубины слоя до нуля. Заметим, что если бы мы стали определять сумму скоростей,

сообщенных точке жидкости всеми вихревыми шнурами, представленными на фиг. 8, приложив к этим шнурам их зеркальные изображения в свободной поверхности, мы получили бы для скорости u выражение (31) [1].

Обращаясь теперь к фиг. 7, заметим, что для определенного гидравлического размера $\frac{mg}{k}$ существует, согласно формуле (29), определенная точка F, в которой эта частица может быть подвешена. Если a и q даны, то наибольший гидравлический размер подвешенной частицы найдется из уравнения:

$$a = \frac{mg}{k}\,\frac{a^2}{2q}$$

или (35)

$$\frac{mg}{k} = \frac{2q}{a}.$$

Так как q уменьшается с высотой, то гидравлический размер подвешенных частиц увеличивается по мере приближения к дну канала. Самые тяжелые частицы могут быть подвешены только около дна. Предполагая, что полуоси эллиптических вихревых шнуров около дна зависят от его шероховатости, найдем из формулы (35) наибольшее значение q под условием, чтобы не осаждались подвешенные частицы наибольшего гидравлического размера.

Соединяя формулы (17) и (34), в которую подставляем значение H, получаем для дна при $y = 0$:

$$q\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{4gp}{\alpha}\,\frac{\sin id}{vd},$$

и так как по (33)

$$\sin id = \frac{v^2}{A},$$

то

$$q\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{4gp}{\alpha A}\,\frac{v}{d}. \qquad (36)$$

[1] См. мою статью „Насадки и диффузоры аэродинамических труб", Труды расчетно-испытательного бюро, вып. 6, 1918 г.

Под условием, чтобы осаждение не происходило вплоть до частиц наибольшего гидравлического размера, будем иметь постоянство левой части этого уравнения; поэтому и правая часть будет постоянна и мы найдем линейную связь между d и v:

$$d = Bv. \tag{37}$$

Эта формула выведена в предположении, что центры вихревых шнуров, прилегающих к дну, неподвижны. На самом деле они должны перемещаться со скоростью

$$\frac{2q}{b^2}b = \frac{2q}{b},$$

для того чтобы частицы жидкости, непосредственно прилегающие ко дну, не имели скорости, т. е. чтобы эллиптические шнуры двигались по дну наподобие гусеничных тракторов. В силу этого обстоятельства действительная средняя скорость будет более той, которая стоит в формуле (37), и мы должны будем подставить в нее

$$\left(v - \frac{2q}{b}\right),$$

где q и b зависят от шероховатости дна и наибольшего гидравлического размера неосаждаемых частиц. Таким образом получается формула:

$$d = B\left(v - \frac{2q}{b}\right), \tag{38}$$

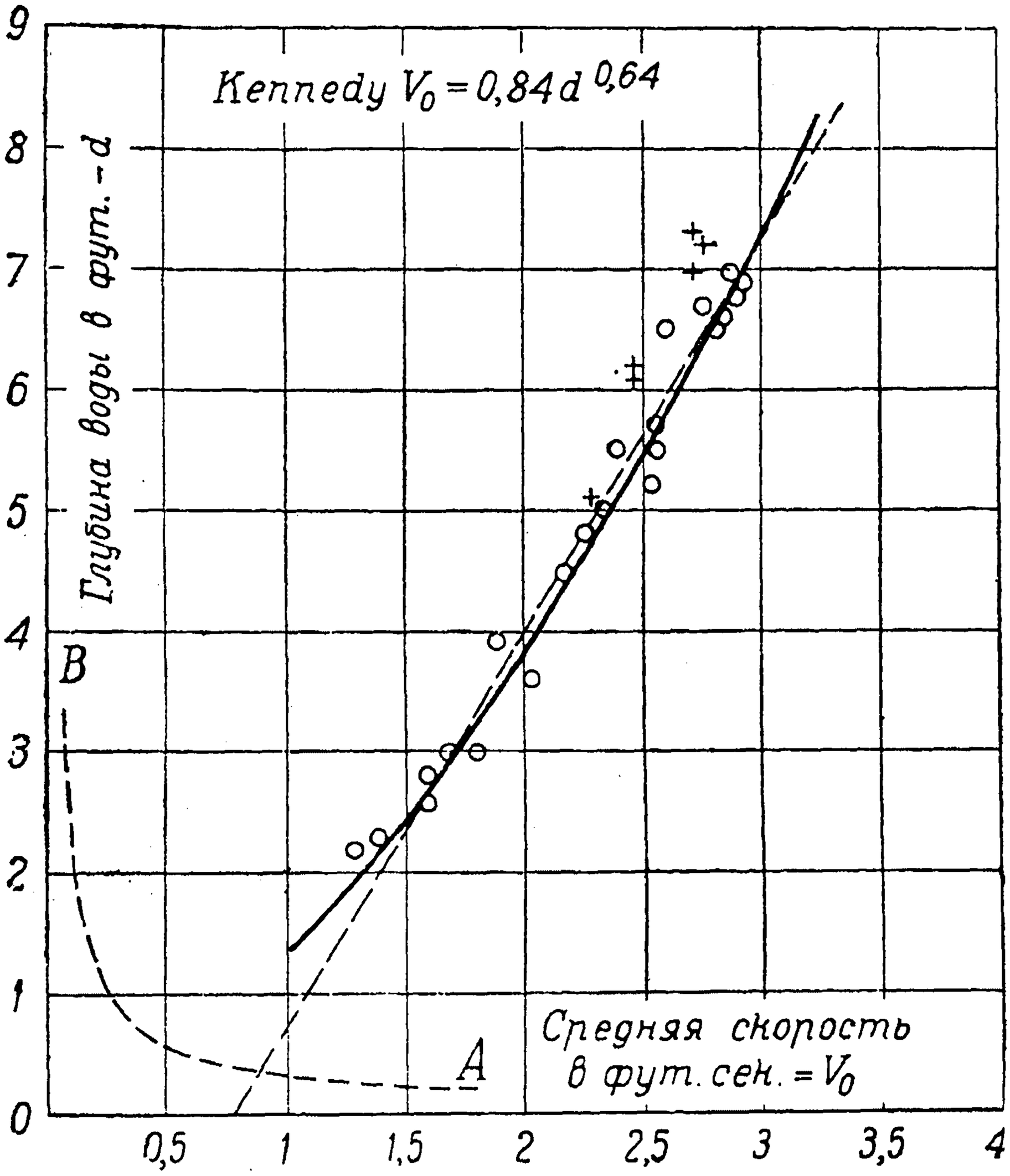
которая по нашему мнению должна бы заменить степенную формулу Кеннеди:

$$v = 0{,}87d^{0{,}64}. \tag{39}$$

Эта формула была выведена из ряда наблюдений над ирригационными каналами Индии, причем выбирались каналы, не подвергавшиеся заилению, и определялись их средняя скорость v и глубина d.

На фиг. 9 дан график кривой Кеннеди OC. По оси абсцисс откладывается средняя скорость v, а по оси ординат — глу-

бина канала d. Легко усмотреть, что изгиб найденной кривой охарактеризовался, главным образом, желанием провести ее через начало координат; между тем около этого начала нет



Фиг. 9.

наблюденных точек. Да они и не могли бы получиться, так как до перехода через Рейнольдсово число непременно происходит заиление, а на основании формулы (30) точки нашего графика, перешедшие за число Рейнольдса, лежат за некоторой гиперболой BA, удовлетворяющей уравнению:

$$vd = \frac{\mu R}{\rho}. \tag{40}$$

Все же точки наблюдения, расположенные над гиперболой, весьма близко лежат к прямой AD, пересекающей ось абсцисс в некоторой точке D.

Таким образом выведенное нами линейное соотношение (36) находит оправдание на графике Кеннеди. Отрезок OD, согласно нашей теории, будет по формуле (35):

$$OD = \frac{2g}{b} = \frac{mg}{k}\ \frac{a}{b}. \qquad (41)$$

Для определения $\frac{a}{b}$ надо заняться обстоятельным изучением колебания и направления скорости в данной точке жидкости.

Эта статья была сначала отлитографирована в „Трудах Центрального аэрогидродинамического института при Научно-техническом отделе ВСНХ“, вып. 1, 1919, а потом напечатана в НКЗ, Опытно-мелиоративная часть, вып. 30, 1923 г. *Прим. ред.*

ON SNOWDRIFTS AND ON SILTING OF RIVERS

In his second article on snowdrifts Prof. Joukowsky makes a more searching analysis of the phenomenon, considering not only the lines of flow but also the motion of snowflakes near the obstacle.

On the basis of tests of Eiffel and of Lukianov on the one hand and of Stokes's formula on the other hand, the resistance of a liquid to the motion of small particles is, at small velocities, directly proportional to velocity. An apparatus used for the measurement of the hydraulic velocity $\frac{mg}{k}$, i. e. of the velocity of a particle of weight mg, falling with a uniform velocity in a resting liquid, is shown in Fig. 1 (the Kennedy recorder).

Assuming the resistance of the liquid to vary directly as velocity of the moving particle, Prof. Joukowsky studies the motion of a snowflake near the critical point, at which the velocity of wind is zero. The critical points may be of two kinds. In the vicinity of a critical point of the first kind the lines of flow are hyperbolas having common asymptotes (Fig. 2), and the flow function is $\psi = -Ax'y'$, the oblique axes x' and y' being directed along the asymptotes; in the vicinity of a critical point of the second kind the lines of flow are similar ellipses, and the current-function is $\psi = A\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$.

In front of the obstacle, there is formed a critical point of the first kind, one of the asymptotes coinciding with the surface of the ground; in the rear of the obstacle is formed a critical point of the second kind.

In the first case the differential equations of motion of a particle have the form (3). In the integrals (4) and (2) the arbitrary

constants are determined by the condition that at $t = 0$ the particle having the x-coordinate equal to x_0 slides along the ground with the velocity of wind and is lifted with a velocity v_0.

A peculiarity of the integral (12) expressing x in function of time is that at the instant $t = \tau$, determined by equation (13), the abscissae of all points for which are satisfied the initial conditions stated above become epual, whatever the initial abscissa x_0. Hence, if $t = \tau$ corresponds to the instant at which the falling particles come in contact with the ground, all snowflakes will fall at the same place whatever the value of x_0 at the instant when they were lifted, and there will be formed a mound. As the equation (13) is satisfied by all values of $\beta t = \beta\tau + n\pi$ where n is an integer, there will be formed in front of the obstacle a number of mounds determined by abscissae (14).

The mound nearest to the obstacle and the largest of all has the abscissa $\frac{mg\cos\alpha}{Ak}$.

In the second case the differential equations of motion of the snowflakes have the form (18). The general solutions are represented by the sum of integrals (24) and (26). The motion of a snowflake is composed of two motions. The first motion is along a path having the form of an ellipse concentric with and similar to the lines of flow, having indeterminately increasing axes, and depending on the arbitrary constant A; the second motion is along a similar ellipse having the centre displaced along the x-axis to the left, to the point F, the distance OF being equal to $\frac{mg}{k}\frac{a^2}{2g}$, and the semi-axes diminishing and tending to zero.

If $A \neq 0$ a snowflake moving along an ellipse having increasing axes is thrown out of the elliptic vortex. If the initial conditions make A equal to zero, the snowflake moving along an ellipse with diminishing axes describes a spiral-shaped path and approaches the point F, as shown in Fig. 7; at F fhe snowflake will be in equilibrium. Thus the snowflakes are sucked in by the vortex, and in the rear of the obstacle is formed a mound of snow.

The above property of the vortex enables Prof. Joukowsky to solve the problem of silting of canals, assuming the water in the canal to be a seat of such elliptic vortices (Fig. 8), able to sustain solid particles. Expressing the condition that the immersed solid particles near the bottom are prevented by an elliptic vortex from falling on the bottom, Prof. Joukowsky obtains a linear relationship between the mean velocity of flow, v, and the channel depth, d

$$d = B\left(v - \frac{2q}{b}\right),$$

where B, q, b depend on the viscosity of water, on the roughness of the bottom, and on the largest hydraulic dimension of suspended particles. This formula differs from that which was obtained by Kennedy (39) as a result of observations upon irrigation channels in India.

To show the agreement between theory and observations, in Fig. 8 is given a comparison of the graph of Kennedy's curve with that of the relationship obtained by Prof. Joukowsky.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции 5

Случай движения жидкой площади по инерции 9

Резюме 14

Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости 15

Резюме 20

О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью . 21

Глава I. **Вспомогательные теоремы** 25

§ 1. Циркуляция скорости. Теорема Стокса 26

§ 2. Главный контур и главная циркуляция. Теорема Гельмгольца 27

§ 3. Теорема Томсона 31

§ 4. Выражение суммы элементарных работ количеств движения частиц жидкости, заключенной в односвязной и многосвязной полостях, через интегралы по поверхности 32

Движение жидкости, наполняющий полость движущегося твердого тела 34

§ 5. Потенциал скоростей частиц жидкости, движущейся внутри неподвижной полости 34

§ 6. Влияние на внутреннее движение жидкости движения полости. Потенциал скоростей жидкости при вращении полости. Относительная скорость жидкости и ее maximum . . . 35

§ 7. Гидродинамическое давление жидкости в полости. 41

Движение твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы . . 43

§ 8. Постановка задачи. Возможность разложения движения рассматриваемой системы на движение около центра тяжести и поступательное движение . 43

§ 9. Формулы проекций главного момента количеств движения полости и заключенной в ней жидкости 44

§ 10. Диференциальные уравнения движения тела с полостями, наполненными жидкостью. Эквивалентные тела. Гироскопический эффект жидких масс в случае многосвязных полостей 48

Метод Неймана 52
§ 11. Вывод диференциальных уравнений предыдущего параграфа методом Неймана 52
Глава II. **Эллипсоидальная полость** 59
§ 12. Эллипсоидальная полость. Эллиптическое вращение. **Цилиндрические полости** . . 59 65
§ 13. Направление главных осей инерции эквивалентного тела 65
§ 14. Общие формулы для относительных скоростей частиц жидкости и моментов инерции эквивалентных тел при вращении около оси, параллельной образующим цилиндра . 66
§ 15. Полости в форме эллиптического цилиндра и треугольной призмы 68
§ 16. Полости с контуром поперечного сечения в виде двухсофокусных эллипсов 71
§ 17. Полости с поперечным сечением в виде кругового сектора 76
§ 18. Общие формулы для определения скоростей частиц жидкости и моментов инерции эквивалентных тел при вращении около оси, перпендикулярной образующим 79
§ 19. Полость в виде прямоугольного параллелепипеда 82
§ 20. Полость, имеющая форму круглого цилиндра . . . 84
О полостях, имеющих форму тел вращения 90
§ 21. Вращение около оси полости. Вращение около оси, перпендикулярной к оси полости. Потенциал скоростей. Диференциальные уравнения линий тока и моменты инерции эквивалентных тел. Уравнения для присоединенных сферических функций первого рода и их некоторые свойства 90
§ 22. Коническая полость . . . 96
§ 23. Односвязная и кольцевидная полости, ограниченные гиперболоидами . . . 101
§ 24. Полость в форме полусферы 105
О многосвязных полостях . . 112
§ 25. Геометрическая интерпретация движения вокруг неподвижной точки твердого тела с присоединенным гироскопом . . . 112
§ 26. Замечание по поводу определения проекций главного момента количеств движения частиц жидкости . 117
§ 27. Бесконечно тонкая замкнутая трубка произвольного вида и сечения . . . 117
§ 28. Полости вращения . . . 121
Глава III. **Случаи вихревого движения жидкости в полостях движущегося тела** 122
§ 29. Определение скоростей части жидкости при неподвижном теле 122
§ 30. Внутреннее движение жидкости в случае вращающейся полости. Диференциальные уравнения задачи 124
§ 31. Определение гидродинамического давления внутри полости 130

§ 32. Цилиндрическая полость, вращающаяся вокруг оси, параллельной образующим 132
§ 33. Полость в форме эллипсоида вращения 134
Решение задачи, принимая во внимание трение жидкости 147
§ 34. Диференциальные уравнения задачи и формула для гидродинамического давления 147
§ 35. Задача Гельмгольца о колебаниях около неподвижной оси шара, наполненного трущейся жидкостью. 153
§ 36. Задача Гельмгольца о колебаниях около неподвижной оси шара, наполненного трущейся жидкостью. 159
§ 37. Решение задачи § 27, принимая во внимание трение 166
§ 38. Теорема о предельном движении, которое получает полость произвольной формы по прошествии весьма большого времени.
Резюме 182
Решение одной задачи гидростатики 187
Резюме 194
Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока 195
§ 1. Краткий обзор литературы вопроса 195
§ 2. Изложение метода Кирхгоффа 198
§ 3. Изложение метода автора. 203
§ 4. Истечение жидкости из сосудов, ограниченных двумя плоскими бесконечными симметричными стенками 211
§ 5. Удар беспредельного потока о симметричный клин, ось которого направлена по течению потока . . . .
§ 6. Истечение из сосудов, 218
ограниченных двумя плоскими бесконечными несимметричными стенками 223
§ 7. Удар беспредельного потока о несимметрично относительно него расположенный неравнобокий клин 234
§ 8. Удар струи о симметрично расположенный относительно нее равнобокий клин 241
§ 9. О соударении двух струй жидкости 246
§ 10. Удар бесконечно широкого потока о пластинку, поставленную при его свободной поверхности . . . 253
§ 11. Истечение жидкости из дна сосуда, прикрытого сверху и имеющего бесконечную ширину и конечную вышину 259
§ 12. Об ударе беспредельного потока жидкости о ломаную пластинку в случае, когда жидкость вступает на нее по направлению края 263
§ 13. Истечение жидкости из сосуда конечной ширины и бесконечно большой длины 273
§ 14. Удар потока, заключенного между двумя парал-

дельными стенками, на симметрично относительно него расположенный равнобокий клин 281
§ 15. Удар беспредельного потока жидкости в прямоугольный сосуд, поставленный отверстием навстречу потока 285
§ 16. Истечение жидкости из бесконечного сосуда в наставку 294
§ 17. Об ударе потока жидкости о пластинку, прикрывающую вход в канал с параллельными стенками 302
§ 18. Удар о пластинку струи жидкости, выходящей из канала с параллельными стенками 306
§ 19. Концентрирование струи жидкости 313
§ 20. Теоретические данные для исследования действия турбин 319
§ 21. Заключение 340
Прибавление. Проф. С. А. Чаплыгин и А. П. Минаков. **Теоретический расчет действия турбины** (Обобщение решения Н. Е. Жуковского) 342
Резюме 365
Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока 371
§ 1. 371
§ 2. } Движение весомой жид-
§ 3. } кости . . . . . 371—373
§ 4. } Движение жидкости при капиллярных силах на-
§ 5. } тяжения на поверхности струи . . . . . 377—378
§ 6. 385
Резюме 386
К вопросу о разрезании вихревых шнуров . . . 387
Резюме 405
Заметка о движении вихревых колец 406
Примечания А. П. Минакова 413
Резюме 418
О подсасывающем действии потока воздуха на пластинку 420
Резюме 431
О замене диска Релея продолговатой пластинкой 433
Резюме 438
О снежных заносах. Статья первая 439
Резюме 449
О снежных заносах и заилении рек 451
Резюме 475

CONTENTS

Editorial Preface. 9

A Case of Motion of a Liquid Lamina due to ynertia 9

Summary 14

Impact of Two Balls of Which One is Floating in a Liquid 15

Summary 20

Of the Motion of a Rigid Body Having Cavities Filled with a Homogeneous Liquid 21

Chapter I. **Auxiliary Theorems** 25

§ 1. Velocity circulation. Stokes's Theorem 27

§ 2. Principal contour and principal circulation. Helmholtz's theorem 31

§ 3. Thomson's theorem . . . 32

§ 4. Representation by surface integrals of the sum of elementary works of momenta of particles of a liquid contained in singlyconnected and in multiplyconnected cavities 34

Motion of a Liquid Filling a Cavity Within a Moving Rigid Body 34

§ 5. Velocity potential of particles of a liquid moving within a stationary cavity. 34

§ 6. Effect of motion of the cavity on the motion of the liquid contained within. Velocity potential of the liquid in the case when the cavity is rotating. Relative velocity of the liquid and its maximum 35

§ 7. Hydrodynamical pressure of the liquid within the cavity 41

Motion of a Rigid Body Having Cavities Filled with a Liquid. . 43

§ 8. Statement of the problem. Possibility of resolving the motion of the system under consideration into the motion about the centre of gravity and the motion of translation 43

§ 9. Formulae for the projections of the principal moment of momentum of the cavity and the liquid contained within 44

§ 10. Differential equations of motion of a body having cavities filled with liquid masses, in the case of multiply-connected cavities . 48

Neumann's method 52

§ 11. Derivation by Neumann's method of the differential equations of the preceding paragraph 52

Chapter II. **Elliptic Cavity.** 59
§ 12. Ellipsoidal cavity. Elliptic motion 59
Cylindrical Cavities 65
§ 13. Directions of the principal axes of inertia of the equivalent body 65
§ 14. General formulae for the relative velocities of particles of the liquid and for the moments of inertia of equivalent bodies, in the case of a rotation about an axis parallel to the generators of the cylinder . 66
§ 15. Cavities having the shape of an elliptic cylinder and of a triangular prism . . 68
§ 16. Cavities of which the cross-section has the shape of two confocal ellipses . . . 71
§ 17. Cavities of which the cross-section has the shape of a circular sector 76
§ 18. General formulae for the velocities of particles of the liquid and for the moments of inertia of the equivalent bodies in the case of rotation about an axis at right angles to the generators 79
§ 19. Cavity having the shape of a rectangular parallelepiped 82
§ 20. Cavity having the shape of a circular cylinder . . 81
Cavities Having the Shape of Solids of Revolution 90
§ 21. Rotation about the axis of the cavity. Rotation about the axis at right angles to the axis of the cavity. The velocity potential. Differential equations of the lines of flow and the moments of inertia of equivalent bodies. Equations for the associated spherical functions of the first kind and some of their properties 90
§ 22. Conical cavity 96
§ 23. Singly-connected and thoroidal cavities bounded by hyperboloids 101
24. Semispherical cavity . . . 105
Multiply-connected Cavities . . 112
§ 25. Geometrical interpretation of the motion about a fixed point of a solid with a gyroscope attached to it . 112
§ 26. A note on the determination of the projections of the principal moment of momentum of particles of a liquid 117
§ 27. Infinitely thin closed tube of arbitrary shape and cross-section 117
§ 28. Cavities of revolution . . 121
Chapter III. **Case of a Vortex Motion of a Liquid Within the Cavities of a Moving Body.** 122
§ 29. Determination of velocities of particles of the liquid when the body is fixed . . 122
§ 30. Internal motion of the liquid in the case of a rotating cavity. Differential equations of the problem . 124
§ 31. Determination of the hydrodynamical pressure within the cavity 130
§ 32. Cylindrical cavity rotating about an axis parallel to the generators 132

§ 33. Cavity in the shape of an ellipsoid of revolution . . 134

Solution of the Problem When Friction of the Liquid is Taken Into Account 147

§ 34. Differential equations of the problem and the formula for hydrodynamical pressure 147

§ 35. Helmholtz's problem of oscillations about a fixed axis of a sphere filled with a viscous liquid 153

§ 36. Helmholtz's problem of oscillations about a fixed axis of a sphere filled with a viscous liquid 159

§ 37. Solution of the problem of § 27 when friction is taken into account 166

§ 38. Theorem of the ultimate motion of a cavity of arbitrary shape after the lapse of a very long period of time 174

Summary 182

Solution of a Problem in Hydrostatics 187

Summary 194

A Modification of Kirchhoff's Mathod of Determining a Twodimensional Motion of a Fluid, Given a Constant Velocity Along an Unknown Stream-Line. 195

§ 1. A brief review of literature on the subject . . . 195

§ 2. A statement of Kirchhoff's method 198

§ 3. A statement of the author's method 203

§ 4. Efflux of a fluid from vessels bounded by two infinite symmetrical flat walls. 211

§ 5. Impact of an infinite stream against a symmetrical wedge of which the axis is in the direction of flow . . . 218

§ 6. Efflux from vessels bounded by two infinite unsymmetrical flat walls 223

§ 7. Impact of an infinite stream against a scalene wedge unsymmetrically placed with respect to the flow . 234

§ 8. Impact of a jet against an equilateral wedge placed symmetrically with respect to the jet 241

§ 9. Impact of two jets striking against each other . 246

§ 10. Impact of a flow of infinite width against a plate placed at the free surface . 253

§ 11. Efflux of a fluid through the bottom of a vessel of infinite width and of finite height and closed on top. 259

§ 12. On the impact of an infinite stream against an angle plate, the fluid impinging on the plate along the edge 263

§ 13. Efflux from a vessel of finite width and of infinite length 273

§ 14. Impact of a stream bounded by two parallel walls against an equilateral wedge placed symmetrically with respect to the flow . 281

§ 15. Impact of an infinite stream against a rectangular ves-

sel placed with its opening facing the flow . . . 285
§ 16. Efflux through a mouthpiece from a vessel of infinite dimensions 294
§ 17. On the impact of a fluid against a plate obstructing the entrance of a channel with parallel walls 302
§ 18. Impact of a jet of fluid issuing from a channel with parallel walls 306
§ 19. Concentration of a jet of fluid 313
§ 20. Theoretical data for analysing the action of turbines 319
§ 21. Conclusion 340
Appendix. „On the Action of the Stream in a Turbine". (A generalization of the solution given by N. E. Joukowsky) Prof. S. A. Tchapligin and A. P. Minakoff . . . 342
Summary 365

Determination of the Motion of a Fluid for any Condition Given on a Stream-Line 371
§ 1. 371
§ 2. } Motion of a heavy fluid 371—373
§ 3. }
§ 4. } Motion of a fluid in the presence of capillary tension on the surface of the jet . . . . . 377—378
§ 5. }
§ 6. 385
Summary 386

On the Problem of Cutting of Vortex Filaments. 387
Summary 405
A Note on the Motion of Vortex Rings 406
Summary 418
On Suction Exerted on a Plate by a Flow of Air . 420
Summary 431
On Substitution of an Elongated Plate for Rayleigh's Disc 433
Summary 438
On Snowdrifts
Article I 439
Summary 449
On Snowdrifts and on Silting of Rivers 451
Summary 475

Редактор Ф. С. Шаховской.

Техн. редактор А. Н. Саварн.
Сдано в набор 4/I 1935 г.
Подписано к печ. 30/V 1936 г.
Изд. № 11. Автор. дог. № 31.
Индекс 20-5-4. Тираж 3000. Кол. бум. л. 15¼. Тип. зн. в 1 бум. л. 89.088. Уч.-авт. л. 23,3. Формат бум. 62×94¼₁₆. Уполномоченный Главлита В-40682. Заказ № 17.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
20	1 сверху	OE... FLOATING	OF... FLOATING	тип.
58	12 „	получения тела	получения скоростей тела	корр.
78	11 „	равна; нулю	равна нулю;	тип.
445	11 снизу	группа	групп	„
445	9 „	направлена	направлены	